UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PRUEBAS DE ESTRÉS: UNA PANORÁMICA GENERAL Y ALGUNOS MODELOS DE DISTRIBUCIONES HÍBRIDAS DE PÉRDIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA

CESAR GABRIEL ESPINOSA GARCIA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ RAMÓN RODRÍGUEZ MANCILLA

MÉXICO, D. F. 2006

PRUEBAS DE ESTRÉS: UNA PANORÁMICA GENERAL Y ALGUNOS MODELOS DE DISTRIBUCIONES HÍBRIDAS DE PÉRDIDA.

1. Datos del alumno
   Espinosa
   Garcia
   Cesar Gabriel
   56 12 99 62
   Universidad Nacional Autonoma de Mexico
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   093296689

2. Datos del tutor
   Dr
   Jose Ramon
   Rodríguez
   Mancilla

3. Datos del sinodal 1
   Mat
   Margarita Elvira
   Chavez
   Cano

4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Gabriel
   Casillas
   Olvera

5. Datos del sinodal 3
   M en I
   Erubiel
   Ordaz
   Aguilar

6. Datos del sinodal 4
   M en C
   Maria Antonieta
   Campa
   Rojas

7. Datos del trabajo escrito
   Pruebas de Estrés Una Panoramica General y Algunos Modelos de distribuciones
   Hibridas de Perdidas
   71 p
   2006

A Dios por haberme dado la oportunidad de existir.

A mis padres y a mi hermano por absolutamente todo ya que por ellos he llegado a este momento.

A mi director de tesis por todo su tiempo y esfuerzo con los que aprendí a perfeccionarme y buscar ser cada vez mejor.

A mis sinodales por su valioso tiempo y comentarios sin los cuales este trabajo no se hubiera podido terminar.

A mis jefes que me brindaron su apoyo incondicional en todo momento y a los cuales les profeso mi más profunda admiración.

A mis familiares y amigos, que siempre tuvieron no una sino miles de palabras de aliento para mí.

A ese ser tan especial que llego a mi vida y que la cambio para siempre.

A la UNAM que me ha dado la formación académica y personal que poseo y que me permitió ser parte de una de las mejores comunidades universitarias.

A Banco de México por darme la oportunidad de desarrollarme profesionalmente en una de las mejores instituciones del país .

A todos ustedes por su colaboración directa o indirecta en la elaboración de este trabajo

¡Muchas Gracias!

Contenido

Introducción

La administración de riesgos es una disciplina que busca entender y cuantificar el riesgo con el fin de mitigarlo. Dada la naturaleza de su estudio, esta disciplina combina arte, a través de la experiencia, buen juicio y técnica, al utilizar una amplia gama de herramientas matemáticas.

En las últimas dos décadas, la administración de riesgos ha adquirido gran auge debido a varias crisis financieras como las siguientes:

- La bancarrota del banco inglés *Barings*, debido a los malos y no supervisados, manejos de Nick Leeson, quien fuera uno de sus inversionistas más destacados.

- La devaluación del peso mexicano en diciembre de 1994, que trajo consigo grandes pérdidas para la mayoría de las instituciones financieras mexicanas y puso al descubierto la fragilidad del sistema financiero mexicano.

- Las pérdidas catastróficas por más de 1,700 millones de dólares del condado de Orange County (E.U.) debido a malas estrategias de inversión de su tesorero Bob Citron, como consecuencia de una fuerte alza en las tasas de interés en los Estados Unidos registrada ese año.

- El escándalo "Enron", la famosa empresa de energía que ocultó grandes pérdidas en sus estados financieros, lo cual ocasionó que el valor de sus acciones se desplomaran en cuestión de días, dando lugar a unas de las mayores bancarrotas en la historia de los Estados Unidos.

Paradójicamente, no obstante que estos eventos críticos han propulsado la administración de riesgos, gran parte de las herramientas metodológicas que se han desarrollado hasta el momento para cuantificar el riesgo se han enfocado a evaluarlo en condiciones “normales” de los mercados financieros.

Afortunadamente, existe un conjunto de metodologías que buscan evaluar la exposición al riesgo en condiciones de estrés: las Pruebas de Estrés. El uso de estas metodologías se ha propagado en los últimos años en el ámbito financiero mundial. Sin embargo, los resultados de estas pruebas se consideran, por lo general, de manera aislada a la valoración del riesgo en condiciones “normales”. Es por esta razón que recientemente se han realizado esfuerzos a fin de desarrollar una infraestructura integral de evaluación de riesgos que considere tanto condiciones de estrés como condiciones “normales”. Las distribuciones híbridas de probabilidad son una respuesta en esa dirección.

Esta tesis se dividió en tres partes:

- Una primera parte de preliminares en la que se presenta una breve introducción a la administración de riesgos y donde se estudia de manera formal la popular medida conocida como Valor en Riesgo, o VaR, señalando sus ventajas y, de manera más detallada, sus desventajas. Esto último con el fin de motivar la utilización de medidas alternativas de riesgos, como las Pruebas de Estrés;

- Una segunda parte que expone una panorámica global, aunque breve, de las Pruebas de Estrés estándares que son utilizadas, por lo general de manera aislada, en el medio financiero;

- Una tercera parte en la que se expone una metodología, cuya idea seminal fue dado por Berkowitz (1999), que busca integrar las Pruebas de Estrés a través de la determinación de distribuciones híbridas de pérdidas que "combinan" distribuciones de pérdida en condiciones "normales" y en condiciones de "estrés".

Capítulo 1

Preliminares

"La Administración de Riesgos es la obtención
de la información correcta para la persona correcta
en el momento correcto."
Gerald Corrigan
Expresidente de la Reserva Federal de Nueva York

1.1 ¿Qué es la Administración de Riesgos?

A través de la historia, el hombre siempre ha estado expuesto a situaciones que pueden implicar la pérdida de algún bien o de la vida misma. A esta posibilidad de pérdida se le denomina riesgo y el entendimiento de la naturaleza de éste ha sido siempre un tema crucial de estudio.

La comprensión de la naturaleza de cualquier riesgo depende del conocimiento que se tenga sobre los factores que puedan desencadenar la realización de la pérdida asociada a éste. De esta manera, mientras mayor sea el conocimiento que se tenga sobre los factores de riesgo, mayor será el entendimiento del riesgo asociado y, por lo tanto, mayor será la posibilidad de mitigarlo, mediante la posibilidad de restringir la incidencia de los factores de riesgo

La administración de riesgos se define como el conjunto de métodos, técnicas y herramientas que se utilizan para entender, cuantificar y mitigar, en lo posible, los riesgos asociados a cualquier toma de decisiones.

Por definición, el riesgo de cualquier decisión es la posibilidad de una pérdida asociada a ésta. Por lo anterior, la cuantificación del riesgo y, por lo tanto, la administración de riesgos, están íntimamente vinculadas a la teoría de probabilidades.

1.2 Historia de la Administración de Riesgos

Algunos de los primeros estudios serios de nociones de probabilidad se desarrollaron en el siglo XVI, durante la época del Renacimiento.

Girolamo Cardano (1500-1571), fue un prestigiado médico nacido en Milán, Italia, con gran afición a los juegos de azar (especialmente dados y las cartas). Cardano escribió el libro *Liber de Ludo Aleae* (Libro de Juegos de Azar), el cual desarrolla los principios de la teoría de la probabilidad. En esta obra, Cardano utilizó el término "probable" para referirse a eventos cuyo resultado es incierto. Por ello, Cardano es considerado como la primera persona que se refirió al riesgo en términos de probabilidades.

Otro italiano que analizó y escribió acerca de la Teoría de la Probabilidad fue

Galileo. El escrito más conocido de Galileo relacionado con este tema fue *Sopra le Scoperte dei Dadi* (Jugando a los dados); en él analiza la frecuencia de diferentes combinaciones y los posibles resultados al tirar los dados.

Blas Pascal, Pierre de Fermat y Chevalier de Mére, académicos contemporáneos franceses del siglo XVII, propusieron un método sistemático para medir la probabilidad. Los avances en Álgebra y Cálculo Diferencial e Integral que ocurrieron en los siglos XVII y XVIII propiciaron múltiples aplicaciones de la Teoría de la Probabilidad, desde la medición de riesgos en seguros e inversiones hasta temas relacionados con medicina y física. Es precisamente en esta época en que Abraham de Moivre propuso la estructura de la distribución de probabilidad normal y, con ésta, el concepto de desviación estándar; por su parte, Bernoulli incorporó en su Teoría de Decisiones un proceso sistemático para la toma de decisiones, basado en probabilidades, situación que dio lugar a lo que hoy se conoce como teoría de juegos e investigación de operaciones. También propuso la idea de que el grado de satisfacción que resulta de un aumento de riqueza es inversamente proporcional a la cantidad de bienes con que una persona cuenta.

En el siglo XVIII, el inglés Thomas Bayes aportó una nueva teoría de la probabilidad, demostrando cómo tomar mejores decisiones al incorporar nueva información a datos anteriores.

En 1875, Francis Galton descubrió el concepto de "regresión a la media". Este se refiere a que, a pesar de las fluctuaciones en los precios que se pueden observar en los mercados organizados y de que los activos que cotizan en dichos mercados pueden estar sobrevaluados o subvaluados, siempre habrá una fuerza natural que presione a los precios al valor promedio historicamente observado o a la "restauración de la normalidad". Galton transformó el concepto de probabilidad estático en uno dinámico.

En 1952, Harry Markowitz, premio Nobel de economía, desarrolló la teoría de portafolios y el concepto de que, a medida que se añaden activos a una cartera de inversión, el riesgo (medido a través de la desviación estándar) disminuye como consecuencia de la diversificación.

Entre 1970 y 2000 la proliferación de nuevos instrumentos financieros ha sido notable, asi como el incremento en la volatilidad de las variables que afectan el precio de estos instrumentos, tales como tipos de cambio, tasas de interés, etc. En este período destaca en particular el desarrollo de productos derivados (futuros, opciones y swaps). Destacan también dos eventos que ocurrieron en la primavera de 1973. El primero de estos eventos ocurrió en abril de ese año, cuando el Chicago Board of Options Exchange (CBOE) comenzó operaciones en el Chicago Board Of Trade (CBOT). Aunque el principio fue un poco incierto con tan solo 911 contratos durante el primer día, que representaban un valor de acciones subyacentes de un poco más de 3.5 millones de dólares, y con no más de 57,000 contratos en promedio hasta finales de 1997, al pasar los años fue incrementándose notablemente el número de operaciones.

El segundo de estos eventos es la publicación del primer volumen del *Journal of Political Economy*, que contenía el trabajo desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes, el cual daba finalmente una respuesta completa al problema de valuación de opciones[1].

Estos dos importantes hechos fueron un parteaguas en el mundo financiero moderno, ya que con éstos comenzaría lo que conocemos hoy en día como instrumentos derivados.

La creciente complejidad de los mercados e instrumentos financieros ha demandado formas alternativas de la varianza para medir el riesgo. De esta manera, se han propuesto varias medidas de riesgo. En 1994 el banco Estadounidense J.P Morgan propuso, en su documento técnico denominado *Riskmetrics* [2] el concepto de "Valor en Riesgo", o VaR, como modelo para medir cuantitativamente los riesgos de mercado en instrumentos financieros o portafolios con varios tipos de instrumentos. El VaR es la medida de riesgo más popular y, de hecho, la estándar en muchos mercados financieros.

Hoy en día existe un mejor entendimiento del riesgo, nuevos estándares (paradigmas) en la medición cuantitativa de los mismos y se han diseñado nuevas estructuras organizacionales con el fin de llevar a cabo investigación encaminada a desarrollar modelos matemáticos y técnicas especializadas al respecto. Además, los avances en materia tecnológica, tales como las computadoras, han contribuido enormemente al buen desarrollo de la administración de riesgos, debido a la cantidad de datos que manejan y que pueden procesar en un tiempo muy corto.

A continuación se describe la medida de riesgo que propulsó en gran medida la administración de riesgos, el Valor en Riesgo.

[1] Véase el artículo de Fisher Black y M. Scholes denominado: *The pricing of options and Corporate Liabilities*, publicado por primera vez en el Journal of Political Economy, Vol. 81 (1973)

[2] Este documento se puede obtener de manera gratuita de la pagina de internet de Riskmetrics (www.riskmetrics.com).

1.3 Valor en Riesgo

Una pregunta que surge continuamente en muchas instituciones financieras es ¿cuánto dinero se podría perder de hoy a mañana y con qué probabilidad? Actualmente, existe una medida de riesgo que permite responder a esta pregunta y, aunque su capacidad para medir el riesgo ha sido ampliamente discutida, se ha convertido en la herramienta de administración de riesgos más popular en el ámbito financiero mundial. Esta medida de riesgo es conocida como Valor en Riesgo (VaR [3]).

