UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGORITMOS MATEMÁTICOS EN LA COMPOSICIÓN MUSICAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

ACTUARIA

P R E S E N T A :

SUSANA DE LOS ANGELES TIBURCIO SOLIS

TUTOR : DR. DOMINGO VERA MENDOZA

2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Tiburcio Solís Susana de los Ángeles
2. Datos del Tutor Doctor en Matemáticas Domingo Vera Mendoza
3. Datos del sinodal 1 M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz
4. Datos del sinodal 2 M. en C. Jose Antonio Flores Díaz
5. Datos del sinodal 3 M. en A. P. María del Pilar Alonso Reyes
6. Datos del sinodal 4 Dr. Daniel Mocencahua Mora
7. Datos del trabajo escrito Algoritmos matemáticos en la composición musical 170 p 2006

A la memoria de mi padre

A mi madre y hermanos

A mis hijas

Agradecimientos

A Domingo y Daniel por su sabiduría y su generosidad de espíritu

Índice general

Prólogo

El haber estudiado la licenciatura de música me llevó a buscar un tema de tesis en el que pudiera relacionar los estudios de matemáticas y estadística con la música. Siempre ha fascinado esta relación y especialmente el haber conocido la música de Iannis Xenakis me llevó a adentrarme en el tema. En el siglo XX con el uso de las computadoras y la electrónica la música recibió una influencia enorme que cambiaría para siempre sus formas de composición, ejecución y divulgacíon. La introducción de sonidos sintetizados por Karlheinz Stockhausen y Herbert Eimert, los avances posteriores incluyendo el desarrollo de los sintetizadores electrónicos y el progresivo refinamiento de las técnicas de computación han abierto enormes posibilidades a los compositores. La evolución del serialismo aplicado al ritmo, intensidad, el timbre y otros parámetros precipitaron el rápido avance en el pensamiento musical. El trabajo de John Cage, estimuló especialmente una variedad de acercamientos al uso del azar y finalmente abdicó al elaborado pensamiento aleatorio de Boulez. La influencia de la música de Asia y Africa, el descubrimiento de un nuevo potencial en la música medieval y renacentista han contribuído a una extraordinaria diversidad de la música en los últimos años. La variedad y cantidad de música grabada, económicamente accesible hizo que la música se volviera un producto masivo, comercial y los senderos de la música popular y de períodos anteriores se separaron de la música de concierto contemporánea en una brecha muy profunda que tal vez no pueda ser superada. El oído se acostumbra a determinadas estructuras y cuando lo escuchado no “cabe”en esas estructuras puede parecernos desagradable. En la música como en varias de las artes sucede como en los juegos y los ritos; las reglas de combinación se han desarrollado paulatina e históricamente y el contexto cultural las ha establecido como convenciones. Me limito en esta tesis a la evolución de la música occidental y a sólo a una parte de ella en su relación a las matemáticas en los últimos años.

Introducción

En este trabajo se intenta demostrar que con la aplicación de fórmulas de densidad de probabilidad se puede crear una composición musical.

Este trabajo está dirigido sobre todo a músicos y matemáticos interesados en ambas disciplinas o para aquellas personas con suficiente inquietud y curiosidad por adentrarse en la magia de éstas.

Se tiene como finalidad ilustrar un aspecto de la conexión entre las matemáticas y la música.

La relación de música y matemáticas es muy basta y nosotros lo haremos de la siguiente forma:

El primer capítulo habla de la relación entre la música y las matemáticas a través de la historia.

El segundo capítulo hace un breve esbozo de estadística y probabilidades necesarias para entender los capítulos siguientes.

El tercer capítulo presenta el juego de dados de Mozart, algunas composiciones aleatorias. Todas estas composiciones se encuentran escritas en notación musical y han sido ejecutadas y grabadas en CD.

El cuarto capítulo aborda el análisis de la obra Achorripsis de Iannis Xenakis basada en fórmulas de densidad de probabilidad.

El quinto capítulo se consagra a la obra Tlatohuaque que es el resultado de aplicar las fórmulas propuestas por Iannis Xenakis para la composición de una obra para percusiones y se presenta su partitura y su grabación en CD.

Capítulo 1

Música y Matemáticas

1.1. Similitudes y Relación

Durante muchos siglos se ha considerado que las matemáticas y la música tienen cierta similitud y comúnmente se dice que tienen al menos cierta relación. ¿Cómo establecer esta relación? ¿Qué comparten estas actividades? ¿Comparten significados, técnicas, ideas? ¿Qué las relaciona?. ¿Es en realidad esta similitud la misma que existe en todas las creaciones humanas?. Hay desde luego similitudes innegables como que ambas tienen algo de mágico, son tan abstractas que parecen pertenecer a otro mundo y sin embargo tienen gran poder en este mundo, la música afecta al escucha y las matemáticas tiene múltiples aplicaciones prácticas. Una parte de las matemáticas estudia los números, sus patrones y formas y estos elementos son inherentes a la ciencia, la composición y la ejecución de la música. En caso de existir esta relación no impide que se hayan desarrollado de forma independiente.

Siempre se ha dicho que la música y las matemáticas tienen cierta relación, aunque esta conexión haya sido irrelevante para quienes las practican o las crean.

¿De qué modo podemos acercarnos a esta relación?

¿Qué tienen en común? ¿Cómo se ha planteado esta relación a través de la historia?

La música cambia su textura y carácter según el lugar y la época. Puede ser cristalina o densa, sentimental o explosiva. Por su parte las matemáticas son directas, nunca alteran su carácter y se remontan tanto sobre el lugar como sobre el espacio. La música se crea a partir de algo físico, instrumentos de todo tipo de materiales la producen. Las matemáticas son sobretodo abstracciones que no necesitan ni siquiera papel y lápiz

A diferencia de las matemáticas la música podría parecer inútil pero el mundo actual no se podría concebir sin matemáticas, ¿cómo haber llegado a la tecnología y a todos los inventos modernos sin ellas?

La música está cargada de emociones es alegre o triste, suave o agresiva, puede ser espiritual, estética, religiosa pero no podemos hablar de un teorema "triste" o de una demostración "agresiva".

Tanto el matemático como el músico se encuentran ocupados resolviendo problemas o componiendo o interpretando, enseñando a alumnos sin detenerse a pensar que ambos están entregados que son paradigmas de lo abstracto. Entre ellos se han dado niños prodigio y grandes genios cuyas memorias se honran en los Panteones de las grandes ciudades; Palestrina, Bach, Mozart, Beethoven, Newton, Pascal, Neumann, Einstein , Ramanujan entre muchos. Fenómeno que no ocurre en otras disciplinas.

Por la mezcla entre lo terrenal y lo celestial, lo esotérico y lo práctico, lo universal y lo particular ambas disciplinas han tenido un poder místico desde la antigüedad. Hasta la fecha el aspecto mágico y ritualista se mantiene porque hay que tener cierto grado de iniciación para introducirse en la lectura de una partitura así como para poder seguir la demostración de un teorema. Pero en ellas hay algo de genial; en la notación que es capaz de indicarnos, tiempos, ritmos y altura de sonidos en el caso de la música o una numeración tan sofisticada como la arábiga y notaciones tan desarrolladas que dan estructura y sentido a los conceptos.[Rothstein]

Las matemáticas nacen de la necesidad práctica de registrar el paso del tiempo y las observaciones del cielo y consisten al principio solamente de números y conteos. Existía la necesidad de llevar un registro de las cosechas, del ganado y de las operaciones comerciales. Así se desarrollaron signos y palabras para los números.

Aunque las primeras expresiones del arte están veladas por la bruma de la prehistoria existen silbatos de hueso, flautas de caña y palillos de tambor hallados en cuevas y tumbas que atestiguan el poder del sonido para evocar estados de ánimo y reflejan las huellas del hombre en ritos misteriosos. La música nace de la necesidad de protegerse de ciertos fenómenos naturales, de alejar los espíritus malignos, de atraer la ayuda de los dioses, de honrarlos y festejar sus fiestas y de celebrar el cambio de las estaciones.[Hammel]

El comercio,la agricultura,la religión y la guerra han experimentado la influencia de las matemáticas y todos a su vez han influido en los matemáticos además el desarrollo de la ciencia, de la filosofía y de las matemáticas, es más sustancial para la historia de la humanidad que un desfile de normas y de guerras sucesivas.[Mankiewicz, p. 8]

1.2. Relaciones en la Antigüedad

Los Pitagóricos

Se cree que la figura legendaria de Pitágoras nació en la isla de Samos, actualmente Turquía alrededor de 580 a. de Cristo, contemporáneo de Buda y Confucio, Lao-zi y probablemente Zoroastro . Se dice que él acuñó la palabra matemáticas que significa "lo que es aprendido" y que fue discípulo de Tales de Mileto. Es célebre por el teorema que lleva su nombre. Las referencias que de él tenemos son a menudo parciales, incluso Aristóteles casi 200 años mas tarde , fue incapaz de dar una visión clara. El pensamiento de Pitágoras y sus seguidores que fueron altamente respetados por sus ideas filosóficas y religiosas durante los siglos VI y V a. de C. en Grecia y el sur de Italia, llega a nosotros por una variedad de fuentes secundarias. Describe un sistema de ideas que busca unificar los fenómenos del mundo físico y del mundo espiritual en términos de números, en particular, en términos de razones y proporciones de enteros. Se creía que, por ejemplo las órbitas de los cuerpo celestiales que giraban alrededor de la tierra producían una especie de sonidos que armonizaban entre sí produciendo un sonido bello al que nombraban la "música de las esferas".

Pitágoras estudió la naturaleza de los sonidos musicales. La música griega existía antes, era esencialmente melódica mas que armónica y era microtonal. Es decir su escala contenía más sonidos que la escala de 12 sonidos del mundo Occidental. Esto no es algo inusual en las tradiciones musicales orientales donde la música es enteramente melódica. Los intervalos más pequeños no se escriben en nuestra notación actual aunque algunos cantantes modernos e instrumentalistas de jazz lo ejecuten.

Fue Pitágoras quien primero descubrió que existía una relación numérica entre tonos que sonaban "armónicos" y fue el primero en darse cuenta que la música siendo uno de los medios esenciales de comunicación y placer podía ser medida por medio de razones de enteros. Sabemos que el sonido producido por tocar una cuerda depende de la longitud, grosor y tensión de la misma. Entendemos que cualquiera de estas variables afecta la frecuencia de vibración de la cuerda. Lo que Pitágoras descubrió es que al dividir la cuerda en ciertas proporciones era capaz de producir sonidos placenteros al oído. Eso era una maravillosa confirmación de su teoría. [Molina],[González][Hammel, pag. 48]. Números y belleza eran uno solo. El mundo físico y el emocional podían ser descritos con números sencillos y existía una relación armónica entre todos los fenómenos perceptibles.

Pitágoras encontró que al dividir una cuerda a la mitad producía un sonido que era una octava más aguda que el original ; que cuando la razón era 2:3 se producía una quinta y que otras razones sencillas producían sonidos agradables.

La razón por la cual encontramos estos intervalos mas agradables que otros tiene que ver con la física de la cuerda tocada. Cuando una cuerda de 36 cm se rasga, no sólo se produce una onda de 36 cm. sino que además se forman dos ondas de 18 cm., tres de 12 cm., cuatro de 9 cm. y así sucesivamente. La cuerda vibra en mitades, tercios, cuartos, etc. Y cada vibración subsidiaria produce "armónicos", estas longitudes de onda producen una secuencia de armónicos, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$... de la longitud de la cuerda. Los sonidos son más agudos y mucho más suaves que el sonido de la cuerda completa (llamada "la fundamental") y generalmente no se perciben pero son los que hacen que los instrumentos musicales suenen diferentes entre sí. Ya que do y sol a una distancia de quinta comparten muchos de los mismos armónicos, estos sonidos se mezclan produciendo una mezcla agradable.

Sin embargo Pitágoras no sabía nada de armónicos. El sólo sabía que la longitud de la cuerda con las razones 1:2 y 2:3 producía unas combinaciones de sonidos agradables y construyó una escala a partir de estas proporciones. En sus experimentos Pitágoras descubrió tres intervalos que consideraba consonantes; el diapasón, el diapente y el diatesaron. Los llamamos la octava, la quinta y la cuarta porque corresponden al octavo, cuarto y quinto sonidos de la que conocemos como escala Pitagórica diatónica. La llamamos quinta porque corresponde a la quinta nota de la escala.

Los pitagóricos no sabían de ondas sonoras ni de frecuencias ni de cómo la anatomía del oído afecta la altura de un sonido. De hecho la regla que establece que la frecuencia está relacionada con la longitud de la cuerda fue formulada hasta el siglo XVII cuando el franciscano Fray Marin Mersenne definió algunas reglas sobre la frecuencia de una cuerda vibrando.[Hammel]

Una de las enseñanzas clave de la escuela pitagórica era que los números lo eran todo y nada se podía concebir o crear sin estos. Había un número especialmente venerado, el 10, al igual que la tetractys, siendo la suma de 1, 2, 3, y 4. La tetractys era el símbolo sagrado de los pitagóricos , un triángulo de cuatro hileras representando las dimensiones de experiencia. La noción pitagórica puede ser dada con una equivalencia algebraica moderna [McClain, p. 45]

1 punto	$(n^0 = 1)$
2 línea	AB
3 plano	A^2ABB^2
4 sólido	$A^3A^2BAB^2B^3$

En el caso de la música simbolizaba las proporciones entre las notas empezando por la proporción 1:2 para la octava. La armonía de las esferas proviene de esta numerología musical que llegó también a influir en el modelo planetario de Kepler unos 2000 años más tarde. Los experimentos de Pitágoras con el monocordio llevaron a un método de afinación con intervalos en razón de enteros conocido como la afinación pitagórica. La escala producida por esta afinación se llamó escala pitagórica diatónica y fue usada durante muchos años en el mundo occidental. Se deriva del monocordio y de acuerdo a la doctrina pitagórica todos sus intervalos pueden ser expresados como razones de enteros.

Existen diferencias de afinación entre esta escala y la escala temperada usada actualmente.

En la época de los antiguos griegos, los pitagóricos desarrollaron una división del currículum llamado cuadrivium en donde la música se consi-deraba una disciplina matemática que manejaba relaciones de números, razones y proporciones. Esta división se mantuvo durante la Edad Media por lo que era necesario el estudio de ambas disciplinas y no es de extrañar que quien se instruía en matemáticas estudiara la teoría de la música lo cual no implica que fueran músicos ejecutantes o compositores. El cuadri-vium (aritmética, música, geometría y astronomía) con la adición del trivium (gramática, retórica y dialéctica), se convirtieron en las siete artes liberales, pero la posición de la música como un subconjunto de matemáticas permaneció constante durante la Edad Media.

A continuación enumero algunos ejemplos de hombres prominentes que escribieron sobre ambas disciplinas. Se cree que el primer libro de Elementos de Euclides es de origen pitagórico y fue la base del estudio de matemáticas durante siglos pero además él también escribió sobre música. Arquitas, uno de los más brillantes pitagóricos escribió tratados de geometría sólida y también es autor de un tratado titulado "Sobre la música".

En el año 100 d.de C. Nicómaco quien produjo tratados como Introducción a las matemáticas e Introducción a la geometría escribió también

Introducción a la música y Un tratado de armonía. Nicómaco define la aritmética como cantidad absoluta y la música como cantidad relativa y habló de la importancia de las razones de enteros en su Teoría de la música (ver [Hammel], [Molina], [González] y [Mankiewicz]).

1.2.1. Edad Media y en el Renacimiento

La longevidad de la tradición pitagórica fue propiciada por Severino Boecio, filósofo y matemático, sus textos de matemáticas fueron usados por siglos. Nacido en Roma en el Siglo V, fue el principal traductor de la teoría de la música en la Edad Media. Escribió "Principios de la música", interpretando los trabajos de Nicómaco, Ptolomeo y Euclides. Severino Boecio creía que la música y las proporciones que representaban los intervalos musicales estaban relacionados con la moralidad y la naturaleza humana y prefería las proporciones pitagóricas. Como estas especulaciones tomaban de punto de partida la expresión de los intervalos en fracciones matemáticas, la música se ganó su lugar en el *cuadrivium* [Hoppin]

Las concepciones estrechas del medioevo junto con las estrictas doctrinas de la iglesia, el sistema educativo, la falta de aceptación de los números irracionales (los inconmensurables) crearon una atmósfera que impedía el desarrollo de la música puesto que siempre se pretendía respetar esas relaciones.

La música de las esferas

Johannes Kepler(1571-1630) fue un astrónomo y matemático alemán cuyas tres leyes del movimiento planetario contribuyeron al descubrimiento por Newton de la gravitación universal. En *Mysterium Cosmographicum (1596)* interpreta no sólo a la geometría sino a la armonía musical como revelaciones de la ley divina. Reconociendo que los planetas giraban alrededor del sol, refinó la teoría de la “música de las esferas” de los pitagóricos, sugiriendo que los planetas producían diferentes sonidos por los diferentes grados de velocidad a la que giraban. Creía que si se conocía la masa y la velocidad de un objeto que giraba se podría calcular su sonido fundamental. En *Harmonices Mundi Libri V* (1619) reinterpreta la armonía musical. Sus estudios matemáticos del movimiento de los planetas lo llevaron a dar una notación racional de la “música ” de éstos , confirmando que su verdadera música era polifónica y no sólo alguna escala estática como habían afirmado escritores anteriores. Desarrolló sonidos correspondientes a los planetas entonces conocidos. En su teoría neopitagórica de las matemáticas detrás del universo, sus explicaciones físicas de las vibraciones y su implicación en la armonía universal lo llevaron a la convicción de que la fuente de la respuesta humana a la música debe buscarse en el alma y el intelecto y no en la materia física. [Godwin]

1.2.2. Influencia de las Matemáticas en el desarrollo de la Melodía

La Melodía

En la composición de una pieza musical existe una estructura que está influida por las matemáticas, en algunas ocasiones más obvia que en otras.

Un procedimiento básico para obtener cohesión en una pieza de música es el reafirmar una secuencia de sonidos una y otra vez, en forma variada para evitar la monotonía y dar carácter a la composición. Se debe hacer de tal manera que resulte placentera al oído y de interés a la mente. Si estas variaciones están bien hechas ayudarán a que esta pieza musical se recuerde más fácilmente. Estas la harán más atractiva, ya que el reconocer frases repetitivas es importante para el placer musical. Algunas de las técnicas usadas para dar a una composición unidad sin hacerlas aburridas están basadas en el plano geométrico.

Influencia de las Transformaciones geométricas en la Melodía

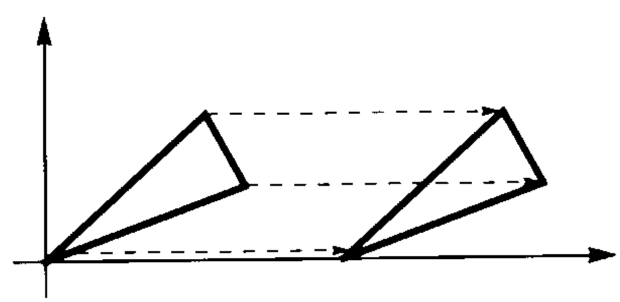
Las transformaciones musicales están íntimamente relacionadas con las cuatro transformaciones geométricas básicas. Las transformaciones geométricas que aquí usaremos recolocan una figura geométrica rígida en el plano preservando su forma y tamaño. La forma original no se distorsiona con la manipulación. Así una frase musical tendrá motivos que se repiten en forma idéntica o se repiten en forma más aguda o más grave, en otras ocasiones en vez de ascender descienden o retroceden (retrógrado).

Las transformaciones geométricas son: traslación, transposición, reflexión e inversión

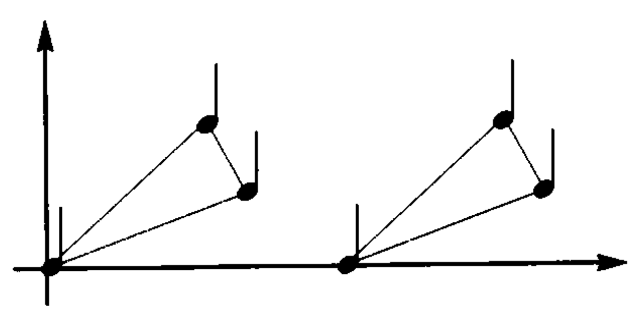
Todas estas transformaciones geométricas las encontramos en la mayoría de las melodías populares y un análisis de las obras maestras musicales nos llevará a encontrarlas, no hay una que no las tenga. Ya sea en las obras de Bach como en las de Mozart, Haydn, Beethoven, etc. sin excluir los Beatles o cualquier canción de moda. Este es un recurso muy utilizado aunque normalmente no lo asociamos con matemáticas. Imaginemos la melodía de When de Saints go marching in, o Guantanamera, Cielito Lindo, Las Mañanitas y en cada una de ellas encontramos alguna de estas transformaciones.[Hammel]

En 1984 Julio Estrada en colaboración con Jorge Gil publicó un libro [Estrada] en el cual se aplica la teoría de grupos finitos y el álgebra de Boole que estudia la simetría de las formas, para analizar la estructura de la música y como una herramienta en la composición dada la coincidencia de las estructuras musicales con la simetría (retrogradación, inversión y retrogradación de la inversión).

Por ejemplo:

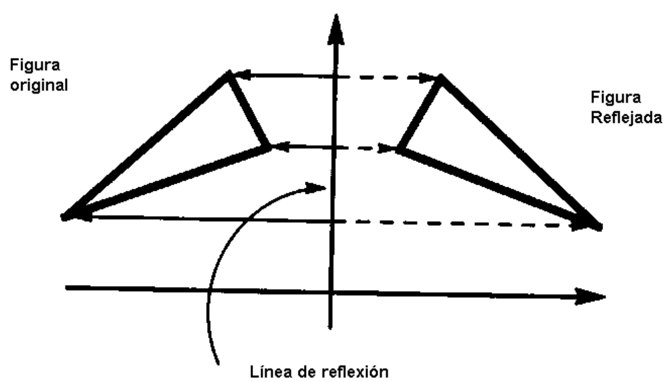


Si colocamos notas musicales en los vértices del triángulo

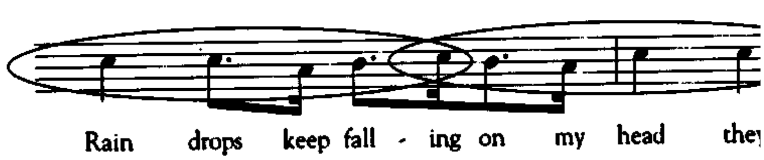


y después estas notas las transferimos a un pentagrama,

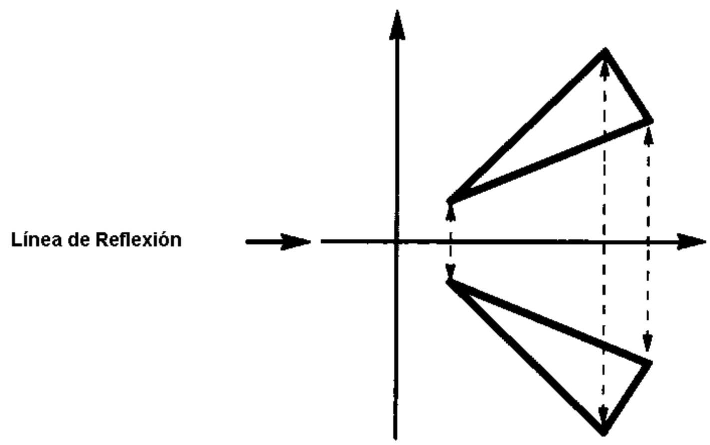
emerge el equivalente musical de una traslación geométrica.
La segunda transformación geométrica es la reflexión.



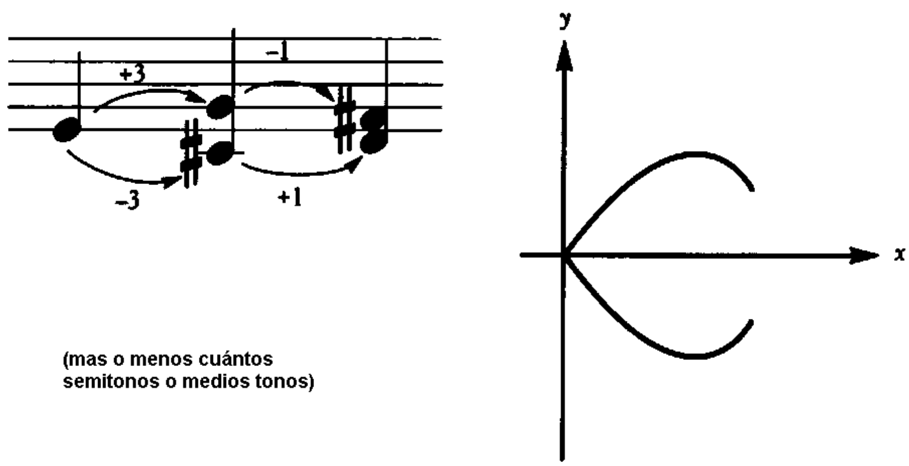
El equivalente musical es llamado retrógado



Un ejemplo musical es la canción "Rain drops keep fallen in My head"



La ecuación para estas gráficas es y=f(x) y y=-f(x)



Esta forma de inversión puede ser encontrada en la canción Greensleeves

1.2.3. Serie de Fibonacci

La serie de Fibonacci provee numerosos ejemplos de la relación entre música y matemáticas. Estos números son elementos de una serie infinita nombrada así por Fibonacci matemático medieval quien vivió alrededor de 1200 d. de C. y cuyo nombre verdadero era Leonardo de Pisa. Su figura es importante porque introdujo a Europa la notación arábiga sustituyendo la romana.

El primer número de la serie de Fibonacci es 1, y cada número subsecuente es la suma de los dos anteriores. Como el primero es 1 y antes no hay nada, el segundo es 1, el tercero 1+ 1, el cuarto es 1+2, y así sucesivamente:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34........

La razón entre dos elementos subyacentes de la serie lleva a converger al decimal 0.618...y sus recíprocos al decimal 1.618...

La proporción de estas razones sea en fracción o en decimal es considerada por muchos como atractiva a la vista, balanceada y bella y es nombrada la proporción (sección) áurea.

Por su atractiva estética la proporción áurea se usa ampliamente en el arte y en la arquitectura. Muchas elementos de la naturaleza se desarrollan en esta proporción, las vueltas del caracol, los cuernos del cimarrón, la forma en como nacen las ramas y hojas de ciertas plantas, etc.

Las superficies se dividen para obtener la proporción áurea para lograr una composición bella y balanceada. Los números de la serie se utilizan porque es una manera fácil de lograr la proporción áurea. Pero no sólo es agradable a la vista sino al oído.

No se sabe si el uso de la serie es intencional o de manera intuitiva, tal vez el compositor la usa sin saber, sólo porque se oye bien. Por ejemplo Beethoven no sólo la emplea en el tema de su 5^a Sinfonía sino además en la forma en que incluye este tema en el transcurso de la obra separado por un número de compases que pertenece a la serie.

El compositor húngaro Béla Bartok utilizó frecuentemente esta técnica para el diseño de sus composiciones. Y la utilizó para desarrollar una escala que denominó la escala Fibonacci.[Hammel]

1.2.4. Procesos formales en Música

Otro aspecto interesante de la relación entre música y matemáticas es la composición de obras musicales a partir de reglas y conceptos como probabilidad aplicada a juegos de azar, modelos estadísticos, el movimiento browniano(cap. 3) o el ruido blanco (ver anexo) o música estocástica (cap.4) entre otros. También se puede generar música por medio de computadoras programadas con ciertas reglas.

Uno de los primeros intentos data de alrededor del año 1026, cuando Guido de Arezzo desarrolló una técnica para componer una melodía asociando sonidos a las vocales de un texto de tal forma que la melodía variaba de acuerdo al contenido de vocales del texto. Abundan también los procedimientos composicionales basados en proporciones. Un exponente de este método fue Guillaume Dufay (1400-1474), quien derivó el tempo de sus motetes de una catedral florentina utilizando la antes mencionada sección áurea (1:1.618). Dufay fue de los primeros en utilizar las transformaciones geométricas en forma deliberada en su música. El uso de secuencias rítmicas como una técnica formal se utilizó entre los años 1300 - 1450 y el gran músico G. Machault lo utilizó en algunos motetes.

1.2.5. Juego de dados de Mozart

Mozart en 1777 a los 21 años, describió un juego de dados que consiste en la composición de una pequeña obra musical; un vals de 16 compases que tituló "Juego de dados musical para escribir valses con la ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición" K 294.

Cada uno de los compases se escoge lanzando dos dados y anotando la suma del resultado. Tenemos 11 resultados posibles, del 2 al 12. Mozart diseñó dos tablas, una para la primera parte del vals y otra para la segunda. Cada parte consta de 8 compases. Los números romanos sobre las columnas corresponden a los ocho compases de cada parte del vals, los números del 2 al 12 en las hileras corresponden la suma de los resultados, los números en la matriz corresponden a cada uno de los 176 compases que Mozart compuso. Hay $(2 \times 11)^{14}$ (750 trillones) variaciones de este vals, sólo una pequeña fracción ha sido escuchada. Tomando en cuenta la duración del vals, pasarían muchos miles de años si quisiéramos escuchar todas las posibilidades. En el capítulo 3 se crea una composición de este vals.

1.3. Siglo XX: técnicas y métodos nuevos

El período entre 1948 y 1953 es una etapa de especial fermentación para la música contemporánea, durante la cual se suceden una serie de técnicas y métodos.

1.3.1. Música Concreta y Música Electrónica

La **música concreta** encarnó el concepto de que no sólo se compone la música con notas musicales sino que es posible transformar ruido en música. Pierre Schaeffer y Pierre Henry, cuando dieron a conocer sus experiencias sonoras en París, en 1950, enriquecieron la música con las nuevas posibilidades de la técnica. La denominación "concreta" proviene del hecho de que el material sonoro utilizado tenía como origen la realidad concreta de fenómenos sonoros. Músicos de diferentes tendencia materializaron sus investigaciones gracias a la adaptabilidad de la música concreta, destacan entre ellos Milhaud, Messiaen, Boulez, Berio, Penderecki y Mujoshi.

La **música electrónica**, iniciada en Colonia en 1950, contemporánea de la música concreta parisiense tiene en común con ésta la supresión del intérprete además de que ambas son el resultado de una exploración de asimilación de las realidades sonoras conseguidas por los músicos. La fuente sonora primordial de la música electrónica son los sonidos producidos por los generadores eléctricos; ondas sinusoidales, ruido blanco, etc. Lo más interesante de esta corriente musical es que el compositor puede actuar discretamente sobre la producción de su materia prima. Con este material los músicos componen obras muy rigurosas desde el punto de vista de la organización musical. El compositor más destacado de la música electrónica es Karlheinz Stockhausen (1928), músico alemán que intentó buscar una nueva armonía entre material y forma, comprobando que ello era imposible con los sonidos instrumentales tradicionales.

El azar y la composición

Otro método de composición que nace hacia 1950 es el que utiliza el azar como principio constructivo. Es significativo que este factor de indeterminación aparezca en una época tan preocupada por la racionalización de las técnicas musicales. La música a la que el compositor ha incorporado el azar recibió el nombre de música aleatoria, del latín alea (dado). Esta designación es ambigua, ya que parece indicar que la obra sea fruto de una simple jugada de dados, donde el azar lo define todo. Afortunadamente esto no es así. El azar en una obra puede estar incorporado a nivel de compositor o a nivel de intérprete. Parte de la obra puede depender de la ejecución del intérprete, y así conseguir formas abiertas de la música aleatoria en las que cada interpretación es diferente. En las obras de Stockhausen y de Boulez se encuentra una indeterminación controlada de manera que el intérprete puede elegir su propio camino entre las posibilidades que el autor ofrece.

En algunas obras aleatorias ciertos fragmentos se confían a la improvisación personal o colectiva de los intérpretes. Existen obras en las que se encuentran simultáneamente una expresión que nace de un impulso interior y unas estructuras racionales. Xenakis critica este tipo de azar que califica de cara o cruz y de simple improvisación, e introduce en sus obras el azar científico, vinculado con el pensamiento matemático.

Música y máquinas

Existen a partir del siglo XIX numerosos intentos de crear música a partir de modelos pero es sobretodo en el siglo XX con la aparición de la computadora cuando en diferentes partes mundo aparecen múltiples propuestas, muchas de ellas con grandes logros. La introducción del pensamiento matemático y los métodos que de él derivan en la composición musical ha permitido la prospección de nuevas formas musicales basadas en leyes matemáticas.

1.3.2. La Música y el Tiempo

La música se desarrolla en el tiempo. El tiempo se desarrolla en la música. A pesar de que existe un lazo fundamental entre música y tiempo, el tiempo musical no ha se ha estudiado como un campo independiente, sin embargo todo proceso musical toma parte en el tiempo, no sólo el ritmo y la métrica sino el movimiento, la continuidad, progresión, proporción, duración y tempo. Al escuchar música, el tiempo que experimentamos es de una manera especial. Experimentamos simultáneamente el tiempo musical y el tiempo ordinario o “absoluto”. Ya que el tiempo musical difiere del tiempo de la existencia ordinaria (el del reloj), experimentar ambos a la vez parecería una contradicción a las leyes de la lógica, es como si el tiempo musical no fuera unidimensional y no se relacionara únicamente a la duración. Una escucha atenta y profunda da primacía al tiempo musical.

La linealidad o no-linealidad son los medios fundamentales por los cuales la música estructura el tiempo y el tiempo estructura la música. La no-linealidad no es la ausencia de linealidad sino que es en sí misma la fuerza estructural. Ya que estas dos fuerzas pueden aparecer en diferentes combinaciones en cada nivel de jerarquía estructural de la música, su interacción determina el estilo y la forma de una composición.

Linealidad y procesos de Markov

Aunque la teoría de la información aplicada científicamente al estudio de la música es problemática, provee un marco estético para entender el proceso de escuchar. Las cadenas de Markov para el estudio de la música han sido propuestos por teóricos de la información como Xenakis, Hiller, Youngblood, Moles, Cohen, Hutchinson entre otros . Una cadena de Markov es una serie de antecedentes que contribuyen a la probabilidad de un evento subsecuente. En una cadena de Markov de primer orden, un evento se entiende como "escogido" en base a la probabilidad sugerida por un evento anterior inmediato. Por ejemplo la probabilidad de que un Do siga a un Si en un pasaje en Do Mayor es diferente a la probabilidad de encontrar un Do que siga a un Si en un pasaje en Fa Mayor. En una cadena de Markov de segundo orden la probabilidad de cada evento depende de dos eventos anteriores. Por ejemplo en la menor hay una probabilidad específica de escuchar Do después de haber escuchado un Si siguiendo un La. Entre más alto es el orden de la cadena más grande es la linealidad. Una no-linealidad total corresponde a una cadena de Markov de orden cero, aunque puede sin duda ser escogida de acuerdo a cierto peso estadístico. Hay por ejemplo una probabilidad específica de encontrar un Do en Mi b menor sin importar la nota que lo precede.

La linealidad la definiremos como la determinación de algunas características de la música de acuerdo a implicaciones que surgen de eventos anteriores en la pieza. De esta manera la linealidad es resultado de un proceso. La no-linealidad es la determinación de algunas características de acuerdo a implicaciones que surgen de principios o tendencias que gobiernan una pieza entera o sección. El tiempo lineal es un continuum temporal creado por una sucesión de eventos en los cuales los primeros implican los siguientes y los últimos son consecuencia de los primeros. El tiempo no lineal es un continuum temporal que resulta de principios que gobiernan permanentemente una sección o una pieza. La no-linealidad es menos familiar en la cultura occidental y es más difícil de explicar en parte porque nuestro lenguaje es lineal así como nuestro proceso de pensamiento analítico. La no-linealidad es sobretodo un fenómeno del lado derecho del cerebro y para una explicación utilizamos la parte izquierda del mismo.

Mientras que los principios lineales están en flujo constante, las determinaciones no-lineales no crecen ni cambian. Los principios no-lineales pueden revelarse gradualmente, pero no se desarrollan de eventos o tendencias anteriores. La no-linelidad está presente desde su comienzo. La dinámica para comprender una obra no-lineal estriba en entender sus relaciones inmutables. Hay que aclarar también que la linealidad o no-linealidad no están necesariamente relacionadas con continuidad, discontinuidad o contigüidad.

Linealidad en la música tonal.

La música occidental ha sido predominantemente lineal. La tonalidad está compuesta de un conjunto de complejas relaciones jerárquicas entre notas, sustentadas por duraciones, dinámica, timbre, etc. La tónica está dotada de estabilidad, las relaciones tonales conspiran hacia un objetivo, el retorno a la tónica, finalmente victoriosa y no más amenazada por otras tonalidades. Así el movimiento tonal es siempre dirigido hacia una meta. El suspenso y el movimiento están determinados por qué ruta tomar y en cuánto tiempo.

El movimiento tonal es una metáfora. En música nada se mueve realmente excepto las partes que vibran de los instrumentos y las moléculas de aire que estimulan nuestros tímpanos. Sin embargo el escucha que ha aprendido a oir música tonal siente el movimiento constante de la melodía, las armonías hacia las cadencias, el movimiento rítmico y métrico, y las progresiones dinámicas y tímbricas. La música tonal nunca es estática porque hay en ella cambios constantes de tensión. Hemos aprendido desde pequeños a escuchar esta música y nos sentimos cómodos, sin embargo es una habilidad que desarrollamos y corresponde a procesos dirigidos característicos de la vida occidental.

