UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRÍA PLANA Y EL MÉTODO DEDUCTIVO UN ENFOQUE PARA EL BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

S O N I A J I M É N E Z S Á N C H E Z

Tutor: FÍS. MAT. VÍCTOR MANUEL PÉREZ TORRES

2006

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Geometría Plana y el Método Deductivo, un Enfoque para Bachillerato."

realizado por Jiménez Sánchez Sonia

con número de cuenta 07740119-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	Fís. Mat. Víctor Manuel Pérez Torres	
Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz	
Propietario	Mat. Alejandra Georgina Bravo Ortíz	
Suplente	M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez	
Suplente	Dra. María de la Paz Álvarez Scherer	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE

Quiero dedicar este trabajo a todas las personas que quiero y aprecio:

A Ale y Sara, mis hijas, por su comprensión durante la elaboración de estas notas y por ser lo que más quiero.

A mi madre (†), por su cariño y solidaridad infinita.

A mi padre (†) por el apoyo que siempre me brindó.

A Alfredo por el tiempo que compartimos y por la comprensión que me tuvo.

A mis hermanos, Rosalba, Alma, Hugo, Sergio y Héctor, porque siempre he contado con ellos.

A mis compañeros de la Corriente en Lucha por su decisión y terquedad de transformar la situación de miseria de nuestro pueblo, ..., por su incansable espíritu de lucha.

A los cecehacheros porque siempre están allí para recordarme que hay que seguir resistiendo.

A mis amigos y compañeros cuya lista sería muy larga.

ÍNDICE

PRÓLOGO

El presente trabajo pretende dar algunos elementos de cómo abordar la deducción matemática a nivel de bachillerato. En los capítulos II, III y IV es donde está desarrollada la propuesta.

He elegido la geometría porque es una herramienta ya manejada por los estudiantes pero además porque históricamente así fue como ocurrió el desarrollo del método deductivo. Inicio con un problema llamado de motivación con el objetivo de que el estudiante vea una aplicación práctica de la matemática y no aparezca ésta totalmente desligada de la realidad. Posteriormente propongo una serie de actividades que he llamado experimentos con la idea es que el estudiante primero descubra o redescubra las propiedades geométricas y luego las demuestre.

El objetivo con estos experimentos es que lo que posteriormente se va a demostrar no aparezca como inventado sino como algo que los estudiantes tengan muy hecho suyo. Se pasa después a la formalización de los conceptos y a la demostración de los teoremas para culminar con una serie de problemas donde se utilizaran estos teoremas y se demostrarán otros.

La forma en que se trabajan estos problemas es: primero se presentan los enunciados y si el estudiante no logró resolverlos, vienen inmediatamente después las sugerencias, buscando que el estudiante no se desanime si no puede resolver algún problema pero si esto no bastara, vienen sus soluciones para que el estudiante adquiera cierta práctica y no se sienta frustrado al no conocer la forma de resolverlos. Después de todo la solución de un problema ni a los amantes de la matemática nos suelen salir de inmediato.

La idea original era presentar con esta misma estructura los temas de congruencia y semejanza, sin embargo, el tiempo se ha venido encima y no ha sido posible terminar esta tarea. Se ha terminado el tiempo en dos sentidos, en uno porque ya había que entregar esta tesis pero además porque las imposiciones de los planes de estudio hechos por las autoridades universitarias borraron el método deductivo como una parte importante de la enseñanza a nivel medio superior. Así, ya no fue posible seguir trabajando esta propuesta con los estudiantes del CCH.

No debo obviar, sin embargo, que entre los propios profesores hay una discusión de si se debe *enseñar* el método deductivo a nivel bachillerato, conque profundidad y cómo. Discusión que no se ha podido dar como se debiera dado las limitaciones impuestas por las autoridades universitarias y por las terribles condiciones de trabajo a las que estamos sometidos los profesores, particularmente los del CCH. Yo por supuesto soy partidaria de que si debemos enseñar el método deductivo a nivel que propongo en estas notas.

Dadas esta situación en el capítulo V sólo se enuncian algunos axiomas y definiciones para pasar directamente a la solución de problemas.

La secuencia de estudiar primero ángulos y sus relaciones, congruencia y semejanza esta basado en el viejo plan de estudios del CCH y como estas notas inicialmente pretendían servir de apoyo a esos cursos fueron diseñadas de esta forma. En los actuales planes de estudio se aborda esta temática y el método deductivo en el segundo semestre, pero no se les da ni el tiempo ni la profundidad que en mi opinión debieran dárseles. Además de que en este nivel la *madurez matemática* alcanzada por los estudiantes no es suficiente para tal objetivo.

La propuesta de los capítulos II, III y IV y con la misma estructura los temas de congruencia y semejanza fueron trabajados con los estudiantes del CCH de tercer semestre, en mi opinión con resultados muy satisfactorios.

El capítulo I pretendía presentarlo junto con una explicación somera de lo que es el método deductivo, pero dado que el tiempo no permitió concluirlo y dada la importancia de que el estudiante trabaje con el método inductivo he presentado en este capítulo varios problemas donde se trabaja este método.

Pretendía también presentar una síntesis del surgimiento de la geometría y su desarrollo histórico hasta los griegos, pero dado que tampoco ha sido posible terminar esta parte, en los capítulos VI y VII se proponen sólo problemas planteados y resueltos por estos pueblos de la antigüedad.

Bueno he aquí un trabajo inconcluso pero que ya no puede esperar más, sobre todo por motivos burocráticos, y aunque modesto espero sirva para que los estudiantes del bachillerato estudien, aprendan, se interesen y quieran a las matemáticas. ¡Propósitos muy difíciles de lograr!

Finalmente quiero hacer tres agradecimientos: Uno muy especial para mi madre que aunque ya falleció quiero decirlo públicamente, sin su apoyo jamás hubiera sido posible este trabajo. A María del Carmen Martínez por haberme apoyado en la captura de estas notas a pesar del enorme trabajo que tiene encima. A Víctor, por su dedicación y apoyo para corregir éstas notas; a Julieta; Paco; Alejandra y Paz por la paciencia para revisarlas y mejorarlas.

Sonia J. S.

CAPÍTULO I
EL MÉTODO INDUCTIVO

§ 1

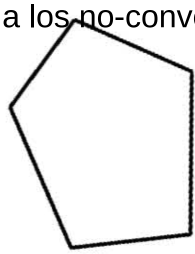
En la geometría, como en toda ciencia, en su inicio requirió de la experimentación para descubrir las propiedades y relaciones geométricas de los objetos que nos rodean y sólo después de un largo camino llegó a la formalización de conceptos. Una forma de obtener este conocimiento empírico es mediante el empleo de un razonamiento conocido como inductivo. El razonamiento inductivo es uno de los más usados en la vida cotidiana y es un importante instrumento en matemáticas.

El método inductivo hace uso del trabajo con numerosos casos particulares, de los cuales observa, busca, abstrae, patrones generales. Dichos patrones llevan a suponer la existencia de una regla de aplicación general. Sin embargo, no podemos tener la certeza de que el patrón encontrado siempre será válido. Así por ejemplo, si lanzamos un dado en seis ocasiones y cae la cara con dos puntos, podríamos pensar que hemos encontrado una regla general y que esto ocurrirá la próxima vez que lancemos el dado, ¿pero estamos seguros que pasará lo mismo en la séptima tirada? No, lo único que podemos decir es que es probable que eso ocurra, pero no podemos garantizar nada.

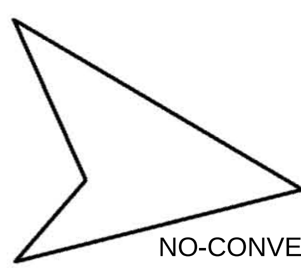
Así pues, el método inductivo consiste en observar los fenómenos o problemas que se presentan, resolviéndolos con base a la analogía, la intuición, la observación, la experimentación u otro método empírico, y encontrar que al aplicar la misma solución a casos particulares, existe una cierta regularidad y coherencia la cual da como resultado un modelo. Las conclusiones así obtenidas son sólo probables y para aceptarlas como regla general debemos *demostrarlas* mediante el razonamiento deductivo, el cual estudiaremos en los siguientes capítulos.

Vamos a trabajar con la inducción en geometría a través de cuatro problemas que a continuación te propongo. Te sugiero que obtengas tus propias soluciones para que después las compares con las que se te presentan.

En adelante, cuando hablemos de polígonos nos referiremos sólo a polígonos convexos (todos aquellos cuyos ángulos interiores son menores de 180°), excluyendo a los no-convexos.



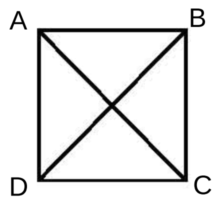
CONVEXO

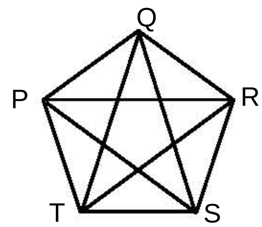


NO-CONVEXO

Problema 1.

Una diagonal de un polígono es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos. Por ejemplo, en el cuadrado **ABCD** sus diagonales son: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Y en el pentágono **PQRST**: $\overline{PR}$, $\overline{PS}$, $\overline{QS}$, $\overline{QT}$ y $\overline{RT}$[1]





a) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un triángulo?
b) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un cuadrado?
c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un pentágono?
d) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un hexágono?

Para responder las preguntas anteriores traza los dibujos correspondientes y cuenta las diagonales.

e) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un polígono de: 7, 8 y 20 lados? ¿Y de uno de 2007 lados?
f) ¿Podrías encontrar una fórmula, es decir, un modelo matemático, que especifica el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice para un polígono de **n** lados?

Problema 2.

Vamos a considerar cuántos segmentos se pueden formar al unir dos o más puntos. Para encontrar el resultado, contesta cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos segmentos se pueden formar uniendo dos puntos?
b) Si los puntos no son colineales, es decir, no están sobre la misma recta, ¿cuántos segmentos se pueden formar si se tienen?:
   i) Tres puntos.
   ii) Cuatro puntos.
   iii) Cinco puntos.
   iv) Seis puntos.
   v) Diez puntos.
   vi) Trece puntos.
   vii) Mil puntos.
   viii) Encuentra una fórmula o modelo matemático para especificar el número de segmentos que se pueden formar con **n** puntos.

---

[1] En geometría para simbolizar al segmento de recta que va de un punto **A** a un punto **B** se escribe $\overline{AB}$

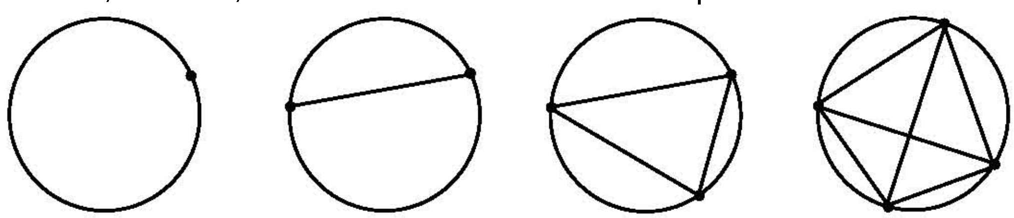
Te sugiero que hagas dibujos y dispongas los puntos como si fueran los vértices de un polígono.

c) Contesta las mismas preguntas del inciso anterior considerando que los puntos son colineales.
d) Ahora, considera que los puntos se encuentran colocados de cualquier manera y responde las preguntas del inciso b.
e) ¿En qué difieren los resultados que encontraste?

Problema 3.
¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de **n** lados?

Para contestar la pregunta, te sugerimos que analices qué ocurre con un polígono de 3, 4, 5, 6,…, lados, con el fin de que puedas inducir el modelo que te pueda dar la respuesta correcta.

Problema 4.
¿Podrías determinar el número máximo de regiones en que se puede dividir un círculo mediante segmentos de recta determinadas por puntos **n** en una circunferencia, con la condición de que tres o más segmentos no sean concurrentes, es decir, no se intersecten en un mismo punto?

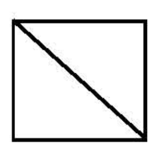


A continuación te presentamos las respuestas de los cuatro problemas, trataremos de ir induciendo la solución para cada caso.

SOLUCIONES.
Problema 1.
Para el triángulo

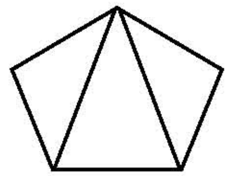
CERO DIAGONALES

Para el cuadrado



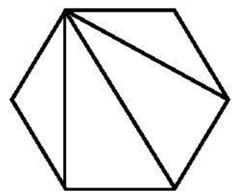
UNA DIAGONAL

En el pentágono



DOS DIAGONALES

En el hexágono



TRES DIAGONALES

Para organizar nuestros resultados dispongámoslos en una tabla:

NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO	NÚMERO DE DIAGONALES
3	0
4	1
5	2
6	3

Quizá ya puedas observar la relación que existe entre el número de lados del polígono y el número de diagonales. Si no es así puedes seguir haciendo dibujos.

Completemos la tabla.

NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO	NÚMERO DE DIAGONALES
3	0
4	1
5	2
6	3
7	4
…	…
15	12
…	…
20	17
...	...
2007	2004

Ahora es muy fácil responder la última pregunta.

Para cuando nuestro polígono tiene **n** lados el número de diagonales que podemos trazar es **n - 3** diagonales.

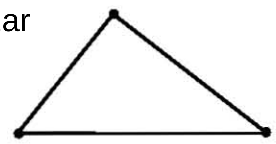
En general, cuando usamos el método inductivo conviene resumir nuestros resultados en una tabla, si esto es posible.

Conclusión: a un polígono de n lados se le pueden trazar desde un mismo vértice n - 3 diagonales.

Problema 2.
a) Por dos puntos podemos trazar

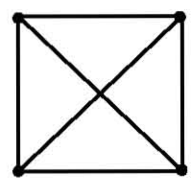
UN SEGMENTO DE RECTA

b) Por tres puntos podemos trazar



TRES SEGMENTOS

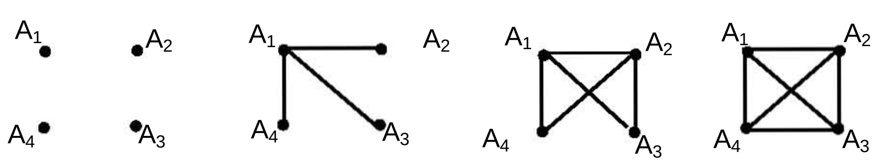
Por cuatro puntos podemos trazar.



SEIS SEGMENTOS

Aquí es importante cómo se lleva la cuenta de los segmentos. ¿Podrías decir cómo contar el número de segmentos trazados desde cada punto?

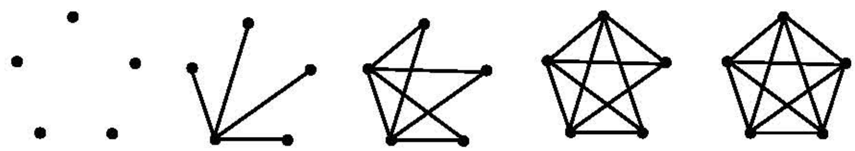
Una manera de hacerlo te lo ilustramos en la figura. Comenzamos trazando desde un punto, $\mathbf{A_1}$, un segmento hacia cada uno de los tres puntos restantes, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ y $\mathbf{A_4}$. Luego, desde $\mathbf{A_2}$, trazamos segmentos hacia $\mathbf{A_3}$ y $\mathbf{A_4}$, los dos puntos en que no está trazado segmento alguno. Finalmente, desde $\mathbf{A_3}$ hacia $\mathbf{A_4}$ trazamos el segmento que falta.



El número total de segmentos, siguiendo el proceso señalado, se puede representar como la suma:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Dados cinco puntos, siguiendo el procedimiento anterior, trazamos primero cuatro segmentos, luego tres, a continuación dos y finalmente uno, como se muestra.



El número total de segmentos, se obtiene al sumar:

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

Siguiendo la misma idea, dados seis puntos, el proceso anterior nos proporcionará, para el total de segmento, la suma:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

Para siete puntos, ya sería muy fácil calcularlo, realizando la suma:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Y si tenemos diez puntos el número total de segmentos que se pueden trazar lo obtendríamos al sumar:

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

Para 13 puntos, tendríamos que calcular la siguiente operación:

$$12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Así pues, para cuando se tienen 2007 puntos, la respuesta se obtiene al calcular:

$$2007 + 2006 + \ldots + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

Pero no cabe duda, que si el número de segmentos aumenta, calcular la suma se hace cada vez más latoso, por lo que es importante contestar la siguiente pregunta, para ello, resumiremos nuestros resultados en una tabla.

NUMERO DE PUNTOS	SUMA	NUMERO DE SEGMENTOS
2	1	1
3	2+1	3
4	3+2+1	6
5	4+3+2+1	10
6	5+4+3+2+1	15
7	6+5+4+3+2+1	21
…	…	…
10	10+9+8+7+6+5+4+3+2+1	45
…	…	…
13	12+11+10+...+4+3+2+1	78
…	…	…
2007	2007+2006+…+3+2+1	¿?

De la tabla podemos observar que dado un cierto número de puntos, para determinar el número de segmentos que se pueden trazar, basta realizar la suma de los números naturales consecutivos empezando en uno y hasta el número anterior al dado. Generalicemos esta idea.
¿Si tuviéramos **n** puntos qué suma tendríamos que obtener?

$$n - 1 + n - 2 + ... + 3 + 2 + 1$$

Y ¿a qué es igual esta suma?

Cuenta la historia que siendo aun niño, Gauss, famoso matemático alemán del siglo XIX, sumo éstos números de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{c}
\ 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\
+\ \underline{(n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) + ... + 3 + 2 + 1} \\
\ n + n + n + n + ... + n + n + n
\end{array}
$$

¿Cuántas veces se está sumando **n**? **n – 1**. Por tanto la suma anterior es igual a **n(n -1)**. Pero aquí se esta realizando doble vez la suma de los **n-1** primeros naturales, por lo que al resultado **n(n-1)**debemos dividirlo entre dos. De los cual obtenemos:

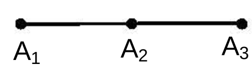
$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n - 3 + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

A esta fórmula se le llama la fórmula de Gauss.

Algunos estudiantes llegan al mismo modelo algebraico razonando de la siguiente manera: si tengo **n** puntos ¿Cuántos segmentos puedo trazar desde cada punto? Pues **n-1**, por lo que el total de segmentos trazados son **n(n-1)** pero como al trazar desde todos los puntos los estoy trazando doble vez, debo dividir entre dos, llegando al resultado anterior. Esta es una forma muy simplificada pero no cabe duda que tiene su interés ver el método de Gauss.

c) Consideremos ahora el caso en que todos los puntos están en una misma recta.

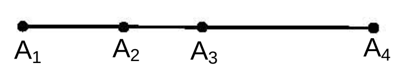
Si tenemos tres puntos, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, y $\mathbf{A_3}$, al trazar segmentos que unan dos puntos, tendremos tres: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_3}$.



Este resultado lo podemos representar mediante la suma

$$2+1 = 3$$

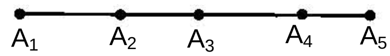
Si tenemos cuatro puntos, $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ y $\mathbf{A_4}$, al trazar los segmentos, obtendremos seis segmentos, a saber: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$; $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_4}$ y $\overline{A_3A_4}$.



La siguiente suma nos dará entonces el total de segmentos:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

¿Observas cómo vamos contando los segmentos?
Veamos, si lo hiciéramos para cinco puntos, **A_1**, **A_2**, **A_3**, **A_4** y **A_5**, los segmentos que podemos trazar son: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_1A_5}$; $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$; $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_3A_5}$ y $\overline{A_4A_5}$.



La suma a realizar entonces, para obtener el total de puntos es:

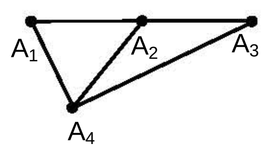
$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

¡Es exactamente la misma forma como contamos los segmentos en el caso anterior, por lo que obtenemos la misma suma!

d) Falta considerar el último caso, cuando tenemos puntos colocados de cualquier manera. ¿Crees qué cambie algo? Veamos:

Para cuando tenemos tres puntos, ya está resuelto, pues si no son colineales, lo estudiamos en el caso b, si lo son, lo resolvimos en el caso c. Entonces empecemos por cuatro puntos.

Consideremos los puntos **A_1**, **A_2**, **A_3** y **A_4** . Notemos que podemos hacer el mismo conteo, sin ningún problema. Los segmentos que podemos trazar son los mismos que en los casos anteriores: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$; $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_4}$ y $\overline{A_3A_4}$.



Y no importa el número de puntos que coloquemos, entonces podemos decir:

Conclusión: Dados n puntos se pueden formar $\frac{(n-1)n}{2}$ segmentos.

Probemos nuestra fórmula para los resultados que ya conocemos, por ejemplo para n = 10:

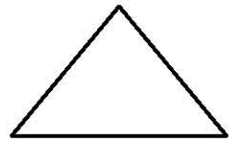
$$\frac{10(10-1)}{2} = 45$$

Para n = 5

$$\frac{5(5-1)}{2} = 10$$

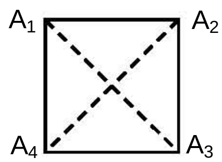
Los resultados son correctos.

Problema 3.
Si tenemos un triángulo podemos trazar



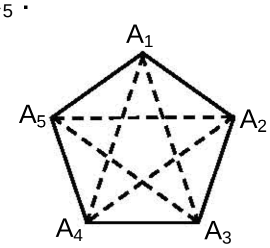
CERO DIAGONALES

Si tenemos un cuadrado podemos trazar las diagonales $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_2A_4}$.



DOS DIAGONALES

Si tenemos un pentágono podemos trazar desde el vértice **A_1** las diagonales $\overline{A_1A_3}$ y $\overline{A_1A_4}$, desde el vértice **A_2** las diagonales $\overline{A_2A_4}$ y $\overline{A_2A_5}$ y finalmente desde el vértice **A_3** la que nos falta, $\overline{A_3A_5}$.

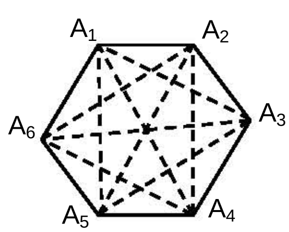


CINCO DIAGONALES

Nos interesa ir encontrando una secuencia ¿Cómo sería la suma mediante la cual obtendríamos el resultado anterior?

$$2 + 2 + 1 = 5$$

Si tuviéramos un hexágono podríamos trazar, desde el vértice **A_1**, las diagonales, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_1A_5}$; desde el vértice **A_2**, las diagonales, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$ y $\overline{A_2A_6}$; desde el vértice **A_3**, las diagonales, $\overline{A_3A_5}$ y $\overline{A_3A_6}$ y desde el **A_4**, la diagonal que nos falta $\overline{A_4A_6}$



NUEVE DIAGONALES

la suma que representaría el total de diagonales, sería

$$3 + 3 + 2 + 1 = 9$$

Siguiendo el mismo procedimiento, podemos saber cuantas diagonales trazar para un heptágono: desde el vértice $\mathbf{A_1}$ las diagonales, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_1A_5}$ y $\overline{A_1A_6}$; desde el vértice $\mathbf{A_2}$, las diagonales $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$ y $\overline{A_2A_6}$ y $\overline{A_2A_7}$; desde el vértice $\mathbf{A_3}$, las diagonales $\overline{A_3A_5}$ y $\overline{A_3A_6}$ y $\overline{A_3A_7}$; desde el vértice $\mathbf{A_4}$, las diagonales $\overline{A_4A_6}$ y $\overline{A_4A_7}$, finalmente desde el vértice $\mathbf{A_5}$ la diagonal $\overline{A_5A_7}$.

Así el número de diagonales que podemos trazar en un heptágono se puede obtener al calcular la suma: 4 + 4 + 3 +2 + 1 = 14

Usando inducción, calculamos la siguiente suma para obtener el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 15 lados:

$$12 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 90$$

Y para un polígono de 20 lados, realizaremos la suma:

$$17 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 +\ldots+ 3 + 2 + 1 = 170$$

Para contestar la pregunta cuando tenemos un polígono de 2007 lados, habría que sumar:

$$2004 + 2004 + 2003 + 2002 +...+ 3 + 2 + 1$$

Pero otra vez las sumas se nos vuelven a complicar, más vale que obtengamos un modelo algebraico. Para ello sinteticemos nuestra información en una tabla, notemos que para un polígono de cuatro lados, donde trazamos dos diagonales podemos descomponerlo en la suma: 1 + 1.

NUMERO DE LADOS DEL POLIGONO	SUMA	NUMERO DE DIAGONALES
3	0	0
4	1+1	2
5	2+2+1	5
6	3+3+2+1	9
7	4+4+3+2+1	14
15	12+12+11+10+...+3+2+1	90
20	17+17+16+15+14+...+3+2+1	166

De la tabla podemos observar que para calcular las diagonales que se pueden trazar en un polígono de cierto número de lados basta con realizar la suma de todas las diagonales posibles que se pueden trazar desde un vértice, que por el problema 1, sabemos que son el número de lados del polígono menos tres, más las que se pueden trazar del vértice consecutivo, que resulta ser el mismo número, más todos los naturales consecutivos menores al número anterior. Esto es:

Si tuviéramos un polígono con **n** lados para calcular el número de diagonales que se pueden trazar debemos obtener la suma:

$$n - 3 + n - 3 + n - 4 + n - 5 + ... + 3 + 2 + 1$$

Para encontrar a que es igual esta suma, notemos que es la misma suma que la que teníamos en el anterior problema, si no consideramos al primer término, sólo que hemos empezado en **n-3** para un polígono de **n** lados. ¿Cómo sería el modelo algebraico?

$$n-3+n-3+n-4+n-5+...+3+2+1=n-3+\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

Simplificando obtenemos: $n-3+\frac{(n-3)(n-2)}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$

Probemos nuestra fórmula para los resultados que ya conocemos:

n = 5: $\frac{5(5-3)}{2}=5$ ¡Bien!

n = 6: $\frac{6(6-3)}{2}=9$ ¡Perfecto!

Observa que también podemos llegar al resultado si razonamos de la siguiente manera: Desde cada vértice podemos trazar, según vimos en el problema 1, **n-3** diagonales, y como son **n** vértices obtenemos **n(n-3)** diagonales pero como estamos trazando desde todos los vértices todas las diagonales se están contando doble vez por lo que deben dividirse entre dos, con lo cual obtenemos el modelo anterior.

Un camino más, para obtener la solución es el siguiente: darnos cuenta que, y no faltan estudiantes que se den cuenta, al modelo del problema 2, en el caso b, sólo bastaría haberle restado los segmentos trazados como lados del polígono, es decir, a todos los segmentos trazados dados n puntos, le restamos n, que es el número de lados del polígono y obtenemos el total de diagonales. Algebraicamente tenemos:

$$\frac{(n-1)n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$$

Seguramente habrá otras formas de resolver los problemas, que aquí no se contemplan pero que ustedes las descubrirán. ¡Adelante!

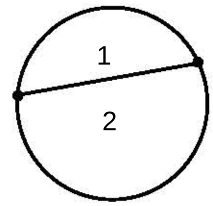
Conclusión: En un polígono de n lados se pueden trazar $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Problema 4.

Cuando tenemos un punto sobre la circunferencia

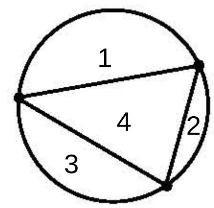
UNA REGIÓN

Cuando tenemos dos puntos sobre la circunferencia



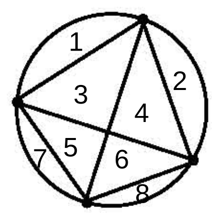
DOS REGIONES

Si tenemos tres puntos sobre la circunferencia



CUATRO REGIONES

Para cuatro puntos sobre la circunferencia



OCHO REGIONES

Si resumimos en una tabla la información que hemos obtenido tendremos:

NÚMERO DE PUNTOS	NÚMERO DE REGIONES
1	1
2	2
3	4
4	8

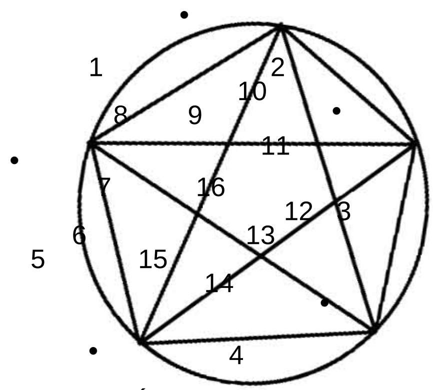
Notemos que los anteriores resultados los podemos rescribir como:

NÚMERO DE PUNTOS	NÚMERO DE REGIONES
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$

Por lo que el modelo algebraico que propondríamos para este problema es: para **n** puntos sobre la circunferencia habrá $\mathbf{2^{n-1}}$ regiones.

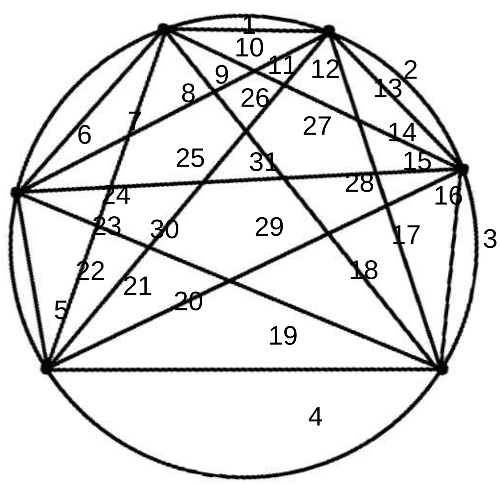
Veamos ahora, si tenemos 5 puntos sobre la circunferencia, según nuestra fórmula deberíamos tener 16 regiones. Hagamos el dibujo para comprobar este resultado.

Por el problema uno sabemos que debemos trazar 10 segmentos que unan los cinco puntos.



DIECISÉIS REGIONES

Pareciera entonces que el modelo funciona, hagamos un caso más. Para seis puntos sobre la circunferencia deberemos obtener 32 regiones, dibujemos una vez más para probar este resultado.

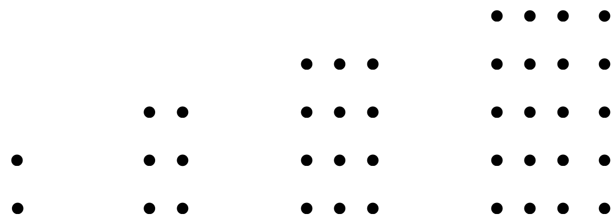


Tenemos ¡31 regiones!, la fórmula que propusimos falló para el caso cuando n = 6, y esto la invalida como cierta. Este es un ejemplo donde el método inductivo muestra sus limitaciones. ¡Sus resultados son sólo probables!

Ahora pasaremos al reto de resolver problemas.

§ 2
PROBLEMAS

1. Los números *oblongos* son aquellos que tienen la siguiente representación geométrica:

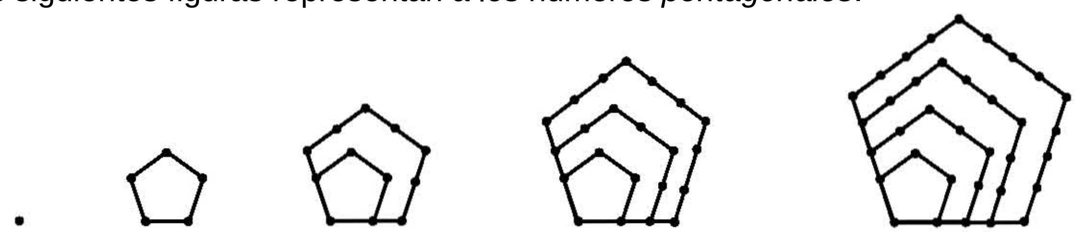


2 6 12 20

NÚMEROS OBLONGOS

Así el primer número oblongo está formado por dos puntos, el segundo por seis, etc. El problema consiste en que encuentres una fórmula que relacione el número de puntos en la base con el total de puntos que conforma el número.

2. Las siguientes figuras representan a los números *pentagonales*.



1 5 12 22 35

NÚMEROS PENTAGONALES

Encuentra una expresión algebraica, para los números pentagonales.

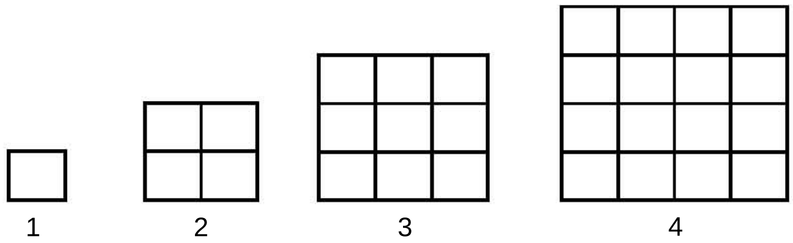
3. Demuestra que la suma de los primeros **n** enteros positivos impares es igual a $\mathbf{n^2}$.
4. Una cuerda es un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia.

Por ejemplo en la figura siguiente $\overline{AB}$ es una cuerda

Determina el número de regiones que se pueden formar en un círculo al trazar **n** cuerdas con las condiciones de que cualesquiera dos se intersecten en el interior del círculo y tres o más no sean concurrentes.

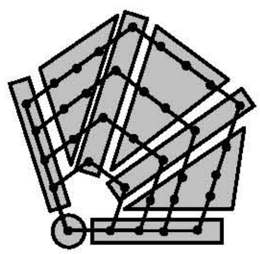
5. Considera las siguientes figuras, donde cada número representa el total de unidades en el lado del cuadrado. Cuenta el número de cuadrados diferentes

que se observan en cada figura y encuentra el modelo algebraico que relacione las unidades en el lado del cuadrado y el número de cuadrados que hay.



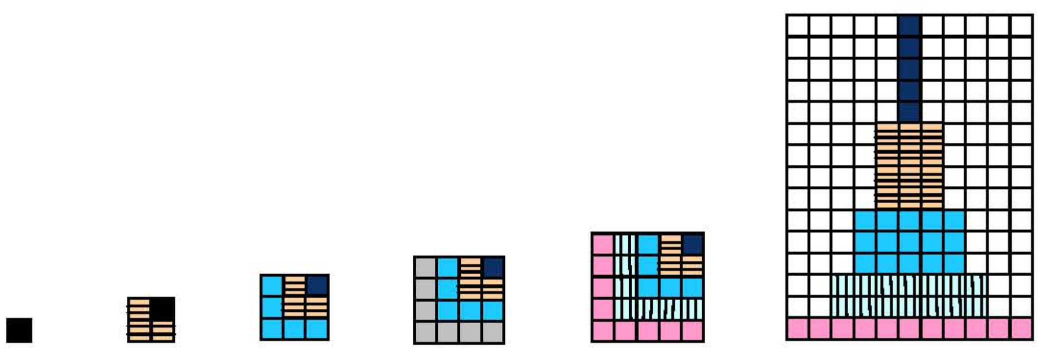
SUGERENCIAS

1. Para relacionar el número de puntos en la base con el total de puntos, basta que observes la forma de la figura.
2. Se van a proponer dos sugerencias, una basada en un dibujo, la otra que utiliza lo visto en el capítulo.
   a) La siguiente figura muestra el quinto número pentágonal, es decir, el que tiene en la base cinco puntos, usando las figuras que se forman encuentra alguna relación que te conduzca a la fórmula.



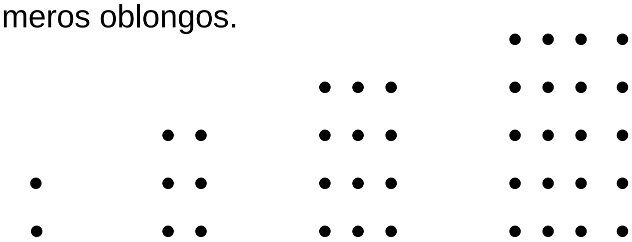
   b) Utiliza el hecho de que un pentágono se puede dividir en tres triángulos, no olvides hacer el dibujo y contar adecuadamente.
3. Utiliza el método de Gauss.
4. Dibuja el círculo, ve trazando cuerdas y contando el número de regiones. Observa que al trazar una nueva cuerda, el número de regiones aumenta en el mismo número de cuerdas que ya tenías trazadas.

5. Para encontrar la fórmula utiliza las siguientes figuras:



SOLUCIONES

1. Dibujemos los números oblongos.



2 6 12 20

Notemos que cada número oblongo tiene una forma rectangular, es decir, tiene un renglón más que el número de columnas, así el tercer número oblongo tiene tres puntos en la base y cuatro de altura, de esta observación parece sencillo encontrar la fórmula. Si **n** representa el número de puntos en la base, entonces

$$n(n+1)$$

es el total de puntos en el número oblongo.

Probemos la fórmula para n = 4

$$4(4+1) = 20$$

lo cual es correcto.

2. a)

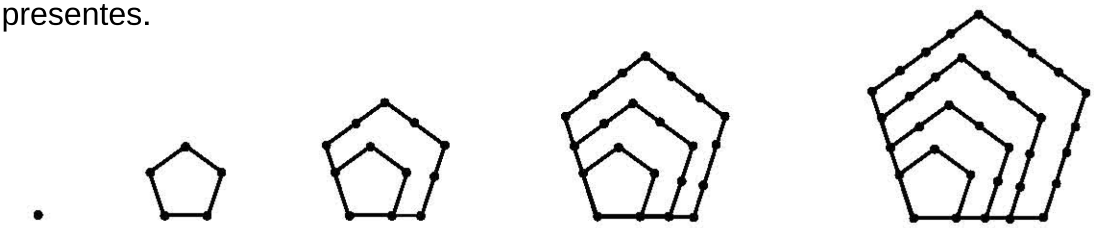
Observando la figura contemos los puntos: empecemos por uno de los vértices, es decir, un punto. Después los puntos contenidos en los cuatro rectángulos, menos el vértice que ya contamos. Notemos que los rectángulos contienen los vértices de los pentágonos menos el que ya contamos, entonces siempre serán cuatro rectángulos, mientras que el número de puntos que contengan dependerá del número de puntos de la base menos uno.

Finalmente contaremos los puntos que se encuentran en los tres triángulos: tres puntos de la base más dos del siguiente renglón, más uno, es decir, la suma de los primeros tres naturales, para estas sumas ya tenemos fórmula para calcularla, la de Gauss. Observemos que el número de puntos de la base de estos triángulos tiene dos puntos menos que los puntos de la base del número pentagonal en cuestión. Notemos también que todos los triángulos tienen los mismos puntos, que siempre van a ser tres, pues si vemos a los rectángulos como diagonales, los triángulos son los que forman las diagonales, por lo que el número de triángulos, como vimos en el problema 1, debe ser tres.

Traducido esto a una fórmula: si tuviéramos **n** puntos en la base del número pentagonal obtenemos: $1+4(n-1)+3(\frac{(n-2)(n-1)}{2})$

Segunda solución:

2. b) Vamos a dibujar primero a los números pentagonales para tenerlos presentes.

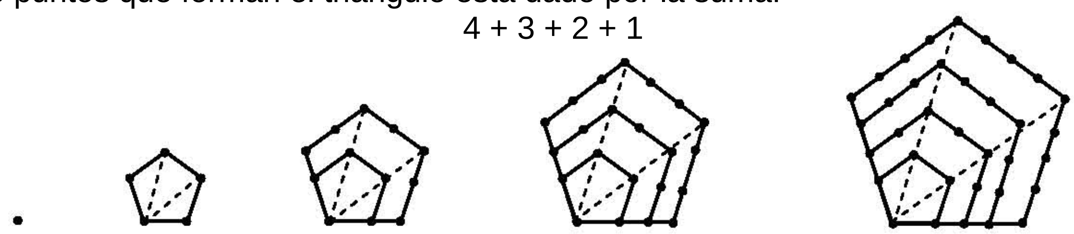


1 5 12 22 35

NÚMEROS PENTAGONALES

Si trazamos las dos diagonales que parten de uno de los vértices del pentágono se forman tres triángulos. Notemos que estos triángulos tiene el mismo número de puntos en la base que el número pentagonal en cuestión, (ver figura), y que, por ejemplo en el cuarto número pentagonal, el número total de puntos que forman el triángulo está dado por la suma:

$$4 + 3 + 2 + 1$$



1 5 12 22 35

Podríamos entonces usar la fórmula para sumar los primeros números naturales, es decir, la de Gauss, para calcular el total de puntos en el triángulo. Pero observemos que con ésta cuenta estamos sumando dos veces los puntos que se encuentran sobre las diagonales, que son exactamente el mismo número de puntos que los de la base del número pentagonal en cuestión.

Podríamos entonces generalizar para el número **n** pentagonal:

$$\frac{3n(n+1)}{2}-2n=\frac{3n^2+3n-4n}{2}=\frac{3n^2-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

Probemos la fórmula para el quinto número pentagonal.

$$\frac{5(3(5)-1)}{2}=35$$

lo cual es correcto.

Si hacemos operaciones encontraremos que las dos fórmulas obtenidas son iguales:

$$1+4(n-1)+\frac{3(n-2)(n-1)}{2}=\frac{8n-6+3(n^2-3n+2)}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$$

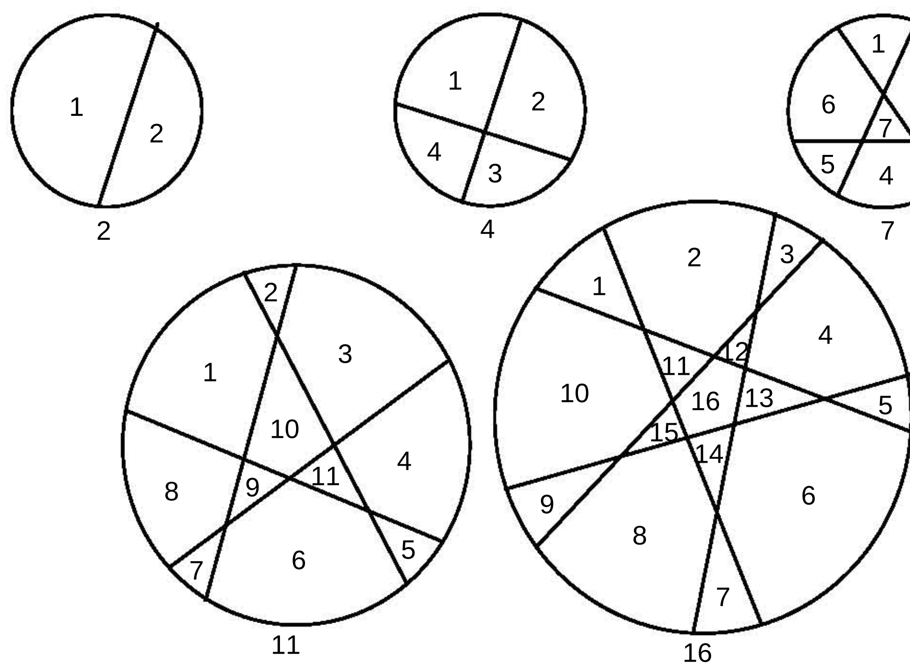
3. Usando la misma idea que usó Gauss obtenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 2n-1 \\ 2n-1 & + & 2n-3 & + & 2n-5 & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2n & + & 2n & + & 2n & + & \ldots & + & 2n \end{array}$$

   Tenemos en total **n** sumandos y como hemos sumado dos veces a estos números debemos dividir entre dos el resultado, de lo cual obtenemos:

$$1+3+5+7+\ldots+2n-1=\frac{2n(n)}{2}=n^2$$

4. Dibujemos y contemos



Hagamos una tabla

NÚMERO DE CUERDAS	NÚMERO DE REGIONES
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16

Observemos la manera en que se fueron formando estas regiones. Al dividir la región circular por una primera cuerda, se forman dos regiones. Al trazar la segunda cuerda, como debe intersectar a la primera, divide a las dos regiones que teníamos creandose otras dos mas. Si ahora trazamos una tercera cuerda, al intersectarse con las otras dos cuerdas; (recordemos que las cuerdas sólo se deben intersectar dos a dos), divide sólo a tres de las cuatro regiones que teníamos, en dos nuevas regiones cada una, por lo que ahora tenemos tres nuevas regiones más. Si trazamos la cuarta cuerda, tenemos que divide solamente a cuatro de las siete regiones que se habían formado, en dos nuevas regiones cada una, formandose cuatro nuevas regiones que hay que sumar a las que ya teníamos. Haciendo este conteo podemos saber cuantas regiones nuevas se van formando al aumentar el número de cuerdas. Escribamos esto en la tabla:

NÚMERO DE CUERDAS	NÚMERO DE REGIONES
1	2
2	2+2
3	4+3
4	7+4
5	11+5

Ahora bien, al número de regiones la podemos reescribir como la siguientes sumas:

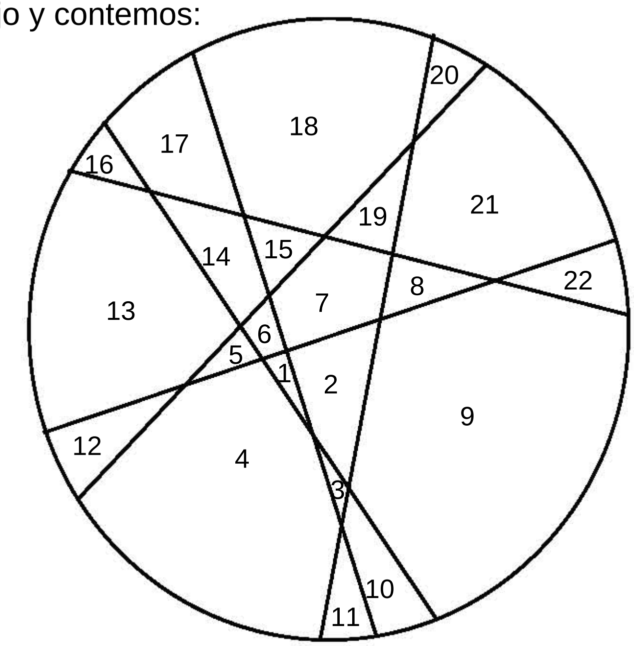
NÚMERO DE CUERDAS	NÚMERO DE REGIONES	SUMA
1	2	1+1
2	4	1+1+2
3	7	1+1+2+3
4	11	1+1+2+3+4
5	16	1+1+2+3+4+5

Con esto ya es fácil obtener nuestra fórmula, es la suma de los primero **n** enteros positivos más 1:

$$\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}$$

Probemos nuestra fórmula para un caso más, cuando tenemos seis cuerdas.

Hagamos el dibujo y contemos:

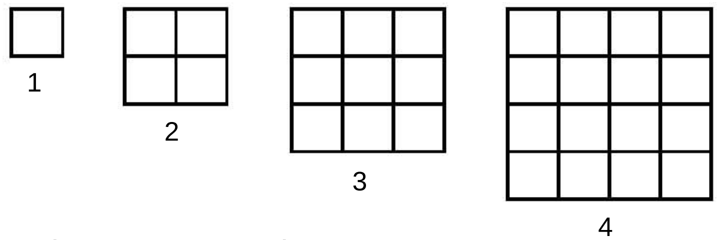


22

Usando la fórmula: $\dfrac{6^2+6+2}{2}=22$

El resultado es correcto.

5.



Contemos y hagamos una tabla

NÚMERO DE UNIDADES EN EL LADO	NÚMERO DE CUADRADOS
1	1
2	5
3	14
4	30
5	55

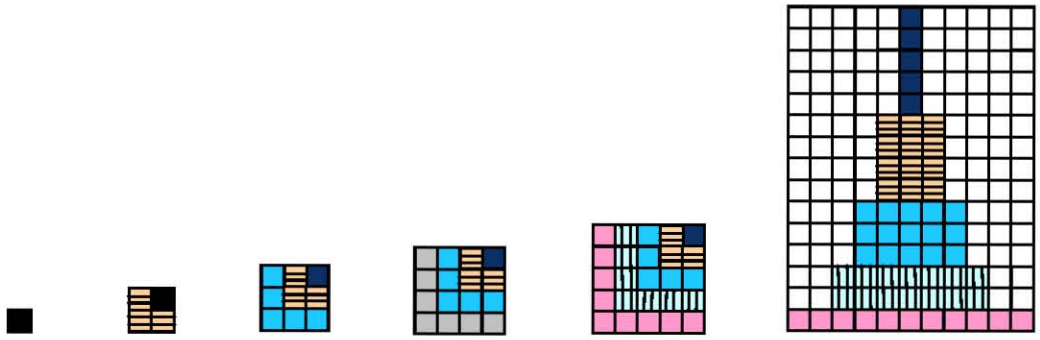
Pero ¿cómo hemos contado?, primero los cuadrados de lado uno, luego los cuadrados de lado dos y así sucesivamente, escribamos esto en nuestra tabla.

NÚMERO DE UNIDADES EN EL LADO	NÚMERO DE CUADRADOS	SUMA
1	1	1
2	5	$2^2 + 1$
3	14	$3^2 + 4 + 1$
4	30	$4^2 +9 + 4 + 1$
5	55	$5^2 + 16 + 9 + 4 + 1$

Pero esto es el nuevo número de cuadrados de lado uno más los cuadrados que ya había anteriormente, por lo que lo podemos reescribir como:

NÚMERO DE UNIDADES EN EL LADO	NÚMERO DE CUADRADOS	SUMA	SUMA
1	1	1	1
2	5	$2^2 + 1$	$2^2 + 1$
3	14	$3^2 + 4 + 1$	$3^2 +2^2 + 1$
4	30	$4^2 +9 + 4 + 1$	$4^2 + 3^2 +2^2 + 1$
5	55	$5^2 + 16 + 9 + 4 + 1$	$5^2 + 4^2 + 3^2 +2^2 + 1$

Así que lo que debemos obtener es la suma de los cuadrados de los primeros **n** números enteros positivos. Para poder obtener la expresión algebraica de esta suma vamos hacer uso de la siguiente figura:



En los cuadrados tenemos representados los primeros **n** números cuadrados, en el rectángulo se han dispuesto tres veces dichos números ¿lo puedes observar?. En la base del rectángulo hay **2n+1** cuadros y en su altura la suma de los primeros **n** números naturales, de lo cual resulta inmediata la fórmula:

$$3(1^2+2^2+3^2+...+n^2)=(2n+1)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

De lo cual concluimos que:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

CAPÍTULO II
ÁNGULOS Y SUS RELACIONES

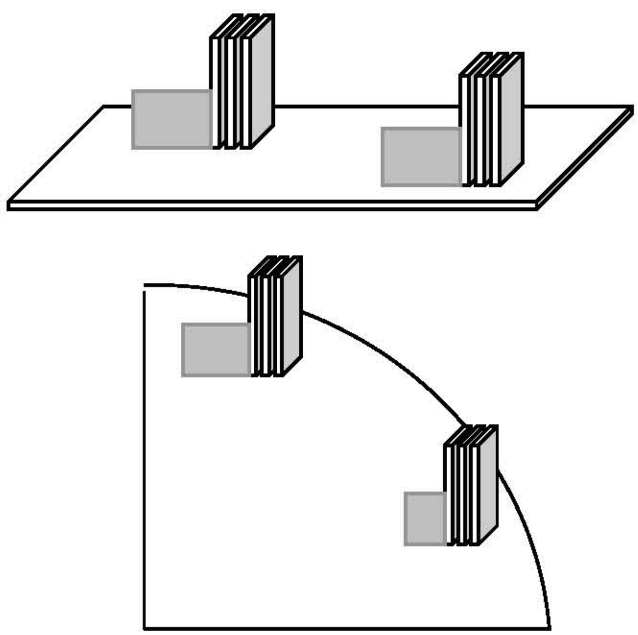
El objetivo de este capítulo, y de los siguientes, es mostrar como se trabaja con el método deductivo en la geometría, aprovechando que es una rama de la matemática la cual han estudiado en cursos anteriores. No se pretende presentar un sistema axiomático deductivo completo, ni siquiera rigurosamente deductivo, pues eso no sería lo más adecuado para quienes, como ustedes, se inician en el estudio de la axiomática. Lo que se quiere hacer es ilustrar, lo mejor que se pueda el método. Como se ha mencionado, lo acompañaremos con el método inductivo para descubrir o redescubrir las propiedades geométricas de las figuras.

§ 1
PROBLEMA DE MOTIVACIÓN

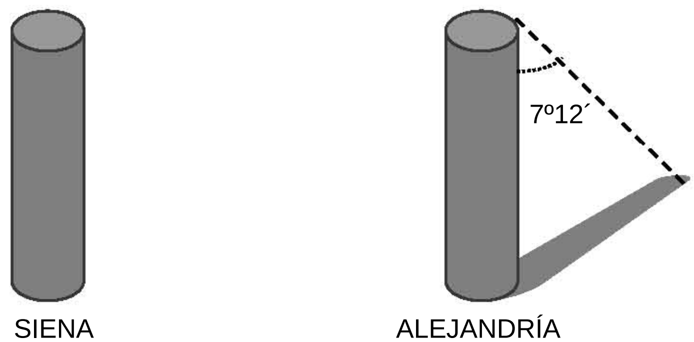
¿Te gustaría saber cuánto mide el diámetro de nuestro planeta? Te vas a sorprender de lo sencillo que es calcularlo, basta con un poco de herramienta matemática e ingenio.

¿CÓMO CALCULAR EL DIÁMETRO DEL PLANETA?

Hace cerca 2300 años, el matemático griego Eratóstenes, midió la circunferencia de la tierra sin más instrumentos que su ingenio y la observación. Notó, durante uno de sus viajes que solía hacer, que objetos similares no producían sombras del mismo tamaño en las ciudades de Alejandría y Siena, situadas en la ribera del río Nilo, durante la misma época del año. Esto, supuso, debía tener su origen en la curvatura de la superficie terrestre, ya que de no ser ésta curva, sino plana, todos los objetos del mismo tamaño tendrían que proyectar sombras iguales:

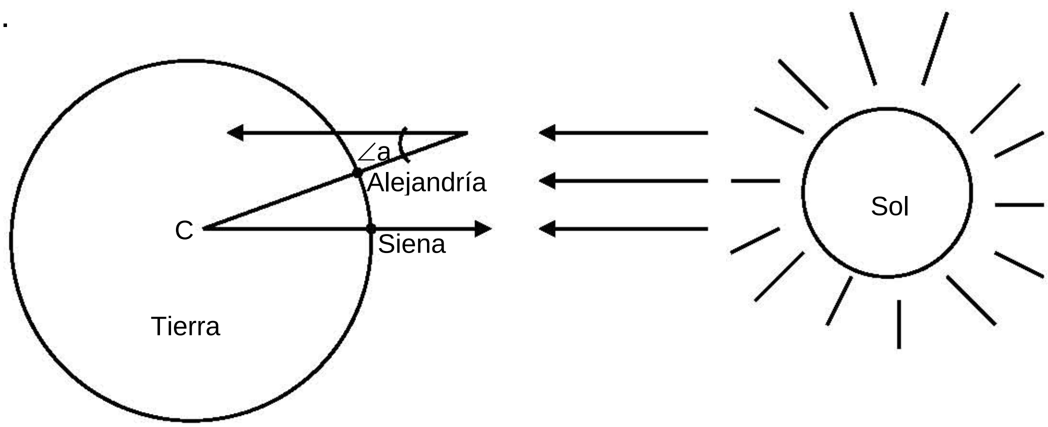


Eratóstenes observó que al mediodía del solsticio de verano, el día más largo del año, el sol estaba prácticamente sobre la vertical en Siena, por lo que una varilla colocada verticalmente sobre la tierra no producía sombra alguna y el sol brillaba directamente en el fondo de un pozo profundo, quedando completamente iluminado. En el mismo momento y bajo las mismas condiciones, en Alejandría, una varilla colocada verticalmente producía una pequeña sombra formando un ángulo que se desviaba 7º 12´ de la vertical, esto es, el ángulo formado por la varilla vertical y el rayo que pasa por el extremo superior de ésta y por el extremo de su sombra, media 7º 12´.



Utilizando estas observaciones, admitiendo que son paralelos los rayos del sol observados desde la tierra, (cosa que prácticamente ocurre), y conociendo que la distancia entre las dos ciudades es de 5000 estadios[1]. Eratóstenes midió la circunferencia de la tierra.

¿Podrías obtener la solución del problema? ¡Inténtalo! Ayúdate del siguiente dibujo.



C es el centro dela tierra y ∠a es el ángulo que midió Eratóstenes.

---

[1] Al parecer, Eratóstenes dio una estimación de la distancia entre Alejandría y Siena con base en el hecho de que un convoy de camellos, tardaba 50 días en llegar a Siena, viajando a razón de 100 estadios por día. (Morris Kline. El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial. Madrid 1994, pág. 220.). También existe una leyenda que dice que para obtener este dato Eratóstenes contrató a una persona para que recorriera y midiera dicha distancia.

Si no lograste resolver este problema no te preocupes, más adelante lo haremos. Para su solución se requieren algunos conocimientos básicos sobre relaciones que existen entre dos rectas paralelas y los ángulos que se forman al ser cortadas por una transversal, por lo que pasaremos a estudiar estas relaciones, esperando que este problema sencillo, pero bonito, te motive en el estudio de los ángulos y sus relaciones.

Para iniciar empezaremos analizando diversas situaciones que se presentan cuando trabajamos con ángulos, con el fin de que te familiarices con los resultados que después formalizaremos.

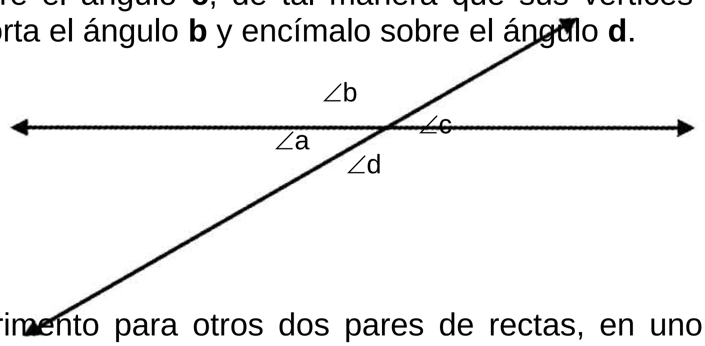
§ 2

EXPERIMENTOS.