1.3.1 Definición

El VaR es una medida de riesgo que estima la máxima pérdida que se puede experimentar en una posición financiera, para un horizonte de tiempo dado y con un cierto nivel de confianza. Típicamente, el VaR se estima sobre un horizonte de un día y con 95% de confianza. Esto significa que existe un 5% de probabilidad de que, en el lapso de un día, la pérdida de la posición financiera sobrepase el umbral de pérdida definido por el VaR.

Formalmente, el VaR de una posición financiera X, sobre un horizonte temporal T y un nivel de confianza α, es el percentil de orden α *más pequeño* de la distribución de la función de pérdidas asociada a la posición X. En términos matemáticos, el VaR se expresa como:

$$VaR_{\alpha,T}(X) = \inf\{x \mid P[l(X) \leq x] \geq \alpha\}$$

[3] Por sus siglas en inglés, *Value at Risk.*

donde $l(\cdot)$ es la función de pérdidas considerada y P es la medida de probabilidad asociada a $l(\cdot)$. Nótese que esta definición de VaR es aplicable a cualquier función de distribución. En la práctica, son muy comunes los cálculos del VaR que parten del supuesto de una distribución normal. Para ejemplificar este último punto, la Figura 1.1 muestra de manera gráfica la estimación del VaR para tres casos representativos.

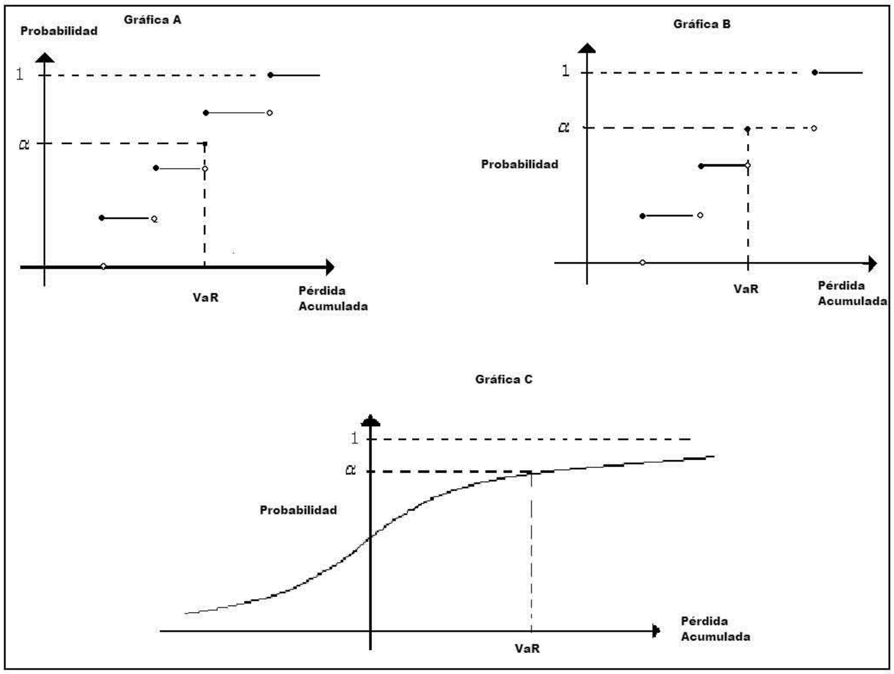

Figura 1.1: **Cálculo del VaR para distintas distribuciones de pérdidas:** Las gráficas A y B corresponden a funciones de distribución discretas, mientras que la gráfica C corresponde a una función de distribución normal.

Como se mencionó con anterioridad, el VaR es la medida de riesgo estándar en gran parte de los mercados financieros; por lo tanto, es un parámetro ampliamente aceptado para comparar el riesgo de distintas posiciones. Adicionalmente, bajo el supuesto de normalidad, el VaR es relativamente fácil de calcular y cumple con algunas de las propiedades "deseables" para una medida de riesgo. Dichas propiedades se especifican en la siguiente sección.

1.3.2 Desventajas Conceptuales

El VaR es la medida de riesgo más popular y, en muchos casos, la medida de riesgo estándar en los mercados financieros. Sin embargo, el VaR presenta desventajas conceptuales importantes. Para entender estas desventajas, es necesario especificar primero a qué nos referimos por propiedades "deseables" de una médida de riesgo. Estas propiedades están esencialmente contenidas en el concepto de medida coherente de riesgo. A continuación se presenta la definición de medida de riesgo y se exponen las propiedades que la hacen "coherente".

Definición 1 ***Medida de Riesgo***. *Sea* $\widetilde{\underset{\sim}{X}}$ *un conjunto de posiciones financieras y* ρ *una función,* $\rho : \widetilde{\underset{\sim}{X}} \to \mathbb{R}$. *Entonces,* ρ *es una medida de riesgo si y sólo si satisface las siguientes propiedades:*

i) ***Monotonía:***

Sean X *y* $Y \in \widetilde{\underset{\sim}{X}}$, *tal que* $X \leq Y$ *c.s. , entonces,* $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

ii) ***Invariante bajo Translación:***

Sea $X \in \widetilde{\underset{\sim}{X}}$ *y* $m \in \mathbb{R}$, *entonces,* $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

La monotonía establece que, dados dos activos financieros, el de mayor valor en cualquier escenario será siempre el que tendrá un menor riesgo. Lo anterior se debe a que presenta una menor probabilidad de sufrir una pérdida de la misma magnitud.

La invariabilidad bajo translación establece que, si se añade a la posición un monto de efectivo[4] m, el riesgo disminuye. Más aún, el monto del decremento en el riesgo corresponde a la cantidad de efectivo añadido. El efecto inverso ocurre cuando se disminuye un monto m de efectivo a la posición X. Cabe resaltar que, si el monto de efectivo aumentado es igual al riesgo de la posición, entonces se neutraliza el riesgo. Matemáticamente, esto se deduce de la siguiente manera:

Para $m = \rho(\underline{\overline{X}})$, se tiene que

$$\rho(\underline{\overline{X}} + \rho(\underline{\overline{X}})) = \rho(\underline{\overline{X}}) - \rho(\underline{\overline{X}}) = 0.$$

Definición 2 ***Medida de Riesgo Coherente.*** *Sea ρ una medida de riesgo. Entonces ρ es una medida de riesgo coherente si y sólo si satisface las siguientes dos propiedades* [5]*:*

i) ***Convexidad:***

Sean X y Y $\in \underline{\overline{X}}$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces

$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

ii) ***Homogeneidad Positiva:***

Sea $\mu \geq 0$ y $X \in \underline{\overline{X}}$, entonces $\rho(\mu X) = \mu\rho(X)$.

[4] Con la finalidad de darle un sentido financiero más realista a esta propiedad, se puede suponer que m se puede invertir a la tasa libre de riesgo r, i.e $m = \alpha(1+r)$, donde α es un monto inicial.

[5] En algunos textos se establece la subaditividad en lugar de la convexidad. Estas dos propiedades son equivalentes bajo el supuesto de homegeneidad positiva (Ver Apéndice 1).

La propiedad de convexidad indica que a mayor diversificación, existe un menor riesgo. Una medida de riesgo típica que cumple con esta propiedad es la volatilidad. Sin embargo, el VaR es una medida de riesgo que no satisface esta propiedad.

La propiedad de homogeneidad positiva afirma que el riesgo es proporcional al valor de la posición. Por ejemplo, suponga que un inversionista posee un bono A para el cual tiene un valor en riesgo de R. Si el inversionista duplica su inversión en dicho bono, entonces el valor en riesgo asociado a su nueva posición también se duplica. Es decir, el riesgo será igual a $2R$.

El VaR satisface la propiedad de homogeneidad positiva pero, como se mencionó anteriormente, no siempre cumple la propiedad de convexidad. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1 *Considere un inversionista con una riqueza inicial $W_0 > 0$ que desea invertir en dos bonos corporativos con las siguientes características:*

- *Ambos tienen un plazo a vencimiento de T años.*

- *La tasa de rendimiento del bono i, r_i, satisface que $0 \leq r_i \leq 1$, para $i = 1, 2$.*

- *La probabilidad de moratoria de ambos bonos es $(1 - p)$, $p \in (0, 1)$.*

El inversionista considera dos estrategias posibles:

i) Invertir toda su riqueza en uno de los bonos; o

ii) Invertir 50 % de su riqueza en uno de ellos y 50% en el otro.

El inversionista desea conocer el valor en riesgo de cada una de estas estrategias para un nivel de confianza α que satisface $p^2 < \alpha < p$. El inversionista considera las siguientes variables aleatorias que describen el valor a vencimiento de cada uno de los bonos:

$$X_T^i = \begin{cases} W_0(1+r_i) & p \\ 0 & 1-p \end{cases} \qquad para \quad i = 1, 2.$$

Por lo tanto,

i) Si el inversionista invierte toda su riqueza en sólo uno de estos bonos corporativos, su patrón de pérdidas [6] *está dado por*

$$-\Delta X_T^i = \begin{cases} -W_0 r_i & p \\ W_0 & 1-p \end{cases}.$$

Consecuentemente, dado que $\alpha < p$, el Valor en Riesgo de esta estrategia es $-W_0 r_i \leq 0$. Es decir, la peor pérdida que podría suceder, dado el nivel de confianza α, es de hecho una ganancia (Véase la Figura 1.2).

[6] Al ser una distribución de pérdidas, éstas estarán en términos positivos, por lo que las cifras negativas representan ganacias.

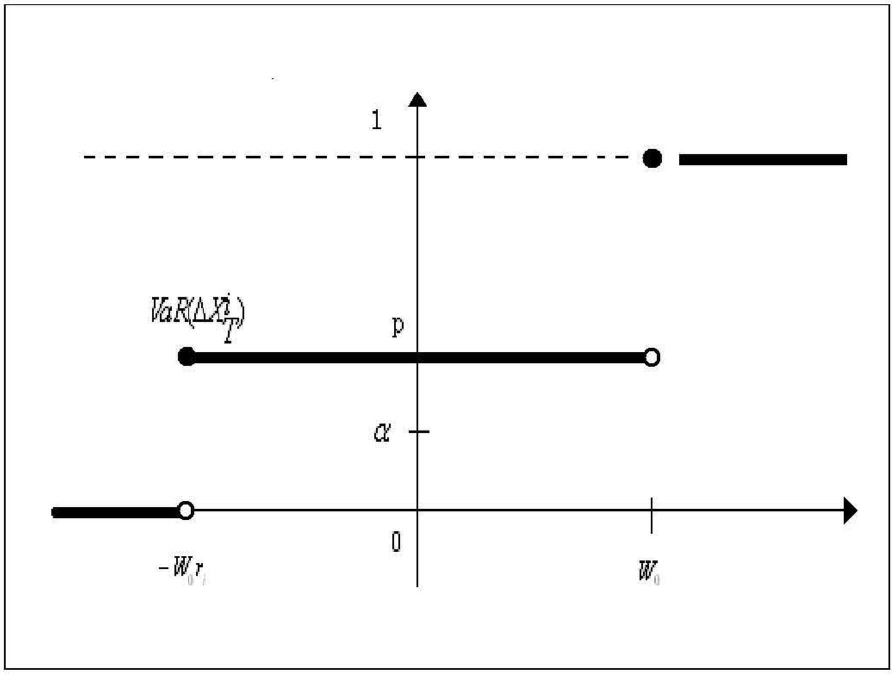

Figura 1.2: **Distribución de Pérdidas (Ejemplo 1.1*i*).**

ii) Si el inversionista invierte el mismo porcentaje en cada uno de los bonos corporativos, el valor de la posición en la fecha de vencimiento T está dado por

$$Y_T = \frac{1}{2}X_T^1 + \frac{1}{2}X_T^2 = \begin{cases} W_0 + \frac{W_0}{2}(r_1 + r_2) & p^2 \\ \frac{W_0}{2}(1 + r_1) & p(1-p) \\ \frac{W_0}{2}(1 + r_2) & p(1-p) \\ 0 & (1-p)^2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la distribución de pérdidas está dada por

$$-\Delta Y_T = \begin{cases} -\frac{W_0}{2}(r_1 + r_2) & p^2 \\ -\frac{W_0}{2}(r_1 - 1) & p(1-p) \\ -\frac{W_0}{2}(r_2 - 1) & p(1-p) \\ W_0 & (1-p)^2 \end{cases}$$

de donde

$$P(\Delta Y_T \leq 0) = 2p(1-p) + (1-p)^2 = 1 - p^2 > 1 - \alpha$$

Por lo tanto,

$$VaR(Y_T) = \frac{W_0}{2}(1 - \max(r_1, r_2)) > 0 \qquad (\textit{Véase la Figura } 1.3)$$