Linealidad en la música atonal

La tonalidad, expresión musical de la linealidad temporal fue un producto de la tradición cultural europea.

La desintegración de la linealidad empezó con su intensificación. Al aumentar el cromatismo en la tonalidad aumento la urgencia por una música dirigida hacia una meta, coincidiendo con el modernismo en las artes visuales y literarias. En ciertas canciones del romanticismo de Wolf basado en poemas de Mörike o en el Intermezzo en mi menor de Brahms, se está en la búsqueda de sueños que difícilmente materializarán. En ellas el movimiento de la voz lleva prolongaciones de lento movimiento estructural de armonías, ya no se escuchan las progresiones típicas de un siglo anterior. En la música atonal de Schönberg desaparece el fondo armónico tonal.

La Influencia de la no-linealidad es muy fuerte en la música del Siglo XX.

1.3.3. Iannis Xenakis (1922-2001)

Nació el 29 de Mayo de 1922 en Braila, Rumania. Compositor, arquitecto y matemático originó la música estocástica, compuesta con la ayuda de computadoras y basada en sistemas matemáticos de probabilidad.

Nació en una familia rica de origen griego y se mudó a Grecia en 1932. Luchó en Grecia en el movimiento de resistencia durante la Segunda Guerra Mundial en donde perdió un ojo. Después de graduarse en 1947 en el Instituto Tecnológico de Atenas, se exilió en Francia por sus actividades políticas. Se trasladó a París, donde estuvo asociado durante doce años con el famoso arquitecto Le Corbusier. Durante este tiempo construyó el pabellón Philips de la Exposición Internacional de Bruselas en 1958 . A partir de los 30 años se dedicó seriamente a la composición musical, recibiendo clases de Darius Milhaud y estudió composición en el conservatorio de París con Oliver Messiaen (1950-1962). En 1954 comenzó sus experimentos de música estocástica con la composición “Metástasis”. En 1955 escribió un artículo en el que expuso sus técnicas rigurosamente lógicas, donde el ejecutante (mayormente con instrumentos acústicos), es dirigido por una notación especial para producir sonidos especificados por una computadora programada por el compositor.

En su obra Achorripsis (1958), para 21 instrumentos lo llevó a formular sus reglas mínimas de composición.

Recibió numerosos premios y reconocimientos y fundó el Equipo de Matemáticas y Autómatas Musicales en Francia y en la universidad de Indiana en los Estados Unidos.

Fue un compositor prolífico y escribió muchos artículos; en su libro Música Formal describe sus métodos de composición y su filosofía, su tesis doctoral en letras y humanidades fue publicada con el título Arte/Ciencia .Aliadas.

Música y Teoría

Xenakis fue uno de los pocos compositores de su época no interesado en el serialismo, movimiento nacido en Viena en boga desde principios del siglo XX que influyó fuertemente la composición musical. Los representantes más importantes de esta técnica son Arnold Schönberg, Anton Webern y Alban Berg aunque tuvieron numerosos seguidores, Xenakis prefirió la formalización, es decir el uso de un modelo como base de una composición.

Contrario a los movimientos vanguardistas americanos cuya cabeza más visible era John Cage, Xenakis se negaba a anular el papel del compositor como principal elemento del proceso creador, fruto de ello surgieron una serie de complejas partituras de innegables capacidades comunicativas, como Achorripsis (1956-1957) Utilizó modelos matemáticos en sus composiciones así como en algunas de sus obras arquitectónicas.

Utilizó sobretodo leyes de probabilidad

1. Distribución aleatoria de puntos en un plano (Diamorphoses)
2. Ley de Maxwell-Boltzmann (Pithoprakta)
3. Restricciones mínimas (Achorripsis)
4. Cadenas de Markov (Analógicas)
5. Distribución de Gauss (ST/IO,Atrés)

También utilizó teoría de juegos (Duelo, Estrategia), teoría de grupos (Nomos alpha) y teoría de conjuntos y álgebra booleana (Henna, Eona).

Los paréntesis indican los nombres de las obras compuestas según estos modelos.

El serialismo contra el cual reaccionó Xenakis fue un movimiento musical que desdeñaba el uso de cualquier escala usada hasta entonces y las jerarquías propias de la misma y a su vez proponía el uso de una serie de sonidos que normalmente utilizaba los doce sonidos que se encuentran en una octava sin que se pudiera repetir una sola nota hasta no haber aparecido los doce sonidos, esta música llegó a ser extremadamente compleja.

Xenakis propuso el uso de una media estadística de momentos aislados y de transformaciones sonoras en un momento dado. El efecto macroscópico podría ser controlado por la media de los movimientos de los elementos seleccionados. El resultado es la introducción de la noción de probabilidad, que implica en este caso particular, el cálculo combinatorio. Escapa de esta manera a la categoría lineal en el pensamiento musical.

Esto lleva al desarrollo de su música estocástica. La música estocástica se caracteriza por masas de sonido, "nubes" o "galaxias", donde el número de elementos es tan grande que la conducta de un elemento individual no puede ser determinada pero sí la del todo. La palabra estocástica proviene del griego "tendencia hacia una meta". Para músicos esto significa que la música es indeterminada en sus detalles, sin embargo tiende a una meta definida.

Probablemente la composición más famosa de Xenakis sea su primera pieza estocástica, *Metástasis* (Donaueschingen,1955) para orquesta de 61 músicos. Esta pieza está basada en el desplazamiento continuo de una línea recta. Este modelo se representa en la música como un glissando continuo. La contracción y expansión del registro y la densidad a través del movimiento continuo son ilustraciones de las leyes estocásticas.

Esta obra fue la inspiración para la construcción del pabellón Phillips de la Exposición de Bruselas de 1958. En esta ocasión música y arquitectura encontraron una conexión íntima. En tal estructura no hay superficies planas.

Fases Fundamentales de una obra musical

1.- Concepción Inicial (intuición, datos provisionales o definitivos)

2.- Definición de entidades sonoras y de sus simbolismos comunicables con las limitaciones posibles (sonidos de los instrumentos musicales, sonidos electrónicos, conjuntos ordenados de elementos sonoros, formaciones granulares o contínuas, etc.)

3.- Definición de las transformaciones cuyas entidades sonoras se dearrollarán en el transcurso de la composición.

La rigurosidad matemática de la obra de Xenakis podría hacer pensar en resultados excesivamente intelectuales, pero la expresiva contundencia de sus composiciones genera un impacto emocional ligado a una extrema claridad armónica y estructural.

Si el lector aun no ha escuchado la obra de Xenakis lo invito a hacerlo; si se escucha con una postura atenta, abierta y libre de prejuicios se puede disfrutar de un exponente superlativo de lo que puede ser la comunión de música y matemáticas.

Capítulo 2

Teoría de Probabilidades

La experiencia indica que muchos experimentos y operaciones repetitivas se conducen como si ocurrieran bajo circunstancias esencialmente estables tal como ocurre al lanzar una moneda o un dado. Bajo tales circunstancias es posible construir un modelo matemático satisfactorio de la operación repetitiva. Este modelo puede ser empleado para estudiar las propiedades de la operación y sacar conclusiones al respecto [Hoel], [Mood].

Espacio Muestral. Empecemos nuestro estudio planteando un experimento: el lanzamiento de dos dados. Definimos al espacio muestral S como el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. Así por ejemplo, en el experimento de lanzar dos dados existen 36 resultados posibles los cuales se enlistan en la Tabla 1.

$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$
$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$
$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$
$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$
$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$
$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$

Tabla 1. Espacio muestral de los resultados del lanzamiento de dos dados

En la primera posición de las parejas se coloca el resultado del primer dado y en la seguna posición el resultado del segundo dado. Con base a la

Tabla 1 podemos obtener un nuevo espacio muestral generado por la suma de los resultados de dicho experimento. Este espacio muestral se muestra en la Tabla 2.

Resultado del segundo dado	Resultado del primer dado					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabla 2. Espacio muestral de la adición del lanzamiento de dos dados

Evento. Un evento A es un subconjunto de un espacio muestral S. Consideremos un experimento tal, que cualquiera que sea el resultado del experimento se pueder saber si un evento A ha ocurrido o no.

En nuestro caso, si A es el evento que consiste en obtener un siete al lanzar dos dados, entonces A está asociado con los seis puntos muestrales $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ y $(6,1)$.

Unión. Si A y B son dos eventos asociados con un experimento, uno podría estar interesado en saber si al menos uno de los eventos A o B ocurrirá al llevar a cabo el experimento. El conjunto que consta de todos los puntos que pertenecen a A o B es llamado la unión de A y B, y es denotado por el símbolo $A \cup B$. Este conjunto representa el evento de que al menos uno de los eventos A o B ocurrirá.

Intersección. Otro evento que nos podría interesar sería saber si ambos eventos A y B ocurrirán al ejecutar el experimento. El conjunto de puntos pertenecientes tanto a A como a B es llamado la intersección de A y B, y es denotado por $A \cap B$.

Negación. Correspondiendo a cualquier evento A existe un evento asociado, denotado por $\overline{A}$, que indica que A no ocurrirá cuando el experimento sea ejecutado. El conjunto $\overline{A}$ es el complemento del conjunto A relativo al espacio muestral S.

Eventos excluyentes. Si dos conjuntos A y B no tienen puntos en común se llaman conjuntos disjuntos. En lenguaje de eventos se llaman eventos mutuamente excluyentes ya que la ocurrencia de uno de ellos excluye la del otro.

2.1. Probabilidad

En la literatura científica es común hacer una introducción de la probabilidad del tipo frecuencial [Meyer], pero para atacar los problemas relacionados con los sonidos y el ruido no es adecuada y se necesita dar un desarrollo de tipo axiomatico de la probabilidad [Hoel], [Hogg], [Grover], [Kwakernaak].

Probabilidad: Una función P de valores reales definida sobre un espacio muestral S, es una probabilidad si satisface [Hoel], [Mood], [Hogg]:

a) $0 \leq P\{A\} \leq 1$ para todo evento A

b) $P\{S\} = 1$

c) $P\{A_1 \cup A_2 \cup ...\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + ...$ para toda colección de eventos disjuntos, $A_1, A_2, ...$

La probabilidad de que un evento A ocurra, se denota por $P\{A\}$, y está relacionada con la proporción de veces que el evento A ocurrirá en la repetición del experimento.

El cálculo de la probabilidad es especialmente sencillo cuando el espacio muestral S consiste de un número n de elementos disjuntos s_1, $s_2, ...$, s_n llamados eventos simples. A cada uno de ellos se le asigna la probabilidad p_1, $p_2, \cdots, p_n$.

La condición (b) de la definición de probabilidad exige que

$$P\{S\} = \sum P\{s_i\} = \sum p_i = 1.$$

Ahora para un evento A que consiste en la unión de los eventos simples s_1, $s_2, ...$, s_j, donde $0 \leq j \leq n$ usando la regla de la adición la condición (c) toma la forma

$$P\{S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_j\} = \sum_{S_i \in A} P\{S_i\} = \sum_{S_i \in A} p_i$$

Eventos equiprobables: Para muchos juegos de azar, los cuales fueron el ímpetu original para el desarrollo de la teoría de la probabilidad, el espacio muestral no sólo es finito sino que los puntos muestrales tienen la misma probabilidad. Por ejemplo en un juego de dados con un espacio muestral como la Tabla 2, a cada punto se le asignará una probabilidad de $p_i = \frac{1}{36}$.

Si n indica el número total de elementos del espacio muestral y $N(A)$ indica el número de esos puntos contenidos en el conjunto A, entonces la condición (c) quedaría reducida a

$$P\{A\} = \frac{N(A)}{n}.$$

Tomemos el espacio muestral de la Tabla 2. Sea A el evento de obtener 7 puntos con los dos dados. Entonces si a cada punto del espacio muestral se le asigna el valor de probabilidad $p = \frac{1}{36}$, $P\{A\} = \frac{6}{36}$ debido a que $n = 36$ y hay seis puntos correspondiendo a la ocurrencia A, que son $(1,6)$, $(2,5)$, $(4,3)$, $(3,4)$, $(5,2)$, $(6,1)$.

Regla de la adición. Considerando los eventos A_1 y A_2 asociados con un experimento (no necesariamente son excluyentes), se cumple la regla de adición:

$$P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 \cap A_2\}$$

Cuando dos eventos no tienen puntos en común es decir son disjuntos entonces la fórmula se reduce a la expresión

$$P\{A_1 \cup A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$$

Estas relaciones pueden ser generalizadas para más de dos eventos. Las reglas anteriores se aplican a cualquier tipo de espacio muestral.

Regla de la Multiplicación y Probabilidad Condicional: Supongamos que uno estuviera interesado en saber si un evento A_2 ocurrirá sujeto a que la condición A_1 ocurra. Asumamos que el espacio muestral S consiste de un número finito de elementos. Al evento $A_1 \subset S$ lo podemos considerar como un espacio muestral restringido. Si a un elemento $s_i \in A_1 \subset S$ se le asigna una probabilidad p_i en el espacio muestral S, se le asignará una probabilidad π_i en el espacio muestral restringido A_1. Es razonable escoger $\pi_i = cp_i$, donde $c \in \mathbb{R}$. En el espacio muestral restringido se cumple la condición

$$1 = \sum_{A_1} \pi_i = c \sum_{A_1} p_i = cP\{A_1\}$$

de donde $c = 1/P\{A_1\}$ y $\pi_i = p_i/P\{A_1\}$.

Si la probabilidad de que A_2 ocurra, sujeta a la restricción de que A_1 ocurra, se escribe como $P\{A_2|A_1\}$ entonces

$$P\{A_2|A_1\} = \sum_{A_1 \cap A_2} \pi_i = \frac{\sum\limits_{A_1 \cap A_2} p_i}{P\{A_1\}},$$

la primera suma es sobre esos π_i correspondientemente a los puntos muestrales que caen en $A_1 \cap A_2$ ya que ellos son los únicos puntos muestrales en A_1, asociadas con la ocurrencia de A_2. La relación anterior se transcribe como

$$P\{A_2|A_1\} = \frac{P\{A_1 \cap A_2\}}{P\{A_1\}}.$$

A esta relación se le llama **regla de la multiplicación**, y se toma como definición de **probabilidad condicional.** De esta fórmula obtenemos la regla fundamental de la multiplicación para probabilidades.

$$P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_1\}P\{A_2|A_1\}.$$

Si se intercambia el orden de los dos eventos entonces esta fórmula se convierte en

$$P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_2\}P\{A_1|A_2\}.$$

Eventos Estadísticamente Independientes: Ahora suponiendo que A_1 y A_2 son dos eventos tales que

$$P\{A_2|A_1\} = P\{A_2\},$$
$$P\{A_1\}P\{A_2\} > 0$$

entonces se dice que el evento A_2 es **estadísticamente independiente** del evento A_1.

Cuando A_2 es independiente de A_1 la regla de la multiplicación se reduce a la expresión

$$P\{A_1 \cap A_2\} = P\{A_2\}P\{A_1\}.$$

2.2. Variables Aleatorias

Definición. Una variable aleatoria X es una función de valores reales definida en un espacio muestral S [Hoel], [Hogg].

Variables Aleatorias Discretas. Después de que se define una variable aleatoria X en un espacio muestral, el interés se centra en determinar la probabilidad de que X asuma valores específicos en su rango de valores posibles. Por ejemplo si X representa la suma de puntos obtenida al lanzar dos dados, entonces en el juego de dados es de interés calcular la probabilidad de que X asuma el valor de 7.

Definición. A la variable aleatoria X se le llama variable aleatoria discreta si su rango puede tomar solamente un número finito o numerable [Munkres], [Haaser] de valores en $\mathbb{R}$.

Si x es un valor particular de la variable aleatoria X definida en un espacio muestral discreto, la probabilidad de que el evento X asuma el valor x, está dada por

$$P\{X = x\} = \sum_{X=x} p_i.$$

Aqui la sumatoria es sobre todos los puntos muestrales para los cuales la variable aleatoria tiene el valor x. Note que las variables aleatorias no son forzozamente funciones inyectivas.

Variables Aleatorias Continuas. Los procesos físicos relacionados con la generación de sonidos varían continuamente al variar las condiciones externas y ambientales, por ello es conveniente el estudio de las variables aleatorias continuas.

Definición. A la variable aleatoria X, se le llama variable aleatoria continua si su rango consiste de algún intervalo (o algunos intervalos) de $\mathbb{R}$.

Hacemos notar que la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome algun valor en particular es nula.

2.3. Funciones de (Densidad) Distribución de Probabilidad

Funciones de (Densidad) Distribución de Probabilidad Discretas. Con el propósito de visualizar mejor la forma en que le corresponde a cada valor de la variable aleatoria discreta su probabilidad, conviene introducir una función llamada función de distribución de probabilidad discreta.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta, entonces la función $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, dada por $f(x) = P\{X{=}x\}$ es llamada función de (densidad) disribución de probabilidad discreta.

La función de (densidad) disribución discreta posee las siguientes propiedades

$$
\begin{aligned}
&i)\ \ f(x_i) \geq 0 \\
&ii) \sum_{x_i \in \mathbb{R}} f(x_i) = 1 \\
&iii) \sum_{a<x_i<b} f(x_i) = P\{a < X < b\}
\end{aligned}
$$

donde x_i son los valores que toma la variable aleatoria discreta X y a, $b \in \mathbb{R}$.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta, entonces a la función $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, dada por $F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $f(x_i) = P\{X = x_i\}$, se le llama función de (densidad) disribución de probabilidad discreta acumulativa de la variable aleatoria X.

El inciso (iii) nos permite calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X tome todos sus valores en el intervalo (a,b). Usando la función de densidad de probabilidad podemos calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X tome todos sus valores en el intervalo (a,b) con la expresión

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) = \sum_{a<x_i<b} p_i.$$

Usando nuevamente los dados como ilustración supongamos que deseamos calcular la probabilidad de que la suma de puntos exceda **7**. Usando la Tabla 1 y Tabla 2, la probabilidad esta dada por

$$P\{X > 7\} = \sum_{x=8}^{12} f(x) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}.$$

Dándole el valor apropiado a X y asumiendo la igualdad de la probabilidad de los elementos del espacio muestral encontramos que

$$
\begin{aligned}
f(2) &= f(12) = \frac{1}{36}, \\
f(3) &= f(11) = \frac{2}{36}, \\
f(4) &= f(10) = \frac{3}{36}, \\
f(5) &= f(9) = \frac{4}{36}, \\
f(6) &= f(8) = \frac{5}{36} \\
& \text{y} \\
f(7) &= \frac{6}{36}
\end{aligned}
$$

Funciones de Densidad de Probabilidad Continuas. Con el propósito de visualizar mejor la forma en que le corresponde a cada subintervalo de la variable aleatoria continua su probabilidad, es conveniente introducir una función llamada función de densidad de probabilidad continua.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una densidad de probabilidad continua si posee las siguientes propiedades

$$
\begin{aligned}
&i) \quad f(x) \geq 0, \\
&ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \\
&iii) \int_{a}^{b} f(x)dx = P\{a < X < b\},
\end{aligned}
$$

donde a y b son valores reales tales que $a < b$.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua, sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad de dicha variable aleatoria, entonces la función $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, dada por $F(x) = P\{X \leq x\}$, donde $x \in \mathbb{R}$ se le llama función de distribución de probabilidad continua acumulativa de la variable aleatoria X [Meyer].

Entre la función de densidad de probabilidad y la función de densidad de probabilidad acumulativa se cumple la relación [Hoel]

$$f(x) = \partial F(x)/\partial x$$

El inciso (iii) nos permite calcular la probabilidad de que la variable aleartoria X tome todos sus valores en el intervalo (a, b). Usando la función de distribución de probabilidad podemos calcular la probabilidad de que la variable aleartoria X tome todos sus valores en el intervalo (a, b) con la expresión

$$P\{a < X < b\} = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Esperanza Matemática de una Variable Aleatoria.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con una función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces la Esperanza Matemática (valor esperado) de X es

$$\mu_x = E\{X\} = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} x_i f(x_i).$$

En el caso de un espacio muestral finito con eventos equiprobables la esperanza matemática está relacionada con la media aritmética

$$\overline{x} = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} \frac{x_i}{n},$$

donde n es la cantidad de elementos del espacio muestral. En el caso de una muestra de tamaño N (que es un subconjunto del espacio muestral) aparece la media aritmética muestral

$$\overline{x} = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} \frac{x_i}{N},$$

donde N es la cantidad de elementos de la muestra.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con una función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces la Esperanza Matemática de X es

$$\mu_x = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Varianza de una Variable Aleatoria.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con una función de (densidad) distribución de probabilidad $f(x)$,entonces la varianza de X es

$$\sigma_x^2 = E\left\{(x_i - \mu_x)^2\right\} = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} (x_i - \mu_x)^2 f(x_i) = \mu_2 - \mu_x^2,$$

donde $\mu_2 = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} x_i^2 f(x_i)$.

En el caso finito con eventos equiprobables la varianza está relacionada con

$$\overline{\sigma}_x^2 = \sum_{x_i \in \mathbb{R}} (x_i - \overline{x})^2 / (n-1),$$

donde n es la cantidad de elementos del espacio muestral. En el caso de una muestra de tamaño N (que es un subconjunto del espacio muestral) aparece la varianza muestral

$$s^2 = \frac{\sum_{x_i \in \mathbb{R}} (x_i - \overline{x})^2}{N-1},$$

donde N es la cantidad de elementos de la muestra. A la cantidad $s = \sqrt{s^2}$ se le llama desviación estandar muestral.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con una función de densidad $f(x)$, entonces la varianza de X es

$$\sigma_x^2 = E\left\{(X - \mu_x)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_x)^2 f(x)dx = \mu_2 - \mu_x^2,$$

donde $\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$.

2.4. Funciones de Densidad de Probabilidad Usuales en la Composición Musical

Las funciones de densidad de probabilidad se usan ampliamente en la obra de Xenakis para calcular diversos parámetros de la obra musical. Mencionemos las más usuales.

Uniforme. Quizá la más sencilla de las variables aleatorias contínuas sea aquella cuya distribución es constante sobre un intervalo $(a,\, b)$ y cuyo valor sea cero en cualquier otro lugar. Esto define lo que es conocido como la densidad rectangular o densidad uniforme (continua):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases},$$

en el caso en que $a = 0$ y $b = 1$ la esperanza matemática $\mu_x = \frac{1}{2}$ y la varianza $\sigma_x^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

Esta función de densidad de probabilidad sirve para describir los intervalos de intensidad y altura.

Triangular. Una función de densidad de probabilidad importante es la función de densidad de probabilidad triangular (continua) la cual esta definida con auxilio de dos rectas que se cruzan en el punto $(0,\, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x + b & -a < x < 0 \\ -\frac{b}{a}x + b & 0 \le x < a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases},$$

la esperanza matemática es $\mu_x = 0$ y la varianza $\sigma_x^2 = ba^3$. Es conveniente considerar el caso en que $b = 2a$. En este caso $\mu_x = 0$ y $\sigma_x^2 = a^4$ y la función de densidad de probabilidad adecuada es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2a & -a < x < 0 \\ -2x + 2a & 0 \le x < a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases},$$

aunque la altura del triángulo se puede ajustar como uno desee. Cuando la función de densidad de probabilidad es solo la mitad positiva del triángulo tenemos una función de densidad de probabilidad semitriangular. La función de densidad de probabilidad triangular sirve para describir densidad de sonidos [Xenakis].

Normal. Sin lugar a dudas el modelo más utilizado de densidad para variables contínuas es la densidad llamada Normal o de Gauss (continua). Esta densidad no sólo sirve como un modelo de densidad de muchas variables aleatorias de la vida real sino que surge naturalmente en muchas investigaciones teóricas. Se define de la siguiente manera:

$$f(x) = ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2},$$

en esta función de densidad de probabilidad la esperanza matemática $\mu_x = a$, la varianza $\sigma_x^2 = b^2$ y $c = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$.

Binomial. Considere un experimento de tipo repetitivo en el cual sólo la ocurrencia o la no ocurrencia del evento se registra. Suponga que la probabilidad de que el evento ocurra sea p. Sea $q = 1 - p$, la probabilidad de que el evento no ocurra. Si el evento ocurre al efectuarse el experimento se llamará exito y si no ocurre será llamado fracaso. Sea n el número de intentos por llevarse a cabo, y sea X la variable aleatoria definida por el número de éxitos que se obtendrán en los n intentos.

La función de densidad de probabilidad apropiada para describir este experimento se llama función de densidad de probabilidad binomial (discreta):

$$f\left(x\right) = \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!} p^q q^{n-x}.$$

La esperanza matemática para la densidad de probabilidad binomial

$$\mu_x = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\left(n-x\right)!} p^{x-1} q^{n-x},$$

y

$$\mu_2 = \sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{n!}{x!\left(n-x\right)!} p^x q^{n-x}.$$

Poisson. Consideremos la función de densidad de probabilidad de Poisson que describe el decaimiento radioactivo [Meyer] y que se define como sigue

$$f\left(x\right) = e^{-\mu} \mu^x / x!,$$

Donde $x = 0,\ 1,\ 2, ...$ El parámetro $\mu = \mu_x$ es la esperanza matemática y la varianza $\sigma_X^2 = \mu$. La función de densidad de probabilidad de Poisson (continua)nos servirá para describir la densidad de los eventos en unaobra musical [Xenakis].

Exponencial. A la función de densidad de probabilidad (continua) dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

se le llama función de densidad de probabilidad exponencial. Donde $\beta > 0$ y la esperanza matemática $\mu_x = \beta$ y la varianza $\sigma_x^2 = \beta^2$.

Se ha demostrado que es un modelo adecuado para calcular la probabilidad que la pieza de un equipo dure por lo menos un total de tiempo t antes de que se dañe [Hoel]. Por estas características es una función de densidad de probabilidad apropiada para calcular la duración de los sonidos [Xenakis].

Maxwell-Boltzmann. En la teoría cinética de los gases la velocidad V de las partículas se describe a través de la función de densidad de probabilidad continua de Maxwell-Boltzmann (continua).

$$f(V) = V^2 e^{-V^2/a^2}/(a\sqrt{\pi}) \ ,$$

el parámetro a esta relacionado con la temperatura de los gases y se propone para describir la velocidad de glissando [Xenakis].

Beta de Euler. A la función de densidad de probabilidad (continua) dada por la relación:

$$f(x) = \frac{1}{B(a,\ b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

se le llama función de densidad de probabilidad beta [Dodge]. Donde la función beta de Euler [Kreysig] se da por la relación

$$\begin{aligned} B(a,b) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} \\ \text{con } \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt, \operatorname{Re} x > -1 \end{aligned}$$

Cuando $a,\ b > 1$ se parece a la función de densidad de probabilidad normal, cuando $a = b = 1$ se vuelve un tipo de la función de densidad de probabilidad uniforme y cuando $a,\ b < 1$ es el caso mas interesante ya que para valores de x cercanos a 0 o cercanos a 1 se encuentra la mayor probabilidad. El parámetro a controla la probabilidad cerca del 0 y el parámetro b controla la probabilidad cera del 1. La esperanza matemática es $\mu_\beta = a/(a+b)$.

Observación:

Todas las formas de las funciones de densidad de probabilidad continuas las podemos tomar para construir funciones de densidad de probabilidad discretas, simplemente hay que cumplir las tres propiedades de una función de densidad de probabilidad discreta dadas en el inciso 3.3.

2.5. Estadística Descriptiva

Las funciones de densidad de probabilidad expuestas dependen de pocos parámetros, por ejemplo la Normal depende de su esperanza matemática y la varianza.

En muchos casos coleccionar datos reales no cuesta gran dificultad y al adquirirlos se presenta el problema de sistematizarlos considerando la teoría de probabilidades y las exigencias del problema que queremos modelar, este problema cae en el marco de la estadística que en su fase más simple es la estadística descriptiva, la cual basicamente trabaja con los siguientes conceptos y métodos [Canavos]:

Sean $m_1, m_2, ..., m_N$ un conjunto de datos experimentales que representan a la constante m. En este caso dos números reales: La **media aritmética**

$\overline{m} = (m_1 + m_2 + ... + m_N)/N$

y la **varianza muestral**

$s^2 = [(m_1 - \overline{m})^2 + (m_2 - \overline{m})^2 + ... + (m_N - \overline{m})^2]/(N-1)$

pueden representar a este conjunto de datos. La media aritmértica es el valor que con mayor frecuencia aparece. La varianza muestral genera un intervalo $[\overline{m} - 2s,\ \overline{m} + 2s]$ donde por fuerza cae el 95 % de los datos del conjunto. Se dice que la media aritmértica es una medida de tendencia central y que la varianza muestral es una medida de la dispersión de los datos. Entre mayor es la varianza muestral mayor es la dispersión de los datos.

El **método frecuencial** de representar los datos consiste en crear una tabla de datos diferentes y otra tabla de las veces que se repite cada dato [Hoel], a veces se agrega una tercera tabla de las frecuencias relativas: la razón de número de veces que se repite un dato respecto del número total de datos.

Para imaginarse adecuadamente la funcion de densidad de probabilidad experimental es necesario usar el **método de gráfica de barras** (histograma) donde en el eje vertical se coloca la frecuencia relativa de cada dato distinto y en el eje horizontal se marcan los datos distintos [Hoel].

Observación:

1) Cuando el tamaño de la muestra tiende al infinito, según el teorema del límite central, la función de densidad de probabilidad es la normal, cualquiera que fuere el experimento [Hoel].

2.6. Ruido Blanco y Recorrido Browniano

Cantidades físicas como la corriente eléctrica, la temperatura, el nivel de ruido, etc. son variables que se describen con funciones reales del tiempo (t). Las variables mencionadas fácilmente pueden transformarse a señales eléctricas. Un fenómeno físico complejo se describe con un modelo que consiste de un conjunto de variables descritas por funciones reales del tiempo y que se registran como señales eléctricas. Para las señales eléctricas se ha desarrollado una intensa actividad científica y cuenta con resultados muy interesantes [Kwakernaak], [Grover] que pueden aplicarse al estudio de los sonidos musicales [Gardner]. Algunos autores famosos han escrito obras musicales que han desafiado la belleza de la música clásica [Gardner], [Xenakis].

El estudio de las señales eléctricas es muy complejo y en esta tesis las definiciones y resultados deben tenerse en cuenta con sentido común más que con el rigor matemático. El material se tomo de [Kwakernaak], [Grover].

A una señal que se le puede predecir en cualquier instante del tiempo (dentro del intervalo de interés) se le llama señal determinística y se le representa con una función real que por lo general es continua (continua a trozos), como ejemplo tenemos a $X_d = 10\,sen(2\pi t)$, con $t > t_0 \geq 0$ y t_0- tiempo inicial.

Si la señal es impredecible en cualquier instante del tiempo (dentro del intervalo de interés) se le llama señal aleatoria y se le representa con una variable aleatoria que se da en función del tiempo y que por lo general es discontinua, como ejemplo tenemos a $X_a = 10\,sen(2\pi t + \tau)$, con $t > t_0 \geq 0$ y t_0- tiempo inicial. $\tau-$ variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad uniforme.

Definición. A un conjunto de variables aleatorias que dependen del tiempo se le llama **Proceso Estocástico** (Aleatorio) y se representa por el vector del proceso estocástico $v(t)$ =$[v_1(t),\, v_2(t),\, \ldots,\, v_n(t)]^T$,con $n \in \mathbb{N}$.

Un proceso estocástico por ser un conjunto de variables aleatorias tiene asociada una serie de funciones de densidad de probabilidad univariada f_{v1}, $f_{v2}, ..., f_{vn}$ así como de un conjunto de funciones de densidad de probabilidad conjunta multivariada f_{v1v2}, $f_{v1v3}, ...,$ $f_{v1v2....vn}$.

Definición. A un Proceso Estocástico en el que todas sus funciones de densidad de probabilidad que lo caracterizan, son invariantes bajo traslaciones en el tiempo, se le llama **Proceso Estrictamente Estacionario** **(**Estacionario**).**

Sea t_1, $t_2, ...,$ t_k, con $k \in \mathbb{N}$ un conjunto de instantes de tiempo. Sea τ un corrimiento temporal. El vector del proceso estocástico $v(t)$ en los conjuntos $\{u1 = v(t_1)$, $u2 = v(t_2)$,..., $uk = v(t_k)\}$ y $\{w1 = v(t_1 + \tau)$, $w2 = v(t_2 + \tau)$, ..., $wk = v(t_k + \tau)\}$, con $\tau \in \mathbb{R}$ tiene dos realizaciones U y W.

Para un Proceso estrictamente Estacionario todas las funciones de densidad de probabilidad que lo describen en las dos realizaciones U y W deben cumplir las igualdades $f_{u1} = f_{w2}, ...,$ $f_{un} = f_{wn}$ así como de un conjunto de funciones de densidad de probabilidad conjunta multivariada $f_{u1u2} = f_{w1w2}, ...,$ $f_{u1u2....un} = f_{w1w2....wn}$.

Definición. A un Proceso Estocástico se le llama **Proceso Estocástico Gaussiano** si para cada conjunto de instantes $t_1, \ldots t_m \in \mathbb{R}$, el vector $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_m)$ tiene una función de densidad de probabilidad conjunta gaussiana multivariada.

Definición. Sea $v(t)$ un proceso estocástico, entonces la **Matriz de Covarianza** del vector del proceso estocástico lo da la relación

$R_v(t_1, t_2) = E\{[v(t_1) - m(t_1)]\ [v(t_2) - m(t_2)]^T\}$, con $k \in \mathbb{N}$ y t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, donde $m(t_k) = E\{v(t_k)\}$,para $k = 1, 2$ es la media del vector del proceso estocástico.

La **Función de Autocorrelación** (Matriz de momentos conjuntos de segundo orden) del proceso estocástico lo da

$C_v(t_1, t_2) = E\{v(t_1)\ v^T(t_2)\}$.

La **matriz de varianza** del vector del proceso aleatorio es

$Q_v(t) = R_v(t, t)$

La **matriz de momentos de segundo orden** del vector del proceso aleatorio es

$Q'_v(t) = C_v(t, t)$

En el caso en que el proceso sea estacionario $C_v(t_1, t_2) = C_v(t_2 - t_1) = C_v(\tau)$.

Definición. Un proceso estocástico es **Estacionario en el Sentido Débil** si la matriz de momentos de segundo orden $Q'_v(t)$ es finita para todo $t \in \mathbb{R}$, si la media del proceso estocástico $m(t)$ es constante y si la matriz de covarianza $R_v(t_1, t_2)$ depende solamente de la diferencia temporal $t_2 - t_1$.

Definición. La **Función de Densidad de la Potencia Espectral** del proceso aleatorio $v(t)$ estacionario es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación

$S_v(jw) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} C_v(\tau)e^{-jw\tau}d\tau$, con $j = \sqrt{-1}$, t_1, t_2, τ, y $\omega \in \mathbb{R}$.

Definición. Un proceso estacionario gaussiano es un P**roceso de Gauss-Markov de primer orden** si para cualquier cualquier conjunto de instantes $t_1, \ldots t_m \in \mathbb{R}$, con $m \in \mathbb{N}$ tales que $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$, se cumple, para la probabilidad condicional, la igualdad : $P\{v(t_m) \mid v(t_{m-1}), \ldots, v(t_1)\} = P\{v(t_m) \mid v(t_{m-1})\}$.

Definición. El **Ruido Blanco** es un proceso estacionario gaussiano que tiene una función de densidad espectral constante $S_v(jw) = cte$.

El ruido blanco tiene una función de autocorrelación del tipo

$C_v(t_1, t_2) = cte\ \delta(t_2 - t_1)$.

Donde $\delta(\tau)$ es la función generalizada de Dirac.

Para cualquier conjunto de instantes $t_1, \ldots t_m \in \mathbb{R}$, con $m \in \mathbb{N}$ se cumple que las realizaciones del vector ruido blanco $v(t_1)$, $v(t_2), \ldots, v(t_m)$ no estan correlacionados entre sí, es decir,

$E\{v(t_i)v(t_j)\} = 0$ para todo $t_i \neq t_j$.

El ruido blanco $v(t)$ es un proceso de Markov de primer orden tal que su esperanza matemática es nula

$E\{v(t)\} = 0$

y su covarianza de la sucesión vectorial aleatoria

$\sigma^2 = Q(t_1)\delta(t_2 - t_1)$,

donde t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. $Q(t_1)$ es la intensidad del ruido blanco y $\delta(t_2 - t_1)$ es la función generalizada de Dirac.

Supóngase que se parte del origen del eje numérico y que se dan n pasos hacia adelante o hacia atrás de manera aleatoria. A este problema se le llama recorrido Browniano y en él es necesario encontrar la esperanza matemática de la distancia recorrida y su varianza.

Definición. Un proceso no estacionario, gaussiano $v(t)$ es llamado **Proceso Browniano** si cumple

i) $E\{v(t)\} = 0$,

ii) $E\{v(t)v^T(t)\} = t$ y

iii) $R_v(t_1, t_2) = \begin{cases} t_2 & \text{si } t_1 \geq t_2 \\ t_1 & \text{si } t_1 < t_2 \end{cases}$.

Los sonidos tienen un conjunto de características físicas y musicales que los determina: cantidad de sonidos,duración, densidad de sonidos, densidad de eventos, intervalos de intensidad y altura, glissando, etc..

Una composición musical consiste en secuencias de una gran cantidad de sonidos que transcurren en el tiempo, esto nos permite utilizar las técnicas de la teoría de las probabilidades y la estadística con la seguridad de que habrá buenos resultados. Lo anterior posibilita asociar a las características físicas del sonido un conjunto de variables aleatorias ligadas a un conjunto de funciones de densidad de probabilidad. Esto distribuye a los sonidos en un espacio multidimensional que no es el mundo real y eso provoca dificultad para imaginarse aunque el hombre simplemente oye la belleza y la armonía.

