



Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

*Estados Físicos en Teorías $2n$ -dimensionales de
Yang-Mills*

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias Físicas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias con Especialidad en Física

por

Eric Martínez Pascual

asesorado por

Dr. José David Vergara Oliver

México, D.F.

Junio 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres por su afecto, ayuda y paciencia.

Agradecimientos

En este párrafo quiero agradecer al Dr. David Vergara por todas las sugerencias y apoyo para la realización de este trabajo. También por las recomendaciones que brindó a las instancias correspondientes para que se me otorgara tanto la beca DGEP que concede la Universidad Nacional Autónoma de México para estudios de posgrado en esta universidad, como el apoyo económico por parte del proyecto DGAPA-UNAM IN104503 para la culminación de este trabajo. Similarmente, a los proyectos CONACyT-SEP 2004-C01-47211 y CONACyT 40745-F, gracias a los cuales fué posible esta impresión, y cuyos titulares son el Dr. Luis F. Urrutia y el Dr. David Vergara.

De la misma manera agradezco al CONACyT por otorgarme la beca para la realización de estudios de maestría durante el período de Marzo del 2003 a Febrero del 2005.

México D.F., México
Junio, 2006

Eric Martínez Pascual

Índice general

<i>Resumen</i>	v
<i>Abstract</i>	vii
<i>Agradecimientos</i>	ix
Introducción	1
1. La estructura de constricciones de las teorías de Yang-Mills	7
1.1. Revisión de las teorías de Yang-Mills	8
1.2. Invariancia local y el teorema de Noether	11
1.3. Las constricciones de una teoría de Yang-Mills	15
1.4. Constricciones de primera clase y transformaciones de norma	22
2. Teoría de Chern-Simons en altas dimensiones	29
2.1. La n -ésima forma de Chern	30
2.2. La forma de Chern-Simons	32
2.3. Acción de Chern-Simons	35
2.4. Algunos casos particulares y sus propiedades	38
2.4.1. Caso particular $n = 1$	38
2.4.2. Caso particular $n = 2$	45
2.4.3. Otros casos	52
3. El estado de Loos-Kodama	55
3.1. Cuantización de sistemas con constricciones	55
3.2. Teoría de Yang-Mills en dos dimensiones	61

3.3. Teoría de Yang-Mills en cuatro dimensiones	69
3.4. Teoría de Yang-Mills en $2n$ dimensiones	73
Conclusiones	79
A. G-haces y campos de norma	85
A.1. Definiciones básicas	85
A.2. Conexiones	89
A.3. Curvatura	92
A.4. Operador de Hodge	94
B. Prueba del Teorema de Noether	97
Bibliografía	99

Resumen

Es bien conocido que la teoría cuántica de Yang-Mills en cuatro dimensiones acepta un estado, que llamaremos estado de Loos-Kodama, el cual se construye como la exponencial de la acción de Chern-Simons tridimensional y que cumple de forma exacta con las ecuaciones que restringen, en el espacio de Hilbert, a los estados físicos. Se sabe también que en esta dimensión a tal estado le corresponde un eigenvalor de energía nulo. Por otro lado, sabemos que la acción de Chern-Simons tridimensional es apta para generalizaciones a dimensiones mayores, tales generalizaciones corresponden a teorías en $2n - 1$ dimensiones, con $n \in \mathbb{N}^+$, construidas a partir de clases características en $2n$ dimensiones bajo la misma línea en que se construye la versión tridimensional de la teoría. Basados en esta observación, en el presente trabajo se demuestra que con la acción de Chern-Simons $2n - 1$ dimensional es posible construir un estado que sea solución a las condiciones que seleccionan a los estados físicos de la teoría cuántica de Yang-Mills definida en una variedad $2n$ dimensional. En contraste con lo que sucede en las dimensiones dos y cuatro, donde el estado de Loos-Kodama puede tener energía nula, en dimensiones mayores este eigenvalor viene dado en términos de un polinomio de las componentes espaciales de la curvatura, cuyo grado depende de la dimensión de la teoría.

Abstract

It is well known that four dimensional Yang-Mills quantum theory accepts a state, which I refer to as Loos-Kodama state. The state is constructed as the exponential of the Chern-Simons action in three dimensions and satisfies exactly the equations which restrict physical states in Hilbert space. It is also known that in this dimension the state has zero energy eigenvalue. By other means, we know that the three dimensional Chern-Simons action can be generalized to higher dimensions which are related to $2n - 1$ dimensional theories, with $n \in \mathbb{N}^+$, constructed from characteristic classes in $2n$ dimensions in exactly the same way as the three dimensional version. Taking into account this observation, the present work shows that from $2n - 1$ dimensional Chern-Simons action it is possible to construct a state being a solution of those equations that selects physical states in the $2n$ dimensional Yang-Mills quantum theory. In contrast with the two and four dimensional cases, where the Loos-Kodama state can possess a null energy eigenvalue, it is found that in higher dimensions this eigenvalue is given in terms of a polynomial in the spacial components of the curvature, whose degree depends on the dimension of the theory.

Introducción

En la actualidad uno de los principios fundamentales más usados, tanto en la teoría clásica como cuántica de campos, es el llamado principio de norma, desarrollado por Weyl en las primeras décadas del siglo pasado. Las teorías de norma, tal como se les conoce a aquellos modelos que están de acuerdo con el principio antes mencionado, son la base en la descripción de la física de las partículas elementales.

