UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

"Simetrías C,P, y T del campo de Dirac y su límite no relativista"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

DALIA BERENICE CERVANTES CABRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL SOCOLOVSKY VAJOVSKY

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. LUIS G. CABRAL ROSETTI
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. ZBIGNIEW OZIEWICZ KWASS

pcf

posgrado en ciencias físicas
unam

MÉXICO, D.F. 2006

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Deseo agradecer el incondicional apoyo y comprensión
de mi asesor el Dr. Miguel Socolovsky.
Doy también las gracias a los profesores Dr. Oziewicz,
Dr.Juan Antonio Pérez, Dr. Juan Carlos d´Olivo
y Dr. Hugo Pérez, por su paciencia y ayuda.
De manera especial quiero expresar mi agradecimiento
a mi familia y amigos por su solidaridad y cariño.*

Finalmente agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT) (Proyecto:IN103505) por su apoyo brindado en la realización de mis estudios de maestría y de esta tesis.

Índice general

Introducción.

Muchas de las ideas profundas acerca de la naturaleza se manifiestan en sí mismas como simetrías. Tres simetrías discretas fundamentales de las interacciones de la *física de partículas elementales* son paridad (P), inversión temporal (T) y la conjugación de carga (C);

Paridad, consiste en la inversión de las coordenadas espaciales con respecto al origen, es decir $\vec{x} \to -\vec{x}$.

Inversión Temporal, significa el cambio en la dirección de la coordenada temporal, esto es $t \to -t$.

Conjugación de Carga, invierte el signo de la carga eléctrica y todos los números cuánticos internos, o sea partícula $\to$ antipartícula .

Se ha mostrado la conservación y violación de cada una de estas simetrías, así como algunas de sus combinaciones, bajo diferentes interacciones; por ejemplo, mientras las interacciones fuertes y electromagnéticas obedecen las simetrías de paridad y conjugación de carga, las débiles no lo hacen. La invariancia bajo la inversión temporal se tiene para interacciones gravitacionales y electromagnéticas. La simetría CP se conserva en el decaimiento del muón, pero es violada por los kaones neutros, etc. Pero al considerar la combinación de las tres, CPT, se tiene una simetría que se cree que se conserva (un teorema de la Teoría Cuántica Relativista de Campos así lo asegura) y hasta ahora es consistente con las observaciones experimentales.

Es bien conocida la ambigüedad en el signo del cuadrado del operador paridad $P^2 = \pm 1$ [Berestetskii], la cual es heredada en la mecánica cuántica no relativista. Usualmente la consideración $P^2 = 1$ es la más utilizada, pero la posibilidad $P^2 = -1$ permite el rompimiento de isomorfismos entre ciertos grupos dobles. Este resultado podría tener consecuencias experimentalmente verificables, en partícular en el dominio de la mecánica cuántica molecular: al no darse estos isomorfismos podrían tenerse diferentes reglas de selección espectroscópica y tablas de caracteres de representaciones irreducibles de los grupos mencionados. Lo anterior sirvió de motivación pora este trabajo, en el cual se buscó aclarar la discrepacia mencionada del signo del cuadrado del operador paridad.

También fundamentó el posterior estudio de la simetría discreta de inversión temporal en el límite no relativista y dada la importancia de la matemática formal de la física, se buscó dar una representación geométrica en términos de haces fibrados principales a las transformaciones de paridad, inversión temporal y paridad-inversión temporal y su acción sobre los espinores de Pauli.

Dada la idea generalizada de que el concepto de antipartículas puede ser definida sólo en el contexto de la mecánica cuántica relativista y el hecho de que la transformación de conjugación de carga no pertence grupo de Poincaré y, por lo tanto, no actúa en el espacio-tiempo, condujo a buscar y justificar una representación de la conjugación de carga, así como a dar un interpretación de la acción de ésta en el espacio de coordenadas.

La tesis consiste de dos capítulos y tres apéndices, que se describen a continuación brevemente:

En el capítulo 1, se exponen algunos de los resultados obtenidos en [Socolovsky04], los cuales de base para el desarrollo del capítulo 2, al tomar el límite no relativista. Éstos son:

Usando la representación estándar de la ecuación de Dirac, se demuestra que, salvo un signo, existen sólo dos conjuntos de soluciones consistentes para las matrices de Conjugación de Carga C, Paridad P e Inversión Temporal T, que transforman el campo $\psi(x)$ a $\psi_C(x) = C\bar{\psi}^{\sim}(x)$, $\psi_\pi(x_\pi) = P\psi(x)$ y $\psi_\tau(x) = T\psi^*(x_\tau)$, donde $x_\pi = (t, -\vec{x})$ y $x_\tau = (-t, \vec{x})$, respectivamente.

Estos conjuntos son dados por $\{C = \pm\gamma_2\gamma_0, P = \pm i\gamma_0, T = \pm i\gamma^3\gamma^1\}$ y $\{C = \pm i\gamma^2\gamma_0, P = \pm i\gamma_0, T = \pm\gamma^3\gamma^1\}$, para los cuales $P^2 = -1$ y dos sucesivas aplicaciones de la transformación Paridad a campos fermiónicos equivale necesariamente a una rotación de 2π. Cada uno de estos conjuntos generan grupos no abelianos de 16 elementos y no isomorfos, $G_\theta^{(1)}$ y $G_\theta^{(2)}$.

En cambio, los operadores $\mathbf{C}, \mathbf{P}$ y $\mathbf{T}$ que actúa en el espacio de Hilbert, en el esquema de la segunda cuantización, generan un único grupo G_Θ, que es llamado *el grupo* **CPT** *del campo de Dirac*, que es isomorfo a $Q \times \mathbb{Z}_2$, i.e., la suma directa del grupo cuaterniónico y la 0-esfera. Este grupo es sólo compatible con el grupo de matrices $G_\theta^{(2)}$, conocido como *el grupo de matrices* CPT. $G_\theta^{(2)}$ resulta ser isomorfo a una suma semidirecta del grupo de simetrías del cuadrado DH_8 y la 0-esfera.

Los resultados anteriores permiten encontrar una representación geométrica en términos de haces fibrados principales, ya que los generadores de los grupos $G_\theta^{(\sigma)}$, $\sigma = 1, 2$ descritos arriba, son elementos del álgebra de Dirac D^{16}, la cual es la complexificación del álgebra de Clifford del espacio de Minkowski. (D^{16} es isomorfa al álgebra de matrices de cuatro por cuatro con entradas en los complejos $\mathbb{C}(4)$.)

Los grupos $G_\theta^{(1)}$ y $G_\theta^{(2)}$ también están contenidos en subgrupos del álgebra de Dirac con mayores restricciones, como en el grupo de unidades D^{16*}, dado que tenemos las inversas de las transformaciones C, P ,T, CP, CT, PT y CPT y en el grupo Pin del álgebra de Dirac, $P_{D^{16}}$, ya que sus cuadrados C^2, P^2, T^2, etc., son 1 o -1.

Así se tiene una sucesión exacta corta con la cual se construye un haz $\Xi_r : \mathbb{Z}_4 \to Pin_{D^{16}} \to O(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}})$, que contiene las representaciones matriciales de las transformaciones C, P, T y CPT para el campo de Dirac, mostrando la acción sobre los elementos de $\mathbb{C}^4$ de estas simetrías y evidenciando que es distinta a la acción que se tiene en el espacio-tiempo.

En el capítulo 2, mediante el análisis de componentes "pequeñas" y "grandes" [Bjorken y Drell] se toma el límite no relativista de los campos ψ_π y ψ_τ y de esta manera se encuentran los respectivos límites de las transformaciones de paridad e inversión temporal, denotados por $\hat{P}$ y $\hat{T}$.

Se hace una descripción en términos de haces de la acción del operador paridad no relativista $\widehat{P}$. El haz que contiene a $\widehat{P}$ es $SU(2) \odot \mathbb{Z}_2 \to O(3)$, que es una extensión no trivial del grupo cubriente universal $SU(2) \to SO(3)$. $\widehat{P}$ es el límite de la correspondiente representación matricial $P = i\gamma_0$ del capítulo 1, y también satisface $\widehat{P}^2 = -1$.

Del producto directo de $O(3)$ por $\mathbb{Z}_2$ inducido por la estructura del grupo de Galileo, identificamos, en su doble cubierta, los operadores Inversión Temporal $\hat{T}$ y la combinación $\hat{P}\hat{T}$ actuando sobre los espinores de Pauli. Estos generan un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. Como en el caso de paridad, $\hat{T}$ es el límite no relativista del correspondiente operador matricial de Dirac $T = \gamma^3\gamma^1$ cuyo cuadrado $\widehat{T}^2 = -1$ [Cervantes05].

Al final de este capítulo se estudia el límite no relativista del operador Conjugación de Carga C en el contexto de la ecuación de Dirac acoplada a un campo electromagnético, sustentando la existencia de este límite, por medio de la consistecia entre las componentes "grandes" y "pequeñas"del espinor ψ y del espinor conjugado de carga ψ_C, y por un argumento de la Teoría de Campos.

Se obtiene el operador de Conjugación de Carga no Relativista $\hat{C} \equiv C_{nr}$, de forma análoga al procedimiento seguido para $\widehat{P}$ y $\widehat{T}$. Usando la definición encontrada de $\hat{C}$, se muestra explícitamente la invariancia galileana de la ecuación de Schrödinger-Pauli para el espinor que representa al positrón no relativista. Como en el caso relativista, $\widehat{C}$ lleva de la ecuación de partícula a la de antipartícula y viceversa.

Complexificando el grupo de Lorentz y por lo tanto el espacio tiempo x_μ, se da una interpretación para esta transformación como la conjugación compleja de las componentes espaciales $\vec{x} \to \vec{x}^*$. Esto resulta natural en una descripción de haces fibrados principales [Cabo].

En el apéndice A se dan algunas definiciones y propiedades sobre sucesiones exactas cortas y un ejemplo relevante en física.

El apéndice B contiene la definición de los haces fibrados principales, una construcción de éstos y se da también un ejemplo. (Haz de Hopf Real).

Por último, en el apéndice C se da la defición de aplicaciones cubrientes y levantamientos.

Capítulo 1

Simetrías C, P y T del Campo de Dirac.

1.1. Acción del Grupo de Poincaré sobre Campos Cuánticos Lineales.

Sea (a, w) un elemento del grupo de Poincaré $\mathcal{P}$ el cual es suma directa del grupo de Lorentz $\mathcal{L}$ y traslaciones $\mathcal{T}$ del espacio-tiempo de Minkowski. Si $u(x)$ es un operador de campo lineal en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, bajo (a, w), $u(x)$ se transforma como:

$$u'(x') = \Lambda(w)u(x), \tag{1.1}$$

donde $\Lambda(w)$ es la representación matricial $n \times n$ del elemento (a, w), actuando sobre las n componentes de $u(x)$ y $x' = (a, w) \cdot x = wx + a$, que implica $x = (a, w)^{-1}x'$. El vector de estado $\Psi \in \mathcal{H}$ del sistema de campos, se transforma como:

$$\Psi' = U(a, w)\Psi \tag{1.2}$$

con $U(a, w)$ el operador que representa (a, w) en el espacio de Hilbert.

El valor medio de $u(x)$ en el estado Ψ' es:

$$(\Psi', u(x)\Psi') = (U(a, w)\Psi, u(x)U(a, w)\Psi) = (\Psi, U^\dagger(a, w)u(x)U(a, w)\Psi) = (\Psi, u'(x)\Psi) \tag{1.3}$$

siendo:

$$u'(x) = U^\dagger(a, w)u(x)U(a, w) \tag{1.4}$$

si U es unitaria $U^\dagger(a, w) = U^{-1}(a, w)$.

Y el valor medio para $u(x)$ en el estado Ψ' con V antiunitaria es:

$$(\Psi', u(x)\Psi') = (V(a, w)\Psi, u(x)V(a, w)\Psi) = (u^\dagger(x)V(a, w)\Psi, V(a, w)\Psi) =$$
$$(V(a, w)V^\dagger(a, w)u^\dagger(x)V(a, w)\Psi, V(a, w)\Psi) = (\Psi, V^\dagger(a, w)u^\dagger(x)V(a, w)\Psi) = (\Psi, u'(x)\Psi)$$

para la cuarta igualdad se ha usado la propiedad de los operadores antiunitarios: $(B\varphi, B\chi) = (\varphi, B^\dagger B\chi)^\sim = (\chi, \varphi)$, donde $\varphi = V(a,w)^\dagger u^\dagger(x) V(a,w)\Psi$, entonces $(V(a,w)\varphi, V(a,w)\Psi) = (\Psi, \varphi) = (\Psi, V(a,w)^\dagger u^\dagger(x) V(a,w)\Psi)$.

Con

$$u'(x) = V^\dagger(a,w) u^\dagger(x) V(a,w), \tag{1.5}$$

y

$$V^\dagger(a,w) = V^{-1}(a,w)$$

comparando (1.1) con (1.5) y (1.5) se obtienen la condiciones:

$$u'(x) = \Lambda(w) u((a,w)^{-1} \cdot x) = U^\dagger(a,w) u(x) U(a,w) \text{ para } U \text{ unitaria.} \tag{1.6}$$

$$u'(x) = \Lambda(w) u((a,w)^{-1} \cdot x) = V^\dagger(a,w) u^\dagger(x) V(a,w) \text{ para } V \text{ antiunitaria.} \tag{1.7}$$

A través de las matrices $\Lambda(w)$, (1.6) define la acción de los operadores U y V sobre los operadores cuánticos de campo $u(x)$.

Para las transformaciones de simetría paridad e inversión temporal tenemos: $(a,w) = (0,\Pi)$ y $(a,w) = (0,\tau)$ respectivamente, así para los operadores $U(0,\Pi) = \mathbf{P}$ (unitario) y $V(0,\tau) = \mathbf{T}$ (antiunitario) y las matrices $\Lambda(\Pi) = P$ y $\Lambda(\tau) = T$.

La conjugación de carga, que corresponde al intercambio de partícula por antipartícula no es una transformación del espacio-tiempo, es decir no es una transformación del grupo de Poincaré. Éste es un operador unitario $U = \mathbf{C}$ con matriz $\Lambda(C) = C$.

En las siguientes secciones se estudiará brevemente la representación matricial de las transformaciones C, P, T y CPT, en términos de los generadores del álgebra de Dirac D^{16} [ver sección 1.8], su consistencia y la acción de los operadores de campo cuántico $\psi_\pi(x_\pi) = P\psi(x) = \mathbf{P}^\dagger \psi(x) \mathbf{P}$, $\psi_C(x) = C\overline{\psi}(x)^\sim = \mathbf{C}^\dagger \psi(x) \mathbf{C}$, $\psi_\tau(x) = T\psi(x_\tau) = \mathbf{T}^\dagger \psi(x) \mathbf{T}$.

1.2. Paridad.

Sea la transformación en el grupo de Lorentz $\Pi : x^\mu \to x'^\mu = w^\mu_\nu x^\nu = (x'^0, \vec{x'}) := (ct, -\vec{x})$, con $w^\mu_\nu = diag(1,-1,-1,-1)$ inversión de los tres ejes espaciales.
De la ecuación libre de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{1.8}$$

se determinará la matriz $P \in GL_4(\mathbb{C})$, es decir invertible y elemento de $\mathbb{C}(4)$, que satisfaga

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

con $\psi'(x') = \psi'(t, -\vec{x}) := P\psi(x)$, pero según Π, $\gamma^\mu \partial'_\mu = \gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial x^i$ con ello la ecuación anterior se escribe como:

$$(i(\gamma^0 \partial_0 - \gamma^i \partial_i) - m) P\psi(x) = 0$$

multiplicando P^{-1} por la izquierda esta última, se tiene:

$$(i(P^{-1}\gamma^0 P \partial_0 - P^{-1}\gamma^i P \partial_i) - m))\psi(x) = 0$$

por lo tanto comparando con (1.8) P debe satisfacer:

$$P^{-1}\gamma_0 P = \gamma_0 \text{ y } P^{-1}\gamma^k P = -\gamma^k, \tag{1.9}$$

que equivale a $P^{-1}\gamma^\mu P = w^\mu_\nu \gamma^\nu$ o $[P,\gamma_0] = \{P,\gamma^k\} = 0$ para $k = 1,2,3$.

Usando la representación estándar de las matrices γ^μ, dadas por:

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

donde σ_k son las matrices de Pauli ($\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$).

Se obtiene la solución única para P siguiendo las condiciones (1.9) y (1.10) de la siguiente forma:

Tomando

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ donde } A,B,C,D \in \mathbb{C}(2). \text{ La condición } P\gamma_0 = \gamma_0 P \text{ implica } P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

De

$$P\gamma_1 = -\gamma_1 P \text{ se sigue } D = -\sigma_1 A \sigma_1, \text{ así } P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\sigma_1 A \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{C}; \text{ de } P\gamma^2 = -\gamma^2 P \text{ se obtiene } b = c = 0,$$

con lo cual

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Finalmente $P\gamma^3 = -\gamma^3 P$ implica $d = a$ así $P = a\gamma_0$ con $a \in \mathbb{C}^*$, es decir:

$$P = z\gamma_0 \ , \ z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Por otra parte ya que $det(\Pi^2) = 1$, éste debe producir una rotación sobre el espinor. De 0º en cuyo caso la función de onda no cambia; o 360º, con la cual el espinor cambia de signo [ver primera sección del Capítulo 2]. Entonces se tienen las dos posibilidades de $P^2 = z^2\gamma_0^2 = z^2 I$ respectivamente [Berestetskii, páginas 69-70]:

$$\textbf{i)}\ 0^\circ \Longrightarrow P^2 = 1 \Longrightarrow z = \pm 1 \Longrightarrow P = \pm\gamma_0,$$
$$\textbf{ii)}\ 360^\circ \Longrightarrow P^2 = -1 \Longrightarrow z = \pm i \Longrightarrow P = \pm i\gamma_0$$

en el primer caso $P^\dagger = P = P^{-1} = P^\sim = P^*$, es decir: unitaria y hermitiana, además, $det(P) = 1$ y $tr(P) = 0$.

Para el segundo tenemos: $P^\dagger = -P = P^{-1} = -P^\sim = P^*, det(P) = 1$ y $tr(P) = 0$, unitaria y antihermitiana.

La representación matricial $\Lambda(\Pi)$ de la transformación Π es: $\Lambda(\Pi) = P$, y la acción del operador unitario $\mathbf{P} = U(0,\Pi)$, para el espinor $\psi(t,\vec{x})$, es la que se sigue de la ecuación (1.6):

$$\psi_\Pi(t,\vec{x}) = P\psi(t,-\vec{x}) = \mathbf{P}^\dagger\psi(\mathbf{x})\mathbf{P} \tag{1.11}$$

Así la doble aplicación corresponde a:

$$\mathbf{P}^\dagger(\mathbf{P}^\dagger\psi(t,\vec{x})\mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\dagger 2}\psi(t,\vec{x})\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^\dagger(P\psi(t,-\vec{x}))\mathbf{P} = P(P\psi(t,\vec{x})) = P^2\psi(t,\vec{x}), \tag{1.12}$$

con ello:

$$\mathbf{P}^{\dagger 2}\psi(t,\vec{x})\mathbf{P}^2 = \pm\psi(t,\vec{x}) \tag{1.13}$$

siguiendo (i) y (ii), $\psi_{\Pi^2} = \pm\psi$.

Es útil calcular la transformación de paridad para el espinor conjugado de Dirac. Tomando la conjugación compleja transpuesta y multiplicando por la derecha la matriz γ_0 en $\psi_\Pi(x_\Pi) = P\psi(x)$ se obtiene:

$$\psi^\dagger_\Pi(x_\Pi)\gamma_0 \equiv \overline{\psi}_\Pi(x_\Pi) = \psi^\dagger(x)P^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger(x)\gamma_0 P^\dagger = \overline{\psi}(x)P^\dagger = \overline{\psi}(x)P^{-1}.$$

donde se ha usado $[P,\gamma_0] = 0$ y $P^\dagger = P^{-1}$ para ambos casos, con ello:

$$\overline{\psi}_\Pi(x_\Pi) = \overline{\psi}(x)P^{-1}. \tag{1.14}$$

1.3. Conjugación de Carga.

La transformación de Conjugación de Carga corresponde aquella que cambia partícula por antipartícula y viceversa, a continuación se encontrará la representación matricial y el operador de esta transformación.

La ecuación de Dirac para la carga eléctrica $q = -|e|$ en un potencial electromagnético A_μ esta dada por:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + |e|\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{1.15}$$

Tomando la conjugación compleja, multiplicando desde el lado izquierdo por $C\gamma_0$ ($C \in GL_4(\mathbb{C})$) e introduciendo la unidad $(C\gamma_0)^{-1}(C\gamma_0)$ en los dos primeros términos de la última expresión obtenemos:

$$((i\partial_\mu - |e|A_\mu)(C\gamma_0)\gamma^{\mu^*}(C\gamma_0)^{-1} + m)(C\gamma_0)\psi^*(x) = 0 \tag{1.16}$$

con ello se define el *espinor conjugado de carga*:

$$\psi_C = C\gamma_0\psi^* = C\bar{\psi}^\sim. \tag{1.17}$$

La segunda igualdad se sigue de tomar la operación transpuesta del espinor conjugado de Dirac $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ así $\overline{\psi}^\sim = (\psi^\dagger\gamma_0)^\sim = \gamma_0^\sim\psi^{\dagger\sim} = \gamma_0\psi^*$.

(1.16) impone la condición sobre C:

$$(C\gamma_0)\gamma^{\mu^*}(C\gamma_0)^{-1} = -\gamma^\mu$$

que es equivalente a:

$$C\gamma^{\mu\sim}C^{-1} = -\gamma^\mu \text{ o } C\gamma^{\mu\sim} = -\gamma^\mu C, \tag{1.18}$$

dado que $\gamma_0^{-1} = \gamma_0 = \gamma_0^\sim$, $\gamma^{i\dagger} \equiv (\gamma^{i*})^\sim = -\gamma^i$, $\{\gamma_0,\gamma^i\} = 0$ y $(C\gamma_0)^{-1} = \gamma_0^{-1}C^{-1}$ así que $\gamma_0\gamma^{\mu*}\gamma_0 = \gamma^{\mu\sim}$.

En términos de conmutadores y anticonmutadores las expresiones de arriba se escriben como:

$$[C,\gamma^\mu]=0,\mu=1,3 \text{ y } \{C,\gamma^\mu\}=0,\mu=0,2.$$

ya que $\gamma^{i\sim}=-\gamma^i$, $i=1,3$ y $\gamma^{j\sim}=\gamma^j$, $j=0,2$.

