Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# Introducción a la entropía topológica

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A:

Belén Espinosa Lucio

Tutor: Dr. Héctor Méndez Lango

**2006**

1. Datos del alumno
   Espinosa
   Lucio
   Belén
   56 58 07 53
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   095316530
2. Datos del tutor
   Dr
   Héctor
   Méndez
   Lango
3. Datos del sinodal 1
   M en C
   Jefferson Edwin
   King
   Dávalos
4. Datos del sinodal 2
   Dr
   Javier
   Páez
   Cárdenas
5. Datos del sinodal 3
   Dr
   Guillermo Javier Francisco
   Sienra
   Loera
6. Datos del sinodal 4
   Dr
   Luis Antonio
   Rincón
   Solís
7. Datos del trabajo escrito
   Introducción a la entropía topológica
   89 p
   2006

# Agradecimientos

A mis papás por su cariño ilimitado. Por su apoyo y consentimiento, por los principios inculcados. Por enseñarme a disfrutar las sobremesas y por compartir en ellas su gusto por la música.

A mi papá por inculcarme el gusto por la literatura y por su sentido del humor.

A mi mamá por ser tan tolerante conmigo. Por demostrarme que uno puede ser obsesivo con el trabajo y a la vez una excelente madre.

A Daniel por ser no sólo un hermano, sino un buen amigo. Por todas las tardes de cine, café y plática.

A Pablo por toda la ayuda LaTeXera necesaria para la realización de esta tesis. Por compartir su vida conmigo.

A Alicia, por adoptarme y ser una excelente amiga.

A Picho, a mi tía Mari, a Marifer y Gerardo, por los viernes de Drambuie.

A Anita, por ser una verdadera amiga y ser parte de la familia.

A mis sinodales por el apoyo y la confianza que me brindaron durante la realización de esta tesis.

A Héctor por ser un director de tesis tan comprometido y porque sus clases contribuyeron de manera significativa a mi formación.

A Héctor y a Jeff les agradezco la motivación que me llevó a escoger este tema.

Al Dr. Páez por su amistad y consejos, así como por la orientación y ayuda que me brindó durante toda la carrera.

# Contenido

**Introducción** **ix**

**1 Una pequeña introducción a los sistemas dinámicos discretos** **1**
- 1.1 Nociones Básicas . . . . . . . . . . 1
- 1.2 Puntos Periódicos . . . . . . . . . . 9
- 1.3 Caos . . . . . . . . . . 13
- 1.4 Funciones Topológicamente Conjugadas . . . . . . . . . . 18

**2 Propiedades básicas de la entropía topológica** **21**
- 2.1 Entropía de una cubierta . . . . . . . . . . 21
- 2.2 Entropía de una función relativa a una cubierta . . . . . . . . . . 25
- 2.3 Entropía de una función . . . . . . . . . . 30

**3 La función Corrimiento** **43**

**4 Una segunda definición** **53**

**5 Entropía en intervalos** **69**

**Bibliografía** **79**

# Introducción

> Hay quien afirma que, en efecto, su intención es socavar el plan de la Creación, que su tarea es sembrar el desorden, conducir el universo hacia el caos... Es el Señor de la entropía, diríamos ahora.
>
> J. Volpi. *En busca de Klingsor*

El objetivo de esta tesis es la introducción del concepto de entropía topológica y el estudio de sus propiedades básicas, así como, la presentación de diversos ejemplos de funciones con entropía cero, positiva e infinita.

El término entropía topológica fue usado por primera vez por Adler, Konheim y McAndrew en 1965. La entropía topológica asigna, a cada función continua $f : X \to X$, donde $X$ es un espacio compacto, un valor real no negativo o el valor infinito. Dicho valor se puede interpretar como una medida numérica de la complejidad de la dinámica de una función en un espacio compacto dado.

En el capítulo 4 daremos una segunda definición de entropía creada por Dinaburg y Bowen. Esta definición fue dada originalmente para espacios métricos compactos, aunque posteriormente Bowen la extendió a espacios métricos no necesariamente compactos.

Dentro del estudio de la propiedades básicas de la entropía retomaremos el enfoque original de Adler, Konheim y McAndrew de entropía topológica mostrando a la entropía como un invariante bajo la conjugación topológica.

Una de las nociones básicas dentro del estudio de las sistemas dinámicos discretos es la de iteración de funciones; en este sentido estudiaremos la relación entre la entropía de una función y la entropía de sus iteradas. Veremos también que la entropía de una función $f$ es igual a la entropía de $f$ restringida al conjunto de los puntos no errantes de dicha función.

Se darán diversos ejemplos de funciones con entropía cero, siendo entre estos los más destacados las isometrías y los homeomorfismos tanto en el intervalo unitario como en el círculo unitario.

Dedicaremos el tercer capítulo de esta tesis a la construcción de espacios topológicos donde para cada $k \in \mathbb{N}$, la función a la que llamaremos "función corrimiento", es un ejemplo de una función con entropía mayor o igual que $\log(k)$.

Veremos que la "función corrimiento" en el cubo de Hilbert nos proporciona un ejemplo de función con entropía infinita.

En el último capítulo construiremos funciones en el intervalo unitario con entropía igual a $\log(k)$ para cualquier $k$ en el conjunto de los números naturales. Este tipo de funciones no permitirá a su vez la construcción de un segundo ejemplo de una función con entropía infinita.

Veremos también que en el intervalo unitario las funciones con algún punto de periodo tres y las funciones transitivas, tienen entropía positiva. Las afirmaciones anteriores, nos dicen que si una función definida en el intervalo unitario es caótica en el sentido de Devaney [4], entonces tiene entropía positiva.

# Capítulo 1

# Una pequeña introducción a los sistemas dinámicos discretos

En este capítulo, como su nombre lo dice, trataremos de dar una pequeña introducción a los sistemas dinámicos discretos. Habrá algunos temas que no trataremos a profundidad, ya que sólo se trata de abarcar las nociones básicas de los sistemas dinámicos, de tal manera, que cuando nos adentremos al tema principal de esta tesis contemos con todas las herramientas necesarias.

Abarcaremos nociones como iteración de funciones y órbita de un punto. Veremos varias clases de órbitas, como las periódicas, las preperiódicas, asintóticamente periódicas y aperiódicas, resaltando entre éstas, las órbitas periódicas.

Dentro del estudio de órbitas periódicas veremos que existen periodos de distinto orden, más aún veremos la relación entre la existencia de órbitas periódicas de órdenes distintos. Esta relación será presentada en el Teorema de Sharkovskii.

Definiremos el concepto de función caótica, veremos también la definición de funciones conjugadas topológicamente, así como la relación que se da entre las dinámicas de este tipo de funciones.

## 1.1 Nociones Básicas

Consideremos la función exponencial y tomemos un número cualquiera $x$, si aplicamos repetidamente la función, entonces tenemos la sucesión de números $x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}} \ldots$.

Llamamos a esto iterar la función exponencial. Si seguimos iterando la función exponencial un número grande de veces, nos va quedando claro que el resultado es cada vez más grande, esto quiere decir que la sucesión

$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$ tiende a $\infty$. Donde $f^n$ representa la composición de $f$ con si misma $n$ veces.

Si repetimos el mismo experimento pero ahora con una función distinta, digamos la función $\operatorname{sen}(x)$, después de algunas iteraciones nos podemos dar cuenta que sin importar el valor que hayamos escogido al principio, la sucesión $x$, $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))), \ldots$ tiende a cero.

Después de estos ejemplos podríamos pensar que siempre que realizamos un proceso iterativo, la sucesión de iteraciones converge a un valor dado, pero como veremos más adelante eso no siempre es cierto. En algunas funciones dependiendo del valor inicial los resultados varían de manera drástica.

Es justamente este fenómeno uno de los principales objetos de estudio de los sistemas dinámicos, dada una función y un valor inicial, ¿qué sucede con la sucesión de iteraciones?

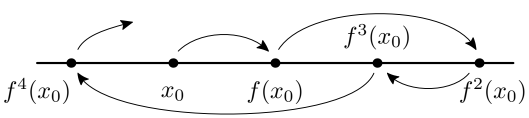
En este capítulo trabajaremos todo el tiempo en los números reales o en algún intervalo de ellos y $f$ siempre será una función continua.

**Definición 1.1.** Sean $I$ un intervalo de los reales, $f : I \to I$ una función continua y $x_0$ un elemento de $I$, definimos la *órbita de* $x_0$ *bajo* $f$ como el siguiente conjunto de puntos:

$$o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\} = \{f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

*Observación.* La órbita de $x$ respecto a $f$, es precisamente lo que hasta ahora veníamos llamando la sucesión de iteraciones de un valor inicial.

Podemos imaginar los primeros elementos de una órbita de la siguiente manera:



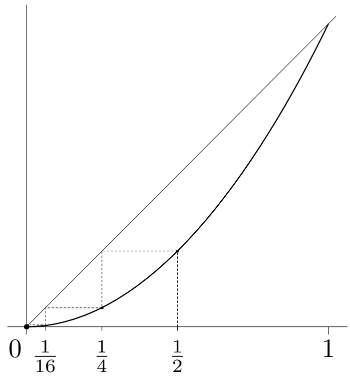

**Ejemplo 1.1.** Sea $f : I \to I$, la función $f(x) = x^2$. Donde $I = [0, 1]$

Consideremos $x = \frac{1}{2}$. Entonces:

$$o(x, f) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots \right\}.$$

Tomemos ahora, $x = 0$, entonces $f^n(x) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$o(x, f) = \{0\}$$




En este ejemplo la órbita de $\frac{1}{2}$ es infinita, mientras que la órbita de 0, contiene solamente un punto.

De lo anterior sabemos al menos que existen tanto las órbitas finitas como las infinitas. De hecho la órbita del cero en el ejemplo anterior no solamente es finita, sino que consta de un solo punto. A los puntos que cumplen esta propiedad se les llama puntos fijos.

**Definición 1.2.** Sea $f : I \to I$ una función continua. Decimos que $x$ es un *punto fijo* de $f$, si $x = f(x)$.

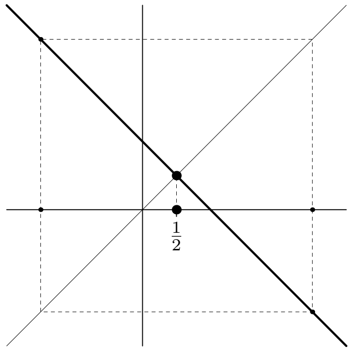
Veremos a continuación que existen órbitas finitas pero con más elementos que un sólo punto.

**Definición 1.3.** Decimos que $x$ es un *punto periódico* de $f$ de período $n$ si $n$ es el menor número natural para el cual tenemos que $f^n(x) = x$.
A los puntos fijos los consideramos puntos periódicos de período 1.

*Observación.* En este caso, $o(x, f) = \{x, \dots f^{n-1}(x)\}$. Podemos decir que si un punto es periódico, entonces tiene una orbita periódica.

**Ejemplo 1.2.** Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1 - x$.

Primero busquemos los puntos fijos de esta función. Si $x$ es un punto fijo de $f$, entonces $x$ tiene que cumplir que $f(x) = x$, es decir $x = 1 - x$, si resolvemos la ecuación tenemos que $x = \frac{1}{2}$. Entonces $\frac{1}{2}$ es el único punto fijo.




Observemos que para toda $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $f^2(x) = 1 - (1 - x) = x$. Por lo tanto $x$ es de periodo dos para toda $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Denotaremos como $\mathrm{Per}(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos de $f$.

Una vez definidas las nociones de órbitas y puntos periódicos podemos tratar de entender qué es un sistema dinámico en sí. Un sistema dinámico esta formado por tres elementos:

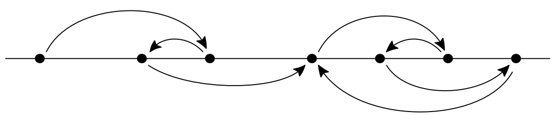
1) El espacio donde está definida nuestra función.

2) La función con la que estamos trabajando.

3) Las iteraciones de cada punto de nuestro espacio.

Con estos tres datos nos podemos formar una idea de como son las órbitas de nuestro sistema. Desde este punto de vista, si estudiamos la dinámica de $f$, podemos decir que estamos estudiando a todas las orbitas generadas en nuestro espacio por $f$. Queda claro entonces, que un sistema es más complicado entre más complicadas sean las órbitas de nuestro sistema.
Hasta ahora no parece que haya mayor complicación ya que el tipo de órbitas que hemos visto son bastante simples, sin embargo como veremos a continuación existen otro tipo de órbitas más complicadas.

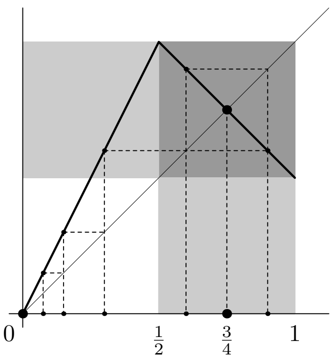
**Definición 1.4.** Decimos que $x \in I$ es *punto preperiódico*, o tiene *órbita preperiódica* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in \mathrm{Per}(f)$.



*Observación.* Un punto $x$ es periódico o preperiódico, si y sólo si tiene órbita finita.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{3}{2} - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$




Es fácil ver que los únicos puntos fijos de ésta función son $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$.

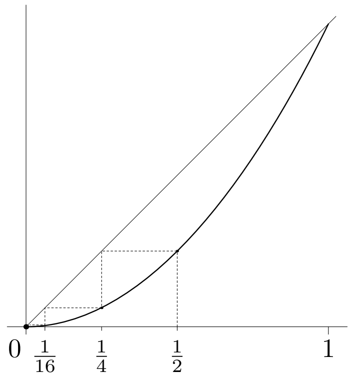
Además si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tenemos que $f^2(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - x\right) = x$. Por lo tanto, todo punto en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ distinto de $\frac{3}{4}$ es de periodo dos.

Si $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, al aplicar $f$, su distancia al origen se duplica, hasta que eventualmente llega al intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, por lo tanto todos los puntos en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ son preperiódicos.

Regresemos por un momento al ejemplo $f(x) = x^2$, con $f : [0,1] \to [0,1]$.

Habíamos visto que

$$o\left(\frac{1}{2}, x^2\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n+1}}, \dots\right\}.$$




Entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f^n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0.$$

A las órbitas que cumplen esta propiedad les llamamos órbitas asintóticamente fijas. Formalmente, tenemos;

**Definición 1.5.** Decimos que la órbita de $x$ es *asintóticamente fija*, o $x$ es un punto *asintóticamente fijo*, si existe $x_0 \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0.$$

**Definición 1.6.** Sea $x \in I$. Decimos que $x$ es *asintóticamente periódico*, o tiene órbita *asintóticamente periódica* si existe $y \in \mathrm{Per}(f)$ tal que el $\lim_{j\to\infty} |f^j(x) - f^j(y)| = 0$.

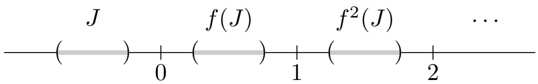
*Observación.* Supongamos que $y$ es de periodo $n$, entonces $y = f^n(y)$, es decir, $y$ es un punto fijo de $f^n$. Como $\lim_{j\to\infty} |f^j(x) - f^j(y)| = 0$, tenemos que $\lim_{k\to\infty}(f^n)^k(x) = y$, ya que $y = (f^n)^k(y)$.

Por lo tanto $x$ es asintóticamente fijo para $f^n$. Entonces, puesto de otra manera, una órbita asintóticamente periódica es una órbita asintóticamente fija para alguna iteración $n$ de la función $f$.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la función $f(x) = x + 1$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Observemos que para toda $x$, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} x + n = \infty$. Por lo tanto no hay ninguna órbita periódica, y entonces, tampoco hay ninguna órbita preperiódica ni asintóticamente periódica.

**Definición 1.7.** Sea $x \in I$, decimos que $x$ es un *punto aperiódico* o tiene *órbita aperiódica*, si $x$ no es punto periódico, ni preperiódico, ni asintóticamente periódico.

La función anterior tiene otra característica interesante. Consideremos un punto cualquiera $p \in \mathbb{R}$ y tomemos el intervalo $J = (p - \frac{1}{4}, p + \frac{1}{4})$.
Observemos que la longitud de $J$ es $\frac{1}{2}$, como la función es una translación de magnitud 1 hacia la derecha, tenemos que $J \cap f(J) = \varnothing$, y lo mismo sucede para las siguientes iteraciones.
Por lo tanto, si tomamos $x \in J$, tenemos $f^n(x) \notin J$.




**Definición 1.8.** Decimos que $p$ es un *punto errante* si existe un abierto $J$ tal que $p \in J$ y para toda $x \in J$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(x) \notin J$.

**Definición 1.9.** Sea $f : I \to I$ continua, decimos que $p \in I$ es un *punto no errante* respecto a $f$, si para todo abierto $J$ tal que $p \in J$, existe $x \in J$ y $n \in \mathbb{N}$, tal que $f^n(x) \in J$.

Denotamos al conjunto de puntos no errantes de $I$ respecto a $f$ como $\Omega(f)$. Es decir, $\Omega(f) = \{p \in I \mid p \text{ es no errante respecto a } f\}$.

*Observaciones.*

1) Si $x$ es un punto periódico de $f$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, esto quiere decir que para todo $J$ abierto que contenga a $x$ tenemos que $f^n(x) \in J$, por lo cual $x$ es un punto no errante, es decir $x \in \Omega(f)$. Por lo tanto $Per(f) \subseteq \Omega(f)$.
   Por lo anterior tenemos que si $Per(f)$ es denso en $I$, entonces $\Omega(f)$ es también denso en $I$.

2) Que para toda $x \in J$ y $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \notin J$ implica que $f^n(J) \cap J = \varnothing$, es decir, todos los puntos de $J$ son errantes, entonces, podemos definir un abierto $J$ como un abierto errante si para toda $n \in \mathbb{N}$, $f^n(J) \cap J = \varnothing$. Entonces tenemos una relación, para todo punto errante $p$ existe un abierto $J$ errante y para todo abierto errante $J$ tenemos que todo $x \in J$ es errante.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Omega(f)^c &= \{p \in I \mid p \text{ es errante}\}\\ &= \{p \in I \mid p \in J \text{ con } J \text{ abierto errante}\} = \bigcup_{J\subset I} J\end{aligned}$$

con $J$ abierto errante.
Por lo tanto $\Omega(f)$ es el complemento de una unión de abiertos, esto quiere decir que $\Omega(f)$ es cerrado.

Calcularemos $\Omega(f)$ para algunas funciones.

**Ejemplo 1.5.** En la función $f(x) = x+1$ vimos que todo punto es errante, entonces en este caso $\Omega(f) = \varnothing$.

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la función $f : I \to I$ con $f(x) = x^2$.

Sabemos que 0 y 1 son puntos fijos para $f$, entonces $\{0,1\} \subseteq \Omega(f)$.

Además si $0 < x < 1$, tenemos que $x^2 < x$, y entonces $x^2 < \frac{x^2+x}{2}$.

Por lo tanto $x < \sqrt{\frac{x^2+x}{2}}$. Tomemos $y = \sqrt{\frac{x^2+x}{2}}$ y consideremos $J = (x,y)$.

Ahora $(x,y) \xrightarrow{f} (x^2,y^2)$, pero $y^2 = \frac{x^2+x}{2}$, que es el punto medio entre $x^2$ y $x$. Por lo tanto $J \cap f(J) = \varnothing$.
Además las demás iteraciones de $J$ están todavía más a la izquierda. Por lo tanto $f^n(J) \cap J = \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
De aquí que todo $x \in (0,1)$ es punto errante.
Por lo tanto $\Omega(f) = \{0,1\}$.

**Ejemplo 1.7.** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - x$.

Vimos anteriormente que $f$ tiene un punto fijo en $x = \frac{1}{2}$, y todo los demás puntos son de periodo dos, por lo tanto para toda $x \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega(f)$. Es decir, $\Omega(f) = \mathbb{R}$.

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para asegurar que $\Omega(f) \neq \varnothing$.

**Proposición 1.1.** *Sean $X$ un espacio compacto y $f : X \to X$ una función, entonces $\Omega(f) \neq \varnothing$.*

*Demostración.* Supongamos que $\Omega(f) = \varnothing$, esto implica que si $x \in X$, entonces $x$ es un punto errante, por lo cual, dada $x \in X$ existe $J_x$ abierto errante de $X$ tal que $x \in J_x$.

Consideremos la cubierta abierta $\alpha = \{J_x \mid x \in X\}$. Dado que $X$ es compacto, sabemos que $\alpha$ tiene una subcubierta finita. Sea ésta $\{J_1, \ldots, J_n\}$.

Tomemos $x \in J_1$, entonces $f(x) \notin J_1$, ya que $J_1$ es un abierto errante. Entonces podemos suponer que $f(x) \in J_2$ y de igual manera tenemos que $f^2(x) \notin J_2$.De hecho podemos suponer que $f^{i-1}(x) \in J_i$ y $f^i(x) \notin J_i$ con $1 \leq i \leq n$. En particular $f^{n-1}(x) \in J_n$ y $f^n(x) \notin J_n$; entonces $f^n(x) \in J_k$ para alguna $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Esto quiere decir que $J_k$ es un abierto no errante, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $\Omega(f) \neq \varnothing$. □

**Proposición 1.2.** *$\Omega(f)$ es invariante bajo $f$, es decir $f(\Omega) \subseteq \Omega$.*

*Demostración.* Supongamos que existe $x \in \Omega(f)$ tal que $f(x) \notin \Omega(f)$, esto implica que $f(x)$ es un punto errante, entonces existe $J$ abierto errante tal que $f(x) \in J$.
Ahora $f(x) \in J$ implica $x \in f^{-1}(J)$, y además $x$ es no errante, por lo cual $f^{-1}(J)$ no es un abierto errante. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i(f^{-1}(J)) \cap f^{-1}(J) \neq \varnothing$.
Pero

$$\begin{aligned} f(f^i(f^{-1}(J)) \cap f^{-1}(J)) &\subseteq f(f^i(f^{-1}(J))) \cap f(f^{-1}(J)) \\ &\subseteq f(f^i(f^{-1}(J))) \cap J. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^i(J) \cap J \neq \varnothing$, de donde podemos concluir que $J$ no es un abierto errante; lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $f(x) \in \Omega(f)$, y entonces $\Omega(f)$ es invariante bajo $f$. □

## 1.2 Puntos Periódicos

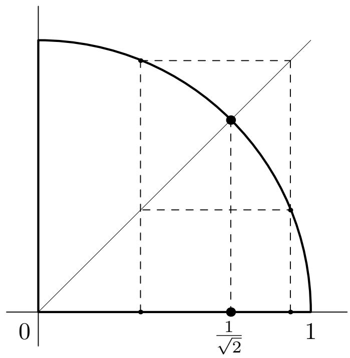
Consideremos de nuevo el ejemplo donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1 - x$.

