Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Ciencias

Métodos y Demostraciones Matemáticas de Algunos Resultados más Conocidos.

T E S I S
Que para obtener el grado de ACTUARIO
PRESENTA

RAMIRO SÁNCHEZ RICO

Asesor : María Aurora Valdés Michell

AGRADECIMIENTOS.

DEDICO ESTE TRABAJO A MIS PADRES:
QUE POR SU EJEMPLO Y DEDICACIÓN ME
FORMARON COMO UN HOMBRE DE BIEN Y DE
BUENAS COSTUMBRES.
GRACIAS.

A MIS HERMANOS:
EN ESPECIAL A MI HERMANO ALFREDO QUIEN ME
HA BRINDADO UN APOYO INCONDICIONAL
DURANTE TODO ESTE TIEMPO.
GRACIAS.

A MI MUJER, AMIGA Y COMPAÑERA:
DE QUIEN SÓLO HE RECIBIDO AMOR,
COMPRENSIÓN Y APOYO.
GRACIAS. TE QUIERO.

ÍNDICE.

PÁGINA

INTRODUCCIÓN.

CAPÍTULO I.”INDUCCIÓN MATEMÁTICA”. 1

1. El concepto de inducción matemática. 1
1.1. El método de la inducción matemática. 2
2. Teorema (principio de inducción). 3

CAPÍTULO II.”COMBINATORIA”. 9

1. Reglas generales de la combinatoria. 9
1.1. Principio de la suma. 9
1.1.1. Principio de la multiplicación. 10
2. Permutaciones. 11
2.1.Teorema (permutaciones). 12
2.1.1.Ordenaciones con repetición 13
2.1.1.1. Teorema (ordenaciones con repetición). 13
3. Combinatoria. 14
3.1. El principio fundamental del proceso de contar. 16
4. Subconjuntos propio e impropio. 16
5. Triángulo de pascal. 19
6. Teorema del binomio de newton. 20

CAPÍTULO III.”TRIGONOMETRÍA”. 23
3.1. Surgimiento de la trigonometría. 23
3.2. Proporción que relaciona los ángulos centrales y los arcos. 23
3.3. Teorema de Euclides. 25
3.4. Razones trigonométricas. 26
3.4.1. Definición de razones trigonométricas. 26
3.5 Ángulos complementarios y cofunciones. 27
3.5.1 Teorema de relaciones complementarias. 28
3.5.2.Funciones inversas. 28
3.6. Demostración de identidades trigonométricas. 32
3.6.1. Identidades fundamentales. 33
3.6.2. El coseno de la suma de dos ángulos. 35
3.6.2.1. El seno de la suma de dos ángulos 36
3.6.3. Demostraciones. 38

3.7. Ley de senos. 46
3.7.1. Ley de cosenos. 47

CAPÍTULO IV.”RECTAS Y CÓNICAS”. 53
4.1. Intersección de rectas. 53
4.1.1. Métodos. 54
4.1.1.1. Sustitución. 54
4.1.1.2. Reducción (suma-resta). 55
4.1.1.3. Igualación. 55
4.1.1.4. Determinantes 56
4.1.1.5. Graficación. 57
4.2. Rectas paralelas. 58
4.3. Rectas perpendiculares. 59
4.4. Método de interpolación. 60
4.5. Ecuación de segundo grado en una variable. 63
4.6. Circunferencia. 66
4.7. Parábola. 72
4.8. Elipse. 76
4.9. Hipérbola. 82
4.10. ¿Cómo identificar una cónica que solamente se conoce la ecuación general de segundo grado? 89
4.11. Ecuaciones de rotación e identificación de cónicas. 90

CAPÍTULO V.”CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL”. 97

5.1. Demostración de teoremas de límites. 97
5.2. Demostración de algunos límites. 102
5.3. Métodos para calcular límites. 102
5.4 Demostración de teoremas de derivadas. 108
5.5. Máximos, mínimos y puntos de inflexión. 117
5.5.1. Criterio de la primera derivada. 117
5.5.2. Criterio de la segunda derivada. 121
5.5.3. Puntos de inflexión. 121
5.5.3.1 Regla para hallar puntos de inflexión. 121
5.6. Demostración de algunas integrales. 125
5.7. Métodos de integración. 132
5.7.1. Integración de funciones trigonométricas directas. 132
5.7.2. Integración de funciones trigonométricas inversas. 133
5.7.3. Integración logarítmica y exponencial. 135
5.7.4. Integración de funciones trigonométricas de formas. 136
5.8. Integración por partes. 142
5.8.1. Integración por sustitución trigonométrica. 145
5.8.2. Integración por fracciones parciales. 150

Conclusiones. 155

Bibliografía. 157

INTRODUCCIÓN.

El objetivo de este trabajo es presentar las técnicas de cómo realizar una demostración, con los elementos que nos proporciona el mismo problema, así mismo este trabajo se ha hecho pensando en los estudiantes de los primeros semestres de las carreras como son: Actuaría, Arquitectura, Economía, Ingeniería, Matemáticas, Física por mencionar algunas que requieren de hacer algunas demostraciones.

La belleza de la demostración no es cuantas líneas o argumentos se utilicen; sino la genialidad de los artificios usados para llegar a un resultado, es la implementación de dichos artificios donde se aprecia la belleza y la simplicidad de la demostraciones en las matemáticas que hace ver simple lo difícil.

Es conveniente echar mano de todo lo que se conoce del tema e implementar algunos artificios ingeniosos ideados con el fin de economizar trabajo.

Daremos algunos ejemplos donde se utilice lo anterior para que se aprecie la importancia de la implementación de dichos artificios, es imprescindible que se conozca o tenga conocimiento del tema en el cual se desee hacer la demostración; de lo contrario no se tendrá herramienta alguna para tal empresa, por lo que hemos incurrido en ciertas áreas, como: Álgebra, Combinatoria, Trigonometría, Geometría Analítica y Cálculo diferencial e Integral, donde daremos algunas aplicaciones.

En el primer capítulo, trataremos el método de la inducción matemática, donde si no se domina este método, será imposible resolver algunas demostraciones que no es posible demostrar sin esta herramienta tan útil, que sin ella no sería posible el estudio a fondo de la matemática.
Es posible apreciarlo en el segundo capítulo, donde se aplicará la inducción matemática.

El cual trata de cómo contar adecuadamente por medios matemáticos. Llamada la combinatoria la cual surgió en el siglo XVI. Uno de los primeros en ocuparse del recuento del número de combinaciones diferentes en el juego de los dados fue el matemático italiano Tartaglia. Éste confeccionó una tabla que mostraba de cuántas maneras pueden caer **r** dados.

Sin embargo, no tenia en cuenta que una misma suma de puntos puede ser obtenida de diferentes maneras (por ejemplo, 1+3+4 =4+2+2).

Así, el estudio teórico de lo problemas combinatorio fue abordado en el siglo XVII por los científicos franceses Pascal y Fermat.
Un papel importante lo jugo aquí el problema sobre la división de apuesta, que fue propuesto a Pascal, por el caballero de Meré.

El problema consistía en lo siguiente: "el campeonato" de cara o cruz continuaría hasta que se ganasen seis partidos.
Pero se interrumpiría cuando un jugador ganase cinco partidos, y el otro cuatro; ¿Cómo dividir la apuesta?
Era evidente que la división en la razón 5:4 no era justa. Aplicando los métodos de la combinatoria, Pascal resolvió el problema para el caso general, cuando a un jugador le quedaran **r** partidos hasta que gane, y al otro **s.**

Otra resolución del problema fue dada por Fermat.
Los métodos combinatorios juegan un gran papel también en problemas puramente matemáticos: en la teoría de los grupos y de sus representaciones, en el estudio de los fundamentos de la geometría, en las álgebras no asociativas, etcétera. Pero esto no lo trataremos en este trabajo.

En el tercer capítulo, se consideran las bases fundamentales de la trigonometría en base a sus definiciones todo con respecto a relaciones que existen entre los lados de un triángulo y/o su(s) ángulo(s), consideramos algunos ejemplos de aplicación así como demostraciones de ciertas identidades trigonométricas.

En el cuarto capítulo, consideraremos algunos temas de geometría analítica, como son: intersección de rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares y la aplicación a un problema real, la transformación de un lenguaje común a un lenguaje algebraico, en el cual sólo es necesario dar solución a un sistema de ecuaciones de tal manera que pueda darnos la información deseada.

Métodos de solución a sistemas de ecuaciones de 2x2, que únicamente de este tamaño serán considerados los sistemas.

Así como, la solución de ecuaciones de segundo grado en una variable, por medio de factorización y por medio de la fórmula general, también conocida por la chicharronera.

En la parte que corresponde a las cónicas, solamente daremos las demostraciones de las cónicas, también consideraremos, la ecuación general de segundo grado, con término cruzado y sin dicho término.
La identificación de cónicas bajo ciertos criterios. Con los cuales será posible decir con certeza de que cónica se trata.

Daremos las ecuaciones de rotación de las cónicas y sus correspondientes demostraciones, así como algunos ejemplos.

En el último capítulo, trataremos el tema más amplio y complejo que ni siquiera nos atrevemos a enumerar la gran variedad de aplicaciones que se dan en cálculo diferencial e integral, por ser tan grande el campo de aplicación, pero eso no impide dar uno o dos ejemplos para justificar cierto tema.

Sin pérdida de generalidad, como su nombre lo indica (titulo de la tesis) también serán consideradas algunas demostraciones, así como algunos métodos para resolver algunos ejercicios.

Por ejemplo, en la optimización (máximos y mínimos) en cálculo diferencial, usamos dos métodos el de la primer derivada y el de la segunda derivada, lo curioso es de que el resultado es el mismo, no importa que método se utilice. En lo que puede cambiar es en los cálculos.
Mientras uno es muy lento, el otro es muy rápido pero, su lentitud se ve compensada por su precisión.

En el cálculo integral solo daremos, métodos de integración de las formas más básicas, y daremos, por supuesto algunas demostraciones de integrales así como algunos ejemplos.

CAPÍTULO I.

"INDUCCIÓN MATEMÁTICA".

1. EL CONCEPTO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

EL MÉTODO de la inducción matemática se usa ampliamente en la demostración matemática. Sin dominar este método, es imposible estudiar a fondo las matemáticas. Además, la idea básica en que se apoya el método de la inducción matemática, es de gran interés no solo para los estudiantes de matemáticas y de las ciencias aplicadas, sino para estudiantes de otras disciplinas.

En este capítulo se presentan las ideas fundamentales del método de la inducción matemática y algunas aplicaciones más sencillas.

Cualquier proposición puede clasificarse como general o particular.

Ejemplos de proposiciones generales son:

Todos los ciudadanos de México, tienen derecho a una educación.
Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.
Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.

Ejemplos de proposiciones particulares son:

Juan tiene derecho a una educación.
Las diagonales del paralelogramo ABCD se bisecan mutuamente.
140 es divisible entre 5.

El proceso de obtener una proposición particular de una general se llama deducción.

El proceso de obtener una proposición general de una proposición particular se llama inducción. El razonamiento inductivo puede conducir tanto a conclusiones falsas como verdaderas. Se pondrá en claro este punto mediante dos ejemplos.

Primer ejemplo:

1) 100 es divisible entre 5.
2) Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.

La proposición general (2), obtenida de la proposición particular (1) es verdadera.

Segundo ejemplo:

1) 140 es divisible entre 5.
2) Todos los números con tres cifras significativas son divisibles entre 5.
En este caso, la proposición (2), deducida de la proposición particular (1), es falsa.

1.1. EL MÉTODO DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

Primero considérense dos ejemplos del tipo.

Ejemplo: Sea:

$$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Las siguientes igualdades son fáciles de verificar:

$$S_1=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2},$$
$$S_2=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3},$$
$$S_3=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4},$$
$$S_4=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}=\frac{4}{5}.$$

Con base en estos cuatro resultados, podría concluirse que para todos los números naturales n, se cumple que:

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

Ejemplo: A continuación considérese el trinomio x^2+x+41, analizado por primera vez por el famoso matemático y físico suizo (1707-1783) L. Euler. Si en este trinomio se reemplaza "x" por el número cero, se obtiene el número primo 41. Si se reemplaza "x" por 1, nuevamente se obtiene un número primo, a saber 43. si se continúa en esta forma y se reemplaza "x" por los números 2,3,4,5,6,7,8,9,10, sucesivamente, se obtiene en cada uno de los casos, un número primo: 47,53,61,71,83,97,113,131,151, respectivamente. Basándonos en estos resultados, podría concluirse que para todo entero no negativo "x", el valor del trinomio es un número primo.

¿Por qué el razonamiento usado en estos ejemplos es inadmisible en las matemáticas? ¿En qué forma se invalida el razonamiento?

En ambos ejemplos, el razonamiento empleado nos condujo a establecer una proposición general referente a todo n (o todo x) basándose en las proposiciones que se han encontrado verdaderas para ciertos valores particulares de n (o de x). Así, sucede que la proposición general obtenida en el ejemplo 1 es verdadera; sin embargo, la proposición general obtenida en el ejemplo 2 es falsa. De hecho, mientras se puede demostrar que el trinomio x^2+x+41 produce números primos para x = 0, 1, 2, 3,…, 39, también se ve que para x = 40, el valor del trinomio es 41^2, que es un número compuesto.

2. TEOREMA (PRINCIPIO DE INDUCCIÓN).

Cualquier conjunto S de números naturales que satisface:

a) 1 pertenece a S.
b) Si n pertenece a S entonces, n +1 está en S.

Este teorema quedará más claro con algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Sea:
$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ para toda n que pertenece a IN = naturales.

S = {k está en IN tal que $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ } =IN.

Demostración:

Usando los dos pasos de inducción tenemos que

a) Por demostrar que 1 pertenece a S.

Básicamente se sustituye en la suma de tal manera que:

1= (1(1+1))/2 = 2/2 =1
Por lo tanto 1 pertenece a S.
b) Supongamos que vale para “n que pertenece a S” por demostrar que vale para, “n +1 que está en S”.

n está en S entonces

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Por demostrar que:

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

Por ser igual el miembro izquierdo que el miembro derecho tenemos que "n +1 pertenece a S". Por lo tanto S =IN. Concluyendo esto la demostración.

Ejemplo:

Demostrar que: si $q \neq 1$ entonces,

$$1+q+q^2+...+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1} \quad \text{Para toda } n\geq 1$$

a) si n =1

$$1=q^{1-1}=q^0=\frac{q^1-1}{q-1}=1$$

1 está en S.

b) Supongamos que vale para "n que pertenece a S" por demostrar que vale para, "n +1 que está en S".

$$1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n=\frac{q^n-1}{q-1}+q^n$$

$$\frac{q^n-1}{q-1}+q^n=\frac{q^n-1+q^n(q-1)}{q-1}=\frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1}=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Por lo tanto S = IN.

Ejemplo:

Demostrar que n^2+n es par.

$1^2+1=2$ es par.

Supongamos que se vale para n, por demostrar que vale para n+1.

$$(n+1)^2+(n+1)=n^2+2n+1+n+1$$
$$=n^2+n+2(n+1)$$
$$n^2+n=2t \text{ es par}$$
$$=2t+2(n+1)$$
$$=2(t+n+1) \text{ es par}$$
$$\therefore\ S=N.$$

Ejemplo:

Demostrar que:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n=1$

i) $1\epsilon S$

$$1^1=1=\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}=\frac{2(3)}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Supongamos que vale para n

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ii)Por demostrar que vale para n+1

$$1^2+2^2+3^2+...+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Por lo tanto S = IN.

Ejemplo:

Demostrar que:

$$1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$$

n=1

i) $1 \in S$

$$1=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Supongamos que vale para n.

P.D que vale para n+1.

ii)

$$1+5+5^2+5^3+...+5^{n-1}+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

$$\frac{5^n-1}{4}+5^n=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

$$\frac{5^n-1+4\left(5^n\right)}{4}=\frac{5^n(1+4)-1}{4}$$

$$\frac{5^n(5)-1}{4}=\frac{5^{n+1}-1}{4}$$

Por lo tanto S = IN.

Ejemplo:

Demostrar que:

1/1*2 + 1/2*3 + 1/3*4 +…+ 1/n*(n + 1) = n/(n + 1)

a) n = 1; 1 está en S.
1/1(1 + 1) = 1/2 = 1/(1 + 1) = 1/2.

b) Supongamos que vale para “n que pertenece a S” por demostrar que vale para, “n +1 que está en S”.

1/1*2 + 1/2*3 + 1/3*4 +…+ 1/n*(n + 1) + 1/(n + 1)(n + 2) = (n + 1)/(n + 2)
n/(n + 1) + 1/(n + 1)(n + 2) =(n(n + 2) + 1)/(n + 1)(n + 2)
= (n^2 +2n + 1)/(n +1) (n + 2)
= (n +1)(n + 1)/(n +1) (n + 2)
= (n + 1)/(n + 2)

Por lo tanto S =IN.

Ejemplo:

Demostrar que:

1/1*3 + 1/3*5 +…+ 1/(2n – 1)(2n + 1) = n/(2n + 1)

a) n = 1; 1 esta en S.
1/(2*1 – 1)(2*1 + 1) = 1/1*3 = 1/3

Supongamos que vale para “n que pertenece a S” por demostrar que vale para, “n +1 que está en S”.

b)
1/1*3 + 1/3*5 +…+ 1/(2n – 1)(2n + 1) + 1/(2n + 1)(2n + 3) = (n + 1)/(2n + 3)
Desarrollando el miembro izquierdo tenemos que

n/(2n + 1) + 1/(2n + 1)(2n + 3) = (n(2n + 3) + 1)/(2n + 1)(2n + 3)
=($2n^2$ + 3n + 1)/(2n +1)(2n +3)
= (2n +1)(n + 1)/(2n + 1)(2n + 3)
= (n + 1)/(2n + 3)
Por lo tanto S =IN.

Ejemplo:

Demostrar que:

1/1*2*3 +1/2*3*4 +…+ 1/n(n + 1)(n + 2) = n(n + 3)/4(n + 1)(n + 2).

a) si n = 1, entonces 1 está en S.
1/(1 + 1)(1 + 2) = 1/2(3) = 1/6.
1/4(1+ 1)(1 + 2) = 4/4(2)(3) =1/6.

Supongamos que vale para “n que pertenece a S” por demostrar que vale para, “n +1 que está en S”.
b)
1/1*2*3 +1/2*3*4 +…+ 1/n(n + 1)(n + 2) + 1/(n + 1)(n + 2)(n + 3)=
= (n + 1)(n + 4)/4(n + 2)(n + 3).

Desarrollando el miembro izquierdo tenemos que

n(n + 3)/4(n + 1)(n + 2) +1/(n + 1)(n + 2)(n + 3) =
= (n$(n + 3)^2$ + 4)/4(n + 1)(n + 2)(n + 3)

$= (n(n^2 + 6n + 9) + 4)/4(n + 1)(n + 2)(n + 3)$
$= (n^3 + 6n^2 + 9n + 4)/4(n + 1)(n + 2)(n + 3)$
$= (n + 1)(n^2 + 5n + 4)/4(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ Factorizando y simplificando
$= (n + 1)(n + 4)/4(n + 2)(n + 3)$

Por lo tanto S =IN.

Ejemplo:

$$1^4+2^4+...+n^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

i) n=1 n∈S

$$1^4=\frac{6(1)^5+15(1)^4+10(1)^3-1}{30}$$
$$=\frac{6+15+10-1}{30}$$
$$=\frac{30}{30}$$
$$=1$$

Supongamos que vale para n.

Por demostrar que vale para (n + 1).

ii)
$$1^4+2^4+...+n^4+(n+1)^4=\frac{6(n+1)^5+15(n+1)^4+10(n+1)^3-(n+1)}{30}$$

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$
$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$
$$(n+1)^5=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$$

$$\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}+(n+1)^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n+30(n+1)^4}{30}$$
$$=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n+30n^4+120n^3+180n^2+120n+30}{30}$$
$$=\frac{6n^5+45n^4+130n^3+180n^2+119n+30}{30}$$

$$\frac{6(n+1)^5+15(n+1)^4+10(n+1)^3-(n+1)}{30}$$
$$=\frac{6n^5+45n^4+130n^3+180n^2+119n+30}{30}$$

∴ S=IN.

CAPÍTULO II.

"COMBINATORIA".

1. REGLAS GENERALES DE LA COMBINATORIA.

El Cálculo Combinatorio es una herramienta para contar ya que en lugar de contar "a fuerza bruta los casos favorables y los casos totales" podemos utilizar fórmulas. Algunos estudiantes encuentran difícil el cálculo combinatorio porque o bien las preguntas no son entendidas o bien el experimento aleatorio no es identificado claramente. En los ejemplos que discutiremos enfatizaremos ambos puntos. Existen dos principios básicos que nos permiten contar eficazmente: el principio de la suma y el principio de la multiplicación. Estos principios son dos propiedades de la cardinalidad, #.

1.1. Principio de la Suma.

Si un evento A puede ocurrir de m maneras distintas y un evento alternativo B puede ocurrir de n maneras distintas, de tal manera que A y B no pueden ocurrir simultáneamente entonces, el evento A o B puede ocurrir de (m + n) maneras distintas.

Al asociar número de maneras con cardinalidad podemos traducir al lenguaje matemático el principio de la suma como:
#(AUB)=#A + #B, cuando la intersección de A con B es vacía.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos dos opciones para ir de México D.F. a Paris, Francia: por avión o por barco. Si existen tres rutas aéreas y cuatro marítimas, ¿cuántas rutas posibles hay?
Sea A = viajar del D.F. a París en avión.
B = viajar del D.F. a París en barco.
Si suponemos que no podemos cambiar de un medio de transporte a otro una vez iniciado el viaje entonces A y B no pueden ocurrir simultáneamente por lo que el número de rutas es, 3+4 de acuerdo con el principio de la suma.

1.1.1. Principio de la multiplicación.

Si un evento A puede ocurrir de n maneras distintas y un evento B puede ocurrir de m maneras diferente entonces, el evento A y B puede ocurrir de mxn maneras distintas.

Al asociar número de maneras con cardinalidad podemos traducir al lenguaje matemático el principio de la multiplicación como:

#(AXB)=#A#B, donde AXB es el producto cartesiano de A con B = $\{(x,y); x \in A,\ y \in B\}$

Ejemplo:

Si un restaurante nos ofrece una entrada, tres opciones de sopa, cinco opciones de plato fuerte y un postre, ¿cuántos menús se puede formar que tengan una entrada, una sopa, un plato fuerte y un postre?

Sean

A = seleccionar una sopa.

B = seleccionar un plato fuerte.

Tenemos que A puede ocurrir de tres maneras y B de cinco. De acuerdo al principio de la multiplicación A y B puede ocurrir de 3(5) = 15 maneras distintas. Por lo tanto, el número de menús es 15 ya que sólo hay una entrada y un postre.

Ejemplo:

Un artículo manufacturado debe pasar por dos estaciones de control. En cada estación se revisa el artículo para una característica particular y se le marca de acuerdo a su estado. Si en la estación uno hay tres posibles clasificaciones y en la estación dos hay cuatro.

¿De cuántas maneras se puede clasificar a un artículo que pasa por las dos estaciones?

Sea

A = clasificar al artículo en la estación uno.

B = clasificar el artículo en la estación dos.

Tenemos que A puede ocurrir de tres maneras mientras que B puede ocurrir de cuatro. De acuerdo con el principio de la multiplicación A y B puede ocurrir de 12 = 3(4) maneras.

Si las clasificaciones en la estación uno son a, b, c y las de la estación dos son 1, 2, 3 y 4 entonces, un artículo que pasa por las dos estaciones tendrá una de las siguientes: a1, a2, a3, a4,b1, b2, b3, b4, c1, c2, c3, c4.

Estas clasificaciones son equivalentes a los elementos de (a, b, c)*(1,2,3,4).

A continuación encontraremos fórmulas relacionadas con la formación de arreglos a partir de objetos dados. El concepto de arreglo abarca tanto al de subconjunto, donde el orden es irrelevante, como el de ordenación, donde el orden es relevante. Así, un arreglo no ordenado es un subconjunto y un arreglo ordenado es una ordenación.

Suponiendo, primero que los objetos dados son: n, r Є N, y que son distintos.

2. PERMUTACIONES.

Ejemplo:

Si 16 concursantes se someten a una contienda de prueba, ¿en cuántas formas pueden los jueces otorgar un primer premio y un segundo premio?

Como el premier premio se puede otorgar en 16 formas y el segundo premio debe darse a uno de los otros 15 concursantes, hay en total:
16(15) = 240 posibilidades.

Ejemplo:

¿En cuántas formas pueden los 42 miembros de un sindicato elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero?

Suponiendo que se vote por el tesorero, después por el secretario, luego por el vicepresidente y por último por el presidente, tenemos que existen 42 formas en las que se puede elegir un tesorero, 41 maneras de elegir un secretario, 40 formas en las que se puede elegir un vicepresidente y 39 posibilidades de elegir un presidente.
Por tanto, existen en total

42(41)(40)(39) = 2 686 320 posibilidades distintas.

Sin pérdida de generalidad, si se seleccionan **r** objetos de un conjunto de **n** objetos de un distintos, a cualquier disposición (orden) específica de estos objetos se le llama **permutación.**

Ejemplo:

Determinar el número de permutaciones de dos de las cinco vocales a, e, i, o y u, y hacer una lista de todas ellas.

Como **n** = 5 y **r =** 2, existen 5(4) = 20 permutaciones distintas.

Ae, ai, ao, au, ea, ia, oa, ua, ei, eo, eu, ie, oe, ue, io, iu, ou, oi, ui, uo.

Para expresar en la fórmula de ${}_nP_r$ en términos de factoriales, obsérvese que:

${}_n\mathbf{P}_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ (1)

${}_n\mathbf{P}_r$ (n-r)! = n(n-1)(n-2)...(n-r +1)(n-r)! = n!. Dividimos por (n-r)! y obtenemos

${}_n\mathbf{P}_r = n!/(n-r)!$ (2)

son dos formas diferentes de representar las permutaciones, la segunda esta en notación factorial.

Ejemplo:

¿Cuántas palabras diferentes de cuatro letras se pueden formar con las siguientes letras tqehucbkrwnoi?
${}_n\mathbf{P}_r = n!/(n-r)!$ ${}_{13}P_4=13!/(13-4)!=13!/9!=13*12*11*10=17{,}160$

Arreglos diferentes de 13 letras tomados de 4 en 4 letras.

2.1. Teorema (permutaciones):

Si ${}_n\mathbf{P}_r$ es el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r, entonces ${}_n\mathbf{P}_r = n!/(n-r)!$ es el número de formas diferentes en las cuales puede darse un arreglo de n objetos tomados de r en r.

Observación: Las ordenaciones sin repetición de n elementos tomados de r en r está definido como
O(n, r) = n!/(n-r)!. Si n es diferente a r en este caso $n \geq r$.

Por lo tanto las permutaciones es lo mismo que las ordenaciones sin repetición, por lo que la demostración de este teorema se hará con las ordenaciones sin repetición.

Demostración:

Demostración por inducción sobre r.
Base r = 1

$$nO_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Supongamos que vale para r.
Por demostrar que vale para r +1.

$$nO_{r+1} = \frac{n!}{(n-(r+1))!}$$

$$nO_{r+1} = nO_r(n-r)$$

$$nO_{r+1} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)$$

$$= \frac{n!}{(n-(r+1))!}(n-r)$$

Como

$$(n-r)! = (n-r)(n-1-r)!$$

$$= (n-r)(n-(r+1))!$$

$$nO_{r+1} = \frac{n!}{(n-r)(n-(r+1))!}(n-r)$$

$$= \frac{n!}{(n-(r+1))!}$$

2.1.1. ORDENACIONES CON REPETICIÓN

$OR^r_n = n^r$ ordenaciones con repetición de n elementos tomados de r en r, donde n y r son naturales.

¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar con las letras del alfabeto?
$OR^5_{27} = 27^5$.
Esto quiere decir que en cada lugar u ordenación se puede tomar cualquier letra de las 27 que tiene el alfabeto.

2.1.1.1. Teorema (ordenaciones con repetición): $OR^r_n = n^r$.

Demostración:

Demostración por inducción sobre r.

Base r = 1 entonces tenemos que:

$OR^1_n = n^1 = n$. Supongamos que vale para r, por demostrar que vale para r +1.
$OR^{r+1}_n = n^{r+1}$
$OR^{r+1}_n = n\ OR^r_n$
$= n*n^r$
$= n^{r+1}$

Ejemplo:

Hasta hace algunos años, los números telefónicos en el área metropolitana del Distrito Federal tenían 7 dígitos. Los números telefónicos pueden ser conceptualizados como arreglos ordenados con repetición.

¿Cuántos números telefónicos se podían formar?

Como el primer dígito no podía ser cero, se podían crear 9 x 10^6 = 9 millones de números telefónicos; que son suficientes, para una Ciudad tan poblada como la Ciudad de México.

Ejemplo:

Hace varios años, los números de las placas de automóviles en México tenían 3 dígitos y 3 letras. La matrícula de los automóviles se puede considerar como arreglos ordenados con repetición.

¿Cuántos matrículas de automóvil se podrán formar, considerando 27 letras y 10 números?

Supongamos que primero van las tres letras seguido de los tres dígitos, se podían crear $OR^3_{27} = 27^3$ para las tres letras y para los tres números tenemos $OR^3_{10} = 10^3$, por lo tanto tenemos:
$27^3 * 10^3 = 19\,683\,000$ número de matrículas de automóvil.

3. COMBINATORIA.

En general si no es importante el ordenen el cual se eligen las dos vocales de las cinco, sólo existen 10 maneras de hacer la elección: ae, ai, ao, au, ei, eo,eu, io, iu y ou.

Sin pérdida de generalidad, existen r! permutaciones de **r** objetos cualquiera seleccionados de un conjunto de **n** objetos distintos, de manera que las $_nP_r$ permutaciones de **r** objetos seleccionados de un conjunto de **n** objetos distintos contengan a cada conjunto de **r** objetos **r!** Veces. Por lo tanto, para escribir una fórmula para el número de formas en las que se pueden elegir **r** objetos de un conjunto de **n** objetos distintos, también llamado número de combinaciones de **n** objetos tomados **r** a la vez y representados como $\binom{n}{r}$, debemos dividir $_n\mathbf{P}_r$ entre **r!,** y obtenemos:

$${}_n\mathbf{C}_r = \binom{n}{r}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demostración:

En las permutaciones se considera el orden y en las combinaciones no por lo que se eliminan las permutaciones que contienen los mismos elementos en orden diferente, esta eliminación se hace al multiplicar por el inverso multiplicativo de r! Y de esta manera se tiene que las combinaciones son:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

y sólo se tienen grupos o bloques de elementos diferentes.

Ejemplo:

¿En cuantas formas puede una persona invitar a tres de sus ocho mejores amigos a una fiesta?
La primera fórmula y segunda fórmula general nos da:

$$\binom{8}{3} = \frac{8(7)(6)}{3!} = 8(7) = 56$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = 56 \text{ Formas distintas.}$$

Ejemplo:

¿En cuantas formas puede un estudiante seleccionar dos de seis cursos de matemáticas junto con tres de siete cursos de inglés?

Pues bien el estudiante puede seleccionar los dos cursos de matemáticas en $_6C_2$ formas, los tres cursos de inglés en $_7C_3$ maneras y por tanto, los cinco cursos en**:** $\mathbf{{}_6C_2 * {}_7C_3}$ = 15(35) =525 formas distintas.

Ejemplo:

Calcule el número de formas en las que una cadena de moteles puede seleccionar cuatro de once sitios para la construcción de nuevos moteles.

$_{11}\mathbf{C}_4$ **=**330 formas diferentes.

3.1 EL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL PROCESO DE CONTAR

Si se puede hacer una primera decisión en **n** formas diferentes y una segunda en **m** formas, también diferentes, entonces las dos decisiones se pueden hacer (en el orden dado) en **nxm**. O sea, $\mathbf{n*m}$ formas diferentes.

De manera general, si hay i decisiones que se pueden hacer en n_1, n_2, n_3,…,n_i formas, respectivamente, entonces hay $n_1 * n_2 * n_3 * n_4 * \ldots * n_i$, formas diferentes de hacer todas las decisiones.

4. SUBCONJUNTOS PROPIO E IMPROPIO.

Propio.
Un conjunto A tiene cardinalidad **n** y otro conjunto B tiene cardinalidad **m** entonces B esta contenido en A propiamente, es decir, $\mathbf{m < n}$.

Impropio.
Un conjunto A tiene cardinalidad **n** y otro conjunto B tiene cardinalidad **m** entonces B esta contenido en A impropiamente, es decir, $\mathbf{m \leq n}$.

Sea A = {a, b, c} un conjunto.
Sub A = {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, {}}.
B = {a, b} conjunto.
Sub B = {{a}, {b}, {a, b}, {}}. Entonces B esta contenido en A propiamente.
Es posible enunciar un teorema basado en los resultados anteriores.
Para demostrar este teorema, considere un conjunto A con n elementos. Suponiendo que la regla que se dio para determinar si un elemento dado de A esta en un subconjunto B, entonces B se podría construir considerando uno a uno los elementos de A y determinando si pertenece o no a B.

Considerando dos casos:

Ejemplo:

Sea A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19} y

B = {2, 3, 5, 7,11, 13, 17, 19}

Entonces los 19 elementos de A se pueden considerar para determinar si pertenecen o no a B. La primera decisión que se debe hacer es si uno es o no un elemento de B. Después, si 2 es o no un elemento de B, y así sucesivamente, hasta hacer las 19 decisiones.
Al construir cualquier subconjunto de A se deben hacer 19 decisiones, cada una de ellas tiene dos formas posibles (cualquiera de ellas incluye o excluye al elemento con respecto al conjunto).