Así ψ_C satisface la ecuación:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-|e|\gamma^\mu A_\mu-m)\psi_C(x)=0, \tag{1.19}$$

que describe partículas con la misma masa, pero con carga opuesta.

Si se cambia el cuadripotencial $A_\mu\to -A_\mu$, se completa la transformación de conjugación de carga y se recupera la ecuación (1.15) aplicada al espinor ψ_C; expresado la simetría de la ecuación de Dirac en un campo electromagnético bajo esta transformación.

De forma análoga como se obtuvo la matriz P, usando ahora las condiciones (1.18), se tiene:

$$C=\begin{pmatrix}A & B\\ E & F\end{pmatrix}, \text{ con } A,B,E,F\in\mathbb{C}(2),$$

$$C\gamma_0=-\gamma_0 C \text{ implica } A=F=0 \text{ así } C=\begin{pmatrix}0 & B\\ E & 0\end{pmatrix}.$$

De

$$C\gamma^2=-\gamma^2 C \text{ se sigue } E=\sigma_2 B\sigma_2$$

entonces:

$$C=\begin{pmatrix}0 & B\\ \sigma_2 B\sigma_2 & 0\end{pmatrix}, \text{ definiendo } B=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \text{ con } \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C},$$

de

$$C\gamma^1=\gamma^1 C, C\gamma_3=\gamma_3 C \text{ se obtiene } \alpha=\delta \text{ y } \gamma=-\beta.$$

Con lo cual $C=\beta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=i\beta\sigma_2=\eta\gamma^2\gamma_0$, siendo $\eta=-i\beta\in\mathbb{C}^*$, ya que $\sigma_2=-\gamma^2\gamma_0$ así:

$$C=\eta\gamma^2\gamma_0=\eta\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ -i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\in D^{16} \text{ y } \eta\in U(1) \tag{1.20}$$

además $C^2=\eta^2\gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^0=\eta^2 1$.

D^{16} es el álgebra complexificada de Clifford para M^4 [Ver la siguiente sección].

Aplicando dos veces la transformación de conjugación de carga y usando las expresiones (1.17),(1.18), (1.20) se tiene:

$$(\psi_C)_C \equiv \psi_{C^2} = C\overline{\psi}_C^{\sim} = C(\psi_C^\dagger\gamma_0)^{\sim} = C\gamma_0\psi_C^* = C\gamma_0(C\gamma_0\psi^*)^* = C\gamma_0C^*\gamma_0\psi = -CC^*\psi = \tag{1.21}$$
$$-(\eta\gamma^2\gamma_0)(\eta\gamma^2\gamma_0)^*\psi = -|\eta|^2\gamma^2\gamma_0\gamma^{2*}\gamma_0\psi = -|\eta|^2(\gamma^2)^2(\gamma_0)^2\psi = |\eta|^2\psi.$$

Entonces:

$$\psi_{C^2} = \psi$$

ya que el efecto en ψ a lo más es de una fase, con lo cual $\eta \in U(1)$ y $CC^\dagger = (\eta\gamma^2\gamma_0)(\eta\gamma^2\gamma_0)^\dagger = \eta\gamma^2\gamma_0\overline{\eta}\gamma_0\gamma^{2\dagger} = -|\eta|^2(\gamma^2)^2 = 1$, es decir C es unitaria.

La transformación de conjugación de carga para el campo conjugado de Dirac es:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_C &= (\psi^\dagger\gamma_0)_C = \psi_C^\dagger\gamma_0 = (C\gamma_0\psi^*)^\dagger\gamma_0 = \psi^{\sim}\gamma_0C^\dagger\gamma_0 \\ &= \psi^{\sim}\gamma_0(\eta\gamma^2\gamma_0)^\dagger\gamma_0 = \bar{\eta}\psi^{\sim}\gamma_0\gamma_0^\dagger\gamma^{2\dagger}\gamma_0 = -\bar{\eta}\psi^{\sim}\gamma^2\gamma_0 \\ &= -\bar{\eta}\psi^{\sim}\bar{\eta}\eta\gamma^2\gamma_0 = -\bar{\eta}^2\psi^{\sim}C.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Tomando la conjugación de Dirac de la ecuación (1.17)

$$\overline{\psi}_C = (C\overline{\psi}^{\sim})^\dagger\gamma_0 = (\overline{\psi}^{\sim})^\dagger C^\dagger\gamma_0 = \overline{\psi}^* C^\dagger\gamma_0 = \psi^{\sim}\gamma_0C^\dagger\gamma_0 = -\psi^{\sim}C^\dagger.$$

comparando con lo obtenido en (1.22) implica $\overline{\eta}^2C = C^\dagger$. Así, multiplicando C por la derecha a esta última se obtiene, $\overline{\eta}^2C^2 = 1$, sustituyendo $C^2 = \eta^21$ luego $\overline{\eta}^2\eta^21 = 1$ se da para $|\eta|^4 = 1$.

Así:

$$\begin{aligned}(\overline{\psi}\psi)_C \equiv \overline{\psi}_C\psi_C &= (-\overline{\eta}^2\psi^{\sim}C)(C\overline{\psi}^{\sim}) = -\overline{\eta}^2\psi^{\sim}CC\overline{\psi}^{\sim} = -\overline{\eta}^2C^2(\overline{\psi}\psi)^{\sim} \\ &= -\overline{\eta}^2C^2\overline{\psi}\psi = -(\overline{\eta}\eta)^2\overline{\psi}\psi = -|\eta|^4\overline{\psi}\psi = -\overline{\psi}\psi.\end{aligned}$$

es decir el operador densidad de las antipartículas.

Tenemos las posibilidades:

$$\begin{gathered}\textbf{i)}\ \eta = \pm 1 \Longrightarrow C^2 = 1 \Longrightarrow C = \pm\gamma^2\gamma_0, \\ \overline{\psi}_C = -\psi^{\sim}C. \\ \textbf{ii)}\ \eta = \pm i \Longrightarrow C^2 = -1 \Longrightarrow C = \pm i\gamma^2\gamma_0. \\ \overline{\psi}_C = \psi^{\sim}C.\end{gathered} \tag{1.23}$$

para el primer caso: $C = C^{-1} = C^\dagger = -C^{\sim}$, es decir: Es unitaria, antisimétrica y hermitiana. Para el segundo: $C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^{\sim}$; unitaria, antisimétrica y antiunitaria. En ambos casos $det(C) = 1$ y $Tr(C) = 0$.

Usando la expresión (1.6) para el operador unitario de conjugación de carga $U(a, w) = \mathbf{C}$ tenemos:

$$\psi_C(x) = C\bar{\psi}^{\sim} = \mathbf{C}^\dagger\psi(x)\mathbf{C} \tag{1.24}$$

con lo cual la doble aplicación corresponde a:

$\mathbf{C}^\dagger(\mathbf{C}^\dagger\psi(x)\mathbf{C})\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\dagger^2}\psi(x)\mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^\dagger(C\overline{\psi}\ (x))\mathbf{C} = C\gamma_0(C\gamma_0\psi^*(x))^* = -CC^*\psi(x) = |\eta|^2\psi = \psi$ esto es:

$$\mathbf{C}^{\dagger^2}\psi(x)\mathbf{C}^2 = \psi(x). \tag{1.25}$$

1.4. Inversión Temporal.

A continuación se buscará la matriz $T \in GL_4(\mathbb{C})$, correspondiente a la transformación de inversión temporal $(t, \vec{x}) \to (-t, \vec{x})$. Partiendo nuevamente de la ecuación libre de Dirac (1.8), cambiando $t \to -t$ y tomando el complejo conjugado, se obtiene:

$$(-i(-\gamma_0^* \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^{k^*} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) - m)\psi^*(-t, \vec{x}) = 0.$$

Multiplicando T por la izquierda e introduciendo la unidad $T^{-1}T$ en los primeros dos términos de la ecuación anterior:

$$(i(T\gamma_0^* T^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - T\gamma^{k^*} T^{-1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}}) - m)T\psi^*(-t, \vec{x}) = 0,$$

con lo cual se establecen las condiciones siguientes comparando con (1.8);

$$T\gamma_0 T^{-1} = \gamma_0 \ , \ T\gamma^{k^*} T^{-1} = -\gamma^k,$$

y la definición del *espinor inversión temporal*:

$$\psi_\tau(x) = T\psi(x_\tau)^* \tag{1.26}$$

Usando la representación estándar de las matrices γ^μ, descritas anteriormente, supongamos a

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ donde } A, B, C, D \in \mathbb{C}(2),$$

de la condición

$$T\gamma_0 = \gamma_0 T \text{ implica que } B = C = 0, \text{ así } T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Ahora de

$$T\gamma^1 = -\gamma^1 T \text{ se tiene } D = -\sigma_1 A \sigma_1, \text{ luego } T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\sigma_1 A \sigma_1 \end{pmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ de } T\gamma^3 = -\gamma^3 T \text{ se sigue } a = d \text{ y } b = -c.$$

Finalmente la relación

$$T\gamma^2 = \gamma^2 T \text{ implica que } A = -\sigma_3 A \sigma_3 \text{ así } a = 0 = d$$

con lo cual:

$$A = b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = ib\sigma_2 \text{ y } -\sigma_1(ib\sigma_2)\sigma_1 = ib\sigma_2(ib\sigma_1)^2 = ib\sigma_2,$$

es decir $T = ib\begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = w\gamma^3\gamma^1$ con $w = ib \in \mathbb{C}^*$, es equivalente a:

$$T = w\gamma^3\gamma^1 = w\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde: $T \in D^{16}$, $det(T) = w^4$ y $Tr(T) = 0$.

Aplicando dos veces la transformación inversión temporal, partiendo de (1.26), obtenemos:

$$\psi_{\tau^2}(t,\vec{x}) = T(\psi_\tau(-t,\vec{x}))^* = T(T\psi^*(t,\vec{x}))^* = TT^*\psi(t,\vec{x}),$$

pero $TT^* = w\gamma^3\gamma^1 w^*\gamma^3\gamma^1 = -|w|^2(\gamma^3)^2(\gamma^1)^2 = -|w|^2 1$. Eligiendo, como en el caso de C, $w \in U(1)$ se tiene $TT^* = -1$, es decir:

$$T = e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1. \tag{1.27}$$

De la expresión (1.6) aplicada a $\Lambda(\tau) = T$ y $V(0,\tau) = \mathbf{T}$, antiunitaria, se tiene:

$$\psi_\tau(t,\vec{x}) = T\psi(-t,\vec{x})^* = \mathbf{T}^\dagger\psi(t,\vec{x})\mathbf{T} \tag{1.28}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\psi_{\tau^2}(t,\vec{x}) = \mathbf{T}^\dagger(\mathbf{T}^\dagger\psi(t,\vec{x})\mathbf{T})\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\dagger^2}\psi(t,\vec{x})\mathbf{T}^2 = \\ \mathbf{T}^\dagger(T\psi(-t,\vec{x})^*)\mathbf{T} = T(T\psi(t,\vec{x})^*)^* = TT^*\psi(t,\vec{x}) = -\psi(t,\vec{x}).\end{aligned} \tag{1.29}$$

Por último, el conjugado de Dirac del espinor inversión temporal corresponde a:

$$\bar{\psi}_\tau(x) = \psi_\tau^\dagger(x)\gamma_0 = (T\psi(x_\tau)^*)^\dagger\gamma_0 = \psi(x_\tau)^\sim\gamma_0 T^\dagger = \bar{\psi}(x_\tau)^* T^\dagger. \tag{1.30}$$

1.5. Consistencia entre las matrices C, P y T.

Ya que cada una de las matrices C, P y T; tienen dos posibles soluciones, se busca consistencia entre las tres. Así se obtienen sólo dos conjuntos de soluciones para éstas matrices en el caso del campo de Dirac de espín $\frac{1}{2}$.

1.5.1. Consistencia entre las matrices C y P.

La transformación de paridad del espinor conjugación de carga y las relaciones (1.14) y (1.17) implican lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\psi_C)_\Pi(x_\Pi) &= C\bar{\psi}_\Pi(x_\Pi)^\sim = C(\bar{\psi}(x)P^{-1})^\sim = C(P^{-1})^\sim\bar{\psi}(x)^\sim \\ &= C(P^{-1})^\sim C^{-1}C\bar{\psi}(x)^\sim = C(P^{-1})^\sim C^{-1}\psi_C(x).\end{aligned}$$

la cual debe coincidir con $P\psi_C(x)$, así que se debe satisfacer:

$$C(P^{-1})^\sim C^{-1} = P. \tag{1.31}$$

Considerando las dos posibilidades para P y C obtenemos:

$$C(P^{-1})^\sim C^{-1} = \gamma^2\gamma_0(P^{-1})\gamma^2\gamma_0 = \begin{cases}\gamma^2\gamma_0(\pm\gamma_0)\gamma^2\gamma_0 = \mp\gamma_0 = -P \\ \gamma^2\gamma_0(\mp i\gamma_0)\gamma^2\gamma_0 = \pm i\gamma_0 = P\end{cases}$$

$$C(P^{-1})^\sim C^{-1} = (\pm i\gamma^2\gamma_0)(P^{-1})^\sim(\pm i\gamma^2\gamma_0) = \begin{cases}(\pm i\gamma^2\gamma_0)(\pm\gamma_0)^\sim(\pm i\gamma^2\gamma_0) = \mp\gamma_0 = -P \\ (\pm i\gamma^2\gamma_0)(\mp i\gamma_0)(\pm i\gamma^2\gamma_0) = \pm i\gamma_0 = P\end{cases}$$

Así, $P = \pm i\gamma_0$ para ser para satisfacer (1.31). Lo que implica $P^2 = -1$ ($P^2 = 1$ queda excluida).

1.5.2. Consistencia entre las matrices C y T.

La transformación de Conjugación de Carga del espinor Inversión-Temporal, se sigue de las ecuaciones (1.17), (1.26) y (1.30),

$$(\psi_\tau)_C(x) = C\bar{\psi}_\tau(x)^\sim = C(\psi(x_\tau)^\sim\gamma_0 T^\dagger)^\sim = CT^*\gamma_0\psi(x_\tau) \quad (1.32)$$

por otra parte:

$$(\psi_C)_\tau(x) = T\psi_C(x_\tau)^* = T(C\bar{\psi}(x_\tau)^\sim)^* = TC^*(\overline{\psi}(x_\tau)^\sim)^* = TC^*(\psi^\dagger(x_\tau)\gamma_0)^\dagger = TC^*\gamma_0\psi(x_\tau), \quad (1.33)$$

comparando esta dos últimas se debe satisfacer:

$$CT^* = TC^*. \quad (1.34)$$

Considerando nuevamente las dos posibilidades para C, tenemos:
i) $C = \pm\gamma^2\gamma_0$, $C^* = -C$ luego $CT^* = -TC$ sí y sólo sí

$$(\gamma^2\gamma_0)(e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1)^* = e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma_0 - (e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1)(\gamma^2\gamma_0)$$

donde $-e^{i\lambda} = e^{-i\lambda}$, entonces $e^{2i\lambda} = -1$, esto pasa para $\lambda = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, por lo tanto:

$$e^{i\lambda} = (-1)^k i = \begin{cases} i & \text{si } k \text{ es par,} \\ -i & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

con lo cual: $T = \pm i\gamma^3\gamma^1 = T^\dagger = -T^* = -T^\sim$ y $T^2 = 1$.

ii) Para $C = \pm i\gamma^2\gamma_0$, se tiene $C^* = C$ y $CT^* = TC$, sustituyendo en términos de las matrices γ^μ, la igualdad anterior se escribe como:

$$\gamma^2\gamma_0 e^{-i\lambda}\gamma^3\gamma^1 = e^{i\lambda}\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma_0$$

entonces $e^{-i\lambda} = e^{i\lambda}$ que implica $e^{2i\lambda} = 1$, es decir $\lambda = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, así:

$$e^{i\lambda} = (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

con lo cual $T = \pm\gamma^3\gamma^1$ y satisface $T = \pm\gamma^3\gamma^1 = -T^\dagger = T^* = -T^{-1} = -T^\sim$, $T^2 = -1$.

1.5.3. Consistencia entre P y T.

La consistencia entre P y T no introduce una constricción adicional, pero manifiesta un orden al aplicar estas trasformaciones al espinor.

De (1.26) al evaluar en el punto $(t, -\vec{x})$ se tiene $\psi_\tau(t, -\vec{x}) = T\psi(-t, -\vec{x})^*$ y siguiendo (1.11) $\psi_\Pi(t, -\vec{x}) = P\psi(t, \vec{x})$, entonces:

$$\begin{aligned} &(\psi_\tau)_\Pi(t, -\vec{x}) = P\psi_\tau(t, \vec{x}) = PT\psi^*(-t, \vec{x}) \\ &(\psi_\Pi)_\tau(t, -\vec{x}) = T\psi_\Pi(-t, -\vec{x})^* = T(P\psi(-t, \vec{x}))^* = TP^*\psi^*(-1, \vec{x}) = -TP\psi^*(-t, \vec{x}), \end{aligned}$$

pero $PT = TP$, por lo tanto: $(\psi_\tau)_\Pi = -(\psi_\Pi)_\tau$.

La tabla siguiente resume los grupos encontrados en esta sección:

	C	P	T	$CPT=\theta$	C^2	P^2	T^2	θ^2
i)	$\pm\gamma^2\gamma_0$	$\pm i\gamma_0$	$\pm i\gamma^3\gamma^1$	$\pm i\gamma_0\gamma_5$	1	-1	1	1
ii)	$\pm i\gamma^2\gamma_0$	$\pm i\gamma_0$	$\pm\gamma^3\gamma^1$	$\pm i\gamma_0\gamma_5$	-1	-1	-1	1

Las ecuaciones obtenidas serán verificadas en la sección (1.7) a nivel de operadores cuánticos en la teoría cuántica de campos.

Donde la matriz $\theta = CPT$ es igual en los dos conjuntos ya que:

$$\begin{aligned}\theta &= (\pm\gamma^2\gamma_0)(\pm i\gamma_0)(\pm i\gamma^3\gamma^1) = (\pm i\gamma^2\gamma_0)(\pm i\gamma_0)(\pm\gamma^3\gamma^1)\\ &= \pm\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \pm i\gamma_0(i\gamma_0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \pm i\gamma_0\gamma^5\end{aligned}$$

donde $\gamma^5 = i\gamma_0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\theta = \pm i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \pm i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

y $\theta^2 = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta^\dagger = \theta = \theta^{-1} = -\theta^\sim = -\theta^*$, $det(\theta) = \pm 1$ y $tr(\theta) = 0$.

1.6. Grupo de Matrices.

Sin pérdida de generalidad podemos tomar sólo el signo positivo en las soluciones de la tabla anterior. Con las cuales se construye las tablas de multiplicar de los dos grupos de 16 elementos no isomorfos $G_\theta^{(1)}$ y $G_\theta^{(2)}$.

$G_\theta^{(1)}$	C	P	T	CP	CT	PT	θ
C	1	CP	CT	P	T	θ	PT
P	$-CP$	-1	PT	C	$-\theta$	$-T$	CT
T	CT	PT	1	θ	C	P	CP
CP	$-P$	$-C$	θ	1	$-PT$	$-CT$	T
CT	T	θ	C	PT	1	CP	P
PT	$-\theta$	$-T$	P	CT	$-CP$	-1	C
θ	$-PT$	$-CT$	CP	T	$-P$	$-C$	-1

Cuadro 1.1: Tabla de Multiplicar del grupo $G_\theta^{(1)}$.

y

El resto de las tablas de 16×16 se obtiene incluyendo los términos $-C, -P, -T, -CP, -CT, -PT, -\theta$.

Se tienen los siguientes isomorfismos, con grupos abstractos:

$$\begin{aligned} G_\theta^{(1)} &\cong DH_8 \times \mathbb{Z}_2 \\ G_\theta^{(2)} &\cong 16E \end{aligned}$$

(Socolovsky, 2004) donde $DH_8 = \langle\{r, b\}\rangle$ = grupo diédrico, simetrías del cuadrado ($r = 90°$ y b: reflexión diagonal) y $16E$ es una extensión de DH_8 por $\mathbb{Z}_2$.

$G_\theta^{(2)}$	C	P	T	CP	CT	PT	θ
C	-1	CP	CT	$-P$	$-T$	θ	$-PT$
P	$-CP$	-1	PT	C	$-\theta$	$-T$	CT
T	CT	PT	-1	θ	$-C$	$-P$	$-CP$
CP	P	$-C$	$-\theta$	-1	PT	$-CT$	$-T$
CT	$-T$	$-\theta$	$-C$	$-PT$	1	$-CP$	P
PT	$-\theta$	$-T$	$-P$	CT	CP	1	$-C$
θ	PT	$-CT$	$-CP$	$-T$	$-P$	C	1

Cuadro 1.2: Tabla de Multiplicar del grupo $G_\theta^{(2)}$.

1.7. Grupo de Operadores.

Podemos notar que en principio, no hay razón física o matemática para preferir un grupo del otro al definir el grupo de matrices CPT del campo de Dirac.

En cambio los operadores cuánticos $\mathbf{C}, \mathbf{P}$ y $\mathbf{T}$ que actúan en el espacio de Hilbert de la teoría de campos, y transforman el operador de campos $\psi(t, \vec{x})$ según las ecuaciones (1.11), (1.24) y (1.28) respectivamente; son generadores de un único grupo G_Θ llamado: El grupo **CPT** del campo de Dirac, de 16 elementos, no abeliano e isomorfo a $Q \times \mathbb{Z}_2$.

Sea $\psi = \psi(t, \vec{x})$ el operador de campo de Dirac, A, B cualquier $\mathbf{C}, \mathbf{P}, \mathbf{T}$. Se define

$$A \cdot \psi = A^\dagger \psi A,$$

y

$$(A * B) \cdot \psi = (AB)^\dagger \psi (AB)$$

Ya que usualmente AB es asociativa (composición de operadores), el producto $(*)$ lo es también, dado que para cualquier ψ se sigue:

$(A * B) \cdot \psi = B^\dagger(A^\dagger \psi A)B = B \cdot (A \cdot \psi)$, entonces $((A * B) * C) \cdot \psi = ((A * B)C)^\dagger \psi ((A * B)C) = C^\dagger((A * B)^\dagger \psi (A * B))C = C \cdot (A * B) \cdot \psi = C \cdot (B^\dagger(A^\dagger \psi A)B) = C \cdot (B \cdot (A \cdot \psi))$ es igual a

$(A * (B * C)) \cdot \psi = (A(B * C))^\dagger \psi (A(B * C)) = (B * C)^\dagger (A^\dagger \psi A)(B * C) = (B * C) \cdot (A \cdot \psi) = (BC)^\dagger (A \cdot \psi) BC = C^\dagger B^\dagger (A \cdot \psi) BC = C \cdot (B \cdot (A \cdot \psi))$, así

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

De (1.13), (1.25) y (1.29) se sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^\dagger)^\mathbf{2} \psi \mathbf{P}^\mathbf{2} &= -\psi,\\ (\mathbf{C}^\dagger)^\mathbf{2} \psi \mathbf{C}^\mathbf{2} &= \psi,\\ (\mathbf{T}^\dagger)^\mathbf{2} \psi \mathbf{T}^\mathbf{2} &= -\psi,\end{aligned}$$

es decir: $\mathbf{P} * \mathbf{P} = -\mathbf{1}$, $\mathbf{C} * \mathbf{C} = \mathbf{1}$, $\mathbf{T} * \mathbf{T} = -\mathbf{1}$.