Vimos anteriormente que casi todos los puntos de $\mathbb{R}$ son de periodo dos, excepto $x = \frac{1}{2}$ que es punto fijo.

Ahora analicemos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculemos $f^2(x) = f(\sqrt{1-x^2})$.

Observemos que dado que $x \in [0,1]$ tenemos que $0 \leq x^2 \leq 1$, y entonces $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$.

Como $\sqrt{1-x^2}^2 = |1-x^2| = 1 - x^2$, entonces $f^2(x) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.




De donde podemos concluir, que todos los puntos son de periodo dos, a menos que haya algún punto fijo.

Veamos si la ecuación $f(x) = x$ tiene solución para alguna $x \in [0, 1]$. $\sqrt{1 - x^2} = x$ implica que $1 - x^2 = x^2$ y entonces, $x^2 = \frac{1}{2}$, de donde $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto esta función tiene un punto fijo, y todos los demás son puntos de periodo dos.

En los dos ejemplos anteriores todos los puntos han sido de periodo dos, a excepción de uno. Entonces uno podría preguntarse si siempre que hay puntos de periodo dos, existe un punto fijo. La respuesta es sí, veamos la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.** *Si $f$ tiene un punto de periodo dos, entonces tiene un punto de periodo* 1.

*Demostración.* Sea $o(x_1, f) = \{x_1, x_2\}$ una órbita de periodo dos. Supongamos que $x_1 < x_2$.
Consideremos la función $g(x) = f(x) - x$. Evaluando la función en $x_1$ y en $x_2$ tenemos que $g(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$ y $g(x_2) = f(x_2) - x_2 < 0$. Por lo tanto, por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $g(x_0) = 0$, lo cual quiere decir que $f(x_0) = x_0$. Por lo tanto $x_0$ es punto fijo de $f$. □

Es claro que la recíproca no es cierta ya que si consideramos la función identidad,todo punto es punto fijo bajo $f$.

Con el mismo argumento que en la proposición 1.3 podemos demostrar lo siguiente:

**Proposición 1.4.** *Si $f$ tiene un punto de periodo $n > 1$, entonces $f$ tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Tomemos una órbita de periodo $n$ y ordenemos a sus elementos así:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

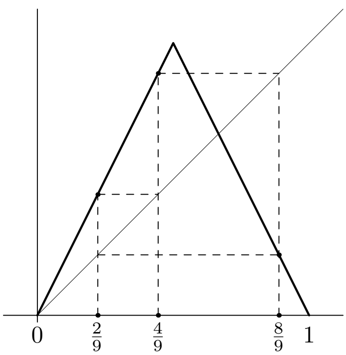
Sabemos que $f(x_1)$ es alguno de los otros puntos, y entonces $f(x_1) > x_1$. Además $x_n$ es el mayor de todos los puntos. Entonces $f(x_n) < x_n$.
Si consideramos de nuevo la función $g(x) = f(x) - x$ tenemos por lo anterior que $\quad g(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0 \quad$ y $\quad g(x_n) = f(x_n) - x_n < 0$.
Por lo tanto existe $x_0 \in (x_1, x_n)$ tal que $f(x_0) = x_0$. □

Hasta ahora sabemos que cada vez que tenemos periodo $n$ tenemos periodo 1.

Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.8.** Sea $T : I \to I$ definida por $T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$.

A esta función se le conoce como la *función tienda*.




Veamos la órbita del punto $\frac{2}{9}$. Como $\frac{2}{9} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, entonces le toca la regla de correspondencia $T(x) = 2x$. Por lo tanto $T\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$. Por la misma razón que antes, $T^2(x) = T\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{8}{9}$. Ahora $\frac{8}{9}$ ya está en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y entonces, $T\left(\frac{8}{9}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9}$.

Por lo tanto
$$o\left(\frac{2}{9}, T\right) = \left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}.$$
Es decir $\frac{2}{9}$ es un punto de periodo 3.

Tratemos de averiguar si $T$ tiene alguna órbita de periodo dos. Tomemos $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces, $T(x) = 2x$. Observa que si $T(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $T^2(x) = 4x$, pero si queremos que $x$ sea de periodo dos, entonces $x = 4x$, lo cual implica que $x = 0$, y 0 es claramente un punto fijo para $T$. Por lo tanto si queremos que $x$ sea un punto de periodo dos tenemos que $T(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, y entonces $T^2(x) = T(T(x)) = T(2x) = 2 - 4x$, y como queremos que $x$ sea punto de periodo dos, tenemos $x = 2-4x$, esto implica que $x = \frac{2}{5}$. Entonces $T$ tiene una órbita de periodo dos,
$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Nos gustaría saber si siempre que existe un punto de periodo 3, existe un punto de periodo 2. La respuesta es todavía más sorprendente. El siguiente teorema se debe al matemático Sharkovskii, y no solamente demuestra que el hecho de que exista un punto de periodo 3 implica la existencia de un punto de periodo 2, más aún nos muestra la implicación que se desprende de que exista un punto de periodo $n$.

**Teorema 1.5** (Sharkovskii)**.** *Sean $I$ un intervalo en los números reales, y $f : I \to I$ una función continua en $I$. Considera el siguiente arreglo de números naturales:*

$$\begin{array}{llllll}
3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots \\
3 \cdot 2 & 5 \cdot 2 & 7 \cdot 2 & 9 \cdot 2 & 11 \cdot 2 & \cdots \\
3 \cdot 2^2 & 5 \cdot 2^2 & 7 \cdot 2^2 & 9 \cdot 2^2 & 11 \cdot 2^2 & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
\cdots & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1
\end{array}$$

*Sean $n$ y $m$ números naturales. Si $f$ tiene un punto de periodo $n$, y $m$ está colocado a la derecha de $n$, o en algún renglón abajo de $n$, entonces hay un punto de periodo $m$.*

Dada la longitud de la demostración de este teorema, no la presentaremos en este trabajo, sin embargo, si al lector le interesa la puede encontrar, en parte, en el libro de Robert L. Devaney [4].

## 1.3 Caos

Consideremos de nuevo el ejemplo de la función tienda:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Vimos anteriormente que $T$ tiene una órbita de periodo 3, entonces por el teorema de Sharkovskii, $T$ tiene puntos de todos los periodos.

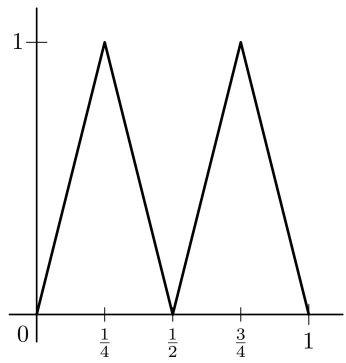
Hasta ahora sabemos que para toda $n$, $T$ tiene un punto de periodo $n$, (incluso sabemos como construir un ejemplo para cualquier periodo que se nos ocurra), esto significa que $T$ tiene una infinidad de puntos periódicos, pero ¿cómo está acomodada esa infinidad en el intervalo $[0,1]$?, es decir ¿es densa?

Para dar la respuesta a esto debemos estudiar un poco la forma de las iteraciones de $T$.

Consideremos el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y observemos que $T\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0,1]$. Si aplicamos de nuevo $T$ tenemos que $T^2\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = T([0,1])$. Eso quiere decir que $T^2$ actúa en $[0, \frac{1}{2}]$, de la misma manera que $T$ actúa en $[0,1]$. Entonces la gráfica de $T^2$, tiene comprimida en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ la gráfica de $T$.

Ahora tomemos el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, también aquí tenemos que $T\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [0,1]$. Por lo tanto, de la misma manera que anteriormente tenemos que la gráfica de $T^2$ tiene un pico igual al de $T$, pero comprimido en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Entonces la gráfica de $T^2$ se ve así:

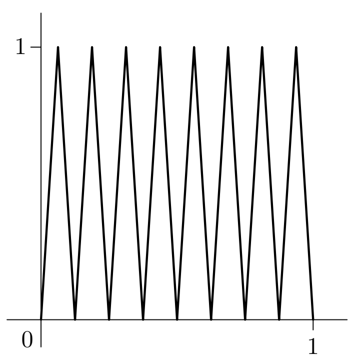



Si partimos ahora del intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Tenemos el siguiente esquema:

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \xrightarrow{T} \left[0, \frac{1}{2}\right] \xrightarrow{T} [0, 1]$$

Por lo cual sabemos que la gráfica de $T^3$ tiene un pico de altura uno pero ahora comprimido en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Y lo mismo sucede para los intervalos $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

Dado lo anterior podemos conjeturar que la gráfica de la función $T^m$ tiene $2^{m-1}$ picos de altura uno, comprimidos cada uno en un intervalo de longitud $\frac{1}{2^{m-1}}$. Algo así:




Sea $m \in \mathbb{N}$; tratemos de calcular cuantos puntos fijos tiene $T^m$. Como los puntos fijos de una función $f$ son los puntos de intersección entre de la identidad y $f$, entonces $T^m$ tendrá tantos puntos fijos como cortes a la función identidad. Por lo anterior, $T^m$ tiene $2^{m-1}$ picos y la identidad corta dos veces cada pico, entonces $T^m$ tiene $2^m$ puntos fijos.

Además como cada pico es cortado dos veces, podemos afirmar que en cada intervalo de la forma

$$\left[\frac{j}{2^{m-1}}, \frac{j+1}{2^{m-1}}\right]$$

hay 2 puntos fijos. Uno en cada recta que forma el pico, esto quiere decir que cada mitad de ese intervalo tiene un punto fijo. Por lo tanto en cada intervalo de la forma

$$\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$$

hay un punto periódico.

**Proposición 1.6.** $\mathrm{Per}(T)$ *es un conjunto denso en* $[0,1]$.

*Demostración.* Sea $(a,b) \in [0,1]$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{|b-a|}{3}$. Entonces existe un intervalo de la forma $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$ contenido en $(a,b)$. Por todo lo anterior, en ese intervalo hay un punto fijo para $T^m$. Eso implica que en ese intervalo hay un punto periódico de periodo $m$ para $T$.
Por lo tanto $\mathrm{Per}(f) \cap (a,b) \neq \varnothing$. Así $\mathrm{Per}(f)$ es un conjunto denso en $[0,1]$. □

**Proposición 1.7.** *Sea* $(a,b)$ *un intervalo cualquiera de* $I$*, entonces existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $T^m((a,b)) = I$.

*Demostración.* Retomando la idea de la demostración anterior, sabemos que existe un intervalo de la forma $\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$ totalmente contenido en $(a,b)$.

Además si consideramos la función $T^m$, tenemos que $T^m\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]\right) = [0,1]$. Por lo tanto

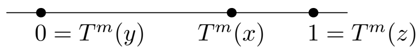
$$I = T^m([\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]) \subseteq T^m((a,b)) \subseteq I.$$

Por lo tanto $T^m((a,b)) = I$. □

**Definición 1.10.** Decimos que $f : I \to I$ es *sensible a las condiciones iniciales* en $I$, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I$ y para toda $\delta > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y un punto $y \in I$ tales que $|x-y| < \delta$ y $|f^n(x) - f^n(y)| \geq \varepsilon$. A esta $\varepsilon$ le llamaremos *constante de sensibilidad de* $f$.

**Proposición 1.8.** $T:[0,1]\to[0,1]$ *es sensible a condiciones iniciales.*

*Demostración.* Sean $\varepsilon=\frac{1}{3}$, $x\in I$ y $\delta>0$.
Consideremos el intervalo abierto $(x-\delta,x+\delta)$, por la proposición 1.7 sabemos que existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $T^m(x-\delta,x+\delta)=[0,1]$.
Entonces existen $y$ y $z$ tales que $T^m(y)=0$ y $T^m(z)=1$.




Por lo tanto $|T^m(x)-T^m(z)|>\frac{1}{3}$, o $|T^m(y)-T^m(z)|>\frac{1}{3}$. □

**Definición 1.11.** Sea $f:I\to I$ una función continua. Decimos que $f$ es *transitiva* en $I$ si para todo par de subintervalos abiertos, no vacíos de $I$, $(a,b)$ y $(c,d)$, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f^n((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing$

**Proposición 1.9.** $T:[0,1]\to[0,1]$ *es una función transitiva en $I$.*

*Demostración.* Sean $(a,b)$ y $(c,d)$ dos subintervalos abiertos de $[0,1]$, distintos del vacío. Sabemos por la proposición 1.8 que existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $T^m((a,b))=[0,1]$.
Por lo tanto $T^m((a,b))\cap(c,d)\neq\varnothing$. Entonces $T$ es transitiva. □

Para el siguiente teorema necesitamos ver antes una proposición un poco técnica. Enunciaremos dicha proposición, sin embargo no daremos su demostración ya que cae fuera del área de interés de esta tesis. Si el lector está interesado en dicha demostración puede consultarla en el libro *Real Analysis* de H. L. Royden [8].

**Proposición 1.10.** *Si $\mathcal{B}=\{B_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos abiertos y densos en $I$, entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i\neq\varnothing,\quad \text{y de hecho es denso.}$$

**Teorema 1.11.** *Si $f:I\to I$ es transitiva, entonces existe $x\in I$ tal que $o(x,f)$ es densa.*

*Demostración.* Sea $n\in\mathbb{N}$. Consideremos la siguiente cubierta abierta de $I$

$$\mathcal{A}_n=\left\{A_r=\left(r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n}\right)\mid r\in I\right\}$$

Dado que $I$ es compacto, existen $r_1, \ldots, r_m \in I$ tales que

$$I \subseteq \bigcup_{j=i}^{m} \left( r_j - \frac{1}{n}, r_j + \frac{1}{n} \right).$$

Para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$ considera el siguiente conjunto

$$B_{n,j} = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-i} \left( \left( r_j - \frac{1}{n}, r_j + \frac{1}{n} \right) \cap I \right)$$

*Observación.* Cada $B_{n,j}$ es denso en $I$ ya que $f$ es transitiva y esto implica que para todo $(a,b)$ subintervalo de $I$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $f^i((a,b)) \cap \big( (r_j - \frac{1}{n}, r_j + \frac{1}{n}) \cap I \big) \neq \varnothing$. Esto quiere decir que existe $x \in (a,b)$ tal que $f^i(x) \in \big(r_j - \frac{1}{n}, r_j + \frac{1}{n}\big) \cap I$.
Por lo tanto $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\big(\big(r_j - \frac{1}{n}, r_j + \frac{1}{n}\big) \cap I\big)$, y entonces $B_{n,j} \cap (a,b) \neq \varnothing$.

Entonces, por la proposición 1.10, tenemos que $B_n = B_{n,1} \cap B_{n,2} \cap \cdots \cap B_{n,m}$ es abierto y denso en $I$. Consideremos $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_n$. Entonces por la proposición 1.10, $B \neq \varnothing$ y denso en $I$.

Sea $x \in B$. Vamos a demostrar que $o(x,f)$ es densa.
Tomemos $(a,b) \neq \varnothing$ un subintervalo de $I$.
Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < \frac{b-a}{2}$. Dado que $x \in B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, tenemos que $x \in B_{n_0}$. Por la forma en que escogimos a $n_0$ y dado que

$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \left( r_j - \frac{1}{n_0}, r_j + \frac{1}{n_0} \right),$$

existe $1 \leq k \leq m$ tal que

$$\left( r_k - \frac{1}{n_0}, r_k + \frac{1}{n_0} \right) \subset (a,b)$$

Ahora, $x \in B_{n_0}$ implica que $x \in B_{n_0,k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\big(\big(r_k - \frac{1}{n_0}, r_k + \frac{1}{n_0}\big) \cap I\big)$.
Y de aquí que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^i(x) \in \left( r_k - \frac{1}{n_0}, r_k + \frac{1}{n_0} \right) \subset (a,b).$$

Por lo tanto $o(x,f) \cap (a,b) \neq \varnothing$. Entonces la órbita de $x$ es densa en $I$. $\square$

*Observación.* Supongamos que $x \in I$ es un punto con órbita densa, entonces es claro que dicha órbita es un conjunto no finito, por lo tanto $x$ no puede ser un punto periódico ni preperiódico, de hecho se puede demostrar también que $x$ no es asintóticamente periódico.

*Observación.* Si existe $x \in I$ tal que $o(x, f)$ es densa, entonces $f$ es transitiva en $I$.

Una vez definidos los conceptos de sensibilidad a condiciones iniciales y transitividad, podemos definir lo que nosotros entenderemos por una función caótica.

**Definición 1.12.** Decimos que $f : I \to I$ es una *función caótica* si:

1) El conjunto $\mathrm{Per}(f)$ es denso en $I$.

2) $f$ es sensible a condiciones iniciales en $I$.

3) $f$ es una función transitiva en $I$.

Existen varias definiciones de caos, la definición vista por nosotros, es la definición dada por R. L. Devaney [4].

**Proposición 1.12.** $T : [0,1]$ *es una función caótica.*

*Demostración.* Por la proposición 1.6 sabemos que $\mathrm{Per}(T)$ es un conjunto denso en $[0,1]$, además sabemos por la proposición 1.8 que $T$ es sensible a condiciones iniciales. Por último la proposición 1.9 nos dice que $T$ es una función transitiva.
Por lo tanto $T$ es una función caótica. □

*Observación.* Dado que $T$ es transitiva entonces por el teorema 1.11 sabemos que existe $x \in I$ tal que $o(x, T)$ es densa en $I$.

## 1.4 Funciones Topológicamente Conjugadas

**Definición 1.13.** Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, dos funciones continuas. Decimos que $f$ y $g$ son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

*Observación.* La conjugación topológica es una relación de equivalencia.

**Proposición 1.13.** *Sean $f$ y $g$ dos funciones topológicamente conjugadas. Entonces:*

*i)* $g^n \circ h(x) = h \circ f^n(x)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

*ii)* *Si $x$ es un punto periódico de $f$, entonces $h(x)$ es punto periódico de $g$, y además son del mismo periodo.*

*Demostración.*

*i)* Suponiendo que $(g^{n-1} \circ h)(x) = (h \circ f^{n-1})(x))$, tenemos que

$$\begin{aligned}(g^n \circ h)(x) &= g \circ (g^{n-1} \circ h)(x) = g \circ (h \circ f^{n-1})(x) \\ &= (g \circ h) \circ (f^{n-1})(x) = (h \circ f) \circ f^{n-1}(x) = (h \circ f^n)(x).\end{aligned}$$

*ii)* Si $x$ es un punto periódico de $f$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. Entonces

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$$

Por lo tanto $h(x)$ es un punto periódico bajo $g$. Podría ser que el periodo de $h(x)$ bajo $g$ fuera menor que el periodo de $x$ bajo $f$, pero si $x$ es punto de periodo $n$ bajo $f$, entonces $f^i(x) \neq x$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Como además $h$ es biyectiva tenemos que $h(f^i(x)) \neq h(x)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$
De donde podemos concluir que $x$ y $h(x)$ tienen el mismo periodo.

□

Si consideramos ahora la función $h^{-1}$, de igual manera podemos demostrar que si $x$ es punto de periodo $n$ bajo $g$, entonces $h^{-1}(x)$ es punto de periodo $n$ bajo $f$.

Después de todo lo anterior se puede demostrar sin mucha dificultad que $\mathrm{Per}(g) = h(\mathrm{Per}(f))$.

**Proposición 1.14.** *Sea $h : X \to Y$ una función suprayectiva y continua. Si $A \subset X$ es un conjunto denso en $X$ entonces $h(A)$ es también un conjunto denso en $Y$.*

*Demostración.* Sea $D \subseteq Y$ un abierto distinto del vacío.
Como $h$ es continua, tenemos que la imagen inversa de $D$ es un conjunto abierto en $X$.
Como $A$ es denso en $X$, existe $x \in A$ tal que $x \in h^{-1}(D)$. Por lo tanto $h(x) \in D$, y entonces $h(A) \cap D \neq \varnothing$.
De donde, $h(A)$ es denso en $Y$. □

De la proposición 1.13 y la proposición 1.14 se sigue que si $f$ y $g$ son dos funciones conjugadas topológicamente, y $f$ es tal que $\mathrm{Per}(f)$ es denso, entonces $\mathrm{Per}(g)$ es denso.

**Proposición 1.15.** *Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones topológicamente conjugadas, y $f$ es transitiva en $X$, entonces $g$ también lo es en $Y$.*

*Demostración.* Como $f$ y $g$ son conjugadas tenemos que existe $h : X \to Y$ tal que $h \circ f^m = g^m \circ h$. Sean $C$ y $D$ dos abiertos en $Y$. Consideremos $h^{-1}(C)$ y $h^{-1}(D)$. Si $f$ transitiva, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(h^{-1}(C) \cap h^{-1}(D) \neq \varnothing$.
Entonces existe $x \in C$ tal que $f^m \circ h^{-1}(x) \in h^{-1}(D)$, esto implica que

$$h \circ f^m \circ h^{-1}(x) \in h \circ h^{-1}(D) = (D)$$

Por lo tanto $g^m(x) \in D$, y entonces $g^m(C) \cap D \neq \varnothing$. De donde $g$ es transitiva en $Y$. □

**Proposición 1.16.** *Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones topológicamente conjugadas, con $h \circ f = g \circ h$. Si $f$ es sensible a condiciones iniciales, entonces $g$ es sensible a condiciones iniciales.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ la constante de sensibilidad de $f$.
Observemos que dado que $Y$ es compacto, entonces $h^{-1}$ es uniformemente continua. Por lo tanto, para esa $\varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que si $|s-t| < \delta$ entonces $|h^{-1}(s) - h^{-1}(t)| < \varepsilon$.
Ahora, sean $x \in I$ y $r > 0$ y tomemos $B_r(x)$, consideremos $h^{-1}(B_r(x))$.
$f$ sensible a condiciones iniciales, implica que existe $w \in h^{-1}(B_r(x))$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f^m(w) - f^m \circ h^{-1}(x)| \geq \varepsilon$. Pero como $w \in h^{-1}(B_r(x))$, entonces existe $y \in B_r(x)$ tal que $h^{-1}(y) = w$.
Entonces $|g^m(y) - g^m(x)| \geq \delta$ □

*Observación.* Si $h : I \to I$ es continua y $I$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, entonces $h$ es uniformemente continua. Por lo tanto si $f$ y $g$ son dos funciones topológicamente conjugadas definidas en intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ y $f$ es sensible a condiciones iniciales, las hipótesis de la proposición anterior se cumplen y entonces $g$ es sensible a condiciones iniciales.

Por todas las proposiciones vistas en este capítulo podemos afirmar que si $f, g : I \to I$ donde $I$ es un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ son dos funciones topológicamente conjugadas, entonces $f$ y $g$ tienen básicamente la misma dinámica.

# Capítulo 2

# Propiedades básicas de la entropía topológica

El término entropía topológica fue usado por primera vez por Adler, Konheim y McAndrew en 1965. La entropía topológica asigna, a cada función continua $f : X \to X$, donde $X$ es un espacio compacto, un valor real no negativo o el valor infinito. Dicho valor se puede interpretar como una medida numérica de la complejidad de la dinámica de una función en un espacio compacto dado.