Las llamadas teorías de Yang-Mills, teorías basadas en un grupo de simetría no-abeliano, son el tipo de modelos de norma por excelencia. La cromodinámica cuántica, por ejemplo, que es la teoría de las interacciones fuertes, siendo los hadrones compuestos de un quark y antiquark o bien tres quarks atados mediante el intercambio de bosones de norma conocidos como gluones, corresponde a una teoría de norma no-abeliana $SU(3)$ sin rompimiento espontáneo de simetría. La teoría electro-débil, por otro lado, que es la teoría que describe de manera unificada las interacciones electromagnética y débil, se basa en un grupo de norma no-abeliano $SU(2) \times U(1)$ con rompimiento espontáneo de simetría. Combinando estas dos descripciones, para tres de las cuatro fuerzas fundamentales, se tiene la teoría que sintetiza en buena medida las interacciones entre las partículas elementales, a ésta se le conoce como el *modelo estándar*, un modelo al cual subyace una simetría de norma no-abeliana tipo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Una propiedad importante que se presenta en las teorías de norma, es que éstas tienen una interpretación geométrica en términos de haces fibrados, lo cual indica que aún las interacciones no gravitacionales tienen un significado de este tipo y entonces dan una importante guía, dentro de ciertos límites, hacia una teoría cuántica de la gravitación.

Una de las principales características de las teorías de norma es que éstas pertenecen a un tipo de teorías conocidas como singulares. La simetría de norma, además de manifestarse a nivel de la Lagrangiana en las ecuaciones de Euler-Lagrange como condiciones sobre los datos iniciales, se presenta en la “hamiltonización” de la teoría con la aparición de las llamadas constricciones de primera clase. Los fundamentos y el estudio sistemático de este tipo de teorías se iniciaron con los trabajos de Dirac desde hace aproximadamente medio siglo. Actualmente su importancia y análisis se debe a que los modelos físicos de las interacciones fundamentales son de esta clase y, por lo tanto, profundizar en ellas tanto clásica como cuánticamente es de suma relevancia. Históricamente la teoría de norma prototipo es la teoría de Maxwell, que es invariante bajo:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta,$$

siendo θ el parámetro correspondiente al grupo de Lie $U(1)$. Este tipo de invariancia en la teoría es la que se manifiesta a nivel hamiltoniano en las llamadas constricciones de primera clase, éstas son relaciones entre las coordenadas y momentos de la teoría que generan a la transformación misma. Las relaciones entre las variables en este caso indican que existen grados de libertad innecesarios para la descripción de la teoría, la extracción de los “verdaderos grados de libertad” no es una tarea fácil en un modelo general invariante de norma. En general, una manera de conocer explícitamente estos grados de libertad es usando el proceso de fijación de la norma, el cual rompe con la invariancia de la teoría. Este proceso se puede hacer desde dos frentes: (i) mediante la imposición de condiciones que fijan la norma en términos de constricciones suplementarias a nivel de la Hamiltoniana, o (ii) mediante lo que se conoce como el formalismo BRST, donde se elimina la libertad de norma a nivel de la Lagrangiana extendiendo el espacio de configuración inicial con la inclusión de los llamados fantasmas (“ghosts”) e introduciendo explícitamente un término que rompa con la simetría de norma. Ambas maneras de tratar con el exceso de grados de libertad, convergen en la teoría cuántica de los sistemas invariantes de norma en el formalismo desarrollado por Feynman y extendido por Faddeev.

Las integrales de trayectoria se han convertido en un formalismo primordial en la discusión de la teoría cuántica de campos. Este enfoque tiene varias ventajas

con respecto al basado en operadores sobre un espacio de Hilbert, entre ellas destacan que de aquí son derivables las reglas de Feynman incluso de teorías no-abelianas, además de las identidades de Ward-Takahashi en la teoría de Maxwell. Al cuantizar una teoría de norma en este formalismo, es bien sabido que la formulación hamiltoniana es la fundamental y entonces al incluir en ella tanto las constricciones de primera clase como las condiciones subsidiarias se obtiene una integral de trayectoria (con una medida redefinida) sobre el espacio fase que suma solamente las trayectoria representativas de los campos. Integrando en esta última los momentos generalizados y exponenciando el determinante que aparece en la nueva medida, se llega precisamente a la Lagrangiana que se obtendría si se aplicara directamente la opción (ii) antes mencionada. Tal lagrangiana final, también conocida como la de una acción efectiva, es invariante bajo la llamada transformación BRST, que es una simetría rígida definida en el espacio de configuración extendido donde residen los fantasmas.

Uno puede afirmar que en general no hay una regla única para la cuantización de las teorías con constricciones. Dentro de algunas propuestas se encuentra la extensión de la integral de trayectoria de Feynman como ya se describió en el párrafo anterior, otra propuesta es una cuantización basada en la existencia de la simetría BRST. En esta última se hace uso de la simetría que sobrevive después de fijar la norma clásicamente a nivel de la Lagrangiana y se acepta que los estados físicos sean aniquilados por el generador de tal transformación de simetría, la carga BRST. Aunque este tipo de cuantización ha mostrado ser útil, en este trabajo, mas que fijar una norma para eliminar los grados de libertad superfluos, deseamos mantener la libertad de norma de la teoría que analizaremos tanto a nivel clásico como cuántico. Por ende, una opción natural en la cuantización del sistema es a la Dirac, i.e. un programa de cuantización donde la idea de observables clásicas como funciones invariantes de norma, se extiende a la invariancia de norma de los vectores de estado cuánticos. Esto último se traduce, a nivel técnico, a imponer la condición de que tales estados sean aniquilados por las constricciones de primera clase. Este tipo de cuantización es el adoptado en la llamada cuantización canónica de la gravedad.