Si cualquiera de las 19 decisiones se hace de manera diferente de la correspondiente decisión para B, entonces el subconjunto formado es diferente de B.

Así, de acuerdo con el principio fundamental del proceso de contar, el número de formas diferentes en las que un subconjunto de A se puede construir es $2*2*2*\ldots*2$ (19 factores), o sea 2^{19}.Generalizando, si un conjunto tiene n elementos, siendo n un número natural cualquiera, el principio fundamental del proceso de contar establece que hay $2*2*2*\ldots*2$ (**n** factores) formas posibles diferentes de construir un subconjunto a partir del conjunto dado. Con esto se demuestra el siguiente teorema.

Teorema:

El número de subconjuntos de un conjunto que contiene n elementos es 2^n.
Una manera de construir un subconjunto de un conjunto dado podría ser: excluir el primer elemento; después el segundo; luego el tercero; etcétera. Este procedimiento conducirá al conjunto vacío. Consideremos el conjunto D = {a, b, c, d}.
Listemos estos subconjuntos. Con el objeto de deducir una fórmula general para obtener el número de subconjuntos con m elementos (a un subconjunto de r elementos le llamaré subconjunto-r) de un conjunto dado de n elementos (conjunto-n), vamos a considerar un método de escoger los 6 subconjuntos-2 del conjunto D (un conjunto-4).

El número de permutaciones de 4 objetos tomados de 2 en 2 es 4!/(4-2)!= 12.
Las 12 permutaciones del conjunto D son:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

Nótese que las permutaciones ab y ba son el mismo subconjunto, digamos {a,b} en general, para cada subconjunto-2 de D hay dos permutaciones de los elementos de ese subconjunto.

Por consiguiente, si dividimos entre dos el número de permutaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2, tendremos el número de subconjuntos-2 de un conjunto-4.

Dado un conjunto Q con n elementos, ¿cuántos subconjuntos-r tiene Q? hay n!/(n-r)! permutaciones de los n elementos de Q tomados de r en r.

Para cada subconjunto-r de Q hay r! permutaciones de sus elementos.
Entonces, si, x es el número de subconjuntos-r, x = n!/(n-r)!.
Frecuentemente, el número de subconjuntos-r de un conjunto-n dado se representa por

$$\mathbf{{}_nC_r = n!/r!(n-r)!.}$$

Teorema:

Para todos los enteros no negativos n y r, si r<= n, entonces $\mathbf{{}_nC_r = n!/r!(n-r)!}$**.**

¿Cuál es el significado de $\mathbf{{}_4C_0}$?

Que sólo hay un subconjunto-0 de un conjunto-4 que no tiene elementos.

¿Cuál es el significado de $\mathbf{{}_4C_4}$?

Que sólo hay un subconjunto-4 de un conjunto-4 que tiene 4 elementos.
Por lo tanto
$\mathbf{{}_4C_0 = {}_4C_4}$ generalizando este resultado tenemos
$\mathbf{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$**.**

Demostrar que para cualquier entero no negativo **n** y **r** si **r ≤ n** entonces $\mathbf{{}_nC_r = {}_nC_{n-r}}$**.**

Demostración.

Por definición tenemos que:

$$nCr=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$nC(n-r)=\frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Sólo simplificamos el denominador para ver si es igual al primer denominador y de ser igual se tiene que es cierta dicha igualdad.
Como se cumple la igualdad entonces estas combinaciones son iguales.

Demostrar que: $_{n}C_{r-1} + {}_{n}C_{r} = {}_{n+1}C_{r}$

Demostración:

Basta con encontrar el denominador común y resolver la suma de fracciones. Para lo cual es necesario conocer que factorial es mayor
Por definición de combinaciones tenemos que:

$$nC(r-1)=\frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} \quad \text{y} \quad nCr=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

nota:
$r!=r(r-1)!$
$(n-(r-1))!=(n+1-r)!=(n+1-r)(n-r)!$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!(n+1-r)}{(r-1)!(n+1-r)(n-r)!}+\frac{n!r}{r(r-1)!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!n+n!-n!r+n!r}{r!(n+1-r)!}=\frac{n!(n+1)}{r!(n+1-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!((n+1)-r)!}=(n+1)Cr$$

Por lo tanto se llega a la igualdad que es lo que se deseaba demostrar.

5. TRIÁNGULO DE PASCAL.

El triángulo de Pascal está compuesto por los coeficientes de un binomio elevado a un exponente **n,** donde **n** es un número natural. Como se ilustra a continuación:

1	$(a+b)^0=1$
1 1	$(a+b)^1=a+b$
1 2 1	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
.	.
.	.
.	.

Los valores de este triángulo se pueden verificar con las combinaciones siguientes:

${}_0C_0$

${}_1C_0 \quad {}_1C_1$

${}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2$

${}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3$

.

.

.

${}_nC_0 \quad {}_nC_1 \quad {}_nC_2 \quad {}_nC_3 \quad {}_nC_4 \quad {}_nC_5 \ldots \quad {}_nC_n$

Usando el resultado ${}_nC_{r-1} + {}_nC_r = {}_{n+1}C_r$

${}_0C_0 \qquad = 1$

${}_1C_0 + {}_1C_1 = {}_2C_1;$

${}_3C_0 + {}_3C_1 = {}_4C_1;\ {}_3C_1 + {}_3C_2 = {}_4C_2;\ {}_3C_2 + {}_3C_3 = {}_4C_3;$

${}_4C_0 + {}_4C_1 = {}_5C_1;\ {}_4C_1 + {}_4C_2 = {}_5C_2;\ {}_4C_2 + {}_4C_3 = {}_5C_3;\ {}_4C_3 + {}_4C_4 = {}_5C_4.$

Etcétera. Siendo esta la manera más precisa de construir el triángulo de Pascal. Los valores de este triángulo son los coeficientes de cada uno de los términos de los que consta un polinomio de grado **n**, sin embargo no da mayor información con respecto a los exponentes, en tal caso usaremos el siguiente teorema para ver como se comportan los exponentes.

6. TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON.

Sea a, b naturales diferentes a cero entonces para toda n natural se tiene que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Demostración por inducción sobre **n**.

Base n = 0. $(a+b)^0 = 1$.

Supongamos que vale para **n.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right).$$

Por demostrar que vale para **n +1**.

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} \right)$$

Desarrollando tenemos que

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^{n}(a+b) = \left[\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} \right) \right](a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^{k} \right) + \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \right)$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^{n} b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^{2} + \binom{n}{3} a^{n-2} b^{3} + \ldots + \binom{n}{n} a b^{n}$$
$$+ \binom{n}{0} a^{n} b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^{2} + \binom{n}{2} a^{n-2} b^{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

Agrupando y usando el resultado ${}_{n}C_{r-1} + {}_{n}C_{r} = {}_{n+1}C_{r}$. Tenemos que

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} \right) + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1}{k} \right) a^{n+1-k} b^{k} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^{k} \right)$$

Esta demostración es la generalización de:

$${}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1} + {}_{n}C_{2} + {}_{n}C_{3} + \ldots + {}_{n}C_{n-1} + {}_{n}C_{n} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

Donde 2^{n} representa el número de subconjuntos que se pueden obtener de un conjunto S cualquiera, donde **n** es la cardinalidad de dicho conjunto.

Definición:

La cardinalidad de un conjunto es igual al número de elementos de los cuales consta dicho conjunto.

Definición:

Factorial: es el producto de números naturales desde el número uno hasta el número en cuestión.

$0!=1$ por definición de factorial.
$1!=1$
$2!=2(1)$
$3!=3(2)(1)$
$4!=4(3!)$
$5!=5(4!)$
.
.
.
$n!= n(n-1)!$

CAPITULO III.

TRIGONOMETRÍA.

3.1. SURGIMIENTO DE LA TRIGONOMETRÍA.

Si se nos pidiera que dijéramos nuestra estatura, no dudaríamos en tomar una cinta métrica y llevar a cabo la medición de manera directa. Pero si nos pidieran que calculemos el área de nuestra recámara en metros cuadrados, no sería posible que midamos dicha área en forma directa poniendo cuadrados de metro cuadrado por lado por todo el piso para después contarlos. En vez de esto, tal vez encontraríamos el área en forma **indirecta** usando la fórmula de área $A = b_* h$.

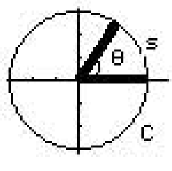
En general, la **medición indirecta** es un proceso de encontrar medidas desconocidas, a partir de conocidas, a través de un proceso de razonamiento.

Los griegos de Alejandría, contribuyeron en forma sustancial el arte de la **medición indirecta** creando fórmulas para encontrar áreas, volúmenes y longitudes. Mediante el uso de estas fórmulas, fueron capaces de calcular la circunferencia de la Tierra con un error mínimo del 2% y determinar la distancia a la Luna.

Fue durante la primera parte de este período griego que nació la trigonometría, el estudio de los triángulos.

Hiparco (160-127 a. C.), uno de los más grandes astrónomos del mundo antiguo, llevo a cabo el primer estudio sistemático de la medición indirecta de triángulos.

3.2. PROPORCIÓN QUE RELACIONA LOS ÁNGULOS CENTRALES Y LOS ARCOS.

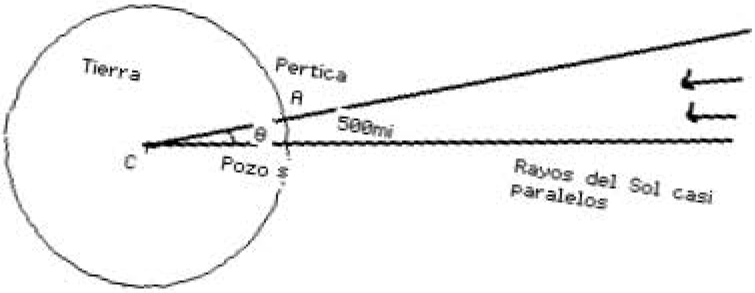


$$\frac{\theta}{360°}=\frac{s}{C}$$

Ejemplo: Medición aproximada de la circunferencia de la Tierra.

Eratóstenes (240 a.C.). Razonó de la siguiente manera: es bien conocido que Siena (ahora Asuán), durante el solsticio de verano, el Sol del mediodía

se refleja en el agua de un pozo profundo (esto significa que sus rayos inciden verticalmente en el agua del pozo y, por lo tanto, el Sol debe estar exactamente encima de él). Eratóstenes pensó que si los rayos del Sol que entraban al pozo siguieran hacia el interior de la Tierra, pasarían por su centro.
El mismo día, a la misma hora, a 500 millas aproximadamente, en Alejandría, los rayos del Sol cruzaban una pértica vertical en un ángulo de 7.5º. Puesto que los rayos del Sol son casi paralelos cuando llegan a la Tierra, Eratóstenes concluyó que el ángulo ACs medía sólo 7.5º.



Considerando el profundo razonamiento de Eratóstenes, el cálculo usado sólo requiere de álgebra elemental:

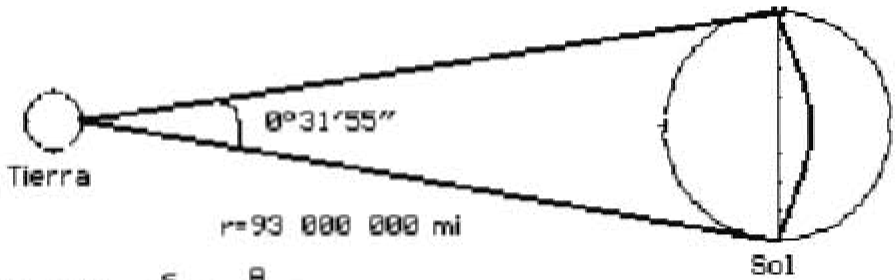
$$\frac{s}{C} \approx \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$\frac{500mi}{C} \approx \frac{7.5^\circ}{360^\circ} \Rightarrow C \approx \frac{360}{7.5}(500mi) = 24000mi.$$

Y el valor calculado hoy en día es de 24872 millas.

Ejemplo:

Diámetro del Sol.
Si la distancia entre la Tierra y el Sol es de 93 000 000 de millas, determine el diámetro del Sol, si este subtiende un ángulo de 0º31´55" visto desde la superficie de la Tierra.



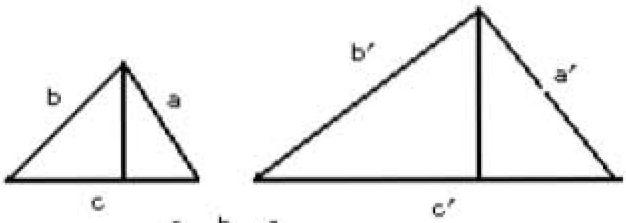
Usando $\dfrac{s}{2\pi r}=\dfrac{\theta}{360°}$

$\theta=0°31'55''=0.532°$

$\Rightarrow s=\dfrac{2\pi(93\ 000\ 000)(0.532)}{360}=864{,}000$ mi diametro del Sol.

3.3. Teorema de Euclides.

Si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales.

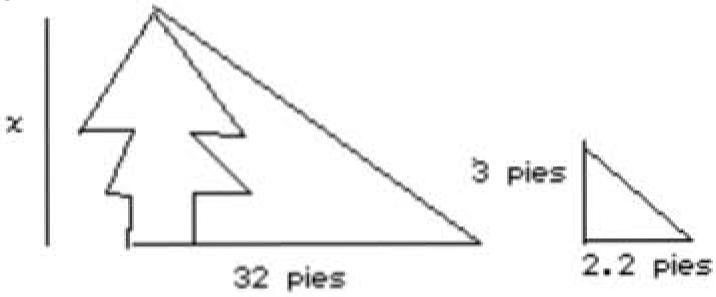


$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

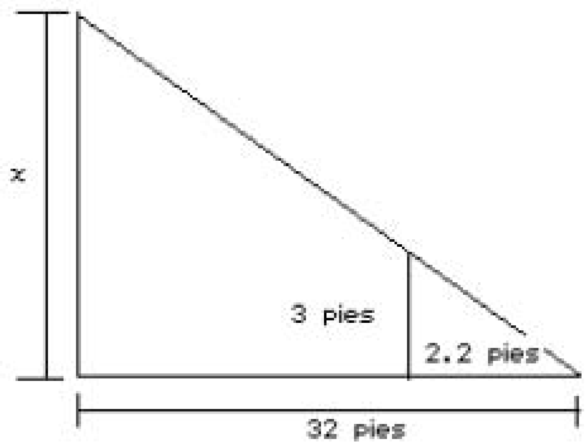
Son triángulos semejantes.

Ejemplo:

Un árbol proyecta una sombra de 32 pies y, al mismo tiempo, un palo que mide una yarda (3 pies) proyecta una sombra de 2.2 pies.
¿Qué altura tendrá el árbol?



Este problema lo podemos traducir de la siguiente forma:



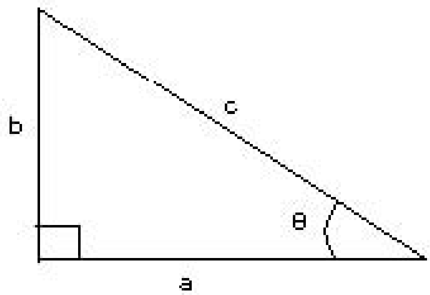
Usando el teorema de Euclides tenemos que:

$$\frac{x}{3 \text{ pies}} = \frac{32 \text{ pies}}{2.2 \text{ pies}}$$

$$x = \frac{32(3 \text{ pies})}{2.2} = 44 \text{ pies de altura.}$$

3.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

Podemos observar que existen seis posibles razones entre los lados de un triángulo rectángulo que pueden calcularse para cada ángulo θ.



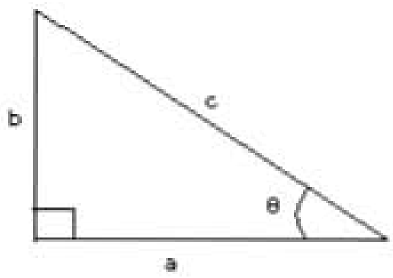
$$\frac{b}{c},\ \frac{c}{b},\ \frac{a}{c},\ \frac{c}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{a}{b}$$

Estas razones se conocen como razones trigonométricas, y debido a su importancia, cada una tiene un nombre:
Seno (sen), coseno (cos), tangente (tan), cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc).
Cada lado del triángulo tiene un nombre especial dependiendo de la posición con respecto a un ángulo se conocen como:

Cateto Opuesto = b
Cateto Adyacente = a
Hipotenusa = c

En el caso que nos ocupa consideremos a θ como el ángulo de referencia.

3.4.1. DEFINICIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

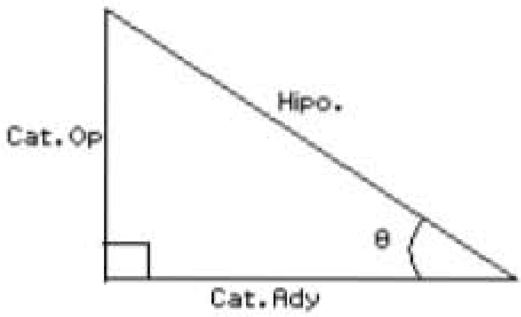


$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{c} \qquad \text{Csc } \theta = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{c} \qquad \text{Sec } \theta = \frac{c}{a}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{b}{a} \qquad \text{Cot } \theta = \frac{a}{b}$$

Otra definición alternativa es:



$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{Cat.Op}}{\text{Hipo.}} \qquad \text{Csc } \theta = \frac{\text{Hipo.}}{\text{Cat.Op}}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{Cat.Ady}}{\text{Hipo.}} \qquad \text{Sec } \theta = \frac{\text{Hipo.}}{\text{Cat.Ady}}$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{Cat.Op}}{\text{Cat.Ady}} \qquad \text{Cot } \theta = \frac{\text{Cat.Ady}}{\text{Cat.Op}}$$

3.5. ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y COFUNCIONES.

Para entender con mayor facilidad estos conceptos, es necesario responder a la siguiente pregunta:

¿Cuál es al significado del prefijo **co** en las funciones coseno, cosecante y cotangente?.

El prefijo **co** se refiere a una relación de ángulos complementarios.

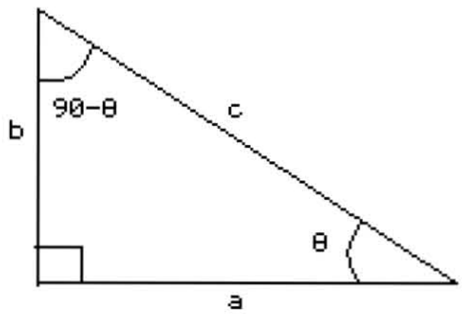
Recuerde que dos ángulos positivos son complementarios si su suma es igual a 90º.
Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

¿Por qué?.

Puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180º y el triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90º, entonces la suma de los dos ángulos restantes debe medir 180º-90º= 90º.

En consecuencia, los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre son complementarios.

3.5.1 TEOREMA DE RELACIONES COMPLEMENTARIAS.



$\text{Sen } \theta = \text{Cos } (90-\theta)$

$\text{Tan } \theta = \text{Cot } (90-\theta)$

$\text{Sec } \theta = \text{Csc } (90-\theta)$

Demostracion

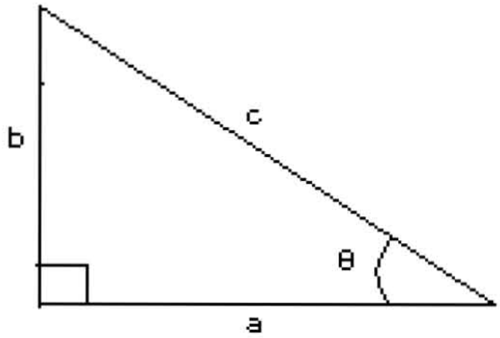
Como

$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{c} = \text{Cos } (90-\theta)$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{b}{a} = \text{Cot } (90-\theta)$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{a}{c} = \text{Csc } (90-\theta)$$

3.5.2 FUNCIONES INVERSAS.



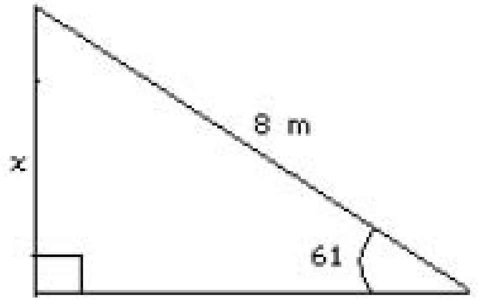
$$\text{Csc } \theta \text{ Sen } \theta = \frac{c}{b}\frac{b}{c} = 1 \quad \therefore \text{ Csac } \theta = \frac{1}{\text{Sen } \theta}$$

$$\text{Sec } \theta \text{ Cos } \theta = \frac{c}{a}\frac{a}{c} = 1 \quad \therefore \text{ Sec } \theta = \frac{1}{\text{Cos } \theta}$$

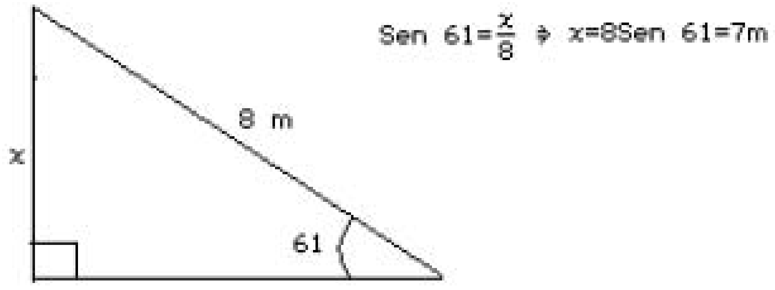
$$\text{Tan } \theta \text{ Cot } \theta = \frac{b}{a}\frac{a}{b} = 1 \quad \therefore \text{ Cot } \theta = \frac{1}{\text{Tan } \theta}$$

Ejemplo:

Una escalera de 8 metros de largo se coloca contra un edificio.

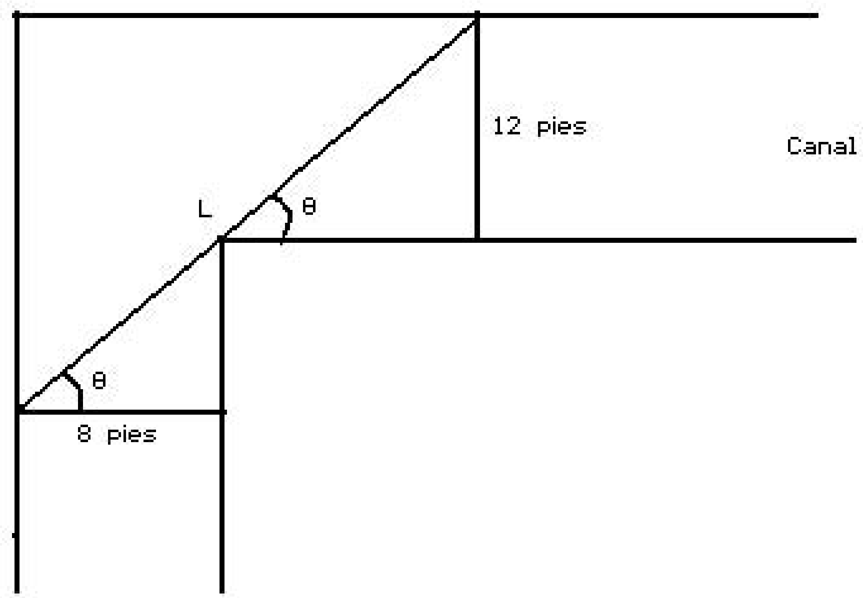


¿A qué altura estará la parte superior de la escalera sobre el edificio?



jemplo:

Un tronco de longitud L flota por un canal que tiene una vuelta en ángulo recto, tal como se indica en la figura siguiente.



¿Cualquier tronco puede dar la vuelta, sin importar su tamaño? No.

¿Qué longitud debe tener el tronco para que pueda dar vuelta, en el canal?

Como podemos apreciar podemos trabajar con dos longitudes por tener dos triángulos rectángulos tenemos que:

L=longitud del tronco

Sea $L=l_1+l_2$ entonces

$$\text{Cos } \theta=\frac{8}{l_1} \Rightarrow l_1=\frac{8}{\text{Cos } \theta}$$

$$\text{Sen } \theta=\frac{12}{l_2} \Rightarrow l_2=\frac{12}{\text{Sen } \theta}$$

$$\therefore L=\frac{12}{\text{Sen } \theta}+\frac{8}{\text{Cos } \theta}$$

$$L=12\text{Csc } \theta+8\text{Sec } \theta$$

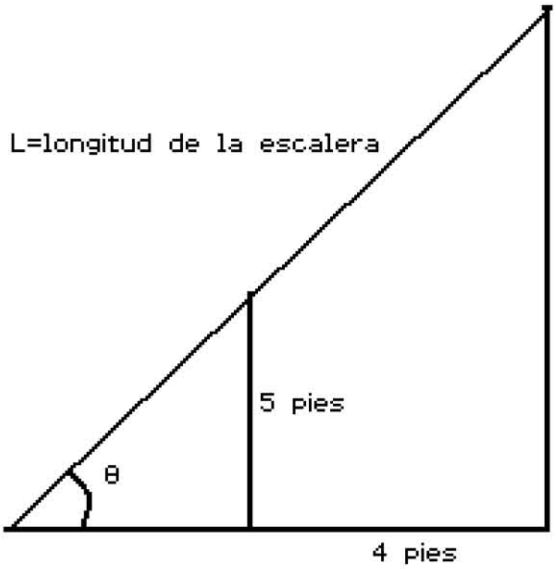
Usemos esta última ecuación para calcular la longitud del tronco más pequeño que puede dar vuelta en este canal, para tal empresa consideremos una tabla con distintos valores del ángulo como se indica:

θ	30	35	40	45	50	55	60
L	33.2	30.7	29.1	28.3	28.1	28.6	29.8

Según los valores obtenidos en la tabla la longitud mínima es 28.1 pies que pasa tocando ambos lados y la esquina del canal es de 50º.
Por lo que podemos concluir que la longitud del tronco depende del ángulo con que de vuelta.

Ejemplo:

Una cerca de 5 pies de altura está a 4 pies de distancia de una construcción. Se pondrá una escalera desde el piso hasta el edificio y que pasará por la parte superior de la cerca.
Queremos encontrar la longitud de la escalera más corta que pueda colocarse.
Como se aprecia en la figura siguiente:



Sea $L=l_1+l_2$ entonces

$$\text{Cos } \theta=\frac{4}{l_1} \Rightarrow l_1=\frac{4}{\text{Cos } \theta}$$

$$\text{Sen } \theta=\frac{5}{l_2} \Rightarrow l_2=\frac{5}{\text{Sen } \theta}$$

$$\therefore L=\frac{5}{\text{Sen } \theta}+\frac{4}{\text{Cos } \theta}$$

$$L=5\text{Csc } \theta+4\text{Sec } \theta$$

variando los valores del ángulo obtenemos la distancia más corta de la escalera que cumple con las condiciones dadas.

θ	25	35	45	55	65	75	85
L	16.25	13.6	12.73	13.08	14.98	20.63	50.91

Por lo tanto, la longitud mínima de la escalera es de 12.73 pies con un ángulo de 45º.
Los dos ejemplos anteriores los trataremos cuando veamos máximos y mínimos.

3.6. DEMOSTRACIÓN DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

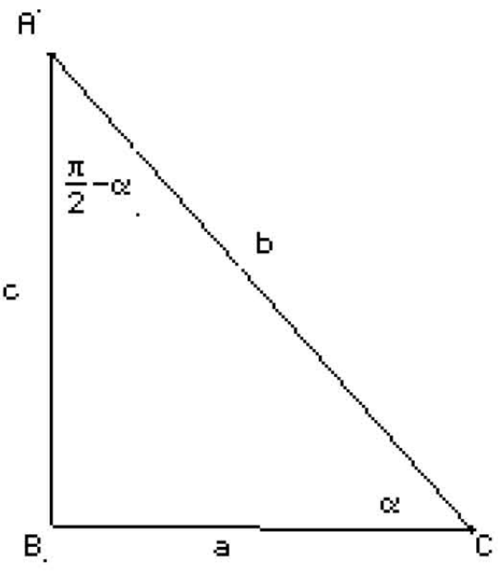
Demostrar que si los angulos son complementarios, el coseno de uno es igual al seno del otro; es decir,

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Sean $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ y α los angulos agudos del triangulo rectangulo ABC, entonces, si denotamos por a, b y c las longitudes de los lados opuestos a los vertices A, B y C, tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{b} \quad ; \text{ es decir,}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$



3.6.1. IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Del círculo unitario se da el teorema de Pitágoras, menciona que:
“la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado”. En cartesianas se tiene que:

$$x^2+y^2=1$$

Transformando a polares tenemos las siguientes igualdades:
Por definición de Seno y Coseno, tenemos que

$\frac{x}{r}=\text{Cos}\alpha$, despejamox x entonces tenemos que $x=r\text{Cos}\alpha$.

$\frac{y}{r}=\text{Sen}\alpha$, despejamox y entonces tenemos que $y=r\text{Sen}\alpha$.

Sustituyendo en la ecuacion $x^2+y^2=1$ tenemos que

$$(r\text{Cos}\alpha)^2+(r\text{Sen}\alpha)^2=r^2$$

$r^2\text{Cos}^2\alpha+r^2\text{Sen}^2\alpha=r^2$ Factorizando r^2 tenemos

$r^2\left(\text{Cos}^2\alpha+\text{Sen}^2\alpha\right)=r^2$ Dividiendo por r^2 tenemos

$$\text{Cos}^2\alpha+\text{Sen}^2\alpha=1.$$

De esta identidad podemos encontrar otras.Por ejemplo si dividimos tanto el primer y segundo miembro por $\left(\text{Cos}^2\alpha\right)$ obtenemos las siguientes identidades

$$\frac{\text{Cos}^2\alpha}{\text{Cos}^2\alpha}+\frac{\text{Sen}^2\alpha}{\text{Cos}^2\alpha}=\frac{1}{\text{Cos}^2\alpha}$$

$$1+\tan^2(\alpha)=\text{Sec}^2\alpha$$

Ahora si calculamos raiz cuadrada tenemos

$\text{Sec}\alpha=\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$ En lugar de hacer esto si despejamos la tangente y calculamos raiz cuadrada tenemos

$\tan\alpha=\sqrt{\text{Sec}^2\alpha-1}$, o bien despejamos 1,tenemos

$1=\text{Sec}^2\alpha-\tan^2\alpha$ y tambien podemos calcular raiz cuadrada

$$1=\sqrt{\text{Sec}^2\alpha-\tan^2\alpha}$$

$$\frac{\text{Cos}^2\alpha}{\text{Sen}^2\alpha}+\frac{\text{Sen}^2\alpha}{\text{Sen}^2\alpha}=\frac{1}{\text{Sen}^2\alpha}$$

$$\text{Cot}^2\alpha+1=\text{Csc}^2\alpha$$

Ahora si calculamos raíz cuadrada tenemos

$$Csc\alpha=\sqrt{Cot^2\alpha+1}$$

Si despejamos la cotangente y calculamos la raíz cuadrada tenemos que

$$Cot\alpha=\sqrt{Csc^2\alpha-1}$$

También podemos despejar a 1, y calcular su raíz cuadrada

$$1=Csc^2\alpha-Cot^2\alpha$$

$$1=\sqrt{Csc^2\alpha-Cot^2\alpha}$$

$$Cos^2\alpha+Sen^2\alpha=1.$$

Despejando cada funcion

$$Cos^2\alpha=1-Sen^2\alpha$$

$$Sen^2\alpha=1-Cos^2\alpha$$

3.6.2. EL COSENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS.

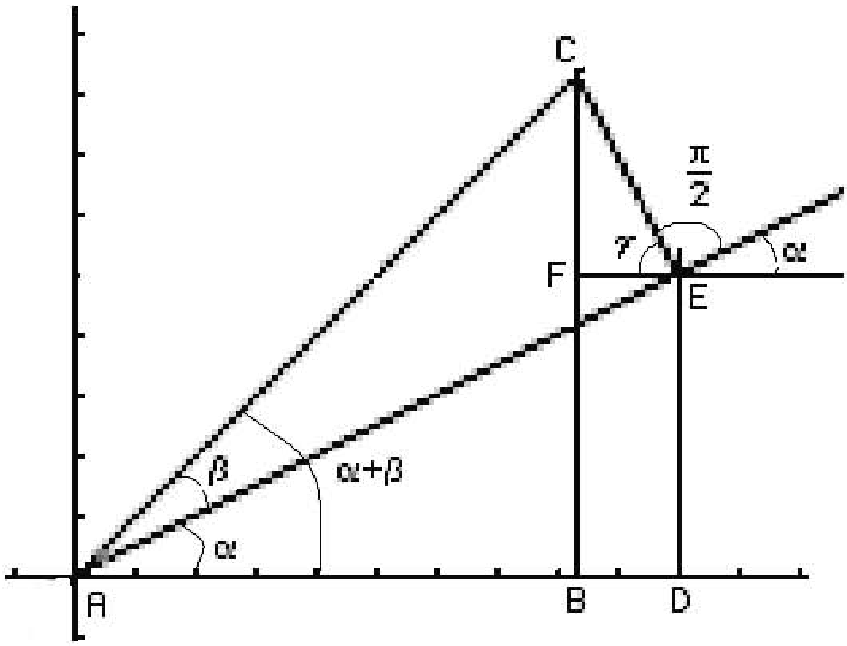
Cabe mencionar que los ángulos considerados en esta demostración son complementarios.