En este capítulo se definirán los conceptos de entropía de una cubierta, de una cubierta relativa a una función, y de una función. Se expondrán, varios ejemplos de funciones con entropía cero, y al final del capítulo, un ejemplo en el intervalo unitario con entropía positiva.

Se estudiará la relación entre la entropía de una función y la de sus iteraciones, y se demostrará que la entropía de una función $f$ es igual a la entropía de $f$ restringida al conjunto de los puntos no errantes de dicha función.

Se mostrará a la entropía topológica como un invariante bajo la conjugación topológica, es decir, se demostrará que si dos funciones son conjugadas topológicamente entonces tienen la misma entropía. Este teorema rescata el enfoque original de entropía presentada por Adler, Konheim y McAndrew.

Se verá también que si una función definida en el intervalo unitario de los reales tiene un punto de periodo tres o es transitiva, entonces tiene entropía positiva.

## 2.1 Entropía de una cubierta

En este capítulo $X$ siempre denotará un espacio topológico compacto, $\alpha$ una cubierta abierta de $X$ y $f : X \to X$ una función continua.

**Definición 2.1.** Sea $\alpha$ una cubierta abierta de $X$. Definimos $N(\alpha)$ como la mínima cardinalidad de todas las subcubiertas finitas de $\alpha$.
Decimos que $\gamma$ subcubierta de $\alpha$ es subcubierta mínima de $\alpha$ si la cardinalidad de $\gamma$ es $N(\alpha)$.

*Observación.* Dado que $X$ es compacto y $\alpha$ una cubierta abierta, siempre existe una subcubierta finita.

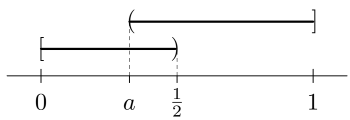
**Definición 2.2.** Dada una cubierta $\alpha$ de $X$ definimos $H(\alpha) = \log N(\alpha)$ como la *entropía de la cubierta abierta $\alpha$.*

*Observación.* Como $N(\alpha) \geq 1$ para toda $\alpha$ cubierta abierta de $X$, entonces $H(\alpha) \geq 0$ para toda $\alpha$ cubierta abierta de $X$.

**Ejemplo 2.1.** Sea $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right]$

Observemos que $1 \notin \left[0, \frac{1}{n}\right)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y entonces si $\gamma$ es una subcubierta finita de $\alpha$, tenemos que $\left(\frac{1}{3}, 1\right] \in \gamma$. Por otro lado $\left(\frac{1}{3}, 1\right]$ no es una cubierta de $[0,1]$, por lo tanto toda $\gamma$ subcubierta de $\alpha$ tiene al menos dos elementos, esto es, $N(\alpha) \geq 2$.
Considera $\gamma = \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right] \right\}$, claramente $\gamma$ es una subcubierta de $\alpha$, por lo tanto, $N(\alpha) = 2$, y $H(\alpha) = \log(2)$.

En general, para las cubiertas de la forma $\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup (a, 1]$ con $a < 1/2$, el conjunto $\gamma = \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right), (a,1] \right\}$ es subcubierta, y entonces, $N(\alpha) = 2$, y $H(\alpha) = \log(2)$.

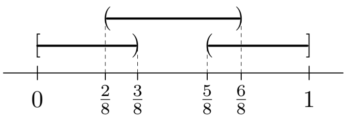



**Ejemplo 2.2.** Considera $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{ \left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right) \cap [0,1] \mid \ x \in [0,1] \right\}$.

*Observación.* $\ell([0,1]) = 1$ y $\ell\left(\left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}$, por lo que para cubrir todo el intervalo necesito al menos 3 intervalos, es decir, toda subcubierta $\gamma$ de $\alpha$ debe tener al menos tres elementos, esto es, $N(\alpha) \geq 3$.

Considera $\gamma = \left\{ \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) \cap [0,1], \left(\frac{2}{8}, \frac{6}{8}\right) \cap [0,1], \left(\frac{5}{8}, \frac{9}{8}\right) \cap [0,1] \right\}$, es claro que $\gamma$ es una cubierta del $[0,1]$.
Por lo tanto $N(\alpha) = 3$ y $H(\alpha) = \log(3)$.

**Ejemplo 2.3.** En general, si $X = [0,1]$ y $\alpha = \left\{ \left(x - \frac{1}{2N}, x + \frac{1}{2N}\right) \cap [0,1] \mid x \in X \right\}$ con $N$ fija en $\mathbb{N}$, entonces $N(\alpha) = N + 1$ y $H(\alpha) = \log(N+1)$.




*Demostración.* Siguiendo el razonamiento del ejemplo anterior, necesito al menos $N+1$ elementos de $\alpha$ para cubrir el intervalo $[0,1]$, por lo cual si $\gamma$ es subcubierta, $\gamma$ debe tener al menos $N+1$ elementos. Por lo tanto $N(\alpha) \geq N+1$.
Tomemos $\gamma = \{I_1 \ldots I_{N+1}\}$ con

$$I_1 = \left(-\frac{1}{2N^2}, -\frac{1}{2N^2} + \frac{1}{N}\right) \cap [0,1] = [x_1, y_1] = [0, y_1],$$
$$I_{j+1} = \left(y_j - \frac{1}{2N^2}, x_{j+1} + \frac{1}{N}\right) \cap [0,1].$$

Entonces se tienen $N+1$ intervalos de longitud $\frac{1}{N}$ cada uno de ellos. Por otro lado los intervalos se intersectan uno a uno, con intersección de longitud $\frac{1}{2N^2}$.
Por lo tanto, entre todos los intervalos cubren una longitud igual a $\frac{1}{N}(N+1) - \frac{1}{2N^2}(N+1) = 1 + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N^2}$.
*Observación.* Si $N > 1 \Rightarrow N < N^2 \Rightarrow \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2N} - \frac{1}{2N^2} > 1$.
Por lo tanto, los intervalos cubren una longitud mayor a 1, y por lo tanto $\gamma$ es cubierta. Entonces $N(\alpha) = N+1$ y $H(\alpha) = \log(N+1)$.

□

**Definición 2.3.** Decimos que una cubierta $\beta$ es un *refinamiento* de $\alpha$ si todo elemento de $\beta$ está contenido en algún elemento de $\alpha$. En símbolos $\alpha < \beta$.

**Proposición 2.1.** *Si $\alpha < \beta$, entonces $H(\alpha) \leq H(\beta)$.*

*Demostración.* Sea $\{B_1, \ldots, B_{N(\beta)}\}$ una subcubierta de cardinalidad mínima de $\beta$.
Como $\alpha < \beta$, entonces para toda $B \in \beta$ existe $A \in \alpha$ tal que $B \subseteq A$. Tomemos $\{A_1, \ldots, A_{N(\beta)}\}$ de tal manera que $B_i \subseteq A_i$ para $i = 1, \ldots, N(\beta)$.
Entonces, $\{A_1, \ldots, A_{N(\beta)}\}$ es una cubierta de $X$, por lo tanto $N(\alpha) \leq N(\beta)$, y por lo tanto $H(\alpha) \leq H(\beta)$. □

**Definición 2.4.** Para cualesquiera dos cubiertas $\alpha$, $\beta$ de $X$. Definimos la cubierta $\alpha \vee \beta = \{A \cap B \mid A \in \alpha, B \in \beta\}$.

*Observaciones.*

- Dado que la intersección de conjuntos es conmutativa y asociativa es claro que $\vee$ es una operación asociativa y conmutativa.

- Si $\alpha$ y $\beta$ son dos cubiertas abiertas de $X$, entonces $\alpha < \alpha \vee \beta$ ya que $A \cap B \subset A$ para cualesquiera dos conjuntos.

**Proposición 2.2.** *Si $\alpha < \beta$ y $\alpha' < \beta'$ entonces $\alpha \vee \alpha' < \beta \vee \beta'$.*

*Demostración.* Tomemos $B \cap B' \in \beta \vee \beta'$, entonces existen $A \in \alpha$ y $A' \in \alpha'$ tales que $B \subseteq A$ y $B' \subseteq A'$. Esto implica que $B \cap B' \subset A \cap A'$ y por lo tanto $\alpha \vee \alpha' < \beta \vee \beta'$. □

**Proposición 2.3.** $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$.

*Demostración.* Sean $\{A_1 \dots A_{N(\alpha)}\}$ una subcubierta mínima de $\alpha$ y $\{B_1 \dots B_{N(\beta)}\}$ una subcubierta mínima de $\beta$.
Entonces $\{A_i \cap B_j \mid i = 1 \dots N(\alpha), j = 1 \dots N(\beta)\}$ es una subcubierta de $\alpha \vee \beta$. Por lo tanto $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha) \cdot N(\beta)$.
Entonces, $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$. □

**Proposición 2.4.** *Si $\alpha < \beta$ entonces $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$.*

*Demostración.* Es claro que $\beta < (\alpha \vee \beta)$, entonces, por la proposición 2.1, $N(\beta) \leq N(\alpha \vee \beta)$.
Por otro lado tomemos $\{B_1 \dots B_{N(\beta)}\}$ subcubierta finita de $\beta$, y tomemos $A_i \in \alpha$ tal que $B_i \subseteq A_i$ con $i = 1, \dots, N(\beta)$, entonces $B_i = B_i \cap A_i$ para cada $i = 1, \dots, N(\beta)$ esto implica que $\{B_1, \dots, B_{N(\beta)}\} = \{A_1 \cap B_1, \dots, A_{N(\beta)} \cap B_{N(\beta)}\}$.
Por lo tanto $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\beta)$.
Así $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$, $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta)$. □

**Definición 2.5.** Sea $f : X \to X$ una función continua. Para cualquier cubierta $\alpha$ de $X$ definimos $f^{-1}\alpha$ como la cubierta abierta que consiste de todos los conjuntos de la forma $f^{-1}(A)$ con $A \in \alpha$.

**Proposición 2.5.** *Sean $\alpha$, $\beta$ cubiertas abiertas de $X$ y $f : X \to X$ una función continua, entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

*i)* *Si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-1}\alpha < f^{-1}\beta$.*

*ii)* *$f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta$.*

*iii)* *$H(f^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$, donde la igualdad se cumple si $f$ es suprayectiva.*

*Demostración.*

*i)* Se sigue de que la imagen inversa respeta contenciones.

*ii)* $C \in f^{-1}(\alpha \vee \beta)$ si y sólo si $C = f^{-1}(D)$ con $D \in \alpha \vee \beta$ si y sólo si $C = f^{-1}(A \cap B)$ con $A \in \alpha$ y $B \in \beta$ si y sólo si $C = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ con $A \in \alpha$ y $B \in \beta$ si y sólo si $C \in f^{-1}\alpha \vee f^{-1}\beta$.

*iii)* Si $\{A_1, \dots, A_{N(\alpha)}\}$ es una subcubierta mínima de $\alpha$, entonces $\{f^{-1}(A), \dots, f^{-1}(A_{N(\alpha)})\}$ es subcubierta de $f^{-1}\alpha$ por lo que $N(f^{-1}\alpha) \leq N(\alpha)$. Supongamos ahora que $f$ es suprayectiva y que $\{f^{-1}(B_1), \dots f^{-1}(B_m)\}$ es una subcubierta de $f^{-1}\alpha$ tal que

$$X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} f^{-1}(B_n) \quad \text{y} \quad n < N(\alpha).$$

Ahora $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} f^{-1}B_n$ implica que $f(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_n$ y, dado que $f$ es suprayectiva, tenemos que $f(X) = X$, por lo cual, $X \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} B_n$ y por lo tanto $\{B_1, \dots, B_m\}$ es una subcubierta de $\alpha$ con cardinalidad menor que $N(\alpha)$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto si $f$ es suprayectiva tenemos que, $N(\alpha) = N(f^{-1}\alpha)$. □

*Observación.* Sean $X$ y $Y$ dos espacios topológicos compactos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces si $\alpha$ es una cubierta de $Y$, $f^{-1}\alpha$ es una cubierta de $X$, por lo que las propiedades contenidas en la proposición 2.5 se cumplen también en este caso.

## 2.2 Entropía de una función relativa a una cubierta

Ya en la primera sección de este capítulo vimos que si $\alpha$ es una cubierta abierta de $X$ y $f : X \to X$, entonces, $f^{-1}\alpha$ es también una cubierta abierta de $X$, de hecho, en general para toda $n \in \mathbb{N}$ se puede definir $f^{-n}\alpha$, la cual es también una cubierta de $X$. Entonces, se puede definir la cubierta $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$.

Llamaremos $H_f^n(\alpha)$ a $H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)$

**Proposición 2.6.** *$H_f^n(\alpha)$ es una sucesión creciente.*

*Demostración.* Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha < \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n}\alpha.$$

Entonces, por la proposición 2.1, $H_f^n(\alpha) \leq H_f^{n+1}(\alpha)$. □

*Observación.* Utilizando las proposiciones 2.3 y 2.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} H_f^{n+m}(\alpha) &= H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n-m+1}\alpha) \\ &= H((\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha) \vee f^{-m}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(f^{-m}(\alpha \vee \ldots f^{-n+1}\alpha)) \\ &\leq H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}\alpha) + H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \\ &= H_f^m(\alpha) + H_f^n(\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\quad H_f^{n+m}(\alpha) \leq H_f^n(\alpha) + H_f^m(\alpha)$.

**Teorema 2.7.** *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ para todas $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ sí existe y es igual a $\inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

A las sucesiones que cumplen esta condición se les llama *subaditivas.*

*Demostración.* Tomemos $m$ fija en $\mathbb{N}$. Para toda $n \geq 0$, $n = mq + r$ con $0 \leq r < m$, entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$a_n \leq a_{mq} + a_r \leq qa_m + a_r \quad \text{lo cual implica que,} \quad \frac{a_n}{n} \leq q\frac{a_m}{n} + \frac{a_r}{n}.$$

Ahora, como $n = mq + r$ tenemos que $1 = \frac{q}{n}m + \frac{r}{n}$ y, dado que $0 \leq r < m$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{q}{n}m = 1$, esto implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} = \frac{1}{m}$
Además, $a_r$ toma sólo un número finito de valores, por lo que $\lim_{n\to\infty} q\frac{a_m}{n} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_m}{m}$, y entonces, $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \inf\left\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
Por otro lado, $\frac{a_n}{n} \geq \inf\left\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$, esto implica que $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \geq \inf\left\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
De lo cual se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\{\frac{a_n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. □

*Observación.* Este límite puede ser $-\infty$, pero si $\{a_n\}$ está acotada por abajo, entonces el límite es un valor real.
Además tenemos que para toda $\alpha$ cubierta de $X$, $N(\alpha) \geq 1$ y entonces $H_f^1(\alpha) = H(\alpha) \geq 0$.

Por otro lado, $H_f^n(\alpha)$ es una sucesión creciente para toda función $f$ y por lo tanto $H_f^n(\alpha) \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $f$, por lo cual, $\lim_{n\to\infty} \frac{H_f^n(\alpha)}{n}$ es un número real mayor o igual a cero.

**Definición 2.6.** Definimos $h(f,\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_f^n(\alpha)}{n}$ como la *entropía de $f$ relativa a la cubierta $\alpha$.*

Es claro, por la observación anterior, que $h(f,\alpha) \geq 0$ para toda $\alpha$ cubierta abierta y para toda $f$ función continua.

**Ejemplo 2.4.** Tomemos $X = [0,1]$, $\alpha = \left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right]\right\}$ y $f(x) = 0$ para toda $x \in X$.

Observemos que $f^{-n}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right) = X$ y $f^{-n}\left(\left(\frac{1}{3},1\right]\right) = \varnothing$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por lo cual $f^{-n}\alpha = \{[0,1]\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, si $B \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$, entonces $B = A \cap [0,1] \cap \cdots \cap [0,1] = A$ con $A \in \alpha$. Por lo tanto $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha = \alpha$.
Lo cual implica que $H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) = H(\alpha) = \log(2)$.

Y entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{H_f^n(\alpha)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2)}{n} = 0$.

Por lo tanto $h(f,\alpha) = 0$.

En general, si $f = c$ con $c \in [0,1]$ tenemos que existe $A \in \alpha$ tal que $f^{-n}(A) = [0,1]$, y entonces, $f^{-n}\alpha = \{[0,1]\}$, por lo tanto $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha = \alpha$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo cual $h(f,\alpha) = 0$.

**Ejemplo 2.5.** Consideremos $X = [0,1]$, $f(x) = x$ y $\alpha = \left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right]\right\}$.

Entonces, $f^{-n}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right)$ y $f^{-n}\left(\left(\frac{1}{3},1\right]\right) = \left(\frac{1}{3},1\right]$, por lo tanto $f^{-n}\alpha = \alpha$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

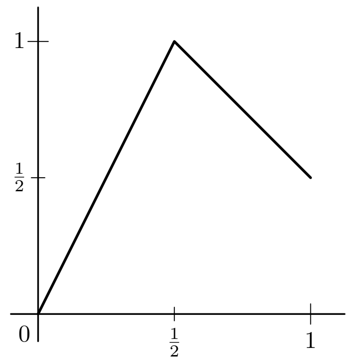
Esto implica que $\left[0,\frac{1}{2}\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right) \cap \cdots \cap \left[0,\frac{1}{2}\right) \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y análogamente $\left(\frac{1}{3},1\right] \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Esto implica que $\alpha = \left\{\left[0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right]\right\} \subseteq \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $\alpha$ es una subcubierta de $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$.
De donde se concluye que $H_f^n(\alpha) \leq H(\alpha)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $h(f,\alpha) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H(\alpha)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log 2}{n} = 0$.

Y por lo tanto $h(f,\alpha) = 0$.

**Ejemplo 2.6.** Sea $X = [0,1]$, $\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right] \right\}$ y

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{3}{2} - x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$




Es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{-n}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) = \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \quad y \quad f^{-n}\left(\left(\frac{1}{3}, 1\right]\right) = \left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}, 1\right],$$

por lo que

$$f^{-n}\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \left(\frac{1}{3 \cdot 2^n}, 1\right] \right\}.$$

Entonces, $\operatorname{card}(f^{-n}\alpha) = 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ tiene a lo más $2^n$ elementos.

Tratemos de calcular el número de intersecciones distintas del vacío que hay en $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$.

Si $A \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$, entonces $A = A_0 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$, con $A_i \in f^{-i}\alpha$.

Supongamos que existe $A_i$ tal que $A_i$ es de la forma $\left(\frac{1}{3 \cdot 2^i}, 1\right]$ y existe $j \in \{i+1, \ldots, n-1\}$ tal que $A_j = \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)$. Como $i < j$ tenemos que $3 \cdot 2^i < 2^{j+1}$ y entonces $A_i \cap A_j = \varnothing$ por lo que $A = \varnothing$.

Por lo tanto si $A$ es tal que $A_{n-1} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right)$ solamente en el caso en el que $A_i = \left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right)$ para toda $i \in \{0, \ldots n-1\}$, tenemos que $A \neq \varnothing$.

Ahora, si $A$ es tal que $A_{n-2} = \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$, de igual manera, para que $A$ sea distinto del vacío, es necesario que $A_i$ sea de la forma $\left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right)$ para toda $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ Entonces $A = A_1 \cap \cdots \cap \left[0, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cap A_{n-1}$.

Si $A_{n-1} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right)$, este elemento fue considerado en el caso anterior, por lo tanto queda un sólo elemento distinto del vacío.

En general si $A$ es tal que $A_i = \left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right)$ sólo los elementos de la forma

$$A = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \cdots \cap \left[0, \frac{1}{2^{i+1}}\right) \cap A_{i+1} \cap \cdots \cap A_{n-1}$$

pueden ser distintos del vacío, sin embargo, de esos elementos, al igual que en el caso anterior, sólo queda uno que no ha sido considerado anteriormente. Entonces $\mathrm{card}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) = n$, y entonces $N(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq n$. Por lo tanto $h(f, \alpha) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

**Proposición 2.8.** *Si $\alpha < \beta$ entonces $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$.*

*Demostración.* Por la proposición 2.5 ($i$), tenemos que si $\alpha < \beta$ entonces $f^{-n}\alpha < f^{-n}\beta$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y por la proposición 2.2, $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha < \beta \vee f^{-1}\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $H_f^n(\alpha) \leq H_f^n(\beta)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. De lo cual, $h(f, \alpha) \leq h(f, \beta)$. □

*Observación.* Si $f$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1}$ es continua y $(f^{-1})^{-1}(\alpha) = f\alpha$, es una cubierta abierta.

**Proposición 2.9.** *Si $f$ es un homeomorfismo, entonces $h(f, \alpha) = h(f^{-1}, \alpha)$.*

*Demostración.* Si $f$ homeomorfismo, entonces $f^{-1}$ es continua.
Entonces, por la proposición 2.5 ($iii$) tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} H_{f^{-1}}^n(\alpha) &= H(\alpha \vee (f^{-1})^{-1}\alpha \vee \cdots \vee (f^{-1})^{-n+1}\alpha) \\ &= H(\alpha \vee f\alpha \vee \cdots \vee f^{n-1}\alpha) \\ &= H(f^{n-1}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+2}\alpha \vee f^{-n+1}\alpha)) \\ &= H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \\ &= H_f^n(\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto $h(f^{-1}, \alpha) = h(f, \alpha)$. □

## 2.3 Entropía de una función

**Definición 2.7.** Sea $f : X \to X$ continua. Definimos la *entropía de* $f$ como $h(f) = \sup\{h(f, \alpha) \mid \alpha \text{ es cubierta de } X\}$.

*Observación.* Dado que $0 \leq h(f, \alpha)$ para toda $\alpha$, se tiene que $0 \leq h(f)$.

Además, por la proposición 2.8, tenemos que si $\alpha < \beta$ entonces $h(f, \alpha) < h(f, \beta)$, por lo cual, para calcular la entropía de $f$, basta tomar el supremo sobre las cubiertas finitas.

**Ejemplo 2.7.** Sea $X$ un espacio topológico finito y $f : X \to X$ una función continua.

Supongamos que la cardinalidad de $X$ es $m$. Sin importar cual sea la topología de $X$, el número de conjuntos abiertos contenidos en $X$ no puede ser mayor a $2^m = \text{card}(\mathcal{P}(X))$.

Entonces, si $\alpha$ es una cubierta abierta de $X$, tenemos que $\text{card}(\alpha) \leq 2^m$, y como $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ es una cubierta abierta de $X$, tenemos que $\text{card}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq 2^m$ para toda $n \in \mathbb{N}$, de lo cual podemos concluir que $H(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq \log(2^m)$.
Por lo tanto $h(f, \alpha) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^m)}{n} = 0$ y como $\alpha$ fue arbitraria, tenemos que $h(f) = 0$.

**Ejemplo 2.8.** Sea $X$ cualquier compacto. Consideremos una función constante $f : X \to X$ con $f(x) = c$.

Tomemos $\alpha$ una cubierta abierta de $X$ y consideremos $A_i \in \alpha$.