Como en el capítulo anterior te pedimos que realices los experimentos antes de ver las conjeturas, esto te ayudará a entender mejor cuando pasemos a formalizarlas.

PRIMER EXPERIMENTO. ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE.

1. Traza dos rectas que se corten.
2. Mide con un transportador cada uno de los cuatros ángulos que se forman. Anota los resultados.
3. Dibuja otras dos rectas que se corten.
4. Nombra a sus ángulos como se indica en la figura. Corta el ángulo **a** y superponlo sobre el ángulo **c**, de tal manera que sus vértices coincidan. De igual manera corta el ángulo **b** y encímalo sobre el ángulo **d**.



5. Repite tu experimento para otros dos pares de rectas, en uno de los casos dibuja a las rectas perpendiculares.
6. Escribe todas las conclusiones y compara los resultados con los de tus compañeros.

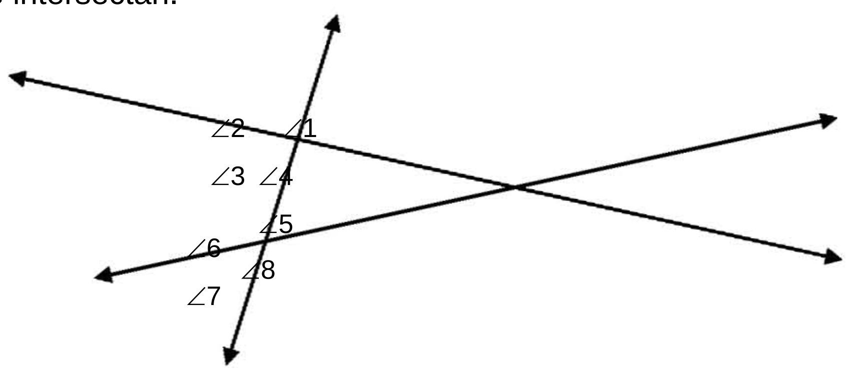
SEGUNDO EXPERIMENTO. DIBUJANDO PARALELAS Y PERPENDICULARES. (UTILIZANDO REGLA Y ESCUADRA).

1. Usando una escuadra traza la perpendicular a una recta por un punto exterior a ella. Escribe como lo hiciste. ¿Cuántas perpendiculares distintas puedes trazar?
2. Prolonga la perpendicular trazada. ¿En cuántas partes se divide el plano? ¿Cuánto miden los ángulos que se formaron?
3. Dado un punto sobre una recta traza una perpendicular a dicha recta que pase por el punto. ¿Cuántas perpendiculares distintas puedes trazar?

4. Dada una recta y un punto exterior a ella, traza una paralela a la recta dada que pase por el punto, usando regla y escuadra. Escribe cómo lo hiciste. ¿Cuántas rectas paralelas distintas puedes trazar a dicha recta que pasen por el punto?
5. Mide la distancia entre las rectas en distintos puntos. Considera la distancia entre las rectas como la longitud del segmento que las une perpendicular a ambas. Anota los resultados. ¿Son los que tú esperabas?
6. ¿Qué características atribuirías a las rectas paralelas?

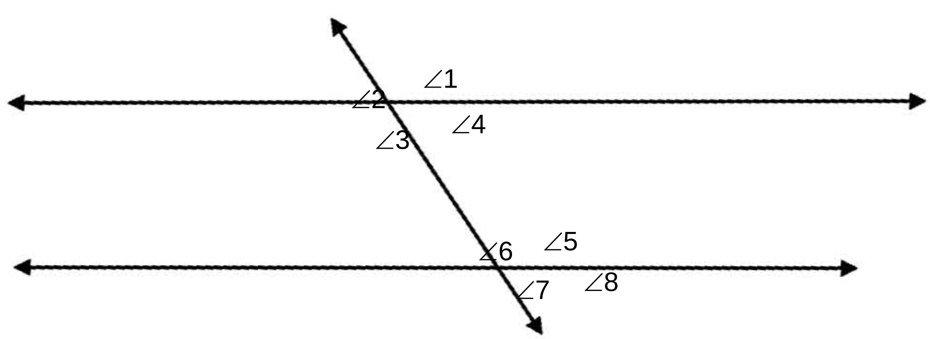
TERCER EXPERIMENTO. RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.

a) Traza dos rectas no paralelas y una tercera que las corte en puntos diferentes de donde se intersectan.



1. Mide con transportador cada uno de los ocho ángulos que se señalan en la figura anterior. ¿Existen parejas de ángulos iguales además de los ángulos opuestos por el vértice? Anota los resultados.
2. Repite tu experimento para otros dos pares de rectas.
3. Escribe todas tus conclusiones y discútelas con tus compañeros.

b) Dibuja un par de rectas paralelas y una tercera que las corte



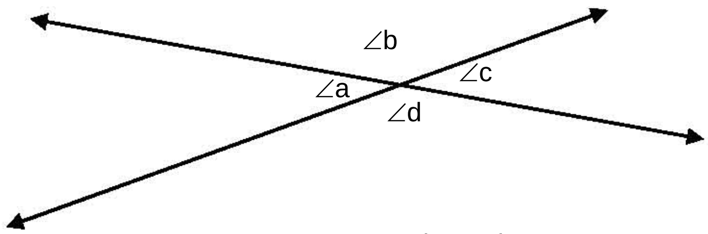
1. Repite los pasos del 1 al 3 del inciso a.
2. ¿Qué pasa con la suma de las medidas de los ángulos que se encuentran en el mismo lado de la transversal y dentro de las paralelas (los ángulos internos)? Compara estos resultados con lo que ocurre para los mismos ángulos y su suma, en el inciso a.
3. Escribe todas las conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

CONJETURAS

Es probable que obtengas diferentes conjeturas a las expuestas a continuación, te pido que las discutas con tus compañeros y con tu profesor. Aquí enuncio las que considero más importantes para desarrollar la formalización del tema.

PRIMER EXPERIMENTO.

CONJETURA 1. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Es posible que en algunos casos esto no sea exacto en nuestros experimentos, debido a errores de medición o a otros factores.

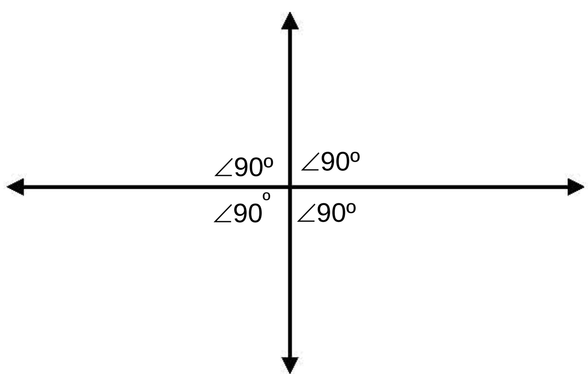


$\angle a = \angle c$ y $\angle b = \angle d$

SEGUNDO EXPERIMENTO.

CONJETURA 2. Existe una única perpendicular a una recta que se puede trazar por un punto exterior a ella.

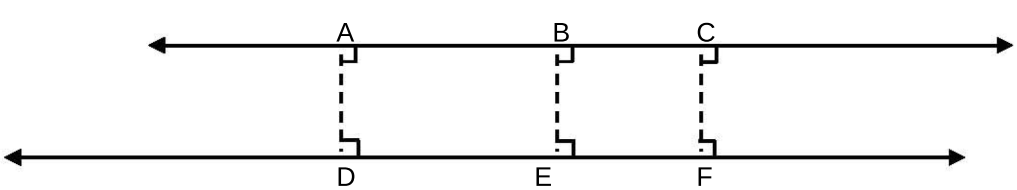
CONJETURA 3. Dos rectas son perpendiculares si se cortan formando ángulos adyacentes iguales.



CONJETURA 4. Dado un punto en una recta sólo se puede trazar una perpendicular a dicha recta que pase por el punto.

CONJETURA 5. Sólo se puede trazar una paralela a una recta por un punto exterior a ella.

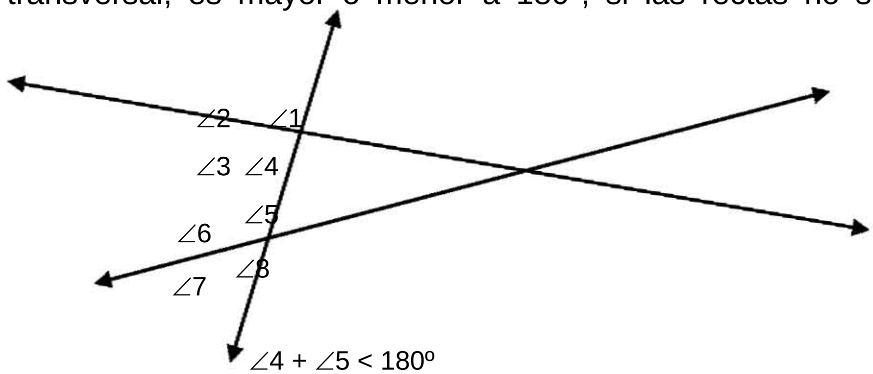
CONJETURA 6. La distancia entre dos rectas paralelas es siempre la misma



TERCER EXPERIMENTO.

CONJETURA 8. Si dos rectas no paralelas son cortadas por una tercera, no hay ángulos iguales, salvo los opuestos por el vértice.

CONJETURA 9. La suma de las medidas de los ángulos internos formados del mismo lado de la transversal, es mayor o menor a 180º, si las rectas no son paralelas.



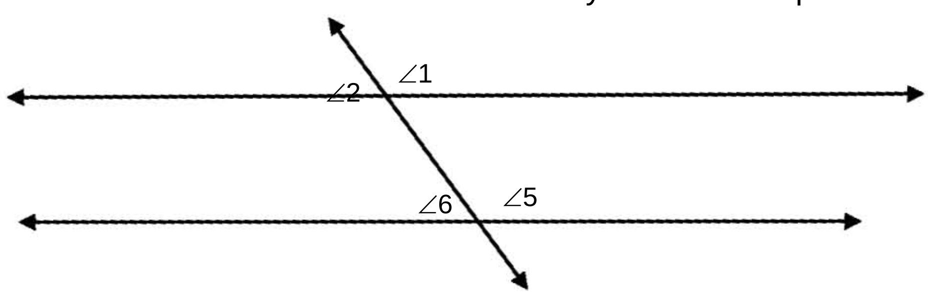
$\angle 4 + \angle 5 < 180^{\circ}$

$\angle 3 + \angle 6 > 180^{\circ}$

Observa que la suma de los ángulos internos es menor a 180º del lado donde se cortan las rectas.

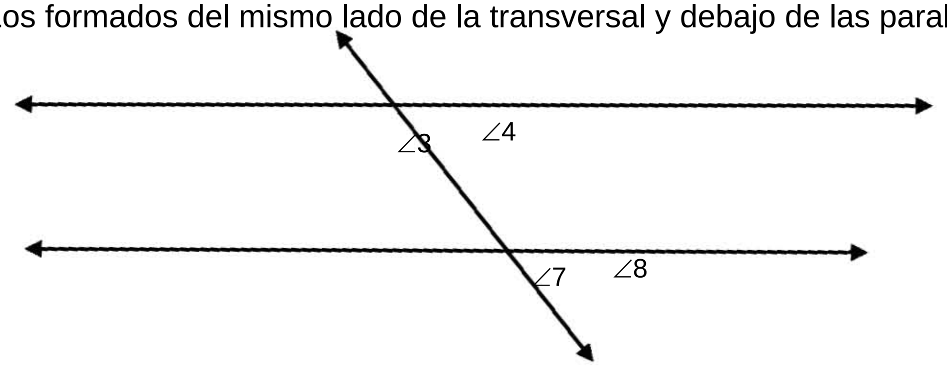
CONJETURA 10. Si las rectas son paralelas al ser cortadas por una tercera se forman ocho parejas de ángulos iguales, a saber:

- Los formados del mismo lado de la transversal y arriba de las paralelas.



$\angle 2 = \angle 6$ y $\angle 1 = \angle 5$

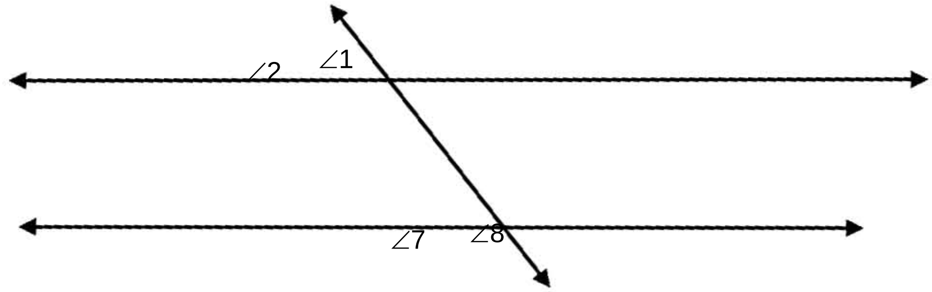
- Los formados del mismo lado de la transversal y debajo de las paralelas.



$\angle 3 = \angle 7$ y $\angle 4 = \angle 8$

A estas cuatro parejas de ángulos se les llaman correspondientes.

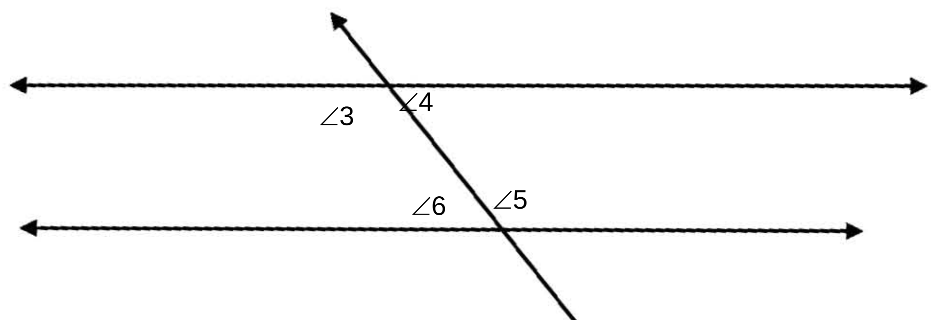
- Los formados de uno y otro lado de la transversal y fuera de las paralelas



$\angle 1 = \angle 7$ y $\angle 2 = \angle 8$

A estas dos parejas de ángulos se le llama alternos externos.

- Los formados de uno y de otro lado de la transversal pero dentro de las paralelas.



$\angle 3 = \angle 5$ y $\angle 4 = \angle 6$

A estas dos parejas de ángulos se les llama alternos internos.

Estas ocho parejas de ángulos que hemos mencionado se forman aunque las rectas cortadas por la transversal no sean paralelas y se siguen llamándose igual.

Pasemos ahora a formalizar estos resultados que hemos obtenido mediante la experimentación y a demostrar nuestras conjeturas.

§ 3

AXIOMAS, POSTULADOS, TÉRMINOS PRIMITIVOS Y TEOREMAS.

En geometría no todas las afirmaciones se pueden demostrar, ya que al intentarlo tendríamos que recurrir a otras afirmaciones que a su vez habría que demostrar y así sucesivamente. De esa manera, el proceso de demostración sería infinito, por lo cual es necesario partir de una serie de proposiciones que se aceptan sin demostrar, a las cuales se les llama *axiomas* o *postulados*[2].

---

[2] "Toda ciencia demostrativa tiene que partir de principios indemostrables, (de otro modo), los pasos de la demostración serían infinitos", dice Aristóteles. Raymond L. Wilder. *El mundo de las matemáticas,* tomo5. Editorial Grijalbo. Barcelona 1968, pág. 36.

A continuación vamos a enunciar los supuestos de los que partiremos inicialmente, aunque a lo largo del trabajo se incluirán otros que nos hagan falta. He preferido dividir a los supuestos en axiomas y postulados para respetar la tradición euclidiana:

AXIOMAS
1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. En una expresión cualquiera, una cantidad cualquiera se puede reemplazar por su igual.
3. El todo es igual a la suma de sus partes.
4. Cualquier cantidad es igual a sí misma.
5. Si a cantidades iguales se suman o restan cantidades iguales, los resultados son iguales.
6. Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los totales son iguales. En el caso de la división no se puede dividir entre cero.

POSTULADOS.
1. Por dos puntos pasa una recta y solo una.
2. Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos.
3. Con un punto dado como centro y un segmento dado como radio sólo se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Por un punto no contenido en una recta, pasa exactamente una recta paralela a dicha recta.

En las demostraciones que hagamos, sólo se indicará el axioma utilizado, los postulados por ser más inmediatos no se señalarán, a menos que se considere necesario.

Otro elemento importante en el método deductivo son las definiciones de los conceptos, sin embargo, por el mismo argumento que mencionamos sobre los axiomas y postulados, iniciaremos con una serie de términos que no definiremos, a los cuales llamaremos *términos primitivos*.

TÉRMINOS PRIMITIVOS.
Son tres los términos primitivos en la geometría euclidiana: punto, recta y plano.

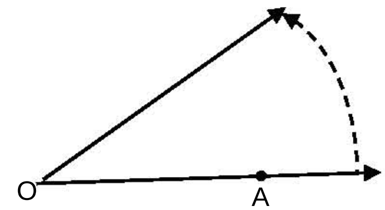
TEOREMAS.
Toda conjetura que se demuestre la llamaremos *teorema*.

Una demostración es el conjunto de razonamientos que nos permiten derivar una serie de afirmaciones a partir de otras. Cada una de ellas tendrá que llevar claramente su justificación usando las leyes de la lógica. La demostración de un teorema se deducirá de los axiomas y los postulados, o bien de otros teoremas ya demostrados.

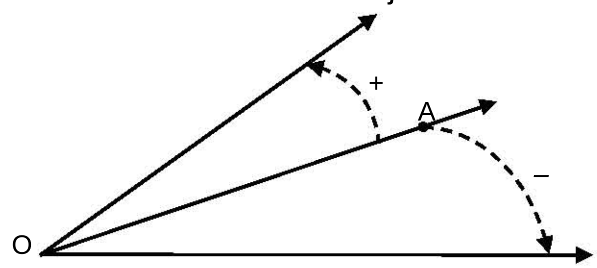
§ 4
EL ÁNGULO

¿Por dónde empezar? Por definir el concepto de ángulo.

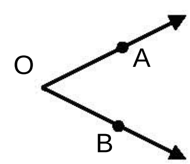
DEFINICIÓN: Un ángulo es la amplitud de rotación de una semirrecta o rayo[3] que gira en torno a su origen.



Observamos que con esta definición el ángulo puede tomar valores en el conjunto de los números reales, pues el rayo puede girar tantas veces como se desee y hacerlo en dos sentidos, una de las cuales es la orientación positiva, cuando gira en sentido contrario a las manecillas del reloj; y otra la orientación negativa, cuando gira en el sentido a las manecillas del reloj.



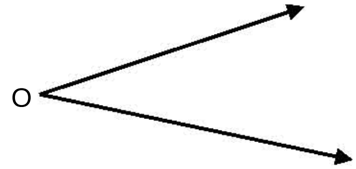
Al punto **O** en torno al cual se mueve el rayo se le llama vértice del ángulo y a los rayos que delimitan al ángulo se les denomina lados del ángulo.



$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los lados del ángulo y **O** el vértice.

También se suele definir un ángulo de la siguiente manera:

DEFINICIÓN: Un ángulo es la figura formada por dos rayos que tienen un origen común.



Al asignarle su medida al ángulo, se le asigna la menor de las dos posibles

---

3 La amplitud de rotación es la REGIÓN recorrida por medio del movimiento.

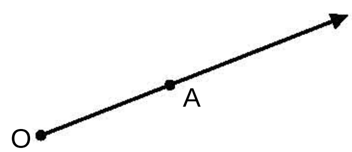
¿Qué diferencias hay entre las dos definiciones? ¿Ya las encontraste? Veamos, una es que mientras en la primera está involucrado el movimiento, en la segunda el ángulo es visto como algo estático. Otra diferencia se encuentra en que en la última definición no podemos hablar de dos ángulos o más, sino sólo de uno. La tercera diferencia importante es que los ángulos en la segunda definición, sólo tomarán valores entre 0º y 180º.

En geometría elemental se trata al ángulo como en la segunda definición, no así en trigonometría, donde necesariamente tendremos que recurrir a la primera. En realidad, a pesar de las diferencias que se mencionan, las dos definiciones anteriores encierran esencialmente la misma idea y conducen a los mismos resultados, por lo que nosotros usaremos cualquiera de ellas indistintamente.

Ahora bien, para que la demostración que vamos a realizar sea del todo correcta, habremos de definir qué es un rayo, ya que éste no es un término primitivo por lo que debe ser previamente definido.

La definición es compleja pero vale la pena exponerla para ilustrar lo que significa dar una definición con todo rigor.

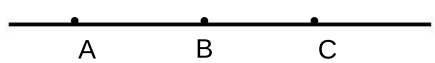
DEFINICIÓN: *El rayo o semirrecta* **OA** esta formado por el segmento **OA** y por todos los puntos para los que el punto **A** queda situado entre cada uno de ellos y **O**.



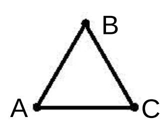
El punto **O** es llamado el origen o extremo del rayo **OA** y se suele denotar al rayo por $\overrightarrow{OA}$.

En la anterior definición, hemos utilizado un concepto no definido, la relación *estar entre*, por lo que la definición no está bien establecida. Para enmendar el error, pasaremos a definir la relación *estar entre*.

Consideremos un segmento de recta y tres puntos **A**, **B** y **C** que pertenecen al segmento. ¿**B** *está entre* **A** y **C**? ¿Por qué?



Porque están a la misma distancia, se suele responder, veamos. En un triángulo equilátero de vértices **A**, **B** y **C**, **B** esta a la misma distancia de **A** y **C** y sin embargo no esta entre **A** y **C**.



¡Ah!, entonces lo que necesitamos es que los tres puntos pertenezcan al mismo segmento, es decir, que los tres puntos sean colineales.

Esto último también se puede formular, utilizando el concepto de distancia (el cual se acostumbra introducir como un axioma en la geometría plana moderna), diciendo: la distancia de **A** a **B** más la distancia de **B** a **C** debe ser igual a la distancia de **A** a **C**, lo cual escribimos como:

$$AB + BC = AC$$

Hay una última situación que no hemos resuelto, ¿estaría **B** entre **A** y **C** si coincidiera con **A** o con **C**?

No, pero hasta ahora nuestra definición no excluye este caso, pues AB = 0 y por tanto BC = AC, por lo que se cumple AB + BC = AC sin contradecir nuestra definición. ¿Qué podemos pedir ahora? Efectivamente, que nuestros puntos sean diferentes, entonces:

DEFINICIÓN: **B** es un punto entre **A** y **C** si y sólo si **A**, **B**, **C** son diferentes y

$$AB + BC = AC$$

Finalmente, para terminar de formalizar esta definición, enunciemos el axioma de distancia:

AXIOMA. A cada par de puntos diferentes **A** y **B** le corresponde un número positivo único, llamado la distancia entre ellos y que se denota por **AB**.

Ahora sí, hemos definido con todo rigor lógico el concepto de *estar entre* que parece tan trivial, pero que debe ser definido con toda precisión y con ello el concepto de ángulo.

Hagamos un paréntesis par definir segmento de recta aprovechando que tenemos los elementos necesarios para hacerlo:

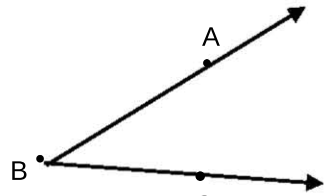
DEFINICIÓN: Sean **A** y **B** dos puntos cualesquiera, el segmento de recta AB es el conjunto de puntos que contiene a **A**, a **B** y a todos los puntos situados entre **A** y **B**.

Se suele denotar con $\overline{AB}$ al segmento **AB** y se les llaman los extremos del segmento a los puntos **A** y **B**.

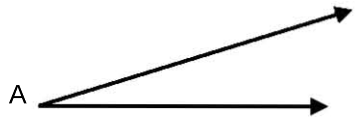
Usaremos la siguiente notación para referirnos a los ángulos:

$$\text{AngABC}, \ \angle ABC \ \text{o} \ \widehat{ABC}$$

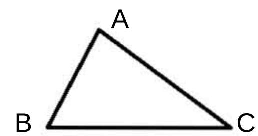
Siempre el vértice del ángulo se colocará en el centro. Por ahora no tomaremos en cuenta el sentido del ángulo, por lo que $\angle ABC = \angle CBA$.



Cuando no hay lugar a confusiones podremos indicar sólo el vértice del ángulo.

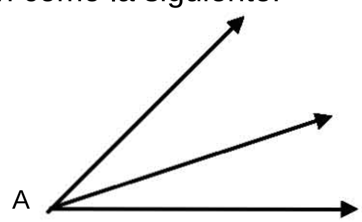


Este ángulo se puede escribir como: $\angle A$

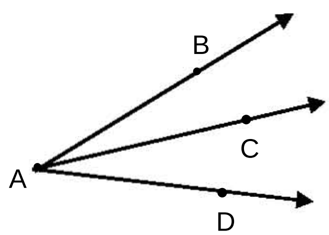


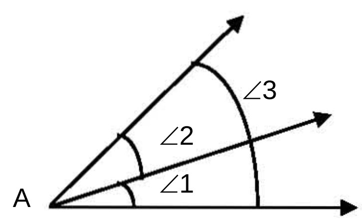
Los ángulos de este triángulo se pueden escribir como: $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$

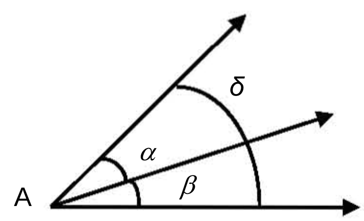
Pero si tenemos una situación como la siguiente:



Debemos indicar claramente el vértice y los lados del ángulo, o bien nombrarlos con letras o números, como se muestra a continuación.







Usualmente para indicar la medida de los ángulos se utilizan letras griegas minúsculas, aunque a veces se abusa de la notación y a la medida de los ángulos y a los ángulos mismos se les llama de igual forma. Cuando se usan letras griegas, se omite el símbolo del ángulo.

Las unidades utilizadas para medir ángulos son el grado y los radianes. El grado tuvo su origen en los pueblos antiguos, muy ligado a sus observaciones acerca del sol. Los babilonios llamaron año solar al tiempo que tardaba el sol al girar “en trayectoria circular alrededor de la tierra” y un día, en este calendario, correspondía a $1/360$ del año solar. De esta manera natural surgió la definición de grado.

DEFINICIÓN: Un grado es la medida de un ángulo que mide $1/360$ del ángulo de una vuelta.

Las unidades con las que vamos a medir los ángulos son el ángulo de 1º y el de una vuelta.

Para mayor precisión en nuestros cálculos vamos a dividir al ángulo que mide un grado en sesenta ángulos, a la medida de cada uno de estos ángulos la vamos a llamar minuto. A cada uno de estos ángulos que mide un minuto, lo volvemos a dividir en 60 nuevos ángulos y a la medida de cada uno de éstos ángulos lo vamos a llamar segundo. Para denotar un minuto se usa el apóstrofe y para los segundos, las comillas. Cabe aclarar que abusando de la notación llamamos a los ángulos por el nombre de su medida. Así, al ángulo que mide un grado simplemente le decimos grado.

Lo anterior se resume en la siguiente tabla:

1º = 60’	1’ = (1/60)º
1’ = 60”	1” = (1/60)’
1º = 60 (60)” = 3600”	1” = (1/3600)”

Con esta tabla podemos realizar todo tipo de conversiones. Veamos algunos ejemplos:

a) Convertir 5º a minutos.
Como cada grado tiene 60 minutos basta multiplicar 5 por 60

$$5(60') = 300'$$

b) Convertir 0.5º a minutos.
Siguiendo el mismo razonamiento obtenemos

$$0.5^{\circ}\,(60') = 30.0' = 30'$$

c) Convertir $(\frac{1}{3})^{\circ}$ a minutos.

$$(\frac{1}{3})\,(60') = (\frac{60}{3})' = 20'$$

d) Convertir 10.1’ a segundos.

$$10.1\,(60'') = 606.0'' = 606''$$

e) Convertir $(6\frac{1}{3})'$ a segundos.

$$(6\frac{1}{3})'\,(60'') = (\frac{19}{3})\,(60'') = (\frac{1140}{3})'' = 380''$$

f) Transforma 27º 4’ 7” a segundos.

$$27(3600'') + 4(60'') + 7'' = 97200'' + 240'' + 7'' = 97447''$$

g) Convierte 28” a minutos.

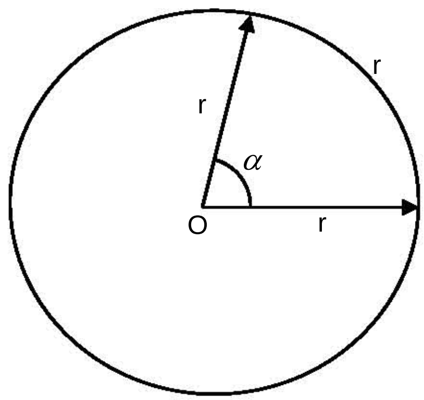
$$28\left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{28}{60}\right)' = \left(\frac{7}{15}\right)'$$

h) Convierte 4” a grados.

$$4\left(\frac{1}{3600}\right)^{o} = \left(\frac{4}{3600}\right)^{o} = \left(\frac{1}{900}\right)^{o}$$

La otra unidad de medida, el radián, utiliza conceptos como circunferencia, círculo, centro, arco y radio de un círculo, los cuales se pide al estudiante que los investigue. A continuación se da la definición de radian.

DEFINICIÓN: Un ángulo tiene una medida de un RADIÁN si al colocar su vértice en el centro de un círculo la longitud del arco intersectado en la circunferencia es igual al radio.



α = 1 radián, **r** es el radio del círculo y **O** el centro del círculo

Así, si tenemos un ángulo que mide 360º es necesario encontrar el número de veces que un arco circular de longitud r puede colocarse a lo largo de la circunferencia. Como la circunferencia mide 2πr, el número de veces que una longitud r puede colocarse es 2π, esto es, un ángulo que mide 2π radianes, corresponde al ángulo, en grados, de 360º. De lo cual podemos deducir las siguientes relaciones:

$$360^{o} = 2\pi \text{ radianes} \Rightarrow 180^{o} = \pi \text{ radianes}$$
$$\frac{360^{o}}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ radián} \Rightarrow \frac{180^{o}}{\pi} = 57.29560^{o} = 1 \text{ radián}$$
$$\frac{360^{o}}{360} = \frac{2\pi}{360} \Rightarrow 1^{o} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0.017453 \text{ radianes}$$

Cuando usamos a los radianes para medir los ángulos no es necesario escribir las unidades.

Ejemplos:
a) Convertir un tercio de grado a radianes.

Como 1º = $\frac{\pi}{180}$ radianes, entonces un tercio de grado será: $(\frac{1}{3})(\frac{\pi}{180}) = \frac{\pi}{540}$ radianes, o bien, usando una aproximación tenemos

$$(\frac{1}{3})^0 \approx \frac{3.1416}{540} \approx 0.058 \text{ radianes}$$

b) Convertir 60º a radianes.

$$(60)(\frac{\pi}{180}) = \frac{\pi}{3} \approx 1.0472 \text{ radianes}$$

c) Convertir 37.24º a radianes.

$$37.24(\frac{\pi}{180}) \approx 0.20689\pi \approx 0.64996 \text{ radianes}$$

d) Transformar π/18 radianes a grados.

$$(\frac{\pi}{18})(\frac{180}{\pi})^0 = 10^0$$

e) Transformar π/4 a grados.

$$(\frac{\pi}{4})(\frac{180}{\pi})^0 = 45^0$$

f) Transformar 1.0472 radianes a grados.

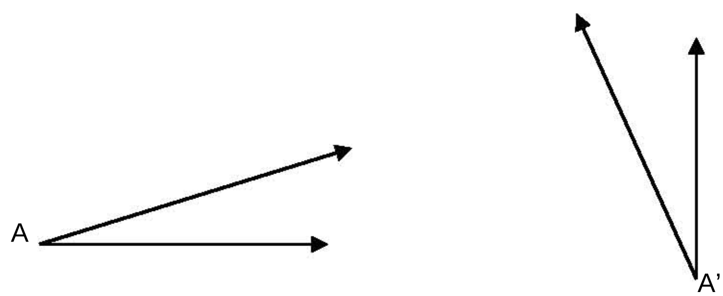
$$1.0472(\frac{180}{\pi})^0 = \frac{188.496}{\pi} \approx 60^0$$

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

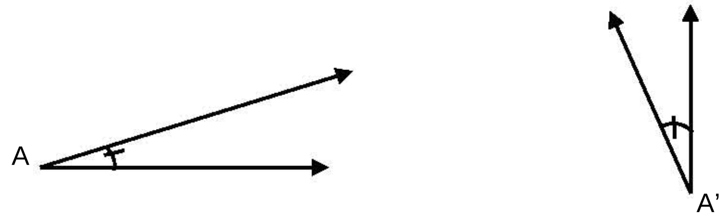
A continuación se dará la clasificación de los ángulos de acuerdo a tres criterios.

SEGÚN SUS MEDIDAS.

ÁNGULOS CONGRUENTES. Tienen la misma medida.

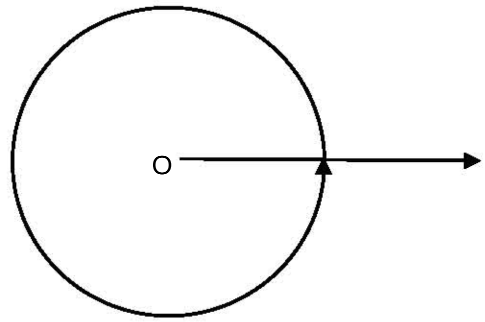


A veces se coloca una pequeña marca para indicar que los ángulos son congruentes.

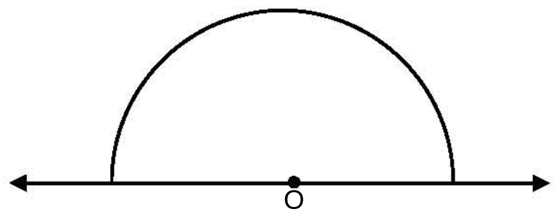


En ocasiones, abusando del lenguaje, a los ángulos que tienen la misma medida también se les llama iguales. Se suele utilizar el símbolo ≅ para denotar a ángulos congruentes, o simplemente se escribe el símbolo =, abusando ahora de la notación.

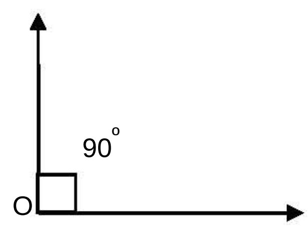
ÁNGULOS DE UNA VUELTA. Mide 360º



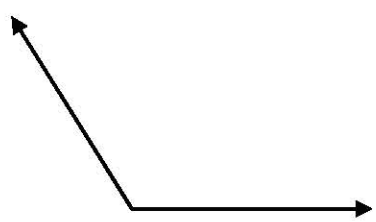
ÁNGULO LLANO. Mide 180º



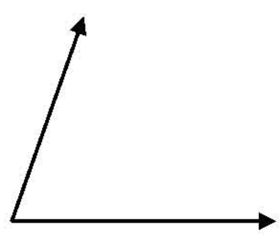
ÁNGULO RECTO. Mide 90º



ÁNGULO OBTUSO. Mide más de 90º pero menos de 180º

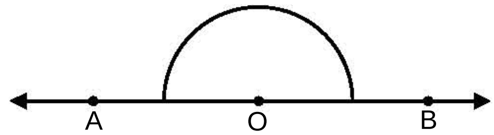


ÁNGULO AGUDO. Mide menos de 90º pero más de 0º



SEGUN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

ÁNGULO DE LADOS COLINEALES. Sus lados son rayos opuestos.

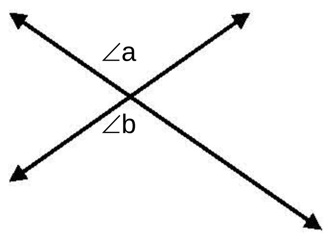


$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son rayos opuestos

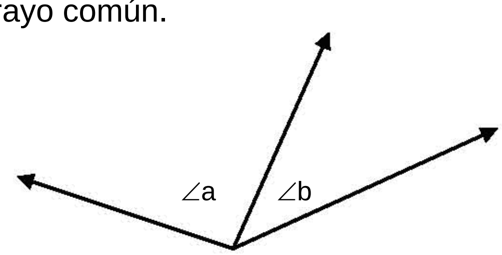
Aún no hemos definido que son rayos opuestos, lo haremos ahora.

DEFINICIÓN: Los rayos **OA** y **OB** son rayos opuestos siempre y cuando **O** esté entre **A** y **B**. (Al decir que **O** este entre **A** y **B** nos estamos refiriendo a la relación que acabamos de definir *estar entre*.)

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE. La definición se deja como ejercicio al lector.

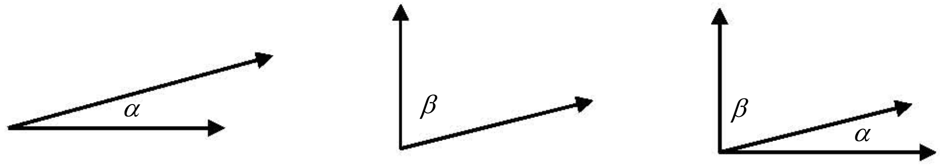


ÁNGULOS ADYACENTES. Aquellos que tienen un lado común y que sus lados no comunes estén en regiones diferentes de las determinadas por la recta que contiene al rayo común.

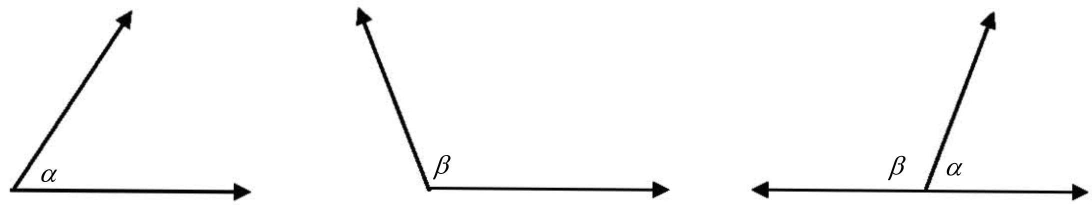


SEGÚN LA SUMA DE SUS MEDIDAS

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS. Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es de 90º. Cada uno de los ángulos se llama complemento del otro. Notemos que estos ángulos no tienen que ser adyacentes.



ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS. Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es de 180º. Cada uno se llama suplemento del otro; los ángulos no tienen que ser adyacentes.



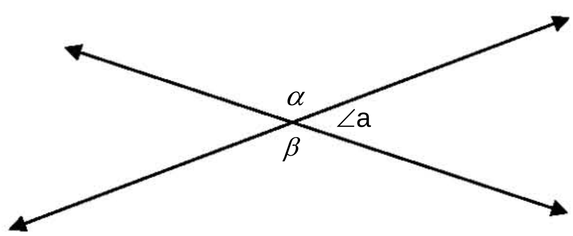
A continuación demostraremos nuestro primer teorema. Antes de hacerlo, es importante que sepas que un teorema tiene dos partes fundamentales: la hipótesis y la tesis. La hipótesis es la parte del teorema que nos indica de lo que vamos a partir, son los supuestos, es, por decirlo llanamente, el dato o los datos que nos dan. La tesis es la parte del teorema que queremos demostrar.

TEOREMA 1. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

HIPOTESIS: α y β son ángulos opuestos por el vértice.

TESIS: $\alpha = \beta$

DEMOSTRACIÓN.
Para la demostración de este teorema nos auxiliaremos del ángulo **a**, suplemento del ángulo α.



Los ángulos α y **a** forman un ángulo llano, por lo que su suma es igual a 180º. También β y $\angle$**a** forman un ángulo llano, y por tanto son suplementarios.

De lo anterior tenemos que α y β son suplementos del $\angle$a

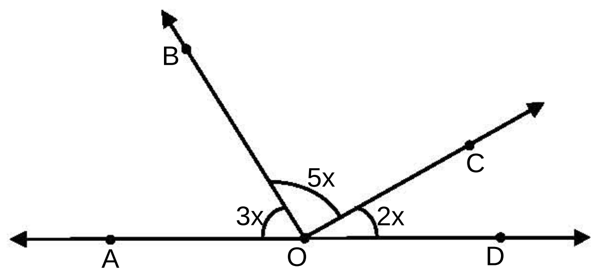
$$\therefore \alpha = \beta$$

En la última afirmación estamos usando el hecho de que suplementos de ángulos congruentes son también congruentes, cuya demostración se dejará como ejercicio al estudiante.

Culminaremos esta sección con problemas que nos permitan trabajar el concepto de ángulo.

§ 5
PROBLEMAS

1. La tierra tarda prácticamente un día en completar un giro en torno a su eje, es decir, completa en 24 horas una vuelta de 360º. ¿Cuántos grados avanza en una hora cada lugar del planeta durante ese movimiento?, es decir, en términos geográficos, ¿cuántos grados de longitud tiene una hora?
2. Al mirar un ángulo a través de una lupa que aumenta cinco veces el tamaño de los objetos que se miran por medio de ella, ¿en cuánto aumentará la magnitud del ángulo?
3. a) Si la medida de un ángulo es igual a la medida de su suplemento, ¿cuál es la medida del ángulo?
   b) Si un ángulo es obtuso, ¿su suplemento es siempre un ángulo agudo?
   c) ¿Podrían ser adyacentes dos ángulos opuestos por el vértice?
4. Define el concepto de ángulos opuestos por el vértice.
5. a) En la siguiente figura cuánto vale **x**.



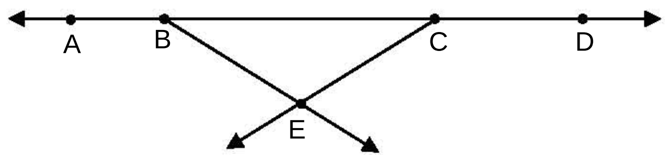
   b) En la figura anterior: ¿existen ángulos opuestos por el vértice?, ¿existe un ángulo recto?, ¿hay ángulos congruentes?, ¿existen ángulos suplementarios?, ¿hay ángulos complementarios? En caso de existir, ¿cuántas parejas de suplementarios hay?, ¿cuántas parejas de complementarios hay?, nómbralos. Menciona: todos los ángulos adyacentes, un ángulo llano, un ángulo de lados colineales, todos los ángulos obtusos y todos los ángulos agudos. Explica si son correctas o no las siguientes afirmaciones: “los ángulos AOB, BOC, COD son suplementarios” y “los ángulos AOB y AOC son adyacentes”. Para responder algunas de estas preguntas toma en cuenta tu respuesta del inciso a.
6. a) Encuentra el suplemento de 46º 18´ 30´´. (No utilices decimales).
   b) ¿Es 8º 10´ el complemento del triple de 25º 40´? (No utilizar decimales).
7. La medida del suplemento de un ángulo es cinco veces la medida del complemento del mismo ángulo. Halla la medida del ángulo. Expresa el resultado en grados sin usar decimales.
8. Determina el número de grados en el ángulo menor formado por las manecillas del reloj a las diez y diez. Expresa el resultado en grados y radianes.
9. Demuestra que:
   a) Si dos ángulos son congruentes, entonces sus suplementos también lo son.
   b) Si los suplementos de dos ángulos son congruentes, entonces los ángulos también lo son.

En la búsqueda de fijar los resultados más importantes, cuyas demostraciones pueden no ser inmediatas o sencillas, haremos una diferencia entre éstos y otros en los que sus demostraciones son más simples. A los primeros los llamaremos TEOREMAS y a los segundos, PROPOSICIONES.

Los enunciados de los incisos anteriores, (a) y (b) se pueden resumir en un nuevo enunciado como sigue: PROPOSICION 1. Dos ángulos son iguales si y sólo si sus suplementos son iguales.

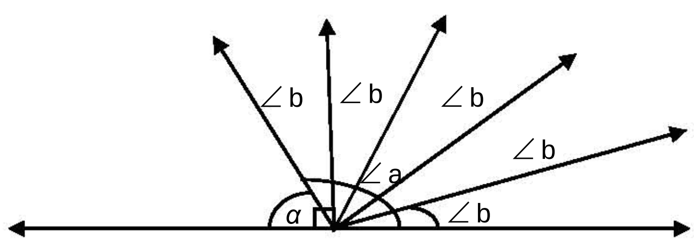
Generalmente las demostraciones de las proposiciones se dejaran como ejercicio al estudiante.

10. Demuestra que $\angle$DBE es congruente con $\angle$ACE, si sabemos que $\angle$ABE es congruente con $\angle$DCE y A, B, C y D son colineales.



SUGERENCIAS

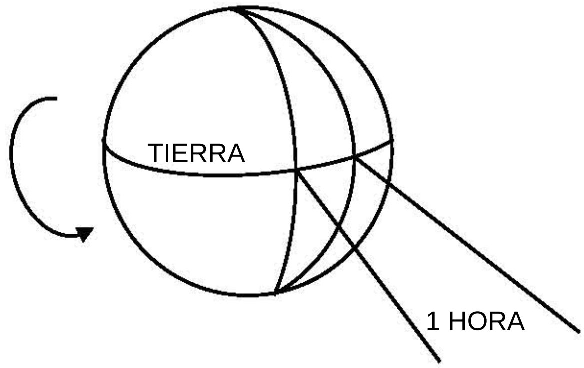
1. Basta realizar la operación correspondiente. Traza el dibujo.
2. Cuando observamos a través de una lupa ¿cambian las formas de las cosas?
3. a) Usa la definición de ángulos suplementarios y no olvides usar los datos que te dan.
   b) Utiliza las definiciones y asegúrate que las estás comprendiendo.
   c) La misma sugerencia anterior.
4. Dibuja un par de rayos opuestos por el vértice, ¿cómo son los lados de estos ángulos? Revisa la definición de ángulo de lados colineales.
5. Al igual que en la pregunta anterior, sólo requieres tener claridad en las definiciones.
6. a) Observa que 180° lo puedes expresar como 179°59’60”.
   b) Expresa de manera análoga al ángulo de 90º.
7. Auxíliate del siguiente dibujo, donde α es el ángulo buscado.



8. No olvides que al avanzar la manecilla del minutero también avanza la del horario.
9. Dibuja, escribe claramente tu hipótesis y tu tesis. Usa los axiomas y la definición de ángulos suplementarios.
10. Usa el hecho de que se forman ángulos llanos y la proposición anterior.

SOLUCIONES

1. Vamos a representar la situación mediante un dibujo:



Dividamos 360º/24 = 15º

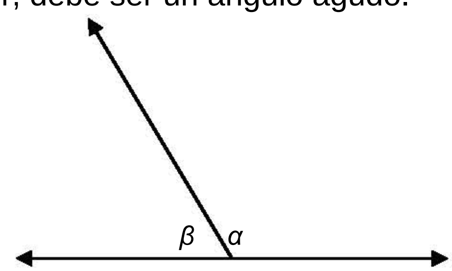
2. Lo que aumenta cuando vemos a través de una lupa es el tamaño de las cosas pero la forma se conserva, es decir, lo que se ve alterado son las longitudes de los lados pero la magnitud de los ángulos se mantiene igual, recordemos que los lados de los ángulos tienen longitud infinita.
3. a) Si llamamos **x** a la medida del ángulo que estamos buscando entonces la medida de su suplemento es también **x**, por dato. Ahora por definición de ángulos suplementarios tenemos:

$$x + x = 180º \quad \Rightarrow \quad 2x = 180º$$

   Ahora, por el axioma que dice: "si cantidades iguales se dividen entre cantidades iguales, los resultados siguen siendo iguales" (ax. 6).

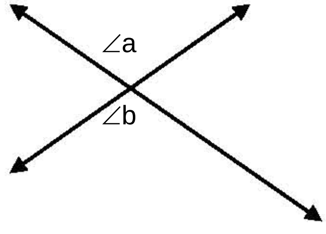
$$x = 90º$$

   b) Como un ángulo obtuso es aquel que mide más de 90º pero menos de 180º y dado que, dos ángulos son suplementarios si suman 180º, entonces la medida del suplemento del ángulo obtuso debe ser menor de 90º, aunque mayor que 0º, es decir, debe ser un ángulo agudo.

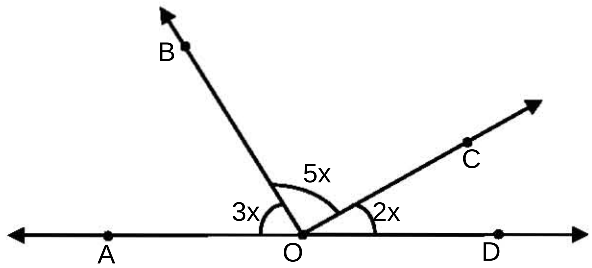


α ángulo obtuso y *β* su suplemento

   c) No porque no tienen lados en común.
4. DEFINICIÓN: Dos ángulos son opuestos por el vértice siempre y cuando los lados de uno son rayos opuestos a los lados del otro.



5.



Dado que los tres ángulos forman un ángulo llano, debe ocurrir que:

$$3x + 5x + 2x = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad 10x = 180^\circ$$

Por el axioma que afirma: "si cantidades iguales se dividen entre cantidades iguales los cocientes son iguales", (ax. 6), tenemos

$$x = 180^\circ/10$$
$$x = 18^\circ$$

No existe ninguna pareja de ángulos que tengan por lados rayos opuestos, por lo que no existen ángulos opuestos por el vértice.
Ahora bien, como $\angle BOC = 5x$, entonces por el axioma que dice: "Toda cantidad puede ser reemplazada por su igual", (ax. 2) tenemos:

$$\angle BOC = 5(18^\circ) = 90^\circ$$

por lo que $\angle BOC$ es un ángulo recto
En la figura existen seis ángulos diferentes, usando el último axioma citado, encontramos sus medidas, de lo cual obtenemos:

$$\angle AOB = 3(18^\circ) = 54^\circ$$
$$\angle DOC = 2x = 2(18^\circ) = 36^\circ$$
$$\angle AOC = 8\ (18^\circ) = 144^\circ$$
$$\angle BOD = 7\ (18^\circ) = 126^\circ$$
$$\angle BOC = 90^\circ$$
$$\angle AOD = 180^\circ$$

Ninguno es congruente.
Existen dos parejas de ángulos suplementarios, a saber:

$$\angle AOB \text{ con } \angle DOB \text{ y } \angle AOC \text{ con } \angle COD$$

ya que,

$$\angle AOB + \angle DOB = 54^\circ + 126^\circ = 180^\circ$$

esto es, cumplen con la definición de ángulos suplementarios
Análogamente $\angle AOC$ y $\angle COD$ son suplementarios pues,

$$\angle AOC + \angle COD = 144^\circ + 36^\circ = 180^\circ$$

La pareja $\angle AOB$ y $\angle DOC$ son ángulos complementarios dado que

$$\angle AOB + \angle DOC = 54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$$

Hay dos parejas de ángulos adyacentes: $\angle AOB$ con $\angle COB$, puesto que tienen a $\overrightarrow{OB}$ como lado común, además de que $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{CO}$ son lados de cada uno de los ángulos, situados en distintas regiones con respecto a $\overrightarrow{BO}$. Por las mismas razones $\angle COB$ y $\angle DOC$ son adyacentes.

$\angle$AOD es un ángulo tanto llano como colineal.

Existen dos ángulos obtusos: $\angle$DOB y $\angle$AOC puesto que miden más de 90° y menos de 180°.

$\angle$AOB y $\angle$DOC son ángulos agudos, dado que miden más de 0° y menos de 90°.

Los ángulos **AOB**, **BOC** y **COD** no pueden ser suplementarios, puesto que por definición sólo deben ser dos los que sumen 180°.

Los ángulos **AOB** y **AOC** no son adyacentes, debido a que los lados no comunes $\overrightarrow{BO}$ y $\overrightarrow{CO}$ no están situados en regiones diferentes respecto a la recta que pasa por el rayo **AO**.

6. a) Estamos buscando un ángulo α tal que:

$$\alpha + 46º\ 18'\ 30'' = 180º.$$

Para encontrarlo debemos realizar la diferencia

$$180º - 46º\ 18'\ 30''$$

usando el axioma que afirma: "Si a cantidades iguales se le restan cantidades iguales los resultados son iguales", (ax. 5).
Para realizar la operación descomponemos 180º en grados minutos y segundos.

$$180º = 179º\ 59'\ 60''$$

Realicemos ahora la resta

$$179º\ 59'\ 60'' - 46º\ 18'\ 30'' = 133º\ 41'\ 30''$$

Por lo tanto el suplemento de 46º 18' 30" es 133º 41' 30"

b) Empecemos por obtener el triple de 25º 40'

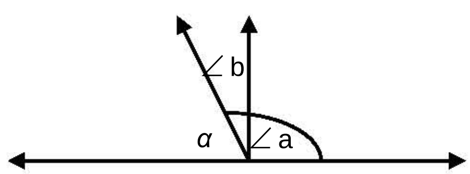
$$3(25º\ 40') = 75º\ 120' = 75º + 2º = 77º$$

Ahora realicemos la suma

$$77º + 8º\ 10' = 85º\ 10'$$

Como no suman 90º no son complementarios.

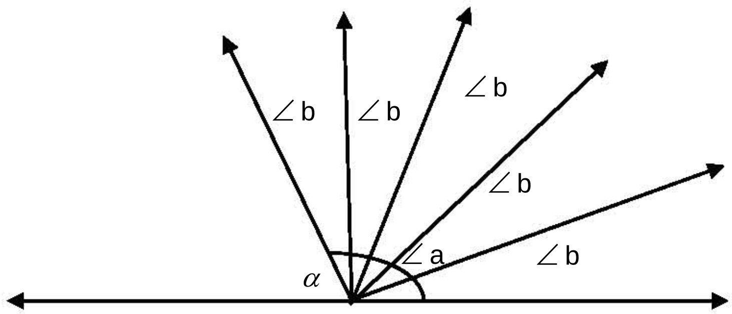
7. Llamemos α al ángulo cuya medida buscamos, a su suplemento **a** y a su complemento **b**.



Usando las definiciones de suplemento, complemento y el axioma que afirma: "Si a cantidades iguales se quitan cantidades iguales los resultados son iguales".obtenemos:

$$\alpha + \angle a = 180º \quad \Rightarrow \quad \angle a = 180º - \alpha$$
$$\angle b + \alpha = 90º \quad \Rightarrow \quad \angle b = 90º - \alpha$$

Ahora bien, sabemos por dato, que el suplemento de α es cinco veces su suplemento, es decir, $\angle a = 5\angle b$



Por lo que usando axioma que afirma: “Toda cantidad puede ser sustituida por su igual”, (ax. 2), tenemos:

$$180º - \alpha = 5(90º - \alpha)$$

Realizando las operaciones

$$180º - \alpha = 5(90º) - 5\alpha \Rightarrow 180º - \alpha = 450º - 5\alpha$$

Ahora bien, por axioma que afirma: “Si a cantidades iguales se suman cantidades iguales los resultados son iguales”, (ax. 5), obtenemos:

$$5\alpha - \alpha = 450º - 180º \Rightarrow 4\alpha = 270º$$

Y ahora, por axioma que afirma “Si a cantidades iguales se les divide entre cantidades iguales, distintas de cero, los resultados son iguales”, (ax. 6), tenemos:

$$\alpha = 450º/4 \Rightarrow \alpha = 67.5º$$

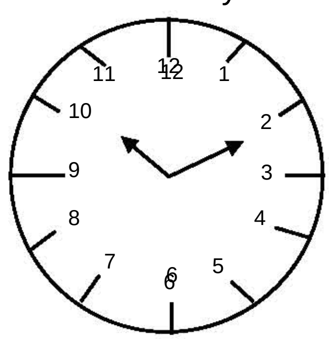
Convirtiendo en minutos los decimales

$$(0.5)(60') = 30'$$

Por lo tanto

$$\alpha = 67º\ 30'$$

8. Sabemos que el ángulo de una vuelta, es el ángulo que forman las manecillas del reloj después de recorrer las 12 horas y mide 360º.



En una hora el horario recorre un ángulo de 360º/ 12 = 30º y el mismo ángulo el minutero en cinco minutos. Ubiquémonos a las 10 horas. El ángulo menor formado por el minutero y el horario es de 60º. A las 10:10 el minutero habrá recorrido 60º. Como 10 minutos es la sexta parte de una hora, el horario habrá recorrido la sexta parte de lo que recorre en una hora, es decir 30º/6 = 5º.

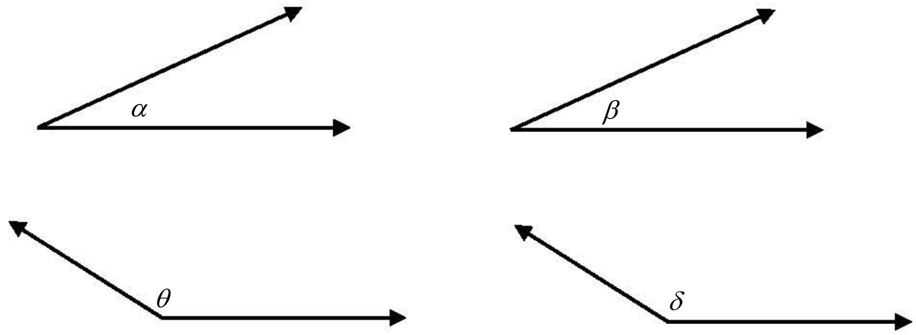
En resumen, a las 10 horas se tenía un ángulo de 60º, a las 10:10 el minutero avanzó 60º y el horario 5º, por lo que el ángulo menor formado por el minutero y el horario será de 115º.