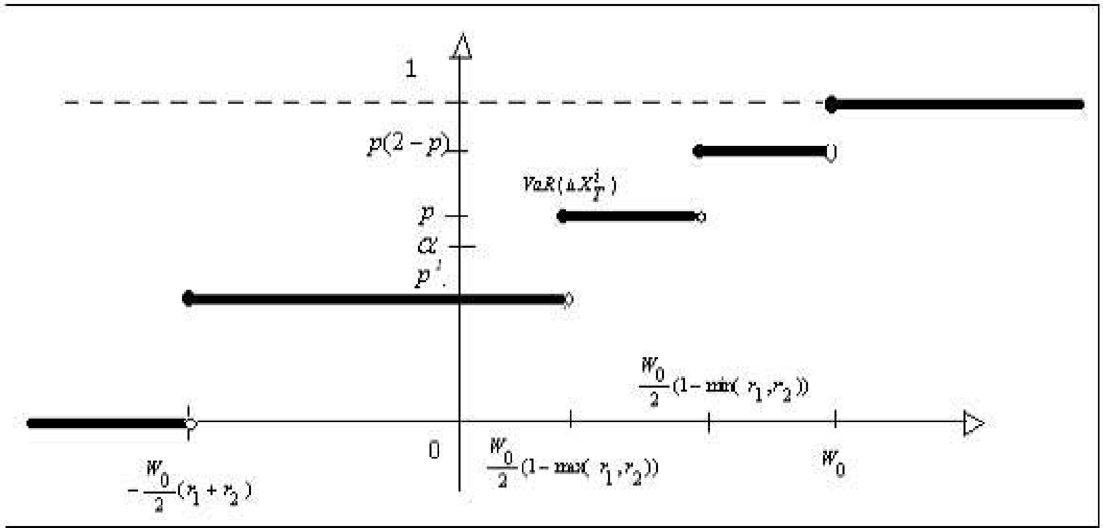

Figura 1.3: **Distribución de Pérdidas (Ejemplo 1.1*ii*).**

De lo anterior, se puede decir que

$$VaR_{\alpha}(Y_T) > \frac{1}{2}VaR_{\alpha}(X_T^1) + \frac{1}{2}VaR_{\alpha}(X_T^2) \tag{1.1}$$

Por lo tanto, el VaR no es una medida de riesgo convexa para la distribución de pérdidas considerada.

El hecho de que el VaR no sea una función de riesgo convexa significa que, en la práctica, esta medida de riesgo puede penalizar la diversificación.

Otro problema del VaR es que puede presentar discontinuidad respecto al nivel de confianza. Este fenómeno se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2 *Suponga que la institución financiera ABC conoce la verdadera distribución de pérdidas de su cartera. Dicha distribución es la que se muestra en la*

Figura 1.4. Por otro lado, los organismos regulatorios establecen un requerimiento mínimo de capital correspondiente al VaR de su cartera, para un nivel de confianza $\alpha = 0.95$*, el cual en este caso se supone igual a \$500,000 (*$VaR_{0.95} = \$500,000$*).*

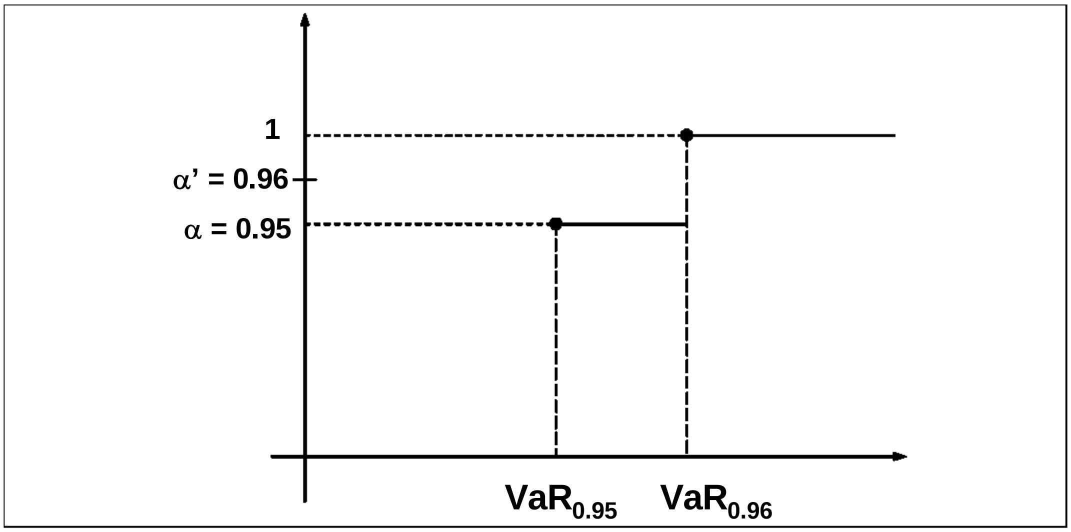

Figura 1.4: **Distribución de Pérdidas (Ejemplo 1.2).**

Supongamos que existe un cambio restrictivo en las regulaciones en cuanto al nivel de confianza: ahora se exige que α *sea* 0.96*. Entonces, como puede observarse en la Figura 1.4, para el caso de la institución ABC este pequeño aumento en el nivel de confianza implica un VaR de \$2,000,000. Este cambio abrupto en el requerimiento de capital podría implicar que la institución tenga problemas para satisfacer dicha regulación.*

Como se puede observar en el ejemplo anterior, en el caso de una distribución discontinua, una variación muy pequeña en el nivel de confianza α puede resultar en una variación significativa en el VaR. Esto es muy relevante en la práctica, debido a que la forma usual de aproximar la distribución verdadera es estimando la distribución empírica, la cual es discontinua.

1.4 Medidas y Metodologías Alternativas de Riesgo

Con objeto de complementar la información de riesgo provista por el VaR, se han propuesto otras medidas y metodologías. Entre estas metodologías se encuentran las siguientes:

Pruebas de Estrés (Stress Tests). Al considerar las pérdidas posibles sobre una cartera de inversión usualmente surgen preguntas tales como, "¿qué pasaría si sucediera un escenario como la crisis del peso mexicano de 1994?". Para responder a esta pregunta es posible utilizar Pruebas de Estrés. Esta metodología pretende predecir las pérdidas monetarias que se generarían sobre un portafolio de inversión cuando se presentan condiciones extremas. Estas pérdidas pueden ser ocasionadas por crisis financieras, desastres naturales, ambientes políticos adversos, etc. En estos casos el resultado usualmente está por arriba de la cifra estimada por el VaR. En el siguiente capítulo se describe esta metodología con mayor precisión.

Pruebas de Calibración (BackTesting). Para las instituciones y autoridades regulatorias es importante verificar periódicamente que el modelo de riesgo que se utiliza sea el adecuado. Tanto el grupo de los 30 (G-30) como el Comité de Basilea recomiendan realizar pruebas periódicas de calibración (sobre el horizonte de tiempo, la distribución supuesta, las volatilidades utilizadas, etc.) para la estimación del VaR y, en caso de ser necesario, realizar los ajustes pertinentes. Existen diferentes metodologías y quizás la más conocida es la prueba basada en excedentes de frecuencias. En esta metodología se realiza un conteo de los días en que se ha excedido el VaR (digamos s). Por otro lado, el modelo de riesgo predice que el número de excedentes será de p. Entonces, el objetivo es saber si el número de frecuencias s es *aceptablemente* cercano a p. Para lograr esto, es posible realizar una prueba binomial[7] y, con esto, rechazar o no la hipótesis nula, lo que nos indicará si se está midiendo de manera correcta el riesgo.

CVaR (Conditional VaR) [8]**.** Es una medida de riesgo que describe qué tan grandes son las pérdidas, en promedio, cuando se excede un nivel de VaR. Matemáticamente el CVaR se define como la esperanza condicional de las pérdidas de una cartera, dado que éstas son mayores o iguales al VaR. Es decir,

$$CVaR_\alpha = E[-\Delta V \mid -\Delta V \geq VaR_\alpha]$$

1.5 Objetivos

Entre las metodologías mencionadas anteriormente destacan las llamadas Pruebas de Estrés. La idea básica de esta metodología es considerar escenarios poco probables o "raros" y evaluar las consecuencias financieras en caso de que éstos ocurran. No obstante la simplicidad de la idea esencial de esta metodología, no existe un consenso respecto a su definición formal. Más aún, existe poca literatura respecto a este tipo

[7] Es posible utilizar otro tipo de pruebas también, pero la prueba binomial es la más conocida.

[8] También conocido en la práctica como *Expected Shortfall, Mean Excess Loss o Tail VaR.* Referisrse a Rockafellar & Uryasev(2002) para las diferencias sutiles entre estos términos.

de pruebas dentro del ámbito financiero mexicano. Es por estas razones que este trabajo de tesis se ha fijado los siguientes objetivos:

- Describir una panorámica amplia de las distintas maneras de definir e implantar las Pruebas de Estrés.

- Considerar una forma específica de definir esta metodología que parezca razonable; para despúes llevar a cabo un análisis y finalmente desarrollarla para un ejemplo real.

- Sugerir aspectos que deberían considerarse para una definición formal y general de las Pruebas de Estrés.

Se pretende, además, definir algunos de los conceptos necesarios para el desarrollo de estos objetivos. Finalmente, se busca que este trabajo de tesis sirva para ayudar a la divulgación de la metodología de Pruebas de Estrés.

Capítulo 2

Pruebas de Estrés

"Ninguna técnica analítica, por más sofisticada
que sea, podrá reemplazar la experiencia
y el buen juicio en el manejo de riesgos."

JP Morgan

2.1 Introducción

Si bien es cierto que no existe una técnica analítica que pueda sustituir la experiencia y el buen juicio, también es verdad que éstos deben complementarse con herramientas analíticas para poder tener un panorama más completo del riesgo y, por ende, tener una base más sólida para una mejor manera de administrarlos. El conjunto de técnicas conocidas como Pruebas de Estrés [1] es uno de los instrumentos que resulta de mayor utilidad para mejorar los sistemas de administración de riesgo.

[1] *Stress Testing.*

De manera genérica, el concepto de Pruebas de Estrés se refiere a *las diversas técnicas utilizadas por instituciones financieras, con el objeto de medir su vulnerabilidad potencial ante eventos excepcionales, pero probables.* Por lo tanto, por definición, las Pruebas de Estrés involucran la selección de eventos excepcionales y la asignación de probabilidades para cada uno de estos eventos. Sin embargo, ninguna de estas dos tareas es fácil y, en la práctica, la mayor parte de las instituciones financieras se han abocado únicamente a la selección de eventos excepcionales.

En el año 2000, el Comité del Sistema Global Financiero estableció un grupo de trabajo en Macro Pruebas de Estrés [3]. La investigación de este grupo de trabajo obtuvo una descripción general del diseño, la implantación y el rol de las Pruebas de Estrés en más de veinte instituciones financieras [2] activas a nivel internacional.

Adicionalmente, este grupo de trabajo obtuvo una clasificación general de los diferentes tipos de Pruebas de Estrés que se utilizan actualmente en diversas instituciones financieras. A continuación se expone esta clasificación (Ver Figura 2.1):

[2] Entre estas instituciones se encuentran varios bancos comerciales europeos, e incluso algunos bancos centrales.

CLASIFICACIÓN DE PRUEBAS DE ESTRÉS			
Tipos de Pruebas de Estrés	**Subcategorías**	**Descripción**	**Ejemplo**
Prueba Simple de Sensibilidad		Escenario donde se aumento o se disminuye en cierto porcentaje uno o varios factores de riesgo.	±10 Puntos base en la curva
Análisis de Escenarios	Escenarios Históricos	Escenarios que ya ocurrieron en algún momento.	Crisis del peso Mexicano 1994
	Escenarios Predictivos o Hipotéticos	Escenarios que, a juicio del administrador de riesgos, podrían ocurrir.	Aumento de 5 puntos base en las tasas junto con depreciación del peso en 10%
Método de Pérdida Máxima		Combinación de Escenarios que produciría la pérdida más extrema.	
Teoría de Valores Extremos		Escenarios que utilizan probabilidades y suponen funciones de distribución distintas a la normal.	Método de Berkowitz

Figura 2.1: **Clasificación de Pruebas de Estrés.**

A continuación se da una descripción más detallada de cada una de estas categorías:

I. **Prueba Simple de Sensibilidad**: Comprenden aquellas pruebas que miden el impacto que tendrían ciertos cambios predefinidos de un único factor de riesgo sobre el valor de una posición financiera. Por ejemplo, en el caso de un portafolio de divisas, se puede analizar el impacto de cambios porcentuales en el valor de alguna divisa particular.