El método de cuantización anterior aplicado a la teoría de Yang-Mills $2n$ dimensional nos va llevar al estudio de otras teorías de norma interesantes desde

los puntos de vista físico y matemático: las teorías de Chern-Simons. Como teorías de campo en sí, saltan a la vista dos hechos curiosos, uno es que su número de grados de libertad locales depende de la dimensión (impar necesariamente) del espacio de Minkowski y es distinto de cero para dimensiones mayores o iguales a cinco. Este conteo se hace, como en toda teoría de norma, mediante el estudio de la estructura de constricciones de la misma, la cual resulta no ser trivial para las teorías de Chern-Simons principalmente por la violación que hacen a las llamadas condiciones de regularización en distintas regiones del espacio fase. El otro hecho interesante es que a pesar de que uno se refiere a una teoría de Chern-Simons como una teoría de norma, habría que especificar que ésta es solo invariante bajo las transformaciones de norma pequeñas (i.e. las transformaciones de norma homótopicamente conectadas con la identidad), mientras que su variación con respecto a todas las transformaciones de norma no es para nada trivial. La cuasi-invariancia de esta acción bajo transformaciones de norma será un ingrediente esencial en este trabajo.

Hemos advertido en el párrafo anterior que el estudio de una teoría cuántica de Yang-Mills en dimensiones pares nos llevará al estudio de las teorías de Chern-Simons, la razón principal es que es sabido desde 1969 que existe una solución exacta a las ecuaciones de constricciones cuánticas que restringen a los estados físicos en cuatro dimensiones, cuyo eigenvalor de energía es nulo. Tal estado viene dado por la exponenciación de la acción de Chern-Simons en tres dimensiones y me refiero a él como estado de Loos-Kodama tridimensional. Al saber que la acción de Chern-Simons tridimensional es apta de generalizaciones a cualquier dimensión impar, un par de preguntas surgen inmediatamente:

1. *¿Es posible entonces extender el estado Loos-Kodama a $2n - 1$ dimensiones, como estado que resuelve las constricciones de una teoría cuántica de Yang-Mills $2n$ dimensional?*
2. *Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, ¿Cuál será el eigenvalor de energía asociado al estado de Loos-Kodama en cada dimensión?*

El propósito del presente trabajo de tesis es abordar y responder estas dos preguntas más allá de dar una interpretación física a tal estado. Para lograr el objetivo, a esta tesis se le organiza como sigue:

Capítulo 1. En este capítulo se define una teoría de Yang-Mills sobre una variedad de Minkowski d dimensional. Se procede a la descripción y análisis de la invariancia de norma de la teoría tanto en el formalismo de Lagrange como en el de Hamilton; en particular en este último, se resalta el papel de las constricciones de primera clase como generadoras de la transformación de norma que subyace a la teoría, mientras que dentro del formalismo Lagrangiano se destaca la relación entre simetría de norma local y dependencia entre ecuaciones de Euler-Lagrange codificada en el teorema de Noether.

Capítulo 2. En este capítulo se inicia con la restricción de la variedad considerada en el capítulo 1 a ser de dimensión par, i.e. $d = 2n$. Sobre la parte espacial de ese espacio de Minkowski se define una teoría de Chern-Simons a través de la Lagrangiana cuya derivada exterior corresponde a la n -ésima forma de Chern. Se deriva la ley de transformación, bajo todas las transformaciones de norma, de la acción que define a esta teoría; se presenta una formula explicita, no integral, para construir la acción de Chern-Simons con solamente dar el valor de la dimensión, además se presentan algunas particularizaciones del caso general con respectivas aplicaciones a problemas físicos.

Capítulo 3. Se discuten algunas propuestas sobre la cuantización de los sistemas con constricciones, con ello y usando los resultados generales de los dos capítulos anteriores, se demuestra que el llamado estado de Loos-Kodama, construido a partir de la exponenciación de la acción de Chern-Simons, es una solución a las condiciones sobre los estados físicos. Se discute someramente sobre el producto interno bajo el cual se debe definir la norma de tal estado con miras a librar su no-normalización con respecto al producto cinemático. Además, se muestra que solamente en el caso cuatridimensional el estado de Loos-Kodama tiene energía cero, pues en los casos de dimensiones mayores la energía es proporcional a un polinomio en la curvatura cuyo grado depende de la dimensión de la teoría.

Finalmente en las conclusiones se puntualizan los resultados obtenidos y las

posibles líneas de investigación a seguir a partir de estos. En el Apéndice A se escribe la notación que se usa en este trabajo, así como algunas nociones generales de la teoría de haces vectoriales. En el Apéndice B se lleva a cabo la prueba del teorema de Noether.

Capítulo 1

La estructura de constricciones de las teorías de Yang-Mills

Las teorías de Yang-Mills puras, tal como se les suele llamar a los modelos basados en un grupo no-abeliano con bosones de norma sin interacción alguna con campos de materia, son las encargadas de la descripción de la dinámica de “las partículas mensajeras” en el modelo estándar. Este tipo de teorías fueron propuestas por Yang y Mills en el año de 1954 [1] en el contexto de una teoría para nucleones (protón y neutrón), con un grupo de norma $SU(2)$, mostrando que la exigencia para contar con una teoría invariante de norma local de este tipo implicaba la existencia de campos de norma A_μ^a en el modelo, análogos al cuadripotencial A_μ de la teoría de Maxwell. Un año después Utiyama [2] generalizó estas ideas a un grupo de norma con r -parámetros independientes, dando lugar así a uno de los pilares teóricos fundamentales para la creación del modelo de las partículas elementales.

El propósito del presente capítulo es describir las teorías de Yang-Mills puras, una para cada elección del grupo de norma, en un espacio-tiempo tipo Minkowski d -dimensional y analizar en detalle la estructura de constricciones para estas teorías, la cual es consecuencia directa de la simetría bajo la cual están constituidas.