Transformando a radianes:

$$115^{\circ}\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{23}{36}\pi \cong 2.00712864 \text{ radianes}$$

9. Sean α y β dos ángulos y θ y δ sus respectivos suplementos.

a)



HIPÓTESIS: $\alpha = \beta$

α es suplemento de θ y β es suplemento de δ

TESIS: $\theta = \delta$

DEMOSTRACIÓN:

Como α es suplemento de θ y β es suplemento de δ, por hipótesis, entonces,

$$\alpha + \theta = 180^{\circ} \text{ y } \beta + \delta = 180^{\circ},$$

por definición de ángulos suplementarios, lo que implica que

$$\alpha + \theta = \beta + \delta$$

por el axioma que de dice: "cosas iguales a una tercera son iguales entre sí", (ax. 1).

Ahora, como por hipótesis $\alpha = \beta$, tenemos:

$$\alpha + \theta - \alpha = \beta + \delta - \beta$$

por el axioma que dice: "si a cantidades iguales se le resta cantidades iguales las diferencias son iguales", (ax. 5)

$$\therefore \theta = \delta$$

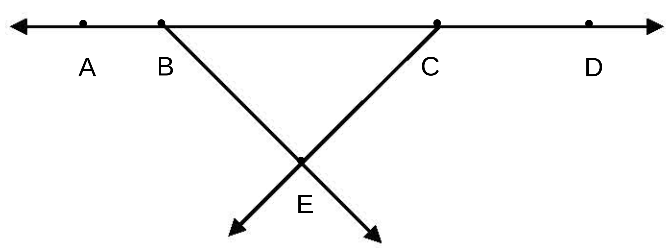
Que es lo que se quería demostrar.

b) La demostración es totalmente análoga a la anterior por lo que no se hará, sólo hay que invertir los pasos. Se sugiere al estudiante realizarla.

10. HIPÓTESIS: $\angle$ABE = $\angle$DCE, **A**, **B**, **C** y **D** son puntos colineales.

TESIS: $\angle$DBE = $\angle$ACE

DEMOSTRACIÓN



Como por hipótesis A, B y D son colineales, $\angle ABE$ y $\angle DBE$ forman un ángulo llano, por lo que su suma es igual a 180º:

$$\angle ABE + \angle DBE = 180^\circ$$

Con los mismos argumentos $\angle DCE$ y $\angle ACE$ suman 180º:

$$\angle DCE + \angle ACE = 180^\circ$$

Así tenemos que $\angle DBE$ es el suplemento de $\angle ABE$, y $\angle ACE$ es el suplemento de $\angle DCE$.

Además, por hipótesis, $\angle ABE$ y $\angle DCE$ son iguales o congruentes, entonces por el ejercicio (9) que acabamos de demostrar, $\angle DBE$ y $\angle ACE$ son también iguales:

$$\angle DBE = \angle ACE \quad \text{(QED)}.$$

§ 6

PARALELISMO

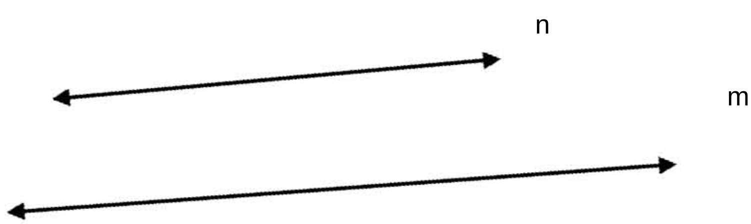
Como siempre en el método deductivo, iniciaremos por definir el concepto. Ya en los experimentos y en las conjeturas teníamos una aproximación de la definición de paralelismo, formalicemos ahora.

DEFINICIÓN. Dos o más rectas, que están en un mismo plano, son paralelas si y sólo si, no se intersectan en punto alguno o coinciden en todos sus puntos.

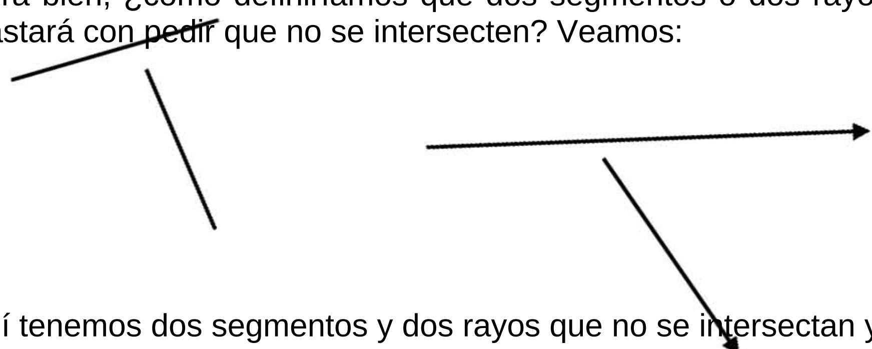
Usaremos la siguiente notación para dos rectas paralelas:

$$n \,||\, m$$

Que se lee “n es paralela a m”.



Ahora bien, ¿cómo definiríamos que dos segmentos o dos rayos son paralelos?, ¿Bastará con pedir que no se intersecten? Veamos:



Aquí tenemos dos segmentos y dos rayos que no se intersectan y sin embargo, no son paralelos.

Pensándolo un poco más, nos conviene utilizar a las rectas que contienen a los rayos o segmentos.

DEFINICIÓN: Los rayos o los segmentos, o bien, un rayo y un segmento, son paralelos si y sólo si son subconjuntos de rectas paralelas.

A continuación demostraremos una serie de teoremas sobre paralelismo. En las demostraciones sólo señalaremos que estamos utilizando un axioma, sin indicar cual es, esperando que el lector esté, a estas alturas, familiarizado con ellos.

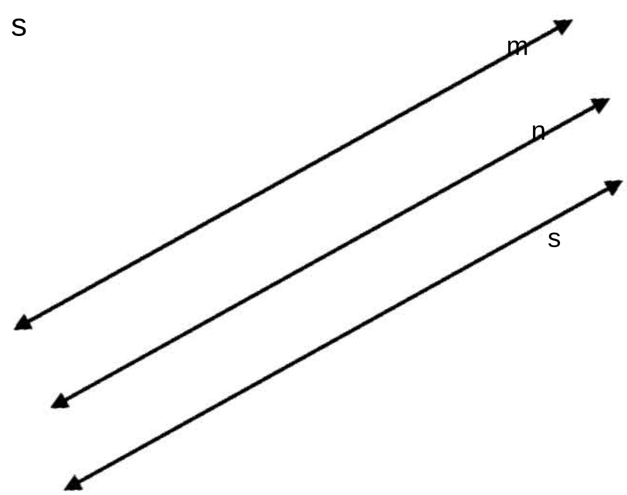
El teorema que demostraremos enseguida, esta basado en el famoso quinto postulado de Euclides, que ahora volveremos a enunciar, pero escrito como de una manera equivalente a la que Euclides dio inicialmente, y que por ser esencialmente el mismo lo seguiremos llamando de esa manera en honor a éste gran matemático.

QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES.
Por un punto no contenido en una recta dada, pasa exactamente una recta paralela a esa recta.

Este postulado fue discutido por más de dos mil años y una gran cantidad de brillantes matemáticos quisieron demostrarlo, con lo cual hubiera pasado de postulado a teorema, pero no pudieron hacerlo. En el siglo XIX, Lovachevski logró desarrollar una geometría perfectamente lógica en la cual pasa más de una recta paralela a una recta dada por un punto exterior. Más aun Riemann, matemático alemán, demostró, también en el siglo XIX, que se puede construir otro tipo de geometría, donde no se puede trazar ninguna paralela a la recta dada por un punto exterior.

La demostración la haremos por el método llamado reducción al absurdo, el cual consiste en suponer que la tesis es falsa, por lo que su negación debe ser verdadera y llegar a una contradicción con alguna proposición que sabemos verdadera.
TEOREMA 2. Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

Sean, **m**, **n** y **s**, tres rectas.
HIPÓTESIS: m II n y n II s
TESIS: m II s

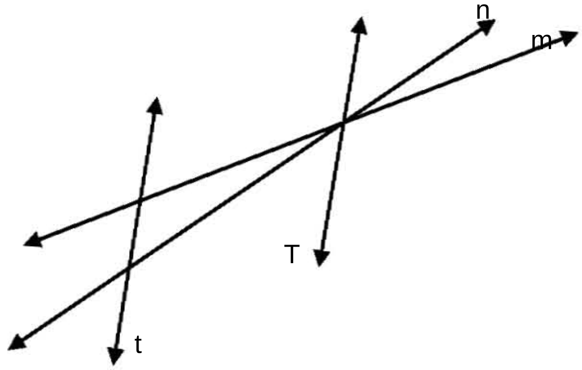


DEMOSTRACIÓN.
Vamos a suponer que **m** y **s** son rectas distintas, pues si fueran la misma recta no habría nada que demostrar ya que por hipótesis las tres rectas serían paralelas.
Para hacer la demostración por reducción al absurdo, suponemos que **m** no es paralela a **s**. Esto implica, que **m** y **s** se cortan en un punto **P**. Pero si **m** y **s** sólo se cortan en un punto **P**, tenemos dos rectas distintas que pasan por **P** y son paralelas a **n**, lo cual contradice el quinto postulado que acabamos de citar.

$\therefore$ m II s

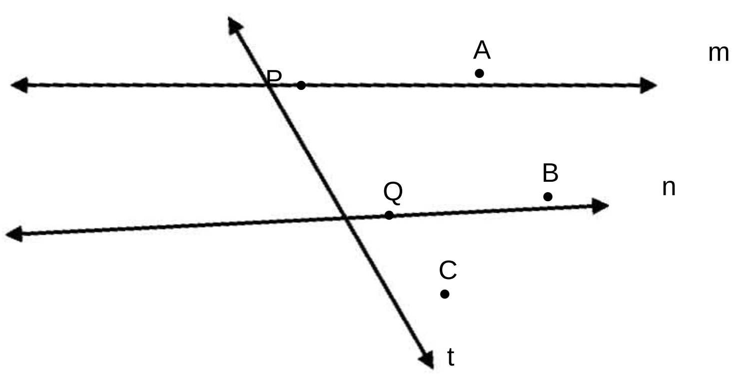
A continuación trabajaremos con rectas transversales, por lo que las definiremos formalmente.

DEFINICIÓN: Una transversal es una recta que corta a dos o más rectas en puntos diferentes.



En la figura **t** es una transversal de las rectas **m** y **n,** mientras que **T** no lo es.

En los experimentos hemos hablado de que en dos rectas que son cortadas por una transversal se forman ocho parejas de ángulos que tienen importancia para nuestro estudio de las propiedades geométricas en rectas paralelas, ahora las definiremos.
DEFINICIÓN: Sean **A** un punto en la recta **m, B** un punto en la recta **n** y **C** un punto en la transversal **t.** Los ángulos **APQ** y **BQC** son ángulos correspondientes siempre y cuando la transversal **t** intersecte a la recta **m** en **P** y a la recta **n** en **Q**, de tal manera que **A** y **B** estén del mismo lado de la transversal.

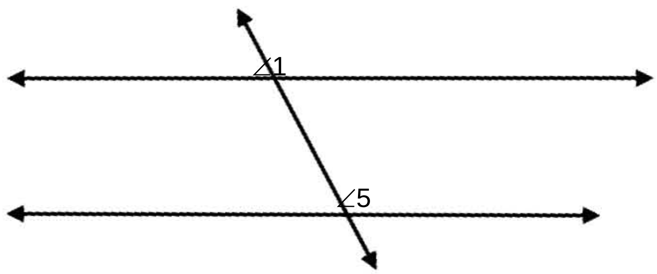


Se deja al lector como ejercicio definir los ángulos alternos internos y alternos externos.

De aquí y en adelante, cuando hablemos de parejas de ángulos formados por dos rectas y una transversal nos referiremos a estas parejas de ángulos.

Hemos conjeturado que si las rectas son paralelas, al ser cortadas por una transversal ocurre que los ángulos correspondientes, los ángulos alternos internos y los alternos externos son iguales, esto es algo que con el conjunto de axiomas, postulados y teoremas que hasta ahora tenemos no podemos demostrar, así que tendremos que enunciar un postulado.

POSTULADO FUNDAMENTAL DEL PARALELISMO.
Si dos rectas son paralelas, entonces al ser cortadas por una transversal forman ángulos correspondientes iguales.

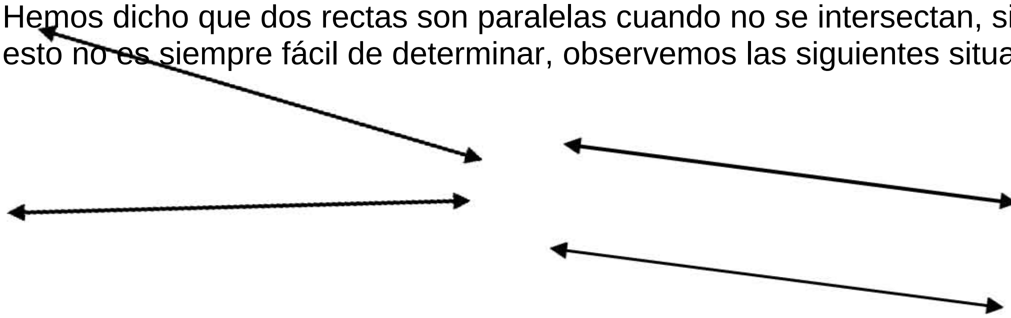


$\angle 1 = \angle 5$

Observa que hemos formulado el postulado sólo en términos de los ángulos correspondientes, esto es así porque la igualdad entre el resto de las parejas se podrá deducir de esta formulación. El postulado se podría haber enunciado en términos de los ángulos alternos internos, o bien de los alternos externos y se obtendría una proposición totalmente equivalente.

Ustedes podrán demostrar la igualdad del resto de las parejas de ángulos en uno de los ejercicios.

Hemos dicho que dos rectas son paralelas cuando no se intersectan, sin embargo, esto no es siempre fácil de determinar, observemos las siguientes situaciones:

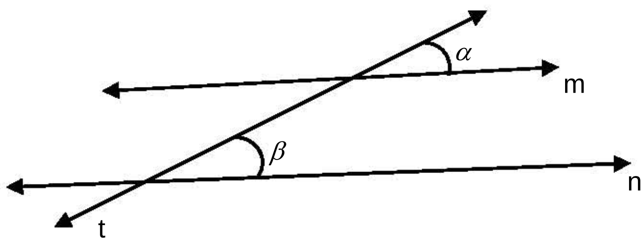


En el primer caso, se observa que las rectas al prolongarlas se cortan en un punto, y por lo tanto no son paralelas, en el segundo ¿las rectas son paralelas?, aparentemente si, pero si las prolongamos ¿no se cortarán? Tendríamos que prolongarlas demasiado y si no se intersecan todavía nos quedaría la duda si no se encontrarán en un punto situado más allá de donde las prologuemos en un momento dado.

Un ejemplo de esa situación son los rayos del sol pues salen con un ángulo muy pequeño y recorren distancias muy grandes – 150 millones de kilómetros – de tal suerte que al llegar a la tierra aparentan ser paralelos.

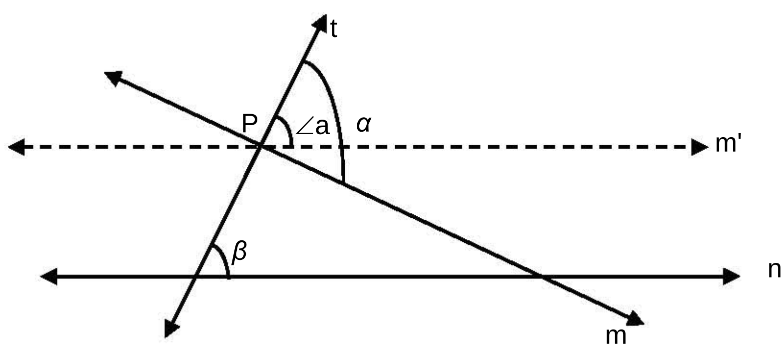
Necesitamos un criterio que nos permita determinar con funcionalidad cuando dos rectas son paralelas, este nos lo dará el siguiente teorema:

TEOREMA 3. TEORMA FUNDAMENTAL DEL PARALELISMO (TFP)
Si al cortar dos rectas distintas con una transversal se obtienen ángulos correspondientes iguales, entonces las rectas son paralelas.



HIPÓTESIS: **m** y **n** son dos rectas diferentes, **t** una transversal a ellas, α y β ángulos correspondientes y $\alpha = \beta$
TESIS: m ǁ n

DEMOSTRACIÓN. (Por reducción al absurdo)
Supongamos que **m** no es paralela a **n**, por lo que conforme al quinto postulado de Euclides podemos trazar una única paralela **m'** a **n** por el punto de intersección de **m** con **t,** al cual llamaremos **P**. Lo anterior implica, por el postulado de paralelismo, que los ángulos correspondientes que se forman deben ser iguales. Si llamamos **a** al ángulo correspondiente con β entonces, $\angle$**a** = β.



Como por hipótesis $\alpha = \beta$, entonces $\alpha = \angle$a. Esto es una contradicción, porque los ángulos α y $\angle$a tienen el mismo origen y uno de sus rayos es común, el que es parte de la recta **t**, por lo que el otro rayo debe ser el mismo para los dos ángulos, lo cual no es así. Esta contradicción surge de suponer que **m** no es paralela a **n**.

$\therefore$ m II n

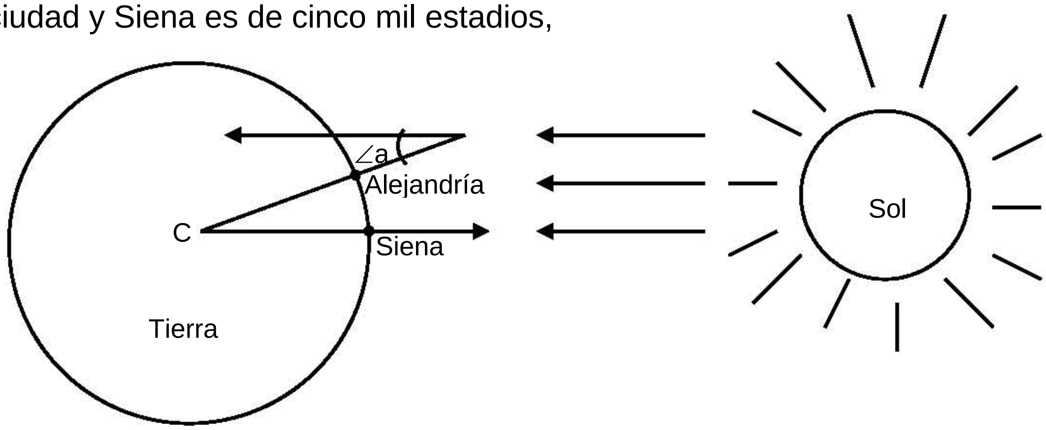
Ahora para verificar el paralelismo de dos rectas distintas cualesquiera basta con hacer la prueba de la transversal. Si al trazar esta se obtienen ángulos correspondientes iguales, podemos asegurar sin duda alguna que son paralelas. También se puede establecer un criterio parecido, usando la congruencia entre ángulos alternos internos o externos, como demostrará el lector más adelante.

Estos son los teoremas básicos que utilizaremos para resolver nuestros ejercicios y problemas. Pero antes de pasar a los problemas resolveremos el problema de motivación.

§7.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE MOTIVACIÓN

El problema que nos planteamos resolver consiste en reconstruir el razonamiento hecho por Eratóstenes para encontrar el radio de la tierra, suponiendo que los rayos del sol llegan paralelos a la tierra, que esta es redonda y conociendo que el ángulo que proyectan los objetos en Alejandría es de 7º12' y que la distancia entre ésta ciudad y Siena es de cinco mil estadios,



El ángulo **a** es el formado por el rayo del sol y la varilla, que al prolongarse llegará al centro de la tierra de tal manera que será la transversal que cortará los rayos paralelos del sol. Así se formarán ángulos correspondientes iguales, según afirmamos en el Postulado Fundamental del Paralelismo. Pero además los ángulos alternos internos también son iguales, lo cual se te propone demuestres en el problema 3 inciso a, que aparece más adelante,

$$\therefore \ \angle a = \angle b$$

$$\therefore \ \angle b = 7^{\circ}12'$$

Obtengamos la razón que hay entre el $\angle a$ y la circunferencia completa (que representa la tierra)

$$\frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} = \frac{7.2^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{1}{50}$$

Esto es, el ángulo de 7º12' es 1/50 parte de una circunferencia completa. Por lo que la distancia de Siena a Alejandría tiene que ser 1/50 parte de la longitud de la circunferencia de la tierra. En consecuencia 50 (5000) = 250 000 estadios, es la circunferencia de la tierra. Dado que un estadio es igual a 158.6 m, la circunferencia de la tierra dada en kilómetros es:

$$(250\ 000)(158.6) = 39\ 650\ 000 \text{ m} = 39\ 650 \text{ Km.}$$

Hoy se sabe que la longitud de la circunferencia de la tierra en el ecuador, es alrededor de 40 000 km, por lo que podemos concluir que el error es pues muy pequeño.

Para calcular el diámetro del planeta recurrimos a la fórmula del perímetro de la circunferencia, $2\pi r$, el cual debe ser igual a 39650, de lo que obtenemos:

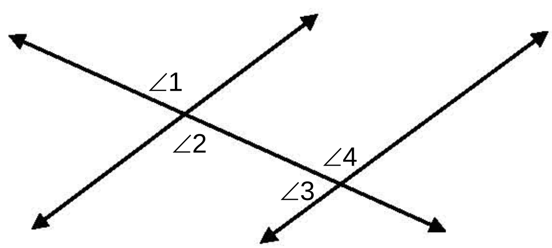
$$2\pi r = 39\ 650 \Rightarrow 2r = 39\ 650/\pi \Rightarrow d \cong 12\ 620.957 \text{ km.}$$

A continuación resolveremos problemas sobre paralelismo.

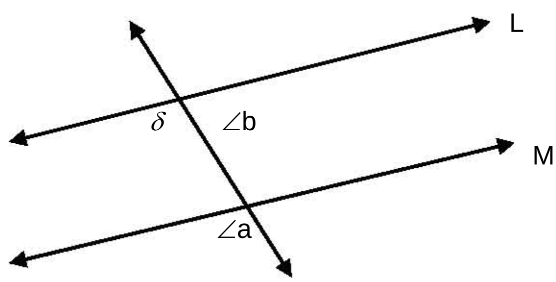
§8.

PROBLEMAS

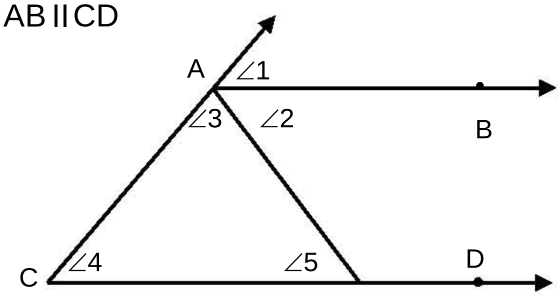
1. Demuestra que:
   a) Si en la figura $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios, entonces $\angle 1$ y $\angle 4$ son iguales.



   b) Si en la figura siguiente $\angle a + \angle b = 180º$, entonces L II M.



   c) En la siguiente figura tenemos que $\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180º$ y $\angle 4 = \angle 5$. Demuestra que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$



2. Demuestra la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2. Si en dos rectas cortadas por una transversal se forman al menos un par de ángulos correspondientes, o alternos internos o alternos externos iguales, las restantes parejas de estos ángulos también son iguales.

3. Demuestra las siguientes proposiciones sobre rectas paralelas.

a) PROPOSICIÓN 3. Si dos rectas son paralelas, entonces al ser cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos y externos son iguales. Defina antes ángulos alternos internos.

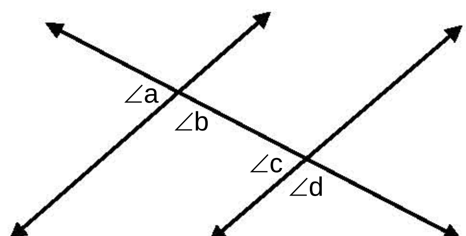
La siguiente proposición fue una conjetura que obtuvimos en nuestros experimentos, de hecho establece un criterio más para determinar el paralelismo de dos rectas.

b) PROPOSICIÓN 4. Si dos rectas son cortadas por una transversal y los ángulos colaterales internos son suplementarios, las rectas son paralelas.

c) El recíproco de este teorema también es cierto. (La proposición que tiene por hipótesis la tesis y por tesis la hipótesis de un teorema se le llama su recíproco). Se te sugiere que lo enuncies y lo demuestres.

Aquí hemos introducido un nuevo concepto: los ángulos colaterales internos, veamos cuales son.

Cuando dos rectas son cortadas por una transversal, los ángulos están del mismo lado de la transversal y dentro de las paralelas, es decir son internos, se les llaman colaterales internos y a los ángulos que están del mismo lado de la transversal pero fuera de las rectas se les llaman colaterales externos.

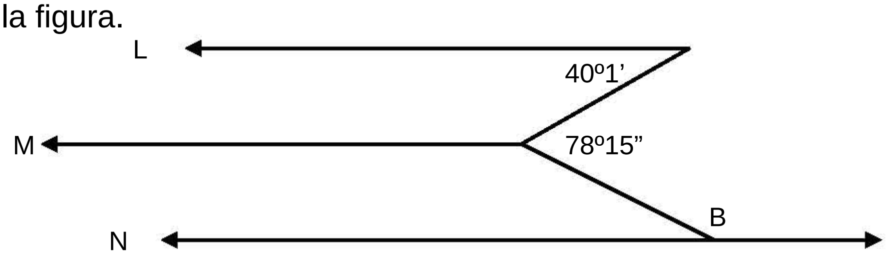


Los ángulos $\angle a$ y $\angle d$ son colaterales externos y $\angle b$ y $\angle c$ son colaterales internos

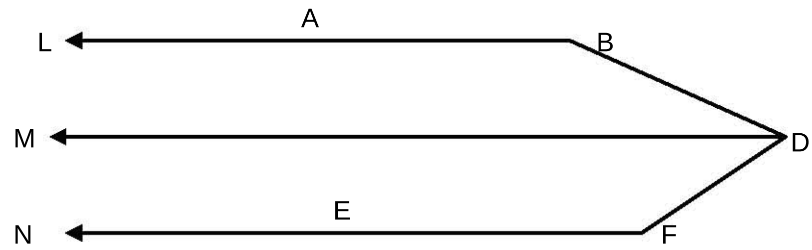
Las definiciones formales no se darán, esperando que puedas hacerlas sin dificultad.

Usando los conceptos anteriores demuestra la proposición 4. Observa que se podría demostrar una proposición equivalente para ángulos colaterales externos, si te parece interesante, demuéstrela.

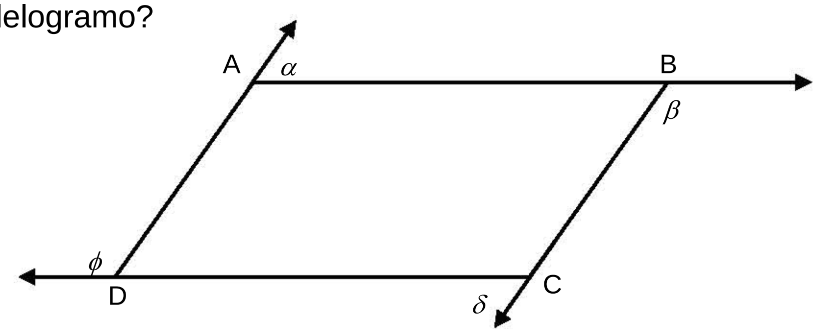
4. a) Sabiendo que **L**, **M** y **N** son paralelas, calcula el valor del ángulo **B** que se indica en la figura.



b) Si el rayo **L** es paralelo al rayo **M** y **M** es paralelo al rayo **N**, demuestra que la suma de las medidas de los ángulos **ABD**, **BDF** y **DFE** es igual a 360º.

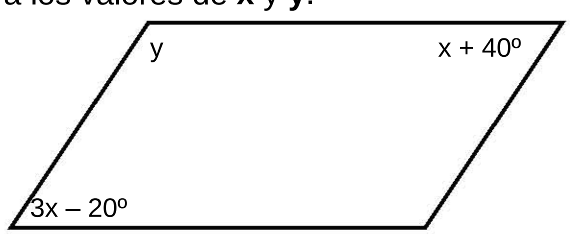


5. A continuación trataremos sobre paralelogramos. Toma en cuenta que cuando hablemos de ángulos interiores del paralelogramo, generalmente sólo se escribirá *ángulos*, y cuando sean ángulos exteriores se hará la indicación explícita.
   a) Investiga la definición de paralelogramo.
   b) ¿Cuánto suman dos ángulos con vértices consecutivos en un paralelogramo? Justifica tu afirmación.
   c) Prueba que los ángulos con vértices opuestos de un paralelogramo son iguales
   d) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un paralelogramo? Escribe el resultado en radianes.
   e) En la siguiente figura se muestran los ángulos exteriores de un paralelogramo, ¿cómo los definirías? ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un paralelogramo?



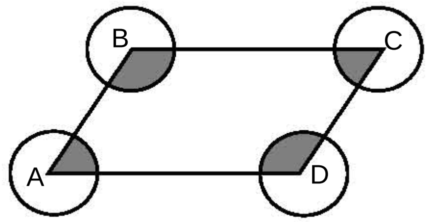
α, β, δ y ϕ son ángulos exteriores del paralelogramo

6. En los siguientes ejercicios aplicaremos los resultados que acabamos de obtener.
   a) En la figura encuentra los valores de **x** y **y**.

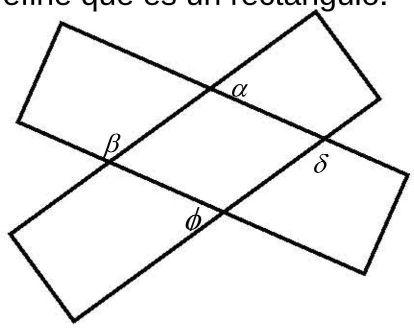


   b) Un ángulo externo de un paralelogramo es la octava parte de la suma de los cuatro ángulos externos ¿Cuánto miden los ángulos interiores del paralelogramo?

c) En la figura los lados del paralelogramo **ABCD** son mayores que 2 cm y los círculos tienen radio de 1cm cada uno. Hallar el área de la región sombreada si los centros de los círculos son los vértices del paralelogramo. Escribe el resultado en radianes.



d) En la siguiente figura tenemos dos rectángulos traslapados. Encuentra la suma: $\alpha + \beta + \delta + \phi$. Define que es un rectángulo.



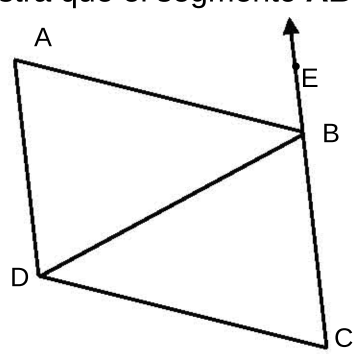
e) Demuestra la siguiente proposición:
PROPOSICIÓN 5: Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos y el paralelogramo es un rectángulo.

7 a) Investiga la definición de un cuadrilátero.

b) A continuación se va a enunciar una condición suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo, ¿Qué proposición la justifica? Explica.
Si los ángulos de vértices consecutivos de un cuadrilátero son suplementarios entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

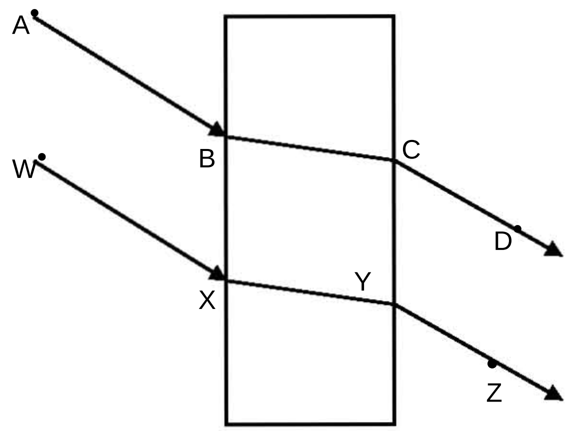
8 a) Recuerda la definición de bisectriz de un ángulo.

b) En el paralelogramo **ABCD**, el segmento **BD** biseca al ángulo **ABC**, y $\angle$DBC es igual a $\angle$DCB. Demuestra que el segmento **AB** biseca al ángulo **EBD**.



9. Demuestra que las bisectrices de los ángulos de vértices opuestos en un paralelogramo son paralelas.

10. Los rayos de luz se desvían al pasar a través de un vidrio. Supóngase que un rayo de luz sufre la misma inclinación, pero para el otro lado, al entrar que al salir del vidrio. Explica lo siguiente:
¿Por qué el rayo sale en dirección paralela a la de entrada? Esto es, ¿por qué el rayo **AB** es paralelo al rayo **CD**?
¿Por qué los rayos que son paralelos al entrar son paralelos al salir?, es decir, ¿por qué si el rayo **AB** es paralelo a **WX**, esto implica que los rayos **CD** y **YZ** son paralelos?



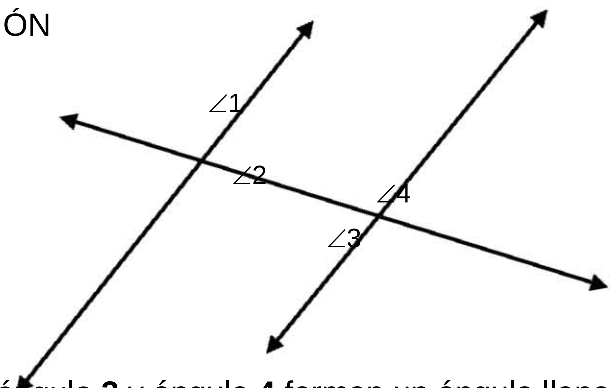
SUGERENCIAS

1. a) ¿Cómo son los ángulos **1** con **2,** y, **3** con **4**?
   b) Observa como son los ángulos **b** y δ, usa la proposición 1.
   c) Usa el Teorema Fundamental del Paralelismo, para ello encuentra ángulos correspondientes iguales.
2. Primero considera una pareja de ángulos cualquiera, puede ser un par de correspondientes, y de ahí deduce la igualdad entre el resto de las parejas. Se usan básicamente el teorema 1 y la proposición 1.
3. a) Usa en la demostración el Teorema Fundamental del Paralelismo y la proposición 2. La definición de ángulos alternos internos se parece a la de los ángulos correspondientes.
   b) La demostración se parece mucho a la del ejercicio 1a, sólo usa un ángulo auxiliar adecuado.
   c) Prácticamente hay que irse en "sentido contrario" de la demostración anterior.
4. a) Prolonga el rayo **M** en dirección opuesta y encuentra parejas de ángulos congruentes.
   b) Prolonga el rayo **L** y el rayo **N** en dirección opuesto y encuentra parejas de ángulos congruentes.
5. b) Usa el recíproco de la proposición 4.
   c) Utiliza el inciso (b) y la proposición 1.
   d) Usa el inciso (c)

6. a) Usa incisos (b) y (c) del ejercicio anterior.
   b) Utiliza inciso (d) del ejercicio anterior
   c) Observa qué figura forma en conjunto el área sombreada.
   d) Observa qué figura es formada por los lados de los rectángulos traslapados.
   e) Utiliza los incisos (b) y (c) del ejercicio anterior en la demostración.
7. b) Revisa las proposiciones sobre paralelas.
8. b) Usa el Postulado Fundamental del Paralelismo.
9. Utiliza la proposición 4 y su recíproco, así como la definición de bisectriz.
10. Usa proposición 2 y teorema 2.

SOLUCIONES

1. a) HIPÓTESIS: $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios
   TESIS: $\angle 1 = \angle 4$
   DEMOSTRACIÓN



Tenemos que ángulo **3** y ángulo **4** forman un ángulo llano, por lo tanto

$$\angle 3 + \angle 4 = 180^o$$

Por hipótesis sabemos que ángulo **2** y ángulo **3** son suplementarios, lo cual implica que

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^o.$$

De estas dos últimas afirmaciones obtenemos:

$$\angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 \text{ por axioma.}$$

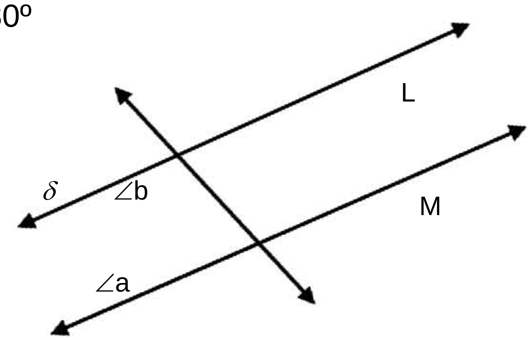
Lo que implica que $\angle 2 = \angle 4$ por axioma.

Ahora por ser opuestos por el vértice (teorema 1)

$$\angle 2 = \angle 1$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 1 \text{ por axioma.}$$

b) HIPÓTESIS: $\angle a + \angle b = 180^o$
   TESIS: L II M



DEMOSTRACIÓN

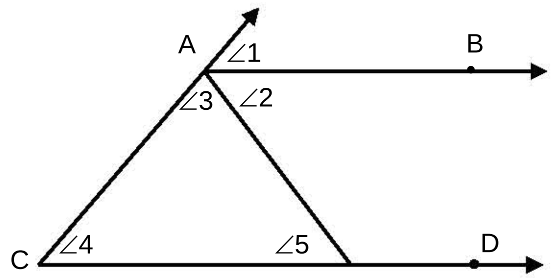
$\delta + \angle b = 180^{\circ}$ por formar ángulo llano, entonces δ y $\angle b$ son suplementarios y δ es suplemento de $\angle b$.

Ahora bien, por hipótesis $\angle a$ y $\angle b$ también son suplementarios ya que suman 180º, por lo que $\angle a$ es suplemento del $\angle b$.

Por tanto, $\delta = \angle a$ por ser suplemento de ángulos iguales (Proposición 1).

Pero δ y el ángulo **a** son ángulos correspondientes, por el teorema fundamental del paralelismo (teorema 4) las rectas **L** y **M** son paralelas.

c)



HIPÓTESIS: $\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180^{\circ}$ y $\angle 4 = \angle 5$

TESIS: $\overrightarrow{AB}$ II $\overrightarrow{CD}$

DEMOSTRACIÓN

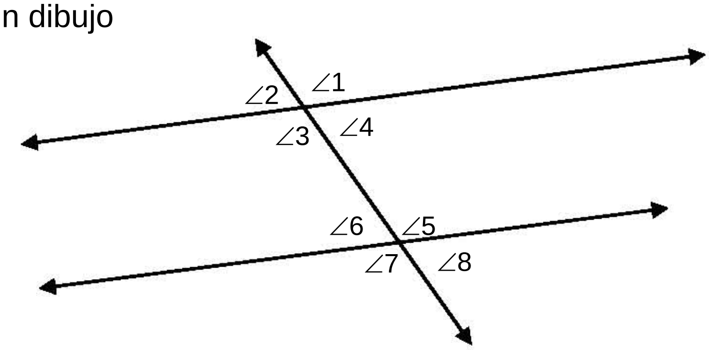
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$, por formar un ángulo llano

Lo que implica que: $\angle 1 = \angle 5$, por axioma

Además, por hipótesis $\angle 4 = \angle 5$, de donde $\angle 1 = \angle 4$, por axioma

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, por el Teorema Fundamental del Paralelismo

2. Hagamos un dibujo



Vamos a considerar una pareja de ángulos correspondientes, aunque podemos elegir una pareja de alternos internos o externos y la demostración sería análoga.

HIPÓTESIS: $\angle 1 = \angle 5$

TESIS: $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$ y $\angle 4 = \angle 8$

DEMOSTRACIÓN:

Demostraremos primero que $\angle 1 = \angle 7$

$\angle 5 = \angle 7$ por ser opuestos por el vértice, (teorema 1)

$\angle 1 = \angle 5$ por hipótesis

$\therefore \angle 1 = \angle 7$ por axioma.

De igual manera se demuestra que $\angle 3 = \angle 5$.
Demostraremos ahora que $\angle 2 = \angle 8$.
Tenemos que tanto los ángulos **5** y **7** como **1** y **2** forman un ángulo llano, por lo que son suplementarios:

$$\angle 7 + \angle 5 = 180^{o} \text{ y } \angle 1 + \angle 2 = 180^{o}$$

Por hipótesis

$$\angle 1 = \angle 5$$

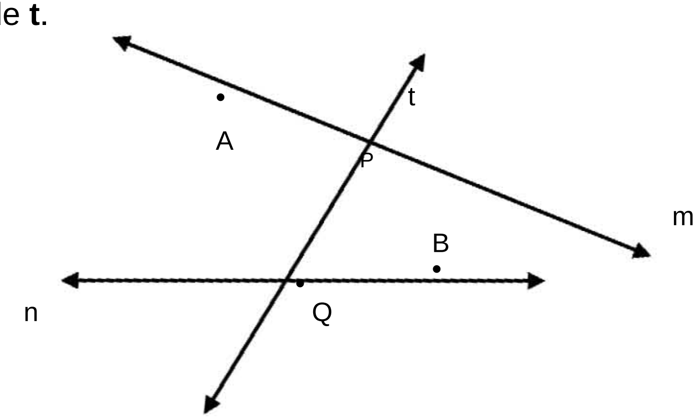
$\therefore$ $\angle 2 = \angle 7$ por ser suplementos de ángulos iguales, (proposición 1).

Análogamente se demuestra que $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$

Falta demostrar que $\angle 3 = \angle 7$, lo cual haremos a continuación
Como $\angle 5 = \angle 7$ y $\angle 1 = \angle 3$, por ser opuestos por el vértice, (teorema 1), y por hipótesis $\angle 1 = \angle 5$, se concluye que $\angle 3 = \angle 7$ por axioma.

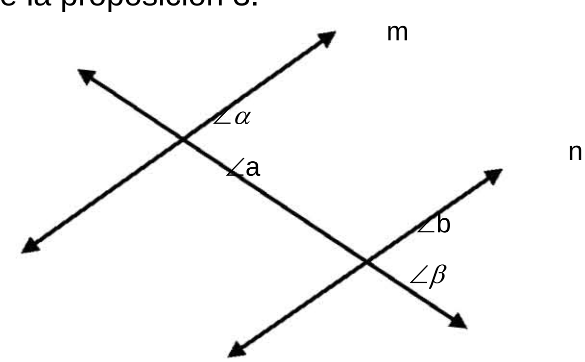
Con lo que terminamos la demostración.

3. a) DEFINICIÓN: Sean los puntos **A** en la recta **m** y **B** en la recta **n** Los ángulos **APQ** y **PQB** son ángulos alternos internos si la transversal **t** intersecta a la recta **m** en **P** y a la recta **n** en **Q**, tal forma que **A** y **B** están en lados opuestos de **t**.



La definición de ángulos alternos externos es análoga, se deja al lector interesado que las defina.

Demostración de la proposición 3.

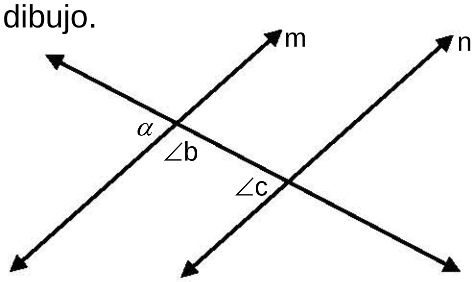


HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$
TESIS: $\angle\alpha = \angle\beta$ y $\angle a = \angle b$.

Si dos rectas son paralelas entonces, por el Postulado Fundamental del Paralelismo, los ángulos correspondientes son iguales. Esto implica, por la proposición 2, que las restantes parejas, en particular los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos, son también iguales:

$$\therefore \angle\alpha = \angle\beta \quad \text{y } \angle a = \angle b$$

b) Hagamos nuestro dibujo.



HIPÓTESIS: $\angle b + \angle c = 180º$
TESIS: m II n
DEMOSTRACIÓN:
Considera el ángulo auxiliar α. Como α y **b** son ángulos suplementarios forman ángulo llano tenemos, esto es:

$$\alpha + \angle b = 180º$$

Por hipótesis

$$\angle b + \angle c = 180º,$$

por lo que

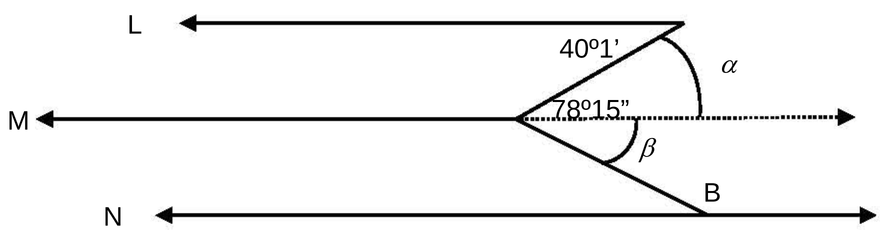
$$\alpha + \angle b = \angle b + \angle c \text{ por axioma}$$

$$\therefore \alpha = \angle c \text{ por axioma.}$$

Y por el Teorema Fundamental del Paralelismo las rectas **m** y **n** son paralelas.

c) Si dos rectas son paralelas, al ser cortadas por una transversal forman ángulos colaterales internos suplementarios.
Observa que se puede formular una proposición análoga para los colaterales externos.

4. a) Prolonguemos el rayo **M** en dirección opuesta.



Llamemos α y β a los nuevos ángulos que se forman.

$$\alpha = 40º1'$$

por ser ángulos alternos internos entre paralelas, (proposición 3)

$$\alpha + \beta = 78º15" \text{ por axioma}$$

de las dos igualdades obtenemos

$$\beta = 78º15" - 40º1', \text{ por axiomas}$$

Para realizar la operación descompongamos 78º 15":

$$77º60'15'' – 40º1' = 37º59'15''$$

$$\therefore \ \beta = 37º59'15''\text{, por axioma}$$

Como β y $\angle B$ son colaterales internos entre paralelas:

$$\beta + \angle B = 180º$$

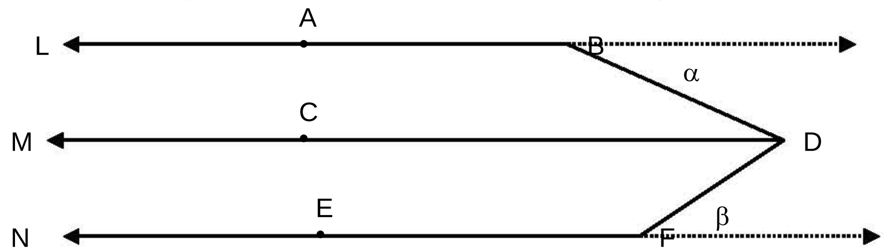
por el recíproco de la proposición 4.

Además, $\angle B = 180º - \beta$, por axioma, por lo que

$$\angle B = 180º – 37º59'125''\text{, por axioma}$$

lo que implica que $\angle B = 179º60'60'' – 37º59'125'' = 142º45''$

b) Prolonguemos los rayos dados. Consideremos los ángulos auxiliares α y β.



$$\alpha = \angle BDC \text{ por ser alternos internos entre paralelas (proposición 3)}$$

$$\beta = \angle CDF\text{, por la razón anterior}$$

Ahora, como α y $\angle ABD$ forman ángulo llano, deben sumar 180º. De igual forma β y $\angle DFE$, entonces.

$$\alpha + \angle ABD + \beta + \angle DFE = 360º$$

Como *toda cantidad puede ser sustituida por su igual*, por axioma, entonces:

$$\angle ABD + \angle BDC + \angle CDF + \angle DFE = 360º$$

Y como *el todo es iguala la suma de sus partes*

$$\angle BDC + \angle CDF = \angle BDF$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BDF + \angle DFE = 360º$$

4. Observa que

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180º\text{, por formar ángulo llano}$$

de donde $\angle 1 = 180º – \angle 2 – \angle 3$, por axioma

Por otro lado

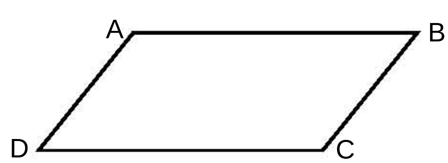
$$\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180º\text{, por hipótesis}$$

por lo que $\angle 5 = 180º – \angle 2 – \angle 3$, por axioma,

$$\angle 1 = \angle 5\text{, por axioma}$$

$$\therefore \ \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}\text{, por el Teorema Fundamental del Paralelismo}$$

5. a) DEFINICIÓN: Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene paralelos sus lados opuestos.



A, **B**, **C** y **D** se llaman vértices del paralelogramo. A veces se usa el símbolo ▱ para denotar a un paralelogramo. La definición de cuadrilátero la daremos en el siguiente ejercicio.

b) Consideremos un paralelogramo **ABCD** con $AB \parallel CD$ y $AD \parallel BC$

Como AB‖CD y tomando a AD como transversal, tenemos que los ángulos **A** y **D** son colaterales internos por lo tanto por el recíproco de la proposición 4 los ángulos deben ser suplementarios, es decir:

$$\angle A + \angle D = 180^{o}$$

De igual manera el resto de parejas de ángulos consecutivos son suplementarios.

c) Hagamos nuestro dibujo.

HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel$ BC

TESIS: $\angle A = \angle C$

DEMOSTRACIÓN.

Por el ejercicio anterior tenemos

$$\angle A + \angle D = 180^{o}$$

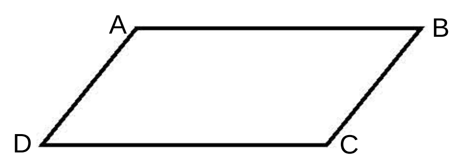
y

$$\angle D + \angle C = 180^{o}$$

Así que $\angle A$ y $\angle C$ son suplementos de ángulos iguales, por la proposición 1 obtenemos que

$$\angle A = \angle C \quad \text{(QED)}$$

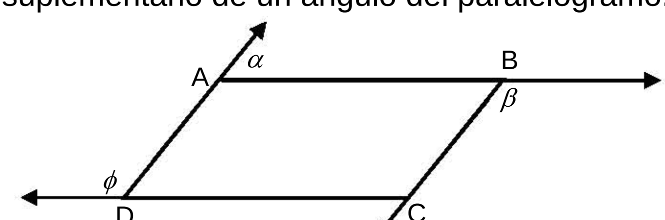
d) Por el inciso (b) los ángulos con vértices consecutivos suman 180º



$$\angle A + \angle D = 180^{o}$$
$$\angle C + \angle B = 180^{o}$$
$$\therefore \ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^{o} \ \text{ por axioma}$$

Escrito en radianes 360º = 2π

e) DEFINICIÓN: Un ángulo es ángulo exterior de un paralelogramo si y sólo si es adyacente y suplementario de un ángulo del paralelogramo.

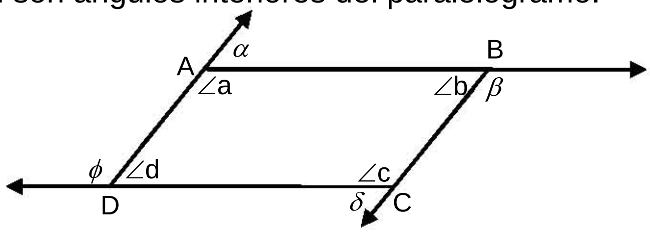


α, β, δ y ϕ son ángulos exteriores del paralelogramo

Como por definición un ángulo interior y un exterior son suplementarios, tenemos:

$$\alpha + \angle a = 180^o$$
$$\beta + \angle b = 180^o$$
$$\delta + \angle c = 180^o$$
$$\phi + \angle d = 180^o$$

Donde a, b, c y d son ángulos interiores del paralelogramo.



Si sumamos ambos miembros de estas igualdades, obtenemos:

$$\alpha + \angle a + \beta + \angle b + \delta + \angle c + \phi + \angle d = 720^o, \text{ por axioma.}$$

Pero como queremos sólo la suma de los ángulos exteriores, despejamos:

$$\alpha + \beta + \delta + \phi = 720^o - (\angle a + \angle b + \angle c + \angle d) = 720^o - 360^o, \text{ por axiomas.}$$

$$\therefore \ \alpha + \beta + \delta + \phi = 360^o$$

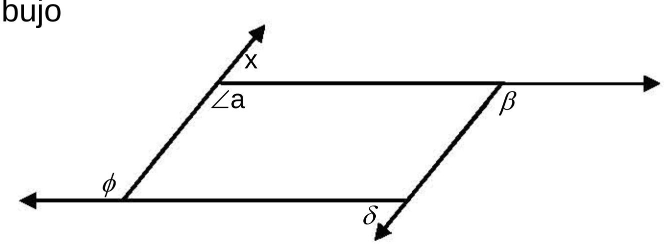
6. a) Como en un paralelogramo los ángulos de vértices opuestos son iguales, (como ya lo vimos en el inciso c), tenemos:

$$3x - 20^o = x + 40^o$$
$$\Rightarrow \quad 3x - x = 40^o + 20^o \text{ por axioma}$$
$$2x = 60^o$$
$$x = 30^o \text{ por axioma}$$

Por inciso (b) los ángulos de vértices consecutivos son suplementarios, entonces

$$3x - 20^o + y = 180^o$$
$$\Rightarrow \quad 3(30^o) - 20^o + y = 180^o \text{ por axioma}$$
$$y = 180^o - 70^o \text{ por axiomas}$$
$$y = 110^o$$

b) Trazamos un dibujo

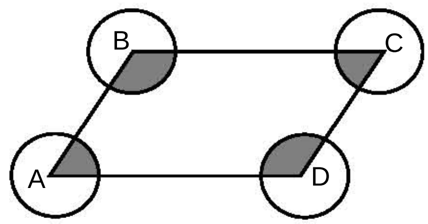


x, β, δ, ϕ, ángulos externos del paralelogramo, sea x el ángulo que es la octava parte de la suma de los cuatro ángulos externos, entonces:

$$x = \frac{x + \beta + \delta + \phi}{8} = \frac{360^o}{8} = 45^o$$

Ahora bien, como **x** es un ángulo externo, el ángulo interior debe ser adyacente suplementario, por lo que el ángulo interno $\angle a$, debe medir 135º. Ahora bien, el ángulo de vértice consecutivo $\angle b$, es suplementario al $\angle a$, por lo tanto debe medir 45º, y como los ángulos de vértices opuestos son congruentes, tenemos que los ángulos interiores deben medir dos 45º y dos 135º.

c) Como los ángulos interiores de un paralelogramo suman 360º, la región sombreada forma un círculo de radio 1 cm.



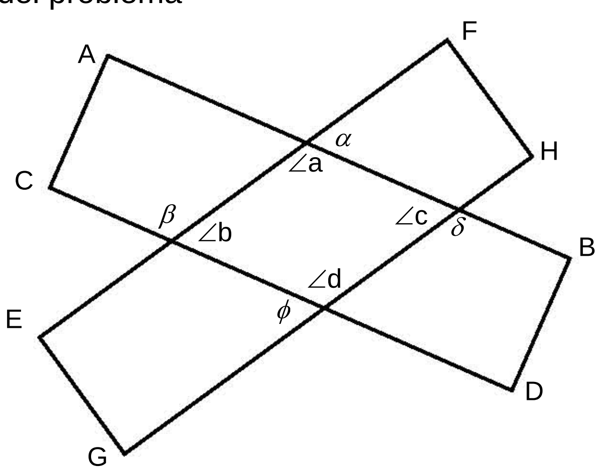
Por lo que el área del círculo es

$$\pi r^2 = \pi (1)^2 = \pi$$

d) DEFINICIÓN: Un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos rectos, se le llama rectángulo.

El cuadrilátero **ABCD** es un rectángulo

Veamos el dibujo del problema



Consideremos las rectas que pasan por los segmentos **AB** y **CD** con la transversal **AC**. Como el cuadrilátero **ABCD** es un rectángulo, los ángulos **A** y **C** son cada uno de 90º por lo que su suma es igual a 180º, es decir son suplementarios, entonces por proposición 4 las rectas que pasan por los segmentos **AB** y **CD** son paralelas. Con el mismo razonamiento se muestra que las rectas que contienen a los segmentos **EF** y **GH** son paralelas. Por lo tanto el cuadrilátero formado por los lados de los rectángulos traslapados forman un paralelogramo.

Ahora bien, los ángulos α, β, δ y ϕ son ángulos exteriores del paralelogramo formado entonces:

$$\alpha + \beta + \delta + \phi = 360º, \text{ por inciso (d) del ejercicio anterior.}$$

e) HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo y $\angle A = 90º$

TESIS: El paralelogramo ABCD es un rectángulo

DEMOSTRACIÓN.

$$\angle A = \angle D$$

ya que son ángulo de vértices opuestos de un paralelogramo

$$\Rightarrow \angle D = 90º \text{ por axioma}$$

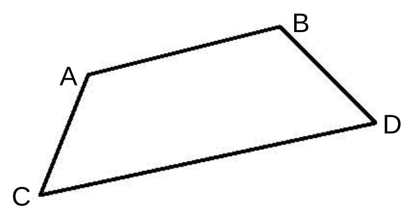
Además los ángulos **A** y **C** son suplementarios, por ser ángulos de vértices consecutivos de un paralelogramo, por lo que:

$\angle A + \angle C = 180º \Rightarrow 90º + \angle C = 180º$ por axioma $\Rightarrow \angle C = 90º$ por axioma.

Análogamente se demuestra que $\angle B = 90º$

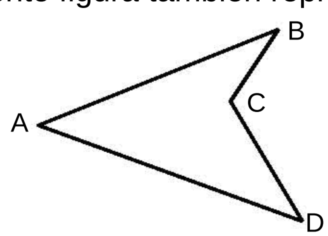
$\therefore$ ABCD es un rectángulo por definición

7. a) DEFINICIÓN: Sean **A**, **B**, **C** y **D** cuatro puntos. Si tres cualesquiera de ellos no son colineales, y los segmentos **AB**, **BC**, **CD** y **DA** se intersectan solamente en sus extremos, entonces la unión de los cuatro segmentos se llama cuadrilátero.