Demostración:

Consideremos el gráfico siguiente, se tienen tres triángulos:
ABC, ADE y ACE, a los que se les puede calcular

$\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)$, $\mathrm{Cos}\alpha$ y $\mathrm{Cos}\beta$,

Respectivamente.



Procedamos en el orden natural:

$$\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)=\frac{d(A,B)}{d(A,C)}, \text{ pero}$$

$$d(A,B)=d(A,D)-d(B,D)=d(A,D)-d(E,F)$$

por lo que la expresion de $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)$ se transforma en:

$$\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)=\frac{d(A,D)-d(E,F)}{d(A,C)}$$

El primer término del numerador se puede evaluar así:

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{d(A,D)}{d(A,E)} \quad \text{entonces} \quad d(A,D)=d(A,E)\mathrm{Cos}\alpha$$

y, aplicando el resultado de la demostración anterior tenemos que, el segundo término queda así:

$\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$ entonces $Sen\alpha=Cos\gamma$

así mismo, hacemos lo mismo para el triángulo CFE, obtenemos que:

$Cos\gamma=\frac{d(E,F)}{d(C,E)}$ entonces $d(E,F)=d(C,E)Sen\alpha$

Efectuando la sustitución, el resultado queda así:

$$Cos(\alpha+\beta)=\frac{d(A,E)}{d(A,C)}Cos\alpha-\frac{d(C,E)}{d(A,C)}Sen\alpha=Cos\beta Cos\alpha-Sen\beta Sen\alpha.$$

3.6.2.1. EL SENO DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

La demostracion de la identidad para $Sen(\alpha+\beta)$ se reduce a utilizar una identidad fundamental

$$Cos^2\gamma+Sen^2\gamma=1,$$

de la que deduce, si $Sen\gamma$ es positivo:

$$Sen\gamma=\sqrt{1-Cos^2\gamma}$$

Si sustituimos $\gamma=\alpha+\beta$, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
Sen(\alpha+\beta)&=\sqrt{1-Cos^2(\alpha+\beta)}\\
&=\sqrt{1-(Cos\alpha Cos\beta-Sen\alpha Sen\beta)^2}\\
&=\sqrt{1-Cos^2\alpha Cos^2\beta+2Cos\alpha Cos\beta Sen\alpha Sen\beta-Sen^2\alpha Sen^2\beta}\\
&=\sqrt{Cos^2\alpha+Sen^2\alpha-Cos^2\alpha Cos^2\beta+2Cos\alpha Cos\beta Sen\alpha Sen\beta-Sen^2\alpha Sen^2\beta}\\
&=\sqrt{Cos^2\alpha\left(1-Cos^2\beta\right)+Sen^2\alpha\left(1-Sen^2\beta\right)+2Cos\alpha Cos\beta Sen\alpha Sen\beta}\\
&=\sqrt{Cos^2\alpha Sen^2\beta+Sen^2\alpha Cos^2\beta+2Cos\alpha Cos\beta Sen\alpha Sen\beta}\\
&=\sqrt{(Cos\alpha Sen\beta+Sen\alpha Cos\beta)^2}\\
&=Cos\alpha Sen\beta+Sen\alpha Cos\beta
\end{aligned}
$$

Demostrar el coseno del doble de un ángulo.

Demostración:

Sea $\alpha=\beta$ tenemos que $2\alpha=\alpha+\alpha$

$Cos2\alpha=Cos(\alpha+\alpha)=Cos\alpha Cos\alpha-Sen\alpha Sen\alpha=Cos^2\alpha-Sen^2\alpha$

Es conveniente que se den otras identidades que pueden obtenerse a partir de la demostración anterior.

$Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha$

Aqui es conveniente hacer un despeje de la identidad $Cos^2\alpha + Sen^2\alpha = 1$ $Cos^2\alpha = 1 - Sen^2\alpha$ y sustituir en la identidad tenemos que

$$Cos2\alpha = 1 - Sen^2\alpha - Sen^2\alpha$$
$$= 1 - 2Sen^2\alpha$$

despejando el $Sen^2\alpha$ tenemos

$Sen^2\alpha = \frac{1 - Cos2\alpha}{2}$ tambien se tiene que

$$Sen\alpha = \sqrt{\frac{1 - Cos2\alpha}{2}}$$

Ahora despejemos Seno y sustituyamos en la identidad tenemos que:

$Sen^2\alpha = 1 - Cos^2\alpha$ y

$Cos2\alpha = Cos^2\alpha - \left(1 - Cos^2\alpha\right) = 2Cos^2\alpha - 1$

despejando el $Cos^2\alpha$ tenemos

$$Cos^2\alpha = \frac{1 + Cos2\alpha}{2}$$

tambien se tiene que

$$Cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + Cos2\alpha}{2}}$$

3.6.3. DEMOSTRACIONES.

$$Cos3\alpha=Cos^3\alpha-3Sen^2\alpha Cos\alpha$$

Demostracion:

$$Cos3\alpha=Cos(2\alpha+\alpha)$$

$$Cos(2\alpha+\alpha)=Cos2\alpha Cos\alpha-Sen2\alpha Sen\alpha$$

$$=\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)Cos\alpha-(2Sen\alpha cos\alpha)Sen\alpha$$

$$=Cos^3\alpha-Sen^2\alpha Cos\alpha-\ 2Sen^2\alpha Cos\alpha$$

$$=Cos^3\alpha-3Sen^2\alpha Cos\alpha$$

$$Cos3\alpha=4Cos^3\alpha-3Cos\alpha$$

Demostracion:

$$Cos3\alpha=Cos(2\alpha+\alpha)$$

$$Cos(2\alpha+\alpha)=Cos2\alpha Cos\alpha-\ Sen2\alpha Sen\alpha$$

$$=\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)Cos\alpha-\ (2Sen\alpha cos\alpha)Sen\alpha$$

$$=\left(Cos^2\alpha-\left(1-Cos^2\alpha\right)\right)Cos\alpha-\left(2Sen^2\alpha Cos\alpha\right)$$

$$=\left(Cos^2\alpha-1+Cos^2\alpha\right)Cos\alpha-\left(2\left(1-Cos^2\alpha\right)Cos\alpha\right)$$

$$=\left(2Cos^2\alpha-1\right)Cos\alpha-\left(2-2Cos^2\alpha\right)Cos\alpha$$

$$=2Cos^3\alpha-Cos\alpha-\left(2Cos\alpha-2Cos^3\alpha\right)$$

$$=2Cos^3\alpha-Cos\alpha+2Cos^3\alpha-2Cos\alpha$$

$$=4Cos^3\alpha-3Cos\alpha$$

$=Sen3\alpha=-Sen^3\alpha+3Sen\alpha Cos^2\alpha$

Demostracion:

$$Sen(2\alpha+\alpha)=Sen2\alpha Cos\alpha+Sen\alpha Cos2\alpha$$
$$=(2Sen\alpha Cos\alpha)Cos\alpha+Sen\alpha\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)$$
$$=2Sen\alpha Cos^2\alpha+Sen\alpha Cos^2\alpha-Sen^3\alpha$$
$$=-Sen^3\alpha+3Sen\alpha Cos^2\alpha$$

$Sen3\alpha=-4Sen^3\alpha+3Sen\alpha$

Demostracion:

$$Sen(2\alpha+\alpha)=Sen2\alpha Cos\alpha+Sen\alpha Cos2\alpha$$
$$=(2Sen\alpha Cos\alpha)Cos\alpha+Sen\alpha\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)$$
$$=2Sen\alpha Cos^2\alpha+Sen\alpha Cos^2\alpha-Sen^3\alpha$$
$$=2Sen\left(1-Sen^2\alpha\right)+Sen\alpha\left(1-Sen^2\alpha\right)-Sen^3\alpha$$
$$=2Sen\alpha-2Sen^3\alpha+Sen\alpha-Sen^3\alpha-Sen^3\alpha$$
$$=-4Sen^3\alpha+3Sen\alpha$$

$Sen4\alpha=4\left(Cos^3\alpha Sen\alpha-Sen^3\alpha Cos\alpha\right)$

Demostracion:

$$Sen(2\alpha+2\alpha)=Sen2\alpha Cos2\alpha+Sen2\alpha Cos2\alpha$$
$$=2(2Sen\alpha Cos\alpha)\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)$$
$$=4\left(Sen\alpha Cos^3\alpha-Sen^3\alpha Cos\alpha\right)$$

Demostracion:

$$Sen4\alpha=4Sen\alpha Cos\alpha-8Sen^3\alpha Cos\alpha$$

$$Sen(2\alpha+2\alpha)=Sen2\alpha Cos2\alpha+Sen2\alpha Cos2\alpha$$

$$=2(Sen2\alpha Cos2\alpha)$$

$$=2Sen2\alpha\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)$$

$$=2Sen2\alpha\left(1-Sen^2\alpha-Sen^2\alpha\right)$$

$$=2Sen2\alpha\left(1-2Sen^2\alpha\right)$$

$$=2Sen2\alpha-4Sen2\alpha Sen^2\alpha$$

$$=2(2Sen\alpha Cos\alpha)-4(2Sen\alpha Cos\alpha)Sen^2\alpha$$

$$=4Sen\alpha Cos\alpha-8Sen^3\alpha Cos\alpha$$

Demostracion:

$$Cos4\alpha=Cos^4\alpha+Sen^4\alpha-6Sen^2\alpha Cos^2\alpha$$

$$Cos(2\alpha+2\alpha)=Cos^2 2\alpha-Sen^2 2\alpha$$

$$=\left(Cos^2\alpha-Sen^2\alpha\right)^2-(2Sen\alpha Cos\alpha)^2$$

$$=Cos^4\alpha-2Cos^2\alpha Sen^2\alpha+Sen^4\alpha-4Sen^2\alpha Cos^2\alpha$$

$$=Cos^4\alpha+Sen^4\alpha-6Sen^2\alpha Cos^2\alpha$$

Demostrar:

$$Sen^3\alpha+Cos^3\alpha=(Sen\alpha+Cos\alpha)(1-Sen\alpha Cos\alpha)$$

$$(Sen\alpha+Cos\alpha)(1-Sen\alpha Cos\alpha)=Sen\alpha-Sen^2\alpha Cos\alpha+Cos\alpha-Sen\alpha Cos^2\alpha$$

$$=Sen\alpha-\left(1-Cos^2\alpha\right)Cos\alpha+Cos\alpha-Sen\alpha\left(1-Sen^2\alpha\right)$$

$$=Sen\alpha-Cos\alpha+Cos^3\alpha+Cos\alpha-Sen\alpha+Sen^3\alpha$$

$$=Sen^3\alpha+Cos^3\alpha$$

Demostrar:

$$Sen^2\alpha=(1+Cos\alpha)(1-Cos\alpha)$$

$$(1+Cos\alpha)(1-Cos\alpha)=1-Cos\alpha+Cos\alpha-Cos^2\alpha$$

$$=1-Cos^2\alpha$$

$$=1-\left(1-Sen^2\alpha\right)$$

$$=1-1+Sen^2\alpha$$

$$=Sen^2\alpha.$$

Demostrar:

$$\frac{\text{Sen}^2\alpha}{(1-\text{Cos}\alpha)^2}=\frac{(1+\text{Cos}\alpha)^2}{\text{Sen}^2\alpha}$$

$$\frac{1-\text{Cos}^2\alpha}{(1-\text{Cos}\alpha)^2}\left(\frac{1+\text{Cos}\alpha}{1+\text{Cos}\alpha}\right)^2=\frac{\left(1-\text{Cos}^2\alpha\right)(1+\text{Cos}\alpha)^2}{(1-\text{Cos}\alpha)^2(1+\text{Cos}\alpha)^2}$$

$$(1-\text{Cos}\alpha)^2=1-2\text{Cos}\alpha+\text{Cos}^2\alpha$$

$$(1+\text{Cos}\alpha)^2=1+2\text{Cos}\alpha+\text{Cos}^2\alpha$$

Por lo tanto el producto de estos dos binomios es

$$1-2\text{Cos}^2\alpha+\text{Cos}^4\alpha=\left(1-\text{Cos}^2\alpha\right)^2$$

$$=\frac{\left(1-\text{Cos}^2\alpha\right)(1+\text{Cos}\alpha)^2}{\left(1-\text{Cos}^2\alpha\right)^2}$$

$$=\frac{(1+\text{Cos}\alpha)^2}{1-\text{Cos}^2\alpha}$$

$$=\frac{(1+\text{Cos}\alpha)^2}{\text{Sen}^2\alpha}$$

Demostrar:

$\text{Sen}5\alpha=16\text{Sen}^5\alpha-20\text{Sen}^3\alpha+5\text{Sen}\alpha$

$\text{Sen}(2\alpha+3\alpha)=\text{Sen}2\alpha\text{Cos}3\alpha+\text{Sen}3\alpha\text{Cos}2\alpha$

$=(2\text{Sen}\alpha\text{Cos}\alpha)\left(\text{Cos}^3\alpha-3\text{Sen}^2\alpha\text{Cos}\alpha\right)+$

$\left(\text{Cos}^2\alpha-\text{Sen}^2\alpha\right)\left(-\text{Sen}^3\alpha+3\text{Cos}^2\alpha\text{Sen}\alpha\right)$

$=2\text{Sen}\alpha\text{Cos}^4\alpha-6\text{Sen}^3\alpha\text{Cos}^2\alpha-\text{Cos}^2\alpha\text{Sen}^3\alpha+$

$3\text{Cos}^4\alpha\text{Sen}\alpha+\text{Sen}^5\alpha-3\text{Cos}^2\alpha\text{Sen}^3\alpha$

$=5\text{Sen}\alpha\text{Cos}^4\alpha-10\text{Sen}^3\alpha\text{Cos}^2\alpha+\text{Sen}^5\alpha=\text{Sen}^5\alpha-$

$10\text{Sen}^3\alpha\left(1-\text{Sen}^2\alpha\right)+5\text{Sen}\alpha\left(1-2\text{Sen}^2\alpha+\text{Sen}^4\alpha\right)$

$=\text{Sen}^5\alpha-10\text{Sen}^3\alpha+10\text{Sen}^5\alpha+5\text{Sen}\alpha-10\text{Sen}^3\alpha+5\text{Sen}^5\alpha$

$=16\text{Sen}^5\alpha-20\text{Sen}^3\alpha+5\text{Sen}\alpha$

Nota:

$\text{Cos}^4\alpha=\text{Cos}^2\alpha\text{Cos}^2\alpha=\left(1-\text{Sen}^2\alpha\right)\left(1-\text{Sen}^2\alpha\right)$

$=1-2\text{Sen}^2\alpha+\text{Sen}^4\alpha$

Demostrar:

$$\mathrm{Tan}^2\alpha=(\mathrm{Sec}\alpha+1)(\mathrm{Sec}\alpha-1)$$
$$=\mathrm{Sec}^2\alpha-1=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2\alpha}-1=\frac{1-\mathrm{Cos}^2\alpha}{\mathrm{Cos}^2\alpha}$$
$$=\frac{\mathrm{Sen}^2\alpha}{\mathrm{Cos}^2\alpha}$$
$$=\mathrm{Tan}^2\alpha.$$

Demostrar:

$$\mathrm{Sen}^4\alpha-\mathrm{Cos}^4\alpha=\mathrm{Sen}^2\alpha-\mathrm{Cos}^2\alpha$$
$$\mathrm{Sen}^4\alpha-\mathrm{Cos}^4\alpha=\left(\mathrm{Sen}^2\alpha+\mathrm{Cos}^2\alpha\right)\left(\mathrm{Sen}^2\alpha-\mathrm{Cos}^2\alpha\right)$$
$$=\mathrm{Sen}^2\alpha-\mathrm{Cos}^2\alpha$$

Demostrar:

$$\mathrm{Cos}5\alpha=16\mathrm{Cos}^5\alpha-20\mathrm{Cos}^3\alpha+5\mathrm{Cos}\alpha$$

Demostracion:

$$\mathrm{Cos}5\alpha=\mathrm{Cos}(2\alpha+3\alpha)$$
$$=\mathrm{Cos}2\alpha\mathrm{Cos}3\alpha-\mathrm{Sen}2\alpha\mathrm{Sen}3\alpha$$
$$=\left(\mathrm{Cos}^2\alpha-\mathrm{Sen}^2\alpha\right)\left(4\mathrm{Cos}^3\alpha-3\mathrm{Cos}\alpha\right)$$
$$-2\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Cos}\alpha\left(3\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Cos}^2\alpha-\mathrm{Sen}^3\alpha\right)$$

$$=4\mathrm{Cos}^5\alpha-3\mathrm{Cos}^3\alpha-4\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}^3\alpha$$
$$+3\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}\alpha-6\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}^3\alpha+2\mathrm{Sen}^4\alpha\mathrm{Cos}\alpha$$
$$=4\mathrm{Cos}^5\alpha-10\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}^3\alpha-3\mathrm{Cos}^3\alpha+3\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}\alpha$$
$$+2\mathrm{Cos}\alpha\left(1-2\mathrm{Cos}^2\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha\right)$$
$$=4\mathrm{Cos}^5\alpha-10\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}^3\alpha-3\mathrm{Cos}^3\alpha+3\mathrm{Sen}^2\alpha\mathrm{Cos}\alpha+$$
$$2\mathrm{Cos}\alpha-4\mathrm{Cos}^3\alpha+2\mathrm{Cos}^2\alpha$$
$$=6\mathrm{Cos}^5\alpha-7\mathrm{Cos}^3\alpha-10\mathrm{Cos}^3\alpha+10\mathrm{Cos}^5\alpha+3\mathrm{Cos}\alpha$$
$$-3\mathrm{Cos}^3\alpha+2\mathrm{Cos}\alpha$$
$$=16\mathrm{Cos}^5\alpha-20\mathrm{Cos}^3\alpha+5\mathrm{Cos}\alpha$$

Nota:

$$\mathrm{Sen}^4\alpha=\left(1-\mathrm{Cos}^2\alpha\right)\left(1-\mathrm{Cos}^2\alpha\right)$$
$$=1-2\mathrm{Cos}^2\alpha+\mathrm{Cos}^4\alpha$$

Demostrar:

$$1-\tan^4\alpha=2\text{Sec}^2\alpha-\text{Sec}^4\alpha$$

$$1-\tan^4\alpha=1-\frac{\text{Sen}^4\alpha}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{\text{Cos}^4\alpha-\text{Sen}^4\alpha}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{\left(\text{Cos}^2\alpha-\text{Sen}^2\alpha\right)\left(\text{Cos}^2\alpha+\text{Sen}^2\alpha\right)}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{\text{Cos}^2\alpha-\left(1-\text{Cos}^2\alpha\right)}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{2\text{Cos}^2\alpha-1}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{2\text{Cos}^2\alpha}{\text{Cos}^4\alpha}-\frac{1}{\text{Cos}^4\alpha}$$

$$=\frac{2}{\text{Cos}^2\alpha}-\frac{1}{\text{Cos}^4\alpha}$$

Por inversos tenemos

$$=2\text{Sec}^2\alpha-\text{Sec}^4\alpha.$$

Expresar las funciones trigonometricas de un angulo α, en terminos de la funcion $\tan\alpha$.

$\text{Sen}^2\alpha+\text{Cos}^2\alpha=1$ En funcion Seno.

$\text{Cos}\alpha=\sqrt{1-\text{Sen}^2\alpha}$; Como $\tan\alpha=\dfrac{\text{Sen}\alpha}{\text{Cos}\alpha}$

tenemos $\tan\alpha=\dfrac{\text{Sen}\alpha}{\sqrt{1-\text{Sen}^2\alpha}}$,

$$\tan^2\alpha=\frac{\operatorname{Sen}^2\alpha}{1-\operatorname{Sen}^2\alpha}$$

$$\left(1-\operatorname{Sen}^2\alpha\right)\tan^2\alpha=\operatorname{Sen}^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha-\operatorname{Sen}^2\alpha\tan^2\alpha=\operatorname{Sen}^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Sen}^2\alpha\tan^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\operatorname{Sen}^2\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

$$\operatorname{Sen}^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\operatorname{Sen}\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

$\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}^2\alpha=1$ En funcion Coseno.

$$\operatorname{Sen}\alpha=\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2\alpha}\ ;$$

Como $\tan\alpha=\frac{\operatorname{Sen}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}$ tenemos

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\operatorname{Cos}^2\alpha}}{\operatorname{Cos}\alpha},$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1-\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$\operatorname{Cos}^2\alpha\tan^2\alpha=1-\operatorname{Cos}^2\alpha$$

$$\operatorname{Cos}^2\alpha\tan^2\alpha+\operatorname{Cos}^2\alpha=1$$

$$\operatorname{Cos}^2\alpha\left(1+\tan^2\alpha\right)=1$$

$$\operatorname{Cos}^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\operatorname{Cos}\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

$\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}^2\alpha=1$ En funcion Secante.

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$\operatorname{Sec}^2\alpha=\frac{1}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$\operatorname{Sec}^2\alpha=1+\tan^2\alpha$$

$$\operatorname{Sec}\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}\ .$$

Demostrar:

$$(\tan\alpha+\operatorname{Cot}\alpha)\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\alpha=1$$

$$\left(\frac{\operatorname{Sen}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha}+\frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sen}\alpha}\right)\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\alpha=1$$

$$\operatorname{Sen}^2\alpha+\operatorname{Cos}^2\alpha=1$$

Demostrar:

$$\tan^2\alpha-\operatorname{Sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{Sen}^4\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{Sen}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}-\operatorname{Sen}^2\alpha=\frac{\operatorname{Sen}^2\alpha-\operatorname{Sen}^2\alpha\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$=\frac{\operatorname{Sen}^2\alpha\left(1-\operatorname{Cos}^2\alpha\right)}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$=\frac{\operatorname{Sen}^2\alpha\operatorname{Sen}^2\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

$$=\frac{\operatorname{Sen}^4\alpha}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$$

Demostrar por inducción sobre K cuando (K≥2) que:

$$\operatorname{Sen}(k\alpha)=2\operatorname{Sen}(k-1)\alpha\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}(k-2)\alpha.$$

1) Probar para el más pequeño de los naturales.
2) Suponer que se cumple para m natural (hipótesis).
3) Probar que se cumple para el m +1 natural.

Para $k=2$

1) $\operatorname{Sen}2\alpha=2\operatorname{Sen}(2-1)\alpha\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}(2-2)\alpha$

$\qquad=2\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}\alpha$

Supongamos que cumple para $k=m$.

2) $\operatorname{Sen}(m\alpha)=2\operatorname{Sen}(m-1)\alpha\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}(m-2)\alpha$

3) $\operatorname{Sen}(m+1)\alpha=2\operatorname{Sen}((m+1)-1)\alpha\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}((m+1)-2)\alpha$ entonces

$\operatorname{Sen}(m+1)\alpha=2\operatorname{Sen}(m\alpha)\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}(m-1)\alpha$ es decir

$\operatorname{Sen}(m+1)\alpha=\operatorname{Sen}(m\alpha+\alpha)$

$\qquad=\operatorname{Sen}(m\alpha)\operatorname{Cos}\alpha+\operatorname{Sen}\alpha\operatorname{Cos}(m\alpha)+\operatorname{Sen}(m\alpha)\operatorname{Cos}\alpha-\operatorname{Sen}(m\alpha)\operatorname{Cos}\alpha$

$$=2\mathrm{Sen}(m\alpha)\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sen}(\alpha-m\alpha)$$
$$=2\mathrm{Sen}(m\alpha)\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sen}((1-m)\alpha)$$
$$=2\mathrm{Sen}(m\alpha)\mathrm{Cos}\alpha+\mathrm{Sen}(-(m-1)\alpha)$$
$$=2\mathrm{Sen}(m\alpha)\mathrm{Cos}\alpha-\mathrm{Sen}(m-1)\alpha$$

Demostrar:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Por definicion

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{Sen}(\alpha+\beta)}{\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)}=\frac{\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Cos}\beta+\mathrm{Sen}\beta\mathrm{Cos}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta-\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Sen}\beta}$$

$$=\frac{\frac{\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Cos}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta}+\frac{\mathrm{Sen}\beta\mathrm{Cos}\alpha}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta}}{\frac{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta}-\frac{\mathrm{Sen}\alpha\mathrm{Cos}\beta}{\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Cos}\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Cuando $\alpha=\beta$ tenemos

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

3.7. LEY DE SENOS.

Esta ley se aplica a triángulos ya sea rectángulos o escalenos, dependiendo de que se desconoce se aplicará la ley de senos o de cosenos, que tratará en el siguiente apartado.

Consideremos un triángulo de vértices A, B y C. Denotemos por a, b y c las longitudes de los lados opuestos a cada vértice, respectivamente. Entre las longitudes de los lados y los senos de los ángulos se cumple la relación llamada ley de los senos, que se representa:

$$\frac{a}{\text{Sen}\alpha}=\frac{b}{\text{Sen}\beta}=\frac{c}{\text{Sen}\gamma}$$

Demostracion:

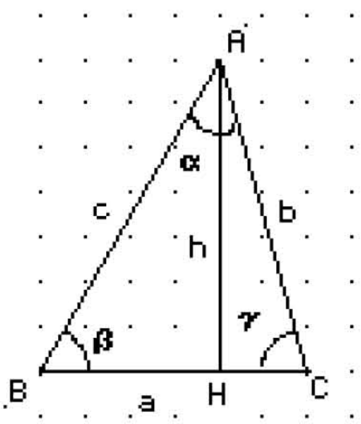
Denotemos por h la longitud de la altura desde A, y por H el pie de la altura. Los triangulos ABH y AHC son rectangulos, por lo tanto, obtenemos:

$$\text{Sen}\beta=\frac{h}{c},\quad \text{Sen}\gamma=\frac{h}{b}$$

Si dividimos ambas igualdades miembro a miembro, resulta:

$$\frac{\text{Sen}\beta}{\text{Sen}\gamma}=\frac{\frac{h}{c}}{\frac{h}{b}}=\frac{b}{c},\ \text{lo cual es}\quad \frac{b}{\text{Sen}\beta}=\frac{c}{\text{Sen}\gamma}.$$

La igualdad de estas razones con $\frac{a}{\text{Sen}\alpha}$ se demuestra tomando cualquiera de las dos alturas restantes y los triangulos rectangulos determinados por ella.



3.7.1. LEY DE COSENOS.

Entre las longitudes de los lados y los cosenos de los ángulos se satisfacen las relaciones denominadas ley de los cosenos.

Como en la ley de los senos, se traza la altura desde uno de los vértices. La longitud de dicha altura se denotará por h, y el pie por H. Entonces, de cada uno de los dos triángulos rectángulos resultantes en cada caso, se obtiene, por el teorema de Pitágoras, una de las relaciones siguientes:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Demostración:

Considerando los triángulos AHC y ABH, y aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos la última relación;

Demostracion:

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$. Del triangulo ABH tenemos

$c^2=x^2+h^2$ (x es la longitud de BH). Y del triangulo AHC tenemos

$b^2=(a-x)^2+h^2$ ($a-x$ es la longitud de HC)

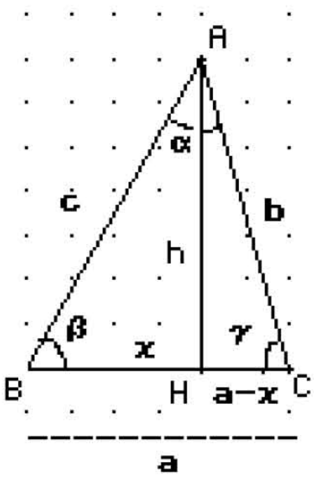
$b^2=a^2-2ax+x^2+h^2$ tomando en cuenta que

$c^2=x^2+h^2$ tenemos

$b^2=a^2+c^2-2ax$ Por el triangulo ABH tenemos que el

$\cos\beta=\dfrac{x}{c}$ entonces $x=c\cos\beta$ sustituyendo

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$.



Demostración.

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ de el triángulo AHC tenemos

$b^2=x^2+h^2$ (x es la longitud de HC). Y del triángulo ABH tenemos

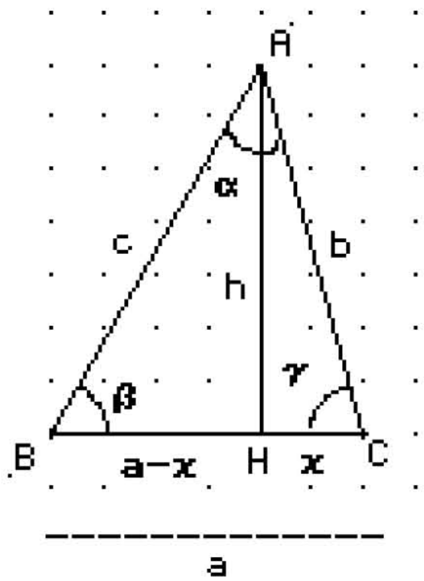
$c^2=(a-x)^2+h^2$ (a-x es la longitud de BH)

$c^2=a^2-2ax+x^2+h^2$ Como $b^2=x^2+h^2$ tenemos

$c^2=a^2+b^2-2ax$

$\text{Cos}\gamma=\frac{x}{b} \Rightarrow x=b\text{Cos}\gamma$

$\therefore$ $c^2=a^2+b^2-2ab\text{Cos}\gamma$.



Demostracion.

$a^2=b^2+c^2-2bc\text{Cos}\alpha$ del triangulo ABH tenemos

$c^2=x^2+h^2$ (x es la longitud de AH. Y del triangulo BHC tenemos

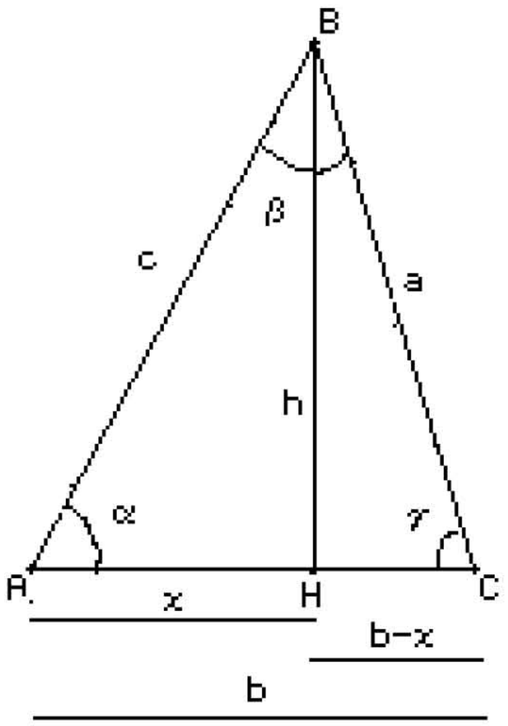
$a^2=(b-x)^2+h^2$ Como $c^2=x^2+h^2$ tenemos

$a^2=b^2-2bx+x^2+h^2$

$a^2=b^2+c^2-2bx$ Por el triangulo ABH tenemos que

$\text{Cos}\alpha=\frac{x}{c} \Rightarrow x=c\text{Cos}\alpha$

$\therefore$ $a^2=b^2+c^2-2bc\text{Cos}\alpha$



Un triángulo se considera resuelto cuando se han determinado sus tres ángulos y sus tres lados. Si sólo se conocen dos de estos datos, siempre hay un número infinito de triángulos con los dos elementos dados.

Pero cuando se dan tres elementos, puede ocurrir que exista un número infinito de triángulos con los elementos dados, que exista uno o dos, o que no exista ninguno. Los casos pueden clasificarse de la siguiente manera:

Primer caso. Dados tres ángulos, hay un número infinito de triángulos con los tres elementos dados.

Segundo caso. Dados dos lados y el ángulo comprendido, existe solamente un triángulo con esos elementos.

Tercer caso. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, el número de soluciones es variable.

Cuarto caso. Dados dos ángulos y un lado, existe solamente un triángulo con esos elementos.

Quinto caso. Dados tres lados, si existe un triángulo con esos elementos, el triángulo es único.

DEMOSTRACIÒN: De algunos casos.

Segundo caso.

Supongamos que se conocen a, c y beta; entonces, por ley de los cosenos, podemos obtener b:

$$\mathbf{b}=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\beta}\ .$$

Después, los ángulos faltantes se obtienen de la ley de los senos:

$$\mathrm{Sen}\alpha=\frac{a\mathrm{Sen}\beta}{b},\quad \mathrm{Sen}\gamma=\frac{c\mathrm{Sen}\beta}{b}$$

Tercer caso.

Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, pueden existir dos, uno o ningún triángulo con esos elementos, dependiendo de la relación entre ellos.
Supongamos conocidos a , b y alfa; como en cualquier triángulo se satisface la ley de los senos, el ángulo beta debe ser tal que:

$$\mathrm{Sen}\beta=\frac{b\mathrm{Sen}\alpha}{a}$$

y, además, como la suma total de los ángulos de un triángulo es

$180°=\pi$, tambien debe satisfacer $0\le\beta\le\pi$.