Para elegir las funciones de densidad de probabilidad adecuadas podemos utilizar la experiencia de compositores como Xenakis, criterios musicales o bien simplemente experimentar. El conjunto de variables aleatorias musicales genera un proceso estocástico que puede ser proceso estocástico estacionario, ruido blanco, recorrido browniano o simplemente un proceso estocástico.

En los capítulos siguientes se hace un intento de adentrarnos a esta complejidad empezando con la aplicación de las funciones de densidad de probabilidad en composiciones musicales sencillas, siguiendo con composiciones en base a los resultados de la teoría de señales y finalizando con composiciones basadas en técnicas de la estadística descriptiva (capítulo 3). En el capítulo 4 se analizan algunos compases de la obra musical de Xenakis, "Achorripsis", donde magistralmente se utiliza la teoría de las probabilidades. En el capítulo 5 se hace un intento propio a la manera de Xenakis para obtener una composición musical para instrumentos de percusión: "Tlatohuaque".

Capítulo 3

Composiciones con Variables Aleatorias Discretas

La modelación matemática de la composición musical basada en la teoría de las probabilidades requiere de la generación de números aleatorios en la computadora [Dodge]. Sin embargo hay un camino alternativo interesante que consiste en usar los juegos de azar como generadores de números aleatorios: Los dados, la pirinola, los volados, los sorteos, etc.. Se eligen estos juegos de azar porque es fácil de elaborarlos o adquirirlos sin que tengan sesgos apreciables, lo que los hace repetibles en cualquier situación.

A estos juegos de azar debemos aplicar la teoría de la probabilidad, es decir debemos encontrar sus espacios muestrales, sus funciones de densidad de probabilidad y captar como los parámetros, que a ellas los determinar, influyen en la composición musical.

Los juegos de azar pueden ayudarnos a modelar procesos estocásticos estacionarios, lo que debemos de cuidar es que las funciones de densidad de probabilidad no cambien en el transcurso del tiempo.

Para modelar un recorrido browniano es necesario tener un algoritmo que nos haga variar las funciones de densidad de probabilidad. Además debemos de cuidar que la esperanza matemática del recorrido sea nula y su varianza crezca con el transcurso del tiempo (esta última condición es equivalente a que la varianza crezca conforme aumenta el número de repeticiones).

Para simular ruido blanco debemos de cuidar primeramente que la función de densidad de probabilidad no varie durante el experimento ya que es un proceso estacionario. El meollo de estos experimentos debe consistir en que el resultado actual solamente depende del resultado anterior y no de los demás resultados anteriores, lo que se refleja en que el ruido blanco es un proceso de Gauss-Markov de primer orden. Debemos de cuidar que la esperanza matemática del vector del proceso estocástico sea nula y que la varianza del vector del proceso estocástico sea del tipo $Q(t_1)\delta(t_2 - t_1)$. Cumplidas estas condiciones la función de autocorrelación y la función de densidad de la potencia espectral son las correctas.

Incluiremos en este capítulo algunas composiciones resultado de aplicar juegos al azar en cada una de ellas se da la explicación correspondiente. Las composiciones son las siguientes y se encuentran al final de este capítulo.

Composición 1.- Juego de Dados de W. A. Mozart
Composición 2.- Juego de la Pirinola
Composición 3.- Recorrido Browniano
Composición 4.-Método del Barrilito
Composición 5.- Ruido Blanco diatónico
Composición 6.- Ruido Blanco cromático

3.1. Composición 1 - Juego de Dados de W. A. Mozart

El lanzamiento de un dado aparece un espacio muestral con seis puntos, su función de densidad de probabilidad es discreta-uniforme ya que para cualquier resultado tiene una probabilidad de 1/6. El lanzamiento de dos dados genera un espacio muestral bidimensional de 36 parejas de resultados con una probabilidad p=1/36.

El lanzamiento de dos dados nos permite construir la vairable aleatoria: suma de los resultados del lanzamiento. El espacio muestral de este experimento consiste de 11 puntos pero la función de densidad de probabilidad es discreta-triangular lo cual se infiere de los siguientes resultados: Para el resultado 2 la probabilidad es 1/36, para el resultado 3 la probabilidad es 2/36, para el resultado 4 la probabilidad es 3/36, para el resultado 5 la probabilidad es 4/36, para el resultado 6 la probabilidad es 5/36, para el resultado 7 la probabilidad es 6/36, para el resultado 8 la probabilidad es 5/36, para el resultado 9 la probabilidad es 4/36, para el resultado 10 la probabilidad es 3/36, para el resultado 11 la probabilidad es 2/36, para el resultado 12 la probabilidad es 1/36. Claramente se ve que el resultado que más aparece es el 7. Los resultados 2, 3, 4, 10, 11 y 12 a pesar de ser el 55 % de los resultados tienen una probabilidad de aparecer de 0.167.

Este experimento depende de dos variables aleatorias una asociada al primer dado y otra asociada al segundo. W.A.Mozart (1756-1791) en el año 1777, usó el lanzamiento de dados para hacer un vals de 16 compases que tituló “Juego de dados musical para escribir valses con ayuda de dos dados sin ser músico ni saber nada de composición” [Paraskevaidis], [Lluis-Puebla].

Para obtener cada uno de los primeros 8 compases (numerados del I al VIII) se lanza un par de dados y se anota la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose 8 parejas de números: (n_1, I), (n_2, II), (n_3, III), (n_4,IV), (n_5,V), (n_6,VI), (n_7,VII) y (n_8,VIII).

Cada pareja se asocia a un número de la Tabla 3.1 generándose ocho compases:N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7 y N_8.

Los 8 compases siguientes del vals (numerados del I al VIII) se lanza un par de dados y se anota la suma de puntos que muestran sus caras obteniéndose 8 parejas de números

(m_1, I), (m_2, II), (m_3, III), (m_4,IV), (m_5,V), (m_6,VI), (m_7,VII) y (m_8,VIII).

Cada pareja se asocia a un número de la Tabla 3.2 generándose los otros ocho compases

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7y M_8.

Si en la composición musical se requieren más de 16 compases se repite el experimento cuantas veces sea necesario porque tenemos 11^{14} =3,8 $\times 10^{14}$ valses distintos (con una duración aproximada de 30 seg) que si se tocaran de forma continua durarían 30×11^{14}=1,134 $\times$ 10^{16} seg, o sea, aproximadamente $131,000,000,000$ días, es decir, aproximadamente $361,000,000$ años. Mozart compuso 176 compases (al final de este capítulo se transcriben) que repartió en las dos tablas. La Tabla 3.1 se usa para obtener los primeros ocho compases de la composición musical y la Tabla 3.2 se utiliza para construir los restantes ocho compases. Cada tabla consiste de ocho columnas y once filas. Las columnas corresponden a los compases y las filas corresponden al resultado del lanzamiento de los dos dados. La Tabla de los ocho primeros compases del vals de Mozart es:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	106	5

Tabla 3.1. Primera parte del vals de Mozart

La Tabla de los ocho segundos compases del vals de Mozart es:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

Tabla 3.2. Primera parte del vals de Mozart

Mozart designó los compases por columna siguiendo un sencillo patrón armónico de acuerdo a su época. En ella se utiliza una escala de siete sonidos correspondientes a siete grados, los que más se utilizan son: el 1er. grado (I), el quinto grado (V) y el cuarto grado (IV) que en una escala de Do mayor corresponderían al Do, al Sol y al Fa y a los acordes que se construyen sobre ellos, lo cual nos lleva a una composición con la siguiente armonía:

Primera parte, 8 compases

1	2	3	4	5	6	7	8
do	do	do	do	sol	sol	sol	sol
I	I	V	I-VI	V	I	IV-V	I

Segunda, 8 compases

1	2	3	4	5	6	7	8
sol	sol	do	do	do	do	do	do
V	I	IV-I	V	I	I	IV-V	I

Ahora que ya se ha explicado el procedimiento que Mozart propuso solo nos queda realizar el experimento: Se lanzan 16 veces simultaneamente dos dados y se anotan la suma. El resultado que obtuvimos es el siguiente

Los primeros ocho resultados son:

$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\} = \{5, 5, 7, 11, 5, 12, 8, 7\}$.

Los segundos ocho resultados son:

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8\} = \{11, 12, 9, 7, 5, 4, 11, 1\}$.

El algoritmo de Mozart hace que los compases del resultado 7, de las dos tablas, sean los que mas aparecen, siguiendo los resultados 6 y 8, siguiendo los resultados 5 y 9, siguiendo los resultados 4 y 10, resultados 3 y 11, siguiendo los resultados 2 y 12. en ese sentido los compases del resultado 5 al resultado 9 de las dos tablas genera una tendencia central ya que 10 resultados de 16 caen entre dichos números (63 %). Los resultados 2, 3, 4, 10, 11 y 12 a pesar de ser el 55 % de las posibilidades solo caen 6 resultados de 16 (17 %), lo que confirma la veracidad del modelo de la función de densidad de probabilidad triangular.

Buscando en las Tablas 3.1 y 3.2 de Mozart encontramos los correspondientes compases:

$C = \{40, 17, 27, 61, 161, 37, 21, 91\}$ y $\{102, 20, 48, 29, 67, 58, 173, 13\}$.

A partir de este resultado se obtiene la primera composición de este trabajo que de acuerdo con el esquema armónico previsto, en la primera parte encontraremos

1	11 comienzos en do I
2	11 segundos compases en do
3	11 terceros compases en sol V
4	11 cuartos compases en sol y sol_6
5	11 quintos compases en re_7
6	11 sextos compases en sol-sol_7
7	11 séptimos compases en do-re
8	11 finales en sol identicos

,

y en la segunda parte hallaremos

9	11 comienzos en sol V
10	11 segundos compáses en sol I
11	11 terceros compases en sol IV=do I
12	11 cuartos compases en do V
13	11 quintos compases en do I
14	11 sextos compases en do I
15	11 séptimos compases en do IV-V
16	11 finales en do

.

La composición musical se presenta al final del capítulo y se le llama composición 1. Este vals en realidad no es tan elegante como muchas de las piezas cortas que Mozart compuso pero no deja de ser sorprendente que usando un método aleatorio, por la forma en que está diseñado, tenga su sello inconfundible, desde luego por la manera en que está escrito cada compás y el respeto a las reglas de armonía de su tiempo.

3.2. Composición 2 - Juego de la Pirinola

La pirinola de madera que consiste de un disco y un eje de giro nos permite obtener números aleatorios con gran versatilidad con el simple hecho de dividir la superficie del disco en un conjunto de sectores [Gardner].

Si el disco se divide en seis sectores iguales el espacio muestral consiste de seis puntos con una probabilidad p=1/6. La función de densidad de probabilidades es discreta uniforme.

Si el disco se divide en siete sectores iguales el espacio muestral consiste de siete puntos con una probabilidad de $1/7$. La función de densidad de probabilidades es discreta uniforme. Los resultados de este experimento se pueden asociar a las siete notas de una escala.

Si el área disco A se divide en 7 sectores que tienen una área $A1$ (por ejemplo, 5 sectores) o bien una área $A2$ (por ejemplo, 2 sectores). Los sectores que tienen una área A1 tienen un subespacio muestral de 5 puntos con una probabilidad $0 < p1 < 1$, con $p1 = A1/A$ y poseen una función de densidad de probabilidad-discreta uniforme. Los sectores que tienen una área $A2$ tienen un subespacio muestral de 2 puntos con una probabilidad $0 < p2 < 1$,con $p2 = A2/A$ y poseen una función de densidad de probabilidad discreta-uniforme. Si consideramos que $A2 > A1$ entonces se cumple que $0 < p1 < p2 < 1$. esta claro que $5p1 + 2p2 = 1$. El espacio muestral del experimento consta de 7 puntos, cinco con una probabilidad $p1$ y 2 con una probabilidad $p2$, además la función de densidad de probabilidad es discreta-uniforme a trozos.

El mismo procedimiento se usa para el caso en que la pirinola se divida en sectores con tres áreas distintas: $A1$, $A2$ y $A3$.

Las funciones discreta-uniforme a trozos se puede arreglar de tal manera que se parezca a la función de densidad de probabilidad discreta-normal. El pico de estas funciones de densidad de probabilidad esta asociado a los sectores con mayor área ($A2$) y a su vez esta ligado a la esperanza matemática, lo que quiere decir que entre las notas aparece una tendencia central.

En el experimento de la pirinola se divide el disco en 7 sectores con tres áreas relativas distintas: $A1/A = p1 = 0{,}11$ (cinco sectores asociados a las notas *Do*, *Re*, *Sol*, *La*, Si), $A2/A = p2 = 0{,}20$ (un sector asociado a la nota Mi) y $A3/A = p2 = 0{,}25$ (un sector asociado a la nota Fa). Esta claro que $5A1/A+A2/A+A3/A = 1$. La nota Fa es la que esta asociada a la esperanza matemática y por tanto será la que más va a sonar.

Para obtener las duraciones de las notas se usa una segunda pirinola. Se divide el disco en 7 sectores con dos áreas relativas distintas: $A1/A = p1 = 0{,}11$ (cinco sectores asociados a las duraciones $1/8$, $1/4$, $3/4$, $3/2$ y $4/2$), $A2/A = p2 = 0{,}225$ (dos sectores asociado a las duraciones $2/4$, $2/2$). Esta claro que $5A1/A + A2/A + A3/A = 1$.

Se efectuó el experimento con 110 lanzamientos de dos pirinolas una para la nota y otra para su duración. Este experimento tiene dos variables aleatorias, una asociada a la nota y otra asociada a la duración. lLos resultados de esta composición se dan en la tabla siguiente.

Fa$\frac{3}{4}$	La$\frac{2}{4}$	Do$\frac{3}{2}$	Do$\frac{2}{4}$	Re$\frac{2}{2}$	Mi$\frac{3}{2}$	Si $\frac{2}{2}$	Sol$\frac{4}{2}$	Mi$\frac{1}{4}$	Mi$\frac{3}{2}$
Fa$\frac{2}{2}$	La$\frac{4}{2}$	Fa$\frac{3}{2}$	Fa$\frac{1}{8}$	Do$\frac{1}{8}$	Mi$\frac{2}{2}$	Sol$\frac{2}{2}$	Do$\frac{1}{4}$	Re $\frac{4}{2}$	Si $\frac{3}{2}$
Mi$\frac{4}{2}$	Si$\frac{2}{2}$	Sol$\frac{2}{4}$	La$\frac{2}{4}$	Mi$\frac{1}{4}$	Do$\frac{2}{2}$	Do$\frac{1}{4}$	Mi$\frac{3}{4}$	Fa$\frac{2}{4}$	Mi$\frac{2}{2}$
Fa$\frac{2}{2}$	Si$\frac{2}{2}$	Do$\frac{1}{8}$	Si$\frac{1}{4}$	Mi$\frac{2}{4}$	Si$\frac{1}{4}$	Mi$\frac{1}{8}$	Si$\frac{1}{4}$	Fa$\frac{2}{2}$	Fa$\frac{4}{2}$
Do$\frac{2}{4}$	Si$\frac{1}{8}$	Fa$\frac{2}{4}$	Mi$\frac{1}{8}$	La$\frac{3}{4}$	Fa$\frac{3}{4}$	Fa$\frac{2}{2}$	Sol$\frac{3}{2}$	Fa$\frac{1}{8}$	Sol$\frac{3}{2}$
Mi$\frac{2}{4}$	Si$\frac{4}{2}$	Mi$\frac{2}{4}$	La$\frac{1}{4}$	Fa$\frac{2}{4}$	Fa$\frac{4}{2}$	Do$\frac{3}{4}$	Si$\frac{2}{4}$	Re$\frac{2}{2}$	La$\frac{4}{2}$
Do$\frac{1}{8}$	Re$\frac{2}{2}$	Re$\frac{1}{8}$	Sol$\frac{2}{4}$	Si$\frac{2}{2}$	Mi$\frac{3}{2}$	Do$\frac{1}{4}$	Re$\frac{1}{8}$	Re$\frac{3}{2}$	La$\frac{3}{2}$
Mi$\frac{2}{4}$	La$\frac{1}{4}$	Do$\frac{3}{2}$	Do$\frac{1}{8}$	Fa$\frac{3}{4}$	Sol$\frac{2}{4}$	Re$\frac{2}{4}$	Re$\frac{1}{8}$	Si$\frac{2}{4}$	Fa$\frac{1}{8}$
Fa$\frac{3}{4}$	Si$\frac{3}{2}$	La$\frac{2}{2}$	La$\frac{2}{2}$	La$\frac{1}{8}$	Sol$\frac{1}{4}$	Mi$\frac{1}{8}$	Sol$\frac{3}{2}$	Fa$\frac{2}{4}$	Re$\frac{2}{2}$
Mi$\frac{4}{2}$	Fa$\frac{2}{4}$	Mi$\frac{2}{4}$	Fa$\frac{3}{4}$	Mi$\frac{2}{4}$	Fa$\frac{2}{4}$	Mi$\frac{1}{4}$	Fa$\frac{1}{8}$	La$\frac{3}{4}$	Si$\frac{2}{2}$
La$\frac{3}{4}$	Sol$\frac{2}{4}$	Do$\frac{1}{8}$	Fa$\frac{1}{8}$	Re$\frac{3}{2}$	Do$\frac{2}{4}$	La$\frac{2}{2}$	Fa$\frac{1}{4}$	Do$\frac{4}{2}$	Mi$\frac{2}{4}$

Para la tabla de notas se realizó un análisis frecuencial que arroja los siguientes resultados:

nota	N	$f_{r,\text{ exp}}$	$f_{r,\text{ teo}}$	error
Do	16	0.14	0.11	3 %
Re	11	0.10	0.11	1 %
Mi	21	0.19	0.20	1 %
Fa	24	0.22	0.25	3 %
Sol	10	0.09	0.11	2 %
La	14	0.13	0.11	2 %
Si	14	0.13	0.11	2 %

Donde N es el número de repeticiones, $f_{r,\text{ exp}}$ es la frecuencia relativa de cada dato diferente del experimento y $f_{r,\text{ teo}}$ es la frecuencia relativa de cada dato distinto del modelo. Este análisis nos muestra que el modelo tomado es correcto ya que el error absoluto es menor igual al 3 % en todos los casos.

Para la tabla de duraciones se realizó un análisis frecuencial que arroja los siguientes resultados:

nota	N	$f_{r,\,\text{exp}}$	$f_{r,\,\text{teo}}$	error
1/8	18	0.16	0.11	5 %
1/4	13	0.12	0.11	1 %
2/4	25	0.23	0.22	1 %
3/4	15	0.14	0.11	3 %
2/2	20	0.18	0.22	4 %
3/2	9	0.08	0.11	3 %
4/2	10	0.09	0.11	2 %

Este análisis nos muestra que el modelo tomado es correcto ya que el error absoluto es menor igual al 5 % en todos los casos que hace aceptable al modelo de la función de densidad de probabilidad.

En este modelo se asociaron dos características musicales a las cuales se les asoció una tendencia central. De una a otra nota siempre se cae en la misma octava, lo mismo podemos decir respecto a las duraciones.

La composición musical obtenida se da al final del capítulo y se le denota como composición 2.

Esta composición utiliza tan sólo una escala diatónica y la duración de la mayoría las notas es muy larga , normalmente (no incluyendo la música contemporánea) en una melodía la aparición de notas largas es mínima y por el contrario las notas de menor duración son más frecuentes además al ser sonidos aleatorios los intervalos que se producen son muy amplios y en ocasiones suenan disonantes desde luego esto es resultado de los parámetros escogidos. Esta composición no tiene un tiempo exacto por lo que da el efecto de valor agregado utilizado por Messiaen en algunas composiciones. A pesar de utilizar sólo siete sonidos se enriquece la pieza y el pulso es el mínimo de un dieciseisavo.

3.3. Composición 3 - Recorrido Browniano.

El recorrido browniano ha sido objeto de profundos estudios y aún no revela todos sus secretos. En la física y la teoría de las señales [Kwakernaak] se han encontrado importantes propiedades de él. Se sabe que no es un proceso estacionario, es decir, su función de densidad de probabilidad varía con el tiempo.Podemos suponer que el recorrido browniano unidimensional se realiza sobre el eje de los enteros. Se empieza de un número entero n_0 y cada determinado tiempo Δt avanza o se retrocede aleatoriamente ± 1 unidades en el eje numérico. El signo lo determina un generador de números aleatorios. Despues de un tiempo $N\Delta t$ resulta que la esperanza matemática es nula (no nos hemos alejado en promedio de n_0) pero su varianza crece proporcionalmente a $\sqrt{N}$ (pasa por todos los enteros alrededor de n_0 y poco a poco cubre más y más) [Grover].

Podemos atacar este problema de una manera más interesante utilizando como eje numérico las teclas del piano, como posición inicial al Do central del piano [Gardner] y como incrementos aleatorios a los números -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3 que se generan usando una pirinola dividida en 7 sectores. Los números nos indican el número de pasos aleatorios hacia arriba (mas agudas) o hacia abajo (mas graves) de la nota actual. Se inicia la melodía tomando el **Do** central del piano para generar una cadena de sonidos aleatoria.

La pirinola de 7 sectores consta de dos tipos de sectores. Un tipo de sectores tiene una área relativa $A1/A = 0{,}19$ $(-3, 1)$ y el otro tipo de sectores tiene una área relativa $A2/A = 0{,}12$ $(-2, -1, 0, 2, 3)$. Estos sectores cumplen $0{,}19 \times 2 + 0{,}12 \times 5 = 1$. Nuestra composición se genera haciendo girar la pirinola 150 veces y anotando los resultados:

-3	$+2$	$+3$	$+1$	$+3$	$+2$	$+1$	-3	$+1$	$+1$
-3	-3	-2	$+1$	-3	$+2$	$+1$	$+1$	0	$+2$
$+1$	$+1$	0	$+3$	-1	$+2$	-1	$+2$	$+2$	-3
-3	-3	$+2$	-3	$+3$	$+2$	-3	-3	$+2$	$+1$
0	0	-2	-1	-2	$+1$	-1	$+1$	0	-3
$+3$	-1	$+2$	$+2$	-2	-2	-1	$+1$	$+1$	-1
-2	$+2$	-3	-3	-3	$+1$	0	-2	0	$+3$
-2	-3	$+3$	$+3$	-3	$+3$	$+1$	$+1$	$+1$	-2
-3	$+2$	$+1$	0	-1	0	$+2$	$+3$	0	$+3$
-2	0	-1	0	$+3$	-1	-2	$+2$	-3	$+3$
$+2$	$+3$	$+2$	$+3$	$+1$	$+1$	$+3$	0	0	-3
$+3$	-3	-3	-3	-2	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$
$+1$	-3	-1	$+3$	-2	-3	-1	$+3$	-3	$+2$
$+1$	-2	0	$+2$	$+2$	$+1$	$+2$	-1	$+1$	0
-2	$+3$	-1	-1	-1	$+3$	-3	$+1$	$+3$	0

A esta tabla le calculamos su media muestral y vale 0.05 que es un valor muy cercano a 0 pero la varianza se calculó en diferentes pasos y no crece como debiera lo que aleja a este modelo un poco de un recorrido browniano referenciado en [Gardner]. Esta tabla nos genera una tabla de notas muy interesante. La siguiente tabla nos indica como funciona nuestro modelo con un error de un máximo de 3 datos.

número de pasos	repeticiones según modelo	repeticiones según experimento
-3	28	27
-2	18	15
-1	18	17
0	18	17
1	29	30
2	20	22
3	19	22

La composición correspondiente a este método es la composición 3 que se da al final del capítulo.

Es una pieza que abarca casi cuatro octavas, en la que no hay grandes saltos. Cada nota está relacionado en mayor o menor distancia a la nota anterior. Se le puede asociar la rítmica de la composición anterior o intepretarse ad libitum, en este caso suena interesante como una pieza oriental por el tipo de intervalos que resultaron, si se le dan duraciones uniformes se escucha monótona. La secuencia de sonidos sube y baja y los intervalos son cambiantes e impredecibles y en eso estriba si riqueza.

De hecho al seleccionar este método únicamente se trabaja sobre la altura de los sonidos y en la música no puede disociarse la altura a la duración y el timbre. Esta interpretada en piano porque como la mayoría de instrumentos de teclado tiene un rango mayor de sonidos, aunque también podría interpretarse en una arpa y desde luego en un sintetizador.

3.4. Composición 4 - Método del Barrilito

El modelo de los Polvos Diádicos de Cantor [Mandelbrot] se construye con el siguiente procedimiento: En el primer paso se dibuja en negro un segmento de recta de longitud unitaria (2^0 segmentos de longitud $1/4^0$), en el segundo paso se divide el segmento unitario en cuatro segmentos y se dibujan de negro solamente el segundo y cuarto segmento (2^1 segmentos de longitud $1/4^1$), en el tercer paso...., en el n-ésimo paso quedan dibujados de negro 2^n segmentos con una longitud $1/4^n$. Este procedimiento se sigue indefinidamente y se obtiene un conjunto de Polvos Diádicos de Cantor que no se pueden ver pero sabemos que el conjunto de segmentos final es numerable.

Nuestro modelo [Vera] consiste en fijarnos en los dibujos del segundo paso al n-ésimo paso; podemos numerar cada uno de los segmentos negros y con un generador de números aleatorios o con un juego de azar podemos desordenarlos aleatoriamente. Analizemos el modelo finito para 7 pasos: hay 2 segmentos de longitud 1/2, 4segmentos de longitud 1/4, 8 segmentos de longitud 1/8, 16 segmentos de longitud 1/16, 32 segmentos de longitud 1/32 y 64 segmentos de longitud 1/64. En estos 7 pasos tenemos un total de 126 segmentos que si los desordenamos aleatoriamente simulan a una columna de $64 \times 2 + 32 \times 3 + 16 \times 4 + 8 \times 5 + 4 \times 6 + 2 \times 7 = 366$ monedas, se elaboró un dispositivo para usar solamente 50 monedas iguales que pasan por un tubo y nos dejan acomodados los barrilitos. Las rachas de este barril de monedas tiene la siguiente secuencia:

tamaño de racha	número de rachas
1	64
2	32
3	16
4	8
5	4
6	2

Este modelo matemático nos permite modelar un número de rachas que no necesariamente es una potencia de dos. En este experimento se colectaron 150 rachas, para modelar el número de rahas usemos el factor de corrección $150/126 = 1{,}1190$. Al multiplicar la segunda columna por este factor obtenemos la siguiente tabla:

tamaño de racha	número de rachas
1	76,16
2	38,08
3	19,04
4	9,52
5	4,76
6	2,38

El espacio muestral de los volados nos permite definir la variable aleatoria: tamaño de racha cuyo espacio muestral consta de 6 elementos: rachas de tamaño 1, rachas de tamaño 2, rachas de tamaño 3, rachas de tamaño 4, rachas de tamaño 5 y rachas de tamaño de 6 o más. La tabla anterior nos permite calcular la probabilidad de cada uno de esos puntos, la cual se da en la siguiente tabla:

$p1$	$76{,}16/150 = 0{,}507$
$p2$	$38{,}08/150 = 0{,}254$
$p3$	$19{,}04/150 = 0{,}127$
$p4$	$9{,}52/150 = 0{,}063$
$p5$	$4{,}76/150 = 0{,}032$
$p5$	$2{,}38/150 = 0{,}016$

Esta tabla nos dice que la función de densidad de probabilidad es discreta-semitriangular.

El experimento de los barrilitos consiste en tomar N monedas iguales, se agitan dentro de un recipiente se vierten de tal modo que se puedan arreglados en forma de columna (que parece un barrilito) y se van anotando los resultados de 10 en 10 rachas:

SSSS A S A S AAAAA SS A S AA→
SS A S AA SSS AAA SS AA S A →
SSS A S A SSS A S AA SS A→
SSS AAAAAAA S A S A S A SS AAAAA →
S A SS AA S AAAAA SSS A S A →

SSS A S AA SSS AA SS A SS AAA →
SSSSSSS AAAAA SSSS A S AA S AAAA SSSS AAAA →
S A SSSSS AA S A S A SS A →
SS AAA SSSSS AAA S A S AA S AA →
SS AA SS A S AA SS A S A →
SS AAAAA S A SSSSS AA S AAAAA SSS A →
SS A S AAAA S A S A S A →
SS A SS A SS A S A S A →
S A SSSS A S A S AA S AAA →
SS AA SSS AA S AAA S A SS AAAA.

Donde A nos indica que obtuvimos "águila", y S nos indica que obtuvimos "sol". Podemos usar la tabla de notas que se generaron en el recorrido browniano expuesto anteriormente. Podemos tomar las rachas de águilas y soles para indicar la duración de las notas de acuerdo a la siguiente regla:

tipo de racha	duración
S, A	$\frac{1}{8}$
SS, AA	$\frac{1}{4}$
SSS, AAA	$\frac{1}{2}$
SSSS, AAAA	$\frac{2}{2}$
SSSSS, AAAAA	$\frac{3}{2}$
SSSSSS, AAAAAA o más	$\frac{4}{2}$

Despues de jugar a los barrilitos y obtener 150 rachas se cuentan los tamaños de las rachas y se ponen en correspondencia con la tabla anterior. Como resultado de ello se obtiene una tabla de parejas de datos, el primer número indica el tamaño de la racha y el segundo la duración asignada a ese tamaño:

4, $\frac{2}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	5, $\frac{3}{2}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$
2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	3, $\frac{2}{4}$	3, $\frac{2}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$
3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$
3, $\frac{2}{4}$	7, $\frac{4}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	5, $\frac{3}{2}$
1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	5, $\frac{3}{2}$	3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$
3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	3, $\frac{2}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	3, $\frac{2}{4}$
7, $\frac{4}{2}$	5, $\frac{3}{2}$	4, $\frac{2}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	4, $\frac{2}{2}$	4, $\frac{2}{2}$	4, $\frac{2}{2}$
1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	5, $\frac{3}{2}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$
2, $\frac{1}{4}$	3, $\frac{2}{4}$	5, $\frac{3}{2}$	3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$
2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$
2, $\frac{1}{4}$	5, $\frac{3}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	5, $\frac{3}{2}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	5, $\frac{3}{2}$	3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$
2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	4, $\frac{2}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$
2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$
1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	4, $\frac{2}{2}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	3, $\frac{2}{4}$
2, $\frac{1}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	3, $\frac{2}{4}$	2, $\frac{1}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	3, $\frac{2}{4}$	1, $\frac{1}{8}$	1, $\frac{1}{8}$	2, $\frac{1}{4}$	4, $\frac{2}{2}$

Ahora podemos establecer la concordancia del modelo propuesto con el experimento real usando la tabla siguiente:

tamaño de racha	número de rachas del modelo	número de rachas del experimento
1	76,16	79
2	38,08	37
3	19,04	15
4	9,52	8
5	4,76	9
6	2,38	2

La tabla nos indica una buena concordancia con el modelo propuesto.

Usando las notas de la composición 3 relacionadas con un recorrido browniano y las duraciones de la tabla anterior obtenemos la composición musical 4. Se podría tocar únicamente el ritmo usando un instrumento de percusión. En cuanto a la cuestión melódica aplican los comentarios de la composición anterior y es interesante el resultado aplicando el ritmo obtenido con el método del barrilito pareciendo de esta manera una composición muy dife- rente. El ritmo provoca curvas melódicas que enriquecen la melodía dando origen a frases. Uno de los elementos que tuvo grandes cambios en la música del siglo XX fue el ritmo al que se aplicaron muchas de las innovaciones que se daban a la escala es decir sin los patrones que se utilizaron en épocas anteriores y rompiendo con los cánones establecidos. La composición musical 4 correspondiente a esta tabla se da al final del capítulo y se titula método del barrilito.

3.5. Composición 5 y composición 6 - Ruido Blanco

El ruido de los insectos en la noche, el susurro del mar y el ruido electrónico son realizaciones practicas de un concepto que aparece en la teoría de las señales [Grover] llamado ruido blanco el cual es un proceso estacionario gaussiano que tiene una función de densidad espectral constante. Debido a la forma que tiene su función de autocorrelación, para un conjunto de instantes $t_1, \dots t_m \in \mathbb{R}$, con $m \in \mathbb{N}$ se cumple que las realizaciones de los vectores aleatorios $v(t_1)$, $v(t_2), \dots, v(t_m)$ no estan correlacionados entre sí. El ruido blanco $v(t)$ es un proceso de Markov de primer orden tal que su esperanza matemática es nula y su covarianza $\sigma^2 = Q(t_1)\delta(t_2 - t_1)$, donde t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. $Q(t_1)$ es la intensidad del ruido blanco y $\delta(t_2 - t_1)$ es la función generalizada de Dirac.

Podemos hacer una composición musical con base al modelo del ruido blanco [Gardner]. Esto se hace considerando una secuencia de ocho notas escogidas de una escala de 16.

Usemos 3 dados: uno rojo, uno verde y otro azul.

Construyamos la variable aleatoria: Al lanzar los tres dados obtener su suma, los puntos del espacio muestral S van van desde 3 hasta 18. Seleccionamos 16 notas adyacentes en el piano, incluidas blancas y negras, y se numeran del 3 al 18.

Escribamos los números, del 0 al 7 en notación binaria (tres columnas) y asignemos un dado de color a cada columna: Dado azul, dado verde y dado rojo:

	A	V	R
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

La primera nota de nuestra melodía se obtiene al lanzar los tres dados para después elegir la nota correspondiente a la suma $S1$ y no mueva los dados.

Nótese que de 000 a 001 sólo cambia el dígito rojo (último dígito). Tome el dado rojo y lancelo, despues anote la nueva suma $S2$ (sin mover los dados) de los tres dados ya que ella da la segunda nota.

En transición de 001 a 010, tanto el segundo como el tercer dígito cambian. Tome el dado rojo y verde láncelos, la suma $S3$ que muestra dará la tercera nota.

En transición de 010 a 011, tanto el primero como el tercer dígito cambian. Tome los dados azul y rojo y láncelos, la suma $S4$ que muestra dará la cuarta nota.

En transición de 011 a 100, los tres dígitos cambian. Tome todos los dados y lancelos, la suma $S5$ que muestra dará la quinta nota.

En transición de 100 a 101, el segundo dígito cambia. Tome el dado verde y lancelo, la suma $S6$ que muestra dará la sexta nota.

En transición de 101 a 110, tanto el segundo como el tercer dígito cambian. Tome el dado verde y rojo y lancelos, la suma $S7$ que muestra dará la septima nota.

En transición de 110 a 111, tercer dígito cambia. Tome el dado rojo y lancelo, la suma $S8$ que muestra dará la octava nota.

Hemos generado ocho notas lanzando de nuevo aquellos dados que corresponde al cambio de dígito de 0 a 1 o viceversa. Se puede generalizar este procedimiento para cualquier cantidad N de dados.

Con 7 dados se genera una secuencia de 128 notas escogidas de una escala de 36 sonidos (la suma S va de 7 a 42).La duración se puede tomar de alguno de los puntos anteriores como la composición 2.

En este experimento vamos a generar dos columnas de notas: La columna sonidos 1 comprende la escala diatónica que parte de La2 a La7, correspondiendo a los números del 7 al 42: (La2, 7), , (Si2, 8), (Do3, 9), , (Re3, 10), , (Mi3, 11), (Fa3, 12), (Sol3, 13), (La3, 14), , (Si3, 15), (Do4, 16), , (Re4, 17), , (Mi4, 18), (Fa4, 19), (Sol4, 20), (La4, 21), (Si4, 22), (Do5, 23), (Re5, 24), (Mi5, 25), (Fa5, 26), (Sol5, 27), (La5, 28), (Si5, 29), (Do6, 30), (Re6, 31), (Mi6, 32), (Fa6, 33), (Sol6, 34), (La6, 35), (Si6, 36), (Do7, 37), (Re7, 38), (Mi7, 39), (Fa7, 40), (Sol7, 41) y (La7, 42).

La columna sonidos 2 comprende una escala cromática que va de La3 a Sol#6, correspondiendo a los números del 7 al 42: (La3, 7), (La#3, 8), (Si3, 9), (Do4, 10), (Do#4, 11), (Re4, 12), (Re#4, 13), (Mi4, 14), (Fa4, 15), (Fa#4, 16), (Sol4, 17), (Sol#4, 18), (La4, 19), (La#4, 20), (Si4, 21), (Do5, 22), (Do#5, 23), (Re5, 24), (Re#5, 25), (Mi5, 26), (Fa5, 27), (Fa#5, 28), (Sol5, 29), (Sol#5, 30), (La5, 31), (La#5, 32), (Si5, 33), (Do6, 34), (Do#6, 35), (Re6, 36), (Re#6, 37), (Mi6, 38), (Fa6, 39), (Fa#6, 40), (Sol6, 41) y (Sol#6, 42).