1.1. Revisión de las teorías de Yang-Mills

Como es usual en la teoría de campos, vamos a partir de una acción que sea invariante bajo ciertas transformaciones de simetría de interés, en nuestro caso particular, invariante bajo las transformaciones de norma. La acción de Yang-Mills la podemos escribir en términos de elementos como⁽¹⁾:

- La dos forma de curvatura (F) asociada a una G -conexión D .
- El operador de Hodge (\star), construido a partir de la d -forma de volumen y una métrica Lorentziana, ambas definidas en el espacio base M .

Con estos objetos podemos escribir la acción:

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F), \quad (1.1)$$

donde g es una constante. Obviamente esta funcional es invariante de norma, pues si se usa la ley de transformación (A.12), que figura en el Apéndice A, y la ciclicidad de la traza se tiene:

$$\begin{aligned} S_{YM}[A^g] &= -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(F^g \wedge \star F^g) = -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(gFg^{-1} \wedge g(\star F)g^{-1}) \\ &= -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = S_{YM}[A]. \end{aligned}$$

La forma más usual de encontrar esta acción es expresando el integrando en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ del espacio base M , con lo que:

$$S_{YM}[A] = \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^d x = -\frac{K_{ab}}{2} \int_M F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} d^d x,$$

donde $K_{ab} \equiv \text{tr}(T_a T_b) = f_{ac}{}^d f_{bd}{}^c$ corresponde a la forma de Killing del álgebra del grupo de norma, la cual se puede definir para los grupos compactos y semi-simples como $K_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$. Así obtenemos finalmente:

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{4} \int_M F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} d^d x \equiv \int_M \mathcal{L}_{YM}, \quad (1.2)$$

una acción invariante manifiesta bajo las transformaciones de Poincaré. Cabe mencionar que la dependencia de la funcional S_{YM} de los campos de norma se

¹ Para mayor referencia ver el Apéndice A donde se hacen las definiciones pertinentes de estos objetos y se establecen las convenciones usadas a lo largo del presente trabajo.

da mediante $F_{\mu\nu}^a$, pues ésta se define por una cantidad derivable de A_μ^a , a saber (cf. ecuación (A.11)):

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c.$$

En el llamado *formalismo a primer orden*, se considera a los campos de norma A_μ^a y a las componentes de la curvatura $F_{\mu\nu}^a$ como campos independientes, derivándose la ecuación anterior como parte de las ecuaciones de campo al variar la acción:

$$S_{YM}^{(1st)}[A] = \int_M \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F_a^{\mu\nu} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \right) \right] d^d x$$

con respecto a $F_{\mu\nu}^a$. Pero durante el presente trabajo no emplearemos un formalismo a primer orden, pues no existe una razón fundamental para considerar a la curvatura y al potencial vector como entes independientes.

Entonces siendo la acción de Yang-Mills (1.2) una funcional del potencial vector solamente, podemos obtener las ecuaciones de campo mediante el principio variacional de acción estacionaria:

$$\delta S_{YM} = 0.$$

Tenemos dos caminos para realizar este cálculo:

- (i) Variar la acción con respecto de la 1-forma A usando la notación libre de índices desarrollada en el Apéndice A, con lo cual

$$\begin{aligned} \delta S_{YM} &= -\frac{1}{g^2} \int_M \delta \text{tr} (F \wedge \star F) = -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr} (\delta F \wedge \star F + F \wedge \star \delta F) \\ &= -\frac{2}{g^2} \int_M \text{tr} (\delta F \wedge \star F), \end{aligned}$$

pero:

$$\delta F = d(\delta A) + (\delta A)A + A(\delta A) = d(\delta A) + [A, \delta A]^\circ = d_{\mathcal{D}}(\delta A)$$

con $[\cdot, \cdot]^\circ$ el conmutador graduado. De modo que:

$$\delta S_{YM} = -\frac{2}{g^2} \int_M \text{tr} (d_{\mathcal{D}}(\delta A) \wedge \star F) = -\frac{2}{g^2} \int_M \text{tr} ((\delta A) \wedge d_{\mathcal{D}} \star F) = 0$$

y el integrando se anula para una variación arbitraria de δA si y solo si se cumple:

$$d_{\mathcal{D}} \star F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \star d_{\mathcal{D}} \star F = 0 \quad (1.3)$$

(ii) Usar directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema con grados de libertad continuos (campos)⁽²⁾, donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial A_\mu^a} = -gf_{abc}F_b^{\nu\mu}A_\nu^c, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} = -F_a^{\nu\mu}$$

de manera que las ecuaciones buscadas son:

$$0 = \partial_\mu F_a^{\mu\nu} - gf_{abc}F_b^{\mu\nu}A_\mu^c \equiv \mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

Obviamente las ecuaciones (1.3) y (1.4) son totalmente equivalentes, pues si expresamos a la 1-forma que figura en la primera ecuación en coordenadas locales $\{x^\mu\}$:

$$\star d_{\mathcal{D}} \star F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\rho\nu} \mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} T_a dx^\rho = 0$$

que implica inmediatamente (1.4). Más aún, usando las ecuaciones de movimiento libres de índices se obtiene directamente que éstas cumplen con el principio de norma, ya que bajo una transformación de norma $g \in \mathcal{G}$ tenemos los cambios:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}'} B &= g [d_{\mathcal{D}}(g^{-1}Bg)] g^{-1} \\ F^g &= gFg^{-1} \end{aligned}$$

para una forma B evaluada en el álgebra y la 2-forma de curvatura F , de donde:

$$\star d_{\mathcal{D}} \star F = 0 \quad \Rightarrow \quad \star d_{\mathcal{D}'} \star F^g = 0 \quad (1.5)$$

En palabras: bajo una transformación de norma, las ecuaciones de Yang-Mills (1.3) o (1.4) son invariantes en el sentido de (1.5), lo cual no quiere decir que sean invariantes en forma, sino que afirma que si F asociada a la G -conexión D es solución de las ecuaciones, entonces F^g asociada a D' es solución también.