Sea $\psi_i(t, \vec{x})$ la i-ésima componente de la función de onda de Dirac $\psi(t, \vec{x})$, con $i = 1, 2, 3, 4$. Siguiendo (1.11), (1.17) y (1.26) tenemos:

i)

$$\begin{aligned}
\psi_{iC\Pi}(t,\vec{x}) &= (\psi_{iC})_{\Pi}(t,\vec{x}) = P_{ij}\psi_{jC}(t,-\vec{x}) = P_{ij}(C\gamma_0)_{jk}\psi_k(t,-\vec{x})^* = (PC\gamma_0)_{ik}\psi_k(t,-\vec{x})^*;\\
\psi_{i\Pi C}(t,\vec{x}) &= (\psi_{i\Pi})_C(t,\vec{x}) = (C\gamma_0)_{ij}\psi_{j\Pi}(t,\vec{x})^* = (C\gamma_0)_{ij}P^*_{jk}\psi_k(t,-\vec{x})^* = -(C\gamma_0)_{ij}P_{jk}\psi_k(t,-\vec{x})^*\\
&= (C\gamma_0 P)_{ik}\psi_k(t,-\vec{x})^* = -(CP\gamma_0)_{ik}\psi_k(t,-\vec{x})^* = (PC\gamma_0)_{ik}\psi_k(t,-\vec{x})^*,
\end{aligned}$$

$$\psi_{i\Pi C} = \psi_{iC\Pi}.$$

Para los correspondientes operadores de campo se da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi_{iC\Pi}(t,\vec{x}) &= \mathbf{P}^\dagger\psi_{iC}(t,\vec{x})\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger\mathbf{C}^\dagger\psi_i(t,\vec{x})\mathbf{CP} = (\mathbf{CP})^\dagger\psi_i(t,\vec{x})\mathbf{CP} = (\mathbf{C}*\mathbf{P})\cdot\psi_i(t,\vec{x})\\
\psi_{i\Pi C}(t,\vec{x}) &= \mathbf{C}^\dagger\psi_{i\Pi}(t,\vec{x})\mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger\mathbf{P}^\dagger\psi_i(t,\vec{x})\mathbf{PC} = (\mathbf{PC})^\dagger\psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{t},\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{PC} = (\mathbf{P}*\mathbf{C})\cdot\psi_{\mathbf{i}}(\mathbf{t},\tilde{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

así:

$$\mathbf{C}*\mathbf{P} = \mathbf{P}*\mathbf{C} \tag{1.35}$$

dado que $\psi_i(t,\vec{x})$ es arbitraria.

ii)

$$\begin{aligned}
\psi_{iC\tau}(t,\vec{x}) &= (\psi_{iC})_\tau(t,\vec{x}) = T_{ij}\psi_{jC}(-t,\vec{x})^* = T_{ij}(C\gamma_0)^*_{jk}\psi_k(-t,\vec{x}) = (TC^*\gamma_0)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x}) =\\
&\mp (TC\gamma_0)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x});\\
\psi_{i\tau C}(t,\vec{x}) &= (\psi_{i\tau})_C(t,\vec{x}) = (C\gamma_0)_{ij}\psi_{j\tau}(t,\vec{x})^* = (C\gamma_0)_{ij}(T^*_{jk}\psi_k(-t,\vec{x})) = (C\gamma_0 T^*)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x}) =\\
&\mp (C\gamma_0 T)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x}) = \mp(CT\gamma_0)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x}) = \mp(TC\gamma_0)_{ik}\psi_k(-t,\vec{x}),
\end{aligned}$$

donde los signos $+$ y $-$ corresponden a las dos posibilidades de C y T.

Para los operadores de campo cuántico se tiene:

$$\begin{aligned}
\psi_{C\tau}(t,\vec{x}) &= \mathbf{T}^\dagger\psi_C^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{T} = \mathbf{T}^\dagger(\mathbf{C}^\dagger\psi(t,\vec{x})\mathbf{C})^\dagger\mathbf{T} = (\mathbf{CT})^\dagger\psi^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{CT} = (\mathbf{C}*\mathbf{T})\cdot\psi(t,\vec{x})\\
\psi_{\tau C}(t,\vec{x}) &= \mathbf{C}^\dagger\psi_\tau(t,\vec{x})\mathbf{C} = \mathbf{C}^\dagger(\mathbf{T}^\dagger\psi^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{T})\mathbf{C} = \mathbf{TC}^\dagger\psi^\dagger(t,\vec{x})\mathbf{TC} = (\mathbf{T}*\mathbf{C})\cdot\psi(t,\vec{x}).
\end{aligned}$$

es decir:

$$\mathbf{C}*\mathbf{T} = \mathbf{T}*\mathbf{C}$$

pero también $TC = C^*T$. Al tomar su conjugada compleja obtenemos: $T^*C^* = CT^*$, y comparando con (1.34) se debe dar:

$$T^* = T \tag{1.36}$$

que según la sección (1.5) es el grupo $G_\theta^{(2)}$ el que satisface la condición (1.36).

Con las relaciones anteriores se construye la siguiente tabla:

	C	**P**	**T**
C	1	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$
P	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	-1	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$
T	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{P}*\mathbf{T}$	-1

Usando la propiedad de asociatividad, se define el grupo **CPT** del campo de Dirac G_Θ que tiene la tabla de multiplicar:

G_Θ	$\mathbf{C}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$	Θ
$\mathbf{C}$	1	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{T}$	Θ	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$
$\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	-1	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{C}$	Θ	$-\mathbf{T}$	$-\mathbf{C}*\mathbf{T}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{P}*\mathbf{T}$	-1	$-\Theta$	$-\mathbf{C}$	$\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$
$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{P}$	$-\mathbf{C}$	Θ	-1	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{T}$
$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$-\Theta$	$-\mathbf{C}$	$-\mathbf{P}*\mathbf{T}$	-1	$\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{P}$
$\mathbf{P}*\mathbf{T}$	Θ	$\mathbf{T}$	$-\mathbf{P}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{C}*\mathbf{P}$	-1	$-\mathbf{C}$
Θ	$\mathbf{P}*\mathbf{T}$	$\mathbf{C}*\mathbf{T}$	$-\mathbf{C}*\mathbf{P}$	$\mathbf{T}$	$-\mathbf{P}$	$-\mathbf{C}$	-1

Como en las tablas (1.1) y (1.2), ésta es completada añadiendo a la primer columna y reglón los negativos $-1, -\mathbf{C}, -\mathbf{P}, -\mathbf{T}, \ldots, -\boldsymbol{\Theta}$ y haciendo los correspondientes productos.

Entonces $G_{\boldsymbol{\Theta}}$ es un grupo de 16 elementos no abelianos, isomorfismos a $G_\Theta \cong Q \times \mathbb{Z}_2$, dado por:

$$
\begin{aligned}
1 &\to (1,1)\\
\mathbf{C} &\to (1,-1),\\
\mathbf{P} &\to (\iota,1),\\
\mathbf{T} &\to (\gamma,1),\\
\mathbf{C}*\mathbf{P} &\to (\iota,-1)\\
\mathbf{C}*\mathbf{T} &\to (\gamma,-1)\\
\mathbf{P}*\mathbf{T} &\to (-\kappa,1)\\
\boldsymbol{\Theta} &\to (\kappa,-1)
\end{aligned}
$$

Por consistencia, el grupo $G_\theta^{(1)}$ queda eliminado, ya que la condición, $\mathbf{C}*\mathbf{T} = \mathbf{T}*\mathbf{C}$ implica que: $T^* = T$ y $G_\theta^{(1)}$ satisface $T = -T^*$.

1.8. Descripción en Teoría de Haces.

Se dará una descripción geométrica en términos de haces fibrados principales de las transformaciones C, T, P y CPT, en el límite relativista. Este haz es

$$\Xi_r : \mathbb{Z}_4 \to Pin_{D^{16}} \to O(\mathbb{C}^4, \eta_c).$$

Para ello, brevemente daremos la definición de álgebra de Clifford y algunos grupos relevantes en la física.

Sea V un espacio vectorial sobre un campo k de dimensión finita n, dotado de una forma cuadrática q, la cual es una función de V a k tal que:

$$q(\alpha v) = \alpha^2 q(v), \alpha \in k \text{ y } v \in V;$$

la forma cuadrática induce una forma bilineal $B_q : V \times V \to k$ definida por:

$$2B_q(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w). \tag{1.37}$$

asociándole también una matriz simétrica M_q tal que:

$$q(v) = v^\dagger M_q v = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} v_i v_j \tag{1.38}$$

donde $\alpha_{ij} \in k$.

y la forma bilineal será:

$$B(v, w) = v^\dagger M_q w.$$

Nota 1 *Para el caso específico* $V = \mathbb{C}^4$ *y* $M_q = \eta^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ *o* $M_{q'} = \eta'^{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$, $q(v)$ *induce una métrica real ya que:* $2B(v, v) = v^\dagger M_q v = |v^0|^2 - (|v^1|^2 + |v^1|^2 + |v^3|^2) = (x^\mu - iy^\mu)\eta^{\mu\nu}(x^\nu + iy^\nu) = \eta^{\mu\nu} x^\mu x^\nu + \eta^{\mu\nu} y^\mu y^\nu + i\eta^{\mu\nu} x^\mu y^\nu - \eta^{\mu\nu} y^\mu x^\nu = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

Dado el espacio vectorial V sobre el campo k y la forma cuadrática en V, el álgebra de Clifford $Cl(V, q)$ es el álgebra asociativa con unidad. Se construye de la forma siguiente:

Sea:

$$T(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r V = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots$$

el álgebra tensorial de V. Definiendo el ideal K_q en $T(V)$ generado por todos los elementos de la forma:

$$v \otimes v - q(v)1, \text{ para } v \in V.$$

Así el **álgebra de Clifford** esta definida como el álgebra cociente [Jacobson, página 229]:

$$Cl(V, q) \equiv \frac{T(V)}{K_q}$$

Se tiene la asignación $\iota : V \to Cl(V, q)$ dada por $v \to v + K_q$.

Ya que V genera a $T(V)$, $\iota(v)$ genera el álgebra de Clifford y $V \subset Cl(V, q)$.

Teorema 1 *Sea* q *una forma cuadrática en un espacio vectorial* V *de dimensión* n*, sobre un campo* k *de característica distinta de 2. Entonces: (a)* $dim Cl(V, q) = 2^n$ *y si* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *es base de* V*, entonces los elementos* $\bar{1}, \overline{v}_{i_1}, \overline{v}_{i_2}, \cdots, \overline{v}_{i_r}, i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, $1 \leqq r \leqq n$ *donde* $\overline{v}_i = \iota(v_i)$*, forman una base para* $Cl(V, q)$ *sobre* k*; (b) La función canónica* $\iota : V \to Cl(V, q)$ *es inyectiva.*

Demostración: [Cervantes03, páginas 18-22].

Ahora consideremos **el grupo de unidades multiplicativo** en el álgebra de Clifford que es definido como el subconjunto:

$$Cl^\times(V, q) = \{v \in Cl(V, q) : \text{ existe } v^{-1} \text{ con } v^{-1}v = vv^{-1} = 1.\}$$

Además es un grupo de Lie con álgebra de Lie asociada $cl^\times(V, q)$ y conmutador $[v, w] = vw - wv$.

Existe un homomorfismo:

$$Ad : Cl^\times(V, q) \to Aut(Cl(V, q))$$

llamada la representación adjunta, que es dada por:

$$Ad_v(w) = vwv^{-1}.$$

Proposición 1 *Sea $v \in V \subset Cl(V,q)$ un elemento tal que $q(v) \neq 0$. Entonces $Ad_v(V) = V$. Y para todo $w \in V$, se tiene la siguiente ecuación:*

$$-Ad_v(w) = w - \frac{B_q(v,w)}{q(v)}v \tag{1.39}$$

Demostración: [Lawson, página 13]

La transformación Ad_v preserva la forma cuadrática, es decir $q(Ad_v(w)) = q(w)$, ya que:

$$\begin{aligned} q(-Ad_v(w)) = q(w - \frac{2B_q(v,w)}{q(v)}v) &= (w - \frac{2B_q(v,w)}{q(v)}v)(w - \frac{2B_q(v,w)}{q(v)}v) \\ =& q(w) - 2\frac{B_q(v,w)}{q(v)}(w \cdot v + v \cdot w) + 4(\frac{B_q(v,w)}{q(v)})^2 q(v)1 \\ =& q(w) - 2\frac{B_q(v,w)}{q(v)}(2B_q(v,w)) + 4\frac{B_q(v,w)^2}{q(v)} = q(v). \end{aligned}$$

donde se ha usado (1.37) y (1.38).

Por lo tanto define el subgrupo $P(V,q)$ de $Cl^{\times}(V,q)$ generado por los elementos de $v \in V$, tal que $q(v) \neq 0$, cuya inversa es $v^{-1} = \frac{-v}{q(v)}$, y se tiene la representación:

$$P(V,q) \stackrel{Ad}{\to} O(V,q)$$

donde $O(V,q) = \{\lambda \in GL(V) : \lambda^{\dagger} M_q \lambda = M_q\}$ es el grupo ortogonal, es decir es aquel que preserva la forma cuadrática.

Definición 1 *El grupo **Pin** de (V,q) es el subgrupo **Pin(V,q)** de $P(V,q)$ generado por los elementos $v \in V$ con $q(v) = \pm 1$.*

De (1.39) se puede observar que Ad_v hace una reflexión $v \to -v$ a través del hiperplano $v^{\perp} = \{w \in V : B_q(v,w) = 0\}$, ya que $Ad_v(v) = v - \frac{2B(v,v)}{q(v)}v = v - 2v = -v$.

Pero si la $dimV$ es impar, Ad_v preserva siempre la misma orientación. Para ello se considera la **representación adjunta torcida** [Lawson, página 14]:

$$\tilde{A}d : Cl^{\times}(V,q) \to GL(V,q)$$

definida por:

$$\tilde{A}d_v(w) = \alpha(v)wv^{-1}, \tag{1.40}$$

donde el automorfismo $\alpha : Cl(V,q) \to Cl(V,q)$ es tal que:

$$\alpha(v) = -v \text{ para } v \in V. \tag{1.41}$$

Y satisface como la representación adjunta:

$$\tilde{A}d_v(w) = w - 2\frac{B(v,w)}{q(v)}v.$$

Con la cual define el subgrupo $\tilde{P}(V,q) = \{v \in Cl^{\times}(V,q) : \tilde{A}d_v(V) = V\}$.

Esta también preserva la forma cuadrática y se tiene la representación respectiva:

$$\tilde{A}d : \tilde{P}(V,q) \to O(V,q)$$

Teorema 2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo espinorial k (característica(k) $\neq 2$), y $q : V \to k$ una forma cuadrática en V no degenerada. Entonces existen sucesiones exactas cortas:*

$$1 \to F \to Spin(V,q) \stackrel{\tilde{A}d}{\to} SO(V,q) \to 1$$

$$1 \to F \to Pin(V,q) \stackrel{\tilde{A}d}{\to} O(V,q) \to 1$$

donde:

$$F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si } i \notin k, \\ \mathbb{Z}_4 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración: [Lawson, página 19]

Para el caso particular del espacio de Minkowski en el cual $V = \mathbb{R}^4$ y $M_q \equiv \eta_{\mu\nu}$ o $M_{q'} \equiv \eta'_{\mu\nu}$, es decir la forma cuadrática es tal que $q(v) = v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2$ o $q'(v) = -v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, las álgebras de Clifford correspondientes son:

$$Cl(\mathbb{R}^4, q) = D^{16}_{+-} \cong \mathbb{H}(2), \text{ o } Cl(\mathbb{R}^4, q') = D^{16}_{-+} \simeq \mathbb{R}^(4);$$

las cuales no son isomorfas, pero los fenómenos físicos no dependen de la elección de alguna de las dos. Esto muestra la necesidad de la complexificación de las álgebras anteriores, que coinciden en el álgebra física compleja de Dirac:

$$D^{16} \simeq \mathbb{C}(4).$$

[Cervantes03, página 81] Como es bien conocido, una base para el álgebra de Dirac son las matrices γ_μ que satisfacen:

$$2B(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu M_q \gamma_\nu = -2\eta_{\mu\nu}1.$$

Para la complexificación basta obtener el producto tensorial de éstas con $\mathbb{C}$, es decir:

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{C}(4) \text{ y } \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^(4) \cong \mathbb{C}(4)$$

Otro resultado importante que se usará es:

$$Cl(V,q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl(\mathbb{C}^{r+s}, q \otimes \mathbb{C})$$

[Lawson, página 27]
donde la forma cuadrática $q \otimes \mathbb{C} \equiv q_{\mathbb{C}}(v) = v^t M_{q_{\mathbb{C}}} v$, $r + s = n$ la dimensión del espacio vectorial V, r es el número de signos positivos en la forma cuadrática y s el número de negativos, así:

$$q_{\mathbb{C}}(v) = v_1^2 + \ldots + v_r^2 - v_{r+1}^2 - \ldots - v_n^2.$$

Nota 2 *Si* $V = \mathbb{C}^4$ *y* $M_{q_{\mathbb{C}}} = \eta^{\mu\nu}$ *o* $M_{q_{\mathbb{C}}} = \eta'^{\mu\nu}$, $q_{\mathbb{C}}(v) = 2B_{\mathbb{C}}(v,v) = v^t M_{q_{\mathbb{C}}} v = (v^0)^2 - ((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2) = (x^\mu + iy^\mu)\eta^{\mu\nu}(x^\nu + iy^\nu) = \eta^{\mu\nu}x^\mu x^\nu - \eta^{\mu\nu}y^\mu y^\nu + i\eta^{\mu\nu}x^\mu y^\nu + i\eta^{\mu\nu}y^\mu x^\nu = x^2 - y^2 + 2ixy \in \mathbb{C}$, *es decir es una métrica compleja.*

Las representaciones matriciales de las transformaciones C, P, T y CPT encontradas en las secciones anteriores son claramente elementos de D^{16} y por lo tanto, los grupos que generan, es decir: $G_\theta^\sigma \subset D^{16}$, donde $\sigma = 1, 2$.
Pero también $G_\theta^\sigma \subset Cl^\times(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}}) \equiv D^{16*}$ en el grupo de unidades, ya que tenemos las inversas de sus elementos.

Las representaciones Ad y $\tilde{Ad}$ para este caso son:

$$Ad : D^{16*} \to O(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}}) \subset GL(\mathbb{C}^4)$$
$$-Ad_v(w) = w - 2\frac{v^t M_q v}{v^2} v$$

para:

$$v = z1 + z^\mu\gamma_\mu + z^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu + z^{\mu\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho + z^{0123}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,$$

con inversa y $w \in \mathbb{C}^4$.

Donde tenemos un homomorfismo de $\mathbb{C}^4 \to D^{16}$ debido a la inclusión de $M^4 \to D^{16}$ dada por $w^\mu \to w^\mu\gamma_\mu \in D^{16}$. Y

$$\tilde{Ad}_v(w) = -Ad_v(w)$$

Finalmente se puede definir el grupo $Pin_{D^{16}} = \{v \in D^{16} : q(v) = v \cdot v = \pm 1\}$, ya que como podemos ver en las tablas de la sección (1.6) los cuadrados de las matrices C, P, T y CPT son 1 o -1.

Por lo tanto se tiene la secuencia de homomorfismos:

$$G_\theta^{(2)} \to Pin_{D^{16}} \to P(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}}) \to D^{16*} \to D^{16}.$$

Usando el teorema (2) tenemos la sucesión exacta corta [MacLane y Birkoff,]:

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \to Pin_{D^{16}} \xrightarrow{\tilde{Ad}} O(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}}),$$

la cual induce un haz fibrado principal, con espacio total el grupo $Pin_{D^{16}}$, como espacio base $O(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}})$ y fibra y grupo de estructura el grupo $\mathbb{Z}_4$(Ver apéndice.)

Donde el grupo ortogonal es:

$$O(\mathbb{C}^4, q_{\mathbb{C}}) = \{A \in GL_{\mathbb{C}}(4) : A^t M_q A = M_q = diag(1,-1,-1,-1) \text{ o } M_{q'} = diag(-1,1,1,1)\}$$

Se calcula a continuación la acción de la función $\tilde{Ad}$ sobre las matrices C, P, T y $CPT \in D^{16}$ que generan al grupo consistente con la teoría de operadores cuánticos, es decir con el grupo $G_\theta^{(2)}$ en el cual $C = \pm i\gamma^2\gamma_0$, $P = \pm i\gamma_0$, $T = \pm\gamma^3\gamma^1$, cuyas inversas son $P^{-1} = P$, $T^{-1} = T$ y $C^{-1} = C$ encontradas en las secciones (1.1),(1.2),(1.3).