II. **Análisis de Escenarios:** Considera aquellas pruebas en las que se especifican escenarios extremos o excepcionales, ya sea que estos hayan ocurrido (escenarios históricos) o que puedan ocurrir (escenarios hipotéticos) (Mina & Xiao (2001))[6].

- *Los Escenarios Históricos* son episodios pasados que representaron una catástrofe en el mercado financiero que nos interesa analizar. Una ventaja de esta técnica es que la selección de escenarios resulta menos arbitraria, con respecto al caso de escenarios hipotéticos.

- *Los Escenarios Hipotéticos* son aquellos que, aunque nunca han sucedido, se piensa que podrían suceder. Usualmente, se busca que estos escenarios sean coherentes, es decir, se asignan valores a las distintas variables financieras de tal manera que tengan sentido desde el punto de vista económico. Por ejemplo, si se supone un movimiento en tasas de interés, se debe suponer también un movimiento correspondiente en el tipo de cambio, para que exista un equilibrio económico.

III. **Método de Pérdida Máxima.** Este método busca identificar la combinación potencialmente "más dañina" de las variaciones en los valores de los factores de riesgo considerados.

IV. **Teoría de Valores Extremos.** La Teoría de Valores Extremos (TVE) es una rama de la teoría de la Probabilidad que se aboca a la modelación de eventos extremos, es decir, de aquellos eventos que ocurren cuando una pérdida toma valores en la cola de la distribución de pérdidas.

Dadas las catástrofes financieras y naturales que han ocurrido recientemente [3], las Pruebas de Estrés han cobrado una mayor importancia a nivel mundial. Prueba

[3] Ver Capítulo 1, sección 1.2 "Historia de la Administración de Riesgos".

de ello es que organismos internacionales como el BIS (*Bank for International Settlements*) han buscado promover el uso de ciertas Pruebas de Estrés estándar. A continuación se delinea el marco internacional de referencia de las Pruebas de Estrés.

<u>Marco Internacional de Referencia</u>

En 1996 el Comité de Basilea de Supervisión Bancaria [4](*The Basle Committee on Banking Supervision*) señaló la necesidad de implantar nuevos programas de administración de riesgos, que incluyeran Pruebas de Estrés. El objetivo era complementar los programas hasta ese entonces implantados para cumplir con los requerimientos establecidos por entidades regulatorias[5] sobre el capital de riesgo.

De la misma manera, el Comité de Basilea exhortó a las instituciones financieras para que evalúen sus carteras bajo escenarios basados en hechos del pasado en los que existieron eventos extremos, así como a reportar los resultados obtenidos a organismos regulatorios. El Comité indicó que: *"Los Bancos deben someter sus carteras a una serie de escenarios de estrés simulados y proporcionar los resultados obtenidos a las autoridades supervisoras. Esos escenarios pueden incluir pruebas de la cartera actual durante períodos de turbulencia significativa incorporando tanto los grandes movimientos de precio, como la aguda reducción de la liquidez asociada con esos eventos; por ejemplo, el crack bursátil de 1987, la crisis del Sistema Europeo de Tipos de Cambio (ERM) de 1992 y 1993, o la caída en el mercado de bonos en el primer trimestre de 1994.*

[4] *"Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk"*, sección B.5 (1996.)

[5] Textualmente el Cómite señaló *"Los bancos que usan métodos de modelos internos para cumplir con los requerimentos de capital de riesgo de mercado deben tener en cuenta un programa riguroso y comprensivo de pruebas de estrés. [...].*

Otro de los objetivos del Comité de Basilea fue impulsar la investigación referente a Pruebas de Estrés, "personalizando" los escenarios para adaptarlos a las características particulares de cada cartera. El Comité de Basilea señala que *"Además de los escenarios dictados por las autoridades supervisoras[...], el banco debe desarrollar también sus propias Pruebas de Estrés, al identificar los escenarios más adversos para su cartera específica"*

Finalmente, el Comité de Basilea sugiere la implantación de medidas proactivas que sirvan para reducir la exposición al riesgo de las instituciones. Textualmente, el Comité señala: *"si las Pruebas de Estrés revelan una vulnerabilidad particular a un conjunto dado de circunstancias, los reguladores deberían esperar que el banco tome acciones rápidas para administrar esos riesgos apropiadamente (por ejemplo, llevando a cabo un programa de cobertura contra ese resultado o reduciendo el tamaño de su exposición al riesgo)".*

En resumen, el Comité de Basilea destacó la relevancia de las Pruebas de Estrés, señalándolas como un complemento importante para medir el riesgo, además del VaR.

En la siguiente sección se exponen algunos de los usos de las Pruebas de Estrés, que algunas de las instituciones financieras más grandes a nivel mundial hacen (BIS, 2000).

2.2 Aplicaciones Más Populares de las Pruebas de Estrés

Como se señaló en la sección anterior, las Pruebas de Estrés sirven para medir la vulnerabilidad de las instituciones financieras ante eventos excepcionales. A continuación se exponen brevemente sus aplicaciones más populares (BIS, 2000):

- **Riesgo de financiamiento o de Liquidez.** Una de las aplicaciones más comunes de las Pruebas de Estrés es la valuación del riesgo de financiamiento. Concretamente, las Pruebas de Estrés se utilizan para estimar el costo máximo de financiamiento de una institución en caso de que ocurra algún evento desfavorable (e.g., el efecto que pudiera tener una noticia pública negativa sobre la institución). Las juntas directivas de las instituciones utilizan esta estimación del costo de financiamiento para instrumentar procedimientos que mitiguen el costo a niveles tolerables.

- **Análisis de Pérdidas Extremas.** Una aplicación importante de las Pruebas de Estrés es complementar las medidas de riesgo que dan poca importancia a la posibilidad de pérdidas que, aunque poco probables, pueden ser cuantiosas.

- **Verificación de supuestos del modelo de riesgo utilizado.** Con el objetivo de simplificar la evaluación del riesgo, los administradores de riesgos hacen supuestos respecto a la distribución de las pérdidas o sobre la naturaleza de los instrumentos que conforman sus carteras. El costo de esta simplificación puede ser la subestimación del riesgo. Esto puede suceder cuando, por ejemplo, la distribución de pérdidas utilizada para valorar el riesgo tiene una menor curtosis que la distribución de pérdidas observada. Una manera de evaluar la subestimación potencial del riesgo es llevando a cabo Pruebas de Estrés, es decir, estas últimas nos pueden servir para medir el "riesgo del modelo".[6]

- **Determinación de límites de exposición al riesgo.** En muchas instituciones financieras las Pruebas de Estrés se utilizan para determinar límites máximos de exposición al riesgo para las operaciones que llevan a cabo los *traders* u operadores. La determinación de límites máximos de operación puede resultar muy útil, tomando en cuenta que usualmente se compensa de manera generosa a los *traders* con base en estrategias que proporcionan altos rendimientos pero que son riesgosas.

En las siguientes dos secciones se exponen e ilustran -de manera breve- dos tipos estándares de Pruebas de Estrés: Las Pruebas Simples de Sensibilidad y el Análisis de Escenarios.

2.3 Pruebas Simples de Sensibilidad

Como se mencionó en la introducción de este capítulo, las pruebas simples de sensibilidad intentan determinar el impacto del cambio de algún factor de riesgo específico sobre el valor de un portafolio. Para tal efecto, se cuantifica el valor de la cartera

[6] Se han desarrollado modelos estadísticos que explícitamente incorporan hipótesis acerca de cómo la volatilidad y la correlación varían a través del tiempo. Sin embargo, la utilidad de estos modelos en el contexto de administración de riesgos aún no ha sido probada. Esto se debe particularmente a la dificultad que existe para modelar eventos considerados como "raros".

ante cambios en el factor de riesgo analizado, manteniendo constante el valor de los otros factores de riesgo. A continuación se ejemplifican este tipo de pruebas:

Ejemplo 2.1 *(Ejemplo Base)*

Suponga que un inversionista cuenta con 12,000 pesos y que desea invertir dicho capital, durante un lapso de un año de manera equitativa en las siguientes tres divisas: dólar americano, dólar canadiense y libra esterlina. El inversionista desea saber la pérdida, en pesos, en la que podría incurrir su cartera si se presentara una depreciación generalizada de cada una de estas divisas contra el peso en el horizonte de tiempo considerado.

Para dar una respuesta al inversionista, se puede realizar una prueba simple de sensibilidad. Para tal efecto, Suponga que, al día de hoy, los tipos de cambio y las tasas de interés anuales correspondientes son:

Tipos de Cambio en t_0	
GBP/MXN	*0.0510*
CAD/MXN	*0.1098*
USD/MXN	*0.0902*

Divisa	***Tasas Libor en*** t_0
GBP	*4.86%*
CAD	*2.57%*
USD	*3.09%*

Los tipos de cambio esperados para fin de año son:

Tipos de Cambio Esperados	
GBP/MXN	*0.0420*
CAD/MXN	*0.1015*
USD/MXN	*0.0890*

Bajo el supuesto de que estos tipos de cambio esperados prevalezcan al final del horizonte de tiempo considerado, el valor de la cartera sería:

$$\begin{aligned} & \frac{4,000(0.0510)(1+4.86\%)}{(0.0420)} + \frac{4,000(0.1098)(1+2.57\%)}{(0.1015)} + \frac{4,000(0.0902)(1+3.09\%)}{(0.0890)} \\ = \; & 13,711 \textit{ pesos} \end{aligned}$$

Para determinar la pérdida esperada suponemos que, de manera simultánea, cada una de las divisas se deprecia en un 10% con respecto a lo esperado y que las tasas de interés se mantienen sin cambios. Es decir, consideramos el siguiente escenario de tipos de cambio:

Tipos de Cambio Esperados	
GBP/MXN	*0.0528*
CAD/MXN	*0.1117*
USD/MXN	*0.0979*

Bajo este escenario, el valor de la cartera sería el siguiente:

Valuación de la cartera (Escenario 1)	
Divisa	**Valor de Mercado ($)**
GBP	*$4,051*
CAD	*$4,035*
USD	*$3,799*
TOTAL	*$11,885*

Por lo tanto, la pérdida total bajo el escenario supuesto es de $\$13,711 - \$11,885 = \$1,825$ *pesos.*

Ejemplo 2.2 *Tomando como base el ejemplo anterior, ¿qué sucedería si en lugar de una depreciación generalizada de las divisas consideradas frente al peso, se presentara una caída simultánea de 50 Puntos Base (PB)* [7] *en las tasas de interés? Para responder a esta pregunta, suponemos que:*

Tasas Libor (Escenario 2)	
GBP	*4.36%*
CAD	*2.07%*
USD	*2.59%*

[7] 1 PB=0.01%=0.0001

Entonces:

Valuación de la cartera (Escenario 2)	
Divisa	***Valor de Mercado ($)***
GBP	*$5,069*
CAD	*$4,417*
USD	*$4,159*
TOTAL	*$13,645*

(2.1)

Por lo tanto, la pérdida esperada es de $66 pesos (ver el cuadro siguiente)

Pérdida Esperada (Escenario 2)	
Divisa	***Resultado ($)***
GBP	*-24*
CAD	*-22*
USD	*-20*
TOTAL	***-66***

Es importante notar que la elección de los escenarios en los dos ejemplos anteriores es totalmente arbitraria. Esta manera de elegir escenarios es un tanto riesgosa: Si bien podría elegirse un escenario basado en una opinión fuertemente fundamentada en la experiencia, también podría hacerse la selección de un escenario poco realista.

Por otro lado, aún cuando la elección del escenario para una variable esté razonablemente fundamentada, es poco factible que los valores de las demás variables involucradas no varíen. Por esta razón, es necesario considerar escenarios en los que todas las variables involucradas cambien de manera coherente. Es decir, que los cambios obedezcan a comportamientos históricos observados o a comportamientos esperados bajo alguna teoría o premisa que los rija. A fin de ejemplificar esta idea, se retoma el ejemplo base y se propone una forma de generar un escenario conjunto más coherente.