Observemos que si $c \in A_i$, entonces $f^{-n}(A_i) = X$, y si $c \notin A_i$, entonces tenemos que, $f^{-n}(A_i) = \varnothing$.

Por lo tanto $f^{-n}\alpha = \{X, \varnothing\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha = \alpha \vee \{X, \varnothing\} \vee \cdots \vee \{X, \varnothing\} = \alpha,$$

ya que si, $\quad A \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha \quad$ y $\quad A \neq \varnothing \quad$ tenemos que

$$A = A_i \cap X \cap \cdots \cap X = A_i \quad \text{con} \quad A_i \in \alpha.$$

De lo anterior, podemos concluir que $N(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) = N(\alpha)$.
Por lo tanto $h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha)}{n} = 0$, y como $\alpha$ es arbitraria tenemos que $h(f) = 0$.

**Ejemplo 2.9.** Sea $X$ un espacio compacto y $f : X \to X$ con $f(x) = x$, para toda $x \in X$.

Tomemos $\alpha$ una cubierta abierta de $X$, entonces para toda $A \in \alpha$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^{-n}(A) = A$, por lo que $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha = \alpha \vee \alpha \cdots \vee \alpha$. Por lo cual, si $A \in \alpha$ entonces $A = A \cap \cdots \cap A \in \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$. Por lo tanto, $\alpha$ es una subcubierta de $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$; de donde podemos concluir que $N(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq N(\alpha)$ y entonces $h(f,\alpha) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha)}{n} = 0$, para toda $\alpha$.
Por lo tanto $h(f) = 0$.

*Observación.* Si $f$ homeomorfismo tenemos que $h(f^{-1},\alpha) = h(f,\alpha)$ para cada cubierta $\alpha$ de $X$, por lo tanto $h(f) = h(f^{-1})$.

**Teorema 2.10.** *Sea $f : X \to X$ una función continua, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$, $h(f^k) = kh(f)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha$ una cubierta de $X$.

$$\begin{aligned}
h(f^k) &\geq h(f^k, \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{H^n_{f^k}(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[H((\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha) \vee f^{-k}(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha) \vee \cdots \\
&\qquad \cdots \vee f^{(-n+1)k}(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha))\big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big[H((\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha) \vee (f^{-k}\alpha \vee \cdots \vee f^{-2k+1}\alpha) \vee \cdots \\
&\qquad \cdots \vee (f^{-k(n-1)}\alpha \vee \cdots \vee f^{-kn+1}\alpha))\big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{kH(\alpha \vee \cdots \vee f^{-kn+1}\alpha)}{nk} = kh(f,\alpha).
\end{aligned}$$

Entonces $h(f^k,\alpha) \leq \frac{h(f^k)}{k}$, y por lo tanto $h(f) \leq \frac{h(f^k)}{k}$.
De donde $kh(f) \leq h(f^k)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha = (\alpha \vee f^{-k}\alpha \vee \ldots f^{-(n-1)k}\alpha) \vee \\
(f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-k+1}\alpha) \vee \cdots \vee (f^{-(n-1)k}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha).
\end{aligned}$$

Y dado que para todas $\alpha$, $\beta$ cubiertas se cumple que $\alpha < \alpha \vee \beta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\alpha \vee f^{-k}\alpha \vee \cdots \vee f^{-(n-1)k}\alpha < \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha, \\
\text{y entonces}\quad &\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \cdots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha < \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H(\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \cdots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha) \leq H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee (f^k)^{-1}\alpha \vee \cdots \vee (f^k)^{-n+1}\alpha)}{nk} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}\alpha)}{nk},$$

de donde
$$\frac{h(f^k,\alpha)}{k} \leq h(f,\alpha).$$
Por lo que

$$h(f^k,\alpha) \leq kh(f,\alpha) \leq kh(f), \quad \text{y esto implica que} \quad h(f^k) \leq kh(f).$$

Así $h(f^k) = kh(f)$. □

**Corolario 2.11.** *Si $f$ es homeomorfismo, entonces $h(f^k) = |k|h(f)$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.*

*Demostración.* Como $f$ es un homeomorfismo, tenemos que $f^k$ es un homeomorfismo y por la proposición 2.9 sabemos que $h(f^{-k},\alpha) = h(f^k,\alpha)$, para toda $k \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $h(f^{-k},\alpha) = h(f^k,\alpha) = kh(f,\alpha) = |-k|h(f^{-1},\alpha)$.
Ahora, en el caso en que $k = 0$, sabemos que $f^0$ es la función identidad y por el ejemplo anterior tenemos que $h(f^0) = 0$.
Por lo tanto, $h(f^k) = |k|h(f)$, para toda $k \in \mathbb{Z}$. □

**Teorema 2.12.** *Sean $X$, $Y$ dos espacios topológicos compactos y $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ continuas. Sea $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi(X) = Y$ y $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Entonces $h(g) \leq h(f)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha$ una cubierta de $Y$, entonces $\varphi^{-1}\alpha$ es una cubierta de $X$.
Además, como $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ tenemos que, $\varphi \circ f^k = g^k \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r, dash, dotted] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, dash, dotted] & Y \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

por lo que $f^{-k} \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ g^{-k}$, entonces, utilizando la parte $(iii)$ de la proposición 2.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} h(g, \alpha) &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\varphi^{-1}(\alpha \vee \cdots \vee g^{-n+1}\alpha))}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee \varphi^{-1}g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \varphi^{-1}g^{-n+1}\alpha)}{n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{H(\varphi^{-1}\alpha \vee f^{-1}\varphi^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\varphi^{-1}\alpha)}{n} \\ &= h(f, \varphi^{-1}\alpha) \end{aligned}$$

Por lo cual $h(g, \alpha) = h(f, \varphi^{-1}\alpha) \leq h(f)$, y por lo tanto $h(g) \leq h(f)$. □

**Corolario 2.13.** *Con las hipótesis del teorema anterior, si $\varphi$ es homeomorfismo entonces $h(f) = h(g)$.*

*Demostración.* Si $\varphi$ es homeomorfismo, entonces $\varphi$ es suprayectiva y por el teorema anterior tenemos que $h(g) \leq h(f)$.
Además si $\varphi$ es homeomorfismo, entonces $\varphi^{-1}$ es continua y $\varphi^{-1} \circ g = f \circ g^{-1}$, por lo tanto, análogamente al teorema anterior, podemos demostrar que $h(f) \leq h(g)$.
Por lo tanto $h(f) = h(g)$. □

**Teorema 2.14.** *Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones topológicamente conjugadas, entonces $h(f) = h(g)$.*

**Proposición 2.15.** *Si $f : X \to X$ es una función continua y $Y \subseteq X$ es un conjunto cerrado e invariante bajo $f$, entonces $h(f|_Y) \leq h(f)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha$ una cubierta abierta de $Y$, para toda $A \in \alpha$ existe $C$ abierto en $X$, tal que $A = C \cap Y$.
Entonces $\gamma = \{C_i \mid C_i \cap Y = A_i, A_i \in \alpha\} \cup X \setminus Y$ es una cubierta de $X$.
Consideremos $g = f|_Y$, y tomemos $A \in \alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-n+1}\alpha$ con $A \neq \varnothing$. Entonces existen $n$ conjuntos, $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ en $\gamma$ de tal manera que

$$A = (D_0 \cap Y) \cap g^{-1}(D_1 \cap Y) \cap \cdots \cap g^{-n+1}(D_{n-1} \cap Y).$$

Ahora, $Y$ es invariante bajo $f$, esto implica que $f(Y) \subset Y$, y entonces $D_j \neq X \setminus Y$ con $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Además para cada $j$ tenemos que:

$$g^{-j}(D_j \cap Y) = (f|_Y)^{-j}(D_j \cap Y) = f^{-j}(D_j \cap Y) \cap Y = f^{-j}(D_j) \cap f^{-j}(Y) \cap Y.$$

Pero $f(Y) \subset Y$, por lo que $Y \subset f^{-1}(Y)$, y por lo tanto $f^{-j}(Y) \cap Y = Y$. De donde se sigue que $g^{-j}(D_j \cap Y) = f^{-j}(D_j) \cap Y$.

Entonces,

$$\begin{aligned} A &= (D_0 \cap Y) \cap g^{-1}(D_1 \cap Y) \cap \cdots \cap g^{-n+1}(D_{n-1} \cap Y) \\ &= D_0 \cap Y \cap f^{-1}(D_1) \cap Y \cap \cdots \cap f^{-n+1}(D_{n-1}) \cap Y \\ &= (D_0 \cap f^{-1}(D_1) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(D_{n-1})) \cap Y \\ &= B \cap Y, \end{aligned}$$

donde $B$ es un elemento de la cubierta $(\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-n+1}\gamma)$.

De donde podemos concluir que

$$N(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-n+1}\alpha) \leq N(\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-n+1}\gamma),$$

y entonces

$$H(\alpha \vee g^{-1}\alpha \vee \cdots \vee g^{-n+1}\alpha) \leq H(\gamma \vee f^{-1}\gamma \vee \cdots \vee f^{-n+1}\gamma).$$

Por lo tanto $h(g, \alpha) \leq h(f, \gamma) \leq h(f)$
De donde se sigue que $h(g) \leq h(f)$. □

**Teorema 2.16.** *Sea $f$ una función continua, entonces $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.*

*Demostración.* Por lo visto en el capítulo 1, sabemos que $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado e invariante, entonces por la proposición 2.15, tenemos que $h(f) \geq h(f|_{\Omega(f)})$.

Para la desigualdad faltante, tomemos $\alpha$ una cubierta abierta de $X$. Se tiene entonces que $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ es también una cubierta de $X$.

Tomemos $\beta_n$ una cubierta mínima de $\Omega(f)$ extraída de $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$.

Como $\beta_n$ es cubierta de $\Omega(f)$ tenemos que $X \setminus \bigcup_{B \in \beta_n} B$ es un conjunto compacto formado por puntos errantes.

Por lo tanto podemos cubrir $X \setminus \bigcup_{B \in \beta_n} B$ con una cubierta finita de abiertos errantes cada uno de ellos contenido en algún elemento de $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$. Sea esta cubierta $\gamma$.

Entonces $\Gamma = \beta_n \cup \gamma$ es una cubierta de $X$ que refina a $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$.

Es claro que $H^k_{f^n}(\Gamma) = \Gamma \vee f^{-n}\Gamma \vee \cdots \vee f^{-n(k-1)}\Gamma$ es también una cubierta de $X$, y cada elemento de $H^k_{f^n}(\Gamma)$ se ve de la forma $\bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-ni}(C_i)$ con $C_i \in \Gamma$.

*Observación.* Si $C_r = C_j$ con $r < j$, entonces si $x \in \bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-ni}(C_i)$ tenemos que $x \in f^{-nr}(C_r)$ y $x \in f^{-nj}(C_r)$, por lo tanto $f^{nr}(x) \in C_r$ y $f^{nj}(x) \in C_r$. Pero $f^{n(j-r)}(f^{nr}(x)) = f^{nj}(x) \in C_r$ y entonces $f^{nj}(x) \in C_r \cap f^{n(j-i)}(C_r)$ y por lo tanto $C_r$ es un abierto que es no errante, lo cual implica que $C_r \in \beta_n$.

Ahora, no todos los $C_i$ pueden estar en $\gamma$. Sean $m = \text{card}(\gamma)$ y $j$ igual al número de $C_i$'s tal que $C_i$ es errante, entonces $0 \leq j \leq m$ , entonces hay $\binom{m}{j}$ posibilidades de escoger un subconjunto de $\gamma$ de $j$ elementos y hay $k(k-1)\cdots(k-j+1) = \frac{k!}{(k-j)!}$ formas de arreglar estos elementos con el resto de los $C_i$'s en $\beta_n$.

Por lo tanto $N(H_{f^n}^k(\Gamma)) \leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot \frac{k!}{(k-j)!} \cdot \text{card}(\beta_n)^{k-j}$ y como $\frac{k!}{(k-j)!} \leq k^j \leq k^m$ y $\binom{m}{j} \leq m!$ tenemos que

$$\begin{aligned} N(H(^k_{f^n}(\Gamma)) &\leq \sum_{j=0}^{m} m! \cdot k^m \cdot \text{card}(\beta_n)^{k-j} \\ &\leq (m+1) \cdot m! \cdot k^m \cdot \text{card}(\beta_n)^k = (m+1)! \cdot k^m \cdot \text{card}(\beta_n)^k, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \log N(H_{f^n}^k(\Gamma)) &\leq \log[(m+1)! \cdot k^m \cdot \text{card}(\beta_n)^k] \\ \log N(H_{f^n}^k(\Gamma)) &\leq \log(m+1)! + \log(k^m) + \log\text{card}(\beta_n)^k \\ \log N(H_{f^n}^k(\Gamma)) &\leq \log(m+1)! + m\log k + k\log\text{card}(\beta_n) \end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log N(H_{f^n}(\Gamma))}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log(m+1)! + m\log k + k\log\text{card}(\beta_n)}{k}.$$

De donde

$$h(f^n, \Gamma) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\log(m+1)! + m\log k + k\log\text{card}(\beta_n)}{k} = \log\text{card}(\beta_n).$$

Ahora, por la demostración del teorema 2.10 tenemos que

$$h(f^n, \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) = nh(f^n, \alpha)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $\alpha$ cubierta.
Además, $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha < \Gamma$.
Por lo cual $h(f^n, \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) < h(f^n, \Gamma)$.
Por lo tanto

$$h(f, \alpha) = \frac{1}{n} h(f^n, \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq h(f^n, \Gamma) \leq \frac{1}{n}\log\text{card}(\beta_n).$$

De donde

$$h(f,\alpha) \leq \frac{1}{n}\log N(\alpha\vee\cdots\vee f^{-n+1}|_{\Omega(f)}) = \frac{H^n_{f|_{\Omega(f)}}(\alpha|_{\Omega(f)} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha|_{\Omega(f)})}{n}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$h(f,\alpha) \leq h(f|_{\Omega(f)}, \alpha|_{\Omega(f)}) \leq h(f|_{\Omega(f)})$$

Por lo tanto $h(f) \leq h(f|_{\Omega(f)})$. $\square$

*Observación.* Si $Y \subseteq X$ es cerrado e invariante y tal que $\Omega(f) \subseteq Y$ tenemos por la proposición 2.15 que $h(f|_{\Omega(f)}) \leq h(f|_Y)$ y $h(f|Y) \leq h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$. Por lo tanto $h(f) = h(f|_Y)$.

**Proposición 2.17.** *El conjunto $\Omega(f)$ está contenido en el conjunto $Y = \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(X)$.*

*Demostración.* Tomemos $x \in X \setminus Y$; esto quiere decir que $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} f^i(X)$. Sea $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \notin f^n(X)\}$.
Como $X$ es compacto, entonces $f^m(X)$ también es compacto. Entonces, existen $U$, $V$ abiertos ajenos tal que $x \in U$ y $f^m(X) \subset V$. Ahora por ser $m$ el mínimo tenemos que $x \in f^{m-i}(X)$ con $i = 1, \ldots, m$, por lo tanto $f^i(x) \in f^m(X) \subset V$, con $i = 1, \ldots, m$, de lo cual se tiene que $W = U \cap (\bigcap_{i=1}^{m} f^{-i}(V))$ es una vecindad abierta de $x$.
*Observación.* Si $i \leq m$ entonces, por la definición de $W$, $f^i(W) \subset V$.
Si $i > m$ tenemos que, $f^i(W) \subseteq f^i(X) = f^m(f^{i-m}(X)) \subseteq f^m(X) \subset V$.
Por lo tanto $f^i(W) \subset V$, para toda $i$. Y dado que $U$ y $V$ son ajenos, tenemos que $f^i(W) \cap W = \varnothing$ para toda $i$, esto implica que $W$ es una conjunto errante, y de ahí que $x \notin \Omega(f)$.
De lo cual $X \setminus Y \subset \Omega(f)^c$ y por lo tanto $\Omega(f) \subset Y$. $\square$

De esta proposición se desprende fácilmente que $h(f|_{\bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(X)}) = h(f)$.

**Proposición 2.18.** *Sea $f : X \to X$ una función continua. Si existen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ subconjuntos cerrados y ajenos de $X$, tales que*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \subset f(A_1) \cap f(A_2) \cap \cdots \cap f(A_k),$$

*entonces $h(f) \geq \log(k)$.*

*Demostración.* Tomemos $O_1, O_2, \ldots, O_k$ subconjuntos abiertos ajenos en $X$ de tal manera que $A_i \subset O_i$ con $1 \leq i \leq k$.

Consideremos $O_{k+1} = X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.
Entonces $\alpha = \{O_1, O_2, \ldots, O_{k+1}\}$ es una cubierta abierta de $X$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\Gamma = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ tiene cardinalidad $k^n$.

Como $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \subset f(A_1) \cap f(A_2) \cap \cdots \cap f(A_k)$, entonces para cada $\bar{x} \in \Gamma$, el conjunto

$$E_{\bar{x}} = \{p \in X \mid p \in A_{x_1}, f(p) \in A_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(p) \in A_{x_n}\}$$

es distinto del vacío.

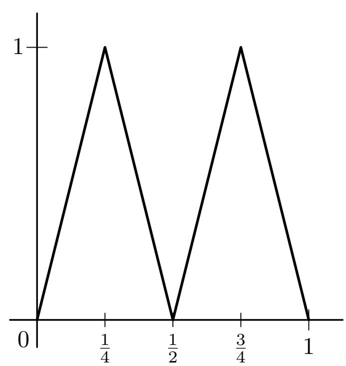
Además cada punto en este conjunto está contenido en

$$O_{x_1} \cap f^{-1}(O_{x_2}) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(O_{x_n});$$

y éste es el único elemento de $\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ que lo contiene.
De donde se sigue que $N(\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \geq k^n$.
Por lo tanto $h(f, \alpha) \geq \log(k)$, y entonces $h(f) \geq \log(k)$. $\square$

**Ejemplo 2.10.** Consideremos la función $T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$.

Tomemos $T^2(x)$




Si hacemos $A_1 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$ y $A_2 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, tenemos que $A_1$ y $A_2$ son ajenos, y además:

$$T^2(A_1) = T^2\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = T\left(T\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)\right) = T\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1]$$

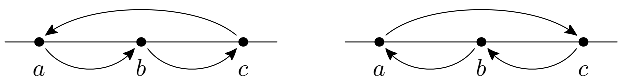
y

$$T^2(A_2) = T^2\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) = T\left(T\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right)\right) = T\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1].$$

Por lo tanto $A_1, A_2 \subseteq T(A_1) \cap T(A_2)$ con $i = 1, 2$.
Entonces por la proposición anterior tenemos que $h(T^2) \geq \log(2) > 0$, y por el teorema 2.10 se cumple que $h(T) = \frac{h(T^2)}{2} > 0$.
Por lo tanto $h(T) > 0$.

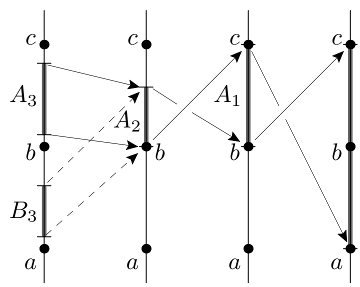
**Proposición 2.19.** *Si $f : I \to I$ tiene una órbita de periodo tres, entonces $h(f) > 0$.*

*Demostración.* Tomemos una órbita de periodo tres de $f$, entonces dicha órbita es de cualquiera de las dos formas siguientes,




Supongamos que es de la primera forma. Llamemos $I = [a, b]$ y $J = [b, c]$. Como $I \cup J \subseteq f(J)$, entonces existen $A_1 \subseteq J$ intervalo cerrado tal que $f(A_1) = I \cup J$ y $A_2 \subset J$ intervalo cerrado tal que $f(A_2) = A_1$. Observemos que $c \notin A_2$ ya que $f(c) = a \notin A_1$.

Por último, como $J \subset f(J)$ entonces existe $A_3 \subset J$ tal que $f(A_3) = A_2$, además $J \subset f(I)$ y entonces, existe $B_3 \subset I$ intervalo cerrado, tal que $f(B_3) = A_2$. Observemos que $b \notin A_3$ y $b \notin B_3$ ya que $f(b) = c \notin A_2$. Por lo tanto $A_3 \cap B_3 = \varnothing$.




Entonces $f^3(A_3) = f^2(A_2) = f(A_1) = I \cup J$ y $f^3(B_3) = f^2(A_2) = f(A_1) = I \cup J$.

Por lo tanto $A_3 \cup B_3 \subset I \cup J = f^3(A_3) \cap f^3(B_3)$. Entonces por la proposición 2.18 tenemos que $h(f^3) \geq \log(2)$. Por lo cual $h(f) \geq \frac{\log(2)}{3} > 0$.

Para el caso en que la órbita es de la segunda manera la demostración es análoga al caso anterior, aunque en este caso $A_1$ se toma en $I$. □

**Proposición 2.20.** *Si $f : I \to I$ es una función transitiva, entonces $h(f) > 0$.*

*Demostración.* Supongamos que $h(f) = 0$.

Como $f$ es transitiva, sabemos por el teorema 1.11 que existe $x \in I$, tal que $o(x, f)$ es densa en $I$. Entonces para todo $A \subseteq I$ tal que $\mathrm{int}(A) \neq \varnothing$, existe $x \in A$ tal que $o(x, f)$ es densa en $I$.

**Paso 1.** $f$ tiene un punto fijo en $(0, 1)$.

Supongamos que no, entonces $f(x) < x$ para toda $x \in (0, 1)$ o $f(x) > x$ para toda $x \in (0, 1)$.

a) Si $f(x) < x$ para toda $x \in (0, 1)$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^{n+1}(x) < f^n(x)$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$ para toda $x \in (0, 1)$. Esto implica que $o(x, f)$ es asintóticamente periódica para toda $x \in (0, 1)$, lo cual quiere decir que, para toda $x \in (0, 1)$, $x$ no tiene órbita densa. Lo cual es una contradicción.

b) Si $f(x) > x$, podemos concluir, análogamente al caso anterior que $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 1$ para toda $x \in (0, 1)$, y entonces al igual que anteriormente, $o(x, f)$ no es densa para toda $x \in (0, 1)$.

Por lo tanto, existe $z \in (0, 1)$ tal que $f(z) = z$.

**Paso 2.** Si tomamos $w \neq z \in (0, 1)$, entonces $f(w) \neq z$.

Supongamos que existe $w \in (0, 1)$, tal que $w \neq z$ y $f(w) = z$. Como $w \neq z$, entonces $w < z$ o $w > z$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $w < z$.

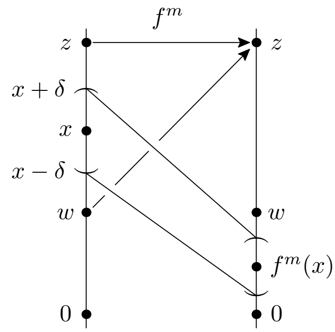
Consideremos el intervalo $[w, z]$, sabemos que existe $x \in [w, z]$ tal que $x$ tiene órbita densa. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq f^m(x) < w$.