Pero primero siguiendo el automorfismo α descrito en (1.41) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\alpha(P) = \alpha(i\gamma_0) = -i\gamma_0 = -P,\\
&\alpha(T) = \alpha(\gamma^3\gamma^3) = \alpha(\gamma^3)\alpha(\gamma^1) = -(\gamma^3)(-\gamma^1) = \gamma^3\gamma^1 = T,\\
&\alpha(C) = \alpha(i\gamma^2\gamma_0) = i\alpha(\gamma^2)\alpha(\gamma_0) = i(-\gamma^2)(-\gamma_0) = i\gamma^2\gamma_0 = C
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{gathered}
\tilde{A}d(C)(w^\mu\gamma_\mu) = \tilde{A}d_C(w^\mu\gamma_\mu) = \alpha(C)w^\mu\gamma_\mu C^{-1} = -Cw^\mu\gamma_\mu C = -i\gamma^2\gamma_0(w^\mu\gamma_\mu)i\gamma^2\gamma_0 = \\
\gamma^2\gamma_0(w^\mu\gamma^\mu)\gamma^2\gamma_0 = w^0\gamma^2\gamma_0\gamma_0\gamma^2\gamma_0 + w^i\gamma^2\gamma_0\gamma_i\gamma^2\gamma_0 = \\
-w^0\gamma_0 + w^1\gamma^1 - w^2\gamma^2 + w^3\gamma^3 = \sum_{\mu=0}^{3}(-1)^{\mu+1}w^\mu\gamma_\mu,
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}d(P)(w^\mu\gamma_\mu) = \tilde{A}d_P(w^\mu\gamma_\mu) &= \alpha(P)w^\mu\gamma_\mu P^{-1} = -P(w^\mu\gamma^\mu)(-P) = Pw^\mu\gamma_\mu P = i\gamma_0(w^\mu\gamma_\mu)i\gamma_0 = \\
&-w^0\gamma_0 + w^i\gamma_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{A}d(T)(w^\mu\gamma_\mu) = \tilde{A}d_T(w^\mu\gamma_\mu) = \alpha(T)w^\mu\gamma_\mu T^{-1} = -Tw^\mu\gamma_\mu T = -\gamma^3\gamma^1(w^\mu\gamma_\mu)\gamma^3\gamma^1 = \\
w^0\gamma_0 - w^1\gamma^1 + w^2\gamma^2 - w^3\gamma^3 = \sum_{\mu=0}^{3}(-1)^{\mu}w^\mu\gamma_\mu.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{A}d(CPT)(w^\mu\gamma_\mu) = \tilde{A}d(C)\circ\tilde{A}d(P)\circ\tilde{A}d(T)(w^\mu\gamma_\mu) = \tilde{A}d(C)\circ\tilde{A}d(P)(w^0\gamma_0 - w^1\gamma^1 + w^2\gamma^2 - w^3\gamma^3) = \\
\tilde{A}d(C)(-w^0\gamma_0 - w^1\gamma^1 + w^2\gamma^2 - w^3\gamma^3) = w^0\gamma_0 - w^1\gamma^1 - w^2\gamma^2 - w^3\gamma^3.
\end{gathered}$$

Capítulo 2

Límite no Relativista de las Simetrías C, P y T del Campo de Dirac.

2.1. Sistemas de Espín 1/2 y Rotaciones.

Es bien conocido que $\mathbb{C}^2 = \{\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ con el producto escalar $(\vec{z}, \vec{w}) = (\bar{z_1}, \bar{z_2}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$, es un espacio de Hilbert, al estar normalizados sus elementos pertenecen a la 3-esfera $S^3 = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^2 | (\vec{z}, \vec{z}) \equiv \|\vec{z}\|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$.

En mecánica cuántica no relativista, las funciones de onda de partículas de espín $\frac{1}{2}$, ψ, con su espín en la dirección, $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3) = (sen\theta cos\varphi, sen\theta sen\varphi, cos\theta)$ de $\mathbb{R}^3$, donde los ángulos que $\hat{n}$ forma con los ejes x, y y z son respectivamente a, b, c donde:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \hat{x} &= cosa = sen\theta cos\varphi \equiv n_x, \\ \hat{n} \cdot \hat{y} &= cosb = sen\theta sen\varphi \equiv n_y, \\ \hat{n} \cdot \hat{z} &= cosc = cos\theta \equiv n_z, \end{aligned}$$

es decir $\hat{n} = cosa\hat{x} + cosb\hat{y} + cosc\hat{z}$, satisfaciendo $cos^2 a + cos^2 b + cos^2 c = |\hat{n}|^2 = 1$.

Entonces la función ψ, puede escribirse como:

$$\psi = cos(\frac{\theta}{2})\psi_+ + e^{i\varphi} sen(\frac{\theta}{2})\psi_- \equiv \psi_{\hat{n},+} = cos(\frac{c}{2})\psi_+ + (\frac{cosa + icosb}{2cos\frac{c}{2}})\psi_- \in \mathbb{C}^2.$$

con:

$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, las cuales son autofuciones de la matriz de Pauli $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y autovalores $+1$, -1 respectivamente.

En particular:

$$\begin{aligned}
\psi_{\hat{x},+} &= \psi(\frac{\pi}{2},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-)\\
\psi_{\hat{x},-} &= \psi(\frac{\pi}{2},\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ - \psi_-)\\
\psi_{\hat{y},+} &= \psi(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + i\psi_-)\\
\psi_{\hat{y},-} &= \psi(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ - i\psi_-)\\
\psi_{\hat{z},+} &= \psi(0,\frac{\pi}{2}) = \psi_+\\
\psi_{\hat{z},-} &= \psi(0,\frac{3\pi}{2}) = \psi_-
\end{aligned}$$

y $\psi_{\hat{n},-} = \psi_{-\hat{n},+} = \psi(\pi-\theta,\varphi+\pi) = sen(\frac{\theta}{2})\psi_+ - e^{i\varphi}cos(\frac{\theta}{2})\psi_-$.

Existe una correspondencia canónica entre puntos de S^3 y elementos de $SU(2) = \{ \begin{matrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{matrix} ; |z|^2 + |w|^2\}$, $f : S^3 \to SU(2)$ dada por:

$$f \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = \begin{matrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{matrix}$$

aplicado a $\psi_{\hat{n},+}$:

$$f(\psi_{\hat{n},+}) = \begin{matrix} cos\frac{\theta}{2} & -e^{i\varphi}sen\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}sen\frac{\theta}{2} & cos\frac{\theta}{2} \end{matrix} \equiv U$$

U es una matriz que en $\mathbb{C}^2$ hace la rotación $\psi_+ \to \psi_{\hat{n},+}$.

Para una rotación arbitraria de un ángulo ϕ alrededor de $\hat{n}$, llamada $\phi\hat{n}$ transforma vectores en $\mathbb{C}^2$ mediante:

$$\begin{aligned}
M_{\phi\hat{n}} &= exp(-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\frac{\phi}{2}) = [1 - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2}{2!}(\frac{\phi}{2})^2 + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^4}{4!}(\frac{\phi}{2})^4 + \cdots] \qquad (2.1)\\
-i[(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\frac{\phi}{2} - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^3}{3!}(\frac{\phi}{2})^3 + \cdots] &= \mathbb{I}cos\frac{\phi}{2} - i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}sen(\frac{\phi}{2}) = \begin{matrix} cos\frac{\phi}{2} - in_z sen\frac{\phi}{2} & (-in_x - n_y)sen\frac{\phi}{2} \\ (-in_x + n_y)sen\frac{\phi}{2} & cos\frac{\phi}{2} + in_z sen\frac{\phi}{2} \end{matrix}\\
&= \begin{matrix} cos\frac{\phi}{2} - isen\frac{\phi}{2}cosc & -(cosb + icosa)sen\frac{\phi}{2} \\ (cosb - icosa)sen\frac{\phi}{2} & cos\frac{\phi}{2} + isen\frac{\phi}{2}cosc \end{matrix}
\end{aligned}$$

donde se ha usado la representación matricial del operador de rotaciones:

$$\mathcal{D}(\hat{n},\phi) = exp(\frac{-iS\cdot\hat{n}}{\hbar}) = exp(\frac{-i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{\hbar}).$$

Para el caso $\phi = 2\pi$, $M_{2\pi\hat{n}} = -\mathbb{I}$, mostrando el cambio de signo de la función de onda de espín $\frac{1}{2}$, después de una rotación de 2π [Sakurai, página 165], [Azcárraga, páginas 6-7]. Es necesario una rotación de 4π para recuperar la función original.

Resumiendo lo anterior en un diagrama, tenemos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \supset S^3 \arrow[r, "f"] & SU(2) \arrow[d, "\pi"] \\
& SO(3) \arrow[ul, "\pi\circ f"]
\end{tikzcd}$$

π la función proyección $(\pi(A)(\vec{x}))_k = \frac{1}{2}Tr(\sigma_k A(\vec{\sigma}\cdot\vec{x})A^\dagger)$, con $A \in SU(2)$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

El diagrama anterior muestra la relación entre las rotaciones propias en $\mathbb{R}^3 \subset SO(3)$ y en $\mathbb{C}^2$, es decir sobre los espinores no relativistas de espín $\frac{1}{2}$.
Teniendo una descripción geométrica de éstas, contenidas en el haz fibrado principal:

$$\xi_s : \mathbb{Z}_2 \to SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3) \tag{2.2}$$

donde $SU(2)$ es el espacio total, $SO(3)$ y $\mathbb{Z}_2$ es la fibra y el grupo de estructura. (Ver apéndice.)
El efecto de rotaciones en el espacio de rayos $\mathbb{C}P^1$ queda determinada por el haz:

$$\varsigma : U(1) \to SU(2) \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^1$$

donde la función proyección de el último haz p, actúa:

$$p\left(\begin{matrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{matrix} \right) = \begin{matrix} z \\ w \end{matrix} \; U(1),$$

Considerando los dos haces anteriores se tiene el sistema de haces:

$$\begin{tikzcd}
U(1) \arrow[dr] & & \mathbb{Z}_2 \arrow[dl] \\
& SU(2) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\
\mathbb{C}P^1 & & SO(3)
\end{tikzcd}$$

Existen homeomorfismos tales que:

$$\begin{aligned}
U(1) &\cong S^1 = \{\vec{z} \in \mathbb{C} | (\vec{z}, \vec{z}) = z \cdot \bar{z} = ||z||^2 = 1\}, \\
\mathbb{C}P^1 &\cong S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3; ||\vec{x}||^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}\}, \\
SO(3) &\cong \mathbb{R}P^3, \\
\mathbb{Z}_2 &\cong S^0
\end{aligned}$$

[Socolovsky04].

Nota 3 *Si $\mathbb{C}^{2*}$, el conjunto de vectores $\vec{w} \in \mathbb{C}^{2*}$ distintos de cero, y $\mathbb{C}^*$ el conjunto de números complejos no nulos, se define la relación de equivalencia $\vec{w} \sim \vec{w'}$; si existe $\sigma \in \mathbb{C}^*$ tal que $\vec{w'} = \vec{w} \cdot \sigma$. El espacio de clases de equivalencia $\mathbb{C}^{2*}/\mathbb{C}^* = \{[\vec{w}]\}_{\vec{w} \in \mathbb{C}^{2*}}$, define a línea proyectiva compleja o espacio de rayos denotada por $\mathbb{C}P^1$.*

2.2. Transformación de Paridad.

Como se describió en la sección anterior las rotaciones propias sobre espinores no relativistas de espín $\frac{1}{2}$ pueden ser descritas por el haz (2.2), pero el efecto sobre los espinores de las rotaciones impropias es decir elementos de $O(3)$ que no son parte del subgrupo $SO(3)$, obviamente no son descritas por éste haz.

Se definirá el subgrupo más pequeño de $U(2)$ que contiene a $SU(2)$, al cual llamaremos $S_{\pm}U(2)$, y donde se podrá identificar el levantamiento $\hat{P}$ de la transformación de paridad:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

que transforma $\vec{x} \to -\vec{x}$ para toda $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
$S_{\pm}U(2)$ es la doble cubierta de $O(3)$, con lo cual se puede construir el haz:

$$\xi : \mathbb{Z}_2 \to S_{\pm}U(2) \xrightarrow{\Pi} O(3)$$

El límite no relativista de la matriz de paridad en la teoría de Dirac (Ver Capítulo 1), se denotará por $\widehat{P}$ y actuará sobre los espinores de Pauli:

$$\psi(t, \vec{x}) = \begin{matrix} u(t, \vec{x}) \\ v(t, \vec{x}) \end{matrix} \in SU(2) \cong S^3$$

como:

$$\psi(t, \vec{x}) \to \psi_P(t, -\vec{x}) = \widehat{P}\psi(t, \vec{x}).$$

En la representación estándar $P = \pm i\gamma_0 = \pm i \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$, donde 1 es la matriz identidad de 2×2, usando el análisis de componentes "pequeñas" y "grandes", despreciando las primeras [Bjorken y Drell, página 11], la matriz de paridad a bajas velocidades $\hat{P}$ está dada por:

$$\widehat{P} = \pm i\mathbb{I} \text{ con } \widehat{P}^2 = -\mathbb{I}.$$

Así en el espinor de Dirac $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ las componentes $\psi_3 \cong \psi_4 \cong 0$.

Denotemos $u(t, \vec{x}) = u$ y $v(t, \vec{x}) = v$, para el espinor de Pauli, entonces la acción de $\hat{P}$ sobre éstos es:

$$\widehat{P}\psi = \begin{matrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{matrix} \quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \begin{matrix} \pm iu \\ \pm iv \end{matrix} = \begin{matrix} \pm e^{i\frac{\pi}{2}}u \\ \pm e^{i\frac{\pi}{2}}v \end{matrix}$$

Como en el caso relativista, dos inversiones espaciales cambian el signo de los espinores, es decir incluso en la mecánica cuántica no relativista $\hat{P}^2 = -1$. Este resultado podría tener consecuencias verificables en particular en el dominio de la mecánica cuántica molecular, dado que se rompe el isomorfismo entre ciertos grupos dobles, con lo cual podría haber diferencias en las tablas de caracteres de sus representaciones irreducibles.

Añadiendo las rotaciones impropias al grupo galileano de transformaciones G_s, [Azcárraga, página 153] el cual consiste de las matrices:

$$\begin{matrix} R & \vec{V} \\ 0 & 1 \end{matrix} \tag{2.3}$$

donde $R \in SO(3)$ una rotación, y $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad relativa entre los sistemas de referencia.

Si hacemos la consideración natural de la transformación de **inversión temporal**, extendemos el grupo G_s a G remplazando R por $O \in O(3)$ y 1 por $a \in \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$ en (2.3):

$$\begin{matrix} O & \vec{V} \\ 0 & a \end{matrix}$$

la segunda fila en esta matriz hace el cambio $t' = -t$ con $a = -1$.

Restringiéndose al caso $\vec{V} = \vec{0}$, tenemos el subgrupo G_0 de G dado por

$$G_0 = \{ \begin{matrix} O & \vec{0} \\ 0 & a \end{matrix} , O \in O(3), a \in \mathbb{Z}_2 \cong O(3) \times \mathbb{Z}_2 \}.$$

[Cervantes05]

2.3. $S_{\pm}U(2)$: extensión de $SU(2)$ por $\mathbb{Z}_2$

En el caso relativista existe ambigüedad en el signo de $\mathcal{P}$ y consecuentemente también la hay en $\widehat{P}$. Elegiremos arbitrariamente el signo positivo.

Con los elementos dados en la sección anterior podemos definir el conjunto:

$$S_{\pm}U(2) = SU(2) \cup SU(2)\widehat{P} = SU(2) \cup \{A\widehat{P}\}_{A \in SU(2)}.$$

$S_{\pm}U(2)$ es un grupo, cuyo elemento identidad es la matriz 1 de 2×2 e inversa la matriz $\begin{matrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{matrix}$ para $A \in SU(2)$ y $i \begin{matrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{matrix}$ para los elementos en $\{A\widehat{P}\}_{A \in SU(2)}$.

$S_{\pm}U(2)$ no es un conjunto simplemente conexo (ver Apéndice C), ya que no es conexo (es unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos, uno con elementos de $det = 1$ y otro con $det = -1$), por lo tanto no es la cubierta universal del grupo $O(3)$.

$SU(2)$ es un subgrupo invariante de $S_{\pm}U(2)$, ya que si $A \in SU(2)$ y $B \in S_{\pm}U(2)$, entonces $det(BAB^{-1}) = 1$ lo que implica $BAB^{-1} \in SU(2)$.

Sí $C \in U(2)$ y $B \in S_{\pm}U(2)$, entonces $det(CBC^{-1}) = det(B) = \pm 1$ con lo que $CBC^{-1} \in S_{\pm}U(2)$, así $S_{\pm}U(2)$ es un subgrupo invariante de $U(2)$.

Es conocido (Naber, 1997) el isomorfismo $2 \to 1$, $\pi : SU(2) \to SO(3)$, para A$= \begin{matrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{matrix} \in SU(2)$,

$$\pi(\begin{matrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{matrix}) = \begin{pmatrix} Re(z^2 - w^2) & Im(z^2 + w^2) & -2Re(zw) \\ -Im(z^2 - w^2) & Re(z^2 + w^2) & 2Im(zw) \\ 2Re(z\bar{w}) & 2Im(z\bar{w}) & |z|^2 - |w|^2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Llamando ι y $\bar{\iota}$ respectivamente las inclusiones $SU(2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} S_{\pm}U(2)$ y $SO(3) \overset{\bar{\iota}}{\hookrightarrow} O(3)$.

Definimos el homomorfismo $\Pi : S_{\pm}U(2) \to O(3)$:

$$\Pi(A) = \pi(A), A \in SU(2) \tag{2.5}$$

$$\Pi(\widehat{P}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$\Pi(A\widehat{P}) = \Pi(A)\Pi(\widehat{P}) = -\pi(A) \tag{2.7}$$

Con lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} SU(2) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"'] & S_{\pm}U(2) \arrow[d, "\Pi"] \\ SO(3) \arrow[r, "\bar{\iota}"] & O(3) \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

es decir $\Pi \circ \iota(A) = \bar{\iota} \circ \pi(A)$ ya que $\Pi(\iota(A)) = \Pi(A) = \pi(A)$ y $\bar{\iota}(\pi(A)) = \pi(A)$. Π es un homomorfismo (epimorfismo) de grupos ya que para $A, A' \in SU(2)$, se tiene lo siguiente:

$$\Pi(AA') = \pi(AA') = \pi(A)\pi(A') = \Pi(A)\Pi(A'),$$
$$\Pi(A(A'\widehat{P})) = \Pi((AA')\widehat{P}) = \Pi(AA')\Pi(\widehat{P}) = \Pi(A)(\Pi(A)\Pi(\widehat{P})) = \pi(A)\pi(A')\Pi(\widehat{P}) = \Pi(A)(\Pi(A'\widehat{P})),$$
$$\Pi((A\widehat{P})(A'\widehat{P})) = \Pi(A\widehat{P}^2A') = \Pi(A(-1)A') = \pi(A)\pi(-1)\pi(A') = \pi(A)\pi(A').$$

y

$$\Pi(\iota(A)) = \Pi(A), \bar{\iota}(\pi(A)) = \pi(A).$$

Existe la sucesión exacta corta de grupos:

$$1 \to SU(2) \overset{\iota}{\hookrightarrow} S_{\pm}U(2) \overset{det}{\to} \mathbb{Z}_2 \to 1,$$

ya que $ker(det) \cong Im(\iota) \cong SU(2)$ (1 es el elemento neutro del grupo).

Entonces $S_{\pm}U(2)$ es una extensión de $SU(2)$ por $\mathbb{Z}_2$ (MacLane y Birkoff,1979), ya que $SU(2)$ no es abeliana entonces la extensión en sí misma no lo es y por lo tanto no es central.

Sin embargo, dado la sucesión exacta corta, se escinde, ya que existe el mapeo:

$$\gamma : \mathbb{Z}_2 \to S_{\pm}U(2)$$

dado por: $\gamma(1) = \mathbb{I}$ y $\gamma(-1) = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -\sigma_3$ o $\gamma(-1) = \sigma_3$, es más es un homomorfismo de grupos que satisface:

$$det \circ \gamma = Id_{\mathbb{Z}_2},$$

esto significa que γ es la inversa derecha de la función det, γ es una función inyectiva ya que $ker(\gamma) = 1$; así, es un monomorfismo y $\mathbb{Z}_2$ es canónicamente isomorfa a su imagen en $S_{\pm}U(2)$, $\gamma(\mathbb{Z}_2)$.

La existencia de la escisión permitirá escribir al grupo $S_{\pm}U(2)$ como producto semidirecto de $SU(2)$ y $\mathbb{Z}_2$, para ello consideremos la siguiente proposición.

Proposición 2 *Sea la función*

$$\Psi : SU(2) \times \mathbb{Z}_2 \to S_{\pm}U(2) \text{ definida por } \Psi(A, B) = AB \tag{2.9}$$

y sea el homomorfismo de grupos

$$\phi : \mathbb{Z}_2 \to Aut(SU(2)) = \{g : SU(2) \to SU(2)\} \text{ donde } \phi(B)(A) = BAB^{-1}. \tag{2.10}$$

Entonces Ψ *es un isomorfismo de grupos, con la ley de composición en* $SU(2) \times \mathbb{Z}_2$ *dado por:*

$$(A', B') \cdot (A, B) = (A'\phi(B)(A), B') = (A'B'AB'^{-1}, B'B). \text{ Con ésta } SU(2) \times \mathbb{Z}_2 \cong S_{\pm}U(2)$$

es el producto semidirecto de $SU(2)$ *por* $\mathbb{Z}_2$ *inducido por la acción* ϕ.

Demostración:

ϕ es una acción (derecha e izquierda) de $\mathbb{Z}_2$ ya que:

$$\phi = \phi_i : \mathbb{Z}_2 \times SU(2) \to SU(2) \text{ y } \phi = \phi_d : SU(2) \times \mathbb{Z}_2 \to SU(2)$$

definidos por: $\phi_i(B, A) = \phi_d(A, B) = BAB^{-1}$, para toda $A \in SU(2)$ y $B, B_1, B_2 \in \mathbb{Z}_2 \cong \{1, -\sigma_3\}$, satisface:

$$\phi_B \equiv \phi(B, 1) = B$$

$$\phi_{B_1B_2}(A) = \phi(B_1B_2, A) = (B_1B_2)A(B_1B_2)^{-1} = B_1(B_2AB_2^{-1})B_1^{-1} = \phi_{B_1}(\phi_{B_2}(A)) = \phi_{B_1} \circ \phi_{B_2}(A).$$

Ψ es un homomorfismo de grupos y un mapeo biyectivo.

$$\Psi(A, 1) = A \in SU(2) \text{ y } \Psi(A, -\sigma_3) = \begin{matrix} -z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{matrix}$$

donde $det(\Psi(A, -\sigma_3)) = -1$, por lo tanto $\Psi(A, -\sigma_3) \in S_{\pm}U(2) \setminus SU(2)$.

Definamos la función $\widetilde{\Psi} : S_{\pm}U(2) \to SU(2) \times \mathbb{Z}_2$ dada por:

$$\widetilde{\Psi}(A) = (A, \mathbb{I}) \text{ sí } A \in SU(2).$$
$$\widetilde{\Psi}(B) = (B(-\sigma_3), -\sigma_3) \text{ sí } B \in S_{\pm}U(2) \setminus SU(2)$$

entonces, para $B = A\widehat{P}$, $B(-\sigma_3) = A\widehat{P}(-\sigma_3) = A \begin{matrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{matrix} = \begin{matrix} -iz & iw \\ i\bar{w} & i\bar{z} \end{matrix} \in SU(2)$,

así $\Psi(\widetilde{\Psi}(B), -\sigma_3) = \begin{matrix} iz & iw \\ -i\bar{w} & i\bar{z} \end{matrix} = B$. Por lo tanto $\Psi\widetilde{\Psi} = Id$ lo que implica $\widetilde{\Psi} = \Psi^{-1}$ siendo Ψ biyectiva.