Pero sabemos que:
$0\le\beta\le\pi \Rightarrow 0\le\mathrm{Sen}\beta\le1$
por lo tanto, solo tiene sentido si

$0\le\frac{b\mathrm{Sen}\alpha}{a}\le1$ entonces si los datos son:

$a=1$, $b=3$ y $\alpha=30°$, no hay nungun triangulo con esos elementos porque:

$$\frac{b\mathrm{Sen}\alpha}{a}=\frac{3\mathrm{Sen}30°}{1}=3\left(\frac{1}{2}\right)=1.5$$

Si los elementos dados satisfacen

$$0\le\left(\frac{b\mathrm{Sen}\alpha}{a}\right)\le1,$$

hay en general dos soluciones, debido a la identidad

$\mathrm{Sen}\beta=\mathrm{Sen}(\pi-\beta)$ si $0\le\beta\le\pi$

a) Si los lados son:
a=1, b=3 y $\alpha=30°$
no hay solucion.

b) Si los lados son:
a=3, b=4 y $\alpha=30°$
hay dos soluciones.

c) Si los lados son:
a=3, b=3 y $\alpha=45°$
la solucion es unica.

Cuarto caso.

Se conocen dos ángulos, por ejemplo, alfa y beta, el tercero se obtiene de la fórmula:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$

Por lo tanto, en el cuarto caso siempre se conocen dos ángulos y el lado comprendido. Supongamos que los elementos conocidos son

α, β y a.

El ángulo γ se determina como de costumbre:

$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$,

y los lados b y c, mediante la ley de los senos:

$b=\frac{a\,\mathrm{Sen}\beta}{\mathrm{Sen}\alpha}$ y $c=\frac{a\,\mathrm{Sen}\gamma}{\mathrm{Sen}\alpha}$

es decir, los elementos

α, β y a

determinan a los restantes en forma única.

CAPÍTULO IV

"RECTAS Y CÓNICAS".

4.1. INTERSECCIÓN DE RECTAS.

En este apartado presentaremos sistemas de 2x2 y métodos para dar solución al sistema.

La intersección de las rectas L1 y L2 es:

a) Un punto, si las rectas son oblicuas, paralelas o perpendiculares teniendo solución única.
b) Una recta, si las rectas coinciden, o bien finalmente el conjunto vacío si L1 y L2 son paralelas y distintas, es decir, que tiene una infinidad de soluciones o no tiene solución.

La intersección de rectas, lo apreciaremos mejor con un ejemplo práctico, con el cual daremos cinco métodos para dar solución a dicho sistema.

Ejemplo.

Un hacendado compró caballos y vacas por $40,000. Por cada caballo pagó $600 y por cada vaca $800. Si compro 6 vacas menos que caballos, ¿cuántas vacas y caballos compró?

Sea x = caballos
y = vacas.
Planteando el problema como un sistema de ecuaciones tenemos que:

$x = y + 6$ esto nos indica que el número de caballos es igual a las vacas más seis.
$600x + 800y = 40{,}000$ esto es el costo total de la compra.

Observación:

El sistema puede tener diferentes soluciones o no tenerla.
Esto se aprecia mucho mejor con el método de determinantes.

1.-Si el determinante general (Dg), $Dg \neq 0$, entonces existe solución y además es única.

2.- Si Dg=0, entonces
a.- existe una infinidad de soluciones (es decir, que las rectas son paralelas)
b.- que el sistema sea inconsistente (cuando la solución es vacía).
Ejemplo:
$x+y = 0$
$x+y = 1$ éste es un sistema inconsistente, por que por un lado la suma de dos variables es cero y por otro nos dice que es igual a uno, si esto tuviera sentido se tendría que $1 = 0$ y esto es falso.

Ahora daremos solución al sistema:

$x – y = 6$
$600x + 800y = 40,000$

4.1.1. MÉTODOS.

4.1.1.1. SUSTITUCIÓN.

La filosofía de este método es el siguiente:

Se despeja una variable (x o y) de una ecuación, y éste se sustituye en la otra ecuación, de tal suerte que la ecuación quede en una variable, por lo que al despeje de dicha variable se encuentra el valor real de la variable. Posteriormente dicho valor se sustituye en el despeje que se realizó al principio de tal manera que se calculó el segundo valor. Por lo tanto este par de valores son la solución al sistema.

Trataremos los cinco métodos con un solo sistema para que se vea que no importa el método que se utilice, el resultado es el mismo para los cinco casos.
Si el sistema tiene solución, que tipo de solución es o si no tiene solución, que es lo que esta pasando con dicho sistema.

$x-y = 6$ (1)
$600x + 800y = 40,000$ (2)

$x = y+6$ despejamos x de la ecuación (1)

$600(y+6)+800y = 40,000$ sustituimos en la ecuación (2)

$600y+3600+800y = 40,000$ simplificamos

1400y =40,000-3600

y = 36400/1400

y = 26 vacas.

x =26 + 6 sustituimos el valor hallado en el despeje

x =32 caballos.
Por lo tanto la solución al sistema es (32, 26).

4.1.1.2. REDUCCIÓN (SUMA-RESTA).

Para dar solución al sistema es necesario tener los mismos coeficientes de la variable que deseamos eliminar, en nuestro caso es más fácil eliminar la "y" por tener signos contrarios, por lo que se multiplica la ecuación (1) por el coeficiente de la ecuación (2), lo cual al sumar ambas ecuaciones se simplifique la variable "y". Para que de esta manera encontramos el valor de "x".

Resolviendo para "x" tenemos que:

800x - 800y = 4,800
600x +800y = 40,000. Sumando ambas ecuaciones tenemos que:

1400x = 44,800 despejando tenemos:

x = 32 Caballos.

Sustituimos este valor en cualquier ecuación para encontrar el valor de la otra variable, por comodidad sustituiremos en la ecuación (1), despejamos y tenemos:

y =x – 6, entonces tenemos, y = 32-6 = 26 vacas.

4.1.1.3. IGUALACIÓN

Se despeja una variable, pero la misma en ambas ecuaciones, se igualan y se despeja dicha variable, posteriormente dicho valor se sustituye en cualquier ecuación, y se encontrará el valor de la variable que eliminamos.

x-y = 6 (1)

600x +800y = 40,000 (2), despejemos “x” en ambas ecuaciones.
x = y + 6
x= (40,000 – 800y)/600

y + 6 = (40,000 – 800y)/600 por álgebra tenemos

600y + 3600 = 40,000 – 800y
600y + 800y =40,000 -3600
1400y = 36,400
y = 36,400/1400
y =26 vacas. Sustituimos en la ecuación (1)
x = y + 6
x = 26 + 6
x = 32 Caballos.

4.1.1.4. DETERMINANTES.

Para este método calcularemos tres determinantes el primero será el determinante general Dg (formado con los coeficientes de las variables del sistema conservando sus respectivos signos). Para este determinante hay dos posibilidades:

Dg≠0 tiene solución y además es única.
Dg = 0 no tiene solución (solución vacía) o una infinidad de soluciones.

$$Dg=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 600 & 800 \end{vmatrix}=1(800)-600(-1)= 800+600=1400$$

Como el determinante general es diferente a cero, el sistema tiene solución y además es única, por lo que procedemos a calcular los otros determinantes.
Como se podrá apreciar no importa el método que se utilice para dar solución a un sistema de ecuaciones el resultado será siempre el mismo, siempre y cuando dicho sistema tenga solución única.

Para calcular el determinante de “x”solo sustituimos el coeficiente de la variable “x” por el valor del lado derecho y resolvemos el sistema.

$$Dx=\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 40000 & 800 \end{vmatrix}=6(800)-40000(-1)=4800+40000= 44800$$

Para el determinante de “y” se procede de igual manera.

Observación. El signo del lado derecho pasa tal y como se encuentra en al lado derecho.

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 600 & 40000 \end{vmatrix}=1(40000)-600(6)=40000-3600=36400$$

Para encontrar el valor de cada variable procedemos como sigue:

$$x=\frac{D_x}{D_g}=\frac{44800}{1400}=32 \text{ caballos}$$

$$y=\frac{D_y}{D_g}=\frac{36400}{1400}=26 \text{ vacas.}$$

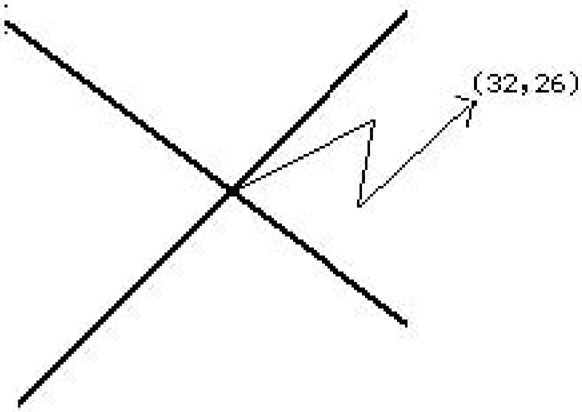
4.1.1.5. GRAFICACIÓN.

Lo primero que se hace es despejar a "y" como y = mx + b, para graficar con lo cual encontramos una recta de pendiente dada.

Para lo que haremos una tabla como sigue:

Y = x – 6 (1)
Y = -3x/4 +50 (2)

x	y	P(x,y)	(1)
0	-6	(0,-6)	
6	0	(6,0)	
x	y	P(x,y)	(2)
0	50	(0,50)	
20	35	(20,35)	

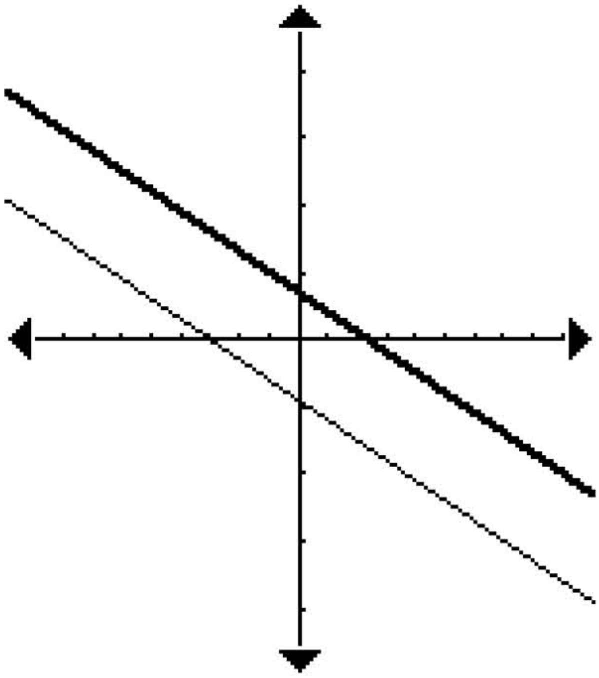


4.2. RECTAS PARALELAS

Se dice que dos o más rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente o bien tienen la forma siguiente:

$Ax+By+C=0$
$Ax+By+C'=0$
donde $C=C'$ o $C\neq C'$ dado un punto $P(x_1,y_1)$
se tiene que
$Ax+By+C'=0$ es paralela a la recta dada.

Ejemplo.
Dada la recta $3x+5y-7=0$ y el punto
$P(2,-3)$, encontrar una la recta paralela.
$3(2)+5(-3)+C'=0$
$C'=9$
$\therefore\ 3x+5y+9=0$ es la recta paralela.



4.3. RECTAS PERPENDICULARES.

Se dice que dos o más rectas son perpendiculares cuando su intersección forma un ángulo recto o de 90 grados.

$$Ax+By+C=0$$
$$-Bx+Ay+C'=0$$

Ejemplo. Obtenga la ecuacion cartesiana ordinaria de la recta que contiene a $P(5,-1)$ y que es perpendicular a la recta cuya ecuacion es

$$3x-4y+6=0.$$

Se tiene que ecuacion requerida tiene la forma

$$4x+3y+C'=0.$$

Sustituyendo el punto dado en esta ecuacion para encontrar el valor de C', se tiene

$$4(5)+3(-1)+C'=0$$
$$C'=-17.$$

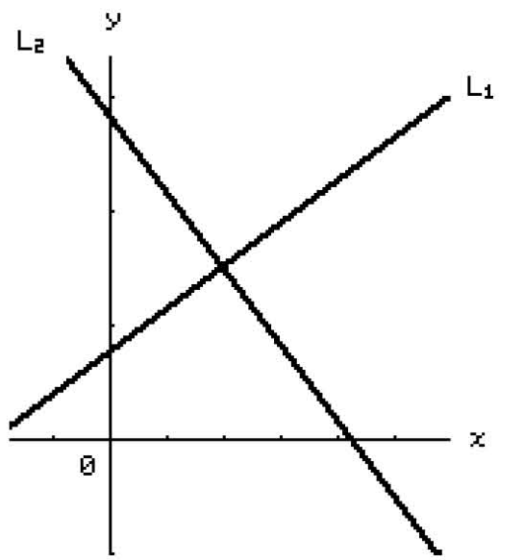
$\therefore$ se tiene que la recta perpendicular a la dada es:

$$4x+3y-17=0.$$

Tambien es posible darse cuenta de si dos rectas son o no perpendiculares despejando la variable y, observando que las pendientes sean inversas negativas:

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{6}{4} \qquad m_1=\frac{3}{4}$$
$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3} \qquad m_2=-\frac{4}{3}$$
$$m_1=-\frac{1}{m_2} \quad y \quad m_2=-\frac{1}{m_1}.$$

Tambien se tiene que: $m_1m_2=-1$.



4.4. MÉTODO DE INTERPOLACIÓN.

Este método establece la proporcionalidad entre las diferencias de (los ángulos y los valores de las funciones circulares correspondientes o bien si lo que se desea es calcular tasas de interés y sus correspondientes días).

Este método lo apreciaremos mejor con algunos ejemplos.

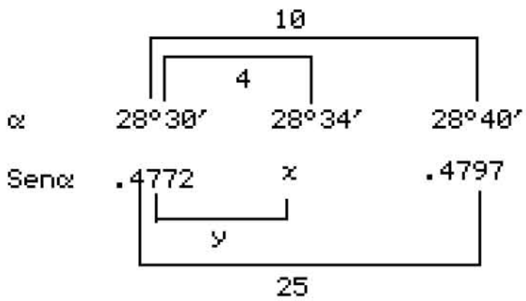
Ejemplo:

Hallar el valor de Sen 28º34'.

Tomamos los ángulos entre los cuales se ubica 28º34', así como los valores respectivos de la función Seno.

α	28º30'	28º34'	28º40'
Senα	.4772	x	.4797

Obtenemos las diferencias entre los datos:



Establecemos la proporcionalidad y resolvemos la ecuación:
y/4 = 25/10, entonces y = 100/10 = 10. Por tanto, sumamos este resultado al valor inferior y obtenemos:

Sen 28º34'=.4772+.0010 = .4782

Ejemplo:

Si Cosα = .8021, hallar el ángulo en grados.
Ubicamos en la tabla de valores en la columna de la función coseno .8021

Grados	Cos
36°00'	.8090
10'	.8073
20'	.8056
30'	.8039
40'	.8021
50'	.8004
37°00'	.7986

Como podemos observar el valor en radianes de Cosα = .8021 corresponde al ángulo de 36º40'.

Ejemplo:

Si Senα = .9234, hallar el valor de α.

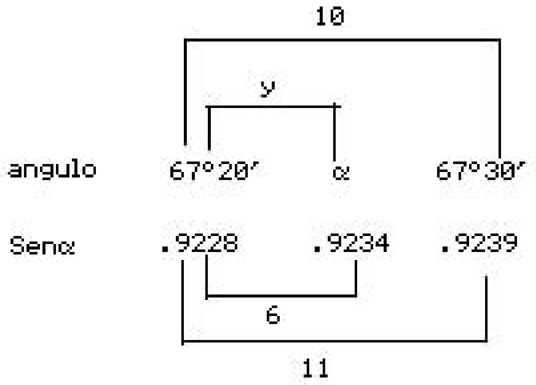
Busquemos en la tabla el valor de la función seno la cifra .9234

Grados	Cos	Grados
22°00'	.9272	68°00'
10'	.9261	50'
20'	.9250	40'
30'	.9239	30'
40'	.9228	20'
50'	.9216	10'
23°00'	.9205	67°00'
	Sen	

Observamos dos números entre los que .9234 se encuentra, entonces realizamos una interpolación para hallar el ángulo α.

angulo	67°20'	α	67°30'
Senα	.9228	.9234	.9239

Obtenemos las diferencias



Establecemos la proporción y resolvemos

$$\frac{y}{6}=\frac{10}{11} \Rightarrow y=\frac{6(10)}{11}=\frac{60}{11}=5.4$$

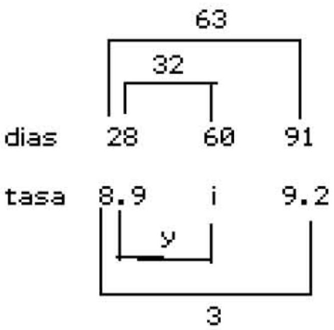
Sumamos este resultado y obtenemos

α= 67º20’ + 5’ = 67º25’ considerando la parte entera.

Ejemplo:

Si deseamos conocer la tasa de interés de cetes a 60 días y conocemos las tasas de 28 días y de 91 días son: 8.9% y 9.2% respectivamente.

Calculamos las diferencias



Establecemos la proporcionalidad y resolvemos.

$$\frac{y}{32}=\frac{3}{63} \Rightarrow y=\frac{32(3)}{63}=\frac{96}{63}=1.5$$

i = 8.9 +1 = 9. Por lo tanto la tasa de interés a 60 días es del 9%.

4.5. ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE.

$ax^2+bx+c=0$ de esta ecuación es importante saber cuales son sus raíces o ceros. Así mismo su factorización.

Para factorizar una expresión de este tipo consideraremos dos casos:

Caso 1: cuando a =1.

$x^2+7x+10=$

Primero analizaremos si es un TCP, no siendo este el caso. Por lo que su factorización es diferente en nuestro caso es un trinomio de segundo grado y su factorización es la siguiente:

1) calculamos la raíz del término cuadrático, siendo esta el término común.
2) Factorizamos el término independiente en nuestro ejemplo es 10.
   10 = 10(1)
   = 5(2) normalmente esta factorización se hace en factores primos, por la facilidad de la factorización lo hacemos de esta manera.
3) verificamos que la suma o resta de los dos factores sea el coeficiente del término lineal.
4) Ya que se encontraron los factores del término lineal pasamos a la factorización.

$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

Caso 2: cuando a≠1

$3x^2-5x-2=$

Es necesario encontrar un término común. Para lo cual procederemos de la siguiente manera:

Multiplicamos por el coeficiente del término cuadrático, para conseguir un término común, en el numerador solo multiplicamos la variable en el segundo término:

$$\frac{3(3x^2-5x-2)}{3}=$$

Por lo que haremos un cambio de variable para que se aprecie mejor.

3x = y, entonces tenemos $y^2-5y-6=$ y llegamos al caso anterior:

$y^2-5y-6=(y-6)(y+1)$

Pero como la factorización se ve alterada por el producto del coeficiente cuadrático, debemos dividir por el inverso multiplicativo de dicho factor, lo que es lo mismo, multiplicamos por el famoso uno, en la realidad no hacemos nada cuando sucede esto, pero algebraicamente es decisivo este truco.

$$\frac{3(3x^2-5x-2)}{3}=\frac{(3x)^2-5(3x)-6}{3}$$

$$=\frac{(3x-6)(3x+1)}{3}$$

$$=\left(\frac{3x-6}{3}\right)\frac{3x+1}{1}$$

$$=(x-2)(3x+1)$$

Si se iguala cada factor a cero y despejamos la variable obtenemos una raíz.

El ejemplo anterior lo trabajaremos con la fórmula general**.**

Para encontrar las raìces de la función. Pero antes daremos su correspondiente demostración.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad \text{CTCP}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$3x^2-5x-2=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$$

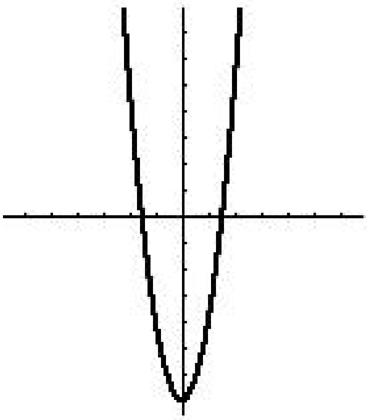
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}$$

$$x=\frac{5\pm7}{6}$$

$$x_1=\frac{5+7}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$x_2=\frac{5-7}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$



Los ejemplos considerados se trabajaron con la ecuación de segundo grado completa, las incompletas se trabajan de igual manera, solo teniendo en cuenta que le falta a dicha ecuación, puede ser el segundo término o el tercero.

4.6.CIRCUNFERENCIA.

Circunferencia: Es el lugar geométrico (conjunto) de todos los puntos del plano que equidistan una distancia dada (radio) de un punto fijo dado (centro).

Demostración.
Sea U(x, y) un punto cualquiera del plano está sobre la circunferencia de radio r con centro C(h, k) . Sí y sólo si

$$|U-C|=r$$
$$|(x,y)-(h,k)|=r$$
$$|(x-h,y-k)|=r$$
$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

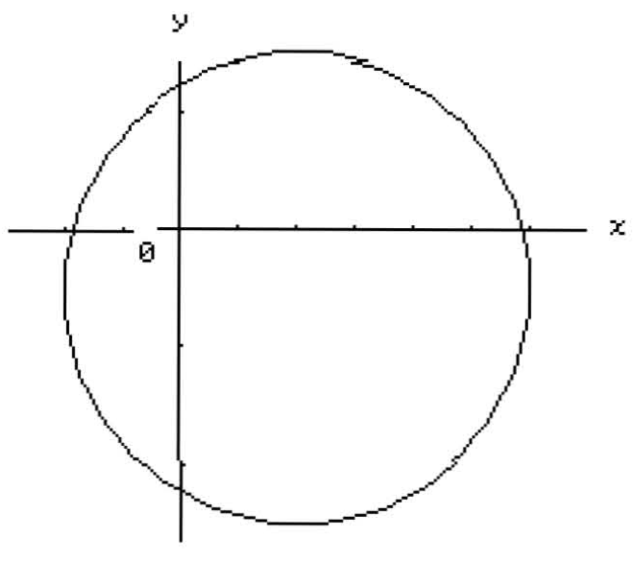
Con centro (h,k) donde
h y k son reales.

Ejemplo.
Obtener la ecuacion de la circunferencia dado U(x,y) del plano esta sobre la circunferencia de radio 4 centro en S(2,-1) si y solo si

$$|u-s|=4.$$
$$|u-s|=|(x,y)-(2,-1)|$$
$$=|(x-2,y+1)|$$
$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=4$$

$$\therefore \quad (x-2)^2+(y+1)^2=16.$$

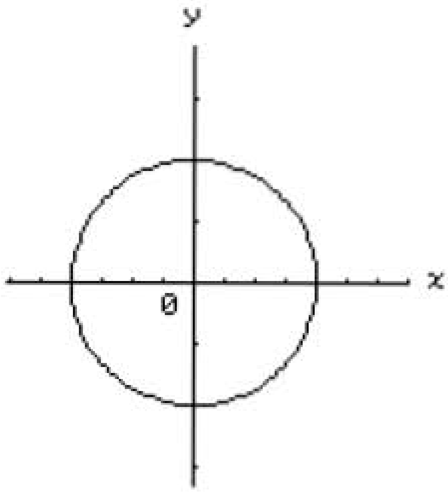


Ejemplo.
Obtener la ecuacion de la circunferencia dado $U(x,y)$ del plano esta sobre la circunferencia de radio 4 centro en $S(0,0)$ si y solo si

$$|u-s|=4.$$

$$|u-s|=|(x,y)-(0,0)|$$
$$=|(x,y)|$$
$$=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=4$$
$$\therefore \quad x^2+y^2=16$$



Ejemplo.

Obtener una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos
R(3,-2), S(-1,-4) y T(2,-5).
Consideremos la ecuación general de segundo grado:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$
$$\therefore$$
$$3^2+(-2)^2+3D-2E+F=0$$
$$(-1)^2+(-4)^2-D-4E+F=0$$
$$2^2+(-5)^2+2D-5E+F=0$$
o bien
$$3D-2E+F=-13$$
$$-D-4E+F=-17$$
$$2D-5E+F=-29$$

Resolviendo el sistema, es decir, D = -2, E = 6, y F = 5.
Por lo tanto, una ecuación cartesiana de la circunferencia es

$$x^2+y^2-2x+6y+5=0.$$

Ejemplo.

Obtener una ecuación cartesiana de la recta L que es tangente en el punto T(6,-4) a la circunferencia C cuya ecuación es $x^2+y^2-4x+2y-20=0$.

Primero debemos saber si T pertenece a C. Sustituyendo el punto en la ecuación de la circunferencia tenemos que:

$$6^2+(-4)^2-4(6)+2(-4)-20=0$$
$$36+16-24-8-20=0$$

Completando cuadrados en x y y en la ecuacion de C, se tiene

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)=20+4+1,$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=25.$$

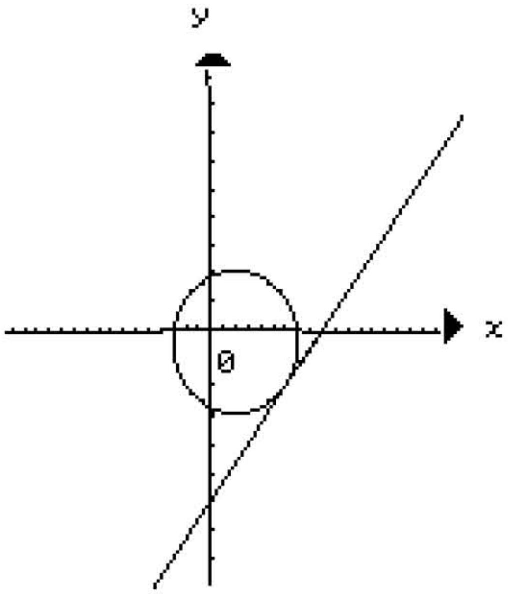
Por lo tanto C tiene su centro en S(2,-1) y un vector de direccion de la recta que contiene al segmento radial TS es

$$s-t=(2,-1)-(6,-4)=(-4,3)$$

Por tanto un punto U(x,y) esta sobre L si y solo si

$$(u-t)(s-t)=0$$
$$((x,y)-(6,-4))((2,-1)-(6,-4))=0$$
$$((x-6,y+4)(-4,3)=0$$
$$-4x+3y+24+12=0$$
$$4x-3y-36=0$$

siendo esta la ecuacion de L buscada.



Ejemplo. Dada la ecuacion de la circunferencia

$$(x-1)^2+(y+1)^2=25.$$ y el punto $P(0,6)$.

Encontrar todas las rectas que pasan por P y son tangentes a la circunferencia.

C tiene su centro en $S(1,-1)$. Tomemos la ecuacion

$$y=mx+b$$

$$y=mx+6 \text{ y } r=5.$$

Calculemos la distancia de $S(h,k)$ a la recta entonces

$$d(S,L)=\frac{|mh+yk+c|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m(1)-1(-1)+6|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|m+1+6|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

$$|m+7|=5\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+7)^2=25\left(m^2+1\right)$$

$$m^2+14m+49=25m^2+25$$

$$24m^2-14m-24=0$$

usando la ecuacior general de segundo grado tenemos:

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

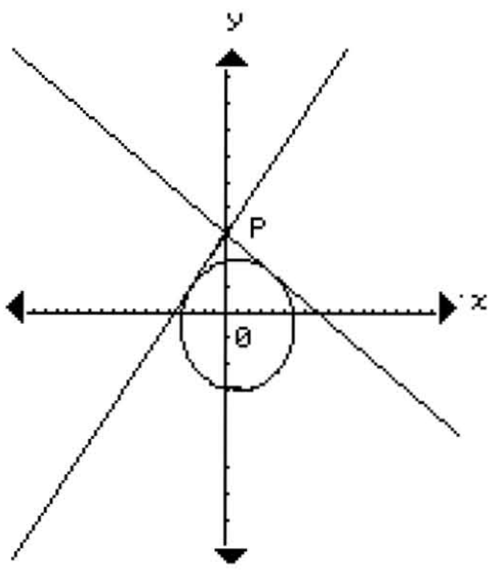
$$m=\frac{14\pm\sqrt{196+2304}}{48}=\frac{14\pm50}{48}$$

$$m_1=\frac{14+50}{48}=\frac{64}{48}=\frac{4}{3}$$

$$m_2=\frac{14-50}{48}=\frac{-36}{48}=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad y_1=\frac{4}{3}x+6$$

$$y_2=-\frac{3}{4}x+6$$



Ejemplo. Encontrar la ecuacion de la ecuacion de la tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x+2y-23=0$ en el punto $P(4,3)$.

Completando cuadrados $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

Se encuentra la ecuacion de la recta que pasa por el centro de la circunferencia $C(1,-1)$ y el punto de tangencia $P(4,3)$.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{3-(-1)}{4-1}(x-1)$$

$$y+1=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$$

$$3y+3=4x-4$$

$$4x-3y-7=0 \quad L_1.$$

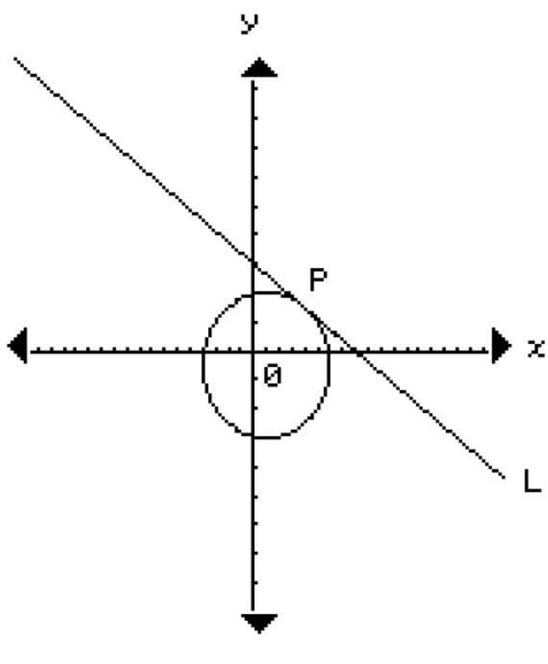
Encontramos la perpendicular a L_1, siendo esta la solucion.

$$3x+4y+C'=0$$

$$3(4)+4(3)+C'=0$$

$$C'=-24$$

$\therefore 3x+4y-24=0$ es la tangente al circulo.



Ejemplo. Encontrar la ecuacion de la familia de circunferencias cuyos centros estan en la recta $x=y$ y son tangentes a los ejes coordenados.

Encontrar el elemento de la familia que pasa por $(4,2)$.

por ser $x=y$, entonces $h=k$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$r=|h|$$

$$r^2=h^2$$

$$(x-h)^2+(y-h)^2=h^2$$

$$(4-h)^2+(2-h)^2=h^2$$

$$16-8h+h^2+4-4h+h^2=h^2$$

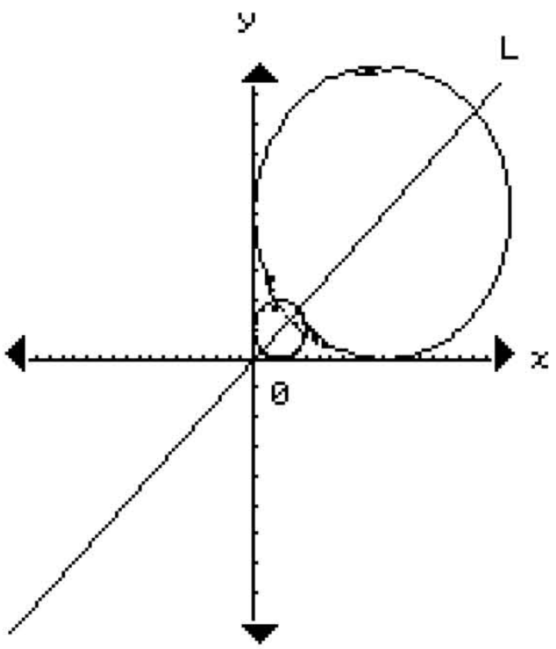
$$h^2-12h+20=0$$

$$h=2, \quad h=10$$

las circunferencias son:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4;$$

$$(x-10)^2+(y-10)^2=100$$



4.7. PARÁBOLA.

Parábola: Es el conjunto P de puntos que equidistan de una recta D y de un punto dado F que no esté sobre D.
D = directriz.
F = foco.

Demostración.
Sea U(x, y) un punto cualquiera que está en el lugar geométrico, y w un punto que esta en la directriz. Sí y sólo si

Sea $U(x,y)$, $f(0,p)$ $w(x,p)$ si $p>0$.

$$|U-f|=|U-w|$$

$$|(x,y)-(0,p)|=|(x,y)-(x,p)|$$

$$|(x-0,y-p)|=|(0,y+p)|$$

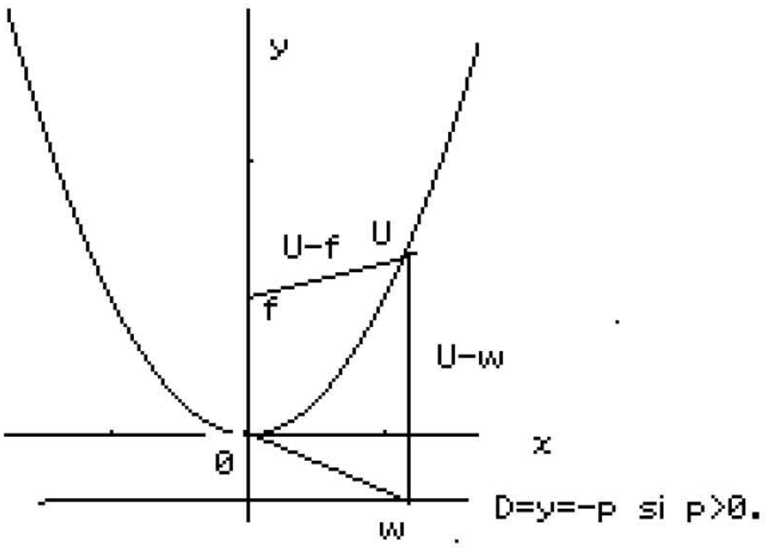
por ser $p>0$, el foco esta por encima del eje x. Por lo que la directriz es igual a $D=y=-p$, $p>0$, $D<0$.