Por otro lado $f(w) = z = f(z)$ implica que $f^n(w) = f^n(z)$, en particular $f^m(z) = f^m(w)$.

Además como $f$ es continua, sabemos que existe $\delta > 0$, de tal manera que, para toda $t \in (x - \delta, x + \delta)$, se cumple que $f^m(t) < w$.

Tomemos $A_1 = [w, x - \delta]$ y $A_2 = [x + \delta, z]$. Entonces $[w, z] \subset f^m(A_1)$ y $[w, z] \subset f^m(A_2)$.

Por lo tanto $A_1 \cup A_2 \subseteq [w, z] \subseteq f^m(A_1) \cap f^m(A_2)$. Y por la proposición 2.18 tenemos que $h(f^m) > 0$, y entonces $h(f) > 0$. Por lo tanto la afirmación queda demostrada.




*Observación.* Por la afirmación anterior, es claro que no existen $s \neq t \in [0, z]$ tal que $f(s) < z < f(t)$, ya que si existieran, por el teorema del valor intermedio, tendríamos que habría $r$ en $(s, t)$ o en $(t, s)$ de tal forma que $f(r) = z$.

Consideremos los intervalos $I_0 = [0, z]$ y $I_1 = [z, 1]$. La afirmación anterior implica que $f(I_0) \subset I_0$ o $f(I_0) \subset I_1$, pero además $f$ es transitiva, por lo cual $f(I_0) \subset I_1$. Análogamente $f(I_1) \subset I_0$.

Ahora, $f(I_0) \subset I_1$ y $f(I_1) \subset I_0$, implica que $f^2(I_0) \subseteq I_0$ y $f^2(I_1) \subseteq I_1$. Por lo tanto, para toda $n$ par $f^n(I_0) \subseteq I_0$ y $f^n(I_1) \subseteq I_1$, y para toda $n$ impar $f^n(I_0) \subseteq I_1$ y $f^n(I_1) = I_0$.

Sea $x \in I_0$ tal que $o(x, f)$ es densa en $I$. Toma $y \in \operatorname{int}(I_0)$ y $\varepsilon > 0$ de tal manera que $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset I_0$, entonces como $o(x, f)$ es densa, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$.

Como para cada $k$ impar tenemos que $f^k(x) \in I_1$, entonces $n_0$ es par. Por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2m}(x) = (f^2)^m(x) \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$, esto implica que $o(x, f^2)$ es densa en $I_0$. Por lo tanto $f^2 : I_0 \to I_0$ es transitiva.

Al igual que antes, se puede demostrar que existe $z_1 \in \operatorname{int}(I_0) = (0, z)$ tal que $z_1 = f^2(z_1)$, y además para todo $w \in \operatorname{int}(I_0)$ con $w \neq z_1$ tenemos que $f^2(w) \neq z_1$.

Ahora, como $f^2(z) = z$ y $f^2(z_1) = z_1$ tenemos que $f^2([z_1, z]) = [z_1, z]$.

Tomemos $x \in (z_1, z)$ tal que $o(x, f)$ sea densa en $I$, entonces $o(x, f^2)$ es densa en $I_0$, y como para toda $n \in \mathbb{N}$ $f^{2n}(x) = (f^2)^n(x) \in [z_1, z]$. Por lo tanto

$$I_0 = \overline{o(x, f^2)} \subseteq [z_1, z]$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $h(f) > 0$. $\square$

Por el teorema anterior podemos concluir que si una función definida en algún intervalo de los reales es caótica, entonces tiene entropía positiva.

Es posible demostrar que en el intervalo, si una función $f$ tiene entropía positiva, entonces existe $D \subset I$ cerrado de tal manera que $f$ es caótica en $D$. La demostración de la afirmación anterior se puede encontrar en Block y Coppel [3]. Cabe mencionar que, aunque la definición de caos dada por Block y Coppel es distinta a la presentada en este trabajo, ambas son equivalentes en el intervalo.

# Capítulo 3

# La función Corrimiento

En el capítulo pasado presentamos la noción de entropía topológica y vimos que puede ser cualquier valor real positivo o incluso infinito, sin embargo, a excepción del último ejemplo, todos los ejemplos dados fueron funciones con entropía cero.

Dedicaremos este capítulo a la construcción de espacios, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, la función a la que llamaremos "función corrimiento" restringida a dicho espacio, es un ejemplo de una función con entropía mayor o igual que $\log(k)$.

Además los espacios mencionados anteriormente pueden ser vistos como espacios invariantes del Cubo de Hilbert, por lo cual concluiremos que la "función corrimiento" en el Cubo de Hilbert resulta una función con entropía infinita.

**Definición 3.1.** Definimos $\Sigma_2$ como el espacio de sucesiones formadas con entradas 1 o 0. Es decir $\Sigma_2 = \{\hat{s} = (s_0 s_1 \dots) \mid s_j \in \{0, 1\}\}$.
Esto quiere decir que un elemento $\hat{s} \in \Sigma_2$ es una cadena infinita de ceros y unos.

Trataremos de dotar a $\Sigma_2$ con una métrica.

Consideremos:

$$d_2(\hat{s}, \hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

*Observación.* Para toda $\hat{s}, \hat{t} \in \Sigma_2$ se tiene que $|s_i - t_i| \leq 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$, de tal manera que $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{1}{2^i}$, y esto implica que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$. Por lo tanto $d_2(\hat{s}, \hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ siempre converge.

**Proposición 3.1.** *$d_2(\hat{s},\hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i-t_i|}{2^i}$ es una métrica en $\Sigma_2$.*

*Demostración.*

1) Para toda pareja $\hat{s},\hat{t} \in \Sigma_2$ tenemos que, $|s_i - t_i| \geq 0$ para toda $i \geq 0$. Por lo tanto $d_2(\hat{s},\hat{t}) \geq 0$ para toda $\hat{s},\hat{t} \in \Sigma_2$.

2) $d_2(\hat{s},\hat{t}) = 0$ si y sólo si $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i-t_i|}{2^i} = 0$ si y sólo si $|s_i - t_i| = 0$ para toda $i \geq 0$ si y sólo si $s_i = t_i$ para toda $i \geq 0$ si y sólo si $\hat{s} = \hat{t}$.

3) Para toda pareja $\hat{s},\hat{t} \in \Sigma_2$, y para toda $i \geq 0$ se cumple que, $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, y entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i-t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i-s_i|}{2^i}$. Y por lo tanto $d_2(\hat{s},\hat{t}) = d_2(\hat{t},\hat{s})$ para toda pareja $\hat{s},\hat{t} \in \Sigma_2$.

4) Para toda $\hat{s},\hat{t},\hat{r} \in \Sigma_2$, y para toda $i \geq 0$ sabemos que $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$, por lo cual,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - s_i| + |s_i - t_i|}{2^i} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{2^i},$$

y entonces

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{2^i}.$$

Por lo tanto $d_2(\hat{r},\hat{s}) + d_2(\hat{s},\hat{t}) \geq d_2(\hat{r},\hat{t})$.

Por lo tanto $d_2(\hat{s},\hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i-t_i|}{2^i}$ es una métrica. □

**Proposición 3.2.** *Sean $\hat{s},\hat{t} \in \Sigma_2$, y supongamos que $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces $d_2(\hat{s},\hat{t}) \leq \frac{1}{2^n}$.*

*Demostración.* Si $s_i = t_i$ para toda $i \leq n$, entonces,

$$\begin{aligned} d_2(\hat{s},\hat{t}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{0}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.3.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, si $d_2(\hat{s}, \hat{t}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para toda $i \leq n$.*

*Demostración.* Supongamos que $s_j \neq t_j$ para alguna $j \leq n$ entonces,

$$d_2(\hat{s}, \hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{1}{2^j} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

Por lo tanto $s_i = t_i$ para toda $i \leq n$. □

**Proposición 3.4.** $(\Sigma_2, d)$ *es un espacio métrico compacto.*

*Demostración.* Recordemos que un conjunto $K$ es compacto, si y sólo si, todo subconjunto infinito de $K$, tiene un punto de acumulación en $K$.

Sea $E \subset \Sigma_2$ un conjunto infinito.

Dividamos a $E$ en los dos conjunto siguientes:

$$E_0 = \{\hat{s} \in E \mid s_0 = 0\},$$
$$E_1 = \{\hat{s} \in E \mid s_0 = 1\}.$$

Dado que $E$ es un conjunto infinito, podemos asegurar que, al menos uno de los $E_i$ con $i = 0, 1$ es infinito. Sea este $E_{i_0}$.

Podemos, a su vez, dividir a $E_{i_0}$ en los conjuntos,

$$E_{i_0 0} = \{\hat{s} \in E_{i_0} \mid s_1 = 0\},$$
$$E_{i_0 1} = \{\hat{s} \in E_{i_0} \mid s_1 = 1\}.$$

Y al igual que antes, sabemos que al menos uno de estos dos conjuntos es infinito. Tomemos a $E_{i_0 i_1}$, el subconjunto infinito de $E_{i_0}$.

Siguiendo este procedimiento inductivamente, obtenemos una sucesión $\hat{x} = (i_0 i_1 \ldots i_m, \ldots) \in \Sigma_2$ con la propiedad de que para cada $m \in \mathbb{N}$ el correspondiente conjunto $E_{i_0 i_1 \ldots i_m} \subset E$ es infinito. Probaremos que $\hat{x}$ es un punto de acumulación de $E$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

Como $E_{i_0 i_1 \ldots i_m}$ es infinito existe $\hat{y} \neq \hat{x}$, tal que $\hat{y} \in E_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_m} \subset E$, lo cual quiere decir que $\hat{x}$ y $\hat{y}$ coinciden en las primeras $m$ entradas, y entonces, por la proposición 3.2 sabemos que, $d_2(\hat{x}, \hat{y}) \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon$.

Por lo tanto $\hat{x}$ es punto de acumulación de $E$.

Por lo tanto $\Sigma_2$ es compacto. □

**Proposición 3.5.** $(\Sigma_2, d)$ *es totalmente disconexo.*

*Demostración.* Recordemos que un espacio $X$ es totalmente disconexo si para toda $x \in X$, la componente conexa de $x$, es decir, el mayor subconjunto conexo de $X$ que contiene a $x$, es $\{x\}$.
Sea $\hat{x} \in \Sigma_2$. Sea $\mathcal{U}$ un conexo tal que $\hat{x} \in \mathcal{U}$, y supongamos que existe $\hat{y} \neq \hat{x} \in \mathcal{U}$. Ahora $\hat{x} \neq \hat{y}$ implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \neq y_N$.
Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} V =& \{\hat{s} \mid s_N = 1\}, \\ W =& \{\hat{s} \mid s_N = 0\}. \end{aligned}$$

Tomemos $\hat{t} \in V$, entonces $t_N = 1$. Consideremos $B_{\frac{1}{2^N}}(\hat{t})$ entonces, si $\hat{r} \in B_{\frac{1}{2^N}}(\hat{t})$, $\hat{r}$ coincide con $\hat{t}$ en las primeras $N$ entradas. Por lo tanto $r_N = 1$. Entonces, para toda $\hat{t} \in V$ tenemos que $B_{\frac{1}{2^N}}(\hat{t}) \subseteq V$.
Por lo tanto, tenemos que $V$ es abierto.
Análogamente podemos demostrar que $W$ es abierto.

Además claramente $V \cup W = \Sigma_2$, por lo cual sabemos que $\mathcal{U} \subset V \cup W$.

Y como $V \cap W = \varnothing$, entonces $V$ y $W$ son conjuntos cerrados, por lo cual $\overline{V} \cap W = \varnothing = V \cap \overline{W}$.

Por lo tanto $V$ y $W$ forman una disconexión de $\mathcal{U}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la componente conexa de cualquier $x \in \Sigma_2$ es $\{x\}$.
Por lo tanto $\Sigma_2$ es totalmente disconexo. □

**Proposición 3.6.** *Todo punto en* $\Sigma_2$ *es un punto de acumulación de* $\Sigma_2$.

*Demostración.* Sean $\hat{s} \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$.

Consideremos $B_\varepsilon(\hat{s})$, sabemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{2^m}}(\hat{s}) \subset B_\varepsilon(\hat{s})$.
Tomemos $\hat{t} \in \Sigma_2$ así:

$$\hat{t} = (s_0 s_1 \dots s_m t_{m+1} \dots) \quad \text{con} \quad t_{m+1} \neq s_{m+1}$$

Entonces $\hat{t} \in B_{(\frac{1}{2^m})} \backslash (\hat{s})$. Por lo tanto $\hat{s}$, es punto de acumulación de $\Sigma_2$. □

**Teorema 3.7.** $\Sigma_2$ *es homeomorfo a un conjunto de Cantor.*

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 3.4, 3.5 y 3.6. □

**Definición 3.2.** Definimos a la función corrimiento como $\sigma_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dada por $\sigma_2(\hat{s}) = \sigma_2(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$.

**Proposición 3.8.** *La función $\sigma_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.*

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $\hat{s} \in \Sigma_2$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.
Tomemos $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$.
Sea $\hat{t} \in \Sigma_2$ tal que $d_2(\hat{s}, \hat{t}) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$, esto quiere decir por la proposición 3.3 que $s_i = t_i$ para toda $i \leq n+1$, por lo tanto $\sigma_2(\hat{s})$ coincide con $\sigma_2(\hat{t})$ en las primeras $n$ entradas, y entonces por la proposición 3.2 $d_2(\sigma_2(\hat{s}), \sigma_2(\hat{t})) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. □

Recuérdese que $\mathrm{Per}(\sigma_2)$ denota al conjunto de todos los puntos periódicos de $\sigma_2$.

**Proposición 3.9.** *El conjunto* $\mathrm{Per}(\sigma_2)$ *es denso en* $\Sigma_2$*.*

*Demostración.* Tomemos un punto $\hat{s} \in \Sigma_2$, $\hat{s} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$. Tenemos que encontrar una sucesión $\{\hat{t}_n\}$ de puntos periódicos en $\Sigma_2$ bajo $\sigma_2$ que converjan a $\hat{s}$.
Consideremos $\hat{t}_n = (s_0 s_1 \dots s_n s_0 s_1 \dots s_n s_0 \dots)$, es decir, $\hat{t}_n$ está formado por bloques de las primeras $n$ entradas de $\hat{s}$. Nótese que $\hat{t}_n$ es un punto de periódo $n$. Entonces $\hat{t}_n$ coincide con $\hat{s}$ en las primeras $n$ entradas, y por la proposición 3.2 tenemos que $d_2(\hat{t}_n, \hat{s}) \leq \frac{1}{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \hat{t}_n = \hat{s}$.
Por lo tanto $\mathrm{Per}(\sigma_2)$ es denso en $\Sigma_2$. □

**Proposición 3.10.** *$\sigma_2$ es sensible a condiciones iniciales.*

*Demostración.* Tomemos $\delta = \frac{1}{2}$ y sean $\hat{x} = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_2$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $B_{\frac{1}{2^n}}(\hat{x})$.
Tomemos $\hat{z} \in B_{\frac{1}{2^n}}(\hat{x})$ tal que $x_{n+1} \neq z_{n+1}$, entonces $d_2(\sigma_2^n(\hat{x}), \sigma_2^n(\hat{z})) \geq \frac{1}{2}$.
Por lo tanto $\sigma_2$ es sensible a condiciones iniciales. □

**Proposición 3.11.** *$\sigma_2$ es una función transitiva.*

*Demostración.* Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \Sigma_2$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Consideremos $B_{\varepsilon_1}(\hat{x})$ y $B_{\varepsilon_2}(\hat{y})$.
Existen $n$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $B_{\frac{1}{2^n}}(\hat{x}) \subset B_{\varepsilon_1}(\hat{y})$ y $B_{\frac{1}{2^m}}(\hat{y}) \subset B_{\varepsilon_2}(\hat{y})$.
Tomemos $\hat{s} \in \Sigma_2$ así: $\hat{s} = (x_0 x_1 x_2 \dots x_n y_0 y_1 y_2 \dots y_m \dots)$.
Entonces $\hat{s}$ coincide con $\hat{x}$ en las primeras $n$ entradas, y por lo tanto $\hat{s} \in B_{\frac{1}{2^n}}(\hat{x}) \subset B_{\varepsilon_1}(\hat{x})$. Además $\sigma_2^{n+1}(\hat{s}) = (y_0 y_1 y_2 \dots y_m \dots)$. Por lo tanto $\sigma_2^{n+1}(\hat{s})$ coincide con $\hat{y}$ en las primeras $m$ entradas, y entonces $\sigma_2^n(\hat{s}) \in B_{\frac{1}{2^m}}(\hat{y}) \subset B_{\varepsilon_2}(\hat{y})$.
Así, $\sigma_2^{n+1}(B_{\varepsilon_1}(\hat{x})) \cap B_{\varepsilon_2}(\hat{y}) \neq \varnothing$.
Por lo tanto $\sigma$ es transitiva. □

**Teorema 3.12.** *$\sigma_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es una función caótica.*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente de las proposiciones 3.9, 3.10 y 3.11. □

**Proposición 3.13.** *$h(\sigma_2) \geq \log(2)$.*

*Demostración.* Considera los conjuntos

$$A = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 0\},$$
$$B = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 1\}.$$

Como vimos en la proposición 3.5 $A, B$ son abiertos y $\Sigma_2 \subseteq A \cup B$, entonces $\alpha = \{A, B\}$ es una cubierta abierta de $\Sigma_2$ con cardinalidad 2. Por lo tanto $H(\alpha) = \log(2)$.

Observemos que

$$\sigma^{-1}(A) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_1 = 0\} \quad \text{y} \quad \sigma^{-1}(B) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_1 = 1\}.$$

Entonces,

$$A \cap \sigma_2^{-1}(A) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 0 \quad \text{y} \quad t_1 = 0\} = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid \hat{t} = (00t_2t_3\ldots)\}.$$
$$A \cap \sigma_2^{-1}(B) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 0 \quad \text{y} \quad t_1 = 1\} = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid \hat{t} = (01t_2t_3\ldots)\}.$$
$$B \cap \sigma_2^{-1}(A) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 1 \quad \text{y} \quad t_1 = 0\} = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid \hat{t} = (10t_2t_3\ldots)\}.$$
$$B \cap \sigma_2^{-1}(B) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = 1 \quad \text{y} \quad t_1 = 1\} = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid \hat{t} = (11t_2t_3\ldots)\}.$$

Por lo tanto $\alpha \vee \sigma_2^{-1}\alpha$ consta de cuatro elementos. Además es claro que si $\gamma$ es un subconjunto propio de $\alpha \vee \sigma_2^{-1}\alpha$, entonces $\gamma$ no es cubierta, por lo cual $N(\alpha \vee \sigma_2^{-1}\alpha) = 4$, y entonces, $H^2_{\sigma_2} = \log(2)$.

En general, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sigma_2^{-n}(A) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_n = 0\} \quad \text{y} \quad \sigma_2^{-n}(B) = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_n = 1\}.$$

Entonces, si

$$A_{i_0 i_1 i_2 \ldots i_n} = \{\hat{t} \in \Sigma_2 \mid t_0 = i_0, t_1 = i_1, \ldots, t_n = i_n\},$$

tenemos que $\alpha \vee \sigma_2^{-1}\alpha \vee \cdots \vee \sigma_2^{-n+1} = \bigcup\{A_{i_0 i_1 \ldots i_n}\}$.
Al igual que antes, necesitamos a todos los elementos de $\alpha \vee \cdots \vee \sigma_2^{n-1}\alpha$ para formar una cubierta de $\Sigma_2$.
Por lo tanto $N(\alpha \vee \cdots \vee \sigma_2^{-n+1}) = 2^n$, y entonces $H^n_{\sigma_2}(\alpha) = \log(2^n)$.
Por lo cual $h(f, \alpha) = \log(2)$, y esto implica que $h(f) \geq \log(2)$. □

**Definición 3.3.** Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces podemos definir análogamente a $\Sigma_2$, al espacio

$$\Sigma_k = \left\{ \hat{s} = (s_0 s_1 \dots) \mid s_j \in \left\{ \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{k}{k} \right\} \right\}.$$

Si tomamos

$$d_k(\hat{s}, \hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Entonces, como $|s_i - t_i| \leq 1$ para toda $i$, $d_k$ siempre converge, y por lo tanto, por la proposición 3.1, $d_k$ es una métrica en $\Sigma_k$.

Además es inmediato ver que $d_k$ cumple con las propiedades de las proposiciones 3.2 y 3.3.

**Proposición 3.14.** $(\Sigma_k, d_k)$ *es un espacio métrico compacto.*

*Demostración.* Sea $E \subset \Sigma_k$ un conjunto infinito. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \hat{s} \in E \mid s_0 = \frac{1}{k} \right\}, \\ E_2 &= \left\{ \hat{s} \in E \mid s_1 = \frac{2}{k} \right\}, \\ &\vdots \\ E_k &= \left\{ \hat{s} \in E \mid s_k = \frac{k}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Dado que $E$ es un conjunto infinito, es claro que al menos uno de los conjuntos anteriores es también infinito. Podemos repetir el proceso hecho en la demostración de la proposición 3.4 para demostrar que $E$ tiene un punto de acumulación $\Sigma_k$.
Por lo tanto $\Sigma_k$ es compacto. □

**Proposición 3.15.** $(\Sigma_k, d_k)$ *es totalmente disconexo.*

*Demostración.* Sean $\hat{x} \in \Sigma_k$ y $\mathcal{U}$ un conexo que contiene a $\hat{x}$, y supongamos que existe $\hat{y} \neq \hat{x} \in \mathcal{U}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \neq y_N$. Si consideramos los conjuntos,

$$\begin{aligned} V &= \{\hat{s} \in \Sigma_k \mid s_N = x_N\} \quad \text{y} \\ W &= \{\hat{s} \in \Sigma_k \mid s_N \neq x_N\}, \end{aligned}$$

tenemos que, igual que en la proposición 3.5, $V$ y $W$ forman una disconexión de $\mathcal{U}$.

Por lo tanto para toda $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es la componente conexa. Por lo tanto $\Sigma_k$ es totalmente disconexo. □

**Proposición 3.16.** *Todo punto en $\Sigma_k$ es punto de acumulación.*

*Demostración.* La demostración es análoga a la de la proposición 3.6. □

**Teorema 3.17.** *$\Sigma_k$ es homeomorfo a un Cantor.*

*Demostración.* Se sigue de las proposiciones 3.14, 3.15 y 3.16. □

**Definición 3.4.** Definimos a la función $\sigma_k : \Sigma_k \to \Sigma_k$ dada por $\sigma_k((t_0t_1t_2\dots)) = (t_1t_2\dots)$, como la función corrimiento en $\Sigma_k$.

*Observación.* $\sigma_k$ es una función continua. La demostración es exactamente igual al caso de $\sigma_2$.