Los dos conjuntos de notas obtenido se dan en la siguiente tabla:

dados	1	2	3	4	5	6	7	suma	sonidos 1	sonidos 2
0	0	0	0	0	0	0	0	22	Si4	Do5
1	0	0	0	0	0	0	1	23	Do5	Do#5
2	0	0	0	0	0	1	0	20	Sol4	Sib4
3	0	0	0	0	0	1	1	23	Do5	Do#5
4	0	0	0	0	1	0	0	23	Do5	Do#5
5	0	0	0	0	1	0	1	25	Mi5	Re#5
6	0	0	0	0	1	1	0	26	Fa5	Mi5
7	0	0	0	0	1	1	1	27	Sol5	Fa5

dados	1	2	3	4	5	6	7	suma	sonidos 1	sonidos 2
8	0	0	0	1	0	0	0	26	Fa5	Mi5
9	0	0	0	1	0	0	1	25	Mi5	Re#5
10	0	0	0	1	0	1	0	26	Fa5	Mi5
11	0	0	0	1	0	1	1	25	Mi5	Re#5
12	0	0	0	1	1	0	0	22	Si4	Do5
13	0	0	0	1	1	0	1	24	Re5	Re5
14	0	0	0	1	1	1	0	28	La5	Fa#5
15	0	0	0	1	1	1	1	25	Mi5	Mib5
16	0	0	1	0	0	0	0	24	Re5	Re5
17	0	0	1	0	0	0	1	23	Do5	Reb5
18	0	0	1	0	0	1	0	19	Fa4	La4
19	0	0	1	0	0	1	1	16	Do4	Fa#4
20	0	0	1	0	1	0	0	24	Re5	Re5
21	0	0	1	0	1	0	1	22	Si4	Do5
22	0	0	1	0	1	1	0	18	Mi4	Sol#4
23	0	0	1	0	1	1	1	16	Do4	Fa#4
24	0	0	1	1	0	0	0	23	Do5	Do#5
25	0	0	1	1	0	0	1	26	Fa5	Mi5
26	0	0	1	1	0	1	0	20	Sol4	La#4
27	0	0	1	1	0	1	1	24	Re5	Re5
28	0	0	1	1	1	0	0	19	Fa4	La4
29	0	0	1	1	1	0	1	23	Do5	Do#5
30	0	0	1	1	1	1	0	23	Do5	Do#5
31	0	0	1	1	1	1	1	25	Mi5	Re#5
32	0	1	0	0	0	0	0	23	Do5	Do#5
33	0	1	0	0	0	0	1	25	Mi5	Re#5
34	0	1	0	0	0	1	0	29	Si5	Sol5
35	0	1	0	0	0	1	1	26	Fa5	Mi5
36	0	1	0	0	1	0	0	26	Fa5	Mi5
37	0	1	0	0	1	0	1	26	Fa5	Mi5
38	0	1	0	0	1	1	0	25	Mi5	Re#5
39	0	1	0	0	1	1	1	29	Si5	Sol5
40	0	1	0	1	0	0	0	23	Si4	Do#5
41	0	1	0	1	0	0	1	21	La4	Si4
42	0	1	0	1	0	1	0	19	Fa4	La4

dados	1	2	3	4	5	6	7	suma	sonidos 1	sonidos 2
43	0	1	0	1	0	1	1	18	Mi4	Sol#4
44	0	1	0	1	1	0	0	19	Fa4	La4
45	0	1	0	1	1	0	1	19	Fa4	La4
46	0	1	0	1	1	1	0	21	La4	Si5
47	0	1	0	1	1	1	1	22	Si4	Do#5
48	0	1	1	0	0	0	0	30	Do6	Sol#5
49	0	1	1	0	0	0	1	29	Si5	Sol5
50	0	1	1	0	0	1	0	28	La5	Fa#5
51	0	1	1	0	0	1	1	28	La5	Fa#5
52	0	1	1	0	1	0	0	25	Mi5	Re#5
53	0	1	1	0	1	0	1	27	Sol5	Fa5
54	0	1	1	0	1	1	0	31	Re6	La5
55	0	1	1	0	1	1	1	28	La5	Fa#5
56	0	1	1	1	0	0	0	25	Mi5	Re#5
57	0	1	1	1	0	0	1	22	Si4	Do5
58	0	0	1	1	0	1	0	25	Mi5	Re#5
59	0	0	1	1	0	1	1	28	La5	Fa#5
60	0	0	1	1	1	0	0	28	La5	Fa#5
61	0	0	1	1	1	0	1	28	La5	Fa#5
62	0	1	1	1	1	1	0	28	La5	Fa#5
63	0	1	1	1	1	1	1	26	Fa5	Mi5
64	1	0	0	0	0	0	0	29	Si5	Sol5
65	1	0	0	0	0	0	1	29	Si5	Sol5
66	1	0	0	0	0	1	0	29	Si5	Sol5
67	1	0	0	0	0	1	1	28	La5	Fa#5
68	1	0	0	0	1	0	0	21	La4	Si4
69	1	0	0	0	1	0	1	23	Do5	Do#5
70	1	0	0	0	1	1	0	27	Sol5	Fa5
71	1	0	0	0	1	1	1	23	Do5	Do#5
72	1	0	0	1	0	0	0	28	La5	Fa#5
73	1	0	0	1	0	0	1	29	Si5	Sol5
74	1	0	0	1	0	1	0	29	Si5	Sol5
75	1	0	0	1	0	1	1	26	Fa5	Mi5
76	1	0	0	1	1	0	0	28	La5	Fa#5
77	1	0	0	1	1	0	1	24	Re5	Re5

dados	1	2	3	4	5	6	7	suma	sonidos 1	sonidos 2
78	1	0	0	1	1	1	0	24	Re5	Re5
79	1	0	0	1	1	1	1	24	Re5	Re5
80	1	0	1	0	0	0	0	22	Si4	Do5
81	1	0	1	0	0	0	1	25	Mi5	Re#5
82	1	0	1	0	0	1	0	26	Fa5	Mi5
83	1	0	1	0	0	1	1	24	Re5	Re5
84	1	0	1	0	1	0	0	26	Fa5	Mi5
85	1	0	1	0	1	0	1	28	La5	Fa#5
86	1	0	1	0	1	1	0	28	La5	Fa#5
87	1	0	1	0	1	1	1	24	Re5	Re5
88	1	0	1	1	0	0	0	26	Fa5	Mi5
89	1	0	1	1	0	0	1	23	Do5	Do#5
90	1	0	1	1	0	1	0	28	La5	Fa#5
91	1	0	1	1	0	1	1	28	La5	Fa#5
92	1	0	1	1	1	0	0	27	Sol5	Fa5
93	1	0	1	1	1	0	1	23	Do5	Do#5
94	0	0	1	1	1	1	0	26	Fa5	Mi5
95	0	0	1	1	1	1	1	24	Re5	Re5
96	0	1	0	0	0	0	0	15	Si3	Fa4
97	0	1	0	0	0	0	1	21	La4	Si4
98	0	1	0	0	0	1	0	22	Si4	Do5
99	0	1	0	0	0	1	1	22	Si4	Do5
100	1	1	0	0	1	0	0	20	Sol4	La#4
101	1	1	0	0	1	0	1	18	Mi4	Sol#4
102	1	1	0	0	1	1	0	19	Fa4	La4
103	1	1	0	0	1	1	1	23	Fa4	Do#5
104	1	1	0	1	0	0	0	21	La5	Si4
105	1	1	0	1	0	0	1	19	Fa4	La4
106	1	1	0	1	0	1	0	23	Do5	Do#5
107	1	1	0	1	0	1	1	18	Mi4	Sol#4
108	1	1	0	1	1	0	0	18	Mi4	Sol#4
109	1	1	0	1	1	0	1	22	Si4	Do5
110	1	1	0	1	1	1	0	16	Do4	Fa#4
111	1	1	0	1	1	1	1	19	Fa4	La4
112	1	1	1	0	0	0	0	26	Fa5	Mi5

dados	1	2	3	4	5	6	7	suma	sonidos 1	sonidos 2
113	1	1	1	0	0	0	1	23	Do5	Do#5
114	1	1	1	0	0	1	0	25	Mi5	Re#5
115	1	1	1	0	0	1	1	30	Do6	Sol#5
116	1	1	1	0	1	0	0	22	Si4	Do5
117	1	1	1	0	1	0	1	25	Mi5	Re#5
118	1	1	1	0	1	1	0	19	Fa4	La4
119	1	1	1	0	1	1	1	20	Sol4	La#4
120	1	1	1	1	0	0	0	25	Mi4	Re#5
121	1	1	1	1	0	0	1	26	Fa5	Mi5
122	1	1	1	1	0	1	0	23	Do5	Do#5
123	1	1	1	1	0	1	1	25	Mi5	Re#5
124	1	1	1	1	1	0	0	25	Mi5	Re#5
125	1	1	1	1	1	0	1	27	Sol5	Fa5
126	1	1	1	1	1	1	0	25	Mi5	Re#5
127	1	1	1	1	1	1	1	25	Mi5	Re#5

La duración se puede dar con una pirinola como en los ejemplos anteriores. El conjunto de notas y duraciones obtenido se da en las dos tablas.

Esta es la tabla con notas de La2 a La7 de la escala diatónica:

Si4$\frac{3}{4}$	Do5$\frac{2}{4}$	Sol4$\frac{3}{2}$	Do5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{2}{2}$
Mi5$\frac{3}{2}$	Fa5$\frac{3}{2}$	Sol5$\frac{4}{2}$	Fa5$\frac{1}{4}$	Mi5$\frac{3}{2}$
Fa5$\frac{2}{2}$	Mi5$\frac{4}{2}$	Si4$\frac{3}{2}$	Re5$\frac{1}{8}$	La5$\frac{1}{8}$
Mi5$\frac{2}{2}$	Re4$\frac{2}{2}$	Do5$\frac{1}{4}$	Fa4$\frac{4}{2}$	Do4$\frac{3}{2}$
Re5$\frac{4}{2}$	Si4$\frac{3}{2}$	Mi4$\frac{2}{4}$	Do4$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{1}{4}$
Fa5$\frac{2}{2}$	Sol4$\frac{1}{4}$	Re5$\frac{3}{4}$	Fa4$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{3}{2}$
Do5$\frac{2}{2}$	Mi5$\frac{3}{4}$	Do5$\frac{1}{8}$	Mi5$\frac{1}{4}$	Si5$\frac{3}{4}$
Fa5$\frac{2}{4}$	Fa5$\frac{1}{8}$	Fa5$\frac{1}{4}$	Mi5$\frac{2}{2}$	Si5$\frac{4}{2}$
Si4$\frac{2}{4}$	La4$\frac{1}{8}$	Fa4$\frac{2}{4}$	Mi4$\frac{1}{8}$	Fa4$\frac{3}{4}$
Fa4$\frac{3}{4}$	La4$\frac{2}{2}$	Si4$\frac{3}{2}$	Do6$\frac{1}{8}$	Si5$\frac{3}{2}$
La5$\frac{2}{4}$	La5$\frac{4}{2}$	Mi5$\frac{2}{4}$	Sol5$\frac{1}{4}$	Re6$\frac{2}{4}$
La5$\frac{4}{2}$	Mi5$\frac{3}{4}$	Si5$\frac{2}{4}$	Mi4$\frac{2}{2}$	La5$\frac{4}{2}$
La5$\frac{1}{8}$	La5$\frac{2}{2}$	La5$\frac{1}{8}$	Fa5$\frac{2}{4}$	Si5$\frac{2}{2}$

Si5$\frac{3}{2}$	Si5$\frac{1}{4}$	La5$\frac{1}{8}$	La4$\frac{3}{4}$	Do5$\frac{3}{4}$
Sol5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{1}{4}$	La5$\frac{3}{2}$	Si5$\frac{1}{8}$	Si5$\frac{3}{4}$
Fa5$\frac{2}{4}$	La5$\frac{2}{4}$	Re5$\frac{1}{8}$	Re5$\frac{2}{4}$	Re5$\frac{1}{8}$
Si4$\frac{3}{4}$	Mi5$\frac{3}{2}$	Fa5$\frac{2}{2}$	Re5$\frac{2}{2}$	Fa5$\frac{1}{8}$
La5$\frac{1}{4}$	La5$\frac{1}{8}$	Re5$\frac{3}{2}$	Fa5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{2}{2}$
La5$\frac{4}{2}$	La5$\frac{2}{4}$	Sol5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{3}{4}$	Fa5$\frac{2}{4}$
Re5$\frac{2}{4}$	Si3$\frac{1}{4}$	La4$\frac{1}{8}$	Si4$\frac{3}{4}$	Si4$\frac{2}{2}$
Sol4 $\frac{3}{4}$	Mi4$\frac{2}{4}$	Fa4$\frac{1}{8}$	Fa4$\frac{1}{8}$	La5$\frac{3}{2}$
Fa4$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{4}{2}$	Mi4$\frac{1}{4}$	Mi4$\frac{4}{2}$	Si4$\frac{2}{4}$
Do4$\frac{4}{2}$	Fa4$\frac{4}{2}$	Fa5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{1}{4}$	Mi5$\frac{4}{2}$
Do6$\frac{2}{4}$	Si4$\frac{2}{4}$	Mi5$\frac{3}{4}$	Fa4$\frac{2}{2}$	Sol4$\frac{1}{8}$
Mi4$\frac{2}{2}$	Fa5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{2}{4}$	Mi5$\frac{1}{8}$	Mi5$\frac{1}{8}$
Sol5$\frac{4}{2}$	Mi5$\frac{2}{2}$	Mi5$\frac{3}{4}$	129	130

Esta es la tabla con notas de La3 a Sol#6 en la escala cromática:

Do5$\frac{3}{4}$	Do#5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{3}{2}$	Sib4$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{2}{2}$
Re#5$\frac{3}{2}$	Mi5$\frac{3}{2}$	Fa5$\frac{4}{2}$	Mi5$\frac{1}{4}$	Re#5$\frac{3}{2}$
Mi5$\frac{2}{2}$	Re#5$\frac{4}{2}$	Do5$\frac{3}{2}$	Re5$\frac{1}{8}$	Fa#5$\frac{1}{8}$
Mib5$\frac{2}{2}$	Re5$\frac{2}{2}$	Reb5$\frac{1}{4}$	La4$\frac{4}{2}$	Fa#4$\frac{3}{2}$
Re5$\frac{4}{2}$	Do5$\frac{3}{2}$	Sol#4$\frac{2}{4}$	Fa#4$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{1}{4}$
Mi5$\frac{2}{2}$	La#4$\frac{1}{4}$	Re5$\frac{3}{4}$	La4$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{3}{2}$
Do#5$\frac{2}{2}$	Re#5$\frac{3}{4}$	Do#5$\frac{1}{8}$	Re#5$\frac{1}{4}$	Sol5$\frac{3}{4}$
Mi5$\frac{2}{4}$	Mi5$\frac{1}{8}$	Mi5$\frac{1}{4}$	Re#5$\frac{2}{2}$	Sol5$\frac{4}{2}$
Do#5$\frac{2}{4}$	Si4$\frac{1}{8}$	La4$\frac{2}{4}$	Sol#4$\frac{1}{8}$	La4$\frac{3}{4}$
La4$\frac{3}{4}$	Si5$\frac{2}{2}$	Do#5$\frac{3}{2}$	Sol#5$\frac{1}{8}$	Sol5$\frac{3}{2}$
Fa#5$\frac{2}{4}$	Fa#5$\frac{4}{2}$	Re#5$\frac{2}{4}$	Fa5$\frac{1}{4}$	La5$\frac{2}{4}$
Fa#5$\frac{4}{2}$	Re#5$\frac{3}{4}$	Do5$\frac{2}{4}$	Re#5$\frac{2}{2}$	Fa#5$\frac{4}{2}$
.Fa#5$\frac{1}{8}$	Fa#5$\frac{2}{2}$	Fa#5$\frac{1}{8}$	Mi5$\frac{2}{4}$	Sol5$\frac{2}{2}$
Sol5$\frac{3}{2}$	Sol5$\frac{1}{4}$	Fa#5$\frac{1}{8}$	Si4$\frac{3}{4}$	Do#5$\frac{3}{4}$
Fa5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{1}{4}$	Fa#5$\frac{3}{2}$	Sol5$\frac{1}{8}$	Sol5$\frac{3}{4}$
Mi5$\frac{2}{4}$	Fa#5$\frac{2}{4}$	Re5$\frac{1}{8}$	Re5$\frac{2}{4}$	Re5$\frac{1}{8}$
Do5$\frac{3}{4}$	Re#5$\frac{3}{2}$	Mi5	Re5$\frac{2}{2}$	Mi5$\frac{1}{8}$

Fa#5$\frac{1}{4}$	Fa#5$\frac{1}{8}$	Re5$\frac{3}{2}$	Mi5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{2}{2}$
Fa#5$\frac{4}{2}$	Fa#5$\frac{2}{4}$	Fa5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{3}{4}$	Mi5$\frac{2}{4}$
Re5$\frac{2}{4}$	Fa4$\frac{1}{4}$	Si4$\frac{1}{8}$	Do5$\frac{3}{4}$	Do5$\frac{2}{2}$
La#4 $\frac{3}{4}$	Sol#4$\frac{2}{4}$	La4$\frac{1}{8}$	Do#5$\frac{1}{8}$	Si4$\frac{3}{2}$
La4$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{4}{2}$	Sol#5$\frac{1}{4}$	Sol#5$\frac{4}{2}$	Do5$\frac{2}{4}$
Fa#4$\frac{4}{2}$	La4$\frac{4}{2}$	Mi5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{1}{4}$	Re#5$\frac{4}{2}$
Sol#5$\frac{2}{4}$	Do5$\frac{2}{4}$	Re#5$\frac{3}{4}$	La4$\frac{2}{2}$	La#4$\frac{1}{8}$
Re#5$\frac{2}{2}$	Mi5$\frac{2}{4}$	Do#5$\frac{2}{4}$	Re#5$\frac{1}{8}$	Re#5$\frac{1}{8}$
Fa5$\frac{4}{2}$	Re#5$\frac{2}{2}$	Re#5$\frac{3}{4}$	129	130

La composición 5 y la composición 6 se dan al final del capítulo.

Estas piezas contienen intervalos interesantes con curvas melódicas unidas una a otra aunque no tengan relación sobre una curva melódica. No hay relación entre las curvas en sí pero en conjunto dan una obra con riqueza interválica.

Al trabajar estas composiciones usando solamente lineas melódicas y ritmo estamos ignorando muchos de los elementos usados en música como son texturas, dinámica, forma y timbre.

Iannis Xenakis retoma el sentido de estas composiciones de una manera mas sistemática incorporando los logros de la teoría de las probabilidades asociando a cada característica musical una función de distribución apropiada.

Composiciones Obtenidas

Tabla de Compases

Mozart

Vals de Mozart   Composición 1


Composición 2 Juego de la Pirinola

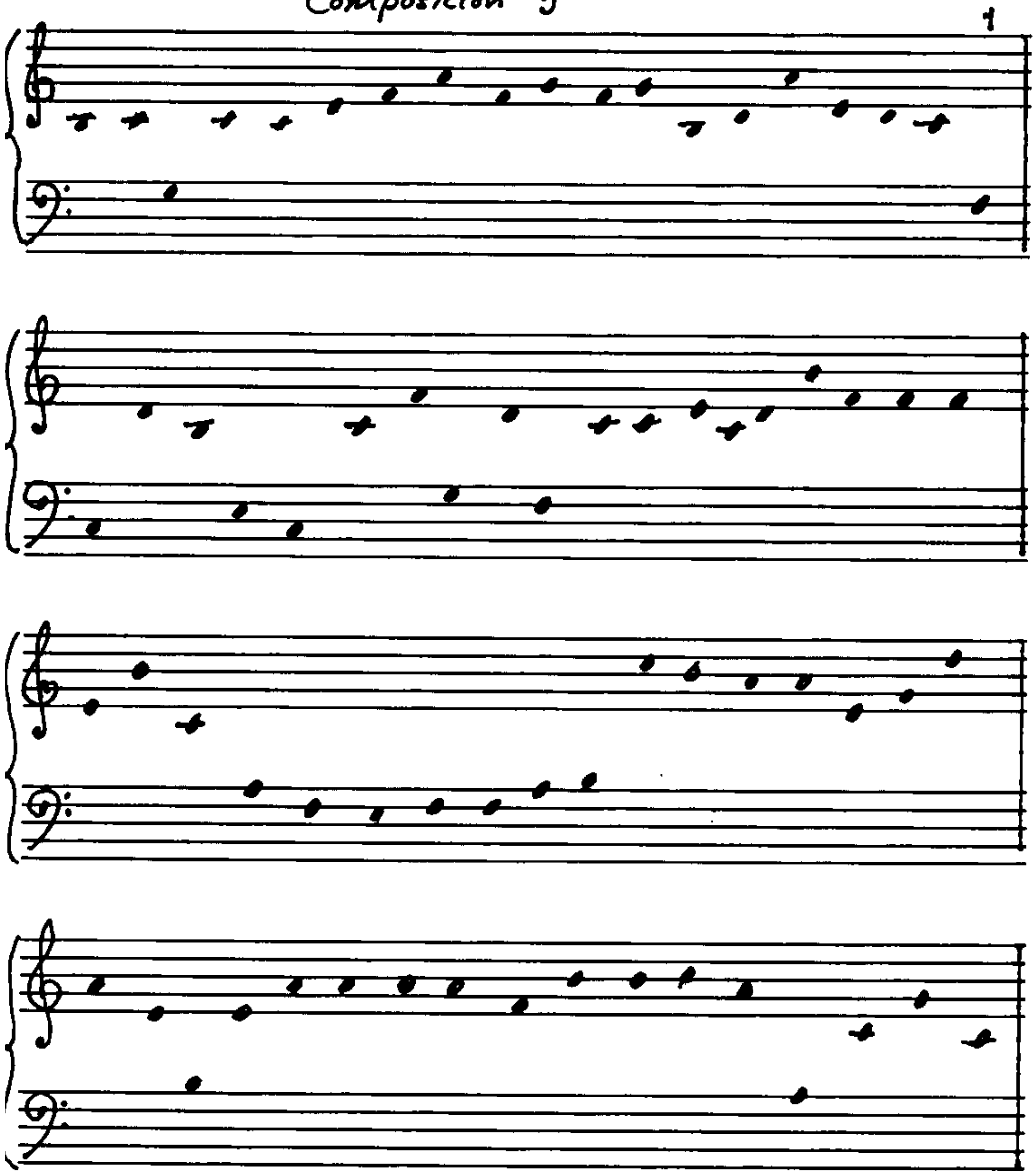

Composicion 3 Recorrido Browniano

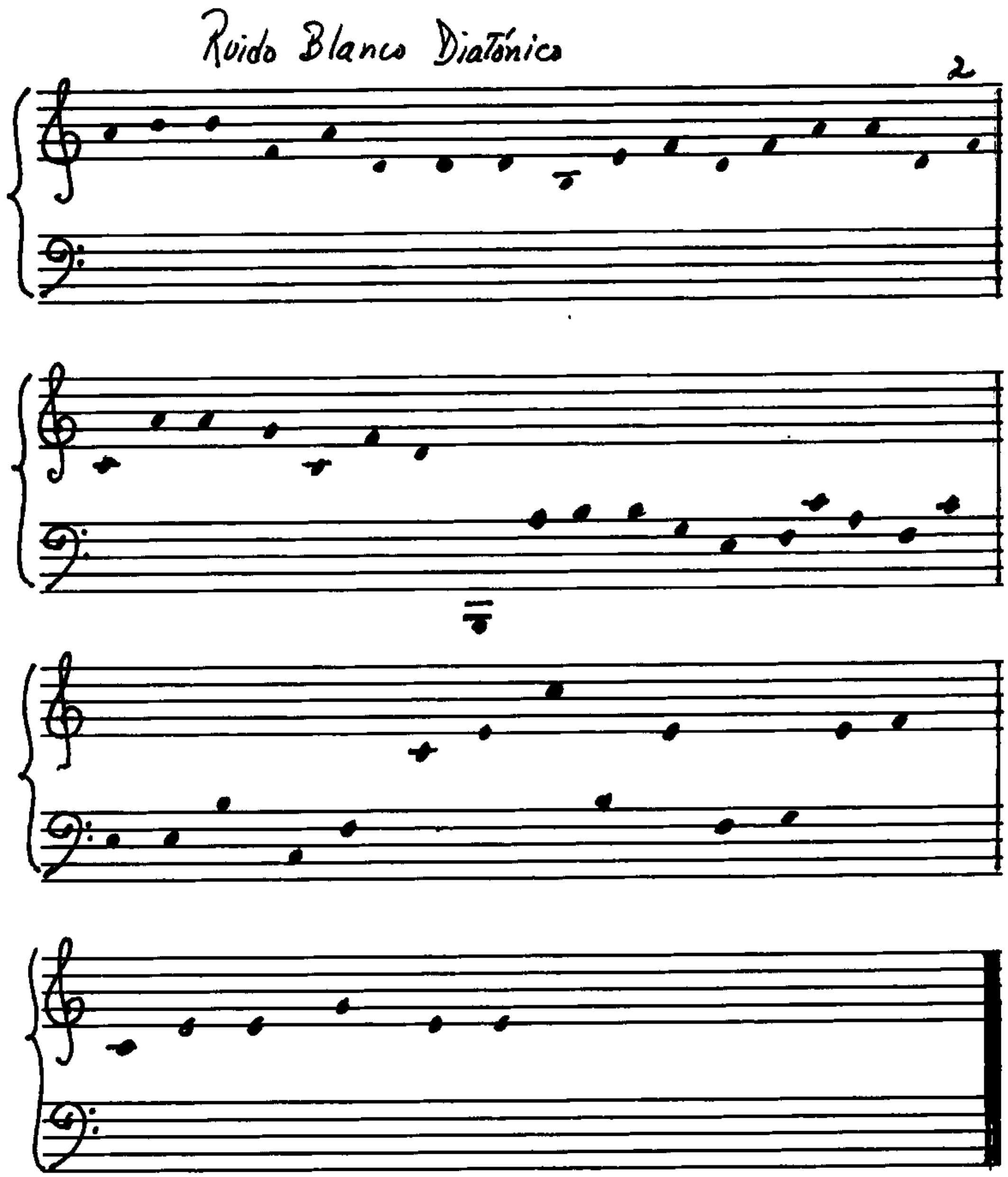
Composicion 4 metodo del Barrilito

G Rivera

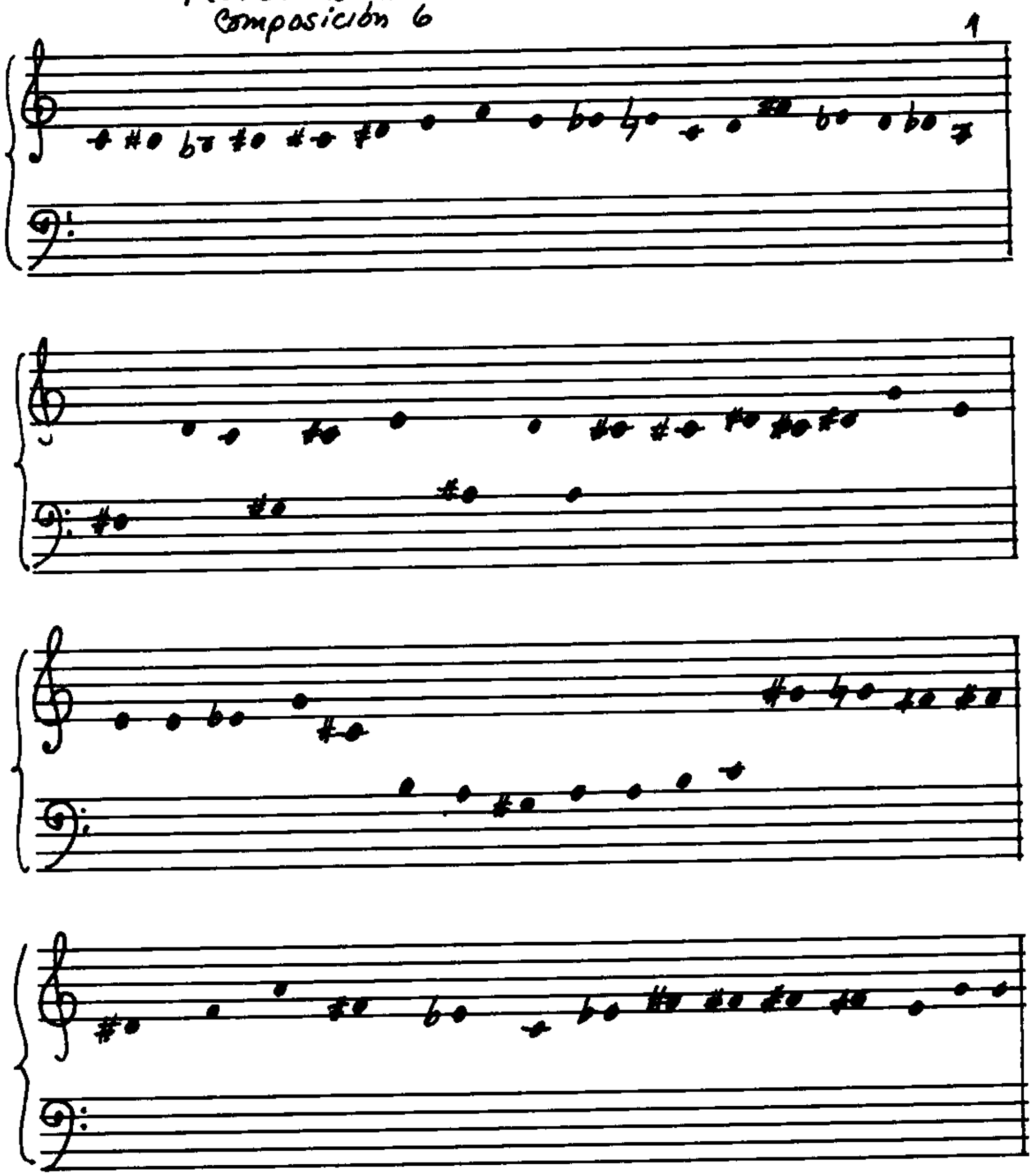
Ruido Blanco Diatonico

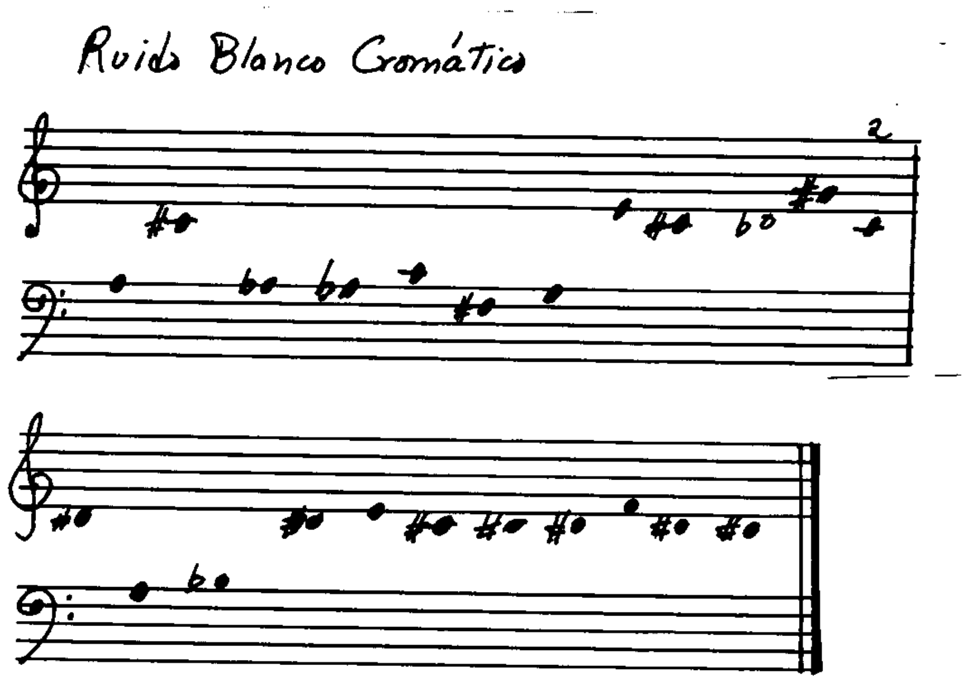
Composición 5




Ruido Blanco Diatónico
2

Ruido Blanco Cromatico
Composición 6




Ruido Blanco Cromático
2

Capítulo 4

Composición Musical Probabilística

Este capítulo está basado en el trabajo de I. Xenakis de su libro Música Formal, en el cual propone el uso de las funciones de la probabilidad. Así en 1954 las leyes del cálculo de probabilidades entraron en la composición musical.

Estética Xenachiana. A partir de este momento nos apegamos a las ideas de Xenakis.

La función del arte y sobre todo de la música es la de catalizar la sublimación a que se puede llevar al ser humano a través de todos los medios de expresión. Asimismo, es llevar hacia una exaltación total en la cual el individuo se unifica poniendo su conciencia en una verdad inmediata rara, sublime, perfecta.

Si una obra de arte lo logra, aunque sea por un momento, ya alcanzó su meta. Va más allá de las emociones o sensaciones. Manteniendo la vista en esta meta, meta-artística intentamos definir el camino que lleva a ella, partiendo de la gran cantidad de contradicciones de la propia música actual.

Existe un paralelo histórico entre la música europea y los intentos sucesivos de explicar el mundo por la razón.

La música de la antigüedad, causal y determinística estuvo influenciada por Pitágoras y Platón.

Platón insistió en el principio de causalidad "es imposible que algo se convierta en algo sin una causa (Timeo)".

La causalidad estricta prevaleció hasta el S. XIX en que se transformó brutal y fructíferamente dando como resultado las teorías de la estadística y la física moderna.

Azar (tiche), desorden (ataxia) y desorganización eran opuestos y negación de razón (logos), orden (taxis) y organización (systasis).

Actualmente se ha penetrado el azar y se han separado sus grados; es decir se ha racionalizado progresivamente sin lograrse una explicación definitiva y total del problema del "azar puro".

La música atonal rompe las funciones tonales y abre un nuevo camino paralelo al de las ciencias físicas aunque constreñida por el determinismo de la música serial.

Asimismo no es sorprendente que la presencia o ausencia del principio de causalidad primero en la filosofía y luego en las ciencias, pueda influir en la composición musical.

La música sigue caminos divergentes que coinciden en teoría de probabilidades y finalmente en lógica polivalente que son en parte generalizaciones y enriquecimientos del principio de causalidad

El mundo sonoro que nos rodea se enriquece del engrandecimiento del principio de causalidad, basado en la ley de los grandes números. Esta ley implica una evolución asintótica hacia un estado estable, hacia una meta o stochos.

Pero todo en el determinismo puro o el menos puro se somete a las operaciones lógicas fundamentales que en matemáticas se describen bajo el título de álgebra general.

Estas leyes operan en estados aislados en un conjunto de elementos con la ayuda de operaciones tales como la unión $\cup$, intersección $\cap$, negación $\sim$.

De estas equivalencias, implicaciones y cuantificaciones se pueden construir todas las ciencias.

La música puede ser difundida como una organización de estas funciones elementales y relaciones entre entidades sonoras o entre funciones de entidades sonoras.

La teoría de conjuntos nos puede ayudar no sólo a componer nuevas obras, sino para analizar y comprender mejor los trabajos del pasado. De la misma manera una construcción estocástica o una investigación con la ayuda de la estocástica no puede hacerse sin la ayuda del álgebra

Desde este punto de vista fundamental, desde el cual deseamos analizar y hacer música; el tiempo es la cera o el barro en el cual deseamos grabar e inscribir la operación y relación, para el mismo propósito de la composición y para la comunicación con terceros.

Usaremos el carácter asimétrico, no conmutativo del tiempo: B después de A no es lo mismo que A después de B

El tiempo métrico (simétrico) conmutativo se somete a las mismas leyes lógicas y puede asimismo ayudar a especulaciones organizadas.

¿Qué es una composición musical?

Una colección de secuencias que desea ser causal. La escala mayor implica funciones tonales jerárquicas (tónica, dominante y subdominante) alrededor de los cuales gravitan las otras notas, se construyen de manera altamente determinística, procesos lineales o melodías por un lado y eventos simultaneos (acordes, armonía) por otro.

4.1. Fases Fundamentales de una obra musical

1.- *Concepción inicial* (intuiciones, datos provisionales o definitivos);

2.- *Definición de las entidades sonoras* y sus simbolismos comunicables con los límites de lso medios posibles (sonidos de los instrumentos,sonidos electrónicos, ruidos, conjuntos ordenados de elememtos sonoros, formaciones granulares o contínuas);

3.-*Definición de las transformaciones* cuyas entidades sonoras deberán fluir en el transcurso de la composición (macrocomposición: opción ge- neral del marco lógico, tales como operaciones algebraicos elementales y la preparación de la relación entre entidades, conjuntos, y sus símbolos como está definido en 2

4.- *Microcomposición* (escoger y detallar las relaciones estocásticas y funcionales de los elementos de 2), álgebra fuera y dentro del tienpo;

5.- *Programación Secuencial* de 3 y 4 (esquema y patrones del trabajo en si integridad)

6.- *Implementación de cálculos*, verificaciones, retroalientación y mocificaciones definitivas del programa secuencial;

7.-*Resultado final en símbolos* de la programación (escribir en notación musical tradicional,expresiones numéricas, gráficas u otro medio de solfeo)

8.- *Realización sonora del programa* (ejecución orquestal, manipúlación del tipo de música electromagnética, expresión numérica, construcción computarizada de las entidades sonoras y sus transformaciones.)

4.2. Parámetros Musicales

Las entidades sonoras se pueden presentar por un vector de cuatro variables independientes: $E = (c,\ h,\ g,\ u)$ donde c es el timbre del sonido o familia instrumental, h es la altura del sonido, g es la intensidad del sonido o la forma dinámica y u es la duración del sonido. Como ejemplo podemos tomar la siguiente situación: Sea E el vector que tiene como componentes: c - violín, h es un do en C3, g_4 es un forte y u es $\frac{1}{4}$ seg., esto es $E=$ (violin, do$_3$ forte, $\frac{1}{4}$seg). Podemos ver a una composición musical como una sucesión en el tiempo, de puntos E lo cual se denota como la pareja $(t,\ E)$ que sigue el orden lexicográfico en un espacio de cinco dimensiones [Xenakis, Xenakis].