Es interesante notar que aquí las ecuaciones de campo no se pueden escribir solamente en términos de las componentes de la curvatura como en el caso

² Si $\mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A)$ es la densidad Lagrangiana asociada a un sistema de $A = 1, \dots, N$ campos, las ecuaciones de campo son:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_A)} \right) = 0$$

en términos de la derivada de Euler-Lagrange $\frac{\delta}{\delta \varphi_A}$ respecto de φ_A .

abeliano (el de la teoría de Maxwell), pues:

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu F_a^{\mu\nu} = gf_{abc} F_b^{\mu\nu} A_\mu^c$$

y la derivada covariante involucra explícitamente a los campos A_μ^a , haciendo de los campos de norma campos auto-interactuantes. Es aquí donde se refleja que en las teorías de norma el potencial vector juega un papel más fundamental que la curvatura misma, lo cual se manifiesta solo de manera cuántica en efectos como el de Aharonov-Bohm (un efecto cuántico que se da en el modelo de la teoría de norma abeliana acoplada con espinores de Dirac), donde se muestra que esta cantidad puede llegar a ser una observable física.

Finalmente mencionemos que la densidad Lagrangiana para un sistema consistente de campos de materia φ^α interactuando con los campos de norma A_μ^a , de manera localmente invariante, esta dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M(\varphi, D_\mu\varphi).$$

Aquí la Lagrangiana de materia localmente invariante $\mathcal{L}_M(\varphi, D_\mu\varphi)$ se puede obtener de la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_M(\varphi, \partial_\mu\varphi)$, invariante bajo la acción global del grupo de norma G , reemplazando $\partial_\mu\varphi^\alpha$ en esta última Lagrangiana por la derivada covariante $D_\mu\varphi^\alpha$ y en este cambio está implícita la elección de la representación ρ del grupo.

1.2. Invariancia local y el teorema de Noether

La invariancia de norma local de una teoría de Yang-Mills pura introduce en general algunos problemas en lo que a la descripción de su dinámica se refiere. Observe como la derivada temporal de los campos de norma A_0^a , $\partial_0 A_0^a \equiv \dot{A}_0^a$, no aparece en las componentes de la curvatura $F_{\mu\nu}^a$ y entonces tampoco lo hace en \mathcal{L}_{YM} (de hecho aunque la teoría se considere también con acoplamiento a campos de materia, esta cantidad tampoco aparece en la Lagrangiana respectiva), y entonces las ecuaciones de campo (1.3), o equivalentemente (1.4), no determinan completamente la evolución temporal de los campos A_μ^a . Con la ayuda del teorema de Noether, esta situación se puede entender como consecuencia directa de esa invariancia de norma local de una manera general, sin la necesidad de

dar una Lagrangiana invariante de norma particular. Este teorema, relaciona cualquier tipo de invariancia de norma local con ciertas constricciones sobre los campos.

Por simplicidad, el teorema de Noether lo enunciaremos basándonos en transformaciones de norma infinitesimales, que corresponden en nuestro caso específico a transformaciones g en la parte conexas con la identidad en el grupo \mathcal{G} .

Teorema 1 (Noether) *La densidad Lagrangiana $\mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A)$ asociada a un sistema de campos φ_A ($A = 1, \dots, N$) es invariante, esto es $\delta\mathcal{L} = 0$, bajo las transformaciones infinitesimales:*

$$\delta\varphi_A = \sum_{a=0}^r (G_{Aa}\theta^a(x) + T_{Aa}^\mu \partial_\mu \theta^a(x)) \quad (1.6)$$

con $\theta^a(x)$ funciones del espacio tiempo arbitrarias clase C^2 , si y solo si las siguientes relaciones se satisfacen idénticamente (i.e., independientemente de si los campos φ_A son o no soluciones a las ecuaciones de campo correspondientes):

$$\partial_\mu \left(T_{Aa}^\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A} \right) = G_{Aa} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A}, \quad (1.7)$$

$$\partial_\nu K_a^{\nu\mu} + J_a^\mu = 0, \quad (1.8)$$

$$K_a^{\mu\nu} = -K_a^{\nu\mu}. \quad (1.9)$$

Aquí, J_a^μ y $K_a^{\mu\nu}$ están definidas por:

$$J_a^\mu \equiv G_{Aa} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_A)} + T_{Aa}^\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A}$$

$$K_a^{\nu\mu} \equiv T_{Aa}^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)}$$

y $\frac{\delta}{\delta\varphi_A}$ denota la derivada de Euler.

La prueba de este teorema se puede hallar en el Apéndice B. Ahora observe como, en general, las r identidades (1.7) ($a = 1, \dots, r$) implican que las N cantidades $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A}$ están relacionadas por éstas, y entonces el número de cantidades independientes entre las N $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A}$ son $N - r$. Esto quiere decir que las ecuaciones de campo:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_A)} \right) = 0 \quad (A = 1, \dots, N)$$

para N cantidades desconocidas φ_A no son independientes unas de las otras, sino que hay solamente $N - r$ ecuaciones de movimiento independientes debido a las restricciones (1.7). Debe notarse que estas implicaciones son consecuencia directa de la invariancia de \mathcal{L} bajo las transformaciones infinitesimales (1.6), independientemente de la forma particular de la Lagrangiana.