**Teorema 3.18.** *$\sigma_k : \Sigma_k \to \Sigma_k$ es una función caótica.*

*Demostración.* Se puede demostrar análogamente a las proposiciones 3.9, 3.10 y 3.11 que el conjunto de puntos periódicos de $\sigma_k$ es denso, y que $\sigma_k$ es una función transitiva y sensible a condiciones iniciales.
Por lo tanto $\sigma_k$ es una función caótica. □

**Proposición 3.19.** $h(\sigma_k) \geq \log(k)$.

*Demostración.* Para cada $i \in \{1, 2\dots, k\}$, consideremos el siguiente conjunto:

$$A_i = \left\{ \hat{t} = (t_0t_1\dots) \mid t_0 = \frac{i}{k} \right\}.$$

Entonces es claro que,

1) Para cada $1 \leq i \leq k$, $A_i$ es un conjunto cerrado en $\Sigma_k$.

2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si y sólo si $i \neq j$.

3) $\sigma_k(A_i) = \Sigma_k$ para toda $i \in \{1, 2\dots, k\}$.

Por lo tanto, por la proposición 2.18, tenemos que $h(\sigma) \geq \log(k)$. □

**Definición 3.5.** Definimos al cubo de Hilbert como $\mathcal{Q} = \displaystyle\prod_{i=0}^{\infty}[0, 1]$.

*Observación.* Si $\hat{t} \in \mathcal{Q}$ entonces $\hat{t}$ es de la forma $\hat{t} = (t_0 t_1 \dots)$ con $t_i \in [0,1]$.

De igual manera que en el caso de $\Sigma_2$ dotaremos a $\mathcal{Q}$ con la métrica

$$d(\hat{s}, \hat{t}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i}.$$

**Definición 3.6.** Definimos $\sigma : (\mathcal{Q}, d) \to (\mathcal{Q}, d)$ de la misma manera que en $\Sigma_2$, es decir, $\sigma(\hat{t}) = \sigma(t_0 t_1 \dots) = (t_1 t_2 \dots)$.

*Observación.* La función corrimiento en $\mathcal{Q}$ es continua y caótica.

**Teorema 3.20.** *$\sigma : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ tiene entropía infinita.*

*Demostración.* Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$,como $\Sigma_k$ es compacto, entonces es un subconjunto cerrado de $\mathcal{Q}$, y además $\sigma|_{\Sigma_k} = \sigma_k$, entonces, $\Sigma_k$ es un conjunto invariante bajo $\sigma$ en $\mathcal{Q}$. Entonces, por la proposición 2.15, para toda $k \in \mathbb{N}$, $h(\sigma) \geq h(\sigma|_{\Sigma_k}) = h(\sigma_k) \geq \log(k)$.
Por lo tanto $h(\sigma) = \infty$. □

Los espacios que hemos descrito junto con la función corrimiento, $\sigma$, forman lo que se conoce bajo el nombre de Dinámica Simbólica. Ésta es una de las herramientas más importantes en el estudio de los sistemas dinámicos discretos.

Uno de los primeros lugares donde esta herramienta aparece es en el estudio de la dinámica de las funciones $f_\lambda = \lambda x(1-x)$ cuando $\lambda = 2 + \sqrt{5}$. Se puede demostrar (ver Devaney, pág. 38) que $f_\lambda$ restringida al conjunto $\{x_0 \mid o(x_0, f) \text{ es acotada}\}$ es topológicamente conjugada a $\sigma_2 : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

Este resultado junto con la proposición 3.13 nos dice que si $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, entonces $h(f_\lambda) \geq \log(2)$.

# Capítulo 4

# Una segunda definición

En este capítulo, veremos dos nuevas definiciones de entropía, una usando conjuntos generadores, y otra usando conjuntos separados.

Estas dos nuevas definiciones están limitadas a espacios métricos compactos. Estas definiciones fueron creadas por Dinaburg y Bowen, aunque fue Bowen quien después las extendió a espacios métricos no necesariamente compactos.

Demostraremos tanto la equivalencia entre las dos definiciones dadas en este capítulo, como la equivalencia entre éstas y nuestra primera definición, con cubiertas abiertas, en espacios métricos compactos.

Veremos que nuestras dos nuevas definiciones están expresadas en términos de la métrica del espacio, lo cual nos permite obtener, de manera directa, que la entropía de las isometrías es cero.

Veremos también que si tenemos dos métricas uniformemente equivalentes, la entropía de una función es la misma.

Además, demostraremos que un homeomorfismo del círculo unitario al círculo unitario, y un homeomorfismo del intervalo unitario al intervalo unitario tienen entropía cero.

Por último demostraremos que una función definida en algún intervalo cerrado de los números reales con derivada continua tiene entropía finita.

En este capítulo $X$ siempre denotará un espacio métrico compacto con métrica $d$, y $T : X \to X$ una función continua.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos definir la métrica:

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(T^i(x), T^i(y))\},$$

es decir, $d_n(x, y)$ es la máxima distancia entre las iteraciones de $x$ y $y$ hasta la iteración $n - 1$.

**Proposición 4.1.** *$d_n$ es, efectivamente una métrica en $X$.*

*Demostración.* Sean $x, y, z$ en $X$ y $n \in \mathbb{N}$.

1) Dado que $d$ es métrica en $X$, tenemos que $d(T^i(x), T^i(y)) \geq 0$ para toda $0 \leq i \leq n-1$. Por lo tanto $\max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(y))\} \geq 0$, y entonces, $d_n(x, y) \geq 0$.

2) $d(T^i(x), T^i(y)) = d(T^i(y), T^i(x))$ para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ya que $d$ es una métrica, esto implica que,
$$\max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(y))\} = \max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(y), T^i(x))\},$$
por lo cual $d_n(x, y) = d_n(y, x)$.

3) Supongamos que $x = y$, entonces $T^i(x) = T^i(y)$ para toda $0 \leq i \leq n-1$, esto quiere decir que $d(T^i(x), T^i(y)) = 0$ para toda $0 \leq i \leq n-1$, por lo tanto $d_n(x, y) = 0$.

4) Ahora supongamos que $d_n(x, y) = 0$, entonces
$$\max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(y))\} = 0,$$
y esto implica que $d(T^i(x), T^i(y)) = 0$ para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$, en particular, $d(x, y) = 0$, y como $d$ es métrica, esto quiere decir que $x = y$.

5) Para toda $i \in \{0, \dots, n-1\}$ se cumple que
$$d(T^i(x), T^i(z)) \leq d(T^i(x), T^i(y)) + d(T^i(y), T^i(z)),$$
esto implica que
$$\begin{aligned}\max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(z))\} &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(y)) + d(T^i(y), T^i(z))\} \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(x), T^i(y)\} + \max_{0 \leq i \leq n-1}\{d(T^i(y), T^i(z))\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $d_n$ es una métrica en $X$. □

*Observación.* Si $B_r^d(x)$ denota a la bola de radio $r$ con la métrica $d$ tenemos que, $y \in B_r^{d_n}(x)$ si y sólo si $d_n(x, y) < r$, esto es, si y sólo si $\max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)) < r$, si y sólo si $d(T^i(x), T^i(y)) < r$, para toda $i = 0, \dots, n-1$, si y sólo si $T^i(y) \in B_r^d(T^i(x))$ para toda $i = 0, \dots, n-1$, si y sólo si $y \in T^{-i}(B_r^d(T^i(x)))$ para toda $i = 0, \dots, n-1$ si y sólo si $y \in \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(B_r^d(T^i(x)))$.

**Definición 4.1.** Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, decimos que $F \subseteq X$ es un *conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$ con respecto a $T$*, si para toda $x \in X$ existe $y \in F$ tal que $d_n(x, y) \leq \varepsilon$; es decir,

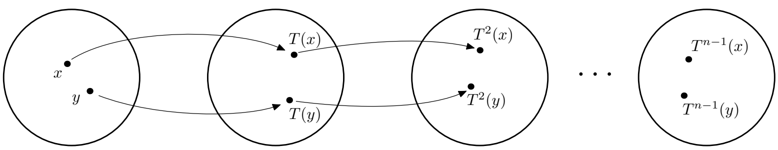
$$X \subseteq \bigcup_{y\in F} \overline{B}_{\varepsilon}^{d_n}(y) = \bigcup_{y\in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\overline{B}_{\varepsilon}^{d}(T^i(y)).$$

Si queremos hacer énfasis en la métrica a la cual nos referimos, podemos decir que $F$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T, d)$ generador de $X$.

*Observación.* Nótese que, como $X$ es métrico compacto, para toda $\varepsilon$ existe $F \subset X$ finito, tal que $F$ es $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, considérese la cubierta abierta $\{B_{\varepsilon}^{d_n}(x) \mid x \in X\}$. Como $X$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_k \in X$ tales que $X \subset B_{\varepsilon}^{d_n}(x_1) \cup B_{\varepsilon}^{d_n}(x_2) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon}^{d_n}(x_k)$. De donde $F = \{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$.

La definición anterior nos dice que si $F$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$, entonces para todo $x \in X$ existe un elemento $y$ en $F$ de tal manera que, hasta la iteración $n - 1$, estos puntos no se separan más de $\varepsilon$.




Imaginemos que podemos distinguir dos órbitas $o(x, T)$ y $o(y, T)$ en sus primeras $n$ iteraciones, sólo cuando para alguna $0 \leq i \leq n - 1$ se tenga que $d(T^i(x), T^i(y)) > \varepsilon$. Entonces sólo veríamos una cantidad de órbitas distintas igual a la cardinalidad de $F$.

**Definición 4.2.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Definimos $r_n(\varepsilon, T)$ como la mínima cardinalidad de cualquier conjunto $F$ que sea $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$. Es decir, $r_n(\varepsilon, T) = \min\{\text{card}(F) \mid F \text{ es un conjunto } (n, \varepsilon, T) \text{ generador de } X\}$.

**Proposición 4.2.**

*i)* $r_n(\varepsilon, T) < \infty$.

*ii)* *Si* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ *entonces* $r_n(\varepsilon_1, T) \geq r_n(\varepsilon_2, T)$.

*Demostración.*

*i)* Se sigue de la observación anterior.

*ii)* Sean $s = r_n(\varepsilon_1, T)$ y $F = \{y_1, y_2, \dots y_s\}$ un conjunto $(n, \varepsilon_1, T)$ generador de $X$ con cardinalidad $s$, entonces,

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_1}^{d_n}(y_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} B_{\varepsilon_2}^{d_n}(y_i),$$

por lo tanto $\{y_1, \dots, y_s\} = F$ es un conjunto $(n, \varepsilon_2, T)$ conjunto generador de $X$.

De donde, $r_n(\varepsilon_1, T) \geq r_n(\varepsilon_2, T)$. □

**Definición 4.3.** Sea $\varepsilon > 0$. Definimos $r(\varepsilon, T) = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log r_n(\epsilon, T)}{n}$.

*Observación.* Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces por la proposición 4.2 *(ii)* tenemos que $r_n(\varepsilon_1, T) \geq r_n(\varepsilon_2, T)$, por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log r_n(\varepsilon_1, T)}{n} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{log r_n(\varepsilon_2, T)}{n},$$

y entonces $r(\varepsilon_1, T) \geq r(\varepsilon_2, T)$.

**Definición 4.4.** Definimos la nueva entropía como $\mathrm{ent}(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} r(\varepsilon, T)$. Podemos escribir $\mathrm{ent}_d(T)$ si queremos hacer énfasis en la métrica.

**Definición 4.5.** Sean $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $K$ un subconjunto de $X$. Decimos que $K$ es un *conjunto* $(n, \varepsilon)$ *separado respecto a* $T$, si dados $x \neq y$ en $K$, entonces $d_n(x, y) > \varepsilon$.

*Observaciones.*

1. Si $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado respecto a $T$, entonces $d_n(x, y) > \varepsilon$ para toda $x \neq y$, de modo que para cada $x \in E$ el conjunto

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} T^{-i}\overline{B}_\varepsilon(T^i(x))$$

no contiene ningún otro punto de $E$.

2. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, si $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado respecto a $T$, entonces $\mathrm{card}(E) \leq m(\varepsilon)$.

   Sea $E$ un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado respecto a $T$.

   Consideremos $\alpha = \{B_{\varepsilon/2}^{d_n}(x)\}_{x\in X}$, entonces $\alpha$ es una cubierta abierta de $X$, y como $X$ es compacto, sabemos que $\alpha$ tiene una subcubierta finita, esto quiere decir que existen $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in X$ tales que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B^{d_n}_{\varepsilon/2}(x_i)$. Entonces $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B^{d_n}_{\varepsilon/2}(x_1)$.

Supongamos que existen $x \neq y \in E$ tales que $x, y \in B^{d_n}_{\varepsilon/2}(x_i)$ para alguna $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Entonces $d_n(x,y) \leq d_n(x,x_i) + d_n(x_i,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada bola en $\left\{B^{d_n}_{\varepsilon/2}\right\}$ contiene a lo más un punto de $E$.

De donde podemos concluir, que la $\operatorname{card}(E) \leq m$.

**Definición 4.6.** Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos a $s_n(\varepsilon, T)$ como la máxima cardinalidad de cualquier conjunto $E \subset X$ que sea $(n, \varepsilon)$ separado respecto a $T$.

*Observación.* Por la observación anterior $s_n(\varepsilon, n)$ está bien definido y es finito.

**Proposición 4.3.**

*i) Dadas $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T) \leq r_n\left(\frac{\varepsilon}{2}, T\right)$.*

*ii) Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces $s_n(\varepsilon_1, T) \geq s_n(\varepsilon_2, T)$.*

*Demostración.*

*i)* Sea $E$ un subconjunto de $X$ $(n, \varepsilon)$ separado de máxima cardinalidad, es decir, $\operatorname{card}(E) = s_n(\varepsilon)$, y supongamos que existe $x \in X$ tal que para toda $y \in E$, $x \notin \overline{B}^{d_n}_{\varepsilon}(y)$. Esto implica que $d_n(x,y) > \varepsilon$, esto quiere decir que $E \cup \{x\}$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado respecto a $T$ con cardinalidad mayor a la de $E$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto para toda $x \in X$ existe $y \in E$ tal que $x \in \overline{B}^{d_n}_{\varepsilon}(y)$. Esto quiere decir que $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $X$, y entonces $r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T)$.

Para la siguiente desigualdad tomemos $E$ un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado tal que $\operatorname{card}(E) = s_n(\varepsilon, T)$ y $F$ un conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$ generador tal que $r_n(\varepsilon, T)$. Definimos $\varphi : E \to F$, escogiendo para cada $x \in E$ algún punto $\varphi(x)$ de tal manera que $d_n(x, \varphi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nótese que, dado que $F$ es un conjunto $(n, \frac{\varepsilon}{2})$ generador de $X$ respecto a $T$, siempre existe $\varphi(x)$ con esta propiedad. Supongamos que existen $x \neq y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$, entonces $d_n(x,y) \leq d_n(x, \varphi(x)) + d_n(\varphi(x), y)$ $= d_n(x, \varphi(x)) + d_n(\varphi(y), y) + \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Lo cual es una contradicción ya que $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado.

Así, $\varphi$ es una función inyectiva y por lo tanto $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$, entonces $s_n(\varepsilon, T) \leq r_n(\frac{\varepsilon}{2}, T)$.

Por lo tanto $r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T) \leq r_n(\frac{\varepsilon}{2}, T)$.

*ii)* Sean $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Si $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon_2)$ separado de cardinalidad $s_n(\varepsilon_2, T)$ entonces $d_n(x, y) > \varepsilon_2 > \varepsilon_1$ para todas $x$ y $y$ en $E$, por lo tanto $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon_1)$ separado.
Por lo cual $s_n(\varepsilon_1, T) \geq s_n(\varepsilon_2, T)$. □

**Definición 4.7.** Sea $\varepsilon > 0$ definimos $s(\varepsilon, T) = \limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\log s_n(\varepsilon, T)}{n}$.
Si queremos hacer énfasis en la métrica escribimos $s(\varepsilon, T, d)$.

**Proposición 4.4.** *Sea $T : X \to X$. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

*i)* *Sea $\varepsilon > 0$, entonces $r(\varepsilon, T) \leq s(\varepsilon, T) \leq r(\frac{\varepsilon}{2}, T)$.*

*ii)* *Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces $s(\varepsilon_2, T) \leq s(\varepsilon_1, T)$*

*iii)* $\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, T) = \lim_{\varepsilon \to 0} r(\varepsilon, T) = \operatorname{ent}(T)$

*Demostración.*

*i)* Se sigue inmediatamente de la proposición 4.3 *(i)*.

*ii)* Se sigue de la proposición 4.3 *(ii)*.

*iii)* Del inciso *(i)* de esta proposición sabemos que $r(\varepsilon, T) \leq s(\varepsilon, T) \leq r(\frac{\varepsilon}{2}, T)$. Tomando el límite cuando $\varepsilon$ tiende a 0 tenemos que $\operatorname{ent}(T) \leq \lim_{\epsilon \to 0} s(\varepsilon, T) \leq \operatorname{ent}(T)$.

□

Lo anterior nos prueba que es lo mismo definir la entropía usando conjuntos generadores o conjuntos separados.

**Teorema 4.5.** *Si $T : X \to X$ es una isometría, entonces* $\operatorname{ent}(T) = 0$.

*Demostración.* Como $T$ es una isometría tenemos que $d(T^i(x), T^i(y)) = d(x, y)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, y entonces $d_n(x, y) = d(x, y)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto dada $\varepsilon > 0$, si $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado, entonces $E$ es un conjunto $(1, \varepsilon)$ separado, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $s_n(\varepsilon, T) = s_1(\varepsilon, T)$.
Por lo tanto $\limsup_{n \to \infty} \frac{\log s_n(\varepsilon, T)}{n} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log s_1(\varepsilon, T)}{n} = 0$.
Entonces $\operatorname{ent}(T) = 0$. □

**Definición 4.8.** Decimos que dos métricas $d_1$ y $d_2$ en $X$ son *métricas uniformemente equivalentes* si

$$id : (X, d_1) \to (X, d_2) \qquad \text{y} \qquad id : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

son continuas.

*Observación.* $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es uniformemente continua si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todas $x$ y $y \in X$ que cumplan que $d_1(x, y) < \delta$. Entonces si $d_1(x, y) < \delta$, tenemos que $d_2(x, y) < \varepsilon$. Por lo tanto si $y \in B_\delta^{d_1}(x)$, tenemos que $y \in B_\varepsilon^{d_2}(x)$. Esto quiere decir que $B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$.

Como la función $id : (X, d_2) \to (X, d_1)$ también es uniformemente continua, análogamente para toda $B_\varepsilon^{d_2}(x)$ podemos encontrar $\gamma > 0$ de tal manera que $B_\gamma^{d_1}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$.

Por lo tanto dos métricas son uniformemente equivalentes si, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existen $\varepsilon_2 > 0$ y $\varepsilon_3 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_3}^{d_1}(x) \subseteq B_{\varepsilon_2}^{d_2}(x) \subseteq B_{\varepsilon_1}^{d_1}(x)$.

**Teorema 4.6.** *Si $d$ y $d'$ son dos métricas uniformemente equivalentes, entonces* $\mathrm{ent}_d(T) = \mathrm{ent}_{d'}(T)$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon_1 > 0$, y tomemos $\varepsilon_2$ y $\varepsilon_3$ de tal manera que si

$$\begin{aligned} &d'(x, y) < \varepsilon_2, \quad \text{entonces} \quad d(x, y) < \varepsilon_1, \quad \text{y si} \\ &d(x, y) < \varepsilon_3, \quad \text{entonces} \quad d'(x, y) < \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Tomemos $F$ un conjunto $(\varepsilon_2, T_{d'})$ generador, entonces dada $x \in X$, existe $y \in F$ tal que $d'_n(x, y) \leq \varepsilon_2$, esto implica que

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} \{d'(T^i(x), T^i(y))\} \leq \varepsilon_2,$$

y entonces

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)) \leq \varepsilon_1,$$

y por lo tanto $d_n(x, y) \leq \varepsilon_1$.

Por lo tanto, $F$ es un conjunto $(\varepsilon_1, T_d)$ generador de $X$, y entonces $r_n(\varepsilon_1, T, d) \leq r_n(\varepsilon_2, T, d')$. Análogamente $r_n(\varepsilon_2, T, d') \leq r_n(\varepsilon_3, T, d)$. De donde podemos concluir que $r(\varepsilon_1, T, d) \leq r(\varepsilon_2, T, d') \leq r(\varepsilon_3, T, d)$.

Además, si $\varepsilon_1$ tiende a cero, entonces, $\varepsilon_2$ también tiende a cero, y entonces $\varepsilon_3$ también tiende a cero.
Por lo tanto, $\mathrm{ent}_d(T) \leq \mathrm{ent}_{d'}(T) \leq \mathrm{ent}_d(T)$. □

Nuestra siguiente meta es demostrar que la entropía, $\mathrm{ent}(T)$, definida con conjuntos separados o con conjuntos generadores es equivalente a la entropía, $h(T)$, definida con cubiertas abiertas. Para ello es necesario definir el concepto de *número de Lebesgue* que veremos a continuación, así como algunos teoremas alrededor de este concepto.

**Definición 4.9.** Sea $X$ un espacio métrico compacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X$. Decimos que $\delta = \delta(\mathcal{U}) > 0$ es un *número de Lebesgue para la cubierta* $\mathcal{U}$ si la cubierta abierta $\mathcal{V} = \{B_\delta(x) \mid x \in X\}$ es más fina que $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U} < \mathcal{V}$). Es decir, para toda $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ de tal forma que $B_\delta(x) \subset U$.

**Proposición 4.7.** *Si $X$ es un espacio topológico compacto, entonces toda cubierta abierta de $X$ tiene número de Lebesgue.*

*Demostración.* Supongamos que existe $\mathcal{U}$ cubierta abierta de $X$ tal que $\mathcal{U}$ no tiene número de Lebesgue.

Tomemos $\{U_1, \ldots, U_m\}$ subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ no tiene número de Lebesgue, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $B_{1/n}(x_n)$ no está contenida en $U_i$ para ninguna $i = 1, \ldots, m$.

Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como $X$ es compacto, sabemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene al menos un punto de acumulación. Llamemos a este punto $x$.

Además, que $\{U_1, \ldots, U_m\}$ sea cubierta, implica que $x \in U_i$ para alguna $i = 1, \ldots m$. $U_i$ abierto quiere decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U_i$.

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Encontremos $r > n$ tal que $x_r \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Además $x_r \in B_{\frac{1}{r}}(x_r)$, por lo tanto $B_{1/r}(x_r) \cap B_{\varepsilon/2}(x) \neq \varnothing$.

Por otro lado $\frac{1}{r} < \frac{\varepsilon}{2}$, y esto implica que $B_{1/r}(x_1) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto toda cubierta abierta de $X$ tiene un número de Lebesgue. $\square$

**Definición 4.10.** Sea $A$ un subconjunto de un espacio métrico compacto $X$. Definimos el *diámetro de $A$* como $\mathrm{diám}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$.