Aclaremos el lenguaje que usaremos:

a) los diferenciales deben de verse como incrementos constantes y en el caso de la función de distribución de Poisson valen uno. En el caso de la función de distribución exponencial los incrementos son 0,1 de unidad U_{MM}.

b) cuando hablemos de distribución estaremos hablando de la probabilidad de que la variable aleatoria tome todos sus valores en el incremento correspondiente dx, dk, etc.

4.2.1. Distribución de la duración de los sonidos

Consideraremos al tiempo como una línea recta (números reales no negativos) en la cual existen los sonidos musicales S_i. Una composición musical de algún instrumento que produce un sonido a la vez se puede ver como una sucesión de sonidos

$S_1 S_2 S_3 \ldots S_i \ldots S_j \ldots S_n \ldots.$

Al intervalo de tiempo entre los sonidos S_i y S_{i+1} se le llama duración del sonido S_i. Xenakis propone un modelo matemático para la duración de los sonidos δ en una composición musical, usando el hecho de que δ se distribuye de acuerdo a la función de densidad de probabilidad exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \delta e^{-\delta x}, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Donde $\delta > 0$. La esperanza matemática $\mu_x = 1/\delta$ y la varianza $\sigma_x^2 = 1/\delta^2$. Asociaremos a δ con la duración media de los sonidos y a x con la duración de los sonidos. Note que aquí se utiliza el hecho de que con más frecuencia aparecen los sonidos de menos duración.

4.2.2. Distribución de la densidad de sonidos en un acorde

Supongamos una duración dada y un acorde definido en el espacio intensidad-altura durante esta duración. Dada la densidad media de sonidos en el espacio intensidad-altura de este acorde, Xenakis propone que una densidad de sonidos particular en el espacio intensidad-altura se distribuye con una función de densidad de probabilidad de Poisson

$f(x) = e^{-\mu}\mu^x/x!$,

donde μ es la densidad media de sonidos del acorde, y x es la densidad de sonidos en una región del cúmulo en el espacio intensidad-altura.

4.2.3. Intervalos de la intensidad y la altura de los sonidos

Cada variable musical (altura, intensidad, densidad) forma un intervalo de tamaño a. Asociemos a los intervalos con la variable musical discreta j. Xenakis propone que los intervalos están distribuidos con una función de densidad de probabilidad uniforme

$f(j) = \begin{cases} \frac{2}{a}(1-\frac{j}{a}) & 0 \leq j \leq a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$,

Dentro del intervalo de variación tomemos al azar un subintervalo $[j, j+dj]$, donde $0 \leq j \leq a$.

La probabilidad de que un evento acontezca el intervalo $[j, j+dj]$ es

$P_j = \frac{2}{a}(1-\frac{j}{a})dj$

la cual debe cumplir la propiedad

$\sum\limits_{i=0}^{m} P_i = 1$,

o bien

$\sum\limits_{i=0}^{m} \frac{2}{a}(1-\frac{j}{a})dj = 1$.

Es conveniente definir otra variable discreta i con ayuda de la relación

$j = ia/m$, donde $i = 0,1,..., m$ y $m \in \mathbb{N}$.

Haciendo algunas cuentas dj debe elegirse de la forma

$dj = a/(m+1)$.

Así la expresión para la probabilidad queda

$P_j = \frac{2}{m+1}(1-\frac{i}{m})$,

donde $i = 0,1,..., m$ y $m \in \mathbb{N}$.

4.2.4. Velocidad de glissando

En el caso del glissando (cuando un sonido pasa a otro de forma contínua, ya sea hacia un sonido más grave o hacia un sonido más agudo pasando por otros sonidos intermedios) vamos a considerar el caso más simple: cuando ocurre un glissando uniformemente continuo, caracterizado por la velocidad constante

$V = \Delta h/\Delta t$,

donde Δh es la variación de la altura y Δt es el intervalo del tiempo en el que transcurre el glissando. En el caso de los instrumentos de viento $V = 0$. Hacia frecuencias altas el glissando es positivo y hacia frecuencias bajas es negativo. En este caso se propone que V se distribuya de acuerdo a la función de densidad de probabilidad de Maxwell-Boltzmann

$f(V) = V^2 e^{-V^2/a^2}/(a\sqrt{\pi})$

En la obra musical Pithoprakta para orquesta de cuerdas (compuesta entr 1955 y 1956) el parámetro $a = 35$.

4.2.5. Distribución de la densidad de sonidos

Ahora podemos calcular los valores de otra dimensión que está relacionado con la densidad del sonido, para ello necesitamos hacer una serie de consideraciones: Tomemos como evento simple un grupo de sonidos con densidad lineal δ_1, dado en 2 unidades de |sonidos/seg, sonidos/unidad musical|. Como 10 sonidos /segundo es el límite que una orquesta normal puede tocar, tomaremos δ_1 =5 sonidos/unidad musical, que equivale a lo siguiente:

$\delta_1 = \frac{5\text{sonidos}}{U_{MM}\ \ 1} = \frac{5 \text{ Sonidos}}{2{,}3 \text{ seg/golpe}} = 2{,}17\frac{sonidos}{seg} = \frac{10 \text{ Sonidos}}{4 \text{ segundos}}$.

Lo cuál nos dice que daremos 10 sonidos por cada 4 segundos.

En el caso de eventos dobles, triples y cuadrúples:

δ_2 =10 sonidos/unidad musical =4,4 sonidos/seg,

δ_3 =15 sonidos/unidad musical =6,6sonidos/seg, y

δ_4 =20 sonidos/unidad musical =8,8 sonidos/seg.

El número total de sonidos en la celda se obtiene con la relación $N_{Ti} = \delta_i \times 15$ seg, con ello obtenemos la tabla del número de sonidos por unidad musical:

evento	sonidos/unidad musical $26MM$	δ_i	N_{Ti}
cero	0	0	0
simple	5	2,2	32,5
doble	10	4,4	65
triple	15	6,6	97,5
cuádruple	20	8,8	130

Para encontrar los valores de la densidad de sonidos de eventos solos alrededor de δ_1 podemos usar una función de densidad de distribución triangular[Dodge]

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2a & -a < x < 0 \\ -2x + 2a & 0 \leq x < a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} .$$

Teniendo el número de sonidos solos dobles y triples N_1, N_2 y N_3, que en nuestro caso son 65, 19 y 4, podemos saber cuantos valores de la variable aleatoria discreta "densidad de sonidos" tienen un valor en su función de densidad de probabilidad distinta de cero, esto se hace buscando un número n_i tal que

$2^{n_i} \approx N_i$,

donde $i = 1, 2, 3$. el número $n_i + 1$ por su construcción coincide con el valor de a en la función de densidad de probabilidad triangular.

Para el caso de los sonidos simples

$n_1 = 6$.

Para el caso de los sonidos dobles

$n_2 = 4$,

y para el caso de los sonidos triples

$n_3 = 2$.

Consideraremos que la variable discreta "densidad de sonidos" varía en 0,5 sonidos/unidad musical para el caso de sonidos simples y dobles y en 1 sonidos/unidad musical para el caso de sonidos triples.

4.3. Análisis de Achorripsis

La obra musical Achorripsis para 21 instrumentos fué compuesta entre 1956 y 1957 y fue estrenada en Buenos Aires en 1958 bajo la dirección de Hermann Scherchen. Achorripsis es un tipo de composición con funciones de densidad de probabilidad en la que se trata de tener el mínimo de restricciones, causalidades y reglas y se intenta obtener la máxima asimetría(en sentido etímológico). Al optarse por un proceso probabilístico hay dos hipótesis necesarias que responden al problema de las mínimas restricciones:1. Existen instrumentos musicales e intérpretes; y 2. Existe medio de comunicación entre estos intérpretes y estos instrumentos que permiten la emisión de eventos sonoros . Las reglas que formuló para esta composición se expandieron en el programa ST/10-1, 080262; Otras composiciones incluyendo la ST/4-1, 080262 para cuarteto de cuerdas, Atries; (Homenaje a Blas Pascal) para 10 instrumentos y Morisma -Amorisma para cuatro instrumentos fueron basadas en el mismo programa. Para estos trabajos usó una computadora IBM 7090 para el control de las secuencias de tonos, instrumentación, altura, duración y dinámica. Los ejecutantes no tenían libertad para improvisar, pero el resultado es fluído, homogéneo y natural.[Enciclopedia Británica]

La idea fundamental es que en una obra musical el número total de sonidos es muy grande, lo que nos permite el uso de la teoría de probabilidades.

4.3.1. Matriz de la composición Achorripsis

Por comodidad elijamos 196 unidades musicales con **7** timbres.

Se elige la duración musical de toda la composición de

$D = 7\,\text{mín} = 420 seg$,

Con ello obtenemos

$\mathbf{U}_c = \frac{196}{7} = 28$ unidades de tiempo de composición o celdas.

por lo que la unidad de tiempo de una unidad musical

$u_t = D/U = \frac{420 seg}{28} = 15$ seg

y cada unidad de u_t puede pasarse a la escala de Metrónomo de Mälzel de 26 golpes por minuto que es igual a

$U_{MM} = \frac{26}{60} = 0{,}43$ golpes/seg o bien un golpe en 2,3 seg. U_{MM} equivale a 6,5 golpes en 15 seg.

$\lambda = 0{,}6$ eventos musicales/unidad musical. Estos datos se muestran a continuación:

420 seg de composición
28 columnas de composición
7 timbres
196 celdad de composición
15seg por celda
$U_{MM} = \frac{26}{60} = 0{,}43$ golpes/seg
6.5 compases por celda
un compas cada 2.3 seg
$\lambda = 0{,}6$ eventos musicales/unidad musical.

Analizemos esta situación en un subespacio bidimensional en el cual en una dimensión están los instrumentos y en otra dimensión están las celdas de la composición, lo cual genera un espacio timbre-tiempo. La hileras y las columnas pueden ser intercambiables.

4.3.2. Cantidad de tipo de sonidos

Para llenar esas 196 celdas de sonidos de silencios, sonidos simples, dobles, triples y cuadrúples es necesario tener en cuenta que los primeros son más numerosos que los últimos. Según la experiencia de Xenakis la distribución de tipos de sonidos $f_k dk$ se calcula con una función de densidad de probabilidad de Poisson con $dk = 1$:

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$,

donde $\lambda = 0{,}6$ eventos musicales/unidad musical y $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5. Así obtenemos la tabla siguiente:

i	f_i	$196 f_i$	tipo de evento
0	0,5488	107	silencio
1	0,3293	65	evento solo
2	0,0488	19	evento doble
3	0,0198	4	evento triple
4	0,0030	1	evento cuádruple
5	0,0004	0	evento quíntuple

4.3.3. Distribución de los tipos de sonidos en la matriz

Cada una de las celdas se debe llenar con las características musicales que hasta ahora hemos descrito, es decir con un silencio, evento simple, doble, triple o cuadrúple. La distribución $f_k dk$ de que un evento sea un silencio o un evento múltiple se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1$:

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5. Además hay que tener en cuenta los siguientes valores medios.

$\lambda_0 = 107/28 = 3{,}82$ silencios
$\lambda_1 = 6{,}5/28 = 2{,}32$ eventos solos
$\lambda_2 = 19/28 = 0{,}68$ eventos dobles
$\lambda_3 = 4/28 = 0{,}14$ eventos triples
$\lambda_4 = 1/28 = 0{,}036$ eventos cuádruples

a) Calculemos la distribución de silencios.

La distribución $f_k dk$ de silencios se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1$:

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 3{,}82$ podemos obtener la siguiente tabla:

k	f_k	$f_k/0{,}033$	$kf_k/0{,}033$
0	0,0219	0	0
1	0,0840	2	2
2	0,1600	5	10
3	0,2040	6	18
4	0,1946	5	20
5	0,1486	4	20
6	0,0940	4	24
7	0,0940	2	14
	total	28	107

f_k $f_k/0{,}033$ $kf_k/0{,}033$
0 0,0219 0 0
1 0,0840 2 2
2 0,1600 5 10
3 0,2040 6 18
4 0,1946 5 20
5 0,1486 4 20
6 0,0940 4 24
7 0,0940 2 14
total 28 107

Esta tabla se interpreta así: En ninguna columna deja de haber silencios, en 2 columnas hay 1 silencio, en 5 columnas hay 2 silencios, en 6 columnas hay 3 silencios, en 5 columnas hay 4 silencios, en 4columnas hay 6 silencios, en 2 columnas hay 7 silencios. En la matriz de composición se colocan estos silencios por elcción aleatoria sin reemplazo (lotería) y en todos los demás casos se procede de la misma manera.

b) Calculemos la distribución de eventos simples.

La distribución $f_k dk$ de eventos simples se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1:$

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 2{,}32$ obtenemos la siguiente tabla:

k	f_k	$f_k/0{,}033$	$kf_k/0{,}033$
0	0,0983	3	0
1	0,2280	6	6
2	0.2645	8	16
3	0,2045	5	15
4	0,1186	3	12
5	0,0550	2	10
6	0,0210	1	6
	total	28	65

Esta tabla se interpreta así: En 3 columnas no hay eventos simples, en 6 columnas hay 1 evento simples, en 8 columnas hay 2 eventos simples, en 5 columnas hay 3 eventos simples, en 3 columnas hay 4 eventos simples, en 2 columnas hay 5 eventos simples y en 1 columna hay 6 eventos simples.

c) Calculemos la distribución de los eventos dobles.

La distribución $f_k dk$ de eventos dobles se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1:$

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 0{,}68$ obtenemos la siguiente tabla:

k	f_k	$f_k/0{,}033$	$k \times f_k/0{,}033$
0	0,5066	14	0
1	0,3445	10	9
2	0,1165	3	6
3	0,0265	1	3
4	0,0040	0	1
5	0,0006	0	0
	total	28	19

Esta tabla se interpreta así: en 14 columnas no hay eventos dobles, en 10 columnas hay 1 evento doble, en 3 columnas hay 2 eventos dobles y en 1 columna hay 3 eventos dobles.

d) Cálculo de la distribución de eventos triples.

La distribución $f_k dk$ de eventos triples se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1:$

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 0{,}14$ obtenemos la siguiente tabla:

k	f_k	$f_k/0{,}033$	$kf_k/0{,}033$
0	0,087	24	0
1	0,1218.	3	3
2	0,0085	1	1
3	0,00039	0	0
4	0,00001	0	0
5	0,0000	0	0
	total	28	4

Esta tabla se interpreta así: En 24 columnas no hay eventos triples, en 3 columnas hay un evento triple y en 1 columna hay 2 eventos triples.

e) Cálculo de la distribución de eventos cuádruples.

La distribución $f_k dk$ de evento cuádruples se puede calcular usando de nuevo la función de densidad de probabilidad de Poisson para el intervalo $dk = 1:$

$f_k dk = f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 0{,}036$ obtenemos la siguiente tabla:

k	f_k	$f_k/0{,}033$	$kf_k/0{,}033$
0	0,9646	27	0
1	0,0347	1	1
2	0,00062	0	0
3	0,000007	0	0
4	0,00000067	0	0
5	0,00000000	0	0
	total	28	1

Esta tabla se interpreta así: En una columna hay un evento cuádruple.

4.3.4. Distribución de las densidades de sonidos.

La densidad de sonidos se propone que se distribuya con una función de densidad de probabilidad triangular.

Teniendo el número de sonidos solos dobles y triples N_1, N_2 y N_3, que en nuestro caso son 65, 19 y 4, podemos calcular los valores donde de la variable aleatoria discreta "densidad de sonidos" no es nula: $n_i + 1$. Para el caso de los sonidos simples $n_1 + 1 = 7$. Para el caso de los sonidos dobles $n_2 + 1 = 5$. Y para el caso de los sonidos triples $n_3 + 1 = 3$.

Consideraremos que la variable discreta "densidad de sonidos" tiene incrementos $dx = 0{,}5$ sonidos/unidad musical para el caso de sonidos simples y dobles y de $dx = 1$ sonidos/unidad musical para el caso de sonidos triples.

Así la distribución de densidades de sonidos la podemos hacer con la función de densidad de probabilidad triangular:

$$f(x)dx = \begin{cases} (-2x + 2n_i + 2)dx & -n_i - 1 < x < 0 \\ (2x + 2n_i + 2)dx & 0 \leq x < n_i + 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} .$$

a) En el caso de sonidos simples, las ecuaciones de las rectas que definen la función de densidad de probabilidades triangular son:

$y_1 = 2x + 14$ y $y_2 = -2x + 14$,

se debe considerar que se toma como cero al punto 5.0, como -3.5 al punto 1.7 y como 3.5 al punto 8.5. La distribución de eventos simples se calcula a través de esas dos ecuaciones y se ajustan a 65 considerando al incremento $dx = 0{,}5$ sonidos/unidad musical

δ_{1i}	$f(x)dx$	N
1.5	0	0
2.0	1	1
2.5	2	3
3.0	3	4
3.5	4	5
4.0	5	6
4.5	6	7
5.0	7	16
5.5	6	7
6.0	5	6
6.5	4	4
7.0	3	3
7.5	2	2
8.0	1	1
8.5	0	0
	total=	65

Esta tabla se interpreta así: No hay sonidos simples con una densidad de sonidos de 1.5 sonidos/unidad musical, hay 1 sonido simple con una densidad de sonidos de 2.0 sonidos/ unidad musical, hay 3 sonidos simples con una densidad de sonidos de 2.5 sonidos/ unidad musical, hay 4 sonidos simples con una densidad de sonidos de 3.0 sonidos/ unidad musical, hay 5 sonidos simples con una densidad de sonidos de 3.5 sonidos/ unidad musical, hay 6 sonidos simples con una densidad de sonidos de 4.0 sonidos/ unidad musical, hay 7 sonidos simples con una densidad de sonidos de 4.5 sonidos/ unidad musical, hay 16 sonidos simples con una densidad de sonidos de 5.0 sonidos/ unidad musical, hay 7 sonidos simples con una densidad de sonidos de 5.5 sonidos/ unidad musical, hay 6 sonidos simples con una densidad de sonidos de 6.0 sonidos/ unidad musical, hay 4 sonidos simples con una densidad de sonidos de 6.5 sonidos/ unidad musical, hay 3 sonidos simples con una densidad de sonidos de 7.0 sonidos/ unidad musical, hay 2 sonidos simples con una densidad de sonidos de 7.5 sonidos/ unidad musical y hay 1 sonidos simples con una densidad de sonidos de 8.0 sonidos/ unidad musical,.

b) En el caso de sonidos dobles la densidad de sonidos varia alrededor de 10,0 sonidos /unidad musical y se forma un intervalo con 5 unidades alrededor de ese valor, en el último punto el valor de la función de densidad de probabilidad triangular es nulo.. Las ecuaciones de las rectas que definen la función de densidad de probabilidades triangular son:

$y_1 = 2x + 10$ y $y_2 = -2x + 10$,

se debe considerar que se toma como cero al punto 10.0, como -2.5 al punto 7.5 y como 2.5 al punto 12.5. La distribución de eventos dobles se calcula a través de esas dos ecuaciones y se ajustan a 19 considerando al incremento $dx = 0{,}5$ sonidos/unidad musical.

δ_{2i}	$f(x)dx$	N
7,5	0	0
8,0	1	1
8,5	2	1
9,0	3	2
9,5	4	2
10,0	5	6
10,5	4	3
11,0	3	2
11,5	2	1
12,0	1	1
12,5	0	0
	total=	19

Esta tabla se interpreta así: No hay sonidos dobles con una densidad de sonidos de 7.5 sonidos/unidad musical, hay 1 sonido doble con una densidad de sonidos de 8.0 sonidos/ unidad musical, hay 1 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 8.5 sonidos/ unidad musical, hay 2 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 9.0 sonidos/ unidad musical, hay 2 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 9.5 sonidos/ unidad musical, hay 6 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 10.0 sonidos/ unidad musical, hay 3 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 10.5 sonidos/ unidad musical, hay 2 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 11.0 sonidos/ unidad musical, hay 1 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 11.5 sonidos/ unidad musical y hay 1 sonidos dobles con una densidad de sonidos de 12.0 sonidos/ unidad musical.

c) En el caso de sonidos triples la densidad de sonidos varia alrededor de 15 sonidos /unidad musical y se forma un intervalo con 3 unidades alrededor de ese valor, en el último punto el valor de la función de densidad de probabilidad triangular es nulo. Las ecuaciones de las rectas que definen la función de densidad de probabilidades triangular son:

$y_1 = 2x + 6$ y $y_2 = -2x + 6$,

se debe considerar que se toma como cero al punto 15, como -3 al punto 12 y como 3 al punto 18. La distribución de eventos triples se calcula a través de esas dos ecuaciones y se ajustan a 4 considerando al incremento $dx = 1$ sonidos/unidad musical.

δ_{3i}	$f(x)dx$	N
12	0	0
13	2	0
14	4	1
15	6	2
16	4	1
17	2	0
18	0	0
	total=	4

Esta tabla se interpreta así: No hay sonidos triples con una densidad de sonidos de 12.0 sonidos/unidad musical, hay 0 sonido triples con una densidad de sonidos de 13.0 sonidos/ unidad musical, hay 1 sonidos triples con una densidad de sonidos de 14.0 sonidos/ unidad musical, hay 2 sonidos triples con una densidad de sonidos de 15.0 sonidos/ unidad musical y hay 1 sonidos triples con una densidad de sonidos de 16.0 sonidos/ unidad musical.

d) Para sonidos cuadrúples solamente hay una posibilidad.

4.3.5. Distribución de las duraciones del glissando

Para calcular la distribución de las duraciones de un glissando en cada celda se propone usar la función de densidad de probabilidad exponencial

$f(x)dx = \delta_{ji} e^{-\delta ji x} dx$

donde δ_{ji} es la densidad media de sonidos de la celda j y el índice i esta relacionado con los sonidos solos, dobles, triples y cuadrúples.

dx es el intervalo (incremento) de la duración del glissando dado en segundos o unidades U_{MM}. Para calcular dx usamos la propiedad

$\sum_0^\infty \delta_{ji} e^{-\delta jix} dx = 1,$
de donde
$dx = \frac{1}{\sum_0^\infty \delta_{ji} e^{-\delta jix}} = \frac{1}{12{,}415} = 0{,}0805 \simeq 0{,}1$ de unidad U_{MM}.

De esta manera el intervalo varía desde 0 con un paso de **0,1** mientras que $f(x)dx > 0{,}05$. Para ajustarnos a los valores de sonidos solos, dobles, triples y cuadrúples, se propone observar los números:

65 sonidos simples con una densidad de sonidos alrededor de δ_{1i} para cada celda seleccionada,

19 sonidos dobles con una densidad de sonidos alrededor de δ_{2i} para cada celda seleccionada,

4 sonidos triples con una densidad de sonidos alrededor de δ_{3i} para cada celda seleccionada y

1 sonido cuádruple con una densidad de sonidos alrededor de δ_{4i} para cada celda seleccionada.

El cálculo de una duración de glissando debe considerar que en una celda hay una densidad de sonidos $\delta = 4{,}5$ sonidos/unidad musical y una $U_{MM} =$ 26 golpes/seg, lo que nos da un total de sonidos en la celda de $N = 4{,}5$ sonidos/unidad musical×6,5 compases = 29 sonidos/celda en cada una de las 28 celdas, es decir, en la celda tenemos una serie de 29 sonidos de igual densidad de sonidos pero de distinta duración dada por la función de densidad de probabilidad exponencial. Consideremos como incremento ($dx = 0{,}10$) de la medida a 26 $MM = 0{,}23$ seg/golpe, lo cual nos permite calcular el tiempo real de la duración del sonido. Los resultados se dan en la Tabla izquierda y en la Tabla derecha se dan las equivalencias entre el tiempo musical x y el tiempo real Δt:

x	$\delta e^{-\delta x} dx$	$28\delta e^{-\delta x} dx$
0,00	0,0362	10
0,10	0,0231	7
0,20	0,0148	4
0,30	0,0094	3
0,40	0,0060	2
0,50	0,0038	1
0,60	0,0024	1
0,70	0,0016	1
	total=	29

x	$\Delta t/seg$	notas
0,00	0.00	
0,10	0.23	
0,20	0.46	
0,30	0.69	
0,40	0.92	
0,50	1.15	
0,60	1.38	
0,70	1.61	
	tiempo real	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla izquierda que nos dice que 10 sonidos duran mucho menos que 0,23 segundos, 7 sonidos duran 0,46 segundos, 4 sonidos duran 0,69 segundos, 3 sonidos duran 0,92 segundos, 2 sonidos duran 1,15 segundos, un sonido dura 1,38 segundos, una sonido dura 1,61 segundos y un sonido dura 1,84 segundos, dando un total de 29 sonidos, cada uno con su propia duración.

4.3.6. Distribución de las velocidades de glissando.

Para calcular la distribución de las velocidades de los sonidos de glissando, en el caso de los instrumentos de cuerda, podemos utilizar la función de densidad de Maxwell-Boltzmann:

$f(V)dV = V^2 e^{-(V/a)^2} dV/(a\sqrt{\pi})$,

donde V es la velocidad del glissando, Xenakis propone $a = 3{,}88$.

Para calcular la velocidad de glissando utilizaremos una relación simple para la velocidad media dada por la fórmula

$V_m = (V_i + V_{i+1})/2$.

Consideremos a

$V_0 = 0$

y a

$dV = 1$.

Con todo ello la función de distribución de Maxwell-Boltzmann queda:

$f(V)dV = 2{,}18906\lambda^2 e^{-\lambda^2}$,

donde

$\lambda = V_m/3{,}88$

Recordemos que para cada celda debemos de dar la densidad de sonidos δ expresada en semitonos/unidad musical y que el total de sonidos en una celda es de $\delta \times 6{,}5$.Para el caso de $\delta = 45$ glissando sonido/medida a $26MM$, $a = 3{,}88$, media cuadrática de la velocidad, el total de sonidos en la celda = $4{,}5 \times 6{,}5 = 29$ sonidos por celda y en la composición total hay 28 celdas. Los resultados de éstos cálculos se pueden ver en la siguiente Tabla de velocidades de glissando.

V_i	$V_{m\ i}$	λ_i	$f(V_{m\ i})dV$	$8f(V_{m\ i})dV$
0	0,5	0,1288	0,034	0
1	1,5	0,3866	0,282	2
2	2,5	0,6443	0,60	5
3	3,5	0,9021	0,789	6
4	4,5	1,1598	0,767	6
5	5,5	1,4175	0,590	5
6	6,5	1,6753	0,371	3
7	7,5	1,9330	0,195	2
			total =	29

Esta tabla se interpreta de la siguiente manera: 0 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 0,5 semitonos / unidad musical, 2 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 1,5 semitonos / unidad musical, 5 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 2,5 semitonos / unidad musical, 6 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 3,5 semitonos / unidad musical, 6 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 4,5 semitonos / unidad musical, 5 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 5,5 semitonos / unidad musical, 3 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 6,5 semitonos / unidad musical y 2 sonidos solos tienen una velocidad de glissando de 6,5 semitonos / unidad musical . Para cada densidad de sonidos se tiene que llenar una tabla semejante, es decir para cada celda tenemos que llenar una tabla de éste tipo. Para todas las celdas que no son silencios se tiene que llenar una tabla de éste tipo.

4.3.7. Distribución de los intervalos.

Podemos agregar otra dimensión considerando los intervalos en que se toca el glissando, por sentido común pueden ser 1, 2 y 3. Para calcular la distribución de los intervalos nos auxiliamos de una función de densidad uniforme :

$f(j)dj = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{j}{a}\right) dj$

donde $0 \leq j \leq a$, y $a = 18$.

Los intrumentos de cuerda tienen 80 semitonos, los cuales los podemos dividir en

$a = 18$ tiempos de 4,5 semitonos,

con esto decimos que

$0 \leq j \leq 18$.

El incremento dj se encuentra con la relación:

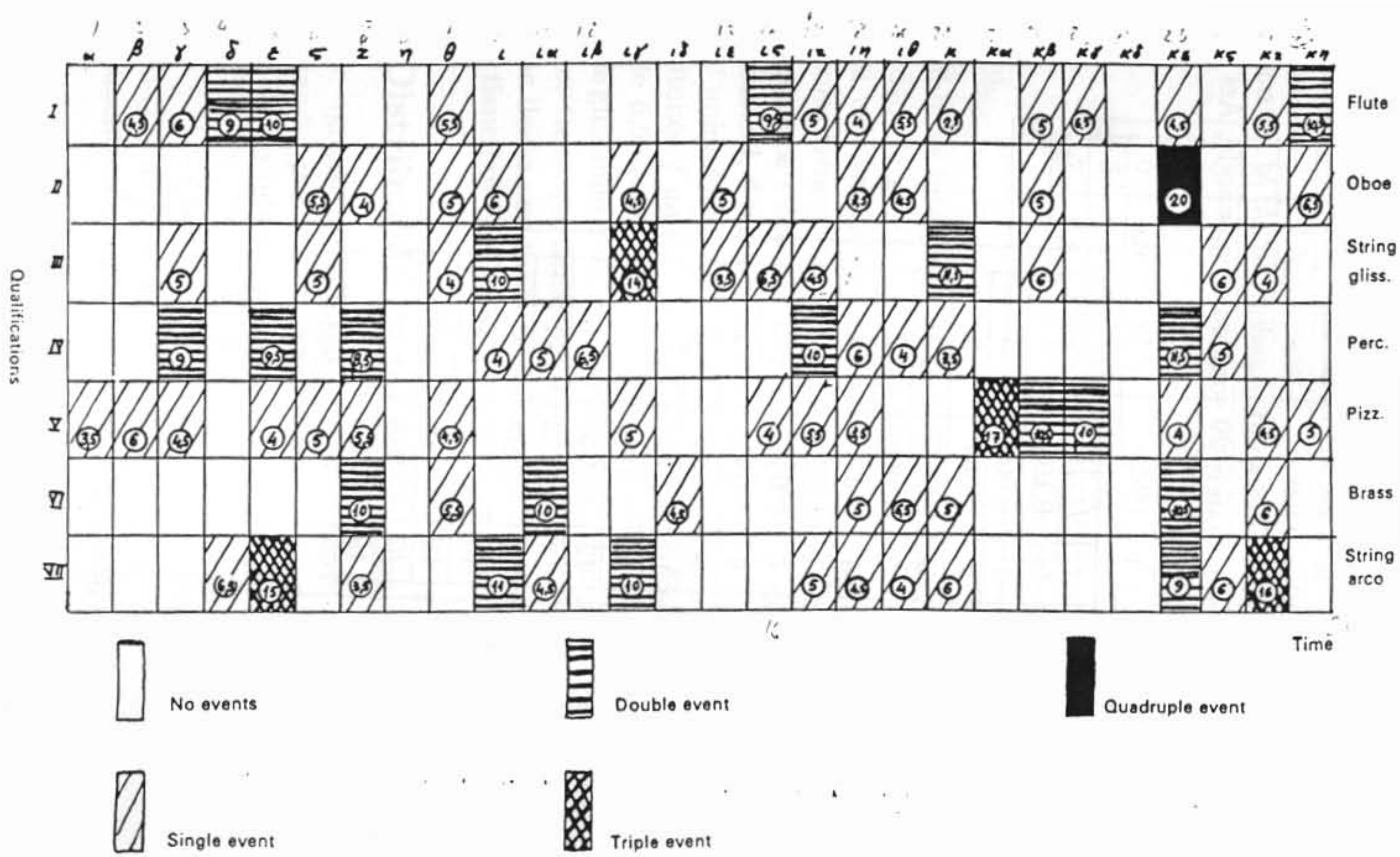
$dj = a/(m+1) = 18/19 = 0{,}947$.

Considerando $\delta = 4{,}5$ glissando sonido/medida a $26MM$. El número total de sonidos en la celda es $4{,}5 \times 6{,}5 = 29$ sonidos de glissando. Así obtenemos la Tabla de intervalos de glissando:

j	$f(j)dj$	$29f(j)dj$
0	0,105	3
1	0,099	3
2	0,098	3
3	0,0877	3
4	0,0818	2
5	0,0760	2
6	0,0701	2
7	0,0643	2
8	0,0584	2
9	0,0526	2
10	0,0467	1
11	0,0409	1
12	.0,0350	1
13	0,0292	1
14	0,0233	1
15	0,0175	0
16	0,0116.	0
17	0,0108	0
18	0	0
		total=29


110
Picc.
Ob.
Klar.
Es
Baßkl.
B
Trpt. 1
Xyl.
H.-Bl.
gr.Tr.
Vl. 2
(pizz.)
Kl. 2
Kb. 2

Bars 104–111 of *Achorripsis*



Vector Matrix *M*, Matrix of *Achorripsis*

Capítulo 5

Tlatohuaque

Ahora estamos en la posibilidad de hacer una composición probabílistica propia al estilo de Xennakis, para ello es bueno saber que a la distribución de cada característica musical: instrumento, unidades musicales de tiempo, multiplicidad del sonido, densidad del sonido, duración, glissando, etc., puede asociarse con una función de densidad de probabilidad apropiada de acuerdo a la siguiente Tabla:

Característica Musical	Función de Densidad de Probabilidad
duración	$\delta e^{-\delta x}$, fdp exponencial
densidad de eventos	$e^{-\mu}\mu^x/x!$,fdp de Poisson
intervalos de intensidad y altura	$\begin{cases} \frac{2}{a}(1-\frac{j}{a}) & 0 \leq j \leq a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$, fdp uniforme
densidad de sonidos	$\begin{cases} -2x+A & -a < x < 0 \\ 2x+A & 0 \leq x < a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

5.1. Características Composicionales

Para llenar la matriz de composición lo haremos con la siguientes características:

duración de la composición 7 mín = 420seg	
28 columnas de composición	
4 timbres	
4 timbres$\times$ 28 columnas=112 de celdas de composición	
duración de la celda= 420seg/28=15 seg	
5 compases por celda cada uno de 3 segundos	
densidad de eventos $\lambda = 0{,}7$ eventos/ unidad	
unidad metronómica U_{MM} = 40 golpes/ min	
tempo de la obra =1/U_{MM} =1.5 seg/golpe	

timbre	instrumentos
I	vibráfono, xilófono o campanas.
II	güiro, tumba, maracas o cajita china
II	timbal o tambor
IV	tam-tam, gong o platillo suspendido

5.2. Distribución de eventos en las celdas

Para calcular la distribución de los eventos que corresponden a cada celda se usa una función de densidad de probabilidad de Poisson con $\Delta k = 1$:

$f_k = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$

donde $k = 0, 1, 2, 3,$ 4 y 5 y además $\lambda = 0{,}7$

Al escoger a priori 112 unidades o celdas, la distribución de frecuencias entre las celdas es obtenida multiplicando los valores de f_i por 112. Calculando obtenemos la siguiente tabla

k	$k!$	f_k	$112 f_k$	
0	1	0,4996	56,0	56
1	1	0,3426	38,9	39
2	2	0,1215	13,6	13
3	6	0,0284	3,2	3
4	24	0,0050	0,6	1
5	120	0,0007	0.0	0

que se interpreta así:

Número de celdas	eventos
56	silencios
39	simples
13	dobles
3	triples
1	cuádruple

Para saber como distribuir estos eventos en la matriz. se obtiene λ para cada evento y se aplica una nueva función de densidad de Poisson. La densidad media λ se obtiene del cociente de los veces que ocurrirá el evento entre el número de columnas. En el caso de silencios sería $\lambda = 56/28$.