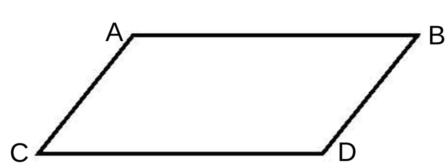
ABCD es un cuadrilátero

Observemos que la siguiente figura también representa a un cuadrilátero



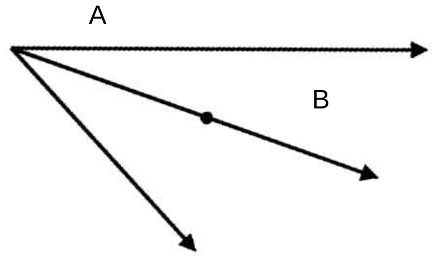
El primer cuadrilátero se le llama convexo y al segundo se le llama no-convexo. Nosotros trabajaremos con cuadriláteros convexos.

b) Hagamos un dibujo.



En el cuadrilátero A**BCD** los ángulos **A** y **C** son suplementarios, por la hipótesis que nos dan. Si consideramos las rectas que pasan por **AB** y **CD** con la transversal que pasa por el segmento **AC**, tenemos que los ángulos **A** y **C** que se forman son colaterales externos, por la proposición 4, las rectas son paralelas.

8. a) DEFINICIÓN: La bisectriz de un ángulo es una semirrecta o rayo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

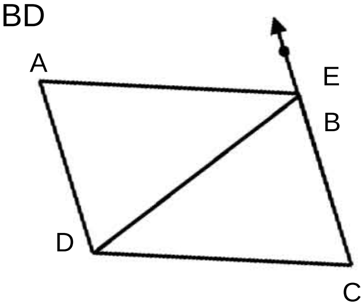


El rayo **AB** es la bisectriz del ángulo **A**

b) HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo

$\overline{BD}$ bisecta al $\angle B$, y $\angle DBC = \angle DCB$

TESIS: $\overline{AB}$ bisecta al $\angle EBD$



DEMOSTRACIÓN.

Como la semirrecta que pasa por el segmento **BD** biseca al ángulo **B**, entonces por definición tenemos

$$\angle ABD = \angle CBD$$

Además por hipótesis

$$\angle DBC = \angle DCB$$

De las dos últimas igualdades, por axioma, tenemos

$$\angle ABD = \angle DCB$$

Ahora bien, por hipótesis **ABCD** es un paralelogramo, esto implica por definición que

$$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$$

por lo tanto, por el Postulado Fundamental del Paralelismo, se forman ángulos correspondientes iguales, con la transversal que pasa por el segmento **BC**, esto es,

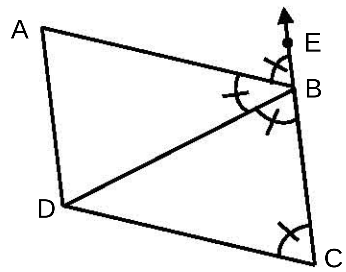
$$\angle EBA = \angle BCD$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos:

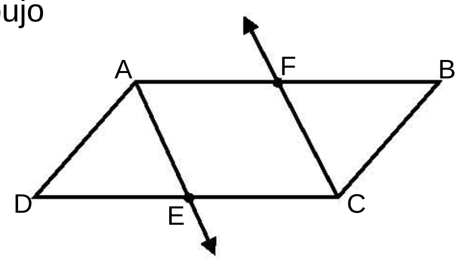
$$\therefore \angle EBA = \angle ABD$$

Entonces el rayo que pasa por el segmento **AB** divide al ángulo **EBD** en dos ángulos congruentes, por lo que

$$\overline{AB} \text{ es bisectriz del } \angle EBD$$



9. Primero hagamos un dibujo



HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo, $\overrightarrow{AE}$ es bisectriz del $\angle BAD$ y $\overrightarrow{CF}$ es bisectriz del $\angle BCD$

TESIS: $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$

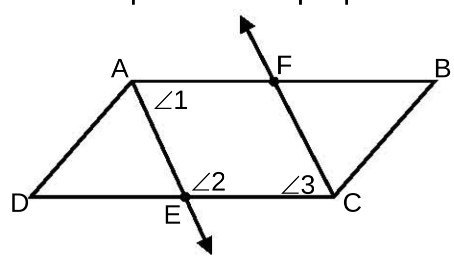
DEMOSTRACIÓN

$$\overline{AF} \text{ y } \overline{EC} \text{ son paralelos por ser lados del paralelogramo}$$

Consideremos a la recta que pasa por el rayo $\overline{AF}$ como transversal entonces

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$$

por el recíproco de la proposición 4



Ahora bien, como el rayo **AE** es bisectriz del ángulo **A** obtenemos

$$\angle 1 = \angle A/2$$

Por la misma razón

$$\angle 3 = \angle C/2$$

Pero ya que $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos de vértices opuestos

$$\angle A/2 = \angle C/2 \quad \Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 3$$

por axioma

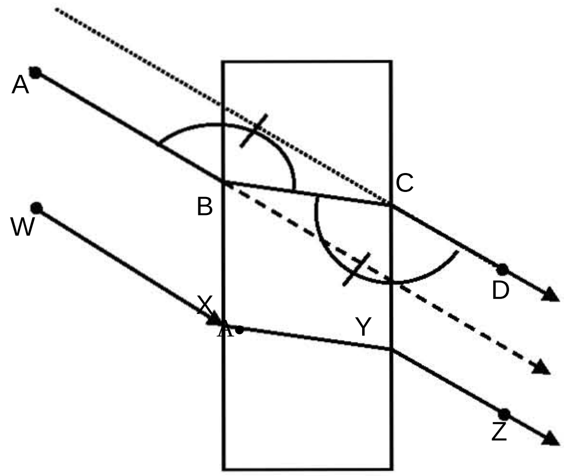
$$\Rightarrow \quad \angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$$

por axioma

$$\therefore \quad \overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{CF}$$

por la proposición 4

10.



Como el rayo sufre la misma inclinación al entrar que al salir aunque en sentido contrario, tenemos.

$$\angle ABC = \angle BCD$$

podemos considerar el segmento **BC** como una transversal, entonces se han formado ángulos alternos internos iguales y por proposición 2 los correspondientes deben se también iguales.

$$\therefore \ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

por Teorema Fundamental del Paralelismo

Por otro lado, como el rayo **AB** es paralelo al rayo **WX**, también debe serlo al rayo **CD**, ya que dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí, (teorema 2). Y por lo que acabamos de justificar en la pregunta anterior, el rayo **WX** es paralelo al rayo **YZ**

$$\therefore \ \overrightarrow{YZ} \parallel \overrightarrow{CD}$$

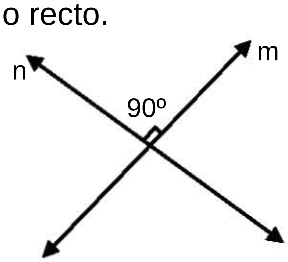
por el mismo teorema 2

§ 9

PERPENDICULARIDAD

De nuestros experimentos ya habíamos conjeturado que las rectas perpendiculares dividen al plano en cuatro regiones iguales, formando ángulos de 90º, definamos ahora formalmente el concepto.

DEFINICIÓN: Dos rectas **m** y **n** son perpendiculares si y sólo si dos rayos que son subconjuntos de ellas forman ángulo recto.

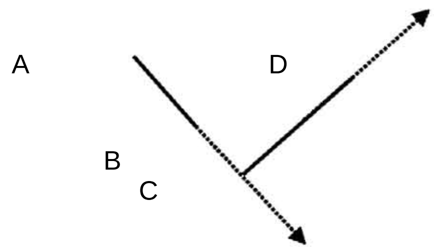


Denotaremos que **m** es perpendicular a **n** como: $m \perp n$

Definiremos ahora perpendicular entre rayos, segmentos o sus combinaciones.

DEFINICIÓN: Dos segmentos, rayos, rectas o combinaciones de ellos son perpendiculares si y sólo si las rectas de las cuales ellos son subconjuntos, son perpendiculares.

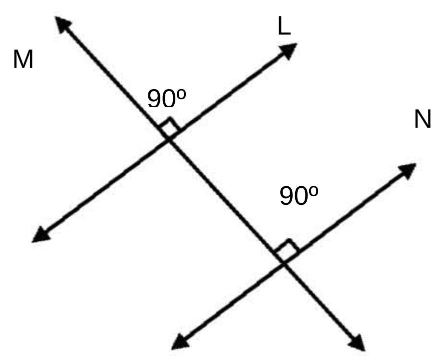
¿Los segmentos o rayos perpendiculares siempre se intersectan?
Veamos



En la figura los segmentos **AB** y **CD** son perpendiculares según nuestra definición y no se intersectan.
A continuación vamos a demostrar dos teoremas sobre perpendicularidad.

TEOREMA 4. Dos rectas perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí.

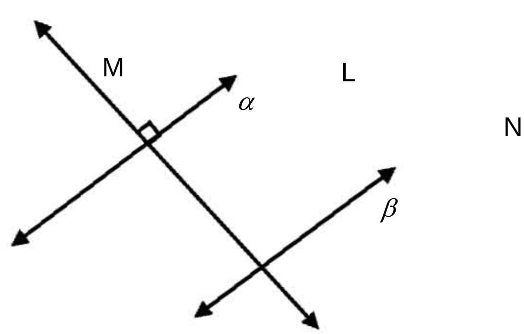
HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{N}$
TESIS: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{N}$



DEMOSTRACIÓN
Por hipótesis **M** con **L** y **N** con **M** son perpendiculares esto implica que se forman ángulos de 90º, entonces tenemos dos rectas, **L** y **N** cortadas por una transversal **M** formando ángulos correspondientes iguales, por lo tanto por Teorema Fundamental del Paralelismo las rectas son paralelas.

TEOREMA 5. Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra.

HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{N}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$
TESIS: $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{N}$



DEMOSTRACIÓN.
Por hipótesis las rectas **L** y **N** son paralelas entonces, considerando **M** como una transversal, se forman ángulos correspondientes iguales, por lo que:

$$\alpha = \beta$$

Pero, también por hipótesis, las rectas **M** y **N** son perpendiculares, por lo que se forma un ángulo de 90º, es decir:

$$\alpha = 90^{\circ} \Rightarrow \beta = 90^{\circ} \text{ por axioma}$$

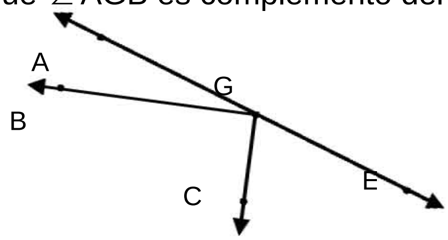
$$\therefore \overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{N}$$

Para concluir este capítulo vamos a proponer problemas sobre perpendicularidad.

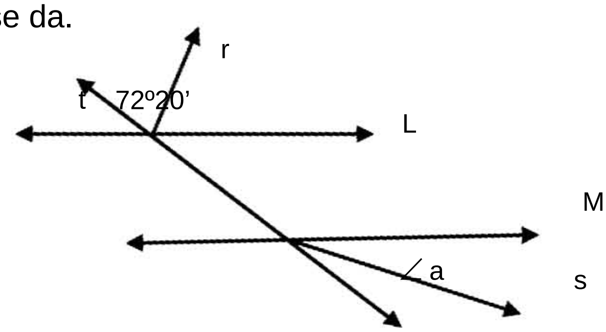
§ 10

PROBLEMAS

1. En la figura el rayo **GA** es opuesto al rayo **GE** y los rayos **GB** y **GC** son perpendiculares, demostrar que $\angle$AGB es complemento del $\angle$EGC.



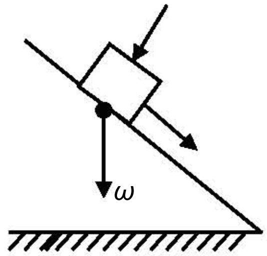
2. Demuestra que las bisectrices de dos ángulos que son adyacentes y suplementarios son perpendiculares.
3. Demuestra que existe una única recta perpendicular a una recta **L** que pasa por un punto **P** en **L**
4. En la siguiente figura **L** y **M** son dos rectas paralelas, **t** una transversal, y, **r** y **s** bisectrices de los ángulos colaterales externo, encuentre el valor del ángulo **a** con el dato que se da.

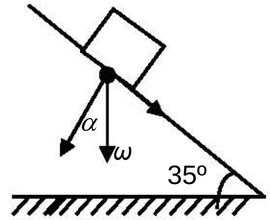


5. Demuestra que si dos paralelas son intersectadas por una transversal, las bisectrices de los ángulos colaterales externos son perpendiculares.
6. Demuestra la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 6: Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares o son iguales o son suplementarios.

7. Demuestra que si **ABCD** es un paralelogramo entonces las bisectrices de sus ángulos interiores forman un rectángulo.
8. El peso ω de un objeto, actúa en dos direcciones: una en la que presiona sobre el plano y la otra en la que se desliza, ambas direcciones son perpendiculares. Para conocer estas direcciones se requiere el ángulo α, con el dato que se da en la figura encuentre el valor de α.





SUGERENCIAS

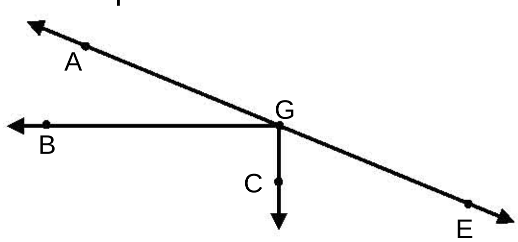
1. Recuerda la definición de perpendicularidad y de ángulos complementarios.
2. Haz un dibujo y ten clara la definición de bisectriz.
3. Utiliza el método de reducción al absurdo para tu demostración y el quinto postulado de Euclides.
4. Traza una recta auxiliar paralela a la bisectriz **r** que pase por la intersección de la recta **M** y la transversal **t**. Usa el Postulado Fundamental del Paralelismo y la definición de bisectriz.
5. Usa ángulos y rectas auxiliares, en particular un ángulo correspondiente a uno de los colaterales externos y su bisectriz. El problema anterior te puede dar una idea. Usa el teorema 5 en la demostración.
6. Considera los casos en que los dos ángulos son agudos, uno es agudo y el otro es obtuso y finalmente en que los dos son obtusos. Traza rectas auxiliares, en particular en el primer caso, trace rectas paralelas a los lados de uno de los ángulos que pasen por el vértice del otro.
7. Traza una recta auxiliar paralela al segmento **AB** y que pase por el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos **A** y **D**.
8. Utiliza el problema 4.

SOLUCIONES

1. HIPÓTESIS: GA y GE son rayos opuestos.

   $\overleftrightarrow{GB}$ y $\overleftrightarrow{GC}$ son perpendiculares

   TESIS: $\angle$AGB y $\angle$EGC son complementarios.



DEMOSTRACIÓN

Como los rayos **GA** y **GE** son opuestos, por hipótesis, forman un ángulo de lados colineales y por lo tanto llano.

Ahora como

$\angle$ AGE = $\angle$AGB + $\angle$BGC + $\angle$CGE por axioma

$\Rightarrow$ $\angle$AGB + $\angle$BGC + $\angle$CGE = 180º por formar ángulo llano

$\Rightarrow$ $\angle$AGB + $\angle$CGE = 180º – $\angle$BGC por axioma

Pero, por hipótesis, los rayos **GB** y **GC** son perpendiculares, entonces

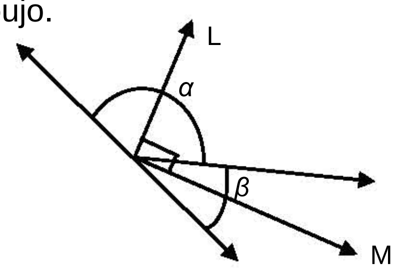
$\angle$ BGC = 90º.

$\Rightarrow \quad \angle AGB + \angle CGE = 180º - 90º$ por axioma

$\Rightarrow \quad \angle AGB + \angle CGE = 90º$

$\therefore \ \angle AGB + \angle CGE$ son complementarios.

2. Primero hagamos un dibujo.



HIPÓTESIS: *α* y *β* son dos ángulos adyacentes y suplementarios. Y $\overrightarrow{L}$ y $\overrightarrow{M}$ son bisectrices de *α* y *β*, respectivamente.

TESIS: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$

DEMOSTRACIÓN

Como por hipótesis *α* y *β* son suplementarios tenemos:

$$\alpha + \beta = 180º$$

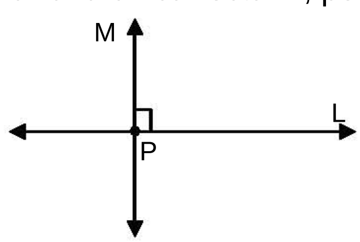
Y como, también por hipótesis, **L** y **M** son bisectrices de *α* y *β***,** los dividen en dos ángulos congruentes por lo que**:**

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90º \text{ por axioma}$$

Por lo tanto **L** y **M** forman un ángulo de 90º, entonces

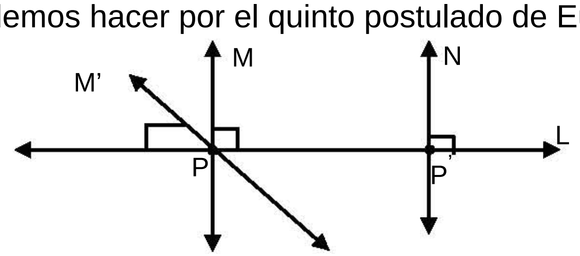
$$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{M}$$

3. HIPÓTESIS: **L** es una recta y **P** un punto que pertenece a la recta.
   TESIS: Por **P** se puede trazar una única recta **M**, perpendicular a **L**.



DEMOSTRACIÓN

Supongamos que existe otra recta **M’** perpendicular a **L** que pasa por **P**.
Consideremos un punto **P’** en **L** y tracemos una recta **N** paralela a **M** que pase por **P’**, esto lo podemos hacer por el quinto postulado de Euclides.



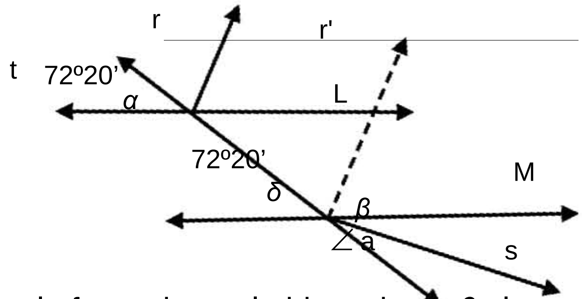
De lo anterior llegamos a que $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{L}$ por el teorema 5

Y como **M’** es perpendicular a **L** por construcción, $\overleftrightarrow{M'} \parallel \overleftrightarrow{N}$ por teorema 4

Pero entonces existen dos rectas distintas paralelas a **N** que pasan por **P**, lo cual contradice el Quinto Postulado de Euclides.

$\therefore$ **M** es la única recta perpendicular a **L** que pasa por **P**

4. Vamos a trazar una recta auxiliar **r’** paralela a la bisectriz **r** que pase por el punto de intersección de las rectas **M** y **t.**



Llamemos *α* al otro ángulo formado por la bisectriz **r** y *β* al otro ángulo formado por la bisectriz **s**.
Como **r** es bisectriz entonces: $\alpha = 72º20’$
Y como **r** y **r’** son paralelos por construcción, entonces se forman ángulos correspondientes iguales con la transversal **t**, por el Postulado Fundamental del Paralelismo. Bajo el mismo argumento las rectas **L** y **M** forman ángulos correspondientes iguales. De esto se concluye que:

$$\alpha + 72º20’ = \delta + 72º20’$$

Donde *δ* es un ángulo auxiliar. De las dos últimas igualdades obtenemos que

$$\delta = 72º20’, \text{ por axioma}$$

Ahora bien, como **s** es bisectriz el ángulo colateral externo, tenemos:

$$\beta = \angle a \text{ por definición de bisectriz}$$

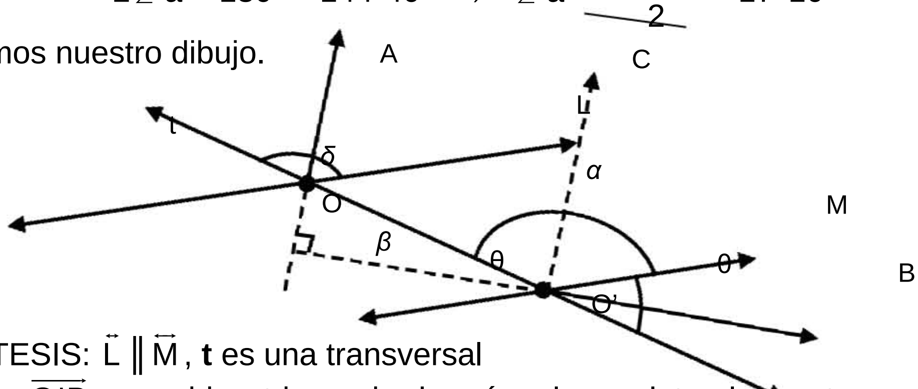
También se cumple que:

$$72º20’ + \delta + \beta + \angle a = 180º \text{ por formar ángulo llano}$$

De las tres últimas igualdades y haciendo operaciones obtenemos:

$$2\angle a = 180º - 144º40’ \Rightarrow \angle a = \frac{34º20'}{2} = 17º10'$$

5. Hagamos nuestro dibujo.



HIPÓTESIS: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{M}$, **t** es una transversal
$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{O'B}$ son bisectrices de los ángulos colaterales externos *δ* y *θ,* respectivamente
TESIS: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{O'B}$
DEMOSTRACIÓN
Consideremos el ángulo auxiliar *α* y su bisectriz, el rayo **OC**.
Como **L** y **M** son dos rectas paralelas entonces

$$\delta = \alpha \text{ por el Postulado Fundamental del Paralelismo}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ por axioma}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OA}$ por el Teorema Fundamental del Paralelismo

Por otro lado $\alpha + \theta = 180º$ por formar ángulo llano

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\theta}{2} = 90º \text{ por axioma}$$

Si usamos ahora al ángulo auxiliar θ' entonces, $\theta' = \frac{\theta}{2}$ por ser ángulos opuestos por el vértice

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \theta' = 90º \text{ por axioma}$$

Pero $\frac{\alpha}{2}$ y θ' forman el ángulo entre el rayo **O'C** y la recta que pasa por el rayo **O'B**, de donde $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{O'B}$.

Pero como los rayos **O'C** y **OA** son paralelos, entonces

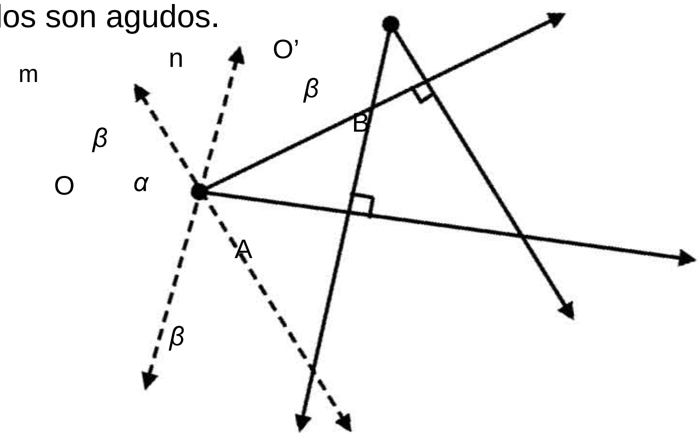
$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{O'B} \text{ por teorema 5.}$$

Observemos que de este teorema podríamos obtener la siguiente proposición como corolario. (Un corolario es un teorema cuya demostración se deriva de otro teorema).

COROLARIO: Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces las bisectrices de los ángulos correspondientes son paralelas.

También se puede demostrar, de manera similar, que las bisectrices de los colaterales internos son perpendiculares, si las rectas son paralelas. Se sugiere que el lector haga la demostración.

6. Tenemos tres posibilidades: que uno sea agudo y otro obtuso, que los dos sean agudos o que los dos sean obtusos. Haremos la demostración caso por caso.
HIPÓTESIS: α y β son ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.
TESIS: $\alpha = \beta$, o, α y β son suplementarios.
a) Cuando los dos ángulos son agudos.



DEMOSTRACIÓN

Como los ángulos son agudos no podemos demostrar que son suplementarios, entonces demostraremos que son iguales.

Tracemos rectas auxiliares paralelas a los rayos **O'B** y **O'A** que pasen por **O**, llamémoslas respectivamente **m** y **n**.

Como la recta **m** y el rayo **O'B** son paralelos por construcción los ángulos alternos internos formados con la transversal **O'A** son iguales, por la misma razón los ángulos correspondientes formados por **n** y el rayo **O'**A con la transversal **m**, son iguales.

Ahora bien

$$\overleftrightarrow{n} \perp \overrightarrow{OA} \text{ por teorema 5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \theta = 90^{\circ}$$

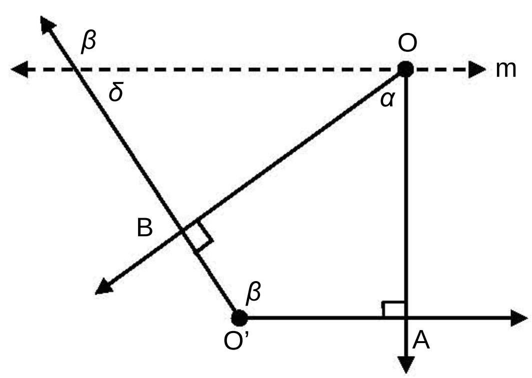
Donde **θ** es un ángulo auxiliar. Por un razonamiento análogo la recta **m** es perpendicular al rayo **OB**, por lo que:

$$\beta + \theta = 90^{\circ}$$

$$\therefore \ \alpha = \beta \text{ por ser complemento de ángulos iguales}$$

Observemos que aquí, de pasada, hemos demostrado que si dos ángulos son agudos y tienen paralelos sus lados, entonces son iguales. Existe una formulación más general: Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, entonces o son iguales o son suplementarios. Demuéstrala lector.

b) Cuando α es agudo y β es obtuso.



Tracemos una paralela al rayo **O'A** que pase por **O**, llamémosla **m**. **m** y **O'A** forman con la transversal **O'B** ángulos correspondientes iguales.

Consideremos el ángulo auxiliar δ:

$$\beta + \delta = 180^{\circ} \text{ por formar ángulo llano}$$

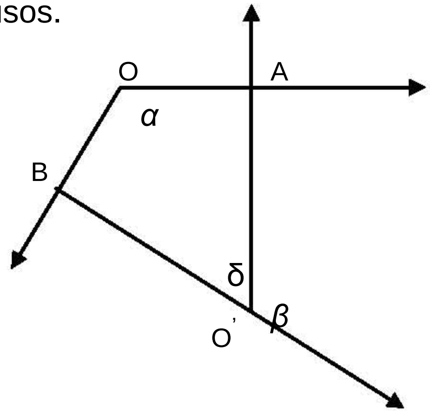
Ahora bien, como por hipótesis β es obtuso, δ debe ser agudo. Y los lados de δ son perpendiculares a los lados del ángulo δ, por lo que:

$$\delta = \alpha \text{ por el inciso (a)}$$

$$\therefore \ \beta + \alpha = 180^{\circ}$$

Es decir son suplementarios.

c) Cuando α y β son obtusos.



El ángulo auxiliar δ es adyacente y suplementario de β, por construcción, entonces:

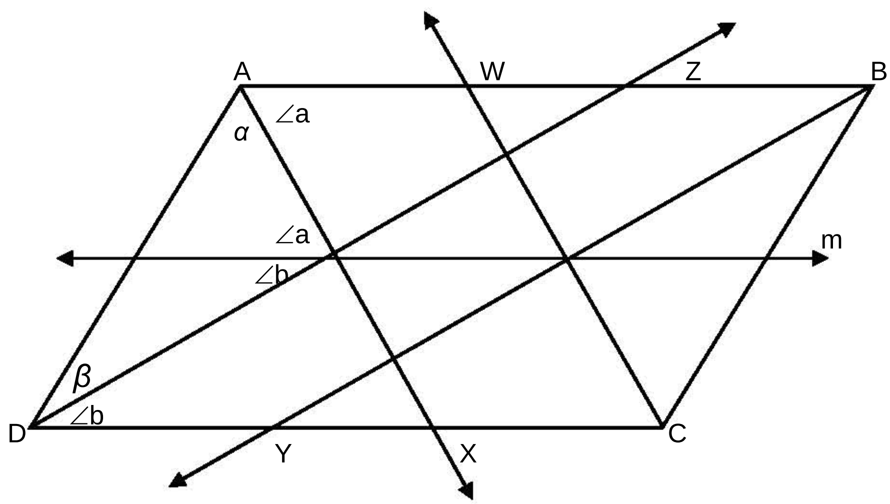
$$\delta + \beta = 180^\circ$$

Esto implica que δ es agudo, ya que por hipótesis β es obtuso. Además δ es de lados perpendiculares con α, por lo tanto:

$$\alpha + \delta = 180^\circ \text{ por caso (b)}$$

$\therefore\ \beta = \alpha$ por ser suplementos de ángulos iguales (proposición 1).

7.



HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo: $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{CW}$ y $\overrightarrow{DZ}$ son bisectrices de los ángulos del paralelogramo.

TESIS: $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BY}$, $\overrightarrow{CW}$, y $\overrightarrow{DZ}$ forman un rectángulo.

DEMOSTRACIÓN

Tracemos una paralela **m**, al segmento **AB** que pase por el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos **A** y **D**. Este punto debe existir pues de lo contrario las bisectrices serían paralelas y la suma de los colaterales internos que se forman con la transversal que pasa por el segmento AD sería igual a 180º, esto es

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

Pero como $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos formados por las bisectrices de ángulos consecutivos de un paralelogramo, deben sumar 90º ya que los consecutivos de un paralelogramo suman 180º:

$$\angle 1 + \angle 2 = 90º, \text{ contradicción.}$$

Por lo tanto las bisectrices deben intersectarse.

Ahora bien, como el segmento **AB** y **m** son paralelos, por construcción, entonces deben formarse ángulos alternos internos iguales (proposición 3). Por la misma razón la recta **m** y el segmento **CD** forman ángulos alternos internos iguales.

También tenemos que:

$$\angle A = \alpha + \angle a \quad y \quad \angle D = \beta + \angle b \quad \text{por axioma}$$

Además

$$\alpha = \angle a \quad y \quad \beta = \angle b$$

por ser los ángulos formados por las bisectrices de los ángulos **A** y **D** respectivamente.

De las dos últimas afirmaciones y dado que **A** y **D** son ángulos de vértices consecutivos tenemos:

$$\angle A + \angle D = 180º \text{ por ejercicio (6 b) del parágrafo anterior}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \angle a + \beta + \angle b = 180º \quad \Rightarrow \quad \angle a + \angle a + \angle b + \angle b = 180º \text{ por axioma}$$

$$\Rightarrow \angle a + \angle b = 90º \text{ por axioma}$$

$$\therefore \overrightarrow{AX} \perp \overrightarrow{DZ}$$

por definición de perpendicularidad

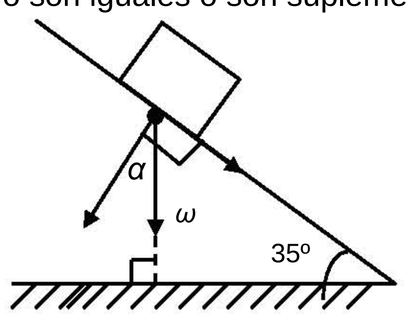
Por otro lado, por ejercicio 9 de la sección anterior debe ocurrir que

$$\overrightarrow{AX} \parallel \overrightarrow{CW} \text{ y } \overrightarrow{BY} \parallel \overrightarrow{DZ}$$

Por lo que las bisectrices forman un paralelogramo que tiene un ángulo recto, por ejercicio (6e) de la sección anterior, tenemos:

$$\square \text{ ABCD es un rectángulo.}$$

8. Como los lados del ángulo α y del ángulo que mide 35º son perpendiculares, entonces, por el ejercicio 4, o son iguales o son suplementarios.



Ahora como α esta contenido en el ángulo que forman las dos direcciones y éstas son perpendiculares por dato, entonces α debe ser menor que 90º, así que estamos en el caso (a) del problema 4, por lo que los ángulos deben ser iguales

$$\therefore \alpha = 35º$$

CAPÍTULO III
ÁNGULOS EN TRIÁNGULOS.

§ 1
EXPERIMENTOS.

PRIMER EXPERIMENTO. EL TRIÁNGULO.

1. Construcción del triángulo usando tiras de papel: recorta tres tiras de papel, lo más delgadas que puedas, de longitudes tomadas al azar. Pega las tiras por los extremos formando un triángulo. Repite la construcción en dos ocasiones más, con tiras de papel de otros tamaños. ¿Siempre pudiste construir un triángulo? Si no es así ¿a qué crees que se deba?
2. Mide las longitudes de las tiras que usaste en cada caso, anota tus resultados.
3. Corta tres tiras de papel que midan 12, 9 y 6 cm. respectivamente, con la mayor precisión posible. Únelas por los extremos formando un triángulo. Repite los pasos anteriores con tiras que midan 18, 9 y 9 cm. y con tiras que midan 15, 7 y 5 cm. ¿Qué ocurre? Compara tus resultados con los del paso 1.
4. Construcción del triángulo usando regla y compás: dibuja en tu cuaderno tres segmentos con longitudes de 12, 9 y 6 cm. respectivamente. Ahora usando regla y compás construye un triángulo con segmentos de la misma longitud que los segmentos que dibujaste. (Si no recuerdas como hacerlo investígalo en un libro de geometría plana). Repite los pasos anteriores para las otras dos ternas de números que dimos en el paso 3. ¿Qué puedes concluir? Compara tus resultados con los que obtuviste en el paso 3.
5. Dibuja en tu cuaderno tres puntos no colineales[1] y únelos. ¿Qué observas? Intenta definir el concepto de triángulo.
6. Mide los segmentos que se formaron y compara tus resultados con los pasos anteriores.
7. Dibuja tres puntos colineales, claramente en este caso no se forma un triángulo. Mide las longitudes de los tres segmentos que se forman, ¿Qué observas respecto a sus medidas? ¿Cuál es la diferencia con el paso 5?
8. ¿Encuentras alguna relación entre las medidas de los segmentos y el que puedas construir el triángulo? ¿Si comparas la suma de las medidas de dos de sus lados con respecto a la medida del tercero, qué observas?
9. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las longitudes de los lados para que pueda construirse un triángulo? Escribe tus conclusiones y discútelas con las de tus compañeros.

SEGUNDO EXPERIMENTO. ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO.

1. Dibuja un triángulo cualquiera y mide con transportador sus ángulos interiores. ¿Qué sucede con su suma?
2. Recorta las esquinas del triángulo y pégalas de tal suerte que estén dispuestas como ángulos adyacentes, (recuerda la definición de ángulos adyacentes). ¿Qué observas?

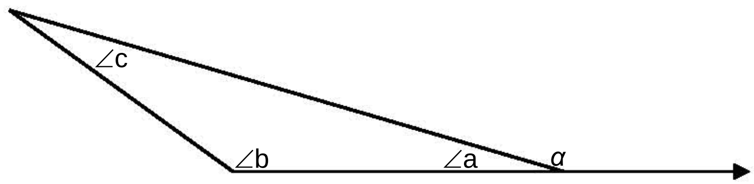
---

[1] Tres puntos se llaman colineales si están en la misma recta.

3. Repite el experimento para un triángulo equilátero, uno isósceles y un escaleno.
4. ¿El resultado es el que esperabas?, si no fue así, ¿a qué crees que se deba?

TERCER EXPERIMENTO. ÁNGULO EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO.

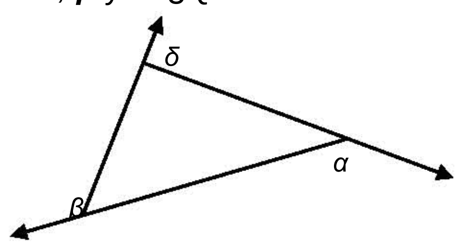
1. Dibuja un triángulo escaleno y prolonga uno de sus lados.
2. Mide los ángulos interiores del triángulo y el ángulo exterior ***α***.



3. Recorta las esquinas del triángulo donde están los ángulos **b** y **c** y luego los ángulos adyacentes **a** y ***α***. Encuentra una pareja de ángulos interiores con la condición de que su suma sea igual al ángulo exterior ***α***.
4. Superpón la pareja de ángulos interiores que encontraste, sobre el ángulo exterior, de tal suerte que los dos ángulos interiores sean adyacentes y coincidan con el vértice del ángulo exterior.
5. Repite el experimento para un triángulo isósceles y un equilátero.
6. Escribe todas tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

CUARTO EXPERIMENTO. ÁNGULOS EXTERIORES DE UN TRIÁNGULO.

1. Dibuja un triángulo cualquiera.
2. Mide sus ángulos exteriores ***α, β*** y ***δ***. ¿Qué ocurre con su suma?



3. Recorta los ángulos exteriores del triángulo, es decir, un pequeño segmento de sus lados y el vértice y pégalos de tal suerte que estén dispuestos como ángulos adyacentes. ¿Qué observas?
4. Repite los pasos anteriores para un triángulo equilátero, uno isósceles y otro escaleno.
5. Escribe todas tus conclusiones.

QUINTO EXPERIMENTO. TRIÁNGULO ISÓSCELES.

1. Traza un triángulo isósceles, para ello, dibuja dos segmentos de recta que tengan la misma medida y un tercero al azar. Ahora usando regla y compás construye un triángulo con segmentos de la misma longitud que los segmentos que dibujaste. Mide los ángulos que se oponen a los lados iguales, anota tus resultados.
2. Recorta el triángulo, dóblalo a la mitad de tal manera que los lados iguales coincida. ¿Qué puedes observar sobre los ángulos?

3. Dibuja otro triángulo isósceles cuyas medidas de sus lados sean diferentes a las del triángulo anterior. Repite los pasos 1 y 2. ¿Llegaste a la misma conclusión?
4. ¿Qué podríamos afirmar sobre los lados iguales y los ángulos que se oponen a dichos lados, en un triángulo isósceles?
5. Dibuja ahora un triángulo con dos ángulos iguales, usa para ello un transportador. Mide los lados que se oponen a los ángulos iguales. ¿Qué observas?
6. Recorta el triángulo y dóblalo a la mitad de tal manera que los ángulos iguales coincida. ¿Qué puedes observar sobre las longitudes de los lados?
7. Repite los pasos 5 y 6 para otro triángulo que tenga dos ángulos iguales de diferente magnitud al anterior. Escribe todas tus conclusiones y discútelas con tus compañeros.
8. Dibuja ahora dos triángulos distintos que tengan todos sus lados iguales, es decir, que sean equiláteros. Mide sus ángulos. ¿Qué observas? Anota tus conclusiones.
9. ¿Cuánto medirán los ángulos interiores de un triángulo equiángulo, es decir, de un triángulo que tenga sus tres ángulos iguales? Responde ésta pregunta y dibuja un triángulo equiángulo, para ello utiliza un transportador. Mide sus lados ¿qué ocurre?

CONJETURAS

Como siempre, las observaciones y conjeturas que hayas obtenido y no estén contempladas, discútelas con tus compañeros y tu profesor.

PRIMER EXPERIMENTO.
CONJETURA 1. Sólo podemos construir un triángulo si la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercero.

CONJETURA 2. Un triángulo esta formado por tres segmentos que resultan de unir tres puntos no colineales.

SEGUNDO EXPERIMENTO.
CONJETURA 3. Los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.

TERCER EXPERIMENTO.
CONJETURA 4. Un ángulo exterior tiene la misma medida que la suma de dos ángulos interiores, siempre que no sean adyacentes a él.

CUARTO EXPERIMENTO.
CONJETURA 5. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 360º.

QUINTO EXPERIMENTO.
CONJETURA 6. Un triángulo que tiene dos lados iguales, tienen también dos ángulos iguales y son aquellos que se oponen (están “enfrente” de) a los lados iguales.

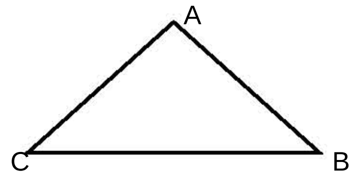
CONJETURA 7. Un triángulo que tiene dos ángulos iguales, tiene también dos lados iguales, los que se oponen a los ángulos iguales.

CONJETURA 8. Los triángulos que tienen su tres lados de la misma longitud, tienen también sus tres ángulos de la misma medida y viceversa.

Vamos ahora a formalizar todo lo que hemos encontrado en nuestros experimentos.

§ 2
EL TRIÁNGULO.

DEFINICIÓN. Un triángulo es una figura formada por tres segmentos de recta determinados por tres puntos no colineales. Los segmentos se llaman lados del triángulo y los puntos son los vértices del triángulo.



$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, son los lados del triángulo y **A**, **B** y **C** son los sus vértices

A un triángulo se le simboliza como: Δ ABC y se lee “triángulo ABC”.

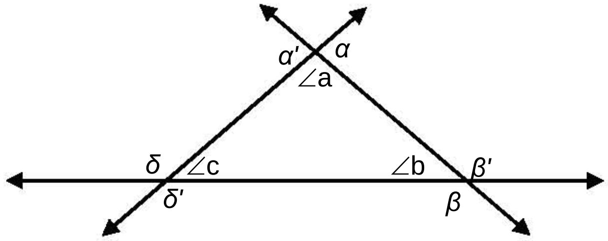
¿Cómo se definen los ángulos interiores del triángulo?

DEFINICIÓN: Los ángulos de un triángulo son aquellos que están formados por los rayos de los cuales los lados del triángulo son subconjuntos.

Así tenemos tres ángulos interiores o simplemente ángulos del triángulo, a saber: ∠ABC, ∠BCA y ∠CAB.

Existen también tres ángulos exteriores del triángulo, cuya definición es la misma que dimos para los ángulos exteriores de un paralelogramo. A continuación se vuelve a enunciar.

DEFINICIÓN: Un ángulo es ángulo exterior de un triángulo si y sólo si es adyacente y suplementario de un ángulo del triángulo.



∠a, ∠b y ∠c son los ángulos interiores del triángulo y ***α***, ***β*** y ***δ***, son sus ángulos exteriores

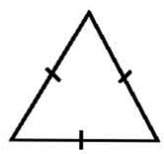
Observa que con esta definición en realidad tenemos seis ángulos exteriores del triángulo. Ahora bien, de estos seis se forman tres pares de ángulos opuestos por el vértice, por lo que estas parejas son congruentes. De esta manera no importa si tomamos a ***α**, **β*** y ***δ*** como los ángulos exteriores o bien a ***α'**, **β'*** y ***δ'***.

Notemos también que como los ángulos interiores y exteriores son adyacentes entonces las bisectrices de los ángulos interior y exterior, en un mismo vértice, son perpendiculares, afirmación que demostramos en el capítulo anterior.

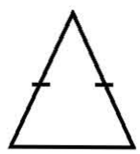
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS.

DE ACUERDO A LA MEDIDA DE SUS LADOS.

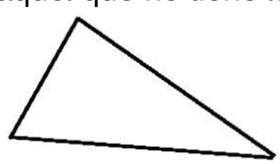
TRIÁNGULO EQUILÁTERO. Es aquel que tiene sus tres lados congruentes, es decir, de igual longitud.



TRIÁNGULO ISÓSCELES. Es el que tiene cuando menos dos lados congruentes.

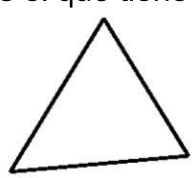


TRIÁNGULO ESCALENO. Es aquel que no tiene lados congruentes.



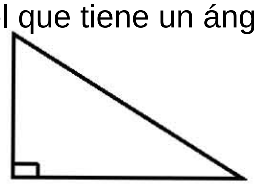
SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS.

TRIÁNGULO ACUTÁNGULO. Es el que tiene tres ángulos agudos .

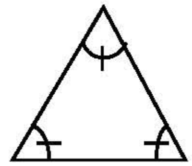


TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO. Es el que tiene un ángulo obtuso.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO. Es el que tiene un ángulo recto.



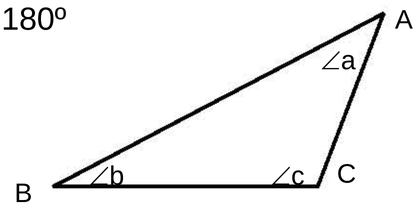
TRIÁNGULO EQUIÁNGULO. Es el que tiene sus tres ángulos congruentes.



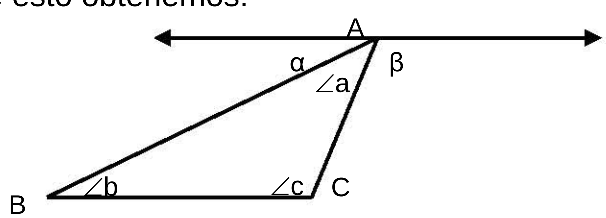
Demostraremos ahora nuestras conjeturas.

TEOREMA 6. En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos es igual a 180º.

HIPÓTESIS: ABC es un triángulo; $\angle$ a, $\angle$b y $\angle$c son los ángulos interiores del ΔABC.
TESIS: $\angle a + \angle b + \angle c = 180º$



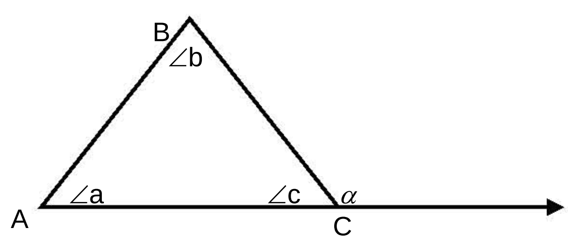
DEMOSTRACIÓN.
Tracemos una recta auxiliar paralela al lado **BC** que pase por el vértice **A**, lo cual lo podemos hacer por el quinto postulado de Euclides. Consideremos los ángulos auxiliares ***α*** y ***β***. De esto obtenemos:



$\angle c = \beta$ y $\angle b = \alpha$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas
Pero ***α***, $\angle$a y ***β*** forman ángulo llano, por lo que sus medidas deben sumar 180º, entonces concluimos que:

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180º$$

TEOREMA 7. La suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual a la medida del ángulo exterior no adyacente a ellos.
HIPÓTESIS: **ABC** es un triángulo, α es ángulo exterior del triángulo; $\angle$a y $\angle$b son ángulos interiores del triángulo.
TESIS: $\alpha = \angle a + \angle b$



DEMOSTRACIÓN

Consideremos el ángulo **c**. Entonces

$$\angle c + \alpha = 180^\circ \text{ por formar ángulo llano.}$$

Por otro lado

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180^\circ \text{ por ser ángulos interiores del triángulo, (teorema 6).}$$

$$\Rightarrow \angle a + \angle b + \angle c = \angle c + \alpha$$

$$\therefore \angle a + \angle b = \alpha$$

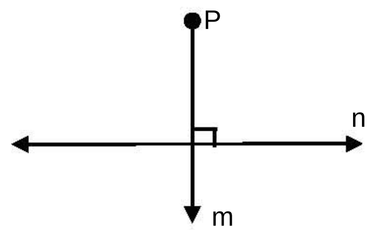
La demostración de la conjetura 5 es muy parecida a la demostración que se hizo para la suma de los ángulos exteriores de un paralelogramo, (problema (5 e) de la sección de paralelismo) se sugiere que la realices.

El siguiente teorema es una conjetura que teníamos pendiente de los experimentos del capítulo anterior que ahora estamos en condiciones de demostrar.

TEOREMA 8. Por un punto exterior a una recta dada pasa sólo una recta perpendicular a dicha recta.

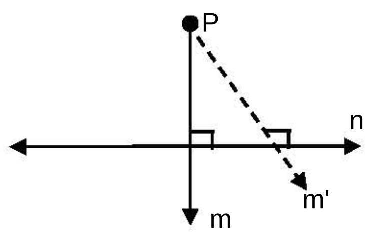
HIPÓTESIS: **n** es una recta y **P** un punto exterior a ella.

TESIS: Por **P** pasa una única recta **m**, perpendicular a **n**.



DEMOSTRACIÓN (Por reducción al absurdo).

Supongamos que podemos trazar por **P** otra recta **m’**, perpendicular a **n**. Entonces las intersecciones de **n**, **m** y **m’** formarían un triángulo



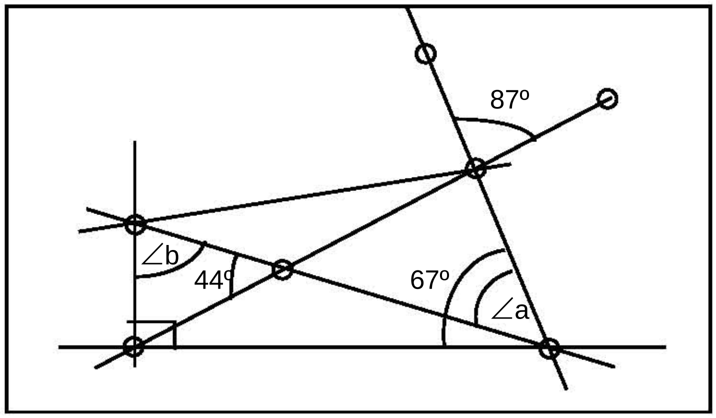
Este triángulo tendría dos ángulos interiores de 90º lo cual no es posible, pues la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

$\therefore$ Existe una única recta perpendicular a la recta **n** que pasa por el punto **P**.

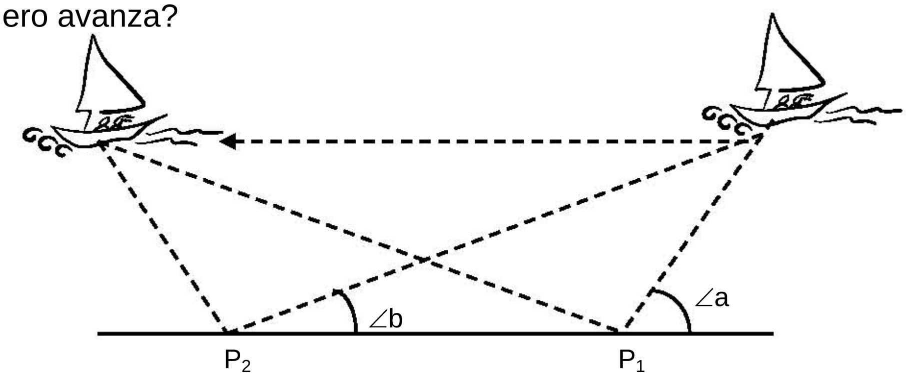
La conjetura 1 y las conjeturas del quinto experimento no las podemos demostrar con los teoremas que hasta ahora tenemos, requerimos la herramienta de congruencia de triángulos. Sin embargo, las hemos ubicado aquí porque serán muy requeridas en los problemas de este capítulo y nos vamos a permitir usarlas sin demostrarlas.

§ 3
PROBLEMAS

1. a) Un obrero debe construir una placa de acero con orificios como los que muestra la figura. El obrero debe calcular primero las medidas de los ángulos **a** y **b**. Encuentra las medidas.

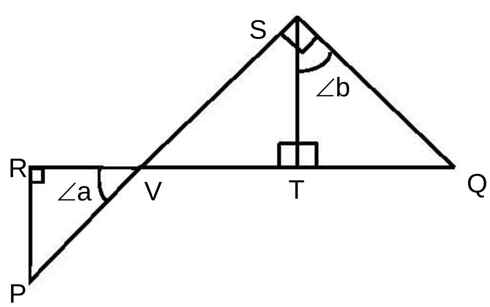


b) Dos observadores, en los puntos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ ven pasar un velero. Los ángulos, **a** y **b,** que se forman por la visual, (la línea imaginaria desde el ojo del observador al barco) y la orilla del mar están en constante cambio, ¿Será la medida del ángulo **a** siempre mayor que la medida del ángulo **b,** mientras el velero avanza?

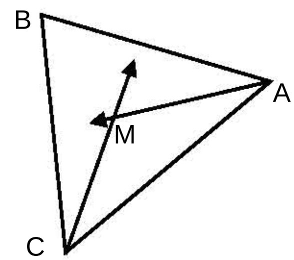


2. a) Demuestra la siguiente proposición:
PROPOSICIÓN 7. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con dos ángulos de un segundo triángulo, los terceros ángulos de los triángulos también son congruentes.

b) En la figura $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$, $\overline{ST} \perp \overline{RQ}$ y $\overline{SQ} \perp \overline{PS}$. Demostrar que $\angle a = \angle b$.

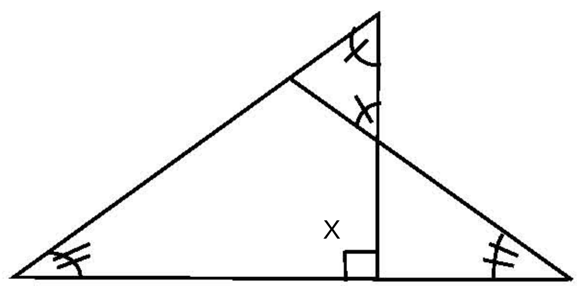


3. a) En el triángulo **ABC** de la figura, se tiene que AB = AC y $\angle B = 64^{o}$, las bisectrices de $\angle A$ y $\angle C$ se cortan en el punto **M**. Determina la medida del $\angle AMC$.



b) Encuentra la medida del ángulo más grande formado por las bisectrices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.

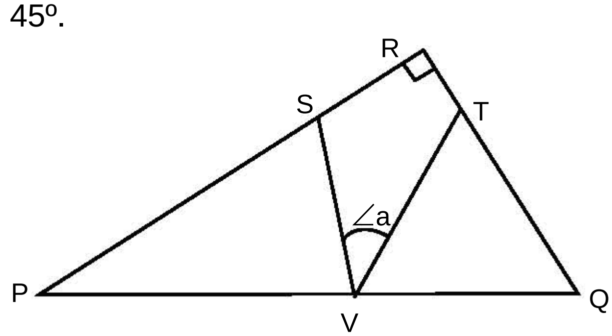
4. a) En la siguiente figura se indican los ángulos congruentes con marcas iguales. Demuestra que **X** es un ángulo recto.



b) Si **ABC** es un triángulo isósceles, con el segmento **AB** como base, AC = CB, **N**, **C** y **B**, puntos colineales, $\overline{MN}$ una perpendicular a $\overline{AB}$ que corta a $\overline{AC}$ en **D**. **D** un punto en el lado **AC**. Demostrar que el triángulo **CDN** es isósceles.

5. a) **PQR** es un triángulo equilátero y **QRST** un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo **PXR**, si **X** es el punto de intersección de los segmentos **PT** y **QR**?

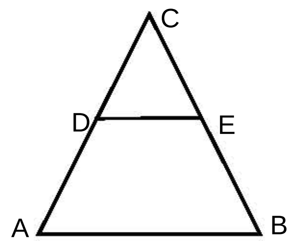
b) En el triángulo **PQR** el ángulo **R** es recto, QT = QV y PS = PV. Demuestra que $\angle a = 45^{o}$.



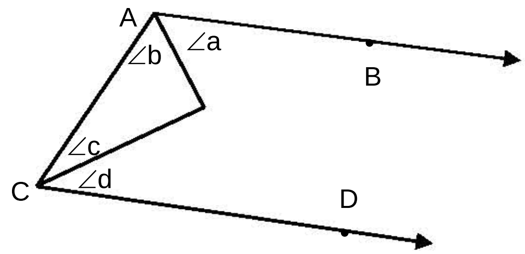
6. a) Demostrar que el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos de un triángulo mide 90º más que la mitad del tercer ángulo.

b) En un triángulo **MNO**, las bisectrices del ángulo **N** y del ángulo exterior en **O** se intersectan en **A**, probar que el ángulo **A** es igual a la mitad del ángulo **M**.

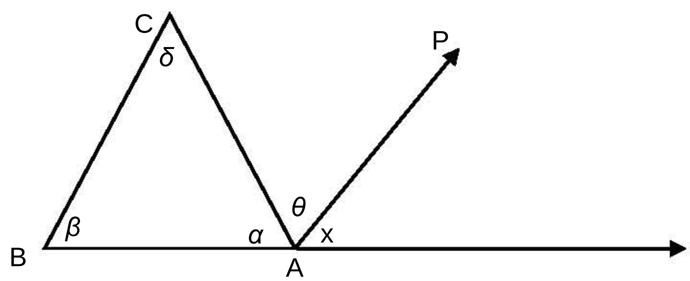
7. a) En la figura si $\angle CDE = \angle CED$ y $\angle A = \angle B$. Demuestra que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



b) Si en la figura $\angle a = \angle b$, $\angle c = \angle d$ y $\angle b + \angle c = 90º$, demuestra que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

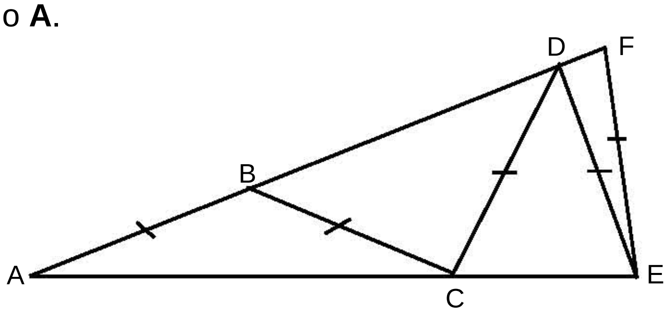


8. a) Encuentra los valores de ***α, β, δ*** y ***θ*** en la figura, sabiendo que: $\angle X = 65º$, $\overrightarrow{AP} \parallel \overline{BC}$ y $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz del ángulo exterior en el vértice **A** del triángulo **ABC**. ¿Cómo es el triángulo **ABC**?



b) Sea **ABC** un triángulo isósceles, con AB = AC, sea **m** la bisectriz del ángulo exterior en el vértice **A**. Demuestre que **m** es paralela al lado **BC** del triángulo **ABC**.