*Observación.* Si $X$ es compacto, entonces $\mathrm{diám}(X) < \infty$ y por lo tanto $\mathrm{diám}(A) \leq \mathrm{diám}(X)$ para todo $A \subset X$.

**Definición 4.11.** Sea $X$ un espacio métrico compacto y $\alpha$ una cubierta de $X$, definimos el *diámetro de $\alpha$* como $\mathrm{diám}(\alpha) = \sup\{\mathrm{diám}(A) \mid A \in \alpha\}$.

**Proposición 4.8.** *Sean $\alpha$, $\gamma$ cubiertas de $X$ y $\delta_\gamma$ un número de Lebesgue de $\gamma$ tal que* $\text{diám}(\alpha) < \delta_\gamma$*, entonces, $\gamma < \alpha$.*

*Demostración.* Sea $A \in \alpha$, entonces $\text{diám}(A) < \delta_\gamma$, ya que $\text{diám}(\alpha) < \delta_\gamma$.
Tomemos $x \in A$, y consideremos $B_{\delta_\gamma}(x)$. Dado que $\text{diám}(A) < \delta_\gamma$, tenemos que $A \subset B_{\delta_\gamma}(x)$.
Además, sabemos que $\{B_{\delta_\gamma}(x) \mid x \in X\}$ refina a $\gamma$, lo cual implica que existe $C \in \gamma$ de tal manera que $B_{\delta_\gamma}(x) \subseteq C$.
Por lo tanto, tenemos que $A \subseteq B_{\delta_\gamma}(x) \subseteq C$, de donde $\gamma < \alpha$. □

**Teorema 4.9.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una colección de cubiertas abiertas de $X$ tal que* $\text{diám}(\alpha_n) \to 0$ *cuando $n \to \infty$, y $T : X \to X$ una función continua, entonces $h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \alpha_n)$.*

*Demostración.* Supongamos que $h(T) < \infty$.
Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $h(T) = \sup\{h(T, \alpha) \mid \alpha \text{ es cubierta de } X\}$, tenemos que existe $\gamma$ cubierta de $X$ tal que $h(T, \gamma) > h(T) - \varepsilon$.
Sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue de $\gamma$.
Dado que $\lim_{n\to\infty} \text{diám}(\alpha_n) = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ tenemos que $\text{diám}(\alpha_n) < \delta$, y entonces, por la proposición 4.8 sabemos que , $\gamma < \alpha_n$.
Por lo tanto, para toda $n \geq N$ se cumple que:

$$h(T) \geq h(T, \alpha_n) \geq h(T, \gamma) > h(T) - \varepsilon,$$

y entonces, $\lim_{n\to\infty} h(T, \alpha_n) = h(T)$.
Ahora, supongamos que $h(T) = \infty$.
Tomemos $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$. Como $h(T) = \infty$, tenemos que existe $\gamma$ cubierta abierta de $X$ tal que $h(T, \gamma) > M$, y análogamente al caso anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $M < h(T, \gamma) \leq h(T, \alpha_n)$; y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} h(T, \alpha_n) = \infty$. □

**Teorema 4.10.** *Sea $T : X \to X$ una función continua:*

*i) Si $\alpha$ es una cubierta abierta de $X$ con un número de Lebesgue $\delta$, entonces:*

$$N(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha) \leq r_n\left(\frac{\delta}{2}, T\right) \leq s_n\left(\frac{\delta}{2}, T\right).$$

*ii) Si $\varepsilon > 0$ y $\gamma$ es una cubierta abierta de $X$ tal que* $\text{diám}(\gamma) < \varepsilon$*, entonces:*

$$r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T) \leq N(\gamma \vee T^{-1}\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma).$$

*Demostración.*

*i)* Sea $F$ un conjunto $(n, \frac{\delta}{2})$ generador de $X$ de mínima cardinalidad, es decir, $\mathrm{card}(F) = r_n(\frac{\delta}{2}, T)$.

Ahora, $F$ es un conjunto $(n, \frac{\delta}{2})$ generador de $X$, por lo cual sabemos que:

$$X = \bigcup_{x\in F} \bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(T^i(x)).$$

Por otro lado como $\delta$ es un número de Lebesgue de $\alpha$, tenemos que para toda $i$, existe $A \in \alpha$ tal que $\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(T^i(x)) \subset A$, entonces para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tenemos que $T^{-i}(B_{\frac{\delta}{2}}(T^i(x)) \subset T^{-i}(A)$ para alguna $A \in \alpha$, por lo cual

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(T^i(x))) \subset B \in (\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha)$$

Por lo tanto $N(\alpha \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha) \leq r_n(\frac{\delta}{2}, T) \leq s_n(\frac{\delta}{2}, T)$.

*ii)* Sean $\varepsilon > 0$ y $\gamma$ una cubierta abierta tal que $\mathrm{diám}(\gamma) < \varepsilon$.

Tomemos $\mathcal{C} \in (\gamma \vee T^{-1}\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma)$, esto quiere decir que $\mathcal{C}$ es de la forma $C_0 \cap T^{-1}(C_1) \cap \cdots \cap T^{-n+1}(C_n)$ con $C_i \in \gamma$. De aquí que $\mathcal{C} \subset C_0$, y como $\mathrm{diám}(C_0) < \varepsilon$, tenemos que $\mathrm{diám}(\mathcal{C}) < \varepsilon$, por lo tanto para todas $x, y \in \mathcal{C}$, se cumple que $d(x, y) < \varepsilon$. Además, $d(T^i(x), T^i(y)) < \varepsilon$ para $0 \leq i \leq n-1$

Por lo tanto si $E$ es un conjunto $(n, \varepsilon)$ separado, se tiene que $\mathcal{C}$ contiene a lo más a un elemento de $E$.

De donde podemos concluir que, $\quad s_n(\varepsilon, T) \leq N(\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma)$.

Por lo tanto $r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T) \leq N(\gamma \vee T^{-1}\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma)$.

□

**Proposición 4.11.** $h(T) \leq \mathrm{ent}(T)$.

*Demostración.* Sea $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ una colección de cubiertas abiertas de $X$ tal que $\lim_{m\to\infty} \mathrm{diám}(\alpha_m) = 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $\delta_m$ un número de Lebesgue $\alpha_m$.

Entonces, por el teorema 4.10 sabemos que

$$N(\alpha_m \vee T^{-1}\alpha_m \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha_m) \leq r_n\left(\frac{\delta_m}{2}, T\right) \leq s_n\left(\frac{\delta_m}{2}, T\right).$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha_m \vee T^{-1}\alpha_m \vee \cdots \vee T^{-n+1}\alpha_m)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n(\frac{\delta_m}{2}, T)}{n}.$$

Además, observemos que $\delta_m \leq \text{diám}(\alpha_m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto si tomamos el límite cuando $m$ tiende a $\infty$, tenemos que $h(T) \leq \text{ent}(T)$. $\square$

**Teorema 4.12.** $\text{ent}(T) = h(T)$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\gamma$ una cubierta abierta tal que $\text{diám}(\gamma) < \varepsilon$, entonces por el teorema 4.10 *(ii)*, tenemos que,

$$r_n(\varepsilon, T) \leq s_n(\varepsilon, T) \leq N(\gamma \vee T^{-1}\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma).$$

Y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n(\varepsilon, T)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(\gamma \vee T^{-1}\gamma \vee \cdots \vee T^{-n+1}\gamma)}{n}$$

Es decir $r(\varepsilon, T) \leq h(T, \gamma) \leq h(T)$. Si ahora tomamos el límite cuando $\varepsilon$ tiende a cero, obtenemos que $\text{ent}(T) \leq h(T)$. Entonces por la proposición 4.11 tenemos que $h(T) = \text{ent}(T)$. $\square$

**Teorema 4.13.** *Sea* $T : S^1 \to S^1$ *un homeomorfismo, entonces* $\text{ent}(T) = 0$.

*Demostración.* Supongamos que el círculo tiene longitud 1.

Como $T$ es homeomorfismo, entonces $T^{-1}$ es continua, y esto implica que existe $\varepsilon$, tal que si $d(x, y) \leq \varepsilon$, entonces $d(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) < \frac{1}{4}$.

Consideremos los conjuntos $(1, \varepsilon, T)$ generadores de $S^1$. Dado que $\ell(S^1) = 1$, tenemos que $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ puntos, son suficientes para cubrir el círculo con intervalos de longitud $\varepsilon$.
Por lo tanto $r_1(\varepsilon, T) \leq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Quisiéramos demostrar que en general, $r_n(\varepsilon, T) \leq n\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$. Haremos la prueba por inducción:

Supongamos que $r_{n-1}(\varepsilon, T) \leq (n-1)\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$.

Para $n$, tomemos $F$ un conjunto $(n-1, \varepsilon, T)$ generador de $S^1$ de cardinalidad mínima, es decir, de cardinalidad $r_{n-1}(\varepsilon, T)$.

Consideremos los puntos en $T^{n-1}(F)$ y los intervalos que éstos determinan. Agreguemos puntos a $T^{n-1}(F)$, de tal manera que dichos intervalos sean de longitud menor o igual que $\varepsilon$.

Entonces, habremos agregado a lo más $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ puntos.

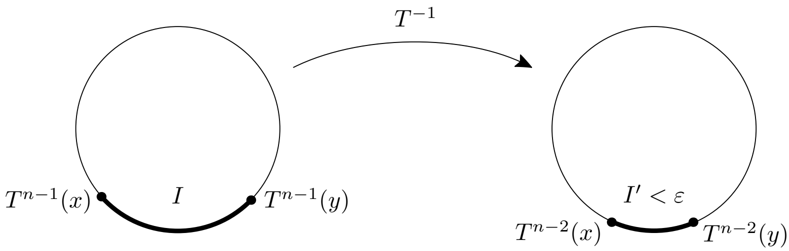
Si llamamos $E$ al conjunto de puntos agregados, entonces, $F' = F \cup T^{n-1}(E)$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $S^1$.

Sea $x \in S^1$, entonces existe $y \in F$ tal que

$$\max_{0 \leq i \leq n-2} d(T^i(x), T^i(y)) \leq \varepsilon.$$

Ahora, si $d(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)) \leq \varepsilon$, entonces $F'$ es un conjunto $(n, \varepsilon, T)$ generador de $S^1$.

Si $d(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)) > \varepsilon$, consideremos los dos intervalos con puntos extremos $T^{n-1}(x)$, y $T^{n-1}(y)$. De esos dos intervalos, hay uno, al que llamaremos $I$, que bajo $T^{-1}$, va a dar a un intervalo, $I'$, con extremos $T^{n-2}(x)$ y $T^{n-2}(y)$ y longitud menor o igual que $\varepsilon$.




Dado que $d(T^{n-1}(x), T^{n-1}(y)) > \varepsilon$, entonces existe $z \in F'$ tal que $T^{n-1}(z) \in I$ y $d(T^{n-1}(x), T^{n-1}(z)) \leq \varepsilon$.

Además, $T^{n-2}(z) \in I'$. Por lo tanto $d(T^{n-2}(x), T^{n-2}(z)) \leq \varepsilon$.

Pero $I'$ es, a su vez, mandado bajo $T^{-1}$ a un intervalo $I''$ con puntos extremos $T^{n-3}(x)$ y $T^{n-3}(y)$ con $d(T^{n-3}(x), T^{n-3}(y)) \leq \frac{1}{4}$.

Por lo tanto $d(T^{n-3}(x), T^{n-3}(y)) \leq \varepsilon$ y como $T^{n-3}(z) \in I''$, tenemos que $d(T^{n-3}(x), T^{n-3}(z)) \leq \varepsilon$.

Continuando de esta manera, tenemos que, $d(T^i(x), T^i(z)) \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Por lo tanto $F'$ es un $(n, \varepsilon, T)$ conjunto generador de $S^1$.

Además, $\mathrm{card}(F') = \mathrm{card}(F) + \mathrm{card}(T^{-(n-1)}(E)) \leq (n-1)(\frac{1}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} + 1$.

Por lo tanto $r_n = (\varepsilon, T) \leq n(\frac{1}{\varepsilon} + 1)$.

Y entonces, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log r_n(\varepsilon,T)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n) + \log \frac{1}{\varepsilon} + 1}{n}$.
Por lo tanto $r(\varepsilon, T) = 0$, y entonces, $h(T) = 0$. □

**Teorema 4.14.** *Sea $f : I \to I$ un homeomorfismo, entonces* $\mathrm{ent}(f) = 0$.

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $B$ una partición del $[0, 1]$, $B = \{t_0 = 0, \ldots, t_{L-1} = 1\}$, tal que $d(t_{k-1}, t_k) < \varepsilon$, y $\mathrm{card}(B) = L$.

Consideremos $F = B \cup f^{-1}(B) \cup \cdots \cup f^{-n+1}(B)$, entonces, $\mathrm{card}(F) \leq nL$.

Afirmamos que $F$ es un conjunto $(n, \varepsilon, f)$ generador de $I$.

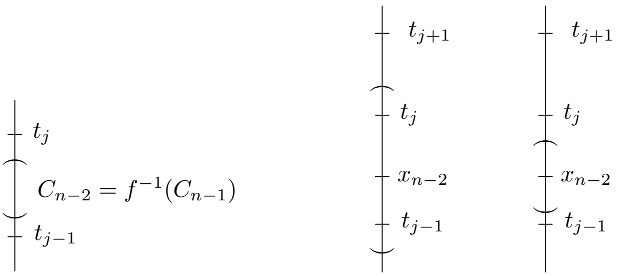
Sea $x \in [0,1]$. Tenemos que encontrar $y \in F$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$ con $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Tomemos $x_0 = x$, $x_1 = f(x), \ldots, x_{n-1} = f^{n-1}(x)$.

Sean $C_i$ con $i = 0, 1, \ldots, n-1$ los intervalos definidos de la siguiente manera, $C_{n-1}$ es tal que contiene a $x_{n-1}$, y $C_{n-1}$ es irreducible con respecto a la propiedad $C_{n-1} \cap B \neq \varnothing$.

Es decir, existe $j$ tal que, $C_{n-1} \subset [t_{j-1}, t_j]$ y $t_{j-1} \in C_{n-1}$ ó $t_j \in C_{n-1}$, pero no los dos.

Consideremos $f^{-1}(C_{n-1})$, y tomemos $C_{n-2} \subset f^{-1}(C_{n-1})$ así:
Caso 1: Si $f^{-1}(C_{n-1}) \cap B = \varnothing$, entonces tomemos $C_{n-2} = f^{-1}(C_{n-1})$.




Caso 1 Caso 2

Caso 2: Si $f^{-1}(C_{n-1}) \cap B \neq \varnothing$, entonces tomemos $C_{n-2}$, de tal manera que $x_{n-2} \in C_{n-2}$ y $C_{n-2}$ contenga un sólo punto de $B$ y $C_{n-2} \subset [t_{j-1}, t_j]$.

*Observaciones.*

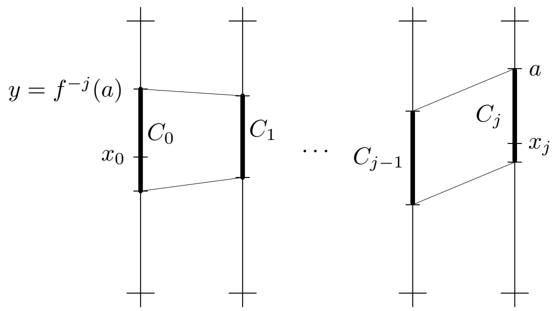
i) Para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tenemos que $x_i \in C_i$.

ii) $f(C_i) \subset C_{i+1}$, para toda $i = 0, \ldots, n-2$. Ya que $C_{i-1} \subset f^{-1}(C_{i+1})$.

iii) diám$(C_i) \leq \varepsilon$ con $0 \leq i \leq n-1$. Ya que $C_i \subset [t_{j-1}, t_j]$.

Todavía tenemos que buscar la $y \in F$ que cumple que $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$.

1) Si $C_0 \cap B \neq \varnothing$. Tomemos $y \in C_0 \cap B$, entonces, en particular $y \in C_0$ y por i) sabemos que $x \in C_0$, y por lo tanto, por iii) $d(x, y) \leq \varepsilon$, además por ii) $f(C_0) \subset C_1$, por lo cual $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Siguiendo de esta forma se puede demostrar que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon$ para $2 \leq i \leq n-1$. Además $y \in B$ implica que $y \in F$ y con esto está terminado este caso.




2) Si $C_0 \cap B = \varnothing$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $C_j \cap B \neq \varnothing$. Tomemos la $j$ más pequeña para la cual $C_j \cap B \neq \varnothing$, es decir, si $i < j$, entonces $C_i \cap B = \varnothing$.

   Sea $\{a\} = C_j \cap B$. Observemos que dado que $C_{j-1} \cap B = \varnothing$, entonces $C_{j-1} = f^{-1}(C_j)$, y por lo tanto $f(C_{j-1}) = C_j$. Y lo mismo para todos los intervalos anteriores; es decir, $f(C_i) = C_{i+1}$ para toda $i \in \{0, \ldots, j-1\}$. Por lo tanto $f^{-j}(a) \in C_0$. Tomemos $y = f^{-j}(a) \in F$. Así tenemos que $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{0, \ldots, j\}$.
   Ahora, como $f^j(y) = a$ y $a, x_j \in C_j$, entonces $d(f^i(y), f^i(x)) \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Por lo tanto $F$ es un conjunto $(n, \varepsilon, f)$ generador de $I$.

De aquí se sigue que $r_n(\varepsilon, f) \leq nL$.
Entonces $r(\varepsilon, f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log r_n(\varepsilon, f)}{n} = 0$.
Por lo tanto $\operatorname{ent}(f) = 0$. □

**Teorema 4.15.** *Sea $f : [a, b] \to [a, b]$. Si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x, y \in [a, b]$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, entonces $h(f) \leq \log(M)$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$.

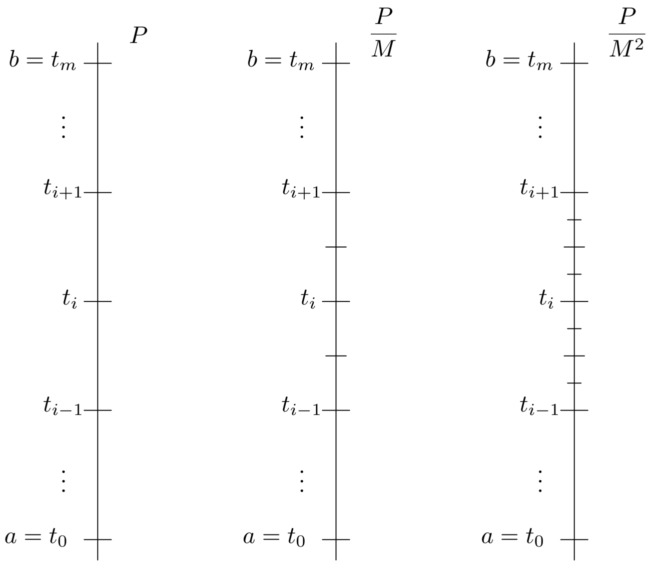
Tomemos $P = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_m = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ con norma menor que $\varepsilon$, es decir $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$.

Consideremos la partición $\frac{P}{M} = P \cup \{P_i | 1 \leq i \leq m\}$, donde $P_i$ es una partición del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ en $M$ pedazos iguales.

Sea $x \in [a, b]$, entonces, existe $t \in \frac{P}{M}$ tal que $|t - x| < \frac{\varepsilon}{M}$. Por hipótesis $|f(t) - f(x)| \leq M|t - x| < M(\frac{\varepsilon}{M}) = \varepsilon$.

Ahora consideremos la partición $\frac{P}{M^2}$, donde $\frac{P}{M^2}$ es la partición que a cada intervalo generado por $\frac{P}{M}$ lo divide en $M$ pedazos iguales.

Entonces para toda $x \in [a, b]$ existe $t \in \frac{P}{M^2}$ tal que $|t - x| < \frac{\varepsilon}{M^2}$. Entonces $|f^2(x) - f^2(x)| \leq M|f(t) - f(x)| \leq M^2|t - x| < M^2(\frac{\varepsilon}{M^2}) = \varepsilon$.




Caso $M = 2$

Así sucesivamente, si $n \in \mathbb{N}$ consideremos la partición $\frac{P}{M^n}$, entonces si $x \in [a, b]$, existe $t \in \frac{P}{M^n}$ tal que $|t - x| < \frac{\varepsilon}{M^n}$, y $|f^j(x) - f^j(t)| \leq M^j |t - x| < M^j \frac{\varepsilon}{M^n} \leq \varepsilon$ para toda $i \leq j \leq n$.

Además la cardinalidad de $\frac{P}{M^n}$ es: $mM^n + 1$. Por lo tanto

$$r(n, \varepsilon) \leq mM^n + 1 \quad \text{y entonces,}$$

$$r(\varepsilon) \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log(mM^n + 1)}{n} = \log(M).$$

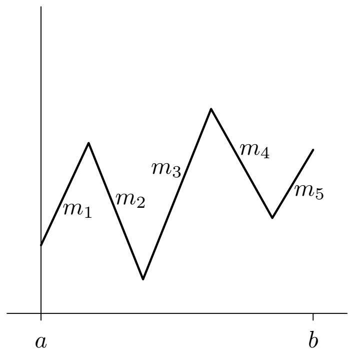
Por lo tanto $h(f) \leq \log(M)$. $\square$

**Corolario 4.16.** *Sea $f : [a, b] \to [a, b]$. Si $f \in C^1$ en $[a, b]$, entonces $h(f) \leq \log(M)$.*

*Demostración.* Si $f \in C^1$, entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \in [a, b]$ se tiene que $|f'(x)| \leq M$.

Además, por el teorema del valor medio, para toda $x < y \in [a, b]$ se cumple que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$ para alguna $c \in (x, y)$. Por lo tanto $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, y por el teorema anterior tenemos que $h(f) \leq \log(M)$. $\square$

**Corolario 4.17.** *Sean* $f : [a, b] \to [a, b]$ *una función cuya gráfica es poligonal con pendientes* $m_1, m_2, \ldots, m_n$*, y Sea* $M = \max\{|m_1|, |m_2|, \ldots, |m_n|\}$*, entonces* $h(f) \leq \log(M)$*.*




*Demostración.* Sea $M = \max\{|m_1|, |m_2|, \ldots, |m_n|\}$, entonces para toda $x, y \in [a, b]$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ y por el teorema 4.15, $h(f) \leq \log(M)$. □

# Capítulo 5

# Entropía en intervalos

En este capítulo consideraremos únicamente el caso donde $X$ es un intervalo cerrado de los reales.