Ejemplo 2.3 *Un primer paso para generar escenarios conjuntos es analizar los movimientos conjuntos de las variables involucradas que observan un comportamiento en la misma dirección y las que no. Una forma de llevar a cabo este análisis es estimando una matriz de correlaciones para los rendimientos de las variables en cuestión. Por ejemplo, para el caso de nuestro ejemplo base, la matriz de correlaciones estimada* [8] *es:*

	GBP/MXN	*CAD/MXN*	*USD/MXN*	*Libor GBP*	*Libor CAD*	*Libor USD*
GBP/MXN	1	0.4653	0.3154	−0.1141	0.1580	−0.0065
CAD/MXN	0.4653	1	0.4117	−0.0140	0.1266	−0.0132
USD/MXN	0.3154	0.4117	1	0.0060	0.1257	−0.0130
Libor GBP	−0.1141	−0.0140	0.0060	1	−0.1033	0.2078
Libor CAD	0.1580	0.1266	0.1257	−0.1033	1	0.0711
Libor USD	−0.0065	−0.0132	−0.0130	0.2078	0.0711	1

[8] Para el cálculo de esta matríz se utilizaron rendimientos diarios históricos en el período comprendido del 30-04-2004 hasta el 29-04-2005.

De esta matriz se observa lo siguiente:

- *Los factores de riesgo que presentan la correlación positiva más alta, son los tipos de cambio GBP/MXN con CAD/MXN, GBP/MXN con USD/MXN, así como CAD/MXN con USD/MXN. Esto quiere decir que, en promedio, estas parejas de variables se mueven en la misma dirección.*

- *Los factores de riesgo que presentan una mayor correlación negativa son la tasa Libor de GBP contra el tipo de cambio GBP/MXN y contra CAD/MXN. Esto significa que, en promedio, estas parejas de variables se mueven en direcciones contrarias.*

Las observaciones anteriores nos dan una idea de cómo se "mueven" conjuntamente los factores de riesgo. A partir de estas observaciones se pueden generar escenarios más verosímiles, como el siguiente:

Escenario 3	
GBP/MXN	*depreciacion 30% (GBP)*
CAD/MXN	*depreciación 25% (CAD)*
USD/MXN	*depreciación 20% (USD)*
Libor GBP	*disminución del 10% en la tasa.*
Libor CAD	*aumento del 15% en la tasa.*
Libor USD	*disminución del 5% en la tasa.*

Suponiendo que ocurriera el escenario anterior, el valor de la cartera del inversionista sería el siguiente:

Valuación de la cartera (Escenario 3)	
Divisa	***Valor de Mercado (pesos)***
GBP	*$3,212*
CAD	*$3,295*
USD	*$3,431*
TOTAL	*$9,937*

(2.2)

Por lo que, la pérdida esperada asociada a este escenario es de 3,763 pesos (ver cuadro siguiente).

Pérdida Esperada (Escenario 3)	
Divisa	***Resultado ($)***
GBP	*-$1,182*
CAD	*-$1,144*
USD	*-$748*
TOTAL	*-$3,773*

2.4 Análisis de Escenarios

La metodología de análisis de escenarios consiste en evaluar el impacto en el valor de la cartera dado un escenario específico de los factores de riesgo involucrados. Para tal efecto, usualmente se selecciona algún escenario histórico, es decir, algún escenario que ya haya sucedido en el pasado (generalmente alguna crisis financiera). Sin embargo, en muchas ocasiones se escoge también algún escenario hipotético con base en alguna opinión experta. A continuación se ejemplifican estas dos prácticas comunes.

2.4.1 Escenarios Históricos

Para la elección de un escenario histórico, normalmente se selecciona alguna crisis financiera reciente o relevante.

Ejemplo 2.4 *Considere la cartera definida en el Ejemplo Base (Ejemplo 3). Nos interesa conocer el impacto en el valor de la cartera que ocurriría en caso de que sucediera una crisis financiera similar a crisis pasadas (e.g. "la Crisis Rusa de 1998", "la Crisis Asiática de 1997", "la Crisis del Peso Mexicano de 1994", etc.). Considere la Crisis Rusa de 1998, cuyo período más álgido fue el comprendido entre el 3 de Agosto y el 9 de Septiembre de 1998. En la siguiente tabla se presentan los rendimientos observados en este período para cada uno de los factores de riesgo considerados.*

Cambio Porcentual de los Factores de Riesgo	
GBP/MXN	*apreciación 15.57% (GBP)*
CAD/MXN	*apreciación 12.96% (CAD)*
USD/MXN	*apreciación 15.44% (USD)*
Libor GBP	*-11 PB en la tasa.*
Libor CAD	*+66 PB en la tasa.*
Libor USD	*-3 PB en la tasa.*

Tomando en cuenta estos factores, el valor de la cartera sería:

Valuación de la cartera (Escenario 4)	
Divisa	**Valor de Mercado (pesos)**
GBP	*$4,963*
CAD	*$4,744*
USD	*$4,875*
TOTAL	*$14,582*

Finalmente, el resultado de nuestra Prueba de Estrés considerando el escenario histórico de la crisis rusa es el siguiente:

*Prueba de Estrés (**Escenario 4**)*	
Divisa	***Resultado ($)***
GBP	*-131*
CAD	*306*
USD	*696*
TOTAL	*871*

(2.3)

Es decir en un escenario similar a la Crisis Rusa se generaría una ganancia de 871 pesos.

2.4.2 Escenarios Hipóteticos

Siempre es recomendable complementar la selección de escenarios históricos con escenarios que, aunque no han ocurrido, podrían suceder potencialmente. Estos escenarios *hipóteticos* se pueden determinar de distintas maneras, utilizando desde métodos totalmente subjetivos hasta metodologías estadísticas o matemáticas sofisticadas. En cualquier caso, la determinación de este tipo de escenarios debe hacerse de tal manera que los valores de los factores de riesgo considerados sean consistentes entre sí. Una metodología estándar para lograr lo anterior es la que se describe a continuación.

Escenarios Predictivos

Esta metodología consiste en asignar valores a un subconjunto del conjunto de factores de riesgo considerado y predecir el resto. Específicamente, se plantea de la siguiente manera: Suponga que se tienen n factores de riesgo. De éstos, m factores

($m < n$) se predeterminan con base en algún criterio (subjetivo o estadístico) y reciben el nombre de *factores de riesgo centrales (FC)*. Los $n - m$ factores restantes, que se denominan *factores de riesgo periféricos (FP)*, se determinarán de manera consistente con los factores de riesgo centrales.

Una manera estándar de determinar los factores periféricos con base en los factores centrales es utilizando valores esperados condicionales. Esto es, se determina el valor de cada factor de riesgo periférico como su valor esperado dados los valores predeterminados de los factores de riesgo centrales. No obstante que en un principio se podría utilizar cualquier distribución de probabilidad del vector de factores de riesgo -de manera idónea, puede ser la distribución empírica de todos los factores de riesgo-, usualmente se opta por suponer que esta distribución es normal. Lo anterior se debe a que, bajo este supuesto, se tienen fórmulas explícitas que además, se pueden interpretar fácilmente. De hecho, si se supone que el vector de factores de riesgo (denotado por FR) se distribuye como un vector normal multivariado, con media μ y matriz de covarianzas Σ, entonces la distribución condicional de los factores de riesgo periféricos, dados los factores de riesgo centrales, es otra distribución normal multivariada con parámetros μ^* y Σ^*. Matemáticamente, si

$$FR = \begin{bmatrix} FP \\ FC \end{bmatrix} \sim N(\mu,\ \Sigma)$$

entonces

$$(FP|FC) \sim N(\mu^*,\ \Sigma^*)$$

donde

$$\mu^* = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(FC - \mu_2) \tag{2.4}$$

y

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$E[FP|FC] = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(FC - \mu_2)$$

Ejemplo 2.5 *Considere el mismo Ejemplo Base. Calcularemos las tasas de interés esperadas dada una depreciación del* 10% *en cada una de las divisas incluidas en nuestra cartera de inversión. Para tal efecto, se estimó la siguiente matriz de covarianzas.*

Matriz de Covarianzas de los factores de riesgo						
	GBP	***CAD***	***USD***	***MXNGBP***	***MXNCAD***	***MXNUSD***
GBP	0.0004%	-0.0001%	0.0002%	-0.0001%	0.0000%	0.0000%
CAD	-0.0001%	0.0013%	0.0001%	0.0003%	0.0003%	0.0002%
USD	0.0002%	0.0001%	0.0025%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
MXNGBP	-0.0001%	0.0003%	0.0000%	0.0029%	0.0014%	0.0007%
MXNCAD	0.0000%	0.0003%	0.0000%	0.0014%	0.0030%	0.0009%
MXNUSD	0.0000%	0.0002%	0.0000%	0.0007%	0.0009%	0.0015%

Figura 2.2: **Matríz de Covarianzas**.

Se tiene además el siguiente vector de rendimientos cambiarios esperados:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.059\% \\ 0.087\% \\ 0.397\% \end{pmatrix}$$

De la matriz 2.2, y utilizando la expresión (2.4), se obtienen las siguientes tasas esperadas.

$$\begin{aligned} E[\mathbf{FP}|\mathbf{FC}] &= \begin{pmatrix} 0.059\% \\ 0.087\% \\ 0.397\% \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0001\% & 0.0000\% & 0.0000\% \\ 0.0003\% & 0.0003\% & 0.0002\% \\ 0.0000\% & 0.0000\% & 0.0000\% \end{pmatrix} \cdot \\ & \begin{pmatrix} 44,375 & -17,704 & -9,420 \\ -17,704 & 46,941 & -19,902 \\ -9,420 & -19,902 & 84,832 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0.0143\% \\ 0.0207\% \\ -0.0130\% \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10\% \\ 10\% \\ 10\% \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0.258\% \\ -1.659\% \\ 0.217\% \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera, el valor de nuestra cartera es:

Valuación de la cartera (Escenario 5)	
Divisa	***Valor de Mercado (pesos)***
GBP	*$3,814*
CAD	*$3,728*
USD	*$3,749*
TOTAL	***$11,291***

de donde

Prueba de Estrés ***(Escenario 5)***	
Divisa	***Resultado ($)***
GBP	*-1,280*
CAD	*-710*
USD	*-430*
TOTAL	***-2,420***

Es decir, la pérdida esperada asociada a este escenario es de 2,420 pesos.

2.5 Desventajas de las Metodologías Estándares

En este capítulo se ha expuesto una breve panorámica de las Pruebas de Estrés, desde su marco normativo hasta sus usos actuales. Asimismo, se han ejemplificado dos de las principales metodologías para llevar a cabo estas pruebas.

Las Pruebas de Estrés tienen dos grandes desventajas. La primera, y la más importante, es que a las pérdidas extremas estimadas con estas metodologías no se le asigna, por lo regular, una probabilidad de ocurrencia motivo por el cual no se pueden valorar estas pérdidas en relación a las pérdidas esperadas en condiciones "normales". La segunda desventaja es la subjetividad en la elección de escenarios. Esta última desventaja es ineludible y lo único que se puede hacer al respecto es buscar siempre el mayor sustento posible para dicha selección. Respecto a la primer desventaja, el problema central a resolver es cómo valorar integralmente los resultados obtenidos a través de las Pruebas de Estrés. A este respecto ha habido ya varios esfuerzos por lograr esta valuación integral de riesgos. Entre estos esfuerzos destaca la metodología delineada por Berkowitz (1999). El siguiente capítulo expone esta metodología así como una serie de propuestas y ejemplos concretos para implantarla en la práctica.

Capítulo 3

Metodología de Berkowitz

"La información que tienes no es la información que quieres.

La información que quieres no es la información que necesitas.

La información que necesitas no es la información que obtienes.

La información que obtienes cuesta más de lo que quieres pagar."

Peter Berstein, "*Against the Gods*", *p.*202.

En el capítulo anterior se señalaron las dos desventajas más importantes de las Pruebas de Estrés:

i) La subjetividad en la elección de escenarios de estrés.

ii) La falta de una valoración probabilística de los escenarios de estrés considerados.

La elección de escenarios de estrés es siempre subjetiva, independientemente del tipo de escenario (histórico o hipotético) Así como de la metodología que se utilice para tal efecto. Sin embargo, recientemente se han desarrollado varias propuestas metodológicas para acotar, esta subjetividad en lo posible. Entre estas propuestas destaca la realizada por Breuer (2000), que considera una medida de riesgo alternativa conocida como Pérdida Máxima (MaxLoss), como criterio de selección de escenarios.

Esta medida de riesgo, se define como la máxima pérdida posible en la que puede incurrir una determinada cartera, dado un conjunto de escenarios. La Pérdida Máxima es, bajo ciertas condiciones sobre el conjunto de escenarios, una medida coherente de riesgo. Breuer propone condiciones particulares bajo las cuales la pérdida máxima es coherente y, sugiere criterios específicos con base en esta medida de riesgo.