9. a) Sea un triángulo isósceles **AEF**, con AF = AE. Se han dibujado cinco segmentos congruentes como se muestra en la figura. Encuentra la medida del ángulo **A**.



b) Demuestra que el triángulo **DCE** del problema anterior es equilátero.

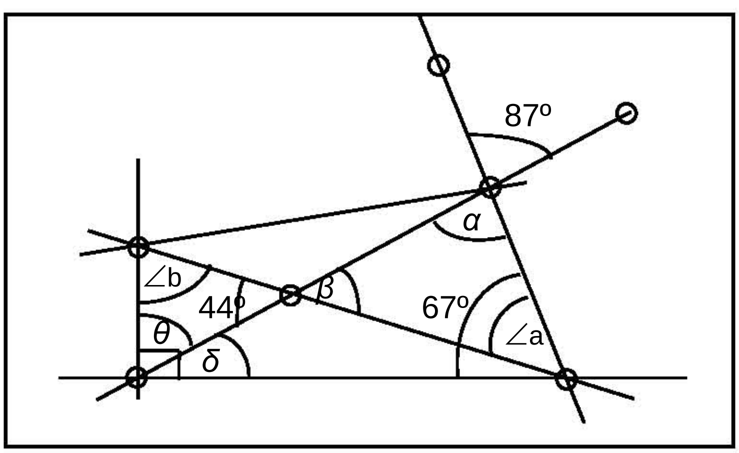
10. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos internos de un paralelogramo, son vértices de un rectángulo.

SUGERENCIAS

1. a) Basta usar el teorema 1 y el teorema 6.
   b) Utiliza el teorema 7.
2. a) Usar teorema 6.
   b) Usa la proposición 6 que acabas de demostrar.
3. a) ¿Qué ocurre cuando dos lados de un triángulo son iguales? (Revisa la conjetura 6).
   b) Usa el teorema 6 y recuerda el concepto de bisectriz.
4. a) Por supuesto debes usar los dos triángulos isósceles que se dan y relacionar sus ángulos con otro triángulo que contenga al ángulo **X.** Utiliza además un ángulo auxiliar, para poder usar el teorema 7.
   b) Realiza el dibujo y usa conjetura 7.
5. a) Hacer el dibujo con cuidado y usar la conjetura 8. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equiángulo? Recuerda la definición de cuadrado.
   b) Se debe usar en la demostración el teorema 6 y la conjetura 6. Establecer una serie de relaciones con los ángulos de los tres triángulos que se forman y con el ángulo llano que forma el ángulo **x** con los ángulos adyacentes a él.
6. a) Se debe aplicar el teorema 6 a los dos triángulos que se forman y usar adecuadamente la definición de bisectriz.
   b) Usa dos veces el teorema 7, una vez en el triángulo **NMO** y otra en el nuevo triángulo que se forma
7. a) Usa el teorema 6 para los triángulos que se forman y no olvides tus datos.
   b) Usa la proposición 4 en la demostración.
8. a) Usar el teorema 7 y el Teorema Fundamental del Paralelismo.
   b) Usa los dos teoremas de la sugerencia anterior además de la conjetura 6.
9. a) Observa todos los triángulos isósceles que se forman, ponles nombre a los ángulos iguales, y aplica la conjetura 6. Obtén relaciones entre los ángulos de éstos triángulos usando teorema 6, 7 y los ángulos llanos que se forman.
   b) Usa los valores de los ángulos que encontraste en el problema anterior.
10. Recuerda que las bisectrices de los ángulos de vértices opuestos en un paralelogramo son paralelas, (problema 9 del parágrafo 9 del capítulo anterior).

SOLUCIONES

1. a)



Llamemos ***α*** y ***β*** a los ángulos que se muestran en la figura.

$$\alpha = 87^{\circ} \quad y \quad \beta = 44^{\circ}$$

por ser opuestos por el vértice a los ángulos que tienen, respectivamente, esas medidas.

Por otro lado

$$\alpha + \beta + \angle a = 180^{\circ} \text{ por ser ángulos interiores de un triángulo}$$

$$\Rightarrow \quad \angle a = 180^{\circ} - (87^{\circ}+44^{\circ})$$

$$\therefore \ \angle a = 49^{\circ}$$

Ahora usando el ángulo **δ**, obtenemos:

$$\alpha + \delta + 67^{\circ} = 180^{\circ} \text{ por ser ángulos interiores de un triángulo}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 180^{\circ} - (87^{\circ} + 67^{\circ})$$

$$\therefore \ \delta = 26^{\circ}$$

También se cumple que:

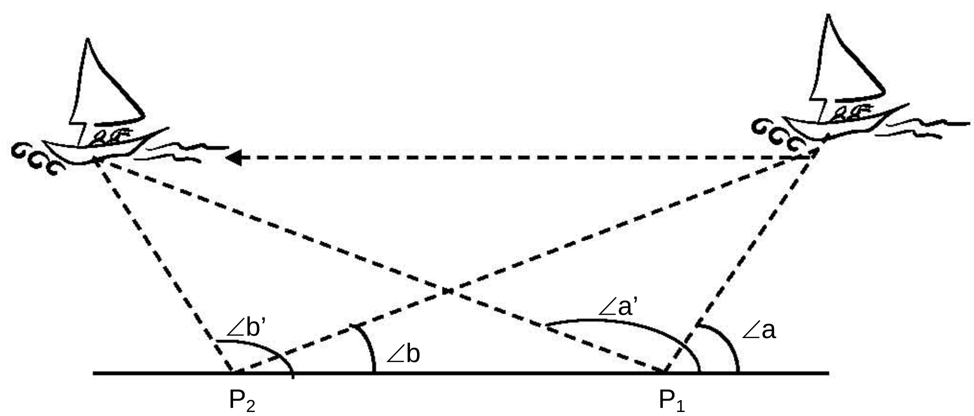
$$\theta = 90^{\circ} - \delta \quad \text{ya que } \theta \text{ y } \delta \text{ son ángulos complementarios}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 90^{\circ} - 26^{\circ} = 64^{\circ}$$

Además, $\theta + \angle b + 44^{\circ} = 180^{\circ}$ por ser ángulos interiores de un triángulo

$$\therefore \ \angle b = 180^{\circ} - \theta - 44^{\circ} = 180^{\circ} - 64^{\circ} - 44^{\circ} = 72^{\circ}$$

b)



Observemos que con las visuales y la orilla de la playa se forman triángulos, en uno de ellos el ángulo **a** es uno de sus ángulos exteriores y el ángulo **b** es un ángulo interior no adyacente al ángulo **a**, por lo que, por teorema 7:

$$\angle a = \angle b + \angle c \quad \Rightarrow \quad \angle a > \angle b$$

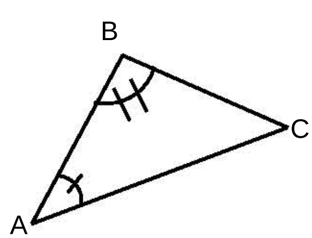
Si el barco cambiara de posición, se formarían ahora los ángulos **a’** y **b’**. Con los mismos argumentos se cumple:

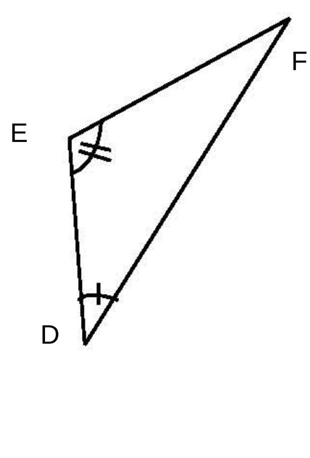
$$\angle a' > \angle b'$$

Por lo que la respuesta es afirmativa.

2. a) HIPÓTESIS: $\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$

   TESIS: $\angle C = \angle F$





DEMOSTRACIÓN

$\angle A + \angle B + \angle C = 180º$ por ser ángulos interiores de un triángulo (teorema 6)

$\angle D + \angle E + \angle F = 180º$ por la misma razón

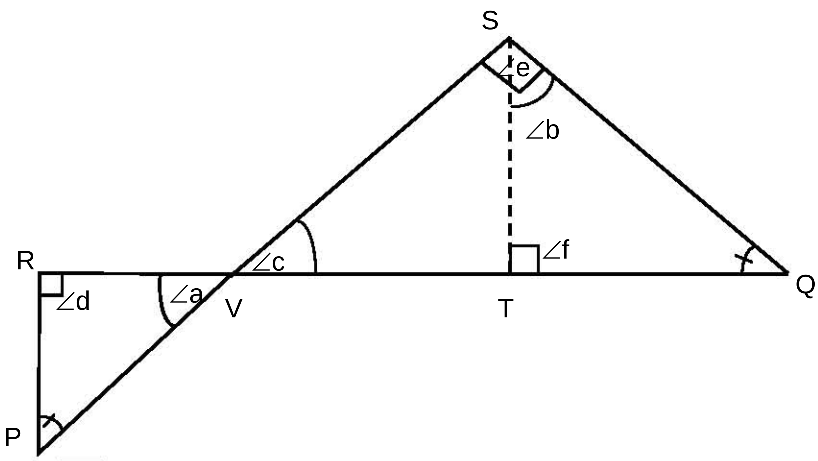
$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$

Y ya que por hipótesis

$\angle A = \angle D$ y $\angle B = \angle E$

$\therefore \angle C = \angle F$

b)



DATOS: $\overline{PR} \perp \overline{RQ}$, $\overline{ST} \perp \overline{RQ}$ y $\overline{SQ} \perp \overline{PS}$

Por demostrar que $\angle a = \angle b$.

DEMOSTRACIÓN

En los triángulos **PRV** y **VSQ** tenemos:

$\angle d = 90º = \angle e$ por hipótesis

$\angle a = \angle c$ por ser opuestos por el vértice

$\Rightarrow \angle P = \angle Q$

ya que si dos ángulos de un triángulo son iguales los terceros ángulos también son iguales, (proposición 7).

Además, por hipótesis en los triángulos **RVP** y **STQ** se cumple:

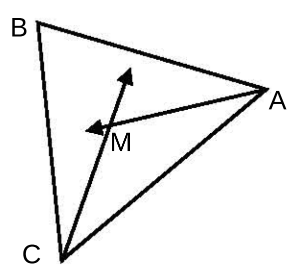
$\angle d = \angle f = 90º$

De las dos últimas igualdades concluimos que en los triángulos **PRV** y **STQ** se cumple:

$\angle a = \angle b$ por proposición 7

3.

a) DATOS: AB = AC**,** $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{CM}$ son bisectrices de $\angle A$ y $\angle C$ respectivamente y se cortan en el punto **M** y $\angle B = 64º$,



Como $\angle B = 64º$ y AB = AC tenemos:

$\angle C = 64º$ ya que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales

$\Rightarrow \quad \angle A = 52º$ por teorema 6

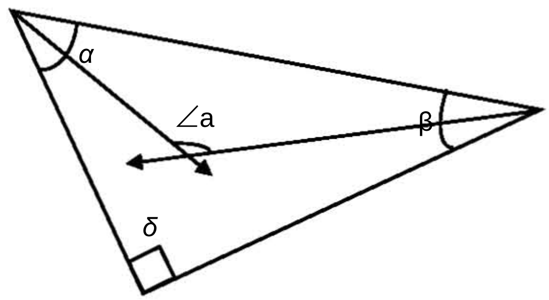
Ahora, por ser $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{CM}$ bisectrices de los ángulos **A** y **C** respectivamente, se obtiene:

$\angle MCA = 32º$ y $\angle MAC = 26º$ por definición de bisectriz

Y como $\angle MCA$, $\angle MAC$ y $\angle AMC$ son ángulos de un triángulo, pues por dato las bisectrices se intersectan en **M**, se concluye que:

$\angle ACM = 122º$ (teorema 6)

b) Hagamos un dibujo



Sabemos que:

$\alpha + \beta + \delta = 180º$ por teorema 6

Pero $\delta = 90º$ por hipótesis

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 90º$

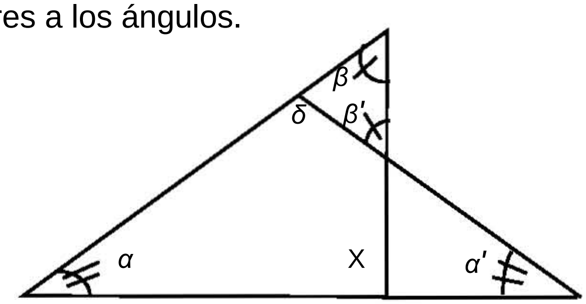
$\Rightarrow \quad \alpha/2 + \beta/2 = 45º$

Ahora bien, $\alpha/2$, $\beta/2$ y $\angle a$ son ángulos de un triángulo, el formado por las bisectrices y la hipotenusa, por lo que:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \angle a = 180º$$

$$\therefore \quad \angle a = 135º$$

4. a) Démosles nombres a los ángulos.



Podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$ por hipótesis

$\delta = \beta + \beta'$

por ser **δ** el ángulo exterior del triángulo cuyos ángulos interiores son **β** y **β'** (teorema 7)

$\delta + \alpha + \alpha' = 180º$ por teorema 6

De las tres últimas igualdades obtenemos:

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180º$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 90º$

Finalmente

$\alpha + \beta + \angle X = 180º$ por ser ángulos interiores de un triángulo

$\therefore\ \angle X = 90º$

b) HIPÓTESIS: **ABC** es un triángulo isósceles, con el segmento **AB** como base y AC = CB.

N, **C** y **B** puntos colineales.

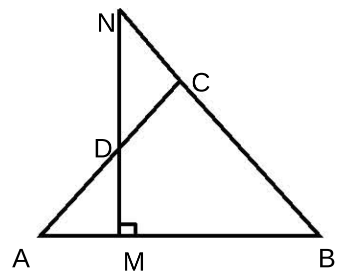
$\overline{MN}$ es una perpendicular a $\overline{AB}$

$\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ se intersectan en el punto **D**

D un punto sobre el lado $\overline{AC}$

TESIS: El triángulo **CDN** es isósceles.

Hagamos el dibujo.



Como AC = CB por hipótesis

$\angle A = \angle B$ por conjetura 6

Por otro lado en el triángulo **ADM** se cumple

$\angle A + \angle ADM + \angle AMD = 180º$ por ser ángulos interiores de un triángulo

Pero por hipótesis $\angle AMD = 90º$

$\Rightarrow\ \angle A + \angle ADM = 90º$

Además en el triángulo **MBN** tenemos:

$\angle N + \angle B + \angle NMB = 180º$ por teorema 6

Pero $\angle NMB = 90º$ por hipótesis y teníamos que $\angle A = \angle B$, entonces

$\Rightarrow\ \angle N + \angle A = 90º$

De las dos últimas ecuaciones iguales a 90º obtenemos

$\angle A + \angle ADM = \angle N + \angle A$

$\Rightarrow\ \angle ADM = \angle N$

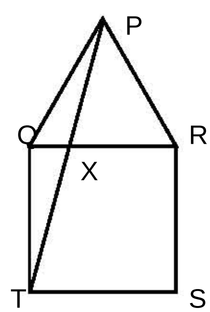
Por otro lado $\angle ADM = \angle NDC$ por ser opuestos al vértice

$\Rightarrow\ \angle N = \angle NDC$

$\therefore$ el triángulo **NCD** es isósceles

ya que los lados opuestos a los ángulos iguales de un triángulo también son iguales por conjetura 7.

5. a) Dibujemos



Por conjetura 8 un triángulo equilátero tiene todos sus ángulos iguales y como su suma debe ser igual a 180º, entonces cada uno de ellos mide 60º.

$$\Rightarrow \quad \angle PQR = 60º \quad y \quad \angle RPQ = 60º$$

Como un cuadrado tiene sus cuatro ángulos congruentes y cada uno mide 90º, entonces

$$\angle RQT = 90º$$

De las dos últimas ecuaciones deducimos:

$\angle TQP = 150º$ ya que los ángulos **RQT** y **RQP** son adyacentes

Ahora bien, como

QP = QR por ser lados de un triángulo equilátero

Y

QR = QT por ser lados de un cuadrado

Entonces de las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$QP = QT$$

$\Rightarrow$ ΔTQP es isósceles

$\Rightarrow$ $\angle QTP = \angle QPT$ por conjetura 6.

$\Rightarrow$ $\angle QPT = 15º = \angle QPT$ por teorema 6

Ahora como

$$\angle XPR = \angle RPQ - \angle QPT$$

Sustituyendo las medidas de estos ángulos obtenemos:

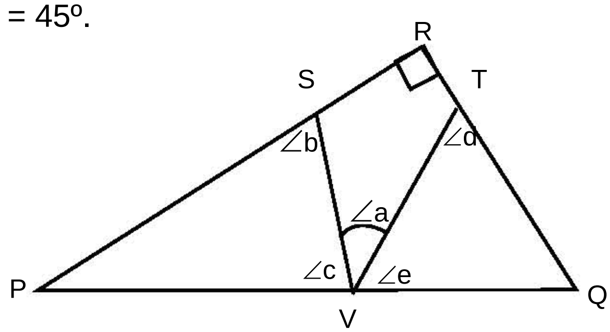
$$\Rightarrow \quad \angle XPR = 45º$$

Por lo que en el triángulo **PXR**, aplicando teorema 6, obtenemos

$$\angle PXR = 75º$$

b) HIPÓTESIS: En el triángulo **PQR**, el ángulo **R** es recto, QT = QV y PS = PV.

TESIS: $\angle x = 45º$.



DEMOSTRACIÓN

Consideremos los ángulos **b**, **c**, **d** y **e**.

Ya que $\angle P$, $\angle b$ y $\angle c$ son ángulos de un triángulo obtenemos:

$\angle P + \angle b + \angle c = 180º$ por teorema 6.

Por el mismo argumento

$$\angle Q + \angle d + \angle e = 180º$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\angle P = 180º - \angle b - \angle c \quad y \quad \angle Q = 180º - \angle d - \angle e$$

Ahora bien, como por dato QT = QV y PS = PV tenemos que:

$$\angle b = \angle c \quad y \quad \angle d = \angle e \quad \text{por conjetura 6}$$

Entonces, de las cuatro últimas igualdades se deduce que:

$$\angle P = 180^\circ - 2\angle b \quad y \quad \angle Q = 180^\circ - 2\angle e$$

Sumando las dos ecuaciones últimas obtenemos:

$$\angle P + \angle Q = (180^\circ - 2\angle b) + (180^\circ - 2\angle e)$$

$$\Rightarrow \quad \angle P + \angle Q = 360^\circ - 2\angle b - 2\angle e$$

Por otro lado como $\angle P$, $\angle Q$ y $\angle R$ son ángulos de un triángulo por lo que se cumple:

$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ \text{ por teorema 6}$$

Por dato el ángulo **R** es recto

$$\Rightarrow \quad \angle P + \angle Q = 90^\circ$$

De la antepenúltima y última igualdad obtenemos:

$$90^\circ = 360^\circ - 2\angle b - 2\angle e$$

$$\Rightarrow 2\angle b + 2\angle e = 270^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \angle b + \angle e = 135^\circ$$

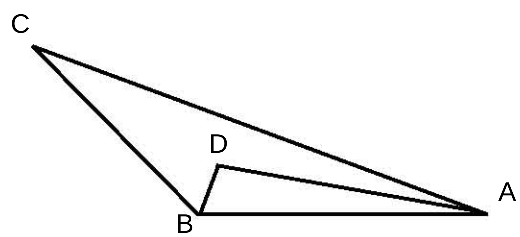
Finalmente

$$\angle b + \angle a + \angle e = 180^\circ \quad \text{por formar ángulo llano}$$

$$\Rightarrow \quad \angle a = 180^\circ - (\angle b + \angle e)$$

$$\therefore \quad \angle a = 45^\circ$$

6. a) Hagamos el dibujo.



En el triángulo **ABC** se cumple:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad \text{por teorema 6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$$

Como $\overline{BD}$ y $\overline{DA}$ bisectan a los $\angle A$ y $\angle B$ también se cumple:

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle D = 180^\circ \quad \text{por teorema 6}$$

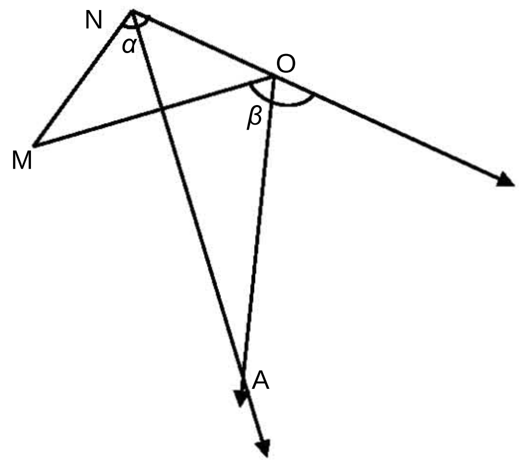
$$\Rightarrow \quad \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \angle D$$

De la segunda ecuación que obtuvimos y de la anterior obtenemos:

$$90^\circ - \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle D$$

$$\therefore \quad \angle D = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}.$$

b) Hagamos primero un dibujo.



Como β es un ángulo exterior del triángulo **MNO**, tenemos:

$$\beta = \angle M + \alpha \text{ por teorema 7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\angle M}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\angle M}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

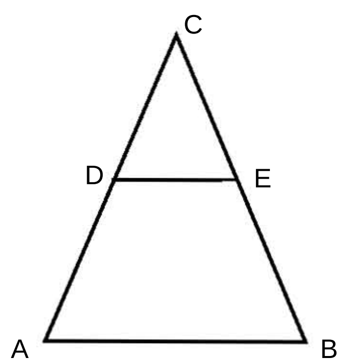
Consideremos ahora el triángulo formado por las bisectrices y el lado **NO**, **β/2** es un ángulo exterior de este triángulo **NOA,** por lo que:

$$\angle A + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ por teorema 7}$$

$$\Rightarrow \quad \angle A = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore \quad \angle A = \frac{\angle M}{2}$$

7. a)



Los ángulos **C**, **CDE** y **CED** son ángulos del triángulo **CDE**, por lo que:

$$\angle C + \angle CDE + \angle CED = 180^{\circ} \text{ por teorema 6}$$

Ya que por dato $\angle CDE = \angle CED$, se tiene

$$\angle C + 2\angle CDE = 180^{\circ}$$

Con los mismos argumentos tenemos:

$$\angle C + \angle CAB + \angle CBA = 180^{\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \angle C + 2\,\angle CAB = 180^\circ$$

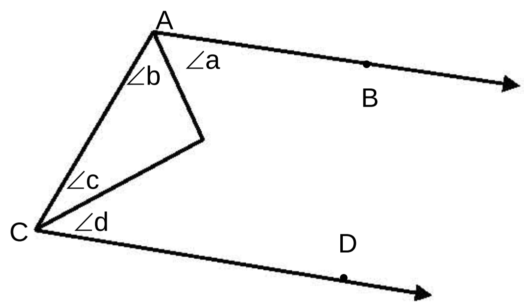
De la última y antepenúltima ecuación obtenemos:

$$\angle C + 2\angle CDE = \angle C + 2\,\angle CAB$$

$$\Rightarrow \quad \angle CDE = \angle CAB$$

$\therefore\ \overline{DE} \parallel \overline{AB}$ por Teorema Fundamental del Paralelismo.

b)



Por hipótesis $\angle b + \angle c = 90^\circ$, $\angle a = \angle b$ y $\angle c = \angle d$

$$\Rightarrow \angle a + \angle d = 90^\circ$$

Si sumamos la primera y última ecuaciones, obtenemos:

$$(\angle a + \angle b) + (\angle c + \angle d) = 180^\circ$$

Y dado que los ángulos **a** y **b**, por un lado y **c** y **d** por el otro, son adyacentes, tenemos que:

$$\angle a + \angle b = \angle BAC \text{ y } \angle DCA = \angle c + \angle d \text{ son suplementarios}$$

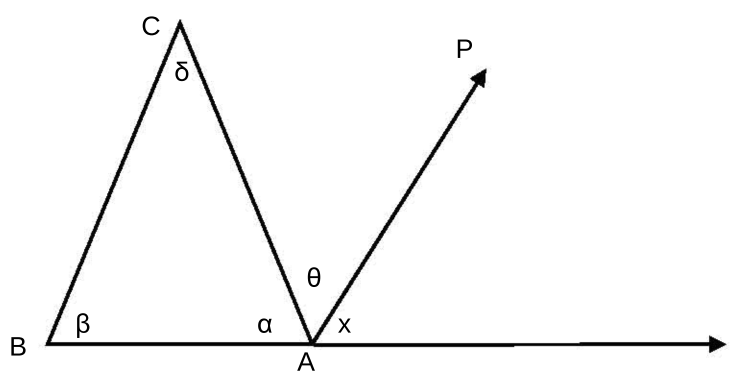
$$\therefore\ \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$$

ya que si los colaterales internos son suplementarios, las rectas son paralelas (proposición 4)

Observemos que en el triángulo **ABC** como $\angle b + \angle c = 90^\circ$, por teorema 6 se deduce que, $\angle E = 90^\circ$. Además, los segmentos **AE** y **CD** son bisectrices de los ángulos **A** y **C** por dato, podríamos entonces formular una nueva proposición que dijera:

PROPOSICIÓN 8: Si las bisectrices de los ángulos colaterales internos, son perpendiculares, entonces las rectas son paralelas. La demostración de esta proposición, se te sugiere la realices.

8. a) Como el rayo **AP** es bisectriz del ángulo exterior en el vértice **A**, entonces:



$\theta = 65^{o}$ por definición de bisectriz

Y como $\overrightarrow{AP} \parallel \overline{BC}$, se obtiene:

$\beta = 65^{o}$ por Postulado Fundamental del Paralelismo

Ahora **β** y **δ** son ángulos del triángulo no adyacentes al ángulo exterior en el vértice **A**, por lo que:

$\theta + \angle x = \beta + \delta$ por teorema 7 $\Rightarrow$ $\delta = 65^{o}$

y

$\alpha = 50^{o}$ por ser suplemento del ángulo exterior en **A**

Ahora bien, como **β** y **δ** miden lo mismo, el triángulo **ABC** es un triángulo isósceles, por conjetura 7.

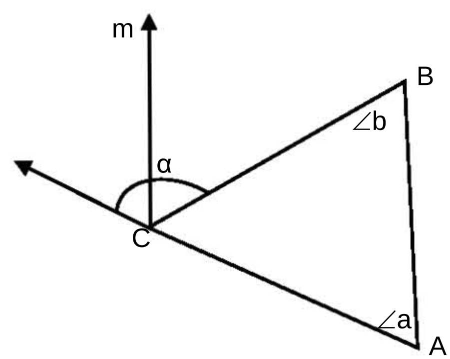
En realidad podríamos establecer una proposición, generalizando este resultado:

PROPOSICIÓN 7: Si en un triángulo **ABC** la bisectriz del ángulo exterior en **A** es paralela al lado **AB**, entonces el triángulo **ABC** es isósceles. Se te sugiere demostrarla.

La siguiente proposición es el recíproco de la proposición anterior.

b) HIPÓTESIS: ΔABC es isósceles, con $AC = BC$ y es $\vec{m}$ bisectriz del ángulo exterior del $\angle C$

TESIS. $\vec{m} \parallel \overline{AB}$



DEMOSTRACIÓN

Sean **α** el ángulo exterior en el vértice **C**, los ángulos **a** y **b** sobre el lado **AB** del triángulo **ABC**.

$$\alpha = \angle a + \angle b \text{ por teorema 7}$$

Además

$$\angle a = \angle b$$

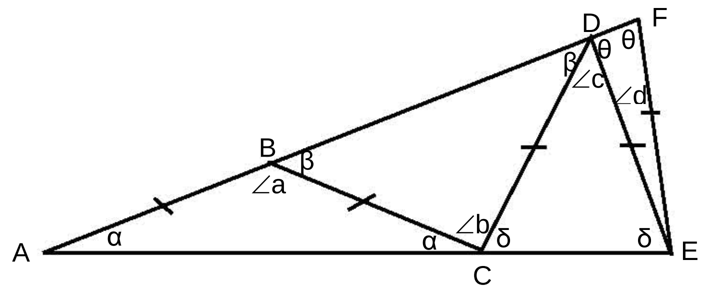
por ser ángulos opuestos a lados iguales de un triángulo isósceles, (conjetura 6)

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2\angle a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = \angle a$$

$\therefore \vec{m} \parallel \overline{AB}$ por Teorema Fundamental Paralelismo.

9. a)



Por dato AB = BC por lo que el triángulo **ABC** tiene dos ángulos iguales, los que se oponen a los lados iguales, por conjetura 6. Llamemos **α** a dichos ángulos.
También por dato BC = CD, por la misma conjetura 6, el triángulo **BCD** tiene los ángulos opuestos a los lados iguales congruentes, llamemos **β** a estos ángulos.
Y ya que **β** y ángulo **b** son ángulos del triángulo **BCD**, tenemos:

$$\beta + \beta + \angle b = 180^o \;\Rightarrow\; 2\beta + \angle b = 180^o \text{ por teorema 6}$$
$$\Rightarrow\; \angle b = 180^o - 2\beta$$

Por otro lado **β** es un ángulo exterior del triángulo **ABC**, entonces

$$\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha \text{ por teorema 7}$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$\angle b = 180^o - 4\alpha$$

El triángulo **CDE** también es isósceles, por conjetura 6, tiene los ángulos opuestos a los lados iguales congruentes, llamémosles **δ** a tales ángulos.
Además tenemos que:

$$\alpha + \angle b + \delta = 180^o \text{ por formar un ángulo llano}$$

Sustituyendo la penúltima ecuación en la anterior, tenemos:

$$\Rightarrow\; \alpha + 180^o - 4\alpha + \delta = 180^o,$$
$$\Rightarrow\; \delta = 3\alpha$$

Para el triángulo **CDE** se cumple:

$$\delta + \delta + \angle c = 180^o \text{ por teorema 6}$$
$$\Rightarrow\; \angle c = 180^o - 2\delta$$

Llamemos **θ** a los ángulos iguales del triángulo isósceles **DFE** (conjetura 6).
Tenemos que:

$$\beta + \angle c + \theta = 180^o \text{ por formar ángulo llano}$$
$$\Rightarrow\; \theta = 180^o - \beta - \angle c$$

Ya habíamos obtenido que $\beta = 2\alpha$ y $\angle c = 180^o - 2\delta$, sustituyendo a **β** y **c**, en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\theta = 180^o - 2\alpha - (180^o - 2\delta)$$
$$\Rightarrow\; \theta = 2\delta - 2\alpha$$

Y como $\delta = 3\alpha$ al sustituir en la ecuación anterior se cumple:

$$\theta = 2(3\alpha) - 2\alpha$$
$$\Rightarrow\; \theta = 4\alpha$$

Ahora bien, por hipótesis el triángulo **EAF** es isósceles, con AF = AE, por conjetura 6, concluimos que:

$$\delta + \angle d = \theta$$

Además, en el triángulo **AFE** se cumple:

$$\alpha + \theta + \theta = 180^\circ \text{ por teorema 6}$$

Sustituyendo la antepenúltima ecuación en la anterior obtenemos.

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \alpha = 20^\circ$$

b) En el problema anterior encontramos que:

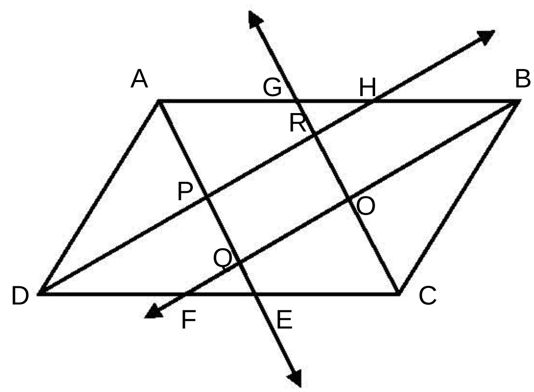
$$\delta = 3\alpha \text{ y } \alpha = 20^\circ \quad \Rightarrow \quad \delta = 60^\circ$$

Y

$$\angle c = 180^\circ - 2\delta \quad \Rightarrow \quad \angle c = 60^\circ$$

Esto es, el triángulo **DCE** es equiángulo por lo que, por conjetura 8, es un triángulo equilátero.

10. HIPÓTESIS: **ABCD** es un paralelogramo, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ bisectan los ángulos del paralelogramo.
TESIS: Los puntos **P**, **Q**, **O** y **R** son vértices de un rectángulo.



DEMOSTRACIÓN

Ya que las bisectrices de los ángulos de vértices opuestos en un paralelogramo son paralelas (problema 9 del parágrafo 9 del capítulo anterior), tenemos que:

$$\overline{AE} \parallel \overline{CG} \text{ y } \overline{BF} \parallel \overline{DG}$$

Ahora bien, como en el triángulo **ADP** se cumple:

$$\angle PAD + \angle ADP + \angle DPA = 180^\circ \text{ por teorema 6}$$

$$\Rightarrow \qquad \angle DPA = 180^\circ - (\angle PAD + \angle ADP)$$

Pero como los rayos **AP** y **DP** son bisectrices tenemos que:

$$\angle DPA = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ADC)$$

Sabemos, además, que $\angle DAB$ y $\angle ADC$ son suplementarios por ser ángulos de vértices consecutivos de un paralelogramo (problema 5b del parágrafo 8 del capítulo anterior).

$$\Rightarrow \qquad \angle DPA = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \angle DPA = 90^\circ$$

Pero como

$$\angle DPA = \angle HPE \text{ por ser opuestos por el vértice}$$

$$\Rightarrow \quad \angle HPE = 90^\circ$$

Ahora bien, ya tenemos que el cuadrilátero formado es un paralelogramo porque tiene sus lados opuestos paralelos y por ser paralelogramo tiene sus ángulos de vértices opuestos iguales (problema 5c del parágrafo 8 del capítulo anterior), lo que implica que:

$$\angle\ GOF = \angle 90º$$

Además los ángulos de vértices consecutivos de un paralelogramo deben ser suplementarios, por lo tanto

$$\angle DRC = AQB = 90º$$

$\therefore$ El paralelogramo **PROQ** es un rectángulo por definición.

CAPÍTULO IV
ÁNGULOS EN POLÍGONOS

§ 1

Como en los capítulos anteriores vamos a experimentar, a proceder inductivamente, analizando varios casos particulares para obtener conclusiones probables sobre los ángulos de los polígonos. A lo largo de los experimentos trabajaremos con polígonos convexos.

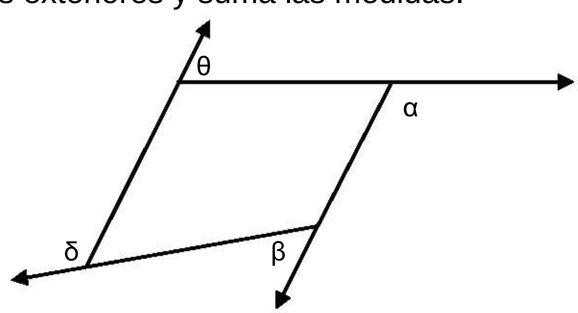
EXPERIMENTO 1. SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO.

1. Dibuja un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, un heptágono y un octágono, estos polígonos no necesariamente tienen que ser regulares. ¿Cuántos triángulos se pueden formar al interior de estos polígonos, si trazamos diagonales que partan de un mismo vértice?. Registra tus resultados en una tabla.
2. Encuentra un modelo algebraico que relacione el número de lados de un polígono con el número de triángulos que se pueden formar si se trazan diagonales que partan de un mismo vértice.
3. Usando el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º, determina, usando el paso 1, cuánto mide la suma de los ángulos interiores de: un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono, y un octágono.
4. Generalicemos: encuentre ahora un modelo matemático, algebraico, para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono de **n** lados usando el paso 2.
5. Investiga la definición de polígono regular.
6. En los polígonos regulares, ¿cómo calcularías la medida de cada ángulo interior?

EXPERIMENTO 2. SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS EXTERIORES DE UN POLÍGONO.

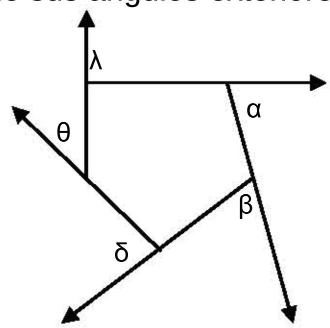
Los ángulos exteriores de un polígono se definen de la misma manera que los ángulos exteriores de un triángulo y de un paralelogramo. Usando esto, realicemos los siguientes experimentos.

1. Sabemos que para el triángulo la suma de los ángulos exteriores es 360º. ¿Cuánto miden la suma de los ángulos exteriores de un cuadrilátero? Haz un dibujo, mide los ángulos exteriores y suma las medidas.



Los ángulos α, β, δ y θ son ángulos exteriores de este polígono.

2. Dibuja un pentágono mide sus ángulos exteriores y súmalas ¿qué ocurre?



Los ángulos α, β, δ, θ, λ son ángulos exteriores de este polígono.

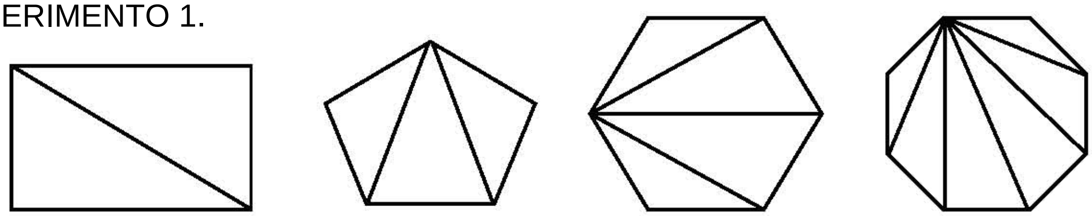
3. Dibuja ahora un hexágono, un heptágono y un octágono, corta sus ángulos exteriores, es decir, corta el vértice y un pequeño segmento de cada lado. Pega los ángulos que recortaste de tal manera que sean adyacentes uno del otro. ¿Qué observas?
4. ¿Cuál es tu conjetura? ¿Cuánto sumarán los ángulos exteriores de cualquier polígono de **n** lados?
5. Si el polígono fuera regular ¿cuánto valdría la medida de cada ángulo exterior?

EXPERIMENTO 3. ÁNGULOS CENTRALES DE UN POLÍGONO.
1. Investiga qué es un ángulo central de un polígono regular.
Procede inductivamente para establecer conclusiones sobre:
2. La suma de las medidas de los ángulos centrales de un polígono regular.
3. La medida de cada ángulo central de un polígono regular.
4. La relación entre un ángulo exterior y un central de un polígono regular.
4. La relación entre el ángulo interior y el central de un polígono regular.

En todos los casos no olvides hacer tus dibujos y tus tablas.

CONJETURAS

EXPERIMENTO 1.



POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE TRIÁNGULOS
Cuadrilátero	4	2
Pentágono	5	3
Hexágono	6	4
Heptágono	7	5
Octágono	8	6
...	...	...
n-lados	n	n-2

CONJETURA 1. El número de triángulos que pueden formarse en un polígono de **n** lados al trazar diagonales que partan de un mismo vértice es: **n - 2**

POLÍGONO	NÚMERO DE LADOS	NÚMERO DE TRIÁNGULOS	SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES
Cuadrilátero	4	2	2(180º)
Pentágono	5	3	3(180º)
Hexágono	6	4	4(180º)
Heptágono	7	5	5(180º)
Octágono	8	6	6(180º
...	...	...	...
n-lados	n	n-2	(n-2)(180º)

CONJETURA 2. En un polígono convexo de **n** lados, la suma de sus ángulos interiores es:

$$\mathbf{180^{\circ}(n - 2)}$$

CONJETURA 3. En un polígono regular de **n** lados cada ángulo interior mide:

$$\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$$

EXPERIMENTO 2.
CONJETURA 4. La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es igual a

$$\mathbf{360^{\circ}}$$

CONJETURA 5. La medida de cada ángulo exterior de un polígono regular de **n** lados es igual a

$$\frac{360^{\circ}}{n}$$

EXPERIMENTO 3.
CONJETURA 6. La suma de las medidas de los ángulos centrales de un polígono regular de **n** lados es igual a:

$$\mathbf{360^{\circ}}$$

y los ángulos centrales de un polígono regular de **n** lados son congruentes.

Pentágono regular y sus ángulos centrales

CONJETURA 7. Un ángulo central y un ángulo exterior de un polígono regular de **n** lados tienen la misma medida.

CONJETURA 8. Un ángulo central y un ángulo interior de un polígono regular de **n** lados son suplementarios.

§ 2
LOS POLÍGONOS.

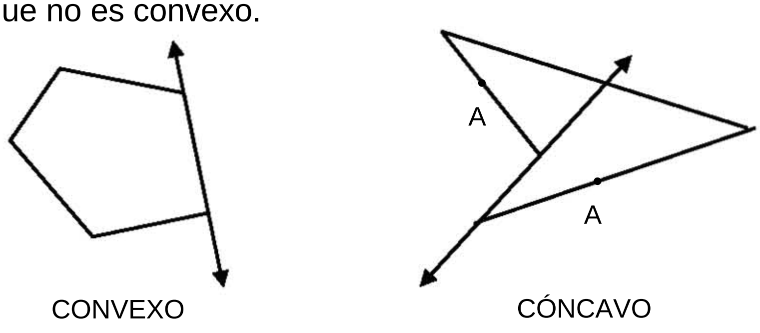
La palabra polígono se deriva de dos palabras griegas que significan *mucho* y *ángulos*. Generalmente se considera a un polígono como una porción de un plano limitada por segmentos de rectas. Su definición formal es la siguiente.

DEFINICIÓN: Si $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, ... $\mathbf{P_{n-1}}$, $\mathbf{P_n}$, con n > 2, son **n** puntos coplanares[1] distintos, y cumplen con que no hay dos segmentos, de la forma $\overline{P_{k-1}P_k}$, que se intersecten, excepto en sus puntos extremos y, además, no hay dos segmentos con un mismo punto extremo que sean colineales, entonces la unión de $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$, es un polígono.

Los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$, ... $\mathbf{P_{n-1}}$, $\mathbf{P_n}$, se llaman vértices del polígono. Los segmentos $\overline{P_{k-1}P_k}$ se llaman lados del polígono y los ángulos del polígono son los determinados por las parejas de segmentos que se intersectan.

Recordemos que hay polígonos convexos y polígonos cóncavos, definamos ahora que es un polígono convexo.

DEFINICIÓN: Un polígono es convexo si y sólo si no hay dos puntos del polígono en lados opuestos de una recta que contenga a un lado del polígono, Un polígono cóncavo es el que no es convexo.



Te sugiero investiga la clasificación de los polígonos según el número de lados.

También tenemos la siguiente clasificación de los polígonos.

Equilátero. Polígono que tiene sus lados de igual longitud.

Equiángulo. Polígono que tienen sus ángulos de la misma medida.

Regular. Polígono que es a la vez equilátero y equiángulo.

1 Tres puntos son llamados coplanares si se encuentran situados en un mismo plano

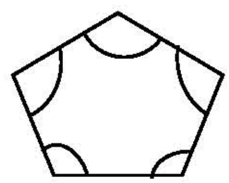
Demos una definición más antes de enunciar nuestro primer teorema.

DEFINICIÓN: La diagonal de un polígono es el segmento de recta que une un vértice con otro que no le es consecutivo.

Las demostraciones que daremos a continuación no serán formales, ya que las demostraciones estrictamente formales rebasan los límites de estas notas.

TEOREMA 9. La suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo que tiene **n** lados está dada por: (n-2)180º.

HIPÓTESIS: Tenemos un polígono de **n** lados.
TESIS: La suma de los ángulos del polígono es igual a (n-2)180º.



DEMOSTRACIÓN
Como en el polígono de **n** lados podemos trazar **n-2** triángulos con diagonales que parten de un mismo vértice, y además la suma de las medidas de los ángulos del polígono es igual a la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos formados, tenemos que la suma de los ángulos del polígono es igual a:

$$(n-2)180^{\circ}$$

ya que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a 180º, (teorema 6).

COROLARIO[2]. Cada ángulo de un polígono regular de n lados es igual a la suma de los ángulos dividida entre el número de lados:

$$\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}$$

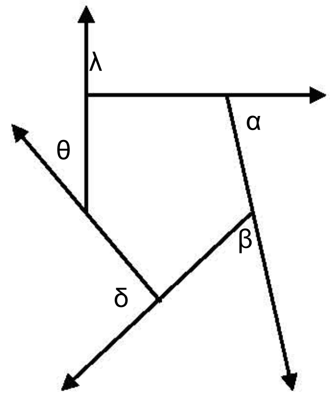
Esto se justifica porque un polígono regular tiene todos sus ángulos congruentes y como el número de lados es igual al número de ángulos, del teorema anterior se puede deducir la fórmula.

La definición de ángulo exterior de un polígono es la misma que la de ángulo exterior de un triángulo. Usaremos esta definición en el siguiente teorema.

TEOREMA 10. La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono de **n** lados es igual a 360º.
HIPÓTESIS: Tenemos un polígono de **n** lados.

2 Un corolario es un teorema cuya demostración se deduce inmediatamente de un teorema.

TESIS: La suma de los ángulos exteriores es igual a 360º.



DEMOSTRACIÓN

Como los ángulos interiores y exteriores son suplementarios por definición y tenemos **n** parejas de estos ángulos, entonces la suma de las medidas de los ángulos interiores y exteriores es:

$$(180^\circ)n$$

Pero como queremos la suma sólo de los ángulos exteriores, debemos restar a la suma anterior la suma de las medidas de los ángulos interiores, es decir:

$$(180^\circ)n - (n-2)180^\circ = 180^\circ n - 180^\circ n - 360^\circ = 360^\circ$$

COROLARIO. La medida de cada ángulo exterior de un polígono regular es igual a

$$\frac{360^\circ}{n}$$

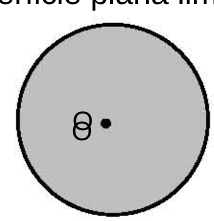
La justificación es la misma que dimos para el corolario anterior.

A continuación vamos a hablar de círculos y circunferencias por lo que se van a dar algunas definiciones.

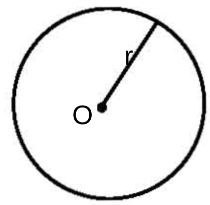
DEFINICIÓN: Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

O es el centro de la circunferencia

DEFINICIÓN: Un círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia.

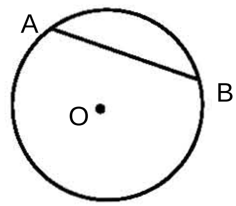


DEFINICIÓN: Un radio de un círculo es un segmento de recta con el centro como un punto extremo y un punto de la circunferencia como el otro extremo.



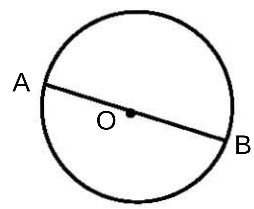
r es el radio del círculo

DEFINICIÓN: Una cuerda de un círculo es un segmento de recta que tiene ambos extremos en la circunferencia.



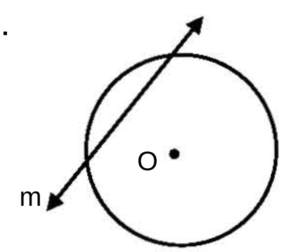
$\overline{AB}$ es una cuerda del círculo

DEFINICIÓN: Un diámetro de un círculo es una cuerda que contiene al centro.



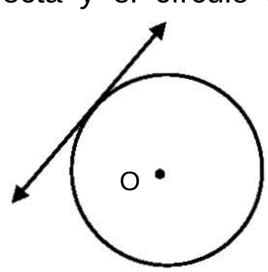
$\overline{AB}$ es un diámetro del círculo

DEFINICIÓN: Una secante de un círculo es una recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos.



$\overleftrightarrow{m}$ es una secante del círculo

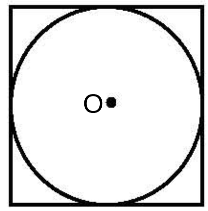
DEFINICIÓN: Una tangente a un círculo es una recta que intersecta exactamente en un punto a la circunferencia. Este punto se llama punto de tangencia o punto de contacto. Y se dice que la recta y el círculo son tangentes en ese punto de contacto.



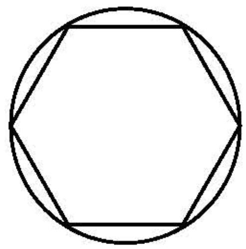
$\overleftrightarrow{m}$ es una tangente del círculo

Pasemos a las últimas definiciones.

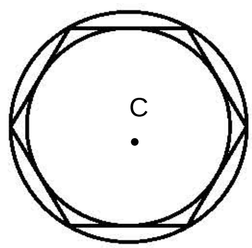
DEFINICIÓN: Se llama circunferencia inscrita en el polígono la que tiene su centro dentro del polígono y es tangente a todos sus lados.



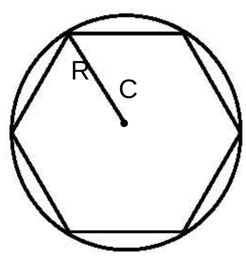
DEFINICIÓN. Se llama circunferencia circunscrita a un polígono la que pasa por cada uno de los vértices del polígono.



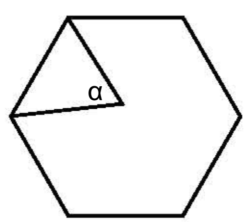
DEFINICIÓN. Se llama centro de un polígono regular al centro común de sus circunferencias inscrita y circunscrita.



DEFINICIÓN: Se llama radio de un polígono regular al segmento que une el centro con un vértice del polígono. Es el mismo radio que el de la circunferencia circunscrita.



DEFINICIÓN: Se llama ángulo central de un polígono regular al que forman dos radios que pasan por dos vértices consecutivos.



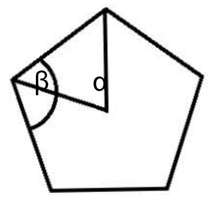
α es un ángulo central

La segunda parte de la conjetura 6 no la podremos demostrar porque requerimos de la congruencia de triángulos, sin embargo, la utilizaremos en la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 11. Un ángulo central y un ángulo interior de un polígono regular son suplementarios.

HIPÓTESIS: α es un ángulo central y β es un ángulo interior
TESIS: α y β son suplementarios

DEMOSTRACIÓN:



Como la suma de los ángulos centrales de un polígono regular es igual a 360º, ya que forman un ángulo de una vuelta y los ángulos centrales de un polígono regular son congruentes entonces cada uno mide:

$$\frac{360^\circ}{n}$$

Que es justamente lo que miden los ángulos exteriores de un polígono regular, según el corolario del teorema 10.

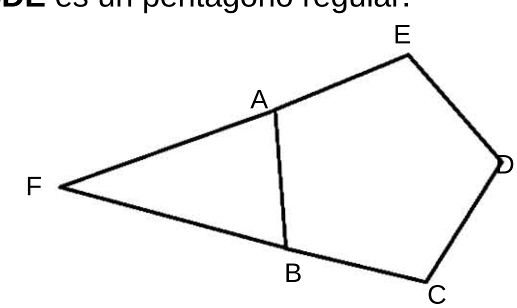
Ahora, por definición, los ángulos interiores y exteriores son suplementarios, por lo tanto, un ángulo central y un interior son suplementarios:

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Usemos estos teoremas para resolver los siguientes problemas.

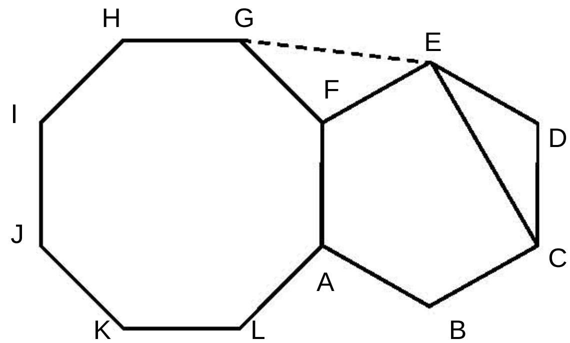
§ 3
PROBLEMAS

1. a) Encuentra el perímetro de un polígono regular cuya suma de los ángulos interiores es 3420º y la medida de cada uno de sus lados es a igual a 1 cm. Calcula además la medida de cada uno de sus ángulos exteriores.
   b) Encuentra el número de lados de un polígono si la suma de sus ángulos interiores es el doble que la suma de sus ángulos exteriores.
2. Usando la información dada, calcula las medidas de los ángulos interiores de las siguientes figuras.
   a) En la figura **ABCDE** es un pentágono regular.



b) **ABCD** es un rombo y la medida de su ángulo **DAB** es la mitad del ángulo **BDC**, con **BD** diagonal del rombo.

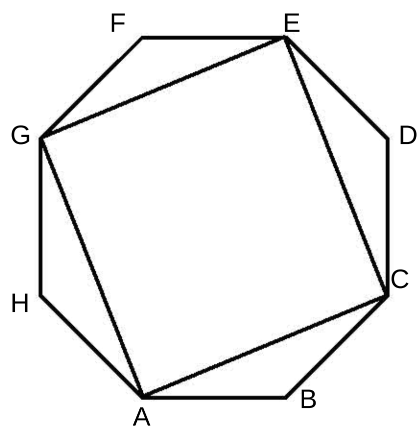
c) En la figura **ABCDEF** es un hexágono regular y **AFGHIJKL** es un octágono regular, encontrar la medida de los siguientes ángulos: $\angle$HIJ, $\angle$ABC, $\angle$FGE, $\angle$DEC.



3. Demuestra que si se construyen cuadrados sobre cada lado de un hexágono regular, y se unen consecutivamente los 12 vértices exteriores, resulta un dodecágono regular.
4. En la figura, si **ABCDEFGH** es un octágono regular, demuéstrese que:

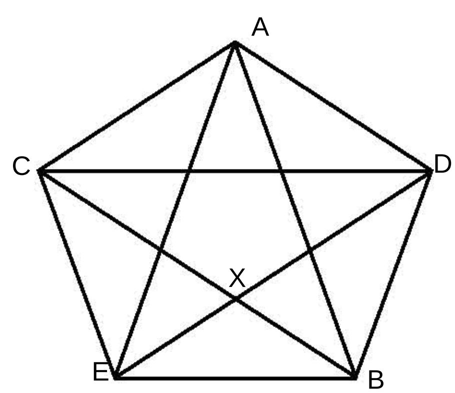
a) $\overline{GH} \parallel \overline{DC}$.

b) El cuadrilátero **ACEG** es equiángulo.

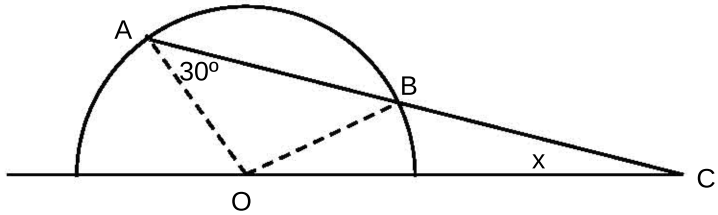


5. a) Investiga qué es un pentágono regular estrellado.

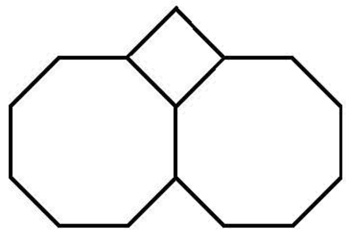
b) En un pentágono regular se encuentra inscrito un pentágono regular estrellado. Encuentra la medida del ángulo **ABC** y la del ángulo **BXE**.



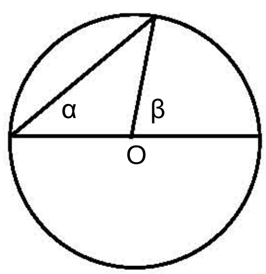
6. a) **AX** y **XB** son dos lados adyacentes de un polígono regular. Si el ángulo **ABX** es igual a un tercio del ángulo **AXB**, ¿cuántos lados tiene el polígono?
   b) Encuentra el valor del ángulo **x**, si en la figura **O** es el centro de la semicircunferencia y OA = BC.



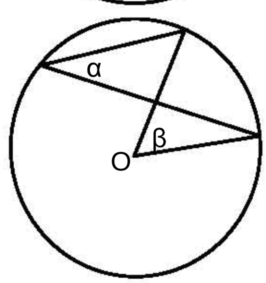
7. En los diseños de telas, suelos, vidrios, papel para paredes, etc., se suele utilizar un concepto geométrico llamado *teselado*. Un *teselado* es un conjunto de polígonos dispuestos de forma tal que no sobreponen unos a otros ni quedan separaciones entre ellos, es decir, son polígonos que se pueden acomodar alrededor de un punto. La siguiente figura muestra un *teselado*.



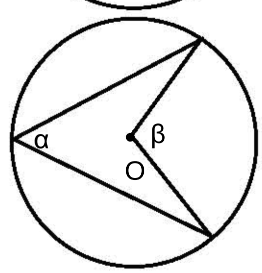
   Determina cuáles polígonos regulares pueden formar *teselados* usando exclusivamente un solo tipo de polígono.
8. En las siguientes figuras **O** es el centro del círculo, en todos los casos se pide probar que α = β/2
   a)



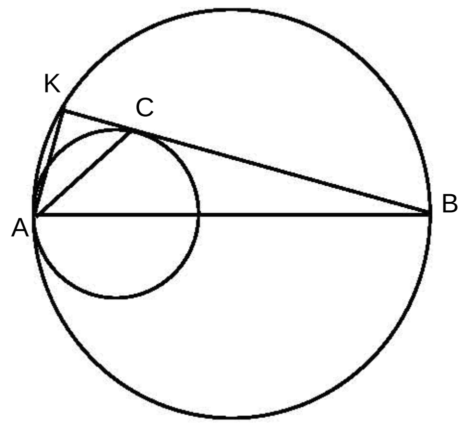
   b)



   c)



9. a) Dibuja un círculo y una de sus tangentes. Traza ahora un radio del círculo que pase por el punto de contacto del círculo y la tangente. ¿Cuánto miden los ángulos formados por la tangente y el radio? Establece una proposición sobre este hecho, si es necesario haz varios dibujos.
   b) Dos circunferencias tienen contacto en el punto **A**. El segmento **AB** es el diámetro de la circunferencia mayor. La cuerda **BK** de la circunferencia mayor hace contacto con la circunferencia menor en el punto **C**, como se muestra en la figura. Prueba que el segmento **AC** es la bisectriz del ángulo **BAK**.