Finalmente

$$\Psi((A', B') \cdot (A, B)) = A'B'AB'^{-1}B'B = A'B'AB = \Psi(A', B')\Psi(A, B),$$

es decir Ψ es un homomorfismo de grupos. ■

En términos de $SU(2) \odot \mathbb{Z}_2$, podemos definir el haz (ver apéndice)

$$\xi_{\odot} : \mathbb{Z}_2 \to SU(2) \odot \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\Pi_{\odot}} O(3) \tag{2.11}$$

con la función proyección, $\Pi_\odot = \Pi \circ \Psi$ definida como sigue:

$$\Pi_\odot(A,B) = \Pi(\Psi(A,B)) = \Pi(AB) = \pi(A) \text{ si } B = \mathbb{I}$$

$$\Pi_\odot(A,B) = \Pi(AB) = \Pi(A)\Pi(B) = \pi(A)\Pi(B) = -\pi(A)\pi(i\sigma_3) = \pi(A)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ si } B = -\sigma_3.$$

la tercera igualdad se obtiene usando la definición (2.5) y encontrando la matriz M de 2×2 tal que $M\widehat{P} = -\sigma_3$, resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $M = i\sigma_3$. La cuarta igualdad se sigue del homomorfismo (2.4).

En $SU(2) \odot \mathbb{Z}_2$, el operador paridad se denota por $\widehat{P_\odot}$ y esta dado por:

$$\widehat{P_\odot} = \Psi^{-1}(i\mathbb{I}) = (-i\sigma_3, -\sigma_3).$$

(usamos la definición de $\widetilde{\Psi}$ en la demostración de la proposición anterior.) Esta expresión es consistente con el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
SU(2) \times S^3 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\iota \times Id"'] & S^3 \arrow[d, "Id"] \\
S_\pm U(2) \times S^3 \arrow[r, "\mu_\iota"] \arrow[d, "\Psi^{-1} \times Id"'] & S^3 \arrow[d, "Id"] \\
(SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times S^3 \arrow[r, "\mu_\odot"] & S^3
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

el cual da los mapeos entre las acciones $\mu, \mu_\iota, \mu_\odot$, respectivamente de $SU(2), S_\pm U(2)$ y $SU(2) \odot \mathbb{Z}_2$ sobre los espinores de Pauli $\psi = \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$.

2.4. Inversión Temporal. $\widehat{T}$ y $\widehat{P}\widehat{T}$

Considere el grupo:

$$\begin{gathered}
\widehat{G}_0 = S_\pm U(2) \times \mathbb{Z}_2 = (SU(2) \cup SU(2)\widehat{P}) \times \mathbb{Z}_2 = \\
SU(2) \times \{1\} \cup SU(2) \times \{-1\} \cup SU(2)\widehat{P} \times \{1\} \cup SU(2)\widehat{P} \times \{-1\} = \\
\{(A,1)\}_{A \in SU(2)} \cup \{(A,-1)\}_{A \in SU(2)} \cup \{(A\widehat{P},1)\}_{A \in SU(2)} \cup \{(A\widehat{P},-1)\}_{A \in SU(2)}.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

y la proyección dos a uno:

$$q : S_\pm U(2) \times \mathbb{Z}_2 \to O(3) \times \mathbb{Z}_2$$

dado por:

$$q(A,1) = (\pi(A),1), \tag{2.14}$$
$$q(A,-1) = (\pi(A)R_y(\pi),-1), \tag{2.15}$$
$$q(A\widehat{P},1) = (-\pi(A),1), \tag{2.16}$$
$$q(A\widehat{P},-1) = (-\pi(A)R_y(\pi),-1) \tag{2.17}$$

donde $R_y(\pi)$ la rotación alrededor del eje y, es decir :

$$R_y(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \pi(\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}) \tag{2.18}$$

En particular:

$$q = (\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} ,-1) = (\pi(A)R_y(\pi),-1) = ((R_y(\pi))^2,-1) = (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,-1)$$

hace a $t \to t' = -t$ en el espacio tiempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.
Con ello podemos identificar de modo natural el operador de inversión temporal sobre espinores como el par:

$$(\widehat{T},-1) \in \widehat{G}_0 \text{ con } \widehat{T} = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -i\sigma_2 \in SU(2) \text{ y } \widehat{T}^2 = -I.$$

[Feynman, página 48], [**?**, página 278] Las cuatro componentes conexas de $\widehat{G}_0$ actuarán sobre los espinores como se describe a continuación:

$$(A,1) : \psi(t,\vec{x}) \to \psi_{(A,1)}(t,\vec{x}) = (A,1)\cdot\psi(t,\vec{x}) := A\psi(t,\pi(A)\vec{x}) = \begin{matrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(t,\pi(A)\vec{x}) \\ v(t,\pi(A)\vec{x}) \end{matrix}$$
$$(A,-1) : \psi(t,\vec{x}) \to \psi_{(A,-1)}(t,\vec{x}) = (A,-1)\cdot\psi(t,\vec{x}) := A\psi(-t,\vec{x})^*,$$

en particular,

$$\psi_{(\widehat{T},-1)}(t,\vec{x}) \equiv \psi_{\widehat{T}}(t,\vec{x}) = \widehat{T}\psi(-t,\vec{x})^* = \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(-t,\vec{x})^* \\ v(-t,\vec{x})^* \end{matrix} \quad ,$$

correspondiente al espinor inversión temporal.

$$(B,1) : \psi(t,\vec{x}) \to \psi_{(B,1)}(t,-\vec{x}) = (B,1)\cdot\psi(t,\vec{x}) := B\psi(t,\vec{x}),$$

un caso particular,

$$\psi_{(\widehat{P},1)}(t,-\vec{x}) \equiv \psi_{\widehat{P}}(t,-\vec{x}) = \widehat{P}\psi(t,\vec{x}) = \begin{matrix} i & 0 \\ 0 & i \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(t,\vec{x}) \\ v(t,\vec{x}) \end{matrix} = \begin{matrix} iu(t,\vec{x}) \\ iv(t,\vec{x}) \end{matrix} \quad ,$$

el espinor transformado por paridad,

$$(B,-1) : \psi(t,\vec{x}) \to \psi_{(B,-1)}(t,-\vec{x}) = (B,-1)\cdot\psi(t,\vec{x}) := B\widehat{T}\psi(-t,\vec{x})^*,$$
$$\psi_{(\widehat{P},-1)}(t,-\vec{x}) \equiv \psi_{\widehat{P}\widehat{T}}(t,-\vec{x})^* = \widehat{P}\widehat{T}\psi(-t,\vec{x})^* = \sigma_2\psi(-t,\vec{x})^* = \begin{matrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} u(-t,\vec{x})^* \\ v(-t,\vec{x})^* \end{matrix} = \begin{matrix} -iv(-t,\vec{x})^* \\ iu(-t,\vec{x})^* \end{matrix} \quad ,$$

como caso particular se define el espinor paridad-inversión temporal.
Esto es apoyado por el hecho de:

$$q(\widehat{P}\widehat{T},-1) = q(i1 \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}, -1) = (-\pi(\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix})R_y(\pi), -1) = (-(R_y(\pi))^2, -1) = (\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, -1)$$

Esta transformación hace:

$$\begin{aligned} \vec{x} &\to \vec{x}' = -\vec{x} \\ t &\to t' = -t \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Es claro que $\widehat{P}\widehat{T} = \widehat{T}\widehat{P}$. Las matrices $\widehat{P}$, $\widehat{T}$ generan el grupo de orden 8, $G_{\widehat{P}\widehat{T}}$, con tabla de multiplicar dada por:

$G_{\widehat{P}\widehat{T}}$	$\widehat{P}$	$\widehat{T}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\widehat{P}$	$-\widehat{T}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$-\mathbb{I}$
$\widehat{P}$	$\mathbb{I}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\widehat{T}$	$\mathbb{I}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\widehat{T}$	$-\widehat{P}$
$\widehat{T}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\mathbb{I}$	$-\widehat{P}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\mathbb{I}$	$\widehat{P}$	$-\widehat{T}$
$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\widehat{T}$	$-\widehat{P}$	$\mathbb{I}$	$\widehat{T}$	$\widehat{P}$	$-\mathbb{I}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$
$-\widehat{P}$	$\mathbb{I}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\widehat{T}$	$-\mathbb{I}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\widehat{T}$	$\widehat{P}$
$-\widehat{T}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\mathbb{I}$	$\widehat{P}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$-\mathbb{I}$	$-\widehat{P}$	$\widehat{T}$
$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\widehat{T}$	$\widehat{P}$	$-\mathbb{I}$	$-\widehat{T}$	$-\widehat{P}$	$\mathbb{I}$	$\widehat{P}\widehat{T}$
$-\mathbb{I}$	$-\widehat{P}$	$-\widehat{T}$	$-\widehat{P}\widehat{T}$	$\widehat{P}$	$\widehat{T}$	$\widehat{P}\widehat{T}$	$\mathbb{I}$

$G_{\widehat{P}\widehat{T}}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, con el isomorfismo dado por:

$$\begin{gathered} \mathbb{I} \to (I,1),\ -\mathbb{I} \to (-I,1),\ \widehat{P} \to (\iota,1),\ -\widehat{P} \to (-\iota,1), \\ \widehat{T} \to (\iota,-1),\ -\widehat{T} \to (-\iota,-1),\ \widehat{P}\widehat{T} \to (-I,-1),\ -\widehat{P}\widehat{T} \to (I,-1), \end{gathered}$$

el grupo $\mathbb{Z}_4 \cong \{I, \iota, -I, -\iota\}$, donde I es la identidad y $\iota^2 = -1$; $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, -1\}$.

A diferencia del grupo G_{PT} generado por las transformaciones P, T a nivel del espacio tiempo $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, cuya tabla de multiplicación se da a continuación:

G_{PT}	P	T	PT
P	1	PT	T
T	PT	1	P
PT	T	P	1

este último, isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, dado por:

$$1 \to (1,1),\ P \to (1,-1),\ T \to (-1,1),\ PT \to (-1,-1).$$

$SU(2) \odot \mathbb{Z}_2 \cong S_{\pm}U(2)$ induce el isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Phi &: (SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \to S_{\pm}U(2) \times \mathbb{Z}_2, \\ &\Phi((A,B),a) = (AB,a) \end{aligned}$$

$$\Phi = \Psi \times I_{\mathbb{Z}_2}$$

La multiplicación en el grupo $(SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ es:

$$((A', B'), a') \odot ((A, B), a) = ((A'B'AB'^{-1}, B'B), a'a).$$

Definiendo la función proyección:

$$Q = q \circ \Phi$$

tenemos el haz fibrado principal:

$$\Xi : \mathbb{Z}_2 \to (SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{Q} O(3) \times \mathbb{Z}_2,$$

que generaliza el haz (2.11). Donde $Q^{-1}\{(\mathbb{I}, 1)\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Este haz resume toda la geometría de las transformaciones paridad e inversión temporal de los espinores de Pauli.

La inversa de Φ, esta dada por:

$$\Phi^{-1}(A, a) = ((A, \mathbb{I}), a) \text{ para } A \in SU(2)$$
$$\Phi^{-1}(B, a) = ((-B\sigma_3, -\sigma_3), a) \text{ para } B \in S_{\pm}U(2) \setminus SU(2).$$

Los operadores $\widehat{\mathcal{P}}$ y $\widehat{\mathcal{T}}$ en $(SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ están dados por:

$$\widehat{\mathcal{P}} = \Phi^{-1}(\widehat{\mathcal{P}}, 1) = ((-i\sigma_3, -\sigma_3), 1)$$
$$\widehat{\mathcal{T}} = \Phi^{-1}(\widehat{\mathcal{T}}, -1) = ((-i\sigma_2, \mathbb{I}), -1).$$

Finalmente, en el espacio de rayos $\mathbb{C}P^1$, el efecto de las transformaciones de inversión temporal, paridad e inversión temporal-paridad, es obtenido de la definición de la proyección p en la primera sección de este capítulo, respectivamente multiplicando por $U(1)$ del lado derecho de $\psi_{\widehat{\mathcal{T}}}(t, \vec{x})$, $\psi_{\widehat{\mathcal{P}}}(t, -\vec{x})$ y $\psi_{\widehat{\mathcal{P}}\widehat{\mathcal{T}}}(t, -\vec{x})$.

2.5. Conjugación de Carga en el límite no relativista.

Generalmente el concepto de antipartículas se considera solamente en el contexto de Mecánica Cuántica Relativista (MCR), dado que sólo en este régimen se puede encontrar partículas libres con energías negativas viajando hacia atrás en el tiempo. La ausencia de estas, es interpretada como partículas con energía positiva, de carga y momento opuestas, viajando hacia adelante en el tiempo: *antipartículas.* Entonces el operador de **conjugación de carga** C que hace la transformación de partícula $\leftrightarrow$ antipartícula existiría sólo en MCR ([Berestetskii], [Abers]). Sin embargo podemos dar la definición *ad hoc* de C en la mecánica lorentziana clásica y la galileana [Bigi]. Para esto se derivará de la teoría relativista usando el límite $|\beta| \ll 1$ donde β es la "velocidad"de la partícula y $c = 1$. En el caso concreto de un campo de Dirac, acoplado a un campo electromagnético externo, se probará que C puede ser obtenida de principios básicos. La simetría de la ecuación de onda relativista bajo la operación de conjugación de carga, en la aproximación no relativista, dará las funciones de onda fermiónicas describiendo electrones y positrones de bajas energías. Abajo se dará también un argumento en Teoría Cuántica de Campos. Con ellos podemos afirmar que C no sólo se puede considerar en la simetría relativista.

2.5.1. Conjugación de Carga

La ecuación de onda para un campo espinorial

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} \varphi \\ \chi \end{matrix} \qquad \text{con } \varphi = \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{matrix} \quad \text{y } \chi \ \begin{matrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{matrix}$$

de carga eléctrica q y masa m, acoplado a un campo electromagnético externo $A^\mu = (V, \vec{A})$, está dada por:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - qA_\mu \gamma^\mu - m)\psi = 0 \tag{2.19}$$

donde γ^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$, son las matrices de Dirac.
Con la definición $\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}$ y en la representación estándar de las γs la ecuación (2.19) se escribe como:

$$i\partial_t \psi = (\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) + qV + m\gamma_0)\psi = 0 \tag{2.20}$$

con $\vec{p} = -i\nabla$, $\vec{\alpha} = \begin{matrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{matrix}$, $\gamma_0 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$, y $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.
El espinor conjugado de carga ψ_c, ver capítulo 1, es:

$$\psi_c = C\bar{\psi}^{\sim} = \begin{pmatrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \end{pmatrix} \equiv \begin{matrix} \varphi_c \\ \chi_c \end{matrix}$$

para $\varphi_c = \begin{matrix} \psi_4^* \\ -\psi_3^* \end{matrix}$, $\chi_c = \begin{matrix} -\psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{matrix}$ y $C = i\gamma^2\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ψ_c obedece la ecuación:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + qA_\mu \gamma^\mu - m)\psi_c = 0 \tag{2.21}$$

análogamente a (2.19) obtenemos:

$$i\partial_t \psi_c = (\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} + q\vec{A}) - qV + m\gamma_0)\psi_c = 0. \tag{2.22}$$

Lo anterior infiere la descripción de ψ_c, de partículas con la misma masa y momento pero carga opuesta.
Si la transformación de conjugación de carga se completa remplazando:

$$A_\mu \xrightarrow{C} -A_\mu$$

entonces (2.21) y (2.22) tiene la misma forma que (2.19) y (2.20) mostrando la simetría completa de la electrodinámica cuántica bajo la transformación C.

2.5.2. Límite No Relativista

Definiendo $\tilde{\psi}$ a través de

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{-imt}\tilde{\psi}(t, \vec{x}) \equiv e^{-imt} \begin{matrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{matrix} ,$$

donde el factor de la exponencial está referido a la energía positiva en reposo m (mc^2), la ecuación (2.20) al sustituir la expresión anterior es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$i\partial_t\tilde{\varphi} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\tilde{\chi} + qV\tilde{\varphi} \tag{2.23}$$

$$i\partial_t\tilde{\chi} = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}\tilde{\varphi} + qV\tilde{\chi} - 2m\tilde{\chi} \tag{2.24}$$

con $\vec{\pi} = \vec{p} - q\vec{A}$.
En la aproximación no relativista, m es la energía más grande [Bjorken y Drell], podemos despreciar los términos $i\partial_t\tilde{\chi}$ y $qV\tilde{\chi}$ en (2.24), obteniendo las componentes "pequeñas" $\tilde{\chi}$ en términos de las componentes "grandes" $\tilde{\varphi}$, dadas por:

$$\tilde{\chi} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}}{2m}\tilde{\varphi} \tag{2.25}$$

así

$$\frac{|\tilde{\chi}|}{|\tilde{\varphi}|} \cong \frac{|\vec{\pi}|}{m} \cong \beta \ll 1. \tag{2.26}$$

Sustituyendo (2.25) en (2.23) obtenemos la ecuación de Schrödinger-Pauli para el espinor de dos componentes φ:

$$i\partial_t\tilde{\varphi} = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2}{2mc^2}\tilde{\varphi} + qV\tilde{\varphi} \tag{2.27}$$

donde hemos incorporado la constante c, entonces $\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi} = -(ic\vec{\sigma}\cdot\nabla + q\vec{\sigma}\cdot\vec{A})$ y su cuadrado $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi})^2 = -c^2(\vec{\sigma}\cdot\nabla)^2 + icq((\sigma\cdot\nabla)(\vec{\sigma}\cdot\vec{A}) + (\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\nabla)) + q^2(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})^2$.
así la ecuación anterior queda expresada por:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{pmatrix} = [\frac{1}{2mc^2}(-c^2\tilde{\nabla}^2 + iqc(\tilde{\nabla}\tilde{\vec{A}} + \tilde{\vec{A}}\tilde{\nabla}) + q^2\tilde{\vec{A}}) + qV]\begin{pmatrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

donde $\tilde{\nabla} = \vec{\sigma}\cdot\nabla$, $\tilde{\vec{A}} = \vec{\sigma}\cdot\vec{A}$.

Desarrollando cada término de la ecuación anterior y al tomar $\lambda\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^2(\lambda) &= (\sigma_1\partial_x + \sigma_2\partial_y + \sigma_3\partial_z)^2(\lambda) = \begin{pmatrix}\nabla^2 & 0\\ 0 & \nabla^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \nabla^2(\lambda);\\
\tilde{\nabla}\tilde{\vec{A}}(\lambda) &= (\sigma_i\sigma_j)((\partial_iA_j)(\lambda) + A_j\partial_i(\lambda));\\
\tilde{\vec{A}}\tilde{\nabla}(\lambda) &= \sigma_i\sigma_jA_i\partial_j(\lambda);\\
(\tilde{\nabla}\tilde{\vec{A}} + \tilde{\vec{A}}\tilde{\nabla})(\lambda) &= \sigma_i\sigma_j((\partial_iA_j)(\lambda) + (A_j\partial_i + A_i\partial_j)(\lambda)) = (\partial_iA_i(\lambda) + 2(A_i\partial_i)(\lambda)\\
&\quad + \sum_{i\neq j}[\sigma_i\sigma_j(\partial_iA_j + (A_j\partial_i + A_i\partial_j)(\lambda))]\\
&= (\nabla\cdot\vec{A} + 2\vec{A}\cdot\nabla)(\lambda) + i\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{A})(\lambda).
\end{aligned}$$

se ha usado $\sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j(A_j\partial_i + A_i\partial_j)(\lambda) = 0$ ya que $\sigma_i\sigma_j$ es antisimétrico y $A_j\partial_i + A_i\partial_j$ es simétrico. Además

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\neq j}\sigma_i\sigma_j(\partial_i A_j) &= \sigma_1\sigma_2(\partial_1 A_2)+\sigma_2\sigma_1(\partial_2 A_1)+\sigma_1\sigma_3(\partial_1 A_3)+\sigma_3\sigma_1(\partial_3 A_1)+\sigma_2\sigma_3(\partial_2 A_3)+\sigma_3\sigma_2(\partial_3 A_2)\\
&= \sigma_1\sigma_2(\partial_1 A_2-\partial_2 A_1)+\sigma_1\sigma_3(\partial_1 A_3-\partial_3 A_1)+\sigma_2\sigma_3(\partial_2 A_3-\partial_3 A_3)\\
&= \sigma_1\sigma_2(\nabla\times\vec{A})_3+\sigma_1\sigma_3(\nabla\times\vec{A})_2+\sigma_2\sigma_3(\nabla\times\vec{A})_1\\
&= i\sigma_3(\nabla\times\vec{A})_3+i\sigma_2(\nabla\times\vec{A})_2+i\sigma_1(\nabla\times\vec{A})_1 = i\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{A}).
\end{aligned}
$$

Finalmente el término

$$
\tilde{\vec{A}}^2 = \begin{matrix} \vec{A}^2 & 0 \\ 0 & \vec{A}^2 \end{matrix} = \vec{A}^2\mathbb{I}
$$

Así (2.28) es de la forma:

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\begin{matrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{matrix} = \frac{1}{2m}(-\nabla^2+\frac{q^2}{c^2}\tilde{\vec{A}}^2+\frac{iq}{2mc}\nabla\cdot\vec{A}+2i\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\nabla-\frac{q}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}+2mqV)\begin{matrix}\tilde{\psi}_1\\ \tilde{\psi}_2\end{matrix}, \tag{2.29}
$$

hemos sustituido $\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$.