A continuación se indican las correspondencias entre tipos de sonidos y sus densidades:

silencios	$\lambda = 56/28$	2,000 sonidos/ unidad musical
simples	$\lambda = 39/28$	1,40 sonidos/ unidad musical
dobles	$\lambda = 13/28$	0,5 sonidos/ unidad musical
triples	$\lambda = 3/28$	0,11 sonidos/ unidad musical
cuadruples	$\lambda = 1/28$	0,04 sonidos/ unidad musical

5.2.1. Distribución de los silencios.

En el caso de $\lambda = 2$ los silencios se distribuyen de acuerdo a una función de distribución de Poisson, con $\Delta k = 1$

$f_k = e^{-\mu}\mu^k/k! = \frac{2^k}{k!}e^{-2}$

k	$2^k e^{-2}/k!$	$28f_k$		
0	0,1353	3,9	2	En 2 columnas no hay silencios
1	0,2706	7,6	8	En 8 columnas hay un silencio
2	0,2704	7,6	9	En 9 columnas hay dos silencios
3	0,1800	5,0	6	En 6 columnas hay 3 silencios
4	0,0902	2,5	3	En 3 columnas hay 4 silencios
5	0,0406	1,1	0	En ninguna columna hay 5 silencios
6	0,0120	0,3	0	En ninguna columna hay 6 silencios

5.2.2. Distribución de los eventos simples

En el caso de $\lambda = 1{,}39$ los sonidos simples se distribuyen de acuerdo a una función de distribución de Poisson con $\Delta k = 1$:

$f_k = e^{-\mu}\mu^k/k! = \frac{1{,}39^k}{k!}e^{-1{,}39}$

k	$1{,}39^k e^{-1{,}39}/k!$	$28f_k$		
0	0.249	7.0	7	En 7 columnas no hay evento simple
1	0.346	9.7	10	En 10 columnas hay 1 evento simple
2	0.240	6.7	8	En 8 columnas hay 2 eventos simple
3	0.111	3.1	3	En 3 columnas hay 3 eventos simple
4	0.039	1.1	1	En 1 columna hay 4 eventos simple
5	0.011	0.3	0	

5.2.3. Distribución de eventos dobles

En el caso de $\lambda = 0{,}464$ los sonidos simples se distribuyen de acuerdo a una función de densidad de Poisson con $\Delta k = 1$:

$f_k = e^{-\mu}\mu^x/x! = \frac{0{,}464^k}{k!}e^{-0{,}464}$

k	$0{,}464^k e^{-0{,}464}/k!$	$28f_k$		
0	0.6280	17.5	18	En 18 columnas no hay eventos dobles
1	0.2910	8.1	8	En 8 columnas hay 1 evento doble
2	0.0675	1.8	2	En 2 columnas hay 2 eventos dobles
3	0.0000	0.0	0	
4	0.0000	0.0	0	
5	0.0000	0.0	0	

5.2.4. Distribución de eventos triples

En el caso de $\lambda = 0{,}107$ los sonidos simples se distribuyen de acuerdo a una función de densidad de Poisson con $\Delta k = 1$:

$f_k = e^{-\mu}\mu^x/x! = \frac{0{,}107^k}{k!}e^{-0{,}107}$

k	$0{,}107^k e^{-0{,}107}/k!$	$28 f_k$		
0	0.898	25.1	25	En 25 columnas no hay eventos triples
1	0.096	2.7	2	En 1 columna hay 2 evento triples
2	0.049	1.3	1	En 2 columnas hay 1 evento triple
3	0.000	0.0	0	
4	0.000	0.0	0	
5	0.000	0.0	0	

5.2.5. Distribución de eventos cuádruples

En el caso de $\lambda = 0{,}035$ los sonidos simples se distribuyen de acuerdo a una función de densidad de Poisson con $\Delta k = 1$:

$f_k = e^{-\mu}\mu^x/x! = \frac{0{,}035^k}{k!}e^{-0{,}035}$

k	$0{,}035^k e^{-0{,}035}/k!$	$28 f_k$		
0	0.9700	27.6	25	En 27 columnas no hay eventos cuádruples
1	0.0346	1.0	1	En 1 columna hay evento cuádruple
2	0.0006	1.3	0	
3	0.0000	0.0	0	
4	0.0000	0.0	0	
5	0.0000	0.0	0	

5.3. Densidad de sonidos

Para saber como distribuir las densidades de los sonidos se propone usar la función de densidad de probabilidad triangular.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + A & -a < x < 0 \\ 2x + A & 0 \leq x < a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

En el eje de la densidad de sonidos elegimos el origen en b, alrededor de este valor sea 2Δ es el rango de variación de la densidad de sonidos. Sea D el valor máximo de la probabilidad que corresponde al origen. Debido a ello, el área del triángulo $\Delta D = 1$. La ecuación de la recta izquierda es:

$y_1 = -\frac{D}{\Delta}x + A$

La ecuación de la recta derecha es:

$y_2 = \frac{D}{\Delta}x + A$

La elección de Δ se propone de acuerdo al carácter de la obra, al tipo de instrumentos y al resultado sonoro esperado, tomando en cuenta que se utilizarán instrumentos de percusión. Para Δ en Achorripsis de propusieron valores de 6, 4, y 2 en esta composición se proponen para valores de

$\Delta_1 = 2$

$\Delta_2 = 1{,}5$ y

$\Delta_3 = 1$

$\Delta_4 = 0$

5.3.1. Densidad de sonidos simples

Para saber como distribuir las densidades de los sonidos simples consideremos que

$\Delta = 2$

de donde

$D = \frac{1}{\Delta} = 0{,}5.$

La ecuación de la recta derecha es:

$y_1 = -0{,}25x + A$

como

$y_1(b) = -0{,}25 \times 3 + A = -0{,}75 + A = \Delta$

obtenemos el valor de

$A = 1{,}25.$

Ahora tenemos la ecuación de la recta izquierda del triángulo:

$y_1(x)/2 = -0{,}125x + 0{,}625,$

de la misma manera se obtiene la ecuación de la recta derecha:

$y_2(x)/2 = 0{,}125x + 0{,}625.$

En este caso el incremento $dx = 0{,}5$

δ	$f(x)dx$	$39 \times f(x)\,dx$	N
1,0	0,00	0	0
1,5	0,06	2,3	2
2,0	0,13	5,1	5
2,5	0,19	7,4	8
3,0	0,25	9,8	10
3,5	0,19	7,4	8
4,0	0,13	5,1	5
4,5	0,06	2,3	1
5,0	0,00	0,0	0
	total= 1,01		total= 39

5.3.2. Densidad de sonidos dobles

Para saber como distribuir las densidades de los sonidos dobles consideremos que

$\Delta = 1{,}5$

de donde

$D = \frac{1}{\Delta} = 0{,}666.$

La ecuación de la recta derecha es:

$y_1 = -0{,}44x + A$

como $y_1\left(b\right) = -0{,}44 \times 6 + A = 0{,}666$

obtenemos el valor de

$A = 3{,}3.$

Ahora tenemos la ecuación de la recta izquierda del triángulo:

$y_1\left(x\right)/2 = -0{,}22x + 1{,}653,$

de la misma manera se obtiene la ecuación de la recta derecha:

$y_2\left(x\right)/2 = 0{,}22x + 1{,}653.$

En este caso el incremento $dx = 0{,}5.$

δ	$f(x)\,dx$	$13f(x)\,dx$	N_2
4,0	0,000	0	0
4,5	0,003	0,04	0
5,0	0,113	1,50	1
5,5	0,223	2,90	3
6,0	0,333	4,30	4
6,5	0,223	2,90	3
7,0	0,113	1,50	2
7,5	0,003	0,04	0
8,0	0,000	0,00	0
		total=	13

5.3.3. Densidad de sonidos triples

Para saber como distribuir las densidades de los sonidos triples consideremos que

$\Delta = 1$

de donde

$D = \frac{1}{\Delta} = 1.$

La ecuación de la recta derecha es:

$y_1 = -1x + A$

como $y_1(b) = -1 \times 9 + A = -9 + A = \Delta$

obtenemos el valor de

$A = 10.$

Ahora tenemos la ecuación de la recta izquierda del triángulo:

$y_1(x)/2 = -0{,}5x + 5,$

de la misma manera se obtiene la ecuación de la recta derecha:

$y_2(x)/2 = 0{,}5x + 5.$

En este caso el incremento $dx = 0{,}5$

δ	$f(x)\,dx$	$3f(x)\,dx$	N_3
8,0	0,00	0,00	0
8,5	0,25	0,75	1
9,0	0,50	1,50	2
9,5	0,25	0,75	0
10,0	0,00	0,00	0
		total=	3

5.3.4. Densidad de sonidos cuádruples

En el caso de los sonidos cuádruples $b = 12$ y sólo existe uno.

5.4. Matriz de sonidos

En base a los resultados obtenidos en los puntos anteriores se puede crear la matriz en la que aparecen el tipo de sonidos y sus densidades correspondiente, esta matriz se obtiene de acuerdo a una "elección aleatoria sin repetición". En este tipo de composiciones se pueden hacer ajustes, es decir intercambiar el orden de las columnas y de la hileras. Si en una columna aparecen sólo silencios se pueden hacer modificaciones si estos son inadecuados dentro del contexto de la composición. Por lo que se concluye que el determinismo de esta matriz es débil y que sirve príncipalmente como base de pensamiento, de pensamiento que manipula frecuencia de eventos de todos tipos. El verdadero trabajo de moldear los sonidos consiste en distribuirlos en el espacio bidimensional de la matriz y anticipar a priori los encuentros sonoros antes de meterse en el cálculo de los detalles, eliminando posiciones prejuiciosas. Denotemos por S= silencio, U = evento simple, D = evento doble, T = evento triple.

La variación para los sonidos simples según una función de distribución triangular debía de ser de 6, en esta matriz para sonidos simples consideraremos densidades de 2.0, 2.5 y 3.0 sonidos/unidad musical. La variación para los sonidos dobles según una función de distribución triangular debía de ser de 4, en esta matriz para sonidos dobles consideraremos densidades de 4.5, 5.0 5.5 sonidos /unidad musical. La variación para los sonidos triples según una función de distribución triangular debía de ser de 2, en esta matriz, para los sonidos triples consideramos densidades de 7.0 y 7.5 sonidos/unidad musical.

Para los sonidos cuádruples consideramos densidades de 10 sonidos/unidad musical.

El subíndice en las letras S, U, D y T indica la densidad de sonidos de los eventos. La matriz obtenida es:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	S	U_3	S	$\mathrm{U}_{3,0}$	$\mathrm{D}_{4,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,0}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	$\mathrm{U}_{3,0}$
II	$\mathrm{D}_{4,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,0}$	$\mathrm{U}_{3,0}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$
II	D_5	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	S	S	S	S	S	$\mathrm{T}_{7,0}$
IV	U_2	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	U_3	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,5xxx}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	S

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
I	$\mathrm{U}_{2,0}$	S	S	S	S	S	S	$\mathrm{D}_{5,5}$	S	S
II	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{D}_{5,0}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	S	$\mathrm{D}_{5,0}$
II	$\mathrm{U}_{2,0}$	$\mathrm{U}_{2,0}$	S	$\mathrm{D}_{5,5}$	S	S	S	S	$\mathrm{D}_{5,0}$	S
IV	$\mathrm{U}_{2,5}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	$\mathrm{U}_{3,0}$	$\mathrm{U}_{3,0}$	$\mathrm{D}_{3,0}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,0}$	$\mathrm{D}_{5,0}$

	21	22	23	24	25	26	27	28
I	$\mathrm{U}_{3,0}$	S	$\mathrm{T}_{7,5}$	S	S	S	S	S
II	$\mathrm{U}_{3,0}$	S	S	$\mathrm{T}_{7,5}$	$\mathrm{D}_{5,0}$	$\mathrm{U}_{2,0}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$
II	$\mathrm{U}_{3,0}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	S	S	S	$\mathrm{D}_{4,5}$	$\mathrm{U}_{2,5}$
IV	S	$\mathrm{D}_{5,5}$	S	$\mathrm{U}_{2,5}$	S	$\mathrm{C}_{10,0}$	$\mathrm{U}_{2,5}$	$\mathrm{U}_{3,0}$

5.5. Duración de sonidos

Para saber como distribuir las duración de los sonidos, la función de densidad de probabilidad exponencial.

$$f(x) = \begin{cases} \delta e^{-\delta x}, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

donde δ es la densidad de sonidos y x es la variación temporal musical en términos del Tempo de la obra $= 1/U_{MM} = 1{,}5$ seg/golpe.

Para calcular dx usamos la propiedad

$\sum_0^\infty \delta e^{-\delta x} dx = 1,$

de donde el incremento en el tempo es

$dx = \frac{1}{\sum_0^\infty \delta e^{-\delta x}} = \frac{1}{12{,}415} = 0{,}0805 \simeq 0{,}1$ de unidad U_{MM}.

De ésta manera el intervalo varía desde 0 con un paso de 0,1 mientras que $f(x)dx \geq 0{,}05$. Para ajustarnos a los valores de sonidos solos, dobles, triples y cuadrúples, se propone observar los números: 39 sonidos simples con una densidad de sonidos alrededor de δ_{1i} para cada celda seleccionada, 13 sonidos dobles con una densidad de sonidos alrededor de δ_{2i} para cada celda seleccionada, 3 sonidos triples con una densidad de sonidos alrededor de δ_{3i} para cada celda seleccionada y 1 sonido cuádruple con una densidad de sonidos alrededor de δ_{4i} para cada celda seleccionada. Por ejemplo: El cálculo de una duración debe considerar que en una celda hay una densidad de sonidos $\delta = 2$ sonidos/unidad musical y una $U_{MM} = 40$ golpes/seg, lo que nos da un total de sonidos en la celda de $N = 2$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases$= 10$ sonidos/celda en cada una de las 28 celdas, es decir, en la celda tenemos una serie de 10 sonidos de igual densidad de sonidos pero de distinta duración dado por la función de densidad de probabilidad exponencial. Consideremos como incremento ($dx = 0{,}10$) de la medida a $U_{MM} = 0{,}15$ seg/golpe.

5.5.1. Duraciones de sonidos simples

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 2$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 2{,}0$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 10$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$2e^{-2x}dx$	$20e^{-2x}dx$
0	0,20	2
0,1	0,16	2
0,2	0,13	1
0,3	0,11	1
0,4	0,09	1
0,5	0,07	1
0,6	0,06	1
0,7	0,05	1
0,8	0,04	0
	total=	10

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	
0,70	1,05	
0,80	1,20	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 2 sonidos duran mucho menos que0.15 segundos, 2 sonidos duran0.30 segundos, 1 sonido dura 0.45 segundos, 1 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonido dura0,75 segundos, 1 sonido dura 0.90 segundos, 1 sonido dura 1.05 segundos y un sonido dura 1.20 segundos, dando un total de 10 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 2{,}5$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 2{,}5e^{-2{,}5x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 2{,}5$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 12{,}5$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$3e^{-2,5x}dx$	$30e^{-2,5x}dx$
0	0,30	3
0,1	0,23	2
0,2	0,18	2
0,3	0,14	2
0,4	0,11	1
0,5	0,09	1
0,6	0,07	1
0,7	0,05	0,5
0,8	0,04	0
	total	12,5

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	
0,70	1,05	
0,80	1,20	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que3 sonidos duran mucho menos que 0.15 segundos, 2 sonidos duran 0.30 segundos, 2 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonido dura 0.75 segundos, 1 sonido dura 0,90 segundos, 1 sonido dura 1.05 segundos y medio sonido dura 1.20 segundos, dando un total de 12.5 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 3{,}0$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 3{,}0e^{-3{,}0x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 3{,}0$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 15$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$4e^{-3x}dx$	$40e^{-3x}dx$
0,0	0,40	4
0,1	0,30	3
0,2	0,22	2
0,3	0,16	2
0,4	0,12	1
0,5	0,09	1
0,6	0,07	1
0,7	0,05	1
0,8	0,04	0
	total=	15

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	
0,70	1,05	
0,80	1,20	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 4 sonidos duran mucho menos que 0.15 segundos, 3 sonidos duran 0.30 segundos, 2 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonido dura 0.75 segundos, 1 sonido dura 0.90 segundos, 1 sonido dura 1.05 segundos y un sonido dura 1.20 segundos, dando un total de 15 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

5.5.2. Duraciones de sonidos dobles

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 4{,}5$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 4{,}5e^{-4{,}5x}dx, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 4{,}5$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 22{,}5$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$8e^{-4,5x}dx$	$80e^{-4,5x}dx$	x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0	0,80	8	0,00	0,00	
0,1	0,51	5	0,10	0,15	
0,2	0,33	3	0,20	0,30	
0,3	0,21	2	0,30	0,45	
0,4	0,13	1,5	0,40	0,60	
0,5	0,11	1	0,50	0,75	
0,6	0,08	1	0,60	0,90	
0,7	0,03	1	0,70	1,05	
0,8	0,02	0	0,80	1,20	
		total= 22,5			

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 8 sonidos duran menos que 0.15 segundos, 5 sonidos duran 0.30 segundos, 3 sonido dura0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1,5 sonidos dura 0.75 segundos, 1 sonido dura 0.90 segundos, 1 sonido dura 1.05 segundos, y un sonido dura 1.20 segundos, dando un total de 22.5 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 5{,}0$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 5{,}0e^{-5{,}0x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 5{,}0$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 25$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$10e^{-5x}dx$	$100e^{-5x}dx$
0	1,00	10
0,1	0,61	6
0,2	0,37	4
0,3	0,22	2
0,4	0,13	1
0,5	0,08	1
0,6	0,05	1
0,7	0,03	0
0,8	0,02	0
	total=	25

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	
0,70	1,05	
0,80	1,20	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 10 sonidos duran menos que 0.15 segundos, 6 sonidos duran 0.30 segundos, 4 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonidos dura 0.75 segundos, 1 sonido dura 0.90 segundos, y 1 sonido dura 1.05 segundos, dando un total de 22.5 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 5{,}5$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 5{,}5e^{-5{,}5x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 5{,}5$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 27{,}5$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$12e^{-5,5x}dx$	$120e^{-5,5x}dx$
0	1,20	12
0,1	0,73	7
0,2	0,44	4
0,3	0,27	2
0,4	0,17	1
0,5	0,16	1
0,6	0,06	0,5
0,7	0,04	0
	total=	27,5

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	
0,70	1,05	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 12 sonidos duran mucho menos que 0.15 segundos, 7 sonidos duran 0.30 segundos, 4 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonidos dura 0.75 segundos, 1 sonido dura 0.90 segundos, y medio sonido dura 1.05 segundos, dando un total de 27.5 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

5.5.3. Duraciones de sonidos triples

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 7{,}0$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 7{,}0e^{-7{,}0x}dx, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 7{,}0$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 35$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$18e^{-7x}dx$	$180e^{-7x}dx$
0	1,80	18
0,1	0,89	9
0,2	0,44	4
0,3	0,22	2
0,4	0,11	1
0,5	0,05	1
0,6	0,03	0
	total=	35

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 18 sonidos duran mucho menos que 0.15 segundos, 9 sonidos duran 0.30 segundos, 4 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, 1 sonidos dura 0.75 segundos, y 1 sonido dura 0.90 segundos, dando un total de 35 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 7{,}5$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 7{,}5e^{-7{,}5x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 7{,}5$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 37{,}5$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$20e^{-7,5x}dx$	$200e^{-7,5x}dx$
0	2,00	20
0,1	0,94	9
0,2	0,45	5
0,3	0,21	2
0,4	0,10	1
0,5	0,07	0,5
0,6	0,05	0
	total	37,5

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	
0,60	0,90	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 20 sonidos duran menos que 0.15 segundos, 9 sonidos duran 0.30 segundos,5 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos,1 sonidos dura 0.75 segundos, y medio sonido dura 0.90 segundos dando un total de 37.5 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

5.5.4. Duraciones de sonidos cuádruples

Para saber como distribuir las duraciones de los sonidos que tienen una densidad de sonidos $\delta = 10{,}0$ sonidos/unidad musical, usemos la función de densidad de probabilidad

$$f(x)\,dx = \begin{cases} 10{,}0e^{-10{,}0x}dx, & x > 0 \\ \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el caso en que la densidad de sonidos sea $\delta = 10{,}0$ sonidos/unidad musical, debemos ajustarnos a $N = 50$ sonidos/celda. La distribución de los sonidos se presenta en la tabla izquierda y los tiempos reales en la tabla derecha

x	$32e^{-10x}dx$	$320e^{-10x}dx$
0	3,20	31
0,1	1,18	12
0,2	0,43	4
0,3	0,16	2
0,4	0,09	1
0,5	0,06	0
		total= 50

x	$\Delta t/seg$, tiempo real	notas
0,00	0,00	
0,10	0,15	
0,20	0,30	
0,30	0,45	
0,40	0,60	
0,50	0,75	

Para elegir la duración en cada celda utilizamos los resultados de la tabla anterior que nos dice que 31 sonidos duran menos que 0.15 segundos, 12 sonidos duran 0.30 segundos, 4 sonido dura 0.45 segundos, 2 sonidos dura 0.60 segundos, y 1 sonidos dura 0,75 segundos, dando un total de 50 sonidos, cada uno con su propia duración ya calculada en tiempo real.

Finalmente podemos dar una tabla de equivalencia donde se especifiquen los tiempos reales de las duraciones

densidad de sonidos / unidad musical										
notas	$\Delta t/seg$	2.0	2.5	3.0	4.5	5.0	5.5	7	7.5	10.0
	0.00	2	3	4	8	10	12	18	20	1
	0.15	2	2	3	5	6	7	9	9	12
	0.30	1	2	2	3	4	4	4	5	4
	0.45	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	0.60	1	1	1	1.5	1	1	1	1	1
	0.75	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0
	0.90	1	1	1	1	1	0.5	0	0	0
	1.05	1	0.5	1	1	0	0	0	0	0
		10	12.5	15	22.5	25	27.5	35	37.5	50

5.6. Distribución de los intervalos.

La función de densidad de probabilidad uniforme nos sirve para calcular la forma en que se distribuyen los intervalos de la altura del vibráfono, xilófono y la campana que son los instrumentos que tienen diferentes alturas de sonido:

$f(j) = \begin{cases} \frac{2}{a}(1-\frac{j}{a}) & 0 \leq j \leq a \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$,

donde $0 \leq j \leq a$. Por comodidad en la numeración es conveniente definir otro índice con ayuda de la relación

$j = ia/m$, donde $i = 0,1,..., m$ y $m \in \mathbb{N}$,

por ello podemos considerar que j varía de la manera siguiente

$0 \leq j \leq m$.

El incremento dj se encuentra con la relación:

$dj = a/(m+1)$.

Considerando

$\delta = 4{,}5$ sonido/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min),

el número total de sonidos en la celda es 4,5 sonidos/unidad musical$\times$5 compases= 29 sonidos.

La función de distribución de probabilidad uniforme nos sirve para calcular la altura del sonido del vibráfono, el xilófono y la campana que son los instrumentos que tienen diferentes alturas de sonido. Vamos a considerar 80 semitonos la longitud el intervalo

$a = 8.$ semitonos. Eso quiere decir que

$0 \leq j \leq 10$.

Estos datos nos permiten calcular el incremento

$dj = a/(m+1) = 8/11 = 0{,}7272$

y la cantidad

$2/a = 0{,}25$.

a) En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 2{,}0$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 2{,}0$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 10$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1 - \frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1 - \frac{j}{10})$

j	$12f(j)dj$	
1	1,97	2
2	1,68	2
3	1,44	1
4	1,32	1
5	1,08	1
6	0,84	1
7	0,60	1
8	0,48	1
9	0,20	0
10	0,00	0
	total=	10

b) En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 2{,}5$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 2{,}5$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 12{,}5$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1 - \frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1 - \frac{j}{10})$

j	$18f(j)dj$	
1	2,9	3
2	2,6	2,5
3	2,3	2
4	2,0	2
5	1,6	1
6	1,3	1
7	1,0	1
8	0,7	0
9	0,3	0
10	0	0
	total=	12,5

En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 3{,}0$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 3{,}0$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 15$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1 - \frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1 - \frac{j}{10})$

j	$18f(j)dj$	
1	2,9	3
2	2,6	3
3	2,3	2
4	2,0	2
5	1,6	2
6	1,3	1
7	1,0	1
8	0,7	1
9	0,3	0
10	0,0	0
	total=	15

En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 4{,}5$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 4{,}5$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 22{,}5$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1-\frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1-\frac{j}{10})$

j	$30f(j)dj$	
1	4,9	5
2	4,4	4
3	3,8	4
4	3,2	3
5	2,7	2
6	2,2	2
7	1,6	1
8	1,1	1
9	0,5	0,5
10	0	0
	total=	22,5

En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 5{,}5$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 5{,}5$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 27{,}5$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1-\frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1-\frac{j}{10})$

j	$33f(j)dj$	
1	5,4	5
2	4,8	5
3	4,2	4
4	3,6	4
5	3,0	3
6	2,4	2,5
7	1,8	2
8	1,2	1
9	0,6	1
10	0	0
	total0	27,5

En el caso de una densidad de sonidos $\delta = 7{,}5$ sonidos/unidad musical (unidad metronómica $U_{MM} = 40$ golpes/ min) el número total de sonidos en la celda es

$N_\delta = 7{,}5$ sonidos/unidad musical$\times 5$ compases $= 37{,}5$ sonidos. La forma en que se distribuyen los intervalos de la altura nos la da la expresión

$f(j)dj = 0{,}25(1 - \frac{j}{10})dj = 0{,}1818(1 - \frac{j}{10})$

j	$45f(j)$	
1	7,4	7
2	6,5	7
3	5,7	6
4	4,9	5
5	4,1	4
6	3,3	3
7	2,5	2,5
8	1,6	2
9	0,8	1
10	0,0	0
	total=	37,5

Para seleccionar los sonidos se construye una escala hexáfona a partir del do$_3$ hasta el do$_8$. Según la densidad se seleccionaron sonidos del 1 al 10 en forma arbitraria de cada una de las divisiones.

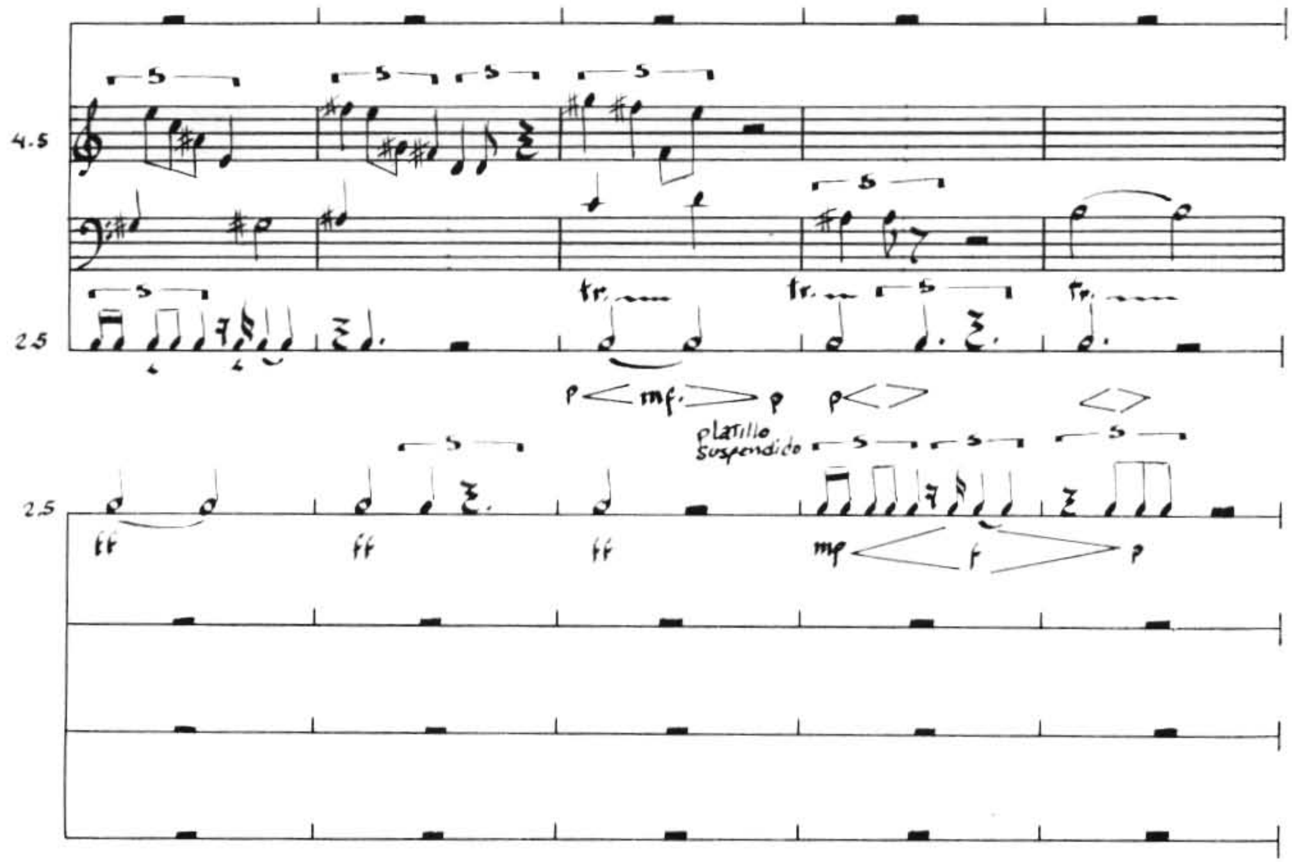
Insertamos en las páginas siguientes la escala de Tlatohuaque, las figuras rítimicas y, finalmente, la compposición.

Composición

Tlatohuaque

Susana Tiburcio.


2.5
2
platillo
suspendido
3
2
p
mf
pp
mp
tr.