Estudiaremos la entropía en funciones a las que llamaremos "monótonas a pedazos", este estudio nos permitirá dar otra prueba de que los homeomorfismos definidos en algún intervalo cerrado de los reales tienen entropía cero, así como presentar ejemplos de funciones con entropia igual a $\log(n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en el conjunto de los números naturales. Dichos ejemplos, nos permitirán a su vez la construcción de una función con entropía infinita.

En todo este capítulo $I$ será un intervalo cerrado cualquiera de los reales y $f : I \to I$ una función continua y monótona a pedazos.

**Definición 5.1.** Sea $f : I \to I$ continua. Decimos que $f$ es *monótona a pedazos* si existe una partición $P$ de $I$, $P = \{x_1, \ldots, x_m\}$ de tal manera que $f$ es monótona en cada uno de los intervalos cerrados de la forma $[x_{j-1}, x_j]$.

Observemos que si $\alpha$ es una cubierta abierta de un intervalo $I$, entonces existe una cubierta abierta $\beta$ donde cada elemento de $\beta$ es un intervalo abierto. Esto implica que en el caso de los intervalos podemos tomar

$$h(f) = \sup \left\{ h(f, \alpha) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha \text{ es una cubierta abierta donde} \\ \text{cada elemento es un intervalo} \end{array} \right\}$$

Además, sabemos que existen cubiertas de $I$ con una cantidad finita de intervalos no necesariamente abiertos. Veremos a continuación que, para funciones monótonas a pedazos, podemos repetir formalmente todo el procedimiento de definición de entropía utilizando intervalos no necesariamente abiertos.

**Definición 5.2.** Sean $I$ un intervalo y $\alpha$ una cubierta finita de $I$ de tal manera que cada elemento de $\alpha$ sea un intervalo no necesariamente abierto (incluso puede ser un punto). Definimos $H^*(\alpha) = \log(\text{card}(\alpha))$.

Por el resto del capítulo llamaremos a este tipo de cubiertas *cubiertas finitas no abiertas.*

*Observación.* Sean $f : I \to I$ una función continua y monótona a pedazos y $\alpha$ una cubierta como en la definición anterior. Entonces, si $x \in I$ implica que $f(x) \in I$, y por lo tanto existe $A$ intervalo en $\alpha$ tal que $f(x) \in A$, es decir, $x \in f^{-1}(A)$.

Por lo tanto el conjunto

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \alpha\} = f^{-1}\alpha$$

es una cubierta de $I$.

En general, tenemos que dada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $f^{-n}(\alpha)$ es una cubierta de $I$, y entonces $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ también lo es.

Además, se puede demostrar análogamente al caso con cubiertas abiertas que

$$H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n-m+1}\alpha) \leq H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) + H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-m+1}),$$

es decir la sucesión $H^{*n}(\alpha) = H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)$ es subaditiva y entonces, por el teorema 2.7, sabemos que el $\lim_{n\to\infty} \dfrac{H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n}$ existe.

**Definición 5.3.** Sean $f : I \to I$ una función continua, y $\alpha$ una cubierta finita no abierta, definimos

$$h^*(f,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{H^*(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha)}{n}.$$

*Observación.* Sean $\alpha$ y $\beta$ dos cubiertas finitas no abiertas de $I$, entonces si $\alpha < \beta$ tenemos que $\operatorname{card}(\alpha) \leq \operatorname{card}(\beta)$ y esto implica que

$$\operatorname{card}(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq \operatorname{card}(\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta).$$

Por lo tanto $h^*(f,\alpha) \leq h^*(f,\beta)$.

**Proposición 5.1.** *Sean $f : I \to I$ y $\alpha$ una cubierta finita no abierta, entonces*

$$h^*(f^n,\alpha) = nh^*(f,\alpha).$$

*Demostración.* Demostración análoga al caso con cubiertas abiertas. $\square$

**Definición 5.4.** Sea $f : X \to X$ una función continua. Definimos

$$h^*(f) = \sup\{h^*(\alpha, f) \mid \alpha \text{ es una cubierta finita no abierta}\}.$$

*Observación.* Dado que $H^*(\alpha) \geq 0$ para toda $\alpha$ cubierta finita no abierta, tenemos que $h^*(f,\alpha) \geq 0$ para toda $f$ y toda $\alpha$ y por lo tanto $h^*(f) \geq 0$ para toda $f$. Además por la proposición 5.1 tenemos que $h^*(f^n) = nh^*(f)$.

Por lo anterior, sabemos que se puede repetir el procedimiento de definir un concepto análogo a la entropía de una función usando cubiertas finitas no necesariamente abiertas para funciones monótonas a pedazos.

**Teorema 5.2.** *Sea $f : I \to I$ continua y $\alpha$ una cubierta finita no abierta, entonces existe una cubierta abierta $\beta$ tal que*

$$h^*(f,\alpha) \leq h(f,\beta) + \log(3).$$

*Demostración.* Sea $\alpha$ una cubierta finita no abierta, $\alpha = \{A_1, \dots, A_m\}$.

Para cada $A \in \alpha$ tomemos $C_A = \{A, I \setminus A\}$, entonces $C_A$ es una partición de $I$.

Consideremos $\mathcal{C} = \bigvee_{A\in\alpha} C_A$ y tomemos

$$C = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_m \quad \text{y} \quad D = \mathcal{A}'_1 \cap \mathcal{A}'_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}'_m$$

en $\mathcal{C}$ tal que $C \neq D$.

Ahora, $C \neq D$ quiere decir que existe $k \in \{1, \dots, m\}$ de tal manera que $\mathcal{A}_k \neq \mathcal{A}'_k$, por lo cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{A}_k = A_k$ y $\mathcal{A}'_k = I \setminus A_k$, por lo tanto $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}'_k = \varnothing$, y entonces, $C \cap D = \varnothing$. De donde podemos concluir que los elementos de $\mathcal{C}$ son ajenos. Además, para toda $C \neq \varnothing$ con $C \in \mathcal{C}$ tenemos que $C$ es una intersección de intervalos, por lo cual $C$ es un intervalo (incluyendo el caso degenerado). Por lo tanto $\mathcal{C}$ es una partición de $I$.

Por otro lado, dado que $\alpha$ es cubierta, tenemos que $A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c = \varnothing$, esto implica que para toda $C \in \mathcal{C}$ distinto del vacío existe $A \in \alpha$ tal que $C \subseteq A$, por lo tanto $\alpha < \mathcal{C}$, y entonces $h^*(f,\alpha) \leq h^*(f,\mathcal{C})$.

Ahora, para cada $C \in \mathcal{C}$ existe un intervalo abierto $B_C$ que lo contiene y que intersecta a lo más a tres elementos de $\mathcal{C}$.

Consideremos la cubierta abierta $\beta = \{B_C \mid C \in \mathcal{C}\}$.

Tomemos a $\delta$ una subcubierta de $\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta$. Entonces si $D \in \delta$ tenemos que $D$ es de la forma $D = B_1 \cap \cdots \cap f^{-n+1}(B_n)$ con $B_i \in \beta$.

Como $B_i$ intersecta a lo más a tres elementos de $\mathcal{C}$ entonces $f^{-n}(B_i)$ intersecta a lo más a tres elementos de la forma $f^{-n}(C)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para cada $D \in \delta$ hay a lo más $3^n$ elementos de la forma $C_1 \cap f^{-1}(C_2) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(C_n)$, y como $\delta$ es subcubierta de $\beta$ tenemos que,

$$\text{card}(\mathcal{C} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\mathcal{C}) \leq 3^n N(\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta).$$

Por lo tanto $h^*(f,\mathcal{C}) \leq \log(3) + h(f,\beta)$.
De lo cual se sigue que $h^*(f,\alpha) \leq \log(3) + h(f,\beta)$. □

**Proposición 5.3.** *Si $f : I \to I$ es monótona a pedazos, entonces $h^*(f) = h(f)$.*

*Demostración.* Sea $\alpha$ una cubierta finita no abierta de $I$.

Como $f$ es monótona a pedazos, entonces existe $\gamma$ partición finita de $I$ tal que $f$ es monótona en cada elemento de $\gamma$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $C = (\alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \vee \gamma$, entonces $C$ es una cubierta finita no abierta tal que $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha < C$.

Por el teorema 5.2 tenemos que existe $\beta$ cubierta abierta de $I$ tal que

$$h^*(f^n, \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq h^*(f^n, C) \leq h(f^n, \beta) + \log(3)$$

Por lo tanto

$$h^*(f^n, \alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha) \leq h(f^n,\beta) + \log(3) \leq h(f^n) + \log(3) = nh(f) + \log(3).$$

Entonces $h^*(f^n) \leq nh(f) + \log(3)$. Esto implica que $nh^*(f) \leq nh(f) + \log(3)$.
Por lo tanto $h^*(f) \leq h(f) + \frac{\log(3)}{n}$ y dado que $n$ es arbitraria se sigue que $h^*(f) \leq h(f)$.
Por otro lado, para toda cubierta abierta $\beta$ podemos encontrar una cubierta finita de intervalos $\alpha$ tal que $\beta < \alpha$ por lo que $h(f,\beta) \leq h^*(f,\alpha) \leq h^*(f)$.
Por lo tanto $h(f) \leq h^*(f)$. □

**Definición 5.5.** Sea $f : I \to I$ una función monótona a pedazos, decimos que $\alpha$ cubierta de $I$ es una *cubierta $f$-monótona*, si es finita no abierta y $f$ es monótona en cada elemento de $\alpha$.

*Observación.* Si $\alpha$ es una cubierta $f$-monótona, entonces $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$ es una cubierta $f^n$-monótona.

**Proposición 5.4.** *Sea $f : I \to I$ una función monótona a pedazos y $\alpha$ una cubierta $f$-monótona de $I$, entonces $h^*(f,\alpha) = h(f)$.*

*Demostración.* Sean $\alpha$ una cubierta $f$-monótona y $\tilde{\beta}$ una cubierta finita no abierta. Consideremos $\beta = \alpha \vee \tilde{\beta}$.
Tomemos $\gamma$ una subcubierta de $\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha$. Tomemos $C \in \gamma$. Por la observación anterior tenemos que para toda $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^k$ es monótona en $C$.
Por lo tanto para toda $B \in \beta$, si $C \cap f^{-k}(B) = (f^k|_C)^{-1}(B)$ es distinto del vacío, entonces es un intervalo.

Sean $D \in \beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta$, y $x$ un punto extremo de $D$, entonces existe $C \in \gamma$ tal que $C \cap D \neq \varnothing$ y $x$ es un punto extremo de $C$.

Ahora, $D = \bigcap\limits_{k=0}^{n-1} f^{-k}(B_K)$ para algunos $B_0, \ldots, B_{n-1} \in \beta$ y cada $f^{-k}(B_k)$ es la unión de un número finito de intervalos, ya que $B_k$ es un intervalo. Esto implica que $x$ es extremo de algún $f^{-k}(B_k)$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, esto quiere decir que $x$ es extremo del intervalo $C \cap f^{-k}(B_k)$ para esa $k$. Observa que para cada $C \in \gamma$ hay a lo más $n\,\mathrm{card}(\beta)$ conjuntos de la forma $C \cap f^{-k}(B_k)$, esto implica que hay a lo más $2n\,\mathrm{card}(\beta)$ puntos extremos de esta forma.

El número de todos los intervalos posibles con puntos extremos en un conjunto dado es menor o igual que cuatro veces la cardinalidad al cuadrado de este conjunto. Por lo cual,

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\beta \vee (f|_c)^{-1}\beta \vee \cdots \vee (f|_C)^{-n+1}\beta) &\leq 4(2n\,\mathrm{card}(\beta)^2,\\ \mathrm{card}(\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta) &\leq 4(2n\,\mathrm{card}(\beta))^2\,\mathrm{card}(\gamma),\\ N(\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta) &\leq 4(2n\,\mathrm{card}(\beta))^2\,\mathrm{card}(\gamma),\end{aligned}$$

y como $\gamma$ es arbitraria, entonces

$$N(\beta \vee \cdots \vee f^{-n+1}\beta) \leq 4(2n\,\mathrm{card}(\beta))^2 N(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}\alpha),$$

$$H^{n*}(\beta) \leq \log(4(2n\,\mathrm{card}(\beta))^2) + H^n * (\alpha),$$

$$\frac{H^{n*}(\beta)}{n} \leq \frac{\log(4)}{n} + 2\left(\frac{\log(2)}{n} + \frac{\log(n)}{n} + \frac{\log(\mathrm{card}(\beta))}{n}\right) + \frac{H^{n*}(\alpha)}{n}.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $h^*(f,\beta) \leq h^*(f,\alpha)$. Además, $\tilde{\beta} < \beta$, por lo que

$$h^*(f,\tilde{\beta}) \leq h^*(f,\beta) \leq h^*(f,\alpha), \quad \text{y por lo tanto} \quad h^*(f,\tilde{\beta}) \leq h^*(f,\alpha)$$

para toda $\tilde{\beta}$ cubierta finita no abierta, de donde $h(f) \leq h^*(f,\alpha)$.
Por otro lado $h(f) = \sup\{h^*(f,\alpha) \mid \alpha \text{ es cubierta finita no abierta}\}$, esto implica que $h^*(f,\alpha) \leq h(f)$.
Entonces $h(f) = h^*(f,\alpha)$. □

**Definición 5.6.** Llamaremos $C_n$ a la mínima cardinalidad de todas las cubiertas $f^n$-monótonas de $I$. Esto es $C_n$ es el mínimo número de pedazos en que $f^n$ es monótona.

**Teorema 5.5.** *Si $f : I \to I$ es monótona a pedazos, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n)}{n} = h(f) \quad \textit{y además} \quad \frac{\log(C_n)}{n} \geq h(f) \quad \textit{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Sea $\alpha_n$ una cubierta $f^n$-monótona de cardinalidad $C_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos $m,\ k > 0$ y consideremos la cubierta $f^{-k}(\alpha_m) \vee \alpha_k$ que también es una cubierta $f^{m+k}$-monótona; esto último implica que $C_{m+k} \leq \operatorname{card}(f^{-k}(\alpha_m) \vee \alpha_k) \leq C_m \cdot C_k$. Por lo tanto $\log(C_{m+k}) \leq \log(C_m) + \log(C_k)$, lo que quiere decir que $\{\log(C_n)\}$, es una sucesión subaditiva. Entonces por el teorema 2.7, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n)}{n}$ existe y es igual a $\inf \left\{ \frac{\log(C_n)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Ahora observemos que $\alpha_n \vee f^{-n}\alpha_n \vee \cdots \vee f^{-n(n-1)}\alpha_n$, es una cubierta $f^n$-monótona. Entonces $N(\alpha_n \vee f^{-n}\alpha_n \vee \cdots \vee f^{-n(n-1)}\alpha_n) = C_n$, ya que $C_n$ es la mínima cardinalidad de una cubierta $f^n$-monótona. Por lo tanto $\frac{H^n_{f^n}(\alpha_n)}{n} = \frac{\log(C_n)}{n}$.
Esto implica que $h^*(f^n, \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n)}{n} \leq \frac{\log(C_n)}{n}$.
Además por la proposición 5.4 tenemos que $h(f^n) = h^*(f^n, \alpha_n)$, por lo tanto:

$$h(f) = \frac{1}{n} h(f^n) = \frac{1}{n} h^*(f^n, \alpha_n) \leq \frac{\log(C_n)}{n}.$$

Por otro lado, para cada $n, k$ tenemos que $\alpha_n \vee f^{-n}\alpha_n \vee \cdots \vee f^{-n(k-1)}\alpha_n$ es una cubierta $f^{nk}$-monótona.
Por lo tanto $C_{nk} \leq N(\alpha_n \vee f^{-n}\alpha_n \vee \cdots \vee f^{-n(k-1)}\alpha_n)$, esto implica que,

$$\frac{\log(C_{nk})}{nk} \leq \frac{H^k_{f^n}(\alpha_n)}{nk} = \frac{1}{n} \frac{H^k_{f^n}(\alpha_n)}{k}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log(C_{nk})}{nk} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} \frac{H^k_{f^n}(\alpha_n)}{k} = \frac{1}{n} h^*(f^n, \alpha_n) = \frac{1}{n} h(f).$$

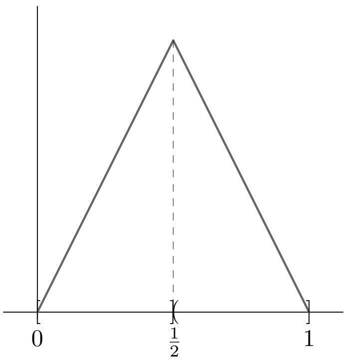
Además $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\log(C_{nk})}{nk} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(C_k)}{k}$, por lo tanto $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\log(C_k)}{k} \leq h(f)$.

Entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n)}{n} = h(f)$. □

**Corolario 5.6.** *Si $f : I \to I$ es un homemorfismo, entonces $h(f) = 0$.*

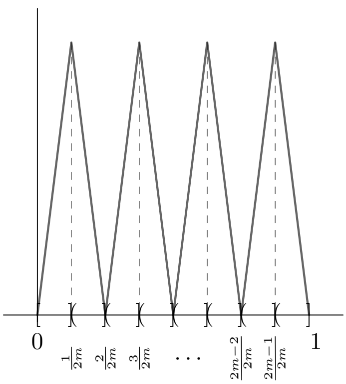
*Demostración.* Si $f$ es un homeomorfismo, entonces $f$ es una función inyectiva. Esto implica que $f$ es estrictamente creciente o decreciente en todo $I$. Por lo cual el pedazo más grande donde $f$ es monótona es todo el intervalo, es decir, $C_1 = 1$, y por el teorema anterior, tenemos que $0 = \frac{\log(C_1)}{1} \geq h(f) \geq 0$.
Por lo tanto $h(f) = 0$. □

**Ejemplo 5.1.** Consideremos la función *tienda*




Observemos que $T$ es creciente en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, mientras que en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ es decreciente. Entonces, el mínimo número de pedazos en que $T$ es monótona es dos. Esto quiere de decir que la menor cardinalidad de una cubierta $T$-monótona es 2. Es decir $C_1 = 2$.

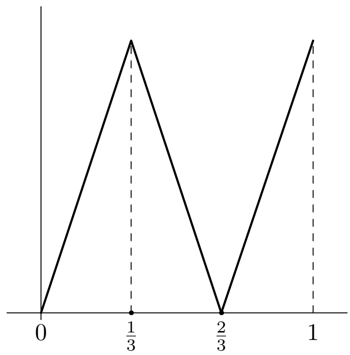
Ahora, sea $m \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $T^m$. Por lo visto en el capítulo 1, sabemos que la gráfica de $T^m$ tiene $2^{m-1}$ picos, cada uno de longitud $\frac{1}{2^{m-1}}$. Entonces tal como en el caso de $T$ la función es monótona en cada mitad de cada pico. Por lo tanto el mínimo número de pedazos donde $T^m$ es monótona es $2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$. Por lo tanto $C_m = 2^m$.




Entonces

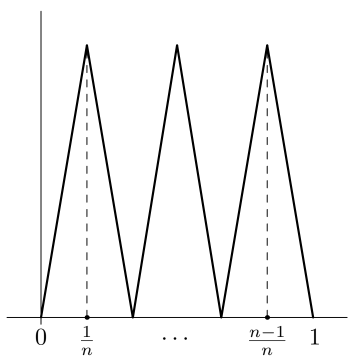
$$h(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(C_n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log(2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \log(2) = \log(2).$$

**Ejemplo 5.2.** Sea $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ la función con gráfica como sigue:



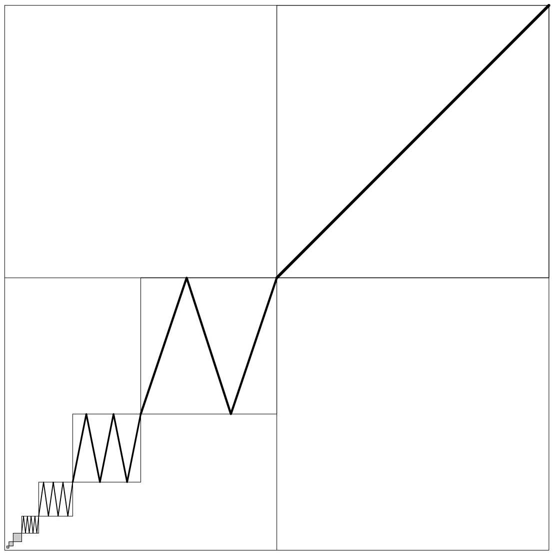

Es decir, la gráfica de $f_3$ "sube" y "baja" tres veces. Si seguimos el mismo procedimiento que aplicamos en el capítulo 1 a la función *tienda*, es fácil ver que la gráfica de $f_3^n$ "sube" y "baja" $3^n$ veces, por lo tanto $C_n = 3^n$ y entonces $h(f_3) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(3^n)}{n} = \log(3)$.

En general si $f_k : [0,1] \to [0,1]$ es la función cuya gráfica "sube" y "baja" $k$ veces, entonces la gráfica de $f_k^n$ lo hace $k^n$ veces, y entonces $C_n = k^n$. Por lo tanto $h(f_k) = \log(k)$.




**Ejemplo 5.3.** Tomemos $f : [0,1] \to [0,1]$ la función que en cada intervalo de la forma $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{-n+1}}\right]$ es conjugada topológica a la función $f_{2n-1}$ y además $f(0) = 0$.

Por ejemplo en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $f$ es conjugada a $f_1$, que es la identidad. Mientras que en el intervalo $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, la función $f$ es conjugada a $f_3$. Entonces la gráfica de $f$ se ve así:



Ahora, como $f|_{[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{-n+1}}]}$ es topológicamente conjugada a $f_{2n-1}$, tenemos por el teorema 2.14 que:

$$h(f|_{[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{-n+1}}]}) = h(f_{2n-1}) = \log(2n-1).$$

Además, para toda $n \in \mathbb{N}$, el intervalo de la forma $[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{-n+1}}]$ es invariante bajo $f$, y entonces por la proposición 2.15 sabemos que

$$h(f) \geq h(f|_{[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{-n+1}}]} = \log(2n-1). \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $h(f) = \infty$.

# Bibliografía


[1] R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew. *Topological Entropy.* Trans. Amer. Math. Soc., **114** (1965), pp. 309-319.

[2] L. Alsedà, J. Llibre y M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One.* Advanced Series in Nonlinear Dynamics 5, World Scientific, 1993.

[3] L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Math. 1513 Springer-Verlag, 1992.

[4] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Segunda edición, Addison-Wesley, 1989.

[5] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955.

[6] H. Méndez-Lango, *Iteración de funciones (Notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos)*, Vínculos Matemáticos, FC-UNAM, 2000.

[7] H. Méndez-Lango, *The process of finding $f'$ for an entire function $f$ has infinte topological entropy.* Topological Proceedings, **28** (2004), pp. 639-646.

[8] H. L. Royden, *Real Analysis*, Segunda edición, Macmillan, 1968.

[9] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Segunda edición, McGraw-Hill, 1964.

[10] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory.* Graduate Texts in Math. 79, Springer-Verlag, 1982.