Los valores absolutos de las componentes $\psi_a, a=1,2,3,4$ satisfacen:

$$
|\tilde{\psi}_3|,|\tilde{\psi}_4| \ll |\tilde{\psi}_1|,|\tilde{\psi}_2|,
$$

es decir,

$$
|\tilde{\psi}_3|,|\tilde{\psi}_4| \to 0 \text{ cuando } c\to\infty.
$$

Para el espinor conjugado de carga definimos $\tilde{\psi}_c$ a partir de:

$$
\psi_c = e^{imt}\tilde{\psi}_c = e^{imt}\begin{matrix}\tilde{\varphi}_c\\ \tilde{\chi}_c\end{matrix},
$$

donde el factor de la exponencial se refiere a energía negativa en reposo $-m$ $(-mc^2)$. Las correspondientes ecuaciones, sustituyendo en (2.20), son:

$$
i\partial_t\tilde{\varphi}_c = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}'\tilde{\chi}_c - qV\tilde{\varphi}_c + 2m\tilde{\varphi}_c \tag{2.30}
$$

$$
i\partial_t\tilde{\chi}_c = \vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}'\tilde{\varphi}_c - qV\tilde{\chi}_c, \tag{2.31}
$$

donde $\pi' = \vec{p}+q\vec{A}$. De la aproximación no relativista se sigue:

$$
\tilde{\varphi}_c = -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}'}{2mc^2}\tilde{\chi}_c \tag{2.32}
$$

con $\tilde{\varphi}_c = \begin{pmatrix}\tilde{\psi}_4{}^*\\ -\tilde{\psi}_3{}^*\end{pmatrix}$, $\tilde{\chi}_c = \begin{pmatrix}-\tilde{\psi}_2{}^*\\ \tilde{\psi}_1{}^*\end{pmatrix}$ por lo tanto

$$
\frac{|\tilde{\varphi}_c|}{|\tilde{\chi}_c|} \backsimeq \beta \ll 1. \tag{2.33}
$$

Sustituyendo (2.32) en (2.31) se obtiene la ecuación de Schrödinger-Pauli para $\tilde{\chi}_c$.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}-\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^*\end{pmatrix} = (-\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}')^2}{2mc^2} - qV)\begin{pmatrix}-\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^*\end{pmatrix} \tag{2.34}$$

desarrollando de manera análoga a lo hecho después de la ecuación (2.28), el miembro derecho de la última expresión es:

$$\begin{aligned}-(\vec{\sigma}\cdot\vec{\pi}')^2 &= c^2\tilde{\nabla}^2 + icq(\tilde{\nabla}\tilde{\vec{A}} + \tilde{\vec{A}}\tilde{\nabla}) - q^2\tilde{\vec{A}}^2 \\ &= c^2\nabla^2 + icq(\nabla\cdot\vec{A} + 2\vec{A}\cdot\nabla + i\vec{\sigma}\cdot\nabla\times\vec{A}) - q^2\vec{A}^2 \\ &= c^2\nabla^2 + icq\nabla\cdot\vec{A} + 2icq\vec{A}\cdot\nabla - cq\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - q^2\vec{A}^2.\end{aligned}$$

los demás términos permanecen sin cambio, así la ecuación (2.34) queda como:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}-\tilde{\psi}^*{}_2 \\ \tilde{\psi}^*{}_1\end{pmatrix} = \frac{1}{2m}(\nabla^2 - \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2 + \frac{iq}{2mc}\nabla\cdot\vec{A} + 2i\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\nabla - \frac{q}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - 2mqV)\begin{pmatrix}-\tilde{\psi}_2^* \\ \tilde{\psi}_1^*\end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Nótese que (2.33) es consistente con (2.26), con lo cual se permite definir naturalmente la matriz de conjugación de carga en el límite no relativista, que actuará sobre los elementos del espacio de Hilbert $\mathbb{C}^2$, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-\psi_2^* \\ \psi_1^*\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} := C_{nr}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} \tag{2.36}$$

donde $C_{nr} = k\circ\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, con k la operación de conjugación compleja y $\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ un elemento de $SU(2)$.
Se sigue

$$C_{nr}(\lambda\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}) = \lambda^* C_{nr}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}$$

es decir C_{nr} es antilineal. También satisface las siguientes propiedades: $C_{nr}^2 = -1$, $C_{nr}^{-1} = -C_{nr} = C_{nr}^{\sim} = -C_{nr}^* = C_{nr}^\dagger$ dado que:

$$C_{nr}^2 = (k\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} k\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix})\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}-u^* \\ -v^*\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} = -\mathbb{I}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}$$

que son las mismas propiedades para la matriz relativista, ver capítulo 1.

Junto con las matrices $\hat{P} \equiv P_{nr} = i\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ paridad, $\hat{T} \equiv T_{nr} = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ inversión temporal, se tiene la siguiente tabla de multiplicar:

	C_{nr}	P_{nr}	$T_{nr}T$
C_{nr}	-1	$C_{nr}P_{nr}$	$C_{nr}T_{nr}$
P_{nr}	$-C_{nr}P_{nr}$	-1	$P_{nr}T_{nr}$
T_{nr}	$C_{nr}T_{nr}$	$P_{nr}T_{nr}$	-1

A continuación se demostrará la invariancia galileana de la ecuación de Schrödinger-Pauli para el espinor que representa el electrón y el positrón no relativistas.
Para ello consideremos dos sistemas de referencia inerciales $S(t,x,y,z)$ y $S'(t',x',y',z')$, el segundo

moviéndose con respecto al primero con una velocidad constante $\vec{v}$, entonces la correspondencia entre coordenadas esta dada por:

$$\begin{aligned} t &= t', \\ \vec{x} &= \vec{x}' + \vec{v}t'. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Usando la regla de la cadena $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}$, $\frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}$ y $\nabla = \nabla'$ donde $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{x}}$ y $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \vec{x}'}$.
El cambio de la función de onda $\begin{matrix} u(\vec{x},t) \\ v(\vec{x},t) \end{matrix}$ y $\begin{matrix} -v^*(\vec{x},t) \\ u^*(\vec{x},t) \end{matrix}$ de un sistema al otro son respectivamente:

$$\begin{matrix} u(\vec{x},t) \\ v(\vec{x},t) \end{matrix} = e^{im(\vec{v}\cdot\vec{x'}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2t')} \begin{matrix} \tilde{u}(\vec{x'},t) \\ \tilde{v}(\vec{x'},t) \end{matrix} \quad ; \tag{2.38}$$

$$\begin{matrix} -v^*(\vec{x},t) \\ u^*(\vec{x},t) \end{matrix} = e^{-im(\vec{v}\cdot x'+\frac{1}{2}|v|^2t')} \begin{matrix} -\tilde{v}^*(\vec{x}',t) \\ \tilde{u}^*(\vec{x}',t) \end{matrix} \tag{2.39}$$

Nota 4 *En general para la función de onda $\psi(\vec{x},t)$ en el sistema $S(x,y,z,t)$ que satisface la ecuación de Schrödinger:*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = (-\frac{\nabla^2}{2m} + V(\vec{x}-\vec{x}_o))\psi(\vec{x},t) \tag{2.40}$$

considerando $\vec{v} = constante$, la función

$$\psi'(\vec{x}',t') = e^{-im(\vec{v}\cdot\vec{x}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2(t'-t_o))}\psi(\vec{x},t)$$

satisface (2.40) en $S'(x',y',z',t)$ (invariancia galileana).

El cambio del cuadripotencial A^μ de un sistema a otro, se calcula como el límite no relativista de la transformación de Lorentz,

$$A^\mu = \Lambda^{\mu\nu} A'_\nu$$

esto es:

$$\begin{pmatrix} V \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V' \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}$$

donde hemos considerado, por facilitar los cálculos, el movimiento a lo largo del eje x, es decir $\vec{v} = ve_1$ y $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

De lo anterior:

$$\begin{aligned} V &= \gamma(V' + \beta A'_1) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(V' + \beta A'_1) \\ A^1 &= \gamma(\beta V' + A'_1) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(\beta V' + A'_1) \\ A^2 &= A'_2 \\ A^3 &= A'_3 \end{aligned}$$

a orden β. Así

$$(V, A^1, A^2, A^3) = (V' + \beta A'_1, \beta V' + A'_1, A'_2, A'_3). \tag{2.41}$$

Del tensor intensidad de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$

$$\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos la transformación entre sistemas dada por:

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\eta}F'^{\rho\eta}$$

entonces:

$$\begin{aligned} B_1 &= F_{32} = \Lambda_{3\rho}\Lambda_{2\eta}F'^{\rho\eta} = B'^1 \\ B_2 &= F_{13} = \Lambda_{1\rho}\Lambda_{3\eta}F'^{\rho\eta} = \gamma(B'^2 + \beta E'^3) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(B'^2 + \beta E'^3) = B'^2 + \beta E'^3. \\ B_3 &= F_{21} = \Lambda_{2\rho}\Lambda_{1\eta}F'^{\rho\eta} = \gamma(B'^3 - \beta E'^2) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(B'^3 - \beta E'^2) = B'^3 - \beta E'^2. \end{aligned}$$

es decir,

$$(B_1, B_2, B_3) = (B'^1, B'^2 + \beta E'^3, B'^3 - \beta E'^2) \tag{2.42}$$

Para las componentes del campo eléctrico, se tiene:

$$\begin{aligned} E_1 &= F_{01} = \Lambda_{0\rho}\Lambda_{1\eta}F'^{\rho\eta} = E'^1 \\ E_2 &= F_{02} = \Lambda_{0\rho}\Lambda_{2\eta}F'^{\rho\eta} = \gamma(E'^2 - \beta B'^3) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(E'^2 - \beta B'^3) = E'^2 - \beta B'^3. \\ E_3 &= F_{03} = \Lambda_{0\rho}\Lambda_{3\eta}F'^{\rho\eta} = \gamma(E'^3 + \beta B'^2) \simeq (1 - \frac{\beta^2}{2})(E'^3 + \beta B'^2) = E'^3 + \beta B'^2. \end{aligned}$$

esto es,

$$(E_1, E_2, E_3) = (E'^1, E'^2 - \beta B'^3, E'^3 + \beta B'^2) \tag{2.43}$$

Entonces de (2.38) llamemos $S = m(\vec{v}\cdot\vec{x'} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 t')$, $\varphi(\vec{x'}, t') = \begin{matrix} \tilde{u}(\vec{x'}, t') \\ \tilde{v}(\vec{x'}, t') \end{matrix}$, $u(\vec{x}, t) = u$, $v(\vec{x}, t) = v$, $\tilde{u}(\vec{x'}, t') = \tilde{u}$ y $\tilde{v}(\vec{x'}, t') = \tilde{v}$ tenemos el lado izquierdo de (2.28),

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = i(\frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}\cdot\nabla')(e^{iS} \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix}) = e^{iS}(\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - i\vec{v}\cdot\nabla' + i\frac{\partial}{\partial t'}) \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} .$$

donde se ha usado $\nabla' = m\vec{v}$ y $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{m}{2}|\vec{v}|^2$.

Para el primer término del miembro izquierdo de (2.28) tenemos:

$$-\frac{\nabla^2}{2m} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = -\frac{\nabla^2}{2m}(e^{iS} \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix}) = e^{iS}(-\frac{1}{2m}\nabla'^2 + \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - i\vec{v}\cdot\nabla') \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix}$$

Para el segundo:

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2m}\frac{\vec{A}^2}{c^2} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} &= \frac{q^2}{2mc^2}e^{iS}((A')^1 + (A')^2 + (A')^3) \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \frac{q^2}{2mc^2}e^{iS}((A'^1 + \beta V')^2 + (A'^2)^2 + (A'^3)^2) \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} \\ &\simeq \frac{q^2}{2mc^2}e^{iS}((\vec{A'}) + 2\beta A'^1 V') \begin{matrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{matrix} . \end{aligned}$$

donde se ha usado para la segunda igualdad (2.41) y se ha mantenido la expresión a orden β.
Del tercer término se sigue:

$$\begin{aligned}\frac{iq}{2mc}\vec{A}\cdot\nabla\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} &= \frac{iq}{2mc}\vec{A}'\cdot\nabla'(e^{iS}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}) = \frac{q}{2mc}e^{iS}(-m\vec{A}'\cdot\vec{v}+i\vec{A}'\cdot\nabla')\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}\\ &= \frac{q}{2mc}e^{iS}[-m(A'^1+\beta V')v^1 - mA'^2v^2 - mA'^3 + i\vec{A}\cdot\nabla' + \beta V'\frac{\partial}{\partial x'}]\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

dado que estamos considerando $\vec{v} = ve^1$, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{iq}{2mc}\vec{A}'\cdot\nabla'(e^{iS}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}) = e^{iS}(-\frac{q}{2c}A'^1v^1 - \frac{q}{2c}\beta V'^1 + \frac{iq}{2mc}\vec{A}'\cdot\nabla' + \frac{q}{2mc}\beta V'\frac{\partial}{\partial x'^1})\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}.$$

El cuarto término se transforma como:

$$\frac{iq}{2mc}\nabla\cdot\vec{A}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \frac{iq}{2mc}\nabla'\cdot\vec{A}'(e^{iS}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}) = \frac{iq}{2mc}e^{iS}(\nabla'\cdot\vec{A}' + \beta\frac{\partial}{\partial x'^1})$$

Para el quinto término tenemos:

$$\begin{aligned}-\frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} &= -\frac{q}{2mc}(\sigma_1 B'^1 + \sigma_2(B'^2+\beta E'^3) + \sigma_3(B'^3-\beta E'^2)(e^{iS}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix})\\ &= -\frac{q}{2mc}e^{iS}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}' + \beta(\vec{\sigma}\times\vec{E}')_1)\end{aligned}$$

Por último usando (2.41),

$$qV\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = qe^{iS}(V'+\beta A'^1)\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}$$

sustituyendo los términos anteriores en la ecuación (2.29) y reduciendo obtenemos:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t'}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} &= (-\frac{1}{2m}\nabla'^2 + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}'^2 + \frac{iq}{mc}\vec{A}'\cdot\nabla' + \frac{iq}{2mc}\nabla'\cdot\vec{A}' - \frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}' + qV'\\ &+ \frac{v^1}{c}(\frac{q^2}{mc^2}A'^1V' - \frac{q}{2}A'^1 - \frac{q}{2}\beta V' + V'\frac{\partial}{\partial x'^1} + \frac{iq}{2mc}\frac{\partial V'}{\partial x'^1} - \frac{q}{2mc}(\vec{\sigma}\times\vec{E}')_1 + qA'^1))\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

tomando la aproximación $\beta = \frac{v^1}{c} \ll 1$ el término multiplicado por ésta es despreciable frente al resto de la ecuación anterior. Así tenemos la invariancia galileana de la ecuación de Schrödinger-Pauli para el espinor que representa al electrón.

Análogamente podemos probar la invariancia galileana de la correspondiente función de onda que representa al “positrón”en el límite no relativista.
Llamemos:

$$\begin{aligned}S_c = -m(\vec{v}\cdot\vec{x'} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2t') = -S,\\ -v^*(t,\vec{x}) = -v^*, u^*(t,\vec{x}) = u^*,\\ -\tilde{v}^*(t',\vec{x'}) = -\tilde{v}^*, \tilde{u}^*(t',\vec{x'}) = \tilde{u}^*\end{aligned}$$

Entonces desarrollando el lado izquierdo de (2.35) como se hizo para la función de onda del electrón en este límite, se tiene:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(i\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - i\vec{v}\cdot\nabla')\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

Los términos del lado derecho de (2.35) se analizan a continuación:

$$\frac{\nabla^2}{2m}\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(\frac{\nabla'^2}{2m} - \frac{m}{2}|\vec{v}|^2 - i\vec{v}\cdot\nabla')\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

Para el segundo:

$$\frac{-q^2}{2mc^2}\vec{A}^2\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(-\frac{q^2}{2mc^2}\vec{A'}^2 - \frac{q^2}{mc^2}\beta A'^2 V')\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

El tercero,

$$\frac{iq}{2mc}\nabla\cdot\vec{A}\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = \frac{iq}{2mc}e^{iS_c}(\nabla'\cdot\vec{A}' + \beta\frac{\partial V'}{\partial x'^1})\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

Para el cuarto término:

$$\frac{iq}{2mc}\vec{A}\cdot\nabla\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(\frac{q}{c}\vec{A}'\cdot\vec{v} + \frac{iq}{mc}\vec{A}'\cdot\nabla' + \frac{q}{c}\beta V'^1 + \frac{iq}{mc}\beta V'\frac{\partial}{\partial x'^1})\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

del siguiente término,

$$-\frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(-\frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}' - \frac{q}{2mc}\beta(\vec{\sigma}\times\vec{E}')_1)\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad ,$$

Por último,

$$-qV\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = e^{iS_c}(-qV' - q\beta A'^1)\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \quad .$$

nótese que hemos mantenido las ecuaciones anteriores a orden β. Sustituyendo los términos anteriores en (2.35) y reduciendo, obtenemos:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t'}\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} &= (\frac{\nabla'^2}{2m} + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A'}^2 + \frac{iq}{2mc}\nabla'\cdot\vec{A}' + \frac{iq}{mc}\vec{A}'\cdot\nabla' - \frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}' - qV' \\ &+\beta(-\frac{q^2}{mc^2}A'^1V' + \frac{iq}{2mc}\frac{\partial V'}{\partial x'^1} + qA'^1 + \frac{q}{c}V'^1 + \frac{iq}{mc}V'\frac{\partial}{\partial x'^1} - \frac{q}{2mc}(\vec{\sigma}\times\vec{E}')_1 - qA'^1))\begin{pmatrix}-\tilde{v}^* \\ \tilde{u}^*\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nuevamente tomando la aproximación $\beta \ll 1$, en la ecuación anterior, se muestra la invariancia galileana.

A continuación se mostrará que las ecuaciones (2.29), (2.35), son transformadas una en la otra al aplicar la matriz C_{nr} correspondiente a la transformación de conjugación de carga del mismo modo que C transforma (1.15) en (1.16) en el caso relativista, reflejando el carácter galileano de la aproximación C_{nr} de C.

Entonces aplicando la matriz C_{nr} a (2.29) y recordando (2.36) tenemos:

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} = \frac{1}{2m}(-\nabla^2 + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2 - \frac{iq}{c}\nabla\cdot\vec{A} - \frac{2iq}{c}\vec{A}\cdot\nabla)\begin{pmatrix}-v^* \\ u^*\end{pmatrix} - \frac{q}{2mc}C_{nr}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}) \tag{2.44}$$

Desarrollando el último término,

$$
\begin{aligned}
C_{nr}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\begin{matrix}u\\v\end{matrix}) &= C_{nr}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(-C_{nr}C_{nr})\begin{matrix}u\\v\end{matrix}) = -(C_{nr}(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})C_{nr})\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix}\\
&= -(\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix}(K\vec{\sigma}K)\cdot\vec{B})\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix})\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix} = -(\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix}\sigma_j^*\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix}B_j)\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix}\\
&= -(\vec{\sigma}\cdot\vec{B})\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix}
\end{aligned}
$$

donde se ha introducido el elemento identidad $-C_{nr}C_{nr}$ en la primera igualdad y

$$
\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix}\sigma_j^*\begin{matrix}0 & -1\\1 & 0\end{matrix} = (-i\sigma_2)\sigma_j^*(-i\sigma_2) = -\sigma_2\sigma_j^*\sigma_2 = \begin{cases}\sigma_2\sigma_1^*\sigma_2 = \sigma_2 i\sigma_3 = -\sigma_1,\\ -\sigma_2\\ -\sigma_3\end{cases}
$$

Con lo cual la ecuación (2.44) es,

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix} = \frac{1}{2m}(\nabla^2 - \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2 + i\frac{q}{c}\nabla\cdot\vec{A} + \frac{2iq}{c}\vec{A}\cdot\nabla - \frac{q}{2mc}\vec{\sigma}\cdot\vec{B} - qV)\begin{matrix}-v^*\\u^*\end{matrix}
$$

que corresponde a la ecuación (2.35).

2.5.3. Argumento en Teoría de Campos.

Para definir el operador $\mathbf{C}$ correspondiente a C en el límite no relativista, es suficiente estudiar la parte finita del operador de densidad de energía para el campo de Dirac libre:

$$
p_0 = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}k_0\sum(N_\alpha(\vec{k}) + \bar{N}_\alpha(\vec{k}))
$$

donde $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, $N_\alpha(\vec{k})$ y $\bar{N}_\alpha(\vec{k})$ son los operadores de número de ocupación para electrones y positrones respectivamente, relacionados con los correspondientes operadores de creación y aniquilación a través de:

$$
N_\alpha(\vec{k})(2\pi)^3\delta^3(0)\frac{k_0}{m} = b_\alpha^\dagger(\vec{k})b_\alpha(\vec{k}) \tag{2.45}
$$

$$
\overline{N}_\alpha(\vec{k})(2\pi)^3\delta^3(0)\frac{k_0}{m} = d_\alpha^\dagger(\vec{k})d_\alpha(\vec{k}) \tag{2.46}
$$

en el límite de volumen infinito $V = (2\pi)^3\delta^3(0) = \infty$

el desarrollo de la raíz cuadrada de k_0 se considera hasta primer orden en (2.45), m corresponde a la energía en reposo y $\frac{|\vec{k}|^2}{2m}$ la energía cinética clásica.
Salvo un operador constante infinito correspondiente a m, el operador de densidad de energía para un sistema electrón-positrón no relativista estará dado por:

$$
p_0^{nr} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{|\vec{k}|^2}{2m}\sum(N_\alpha(\vec{k}) + \bar{N}_\alpha(\vec{k}))
$$

Se identifica que la densidad hamiltoniana es invariante bajo el operador [Wolfenstein],

$$
\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha} = \Pi\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha}
$$

donde

$$\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha} = 1 - 2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha} \text{ y } \beta_{\vec{k},\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},\alpha} - d_{\vec{k},\alpha}).$$

Ya que

$$\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}_{\vec{k'},\alpha'} = \mathbf{C}_{\vec{k'},\alpha'}\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha}$$

dado que los operadores de creación y aniquilación conmutan para $(\vec{k},\alpha)$ y $(\vec{k'},\alpha')$ distintos. Entonces, para un valor particular del momento $\vec{k}$ y uno de los dos valores del espín α, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{C^2} &= (\Pi_{\vec{k},\alpha}(1-2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}))(\Pi_{\vec{k},\alpha}(1-2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha})) = \Pi_{\vec{k},\alpha}(1-2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha})(1-2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}) = \\ &\Pi_{\vec{k},\alpha}(1-4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}+4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}) = \Pi_{\vec{k},\alpha}(1-4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}+4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}(1-\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha})\beta_{\vec{k},\alpha} = \\ &\Pi_{\vec{k},\alpha}(1-4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}+4\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}-4(\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha})^2(\beta_{\vec{k},\alpha})^2) = 1,\end{aligned}$$

se ha usado que el anticonmutador $\{\beta_{\vec{k},\alpha},\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = 1$ debido a :

$$\{\beta_{\vec{k},\alpha},\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = \frac{1}{2}\{(b_{\vec{k},\alpha}-d_{\vec{k},\alpha}),(b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}-d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha})\} = \frac{1}{2}(\{b_{\vec{k},\alpha},b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\}+\{d_{\vec{k},\alpha},d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\}-\{b_{\vec{k},\alpha},d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\}-\{d_{\vec{k},\alpha},b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\}) = 1$$

dado que $\{b_{\vec{k},\alpha},d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = \{d_{\vec{k},\alpha},b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = 0$ y $\{b_{\vec{k},\alpha},b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = \{d_{\vec{k},\alpha},d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = 1$, la última igualdad se ha simplificado, dado que se está considerando el volumen infinito $\frac{k_0}{m}(2\pi)^3\delta^3(\vec{k},\vec{k'})$ normalizado, así $\{\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha},\beta_{\vec{k},\alpha}\} = 1$.