4.5
2.5
tr.
p mf. p
p
2.5
platillo
suspendido
ff
mf f p


Vibráfono
2
2.5
16ava
tr.
tr.
p
f
p

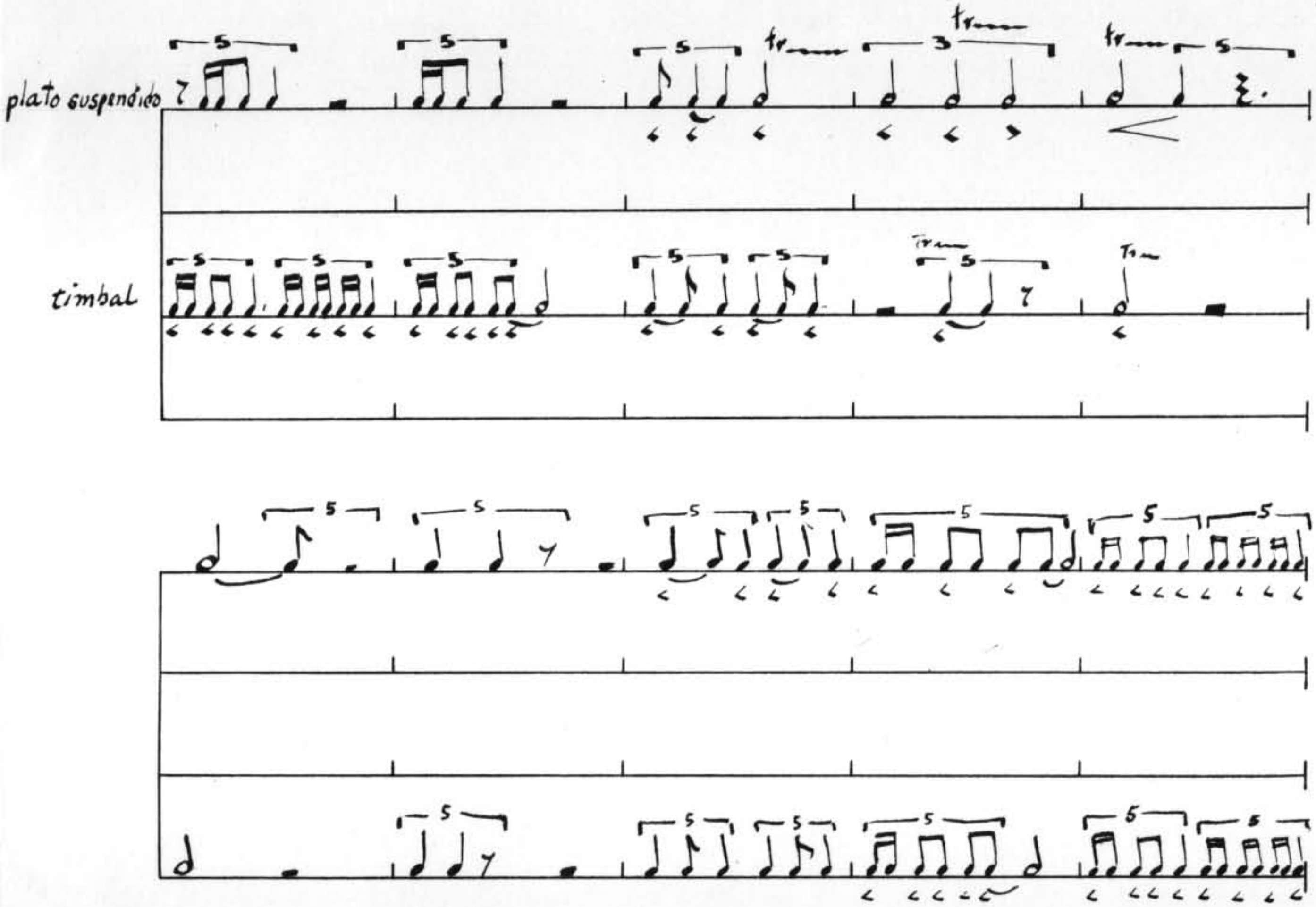

Tambor
caja china
maracas
8va


timbal
caja china
maracas

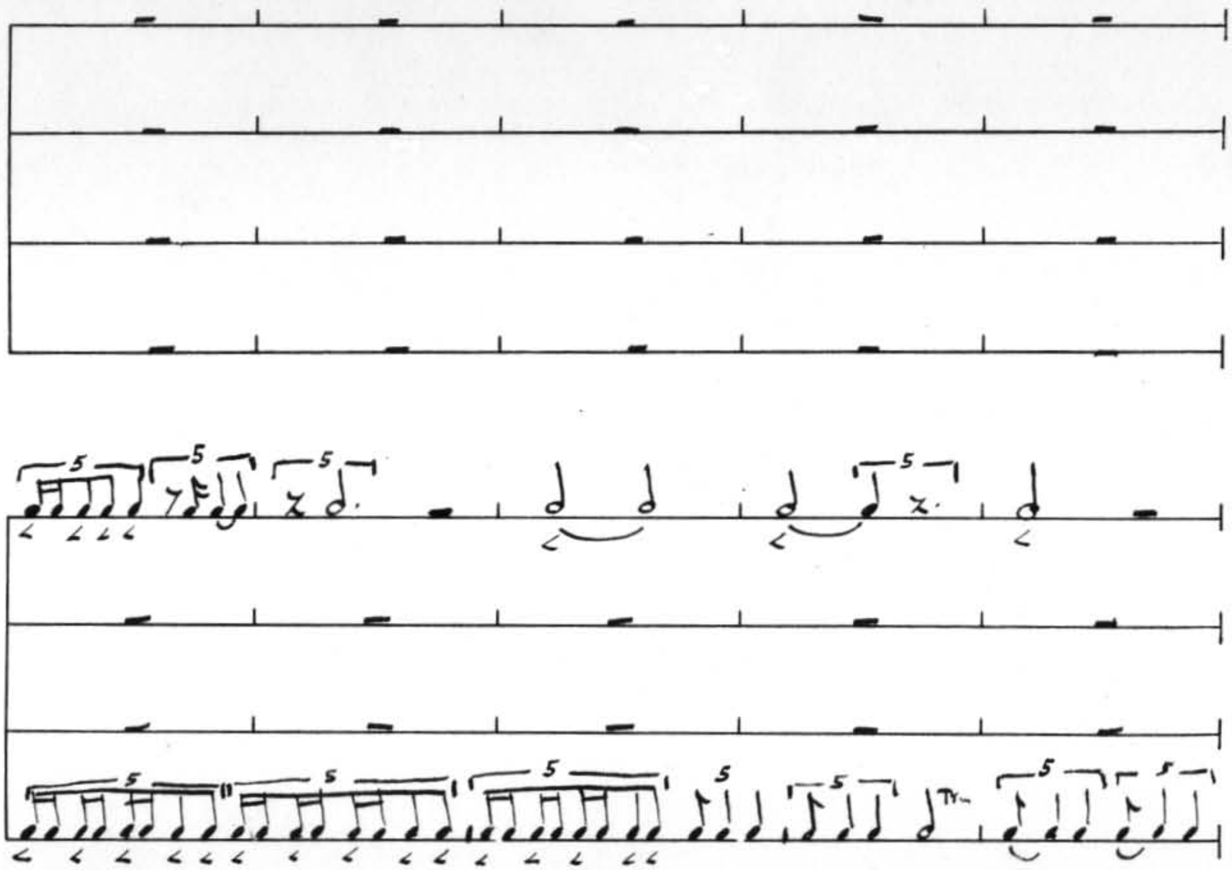

caja china
maracas
tambor
güiro


güiro

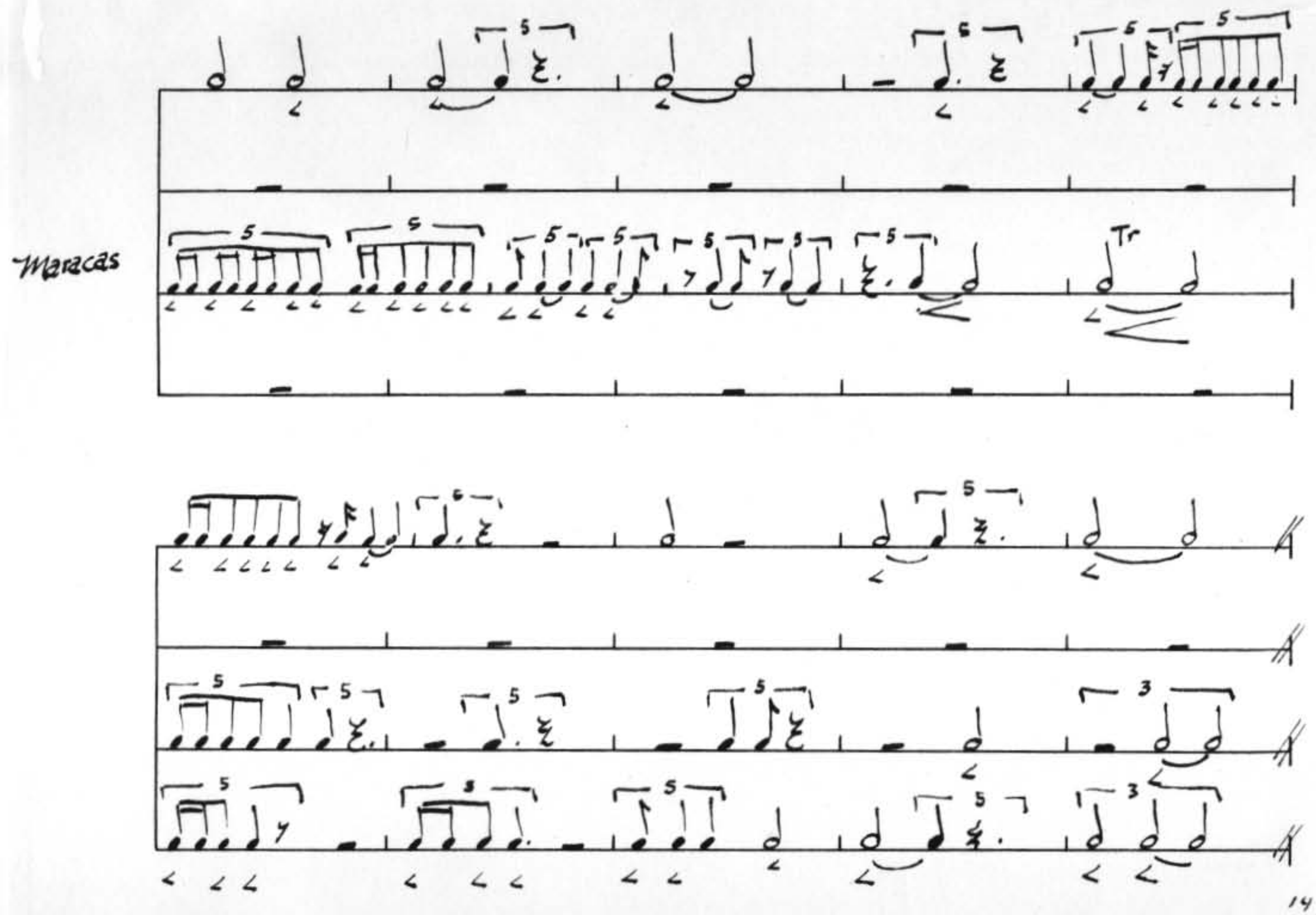

tr
5
p


plato suspendido
timbal

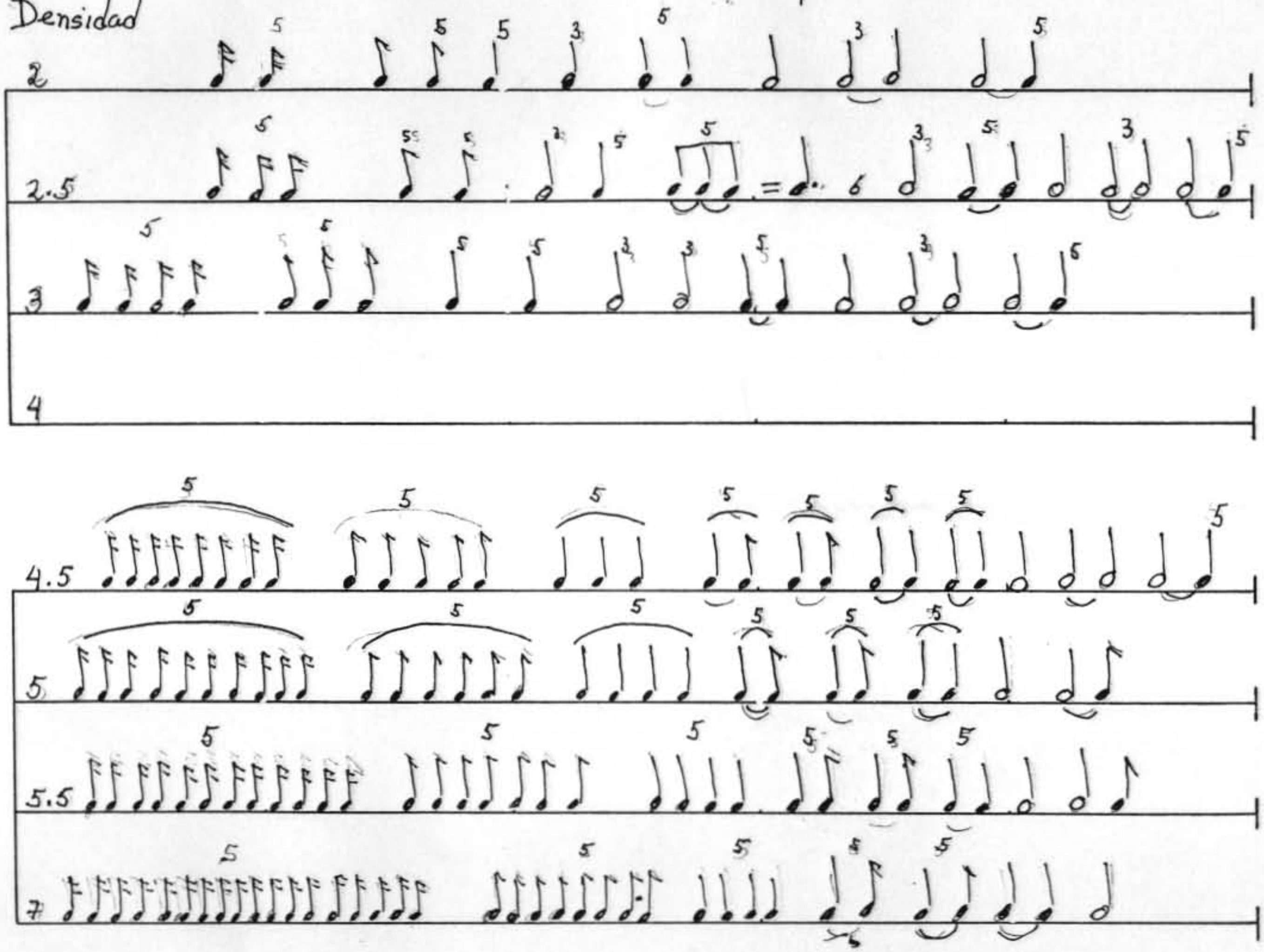

16ava
maracas
p < mp >
p < mf


5
5
5
5
5
5
5
5
5
5
5
Tr

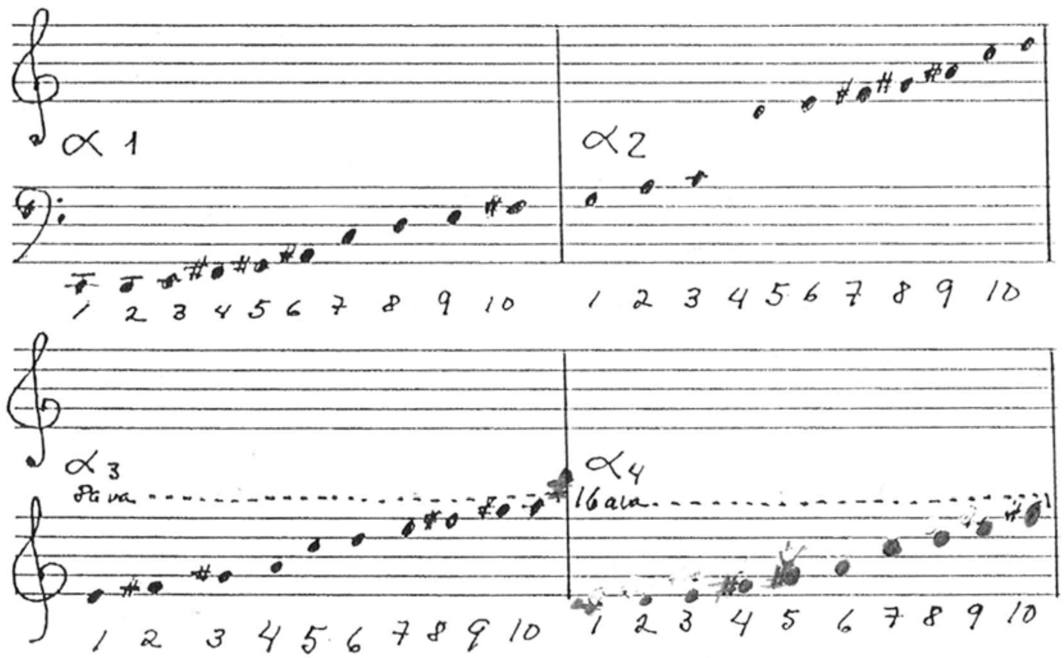
5
3
Trm


Maracas
Tr
14

Figuras Ritmicas de Tlatohuaque



Escala de Tlatohuaque



Conclusiones

Se puede concluir este trabajo diciendo que se consiguieron los objetivos, es decir:

> 1) Mostrar ejemplos de composiciones en las cuales existía una conexión directa entre matemáticas y música. De hecho se compusieron 7 obras a través de un algoritmo utilizando procesos aleatorios.
>
> 2) Demostrar que con la aplicación de fórmulas de densidad de probabilidad se puede crear una composición musical. También se analizó la obra Achorripsis de Xenakis y se utilizaron sus métodos estadísticos de composición para crear una obra original para percusiones que nombramos Tlatohuaque.

Un trabajo a futuro sería implementar los algoritmos obtenidos en un programa de computadora en el cual se pudieran cambiar los parámetros y así facilitar los cálculos. Este serviría como una herramienta de experimentación musical.

Anexo: Introducción a la Música

El objetivo de este anexo es familiarizar al lector no especialista en música en algunos conceptos e ideas fundamentales.

5.7. El sonido y sus cualidades

5.7.1. El Sonido

El sonido se puede definir como todo agente físico que impresiona el sentido del oído.

El sonido se produce por la vibración de los cuerpos. Estas vibración es transmitida por un medio material en forma de movimiento ondulatorio, penetra por el pabellón de la oreja y hace vibrar a la membrana del tímpano. transmitida esta vibración, por la cadena de huesos del oído medio al interno, impresiona al nervio acústico, experimentándose la sensación sonora.

Para que exista el sonido son precisas tres condiciones, denominadas condiciones de existencia del sonido. Dichas condiciones se derivan de la existencia de los siguientes tres elementos: un elemento productor, un elemento transmisor y un elemento receptor.

Llegado este momento se puede enunciar otra definición más técnica del sonido diciendo que es "*La sensación experimentada cuando llegan al oído ondas producidas por determinados movimientos vibratorio*s ".

Movimiento periódico

Se dice que un cuerpo realiza un movimiento periódico cuando a intervalos regulares de tiempo pasa por los mismos puntos con idénticos sentidos. Cada movimiento periódico queda definido por medio de sus magnitudes. Dichas magnitudes son de dos clases en función de la característica principal a que se refiere: espacio o tiempo.

Las magnitudes de espacio son : *Ciclo, Elongación y Amplitud.*

Las de tiempo se denominan *Período, Fase y Tiempo de la amplitud.*

Existe otra magnitud denominada *Frecuencia* que relaciona espacios con tiempo.

Cualidades del sonido

Las cualidades que se distinguen en toda sensación sonora son tres:

Tono

Sonoridad

Timbre

Además de estas, existen otras tales como *Duración, Volumen, Densidad*, etc.

Sonido y Ruido

Es necesario establecer una clasificación en dos grandes grupos que se denominan Sonido y Ruido.

Es aceptado comúnmente como **Sonido**, toda sensación sonora agradable, independiente de las características del complejo sonoro en cuestión y de como se haya producido.

Ruido es la mezcla compleja de frecuencias diferentes, las cuales producen frecuentemente una sensación desagradable inarmónica de sonidos provenientes de muy variadas fuentes. Es una confusa composición que no admite ni sigue ninguna ley u orden de formación.

En un sentido amplio puede considerarse como cualquier sonido que interfiere en alguna actividad humana. En este sentido, un determinado “sonido” puede presentar en un momento determinado, si no es deseado, la característica de ser molesto, con lo cual se convertirá en “ruido”. Este carácter subjetivo es el que delimita la diferencia entre sonido y ruido.

El **ruido blanco** es importante en determinados campos de la acústica. Es aquel que contiene todas las frecuencias del espectro audible con la misma intensidad. Registrado este ruido en el osciloscopio aparecerá una banda continua de altura constante.

5.8. Cualidades del sonido

5.8.1. Altura y Tono.

La altura de un sonido es la cualidad que se quiere expresar cuando se dice que un sonido es más agudo o grave que otro. La característica subjetiva de la altura es lo que se denomina Tono de un sonido.

A más alta frecuencia se producirá un sonido más agudo y a menor frecuencia un sonido más grave. A esta característica del sonido también se le llama **altura o tono**.

La altura de un sonido depende principalmente de la frecuencia del movimiento vibratorio que lo originó, siendo los sonidos graves producidos por movimientos vibratorios de frecuencia pequeña y los sonidos agudos por frecuencias elevadas . La gama de frecuencias aptas para ser transformadas en sonidos por el oído humano, abarca desde los 16 Hz a los 20,000 Hz.

5.8.2. Intensidad y sonoridad

La *Intensidad* de un sonido es la cualidad que se quiere expresar cuando se dice que un sonido es más fuerte o más débil que otro. Su traducción en el sentido de la audición es lo que se conoce con el nombre de *Sonoridad.*

Según el vigor o fuerza que la perturbación produce en las moléculas en vibración, el sonido será más o menos intenso. Este vigor se traduce en una mayor o menor amplitud del movimiento vibratorio que lo origina.

El *UMBRAL* de audibilidad para un sonido de frecuencia dada, es el valor que debe alcanzar la intensidad de dicho sonido para empezar a ser oído. El *Umbral de Audición* es el punto mínimo de energía necesario para que el oído reaccione a los estímulos sonoros

La Intensidad se define como la energía que atraviesa en la unidad de tiempo, la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación de las ondas.

5.8.3. Forma y Timbre

El timbre de un sonido es la cualidad que permite diferenciar dos sonidos de igual altura e intensidad, pero de diversa procedencia. La forma es la cualidad física que determina el carácter subjetivo del Timbre.

El timbre depende del grado de complejidad del movimiento vibratorio que origina dicho sonido. Esta cualidad , a diferencia de la altura y la intensidad, no es mensurable, ni existe por tanto una unidad que permita comparar timbres de diferentes sonidos.

Según el teorema de Fourier, un cuerpo que realiza un movimiento vibratorio complejo se puede considerar que realiza simultáneamente los movimientos armónicos simples en que ese movimiento se puede descomponer. Por lo tanto, si el movimiento vibratorio complejo es productor de sonido,éste se puede descomponer en los sonidos puros que provienen de los movimientos armónicos simples componentes.

Influencia de los armónicos, concomitantes o alicuotas.

Un mismo cuerpo sonoro puede producir arios sonidos según las condiciones en que vibre. El más grave de esos sonidos es la fundamental y los demás se llaman parciales, que pueden ser armónicos, si son semejantes la serie armónica derivada de la misma fundamental, también llamados concordantes o alicuotas. o bien si los parciales no son semejantes a la serie armónica, estos serán discordantes y no se le llama armónicos, recibiendo el nombre de sobretonos.

5.9. Fundamentos de la acústica musical

Se define como Acústica musical aquella parte de la ciencia acústica que trata del estudio de las relaciones entre esta ciencia y el arte musical. Se ocupa particularmente de los principios de las distintas teorías musicales, de los problemas sonoros y de la constitución y funcionamiento de los instrumentos musicales.(Organología).

Las relaciones entre el arte musical y la ciencia acústica se han estrechado de tal forma, que es imprescindible que, por una parte el músico conozca las leyes que rigen los principios físicos por los que se rige la música y por otra parte el técnico acústico que desarrolla su profesión en relación con el arte musical, disponga de los conocimientos necesarios como para poder desarrollar con éxito su trabajo [Calvo-Manzano].

Duración. La duración es el tiempo durante el cual percibimos un sonido.

Extensión de los sonidos musicales

Como sabemos, la extensión de la banda de audio frecuencias alcanza desde los 16 Hz hasta los 20,00Hz. Sólo una pequeña gama es explotada por los sonidos musicales, aproximadamente de entre 30 y 4000 Hz. Por ejemplo la voz humana podrá producir 1046.50 (Do_6**.**) en caso de una soprano y 82.41 (Mi_2) en caso de un bajo. El órgano es el instrumento con mayor gama de frecuencias. El La patrón con el que se afinan las orquestas e instrumentos ha variado sus frecuencias, en 1939 en una conferencia internacional en Londres se fijó la frecuencia en 440 Hz.

5.9.1. Dinámica de los sonidos musicales

Se define dinámica de los sonidos la relación entre el matiz más débil y el más fuerte con que pueden ser producidos.

La dinámica en música puede ser entendida como la sucesión y contraste de intensidades (a modo de planos sonoros) mediante las cuales se contribuye a la expresividad del fraseo y a la perceptibilidad de la forma de una composición.

5.9.2. Expresión de intervalos

Cuando al oído se le presentan dos sonidos simultánea o consecutivamente, éste, además de analizar la frecuencia de cada uno de los sonidos, determina la relación que existe entre ellos, esto es el intervalo que forman ambos sonidos.

Basado en este principio, en acústica se representará un intervalo por el cociente de frecuencia de dos sonidos que forman el intervalo. Así entre dos sonidos f_1 y f_2 se forma un intervalo representado por la fracción $\frac{f_2}{f1}$.

Por ejemplo entre los sonidos de 880Hz y 440Hz :$\frac{800}{400} = 2$

Dicha relación expresa todos los atributos musicales necesarios para dejar totalmente definido el intervalo de que se trate. Los atributos musicales que se hace referencia son:

El sentido (ascendente o descendente).

El orden (segunda, tercera, etc.)

La especie (mayores, menores etc.)

La composición (simples y compuestos).

5.9.3. Expresión de Acordes

Dado que un acorde es la sucesión de varios intervalos, el método utilizado en acústica para representarlos es el mismo que el utilizado en los intervalos $f1$, $f_{2,}f_3$ y $f_4$el acorde correspondiente se representará de la siguiente forma: $f_4 : f_3 : f_2 : f_1$

5.9.4. Escala de los Armónicos

Se denomina escala de los armónicos de un sonido o escala de la resonancia superior, a la gama de sonidos que acompañan a un sonido fundamental, de tal forma que dichos sonidos están formados por un número entero de veces de la frecuencia de éste. Esto es, si denominamos con f la frecuencia del sonido fundamental, también llamado primer armónico, los armónicos superiores tendrán frecuencias $2f, 3f, 4f$, etc., a los que se denomina como segundo, tercero, cuarto, etc. armónico.

5.9.5. Principales sistemas que rigen la construcción de las escalas

La escala es una sucesión de sonidos ordenados según su frecuencia y siguiendo unos criterios específicos y propios de cada una de ellas. Cada escala se identifica por los intervalos que forman entre sí dos sonidos consecutivos y cada uno de ellos con la tónica, agrupándose estos en series idénticas en diversas tesituras, compuestas por cinco sonidos (escalas pentáfonas), seis sonidos (escalas hexáfonas) y siete sonidos (escalas heptáfonas, diatónicas y politónicas).Existen otras escalas de mayor número de sonidos como son las cromáticas, mixtas, dodecafónicas, etc.

Para la construcción de las escalas deben seleccionarse, por diversos procedimientos, los sonidos que las compondrán, fijando los intervalos que formarán entre sí los diversos sonidos de dicha escala. Una vez conocidos todos los posibles intervalos se estará en condiciones de poder formar la escala con todos los sonidos, es decir, los veintiún sonidos que componen la escala cromática integral.

Con este objetivo se estructura el estudio de cualquier escala en los siguientes pasos:

a) Fundamento de la escala.

b) Intervalos con la tónica.

c) Intervalos entre sonidos consecutivos.

d) Semitonos.

e) Estructura y construcción de la escala cromática integral.

f) Comas.

g) Número de comas en los intervalos principales de la escala.

A lo largo de la historia han existido diversas escalas que han sido practicadas con mayor o menor fortuna. Entre las diversas escalas hay cuatro que interesan principalmente por la importancia que han tenido y su influencia en el establecimiento del Temperamento.

1. El sistema de Aristógenes o de Zarlino.
2. El sistema de Pitágoras
3. El sistema de Holder
4. El sistema Temperado

5.9.6. Escala de Aristógenes o de Zarlino

Se debe al filósofo y músico griego Aristógenes (350 a. d. C.) de la ciudad de Tarento, discípulo de Aristóteles.

El veneciano Gioseffo Zarlino (1517-1590), maestro de capilla de San Marco, fue el teórico más destacado del Renacimiento y contribuyó a sustituir el sistema modal de la Edad Media por el tonal. Trabajó en la escala de Aristógenes llegando a las mismas conclusiones que él. Por ello esta escala recibe los nombres de Aristógenes-Zarlino.

El procedimiento de Aristógenes consiste en elegir los sonidos de la escala diatónica de manera que los intervalos que forman cada sonido con la escala están tomados de la escala de los armónicos.

Los intervalos que forma cada sonido con la tónica son los siguientes:

Tónica-Supertónica 9/8

Tónica-Mediante 5/4

Tónica-Subdominante 4/3

Tónica-Mediante 3/2

Tónica -Superdominante 5/3

Tónica-Sensible 15/8

Tónica-Octava 2/1

Todos los intervalos anteriores se han deducido de la escala de los Armónicos.

La escala de Aristógenes está perfectamente afinada con la escala del principio Físico-Armónico, ya que todos los intervalos se han tomado de dicha escala. Debido a la existencia de dos clases de tonos y de tres semitonos sólo es aplicable a los instrumentos de afinación libre, siendo imposible aplicarla a instrumentos de afinación fija como el piano. Además no es practicable para modular pues se necesitarían 72 sonidos por escala es decir 6 sonidos diferentes por nota.. Este inconveniente es lo que ha hecho preciso idear otros sistemas musicales que posibiliten la enarmonía.

5.9.7. Escala Pitagórica

Fundamento

El procedimiento seguido por Pitágoras para construir su escala diatónica, está basado en la sucesión de Quintas Justas dada por la Serie Armónica cuyo intervalo es 3/2.

Intervalos con la tónica

Para hallar los intervalos de cada sonido de la escala con la tónica, procederemos por sumas de quintas (3/2) cuyos sonidos serán ordenados posteriormente. Hay que hacer notar que los sonidos que buscamos deben estar contenidos dentro de los límites de una octava, para lo cual debemos reducir determinados intervalos cuando la quinta sumada nos dé un sonido fuera de los límites definidos.

Tomaremos como referencia el DO_n de una octava genérica.

Los sonidos siguientes y sus necesarias reducciones quedan reflejadas en la hoja de escalas.

Ordenando estos intervalos tendremos:

Tónica-Supertónica 9/8

Tónica-Mediante 81/64

Tónica-Subdominante 4/3

Tónica-Mediante 3/2

Tónica -Superdominante 27/16

Tónica-Sensible 243/128

Tónica-Octava 2

Comparando estos intervalos con la escala de Aristógenes -Zarlino vemos que los intervalos de Segunda Mayor (9/8), Cuarta Justa (3/2), Quinta Justa (3/2) y Octava Justa (2) son iguales.

La escala pitagórica sólo tiene una clase de tono igual al tono grande de Aristógenes -Zarlino y por consiguiente un sólo Semitono Diatónico (256/243) llamado también "*Limma", Hemitono* o simplemente *Semitono Diatónico Pitagórico.*

Ventajas e inconvenientes de la Escala Pitagórica

La escala de Pitágoras, al tener una sóla clase de tonos, no ofrece tantos inconvenientes como la de Aristógenes-Zarlino. En esta escala para poder dar a todas las notas enarmónicas diferentes sonidos se precisan 31 notas por cada octava, con los inconvenientes de la escala de Aristógenes-Zarlino aunque aquí menos agudizados. Se producen desafinaciones entre algunos armónicos.

Quisiera añadir la definición de intervalo según Vincent Persichetti " Un intervalo ,como cualquier otra sonoridad musical puede tener diferentes significados para distintos compositores. Mientras sus propiedades físicas son constantes, su uso varía con el contexto de la obra a que pertenece. Durante siglos los teóricos han distinguido a través de la acústica, grados de tensión interválica y desde aquí se ha desarrollado un concepto de cualidades relativas de la consonancia-disonancia de los intervalos. Aunque este concepto está afectado por innumerables factores en un estilo dado y puede variar considerablemente de una a otra época"[Persichetti]

Escala de Holder

La escala de William Holder (1616-1696) es una adaptación del sistema pitagórico de tal forma que la unidad de medida propia de esta escala, está contenida un número exacto de veces en la octava justa.

5.9.8. El temperamento

El temperamento es una fórmula intermedia entre la escala de Aristógenes-Zarlino y la de Pitágoras. Este sistema nació para resolver los inconvenientes de orden práctico de los sistemas anteriores para la aplicación de los instrumentos de sonido fijo y se basa en la igualación de los enarmónicos.

La acción de establecer el temperamento se llama "templar" la escala; para esto, se igualan una sucesión de quintas con una sucesión de octavas partiendo del mismo sonido fundamental. El error cometido, que como conocemos es de una coma, se reparte entre las quintas empleadas, transformándose dichas quintas justas en quintas templadas y desapareciendo la coma. En los sistemas temperados no existen comas.

En siglo XVI se construyó la escala del Tono Medio o temperamento desigual por el español Francisco de Salinas (1513-1590) , este sistema fue empleado hasta mediados del Siglo XIX.

El sistema del Temperamento Igual, practicado empíricamente por los vihuelistas españoles, fue sistematizado en 1482 por Bartolomé Ramos de Pareja (Baeza, 1440- Roma, 1491). es el primer teórico musical del Renacimiento y su sistema fue consagrado por Juan Sebastián Bach (1685-1750) en su obra El Clave Bien Temperado (1722), compuesto en todas las tonalidades mayores y menores.[Calvo-Manzano]

5.9.9. Los cuatro Elementos de la Música

La música tiene cuatro elementos esenciales: el ritmo, la melodía, la armonía y el timbre. Esos cuatro elementos constituyen los materiales del compositor.

Ritmo. El ritmo es determinado por la duración de los sonidos y la combinación de estas duraciones. El ritmo da su nota característica a las piezas musicales. La música medida aparece en la civilización occidental hasta 1150 d.de C. Un ritmo puro tiene un efecto tan inmediato en nosotros que es lo que hace que podamos reconocer una marcha de un vals o de un minuet, un cha-cha-chá de una cumbia, etc. En la música de concierto el ritmo ha tenido gran evolución, comparemos simplemente un canto gregoriano en el que el ritmo de la música fue el ritmo natural del lenguaje hablado en prosa o en verso, con las Sinfonías de Beethoven, la Consagración de la Primavera de Stravinsky o algunas de las obras de John Cage para percusiones en las que el ritmo se estructuras y evoluciona hasta alcanzar grados altos de complejidad, eso en el ámbito de la música occidental y qué decir de la música africana o hindú (entre otras) donde el ritmo es primordial y de un alto grado de dificultad.

Melodía. Es una sucesión de sonidos que expresa musicalmente una idea completa. según Aaron Copland la melodía sigue en importancia al ritmo y va asociada a la emoción intelectual." La melodía posee un armazón, y existe dentro de los límites de una escala. Una melodía bella ha de ser de proporciones satisfactorias. Deberá darnos la impresión de una cosa consumada e inevitable y es importante en ella un fluir rítmico" Existen melodías bellas en todas las épocas y sólo la falta de espacio nos impide extendernos en la exposición.

Armonía. Llamamos acorde a la combinación de dos o más sonidos que se escuchan al mismo tiempo. Los acordes se enlazan de acuerdo a ciertas reglas. La armonía era desconocida antes del siglo IX y brotó gradualmente de lo que fue en parte un concepto intelectual, sin duda uno de los conceptos más originales de la mente humana Hasta ése entonces la música consistía de una sola línea melódica. en la parte de historia se verá como fue evolucionando la introducción de dos o mas sonidos. La forma en que se enlazaban los acordes fue evolucionando y cada innovación ya sea en época de Monteverdi o Gesualdo S. XVII escandalizaban de la misma manera que Wagner , Mussorgsky , Wagner en el S. XIX o Schönberg con la introducción de la atonalidad en el S. XX.

Timbre

Después del ritmo, melodía y la armonía viene el timbre color del sonido. Así como es imposible oir hablar sin oír algún timbre determinando así también es la música, sólo puede existir según algún determinado color sonoro. El timbre es análogo al color en pintura. Es un elemento que fascina no sólo por sus vastos recursos ya explorados, sino también por sus ilimitadas posibilidades futuras.

El timbre es la cualidad del sonido producido por un determinado agente sonoro. Es una cualidad casi innata poder distinguir entre un bajo y una soprano así como distinguir la diferencia entre un violín y una tuba. Generalmente el compositor elige para su obra el timbre que más exprese el significado de su idea.

5.9.10. La Textura Musical

Hay tres especies de textura musical: la **monofónica**, la **homofónica** y la **polifónica**

La textura **monofónica** es la más simple de todas y consiste en una línea melódica que no tiene acompañamiento. La música china, la hindú, los pueblos orientales así como los griegos tuvieron música de textura monofónica. en la música occidental el canto gregoriano es el ejemplo más bello de monofonía.

La textura **homofónica** consiste de una línea melódica principal acompañada de una serie de acordes. La homofonía fue "invento " de los primeros compositores italianos de ópera del S. XVII que buscaban un método de expresión dramática que diera más claridad que los métodos contrapuntísticos. En este caso las notas de los acordes no se consideraban como voces separadas, sino que se reducían a mero acompañamiento de la melodía principal.

La textura **polifónica**. La música escrita polifónicamente exige mucha atención del oyente, porque se mueve según hebras melódicas separadas e independientes que, juntas forman las armonías. La música polifónica exige que se escuche de una manera más lineal, sin hacer caso, hasta cierto punto, de aquellas armonías resultantes.

Tenemos que recordar siempre que la música escrita antes del año 1600 fue escrita polifónicamente del tal forma que cuando escuchemos música de Palestrina o de Orlando di Lasso hemos de escuchar de manera diferente de cuando oímos música de Chopin o de Schubert. La textura polifónic implica un auditor que pueda oir distintas hebras de melodía cantadas(o tocadas) por diferentes voces.

Los compositores contemporáneos han mostrado una marcada inclinación por renovar el interés de la escritura polifónica, en parte como reacción a la música del S. XIX que es básicamente homofónica. Aunque hay que marcar que la escritura a varias voces actual ya no produce armonías tan convencionales.

por supuesto que no todas las piezas de música correspondes a una sola de esas tres diferentes clases de textura. En una pieza cualquiera el compositor puede pasar sin transición de una clase a otra.[Copland]

5.9.11. La Estructura Musical

La estructura musical es el plan que liga toda una composición. La estructura musical no difiere de la estructura en otro arte cualquiera: es, sencillamente, la organización coherente del material utilizado por el artista. Pero en la música el material tiene un carácter fluido y un tanto abstracto; por lo tanto, la tarea organizadora es doblemente difícil para el compositor, a causa. de la naturaleza misma de la música. Al tratar de explicar la forma de la música se ha tendido a simplicar demasiado. Se ha tratado de tomar ciertos moldes formales bien conocidos y demostrar como en mayor o menor medida los compositores escriben sus obras dentro de esos moldes. aunque rara vez las obras maestras se amoldan limpiamente a esos moldes de los libros de texto. Entendida como se debe, la forma no puede ser más que el crecimiento gradual de un organismo vivovivo a partir de cualquier premisa que el compositor escoja, de ahí que "la forma de toda auténtica pieza musical es única". El contenido musical es lo que determina la forma. Sin embargo los compositores no gozan de una independencia absoluta con respecto a los moldes formales externos. Estos moldes actúan como apoyo y estímulo de su imaginación y el compositor los utiliza de un modo particular y personal que pertenece solamente a esa determinada pieza que está escribiendo. Estos moldes se han desarrollado lentamente mediante la experiencia combinada de compositores que trabajaron en diferentes países. Ya Busoni en el S. XIX instaba a los compositores a que se independizaran de las formas preestablecidas.

La condición principal de toda forma es la creación del sentido de la gran línea. Esa gran línea debe darnos una sensación de dirección y debe hacerse sentir que esa dirección es la inevitable. Cualesquiera que sean los medios empleados, el resultado neto deberá producir en el oyente una sensación satisfactoria de coherencia producida por la necesidad psicológica de las ideas musicales que sirvieron de punto de partida al compositor.

Diferencias Estructurales.

Existen dos maneras de considerar la estructura musical: 1) la forma en relación con la pieza considerada como un todo y 2) la forma en relación con las diferentes partes menores de la pieza.

Las diferencias formales más amplias se referirán a los tiempos enteros de una sinfonía, una sonata o una suite. Las unidades pequeñas compondrán juntas un tiempo entero.

Principios estructurales

Un principio muy importante en la música es la repetición. El único principio formal además de ese es la no-repetición.

La música cuya estructura vertebral se basa en la repetición se puede dividir en cinco categorías

1)- Repetición exacta

2)- Repetición por secciones

3)- Repetición por medio de la variación

4)- Repetición por medio del tratamiento fugado

5)- Repetición por medio del desarrollo

Las demás categorías fundamentales son las que se basan en la no repetición, y las llamadas formas libres.[Copland]

5.9.12. Formas Musicales

Para poder entender de alguna manera las propuestas musicales del S. XX es conveniente tener una idea de las formas que se han utilizado en la música a través del tiempo. Las formas musicales y la historia de la música son difíciles de separar. De tal forma que podría definirse a las formas musicales como una historia de la música desde un punto de vista determinado. Este acercamiento puede hacerse desde dos puntos de vista, se puede partir desde una época determinada e investigar qué formas se usaban en ella o de otra manera se puede partir de los términos de formas musicales e investigar cómo se ha utilizado el término en cada época[Stockmeier]. Nosotros utilizaremos el segundo punto de vista basándonos en Copland.

1.- **La forma por secciones**

Binaria, ternaria, rondó, disposición libre de las secciones.

La **forma binaria** es la forma más sencilla en dos partes se usa poco hoy día pero se usó mucho en la música entre 1650 y 1750. La división A y B implica partes independientes una de otra pero implica una correspondencia entre ellas. La seción B está a menudo formada en cierto modo por una repetición de A y una especie de desarrollo de algunas frases de A. por tanto el principio de desarrollo que luego llegó a ser tan importante tuvo su origen ahí. Esta forma se usó muchísimo en piezas breves para clavicémbalo y muchas de las danzas de la suite barroca la utilizaron. La *allemande,* la *courante,* la *zarabanda,*la *gavota,* la *bourré* el *passepied y* el *lourev* son algunas de ellas. algunos compositores de esta época son Francois Couperin, y Domenico Scarlatti.

La **forma ternaria** se representa por la fórmula A-B-A. Minuetos de Haydn y Mozart y más tarde el scherzo utilizan esta forma. Hay muchas piezas posteriores que la usaron tales como nocturno, balada, elegía, vals, estudio, capricco, intermedio, mazurca, polonesa, *berceuse, réverie, etc.* Normalmente hay una parte central en contraste con las otras dos y alguna vuelta al comienzo

El **rondó** utiliza la fórmula A-B-A-C-A-D-A, etc. El rasgo típico es la vuelta al tema principal después de cualquier disgresión. Hay ejemplos de este desde la música de Couperin ,Mozart, y Haydn hasta obras más recientes como Milhaud, Hindemith, Stravinsky, Schönbeg y Strauss.

La **forma libre por secciones** no utiliza una fórmula determinada, puede ser A-B-B, A-B-C-A, o A-B-A-C-A-B-A o alguna otra disposición que tenga sentido musical La podemos encontrar en obras de Schubert(Fürchtenmachen) o de Bartok (tiempos primero y segundo de la suite Op.14) entre muchos ejemplos.

2. La variación

El primer aspecto de la variación es que se usa como un artificio y de modo puramente incidental; es decir, se puede variar cualquier aspecto de los elementos musicales, cualquier armonía, cualquier melodía ,cualquier ritmo. Además la variación se puede aplicar a cualquier forma (por secciones, sonata , fugada, etc.). Los compositores la usan recurrentemente y lo aplican casi sin pensar. El segundo aspecto es el de su uso en las formas de variación propiamente dichas y en las cuales constituye el único y exclusivo principio formal. Su uso es muy antiguo. Desde la época de Palestrina el principio de la variación melódica estaba firmementeemente establecido.

Las formas más conocidas son el basso obstinato, la passacaglia, la chacona,y el tema con variaciones.

El **basso obstinato** "Bajo obstinado", es una frase breve, acompañamiento o melodía que es repetida una y ora vez por el bajo. En la música del S. XVII se encuentran ejemplos muy bellos pero es un recurso que se ha utilizado mucho también la músico del S. XX por ejemplo en el "Violín del soldado" de la Historia del Soldado de Stravinsky

El **passacaglia** que tiene su origen en una danza lenta probablemente de origen español, es el segundo tipo de variación en él se expone el tema por el bajo y sobre este tema van apareciendo las variaciones. El tema no se repite literalmente como en el obstinato. Bach utilizó magistralmente esta forma pero Alban Berg en Wozzeck y Anton Webern en Passacaglia para orquesta también lo utilizaron.

La **chacona** está muy emparentada con la passacaglia, también tiene su origen en una danza lenta de compás de tres por cuatro pero ésta no comienza con el tema en el bajo, ni éste tiene tanta importancia

Tema con variaciones es la última y más importante de estas formas . El tema puede o no ser del propio compositor y es generalmente sencillo y franco y las variaciones se van ensartando con mayor o menor cambios tratando de guardar un sentido de equilibrio y contraste. Existen desde Mozart ejemplos muy bellos desde "Twinkle, twinkle little star" hasta la Sonata en La Mayor y en el S. XIX existen numerosos ejemplos de esta forma de muy diversos y conocidos compositores. y aun en S. XX compositores como Stravinsky y Copland la utilizan.

3. **La forma fugada**

Las formas fugadas más importantes son :

1.- La fuga

2.- El concerto grosso

3.- El preludio de coral

4.- Motetes y Madrigales

Así como hemos visto que el principio de variación es aplicable a cualquier forma, así también la textura contrapuntística puede aparecer sin preparación en casi todas las formas musicales. Siempre que hay textura polifónica están en uso un cierto número de procedimientos contrapuntísticos conocidos. De esos procedimiento, los más sencillos son: la imitación, el canón, la inversión, la aumentación y la disminución.