La falta de una valoración probabilística de los escenarios de estrés considerados es tal vez la desventaja más relevante de las Pruebas de Estrés. Esto se debe a la dificultad que existe para asignar una probabilidad de ocurrencia al evento de estrés, así como la de combinar dicha probabilidad con la distribución de pérdidas en condiciones "normales". Entre estas propuestas destaca el trabajo realizado por Berkowitz (1999), quien propone derivar una densidad integral de pérdidas utilizando algún criterio para asignar valores a la probabilidad de ocurrencia del evento de estrés suponiendo una forma particular para la distribución condicional de pérdidas, dado que el evento de estrés ocurre.

Notación:

Con el fín de exponer la metodología de Berkowitz de una manera clara, utilizaremos la siguiente notación:

θ : Posición Financiera.

P_θ : Valor de la posición θ.

$\underline{\overline{X}}$: Vector de factores de riesgo.

$\underline{\overline{Y}}_\theta$: Vector de pérdidas asociado a la posición θ.

$f_{\underline{\overline{X}}}(x)$: Densidad de $\underline{\overline{X}}$.

$g_{\underline{\overline{Y}}}(y)$: Densidad de $\underline{\overline{Y}}_\theta$.

Observaciones:

Obsérvese que θ, P_θ, $\underline{\overline{X}}$ y $f_{\underline{\overline{X}}}(x)$ determinan la densidad $g_{\underline{\overline{Y}}}(y)$. De manera gráfica

$$\begin{tikzcd} \underline{\overline{X}} \arrow[r, "P_\theta"] & \underline{\overline{Y}} \arrow[d] \\ f_{\underline{\overline{X}}} \arrow[u] & g_{\underline{\overline{Y}}} \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: **Relación entre $f_{\underline{\overline{X}}}$ y $g_{\underline{\overline{Y}}}$.**

De los cuatro elementos mencionados $[\theta, P_\theta, \underline{\overline{X}}, f_{\underline{\overline{X}}}(x)]$, el que determina de manera preponderante el comportamiento de un portafolio es la función de densidad de los factores de riesgo[1] $f_{\underline{X}}(x)$. Mientras mejor se estime o aproxime la densidad $f_{\underline{X}}$, mejor será la estimación de la función de densidad $g_{\underline{Y}}(y)$.

3.1 Descripción de la metodología

Una práctica común al realizar Pruebas de Estrés es considerar, por separado, una densidad $f_{\underline{X}}$ en condiciones normales, y una densidad $f^*_{\underline{X}}$ en condiciones de estrés. Es decir, se obtienen primero medidas de riesgo considerando una densidad de pérdidas $g_{\underline{Y}}$, generada a partir de $f_{\underline{X}}$, y despúes se hace lo mismo pero considerando una densidad $g^*_{\underline{Y}}$ derivada de $f^*_{\underline{X}}$. De esta manera, se obtienen dos conjuntos distintos y desconectados de medidas de riesgo que son consideradas para la valoración del riesgo. Berkowitz (1999) propone considerar una sola función de densidad integral $\widetilde{f}_{\underline{X}}$, que combine a $f_{\underline{X}}$ y $f^*_{\underline{X}}$, y que de la cual se derive una sola densidad $\widetilde{g}_{\underline{Y}}$, para generar a partir de ella un sólo conjunto de medidas de riesgo.

Aunque Berkowitz (1999) se concentra principalmente a obtener la densidad integral de los factores de riesgo, también señala algunos puntos que considera importantes para la determinación de $f^*_{\underline{X}}$. Berkowitz propone obtener $f^*_{\underline{X}}$ *perturbando* la densidad $f_{\underline{X}}$ de tal manera que $f^*_{\underline{X}}$ considere al menos uno de los sigientes casos:

[1] Cabe mencionar que en condiciones de estrés, sería razonable analizar el comportamiento del portafolio ante cambios en el modelo de valuación P_θ. Sin embargo, en este trabajo sólo se consideran cambios en $f_{\underline{X}}$.

- La ocurrencia de eventos que $f_{\underline{X}}$ considera como no probables.

- Una mayor o menor verosimilitud de ocurrencia de algunos eventos respecto a $f_{\underline{X}}$.

- Cambios en los parámetros de $f_{\underline{X}}$ (medias, volatilidades, correlaciones, etc).

- Cambios estructurales.

Una vez que las densidades $f_{\underline{X}}$ y $f^*_{\underline{X}}$, han sido determinadas, se estima la probabilidad β, de que los factores de riesgo se comporten de acuerdo a la distribución $f^*_{\underline{X}}$. De esta manera, se define la densidad integral, ó distribución híbrida, $\widetilde{f_{\underline{X}}}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}}_{\underline{X}}(x) = \begin{cases} f_{\underline{X}}(x), & \text{con probabilidad } (1-\beta). \\ \\ f^*_{\underline{X}}(x), & \text{con probabilidad } \beta. \end{cases} \tag{3.1}$$

La determinación de β puede hacerse de manera subjetiva, de acuerdo a alguna opinión experta, o bien en función de algún otro criterio.

Si en vez de uno se consideran varios escenarios de estrés, la definición de la densidad integral de los factores de riesgo $\widetilde{f_{\underline{X}}}$ se puede extender de la siguiente manera:

$$\widetilde{f}_{\underline{X}}^{\boldsymbol{\beta}}(x) = \begin{cases} f_{\underline{X}}(x), & \text{con probabilidad } 1 - \sum_{i=1}^{N} \beta_i. \\ \\ f_{\underline{X}}^{*,i}(x), & \text{con probabilidad } \beta_i, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

donde N es el número de escenarios de estrés que se estén considerando (por ejemplo, el número de "crisis" que se estén considerando) y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$.

En la siguiente sección se desarrollan varios ejemplos para ilustrar la metodología descrita.

3.2 Ejemplos

Ejemplo 3.1 *Considere a un inversionista que cuenta con un capital en dólares y que desea invertirlo en acciones de CEMEX, denominadas en pesos, y en una canasta de divisas conformada por dólares canadienses (CAD) y libras esterlinas (GBP). Concretamente, el inversionista desea invertir su capital, de manera equitativa, en acciones de CEMEX, CAD y GBP.*

Con el fin de determinar el riesgo de su portafolio, el inversionista desea tomar en cuenta una distribución de pérdidas que considere tanto períodos "normales" como períodos de estrés. Para tal efecto, el inversionista considera los rendimientos observados de cada uno de los activos de su portafolio del 02 de febrero del 2005 al 24 de enero del 2006, así como los rendimientos observados durante la crisis del peso *mexicano, ocurrida aproximadamente entre el 28 de noviembre y el 28 de diciembre de 1994.*

En términos probabilísticos el inversionista desea combinar la densidad de rendimientos diarios asociado al Período 2005 ($\underline{f}_X$) con la densidad correspondiente a la crisis del peso mexicano ($\underline{f}_X^*$). Para aplicar la metodología de Berkowitz, se supone que tanto $\underline{f}_X$ como $\underline{f}_X^*$ son normales, y que sus parámetros se estiman a través de las medias, varianzas y covarianzas muestrales que a continuación se presentan:

- *Parámetros en condiciones "normales":*

$$\mu = \begin{bmatrix} CEMEX \\ CAD \\ GBP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.22\% \\ 0.03\% \\ -0.02\% \end{bmatrix} \quad y \quad \sum = \begin{bmatrix} 0.0302\% & 0.0016\% & 0.0006\% \\ 0.0016\% & 0.0024\% & 0.0010\% \\ 0.0006\% & 0.0010\% & 0.0028\% \end{bmatrix}$$

- *Parámetros en condiciones de estrés:*

$$\mu^* = \begin{bmatrix} -3.55\% \\ -0.10\% \\ 0.03\% \end{bmatrix} \quad y \quad \sum{}^* = \begin{bmatrix} 0.8747\% & 0.0039\% & 0.0172\% \\ 0.0039\% & 0.0005\% & -0.0004\% \\ 0.0172\% & -0.0004\% & 0.0023\% \end{bmatrix}$$

Para calcular la distribución híbrida, se siguen los siguientes pasos:

1.- Se genera una variable uniforme (0,1), digamos η.

2.- Si $\eta < \beta$, *entonces se genera un vector aleatorio a partir de la densidad* $f^*_{\underline{\overline{X}}}$. *En caso contrario, si* $\eta \geq \beta$, *entonces se genera un vector aleatorio a partir de la densidad* $f_{\underline{\overline{X}}}$.

Este procedimiento se repite un número predeterminado de veces (en el caso particular se hicieron 1,000 repeticiones). El conjunto de valores así generados se distribuyen de acuerdo a $f_{\underline{\overline{X}}}$. *En la siguiente gráfica se muestran las densidades híbridas obtenidas de esta manera.*

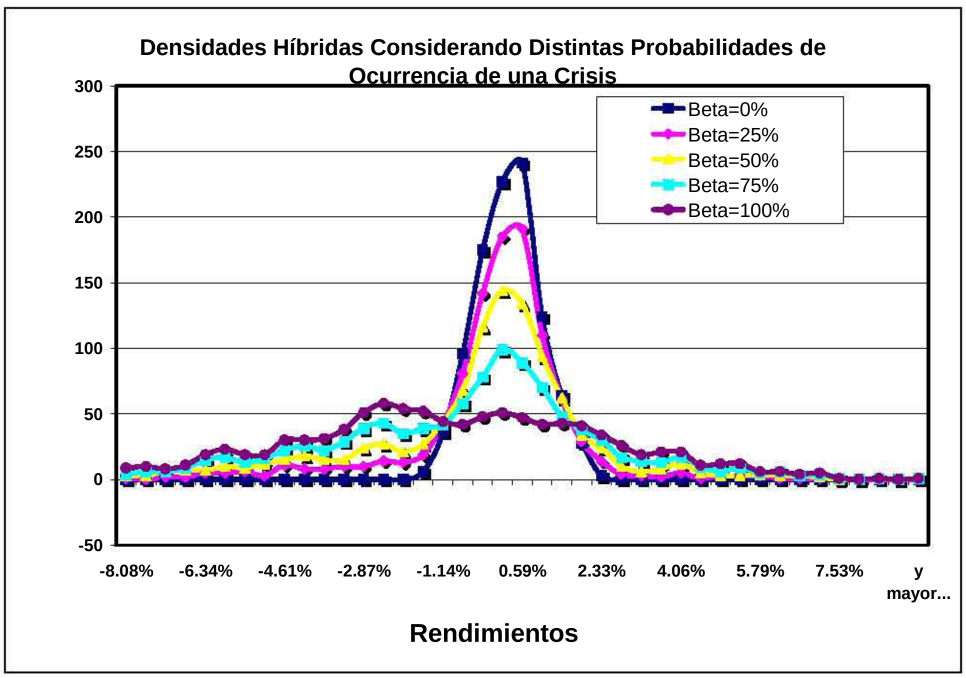

Figura 3.2: **Densidades Híbridas (Ejemplo 3.1)**

A partir de esta gráfica se pueden hacer las siguientes observaciones:

- *La gradualidad de la convergencia de una densidad híbrida que no considera el evento de estrés (i.e., $\beta = 0\%$) a una densidad híbrida que sólo considera el evento de estrés (i.e., $\beta = 100\%$).*

- *Nótese que la convergencia de $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{0\%}$ a $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{100\%}$ no es proporcional. Es decir, los cambios de $\widetilde{f}_{\underline{X}}$ no son proporcionales respecto a cambios en β.*

- *Las densidades híbridas $\widetilde{f}^{\beta}_{\underline{X}}$, para $\beta = 25\%$, 50% y 75%, "aparentan" ser normales. Sin embargo, no lo son. Para verificar esto, se presenta la siguiente gráfica que muestra el coeficiente de asimetría y la curtosis de $\widetilde{f}^{\beta}_{\underline{X}}$ para cada β considerada.*