Para el caso de una teoría de Yang-Mills pura, podemos construir las transformaciones infinitesimales correspondientes a (1.6) considerando, por ejemplo en la transformación para el potencial vector A (cf. ecuación (A.3)), a la 0-forma $g \in \mathcal{G}$ como:

$$g = \mathbb{1} + i\theta^a(x)T_a = \mathbb{1} - \frac{1}{g}\theta$$

con $\theta^a(x)$ parámetros infinitesimales⁽³⁾ y $\theta \equiv -ig\theta^a(x)T_a$ una 0-forma que vive en el álgebra del grupo. Con esto obtenemos entonces las transformaciones infinitesimales:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A + \frac{1}{g}d_{\mathcal{D}}\theta \\ F' &= F + \frac{1}{g}[F, \theta]^\circ \end{aligned} \right\}$$

o bien, en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ del espacio-tiempo M :

$$\left. \begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^a - gf_{abc}\theta^b A_\mu^c) \\ \delta F_{\mu\nu}^a &= f_{abc}F_{\mu\nu}^b\theta^c \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Comparando las primeras ecuaciones de (1.10) con (1.6), donde el índice condensado A representa ahora a (a, μ) , tenemos las cantidades:

$$G_{Ab} = G_{\mu b}^a = -f_{abc}A_\mu^c \quad \text{y} \quad T_{ab}^\nu = T_{\mu b}^{a\nu} = \frac{1}{g}\delta_b^a\delta_\mu^\nu$$

y podemos obtener directamente a J_a^μ y $K_a^{\nu\mu}$. La antisimetría de esta última cantidad (véase ecuación (1.9)), sugiere una relación entre ésta y las componentes de la curvatura. De hecho:

$$\begin{aligned} K_a^{\nu\mu} &= T_{\rho a}^{b\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_\nu A_\rho^b)} = \frac{1}{g}F_a^{\mu\nu}, \\ J_a^\mu &= G_{\rho a}^b \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial (\partial_\mu A_\rho^b)} + T_{\rho a}^{b\mu} \frac{\delta \mathcal{L}_{YM}}{\delta A_\rho^b} = \frac{1}{g}\partial_\nu F_a^{\nu\mu} \end{aligned}$$

³ Pragmáticamente esto significa que tanto los términos cuadráticos de $\theta^a(x)$ como de sus derivadas, los despreciaremos.

de donde se siguen trivialmente las identidades (1.8) y (1.9), en particular la ecuación (1.8) junto con las ecuaciones de movimiento dejan ver claramente a los campos de norma como auto-interactuantes con la “fuente” $gJ_a^\mu = gf_{abc}F_b^{\mu\nu}A_\nu^c$ representando el efecto no-lineal de los campos de Yang-Mills debido a su naturaleza no-abeliana. Por otro lado, la identidad (1.7) es quizá la menos trivial y corresponde a:

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} \equiv 0, \quad (1.11)$$

aún cuando el potencial vector asociado A_μ^a a $F_a^{\mu\nu}$ no cumpla con las ecuaciones de Yang-Mills (1.4) o dicho de otra forma (1.11) se cumple no solamente “on shell” ($\frac{\delta \mathcal{L}_{YM}}{\delta A_\mu^a} = 0$) sino que también “off shell”. Nos referimos a esta ecuación como la *identidad de Bianchi generalizada*; su contraparte, con una notación libre de índices, se puede obtener partiendo del resultado de que para cualquier forma B evaluada en el álgebra (o incluso $\text{End}(E)$ -evaluada) tenemos:

$$d_{\mathcal{D}}^2 B = d_{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}} B = [F, B]^\circ$$

en particular si $B = \star F$:

$$d_{\mathcal{D}} (d_{\mathcal{D}} \star F) = [F, \star F]^\circ = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) d^d x \equiv 0 \quad (1.12)$$

y como $d_{\mathcal{D}} \star F$ es el lado derecho de las ecuaciones de Yang-Mills (cf. ec. (1.3)), entonces (1.12) establece lo mismo que (1.11), a saber, que la derivada covariante de la variación de la acción de Yang-Mills, δS_{YM} , respecto de los campos de norma es idénticamente cero; de hecho:

$$\star d_{\mathcal{D}}^2 \star F \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} T_a \equiv 0.$$

La identidad generalizada de Bianchi impone así r restricciones sobre las $d \times r$ ecuaciones de Yang-Mills, de modo que tenemos $(d-1) \times r$ ecuaciones de campo funcionalmente independientes para las $d \times r$ cantidades desconocidas A_μ^a ; por lo tanto las ecuaciones de Yang-Mills no son suficientes para hallar una solución única, en su lugar se tendrá necesariamente una solución con una arbitrariedad en $d \times r - (d-1) \times r = r$ funciones independientes. Estos grados de libertad independientes corresponden claramente a los r parámetros $\theta^a(x)$ que determinan la transformación de norma infinitesimal (1.10), con esto queremos

decir que si A_μ^a es solución a (1.4) entonces su transformada de norma también lo es.

Aunque se puede entender bien el origen de la dificultad en la descripción de la dinámica de las teorías de norma mediante el teorema de Noether, sin lugar a dudas la mejor manera de entender la arbitrariedad que aparece en las soluciones a las ecuaciones de movimiento de estas teorías, es mediante las ideas introducidas por Dirac en los 60's [3], nos referimos al formalismo de constricciones para teorías singulares [4, 5, 6]. Este será el tema de la siguiente sección.

1.3. Las constricciones de una teoría de Yang-Mills

Una de las características más sobresalientes de las teorías de norma, es que las soluciones de sus ecuaciones de movimiento, quedan indeterminadas hasta una o varias funciones arbitrarias del tiempo [3, 4, 5, 6]. Esto es una consecuencia directa de la libertad al escoger un sistema de referencia particular para expresar a los campos en términos de sus componentes en un espacio interno. Ya verificamos en la sección anterior cómo las ecuaciones de movimiento de una teoría de Yang-Mills no son todas independientes, esto da lugar a la existencia de grados de libertad superfluos.