La imitación es el procedimiento más simple de todos como la canción de Martinillo que al entrar en diferentes tiempos, la misma melodía produce una especie de armonía.

El canon es una simple imitación, pero más elaborada, la imitación se desarrolla lógicamente de principio a fin de la pieza. La música del S. XVIII nos proporciona numerosos ejemplos pero también los hay en el S.XIX y en el S. XX

La inversión es más difícil de reconocer. La melodía invertida se mueve en dirección contraria. Consiste en poner patas patas arriba, como si dijéramos. La melodía se mueve siempre en dirección contraria a la que sigue en su versión original, aunque no todas las melodías tiene sentido si se invierten y corresponde al compositor si está o no justificada musicalmente hablando.

La aumentación consiste en aumentar un tema duplicando la duración de las notas. La disminuición es lo contrario. Otro procedimiento es el cangrejo y el cangrejo invertido, poniéndolo en lenguaje coloquial como yendo de regreso sobre las mismas notas. La melodía se lee de atrás hacia adelante. Estos procedimientos están mencionados en el capítulo 1 como transformaciones geométricas.

Para poder escuchar las formas fugadas inteligentemente es necesario escuchar contrapuntísticamente más la comprensión de esos diversos procedimientos.

La fuga

La mayoría de las fugas están escritas a tres o cuatro voces. Cada fuga difiere de las demás en cuanto a la presentación de las voces, a la longitud y a los detalles interiores. todas las fugas comienzan con la ”„exposición”. Se comienza enunciando el sujeto sin adornos. El enunciado puede aparecer en cualquiera de las voces. Y cada voz va enunciando el sujeto pero las demás voces continúan creando una contra melodía. La exposición se considera terminada cuando todas las voces han expuesto el tema. La fuga desafió durante siglos el ingenio de los compositores siendo Bach uno de las grandes exponentes de esta forma,pero en S. XIX tendieron a abandonarla. En el S. XX se mostró nuevamente interés por ella.

El concerto grosso

El concerto grosso aparece en S.XVII, en él, el compositor opone a dos grupos instrumentales entre sí, uno pequeño (concertino) y una grande (tutti). Es una especie de forma fugada instrumental. Encontramos muy bellos ejemplos de esta forma en compositores como Haendel y Bach (Conciertos Brandenburgo).

El preludio de coral tuvo su origen en las melodías corales que se cantaron en los templos protestantes a partir del tiempo de Lutero. Se podía dar más interés a las armonías que manejaban, dar más adornos a la melodía o construir una especie de fuga en la cual el coral sirve como sujeto. El Örgelbuchlein de J.S. Bach es una colección de preludios corales extremada belleza.

Motetes y Madrigales son composiciones corales que se cantan sin acompañamiento y se escribieron con profusión en los siglos XV, XVI y XVII. El motete es una composición vocal con letra sacra mientras que el madrigal es con letra profana. Ambos pueden ser de estilo fugado o bien a base de acordes o con la combinación de ambos.

3. La forma Sonata

El término sonata se aplica a dos cosas diferentes. En primer lugar hablamos de forma sonata cuando pensamos en una obra entera consistente en tres o cuatro tiempos. También hablamos de forma sonata cuando nos referimos a un tipo determinado de estructura musical que se encuentra generalmente en el primer tiempo. Es decir 1) la sonata como un todo y 2) la forma sonata propiamente dicha, llamada a veces allegro de sonata. Lo de allegro de sonata se refiere al hecho de que casi todos los primeros tiempos de las sonatas están en tempo allegro (es decir rápido).

Hay que distinguir también de la palabra sonata (sonado o tañido) que se usaba en el período barroco como contraposición a cantata (algo para ser cantado).

La sonata como un todo comprende tres o cuatro tiempos generalmente contrastados y abarca también a los conciertos para solistas y las sinfonías.

La forma allegro de sonata se reduce generalmente a la fórmula tripartita A-B-A., que corresponde a exposición, desarrollo y recapitulación. La parte de la exposición contiene un primer tema que está en la tónica de la tonalidad, un segundo tema que está en la dominante de la tonalidad y un tema conclusivo menos importante que los anteriores y está también en la dominante de la tonalidad. La sección de desarrollo es "libre", es decir, combina libremente los materiales presentados en la exposición y añade a veces material propio. La reexposición repite más o menos los temas de la exposición pero todos ellos en la tónica de la tonalidad.

Todos los allegros de sonata conservan la forma tripartita. Esta forma se afianzó en el período clásico (Haydn y Mozart) y los compositores hicieron uso de ella como una estructura a la que se adherían pero en la cual cada compositor imprimía sus características personales aumentando o enfatizando algunas de sus partes y vertiendo su creatividad y expresión. Aunque en cada época hubieron modificaciones a veces destacando el desarrollo o diluyendo la transición entre sus partes, sirvió a grandes compositores como un fuerte medio de expresión . Encontramos bellísimas sonatas de Haydn, Mozart, Beethoven, Brahms entre muchos otros y aún en el siglo XX Scriabin utilizó esta forma. Muchos otros compositores de finales del S. XIX como Ravel, Debussy y para muchos otros del período romántico era difícil contener toda la emoción dentro de un esquema formal esencialmente clásico.

La sinfonía que no puede deslindarse de la forma sonata, tuvo su origen en la obertura de la primitiva ópera italiana perfeccionándola Alessandro Scarlatti. Hacia 1750 se desprende de la ópera y lleva una vida independiente en la sala de conciertos. Fueron muchos los compositores que colaboraron en el movimiento; en la primera época italianos, franceses y alemanes. Muchos de ellos compusieron hasta cien o más de ellas con magníficos logros como Haydn y Mozart, las famosas nueve de Beethoven, Schumann, Brahms, Bruckner, Franck, etc. Aunque algunos como Ravel, Stravinsky, Debussy y Schoenberg no las escribieron en sus años maduros muchos compositores posteriores sí la utilizaron como Prokofief, Shostakovich, V. Williams, Mahler y Sibelius. Aunque la forma es más libre en ellos.

5. Formas Libres

Las formas libres incluyen el preludio y el poema sinfónico. Se contraponen a las cuatro formas rigurosas anteriores y no se puede generalizar sobre ellas.

El preludio es el nombre genérico de cualquier pieza de estructura formal no demasiado precisa. Existen numerosos preludios de Bach y en épocas posteriores muchas obras principalmente de piano. Obras famosas como el Preludio a la Siesta de un Fauno de Debussy para flauta.

El poema sinfónico es una obra generalmente relacionada con una historia o una idea poética . Aunque desde el S. XVI existían obras con temas de batallas que inspiraron a compositores de música sacra y en el S.XVII Bach y Haendel se inspiraron en temas bíblicos es hasta el S.XIX cuando se desarrollaron los medios para una descripción musical mas exacta de sucesos extramusicales. Liszt, Debussy, Richard Strauss se encuentran entre los compositores más conocidos de poemas sinfónicos.

5.9.13. Breve Historia de la Música

Orígenes. No sabemos si el canto precedió a la palabra o si la palabra indujo al hombre a cantar. No sabemos tampoco si la melodía precedió al ritmo. La primera imitando el canto de los pájaros y el silbido del viento entre hojas y bejucos y el segundo como una imitación del latido del corazón, de la marcha o del movimiento que se repite sin cesar al efectuar una tarea.

Sabemos que los poemas de Homero se recitaban acompañados de música y que entre los aztecas como en todos los pueblos de la Antigüedad no había ceremonia ritual en la que no apareciera la música. La danza y la poesía rimada eran inseparables de las ceremonias religiosas.

La evolución de la música refleja la evolución del hombre, en ella repercuten ideas filosóficas, religiosas y sociales. El avance tecnológico ha tenido gran influencia, no sólo por los instrumentos electrónicos sino por la comunicación masiva y penetración de los medios aun en los lugares más remotos. Actualmente se escucha la misma música en Estados Unidos y México así como en Europa, Africa y Asia.. La música perdió su papel preponderante en la vida religiosa, cuando ésta fue escenario de las obras de los más grandes compositores.

La música europea a la que nos referiremos sobre todo, recibió tiene una influencia muy fuerte del mundo oriental tanto en el Edad Antigua como en la Edad Media. Esta influencia llegó por Asia Menor o por la península Ibérica cuando ésta era poblada por las tres grandes culturas judía, árabe y cristiana. Los instrumentos y las escalas musicales llegaron y evolucionaron hasta convertirse en los que actualmente conocemos.

Música Antigua. Aunque no existen registros de esta música podemos deducir en cierto modo por sus instrumentos qué sonidos generaban y qué tipo de escalas utilizaban. La música china utilizaba escala pentatónica (de cinco sonidos). Existe un tratado de música china de *Ling-Lun* que data de 2500 a. C.. en el que menciona los cinco sonidos y la forma de ordenarlos, así como también describe los instrumentos y cómo construirlos y tocarlos.

La música hindú tiene ocho escalas diferentes, se utilizan según la hora del día, la época del año o la deidad a la que se dedica la música. Entre los hebreos las escalas eran de siete sonidos con semitonos intercalados de manera peculiar y así sucesivamente cada cultura tenía una música caracterizada por sus instrumentos y sus escalas .

La música en Grecia tiene gran importancia para nosotros, ya que su teoría musical es la base de la música occidental..

Música Griega.

Para los griegos la música en su sentido más amplio significaba cualquiera de las artes y ciencias que estaba bajo la protección de las musas, en su acepción particular la consideraban como el arte de los sonidos. De cualquier forma estaba ligada a la vida emocional, intelectual y social de los antiguos griegos, quienes consideraban que el arte tenía una relación fundamental con el bienestar de los individuos de modo personal, al igual que con su medio ambiente. La música para el espíritu y la gimnasia para el cuerpo formaban parte del curriculum. Platón tanto en la República como en el Timeo habla ampliamente sobre la música. [**?**]

Aristógenes (Siglo IV a d. C.) y Pitágoras (Siglo VI a d. C.) son de los grandes teóricos de la música

Modos.

Un sonido central con el que están relacionados otros sonidos pueden establecer una tonalidad, y la manera en que están otros sonidos alrededor del sonido central produce la modalidad. Hay siete modos que se distinguen de los de´sd a causa del orden de los semitonos. Cada uno tiene su carácter especial, y cualquier otro sonido puede utilizarse como la tónica de partida. Al cambiar la colocación de los semitonos, la escala se transforma en una serie de modos. [Persichetti] Volviendo al teclado utilizando sólo las notas blancas estaremos produciendo diferentes modos a partir de la nota de inicio:

Jónico a partir de do

Dórico a partir de re

frigio a partir de mi

lidio a partir de fa

mixolidio a partir de sol

eolio a partir de la

locrio a partir de si

Para los griegos cada uno de los modos citados correspondía a un estado de alma diferente; cada uno tenía un carácter moral y también un carácter ritual según al dios al que se dedicaba el culto.

La música griega fue esencialmente vocal. Todas las obras líricas (monólogos,diálogos, coros) se cantaban, y el ritmo del verso determinaba el ritmo de la música. Los instrumentos servían para acompañar la voz.

Por ciertos himnos encontrados (siglo II a. de C) sabemos que existía una notación para la altura de los sonidos por medio de las letras del alfabeto, sistema similar al que utilizarían los romanos más adelante.

La enseñanza de la música ocupó un lugar muy importante en la educación entre los griegos, los romanos, la Edad Media y el Renacimiento.

En la Edad Media se usaron los modos eclesiásticos dándoles nombres griegos aunque no equivalían necesariamente a los mismos; dórico, frigio, lidio y mixolidio que podían ser auténticos o plagales [Hoppin]

La Música Monódica en Occidente desde el siglo I al siglo XV

Canto monódico. Es aquel que utiliza una sóla melodía sin segundas voces ni acompañamientos. En este tipo de canto todos los cantantes emiten el mismo sonido.

Este canto lo encontramos en los canto religiosos de los primeros cristianos. Se reunían en asambleas y tenían rituales que se acompañaban de cantos. Estos cantos tenían gran influencia del culto judío. El desarrollo de estos rituales culmina en la liturgia de la Misa en el siglo I en donde el canto era de suma importancia . La iglesia de Oriente desarrolló un tipo de cantos con influencia siria, copta y armenia, que fueron introducidos al Occidente por San Ambrosio (canto salmódico y canto responsorial). Cuando San Ambrosio estuvo en la iglesia de Milán (333-397 d. C.), introdujo himnos de carácter popular, algunos de estos himnos fueron compuestos por él y otros compuestos por encargo. Estos himnos se cantaron hasta el siglo XVI.

Canto Gregoriano.

Existen diversas opiniones sobre el canto gregoriano y algunos especialistas hasta ignoran relación alguna con el Papa Gregorio. Lo que sí parece ser es que corresponde al canto litúrgico romano. El Papa Gregorio I († 604 d. C..) trabajó en la preparación de un repertorio llamado *Antiphonarium Centum* en el que se recopilaron innumerables textos y se incluyeron tambien algunos compuestos por él. Aunque el original, según cuenta la leyenda, se encontraba encadenado al altar mayor de la basílica de San Pedro fue destruidodo por los bárbaros, se conservaron algunas copias que el mismo había mandado sacar y había hecho repartir entre los conventos más importantes. La copia encontrada en el monasterio de San Gall en Suiza es el documento más antiguo y ha servido como base para el estudio de estos cantos que después serían conocidos como "cantos gregorianos". Por medio de estos cantos se pretendía una unificación del rito en la Iglesia Católica.

En los siglos VII y VIII coexistieron un repertorio romano litúrgico y uno local de las iglesias de las Galias y de Italia.

Algunas iglesias se distinguieron más que otras en el estudio y la creación de un repertorio auténtico destacando la de Cluny con Odón y la de Saint-Gall de la cual provienen los más antiguos manuscritos.

Estos manuscritos utilizaban una notación por neumas, acentos y signos que requerían de un estudio especial para su interpretación.

A partir del siglo IX se añaden líneas de diferentes colores para facilitar la lectura de los textos. Cada línea representaba un sonido fijo, así una línea roja denotaba el fa, una amarilla el do y una tercera el la. Esto encaminó hacia el actual pentagrama. En el siglo XII se empezaron a utilizar diferentes claves (do, fa, sol). Este desarrollo aunque simplificó la lectura afectó la interpretación de los cantos gregorianos que perdieron su flexibilidad y frescura.[Hoppin]

Características del canto gregoriano.

La antigüedad del canto gregoriano no puede ir más allá del siglo VIII. de donde se deduce que es fruto del renacimiento carolingio, pero sus autores del IX prefirieron ponerlo bajo la advocación del mítico papa Gregorio Magno. El canto gregoriano es exclusivamente vocal y enteramente monofónico. El canto gregoriano es música en su estado más puro, forjada con una consumada técnica y perfectamente adaptada a su función litúrgica. Llamado también canto llano se caracteriza por tener una medida libre. El ritmo lo determina el texto a cantar. En él no existe el tiempo fuerte y el tiempo débil como lo entendemos actualmente.. El primer tiempo es aquel en el que el cantor toma aliento (arsis), pero la voz después de haber cantado de una vez el neuma (signos que aparecen sobre el texto) , que indican la caída o la elevación de la voz y según los signos podían combinarse dos o tres notas, se detiene un momento (thesis) para continuar. Así el canto gregoriano contiene una serie ininterrumpida de alientos y reposos basados en texto latino. Aunque presenta cierta regularidad, presenta una línea ondulante que se pliega librementebremente a la melodía.

Occidente toma del Oriente el género diatónico, así el canto gregoriano es esencialmente diatónico, es decir rechaza el cromatismo es decir la alteración de la escala utilizada, excepto el si que frecuentemente se utiliza disminuidodo en un semitono, el si bemol.

El canto gregoriano utiliza tantos modos como notas de la escala. Cada nota de la escala puede utilizarse como punto de partida, lo cual produce una riqueza modal de infinita variedad. Sólo existen cuatro modos gregorianos que se relacionan con los modos griegos (re, mi, fa, sol), llamados **modos auténticos** que por alargamiento de una cuarta hacia la nota grave dieron nacimiento a cuatro modos más, llamados **modos plagales.** Cada modo se caracteriza por la nota final hacia la cual tiende todo el modo. Es a través del uso de los modos como se consigue la variedad y sutilezas de esta música. Son ocho modos en comparación con los dos (mayor y menor) que se usaron en la música de los período posteriores, renacimiento, clásico y romántico. Los tonos do y la se añadieron en los siglos XV y XVI.

Música Popular. Paralelamente al desarrollo de la música monódica de los cantos cristianos, se desarrolló una música popular con características de cada región y aunque fue combatida por la propia Iglesia nunca llegó a extinguirse.

Juglares, Trovadores, Minnesingers y Bardos.

Los juglares eran hombres para todos los entretenimientos, actuaban como bailarines ,cantantes e instrumentistas además como acróbatas, mimos, narradores o como prestidigitadores. En ocasiones tomaban parte en los dramas litúrgicos como cantores o instrumentistas. Contribuyeron al florecimiento de la lírica latina y de las canciones vernáculas de los trovadores y troveros. Los trovadores surgen en Francia (Siglos XI-XII) y dan inicio a la poesía lírica en lenguas modernas en Europa Occidental. Se han conservado muchos poemas pero muy poca de su música. Esta música influyó grandemente la estructura musical, ya que estos músicos tenían que ajustar su melodía a la estructura poética y con el paso del tiempo su influencia se dejó sentir también en la música religiosa.[Hoppin]

Transformación de la música eclesiástica en música del pueblo. Para hacer la música eclesiástica más accesible al pueblo, los monjes Notker y Tutilo de la Abadía de San Gall idearon un sistema en el que acomodaban un texto a las repeticiones de las vocales que aparecían en los melismas del canto gregoriano y el desarrollo de estos en las lenguas vulgares llevó a los Autos Sacramentales.[Hoppin]

Música Polifónica en Occidente

La música monódica empieza a ser insuficiente como expresión musical de la vida. Se desarrollan las ciudades, se inventa la imprenta y se descubre a América. A través de los juglares y trovadores resurge la música popular y esta refleja ideales mundanos.

La música monódica a una sóla voz ahora será **polifónica**. Es decir ahora serán dos o más melodías diferentes a la vez.

Se empieza por añadir una melodía que imita a determinados intervalos de distancia la melodía original. El *Micrologus* de Guido de Arezzo (c. 991-1050) es el primer tratado medieval que habla tanto de la monodia como de la primitiva polifonía, el *organum.* A partir de Guido de Arezzo comienza la historia de la música occidental. El cambio de la transmisión oral por la escrita marca el comienzo de una etapa de reinado del papel que sólo recientemente la informática ha empezado a sustituir.

Organum. El Organum. es una melodía que se imita a un intervalo de cuarta superior (cuatro tonos hacia el registro agudo) o a una quinta inferior (cinco tonos hacia el registro grave).

Discantus. Se utilizan las mismas distancias que en el organum pero en lugar de hacer movimiento paralelo se hacen movimientos contrarios.

Fabordón. El fabordón (de faux bauerdin: falso bajo) consiste en la unión de dos o tres melodías a la distancia de una tercera o de una sexta. Aunque estos intervalos habían sido usados por los ingleses siglos atrás aún se consideraban desagradable [Hoppin].

Motete. A la actividad de añadir palabras a la voz o voces del organum llevó a la creación del motete (mot-palabra)branforme se sigue desarrollando la polifonía aparece el motete alrededor del siglo XIII en el cual se utilizan cuatro o cinco melodías independientes que crean una armonía vertical. Cada melodía tiene un texto diferente.

Contrapunto. La técnica para escribir música polifónica se llama contrapunto; punto contra punto, es decir nota contra nota. Abarca las leyes que rigen el movimiento simultáneo de las voces. La técnica ingeniosa del contrapunto, añadida a una rica inspiración, hacen del motete la pieza más apreciada de música profana, que alcanzó gran boga en el siglo XIV. A tal grado se popularizó que el Papa Juan XXII en 1324 trató de frenar su popularidad "innoble" con una bula. A partir del Renacimiento se van reduciendo los modos hasta quedar en uso sólo dos, el lidio (nuestro modo mayor) y el mixolidio (nuestro modo menor natural).

La polifonía sigue su curso, pasando por grandes escuelas, catedrales y cortes. Guillaume de Machaut (Siglo XIV), Josquin de Pres (siglo XV), Tomás de Victoria (SigloXVI), Palestrina (sigloXVI), Monteverdi (SigloXVI-XVII) y J.S. Bach (Siglo XVII-XVIII), son los más conocidos representantes de este género.

Las melodías en dirección horizontal van acompañadas por otras melodías, que a la vez en forma vertical forman una armonía. El contrapunto está sometido a reglas estrictas y sofisticadas de la dirección de las voces e intervalos. De alguna manera refleja el desarrollo racional de la mente.

La Música del siglo XVI al XIX

Madrigal. Paralelamente al desarrollo del contrapunto existe un deseo de retorno a la Antigüedad lo cual da origen a la aparición del madrigal y una música instrumental original. El madrigal es de estilo monódico y dramático y esto nos lleva al nacimiento de la ópera. Se cultiva el Recitativo dando un lugar a la poesía . Así entre el Siglo XVI y XVII, existe un deseo de imitar la música griega y la tragedia antigua y se introduce un recitativo cantado, la melodía acompañada y el aria. En estas formas musicales el contrapunto ya no es primordial.

Opera. La ópera se impuso en los primeros años del siglo XVI, marca una ruptura tal con el pasado que podría pensarse que fue creada en forma íntegra y total. Aunque nace en Italia, con el paso del tiempo adquiere características diferentes en cada país, pero son el recitativo y el estilo dramático lo que las distingue. Incluye además la danza. Se utiliza la melodía adornada, el teatro mismo sirve de decoración y la orquesta ocupa un papel muy importante con los diferentes colores (timbres) de los instrumentos.

La Música Instrumental. En el siglo XVII la música instrumental se renueva y los instrumentos ya no son utilizados en forma contrapuntística exclusivamente.. Es muy clara la influencia de la danza y la melodía expresiva se impone sobre la polifonía tradicional. Predomina el pensamiento causal en la composición musical. Un acorde necesariamente nos lleva o otro. La escala mayor implica funciones tonales jerárquicas (tónica, dominante y subdominante) alrededor de las cuales gravitan las otras notas. Las cuales se construyen de manera altamente determinística, procesos lineales o melodías por un lado y eventos simultáneos (acordes, armonía) por otro.

A partir del **Renacimiento** la música tendrá muchas innovaciones, los instrumentos se perfeccionan, la música se populariza y se toca en familia con los amigos en el hogar además se componen grandes obras religiosas y obras cortesanas. Se empieza a desarrollar la ópera, los modos se restringen a dos, que equivalen al modo mayor y al modo menor actuales. La historia de la música a partir de este momento utilizará únicamente estos dos modos.

El **Período Barroco** en el que todavía predomina el contrapunto (polifonía), utiliza una sucesión de acordes como base armónica llamada bajo continuo y este ayuda a destacar una melodía instrumental o vocal. En esta época se desarrollan formas musicales diversas como el rondó, la suite, el concierto grosso, la fuga, el concierto, las variaciones y el preludio. Se encuentran grandes exponentes, como Teleman, Pourcell, Rameau, Händel y el gran Johann Sebastian Bach. Los instrumentos van perfeccionándose. Este período abarca el siglo XVII y siglo XVIII. La música puede ser religiosa o cortesana.

Le sucede el **Período Clásico** que comienza aproximadamente a mediados del siglo XVIII en el que sobresalen **Mozart** uno de los más grandes músicos de la historia y niño prodigio y **Haydn** ambos vieneses. En su música predomina una melodía y una armonía que acompaña a esta melodía (homofonía). Aunque el contrapunto no desaparece por completo. La armonía que se utiliza en esta época hace uso de los acordes principales de una tonalidad que son la tónica (Primer grado), la dominante (Quinto grado), la subdominante (Cuarto grado). El enlace de los acordes sigue ciertas reglas preestablecidas y aunque se modula a tonalidades vecinas se evita el cromatismo, es decir usar notas ajenas a la escala inicial y a sus relativos cercanos. La forma utilizada por excelencia es la **forma sonata**, que se basa en el desarrollo y que hasta el siglo XIX será de las predilectas de los compositores por considerarla el medio más adecuada para expresar la emoción y los pensamientos musicales. Las sonatas, tríos, cuartetos, quintetos, sinfoniás y conciertos están basados en esta forma. Algunos eruditos consideran a Felipe Emanuel Bach, hijo de Juan Sebastián como el padre de la sonata. Las formas musicales le ofrecen al compositor una estructura coherente y equilibrada pero el compositor puede hacer las modificaciones necesarias para hacerse entender. Otro gran representante de este período es **Beethoven** que para muchos especialistas es el último de los clásicos y el primero de los románticos. Adelantado a su época sorprendía con su lenguaje dramático y sus contínuas innovaciones. Él hace uso de armonías más atrevidas, incluye más sonidos en sus acordes y juega con la armonía siendo capaz de producir efectos no conocidos hasta entonces. También el ritmo más atrevido lo separa de sus antecesores.

Período Romántico. Compositores geniales vivieron en esta época tales como **Peter Ilich Tchaikovsky, Franz Liszt, Federico Chopin, Franz Schubert, Robert Schumann**, **Johannes Brahms** y **Héctor Berlioz.** La música de esta época refleja un movimiento que se da en poesía y otras artes y demuestra claramente los estados de ánimo y las emociones, la armonía incluye ya algo de cromatismo (notas que no pertenecen a la escala). Las modulaciones de las tonalidades van más allá de las tonalidades vecinas.

Richard Wagner es uno de los compositores más importantes en la música del siglo XIX. Su música es capaz de representar e inspirar las más profundas pasiones, en su música existe mucho cromatismo se va de una tonalidad a la otra sin "respetar" las reglas preestablecidas y es capaz de producir con ciertos efectos de armonía y uso de la orquesta entre otros, obras de gran profundidad, grandiosidad y dramatismo.

Otro movimiento importante de finales del siglo XIX y principios del siglo XX es el **Nacionalismo.** Este movimiento incluye melodías populares en la música de conciertos y cada país tiene grandes compositores. En Hungría tenemos a **Béla Bartok** uno de los iniciadores, en Suecia a **Edvard Grieg**, en Rusia a **Mussorgsky** y en México a **Silvestre Revueltas, Manuel M. Ponce** y **Moncayo** entre muchos otros.

El **Impresionismo** es un movimiento que se da sobretodo en Francia y cuyos mas importantes representantes son **Claude Achille Debussy** y **Maurice Ravel.** En esta música encontramos nuevamente el uso de los distintos modos que se habían utilizado en el canto gregoriano pero utilizados de una manera diferente. Se incluyen armonías no utilizadas hasta esa época, el uso modal se combina con alguna tonalidad definida.

Aunque en el siglo XX los compositores de conservatorio han buscado y siguen buscando propuestas muy diferentes, paradójicamente la música popular y comercial no ha cambiado gran cosa y tanto la música de rock como la mayor parte de las canciones populares que escuchamos en México y en el mundo siguen teniendo una armonía tradicional. En ella predomina uno de los dos modos (mayor o menor). Lo que ha variado es el ritmo y la instrumentación con el uso de instrumentos electrónicos tales como las guitarras eléctricas, los sintetizadores, etc.

Parafraseando al musicólogo Enrico Fubini se ofrece a las masas, en el *juke-box*, el lenguaje de la tradición simplificado, vulgarizado y comercializado, pero dotado de un envoltorio resplandeciente para que aparezca ante sus ojos como lenguaje *moderno.* Sin embargo la vanguardia no ha contribuido a la formación de un gusto o lenguaje popular y el público es un público restringido.

Siglo XX

Uno de los planteamientos de la música del siglo XX es la ruptura de la tonalidad para la cual se presentan diversas propuestas.

Escuela de Viena.

Arnold Schönberg, Alban Berg y Anton Webern son los integrantes de este escuela que revolucionó la música a principios del siglo XX. Se disuelve la jerarquía establecida en la tonalidad y se propone que no se repita ninguna nota hasta que no hayan aparecido los doce sonidos de la escala cromática (dodecafonismo). No sabiendo dominar el indeterminismo de la atonalidad se regresa a una organización causal en sentido estricto, más abstracto que la tonalidad, es decir el uso de series de notas (serialismo) extraídas de los doce sonidos. En una composición de este estilo, los sonidos aparecen siguiendo el orden de la serie propuesta por el compositor. Esta abstracción es su gran condición.

Béla Bartok e Igor Stravinsky fueron grandes innovadores por la forma de usar la armonía así como por sus ritmos atrevidos

Oliver Messiaen. Este compositor generaliza al proceso y sistematiza la abstracción de todas las variables de la música instrumental. Paradójicamente lo hace en el campo modal, el modo como la habíamos mencionado antes, es también una relación de jerarquías muy utilizada en la música oriental y griega y en la música gregoriana. Messiaen. crea música multimodal que es imitada en la música serial. La sistematización abstracta encuentra su más justificable materialización en la música multiserial. En esto se inspiran los neoserialistas.

5.9.14. Escritura del Lenguaje Musical

Pentagrama y Claves. A partir del Siglo X se empiezan a utilizar líneas para escribir los sonidos, y como mencionamos antes Guido de Arezzo usa diferentes colores para señalar la altura de los sonidos. Después de muchos años y de diferentes intentos queda establecido la escritura sobre una serie de cinco líneas, paralelas que conocemos con el nombre de pentagrama y según las claves que utilicemos estas darán nombre a las notas que aparezcan en él. Tenemos tres claves diferentes: la clave de do que se puede colocar en la cuarta, la tercera y la segunda línea y de ahí se nombran en forma progresiva los sonidos de la escala diatónica; la clave de sol que se escribe sobre la segunda línea y la clave de fa que se escribe principalmente sobre la cuarta línea. La clave de do fue la más utilizada en el período contrapuntístico y en muchos conservatorios se utiliza aún, maestros de este siglo como Schönberg y su gran escuela revolucionaria de la atonalidad utilizaba para las clases de contrapunto la clave de do. Aunque ciertos instrumentos pueden utilizarla las más comunes actualmente son la clave de sol y la de fa.

Nombres de las notas e índices.

Los nombres que utilizamos en español derivan de las primeros sílabas de cada verso de un himno a San Juan, que tomó Guido de Arezzo para indicar los sonidos de la escala

Ut quaent laxis
resonare fibris
mira gestorum
famuli tourum
solve poluti
labi reatum
Sancte Ioanis

Dando como resultado la sucesión ascendente ut (**do**), **re**, **mi**, **fa**, **sol**, **la**. La séptima (**si**) fue agregada posteriormente.

Índices. Si imaginamos un teclado el do central correspondería al do índice cinco do_5 llegando hasta el do_9. La voz humana corresponde al registro medio del piano.

Altura de los sonidos. La clave de sol y clave de fa se utilizan juntas para instrumentos de amplio registro como el piano, órgano, marimba, etc. En otros instrumentos se utiliza la clave que cubre el registro de éste. Así el violín utiliza la clave de sol mientras que un violoncello utiliza la de fa.

Sostenidos y bemoles. Cuando se quiere aumentar un semitono a un sonido se utiliza el signo de sostenido $\#$. Cuando se quiere disminuir medio tono se utiliza el bemol $\flat$. En el caso de un teclado tocar un sostenido es tocar la contigua a la derecha y bemol hacia la izquierda.

Duración . Así como la altura de los sonidos la depende de su colocación sobre el pentagrama, su duración se indica por la figura de la nota dada.

Puntillo. Cuando se coloca un puntillo a la derecha de una nota se agrega a esta la mitad de la duración de la figura original.

Barras de Compás. Barras de compás son las líneas verticales que aparecen en el pentagrama y sirven para agrupar las notas por valores. Cada trozo entre dos barras de compás representa un esquema de igual duración.. El tipo de compás que va a emplearse se indica por un quebrado que se coloca junto a la clave al inicio del pentagrama, el numerador indica el número de tiempos en cada compás y el denominador la clase de figura que deberá entrar en cada tiempo. En un compás de $\frac{3}{4}$ indica que habrá tres negras por compás (o su equivalencia).

Silencios. Para cada valor de las notas existe una figura de silencio equivalente. El silencio es de gran importancia en la música.

Tempo. El tempo indica la velocidad a la cual se ejecutará una pieza musical. Las palabras utilizadas derivan del italiano y van desde lo más rápido hasta lo más lento.

Presto allegro andante adagio grave lento largo

Existen otros palabras que pueden modificar estos tiempos básicos.

Metrónomo. Para determinar con exactitud la velocidad del tempo que requiere una pieza musical, los compositores utilizan el metrónomo que consiste en un mecanismo con un péndulo y una pesa movible, la cual controla la velocidad de los golpes que el péndulo produce. Actualmente también los hay electrónicos.

Se establece una relación entre el número de golpes por minuto y un valor y así se comunica al intérprete la velocidad exacta, aunque la música nunca podrá estar basada en esta exactitud máxima.

Bibliografía

[Bindel] Bindel, Ernst. “Die Zahlgrundlagen der Musik in Wandel der Zeiten”, Verlag Freies Geistesleben 1985.

[Salvat] “La Música Contemporánea”, Colección de Grandes Temas 1974

[Brown] Grover Brown Robert & Hwang Patrick Y.C. “Introduction to Random signals and applied Kalman filtering” John Wiley and Sons New York 1985.

[Calvo-Manzano] Calvo- Manzano Antonio ”Acústica físico-musical”, Real Musical Madrid 1991

[Canavos] Canavos G. C. “Probabilidad y estadística, aplicaciones y métodos”, Mc Graw-Hill, 1991.

[Copland] Copland, Aaron “Cómo escuchar la música”, Fondo de Cultura Económica 1972

[Dodge] Dodge C. and Jerse T.A. “Computer music: Synthesis, composition, and performance”, Schirmer Books, Prentice-Hall

[Enciclopedia Británica] Enciclopedia Británica (Internet)

[Fubini] Fubini Enrico “La estética musical desde la Antigüedad hasta el sigloXX” , Alianza Música 1976.

[Estrada] Estrada Julio y Jorge Gil. “Música y Teoría de Grupos Finitos” UNAM 1984.

[Gardner] Gardner M.“Fractal music, Hypercards and more”, W. H. Freeman and Co., 1991.

[González] César González Ochoa.“ La música del universo”. UNAM México. 1994

[Godwin] Joscelyn Godwin “Music, Mysticism and Magic” Arkana New York and London.

[Griffiths] Griffiths Paul “Modern Music. The avant gard since 1945” George Braziller 1981. Second printing1985

[Grover] Grover R. and Hwang P. Y. C. “Introduction to random signals and applied Kalman filtering”, John Wiley and Sons, 1997.

[Haaser] Haaser N. B. y Sullivan J. A.“Análisis real”, Trillas, 1978.

[Hammel] Hammel T. and Vaughan C.,“Math and Music**”,** Dale Seymour Publications Palo Alto California,1955.

[Hofstadter] Hofstadter Douglas “Gödel, Escher, Bach: Una eterna trenza dorada”, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología 1988.

[Hoppin] Hoppin Richard “La Música Medieval”, Ediciones Akal 1992.

[Hoel] Hoel P. G. “Introduction to Mathematical Statistics**”**, John Wiley & Sons, Inc, 1971.

[Hoggs] Hoggs R. V. and Craig V. T. “Introduction to mathematical statistics”, Printice Hall, 1995.

[Kramer] Kramer Jonathan D “The Time of Music” Schirmer Books 1988.

[Kreysig] Kreysig E. “Advanced engineering mathematics”, Wiley, 1968

[Kwakernaak] Kwakernaak H. and Sivan R. "Linear optimal control systems", Wiley-Interscience, 172.

[Koche] Köche L.V. "Juego de dados k294", xx

[1] Lluis-Puebla E. "Matemáticas en la música", Miscelanea Matemática, Num. 27, p. 15-27, 1998.

[Mankiewicz] Historia de las Matemáticas. Richard Mankiewicz. Paidós

[Mayer] Mayer Serra Otto "Panorama de la Música en Mexico" El Colegio de Mexico 1941

[Meyer] Meyer P. L. y Prado C. "Probabilidad y aplicaciones estadísticas", Fondo Educativo Interamericano, 1973.

[McClain] McClain Ernest G. The Myth of Invariance Nicolas-Hay, Inc. York Beach, Maine.

[Mood] Mood A. M.and Graybill F. A. "Introduction to the theory of statistics", Mc Graw-Hill, 1973.

[Molina] Radamés Molina, Daniel Ranz. La idea del cosmos. Cosmos y música en la antigüedad. Paidós. España. 2000.

[Moreno] Moreno Rivas Yolanda "La composición en Mexico en el Siglo 20" CNCA 1994.

[Munkres] Munkres J. R. "Topology, a first curse", Printice Hall,1975.

[Paraskevaidis] Paraskevaidis G. "Juego de dados de Mozart", revista Pauta No.4 Octubre 1982, CENIDIM.

[Peter] Peter Christoph "Rests and Repetitions in Music" The Robinswood Press, Stourbridge England 1992

[Persichetti] Armonía del Siglo XX , Real Musical Madrid 1985

[Rheinthaler] Rheinthaler Joan “Math and Music,some intersections” Mu Theta Norman 1992.

[Rothstein] Rothstein E. “Emblems of mind”, Avon Books, New York, 1996.

[Stockmeier] Stockmeier, Wolgang. “Musikalische Formprinzipien”, Laaber Verlag 1986

[Xenakis] Xenakis I. “Formalized Music”, Pendragon Press Stuyvesant New York, 1992.