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$ elevando al cuadrado,

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

$$x^2=4py.$$



Sea U(x, y) un punto cualquiera que está en el lugar geométrico, y w un punto que esta en la directriz. Sí y sólo si

Sea $U(x,y)$, $f(0,p)$ y $w(x,p)$

$$|U-f|=|U-w|$$

$$|(x,y)-(0,p)|=|(x,y)-(x,p)|$$

$$|(x-0,y+p)|=|(0,y-p)|$$

por ser $p<0$, el foco esta por debajo del eje x.

Por lo que la directriz es igual a $D=y=-p$, $p<0$, $D>0$.

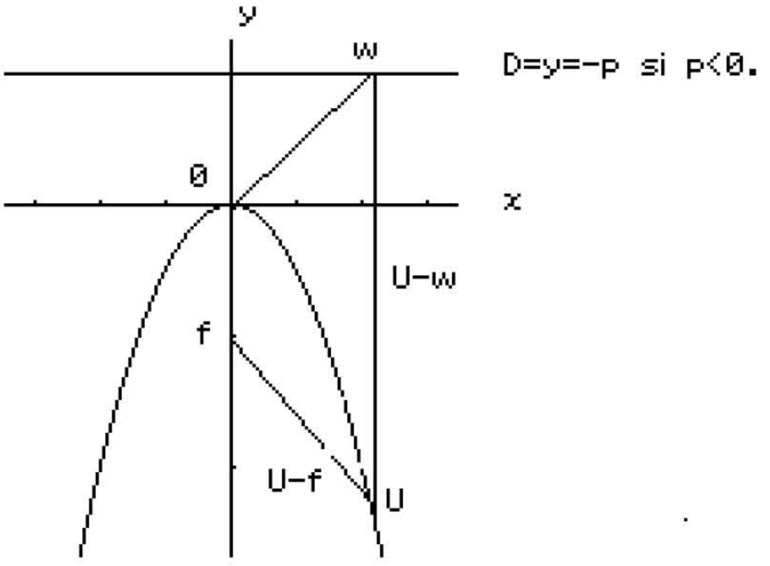
$$\sqrt{x^2+(y+p)^2}=\sqrt{(y-p)^2}$$

elevando al cuadrado,

$$x^2+(y+p)^2=(y-p)^2$$

$$x^2+y^2+2py+p^2=y^2-2py+p^2$$

$$x^2=-4py.$$



Obtener la ecuación cartesiana de la parábola con vértice en el origen y con foco f(0,3). Y obtener la ecuación de la directriz.

$$|u-f|=|u-w|$$

$$|(x,y)-(0,3)|=|(x,y)-(x,-3)|$$

$$|(x,y-3)|=|(0,y+3)|$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y+3)^2}$$

$$x^2+y^2-6y+9=y^2+6y+9$$

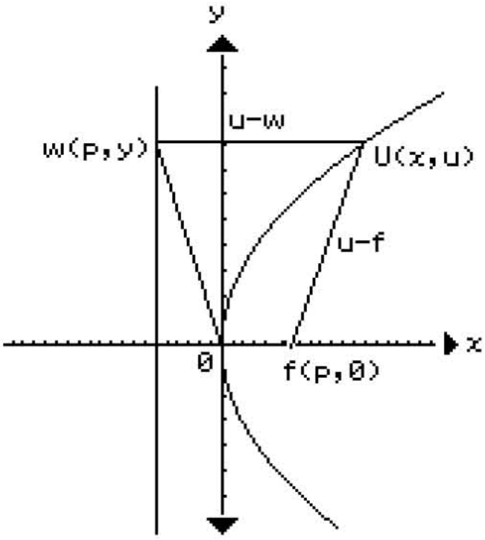
$$x^2=12y \quad 4p=12 \Rightarrow p=3,$$

$$D=y=-p,\ p>0 \Rightarrow y=-3$$

Sea U(x, y) un punto cualquiera que está en el lugar geométrico, y w un punto que esta en la directriz. Sí y sólo si

Demostracion: Sea $f(p,0)$, $w(p,y)$

$$|u-f|=|u-w|$$
$$|(x,y)-(p,0)|=|(x,y)-(p,y)|$$
$$|(x-p,y)|=|(x+p,0)|$$
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=\sqrt{(x+p)^2}$$
$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2px+p^2$$
$$y^2=4px.$$



$D=x=-p,\ p>0$

Obtener la ecuación cartesiana de la parábola con vértice en el origen y con foco f(1,0). Y obtener la ecuación de la directriz.

$$|u-f|=|u-w|$$
$$|(x,y)-(1,0)|=|(x,y)-(-1,y)|$$
$$|(x-1,y)|=|(x+1,0)|$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2}$$
$$x^2-2x+1+y^2=x^2+2x+1$$

$y^2=4x.$ $4p=4$ $p=1$ $D=x=-p,\ p>0$
$x=-1.$

Demostracion: Sea $f(p,0)$, $w(p,y)$

$$|u-f|=|u-w|$$

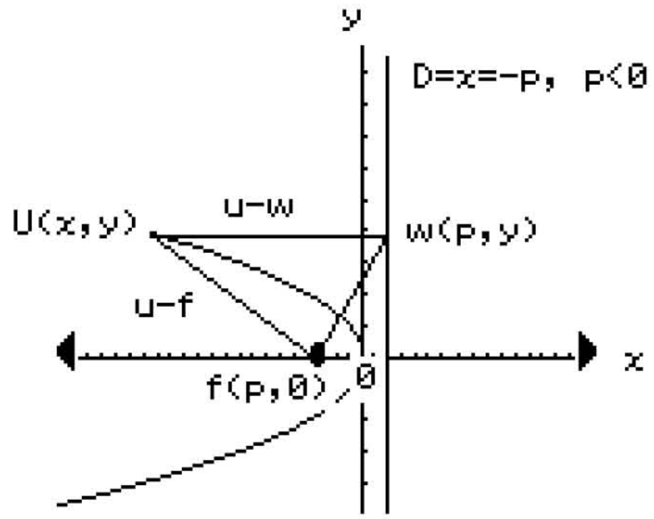
$$|(x,y)-(p,0)|=|(x,y)-(p,y)|$$

$$|(x+p,y)|=|(x-p,0)|$$

$$\sqrt{(x+p)^2+y^2}=\sqrt{(x-p)^2}$$

$$x^2+2px+p^2+y^2=x^2-2px+p^2$$

$$y^2=-4px.$$



Obtener la ecuación cartesiana de la parábola con vértice en el origen y con foco f(-3,0). Y obtener la ecuación de la directriz.

$$|u-f|=|u-w|$$

$$|(x,y)-(-3,0)|=|(x,y)-(3,y)|$$

$$|(x+3,y)|=|(x-3,0)|$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2}$$

$$x^2+6x+9^2+y^2=x^2-6x+9^2$$

$$y^2=-12x.$$

$$4p=-12$$

$$p=-3$$

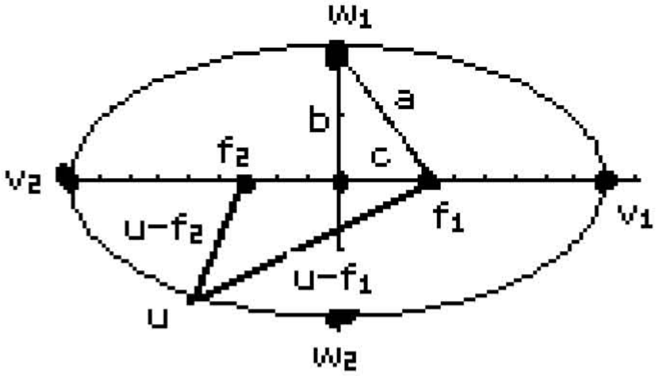
$$D=x=-p,\ p<0$$

$$x=3.$$

4.8. ELIPSE.

Definición.

Dados dos puntos F1 y F2 del plano, el conjunto de puntos U(x, y) del plano tales que la suma de las distancias de U a F1 y de U a F2 es una constante dada mayor que la distancia de F1 a F2.



c es la distancia que separa a cada foco del centro de la elipse de modo tal que d(F1,F2)=2c.
Sea ahora 2a la suma de las distancias que separan a cada punto U de F1 y de F2 de la elipse.
d(F1,U)+d(F2,U) =2 a
a es la distancia que separa a cada vértice del centro de la elipse. Entonces
d(F1,F2)<d(V1,V2) y d(F1,V1)+d(F2,V1)= 2 a
Por simetría
d(F1,V1)=d(V2,F2) entonces d(V2,F2)+ d(F2,V1)= 2 a
d(V1,V2)= 2 a
La longitud del eje mayor es 2 a y d(c,V1)=a.
Puesto que un extremo W1 del eje menor está sobre la elipse, se tiene
d(F1,W1)+d(F2,W1) =2 a
2d(F1,W1) =2 a
d(F1,W1) =a.
Por lo tanto si b es la longitud d(c,W1) de un semieje menor de la elipse, entonces por el teorema de Pitágoras: se tiene que

$$a^2=b^2+c^2 \quad \text{entonces} \quad b^2=a^2-c^2$$

Es posible obtener la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos sobre el eje x de la siguiente manera; supóngase que la elipse tiene los focos y el punto cualquiera U de coordenadas:

$$U(x,y),\ f_1(c,0)\ \text{ y }\ f_2(-c,0)$$

$$|u-f_2|+|u-f_1|=2a$$

$$|(x,y)-(-c,0)|+|(x,y)-(c,0)|=2a$$

$$|(x+c,y)|+|(x-c,y)|=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx=4\left(a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$cx=\left(a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1).$$

Siendo esta la ecuación de la elipse, con centro en el origen.
De forma horizontal.
Es importante saber identificar si la elipse es horizontal o vertical, esto es muy fácil saberlo.
En ambas ecuaciones, el eje mayor siempre es el que tiene denominador más grande, y no tiene falla puesto que los ejes son de longitudes distintas.
En el remoto caso que los denominadores sean iguales entonces, no se tratará de una elipse; si no de una circunferencia.
Enseguida se dará la demostración de la forma vertical.

Demostracion:

Sea $u(x,y), f_1(0,c)$ y $f_2(0,-c)$

$$|u-f_2|+|u-f_1|=2a$$

$$|(x,y)-(0,-c)|+|(x,v)-(0,c)|=2a$$

$$|(x,v+c)|+|(x,y-c)|=2a$$

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}+\sqrt{(y-c)^2+x^2}=2a$$ despejando un radical

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}=2a-\sqrt{(y-c)^2+x^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$(y+c)^2+x^2=4a^2-4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}+(y+c)^2+x^2$$

desarrollando el binomio y simplificando

$$y^2+2cy+c^2+x^2=4a^2-4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}+y^2-2cy+c^2+x^2$$

$$4cy=4a^2-4a\sqrt{(y-c)^2+x^2}$$

$$cv=a^2-a\sqrt{(v-c)^2+x^2}$$ despejando el radical

$$a\sqrt{(y-c)^2+x^2}=a^2-cy$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$a^2\left((y-c)^2+x^2\right)=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$

$$a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2+a^2x^2=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2y^2$$

$$y^2\left(a^2-c^2\right)+a^2x^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Donde $b^2=a^2-c^2$

$$y^2b^2+a^2x^2=a^2b^2$$ dividiendo a ambos miembros por a^2b^2

$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (2).$$

Ejemplo.
Obtener una ecuacion de la elipse, con centro en el origen, cuyos focos y vertices se dan:
Sea $u(x,y), f_1(3,0)$ y $f_2(-3,0)$
$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ y su grafica.

$$|u-f_2|+|u-f_1|=2a$$

$$|(x,y)-(-3,0)|+|(x,y)-(3,0)|=2(5)$$

$$|(x+3,y)|+|(x-3,y)|=10$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x+3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x-3)^2+y^2}+(x-3)^2+y^2$$

desarrollando el binomio y simplificando

$$x^2+6x+9+y^2=100-20\sqrt{(x-3)^2+y^2}+x^2-6x+9+y^2$$

$$12x=100-20\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

$$3x=25-5\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$ despejando el radical

$$5\sqrt{(x-3)^2+y^2}=25-3x$$

elevando al cuadrado ambos miembros

$$25\left((x-3)^2+y^2\right)=625-150x+9x^2$$

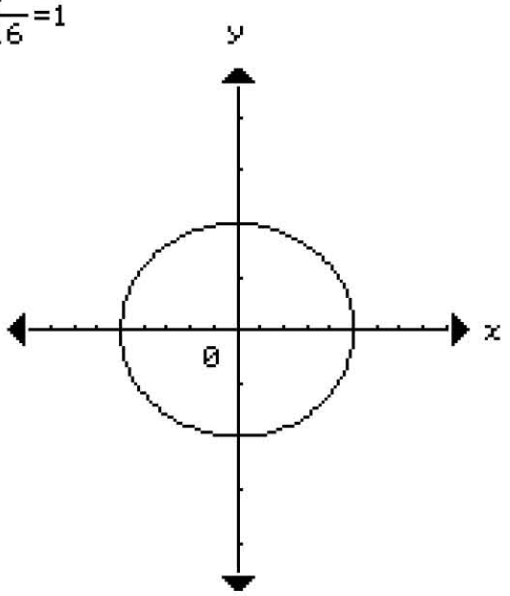
$$25\left(x^2-6x+9+y^2\right)=625-150x+9x^2$$

$$25x^2-150x+225+25y^2=625-150x+9x^2$$

$$16x^2+25y^2=400$$

$$\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}$$

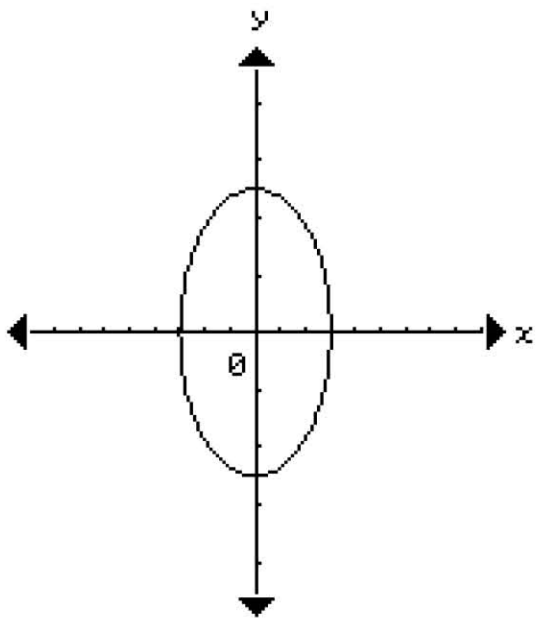
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Ejemplo.
Obtener una ecuacion de la elipse, con centro en el origen, cuyos focos y vertices se dan:
Sea $u(x,y), f_1(0,4)$ y $f_2(0,-4)$
$V_1(0,5)$, $V_2(0,-5)$ y su grafica.

$$|u-f_2|+|u-f_1|=2a$$
$$|(x,y)-(0,-4)|+|(x,y)-(0,4)|=2(5)$$
$$|(x,y+4)|+|(x,y-4)|=10$$
$$\sqrt{x^2+(y+4)^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}=10$$
despejando y elevando al cuadrado ambos miembros
$$x^2+(y+4)^2=100-20\sqrt{x^2+(y-4)^2}+x^2+(y-4)^2$$
desarrollando el binomio y simplificando
$$x^2+y^2+8y+16=100-20\sqrt{x^2+(y-4)^2}+x^2+y^2-8y+16$$
$$16y=100-20\sqrt{x^2+(y-4)^2}$$
$4y=25-5\sqrt{x^2+(y-4)^2}$ despejando el radical

$5\sqrt{x^2+(y-4)^2}=25-4y$ elevando al cuadrado ambos miembros
$$25\left(x^2+(y-4)^2\right)=625-200y+16y^2$$
$$25\left(x^2+y^2-8y+16\right)=625-200y+16y^2$$
$$25x^2+25y^2-200y+400=625-200y+16y^2$$
$$25x^2+9y^2=225$$
$$\frac{25x^2}{225}+\frac{9y^2}{225}=\frac{255}{225}$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

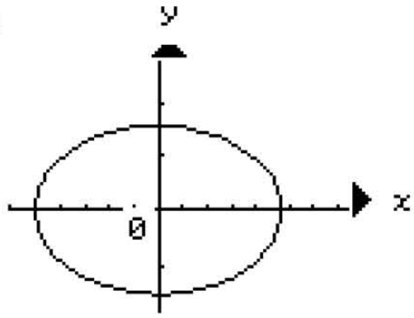


Dadas las longitudes y los ejes, obtenga la ecuación de las elipses:

a=5 y b=3 eje mayor x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

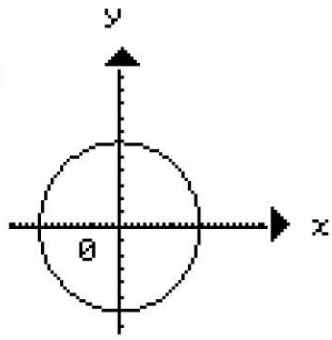
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$



a=13 y b=12 eje mayor x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

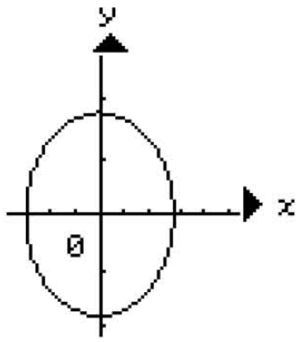
$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$$



$a=\sqrt{13}$ y b=3 eje mayor y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

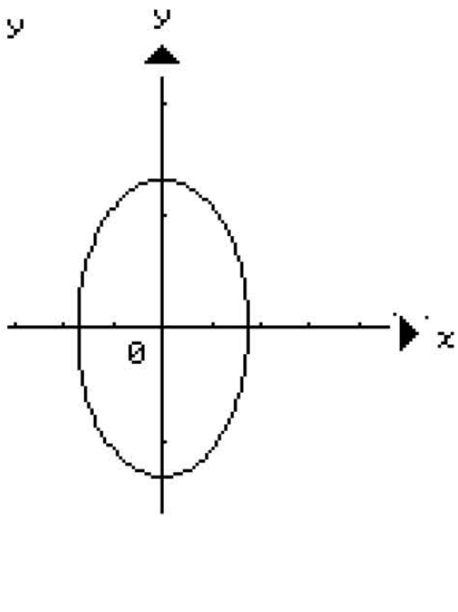
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1$$



$a=\sqrt{7}$ y $b=\sqrt{3}$ eje mayor y

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{7}=1$$



4.9. HIPÉRBOLA.

Definición: Es el lugar geométrico determinado por la diferencia de dos distancias. Para los puntos dados F1 y F2 del plano, el conjunto de los puntos U(x, y) del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a los puntos F1 y F2 de U es una constante dada, menor que d(F1,F2), es una hipérbola. $0 < a < c$ y centro en el origen.
F1(c,0) , F2(-c,0),U(x ,y) esta sobre la hipérbola, si y solo si

$$|u-f_1|-|u-f_2|=2a$$
$$|u-f_1|-|u-f_2|=\pm 2a$$
$$|(x,y)-(c,0)|-|(x,y)-(-c,0)|=2a$$
$$|(x-c,y)|-|(x+c,y)|=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$(x-c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$-4cx=4\left(a^2+a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)$$
$$-cx=a^2+a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$-a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$
$$a^2\left((x+c)^2+y^2\right)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$
$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=c^2x^2+2a^2cx+a^4$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$
$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$
$$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

$c^2=a^2+b^2$ entonces $b^2=c^2-a^2$

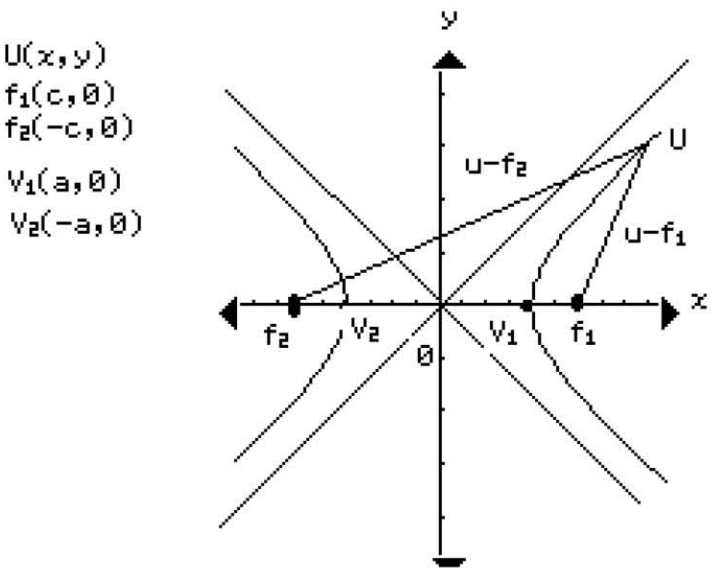
Sea $U(x,y), f_1(0,c)$ y $f_2(0,-c)$

$$|u-f_1|-|u-f_2|=2a$$
$$|u-f_1|-|u-f_2|=\pm 2a$$
$$|(x,y)-(0,c)|-|(x,y)-(0,-c)|=-2a$$
$$|(x,y-c)|-|(x,y+c)|=-2a$$
$$\sqrt{x^2+(y-c)^2}-\sqrt{x^2+(y+c)^2}=-2a$$
$$-\sqrt{x^2+(y+c)^2}=-2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$x^2+(y+c)^2=4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+(y-c)^2$$
$$x^2+y^2+2cy+c^2=4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+y^2-2cy+c^2$$
$$4cy=4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$cy=a^2+a\sqrt{x^2+(y-c)^2}$$
$$-a\sqrt{x^2+(y-c)^2}=a^2-cy$$
$$a^2\left(x^2+(y-c)^2\right)=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2\left(x^2+y^2-2cy+c^2\right)=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$
$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cy+a^2c^2=a^4-2a^2cy+c^2y^2$$
$$c^2y^2-a^2y^2-a^2x^2=a^2c^2-a^4$$
$$y^2\left(c^2-a^2\right)-a^2x^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$
$$y^2b^2-a^2x^2=a^2b^2$$
$$\frac{y^2b^2}{a^2b^2}-\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

$c^2=a^2+b^2$ entonces
$b^2=c^2-a^2$

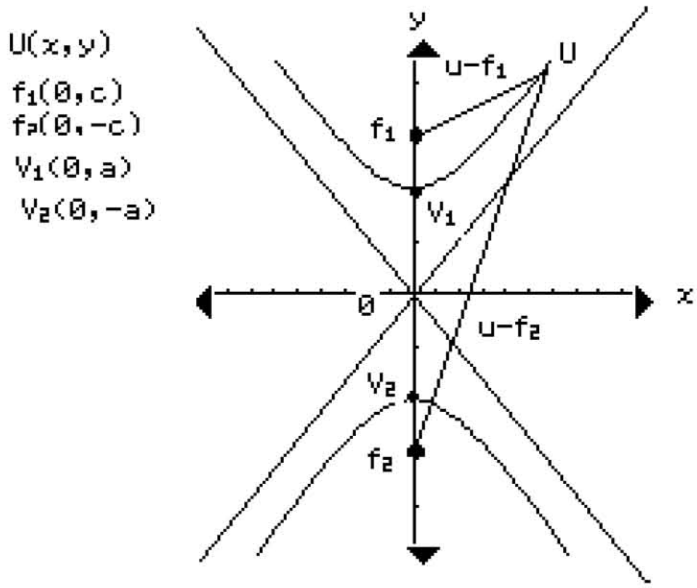
Hiperbola Horizontal

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



Hiperbola Vertical

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



Para identificar como es la hipérbola, es suficiente ver que variable es positiva y ese será el eje focal o mayor por lo tanto sobre ese eje se dibujará la curva.
Asíntota: es una recta a la cual una gráfica se acerca indefinidamente.
En la ecuación (1) si se sustituye a y = 0, se tiene que

$$\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2$$

$x=\pm a \therefore a$ y $-a$ son las intersecciones de la hiperbola de esta forma con el eje x.

Si hacemos $x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=-1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}$ es siempre no negativo.

la hiperbola no corta al eje y.

En la ecuacion (2) corta al eje y en los puntos a y $-a$, no corta al eje x.

Consideremos la ecuacion $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ despejamos a y^2 en funcion de $x \Rightarrow$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$$

siendo estas las ecuaciones de las asintotas de la hiperbola que pasan por el origen, donde $\frac{b}{a}$ es la pendiente de cada asintota.

Ejemplo. Obtener una ecuacion cartesiana de la hiperbola, con centro en el origen, cuyos focos y vertices se dan:

Sea $U(x,y)$, $f_1(5,0)$ y $f_2(-5,0)$
$V_1(3,0)$ $V_2(-3,0)$ y graficar

$$|u-f_1|-|u-f_2|=2a$$

$$|(x,y)-(5,0)|-|(x,y)-(-5,0)|=2(3)$$

$$|(x-5,y)|-|(x+5,y)|=6$$

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}-\sqrt{(x+5)^2+y^2}=6$$

$$-\sqrt{(x+5)^2+y^2}=6-\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

$$(x+5)^2+y^2=36-12\sqrt{(x-5)^2+y^2}+(x-5)^2+y^2$$

$$x^2+10x+25+y^2=36-12\sqrt{(x-5)^2+y^2}+x^2-10x+25+y^2$$

$$20x=36-12\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

$$5(4)x=4\left(9-3\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)$$

$$5x=9-3\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

$$3\sqrt{(x-5)^2+y^2}=9-5x$$

$$9\left((x-5)^2+y^2\right)=81-90x+25x^2$$

$$9\left(x^2-10x+25+y^2\right)=81-90x+25x^2$$

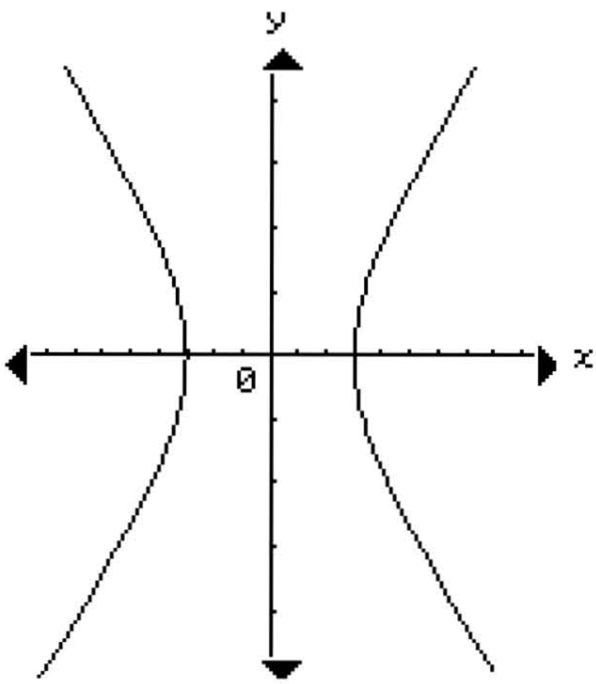
$$9x^2-90x+225+9y^2=81-90x+25x^2$$

$$25x^2-9x^2-9y^2=225-81$$

$$16x^2-9y^2=144$$

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

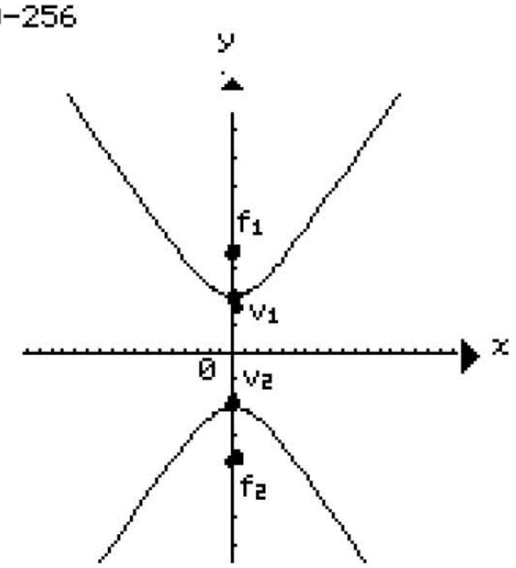


Ejemplo. Obtener una ecuacion cartesiana de la hiperbola, con centro en el origen, cuyos focos y vertices se dan:

Sea $U(x,y)$, $f_1(0,5)$ y $f_2(0,-5)$

$V_1(0,4)$ $V_2(0,-4)$ y graficar.

$$|u-f_1|-|u-f_2|=2a$$
$$|(x,y)-(0,5)|-|(x,y)-(0,-5)|=2(4)$$
$$|(x,y-5)|-|(x,y+5)|=8$$
$$\sqrt{x^2+(y-5)^2}-\sqrt{x^2+(y+5)^2}=8$$
$$-\sqrt{x^2+(y+5)^2}=8-\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$
$$x^2+(y+5)^2=64-16\sqrt{x^2+(y-5)^2}+x^2+(y-5)^2$$
$$x^2+y^2+10y+25=64-16\sqrt{x^2+(y-5)^2}+x^2+y^2-10y+25$$
$$20y=64-16\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$
$$4(5y)=4\left(16-4\sqrt{x^2+(y-5)^2}\right)$$
$$5y=16-4\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$
$$4\sqrt{x^2+(y-5)^2}=16-5y$$
$$16\left(x^2+(y-5)^2\right)=256-160y+25y^2$$
$$16\left(x^2+y^2-10y+25\right)=256-160y+25y^2$$
$$16x^2+16y^2-160y+400=256-160y+25y^2$$
$$25y^2-16y^2-16x^2=400-256$$
$$9y^2-16x^2=144$$
$$\frac{9y^2}{144}-\frac{16x^2}{144}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$$



Obtener la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, para la cual se dan las longitudes de los ejes conjugado y transversal, y cuyos ejes principales se especifica.

$2a=8,\ 2b=10$; eje x.
$a=4,\ b=5$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$$

$2a=10,\ 2b=8$; eje x.
$a=5,\ b=4$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$$

$2a=14,\ 2b=6$; eje x.
$a=7,\ b=3$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$$

$2a=26,\ 2b=10$; eje y.
$a=13,\ b=5$
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1; \quad \frac{y^2}{169}-\frac{x^2}{25}=1$$

$2a=2\sqrt{7},\ 2b=4$; eje y.
$a=\sqrt{7},\ b=2$
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1; \quad \frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{4}=1$$

$2a=2\sqrt{11},\ 2b=12$; eje y.
$a=\sqrt{11},\ b=6$
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1; \quad \frac{y^2}{11}-\frac{x^2}{36}=1$$

4.10. ¿CÓMO IDENTIFICAR UNA CÓNICA QUE SOLAMENTE SE CONOCE LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO?

Dada la ecuación general de segundo grado, en la forma

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$

Si $B=0$ entonces tenemos

$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$

De aqui se desprenden 4 casos:

1) Si A y C son iguales y diferentes a cero, y de signos iguales, entonces se dice, que son Circunferencias.

2) Si $A\neq 0$, $C\neq 0$ y $A\neq C$ y de signos iguales, entonces se dice que son Elipses.

3) Si $A\neq 0$, $C\neq 0$ y $A\neq C$ y de signos diferentes, entonces se dice que son Hiperbolas.

4) Si $A=0$ o $C=0$ pero no ambos, se dice que son Parabolas.

De las siguientes ecuaciones identifique a que cónica hace referencia usando los criterios dados anteriormente:

$x-4y^2+16y-7=0$
Es Parabola.

$x^2-y^2-6x+10y-20=0$
Es Hiperbola.

$x^2+4y^2-6x-16y-11=0$
Es Elipse.

$4x^2+4y^2-12x+8y-3=0$
Es Circunferencia.

$2x^2-2y^2-12x+8y-4=0$
Es Hiperbola.

4.11. ECUACIONES DE ROTACIÓN E IDENTIFICACIÓN DE CÓNICAS.

Si $B \neq 0$, entonces no se puede identificar la gráfica directamente por el método anterior. Sin embargo, se puede emplear una rotación de ejes coordenados para obtener una ecuación de la gráfica de la ecuación general de segundo grado si $B \neq 0$ que no tenga un término cruzado en los nuevos ejes y entonces se puede proceder como antes.

Una rotación en IR^2 será considerada como un movimiento del plano con respecto a un punto fijo.

Si se rotan los ejes un ángulo θ medido en radianes, entonces las nuevas y las viejas coordenadas están relacionadas través de:

Nuevas coordenadas de un punto P(x,y) despues de una rotacion los ejes x', y' θ radianes.

$$x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$y' = -x\,\mathrm{Sen}\,\theta + y\cos\theta$$

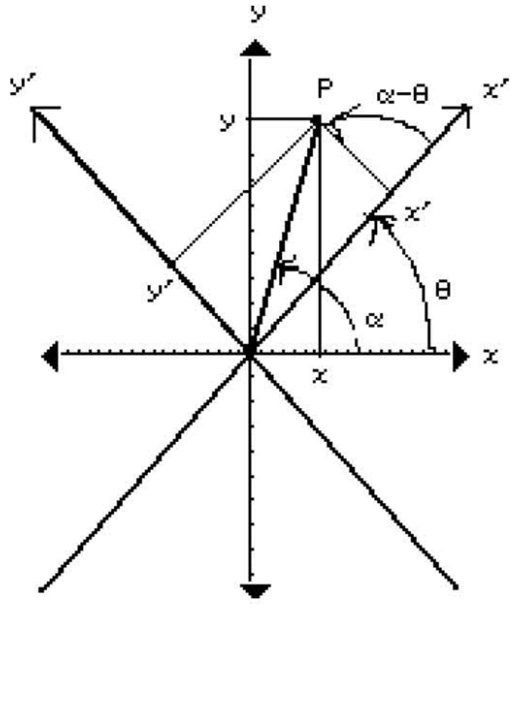
$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$y = x'\,\mathrm{Sen}\,\theta + y'\cos\theta$$

donde θ es el angulo de rotacion.