10. En el cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de otro cuadrilátero, los ángulos opuestos son suplementarios.

SUGERENCIAS

1.
   a) Utiliza las fórmulas para obtener la suma de los ángulos interiores de un polígono y la suma de los ángulos exteriores de un polígono regular.
   b) Usa los teoremas sobre la suma de las medidas de los ángulos interiores y exteriores de un polígono.
2. a) Usa la definición de ángulo exterior.
   b) Observa que la diagonal divide a el rombo en dos triángulos isósceles, usa la definición de rombo.
   c) Nota que el triángulo **GFE** es un triángulo isósceles.
3. Demuestra que el triángulo determinado por los vértices de dos cuadrados consecutivos y el vértice que comparten dichos cuadrados es un triángulo equilátero.
4.
   a) Utiliza el hecho de que el polígono **CDEFGH** es un hexágono del cual se conocen cuatro de sus ángulos.
   b) Observa que los lados del hexágono con los del cuadrilátero forman triángulos isósceles.
5. b) Nuevamente el asunto es observar que se forman triángulos isósceles con los lados del polígono estrellado y el pentágono.
6. a) Haz un dibujo y observa que se forma un triángulo isósceles.
   b) Observa que los segmentos **OA** y **OB** son radios y que se forman dos triángulos isósceles.

7. Calcula la medida de los ángulos interior de los polígonos regulares para determinar cuáles están contenidos exactamente un número entero de veces en 360º.
8. a) Una vez más recurre al hecho de que se forma un triángulo isósceles y de que **β** es un ángulo exterior de dicho triángulo.
   b) Traza el diámetro que pasa por los vértices de **α** y **β** y considera los triángulos isósceles que se forman así como sus ángulos exteriores.
   c) Utiliza la sugerencia anterior.
9. b) Demuestra que el triángulo **AKB** es rectángulo, usando el ejercicio anterior y usa el hecho de que el radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente en el punto de contacto.
10. Haz el dibujo y usa el resultado de que en un cuadrilátero la suma de los ángulos interiores es 360º.

SOLUCIONES

1. a) Como la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono está dada por la fórmula

$$(n-2)180º$$

donde **n** es el número de lados del polígono, entonces debe suceder que

$$3420º = (n-2)180º$$

de donde, despejando a **n**, tenemos:

$$\frac{3420º + 360º}{180º} = n$$

realizando las operaciones obtenemos: n = 21 lados.

Ahora bien, como el perímetro es igual a la suma de las longitudes de sus lados y cada lado mide un centímetro, entonces el perímetro es igual a:

$$P = 21 \text{ cm.}$$

Por otro lado para obtener la medida de cada ángulo exterior basta con obtener el cociente de

$$\frac{360º}{21} = 17.14º$$

por el corolario del teorema 10.

   b) Como la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono es igual a 360º, el doble es 720º, por lo que:

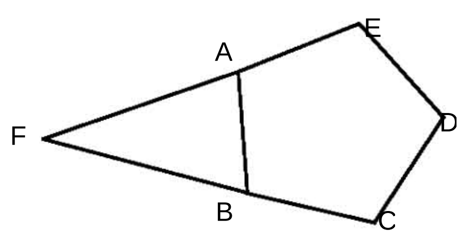
$$(n-2)180º = 720º$$

Despejando a **n**

$$n = \frac{720º}{180º} + 2 = 6$$

El polígono es un hexágono.

2. a)



Como **ABCDE** es un pentágono regular, todos sus ángulos interiores deben medir lo mismo, así que usando la fórmula del corolario del teorema 9 y sustituyendo, tenemos:

$$\frac{(n-2)180º}{n} = \frac{(5-2)180º}{5} = 108º$$

la medida de cada ángulo interior del pentágono es 108º
Otra forma de calcularlo es obtener la media de cada ángulo exterior, usando el corolario del teorema 10, y luego encontrar su suplemento, ya que por definición los ángulos interiores y exteriores son suplementarios:

$$\frac{360º}{5} = 72º$$

por lo que el ángulo interior mide:

$$180º - 72º = 108º$$

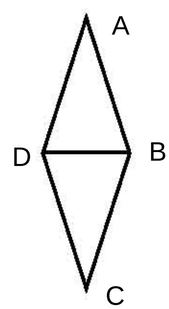
Para calcular los demás ángulos interiores observemos que los ángulos **FAB** y **FBC** son ángulos exteriores del pentágono por lo que miden cada uno 72º.

$$\angle FAB = \angle FBC = 72º$$

Y dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º:

$$\angle FAB + \angle FBC + \angle F = 180º \;\Rightarrow\; 72º + 72º + \angle F = 180º \;\Rightarrow\; \angle F = 36º$$

b) Recordemos como se define un rombo: Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.
Dibujemos el rombo **ABCD** y su diagonal **DB**



Consideremos el triángulo **ABD**, por teorema 6 la suma de sus ángulos interiores es igual a 180º:

$$\angle A + \angle ADB + \angle ABD = 180º$$

Por otro lado, por definición de rombo el lado **AB** es paralelo al lado **DC**, por lo que:

$$\angle ABD = \angle BDC \text{ por ser alternos internos entre paralelas}$$

Ahora, como también por definición de rombo, **AB** y **AD** tienen la misma medida, el triángulo es isósceles y los ángulos del lado **BD** deben ser congruentes, entonces:

$$\angle ABD = \angle ADB$$

Además, por dato el ángulo **DAB** mide la mitad del ángulo **BDC**, esto implica que:

$$\angle BDC = 2DAB$$

De las tres últimas igualdades obtenemos:

$$\angle ABD = \angle BDC = 2\angle A = \angle ADB$$

Si sustituimos en la primera ecuación que planteamos, obtenemos:

$$\angle A + 2\angle A + 2\angle A \;\; 180^{\circ}$$

De donde se concluye que:

$$\angle A = \frac{180^{\circ}}{5} = 36^{\circ}$$

De lo cual obtenemos la medida de los ángulos restantes.

$$\angle ADB = \angle ABD = \angle BDC = 2\angle A = 72^{\circ}$$

Y dado que el triángulo **BCD** también es isósceles por tener dos lados iguales, el ángulo

$$\angle DBC = 72^{\circ}$$

y por tanto, por teorema 6, el tercer ángulo del triángulo **BCD** debe medir:

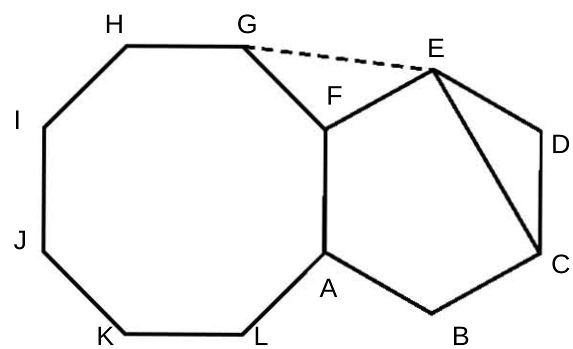
$$\angle C = 36^{\circ}$$

c) Para encontrar la medida del $\angle$ **HIJ**, basta usar la fórmula para los ángulos interiores de polígonos regulares:

$$\angle HIJ = \frac{180^{\circ}(8-2)}{8} = 135^{\circ}$$

Y como la otra figura es un hexágono regular, con la misma fórmula obtenemos:

$$\angle ABC = \frac{180^{\circ}(6-2)}{6} = 120^{\circ}$$



Ahora bien, el triángulo **EDC** esta formado por dos lados del hexágono regular, así que debe ser isósceles, y como el ángulo con vértice en el punto **D** mide 120º, los ángulos adyacentes al lado **EC** deben medir:

$$\angle DEC = \angle DCE = 30^{\circ}$$

Ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.

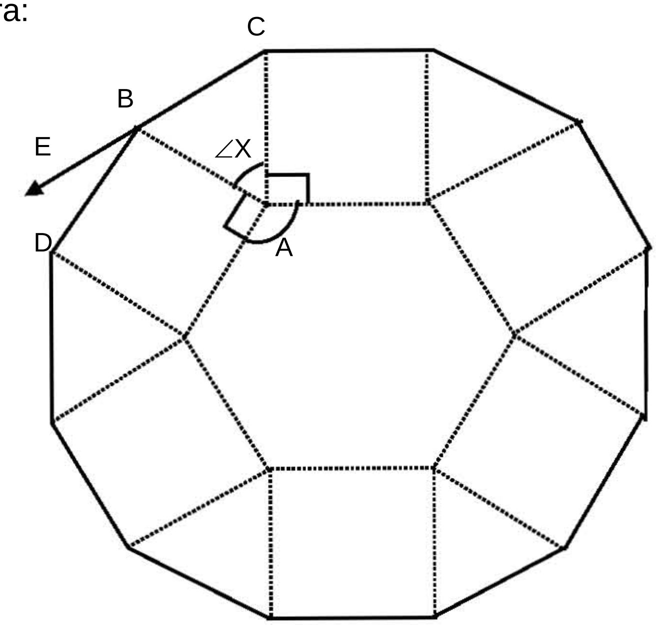
Por otra parte, el ángulo de una vuelta con vértice en **F** está formado por un ángulo interior del hexágono, un ángulo interior del octágono y por el ángulo **GFE**, por lo que éste ángulo debe medir:

$$\angle GFE = 360^{\circ} - 120^{\circ} - 135^{\circ} = 105^{\circ}$$

Además, tenemos que el triángulo **FGE**, tiene dos lados comunes al octágono y hexágono, que a su vez tienen lados congruentes, por lo que el triángulo es isósceles, así que los otros dos ángulos del triángulo deben ser congruentes, de lo que obtenemos:

$$\angle FGE = \angle FEG = 37.5^{\circ}$$

3. Dibujemos la figura:



Como acabamos de calcular en el problema anterior, la medida de cada ángulo interior del hexágono regular es igual a 120º, por lo que:

$$\angle A = 120º$$

Ahora bien, como hemos construido cuadrados, entonces cada uno de sus ángulos interiores mide 90º.
Y como el ángulo de una vuelta con vértice en el punto **A**, está formado por los dos ángulos interiores, con vértices también en el punto **A**, de los cuadrados consecutivos, el ángulo interior del pentágono y el ángulo **X**, entonces:

$$\angle X = 360º - 90º\text{-}90º\text{-}120º = 60º$$

Por otro lado tenemos que el triángulo **ABC** tiene dos lados iguales, ya que son lados comunes con los cuadrados que a su vez tienen la misma medida que los lados del pentágono, que sabemos, por dato, es regular, así pues, este triángulo es isósceles, y debe tener los ángulos opuestos a los lados iguales de la misma medida:

$$\angle ABC = \angle ACB = 60º.$$

Así que el mencionado triángulo **ABC** es también equiángulo y por tanto equilátero, (conjetura 8 del capítulo anterior).
Con un razonamiento análogo se demuestra que el resto de los triángulos, así formados, también son equiláteros.
Finalmente, el polígono que se ha construido, tiene sus ángulos interiores formados por el ángulo interior de un cuadrado y el ángulo interior de un triángulo equilátero, por lo que todos sus ángulos son iguales, y debe medir lo mismo que el ángulo **DBC**:

$$\angle DBC = 90º + 60º = 150º$$

Además, los lados de dicho polígono son lados de cuadrados construidos sobre un hexágono regular y de triángulos equiláteros que tienen la misma longitud que los lados del cuadrado, así pues todos tienen la misma medida e

igual a la medida del hexágono original. Por lo que el polígono es un polígono regular.
Calculemos ahora la medida de los ángulos exteriores, sabemos que por definición un ángulo interior y uno exterior son suplementarios, por lo que cada ángulo exterior debe medir:

$$\angle EBD = 180º - 150º = 30º$$

Y para calcular el número de lados del polígono, usaremos la fórmula del corolario del teorema 10, ya que conocemos la medida del ángulo exterior del polígono

$$\frac{360º}{n} = 30º$$

Despejando **n** obtenemos:

$$n = \frac{360º}{30º} = 12$$

El polígono es un dodecágono regular.

4.

a) Para demostrar que $\overline{GH} \parallel \overline{DC}$ vamos a unir los puntos **C** con **H** para formar el hexágono **CDEFGH**. Este hexágono tiene cuatro ángulos congruentes, de medida igual a 135º ya que son ángulos de un octágono regular, (según lo calculamos en el ejercicio 2c). Entonces los ángulos con vértices en los puntos **D**, **E**, **F** y **G** miden 135º.

Ahora bien, la suma de los ángulos interiores del hexágono es igual a:

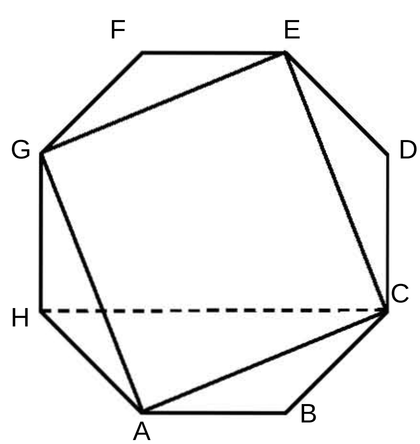
$$180º(6-2) = 720º$$

por lo que los ángulos restantes deben sumar:180º ya que:

$$720º - 135º(4) = 180º$$

Si relacionamos los segmentos **GH** y **DC** con la transversal **HC**, encontramos que los ángulos colaterales internos son suplementarios, como recordaremos éste es un criterio de paralelismo, por lo tanto:

$$\overline{GH} \parallel \overline{DC}$$



b) Para demostrar que **ACEG** es un cuadrilátero equiángulo, basta hacer notar que los triángulos formados por los lados del polígono y del cuadrilátero son isósceles ya que tienen dos lados iguales, los del octágono regular, así que los ángulos que se oponen a estos lados deben medir lo mismo (conjetura 6 del capítulo anterior), por lo que:

$$\angle FGE = \frac{180º - 135º}{2} = 22.5º$$

que es la medida de todos los ángulos congruentes de los triángulos isósceles formados.

Por otra parte, cada ángulo interior del cuadrilátero, tiene por medida lo que mide un ángulo del polígono menos la suma de las medidas de dos ángulos de 22.5º, entonces:

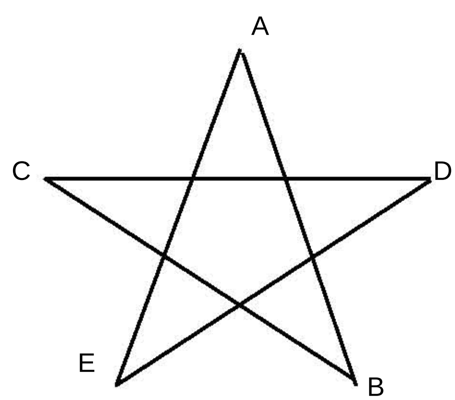
$$\angle EGA = 135º - 22.5(2) = 90º = \angle GAC = \angle ACE = \angle EGA$$

Así que el cuadrilátero es equiángulo.

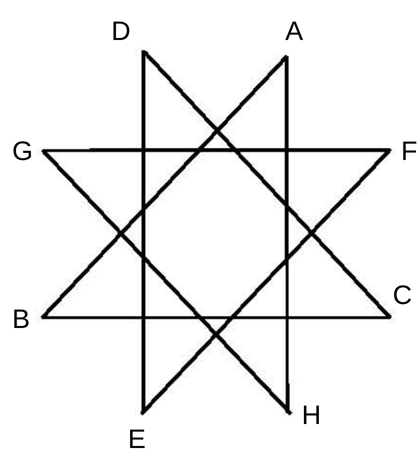
5.

a) DEFINICIÓN: Dada una circunferencia dividida en cinco partes iguales, y si se parte de un punto, uniendo los puntos divisorios de dos en dos con segmentos de recta, se vuelve al punto de partida, a la figura formada se le llama pentágono regular estrellado.

También se pueden formar otros polígonos, por ejemplo un octágono regular estrellado se puede construir al dividir en ocho partes iguales a la circunferencia y partiendo de un punto unir de tres en tres los puntos divisorios con segmentos de rectas hasta volver al punto inicial.

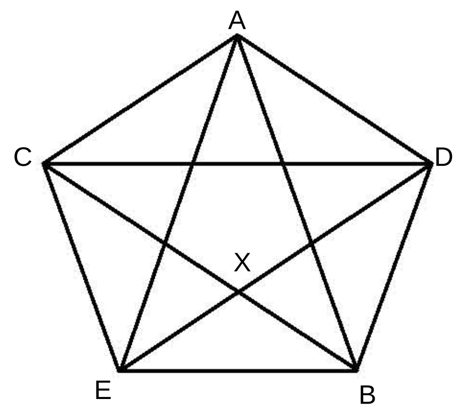


Pentágono regular estrellado



Octágono regular estrellado

b)



Como ya hemos calculado, la medida de cada ángulo interior del pentágono regular es igual a 108º.
Por otra parte, los triángulo **BEC** y **BDA** son triángulos isósceles, ya que, en ambos casos, dos de sus lados son también lados del pentágono regular, esto implica que tiene dos ángulos iguales, los opuestos a los lados iguales. Así que:

$$\angle ECB = \angle EBC = \frac{180º - 108º}{2} = 36º = \angle DBA = \angle DAB$$

De lo cual concluimos que el ángulo **ABC** es igual a:

$$\angle ABC = 108º - 2(36º) = 36º$$

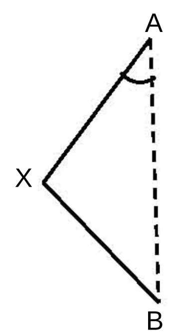
Por los mismos argumentos que dimos anteriormente, tenemos que:

$$\angle CBE = \angle DEB = 36º$$

Por lo que:

$$\angle BXE = 180º - 2(36º) = 108º$$

6. a) Hagamos el dibujo:



Por dato sabemos que:

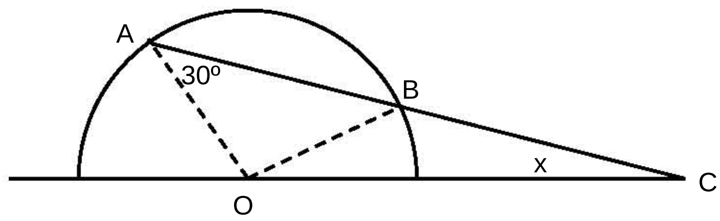
$$\angle XAB = \frac{1}{3}\angle AXB$$

Como los segmentos **A X** y **XB** son lados de un polígono regular, el triángulo **AXB** es isósceles, de lo cual obtenemos la siguiente ecuación:

$$\angle AXB + \frac{1}{3}\angle AXB + \frac{1}{3}\angle AXB = 180º \Rightarrow \angle AXB = \frac{3}{5}(180º) = 108º$$

y como acabamos de ver en el ejercicio anterior, es la medida del ángulo interior de un pentágono regular.

b)



Como los segmentos **OA** y **OB** son radios de la misma circunferencia deben ser congruentes y por lo tanto el triángulo **OAB**, es isósceles de lo cual concluimos que:

$$\angle ABO = 30º \quad \Rightarrow \quad \angle OBC = 150º$$

por ser suplementarios.

Y como por dato

$$OA = BC \quad \Rightarrow \quad BO = BC$$

Por tanto el triángulo **OBC** es isósceles también, de lo que deducimos:

$$\angle x = (180º - 150º)/2 = 15º$$

7. Vamos a empezar con el polígono regular con el menor número de lados: el triángulo equilátero:

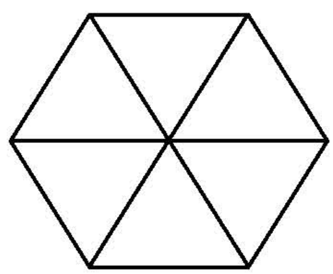
   Calculemos la medida de cada ángulo interior del triángulo equilátero:

   $$180º(3\text{-}2)/3 = 60º$$

   Para saber si podemos disponerlos alrededor de un punto y cuántos triángulos requeriríamos hagamos la operación:

   $$360º/60º = 6$$

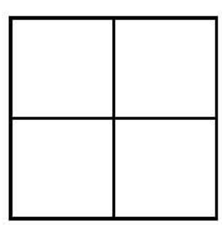
   Entonces son 6 el número de triángulos para acomodar alrededor de un punto. Por lo que con el triángulo equilátero si se puede formar un *teselado*



   Usando el mismo procedimiento para el cuadrado tenemos:

   $$\frac{360º}{180º(4-2)/4} = 4$$

   Son 4 el número de triángulos para acomodar alrededor de un punto, por lo tanto, al cuadrado también se le puede acomodar alrededor de un punto:



Veamos que ocurre con el pentágono:

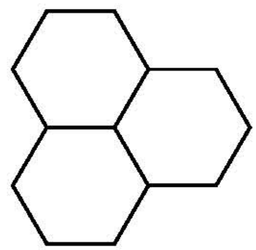
$$\frac{360º}{180º(5-2)/5}=3.333$$

¡No podríamos dibujar un *teselado* ya que no obtendríamos un número entero de pentágonos!

¿Qué ocurre con el hexágono?

$$\frac{360º}{180º(6-2)/6}=3$$

Dibujemos la figura:



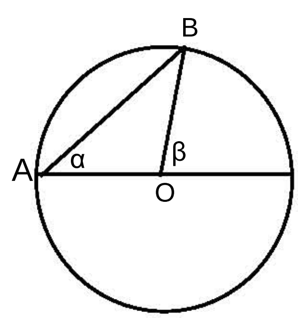
Analicemos ahora el heptágono:

$$\frac{360º}{180º(7-2)/7}=2.8$$

No puede ser un número de heptágonos para acomodar alrededor de un punto, no podremos construir un *teselado* con polígonos de siete lados. Pero además notemos que el resultado de la operación es menor a tres y nosotros necesitamos más de dos polígonos ya que de los contrario, si bastara con dos, cada ángulo del polígono tendría que medir 180º para sumar 360º, lo cual no es posibles porque hemos probado que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180º, por lo que uno no puede medir exactamente 180º y además los polígonos están formados por triángulos, así que necesitamos por lo menos 3 polígonos para formar *teselados*.

Y como podemos observar, mientras más grande es el número de lados del polígono sus ángulos interiores son mayores, entonces al dividir un número fijo, 360º, entre un número más grande el cociente va disminuyendo. Por lo tanto no hay más polígonos regulares con los cuales se puedan formar *teselados*.

8. a)



El triángulo **AOB** es isósceles ya que los segmentos **OA** y **OB** tienen la misma medida por ser radios de la misma circunferencia.

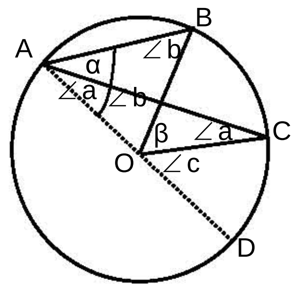
Esto implica que:

$$\angle OBA = \alpha$$

Y como el ángulo β es un ángulo exterior del triángulo, debe medir la suma de dos interiores no adyacentes a él, es decir:

$$\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = \beta/2$$

b)



Tracemos el diámetro que pasa por el radio **AO** y consideremos los triángulos **AOC** y **BOA** . Ambos triángulos son isósceles ya que:

CO = OB = OA por ser radios del círculo.

Llamemos, respectivamente **a** y **b** a las medidas de los ángulos iguales de dichos triángulos.

El ángulo exterior **c** del triángulo **AOC** debe ser igual a:

$$\angle c = 2\angle a$$

Y el ángulo exterior **BOD** del triángulo **AOB** es igual a:

$$\beta + \angle c = 2\angle b$$

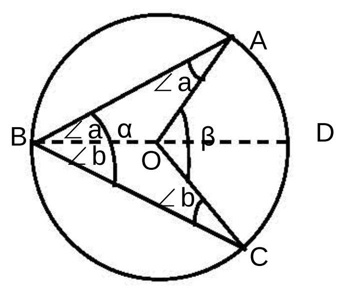
Pero

$$\angle b = \alpha + \angle a$$

De las tres últimas igualdades obtenemos:

$$\beta + 2\angle a = 2\,(\alpha + \angle a) \;\; \Rightarrow \;\; \beta = 2\alpha \;\; \Rightarrow \;\; \alpha = \beta/2$$

c)



Tracemos un diámetro que pase por el vértice del ángulo **α**.

Consideremos el triángulo **ABO** y el triángulo **BOC**, ambos triángulos son isósceles por tener por lados radios del círculo. Llamemos, respectivamente, **a** y **b** a las medidas de los ángulos iguales de dichos triángulos. Por teorema 7, los ángulos exteriores de dichos triángulos son iguales a:

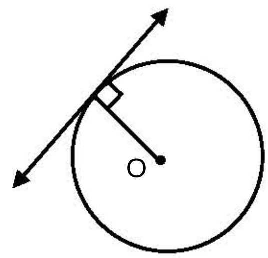
$$\angle AOD = 2\angle a \text{ y } \angle DOC = 2\angle b$$

Por otro lado tenemos que **α** está formado por el ángulo **a** y el ángulo **b** y **β** por los ángulos exteriores, no adyacentes a los ángulos iguales, de los triángulos isósceles **AOB** y **OBC** por lo que:

$$\alpha = a + b \;\; \text{y} \;\; \beta = 2a + 2b \;\; \Rightarrow \;\; \beta = 2(a + b) \;\; \Rightarrow \;\; \beta/2 = a + b \;\; \Rightarrow \;\; \beta/2 = \alpha$$

Nota importante: En los problemas anteriores al ángulo **α** se le llama ángulo inscrito por tener su vértice sobre un punto del círculo y sus lados conteniendo cuerdas del círculo. Al ángulo **β** se le llama ángulo central por tener su vértice en el centro del círculo y sus lados conteniendo radios del círculo. A la parte de la circunferencia que interceptan se le llama arco subtendido por el ángulo. Cuando un ángulo central y un ángulo inscrito subtienden el mismo arco sucede que la medida del ángulo inscrito es la mitad de la medida del ángulo central. Los tres casos anteriores que tratamos demuestran este hecho.

9. a) Dibujemos



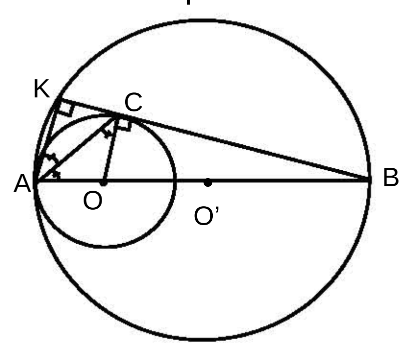
Observamos que el ángulo que forma la tangente y el radio en el punto de contacto mide 90º. Formulemos la proposición:

PROPOSICIÓN 10: Una tangente a un círculo y el radio de dicho círculo, que pasa por el punto de contacto, son perpendiculares.

Al punto de contacto se le llama también punto de tangencia.

Este resultado no se puede demostrar con los elementos con los que ahora contamos, sin embargo nos vamos a permitir usarlo.

b)



Llamemos **O** al centro de la circunferencia menor y tracemos el radio **OC**.

$$\overline{OC} \perp \overline{KB}$$

dado que un radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.

Observemos ahora que el ángulo **AKB** es recto ya que: el ángulo **AO'B** es un ángulo central y el ángulo **AKB** es un ángulo inscrito, ambos subtienden el mismo arco, entonces por problema anterior la medida del ángulo **AKB** es la mitad de la medida del ángulo central **AO'B**. Y la medida del ángulo **AO'B** es de 180º por formar ángulo llano, por lo tanto:

$$\angle AKB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AK} \parallel \overline{OC}$$

por formar ángulos correspondientes iguales con la transversal **KB**

$\Rightarrow$ $\angle KAC = \angle ACO$ por ser alternos internos entre paralelas.

Pero el triángulo **ACO** es isósceles por tener como lados dos radios de la circunferencia menor, entonces

$$\angle OCA = \angle OAC$$

por ser ángulos opuestos a éstos lados iguales

De las dos últimas igualdades obtenemos

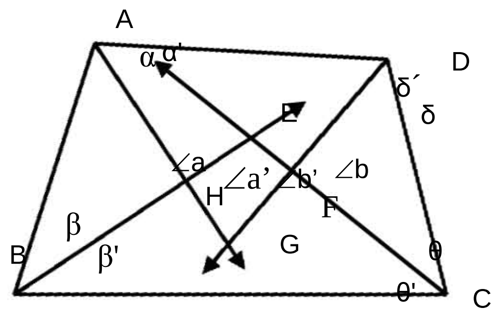
$$\angle KAC = \angle OAC$$

Por lo que el segmento **AC** es bisectriz del ángulo **KAB**.

10. HIPÓTESIS: ABCD es un cuadrilátero. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ $\overrightarrow{DG}$ son bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD.

TESIS: El cuadrilátero EFGH tiene ángulos de vértices opuestos suplementarios.

DEMOSTRACIÓN



Consideremos los triángulos **ABD** y **CDF** y sus ángulos interiores, por teorema 6 se cumple que:

$$\alpha + \beta + \angle a = 180^{o} \ \text{ y } \ \delta + \theta + \angle b = 180^{o}$$

$$\Rightarrow \ \angle a = 180^{o} - (\alpha + \beta) \ \text{ y } \ \angle b = 180^{o} - (\delta + \theta)$$

Sumando los ángulos **a** y **b** obtenemos:

$$\angle a + \angle b = 180^{o} - (\alpha + \beta) + 180^{o} - (\delta + \theta) \ \Rightarrow \ \angle a + \angle b = 360^{o} - (\alpha + \beta + \delta + \theta)$$

Por otro lado sabemos que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es igual a 360º ya que, usando el teorema 9, tenemos:

$$180^{o}(4-2) = 360^{o}$$

$$\Rightarrow \ \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \delta + \delta' + \theta + \theta' = 360^{o}$$

Pero los rayos **AH**, **BE**, **CF** y **DG** son bisectrices de los ángulos del cuadrilátero, entonces:

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \delta = \delta' \text{ y } \ \theta = \theta'$$

$$\Rightarrow \ 2(\alpha + \beta + \delta + \theta) = 360^{o} \ \Rightarrow \ \alpha + \beta + \delta + \theta = 180^{o}$$

Por lo que si sustituimos en la sexta ecuación, obtenemos:

$$\angle a + \angle b = 360^{o} - 180^{o} = 180^{o}$$

Pero

$$\angle a = \angle a' \ \text{ y } \ \angle b = \angle b'$$

por ser ángulos opuestos por el vértice

$$\therefore \ \angle a' + \angle b' = 180^{o}$$

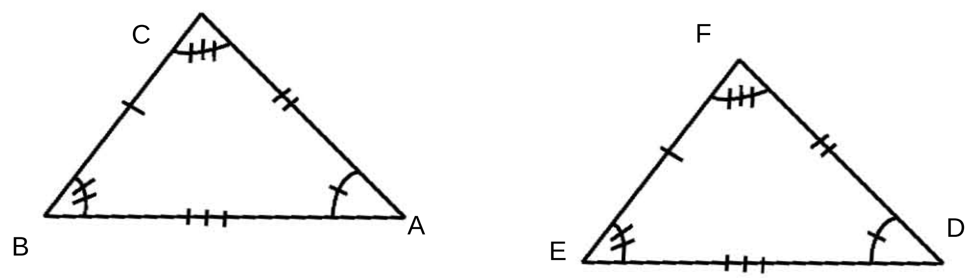
Ahora, como en el cuadrilátero **EFGH** la suma de sus ángulos también debe ser igual a 360º, los dos ángulos restantes también deben sumar 180º.

CAPÍTULO V
PROBLEMAS DONDE SE UTILIZA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

§ 1

Para resolver los problemas de este capítulo, sólo se utilizarán la definición y los criterios o axiomas de congruencia de triángulos, las definiciones de bisectriz, mediana, altura y mediatriz de un triángulo así como lo que se vaya demostrando en los problemas. A continuación enunciaremos estos axiomas y definiciones.

DEFINICIÓN: Sean **ABC** y **DEF** dos triángulos. Si existe una correspondencia entre los ángulos y los lados de ambos triángulos tal que los pares de ángulos correspondientes tengan la misma medida y los pares de lados correspondientes tengan la misma longitud, entonces decimos que los triángulos son congruentes. Esto es:



Si

$$\angle A = \angle D \qquad BC = EF$$
$$\angle B = \angle E \quad \text{y} \quad CA = FD$$
$$\angle C = \angle F \qquad AB = DE$$

entonces los triángulos **ABC** y **DEF** son congruentes.

Vamos a simplificar estas seis igualdades con la siguiente notación:

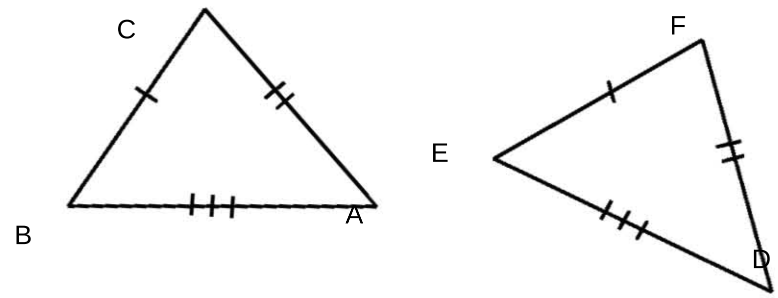
$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$$

Lo cual se leerá como: "El triángulo **ABC** es congruente al triángulo **DEF"**. Observemos que el orden indica los lados y ángulos congruentes. En el caso en que los triángulos son congruentes a los pares de lados que tienen la misma longitud y los pares de ángulos que tienen la misma medida se les llama correspondientes u homólogos. Generalmente se indicarán en las figuras los lados y segmentos correspondientes con pequeñas líneas, como se hizo en las figuras de arriba.

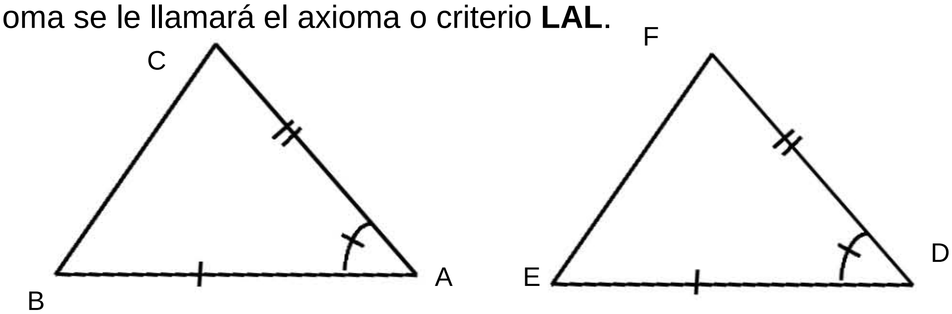
Ahora bien, puesto que el triángulo es una figura rígida no es necesario medir todos sus lados y todos sus ángulos, bastará con determinar la congruencia entre tres pares de elementos, muy particulares, para establecer la congruencia entre los triángulos, esto es, para garantizar la igualdad de las medidas en el resto de sus elementos. Estas condiciones las resumiremos en los siguientes criterios o axiomas de congruencia.

AXIOMAS O CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

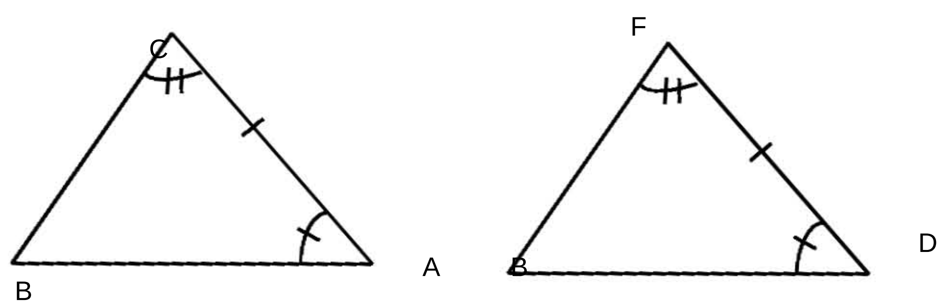
1. Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia en la que los tres lados de un triángulo tienen las mismas medidas que los tres lados del otro triángulo. A éste axioma se le suele abreviar con las siglas **LLL** y nos referiremos a él como el criterio o axioma **LLL**.



2. Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia en que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos del primer triángulo, tienen las mismas medidas, con las partes correspondientes del segundo triángulo. A este axioma se le llamará el axioma o criterio **LAL**.

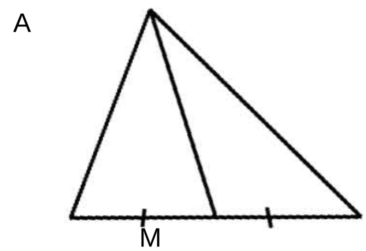


3. Dos triángulos son congruentes si y sólo si existe una correspondencia donde dos ángulos y el lado comprendido entre ellos del primer triángulo tienen las mismas medidas que las partes correspondientes del segundo triángulo. Este axioma se llamará el axioma o criterio **ALA**.

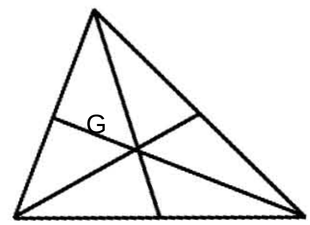


Definiremos ahora las rectas y puntos notables del triángulo:

DEFINICIÓN: Una mediana de un triángulo es una recta que pasa por el vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto. Usualmente usaremos el segmento determinado por estos dos puntos para hablar de la mediana. Todo triángulo tiene tres medianas. Al punto de intersección de las medianas de un triángulo se le llama baricentro al cual se le representa por **G**. (En general al punto de intersección de dos o más rectas se le llama punto de concurrencia).

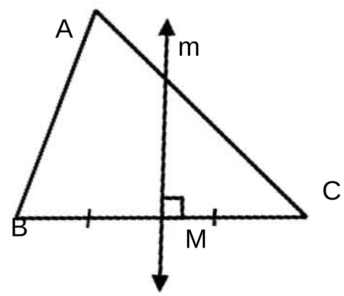


El segmento **AM** es una mediana del triángulo

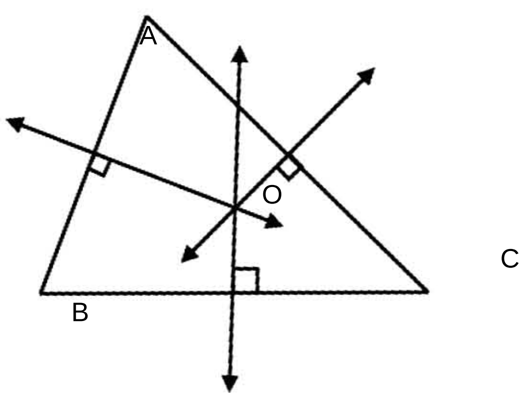


El punto **G** es el baricentro del triángulo

DEFINICIÓN: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. Así que el triángulo tiene tres mediatrices, la de los lados del triángulo. El punto de intersección o de concurrencia de las tres mediatrices de un triángulo se le llama el circuncentro del triángulo Y se suele representar por **O**.

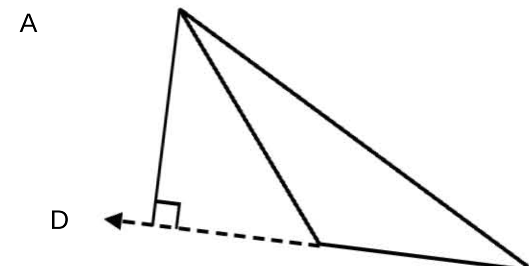


La recta **m** es mediatriz del lado **BC** del triángulo

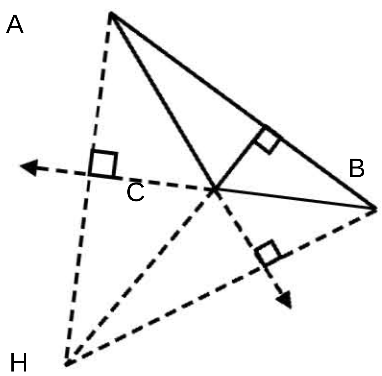


El punto **O** es el circuncentro del triángulo

DEFINICIÓN: Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular desde un vértice del triángulo a la recta que contiene al lado opuesto. El triángulo tiene tres alturas y el punto de intersección de las alturas se llama ortocentro del triángulo y suele representarse por **H**.

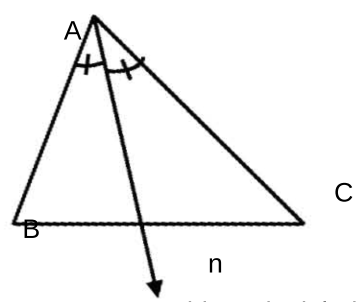


El segmento **AD** es una altura del triángulo

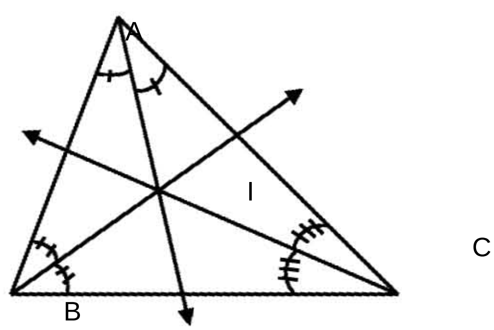


El punto **H** es el ortocentro del triángulo **ABC**

DEFINICIÓN: un rayo o semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos de la misma medida se llama bisectriz del ángulo. Dado que un triángulo tiene tres ángulos, tiene tres bisectrices. El punto de intersección de las bisectrices se denomina incentro del triángulo y suele representarse por **I**.

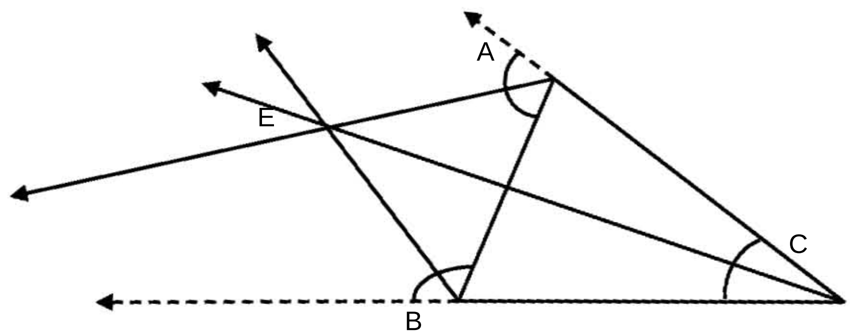


La recta **n** es una bisectriz del triángulo



El punto **I** es el incentro del triángulo

Sobre la bisectriz ya hemos hablado en otros capítulos, hemos dicho que, dado que un triángulo tiene ángulos exteriores, también tiene bisectrices exteriores. Las tres bisectrices exteriores no son concurrentes pero dos exteriores con una interior si lo son y el punto de intersección se le llama un excentro del triángulo lo vamos a simbolizar con la letra **E**. Un triángulo tiene tres excentros.

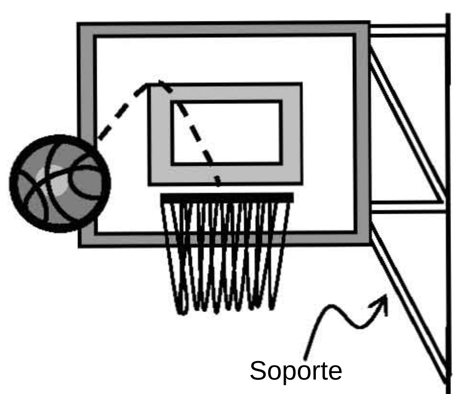


El punto **E** es uno de los excentros del triángulo ABC.

PROBLEMAS

1. ¿Cuántos triángulos escalenos no congruentes se pueden construir, si cada uno tiene por longitud de sus lados números enteros y 11 unidades de perímetro?
2. a) Demuestra que en un triángulo cualquiera, el segmento que une los puntos medios de dos de sus lados, mide la mitad y es paralelo al tercer lado.
   b) Demuestra que los segmentos que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.
3. a) En el siguiente problema se te pide probar una conjetura que no habíamos demostrado en el capítulo anterior: los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son congruentes. Y obtener como corolario que un triángulo equilátero es equiángulo. El recíproco de estos resultados también es cierto, se te sugiere demostrarlos.
   b) Tres lados de un trapecio miden cada uno 5cm y el perímetro del trapecio es 25cm. ¿Cuánto mide el mayor ángulo del trapecio? Define previamente qué es un trapecio.
4. a) Demuestra que en un triángulo, si uno de sus lados es de menor medida que un segundo lado, entonces el ángulo opuesto al primer lado es menor que el ángulo opuesto al segundo lado.
   b) Demuestra el recíproco de la proposición anterior, es decir, que si en un triángulo un ángulo es menor que un segundo ángulo, el lado que se opone al primer ángulo es de menor medida que el lado que se opone al segundo triángulo.
   c) Demuestra la siguiente conjetura que obtuvimos en los experimentos del capítulo anterior: La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. A esta proposición se le conoce con el nombre de *Desigualdad del Triángulo*.
   d) Demuestra que en un paralelogramo los lados opuestos miden lo mismo y que sus diagonales se bisecan mutuamente.
   e) Demostrar que la mediana de todo triángulo es menor que la suma de los lados que la comprenden y mayor que la diferencia entre esta semisuma y la mitad del tercer lado.

5. Probar que si un vértice, el incentro y el circuncentro de un triángulo son colineales, entonces el triángulo es isósceles.
6. Demostrar que en un triángulo isósceles la suma de las longitudes de las perpendiculares desde uno de los puntos de la base a los lados iguales, tiene la misma medida que la altura correspondiente a cualquiera de esos lados iguales.
7. a) Demuestra que en un triángulo equilátero la bisectriz de uno de sus ángulos es altura correspondiente al lado opuesto a dicho ángulo.
   b) En un triángulo isósceles **ABC**, el ángulo del vértice **B** es igual a 20°. En los lados iguales **AB** y **BC** se han tomado respectivamente los puntos **Q** y **P** de modo que $\angle ACQ = 60°$ y $\angle CAP = 50°$. Calcula la medida del ángulo **APQ**.
8. a) Demuestra que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.
   b) Sea **ABC** un triángulo y **P** un punto en **AB**, **Q** un punto en **BC** y **M** el punto medio del lado **AC**. La perpendicular a **AB** que pasa por **P** y la perpendicular a **BC** que pasa por **Q** se intersectan en el punto **O**. Pruebe que MP = MQ si y sólo si el ángulo **AOP** es igual al ángulo **COQ**.
9. a) Demuestra que el círculo circunscrito a un triángulo, es decir, el circuncírculo, pasa por el punto de intersección de la mediatriz y la bisectriz trazadas a un mismo lado del triángulo.
   b) Traza un triángulo conociendo los puntos de intersección de las prolongaciones de la bisectriz, la mediana y la altura que parten de un mismo vértice con la circunferencia circunscrita al triángulo.
10. a) Demuestra que si en dos triángulos rectángulos son iguales las hipotenusas y uno de sus catetos, entonces los triángulos son congruentes.
    b) Se desea instalar una canasta de baloncesto en una pared al aire libre. ¿Cómo se puede tener la seguridad de que el tablero quede paralelo a la pared si le vamos a colocar un soporte como el que se indica?



SUGERENCIAS

1. Recuerda que en un triángulo debe ocurrir que: la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado. Utiliza esta propiedad para construir tus triángulos.
2. a) Prolonga el segmento que une los puntos medios al doble y une el extremo

con el vértice de la base del triángulo; demuestra que los nuevos triángulos formados son congruentes. Demuestra también que la diagonal común a los dos cuadriláteros formados, divide al mayor en dos triángulos congruentes.

b) Dibuja las figuras y elige triángulos para los cuales se cumpla que los lados del cuadrilátero formado por los puntos medios del original sean los segmentos que unen los puntos medios de los lados de dichos triángulos y utiliza el problema 2a.

3. a) Traza un segmento que une el vértice determinado por los lados iguales del triángulo isósceles y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice y demuestra la congruencia de los triángulos resultantes.

   b) Une el punto medio de la base mayor del trapecio con los extremos de la base menor y demuestra que los tres triángulos formados son equiláteros.

4. a) Toma un punto sobre el lado mayor para obtener un triángulo isósceles, usa además el teorema del ángulo exterior para establecer las desigualdades entre los ángulos.

   b) Hazlo por reducción al absurdo y utiliza el problema anterior.

   c) La sugerencia es la misma que en el ejercicio (a) y usa además el problema anterior.

   d) Para la primera parte demuestra que los dos triángulos formados por el paralelogramo y una de las diagonales son congruentes. Para mostrar que las diagonales se bisecan mutuamente demuestra la congruencia de los triángulos que tienen como bases los lados opuestos del paralelogramo.

   e) Construye un paralelogramo **ABCD** y utiliza la desigualdad del triángulo varias veces.

5. Traza las mediatrices a los lados que no son cortados por la recta de los puntos mencionados, prueba y utiliza que los triángulos que se forman son congruentes.

6. Dibuja la altura a uno de los lados iguales. Traza una recta paralela al lado correspondiente a la altura trazada, que pase por el punto sobre la base. Demuestra que el triángulo determinado por el vértice correspondiente a la altura, el punto en la base y la intersección de la paralela con la altura, es congruente con el triángulo determinado por el mismo vértice, el punto en la base y el pie de la perpendicular trazada al otro lado congruente. Usa este resultado para concluir lo que se pide.

7. a) Traza la bisectriz de un ángulo del triángulo y demuestra que los triángulos resultantes son congruentes.

   b) Traza una paralela a **AC** por **Q**, llama **Q’** la intersección de la paralela con el lado **BC**. Utiliza que los triángulos **AQQ’** y **QAQ’** son congruentes para demostrar que **PQ** biseca al ángulo **Q’QC** ayúdate de que se forman varios triángulos isósceles y equiláteros. Utiliza el problema anterior.

8. a) Dibuja otro triángulo rectángulo congruente al dado de tal manera que formen un rectángulo y demuestra que sus diagonales son iguales.

   b) Considera el triángulo **AOC** y toma los puntos medios de los lados **AO** y **OC**. Utiliza la sugerencia hecha para el problema (2b) y el problema anterior.

9. a) Usa el hecho de que los ángulos centrales e inscritos de un círculo guardan la relación 2:1, si subtienden el mismo arco.

b) Para darte una idea del problema parte de un triángulo y dibuja su mediatriz, su bisectriz y su altura, así como el circuncírculo y visualiza los puntos requeridos. Para resolverlo puedes partir del hecho que el circuncírculo, la mediatriz y la bisectriz concurren.

10.a) Construye un tercer triángulo, de tal manera que sea congruente al primero de los triángulos dados y comparta el cateto, que es congruente en ambos triángulos dados, con el segundo triángulo. Prueba que los tres triángulos son congruentes.

b) Bastará exigir que los triángulos que forman el soporte sean triángulos rectángulos congruentes, con uno se sus catetos sobre la pared o el tablero.

SOLUCIONES

1. Recordemos que para poder construir un triángulo debe ocurrir que la suma de dos lados cualesquiera del triángulo sea mayor que el lado restante.

   Entonces el total de triángulos construibles son:

   1+5+5=11
   2+4+5=11
   3+3+5=11
   3+4+4=11

   De estos solo uno es escaleno, el de lados:

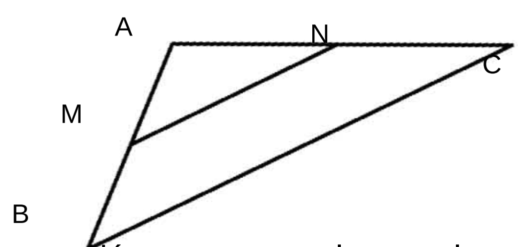
   2, 4, 5.

2. a) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo.

   M y N los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente.

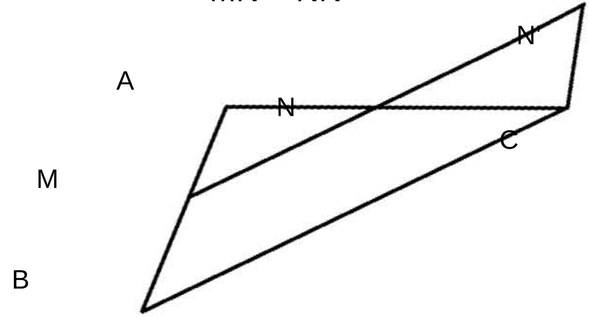
   TESIS: $MN = \frac{BC}{2}$ y $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$

   DEMOSTRACIÓN



   Para realizar la demostración vamos a prolongar el segmento **MN** hasta un punto **N'** de tal manera que

   MN = NN'



   Observemos que los triángulos **AMN** y **CN'N** son congruentes ya que:

$MN = NN'$ por construcción

$AN = NC$ por hipótesis

$\angle ANM = \angle N'NC$ por ser opuestos al vértice

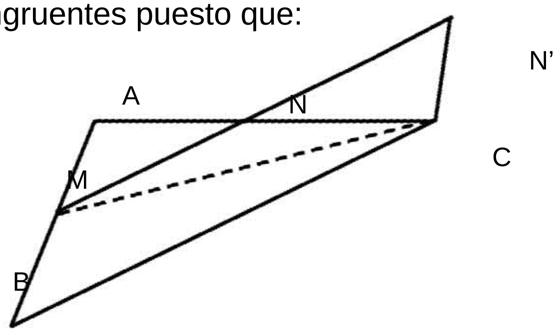
$\therefore\ \Delta\, AMN \cong \Delta\, NN'C$ por criterio LAL

$\Rightarrow\ \angle AMN = \angle NN'C$ por ser correspondientes

y

$AM = CN'$ por ser correspondientes

Esto nos va a servir para demostrar que los triángulos **BMC** y **MN'C**, también son congruentes puesto que:



$\angle AMN + \angle N'MC + \angle CMB = 180º$

por formar ángulo llano

$\angle NN'C + \angle N'MC + \angle N'CM = 180º$

por ser los ángulos de un triángulo y como, según acabamos de demostrar, los ángulos **AMN** y **NN'C** tienen la misma medida, concluimos que:

$\angle CMB = \angle N'CM$

Además

$MC = MC$ por ser lado común

Por otro lado, por hipótesis los segmentos **AM** y **MB** tienen la misma longitud y como acabamos de mostrar, **AM** y **CN'** son segmentos congruentes, esto implica que:

$MB = CN'$

De las tres últimas igualdades concluimos:

$\Delta\, MN'C \cong \Delta\, CBM$ por criterio LAL

De esta congruencia deducimos que:

$\angle N'MC = \angle MCB$ por ser correspondientes

$\Rightarrow\ MN \parallel BC$

por formar ángulos alternos internos iguales con la transversal **MC** y

$MN' = BC$

por oponerse a ángulos iguales de triángulos congruentes

Pero por construcción

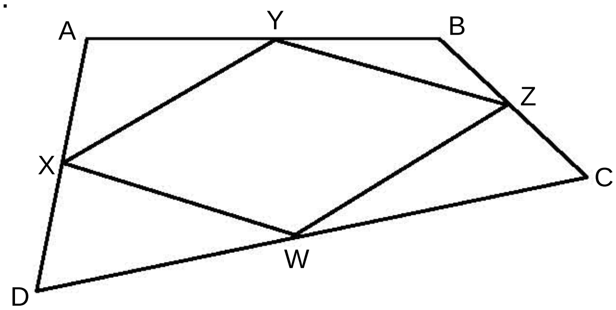
$$MN' = 2MN \ \Rightarrow\ BC = 2MN \ \Rightarrow\ MN = \frac{BC}{2}$$

b) HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo.

X, Y, Z y W, los puntos medios de los lados del cuadrilátero

TESIS: XYZW es un paralelogramo

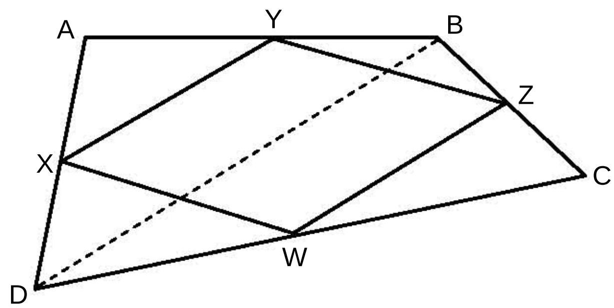
DEMOSTRACIÓN:



Consideremos el triángulo **DAB**.

Como **X** y **Y** son puntos medios de los lados **AD** y **AB** respectivamente, entonces:

$\overline{XY} \parallel \overline{DB}$ por el ejercicio anterior



Ahora, si consideramos el triángulo **DBC**, por la misma razón

$$\overline{WZ} \parallel \overline{DB}$$

$$\therefore \ \overline{XY} \parallel \overline{WZ}$$

por que dos segmentos paralelos a uno tercero son paralelos entre sí.

Análogamente se demuestra que el segmento **XW** es paralelo al segmento **YZ**.

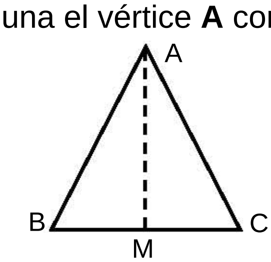
$\therefore$ XYZW es un paralelogramo:

3. a) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo isósceles con AB = AC

TESIS: $\angle B = \angle C$

DEMOSTRACIÓN

Tracemos un segmento que una el vértice **A** con el punto medio del lado **BC**



Vamos a demostrar que los triángulos formados son congruentes:

AB = AC por hipótesis

AM = AM por ser lado común

BM = MC por ser **M** el punto medio del segmento **BC**

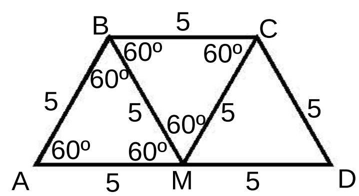
$\therefore$ Δ ABM $\cong$ Δ ACM por criterio LLL

$\Rightarrow$ $\angle$B = $\angle$C por oponerse a lados iguales de triángulos congruentes.