Además se tiene:

$$\mathbf{C}^{\dagger}_{\vec{k},\alpha} = (\Pi_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}_{\vec{k},\alpha})^{\dagger} = \Pi_{\vec{k},\alpha}(1-2\beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\beta_{\vec{k},\alpha}) = \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1},$$

la última igualdad se sigue del resultado $\mathbf{C}^2 = 1$. Así $\mathbf{C}$ es un operador unitario, hermitiano y antilineal. Dado que

$$\mathbf{C}\eta_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = \eta_{\vec{k},\alpha} \text{ y } \mathbf{C}\beta_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = -\beta_{\vec{k},\alpha}$$

con $\eta_{\vec{k},\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},\alpha} + d_{\vec{k},\alpha})$, la expresión anterior implica,

$$\mathbf{C}\eta_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = \eta_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C} \text{ y } \mathbf{C}\beta_{\vec{k},\alpha} = -\beta_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C},$$

es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{C}(b_{\vec{k},\alpha}+d_{\vec{k},\alpha})\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},\alpha}+d_{\vec{k},\alpha}) \text{ y } \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{C}(b_{\vec{k},\alpha}-d_{\vec{k},\alpha})\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\vec{k},\alpha}-d_{\vec{k},\alpha})$$

y sus correspondientes conjugados hermitianos. Sumando y restando las anteriores expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}b_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = d_{\vec{k},\alpha}\ &,\ \mathbf{C}d_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = b_{\vec{k},\alpha} \\ \mathbf{C}b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\ &,\ \mathbf{C}d^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = b^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\end{aligned}$$

que es la acción de $\mathbf{C}$ cambiando partículas por antipartículas y viceversa, con lo cual

$$\mathbf{C}N_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = N_{\vec{k},\alpha} \text{ y } \mathbf{C}\bar{N}_{\vec{k},\alpha}\mathbf{C}^{-1} = \bar{N}_{\vec{k},\alpha}$$

dejando invariante el operador de densidad de energía. Entonces en el límite no relativista **C** puede ser identificado como el operador de conjugación de carga.

Es útil saber el valor de los anticonmutadores siguientes: $\{\eta_{\vec{k},\alpha}, \eta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = 1$ y $\{\eta_{\vec{k},\alpha}, \beta_{\vec{k},\alpha}\} = \{\eta_{\vec{k},\alpha}, \beta^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}\} = 0$.

2.5.4. Descripción en Teoría de Haces.

Una forma para introducir la transformación de conjugación de carga para el límite no relativista en la descripción geométrica de haces y dar una interpretación de ésta en el espacio tiempo, es mediante la identificación de C_{nr} como un elemento de $\mathbb{Z}_4$, la definición de un homomorfismo que llamaremos $Q : (S_{\pm}U(2) \times \mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_4 \to O(3)^3 \times (\mathbb{Z}_2)^2$ y la complexificación de las coordenadas espaciales, $\vec{x} \to \vec{x}^*$ sera la aplicación de la transformación de conjugación de carga.

Para ello nótese la existencia del isomorfismo de espacios vectoriales entre M^4 y $H(2)$ es decir entre el espacio $\mathbb{R}^4$ con la métrica de Minkowski y el grupo de matrices de 2×2, hermitianas, respectivamente.

Si $x \in M^4$ un cuadrivector, entonces tiene asociada una matriz dada por $\tilde{x} = x_0 \mathbb{I} + \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$, donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli. Inversamente, para cada matriz en $H(2)$ determina un cuadrivector vía

$$x_{\mu} = \frac{1}{2} tr(\bar{x}\sigma_{\mu})$$

Así $SL_2(\mathbb{C})$ es la cubierta universal de $\mathcal{L}_0 = \{\Lambda \in \mathcal{L} | \Lambda^0_0 \leqslant 1, det(\Lambda) = 1\}$, la componente conexa del grupo de Lorentz $\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbb{R}(4) | \Lambda\eta\Lambda^T = \eta\}$, mediante el epimorfismo:

$$\lambda : SL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}_0$$

dado por, $\lambda(A)(\tilde{x}) = A\tilde{x}A^*$. [**?**, páginas 2,6]

Siguiendo la complexificación estándar del grupo de Lorentz (Referencia S-W),

$$(\mathcal{L})^c = \{\Lambda \in \mathbb{C}(4) | \Lambda\eta\Lambda^T = \eta\}$$

donde $\eta = diag(1, -1, -1, -1)$.

$SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$ resulta ser el espacio cubriente de $(L_0)^c$ mediante el mapeo π_c dada por:

$$\pi_c(A, B)(\tilde{x}) = A\tilde{x}B^{\dagger}$$

con $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ [Streater-Wightman, página 14].

Dada la complexificación del grupo de Lorentz, las coordenadas del espacio-tiempo x^{μ} no son necesariamente reales, pueden tomar valores complejos, y lo mismo se aplica a cualquier subgrupo de $(\mathcal{L})^c$. En principio este es un hecho matemático y no se le atribuye un significado físico a la parte imaginaria de las coordenadas.

Sin complexificar los grupos tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
SL_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "p"] & SU(2) \arrow[l, "\iota'"'] \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\pi"] & S_{\pm}U(2) \arrow[r, "\iota''"] \arrow[d, "\Pi"] & S_{\pm}U(2) \times \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "q"] \\
\mathcal{L}_0 & SO(3) \arrow[l, "\bar{\iota}'"'] \arrow[r, "\bar{\iota}"] & O(3) \arrow[r, "\bar{\iota}''"] & O(3) \times \mathbb{Z}_2
\end{tikzcd} \tag{2.47}$$

con las inclusiones canónicas $\iota', \iota'', \bar{\iota'}, \bar{\iota''}$ y proyecciones definidas en (2.4), (2.5), (2.14).

De un modo similar, la complexificación de los grupos $O(3)$ y su restricción $SO(3)$, se hace a continuación:

$$
\begin{aligned}
&(O(3))^c \equiv O(3)^c = \{A \in \mathbb{C}(3) | AA^\dagger = 1\} \\
&(O(3))^c \supset SO(3)^c = \{det(A) = 1\}
\end{aligned}
$$

El diagrama conmutativo correspondiente a (2.47) haciendo la complexificación de los grupos es:

$$
\begin{tikzcd}
SU(2) \times SU(2) \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, "\pi_c"'] & S_\pm U(2) \times S_\pm U(2) \arrow[r, "\iota_c''"] \arrow[d, "\Pi_c"'] & (S_\pm U(2) \times \mathbb{Z}_2)^2 \arrow[r, "\iota_c'''"] \arrow[d, "q_c"'] & (S_\pm U(2) \times \mathbb{Z}_2)^2 \times \mathbb{Z}_4 \arrow[d, "Q"'] \\
SO(3)^c \arrow[r, "\bar{\iota_c}"'] & O(3)^c \arrow[r, "\bar{\iota}_c''"'] & O(3)^c \times \mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\bar{\iota}_c'''"'] & O(3)^c \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}
\tag{2.48}
$$

Se identificará la transformación de conjugación de carga como el elemento κ de $\mathbb{Z}_4 \cong \{1, -1, \kappa, -\kappa\}$, es decir:

$$C_{nr} \equiv \kappa$$

ya que $\kappa^2 = -1$.

Para $(A, B) \in SU(2) \times SU(2)$, la proyección π_c, esta dado por:

$$\pi_c(A, B)(\tilde{\vec{x}}) := A\tilde{\vec{x}}B^\dagger, \tag{2.49}$$

donde $\tilde{\vec{x}} \in \mathbb{C}(2)$ definido por $\tilde{\vec{x}} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3$.

Definiendo,

$$(\pi_c(A, B))^\dagger(\tilde{\vec{x}}) = A^\dagger\tilde{\vec{x}}B$$

entonces,

$$\pi_c(A, B)\circ(\pi_c(A, B))^\dagger(\tilde{\vec{x}}) = \pi_c(A, B)(\pi_c(A, B)^\dagger(\tilde{\vec{x}})) = \pi_c(A, B)(A\tilde{\vec{x}}B^\dagger) = A(A^\dagger\tilde{\vec{x}}B)B^\dagger = (AA^\dagger)\tilde{\vec{x}}(BB^\dagger) = \tilde{\vec{x}}$$

dado que $A^\dagger = A^{-1}$ y $B^\dagger = B^{-1}$ ya que $A, B \in SU(2)$, con lo cual confirma $\pi_c(A, B) \in SO(3)^c \subset O(3)^c$.

π_c es un homomorfismo:

$$
\begin{aligned}
\pi_c((A, B) \cdot (A', B'))(\tilde{\vec{x}}) &= \pi_c(AA', BB')(\tilde{\vec{x}}) = (AA')\tilde{\vec{x}}(BB')^\dagger = A(A'\tilde{\vec{x}}B'^\dagger)B^\dagger \\
&= \pi_c(A, B)(\pi_c(A', B')(\tilde{\vec{x}})) = \pi_c(A, B)\pi_c(A', B')(\tilde{\vec{x}})
\end{aligned}
$$

y $\pi_c(\mathbb{I}, \mathbb{I})(\tilde{\vec{x}}) = \tilde{\vec{x}}$.

Si $A, B \in S_\pm U(2)$, Π_c es un homomorfismo definido:

$$\Pi(A, B)(\tilde{\vec{x}}) = A^\dagger\tilde{\vec{x}}B \tag{2.50}$$

Para $((A,\mu),(B,\nu))$ en $(S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)\times(S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)$ definimos q_c como:

$$q_c((A,\mu),(B,\nu)) = (\Pi_c(A,B),\mu\nu) \in O(3)^c \times \mathbb{Z}_2. \tag{2.51}$$

q_c es un homomorfismo también:

$$\begin{aligned} q_c(((A,\mu),(B,\nu))\cdot((A',\mu'),(B',\nu'))) &= q_c((A,\mu)\cdot(A',\mu'),(B,\nu)\cdot(B',\nu')) \\ &= q_c((AA',\mu\mu'),(BB',\nu\nu')) = (\Pi_c(AA',BB'),\mu\mu'\nu\nu') \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} q_c((A,\mu),(B,\nu))q_c((A',\mu'),(B,\nu')) &= (\Pi_c(A,B),\mu\nu)(\Pi_c(A',B'),\mu'\nu') \\ &= (\Pi_c(A,B)\cdot\Pi_c(A',B'),\mu\nu\mu'\nu') = (\Pi_c(AA',BB'),\mu\mu'\nu\nu'), \end{aligned}$$

la última igualdad se da ya que Π_c es un homomorfismo, además $q_c((\mathbb{I},1),(\mathbb{I},1)) = (\mathbb{I},1)$.

De la identificación de $C_{nr} = \kappa \in \mathbb{Z}_4$, se incorpora en el grupo $(S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)^2\times\mathbb{Z}_4$ que se proyecta mediante Q a $O(3)^c\times(\mathbb{Z}_2)^2$ como se indica en el diagrama anterior.

El mapeo Q se define a continuación:

$$Q((A,\mu),(B,\nu),\lambda) = (q_c((A,\mu),(B,\nu)),\tilde{\eta}) \tag{2.52}$$

donde,

$$\tilde{\eta} = \begin{matrix} 1 & \text{si } \lambda = 1 \text{ o } \lambda = -1, \\ -1 & \text{si } \lambda = \kappa \text{ o } \lambda = -\kappa \end{matrix}$$

Q es un homomorfismo ya que:

$$\begin{aligned} Q(((A,\mu),(B,\nu),\lambda)\cdot((A',\mu'),(B',\nu'),\lambda')) &= Q((A,\mu)\cdot(A',\mu'),(B,\nu)\cdot(B',\nu'),\lambda\lambda') \\ &= Q((AA',\mu\mu'),(BB',\nu\nu'),\lambda\lambda') = (q_c((AA',\mu\mu')),(BB',\nu\nu'),\tilde{\eta}) \\ &= (\Pi_c(AA',BB'),\ \mu\mu'\nu\nu',\tilde{\eta}) \end{aligned}$$

con,

$$\tilde{\eta} = \begin{matrix} 1 & \text{si } \lambda\lambda' = 1 \text{ o } \lambda\lambda' = -1, \\ -1 & \text{si } \lambda\lambda' = \kappa \text{ o } \lambda\lambda' = -\kappa \end{matrix}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} &Q((A,\mu),(B,\nu),\lambda)\cdot Q((A',\mu'),(B',\nu'),\lambda') = (q_c((A,\mu),(B,\nu)),\tilde{\eta}')\cdot(q_c((A',\mu'),(B',\nu')),\tilde{\eta}'') \\ &= (q_c((A,\mu)\cdot(A',\mu'),(B,\nu)\cdot(B',\nu')),\tilde{\eta}'\tilde{\eta}'') = (q_c((AA',\mu\mu'),(BB',\nu\nu')),\tilde{\eta}'\tilde{\eta}'') \\ &= (\Pi(AA',BB'),\mu\mu'\nu\nu',\tilde{\eta}'\tilde{\eta}'') \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{\eta}' = \begin{matrix} 1 & \text{si } \lambda = 1 \text{ o } \lambda = -1, \\ -1 & \text{si } \lambda = \kappa \text{ o } \lambda = -\kappa \end{matrix}$$

y

$$\tilde{\eta}'' = \begin{matrix} 1 & \text{si } \lambda' = 1 \text{ o } \lambda' = -1, \\ -1 & \text{si } \lambda' = \kappa \text{ o } \lambda' = -\kappa \end{matrix}$$

con $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}'\tilde{\eta}''$.

Dado que existe una sucesión exacta corta,

$$0 \to A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \to 0$$

donde $A \cong Im(\alpha) = ker(\beta)$.

Con el cual podemos construir el haz fibrado principal $A \to B \to C$ donde B es el espacio base, C el espacio total , A la fibra y grupo de estructura.

Se tiene el grupo $\mathbb{Z}_2$ como A, en la sucesión anterior, para los mapeos $SU(2) \times SU(2) \overset{\pi_c}{\to} SO(3)^c$ y $S_{\pm}U(2) \times S_{\pm}U(2) \overset{\Pi_c}{\to} O(3)^c$ dado que los únicos elementos que van al cero del grupo son aquellos para los cuales $A = B = \pm\mathbb{I}$ y $\{1, -1\} \cong \mathbb{Z}_2$.

Para la proyección q_c, el cero de grupo $O(3)^c \times \mathbb{Z}_2$ es $(\mathbb{I}, 1)$ entonces:

$$q_c((A, \mu), (B, \nu)) = (\Pi_c(A, B), \mu\nu) = (\mathbb{I}, 1)$$

entrada por entrada, $\Pi_c(A, B) = \mathbb{I}$ y $\mu\nu = 1$ se da siempre que $A = B = 1$ o $A = B = -1$ y $\mu = \nu = 1$ o $\mu = \nu = -1$ respectivamente, con lo cual tenemos el conjunto

$$ker(q_c) = \{((\mathbb{I}, 1), (\mathbb{I}, 1)), ((\mathbb{I}, -1), (\mathbb{I}, -1)), ((-\mathbb{I}, 1), (-\mathbb{I}, 1)), ((-\mathbb{I}, -1), (-\mathbb{I}, -1))\}$$

con tabla de multiplicar la siguiente:

	$((I,1),(I,1))$	$((I,-1),(I,-1))$	$((-I,1),(-I,1))$	$((-I,-1),(-I,-1))$
$((I,1),(I,1))$	$((I,1),(I,1))$	$((I,-1),(I,-1))$	$((-I,1),(-I,1))$	$((-I,-1),(-I,-1))$
$((I,-1),(I,-1))$	$((I,-1),(I,-1))$	$((I,1),(I,1))$	$((-I,-1),(-I,-1))$	$((-I,1),(-I,1))$
$((-I,1),(-I,1))$	$((-I,1),(-I,1))$	$((-I,-1),(-I,-1))$	$((I,1),(I,1))$	$((I,-1),(I,-1))$
$((-I,-1),(-I,-1))$	$((-I,-1),(-I,-1))$	$((-I,1),(-I,1))$	$((I,-1),(I,1))$	$((I,1),(I,1))$

(en la tabla hemos denotado $I = \mathbb{I}$.) generando un grupo isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con la asignación:

$$\begin{aligned} ((I,1),(I,1)) &\to (1,1), \\ ((I,-1),(I,-1)) &\to (1,-1), \\ ((-I,1),(-I,1)) &\to (-1,1), \\ ((-I,-1),(-I,-1)) &\to (-1,-1). \end{aligned}$$

Gráficamente tenemos:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to (S_{\pm}U(2)) \times (S_{\pm}U(2)) \to O(3)^c \times \mathbb{Z}_2.$$

Únicamente falta encontrar la fibra del haz cuya función proyección es Q, nuevamente se encontrarán los elementos en $(S_{\pm}U(2) \times \mathbb{Z}_2) \times (S_{\pm}U(2) \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_4$, tales que bajo Q sean el cero del grupo $O(3)^c \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, el cual es $(\mathbb{I}, 1, 1)$. Así

$$Q((A,\mu),(B,\nu),\lambda) = (q_c((A,\mu),(B,\nu)),\tilde{\eta}) = (\Pi_c(A,B),\mu\nu,\lambda) = (\mathbb{I},1,1)$$

para,

$$\Pi_c(A,B) = I, \mu\nu = 1 \text{ y } \tilde{\eta} = 1,$$

anteriormente se vio que para satisfacer las dos primeras igualdades, es necesario que $A = B = 1$ o $A = B = -1$ y $\mu\nu = 1$ o $\mu\nu = -1$, según la definición (2.52), si $\tilde{\eta} = 1$ significa que $\lambda = \pm 1$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} ker(Q) = \{&((I,1),(I,1),1),((I,-1),(I,-1),1),((-I,1),(-I,1),1),((-I,-1),(-I,-1),1) \\ &((I,1),(I,1),-1),((I,-1),(I,-1),-1),((-I,1),(-I,1),-1),((-I,-1),(-I,-1),-1)\} \end{aligned}$$

con tabla de multiplicar:

	((I,1),(I,1),1)	((I,-1),(I,-1),1)	((-I,1),(-I,1),1)	((-I,-1),(-I,-1),1)
((I,1),(I,1),1)	((I,1),(I,1),1)	((I,-1),(I,-1),1)	((-I,1),(-I,1),1)	((-I,-1),(-I,-1),1)
((I,-1),(I,-1),1)	((I,-1),(I,-1),1)	((I,1),(I,1),1)	((-I,-1),(-I,-1),1)	((-I,1),(-I,1),1)
((-I,1),(-I,1),1)	((-I,1),(-I,1),1)	((-I,-1),(-I,-1),1)	((I,1),(I,1),1)	((I,-1),(I,-1),1)
((-I,-1),(-I,-1),1)	((-I,-1),(-I,-1),1)	((-I,1),(-I,1),1)	((I,-1),(I,1),1)	((I,1),(I,1),1)

la continuación de la tabla hacia la derecha es la siguiente:

	((I,1),(I,1),-1)	((I,-1),(I,-1),-1)	((-I,1),(-I,1),-1)	((-I,-1),(-I,-1),-1)
((I,1),(I,1),1)	((I,1),(I,1),-1)	((I,-1),(I,-1),-1)	((-I,1),(-I,1),-1)	((-I,-1),(-I,-1),-1)
((I,-1),(I,-1),1)	((I,-1),(I,-1),-1)	((I,1),(I,1),-1)	((-I,-1),(-I,-1),-1)	((-I,1),(-I,1),-1)
((-I,1),(-I,1),1)	((-I,1),(-I,1),-1)	((-I,-1),(-I,-1),-1)	((I,1),(I,1),-1)	((I,-1),(I,-1),-1)
((-I,-1),(-I,-1),1)	((-I,-1),(-I,-1),-1)	((-I,1),(-I,1),-1)	((I,-1),(I,1),-1)	((I,1),(I,1),-1)

El grupo generado es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con la asignación:

$$\begin{aligned} ((I,1),(I,1),1) &\to (1,1,1) \\ ((I,-1),(I,-1),1) &\to (1,-1,1) \\ ((-I,1),(-I,1),1) &\to (-1,1,1) \\ ((-I,-1),(-I,-1),1) &\to (-1,-1,1) \\ ((I,1),(I,1),-1) &\to (1,1,-1) \\ ((I,-1),(I,-1),-1) &\to (1,-1,-1) \\ ((-I,1),(-I,1),-1) &\to (-1,1,-1) \\ ((-I,-1),(-I,-1),-1) &\to (-1,-1,-1) \end{aligned}$$

Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo de haces:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[d] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d] & (\mathbb{Z})^2 \arrow[d] & (\mathbb{Z}_2)^3 \arrow[d] \\
SU(2)\times SU(2) \arrow[r, "\iota_c"] \arrow[d, "\pi_c"'] & S_{\pm}U(2)\times S_{\pm}U(2) \arrow[r, "\iota_c''"] \arrow[d, "\Pi_c"'] & (S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)^2 \arrow[r, "\iota_c'''"] \arrow[d, "q_c"'] & (S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)^2\times\mathbb{Z}_4 \arrow[d, "Q"'] \\
SO(3)^c \arrow[r, "\bar{\iota_c}"'] & O(3)^c \arrow[r, "\bar{\iota_c''}"'] & O(3)^c\times\mathbb{Z}_2 \arrow[r, "\bar{\iota_c'''}"'] & O(3)^c\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd} \tag{2.53}$$

La identificación de κ con C_{nr}, la definición de Q, la complexificación de las coordenadas espaciales coordenadas, nos permite definir,

$$Q((\mathbb{I},1),(\mathbb{I},1),\pm 1)(\tilde{\vec{x}}) = \tilde{\vec{x}} \tag{2.54}$$

y

$$Q((\mathbb{I},1),(\mathbb{I},1),\pm\kappa) = (\tilde{\vec{x}})^* \tag{2.55}$$

Como una curiosidad matemática se dará a continuación la introducción de la acción de los operadores paridad e inversión temporal como elementos de grupo $(S_{\pm}U(2)\times\mathbb{Z}_2)^2\times\mathbb{Z}_4$, siguiendo lo que se hizo en la primera sección del capítulo 2.

La operación de Paridad, Inversión Temporal los calculamos usando las definiciones (2.52) como:

$$((\hat{P},1),(I,1),\pm 1) = (q_c((\hat{P},1),(I,1)),\tilde{\eta}) = (q_c((\hat{P},1),(I,1)),1) = (\Pi_c(\hat{P},I),1,1)$$

entonces actuado sobre $\hat{\vec{x}}$ visto como una matriz.

$$(\Pi_c(\hat{P},I),1,1)(\hat{\vec{x}}) = \hat{P}^{\dagger}\hat{\vec{x}}I = i\hat{\vec{x}}$$

Para el elemento

$$(\Pi_c(\hat{P},I),1,\pm\kappa)(\hat{\vec{x}}) = (\hat{P}^{\dagger}\hat{\vec{x}}I) = \pm i\hat{\vec{x}}^*$$

que correspondería a la operación de paridad-conjugación de carga [Cabo].