Demostracion: $x' = x\cos\theta + y\,\mathrm{Sen}\,\theta$

$y' = -x\,\mathrm{Sen}\,\theta + y\cos\theta$



Pasamos a coordenadas polares, tal que

$$x=r\cos(\alpha)\ ,\ y=r\,\mathrm{sen}(\alpha)$$
$$x'=r\cos(\alpha-\theta)$$
$$y'=r\,\mathrm{sen}(\alpha-\theta)$$
$$r\cos(\alpha-\theta)=r\cos(\alpha)\cos(\theta)+r\,\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)=x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$r\,\mathrm{sen}(\alpha-\theta)=r\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta)-r\cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)=-x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta)$$
$$\therefore\ x'=x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$y'=-x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta)$$

Para las ecuaciones en los ejes xy solamente resolvemos el sistema formado.

$x'=x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)\quad (1)$ multiplicamos a (1) por sen(θ)

$y'=-x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta)\quad (2)$ y a (2) por cos(θ)

$$(x'=x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$(y'=-x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta))\cos(\theta)$$

$$x'\mathrm{sen}(\theta)=x\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)+y\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$
$$y'\cos(\theta)=-x\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+y\cos^2(\theta)$$ sumamos

$$y(\mathrm{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta))=x'\mathrm{sen}(\theta)+y'\cos(\theta)$$

$y=x'\mathrm{sen}(\theta)+y'\cos(\theta)$ por lo que se encontro una variable, para encontrar la otra variable multiplicamos a (1) por cos(θ) y a (2) por −sen(θ)

$$(x'=x\cos(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta))\cos(\theta)$$
$$(y'=-x\,\mathrm{sen}(\theta)+y\cos(\theta))(-\mathrm{sen}(\theta))$$

$$x'\cos(\theta)=x\cos^2(\theta)+y\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$
$$-y'\mathrm{sen}(\theta)=x\,\mathrm{sen}^2(\theta)-y\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$ sumamos

$$x(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))=x'\cos(\theta)-y'\mathrm{sen}(\theta)$$
$$x=x'\cos(\theta)-y'\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\therefore\ x=x'\cos(\theta)-y'\mathrm{sen}(\theta)$$
$$y=x'\mathrm{sen}(\theta)+y'\cos(\theta)$$

Pues bien, ya que se tienen las ecuaciones de rotación podemos eliminar el término cruzado, dicho de otra manera, estamos en condiciones para transformar una ecuación en otra equivalente vía rotación de ejes y hacer desaparecer el término xy e identificar la cónica. Y además graficarla.

Criterios de identificacion:

Si $B\neq 0$

1) $4AC-B^2>0$ Elipses.

2) $4AC-B^2=0$ Parabolas.

3) $4AC-B^2<0$ Hiperbolas.

Ademas tenemos dos casos:

I. Si $A=C \Rightarrow BCos(2\theta)=0$

$\Rightarrow B\neq 0$

$\Rightarrow Cos(2\theta)=0$

$\Rightarrow$ si $2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, k es entero.

Basta tomar a $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ en este caso $\theta=\frac{\pi}{4}$.

II. Si $A\neq C$

$\Rightarrow (C-A)\frac{Sen(2\theta)}{2}+BCos(2\theta)=0$

$\Rightarrow (A-C)\frac{Sen(2\theta)}{2}=BCos(2\theta)$

$\Rightarrow Sen(2\theta)=\frac{2B}{A-C}Cos(2\theta)$

$\Rightarrow \frac{Sen(2\theta)}{Cos(2\theta)}=\frac{2B}{A-C}$

$\tan(2\theta)=\frac{2B}{A-C}$

$\Rightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{2}$ y $\tan(2\theta)=\frac{2B}{A-C}$

Ejemplos.

Mediante una rotación de ejes identifique y grafique las ecuaciones siguientes y dé una ecuación en el nuevo sistema que carezca del término cruzado.

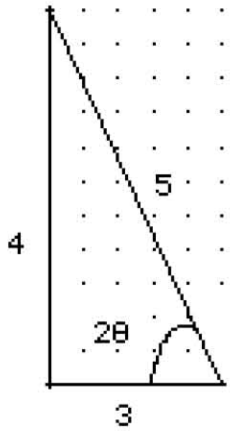
$8x^2-12xy+17y^2-20=0$ Primero identificamos:

$A=8$, $B=-6$ y $C=17$

$4(8)(17)-(-12)^2=544-144=400>0$ Elipse.

$A\neq C \Rightarrow$ buscamos $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\tan(2\theta)=\frac{2B}{A-C}=\frac{-12}{8-17}=\frac{-12}{-9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$



$$\mathrm{Cos}(2\theta)=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{Sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5-3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{Cos}\theta=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5+3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Sustituyo estos valores en
$x=x'\mathrm{Cos}\theta-y'\mathrm{Sen}\theta$
$y=x'\mathrm{Sen}\theta+y'\mathrm{Cos}\theta$ obteniendo

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

Sustituyamos en la ecuación:

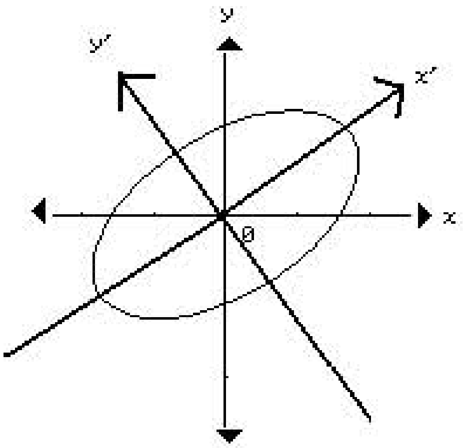
$$8\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2-12\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+17\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2-20=0$$

$$8\left(\frac{4}{5}x'^2-\frac{4}{5}x'y'+\frac{1}{5}y'^2\right)-12\left(\frac{2}{5}x'^2+\frac{3}{5}x'y'-\frac{2}{5}y'^2\right)+17\left(\frac{1}{5}x'^2+\frac{4}{5}x'y'+\frac{4}{5}y'^2\right)-20=0$$

$$\frac{32}{5}x'^2-\frac{32}{5}x'y'+\frac{8}{5}y'^2-\frac{24}{5}x'^2-\frac{36}{5}x'y'+\frac{24}{5}y'^2+\frac{17}{5}x'^2+\frac{68}{5}x'y'+\frac{68}{5}y'^2-20=0$$

$$5x'^2+20y'^2=20$$

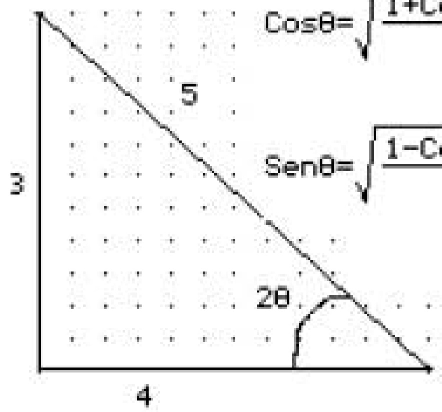
$$\frac{x'^2}{4}+y'^2=1$$



$x^2-3xy+5y^2-4=0$

$A=1$, $B=-3$, $C=5$, como $A\neq C \Rightarrow$ buscamos θ tal que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. $\tan(2\theta)=\frac{B}{A-C}=\frac{-3}{1-5}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

$$\cos(2\theta)=\frac{4}{5}$$



$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\operatorname{Sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Sustituyo estos valores en

$x=x'\cos\theta-y'\operatorname{Sen}\theta$

$y=x'\operatorname{Sen}\theta+y'\cos\theta$ obteniendo

$$x=\frac{3}{\sqrt{10}}x'-\frac{1}{\sqrt{10}}y'$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'$$

Sustituyo estas ecuaciones en la original.

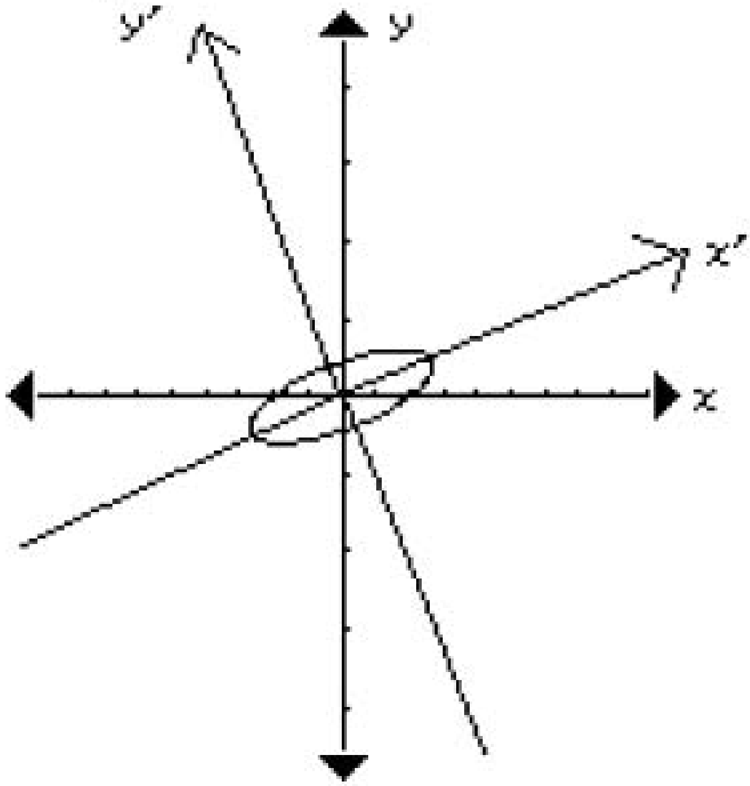
$$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x'-\frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2-3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x'-\frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)+5\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x'+\frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2-4=0$$

$$\frac{9}{10}x'^2-\frac{6}{10}x'y'+\frac{1}{10}y'^2-\frac{9}{10}x'^2-\frac{24}{10}x'y'+\frac{9}{10}y'^2+\frac{5}{10}x'^2+\frac{30}{10}x'y'+\frac{45}{10}y'^2-4=0$$

$$\frac{5}{10}x'^2+\frac{55}{10}y'^2=4$$

$$\frac{5}{40}x'^2+\frac{55}{40}y'^2=1$$

$$\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{\frac{8}{11}}=1$$

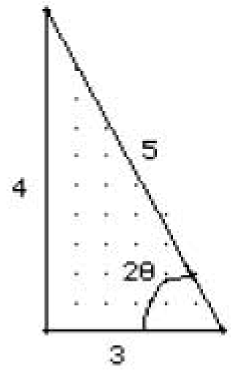


$$17x^2+12xy+8y^2-20=0$$

$A=17$, $B=12$ y $C=8$ Como $A\neq C \Rightarrow$ buscamos θ

tal que $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{Tan}(2\theta)=\frac{B}{A-C}=\frac{12}{17-8}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$



$$\mathrm{Cos}(2\theta)=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{Cos}\theta=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\mathrm{Sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}(2\theta)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Sustituyo estos valores en las ecuaciones de rotación obtenemos

$$x=x'\mathrm{Cos}\theta-y'\mathrm{Sen}\theta$$
$$y=x'\mathrm{Sen}\theta+y'\mathrm{Cos}\theta$$

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

Sustituyo estas ecuaciones en la original.

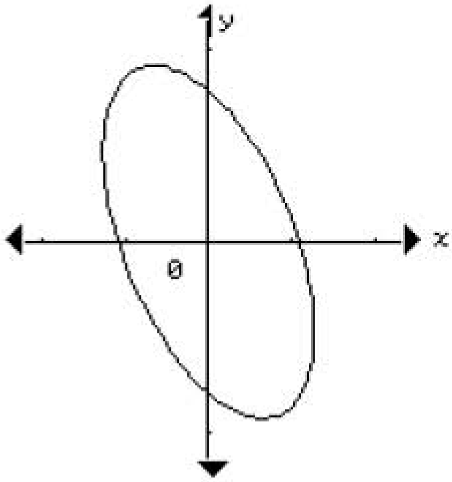
$$17\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2+12\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)+8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x'+\frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2-20=0$$

$$\frac{68}{5}x'^2-\frac{68}{5}x'y'+\frac{17}{5}y'^2+\frac{24}{5}x'^2+\frac{36}{5}x'y'-\frac{24}{5}y'^2+\frac{8}{5}x'^2+\frac{32}{5}x'y'+\frac{32}{5}y'^2=20$$

$$20x'^2+25y'^2=20$$

$$\frac{20}{20}x'^2+\frac{25}{20}y'^2=1$$

$$x'^2+\frac{1}{\frac{4}{5}}y'^2=1$$



CAPÍTULO V.

“CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL”.

En este capitulo se analizarán algunas demostraciones de límites, derivadas e integrales, así como algunas aplicaciones y métodos de solución para cada tema.

5.1. DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS DE LÍMITES

Definición de límite:

$\lim_{x \to x_0} (f(x)) = L$ si y solo si la funcion $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ es continua en x_0.

Teorema: f es continua en $x_0 \in (a,b)$ si y solo si

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x))$

Demostracion:

$\Rightarrow$) f es continua en x_0.

P.D

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x))$ $\quad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ es continua en x_0.

Pero F(x)=f(x) para toda x entonces como f es continua en $x_0 \Rightarrow F$ es continua en x_0.

Demostración de regreso:

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x))$ $\quad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ es continua en x_0.

Como F(x)=f(x) para toda x entonces como F es continua en $x_0 \Rightarrow$ f es continua en x_0.

Teorema: $\lim_{x \to x_0} (f(x)) = L$ si y solo si

para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda

$x \in \mathrm{Dom} f$ $\quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Demostracion:

$\lim_{x \to x_0} (f(x)) = L$ $\quad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ es continua en x_0.

Para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para toda x en el dominio de F y $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(x_0)|<\epsilon$.

Sabemos que $F(x_0)=L$ $x\in DomF$ y $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

si $x\neq x_0$ entonces $0<|x-x_0|<\delta$ y ademas $F(x)=f(x)$ y

$DomF=Domf$ y entonces $|F(x)-L|=|f(x)-L|<\epsilon$ $x\in Domf$ y

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |F(x)-L|<\epsilon$.

Demostración de regreso:

Para toda $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x\in Domf$ y

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

Sea $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq x_0 \\ L & \text{si } x=x_0 \end{cases}$

P.D F es continua en x_0.

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$.

Ahora si $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow x\neq x_0$

$f(x)=F(x)$ y $L=F(x_0)$

$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(x_0)|<\epsilon$

Sea $x\neq x_0$

$|F(x)-F(x_0)|=|F(x)-F(x_0)|<\epsilon$

$\therefore$ F es continua en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=L$.

Teorema:

Si $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=M \Rightarrow L=M$

Demostración:

Sea $\epsilon=\dfrac{|L-M|}{2}$

Demostracion por contradiccion.

Dada $\epsilon=\dfrac{|L-M|}{2}>0$,

$\exists\delta_1>0$ tal que para toda $x\in Domf, 0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$

$\exists\delta_2>0$ tal que para toda $x\in Domf, 0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-M|<\epsilon$

$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

Dada $\epsilon=\dfrac{|L-M|}{2}>0$,

$\exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ tal que para toda $x\in\text{Domf}, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$|f(x)-L|<\dfrac{|L-M|}{2}$ y

$|f(x)-M|<\dfrac{|L-M|}{2}$ entonces

$|L-M|=|L-f(x)+f(x)-M|$ desigualdad del triangulo

$\leq|f(x)-L|+|f(x)-M|$

$<\dfrac{|L-M|}{2}+\dfrac{|L-M|}{2}=|L-M|$ entonces

$|L-M|<|L-M|$ esto no puede ser por lo tanto $L=M$.

Teorema

Si $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))=L$ y $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))=M \Rightarrow$

i) $\lim\limits_{x\to x_0}((f+g)(x))=L+M$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}((fg)(x))=LM$

iii) $M\neq 0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)=\dfrac{1}{M}$

Demostracion:

i) P.D Para toda $r>0$ exista $\delta>0$ tal que

$|(f+g)-(L+M)|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta$ $r>0$ si

$|(f+g)-(L+M)|=|(f-L)+(g-M)|\leq|f-L|+|g-M|$

Por hipotesis para toda $r>0$ existe $\delta_1>0$ tal que

$|f(x)-L|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$ en particular para $\dfrac{r}{2}$

existe δ_1 tal que

$|f(x)-L|<\dfrac{r}{2}$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$ Por hipotesis para toda

$r>0$ existe $\delta_2>0$ tal que

$|g(x)-M|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_2$ en particular para $\dfrac{r}{2}$

existe δ_2 tal que

$|g(x)-M|<\dfrac{r}{2}$ si $0<|x-x_0|<\delta_2$

$\therefore \leq|f(x)-L|+|g(x)-M|<\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}=r$

si $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Demostracion:

ii) P.D Para toda $r>0$ exista $\delta>0$ tal que

$|(fg)-(LM)|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta$ sea $r>0$

$|(fg)-(LM)|=|(fg)-fM+fM-LM|=|f(g-M)+M(f-L)|\leq |f||g-M|+|M||f-L|$

Por hipotesis para toda $r>0$ existe $\delta_1>0$ tal que

$|f(x)-L|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$

en particular para $r=1$ existe δ_1 tal que

$|f(x)-L|<1$

$|f(x)|-|L|\leq|f(x)-L|<1 \Rightarrow |f(x)|\leq 1+|L|$ si $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow$

$|(fg)-(LM)|\leq |f||g-M|+|M||f-L|<(1+|L|)|g-M|+(1+|L|)|f-L|$

Por hipotesis para toda $r>0$ existe $\delta_2>0$ tal que

$|g(x)-M|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_2$

en particular para $\dfrac{r}{2(1+|L|)}$ existe δ_2 tal que

$|g-M|<\dfrac{r}{2(1+|L|)}$ si $0<|x-x_0|<\delta_2$ y para $\dfrac{r}{2(1+|M|)}$

existe $\delta_3>0$ tal que $|f-L|<\dfrac{r}{2(1+|M|)}$ si $0<|x-x_0|<\delta_3$

$\Rightarrow <(1+|L|)\left(\dfrac{r}{2(1+|L|)}\right)+(1+|M|)\left(\dfrac{r}{2(1+|M|)}\right)=\dfrac{r}{2}+\dfrac{r}{2}=r$

si $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$

Demostracion:

iii) Si $M\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)\right)=\dfrac{1}{M}$

P.D Para toda $r>0$ exista $\delta>0$ tal que

$\left|\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)-\dfrac{1}{M}\right|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta$ sea $r>0$

$\left|\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)-\dfrac{1}{M}\right|=\left|\dfrac{M-g(x)}{Mg(x)}\right|=\dfrac{|g(x)-M|}{|M||g(x)|}$ acotamos por abajo

como $M\neq 0 \Rightarrow |g(x)|>\dfrac{|M|}{2}$ si $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{|g(x)|}<\dfrac{2}{|M|}$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$

como $\lim\limits_{x\to x_0}(g(x))=M \Rightarrow$ para toda $r>0$ existe $\delta_2>0$ tal que

$|g(x)-M|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_2$

en particular $\dfrac{r|M|^2}{2}$

existe $\delta_2>0$ tal que

$|g(x)-M|<\dfrac{r|M|^2}{2}$ si $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow$

$=\dfrac{|g(x)-M|}{|M||g(x)|}<\dfrac{2r|M|^2}{2|M||M|}=r$

si $0<|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

Teorema:

Si $\lim_{x \to x_0} (f(x)) = L$ y $C \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \to x_0} (f(x)) = CL$$

Demostración:

P.D Para toda $r>0$, existe $\delta>0$ tal que

$|Cf(x)-CL|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta$ sea $r>0$

$$|Cf(x)-CL| = |C(f(x)-L)| = |C||f(x)-L| < |C|r$$

$$|C||f(x)-L| < \frac{|C|r}{|C|} = r$$

Por hipótesis para toda r>0, existe delta positiva tal que

$|f(x)-L|<r$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$ en particular para $\frac{r}{|C|}$

existe $\delta_1>0$ tal que

$|f(x)-L| < \frac{r}{|C|}$ si $0<|x-x_0|<\delta_1$ si $0<|x-x_0|<\delta=\delta_1$

5.2. DEMOSTRACIÓN DE ALGUNOS LÍMITES:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{x-4}\right)=8 \quad \forall\epsilon>0,\ \text{existe } \delta>0 \text{ tal que } 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

Demostración:

$$\left|\frac{x^2-16}{x-4}--8\right|<\epsilon$$

$$\left|\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)}-8\right|=|x+4-8|=|x-4|<\epsilon \quad \text{Por lo tanto basta tomar } \delta=\epsilon$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{(x^2-1)^2(x+2)}{x^2+3x+2}\right)=-2$$

$$\forall\epsilon>0,\ \text{existe } \delta>0 \text{ tal que } 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$$

$$\forall\epsilon>0,\ \text{existe } \delta>0 \text{ tal que } 0<|x+1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}-(-2)\right|<\epsilon$$

$$|x-1+2|=|x+1|<\epsilon \quad \text{Por lo tanto basta tomar } \delta=\epsilon$$

5.3. MÉTODOS PARA CALCULAR LÍMITES:

FACTORIZACIÓN. Cuando la factorización es muy complicada procedemos a dividir numerador y denominador por $x-x_0$.

MULTIPLICAR POR EL CONJUGADO.

POR CAMBIO DE VARIABLE.

APLICANDO L´HOSPITAL.
Ejemplos.

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{\frac{x^3-27}{x^2-2x-3}}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+1)}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{\frac{x^2+3x+9}{x+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{\frac{27}{4}}\right)=\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

Metodo 2.

Ejemplo 1. $\lim_{x\to 25}\left(\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}\right)=\left(\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}\right)=$

$$\frac{x-25}{(x-25)\left(\sqrt{x}+5\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+5}$$

$$\lim_{x\to 25}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+5}\right)=\frac{1}{10}$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\text{Cos}x}{x}\right)=\left(\frac{1-\text{Cos}x}{x}\right)\left(\frac{1+\text{Cos}x}{1+\text{Cos}x}\right)=$$

$$\frac{1-\text{Cos}^2x}{x(1+\text{Cos}x)}=\frac{\text{Sen}^2x}{x(1+\text{Cos}x)}=\left(\frac{\text{Sen}x}{x}\right)\left(\frac{\text{Sen}x}{1+\text{Cos}x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\text{Sen}x}{x}\right)\left(\frac{\text{Sen}x}{1+\text{Cos}x}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{Sen}x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{Sen}x}{1+\text{Cos}x}\right)$$

$=1(0)=0$

Demostrar: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{Sen}x}{x}\right)=1$

Demostracion.

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\text{Sen}x\le x\le \tan x$

$\text{Sen}x\le x$ $\quad x\le\tan x$

$\frac{\text{Sen}x}{x}\le 1$ $\quad x\le\frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}$

$\text{Cos}x\le\frac{\text{Sen}x}{x}$

$\text{Cos}x\le\frac{\text{Sen}x}{x}\le 1$

$x\in\left(\frac{-\pi}{2},0\right)\Rightarrow -x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\text{Sen}(-x)\le(-x)\le\tan(-x)$

$\text{Sen}(-x)\le(-x)$

$-x\le-\tan x$

$\frac{-\text{Sen}x}{-x}\le 1$ $\quad -x\le\frac{-\text{Sen}x}{\text{Cos}x}$

$\frac{\text{Sen}x}{x}\le 1$ $\quad \text{Cos}x\le\frac{-\text{Sen}x}{-x}$

$\text{Cos}x\le\frac{\text{Sen}x}{x}$

$\text{Cos}x\le\frac{\text{Sen}x}{x}\le 1$

$\lim_{x\to 0}(\text{Cos}x)=1\le\lim_{x\to 0}(1)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{Sen}x}{x}\right)=1$

Metodo 3.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 65}\left(\frac{\sqrt{x-1}-8}{\sqrt[3]{x-1}-4}\right)=$$

Sea $y=\sqrt[6]{x-1} \Rightarrow y^6=x-1$

$$\lim_{x\to 65}\left(\sqrt[6]{x-1}\right)=2$$

$x\to 65,\ y\to 2$

$y^2=\sqrt[3]{x-1}$
$y^3=\sqrt{x-1}$

$$\lim_{y\to 2}\left(\frac{y^3-8}{y^2-4}\right)=\lim_{y\to 2}\left(\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}\right)$$

$$=\lim_{y\to 2}\left(\frac{y^2+2y+4}{y+2}\right)=\frac{12}{4}=3$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)=$$

$y=\sqrt[12]{x} \Rightarrow y^{12}=x$

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt[12]{x}\right)=1$$

$x\to 1,\ y\to 1$

$y^3=\sqrt[4]{x} \qquad y^4=\sqrt[3]{x}$

$$\lim_{y\to 1}\left(\frac{y^4-1}{y^3-1}\right)=\lim_{y\to 1}\left(\frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}\right)$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\frac{y^3+y^2+y+1}{y^2+y+1}\right)=\frac{4}{3}$$

Metodo 4. Regla de L"Hospital.
Sean f y g funciones continuas y diferenciables en (a,b).
Supongamos que $x_0 \in (a,b)$ sucede que

i) $\lim_{x \to x_0} (f(x)) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} (g(x)) = 0$.

ii)Las derivadas de f y g existen en el entorno de x_0.

iii)$g'(x_0) \neq 0$ en el entorno de x_0 entonces tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Demostracion.
Sabemos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ Aplicando el principio del valor medio de Cauchy si $g'(x_0) \neq 0$ cuando $x \to x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ c \in (x, x_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ entonces

vemos que si $x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0$

Observacion: $\lim_{x \to x_0} (f(x)) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} (g(x)) = 0$.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{Senx}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{Cosx}{1} \right) = 1.$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - Cosx}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{Senx}{2x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{Cosx}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Cuidado al usar L"Hospital

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 4x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2x + 3}{4x - 4} \right) = \frac{-3}{4}$$ si aplico nuevamente

la regla tendre: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{4} \right) = \frac{1}{2}$ y $\frac{-3}{4} \neq \frac{1}{2}$

por lo tanto no se llega a un limite.

Aplicaciones no ortodoxas de la regla de L"Hospital.

a) que hacer cuando en un limite nos aparece $\infty, -\infty$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$$

$\lim_{x \to x_0} (f(x)) \to \infty$ $\lim_{x \to x_0} (g(x)) \to -\infty$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{Senx}-\frac{1}{x}\right)=\overset{L''H}{\lim_{x\to 0}}\left(\frac{x-Senx}{xSenx}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-Cosx}{xCosx+Senx}\right)=\overset{L''H}{\lim_{x\to 0}}\left(\frac{Senx}{Cosx+Cosx-xSenx}\right)=\frac{0}{2}=0.$$

b) Que hacer cuando tenemos un limite del tipo $0(\infty)$.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))\to\infty \text{ y } \lim_{x\to x_0}(g(x))=0.$$

Usando la inversa de la funcion que tiende a ∞.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right).$$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0}(xCotx)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\frac{1}{Cotx}}\right)\overset{L''H}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{Cos^2x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(Cos^2x\right)=1$$

c) Cuando el limite es $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right),\ \lim_{x\to x_0}(f(x))\to\infty \text{ y } \lim_{x\to x_0}(g(x))\to\infty$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right) \text{ se aplica el inverso.}$$

Ejemplo 1.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+Cscx}{Cot^2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{Cot^2x}}{\frac{1}{1+Cscx}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\frac{1}{Cos^2x}}{Sen^2x}}{\frac{1}{1+\frac{1}{Senx}}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{Sen^2x}{Cos^2x}}{\frac{1}{\frac{Senx+1}{Senx}}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{Sen^2x}{Cos^2x}}{\frac{Senx}{Senx+1}}\right)=L'H$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2SenxCosxCos^2x-(-2SenxCosxSen^2x)}{Cos^4x}}{\frac{CosxSenx+Cosx-CosxSenx}{Sen^2x+2Senx+1}}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2senxcosx(cos^2x+sen^2x)}{cos^4x}}{\frac{cosx}{sen^2x+2senx+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2senxcosx}{cos^4x}}{\frac{cosx}{sen^2x+2senx+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{0}{1}}{\frac{1}{1}}\right)=\frac{0}{1}=0$$

5.4. DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS DE DERIVADAS.

Definición:

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.
Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada.

Regla de los cuatro pasos:

1) Se sustituye en la funcion x por $x+\Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la funcion $y+\Delta y$

2) Se resta el valor dado de la funcion del nuevo valor y se obtiene Δy.

3) Se divide Δy por Δx.

4) Se calcula el limite de este cociente cuando $\Delta x \to 0$.
El limite asi hallado es la derivada buscada.

Teorema. Sea $y=c$, $y'=0$

Demostracion:
Cuando x toma un incremento Δx, el valor de la funcion no se altera; es decir, $\Delta y=0$,

$$y \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{dx}=0$$

$\therefore$ la derivada de una constante es cero.

$y=x$, $y'=1$

1) $y+\Delta y=x+\Delta x$

2) $y+\Delta y-y=x+\Delta x-x$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$

4) $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=$

$\lim_{\Delta x \to 0}(1)=1$

$y=x^2$, $y'=2x$

1) $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$

2) $y+\Delta y-y=(x+\Delta x)^2-x^2$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x-x^2}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta^2 x}{\Delta x}$

4) $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{2x\Delta x+\Delta^2 x}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}\right)=$

$\lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

TEOREMA:

Si $n \in IN$ y $f(x) = x^n \ \forall x \in IR$ entonces $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x \in IR$.

DEMOSTRACIÓN:

P.D. $(x^n)' = nx^{n-1}$

Si $n = 1 \Rightarrow x^n = x$, entonces $(x^1)' = 1x^{n-1}$.

Si $n = 2 \Rightarrow x^n = x^2$, entonces $(x^2)' = (xx)' = 1x + 1x = 2x = 2x^{2-1}$

Supóngase cierto para n-1.

P.D. $x^n = x^{n-1}x$

$$\begin{aligned}(x^{n-1}x)' &= (x^{n-1})'x + x^{n-1}x' \\ &= (n-1)\, x^{n-2}x + x^{n-1}(1) \\ &= (n-1)x^{n-1} + x^{n-1} \\ &= (n-1+1)\, x^{n-1} \\ &= n\, x^{n-1}\end{aligned}$$

TEOREMA:

Si f es una función derivable y $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in D_{om}f$ entonces la derivada de $\frac{1}{f(x)}$ existe y es igual a:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

DEMOSTRACIÓN:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)f(x+h)}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(\frac{-1}{f(x)f(x+h)}\right)\right)$$

Como f es derivable entonces f es continua y $f(x) \neq 0$ entonces

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{f(x)f(x+h)}\right) = \frac{-1}{(f(x))^2}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) \lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{f(x)f(x+h)}\right) = f'(x)\left(\frac{-1}{(f(x))^2}\right)$$

Teorema:
Si f y g son funciones derivables en x_0 $\Rightarrow$ fg es derivable en x_0.

Demostracion:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(fg)(x_0+h)-(fg)(x_0)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)+g(x_0)\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}(f(x_0+h))\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}(g(x_0))\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

$$=f(x_0)g'(x_0)+g(x_0)f'(x_0).$$

TEOREMA:

Si f y g son funciones derivables en x_0 y $g(x_0)\neq 0 \Rightarrow$

$\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0)$

$$\left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)+f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)$$

$$=f(x_0)\left(\frac{-g(x_0)}{(g(x_0)^2}\right)+f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)$$

$$=\frac{-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}+\frac{f'(x_0)}{g(x_0)}$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Teorema: Si $f(x)=\operatorname{Sen}x$ para toda $x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f'(x)=\operatorname{Cos}x$ para toda $x\in\mathbb{R}$

Demostracion:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}(x+h)-\operatorname{Sen}x}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}h+\operatorname{Sen}h\operatorname{Cos}x-\operatorname{Sen}x}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}x(\operatorname{Cos}h-1)+\operatorname{Sen}h\operatorname{Cos}x}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}x(\operatorname{Cos}h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\operatorname{Cos}x\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)$$
$$=-\operatorname{Sen}x\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}h}{h}\right)+\operatorname{Cos}x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)$$

Como

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}h}{h}\right)=0 \quad y \quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)=1 \text{ tenemos}$$

$=-\operatorname{Sen}x(0)+\operatorname{Cos}x(1)$
$=\operatorname{Cos}x.$

Teorema: Si $f(x)=\operatorname{Cos}x$ para toda $x\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow f'(x)=-\operatorname{Sen}x$ para toda $x\in\mathbb{R}$.