Es de esperarse que las complicaciones prácticas que se presentan en el formalismo Lagrangiano, cuando se trata con una teoría de norma, se hereden de alguna manera al formalismo Hamiltoniano. Es bien sabido que la densidad Hamiltoniana, \mathcal{H} , asociada a una densidad Lagrangiana, $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, dependiente de los campos φ_A y sus derivadas, viene dada en principio, por una transformación de Legendre sobre \mathcal{L} en las velocidades de los campos, esto último define a los momentos generalizados como:

$$\pi^A(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_A} = \pi^A(\varphi(\mathbf{x}), \partial_\mu \varphi(\mathbf{x})) \quad (1.13)$$

donde A denota un índice condensado como lo hemos venido manejando y se tiene por definición $\dot{\varphi}_A(\mathbf{x}) \equiv \partial_0 \varphi_A(\mathbf{x})$. La condición necesaria para expresar a todas las $\dot{\varphi}_A$'s en función de φ 's, π 's y derivadas $\partial_i \varphi$, es que el Jacobiano de la

transformación (1.13) sea no nulo, es decir:

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial \pi^A}{\partial \dot{\varphi}_B} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_A \partial \dot{\varphi}_B} \right) \neq 0 \quad (1.14)$$

Si esta condición se cumple, entonces es posible llevar a cabo la transformación de Legendre sobre \mathcal{L} en todas las velocidades $\dot{\varphi}_A$ y obtener:

$$\mathcal{H} \equiv \pi^A \dot{\varphi}_A - \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \partial_i \varphi) \Big|_{\dot{\varphi}=\dot{\varphi}(\varphi, \pi)} = \mathcal{H}(\varphi, \partial_i \varphi, \pi) \quad (1.15)$$

en este caso se dice que la teoría descrita por la densidad Lagrangiana \mathcal{L} es una teoría *regular* o *no-singular*. En el caso en que (1.14) no se satisfaga uno se refiere a la teoría como una teoría *singular*. En general, en una teoría invariante de norma local, la condición (1.14) no se cumple; en otras palabras, se puede afirmar que: *para una teoría de norma local es imposible realizar la transformada de Legendre sobre \mathcal{L} a la manera usual*. La proposición anterior se ejemplifica claramente al calcular la matriz de transformación, correspondiente a la definición de los momentos $M \equiv \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_A \partial \dot{\varphi}_B} \right)$, para la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_{YM} que se puede escribir en términos de submatrices de tamaño $r \times r$ como:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_0^a \partial \dot{A}_0^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_0^a \partial \dot{A}_j^b} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_i^a \partial \dot{A}_0^b} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_i^a \partial \dot{A}_j^b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_i^a \partial \dot{A}_j^b} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

donde el símbolo \mathbb{O} representa a una matriz $r \times r$ con todas sus entradas nulas, estas aparecen en (1.16) como consecuencia de la independencia de \mathcal{L}_{YM} de las velocidades \dot{A}_0^a . De la expresión para esta matriz de transformación es evidente que las teorías de Yang-Mills puras no cumplen con la condición (1.14) y entonces son necesariamente teorías singulares. Las consecuencias que surgen a partir del no cumplimiento de la condición (1.14), para cualquier teoría, son de más largo alcance. Por el momento, considere la definición (1.13) de forma explícita para la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_{YM} :

$$\left. \begin{aligned} \pi_a^0 &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_0^a} = 0 \\ \pi_a^i &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial \dot{A}_i^a} = F_a^{i0} \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene:

$$\dot{A}_i^a = \pi_a^i + \partial_i A_0^a + g f_{abc} A_0^b A_i^c.$$

Solamente las velocidades \dot{A}_i^a son expresables en términos de los campos, sus derivadas espaciales y algunos momentos, pero \dot{A}_0^a no lo son, reflejando así la singularidad de la teoría y definiendo lo que se llama, en el algoritmo de Dirac-Bergmann para constricciones, una *constricción primaria* que se denota por:

$$\Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \pi_a^0 = 0$$

Esta ecuación define la llamada *superficie de constricciones primarias* Σ_P en el espacio fase inicial $\Gamma := (A_\mu^a, \pi_b^\nu)$; se dice que cualquier cantidad $\mathcal{F}(A_\mu^a, \pi_b^\nu)$ es débilmente cero si se anula sobre esta hipersuperficie, denotando:

$$\mathcal{F}(A_\mu^a, \pi_b^\nu) \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(A_\mu^a, \pi_b^\nu) \Big|_{\Sigma_P} = 0.$$

Entonces por definición:

$$\Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \pi_a^0 \approx 0. \quad (1.17)$$

Esta ecuación debe entenderse no solamente como un conjunto de r constricciones ($a = 1, \dots, r$), sino como una infinidad de conjuntos de constricciones (uno para cada punto \mathbf{x} del espacio).

El tratamiento general que se hace sobre el extenso tema de constricciones, indica que la densidad Hamiltoniana correspondiente a una teoría singular tiene la forma:

$$\mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathcal{H}_c(\mathbf{x}, t) + \lambda^\kappa(\mathbf{x}, t) \Phi_\kappa^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (1.18)$$

y es llamada *densidad Hamiltoniana primaria* [4, 5]. Donde las λ^κ juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y $\Phi_\kappa^{(1)}$ son las constricciones primarias, que son en general relaciones del tipo (1.17), funciones de campos, sus derivadas espaciales y algunos momentos que expresan una dependencia entre tales variables. La llamada *densidad Hamiltoniana canónica*, \mathcal{H}_c , que aparece en (1.18) se construye como lo indica la relación (1.15), pero usando sistemáticamente todas las constricciones primarias de la teoría, de manera que \mathcal{H}_c dependa solamente de campos, sus derivadas espaciales y algunos momentos [3, 4, 5, 6].