De manera análoga tenemos los siguiente:

$$Q((I,1),(\hat{T},-1),\pm 1)(\hat{\vec{x}}) = (\hat{\vec{x}}\hat{T}) \text{ Inversión de Tiempo}$$
$$Q((I,1),(\hat{T},-1),\pm\kappa)(\hat{\vec{x}}) = (\hat{\vec{x}}\hat{T})^* \text{ Inversión de Tiempo-Conjugación de Carga}$$
$$Q((\hat{P},1),(\hat{T},-1),\pm 1)(\hat{\vec{x}}) = -\hat{P}^{\dagger}\hat{\vec{x}}\hat{T} \text{ Paridad-Inversión de Tiempo}$$
$$Q((\hat{P},1),(\hat{T},-1),\pm\kappa)(\hat{\vec{x}}) = (\hat{P}^{\dagger}\hat{\vec{x}}\hat{T})^* \text{ Paridad-Inversión de Tiempo-Conjugación de Carga}$$

A pesar de que las tres operaciones están en el mismo espacio complexificado, hay que señalar claramente; que lo anterior no se reduce al caso del espacio coordenado real.

Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado:

1. Una descripción en teoría de haces fibrados principales de las transformaciones C, P y T en el límite relativista, notando la acción de éstas sobre los elementos en el álgebra de Dirac D^{16}.

2. Extendiendo el grupo de Galileo y mediante el análisis de componentes "pequeñas" y "grandes", se encuentra una representación matricial de las transformaciones $\hat{P}$, $\hat{T}$ y $\hat{P}\hat{T}$, así como su acción sobre espinores de dos componentes.

3. Se construye el haz $\Xi : \mathbb{Z}_2 \to (SU(2) \odot \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \to O(3) \times \mathbb{Z}_2$ el cual resume toda la geometría de las transformaciones paridad e inversión temporal de los espinores de Pauli.

4. Se encontró la transformación conjugación de carga (C) en la mecánica cuántica no relativista, derivada de la teoría relativista usando $|\beta| \ll 1$, para el caso concreto del campo de Dirac acoplado a un campo electromagnético externo. En este trabajo no se considera la cuantización de los campos, lo que se considerará en trabajos posteriores.

5. Mediante una descripción geométrica en teoría de haces fibrados principales, se da un interpretación a la acción de la trasformación no relativista de la conjugación de carga C_{nr}, en el espacio complexificado como $\vec{x} \to \vec{x}^*$ donde $(*)$ es la operación de conjugación compleja, notesé que no atribuimos significado físico a esta transformación.

Apéndice A

Sucesión exacta corta.

Sea la sucesión de grupos A, B, C y homomorfismos $\iota_0, \alpha, \beta, p_0$

$$0 \xrightarrow{\iota_0} A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{p_0} 0. \tag{A.1}$$

decimos que la sucesión es exacta en B si $Im(\alpha) \cong ker(\beta)$, en A significa $Im(\iota_0) = ker(\alpha)$, con lo cual implica α es inyectiva, pero al ser un homomorfismo de grupos, ésta es un monomorfismo; exacta en C: $Im(\beta) = ker(p_0) = C$ implica que β es sobre, es decir β es un epimorfismo.
Se dice entonces que B es una **extensión** de A por C (Mac Lane, S. y Birkoff, G.)
Para $B = A \times C$, se dice que la extensión es trivial:

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} A \times C \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

donde, $\alpha(a) = (a, e_C)$, $\beta(a, c) = c$ y e_C es el elemento identidad en C.

Teorema 1 *Sea la sucesión exacta corta (A.1), entonces:*

$$C \cong \frac{B}{A}.$$

Ejemplo 1 *Para la sucesión,*

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\iota} SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3) \to 0$$

se tiene:

$$SO(3) \cong \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2}$$

donde π es la proyección de Hopf.

Definición 1 *Una extensión es* **central** *si*

$$\alpha(A) = Im(\alpha) \subset Z(B) \text{ (el centro de B).}$$

Definición 2 *Una extensión es* **abeliana** *si A es abeliano.*

Definición 3 *Una extensión (A.1) se* **escinde**, *si existe un homomorfismo $\gamma : C \to B$ tal que $\beta \circ \gamma = Id_C$.*

Teorema 2 *Si (A.1) se escinde, entonces B es isomorfo al* ***producto semidirecto determinado por*** *phi de A por C. El producto semidirecto se denota por $A \times_\phi C$ (cuando ϕ está sobreentendida, se puede escribir $A \times_\phi C \equiv A \odot C$, y como conjuntos $A \odot C \cong A \times C$), ψ da el isomorfismo entre los grupos:*

$$\psi : A \times_\phi C \to B$$

dado por $\psi(a,c) = \alpha(a)\gamma(c)$ (producto en B), la composición en $A \times_\phi C$ es $(a',c')(a,c) = (a' \cdot (\phi(c')(a)), c'c)$ donde $\cdot$ es la composición en A, y $\phi : C \to Aut(A)$, $\phi(c)(a) = \gamma(c)\alpha(a)\gamma(c)^{-1}$.

Ejemplo 2 *$\mathcal{P} = \{(a,\lambda), a \in \mathcal{T}$ traslaciones $, \lambda \in \mathcal{L}\}$ el grupo de Poicaré, T el grupo de Lorentz. Sabemos que $\mathcal{P} = \mathcal{T} \times_\phi \mathcal{L}$. Tenemos la sucesión exacta corta:*

$$0 \to \mathcal{T} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P} \xrightarrow{\beta} \mathcal{L} \to 0$$

Donde $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ dado por $\gamma(\lambda) = (0,\lambda)$, $\alpha(a) = (a,1)$, $\beta(a,\lambda) = \lambda$.
Damos el isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi &= \mathcal{T} \odot \mathcal{L} \to \mathcal{P}, \\ \psi(a,\lambda) &= (a,1)(0,\lambda) = (a + \lambda \cdot 0, 1 \cdot \lambda) = (a,1). \\ (a',\lambda')(a,\lambda) &= (a' + \lambda' a, \lambda'\lambda) \end{aligned}$$

Apéndice B

Haces Fibrados.

B.0.1. Haz Fibrado Principal.

Un **G − haz fibrado principal** es un sexteto $\xi = (P, B, \pi, G, \mathcal{U}, \psi)$ donde P el espacio total y B el espacio base son espacios topológicos, $P \xrightarrow{\pi} B$ (proyección) es una función suprayectiva, G (grupo de estructura y fibra) es un grupo topológico, que actua por la derecha libremente en P, a través de $P \times G \xrightarrow{\psi} P$, $\psi(p, g) = \psi_g(p) = pg$, $\psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}}$, y es transitiva sobre fibras. Se tiene un conjunto de trivializaciones locales, es decir para cada $b \in B$ existe un abierto U de B, con $b \in U$, y un homomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \times G \arrow[r, "\varphi_U \times Id_G"] \arrow[d, "\psi|"'] & (U \times G) \times G \arrow[d, "\psi_0"] \\
\pi^{-1}(U) \subset P \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi|"'] & U \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U \subset B &
\end{tikzcd}$$

donde $\psi|$ es la restricción de ψ, π_1 es la proyección en el primer factor, y ψ_0 es la acción $\psi_0((b, g), g') = (b, gg')$, $\varphi_U(p) = (b, g')$.

Sea $(p, g') \in P_U \times G$, donde $P_U = \pi^{-1}(U)$, entonces $\psi_0 \circ (\varphi_U \times Id_G)(p, g') = \psi_0(\varphi_U(p), g') = \psi_0((b, g), g') = (b, gg') = \varphi_U \circ \psi|(p, g') = \varphi_U(pg')$, es decir: $\varphi_U(pg') = (b, gg')$ si $\varphi_U(p) = (b, g)$; y $\pi_1 \circ \varphi_U(p) = \pi_1(b, g) = g = \pi|(p)$.

Si se puede elegir $U = B$, se dice que el haz ξ es trivial.

Proposición 1 *Existen funciones de transición.*

Demostración. Sean dos trivializaciones locales U_α y U_β con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ Para $\varphi_\alpha = (b, g)$ y $\varphi_\beta(p) = (b, g')$ existe $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$, donde $(b, g) \mapsto \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(b, g) = \varphi_\beta(p) = (b, g') = (b, g_{\alpha\beta}(b)g)$, donde las funciones:

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G, \; b \mapsto g_{\alpha\beta}(b)$$

tienen la propiedad de que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(b,g) = (b, g_{\alpha\beta}(b)g)$. Estas funciones se llaman **de transición**. Claramente $g_{\alpha\alpha}(b) = e$, la identidad en el grupo, pues $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = Id$. Sea $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \phi$. Entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(b,g) &= \varphi_\beta \circ \varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1}(b,g) = \varphi_\beta \circ \varphi_\gamma^{-1}(b, g_{\alpha\gamma}(b)g) = (b, g_{\gamma\beta}(b)(g_{\alpha\gamma}(b)g)) \\ &= (b, (g_{\gamma\beta}(b)g_{\alpha\gamma}(b))g) = (b, g_{\alpha\gamma}(b)g);\end{aligned}$$

entonces $g_{\gamma\beta}(b)g_{\alpha\gamma}(b) = g_{\alpha\beta}(b)$ para todo $b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ es decir

$$g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}g_{\alpha\gamma}$$

como producto de funciones evaluadas en G. Estas relaciones se llaman de **cociclo**. En particular con $\beta = \alpha$ resulta $g_{\alpha\alpha} = g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\gamma} = Id$ y por lo tanto $g_{\gamma\alpha} = g_{\alpha\gamma}^{-1}$.

Definición 4 *Un atlas U en un haz fibrado es una colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ de trivializaciones locales tales que los abiertos U_α son una cubierta de X.*

En un haz fibrado siempre existe un atlas.

Definición 5 *Un haz fibrado coordenado, es un haz fibrado equipado con un atlas. Se le denota por*

$$\xi : (Y, \pi, X, F, G, U).$$

Proposición 2 *En un haz fibrado coordenado las funciones de transición $g_{\alpha\beta}$ satisfacen la relación de cociclo: $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\gamma}(x)g_{\gamma\alpha}(x)$, para toda $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, con $g_{\alpha\alpha}(x) = 1_G$ para toda $\alpha \in J$.*

Definición 6 *Una **sección local** en ξ es una función contínua $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que $\sigma_\alpha(x) \in F_x = \pi^{-1}(\{x\})$: la fibra sobre x. Al conjunto de secciones locales sobre U_α se lo denota por $\Gamma(Y_\alpha)$ donde $Y_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$.*

Definición 7 *Una **sección global** en un haz fibrado es una función contínua $\sigma : X \to Y$ que satisface $\pi \circ \sigma = id_X$. Al conjunto de secciones globales en un haz fibrado se le denota por $\Gamma(Y)$.*

Definición 8 *Dos atlas U y V en ξ son **compatibles** si su unión $U \cup V$ es un atlas. Se puede ver que la relación entre los haces fibrados coordenados dada por $\xi \sim \xi'$ si $Y = Y', X = X', \pi = \pi', F = F', G = G'$ y U y U' compatible, es una relación de equivalencia. Todo haz fibrado determina una clase de equivalencia de haces fibrados coordenados, y recíprocamente. Todo atlas U determina unívocamente un atlas máximo U^*: el atlas que contiene todos los atlas V compatibles con U.*

Un haz fibrado es pues equivalente a una clase de equivalencia de haces fibrados coordenados o a un haz fibrado con un atlas máximo.

Definición 9 *Un haz vectorial coordenado es un haz fibrado coordenado $\xi_U = (E, \pi, X, G, \mu, V, U)$ donde la fibra F es un espacio vectorial V de dimensión m sobre un campo k, los homomorfismos $\varphi_{\alpha\beta}$ son lineales y $G \subset GL(V)$. Si $k = \mathbb{R}$ el haz se dice real, si $k = \mathbb{C}$ el haz es complejo. m es el rango del haz.*

B.0.2. Construcción de haces fibrados.

Apartir de lo siguiente:

$$(X, F, G, \mu, U, \{g_{\beta\alpha}\})$$

espacio base, fibra, grupo de estructura, acción efectiva, cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de X, y funciones de transición respectivamente, determinan un único haz fibrado coordenado $\xi_U = (Y, \pi, X, G, \mu, F, U)$

siguiendo los pasos:
1) Se define el espacio topológico:

$$\widehat{Y}:\coprod_{\alpha\in J}U_\alpha\times F=\bigcup_{\alpha\in J}\{\alpha\}\times U_\alpha\times F=\{(\alpha,b,f)\}_{\alpha\in J,b\in U_\alpha,f\in F}$$

donde cada $U_\alpha\times F$ tiene la topología producto y $\widehat{Y}$ la topología de la unión ajena.
2) En $\widehat{Y}$ se define la relación $(\alpha,b,f)\sim(\alpha',b',f')$ si $b=b'$ y $f'=g_{\alpha'\alpha}(b)(f)$. Resulta $\sim$ una relación de equivalencia.
3) Se define el espacio topológico cociente $Y:=\frac{\widehat{Y}}{\sim}=\{[\alpha,b,f]\}_{(\alpha,b,f)\in\widehat{Y}}$.
4) Se define la proyección $Y\xrightarrow{\pi}X$, $\pi([\alpha,b,f]):=b$.
5) Se definen los homeomorfismos $\varphi_\alpha^{-1}:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, $\varphi_\alpha^{-1}(b,f):=[\alpha,b,f]$, que satisface la condición de trivialidad local. $U:=\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es el atlas de ξ_U.

Ejemplo 3 *Haces de Hopf reales. Sean* $G=\mathbb{Z}_2=\{1,-1\}$, $P=S^{n-1}=\{\vec{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\lambda_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^n\lambda_i^2=1\}$ *con* $n=1,2,\ldots$ *fijo; la acción* $S^{n-1}\times\mathbb{Z}_2\to S^{n-1}$, *con* $(\vec{\lambda},g)\mapsto\vec{\lambda}g=(\lambda_1 g,\ldots,\lambda_n g)$, $g=\pm1$; *el espacio cociente* $B=S^{n-1}/\mathbb{Z}_2=[\vec{\lambda}]_{\vec{\lambda}\in S^{n-1}}$, $[\vec{\lambda}]=\lambda\cdot\mathbb{Z}_2=\{\vec{\lambda},-\vec{\lambda}\}$; *la proyección* $\pi:S^{n-1}\to S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$, $\pi(\vec{\lambda})=[\vec{\lambda}]$.
$S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$ *es homeomorfo al espacio proyectivo real* $\mathbb{R}P^{n-1}$ *o espacio proyectivo de* $\mathbb{R}^n$, $P(\mathbb{R}^n)$, *definido por* $\mathbb{R}P^{n-1}\equiv\frac{\mathbb{R}^{n*}}{\mathbb{R}^*}=\{[\vec{\rho}]'\}_{\vec{\rho}}\in\mathbb{R}^{n*}$, *con* $[\vec{\rho}]'=\vec{\rho}\mathbb{R}^*$ *en correspondencia 1-1 con la recta que pasa por* $\vec{0}$ *en* $\mathbb{R}^n$, *en la dirección* $\vec{\rho}$. *El homeomorfismo*

$$\kappa:P(\mathbb{R}^n)\to\frac{S^{n-1}}{\mathbb{Z}_2}$$

esta dado por $\kappa([\vec{\rho}]')=[\frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|}]$ *es decir* $\kappa(\vec{\rho}\mathbb{R}^*)=\frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|}\mathbb{Z}_2$.
$\mathbb{R}P^{n-1}$ *se cubre por* n *abiertos* U_i, $i=1,...,n$ *dados por* $U_i=\{[\vec{\lambda}]'|\lambda_i\neq0\}$, *cada uno homeomorfo a* $\mathbb{R}^{n-1}$ *a través de* $\psi_i:U_i\to\mathbb{R}^{n-1}$, $\phi_i([\vec{\lambda}]')=(\frac{\lambda_1}{\lambda_i},...,\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i},\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i},...,\frac{\lambda_n}{\lambda_i})$.
Las trivializaciones locales de este haz están dadas por:

$$\varphi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{Z}_2,$$

$\varphi_i(\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|})=([\vec{\lambda}]',\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|})$ *donde* $\pi^{-1}(U_i)\equiv S_i^{n-1}=\{\frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|}\}_{\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^{n*},\lambda_i\neq0}$.

Apéndice C

Cubrientes y sus Levantamientos.

Definición 10 *Sea X un espacio topológicos. Se dice que X es disconexo si existen abiertos ajenos no vacíos A y B en X, tales que $X = A \cup B$. A la pareja (A, B) se le llama disconexión de X. Se dice que X es conexo si no es disconexo.*

Definición 11 *Se dice que un espacio topológico X es simplemente conexo si es conectable por trayectorias y para un punto básico $x_0 \in X$, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.*

Definición 12 *Sea X un espacio topológico. Una aplicación cubriente sobre X es una aplicación $p : \tilde{X} \to X$, $\tilde{X} \neq \phi$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U en X que satisface:*
(a) La imagen inversa de U, $p^{-1}(U)$ es la unión ajena de abiertos $\tilde{U}_j \subset \tilde{X}$, $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ algún conjunto no vacío de índices.
(b) Para cada $j \in \mathcal{J}$, la restricción $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ es un homeomorfismo.

por (a) p es suprayectiva.

Definición 13 *Dos aplicaciones cubrientes $p : \tilde{X} \to X$ y $p' : \tilde{X}' \to X$ sobre el mismo espacio son equivalentes si existe un homeomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{X}' \to \tilde{X}$, tal que $p \circ \tilde{\varphi} = p'$. Es decir conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "p'"'] & \tilde{X} \arrow[dl, phantom, "p"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo.

Definición 14 *Sea G un grupo topológico. Una acción (izquierda) de G en un espacio X es una aplicación continua,*

$$\mu : G \times X \to X,$$

donde $\mu(g, x) = gx$, que satisface,

$$1x = x, g_1(g_2x) = (g_1g_2)x.$$

Definición 15 *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente y $f : Y \to X$ continua. A una aplicación $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ se llama un levantamiento de f si $p \circ \tilde{f} = f$.*

Definición 16 *Se dice que una aplicación cubriente* $p : \tilde{X} \to X$ *es universal si el espacio total* $\tilde{X}$ *es simplemente conexo. Al espacio total* $\tilde{X}$ *lo llaman espacio cubriente universal.*

[Prieto, página 440], [Lee, página 261].

Bibliografía

[Abers] **Quantum Mechanics**, *Abers. E. S.*, Pearson Education, New Jersey, 2004: p. 102.

[Berestetskii] **Quantum Electroynamics, Landau and Lifshitz Course of Theoretica Physics**, *Bererstetskii, V. B., Lifshitz, E.M., y Pitaevskii, L.P.*, Vol.4, Segunda edición, Pergamon Press, Oxford, pp. 69-70.

[Bigi] **CP Violation**, *Bigi I.I., Sanda A.I* Cambridge University Press, pp.21-22,2000.

[Bjorken y Drell] **Relativistic Quantum Mechanics**, *J. D. Bjorken y S. D. Drell*, Mc Graw-Hill, New York, 1964: p. 11.

[Cabo] **Remark on Charge Conjugation in the non relativistic Limit**, A.Cabo, D.B.Cervantes, H.Pérez Rojas y M.Socolovsky., International Journal of Theoretical Physics, 2006.

[Capri] **Relativistic Quantum Mechanics and Introduction to Quantum Field Theory**, *Capri,A.Z*, World Scientific, New Jersey, pp. 46-51, 2002.

[Cervantes03] **Álgebras de Clifford y Espinores** *Dalia Cervantes C.*, Tesis de Licenciatura, pp.18-22, 2003.

[Cervantes05] **Bundle Theory of Improper Spin Transformations.** *D. B. Cervantes, S.L. Quiroga, L.J. Perissinotti, y M. Socolovsky*, International Journal of Theoretical Physics 44, 267-276; arXiv:quant-ph/0410079, 2005.

[Azcárraga05] **P,C,T,Θ in Quantum Field Theory** , *de Azcárraga, J. A*, GIGT 7/75, Zaragoza, España, pp.6-7, 1995.

[Azcárraga] **Lie groups, Lie algebras, cohomology, and some applications in physics** , *de Azcárraga, J. A*, Cambridge University Press, Cambridge: p. 153.

[Feynman] **The Reason for Antiparticles, in Elementary Particles and the Laws of Physics***R.P. Feynman y S. Weinberg* Dirac Memorial Lectures, eds., Cambridge University Press, Princeton, New Jersey, 1986.

[Jacobson] **Basic Algebra II**, *Jacobson Nathan*, Segunda Edición, W.H .Freeman and Company.

[Landau] **Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory, Course of Theoretical Physics, Vol.3**, *Landau L. D., y Lifshitz E. M* 3^{ra} edición, Butterworth Heinemann, p.393,1997.

[Lawson] **Spin Geometry** *H.Blaine Lawson y Marie-Louise Michelsohn*, Princeton University Press, 1989.

[Lee] **Introduction to Topological Manifolds** *John M. Lee*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[MacLane y Birkoff] **Algebra**, *MacLane S. y Birkoff G.* 2^{da} edición, Macmillan Publishing Co., New York: p.409, 1979.

[Naber] **Topology, Geometry, and Gauge Fields. Fondations**, *Naber G. L*, Springer-Verlag, New York: pp/367-377, 1997.

[Prieto] **Topología Básica.** *Carlos Prieto*, Fondo de Cultura Económica, 2003, pp.440

[Sakurai] **Modern Quantum Mechanics** *Sakurai J. J.*, Benjamin, Menlo Park, California: p. 278.

[Socolovsky01] **On the Geometry of Spin 1/2**, *Socolovsky M.* Advances in Applied Clifford Algebras 11, 487-494, 2001.

[Socolovsky04] **The CPT Group of the Dirac Field**, *Socolovsky, M.* International Journal of Theoretical Physics 43, 1941-1967; arXiv:math-ph/0404038, 2004.

[Wolfenstein] **Some Consequences of Invariance under Charge Conjugation**, *L. Wolfenstein y D. G. Ravenhall*, Physical Review 88,279-282, 1957.

[Sternberg] **Group Theory and Physics**, *S. Sternberg*, Cambridge University Press, Cambridge: p.2, 6., 1994.

[Streater-Wightman] **CPT, Spin and Statistics, and All That**, *R. F. Streater y A. S. Wightman*, Benjamin, New York: p.14,1964.