Demostracion:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Cos}(x+h)-\operatorname{Cos}x}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Cos}x\operatorname{Cos}h-\operatorname{Sen}x\operatorname{Sen}h-\operatorname{Cos}x}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Cos}x(\operatorname{Cos}h-1)-\operatorname{Sen}x\operatorname{Sen}h}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Cos}x(\operatorname{Cos}h-1)}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\operatorname{Sen}x\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)$$
$$=-\operatorname{Cos}x\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}h}{h}\right)-\operatorname{Sen}x\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)$$

Como $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{Cos}h}{h}\right)=0$ y $\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{Sen}h}{h}\right)=1$ tenemos

$=-\operatorname{Cos}x(0)-\operatorname{Sen}x(1)$

$=-\operatorname{Sen}x.$

Teorema: las derivadas de las funciones trigonométricas inversas:

a) $\frac{d}{dx}(\text{arc Sen}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Si $x\epsilon(-1,1)$.

Demostracion:

Sea $x\epsilon(-1,1)$ existe una unica $y\epsilon\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que

$\text{Sen}y=x \Rightarrow y=\text{arc Sen}x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Sen}x)=\frac{1}{\text{Cos}y}$$

Como $\text{Sen}^2y+\text{Cos}^2y=1 \Rightarrow |\text{Cos}y|=\sqrt{1-\text{Sen}^2y}$

entonces $\text{Cos}y>0 \Rightarrow |\text{Cos}y|=\text{Cos}y=\sqrt{1-\text{Sen}^2y}=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{arc Sen}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) $\frac{d}{dx}(\text{arc Cos}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Si $x\epsilon(-1,1)$

Demostracion:

Sea $x\epsilon(-1,1)$ existe una unica $y\epsilon(0,\pi)$ tal que

$\text{Cos}y=x \Rightarrow y=\text{arc Cos}x.$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Cos}x)=\frac{1}{-\text{Sen}y}$$

Como $\text{Sen}^2y+\text{Cos}^2y=1 \Rightarrow |\text{Sen}y|=\sqrt{1-\text{Cos}^2y}$

$y\epsilon(0,\pi)$, $\text{Sen}y>0$

$|\text{Sen}y|=\text{Sen}y=\sqrt{1-\text{Cos}^2y}=\sqrt{1-x^2}$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{arc Cos}x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) $\frac{d}{dx}(\text{arc } \tan x)=\frac{1}{1+x^2}$ si $x\epsilon(\infty,-\infty)$

demostracion.
Sea $x\epsilon(\infty,-\infty)$ existe una unica $y\epsilon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tal que
$\tan y=x \Rightarrow y=\text{arc } \tan x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc } \tan x)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\tan y}{dy}}=\frac{1}{\text{Sec}^2 y}$$

$\tan^2 y+1=\text{Sec}^2 y$
$\Rightarrow x^2+1=\text{Sec}^2 y$
$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc } \tan x)=\frac{1}{1+x^2}$

d) $\frac{d}{dx}(\text{arc Cot}x)=-\frac{1}{1+x^2}$ si $x\epsilon(-\infty,\infty)$

demostracion.
Sea $x\epsilon(-\infty,\infty)$ existe una unica $y\epsilon(0,\pi)$ tal que
$\text{Cot}y=x \Rightarrow y=\text{arc Cot}x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Cot}x)=-\frac{1}{-\text{Csc}^2 x}=-\frac{1}{1+x^2}$$

$\text{Cot}^2 y+1=\text{Csc}^2 y$
$\Rightarrow x^2+1=\text{Csc}^2 y$
$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc Cot}x)=-\frac{1}{1+x^2}$

e) $\frac{d}{dx}(\text{arc Sec}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ si $x\epsilon(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Demostracion.
Sea $x\epsilon(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ existe una unica $y\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$
$\text{Sec}y=x \Rightarrow y=\text{arc Sec}x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Sec}x)=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\tan x\text{Sec}x}$$

$\text{Sec}^2 y=\tan^2 y+1 \Rightarrow \text{Sec}^2 y=x^2+1$

$\tan^2 y=\text{Sec}^2 y-1 \Rightarrow \tan^2 y=x^2-1$

$|\tan y|=\sqrt{\text{Sec}^2 y-1}$

$$|\tan y|=\begin{cases}-\sqrt{\text{Sec}^2 y-1} & \text{si } y\epsilon\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\\ \sqrt{\text{Sec}^2 y-1} & \text{si } y\epsilon\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Sec}x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\left(-\sqrt{x^2-1}\right)} & \text{si } x\epsilon(-\infty,-1) \\ x\left(\sqrt{x^2-1}\right) & \text{si } x\epsilon(1,\infty) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Sec}x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

f) $\frac{d}{dx}(\text{arc Csc}x)=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ Si $x\epsilon(-\infty,-1)U(1,\infty)$

Demostracion:

Sea $x\epsilon(-\infty,-1)U(1,\infty)$ existe una unica

$y\epsilon(0,\frac{\pi}{2})U(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ $\text{Csc}y=x \Rightarrow y=\text{arc Csc}x$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Csc}x)=\frac{1}{-\text{Cot}y\text{Csc}y}$$

$\text{Csc}^2y=\text{Cot}^2y+1 \Rightarrow \text{Csc}^2y=x^2+1$

$\text{Cot}^2y=\text{Csc}^2y-1 \Rightarrow \text{Cot}^2y=x^2-1$

$\Rightarrow |\text{Coty}|=\sqrt{\text{Csc}^2y-1}$

$$|\text{Coty}|=\begin{cases} -\sqrt{\text{Csc}^2y-1} & \text{si } y\epsilon(-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ \sqrt{\text{Csc}^2y-1} & \text{si } y\epsilon(0,\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Csc}x)=-\begin{cases} \dfrac{1}{x\left(-\sqrt{x^2-1}\right)} & \text{si } x\epsilon(-\infty,-1) \\ \dfrac{1}{x\left(\sqrt{x^2-1}\right)} & \text{si } x\epsilon(1,\infty) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc Csc}x)=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Teorema: Si $f(x)=\tan x$ para toda $x\epsilon IR$, entonces $f'(x)=\text{Sec}^2x$ para toda $x\epsilon IR$.

Demostracion:

$\tan x=\frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}$;

$$\left(\frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}\right)'=\frac{\text{Cos}x\text{Cos}x+\text{Sen}x\text{Sen}x}{\text{Cos}^2x}=\frac{\text{Cos}^2x+\text{sen}^2x}{\text{Cos}^2x}=\frac{1}{\text{Cos}^2x}=\text{Sec}^2x.$$

Teorema: Si $f(x)=Cotx$ $f'(x)=-Cscx$

Demostracion:

$$Cotx=\left(\frac{Cosx}{Senx}\right)'=\frac{-SenxSenx-CosxCosx}{Sen^2x}=\frac{-Cos^2x-sen^2x}{Sen^2x}=$$

$$\frac{-\left(Cos^2x+Sen^2x\right)}{Sen^2x}=\frac{-1}{Sen^2x}=-Csc^2x.$$

Teorema: Si $f(x)=Secx$ $f'(x)=tanxSecx$

Demostracion:

$$Secx=\left(\frac{1}{Cosx}\right)'=\frac{0(Cosx)-1(-Senx)}{Cos^2x}=\frac{Senx}{Cosx}\left(\frac{1}{Cosx}\right)=tanxSecx.$$

Teorema: Si $f(x)=Cscx$ $f'(x)=-CotxCscx$

Demostracion:

$$Cscx=\left(\frac{1}{Senx}\right)'=\frac{0(Senx)-1(Cosx)}{Sen^2x}=\frac{-Cosx}{Senx}\left(\frac{1}{Senx}\right)=-CotxCscx.$$

Teorema: Si $y=f(x)=\ln(x)$ $y'=f'(x)=\frac{1}{x}$

Demostracion:

$y=\ln(x)$ P:D $y'=\frac{1}{x}$

$$y'=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x}{h}\right)\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=$$

Como $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=e$

$$\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{h\to 0}(\ln(e))=\left(\frac{1}{x}\right)\lim_{h\to 0}(1)=\left(\frac{1}{x}\right)(1)=\frac{1}{x}$$

Teorema: Si $y=f(x)=a^x$ $(a>0)$

$y'=f'(x)=a^x\ln(a)$

Demostracion:

$y=a^x$

$\ln(y)=\ln(a^x)=x\ln(a)$

$\frac{y'}{y}=\ln(a)$

$y'=y\ln(a)$

$y'=a^x\ln(a).$

Teorema: Si $y=f(x)=e^{x}$

$y'=f'(x)=e^{x}$

Demostracion:

$y=e^{x}$ P:D $y'=e^{x}$

$\ln(y)=\ln(e^{x})=x(1)=x$

$\frac{y'}{y}=1$

$y'=y$

$y'=e^{x}$.

Teorema: Si $y=f(x)=u^{v}$ y su

$y'=vu^{v-1}u'+u^{v}v'\ln(u)$

Demostracion:

$y=u^{v}$

$\ln(y)=\ln(u^{v})=v\ln(u)$

$\frac{y'}{y}=v'\ln(u)+\frac{vu'}{u}$

$y'=y\left(v'\ln(u)+\frac{vu'}{u}\right)$

$y'=u^{v}\left(v'\ln(u)+\frac{vu'}{u}\right)$

$y'=u^{v}v'\ln(u)+u^{v}u^{-1}vu'$

$y'=vu^{v-1}u'+u^{v}v'\ln(u)$.

5.5. MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

5.5.1. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA.

1. Se calcula la primera derivada de la función.
2. Se iguala a cero, y se hallan las raíces reales, siendo estas raíces los valores críticos de la función.
3. Se consideran los valores críticos uno por uno para ver como es la derivada, positiva o negativa, tomando un punto antes y otro después de cada punto crítico, para ver como es la derivada si:

a) Primero es positiva y después es negativa, entonces, existe un máximo.
b) Si primero es negativa y después es positiva, entonces, existe un mínimo, para ese valor crítico.

Ejemplo.

Verificar si las siguientes funciones tienen máximo o mínimo.

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

1) $f'(x)=3x^2-12x+9$

2) $3x^2-12x+9=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)(x-1)=0$

$x_1=1$ y $x_2=3$ valores criticos.

3) Para $x_1=1$ $0<1<2$

$f'(0)=3(0)^2-12(0)+9=9>0$

$f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=-3<0$

$\therefore$ en $x_1=1$ hay un maximo

Para $x_2=3$ $2<3<4$

$f'(2)=3(2)^2-12(2)+9=-3<0$

$f'(4)=3(4)^2-12(4)+9=9>0$

$\therefore$ en $x_2=3$ hay un minimo

$f(x)=x^5-5x^4$

1) $f'(x)=5x^4-20x^3$

2) $5x^4-20x^3=0$

$x^4-4x^3=0$

$x^3(x-4)=0$ valores criticos.

$x_1=0$ y $x_2=4$

3) $-1<0<1$

$f'(-1)=(-1)^4-4(-1)^3=5$ es positiva.

$f'(1)=1^4-4(1)^3=-3$ es negativa.

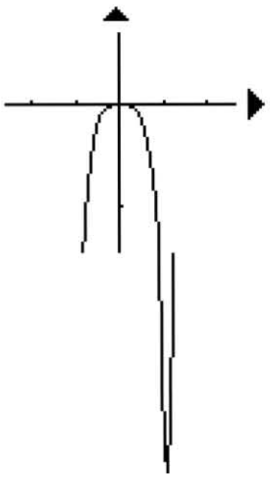
Por lo tanto en este valor critico hay un maximo.

$3<4<5$

$f'(3)=3^4-4(3)^3=-27$ es negativa.

$f'(5)=5^4-4(5)^3=125$ Es positiva.

Por lo tanto en este valor critico hay un minimo.



Ejemplos de aplicación:

Calcular la longitud del tronco que puede dar la vuelta sin problemas en el canal. (Este ejercicio ya fue resuelto en el capítulo de trigonometría).

La función a optimizar es:

$$L(\theta)=\frac{12}{Sen\theta}+\frac{8}{Cos\theta}$$

Aplicamos el criterio de la primera derivada.

$$L'(\theta)=\frac{-12\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}+\frac{8\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{-12\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}+\frac{8\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}=0$$

$$\frac{12\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}=\frac{8\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{12}{8}=\frac{\operatorname{Sen}^3\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\tan^3\theta=\frac{12}{8}$$

$$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$\theta=\arctan\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\theta=48°51'36''$$

$$\theta_0=47°$$

$$L'(47°)=\frac{-12\cos(47°)}{\operatorname{Sen}^2(47°)}+\frac{8\operatorname{Sen}(47°)}{\cos^2(47°)}=-2.72$$

$$L'(46°)<0$$

$$\theta_1=50°$$

$$L'(50°)=\frac{-12\cos(50°)}{\operatorname{Sen}^2(50°)}+\frac{8\operatorname{Sen}(50°)}{\cos^2(50°)}=1.68$$

$$L'(50°)>0$$

Por lo tanto la longitud del tronco es mínima cuando el ángulo es de 48º51´36´´ y la longitud del tronco es de 28.09 pies.

Calcular la longitud de la escalera. (Este ejercicio ya fue resuelto en el capítulo de trigonometría).

La función a optimizar es:

$$L(\theta)=\frac{5}{\operatorname{Sen}\theta}+\frac{4}{\cos\theta}$$

$$L'(\theta)=\frac{-5\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}+\frac{4\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{-5\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}+\frac{4\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}=0$$

$$\frac{5\cos\theta}{\operatorname{Sen}^2\theta}=\frac{4\operatorname{Sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{5}{4}=\frac{\operatorname{Sen}^3\theta}{\cos^3\theta}$$

$$\tan^3\theta=\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$\theta=\arctan\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)$$

$$\theta=47^\circ 07' 44''$$

$$\theta_0=46^\circ$$

$$L'(46^\circ)=\frac{-5\cos(46^\circ)}{\operatorname{Sen}^2(46^\circ)}+\frac{4\operatorname{Sen}(46^\circ)}{\cos^2(46^\circ)}=-.75$$

$$L'(46^\circ)<0$$

$$\theta_1=49^\circ$$

$$L'(49^\circ)=\frac{-5\cos(49^\circ)}{\operatorname{Sen}^2(49^\circ)}+\frac{8\operatorname{Sen}(49^\circ)}{\cos^2(49^\circ)}=1.25$$

$$L'(49^\circ)>0$$

Por lo tanto hay un mínimo.
Por lo tanto la longitud de la escalera es mínima cuando se coloca con un ángulo de inclinación de 47º07´44´´ y la longitud de la escalera es de 12.7 pies.

5.5.2. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

1. Hallar la primera derivada.
2. Se iguala a cero, y se hallan las raíces reales, siendo estas raíces los valores críticos de la variable.
3. Se calcula la segunda derivada.
4. Se sustituyen los valores críticos hallados en el paso 2, en la segunda derivada si:

La segunda derivada es negativa, entonces existe un máximo.
La segunda derivada es positiva, entonces existe un mínimo.

Nota: cuando la segunda derivada es igual a cero, dicho procedimiento no es aplicable.

5.5.3. PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Un punto de inflexión en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos.
Cuando el punto que describe una curva pasa por un punto de inflexión, la segunda derivada cambiará de signo en ese punto, y si es continua debe anularse.

5.5.3.1 REGLA PARA HALLAR PUNTOS DE INFLEXIÓN.

1. Calcúlese la segunda derivada.
2. Iguálese a cero la segunda derivada. Se resuelve la ecuación y se consideran las raíces reales de la ecuación.
3. Se calcula la segunda derivada, primero para valores de x menores y después mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el paso 2, si la segunda derivada cambia de signo, tendremos un punto de inflexión.

Si la segunda derivada es positiva la curva es cóncava hacia arriba.
Si la segunda derivada es negativa la curva es cóncava hacia abajo.

Ejemplos:

Aplicando el método de la segunda derivada, examinar las siguientes funciones. Calculando también exactamente donde se ubica el máximo, mínimo y punto de inflexión.
Primero grafiquemos para ver como se comporta la función.

$f(x)=x^3+3x^2-2$

1) $f'(x)=3x^2+6x$

2) $3x^2+6x=0$

$x^2+2x=0$
$x(x+2)=0$

$x_1=0$ y $x_2=-2$ valores criticos.

3) $f''(x)=6x+6$ Sustituyo los valores criticos.

$f''(0)=6(0)+6=6>0$ entonces tenemos un minimo.

$f''(-2)=6(-2)+6=-12+6=-6<0$ entonces tenemos un maximo.

Punto de inflexion.

$f''(x)=0$
$6x+6=0$
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ punto critico del punto de inflexion.

Sustituyo un valor un poco mas chico que el valor critico hallado y otro un poco mas grande, para ver si cambia de signo la segunda derivada.

$f''(-\frac{3}{2})=6\left(-\frac{3}{2}\right)+6=-9+6=-3$ Es concava hacia abajo.

$f''(-\frac{1}{2})=6\left(-\frac{1}{2}\right)+6=-3+6=3$ Es concava hacia arriba.

Para saber exactamente en que puntos alcanza su max, min o punto de inflexion solo se sustituyen los valores criticos en la ecuacion original.

$f(0)=0^3+3(0)^2-2=-2$

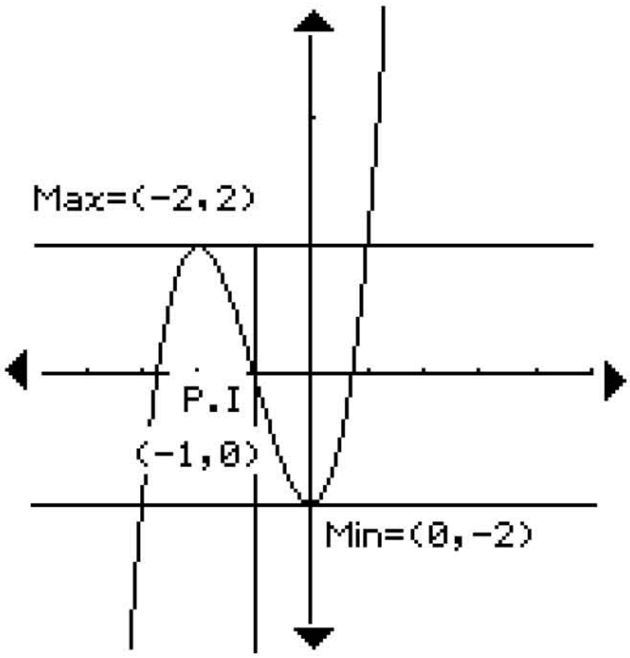
$\therefore$ Min=-2 cuando $x=0$

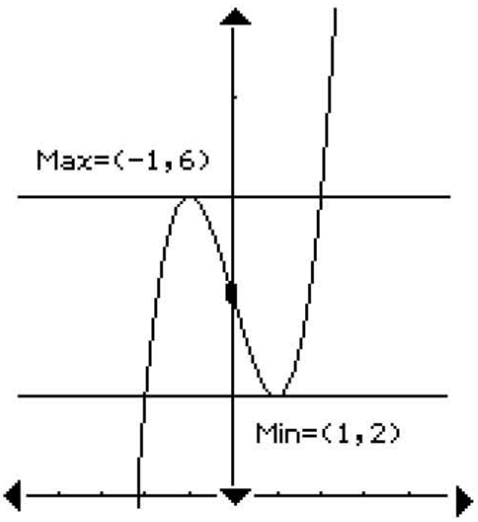
$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-2=-8+12-2=2$

$\therefore$Max=2 cuando $x=-2$

$f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-2=-1+3-2=0$

$\therefore$ P.I en $(-1,0)$. Max=$(-2,2)$ Min=$(0,-2)$


Max=(-2,2)
P.I
(-1,0)
Min=(0,-2)



$f(x)=x^3-3x+4$

1) $f'(x)=3x^2-3$

2) $3x^2-3=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x_1=-1$ y $x_2=1$ valores criticos.

3) $f''(x)=6x$ Sustituyo los valores criticos.

$f''(-1)=6(-1)=-6<0$ entonces tenemos un maximo.

$f''(1)=6(1)=6>0$ entonces tenemos un minimo.

Punto de inflexion.

$f''(x)=0$

$6x=0$

$x=0$ punto critico del punto de inflexion.

Sustituyo un valor un poco mas chico que el valor critico hallado y otro un poco mas grande, para ver si cambia de signo la segunda derivada.

$f''(-\frac{1}{2})=6\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$ Es concava hacia abajo.

$f''(\frac{1}{2})=6\left(\frac{1}{2}\right)=3$ Es concava hacia arriba.

Para saber exactamente en que puntos alcanza su max, min o punto de inflexion solo se sustituyen los valores criticos en la ecuacion original.

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+4=6$

$\therefore$ Max=6 cuando $x=-1$

$f(1)=(1)^3-3(1)^2+4=2$

$\therefore$ Min=2 cuando $x=1$

$f(0)=(0)^3-3(0)^2+4=4$

$\therefore$ P.I en (0,4).

5.6. DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS INTEGRALES.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-v^2}}dv = \text{arc Sen}\left(\frac{v}{a}\right)+c$$

Dem.

$$d\left(\text{arc Sen}\left(\frac{v}{a}\right)+c\right)=\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}}=\frac{\frac{adv}{a^2}}{\sqrt{\frac{a^2-v^2}{a^2}}}=\frac{\frac{dv}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{a}}=\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}.$$

$$\int \frac{1}{v^2+a^2}dv=\frac{1}{a}\text{ arc tan}\frac{v}{a}+c$$

Dem. Puesto que

$$d\left(\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a}+c\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1+\left(\frac{v}{a}\right)^2}\right)=\frac{\frac{adv}{a^2}}{a\left(\frac{v^2+a^2}{a^2}\right)}=\frac{a^3dv}{a^3\left(v^2+a^2\right)}=\frac{dv}{v^2+a^2}.$$

$$\int \frac{1}{v^2-a^2}dv=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right)+c \qquad \left(v^2>a^2\right)$$

Dem. Por Algebra, tenemos

$$\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}=\frac{v+a-v+a}{v^2-a^2}=\frac{2a}{v^2-a^2}.$$

$$\therefore \frac{1}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right)$$

Integrando, tenemos

$$\int \frac{1}{v^2-a^2}dv=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{v-a}\right)dv-\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{v+a}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(v-a)-\frac{1}{2a}\ln(v+a)+c=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{v-a}{v+a}\right)+c.$$

$$\int \frac{1}{a^2-v^2}dv=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right)+c \quad \left(a^2>v^2\right)$$

Demostracion. Por algebra tenemos

$$\frac{1}{a+v}+\frac{1}{a-v}=\frac{a-v+a+v}{a^2-v^2}=\frac{2a}{a^2-v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^2-v^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+v}+\frac{1}{a-v}\right)$$

Integrando tenemos

$$\int \frac{1}{a^2-v^2}dv = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+v}+\frac{1}{a-v}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+v}\right)dv - \frac{1}{2a}\int\left(\frac{-1}{a-v}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(a+v)-\frac{1}{2a}\ln(a-v)+c$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+v}{a-v}\right)+c$$

Nota. $\int \frac{1}{v^2-a^2}dv = -\int \frac{1}{a^2-v^2}dv$

$$\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln(a)}+c$$

Dem.

$$d\left(\frac{a^v}{\ln(a)}+c\right)=\frac{a^v dv\ln(a)\ln(a)}{\ln^2(a)}$$

$$=\frac{a^v dv\ln^2(a)}{\ln^2(a)}=a^v dv.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}dv = \ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+c$$

Dem. Supongamos que $v=a\tan z$, siendo z una nueva variable; diferenciando,

$dv=a\operatorname{Sec}^2 z\,dz$. Luego por sustitucion,

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}dv = \int \frac{a\operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{a^2\tan^2 z+a^2}}dz$$

$$= \int \frac{a\operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{a^2(\tan^2 z+1)}}dz$$

$$= \int \frac{a\operatorname{Sec}^2 z}{a\sqrt{\tan^2 z+1}}dz = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{\operatorname{Sec}^2 z}}dz$$

$$= \int \frac{\operatorname{Sec}^2 z}{\operatorname{Sec} z}dz = \int \operatorname{Sec} z\,dz =$$

$$\operatorname{Sec} z = \operatorname{Sec} z\left(\frac{\operatorname{Sec} z+\tan z}{\operatorname{Sec} z+\tan z}\right) = \frac{\operatorname{Sec}^2 z+\tan z\operatorname{Sec} z}{\operatorname{Sec} z+\tan z}$$

Sea $w=\operatorname{Sec} z+\tan z$

$dw=\left(\operatorname{Sec}^2 z+\tan z\operatorname{Sec} z\right)dz$

$$\int \operatorname{Sec} z\,dz = \int \frac{\operatorname{Sec}^2 z+\tan z\operatorname{Sec} z}{\operatorname{Sec} z+\tan z}dz \Rightarrow \int \frac{1}{w}dw = \ln(w)+c$$

regresando a la variable z, tenemos

$=\ln(\tan z+\operatorname{Sec} z)+c$

$=\ln\left(\tan z+\sqrt{\tan^2 z+1}\right)+c$

pero $\tan z=\frac{v}{a}$; por lo tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}dv = \ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^2}{a^2}+1}\right)+c = \ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^2+a^2}{a^2}}\right)+c$$

$$= \ln\left(\frac{v}{a}+\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{a}\right)+c = \ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2+a^2}}{a}\right)+c$$

$$= \ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)-\ln(a)+c$$

Haciendo $k=-\ln(a)+c$, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2+a^2}}dv = \ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+k.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-a^2}}dv = \ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)+c$$

Demostracion.
De manera analoga, suponiendo que
v=aSecz, dv=aSecztanzdz
sustituyendo en la integral tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-a^2}}dv = \int \frac{aSecztanz}{\sqrt{a^2Sec^2z-a^2}}dz = \int \frac{aSecztanz}{\sqrt{a^2\left(Sec^2z-1\right)}}dz$$

$$= \int \frac{aSecztanz}{atanz}dz \quad \text{Por el resultado anterior}$$

$$= \int Seczdz = \ln(tanz+Secz) + c$$

Como $Secz=\frac{v}{a}$ tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-a^2}}dv = \ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{tan^2z}\right)+c$$

$$= \ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{Sec^2z-1}\right)+c$$

$$= \ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\right)+c$$

$$= \ln\left(\frac{v}{a}+\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}\right)+c$$

$$= \ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2-a^2}}{a}\right)+c$$

$$= \ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)-\ln(a)+c$$

Haciendo $k=-\ln(a)+c$ tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2-a^2}}dv = \ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)+k$$

$$\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2}+\frac{a^2}{2}\,\text{arcSen}\frac{v}{a}+c.$$

Dem. Sea $v=a\text{Sen}z \Rightarrow \text{Sen}z=\frac{v}{a}$

$dv=a\text{Cos}zdz$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-v^2}=\sqrt{a^2-a^2\text{Sen}^2z}=\sqrt{a^2\left(1-\text{Sen}^2z\right)}$$

$$=a\sqrt{1-\text{Sen}^2z}$$

$$=a\sqrt{\text{Cos}^2z}$$

$$=a\text{Cos}z.$$

Luego,

$$\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv=\int a\text{Cos}za\text{Cos}zdz=\int a^2\text{Cos}^2zdz$$

$$=a^2\int \text{Cos}^2zdz=$$

Nota:

$$\text{Cos}2z=\text{Cos}^2z-\text{Sen}^2z$$

$$=\text{Cos}^2z-\left(1-\text{Cos}^2z\right)$$

$$=2\text{Cos}^2z-1$$

$$\text{Cos}^2z=\frac{1+\text{Cos}2z}{2}$$

$$\therefore a^2\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\text{Cos}2z}{2}\right)dz=a^2\int\frac{1}{2}dz+a^2\int\frac{\text{Cos}2z}{2}dz$$

$$=\frac{a^2}{2}z+\frac{a^2}{4}\text{Sen}2z+c$$

Para obtener el resultado en funcion de v, tenemos, $\text{Sen}2z=2\text{Sen}z\text{Cos}z$ y

$z=\text{arc Sen}\frac{v}{a}$ entonces

$$2\text{Sen}z\text{Cos}z=2\frac{v}{a}\,\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{a}=\frac{2v\sqrt{a^2-v^2}}{a^2}$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2-v^2}\,dv=\frac{2a^2v\sqrt{a^2-v^2}}{4a^2}+\frac{a^2\text{arc Sen}\frac{v}{a}}{2}+c.$$

$$=\frac{v\sqrt{a^2-v^2}}{2}+\frac{a^2\text{arc Sen}\frac{v}{a}}{2}+c.$$

$$\int\sqrt{v^2+a^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+c$$

Dem. Sea $v=a\tan z \Rightarrow \tan z=\frac{v}{a}$ $dv=a\mathrm{Sec}^2 z\,dz \Rightarrow$

$$\int\sqrt{v^2+a^2}\,dv=\int a\mathrm{Sec}^2 z\sqrt{a^2\tan^2 z+a^2}\,dz$$

$$=\int a\mathrm{Sec}^2 z\sqrt{a^2\left(\tan^2 z+1\right)}\,dz$$

$$=\int a^2\mathrm{Sec}^2 z\sqrt{\mathrm{Sen}^2 z}\,dz$$

$$=a^2\int \mathrm{Sec}^2 z\mathrm{Sec} z dz$$

$$=a^2\int \mathrm{Sec}^3 dz=$$

El resultado de esta integral lo demostrare mas adelante, cuando veamos metodos de integracion, por el momento solo me enfocare en la demostracion actual.

$$=a^2\mathrm{Sec} z\tan z+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{Sec} z+\tan z)+c$$

Como $\tan z=\frac{v}{a}$ y $\mathrm{Sec} z=\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{a}$ entonces, sustituyendo para dar la solucion en funcion de v, tenemos que

$$=a^2\left(\frac{v\sqrt{v^2+a^2}}{2a^2}\right)+a^2\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v}{a}+\frac{\sqrt{v^2+a^2}}{a}\right)\right)$$

$$=\frac{v\sqrt{v^2+a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2+a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)-\frac{a^2}{2}\ln(a)+c$$

sea $k=-\frac{a^2}{2}\ln(a)+c$

$$\therefore\quad \int\sqrt{v^2+a^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2+a^2}\right)+k$$

$$\int\sqrt{v^2-a^2}\,dv=\frac{v}{2}\sqrt{v^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)+c$$

Dem. Sea $v=a\mathrm{Sec}z \Rightarrow \mathrm{Sec}z=\frac{v}{a}$ $dv=a\mathrm{Sec}z\tan z\,dz$

$$\sqrt{v^2-a^2}=\sqrt{a^2\mathrm{Sec}^2z-a^2}=\sqrt{a^2\left(\mathrm{Sec}^2z-1\right)}$$

$$=a\sqrt{\tan^2z}=a\tan z$$

$$\Rightarrow \tan z=\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}$$

$$\int\sqrt{v^2-a^2}\,dv=\int a\mathrm{Sec}z\tan z\,a\tan z\,dz$$

$$=\int a^2\mathrm{Sec}z\tan^2z\,dz$$

$$=a^2\int\mathrm{Sec}z\left(\mathrm{Sec}^2z-1\right)dz$$

$$=a^2\int\mathrm{Sec}^3dz-a^2\int\mathrm{Sec}z\,dz$$

$$=a^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sec}z\tan z+\frac{1}{2}\ln(\mathrm{Sec}z+\tan z)\right)-a^2(\ln(\mathrm{Sec}z+\tan z))+c$$

Como $\mathrm{Sec}z=\frac{v}{a}$ y $\tan z=\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}$ entonces,

sustituyendo para dar el resultado en funcion de

v, tenemos

$$=a^2\left(\frac{v\sqrt{v^2-a^2}}{2a^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v}{a}+\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}\right)\right)-a^2\ln\left(\frac{v}{a}+\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{a}\right)+c$$

$$=\frac{v\sqrt{v^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2-a^2}}{a}\right)+c$$

$$=\frac{v}{2}\sqrt{v^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)+\frac{a^2}{2}\ln(a)+c$$

Sea $k=\frac{a^2}{2}\ln(a)+c$

$$=\frac{v}{2}\sqrt{v^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2-a^2}\right)+k$$

5.7. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

5.7.1. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS.