Para demostrar que un triángulo equilátero es equiángulo, es decir, que tiene todos sus ángulos iguales basta con trazar otro segmento que una el vértice **B** con el punto medio de **AC** y ya que el triángulo es equilátero, los lados **AB** y **BC** tiene la misma medida, entonces, con los mismos argumento que acabamos de usar, se demuestra que los ángulos con vértices en **C** y **A** son congruentes, de donde los tres ángulos del triángulo son iguales.

b) DEFINICIÓN: Un cuadrilátero que tiene al menos dos lados opuestos paralelos se le llama trapecio.

Sea **ABCD** el trapecio con **BC** y **AD** lados paralelos. Como tres de sus lados miden 5cm, entonces el lado restante mide 10 cm, ya que el perímetro es 25cm.



Llamemos **M** al punto medio del lado **AD** esto implica que

AM = MD = 5 cm

Consideremos las rectas que pasan por **BC**, **AD** y la transversal que pasa por **BM**, puesto que los lados **BC** y **AD** son paralelos tenemos:

$\angle$CBM = $\angle$AMB

Y como el triángulo **BAM** es isósceles se cumple:

$\angle$ABM = $\angle$AMB

De las dos últimas igualdades obtenemos:

$\angle$CBM = $\angle$ABM

Además

BC = BA por dato

BM = BM por ser lado común

$\therefore$ Δ MBC $\cong$ Δ ABM por criterio LAL

$\Rightarrow$ CM = AM por oponerse a ángulos de triángulos congruentes

$\Rightarrow$ CM = 5

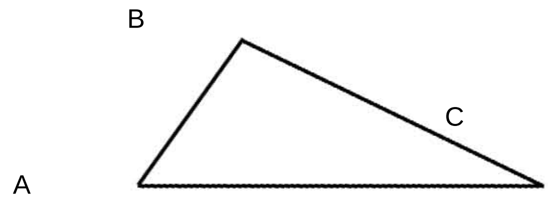
Con los mismos argumentos pero usando ahora los triángulos **BCM** y **DCM** se demuestra que

BM = 5

Así se han formado tres triángulos equiláteros y por el corolario del problema anterior todos sus ángulos deben medir lo mismo, es decir 60º.

$\therefore$ $\angle$ABC = 120^o

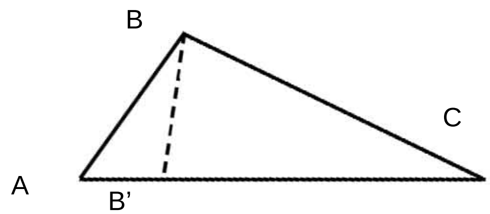
4. a) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo con BC < AC
TESIS: $\angle$CAB < $\angle$CBA
DEMOSTRACIÓN



Tomemos un punto **B'** sobre el lado **AC** de tal manera que

B'C = BC $\Rightarrow$ ΔCBB' es isósceles $\Rightarrow$ $\angle$CBB' = $\angle$CB'B

por ejercicio 3a.



Además ocurre

$\angle$CBB' < $\angle$CBA

por lo que

$\angle$CB'B < $\angle$CBA

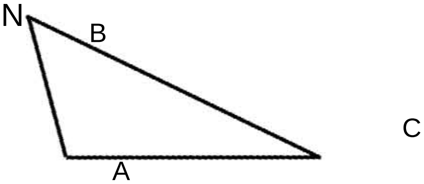
Por otro lado tenemos que el ángulo **CB'B** es un ángulo exterior del triángulo **BAB'** por lo que

$\angle$CB'B = $\angle$CAB + $\angle$ABB' $\Rightarrow$ $\angle$CAB < $\angle$CB'B

$\therefore$ $\angle$CAB < $\angle$CBA

por transitividad en las dos últimas desigualdades

b) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo con $\angle$CAB < $\angle$CBA
TESIS: CB < AC
DEMOSTRACIÓN



Esta demostración la vamos a hacer por reducción al absurdo.

Supongamos que

CB > AC

$\Rightarrow$ $\angle$CAB > $\angle$CBA

por problema anterior, lo cual contradice la hipótesis

Si suponemos ahora que

$$CB = AC$$

$$\Rightarrow \quad \angle CAB = \angle CBA$$

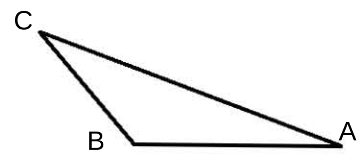
por problema 3a, lo que también contradice la hipótesis.

$$\therefore CB < AC$$

c) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo

TESIS: AB + BC > AC

DEMOSTRACIÓN



Si

$$AC \leq AB \text{ o } AC \leq BC \Rightarrow AC < AB + BC$$

pues en ambos casos estamos sumando una cantidad positiva. Y el teorema estaría demostrado.

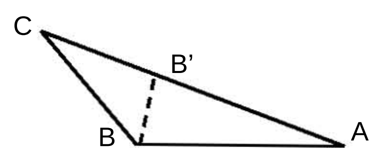
Vamos a suponer entonces que **AC** es el lado mayor del triángulo, esto es,

$$AC > AB \quad \text{y } AC > BC$$

Consideremos un punto **B'** en **AC** tal que

$$AB = AB' \quad \Rightarrow \quad \Delta\, ABB' \text{ es isósceles} \quad \Rightarrow \quad \angle ABB' = \angle AB'B$$

por lo demostrado en el problema 3a.



Ahora como el ángulo **CB'B** es un ángulo exterior del triángulo **ABB'** entonces

$$\angle CB'B = \angle A + \angle ABB' \quad \Rightarrow \quad \angle CB'B > \angle ABB'$$

Y como el ángulo **AB'B** es un ángulo exterior del triángulo **CB'B** también se cumple

$$\angle AB'B = \angle C + \angle CBB' \quad \Rightarrow \quad \angle AB'B > \angle CBB'$$

de las tres últimas relaciones entre los ángulos obtenemos:

$$\angle CB'B > \angle ABB' = \angle AB'B > \angle CBB' \quad \Rightarrow \quad \angle CB'B > \angle CBB'$$

$$\Rightarrow BC > B'C \text{ por el problema anterior}$$

$$\therefore BC + AB > AB' + B'C = AC$$

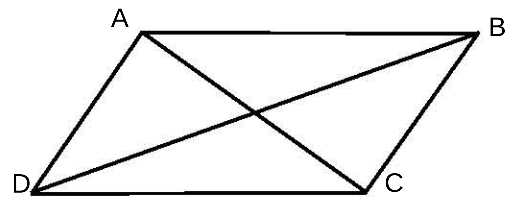
Ya que los segmentos **AB** y **AB'** tienen la misma medida.

d) HIPÓTESIS: ABCD es un paralelogramo con AC y BD diagonales

TESIS: AD = BC y AB = DC

AC y BD se bisecan mutuamente

DEMOSTRACIÓN



Vamos a demostrar que los triángulos **ADC** y **ABC** son congruentes:

AC = AC por ser lado común

$\angle$DAC = $\angle$BCA por ser ángulos alternos internos entre paralelas

$\angle$BAC = $\angle$DCA por la razón anterior

$\therefore$ Δ ADC $\cong$ Δ CBA por criterio ALA

$\Rightarrow$ AD = BC y AB = DC

por oponerse a ángulos iguales de triángulos congruentes

Ahora para demostrar que las diagonales se bisecan mutuamente vamos a considerar los triángulos **AED** y **BEC**.

AD = BC por lo que acabamos de demostrar

$\angle$DAC = $\angle$BCA por ser ángulos alternos internos entre paralelas

$\angle$ADB = $\angle$DBC por ser ángulos alternos internos entre paralelas

$\therefore$ Δ AED $\cong$ Δ CEB por criterio ALA

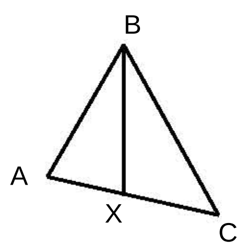
$\Rightarrow$ AE = EC y DE = EB

por oponerse a ángulos iguales de triángulos congruentes.

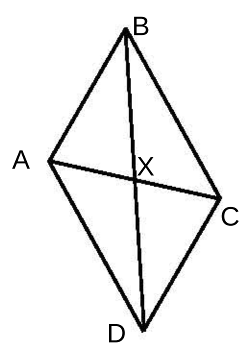
e) HIPOTESIS: ABC es un triángulo.
El segmento BX es mediana del triángulo ABC.

TESIS: BX < $\frac{AB + BC}{2}$ y BX > $\frac{AB+BC}{2} - \frac{AC}{2}$

DEMOSTRACIÓN.



Para realizar la demostración vamos a construir un triángulo con base **AC** y con lados paralelos a los segmentos **AB** y **BC** que pasen por **C** y **A** respectivamente.



El cuadrilátero **ABCD** así construido es por tanto, un paralelogramo.

Como las diagonales de todo paralelogramo se bisecan mutuamente, entonces la mediana **BX** coincide con la diagonal **BD**.

Si aplicamos la desigualdad del triángulo al triángulo **BCD** obtenemos

$$BC + CD > BD = BX + XD = 2BX.$$

Ya que BX = XD se obtiene que

$$BX < \frac{BC + CD}{2}$$

Ahora como el lado **CD** es congruente con el lado **AB** tenemos:

$$BX < \frac{BC + AB}{2}$$

Apliquemos ahora la desigualdad del triángulo a los triángulos **ABX** y **XBC**.

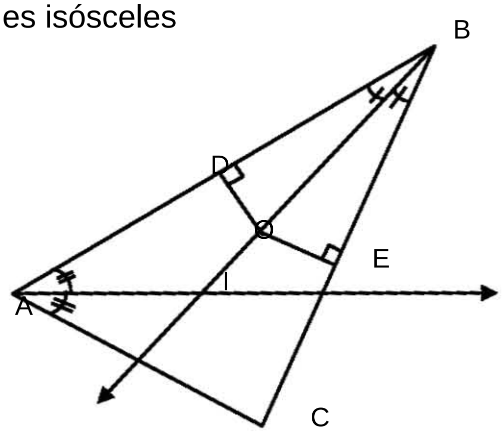
$$BX + XA > BA \quad y \quad BX + XC > BC$$

$$\Rightarrow \quad 2BX + XA + XC > BA + BC$$

$$\Rightarrow \quad BX > \frac{BA + BC - (AX + XC)}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2}$$

5. HIPÓTESIS: El vértice, el incentro y el circuncentro de un triángulo son colineales
   TESIS: El triángulo es isósceles
   DEMOSTRACIÓN



Sea el triángulo **ABC**, con **B** vértice, **O** circuncentro, **I** incentro; los tres puntos colineales.

Recordemos que el incentro es el punto de intersección de las bisectrices interiores, y que el circuncentro el punto de intersección de las mediatrices.

Bajemos desde **O** perpendiculares a **BC** y **AB**. Sean **E** y **D** los pies de las perpendiculares, respectivamente.

Mostraremos que el triángulo **DBO** es congruente con el triángulo **EBO.**

$\angle ODB = \angle OEB$ por construcción.

$\angle DBO = \angle OBE$ ya que **O** está en la bisectriz por hipótesis

Entonces los terceros ángulos de ambos triángulos deben medir lo mismo:

$\angle DOB = \angle EOB$

Además

BO = BO por ser lado común a los dos triángulos.

$\therefore\ \Delta DBO \cong \Delta EBO$ por criterio ALA

$\Rightarrow$ BD = BE por ser homólogos.

Ahora bien, como **O** es el circuncentro y puesto que dada una recta y un punto fuera de ella pasa una y solo una perpendicular, el segmento **DO** debe pertenecer a la mediatriz del lado **AB** y el segmento **OE** debe estar en la mediatriz del lado **BC**.

Por lo que **D** es punto medio de **AB** y **E** punto medio de **BC**.

$\Rightarrow$ BD = DA y BE = EC

De las dos últimas igualdades obtenemos:

DA = BD = BE = EC

$\Rightarrow$ BA = BD + DA = BE + EC = BC

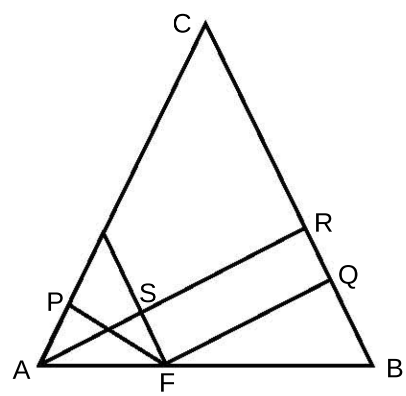
$\therefore\ \Delta$ ABC es isósceles.

6. HIPÓTESIS: ABC es un triángulo isósceles con AC = CB

F un punto sobre la base con $\overline{PF} \perp \overline{AC}$ y $\overline{QF} \perp \overline{BC}$

$\overline{AR}$ altura del triángulo

TESIS: QF + FP = AR.



DEMOSTRACIÓN

Tracemos una paralela al segmento **CB** que pase por el punto **F**. Llamemos **S** al punto de intersección de la paralela trazada con la altura **AR**.

Por hipótesis

$$\angle BRA = 90° = \angle FPA$$

Además

$$\angle BRA = \angle FSA \text{ por ser correspondientes entre paralelas}$$
$$\Rightarrow \quad \angle FPA = \angle FSA$$

También por hipótesis tenemos que

$$\angle A = \angle B$$

y

$$\angle B = \angle AFS \text{ por ser correspondientes entre paralelas}$$
$$\Rightarrow \quad \angle A = \angle AFS \quad \Rightarrow \quad \angle AFP = \angle SAF$$

ya que si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo los terceros ángulos deben ser también iguales.

Además

$$AF = AF \text{ por ser común}$$
$$\therefore \Delta APF \cong \Delta ASF \text{ por ALA} \quad \Rightarrow \quad FP = SA \text{ por ser homólogos.}$$

Y como

$$AR = AS + SR = FP + SR$$

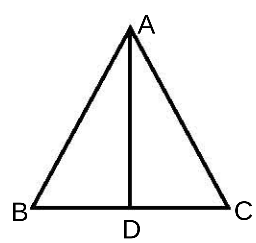
Pero como **SRQF** es un paralelogramo, en particular un rectángulo, por el ejercicio 4d, los lados opuestos deben ser iguales, entonces

$$SR = FQ \quad \Rightarrow \quad AR = FP + FQ \text{ (QED).}$$

7. a) HIPÓTESIS: El triángulo ABC es equilátero
$\overline{AD}$ es la bisectriz del ángulo A

TESIS: $\overline{AD}$ es altura del triángulo.

DEMOSTRACIÓN



Como el rayo que pasa por **AD** es bisectriz del ángulo **A** esto implica que:

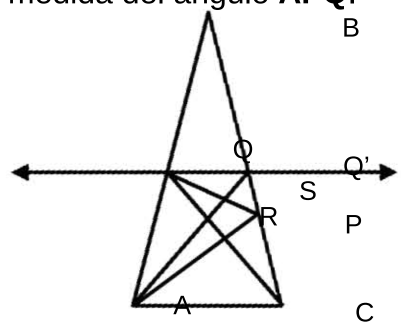
$$\angle BAD = \angle CAD$$
$$AB = AC \text{ por ser lados de un triángulo equilátero}$$
$$AD = AD \text{ por ser lado común}$$
$$\therefore \Delta BAD \cong \Delta CAD \text{ por LAL}$$
$$\Rightarrow \quad \angle ADB = \angle ADC \text{ por ser homólogos}$$

Pero como estos ángulos forman ángulo llano, entonces cada uno debe medir 90º

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{BC}$, esto es, el segmento **AD** es altura

b) En el problema tenemos los siguientes datos: el triángulo **ABC** es isósceles con AB = BC, $\angle B = 20^o$, **Q** es un punto en el lado **AB**, **P** es un punto en el lado **BC,** $\angle ACQ = 60^o$ y $\angle PAC = 50^o$.

Se pide calcular la medida del ángulo **APQ**.



Empecemos observando que como el triángulo **ABC** es isósceles y el ángulo **B** mide 20º entonces

$$\angle A = \angle C = 80^\circ$$

ya que por ser ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180º

$$\Rightarrow \quad \angle QCB = 20^\circ$$

Por lo que, con base en el recíproco del ejercicio (3a), el triángulo **CQB** es isósceles con

$$QC = QB$$

Si consideramos ahora el triángulo **APC** tenemos que

$$\angle APC = 50^\circ$$

puesto que por dato el ángulo **PAC** mide 50º y $\angle C = 80^\circ$

De esto deducimos que el triángulo **ACP** también es isósceles, por el recíproco del ejercicio (3a), con

$$AC = CP$$

Hemos trazado una paralela al lado **AC** que pasa por **Q**. Llamemos **Q'** a la intersección de la paralela con **BC**, el triángulo **QBQ'** así construido también resulta isósceles ya que los ángulos correspondientes formados por las paralelas son todos iguales entre sí, de esto obtenemos que

$$BQ = BQ' \quad \Rightarrow \quad AQ = Q'C$$

ya que los lados **AB** y **BC** tienen la misma medida por dato.

Además

$\angle AQQ' = \angle QQ'C$ por ser suplementos de ángulos iguales

y

$QQ' = QQ'$ por ser lado común

$\therefore \Delta AQQ' \cong \Delta CQ'Q$ por LAL

$\Rightarrow$ $QC = AQ'$ por ser lados homólogos

Pero ya habíamos obtenido que

$$QC = QB \quad \Rightarrow \quad AQ' = BQ$$

Luego el triángulo **ABQ'** también es isósceles lo que implica:

$\angle BAQ' = 20°$ por ejercicio (3a)

Del anterior resultado se sigue que:

$\angle Q'AP = 10° \Rightarrow \angle Q'AC = 60° \Rightarrow \angle CRA = 60°$

ya que por dato el ángulo **ACQ** mide 60º y por teorema 6, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º. (**R** es el punto de intersección de los segmentos **QC** y **AQ'**)

$\therefore \Delta ARC$ es equilátero por el recíproco del ejercicio (3a) $\Rightarrow AC = CR$

y como ya sabíamos que **AC** y **CP** miden lo mismo, entonces:

$CP = CR$

Por tanto el triángulo **CPR** también es isósceles con

$\angle CPR = \angle CRP = 80°$

ya que los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180º y ya habíamos obtenido que el ángulo **QCB** mide 20º.

De esto concluimos que:

$\angle Q'PR = 100°$ por ser suplementario del $\angle CPR$

y

$\angle Q'RP = 40°$ ya que forma ángulo llano con los ángulos **Q'RQ** y **CRP**

Por lo que en el triángulo **RPQ'** se cumple

$\angle RQ'P = 40°$ por teorema 6

De lo cual obtenemos que este triángulo resulta también isósceles con

$PQ' = PR$

Además, como en el triángulo **AQQ'** el ángulo **QAQ'** mide 20º y el ángulo **Q'QA** mide 100º entonces

$\angle QQ'A = 60° \Rightarrow \angle CQQ' = 60°$

por ser ángulos que se oponen a lados iguales de triángulos congruentes

$\Rightarrow \angle QRQ' = 60°$ por teorema 6

$\therefore \Delta QQ'R$ es equilátero por el recíproco del ejercicio 3a

$\Rightarrow QR = QQ'$

De los dos últimos argumentos hemos concluido:

$PQ' = PR$ y $QR = QQ'$

Por otro lado

$QP = QP$ por ser lado común

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta PQQ'$ por criterio LLL

$\Rightarrow \angle RQP = \angle Q'QP$ por ser ángulos homólogos

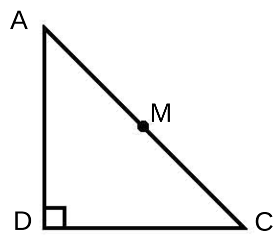
De esto concluimos que el segmento **QP** es bisectriz del triángulo equilátero **RQQ'** y como en un triángulo equilátero la bisectriz también es altura, (problema anterior), tenemos:

$QP \perp RQ'$

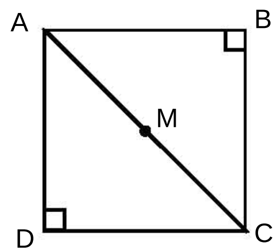
Si llamamos **S** a la intersección de éstos últimos segmentos, y consideramos al triángulo **APS**, tenemos nuestra última conclusión:

$$\angle APQ = 80°$$

8. a) HIPÓTESIS: ADC es un triángulo rectángulo.
M punto medio de la hipotenusa
TESIS: AM = MC = MD
DEMOSTRACIÓN:



Para demostrar la proposición vamos a realizar una construcción auxiliar. Dibujemos un triángulo congruente al triángulo rectángulo dado, de tal manera que sus hipotenusas coincidan



Lo que hemos construido entonces es un rectángulo, ya que:

En los triángulos **ADC** y **ABC** se cumple:

$$\angle DAC + \angle DCA = \angle BAC + \angle BCA = 90° \text{ por teorema 6.}$$

Pero como

$$\angle DAC = \angle BCA \quad y \quad \angle DCA = \angle BAC$$

por oponerse a lados iguales de triángulos congruentes

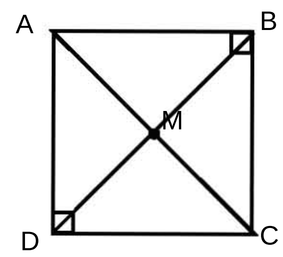
Concluimos que:

$$\angle DAC + \angle CAB = \angle DCA + \angle BCA = 90º$$

Como recordarás un rectángulo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro ángulos de 90°.

El rectángulo **ABCD** también es un paralelogramo, ya que la suma de los ángulos colaterales internos, formados por dos de sus lados opuestos, **AB** y **CD**, y por la transversal **AD**, es de 180°. Por lo que los lados son paralelos; por la misma razón los lados **AD** y **BC** son paralelos.

Tracemos la diagonal **DB** del rectángulo**.** Por el problema 4d, las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente, y por tanto deben cortarse en el punto **M,** ya que por dato **M** es el punto medio de la hipotenusa **AC**, que es la otra diagonal del rectángulo.



Vamos a considerar ahora los triángulos **ADC** y **DCB**, para estos triángulos se cumple:

DC = DC por ser lado común

BC = AD

ya que por construcción los triángulos ADC y ABC son congruentes y estos lados son homólogos

$\angle DCB = \angle ADC$ por ser también homólogos

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta BCD$ por criterio LAL

$\Rightarrow \angle BDC = \angle ACD$ por ser homólogos

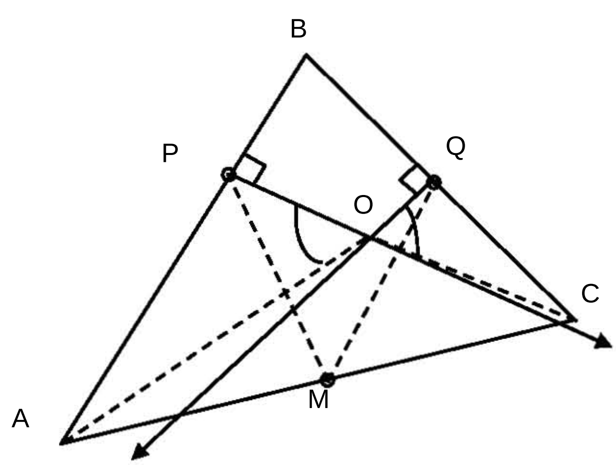
$\Rightarrow$ CM = MD (problema 3a)

Pero como **AM** y **MC** tienen la misma longitud por hipótesis, entonces

$\therefore$ AM = MC =MD

b) HIPÓTESIS: ABC es un triángulo
P un punto en el lado AB
Q un punto en el lado BC
AM = MC
$\overline{AB} \perp \overline{OP}$ y $\overline{BC} \perp \overline{OQ}$

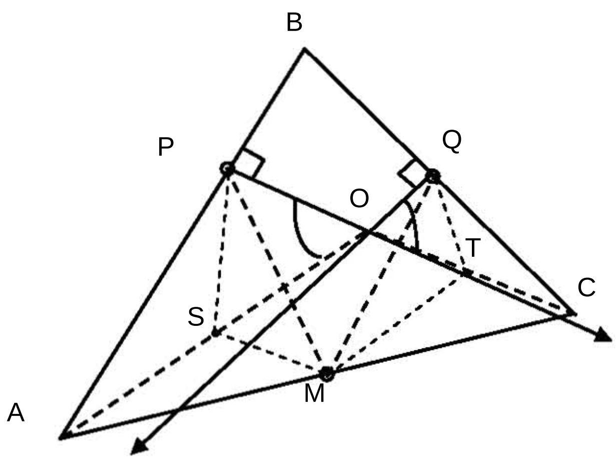
TESIS: MP = MQ si y solo si $\angle AOP = \angle COQ$



DEMOSTRACIÓN

Primero supongamos que MP = MQ y demostremos que $\angle AOP = \angle COQ$

Consideremos los puntos medios de **OA** y **OC**, llamémoslos **S** y **T**.



Ahora bien, como por dato los ángulo **OPA** y **OQC** miden 90º, esto implica que el triángulo **APO** y el triángulo **OQC** son rectángulos, con **OA** y **OC** hipotenusas, por lo que se cumple que **S** y **T** son equidistantes de sus vértices respectivos, es decir,

$$AS = SO = SP \text{ y } OT = TC = TQ \Rightarrow \Delta OPS \text{ y } \Delta QTO \text{ son isósceles.}$$

Por otro lado notemos que el segmento **SM** une los puntos medios de dos de los lados del triángulo **AOC**, lo que implica que

$$\overline{SM} \parallel \overline{OC} \quad \text{y} \quad SM = OT = TC, \text{ por el problema 2a.}$$

Como el segmento **MT** une otros dos puntos medios del mismo triángulo también se cumple:

$$\overline{MT} \parallel \overline{AO} \quad \text{y} \quad TM = SA = SO.$$

De las tres series de igualdades obtenemos lo siguiente:

$$SM = QT \text{ y } TM = PS$$

Ahora como por hipótesis

$$PM = MQ \Rightarrow \Delta SPM \cong \Delta TMQ \text{ por LLL}$$
$$\Rightarrow \angle PSM = \angle QTM \text{ por ser homólogos}$$

Y del paralelismo de los segmentos se deduce que **SOTM** es un paralelogramo

$$\Rightarrow \angle OSM = \angle OTM \text{ por ser ángulos de vértices opuestos del paralelogramo}$$

De las dos últimas igualdades entre los ángulos se sigue que:

$$\angle PSO = \angle QTO$$
$$\Rightarrow \angle OPS + \angle POS = \angle QOT + \angle OQT$$

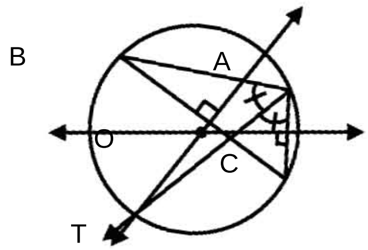
Además, como ya hemos concluido que los triángulos **OPS** y **QTO** son isósceles tenemos:

$$\angle AOP = \angle SOP = \angle QOT = \angle QOC.$$

La demostración del recíproco es básicamente igual, con las implicaciones finales en sentido contrario, por lo cual ya no la escribiremos.

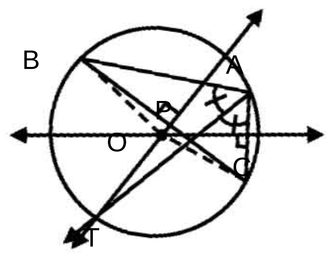
9. a) Llamemos **T** al punto de intersección de la bisectriz con el circuncírculo y **O** al circuncentro, es decir, al centro del circuncírculo. Notemos que el ángulo inscrito **BAT**, y el ángulo central **BOT** subtienden el mismo arco, por lo que se cumple:

$$\angle BOT = \angle 2BAT$$



Por los mismos argumentos obtenemos la igualdad:

$$\angle TOC = \angle 2TAC$$



Pero por hipótesis los ángulos **BAT** y **TAC** son congruentes, entonces

$$\angle BOT = \angle TOC$$

Llamemos ahora **P** al punto de intersección del lado **BC** del triángulo con el segmento **OT**. Consideremos los triángulos **BOP** y **POC**, para éstos se cumple:

$$BO = OC \text{ por ser radios}$$
$$OP = OP \text{ por ser lado común}$$
$$\angle BOT = \angle TOC \text{ por lo que acabamos de demostrar}$$
$$\therefore\ \Delta BOP \cong \Delta COP \text{ por criterio LAL}$$
$$\Rightarrow\ BP = PC \text{ por ser homólogos}$$
$$\angle BPO = \angle CPO \text{ también por ser homólogos}$$

Además los ángulos **BPO** y **CPO** forman ángulo llano, entonces debe cumplirse

$$BPO = 90° = CPO$$
$$\Rightarrow\ OT \text{ es mediatriz del } BC$$

$\therefore$ el punto **T** está tanto en la bisectriz como en la mediatriz

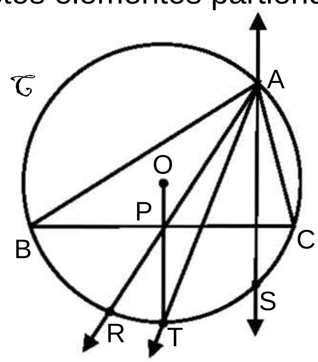
b) El problema que se plantea es:

- Conocemos a $\mathcal{C}$, círculo circunscrito o circuncírculo del triángulo que buscamos construir.
- Conocemos a "**O**", centro del circuncírculo $\mathcal{C}$.

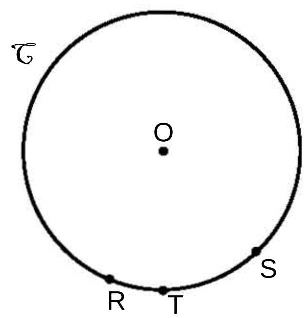
- Conocemos “**S**”, intersección de la altura del triángulo con $\mathcal{C}$.
- Conocemos “**T**”, intersección de la bisectriz del triángulo con $\mathcal{C}$.
- Conocemos “**R**”, intersección de la mediana del triángulo con $\mathcal{C}$.

Nos piden construir dicho triángulo.

Para darnos una idea del problema partamos de que tenemos resuelto el problema, dibujemos estos elementos partiendo de un triángulo.



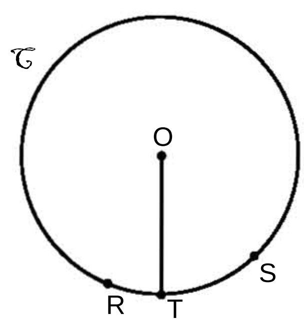
Ya que tenemos una idea, consideremos a $\mathcal{C}$ **, O, R, T**, **S** dados y construyamos el triángulo.



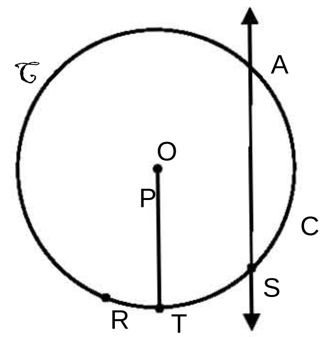
CONSTRUCCIÓN.

Para resolverlo, vamos a usar el problema anterior, es decir, partiremos del hecho de que el circuncírculo de un triángulo pasa por el punto de intersección de la mediatriz y la bisectriz trazadas a un mismo lado del triángulo.

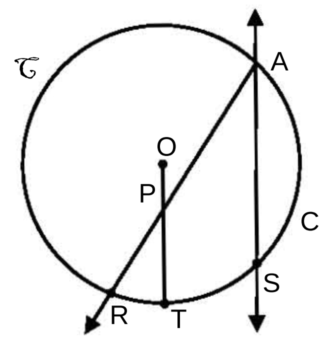
1. Unamos **T** con **O**. Como **T** es el punto de intersección de la mediatriz, el círculo y la bisectriz, lo que estamos haciendo es trazar una mediatriz del triángulo buscado.



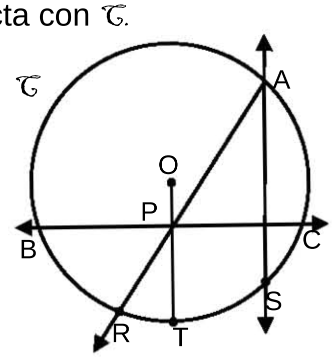
2. Tracemos una paralela a $\overline{TO}$ que pase por **S**, esto es, construyamos la altura del triángulo. Llamemos **A** al punto de intersección de la recta construida con $\mathcal{C}$.



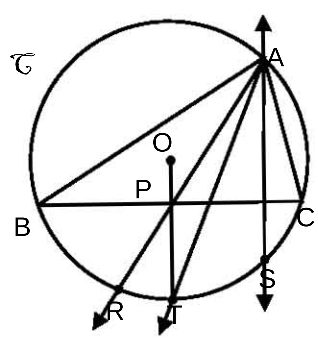
Unamos el punto **A** con **R**, es decir, tracemos la mediana. Y llamemos **P** el punto de intersección de la mediatriz $\overline{TO}$ con la mediana $\overline{RA}$.



P es el punto medio de uno de los lados del triángulo, dicho lado debe ser perpendicular a la mediatriz $\overline{TO}$, tracemos pues una recta perpendicular a $\overline{TO}$ que pase por **P**. Llamamos **B** y **C** a los puntos de intersección de esta recta con $\mathcal{C}$.



Afirmamos que el Δ ABC es el buscado.



DEMOSTRACIÓN

Debemos demostrar que **AR**, **AT** y **AS** son la mediana, la bisectriz y la altura respectivamente del triángulo **ABC**.

Por construcción

$$\overline{BC} \perp \overline{TO} \text{ por el paso 4}$$

y como

$$\overline{TO} \parallel \overline{SA} \text{ por el paso2} \;\; \Rightarrow \;\; \overline{BC} \perp \overline{SA}$$

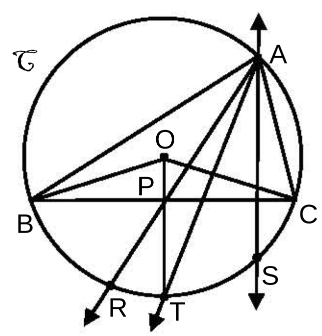
$$\therefore \;\; \overline{SA} \text{ es la altura del } \Delta ABC$$

$\overline{TO}$ es la mediatriz del triángulo **ABC** correspondiente al lado **BC** puesto que pasa por el circuncentro **O**, por definición punto de intersección de las mediatrices, y por **T,** punto de intersección de la bisectriz, la mediatriz y el circuncírculo (según demostramos en el problema anterior). Esto implica que **TO** divide al segmento $\overline{BC}$ en dos partes iguales por lo que, **P** es punto medio de **BC**, ya que **P** pertenece al segmento $\overline{BC}$ (paso 4).

$$\therefore \;\; \overline{AP} \text{ es mediana del } \Delta ABC.$$

Además el punto **P** también pertenece al segmento **AR** puesto que el punto **R** pertenece a la mediana.

Finalmente como el punto **T** es un punto de la bisectriz del ángulo **A** ocurre que



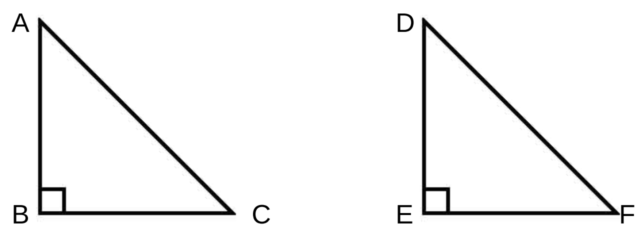
$$\therefore \;\; \overline{AT} \text{ es bisectriz del ángulo } \mathbf{A} \text{ del triángulo}$$

10. a) HIPÓTESIS: ABC y DEF son triángulos rectángulos

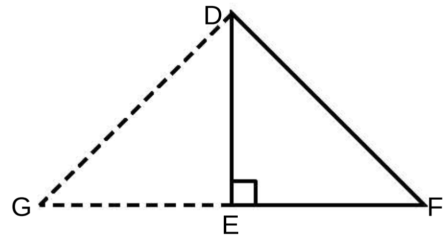
AC = DF y AB = DE

TESIS: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

DEMOSTRACIÓN



Prolonguemos el segmento **EF** hasta un punto **G** de tal manera que **EG** sea congruente con **BC**. Unamos **D** con **G**. El triángulo **DGE** así construido es congruente con el triángulo **ABC** ya que:



$$\angle DEF = 90^\circ \text{ por hipótesis}$$
$$\angle DEG + \angle DEF = 180^\circ \text{ por formar ángulo llano}$$
$$\Rightarrow \quad \angle DEG = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \quad \angle DEG = \angle ABC$$

Además

$$GE = AB \text{ por construcción}$$

y

$$DE = BC \text{ por hipótesis}$$
$$\therefore \quad \Delta DEG \cong \Delta ABC \text{ por criterio LAL}$$
$$\Rightarrow \quad AC = DG \text{ por ser correspondientes}$$

y por hipótesis sabíamos que:

$$AC = DF$$
$$\Rightarrow \quad DG = DF$$
$$\Rightarrow \quad \Delta DGF \text{ es isósceles}$$
$$\Rightarrow \quad \angle DGE = \angle DFE$$

por ser ángulos opuestos a lados iguales de un triángulo isósceles.

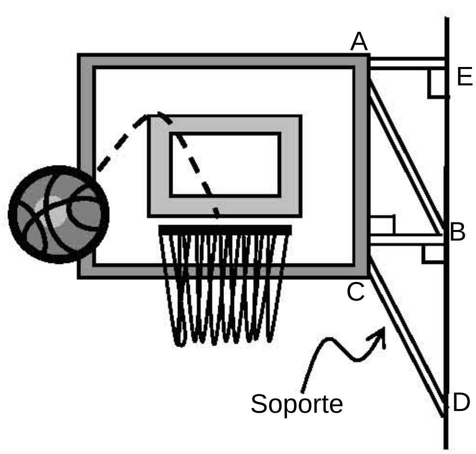
Como ya habíamos demostrado

$$\angle DEG = \angle DEF = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle GDE = \angle EDF$$

debido a que los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180º

$$\therefore \quad \Delta DEG \cong \Delta DEF \text{ por criterio LAL (o ALA)}$$
$$\therefore \quad \Delta DEF \cong \Delta ABC \text{ por criterio LAL}$$

b)



Primero observemos que para que el tablero y la pared sean paralelos debe ocurrir que las distancias **AE** y **CB** sean iguales. Si logramos, con los soportes, que los triángulos **ABC** y **BCD** sean congruentes habremos terminado, para ello coloquemos el soporte **ABCD** de tal manera que

$$ED \perp BC \quad \text{y} \quad AC = BD$$

Ahora, para que los triángulos **ABC** y **BCD** sean congruentes requerimos que las partes **AB** y **DC** de los soportes tengan la misma longitud ya que entonces tendremos la hipotenusa y un cateto, el común, de la misma longitud, y por el problema que acabamos de demostrar los triángulos serán congruentes.

La anterior congruencia implica que:

$$\angle ACB = \angle CBD = 90^\circ \text{ por ser homólogos}$$

Y si consideramos la distancia perpendicular **AE** del tablero a la pared, entonces el paralelogramo **AEBC** debe tener sus lados opuestos dela misma longitud.

$$\therefore \quad AE = CD$$

Por lo que para obtener un paralelismo entre la pared y el tablero basta con que las partes **AB** y **BC** del soporte sean congruentes.

CAPÍTULO VI
PROBLEMAS PLANTEADOS EN LA ANTIGÜEDAD

En el presente capítulo propongo una serie de problemas que aparecieron en los escritos de las civilizaciones de la antigüedad, como la babilónica, la egipcia, la china y la hindú, y otros que se relacionan con ellos, para que los resuelvas. El propósito es que conozcas algunos de los problemas que resolvían estos pueblos.

He seleccionado los que me parecen más representativos y entre estos los más sencillos. En estos problemas, a diferencia de los presentados en los capítulos anteriores, se requiere un conocimiento más general sobre geometría y algunos elementos de historia, sin embargo, espero puedas resolverlos con los conocimientos que tienes de cursos anteriores y los que se han desarrollado en estas notas. Asimismo te sugiero revises algunos libros de historia de las matemáticas en particular la parte que habla sobre estas culturas.

En las traducciones de los problemas se hace una adaptación al lenguaje actual. El problema número diez tiene una dificultad particular y es que se debe interpretar lo que el autor del problema quería decir. Espero que encuentres gusto a la hora de resolver los problemas y en su caso ver cómo es la solución.

§ 1
PROBLEMAS

1. LA GRAN PIRÁMIDE EGIPCIA. En los papiros de Moscú se halló el siguiente ejemplo numérico:

   > "Si le dicen a usted una pirámide truncada de 6 para la altura vertical por 4 en una base por 2 en la superior. Debe elevarse al cuadrado este 4, lo que da como resultado 16. Se debe duplicar 4, el resultado es 8. Se debe elevar al cuadrado 2, el resultado es 4. Deben sumarse los 16, los 8 y los 4, el resultado es 28. Debe tomarse la tercera parte de 6, el resultado es 2. Debe tomarse 28 dos veces, el resultado es 56. Obsérvese que es 56. Se verá que es correcto" [1].

   Encuentra un modelo algebraico para el cual el caso anterior sea particular.

   Los siguientes problemas son una de las más antiguas aplicaciones del Teorema de Pitágoras[2], aparecen en las tablillas babilónicas del año 2000 a.n.e. aproximadamente, junto a otros problemas de longitudes:

2. Una viga de longitud 30 unidades, se recarga verticalmente sobre un muro, si la viga se desliza 6 unidades y queda oblicua ¿Qué distancia hay entre el muro y el pie de la escalera?
3. Una viga está sobre una pared. Si se desliza 3 unidades desde la parte más alta de la pared, el pie de la viga queda a 9 unidades del muro. ¿Qué longitud

---

[1] Op. cit., *Estudio de las Geometrías* pág. 7.

[2] Andrés Sestier. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Limusa. México 1989, pág. 8.

tiene la viga y a qué altura se encuentra del piso después de haberse desplazado?[3]

4. El siguiente problema babilónico muestra como la forma geométrica es una manera de presentar una cuestión algebraica.

   "Un área **A**, que consiste de la suma de dos cuadrados es 1000. el lado de un cuadrado es 2/3 del lado del otro cuadrado, disminuido en 10. ¿Cuáles son los lados del cuadrado?"[4]

   Representa geométricamente el problema y de ahí deduce un modelo algebraico para resolverlo.

5. El siguiente problema fue hallado en el libro chino, *La Aritmética de Nueve libros*

   a) "Crece en medio de una laguna circular de 3 m de diámetro un junquillo que sobresale 30 cm del agua. Cuando se inclina hasta que le cubre el agua alcanza justamente la orilla de la laguna. ¿Qué profundidad tiene el agua?"[5]

   El siguiente problema no aparece en ningún libro antiguo lo he encontrado en un problemario de álgebra y geometría[6] pero me ha parecido interesante citarlo para observar una formulación actual del problema anterior.

   b) En un lago hay un nenúfar. Cuando el tallo de la planta está vertical, la flor sobresale 10 cm sobre la superficie. Inclinando el nenúfar, pero manteniendo el tallo estirado, la corola toca el agua en un punto situado a 21 cm del primero. ¿Qué profundidad tiene el lago en ese punto?

6. En el papiro del Rhind el área del círculo se toma como igual a la de un cuadrado que tiene por lado 8/9 del diámetro de la circunferencia. Justifica que esto es equivalente a tomar

   $$\pi = (4/3)^4 \approx 3.160493$$ [7]

7. En los Sulvasutras, aparecen las soluciones empíricas del problema de la cuadratura del círculo que son equivalentes a tomar

   $$d = (2 + \sqrt{2})S/3 \quad \text{y} \quad S = 13d/15$$

   Donde **d** es el diámetro de la circunferencia y **S** el lado del cuadrado equivalente. ¿A qué aproximación de π son equivalentes estas fórmulas?[8]

8. El siguiente enunciado corresponde a un problema que los babilónicos resolvían, intenta tú hacerlo.

---

[3] B. L.Van Der *Waerden. Science Awakening*. Traducción al inglés de Arnold Dresden. ED P.Noordhoff LTD – Groningen Holland. 1954. Pág.76.

[4] Op. cit. *Historia Concisa de las Matemáticas*, pág. 37

[5] Howard Eves. *Estudio de las Geometrías*. Editorial UTEHA. Tomo I. México 1969, pág.9.

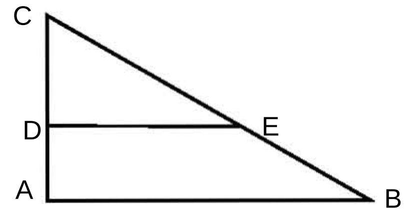
[6] Fernando Fabián Hernández Velasco. Problemario de Álgebra y Geometría. C C H Oriente, UNAM. 1996. pág. 43.

[7] Op. cit., *Estudio de las Geometrías* pág. 7.

[8] Op. cit., *Estudio de las Geometrías* pág. 8.

Calcular el radio de la circunferencia circunscrita en un triángulo isósceles dado. Supón, para facilitar la solución, que el triángulo tiene lados de longitudes 2, 4, 4.

9. Encuentre la solución al siguiente problema planteado por los babilonios:
   De la siguiente figura se sabe que:
   $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ y $AB = 30$
   $A_{\text{TRAPECIO } \mathbf{ABED}} - A_{\text{TRIÁNGULO } \mathbf{CDE}} = 420$
   $CD - DA = 20$
   Se pide calcular la longitud de los segmentos:
   DE, **CD** y **DA**



10. Interprétese lo siguiente, hallado en una tabla babilónica que se piensa data de 2600 a.n.e.
   "60 es la circunferencia, 2 es la perpendicular, hállese la cuerda".
   "Duplíquese 2 y se obtiene 4 ¿lo ve usted? Tómese cuatro de 20, se obtiene 16. Elévese al cuadrado 20, se obtiene cuatrocientos. Elévese al cuadrado 16, se obtiene 256. Tómese 256 de 400, se obtiene 144, 12, la raíz cuadrada, es la cuerda. Tal es el procedimiento"[9]

SUGERENCIAS

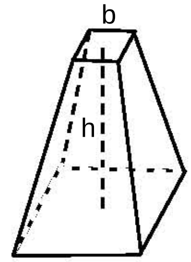
1. Basta simbolizar cada uno de los elementos de la pirámide truncada. Haz un dibujo.
2. Usa el Teorema de Pitágoras y haz un dibujo para que tengas claridad de cuales son los catetos y cual la hipotenusa del triángulo rectángulo.
3. La misma sugerencia y observa que los datos que sedan corresponden a elementos diferentes del triángulo rectángulo de los del problema anterior.
4. De la representación geométrica deducirás fácilmente el modelo algebraico.
5. a) Realiza un dibujo, observa que al inclinarse el junquillo, (estamos suponiendo que mantiene el tallo estirado), y tocar la orilla de la laguna, se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa tiene por longitud la parte sumergida del junquillo más la parte que sobresalía, mientras que los catetos son respectivamente el radio de la laguna y la profundidad de la misma.
   b) Nota que es el mismo problema que el anterior solo cambian los datos.
6. Establece la igualdad entre el área del círculo en función de su diámetro y el área del cuadrado en función de su lado cuya medida es igual a 8/9 del diámetro del círculo.
7. Da valores particulares a **S** y a **d** para establecer la igualdad entre las áreas y encontrar un valor aproximado de π.
8. Traza el triángulo isósceles y dibuja la circunferencia circunscrita; recuerda para ello qué es una circunferencia circunscrita a un triángulo. Encuentra la altura del triángulo dibujado y calcula la altura de un nuevo triángulo, el formado por la base del triángulo original y los dos radios de la circunferencia que pasan por los extremos de la base del triángulo isósceles. Con ello ya podrás tener todos los elementos para calcular el radio de la circunferencia.

[9] Op. cit., *Estudio de las Geometrías* pág. 7.

9. Simboliza y establece tus ecuaciones. Utiliza semejanza para plantear una de las ecuaciones.
10. Recuerda que para los babilonios $\pi = 3$, entonces el 20 que aparece debe ser la longitud de un diámetro. Ahora bien, por la solución que se da se está utilizando el Teorema de Pitágoras, entonces la cuerda buscada debe ser un cateto de un triángulo rectángulo inscrito en el círculo, (no olvides que éstos triángulos tienen a un diámetro como lado, que es justamente la hipotenusa). Considera a la "perpendicular" como la perpendicular desde un punto de la circunferencia a la cuerda y que, al prolongarse, pasa por el centro del círculo. El valor 16 obtenido en la tablilla es justamente la longitud del cateto que no es la cuerda buscada, justifica ese resultado y después simplemente aplica el Teorema de Pitágoras.

SOLUCIONES

1. De la siguiente figura obtenemos, al simbolizar:



$$V = h(a^2 + ab + b^2)/3$$

Observamos que al sustituir **a**, **b** y **h** por los valores:

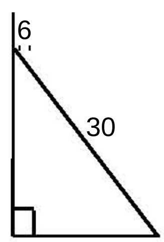
$$a = 4,\ \ b = 2\ \ y\ \ h = 6$$

obtenemos el resultado esperado:

$$h(a^2 + ab + b^2) / 3 = 6(4^2 + 4(2) + 2^2) / 3 = 56$$

La fórmula anterior da el volumen de un tronco de una pirámide cuadrada en función de la altura **h** y los lados **a** y **b** de las bases de la pirámide

2. Hagamos un dibujo



La longitud de la escalera representa la hipotenusa del triángulo, el otro cateto mide

$$30 - 6 = 24$$

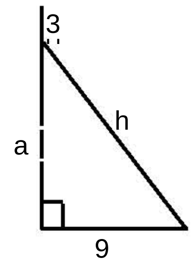
donde 30 unidades representa la altura que alcanzó la escalera cuando estaba recargada verticalmente. La distancia buscada es el otro cateto del triángulo, entonces aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$30^2 = 24^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{900 - 576}$$

$$d = 18$$

3. Usemos la misma figura pero con los nuevos datos:



Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos

$$h^2 = a^2 + 9^2$$

Pero como la parte más alta desde donde se desliza la viga mide **h** (igual que la longitud de la viga), entonces:

$$a = h - 3$$

por lo que:

$$h^2 = (h - 3)^2 + 9^2$$

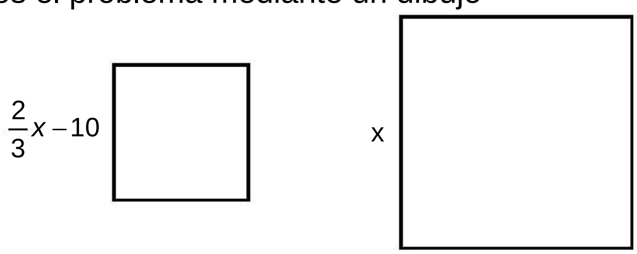
Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$h^2 = h^2 - 6h + 9 + 81$$
$$6h = 90$$
$$h = 15$$

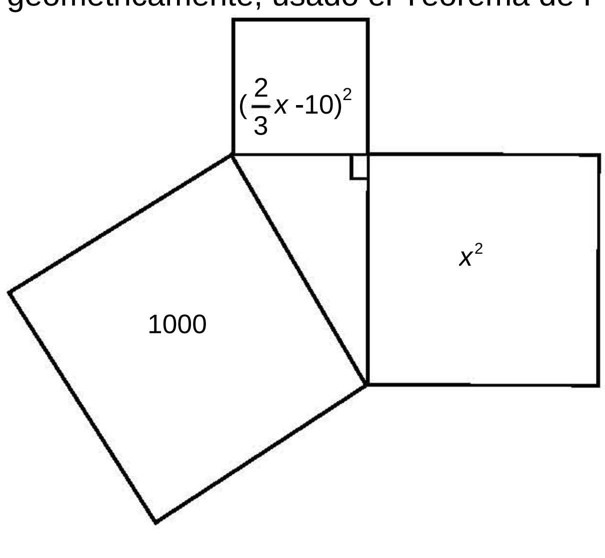
Y por lo tanto

$$a = 12$$

4. Representemos el problema mediante un dibujo



La suma de las áreas de ambos cuadrados es 1000 unidades cuadradas, representemos esto geométricamente, usado el Teorema de Pitágoras.



Deduzcamos ahora el modelo algebraico.

$$x^2 + (2/3\ x - 10)^2 = 1\ 000$$

Desarrollando el binomio

$$x^2 + 4/9\ x^2 - 40/3\ x + 1\ 00 = 1\ 000$$

Simplificando e igualando a cero

$$13/9\ x^2 - 40/3\ x - 900 = 0$$

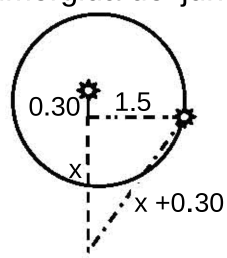
$$13\ x^2 - 120\ x - 8\ 100 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática anterior obtenemos las soluciones

$$x_1 = 30 \ \text{ y } \ x_2 = -\ 270/13$$

Siendo entonces el lado del cuadrado igual a 30 unidades puesto que las longitudes negativas no son consideradas.

5. a) Representemos mediante un dibujo nuestro problema: observemos que al inclinarse el junquillo, (suponiendo que mantiene su tallo estirado), y tocar la orilla de la laguna, se forma un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y la profundidad de la laguna y la hipotenusa tiene por longitud la parte que sobresalía más la parte sumergida del junquillo.



Entonces usando el teorema de Pitágoras

$$(x + 0.30)^2 = 1.5^2 + x^2$$

$$x^2 + 0.6x + 0.09 = 2.25 + x^2$$

Simplificando y despejando x obtenemos

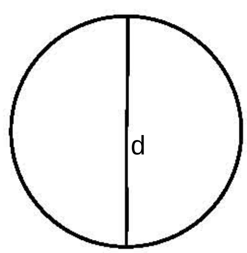
$$x = 2.16/.6 = 3.6 \text{ m.}$$

b) Como la solución es totalmente análoga sólo pongo el resultado

$$x = 17.05$$

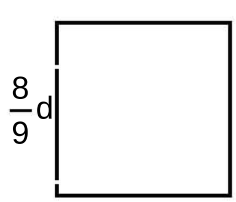
6. Calculemos el área del círculo y del cuadrado:

Área del círculo



$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = A$$

Área del cuadrado



$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Igualando

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

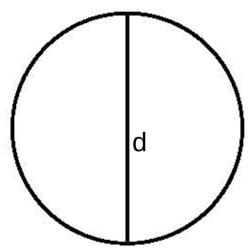
Despejando π y haciendo operaciones

$$\pi = \left(\frac{64}{81}d^2\right) \div \left(\frac{d^2}{4}\right)$$

$$\pi = \frac{256d^2}{81} = \frac{4^4}{3^4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$\therefore \ \pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

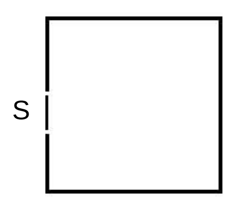
7.



Circunferencia de diámetro d

Vamos a considerar a d = 2, por lo que

$$S = \frac{13(2)}{15} = \frac{26}{15}$$



Cuadrado de lado S

Así el área del cuadrado es igual a

$$A_{\text{cuadrado}} = \left(\frac{26}{15}\right)^2 \approx 3.00444\ldots$$

El área del círculo debe ser igual a

$$A_{\text{círculo}} = \pi\left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi$$

Como las áreas deben ser iguales, obtenemos:

$$\pi \approx 3.00444...$$

Ahora bien, si al que le damos valor es al lado del cuadrado, por ejemplo S = 1, tenemos

$$d = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{3} \right)$$

Estableciendo la igualdad entre las áreas

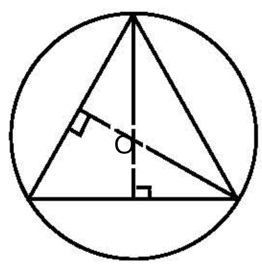
$$\pi \left(\frac{2+\sqrt{2}}{6} \right)^2 = 1$$

De lo cual, despejando π, obtenemos:

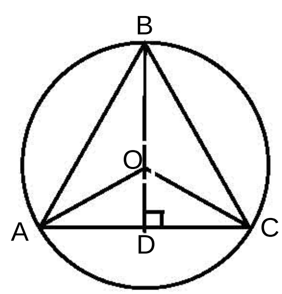
$$\pi \approx 3.08831...$$

Que son los valores aproximados de π encontrados por los hindúes.

8. Dibujemos el triángulo isósceles y su circunferencia circunscrita. Recordemos que una circunferencia circunscrita a un triángulo es aquella que pasa por los tres vértices del triángulo y tiene como centro la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. Entonces vamos a trazar al menos dos de las mediatrices del triángulo. Llamemos **O** a la intersección de estas líneas



En el triángulo isósceles dado, sean AB = BC. Consideremos al triángulo formado por **O** y los vértices **A** y **C** de este triángulo. Notemos que la mediatriz del lado **AC** es también la altura del triángulo **AOC** ya que éste también es un isósceles, pues tiene por lados radios del círculo,[10] y además es altura del triángulo isósceles **ABC**.



Consideremos que el triángulo isósceles tiene lados iguales de longitud 4 y base 2 unidades.

[10] Recordemos que en un triángulo isósceles la altura trazada desde el vértice determinado por los lados iguales, es también mediatriz, bisectriz, y mediana.

Calculemos la altura **BD** del triángulo isósceles: ya que **DBC** es un triángulo rectángulo podemos usar el Teorema de Pitágoras, y como el segmento **BD** es mediatriz, **DC** debe medir 1.