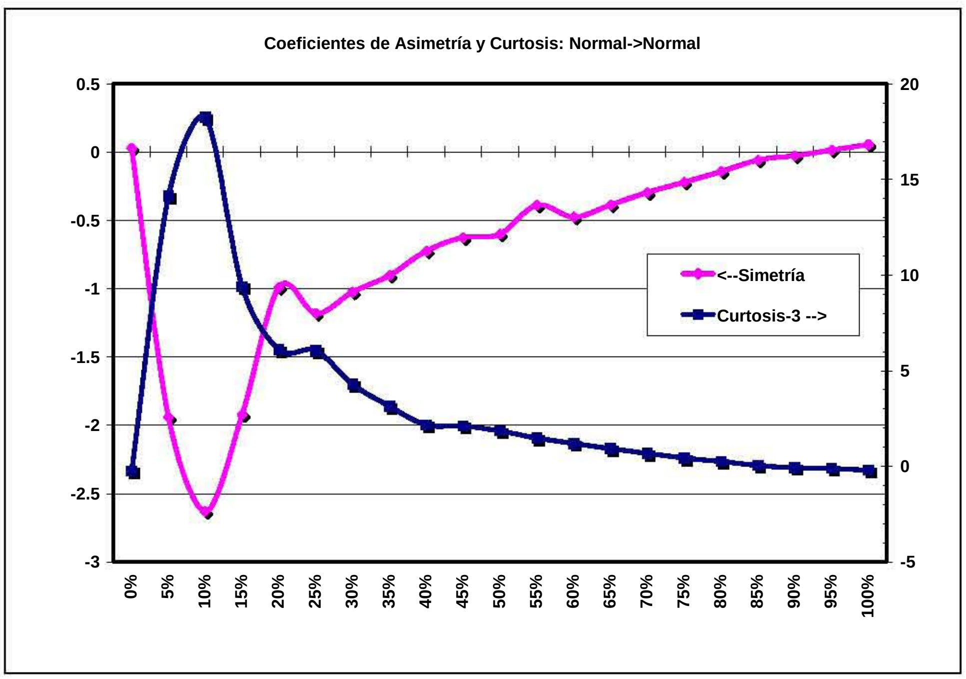

Figura 3.3: **Asimetría y Curtosis (Ejemplo 3.1).**

De la gráfica anterior se observa lo siguiente:

- *El coeficiente de asimetría y la curtosis-3 se anulan para* $\beta = 0\%$ *y* $\beta = 100\%$. *Esto es de esperarse dado que* $\beta = 0\%,\ 100\%$ *corresponden, por suposición, a distribuciónes normales.*

- *El rango de valores de* β *para el que el coeficiente de asimetría y la curtosis alcanzan su máximo corresponde, apróximadamente, al intervalo* $[5\%, 15\%]$.

El inversionista piensa que existe una probabilidad del 5% de que suceda una crisis. Por lo tanto, considera la densidad híbrida $\widetilde{f}^{5\%}_{\underline{X}}$ *para determinar sus medidas de riesgo. De esta manera estima el VaR asociado a un 97% de confianza igual a 1.75%. Es decir, el inversionista podría perder hasta 1.75% del valor de su portafolio.*

En el ejemplo anterior, se supone, que tanto en condiciones "normales" como en condiciones de estrés, la distribución de pérdidas es normal. No obstante lo anterior, la combinación híbrida no se distribuye de manera normal.

El siguiente ejemplo toma como base el ejemplo anterior. Sin embargo, a diferencia de este, se supone que las pérdidas bajo condiciones de estrés se distribuyen de acuerdo a una distribución Weibull. La elección de esta distribución es totalmente arbitraria y busca únicamente ejemplificar el caso en que se consideren distribuciones distintas a una distribución normal.

Ejemplo 3.2 *Supongamos que las pérdidas en condiciones estrés se distribuyen de acuerdo a una distribución Weibull* [2] *con los siguientes parámetros* $\lambda = 0.003$ *y* $k = 0.7$. *Por lo tanto,*

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda\Gamma(1+\frac{1}{k}) = 3.80\% \\ \sigma^2 &= \lambda^2\Gamma(1+\frac{2}{k}) - \mu^2 = 0.31\% \end{aligned}$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$.

De manera análoga al ejemplo anterior se obtiene la distribución híbrida asociada con distintos valores de β. *Estas distribuciones se gráfican en la Figura 3.4.*

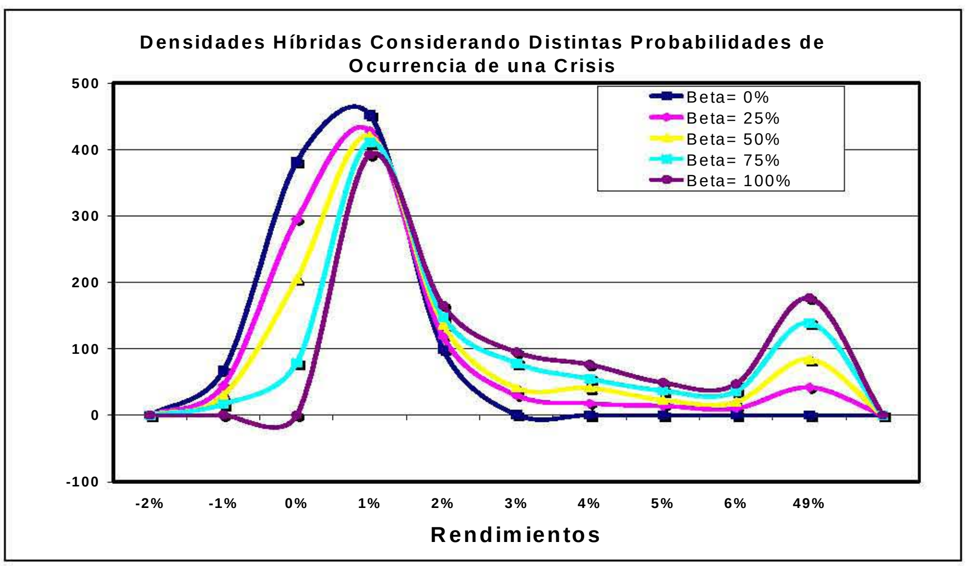

Figura 3.4: **Densidades Híbridas (Ejemplo 3.2)**

[2] Consultar, por ejemplo, "Statistical Inference" de George Casella y Roger L. Berger.

De la gráfica 3.4, se hacen las siguientes observaciones:

- *Convergencia gradual de la densidad de condiciones normales a la densidad de condiciones de estrés.*

- *La convergencia de* $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{0\%}$ *a* $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{100\%}$ *no es proporcional a los cambios de* β*.*

De la misma manera que en el ejemplo 3.1, se calculó el coeficiente de asimetría y la curtosis de $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{\beta}$ *para cada* β *considerada.*

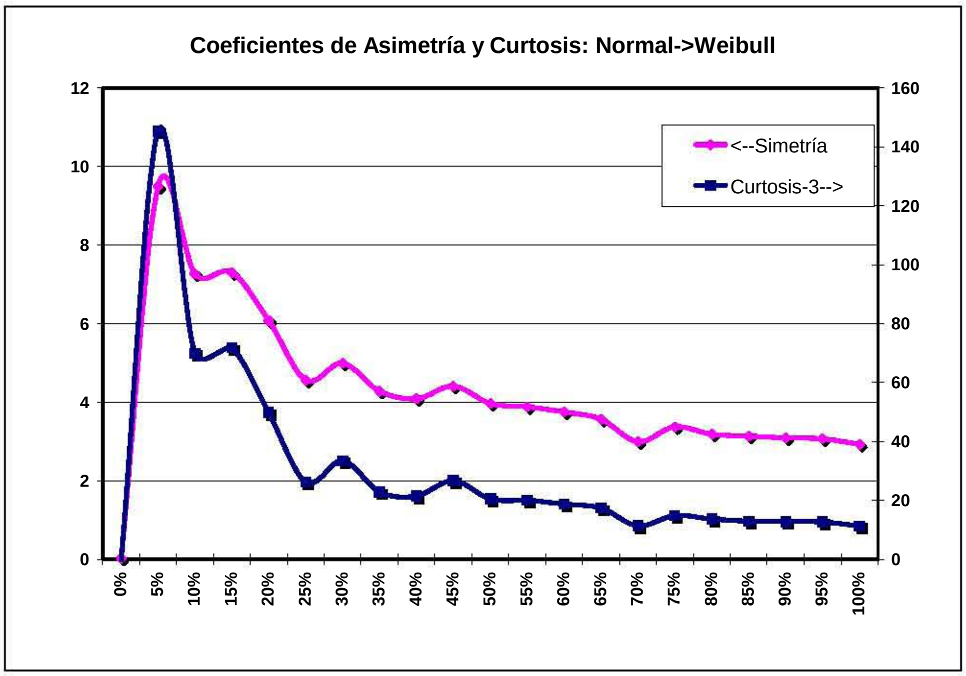

Figura 3.5: **Asimetría y Curtosis (Ejemplo 3.2).**

Bajo estas consideraciones, el VaR asociado con la densidad híbrida $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{5\%}$ *y un 97% de nivel de confianza es igual a 1.22%. Es decir, el inversionista podría perder hasta 1.22% del valor de su portafolio.*

Ejemplo 3.3 *Finalmente, como un tercer ejemplo, se intercambian las distribuciones supuestas del ejemplo anterior de tal manera que ahora la distribución en condiciones "normales" corresponde a la distribución Weibull y la distribución en condiciones de estrés corresponde a la distribución normal, aunque considerando una media de* 10%. *Esto con el fin de analizar si existe algún comportamiento simétrico de las distribuciones híbridas correspondientes con respecto al ejemplo anterior. A continuación se muestran la gráfica de densidades híbridas y la gráfica de coeficiente de asimetría y curtosis correspondiente a estas distribuciones.*

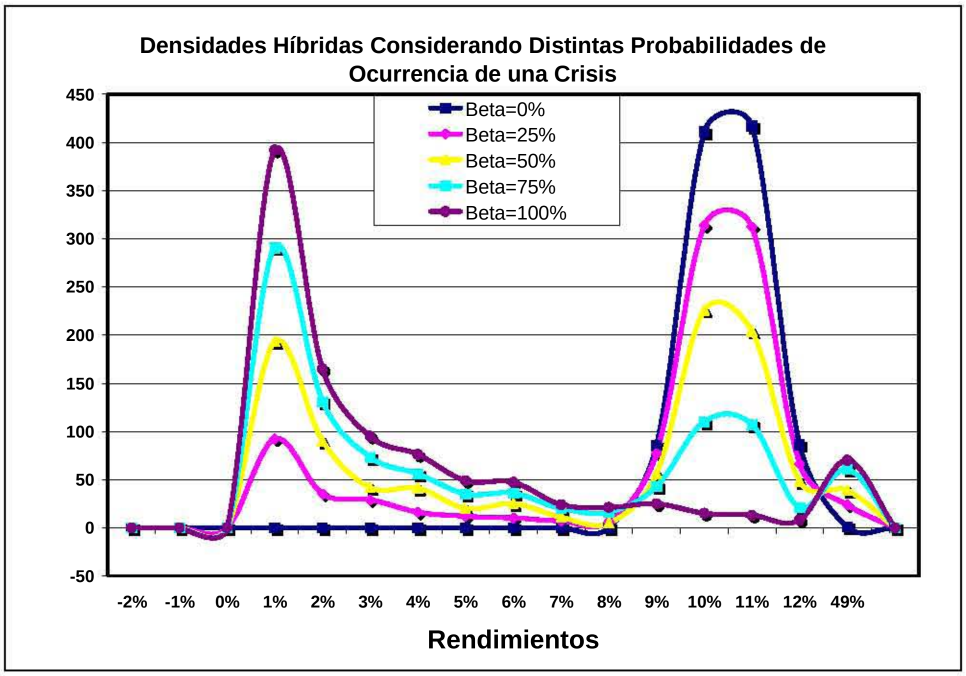

Figura 3.6: **Densidades Híbridas (Ejemplo 3.3)**

De la Figura 3.6, se hacen las mismas observaciones que en el ejemplo anterior:

- *Convergencia gradual de la densidad de condiciones normales a la densidad de* *condiciones de estrés.*

- *La convergencia de* $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{0\%}$ *a* $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{100\%}$ *no es proporcional a los cambios de* β.