Ejemplo 1.

$$\int Senx dx = -Cosx + c$$

Ejemplo 2.

$$\int Cosx dx = Senx + c$$

Ejemplo 3.

$$\int tanx dx = -\int \frac{-Senx}{Cosx} dx =$$

Sea $u = Cosx$ $du = -Senx dx$

$$-\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c = -\ln(Cosx) + c \quad o$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{Secx}\right) + c = \ln(Secx) + c$$

Ejemplo 4.

$$\int Cotx dx = \int \frac{Cosx}{Senx} dx = \ln(Senx) + c$$

Ejemplo 5.

$$\int Secx dx =$$

$$Secx = Secx\left(\frac{Secx + tanx}{Secx + tanx}\right) = \frac{Sec^2x + Secx tanx}{Secx + tanx}$$

Sea $u = Secx + tanx$ $du = \left(Sec^2x + Secx tanx\right)dx$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c = \ln(Secx + tanx) + c$$

Ejemplo 6.

$$\int Cscx dx =$$

$$Cscx = Cscx\left(\frac{Cscx - Cotx}{Cscx - Cotx}\right) = \frac{Csc^2x - Cscx Cotx}{Cscx - Cotx}$$

Sea $u = Cscx - Cotx$ $du = \left(Csc^2x - Cscx Cotx\right)dx$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c = \ln(Cscx - Cotx) + c$$

Ejemplo 7.

$$\int \frac{1}{Cos^2x\sqrt{tanx + 2}} dx = \int \frac{Sec^2x}{\sqrt{tanx + 2}} dx =$$

Sea $u = tanx + 2$ $du = Sec^2x dx$

$$\int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{tanx + 2} + c$$

5.7.2. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

Ejemplo 1.

$$\int \frac{1}{3+4x^2}dx=\int \frac{1}{a^2+v^2}dv=\frac{1}{a}\text{arc } \tan\left(\frac{v}{a}\right)+c$$

$$a=\sqrt{3}\ ,\quad v=2x \Rightarrow dv=2dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2}{3+4x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\text{arc } \tan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int \frac{4}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$v=9-x^2 \Rightarrow dv=-2xdx \quad \Big| \quad a=3,\ v=x \Rightarrow dv=dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int -2x\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx+\int \frac{1}{\sqrt{a^2-v^2}}dv=\text{arc } \operatorname{Sen}\frac{v}{a}+c$$

$$=-\frac{2}{2}\sqrt{9-x^2}+4\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

$$=-\sqrt{9-x^2}+\text{arc } \operatorname{Sen}\left(\frac{x}{3}\right)+c$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{6}{x^2-4x+8}dx=$$

CTCP.

$$x^2-4x+8=(x-2)^2-4+8$$

$$=(x-2)^2+4$$

$$=6\int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx$$

$$=6\int \frac{1}{v^2+a^2}dv=\frac{1}{a}\text{arc } \tan\left(\frac{v}{a}\right)+c$$

$$=\frac{6}{2}\text{arc } \tan\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

$$=3\text{arc } \tan\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

Ejemplo 4.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-16}}dx=\int \frac{1}{v\sqrt{v^2-a^2}}dv=\frac{1}{a}\text{arc Sec}\left(\frac{v}{a}\right)+c$$

Sea $x=4\text{Sec}z \Rightarrow$

$dx=4\tan z\text{Sec}z dz$

$\text{Sec}z=\frac{x}{4} \Rightarrow z=\text{arc Sec}\left(\frac{x}{4}\right)$

Sustituyendo tenemos

$$=\int \frac{4\tan z\text{Sec}z}{4\text{Sec}z\sqrt{16\text{Sec}^2z-16}}dz$$

$$=\int \frac{\tan z}{\sqrt{16\left(\text{Sec}^2z-1\right)}}dz$$

$$=\int \frac{\tan z}{4\sqrt{\text{Sec}^2z-1}}dz$$

Como $\tan^2z=\text{Sec}^2z-1$ tenemos

$$=\int \frac{\tan z}{4\tan z}dz=\frac{1}{4}\int 1dz=\frac{1}{4}z+c$$

Como $z=\text{arc Sec}\left(\frac{x}{4}\right)$ tenemos

$$=\frac{1}{4}\text{arc Sec}\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

5.7.3. INTEGRACIÓN LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL.

Ejemplo 1.

$$\int \frac{5}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=$$

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4$$

$$5\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx=5\ \ln\left((x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right)+c$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{1}{x^2-6x-16}dx=$$

$$x^2-6x-16=(x-3)^2-9-16$$

$$=(x-3)^2-25$$

$$\int \frac{1}{(x-3)^2-25}dx=\frac{1}{2(5)}\ln\left(\frac{x-3-5}{x-3+5}\right)+c$$

$$=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x-8}{x+2}\right)+c$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}dx=$$

$$x^2+4x+3=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2-1}{x+2+1}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)+c$$

Ejemplo 4.

$$\int 2^x dx=\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln(a)}+c=\frac{2^x}{\ln(2)}+c$$

Ejemplo 5.

$$\int Senx\,e^{Cosx}dx=$$

$$v=Cosx \quad dv=-Senxdx$$

$$-\int -Senx\,e^{Cosx}dx=-e^{Cosx}+c$$

5.7.4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE FORMAS.

$$1)\ \int Sen^m u Cos^n u du$$

$$2)\ \int tan^m u Sec^n u du$$

$$3)\ \int Cot^m u Csc^n u du$$

$$4)\ \int Sen(mu)Cos(nu)du$$

1) Se presentan dos casos:

Primer caso:
m y **n** son pares y positivos, o alguno de ellos es nulo. Se aplican las fórmulas del ángulo medio para bajar el grado de la expresión.

$$\int Sen^2 x Cos^2 x dx =$$

$$Sen^2 x = \frac{1-Cos2x}{2}$$

$$Cos^2 x = \frac{1+Cos2x}{2}$$

$$\left(\frac{1-Cos2x}{2}\right)\left(\frac{1+Cos2x}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(1-Cos^2 2x\right)$$

$$\int Sen^2 x Cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}\left(1-Cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int Cos^2 2x dx$$

$$Cos^2 2x = \frac{1+Cos4x}{2}$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int\left(\frac{1+Cos4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int 1dx - \frac{1}{8}\int Cos4xdx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8(4)}\int 4Cos4xdx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}Sen4x + c$$

Ejemplo 2.

$$\int Cos^2 4xdx=$$

$$Cos^2x=\frac{1+Cos2x}{2} \Rightarrow Cos^2 4x=\frac{1+Cos8x}{2}$$

$$\int Cos^2 4xdx=\int \frac{1+Cos8x}{2}dx =\frac{1}{2}x+\frac{1}{2(8)}\int Cos8xdx =\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}Sen8x+c$$

Ejemplo 3.

$$\int Sen^4 xdx=\int (Sen^2x)^2 dx$$

$$Sen^2x=\frac{1-Cos2x}{2}$$

$$(Sen^2x)^2= \left(\frac{1-Cos2x}{2}\right)\left(\frac{1-Cos2x}{2}\right)= \frac{1}{4}(1-2Cos2x+Cos^2 2x)$$

$$\int (Sen^2x)^2 dx= \frac{1}{4}\int (1-2Cos2x+Cos^2 2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int 1dx-\frac{1}{4}\int 2Cos2xdx +\frac{1}{4}\int Cos^2 2xdx$$

$$= \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}Sen2x+ \frac{1}{4}\int \frac{1+Cos4x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}Sen2x+ \frac{1}{8}\int 1dx+\frac{1}{8(4)} \int 4Cos4xdx$$

$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}Sen2x+\frac{1}{8}x+ \frac{1}{32}Sen4x+c$$

Segundo caso:

m o **n** son impares y positivos.
Si **m** es impar y positivo, se factoriza la función **Sen(x) dx** y se aplica la identidad pitagórica

$$Sen^2x=\frac{1-Cos2x}{2}$$

Si **n** es impar y positivo, se factoriza la función **Cos(x) dx** y se aplica la identidad pitagórica

$$Cos^2x=\frac{1+Cos2x}{2}$$

Ejemplo 1.

$$\int \frac{Sen^3x}{Cos^5x}dx = \int Cos^{-5}xSen^3xdx$$

Como

$Sen^3x = Sen^2xSenx$

$Sen^2x = 1 - Cos^2x$

Sustituyo en la integral

$$\int Cos^{-5}xSen^3xdx = \int Cos^{-5}x\left(1 - Cos^2x\right)Senxdx$$

$$= \int Cos^{-5}xSenxdx - \int Cos^{-3}xSenxdx$$

Sea $u = Cosx \Rightarrow du = -Senxdx$

$$= \int u^{-5}du + \int u^{-3}du$$

$$= \frac{u^{-4}}{-4} + \frac{u^{-2}}{-2} + c$$

$$= -\frac{1}{4Cos^4x} - \frac{1}{2Cos^2x} + c$$

Ejemplo 2.

$$\int Cos^3xSen^4xdx =$$

Como

$Cos^3x = Cos^2xCosx$

Sustituyo en la integral

$$\int Cos^2xSen^4xCosxdx$$

Como

$Cos^2x = 1 - Sen^2x$

Sustituyo en la integral

$$= \int \left(1 - Sen^2x\right)Sen^4xCosxdx$$

$$= \int Sen^4xCosxdx - \int Sen^6xCosxdx$$

Sea $u = Senx \Rightarrow du = Cosxdx$

$$= \int u^4du - \int u^6du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= \frac{Sen^5x}{5} - \frac{Sen^7x}{7} + c$$

2) Se presentan dos casos:

Primer caso:
m es impar y positivo.
Para integrar estas expresiones se factoriza **Secx(tanx)dx**. Aplicando la identidad Pitagórica

$\tan^2 x = \mathrm{Sec}^2 x - 1$

Ejemplo.

$$\int \tan^3 x \mathrm{Sec}^5 x dx =$$

Como

$\tan^3 x = \tan^2 x \tan x$

$\mathrm{Sec}^5 x = \mathrm{Sec}^4 x \mathrm{Sec} x$

Sustituyo en la integral

$$= \int \mathrm{Sec}^4 x \tan^2 x \mathrm{Sec} x \tan x dx$$

Como

$\tan^2 x = \mathrm{Sec}^2 x - 1$

Sustituyo en la integral

$$= \int \mathrm{Sec}^4 x (\mathrm{Sec}^2 x - 1) \mathrm{Sec} x \tan x dx$$

$$= \int \mathrm{Sec}^6 x \tan x \mathrm{Sec} x dx - \int \mathrm{Sec}^4 x \tan x \mathrm{Sec} x dx$$

Sea $u = \mathrm{Sec} x \Rightarrow du = \tan x \mathrm{Sec} x dx$

$$= \int u^6 du - \int u^4 du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{\mathrm{Sec}^7 x}{7} - \frac{\mathrm{Sec}^5 x}{5} + c$$

Segundo caso:

m es par y positivo.
Para integrar estas expresiones se factoriza **Secx dx**. Aplicando la identidad pitagórica

$\mathrm{Sec}^2 x = \tan^2 x + 1$

$$\int \tan^2 x \operatorname{Sec}^4 x dx =$$

Como

$\operatorname{Sec}^4 x = \operatorname{Sec}^2 x \operatorname{Sec}^2 x$

sustituyo

$$= \int \tan^2 x \operatorname{Sec}^2 x \operatorname{Sec}^2 x dx$$

Como

$\operatorname{Sec}^2 x = 1 + \tan^2 x$

sustituyo

$$= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \operatorname{Sec}^2 x dx$$

$$= \int \tan^2 x \operatorname{Sec}^2 x dx + \int \tan^4 x \operatorname{Sec}^2 x dx$$

Sea $u = \tan x$

$du = \operatorname{Sec}^2 x dx$

$$= \int u^2 du + \int u^4 du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$$

3) Para integrar estas expresiones se factoriza **Cotx dx**. A continuación se aplica la identidad pitagórica

$\operatorname{Cot}^2 x = \operatorname{Csc}^2 x - 1$

.

Si se factoriza **Cscx dx** se aplica la identidad pitagórica

$\operatorname{Csc}^2 x = \operatorname{Cot}^2 x + 1$

Ejemplo 1.

$$\int Cot^5 x dx =$$

Como

$Cot^5 x = Cot^3 x Cot^2 x$

$Cot^2 x = Csc^2 x - 1$

Sustituyo en la integral

$$= \int Cot^3 x \left(Csc^2 x - 1 \right) dx$$

$$= \int Cot^3 x Csc^2 x dx - \int Cot^3 x dx$$

$$= \int Cot^3 x Csc^2 x dx - \int Cot^2 x Cot x dx$$

$$= \int Cot^3 x Csc^2 x dx - \int Cot x \left(Csc^2 x - 1 \right) dx$$

$$= \int Cot^3 x Csc^2 x dx - \int Cot x Csc^2 x dx + \int Cot x dx$$

Sea $u = Cot x \Rightarrow du = -Csc^2 x dx$

$$= -\int u^3 du + \int u du + \int Cot x dx$$

$$= -\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + \ln(Sen x) + c$$

$$= -\frac{Cot^4 x}{4} + \frac{Cot^2 x}{2} + \ln(Sen x) + c$$

4) Para integrar estas expresiones se aplican las fórmulas de productos de senos y cosenos

$$Cos u Cos v = \frac{1}{2}(Cos(u+v) + Cos(u-v))$$

$$Sen u Sen v = \frac{1}{2}(Cos(u-v) - Cos(u+v))$$

Ejemplo.

$$\int Cos5xCos2xdx=$$

$$Cos5xCos2x=\frac{1}{2}\ (Cos(5x+2x)+Cos(5x-2x))$$

$$=\frac{1}{2}(Cos(7x)+Cos(3x))$$

integrando

$$=\frac{1}{2}\int(Cos(7x)+Cos(3x))dx$$

$$=\frac{1}{2}\int Cos7xdx+\ \frac{1}{2}\int Cos3xdx$$

Sea $u=7x$ $du=7dx$

$u=3x$ $du=3dx$

integrando

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\int 7Cos7xdx+\ \frac{1}{2}\int Cos3xdx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)\int 7Cos7xdx+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\int 3Cosxdx$$

$$=\frac{1}{14}Sen7x+\frac{1}{6}Sen3x+c$$

5.8. INTEGRACIÓN POR PARTES.

La integración por partes tiene por objeto calcular la función primitiva del producto de una función por la diferencial de otra función de la misma variable. Se basa en la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones.

$d(uv)=udv+vdu$ integrando

$uv=\int udv+\int vdu$ despejando tenemos

$$\int udv\ =\ uv-\int vdu$$

Se usa para integrar gran número de integrales no inmediatas que emplean como producto de funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas tales como:

$$\int xCosxdx;\int \ln(x)dx;\int x\sqrt{x-a}\,dx;\int Sen^2xdx;\int arctanxdx.$$

Ejemplo 1.

$$\int x^2 Cosx dx=$$

Sea $u=x^2$; $du=2xdx$

$dv=Cosxdx$; $v=Senx$

$$=x^2 Senx-\int 2xSenxdx$$

$$\int 2xSenxdx=$$

Sea $u=2x$; $du=2dx$

$dv=Senxdx$; $v=-Cosx$

Sustituyendo

$$=x^2 Senx-\left(-2xCosx-\int -2Cosxdx\right)$$

Por lo tanto

$$\int x^2 Cosxdx=x^2 Senx+2xCosx-2Senx+c$$

Ejemplo 2.

$$\int xe^{2x}dx=$$

Sea $u=x$; $du=dx$

$dv=e^{2x}dx$; $v=\frac{1}{2}e^{2x}$

Sustituyendo

$$=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}\int 2e^{2x}dx$$

Por lo tanto

$$\int xe^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

Ejemplo 3.

$$\int x\ln(x)dx=$$

Sea $u=\ln(x)$; $du=\frac{1}{x}dx$

$dv=xdx$; $v=\frac{1}{2}x^2$

Sustituyendo

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}x^2+c$$

$$=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)+c$$

Ejemplo 3.

$$\int x\mathrm{Sec}^2 x\,dx=$$

Sea $u=x \Rightarrow du=dx$

$dv=\mathrm{Sec}^2 x\,dx \Rightarrow v=\tan x$

$$=x\tan x-\int \tan x\,dx$$

$$=x\tan x+\ln(\mathrm{Cos}x)+c$$

Ejemplo 4.

$$\int \mathrm{Sec}^3 x\,dx=$$

$\mathrm{Sec}^3 x=\mathrm{Sec}^2 x\mathrm{Sec}x$

$$\int \mathrm{Sec}^2 x\mathrm{Sec}x\,dx$$

Sea $u=\mathrm{Sec}x \Rightarrow du=\tan x\mathrm{Sec}x\,dx$

$dv=\mathrm{Sec}^2 x\,dx \Rightarrow v=\tan x$

$$=\tan x\mathrm{Sec}x-\int \tan^2 x\mathrm{Sec}x\,dx$$

$\tan^2 x=\mathrm{Sec}^2 x-1$

$$=\tan x\mathrm{Sec}x-\int\left(\mathrm{Sec}^2 x-1\right)\mathrm{Sec}x\,dx+c$$

$$=\tan x\mathrm{Sec}x-\int \mathrm{Sec}^3 x\,dx+\int \mathrm{Sec}x\,dx$$

Transponiendo

$$2\int \mathrm{Sec}^3 x\,dx=\tan x\mathrm{Sec}x+\ln(\tan x+\mathrm{Sec}x)+c$$

$$=\frac{1}{2}\tan x\mathrm{Sec}x+\frac{1}{2}\ln(\tan x+\mathrm{Sec}x)+c$$

Ejemplo 5.

$$\int \arctan 3x\,dx =$$

Sea $u=\arctan 3x \quad du=\frac{3}{1+9x^2}dx$

$dv=dx \quad v=x$

Sustituyendo

$$=x\arctan 3x-\int \frac{3x}{1+9x^2}\,dx$$

$$=x\arctan 3x-3\int \frac{x}{1+9x^2}dx$$

Sea $u=1+9x^2 \quad du=18x\,dx$

$$=x\arctan 3x-\frac{3}{18}\ln\left(1+9x^2\right)+c$$

5.8.1. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

Si un integrando contiene expresiones del tipo

$\sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$, de donde $a>0$;

y otras como $\left(a^2+x^2\right)^n$, $\left(x^2-a^2\right)^n$

semejantes a las citadas; inicialmente deben tratarse de resolver por sustitución algebraica, como en el siguiente ejemplo.

$$\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}dx= \int x\left(4+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

Sea $u=4+x^2 \quad du=2x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int 2x\left(4+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+c$$

$$=\sqrt{4+x^2}+c$$

Si este procedimiento de sustitución algebraica no se puede aplicar, en algunos casos es posible realizar la integración transformando la integral en una integral trigonométrica, aplicando las sustituciones siguientes:

$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$

Se sustituye x con la expresion trigonometrica $x=a\text{Sen}\theta$

$\sqrt{a^2+x^2}=a\text{Sec}\theta$

Se sustituye x con la expresion trigonometrica $x=a\tan\theta$

$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

Se sustiiuye x con la expresion trigonometrica $x=a\text{Sec}\theta$

Ejemplo 1.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}}dx$$

$a^2=9 \Rightarrow a=3$

$x=a\text{Sen}\theta$

$x=3\text{Sen}\theta$

$dx=3\cos\theta d\theta$

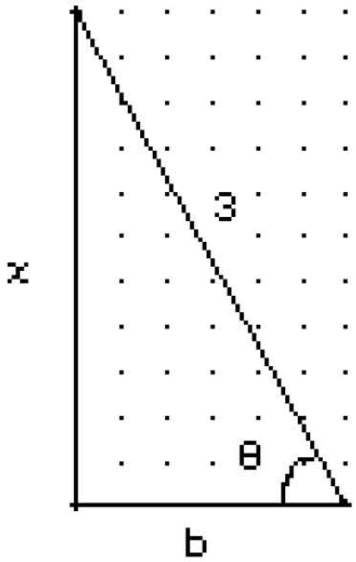
$$\begin{aligned}\sqrt{(9-x^2)^3} &=\sqrt{(9-(3\text{Sen}\theta)^2)^3}\\ &=\sqrt{(9-9\text{Sen}^2\theta)^3}\\ &=\sqrt{(9(1-\text{Sen}^2\theta))^3}\\ &=\sqrt{(9\cos^2\theta)^3}\\ &=\sqrt{3^6\cos^6\theta}\\ &=3^3\cos^3\theta\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(9-x^2)^3}}dx=\int \frac{3\cos\theta}{3^3\cos^3\theta}d\theta=\int \frac{1}{3^2\cos^2\theta}d\theta$$

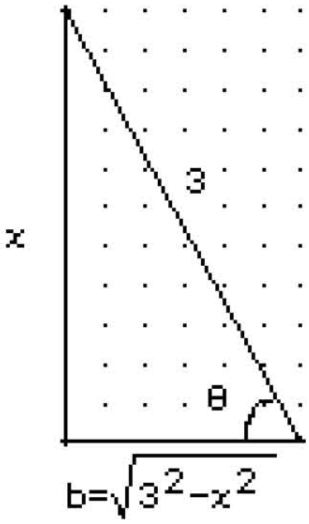
$$=\frac{1}{9}\int \text{Sec}^2\theta d\theta=\frac{1}{9}\tan\theta+c$$

Ahora necesitamos calcular el valor algebraico de $\frac{1}{9}\tan\theta+c$ en funcion de la variable x original,

$\text{Sen}\theta=\frac{x}{3}$ Usando el teorema de Pitagoras se tiene



Con el teorema Pitagórico se calcula el valor del cateto adyacente que identificaremos con b.



$$3^2=x^2+b^2$$
$$b^2=3^2-x^2$$
$$b=\sqrt{3^2-x^2}$$

$$\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{1}{9}\tan\theta+c$$

Sustituimos

$$=\frac{x}{9\sqrt{9-x^2}}+c$$

Ejemplo 2.

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=$$

$a^2=4 \quad x=a\tan\theta$

$a=2 \quad x=2\tan\theta$

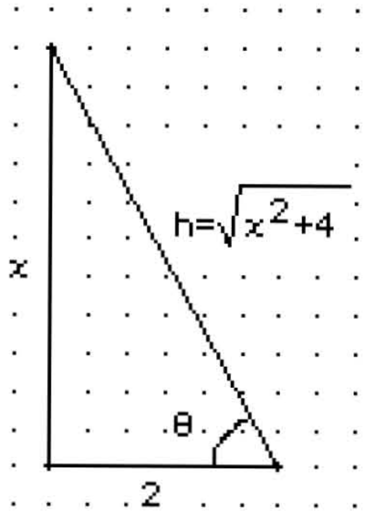
$dx=2\mathrm{Sec}^2\theta d\theta$

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2\theta+4}=2\sqrt{\tan^2\theta+1}=2\sqrt{\mathrm{Sec}^2\theta}=2\mathrm{Sec}\theta$$

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int(2\tan\theta)(2\mathrm{Sec}\theta)\left(2\mathrm{Sec}^2\theta\right)d\theta$$

$=8\int \mathrm{Sec}^2\theta\tan\theta\mathrm{Sec}\theta d\theta \quad$ Sea $u=\mathrm{Sec}\theta \quad du=\tan\theta\mathrm{Sec}\theta d\theta$

$$=8\int u^2du=\frac{8}{3}u^3+c$$



$x=2\tan\theta$

$\tan\theta=\frac{x}{2}$

$h^2=x^2+2^2$

$h=\sqrt{x^2+4}$

$\mathrm{Sec}\theta=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{8}{3}\mathrm{Sec}^3\theta+c$$

$$\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{8}{3}\left(\frac{\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^3+c$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}+c$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx$$

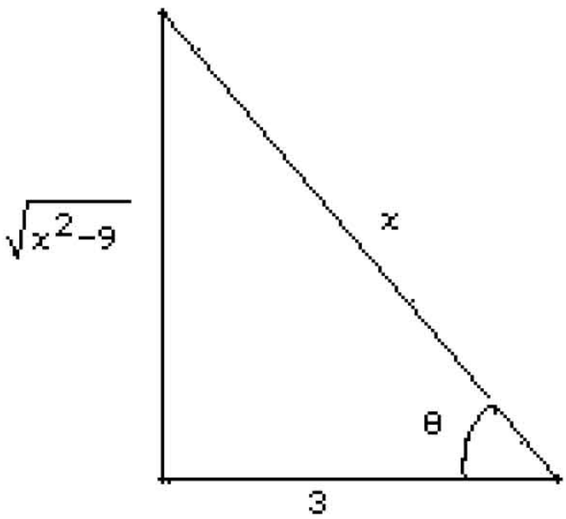
$a=3$, $x=a\operatorname{Sec}\theta \Rightarrow x=3\operatorname{Sec}\theta \quad dx=3\tan x\theta \operatorname{Sec}\theta d\theta$

$$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\operatorname{Sec}^2\theta-9}=3\sqrt{\operatorname{Sec}^2\theta-1}=3\sqrt{\tan^2\theta}=3\tan\theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx=\int \frac{27\operatorname{Sec}^2\theta\tan\theta\operatorname{Sec}\theta}{3\tan\theta}d\theta$$

$$=9\int \operatorname{Sec}^3\theta d\theta=\frac{9}{2}\left(\operatorname{Sec}\theta\tan\theta+\ln(\tan\theta+\operatorname{Sec}\theta)\right)+c$$

$$=\frac{9}{2}\operatorname{Sec}\theta\tan\theta+\frac{9}{2}\ln(\tan\theta+\operatorname{Sec}\theta)+c$$



$$\operatorname{Sec}\theta=\frac{x}{3} \quad \tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$$

$$x^2=9+b^2 \Rightarrow b=\sqrt{x^2-9}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx==\frac{9}{2}\left(\frac{x\sqrt{x^2-9}}{9}\right)+\frac{9}{2}\left(\ln\left(\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right)\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-9}\right)+\frac{9}{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)-\ln(3)\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-9}\right)+\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{9}{2}\ln(3)+c$$

$$C=-\frac{9}{2}\ln(3)+c$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-9}\right)+\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+C$$

5.8.2. INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES.

CASO 1.

Todos los factores lineales del denominador son distintos.

Ejemplo. $\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1)$$

$$\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

$$=\frac{A((x-2)(x+1))+B(x(x+1))+C(x(x-2))}{x(x-2)(x+1)}$$

$$3x-2=A((x-2)(x+1))+B(x(x+1))+C(x(x-2))$$

Para calcular los valores de las constantes, obtenemos las raices de

$x(x-2)(x+1)$

$x=0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ evaluando en

$3x-2=A((x-2)(x+1))+B(x(x+1))+C(x(x-2))$

Para $x=0$, $-2=-2A \Rightarrow A=1$

Para $x=2$, $4=6B \Rightarrow B=\frac{2}{3}$

Para $x=-1$, $-5=3C \Rightarrow C=-\frac{5}{3}$

Sustituyo los valores de A, B y C.

$$\frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{1}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{5}{3}}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{5}{3(x+1)}$$

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int \frac{1}{x}dx+\frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}dx-\frac{5}{3}\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$=\ln(x)+\frac{2}{3}\ln(x-2)-\frac{5}{3}\ln(x+1)+c$$

$$=\ln\left(x\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)-\ln\sqrt[3]{(x+1)^5}+c$$

$$=\ln\left(x\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{(x+1)^5}}\right)+c$$

Cabe señalar que el número de constantes por determinar es igual al grado del denominador.

CASO 2.

Algunos de los factores lineales del denominador se repiten.

Ejemplo.

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$$

$$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$3x+5=A\left(x^2-2x+1\right)+B(x+1)+C\left(x^2-1\right)$$

$$=(A+C)x^2+(B-2A)x+(A+B-C)$$

Resolviendo el sistema

1) $A \quad +C=0$

2) $-2A+B=3$

3) $A+B-C=5$

Si multiplico por -1 la ecuacion 3) y se la sumo a la 2) obtengo $A=\frac{1}{2}$ Sustituyo en 1) $\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

Sustituyo en 3) los valores hallados $B=4$

Sustituyo los valores obtenidos de A,B y C.

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+4\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\ln(x-1)+c$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)-\frac{4}{x-1}+c$$

CASO 3.

Todos los factores cuadráticos (irreducibles) del denominador son distintos. Por cada factor de la forma ax^2+bx+c, que es un polinomio cuadrático que resulte de la factorización del denominador, queda un sumando del tipo

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$. Si además resultan factores lineales repetidos o no, se resuelven éstos como en los caso 1 y 2.

Si b no es cero, completamos el cuadrado del denominador

$$x^2+bx+\frac{1}{4}b^2+c-\frac{1}{4}b^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(4c-b^2\right) \text{ donde } 4c>b^2$$

$$\text{Haciendo } x+\frac{b}{2}=u \Rightarrow x=u-\frac{b}{2} \qquad dx=du$$

Sustituyendo estos valores, la nueva integral, en función de la variable u, se integra fácilmente.

Ejemplo.

$$\int \frac{2x^2+x}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}dx=$$

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1=(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)$$

$$\frac{2x^2+x}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$2x^2+x=A\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)(x+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$=(B+C)x^3+(A+2B+2C+D)x^2+(A+2B+C+2D)x+(A+B+D)$$

Resolviendo el sistema

1) $B+C \quad =0$

2) $A+2B+2C+D=2$

3) $A+2B+C+2D=1$

4) $A+B+D \quad =0$

$A=1 \quad B=-2 \quad C=2 \quad D=1$

$$\frac{2x^2+x}{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$=\int \frac{1}{(x+1)^2}dx-2\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=-\frac{1}{x+1}-2\ln(x+1)+\ln(x^2+x+1)+c$$

$$=-\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)^2+\ln(x^2+x+1)+c$$

$$=\ln\left(\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\right)-\frac{1}{x+1}+c$$

CASO 4.

Algunos factores cuadráticos (irreducibles) del denominador se repiten.

Por cada factor de la forma $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ que resulte de la factorizacion del denominador la corresponde una suma de n fracciones de la forma:

$$\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}+\frac{Cx+D}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+\dots+\frac{Lx+M}{\left(ax^2+bx+c\right)}$$

De haber factores lineales repetidos o no, se resuelven estos como los caso 1 y 2.

Ejemplo. $\int\frac{2x^3+x+3}{x^4+2x^2+1}dx=$

$$x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2=\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)$$

$$\frac{2x^3+x+3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=Cx^3+Dx^2+(A+C)x+(B+D)$$

Resolviendo el sistema

C=2

D=0

A+C=1 ⇒ A=−1

B+D=3 ⇒ B=3

$$\frac{2x^3+x+3}{x^4+2x^2+1}=\frac{-x+3}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x+0}{\left(x^2+1\right)}$$

$$\int\frac{2x^3+x+3}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{-x+3}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int\frac{2x+0}{\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=-\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx+3\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int\frac{2x}{\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)+\ln\left(x^2+1\right)+c$$

Cuando usamos este método la integración no siempre es muy trivial por lo que requerimos de la formula de reducción:

$$\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^2} du = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}} du\right)$$

CONCLUSIONES.

Hemos evaluado la eficacia de una intervención en el aula dirigida explícitamente a favorecer el cambio conceptual, metodológico y actitudinal en los estudiantes para el tema de demostraciones en cursos de primer año de universidad. En esta intervención, el mayor reto del profesor no es informar a los estudiantes de las teorías físicas sino proporcionarles un contexto donde los estudiantes sean capaces de analizar problemas, poner en cuestión sus ideas y utilizar procedimientos propios de la cultura científica para validar y justificar los nuevos conocimientos. Por tanto, se debe proporcionar a los estudiantes secuencias de actividades donde se vean obligados a plantearse problemas tengan que utilizar herramientas propias de la metodología científica.

Es obvio que estas demostraciones no son las únicas pero si las más comunes que nos pueden ayudar a tener una idea más clara de cómo trabajar con ciertos resultados. La demostración será un elemento indispensable para la formación y transformación del pensamiento humano que genera una gama de ideas que se adecuan para llegar a obtener resultados satisfactorios y de validez universal. A final de cuentas, quien demuestra hará lo que le parezca más conveniente según sus aptitudes y conocimientos que del tema se tenga.

Las demostraciones no son únicas varían de acuerdo a quien las haga.
Finalmente, los métodos y demostraciones que aquí se utilizaron, aportan algunas ideas para quienes son primerizos en este tema.
Cabe mencionar que existe todavía mucho camino por recorrer con respecto a las demostraciones se refiere.

Luego, entonces, el camino es lo conocido de un tema para poder llegar a un resultado valido y fundamentado en lo teórico y muy posiblemente se aplica a la vida diaria. Como es el caso de la aplicación de transformación de un lenguaje común a un lenguaje algebraico, como se dio en la solución de sistemas de ecuaciones de 2x2, en el capítulo de rectas y cónicas, así como en trigonometría la solución a los problemas de aplicación, simplemente tomamos lo ya conocido para dar solución a un tipo de problema que nos parecía irresoluble con los elementos dados. Pero se pudo plantear con resultados conocidos, como lo son las identidades trigonométricas implementando un resultado bien conocido a lo desconocido y dar solución al problema.

Es importante no perder de vista que lo más complicado de dar solución a un problema no es tanto el método para resolverlo, sino el planteamiento de la ecuación o fórmula para tal empresa; posteriormente usar lo que se adapte o se conozca mejor para resolver el ejercicio.

Eso dependerá de quien resuelva, ¿por qué decimos esto?, por el ejercicio de logística, que resolvimos con diferentes herramientas como lo son: trigonometría por un lado y por otro con cálculo diferencial, en el tema de máximos y mínimos, donde los resultados son similares. Con una mayor precisión a la primera con máximos o mínimos por que solamente, aplicamos el método y resolvemos para conocer el resultado, no así como lo que se hizo con trigonometría, puesto que se tabularon varios valores para dar una aproximación adecuada y dar un resultado más próximo a la realidad.

De lo planteado anteriormente es básicamente de lo que trata este breve trabajo de tesis.

El dar herramientas e ideas a todo estudiante que se vea involucrado en la difícil tarea de dar solución a problemas matemáticos, así como para hacer frente a problemas reales que en el campo de trabajo nos encontremos.

Es importante, tomar en cuenta que los problemas reales son aún más complicados de resolver, en ocasiones sólo podremos dar una idea de solución pero no una fórmula como sería lo ideal.

Bastaría con que una solo idea de las contenidas en este trabajo de tesis sacudiera al lector al grado tal que marcara en su vida un nuevo rumbo, de hacerle ver la vida con un enfoque más creativo.

BIBLIOGRAFÍA

- GRANVILLE, William Anthony. SMITH, Percey F. LONGLEY, William Raymond. "Cálculo Diferencial e Integral", 2ª ed., edit. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana, México, D.F., 1980.

- RAMÍREZ.Ana Irene "Trigonometría". Temas Básicos, edit. Trillas.

- WILLOUGHBY, Stephen S. "Probabilidad y Estadística", edit. Publicaciones Cultural.

- WOOTON, William. BECKENBACH, Edwin F. FLEMING, Frank J. "Geometría Analítica Moderna", edit. Publicaciones Cultural.

- FUENLABRADA DE LA VEGA TRUCÍOS, Samuel. "Cálculo integral", edit. McGraw-Hill.

- SOMINSKII,I. S. "El método de la inducción matemática",edit. Limusa. Noriega editores.

- Notas de clase.