De lo que obtenemos:

$$BD^2 = 4^2 - 1^2$$

$$BD = \sqrt{3}$$

Calculemos ahora la altura del triángulo **ODC** que también es rectángulo

$$OD^2 = OC^2 - 1$$

Ahora bien dado que BO = OC ya que son radios, entonces

$$OD = \sqrt{3} - OB = \sqrt{3} - OC$$

de las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$(\sqrt{3} - OC)^2 = OC^2 - 1$$

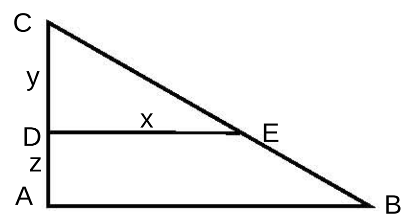
Resolviéndola

$$3 - 2\sqrt{3}\,OC + OC2 = OC^2 – 1$$

$$OC = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Que es el radio de la circunferencia buscado.

9. Llamemos x = DE, y = CD, z = DA



Calculemos el área del trapecio **ABED**:

$$\frac{(30+x)z}{2}$$

El área del triángulo **CDE** es:

$$\frac{xy}{2}$$

De esto planteamos la primera ecuación:

$$\frac{(30+x)z}{2} - \frac{xy}{2} = 420$$

La segunda es muy fácil obtenerla:

$$y – z = 20$$

Para establecer la tercera ecuación, observemos que los triángulos **CDE** y **ABC** son semejantes, ya que tienen sus tres ángulos respectivamente iguales: el común y los correspondientes determinados por las paralelas.

Así que podemos establecer la siguiente proporción entre sus lados:

$$\frac{x}{30}=\frac{y}{y+z}$$

Lo que tenemos planteado es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, resolvámoslo.

Despejando **y** de la segunda ecuación:

$$y = 20 + z$$

Quitando denominadores y sustituyendo **y** en la tercera ecuación, obtenemos:

$$x(y+z) = 30y$$

$$x(20 + z) + xz = 30(20 + z)$$

Despejando **x**:

$$x=\frac{30(20+z)}{20+2z}$$

Si en la primera ecuación quitamos paréntesis y sustituimos a **x**, tenemos:

$$15z + \frac{600z+30z^2}{40+4z}-\frac{12000+600z+30z^2+600z}{40+4z}=420$$

Realizando el quebrado:

$$\frac{600z+60z^2+600z+30z^2-12000-1200z-30z^2}{40+4z}=420$$

Simplificando, quitando denominadores e igualando a cero, obtenemos:

$$60z^2-1680z-28800=0$$

Una ecuación de segundo grado, cuya solución positiva, que es la que nos interesa por tratarse de longitudes, es:

$$z = 40$$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$y = 60$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación donde tenemos despejada a **x,** tenemos:

$$x = 18$$

10. Para resolver este problema partimos de tres hechos básicos: (1) los babilonios consideraban π = 3; (2) éstos sabían que un triángulo inscrito en un círculo que tiene un lado como diámetro, es un triángulo rectángulo y (3) nosotros interpretaremos a la “perpendicular” como un segmento de recta perpendicular a la cuerda desde un punto **A** de la circunferencia que al prolongarse pasa por el centro del círculo.

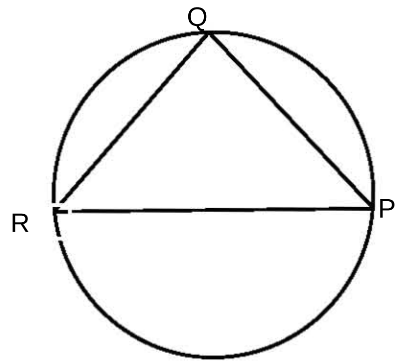
    Entonces, como la circunferencia mide 60, tenemos:

$$\pi\, d = 60$$

Usando el primer hecho básico obtenemos

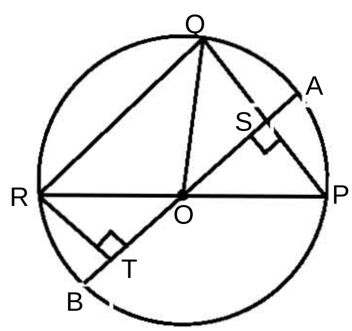
$$d = \frac{60}{3} = 20$$

Así pues la longitud del diámetro es 20.
Ahora inscribamos el triángulo rectángulo **PQR**, con la cuerda buscada **PQ**, como cateto y el diámetro que pasa por un extremo de la cuerda como hipotenusa



Consideremos a **PQ** como la cuerda buscada

Para encontrar la longitud del tercer lado (que no es ni el diámetro ni la cuerda), consideremos el triángulo **OSP** (donde **O** es el centro del círculo y **S** es el pie de la "perpendicular"), y el triángulo **ORT** (donde **T** es el pie de la perpendicular trazada desde **R** al diámetro que pasa por **AO**.

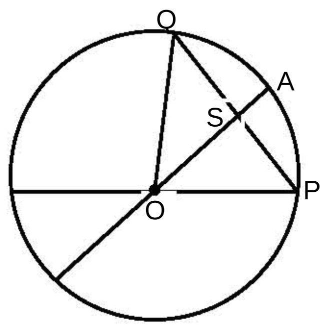


AS es la "perpendicular" que mide dos

Notemos que estos triángulos son congruentes, es decir, sus lados y sus ángulos respectivos miden lo mismo. Ya que tienen un par de ángulos opuestos por el vértice y por tanto son iguales. Cada uno tiene un ángulo de 90º. Además **OR** y **OP** tienen la misma longitud por ser radios. Por criterio ALA, tenemos la congruencia. De lo anterior, deducimos que los lados **SO** y **OT** miden lo mismo. Por lo que **TB** debe valer 2.
Usando lo que hemos hecho podemos interpretar la siguiente parte de la tabla: "Duplíquese 2 y se obtiene 4 ¿lo ve usted? Tómese 4 de 20, se obtiene 16." Que son respectivamente las longitudes de los segmentos **AS** + **TB** y **ST**.
Ahora bien, dado que **RQST** es un rectángulo, puesto que es un cuadrilátero con cada uno de sus ángulos interiores de 90º; y **TS** mide 16, entonces **QR** mide 16. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo **PQR** se obtiene la interpretación del resto del enunciado ya que:

$$QR = 20 - 2\,(2) = 16$$
$$PQ^2 = 20^2 - 16^2 = 144$$
$$\therefore PQ = 12$$

Notemos que otra solución es tomar el triángulo isósceles **POQ** y trazar su altura, siendo el segmento **AS** justamente la perpendicular citada en la tablilla, usando el resultado de que la altura bisecta la base de un triángulo isósceles, y aplicando el Teorema de Pitágoras para el ΔOPS, obtenemos



AS es la "perpendicular" que mide dos

$$OS = OA - AS = 10 - 2 = 8$$
$$OP = 10$$
$$10^2 - 8^2 = 36$$
$$\sqrt{36} = 6 = PS$$
$$\therefore PQ = 2\,(6) = 12$$

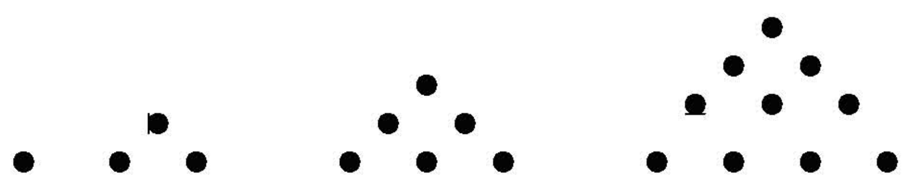
Solución más sencilla que los babilonios, creo yo, debieron conocer puesto que sabían que en un triángulo isósceles la altura biseca a la base.

CAPÍTULO VII
PROBLEMAS PLANTEADOS POR LOS GRIEGOS

Con el mismo propósito del capítulo anterior a continuación propongo diez problemas que resolvieron los griegos. Los problemas que se presentan requieren que además de manejar el material de los capítulos anteriores, se haya estudiado semejanza de triángulos y algunos otros conceptos básicos de la geometría elemental, como el de área de figuras geométricas. Quizá el requisito más fuerte es tener algunos conocimientos de historia de las matemáticas, sin embargo la idea es que aunque el estudiante careciera de ellos, pudiera resolver los problemas propuestos. Los he seleccionado buscando que con la herramienta antes mencionada se puedan resolver.

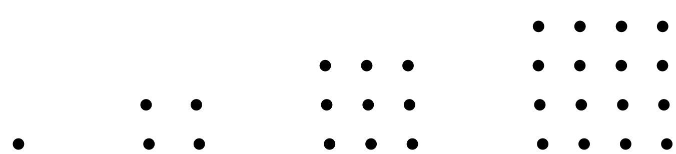
PROBLEMAS

1. Los pitagóricos establecieron un vínculo entre la aritmética y la geometría a través de configuraciones geométricas mediante puntos representando números a los que llamaron *números figurados*. A esta clase pertenecen los números oblongos y pentagonales trabajados en el capítulo I. La idea del siguiente problema es que observes que algunas propiedades de los números enteros se pueden fácilmente establecer en forma geométrica usando números figurados. Los dos resultados que a continuación se enuncian fueron obtenidos por los pitagóricos.
   Los siguientes números son llamados, respectivamente, triangulares y cuadrados.



1 C C 6 10

Números triangulares

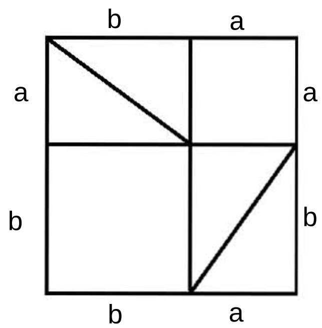


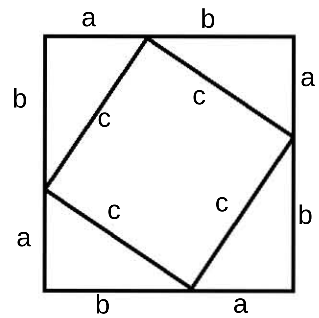
1 4 9 16

Números cuadrados

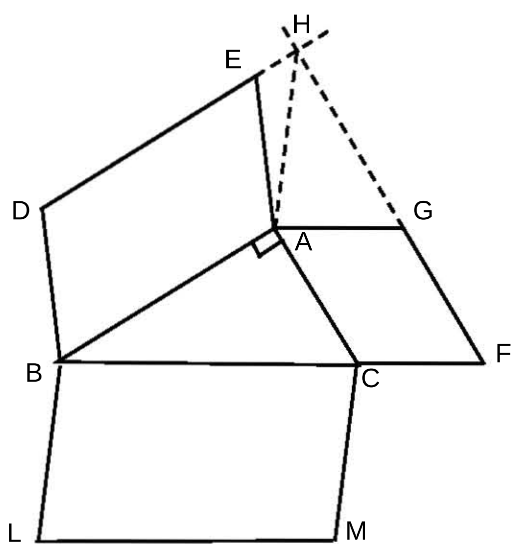
   a) Muestra en forma geométrica que cualquier número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.
   b) Deduce de este hecho que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...+ n = $\frac{n(n+1)}{2}$
   c) Demuestra también que la suma de cualquier número de enteros impares consecutivos, principiando con el 1 es un cuadrado perfecto.

2. El Teorema de Pitágoras es uno de los resultados más antiguos, los babilonios ya lo utilizaban sin demostrarlo, y es uno de los más importantes dentro de la geometría griega, a la fecha se han logrado reunir 370 pruebas diferentes de esta proposición, pero la primera de ellas se atribuye a los pitagóricos. En la siguiente figura aparece una descomposición de áreas que se cree utilizó Pitágoras, en su prueba. Justifícala.



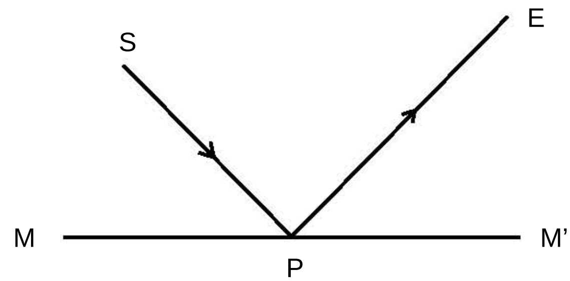


3. La siguiente proposición es una generalización del Teorema de Pitágoras, que se encuentra en el libro *La Colección*, escrito por Pappus, matemático griego que vivió en el siglo IV de nuestra era.
El enunciado de la proposición es el siguiente: Si **ABC** es un triángulo cualquiera, **ABDE** y **ACFG** paralelogramos cualesquiera construidos sobre dos de sus lados y si **DE** y **FG** se cortan en **H**, entonces al trazar **BL** y **CM** iguales y paralelas a **HA**, el área del paralelogramo **BCLM**, construido sobre el lado restante del triángulo, es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos anteriormente construidos. Demuestra esta proposición.



4. a) El problema que a continuación te presento es sobre la ley de la reflexión de la luz, ley conocida ya por Aristóteles, Euclides y probablemente Platón. Pero se cree que el primero en demostrarla fue Herón. Bajo la influencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla, esta ley se basa en la suposición de que la luz sigue la trayectoria más corta. Supongamos, entonces que un haz de luz parte de un

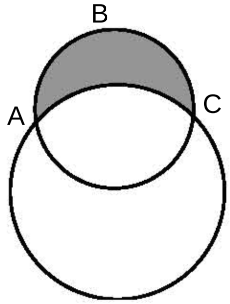
foco situado en un punto **S**, se refleja en un espejo **MM’** y que la luz se dirige al punto **E**. El problema consiste en desmostar que ∠MPS = ∠M’PE, donde **P** es el punto de incidencia del rayo. Es decir, lo que se debe probar es que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.



b) También se puede demostrar el recíproco, esto es, bajo la suposición de que el ángulo de incidencia y reflexión son iguales, demostrar que la trayectoria que siguen los rayos de luz es recta. Realiza la demostración.

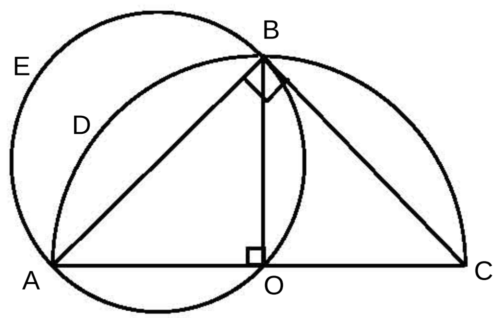
5. En el *Libro de los Lemas* de Arquímedes, en la proposición 8, aparece una solución al problema de la trisección del ángulo, aunque esta demostración no cumple con la condición de sólo usar regla y compás. La construcción que se hace es la siguiente: Sea **ABC** el ángulo que se va a trisecar. Se traza en **B** una circunferencia de radio arbitrario, llamemos **P** al punto donde la circunferencia corta a **AB**, **Q** el punto donde intercepta a **BC** y **R** el punto donde intercepta a la prolongación del lado **BC** del ángulo. Consideremos un punto **S** en la recta **RC** y un punto **T** en la circunferencia tal que ST = BQ y con la condición de que los puntos **S**, **T**, y **P** sean colineales. Se afirma que ∠BST es la tercera parte del ∠QBP. Demuestra la afirmación.
6. En el álgebra geométrica de los griegos se pueden construir, usando regla y compás, las cuatro operaciones aritméticas: sumas, diferencias, productos y cocientes, pero también raíces cuadradas. Supongamos que queremos encontrar la raíz cuadrada de dos segmentos de longitud **a** y **b**. En el álgebra geométrica todo está representado por segmentos, entonces lo que buscamos es construir un segmento cuya longitud **x** sea tal que x^2 = ab. La construcción que se realiza es la siguiente: Se traza un segmento de recta **ABC** tal que AB=a y BC = b. Después se traza una semicircunferencia de diámetro **AC**. Desde **B** se levanta una perpendicular a **AC** que intersecta a la semicircunferencia en **D**. Demuestra que **BD** es el segmento buscado.
7. El problema de cuadrar el círculo, es decir, de encontrar un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, fue un planteamiento que atrajo la atención de los matemáticos griegos primero y de los matemáticos en general después. Pero resolver este problema requería el hecho anterior de cuadrar un polígono, el cual a su vez, pareciera sencillo si previamente se sabe como cuadrar un triángulo, pues basta dividir el polígono en triángulos para obtener su cuadratura. El problema que a continuación proponemos es obtener la cuadratura del triángulo, es decir, encontrar el cuadrado de área igual al triángulo dado, recuerda que los únicos instrumentos permitidos son la regla no graduada y el compás.

8. Se le llama lúnula o luna a una figura plana limitada por dos arcos de circunferencia de radios distintos.



La parte sombreada es el área de la lúnula o luna **ABC**

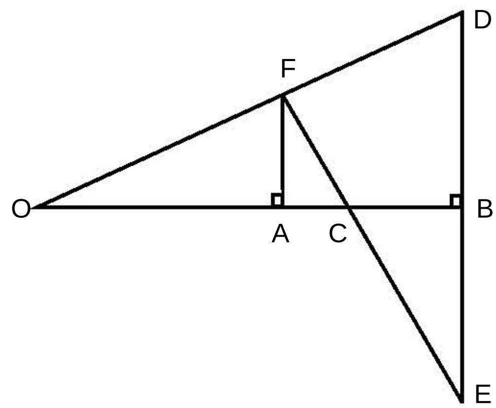
El siguientes problemas tienen que ver con las cuadraturas de las lúnulas y fue resuelto por Hipócrates de Quíos matemático y filósofo griego, que vivió alrededor del año 479 a.n.e.
El problema que se plantea es: basándose en la figura demostrar que el área de la lúnula **AEB** es igual al área del triángulo **AOB**, partiendo de la hipótesis de que la razón del área de un círculo a otro es igual a la razón entre las áreas de los cuadrados construidos sobre sus diámetros. Notemos que una vez hecho esto, por el problema anterior, podremos encontrar el cuadrado de área igual a la lúnula.



9. a) Si **p** y **q** son dos números, entonces la media aritmética, geométrica y armónica de esos números se definen, respectivamente, como: $\frac{p+q}{2}$, $\sqrt{pq}$ y $\frac{2pq}{p+q}$, donde esta última media se obtiene calculando el recíproco de la media aritmética de 1/p y 1/q.

En el libro *La Colección* de Pappus, se da una construcción geométrica de la medias aritmética, geométrica y armónica en una única semicircunferencia. La construcción que da Pappus es la siguiente: En una semicircunferencia de diámetro **AC**, y centro en **O**, se considera un punto **B**, diferente de **O**, en el segmento **AC**. Se levanta una perpendicular desde **B** que corte a la semicircunferencia, llamemos **D** al punto de intersección de la semicircunferencia con la perpendicular. Se traza ahora una perpendicular sobre **DO** desde **B**, llámese **F** al pie de la perpendicular sobre **DO**, entonces Pappus afirma que, **OD** es la media aritmética, **DB** la media geométrica y **DF** la media armónica de los segmentos **AB** y **BC**. Demuestra esta afirmación.

b) En el mismo libro, Pappus da la siguiente construcción de la media armónica de dos segmentos dados **OA** y **OB**, dispuestos como se muestra en la figura:

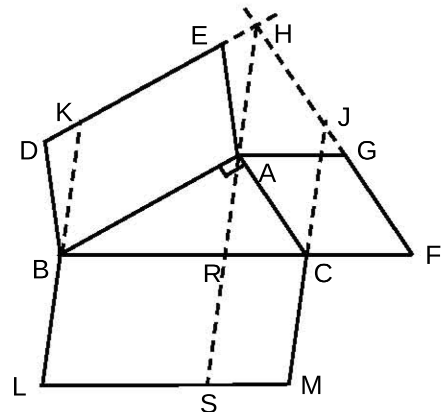


La construcción que da es la siguiente: Dado el segmento **OAB**, desde **B** levanta una perpendicular hasta un punto **D** tal que BD = BE, donde **E** es la prolongación de la perpendicular hacia el otro lado. Después traza desde un punto **A** cualquiera que está en $\overline{OB}$, otra perpendicular a $\overline{OB}$ que corta al $\overline{OD}$ en **F**. Une **F** con **E** y llama **C** al punto de intersección de $\overline{FE}$ con $\overline{OB}$. Afirma que el $\overline{OC}$ es la media armónica buscada. Realiza la demostración de esta construcción.

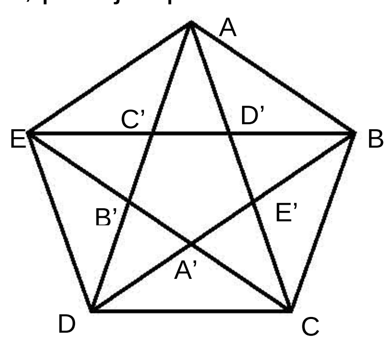
10. En el problema siguiente se va a trabajar con el pentagrama o pentágono estrellado de los pitagóricos. El problema consiste en demostrar que las diagonales de un pentágono regular al intersectarse forman un nuevo pentágono regular y que la razón en que divide uno de esos puntos de intersección a la diagonal, dada por el cociente del segmento mayor entre el menor es la misma que la razón de la diagonal y el segmento mayor.

SUGERENCIAS

1. a) Dibuja varios números cuadrados, en su representación como puntos, y divídelos en dos números triangulares consecutivos.
   b) Observa que el n-ésimo número triangular está dado por el que le precede más **n** y utiliza el resultado del problema anterior.
   c) La idea sería colocar los números impares, es decir, su representación en puntos, de tal manera que formen un cuadrado.
2. Simplemente calcula el área de los cuadrados por separado y de ahí deduce el teorema.
3. Utiliza la siguiente figura y recuerda que las áreas de paralelogramos que tienen la misma base y la misma altura son iguales, es decir, equivalentes.
   Donde **BK** es prolongación del segmento **LB**, con **K** en **DH**; **CJ** es prolongación del segmento **MC** con **J** en **FH** y **AS** es continuación del segmento **HA** con **S** en el lado **LM**.

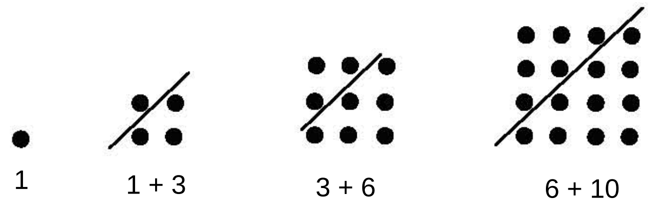


4. a) Traza un punto **S’** simétrico a **S** con respecto al segmento **MM’** y utiliza el hecho de que los triángulos que se forman son congruentes.
   b) La misma sugerencia de 9 a)
5. Realiza la construcción y luego usa el hecho de que ∆STB y ∆TBP son isósceles.
6. Primero dibuja, luego aplica el teorema de Pitágoras a el ∆BDO, donde **O** es el centro de la semicircunferencia.
7. Primero busca el cuadrado de área igual a un rectángulo de base y altura congruentes a la del triángulo dado, y como éste rectángulo tendrá el doble de área que el triángulo, habrá que encontrar el cuadrado de área mitad al anterior. Para ello, usa el hecho de que el cuadrado construido sobre la diagonal de otro tiene el doble de área.
8. Ten presente la definición de sector y segmento circular. Demuestra que el área del sector **OADB** es igual al área del semicírculo **AEB** y aplica el Teorema de Pitágoras.
9. a) La primera media es casi inmediata, la segunda ya la hemos obtenido en un problema anterior. Para demostrar la tercera considere los triángulos semejantes **DFB** y **DFO**.
   b) Considera los triángulos semejantes **ODB**, **OFA** y por otro lado los triángulos semejantes **AFC** y **BEC**. Además observa que AC = OC-OA y CB = OB – OC.
10. Para la primera parte de la demostración prueba que se forman triángulos isósceles congruentes alrededor del pentágono menor. Para la segunda parte demuestra la congruencia entre varios triángulos isósceles y la semejanza de los triángulos **BCD’** y **BCE**, por ejemplo.



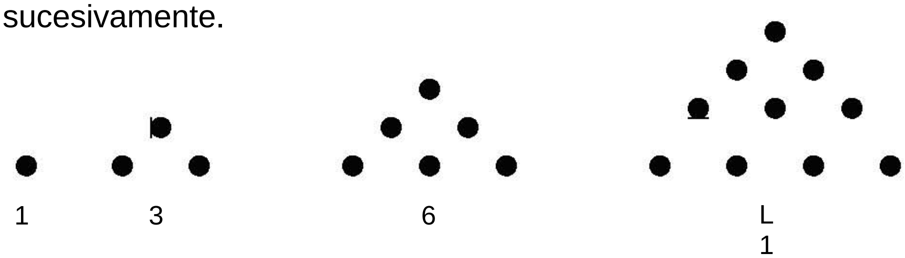
SOLUCIONES

1. a)



En la figura, la diagonal divide al número cuadrado en los dos números triangulares consecutivos y esta división la podríamos realizar para cualquier número cuadrado.

b) Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, etc. Observemos de la figura que estos números se pueden obtener de la sumas 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, y así sucesivamente.



De esta manera, si llamamos T_n al n-ésimo número triangular, éste estará dado por:

$$T_n = 1+2+3+4+5+6+...+n$$

Además, este número T_n también se puede expresar como el número triangular anterior más **n**, es decir,

$$T_n = T_{n-1} + n \quad \Rightarrow \quad T_n - n = T_{n-1}$$

Ahora bien, notemos que a los números cuadrados, 1, 4, 9, 16, 25,..., los podemos expresar como $\mathbf{n^2}$., donde **n** representa a los números naturales.
Pero dado que dos números triangulares sucesivos dan un número cuadrado, por el ejercicio anterior, debe ocurrir que

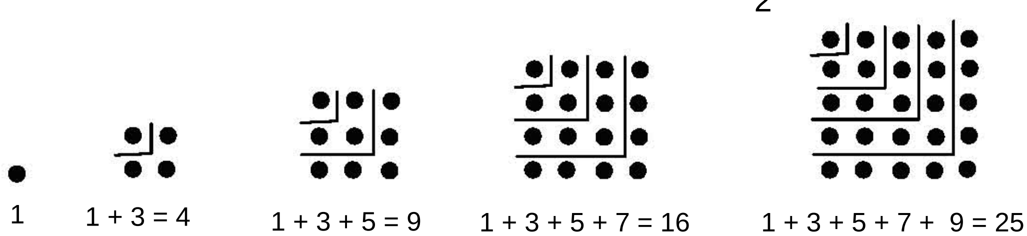
$$T_n + T_{n-1} = n^2$$

Sustituyendo a la expresión que teníamos para T_{n-1} en esta última igualdad obtenemos

$$T_n + T_n - n = n^2 \quad \Rightarrow \quad T_n = \frac{n^2+n}{2} \quad \Rightarrow \quad T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Con lo que concluimos que $1+2+3+4+5+6+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

c)



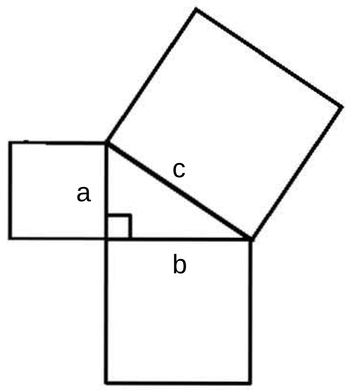
En cada suma obtenemos un cuadrado perfecto.

Lo que estamos haciendo es que a un número cuadrado le agregamos un número sucesor impar, esto es,

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

lo cual, efectivamente, es un número cuadrado perfecto.

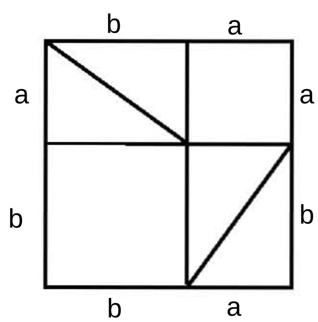
2. Lo que queremos demostrar es que el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo, es decir, que:

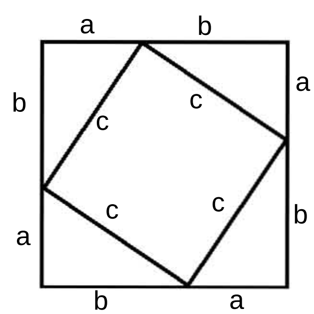


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Ahora, el primer cuadrado se ha dividido de tal manera que su área es igual a

$$A_{\text{CUADRADO}} = ab + a^2 + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$





El segundo cuadrado, cuya longitud del lado es igual al primero, ha sido dividido de una forma diferente, su área puede ser calculada de la siguiente manera:

$$A_{\text{CUADRADO}} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

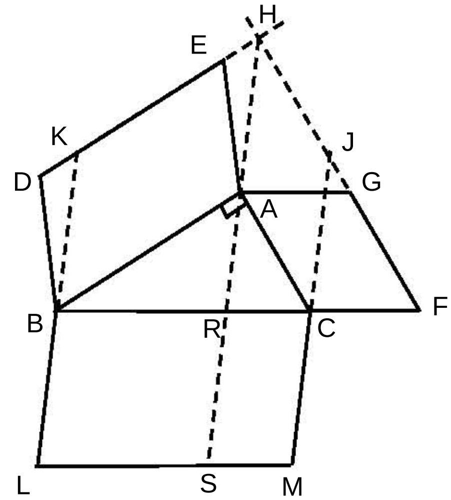
Pero como las áreas de los cuadrados deben ser iguales, pues tienen lados congruentes de longitud a + b, entonces de las dos últimas igualdades obtenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

De lo cual concluimos que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3. Dado que $\overline{LK}$ y $\overline{HS}$ por un lado y $\overline{KH}$ y $\overline{BA}$ por otro, son paralelos por construcción, el cuadriláteros **ABKH** es un paralelogramo. Por las mismas razones el cuadrilátero **AHJC** también lo es.



De igual manera los cuadrilátero **BRSL** y **RCMS** son paralelogramos, puesto que $\overline{RS} \parallel \overline{BL} \parallel \overline{CM}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{LM}$ por construcción.

Por otro lado puesto que **HA** = **BL**, por hipótesis, los paralelogramos **ABKH** y **BRSL** tienen la misma base y como $\overline{LK} \parallel \overline{SH}$, deben tener la misma altura, por lo que éstos paralelogramos tiene la misma área, es decir son equivalentes. Con un razonamiento análogo se concluye que los paralelogramos **AHJC** y **SRCM** también son equivalentes. Esto es:

$$A_{\square ABKH} = A_{\square BRSL} \quad \text{y} \quad A_{\square AHJC} = A_{\square SRCM}$$

Ahora bien, dado que AB = DE los paralelogramos **ABKH** y **ABDE** tienen la misma base y puesto que $\overline{AB} \parallel \overline{DH}$, deben tener la misma altura, por lo que concluimos que estos paralelogramos son equivalentes y como AC = GF y $\overline{AC} \parallel \overline{GF}$ también sucede que los paralelogramos **ACFG** y **ACJH** son equivalentes, esto es:

$$A_{\square ABKH} = A_{\square ABDE} \quad \text{y} \quad A_{\square ACFG} = A_{\square ACJH}$$

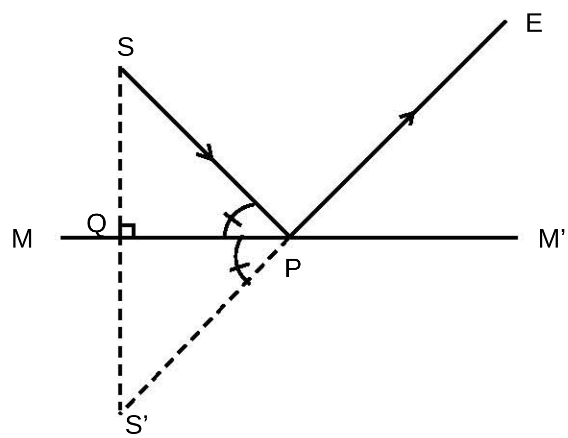
Finalmente el área del paralelogramo **BCML** es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos **BRSL** y **RCMS** luego entonces

$$A_{\square BCML} = A_{\square ABDE} + A_{\square ACFG}.$$

4. a) Tracemos el segmento **SS'** perpendicular al segmento **MM'** y tal que SQ=S'Q, donde **Q** es el punto de intersección de **MM'** con **SS'**. Los triángulos **SQP** y **S'QP** son congruentes, pues además de tener un lado y un ángulo respectivamente iguales por construcción, comparten el lado **QP**, por lo que

$$SP = S'P \quad \text{y} \quad \angle SPM = \angle S'PM$$

por ser lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes.



Esto implica que el *camino* **SPE** tiene la misma longitud que el *camino* **S'PE**, y ya que por hipótesis es el camino más corto, entonces S'PE debe ser una recta, por lo que

$$\angle S'PM = \angle EPM'$$

por ser ángulos opuestos por el vértice.

Por lo tanto, de las últimas dos igualdades concluimos:

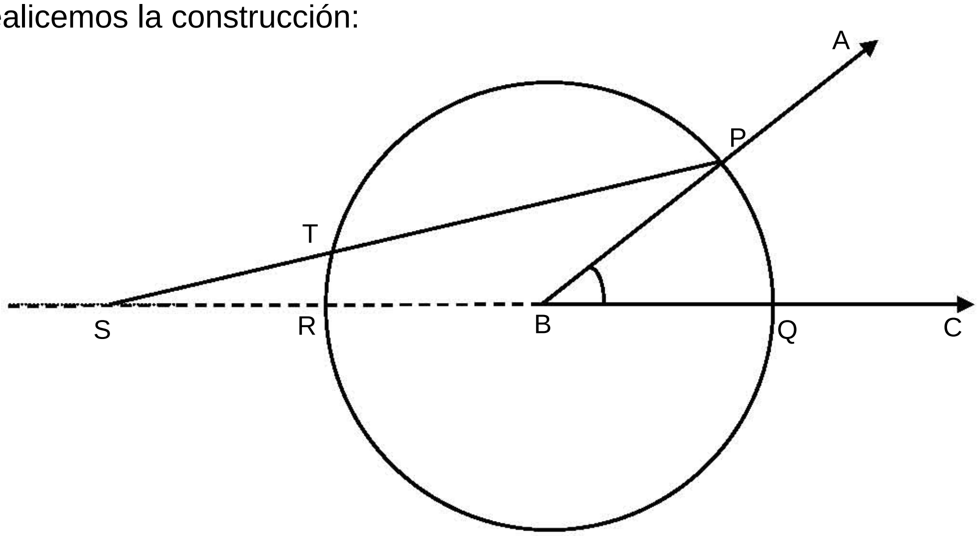
$$\angle SPM = \angle EPM'$$

con lo cual nuestro teorema queda demostrado

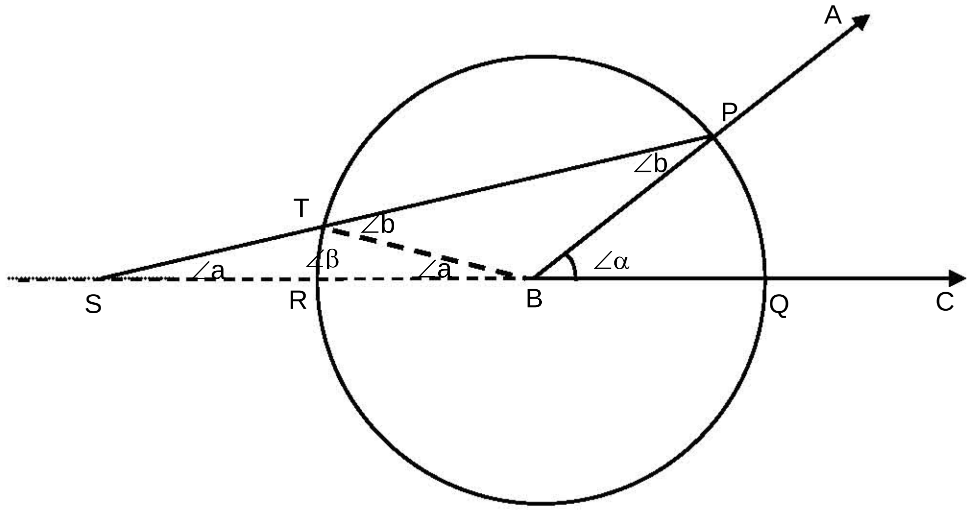
b) Usamos la misma construcción, pero ahora supongamos que $\angle$ SPM = $\angle$EPM' y como $\angle$ S'PM = $\angle$ SPM por ser ángulos correspondientes de triángulos congruentes, entonces $\angle$ S'PM = $\angle$ EPM'.

Pero como $\angle$ S'PM + $\angle$ S'PM' = 180º entonces $\angle$ EPM' + $\angle$ S'PM' = 180º, por lo que S'PE deben ser colineales y por lo tanto la trayectoria seguida por el rayo de luz es una línea recta.

5. Realicemos la construcción:



Consideremos el triángulo **STB**, este triángulo es isósceles ya que **TB** es un radio de la circunferencia y **ST** tiene la misma longitud de un radio por construcción. Llamemos **a**, a los ángulos iguales de dicho triángulo. Por otro lado, el triángulo **TPB** también es isósceles, pues los segmentos **BT** y **BP** son radios de la circunferencia, nombremos con **b** a los ángulos iguales de este triángulo.



De lo anterior obtenemos:

$$2\angle a = \angle b$$

por ser el ángulo **b** un ángulo exterior del triángulo **STB**.

Si llamamos α al ángulo **PBQ** tenemos:

$$\angle a + \angle b = \alpha$$

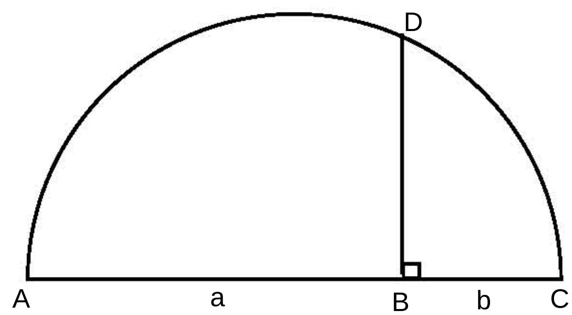
por ser α un ángulo exterior del triángulo **SPB** :

De las últimas dos igualdades obtenemos

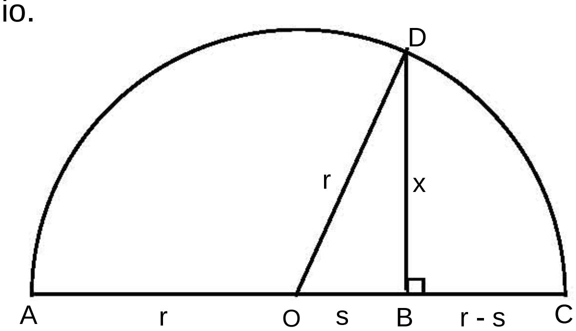
$$\angle a + 2\angle a = \alpha \quad \Rightarrow \quad 3\angle a = \alpha$$

por lo que $\angle TSR$ es la tercera parte del $\angle ABC$.

6. En la figura AB = a y BC = b



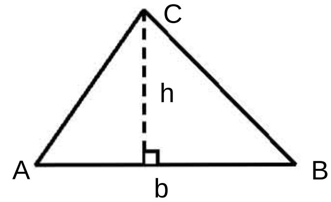
Nombremos y **r** al radio.



Llamemos **O** al centro de la circunferencia **ADC, r** al radio de la circunferencia, **s** a la longitud del segmento BO, **x** a la longitud del segmento BD y consideremos el triángulo rectángulo **OBD** entonces por el teorema de Pitágoras se cumple:

$$x^2 + s^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = r^2 - s^2 = (r+s)(r-s) = ab$$

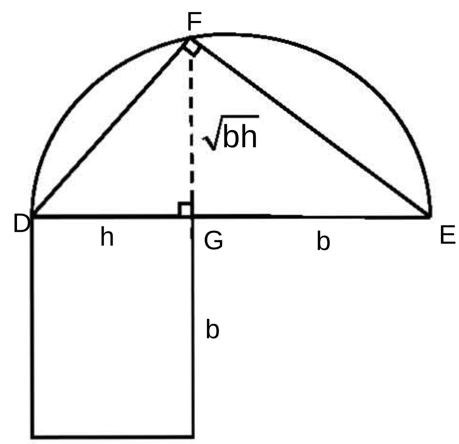
7. Sea el triángulo **ABC** de base **b** y altura **h**. Estamos buscando un cuadrado de área igual al triángulo **ABC**.



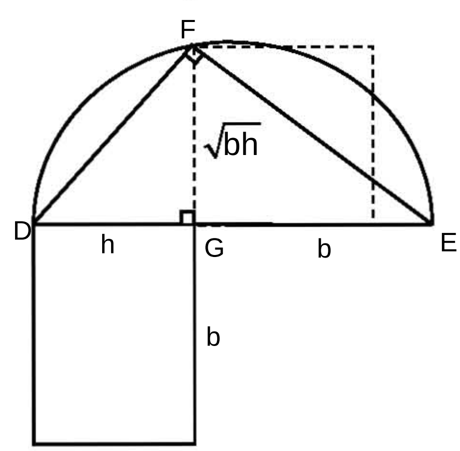
Si llamamos **x** a la longitud del lado del cuadrado buscado debe ocurrir que:

$$x^2 = \frac{bh}{2}$$

Nosotros ya sabemos que él área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo. Empezaremos por encontrar un cuadrado de área equivalente a la del rectángulo de base **b** y altura **h**. Notemos que esto es lo mismo que encontrar la raíz de **bh**, cuestión que resolvimos en el problema anterior, procedamos entonces como se indico.



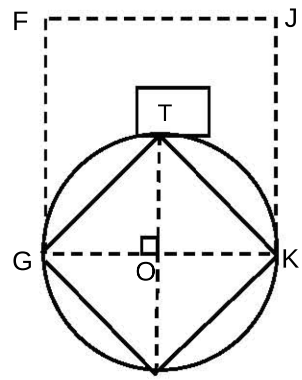
Construyamos ahora el cuadrado de lado $\sqrt{bh}$.



Pero este cuadrado todavía tiene el doble de área que el triángulo, lo que haremos ahora es encontrar el cuadrado que tenga justamente la mitad del área del que hemos encontrado.

Llamemos **GFKJ** el cuadrado de lado $\sqrt{bh}$ que hemos encontrado.

Lo que haremos ahora es construir un cuadrado de diagonal $\overline{GK}$, ya que entonces el cuadrado **GFKJ** tendrá el doble de área que éste. Para ello construyamos una circunferencia con centro en el punto medio del lado $\overline{GK}$, y radio $\dfrac{\sqrt{bh}}{2}$



Si llamamos **O** al centro de la circunferencia, levantemos una perpendicular desde **O**, hasta que intersecte a la circunferencia, sea **T** dicho punto. Afirmamos que:

$$GT = x$$

es la longitud del lado del cuadrado que andamos buscando. Ya que ΔGTK es semejante al ΔGTO, puesto que cada uno pose un ángulo recto, y el $\angle TGK$ es ángulo común de ambos triángulos, por lo que los ángulos restantes deben ser iguales. De lo anterior concluimos la siguiente proporción

$$\frac{x}{\sqrt{bh}} = \frac{\frac{\sqrt{bh}}{2}}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{\sqrt{bh}^2}{2}$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{bh}{2}$$

Con lo cual hemos concluido la cuadratura del triángulo **ABC**.

8. Como **ABC** es un triángulo inscrito en la semicircunferencia de centro **O**, este triángulo debe ser rectángulo.

   Ahora bien, los triángulos **ABO Y CBO** son congruentes ya que:

   AO = OC, por ser **O** centro de la semicircunferencia

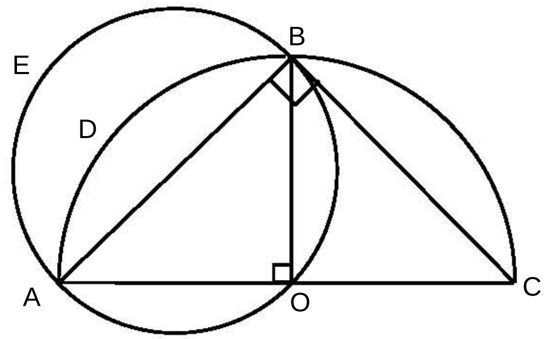
   OB =OB por ser lado común

   $\angle$AOB = $\angle$COB =90° por dato

   Por lo que, por criterio LAL, se cumple la congruencia. De lo cual deducimos que:

   AB = BC por ser correspondientes.

   Entonces el triángulo **ABC** además de rectángulo es isósceles.



Observemos que la hipótesis de la que partimos, es decir, que la razón del área de un círculo a otro es igual a la razón entre las áreas de los cuadrados construidos sobre sus diámetros, es muy fácil probarla si suponemos que el área de un círculo es igual a π por radio al cuadrado, lo cual los griegos no habían demostrado en esa época. Hagámoslo.

Llamemos **A** al área del círculo, y **R** su radio, y **a** y **r** al área y radio de otro círculo, respectivamente, entonces:

$$A = \pi R^2 \text{ y } a = \pi r^2$$

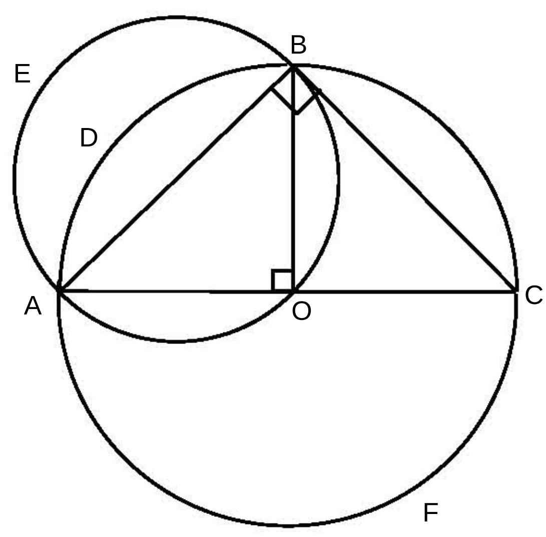
Calculando la razón entre las áreas obtenemos:

$$\frac{A}{a} = \frac{\pi(2R)^2}{\pi(2r)^2} = \frac{D^2}{d^2}$$

Donde **D** es el diámetro del primer círculo y **d** el diámetro del segundo.

Del resultado anterior se deduce que:

$$\frac{A_{\text{CÍRCULOABCF}}}{A_{\text{CIRCULOAEBO}}} = \frac{2A_{\text{SEMICÍRCULOABC}}}{2A_{\text{SEMICÍRCULOAEB}}} = \frac{AC^2}{AB^2}$$



Pero por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$$

Ya que el triángulo es rectángulo e isósceles, por lo que se cumple

$$\frac{A_{SEMICÍRCULOABC}}{A_{SEMICÍRCULOAEB}} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{2AB^2}{AB^2} = \frac{2}{1}$$

Esto implica que

$$A_{SEMICÍRCULO\ ABC} = 2A_{SEMICÍRCULO\ AEB}$$

Recordemos que un *sector* es la región de un círculo comprendida entre un arco y los radios que van a sus extremos.

Notemos entonces que el área del semicírculo **ABC** es el doble del área del sector **OADB**, pues el ángulo **AOB** mide 90º, esto es:

$$A_{SEMICÍRCULO\ ABC} = 2A_{SECTOR\ CIRCULAR\ OADB}$$

De las dos últimas igualdades obtenemos:

$$A_{SECTOR\ OADB} = A_{SEMICÍRCULO\ AEB}$$

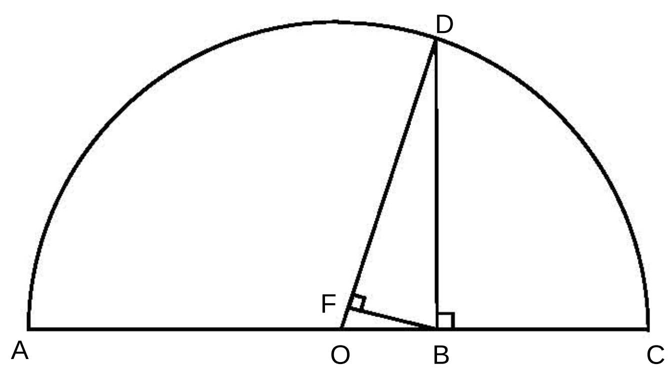
Recordemos ahora que un *segmento circular* es la región de un círculo comprendida entre un arco y su cuerda. Entonces de la última ecuación obtenemos:

$$A_{SECTOR\ OADB} - A_{SEGMENTO\ ADB} = A_{SEMICÍRCULO\ AEB} - A_{SEGMENTO\ ADB}$$

Por lo que

$$A_{\Delta AOB} = A_{LÚNULA\ AEB}$$

9. a)



Ya que **OD** es un radio de la semicircunferencia

$$OD = \frac{AB + CD}{2}$$

es decir, es la media aritmética.

Ya demostramos en el problema 4 que **DB** así construido es la media geométrica, es decir,

$$DB = \sqrt{AB \bullet BC}$$

Demostremos que **DF** es la media armónica de dichos segmentos.

El $\triangle ODB$ es semejante al $\triangle BDF$ ya que tienen un ángulo común, el $\angle D$, y ambos poseen un ángulo recto, por lo que el restante ángulo debe ser igual y los triángulos deben ser semejantes. De lo cual deducimos la siguiente proporciones:

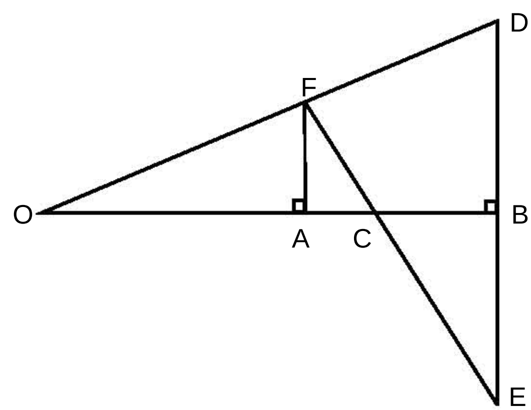
$$\frac{FD}{DB}=\frac{DB}{OD} \quad \Rightarrow \quad FD=\frac{DB^2}{OD}$$

Pero **DB** es la media geométrica de **AB** y **BC** y además **OD** es la media aritmética de los mismos segmentos por lo que

$$FD=\frac{AB\bullet BC}{(AB+BC)/2}=\frac{2AB\bullet BC}{AB+BC}$$

Por lo que el segmento **FD** es la media armónica de los segmentos **AB** y **BC**.

b)



Notemos que el $\triangle OFA$ y $\triangle ODB$ son semejantes ya que tienen cada uno un ángulo recto y un poseen un ángulo común por lo que sus tres ángulos son respectivamente iguales y por tanto semejantes. De lo cual concluimos las siguientes proporciones

$$\frac{OA}{OB}=\frac{AF}{BD}=\frac{FO}{DO}$$

Por otro lado, el $\triangle BEC$ también es semejante al $\triangle AFC$ ya que ambos poseen un ángulo recto y los ángulos **ECB** y **FCA** son opuestos por el vértice y por tanto iguales. Así las medidas de sus ángulos son todas iguales y los triángulos son semejantes, de esto obtenemos que

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BE}=\frac{FC}{EC}$$

Ahora bien, por construcción DB = BE por lo que $\frac{AF}{BD}=\frac{AF}{BE}$

De las tres últimas igualdades obtenemos:

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AC}{CB}$$

pero ya que AC = OC – OA y CB = OB – OC se cumple que

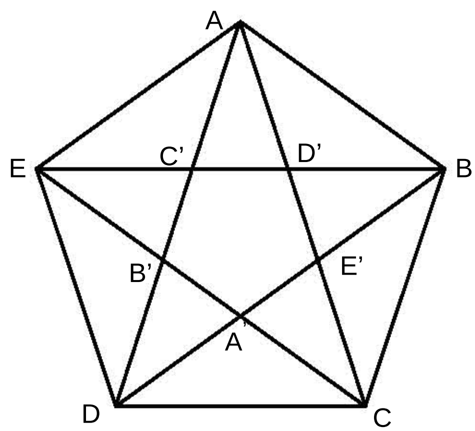
$$\frac{AO}{OB}=\frac{OC-OA}{OB-OC} \quad \Rightarrow \quad AO\bullet(OB-OC)=OB\bullet(OC-OA)$$
$$\Rightarrow \quad AO\bullet OB-AO\bullet OC=OB\bullet OC-OB\bullet OA$$
$$\Rightarrow \quad AO\bullet OB+OB\bullet OA=OB\bullet OC+AO\bullet OC \quad \Rightarrow \quad 2AO\bullet OB=OC(OB+OA)$$

de lo cual concluimos que

$$OC=\frac{2AO\bullet OB}{AO+OB}$$

Así **OC** es la media armónica de los segmentos **OA** y **OB**.

10. Como el pentágono **ABCDE** es regular se cumple que todos sus lados y sus ángulos son iguales por lo que los triángulos **ABC**, **CDE**, **BCD**, **DEA** y **EAB** son isósceles y congruentes entre sí, ya que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también igual. De lo cual concluimos que:



a) Los ángulos de la base de dichos triángulos miden lo mismo, entonces al restarle a cada ángulo del polígono estos ángulos iguales obtenemos que

$$\angle E'CA' = \angle A'DB' = \angle B'EC' = \angle C'AD' = \angle D'BE'$$

b) Los triángulos **BCE'**, **CDA'**, **DEB'**, **EAC'**, **ABD'**, son isósceles puesto que tienen dos ángulos iguales. Además son congruentes entre sí, ya que tienen dos ángulos respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos también igual, por lo que

$$E'C = CA' = A'D = DB' = B'E = EC' = C'A = AD' = D'B = BE'$$

y

$$\angle BE'C = \angle CA'D = \angle DB'E = \angle EC'A = \angle AD'B$$

Por ser lados y ángulos correspondientes de triángulos congruentes.

C) Los triángulos **CEB** y **ACE** son isósceles.

Entonces de A) y B) concluimos que

$$\Delta E'CA' \cong \Delta A'DB' \cong \Delta B'EC \cong \Delta C'AD' \cong \Delta D'BE'$$

por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también igual. Lo cual implica que

$$E'A' = A'B' = B'C' = C'D'' = D'E'$$

Por ser lados correspondientes de triángulos congruentes.

De B) concluimos:

$$\angle D'E'A' = \angle E'A'B' = \angle A'B'C' = \angle C'D'E' = \angle B'C'D'$$

por ser ángulos opuestos por el vértice, de ángulos iguales.

Por lo tanto **A'B'C'D'E'** es un pentágono regular.

Vamos a demostrar ahora que el triángulo **BCE** es semejante al triángulo **BCD'**

Dado que 108º = $\angle$D'E'A' por ser ángulo de un pentágono regular, entonces $\angle$BE'C = 108º' por ser opuesto por el vértice al ángulo anterior, y dado que ΔBE'C es isósceles esto implica que $\angle$CBE'= $\angle$BCE' = 36º.

Con un razonamiento análogo deducimos que los $\angle$DEB' y $\angle$AEC' miden también 36º y puesto que $\angle$AED = 108º por ser ángulo de un polígono regular, entonces $\angle$BEC = 36º De esto obtenemos que $\angle$BCD' = $\angle$CEB

Además **CBE** es ángulo común de los triángulos **BCE** y **BCD'** por lo que los terceros ángulos de ambos triángulos deben ser iguales y por tanto los triángulos **BCE** y **BCD'** son semejantes por lo que podemos establecer las siguientes proporciones

$$\frac{CE}{CD'} = \frac{BC}{BD'} = \frac{BE}{BC}$$

Por otro lado ya teníamos por C) que el triángulo **BEC** es isósceles por lo que el triángulo **BCD'** también es isósceles de donde

$$BC = CD'$$

Ya que son los lados correspondientes a los lados iguales del otro triángulo.

También por C) el triángulo **CAE** es isósceles, con

$$CE = AC$$

Y por B) ya teníamos que:

$$BD' = D'A$$

Sustituyendo estas tres igualdades en la proporción anterior tenemos

$$\frac{AC}{CD'} = \frac{CD'}{D'A}$$

con lo que nuestro teorema queda demostrado.

BIBLIOGRAFÍA

Eugene D. Nichols, William F.Palmer, John F. Schacht. *Geometría Moderna*. CECSA. México, 1992.

Edwin E. Moise, Floyd L. Downs. *Geometría Moderna*. Addison-Wesley Ibeoroamericana. Estados Unidos de América, 1986.

Stanley R. Clemens, Phares G. O'Daffer, Thomas J. Cooney. *Geometría con Aplicaciones y Soluciones de Problemas*. Addison-Wesley Ibeoroamericana. Estados Unidos de América, 1989.

Bruce E. Meserve, Max A. Sobel. *Introducción a las Matemáticas*. Reverte Ediciones. México, 2003.

Roger B. Nelsen. *Demostraciones sin Palabras.* Proyecto Sas. Reproducida por Talleres Estudiantiles de Ciencias UNAM.

Jorge Wentworth, David Eugenio Smith. *Geometría Plana y del Espacio*. Editorial Porrúa. México 1977.

Joaquín Ruiz Bastos. *Temas de Geometría*. Editorial UNAM. México.

Abelardo Guzmán Herrera. *Geometría y Trigonometría*. Publicaciones Cultural. México, 1993.

Felipe de Jesús Landaverde. *Geometría*. Editorial Progreso. México, 1997.

A. V. Pogorélov. *Geometría Elemental*. Editorial Mir. Moscú, 1994.

V. Lidiski y otros. *Problemas de Matemáticas Elemental*. Editorial Mir. Moscú, 1983.

Howard Eves. *Estudio de las Geometrías*. Editorial UTEHA. Tomo I. México, 1969.

Andrés Sestier. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Limusa. México, 1989.

B. L.Van Der *Waerden. Science Awakening*. Traducción al inglés de Arnold Dresden. Zürich,1954.

Dirk J. Struik. *Historia Concisa de la Matemática*. Instituto Politécnico Nacional. México, 1980.

Mariano Perero. *Historia e Historias de Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1994.

Fernando Fabián Hernández Velasco. *Problemario de Álgebra y Geometría*. CCH Oriente, UNAM. 1996.