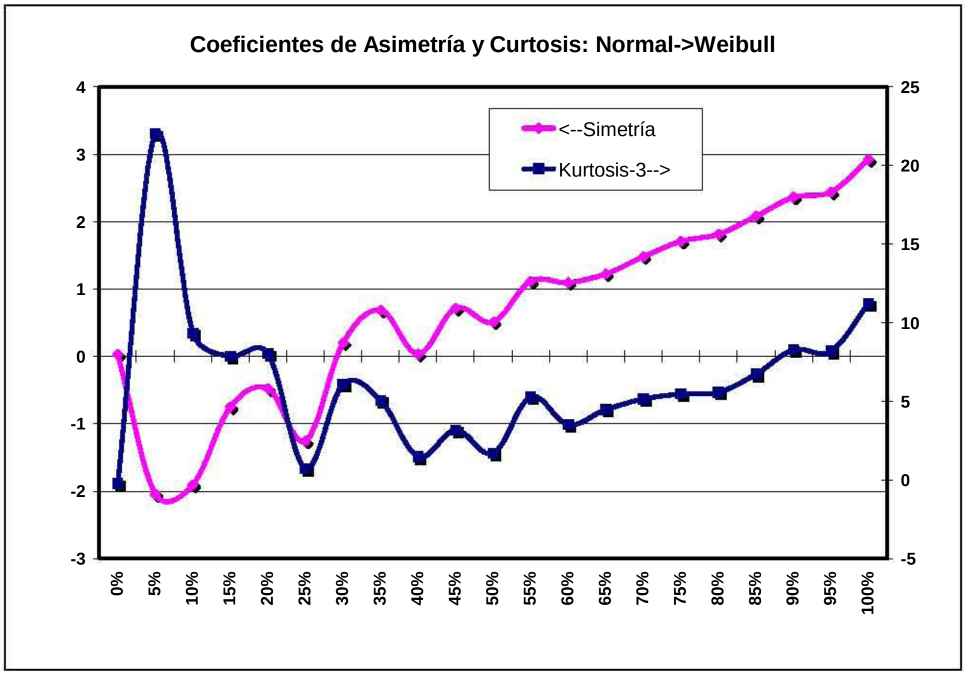

Figura 3.7: **Asimetría y Curtosis (Ejemplo 3.3).**

Bajo estas consideraciones, el VaR asociado con la densidad híbrida $\widetilde{f_{\underline{X}}}^{5\%}$ *con un nivel de confianza de* 97% *es de 11.49%.*

3.3 Determinación de la Distribución Híbrida

Bajo la metodología de Berkowitz, la determinación de la distribución híbrida depende de tres factores:

1.- La distribución en condiciones normales.

2.- Las distribuciones para cada evento de estrés considerado.

3.- Las probabilidades de ocurrencia de cada evento de estrés considerado.

Para la estimación de las distribuciones, tanto en condiciones normales como en condiciones de estrés, se puede recurrir a la basta literatura estadística que se ha desarrollado al respecto. Sin embargo, para la determinación de las probabilidades de ocurrencia de los eventos de estrés considerado no sucede lo mismo. Esto se debe a varias razones:

a) La falta de información, en caso de escenarios de estrés históricos (e.g. el número de crisis financieras que han ocurrido en los últimos cien años).

b) La información inexistente en caso de escenarios de estrés hipotéticos y por lo tanto, la probabilidad depende de la subjetividad así como de la aversión al riesgo del administrador de riesgos.

Berkowitz (1999) sugiere algunos criterios para determinar las probabilidades de ocurrencia de los eventos de estrés, aunque estas sugerencias son sumamente vagas. Es por esta razón que se proponen a continuación dos criterios específicos para la determinación de estas probabilidades. Para tal efecto, se supone, por simplicidad, que sólo se considera un evento de estrés.

3.3.1 Ajuste Histórico

Este criterio consiste en determinar la probabilidad de ocurrencia del evento de estrés (β) de tal manera que la distribución híbrida se ajuste "lo mejor posible" a la distribución observada. Para tal efecto, debe definirse lo que se entenderá por "lo mejor posible" así como el aspecto o aspectos de la distribución histórica que se desean ajustar. Por ejemplo, si el aspecto de la distribución histórica que deseamos capturar es la volatilidad y el ajuste se mide en términos del cuadrado de la diferencia entre la volatilidad observada y la volatilidad estimada a partir de la distribución híbrida, entonces β se puede determinar resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$Min_{\beta\in[0,1]}(\sigma_H - \sigma_{\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}}})^2 \tag{3.2}$$

donde σ_H es la volatilidad de la distribución observada y $\sigma_{\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}}}$ es la volatilidad de la distribución híbrida $\widetilde{f}_X^{\boldsymbol{\beta}}$.

Este criterio puede aplicarse tanto a escenarios históricos como hipotéticos.

Ejemplo 3.4 *Considere el Ejemplo 3.1. Utilizando la distribución de pérdidas en condiciones normales, el VaR a un 97 % de confianza es igual a 1.2281%. El inversionista en un principio consideró que existía una probabilidad del 5% de que ocurriera un crisis (ver Ejemplo 3.1) y con base en ello, estimó el VaR asociado con la densidad híbrida correspondiente con el mismo nivel de confianza, el cual resultó ser igual a 1.7342%.*

El inversionista no está muy seguro ahora de que la probabilidad de ocurrencia de *una crisis sea del 5%, y, dado que desea ajustarse lo mejor posible a la distribución histórica, decide obtener también el VaR, al nivel de confianza, que corresponda a la distribución híbrida que se obtenga de resolver numéricamente el problema de minimización (3.2), sea cual sea la probabilidad de ocurrencia de la crisis asociada. El resultado de este problema arroja un valor de* $\beta^* = 1\%$. *De donde el VaR asociado a la densidad de pérdidas es de 1.2544%*

3.3.2 Máxima Curtosis

Este criterio consiste en determinar la probabilidad de ocurrencia del evento de estrés (β) de tal manera que la distribución híbrida tenga la máxima curtosis posible, es decir, de modo tal que la distribución híbrida tenga el efecto de "colas pesadas" más pronunciado posible. Esto con el objeto de generar una distribución híbrida de pérdidas que pueda ser utilizada para generar valores extremos de las medidas de riesgo utilizadas. En términos matemáticos, la determinación de β se puede formular de la siguiente manera:

$$Max_{\beta\in[0,1]}\ C(\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}}) \tag{3.3}$$

donde $C(\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}})$ representa la curtosis de la distribución híbrida asociada con la función de densidad $\widetilde{f}^{\boldsymbol{\beta}}$.

Ejemplo 3.5 *Considere el Ejemplo 3.1. Utilizando la distribución de pérdidas en condiciones normales, el VaR a un 97 % de confianza es igual a 1.2281%. El inversionista en un principio consideró que existía una probabilidad del 5% de que* *ocurriera un crisis (ver Ejemplo 3.1) y con base en ello, estimó el VaR asociado con la densidad híbrida correspondiente con el mismo nivel de confianza, el cual resultó ser igual a 1.7342%.*

El inversionista no está muy seguro ahora de que la probabilidad de ocurrencia de una crisis sea del 5%, y, dado que es muy averso al riesgo, decide obtener también el VaR, al mismo nivel de confianza, que corresponda a la distribución híbrida que tenga la mayor curtosis, sea cual sea la probabilidad de ocurrencia de la crisis asociada. De esta manera, el inversionista resolvió el problema de optimización **??** *y obtuvo* $\beta^* = 2\%$. *De donde el VaR asociado a la densidad de pérdidas es de 1.3129%.*

3.3.3 Otros Criterios

Los dos criterios para determinar la probabilidad de ocurrencia (β) del evento de estrés que se exponen en las secciones anteriores son tan sólo dos maneras particulares para determinar ésta. Otros criterios pueden ser utilizados para determinar β. Lo importante es, que cualquiera que sea el criterio que se utilice, éste capture, directa o indirectamente, las expectativas o preferencias del inversionista. Por ejemplo, el criterio de ajuste histórico supone implícitamente que el inversionista piensa que el comportamiento futuro será muy parecido al históricamente observado y por tanto, busca medir el riesgo utilizando la distribución híbrida que mejor se ajuste al pasado. Por otro lado, el criterio de máxima curtosis supone a un inversionista sumamente adverso al riesgo que considera la distribución híbrida con las colas "más pesadas" para la valoración de su exposición al riesgo.

Conclusiones

Este trabajo de tesis se realizó con el objeto de divulgar y promover el uso integral de las llamadas Pruebas de Estrés con las metodologías de evaluación de riesgos utilizadas bajo condiciones "normales" de riesgo. Para lograr esta meta, la tesis aporta lo siguiente:

- Una introducción concisa a la Administración de Riesgos que incluye, además de una breve historia de la misma, un análisis detallado de las desventajas conceptuales más importantes de la medida de riesgo conocida como el Valor en Riesgo Condicional, o VaR, y la cual es en la actualidad la medida de riesgo más popular en el ámbito financiero mundial.

- Una descripción panorámica de las distintas maneras de definir e implantar las Pruebas de Estrés así como la ubicación de éstas en el plano de la Administración de Riesgos.

- Una descripción detallada de una metodología propuesta recientemente para obtener distribuciones de probabilidad híbridas que integran tanto distribuciones en condiciones "normales" como en condiciones de "estrés", que incluye además varios ejemplos reales y ampliamente desarrollados.

Además del esfuerzo de divulgación y promoción del uso integral de las Pruebas de Estrés, la tesis contribuye con la aportación de un par de métodos sencillos para obtener los parámetros utilizados para la determinación de las distribuciones híbridas que son estudiadas en el Capítulo 3.

Finalmente, esta tesis busca motivar al lector en la profundización e investigación del tema de obtención de distribuciones híbridas de pérdidas.

Apéndice

Definición 3 ***(Función Convexa)***

Sea $\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, f *es una función convexa en* $\mathbb{R}^n$, *si y solo si,*

$$\rho(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\rho(x) + (1-\lambda)\rho(y).$$

$$\forall\ \lambda \in [0,1] \qquad y \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

En la figura 3.8 se exponen, de manera gráfica un ejemplo de una función convexa y de una función <u>no</u> convexa.

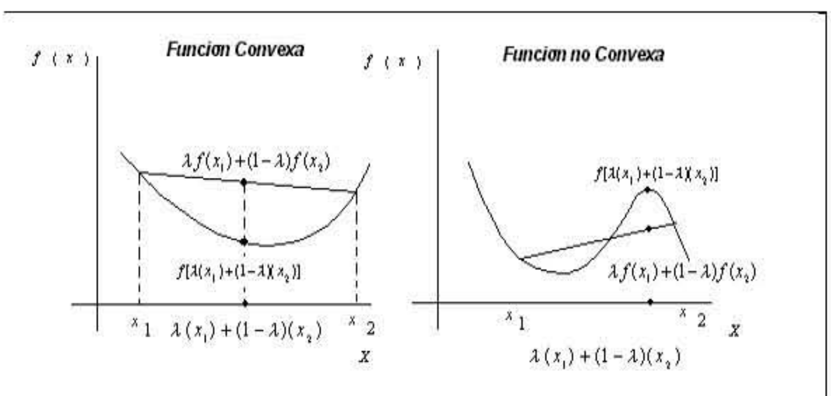

Figura 3.8: **Convexidad y No Convexidad.**

Proposición 1 *Sea ρ una función positiva homogenea. Entonces*

$$\rho \text{ es convexa } \Leftrightarrow \rho \text{ es subaditiva}$$

Demostración:

$\Rightarrow]$

Suponga que ρ es convexa. Sean X y $Y \in \overline{\underline{X}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\rho(X+Y) &= \rho(\frac{1}{2}(2X)+\frac{1}{2}(2Y)) \\
&\leq \frac{1}{2}\rho(2X)+\frac{1}{2}\rho(2Y) && \textit{(por convexidad)} \\
&= \rho(\frac{1}{2}(2X))+\rho(\frac{1}{2}(2Y)) && \textit{(por homogeneidad positiva)} \\
&= \rho(X)+\rho(Y)
\end{aligned}$$

$$\therefore \rho(X+Y) = \rho(X)+\rho(Y)$$

$\Leftarrow]$

Suponga que ρ es subaditiva. Sea $\lambda \in (0,1)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y) &\leq \rho(\lambda X)+\rho((1-\lambda)Y) && \textit{(por subaditividad)} \\
&= \lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y) && \textit{(por homogeneidad positiva)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \rho(\lambda X+(1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y) \qquad \blacksquare$$

Bibliografía

[1] de Lara Haro Alfonso, Medición y Control de Riesgos Financieros, 1^a edición, Editorial Limusa (2001).

[2] Jorion Philippe, Valor en Riesgo, Editorial Limusa.

[3] Bank for International Settlements, Stress Testing By Large Financial Institutions Current Practice and Aggregation Issues, Documento de Trabajo (2000).

[4] Breuer Thomas, Gerald Krenn, Reliving Past Crises: Identifying Stress Scenarios From Historical DATA, Documento de Trabajo (2000).

[5] Oesterreichische National Bank,Guidelines on Market Risk,Volume 5 Stress Testing, Documento de Trabajo (1999).

[6] Mina J and Yi Xiao J., Return to Risk Metrics: The Evolution of a Standard, RiskMetrics, Documento de Trabajo (2001).

[7] Berkowitz J., A Coherent Framework for Stress-Testing, Federal Reserve Board Marzo, Documento de Trabajo (1999).

[8] Bernstein P., Against the Gods, The Remarkable Story of the Risk, Editorial John Wiley & Sons, Inc (1996).

[9] Artzner Philippe, Delbaen Freddy, et al., Coherent Measures of Risk, Documento de Trabajo (1998).