Construyendo la densidad Hamiltoniana canónica, correspondiente a la \mathcal{L}_{YM} , con la ayuda de las reglas mencionadas en el párrafo anterior y las ecuaciones que expresan a \dot{A}_i^a en términos de π_a^i , $\partial_i A_0^a$, y A_μ^a , se tiene:

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi_a^i \pi_a^i + \pi_a^i \partial_i A_0^a + gf_{abc} A_0^a A_i^c \pi_b^i + \frac{1}{4} F_{ik}^a F_a^{ik}$$

de donde la Hamiltoniana canónica es:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_c \\ &= \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\pi_a^i \pi_a^i + \pi_a^i \partial_i A_0^a + gf_{abc} A_0^a A_i^c \pi_b^i + \frac{1}{4} F_{ik}^a F_a^{ik} \right] \end{aligned}$$

con $\int d\mathbf{x}$ representando una integral en las $(d-1)$ dimensiones espaciales de M . Integrando por partes el término $\pi_a^i \partial_i A_0^a$ y restringiéndonos a campos con un buen comportamiento al infinito, esto es a campos que decaigan lo suficientemente rápido para poder prescindir del término de frontera⁽⁴⁾, tenemos que:

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\pi_a^i \pi_a^i - A_0^a [\partial_i \pi_a^i - gf_{abc} A_i^c \pi_b^i] + \frac{1}{4} F_{ik}^a F_a^{ik}.$$

O bien en analogía con el caso abeliano, al denotar:

$$\left. \begin{aligned} E_a^i &\equiv F_a^{i0} \\ B_a^i &\equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^i \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

la densidad Hamiltoniana toma la forma particularmente fácil de recordar:

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} (E_a^i E_a^i + B_a^i B_a^i) - A_0^a [\partial_i \pi_a^i - gf_{abc} A_i^c \pi_b^i].$$

Finalmente la Hamiltoniana primaria asociada a la densidad Lagrangiana singular \mathcal{L}_{YM} , con la restricción (1.17), es:

$$H^{(1)} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}^{(1)} = \int d\mathbf{x} [\mathcal{H}_c + \lambda^a \Phi_a^{(1)}] \quad (1.20)$$

⁴ Se puede mostrar [7, 8] que una teoría de norma pura no posee, por sí misma, configuraciones estáticas y regulares tipo monopolo. Sin embargo, en casos más generales, tales como teorías de norma con rompimiento espontáneo de simetría se tienen necesariamente soluciones de este tipo, las cuales poseen un comportamiento al infinito que no cumple con lo que aquí requerimos [9]; por ejemplo, en una teoría de Yang-Mills $SU(2)$ acoplada a un triplete de campos escalares con potencial de Higgs, los monopolos tienen el comportamiento $A_i^a \rightarrow \epsilon_{aij} \frac{x^j}{gr^2}$ al infinito.

donde a λ^a se les puede pensar como las velocidades \dot{A}_0^a (veáse más adelante), funciones desconocidas de campos y momentos.

De acuerdo con el algoritmo de Dirac, cualquier variable dinámica, \mathcal{F} , la cual es una funcional dependiente de φ_A y π^A en el caso de sistemas con grados de libertad continuos, evoluciona en el tiempo como lo dicta la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) &\approx \left\{ \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), H^{(1)}(\mathbf{y}, t) \right\} \\ &\approx \int d\mathbf{y} \left[\left\{ \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}_c(\mathbf{y}, t) \right\} + \lambda^\kappa(\mathbf{y}, t) \left\{ \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \Phi_\kappa^{(1)}(\mathbf{y}, t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde el símbolo “ \approx ” sugiere que las constricciones, $\Phi \approx 0$, sean evaluadas hasta después de calcular el paréntesis de Poisson $\{, \}$ [3], estos últimos se calculan a tiempos iguales y cada uno de ellos queda definido, en general, para variables bosónicas, \mathcal{F} y \mathcal{G} funcionales de (φ_A, π^A) , como:

$$\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \mathcal{G}(\mathbf{y}, t)\} \equiv \int d\mathbf{z} \left[\frac{\delta\mathcal{F}(\mathbf{x})}{\delta\varphi_A(\mathbf{z})} \frac{\delta\mathcal{G}(\mathbf{y})}{\delta\pi^A(\mathbf{z})} - \frac{\delta\mathcal{F}(\mathbf{x})}{\delta\pi^A(\mathbf{z})} \frac{\delta\mathcal{G}(\mathbf{y})}{\delta\varphi_A(\mathbf{z})} \right]$$

donde $\delta/\delta\varphi_A(\mathbf{z})$ y $\delta/\delta\pi^A(\mathbf{z})$ denotan derivadas funcionales. Esta definición nace de una analogía con el caso de variables discretas (q_A, p^A) , para dos funciones F y G definidas en el espacio fase:

$$\{F, G\} \equiv \sum_A \left[\frac{\partial F}{\partial q_A} \frac{\partial G}{\partial p^A} - \frac{\partial F}{\partial p^A} \frac{\partial G}{\partial q_A} \right]$$

De la definición de los paréntesis de Poisson entre cantidades bosónicas se puede mostrar que éstos obedecen las relaciones:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = -\{\mathcal{G}, \mathcal{F}\} \quad (1.22)$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{F}\} = 0 \quad (1.23)$$

$$\{\mathcal{F} + \mathcal{G}, \mathcal{K}\} = \{\mathcal{F}, \mathcal{K}\} + \{\mathcal{G}, \mathcal{K}\} \quad (1.24)$$

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\mathcal{K}\} = \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\mathcal{K} + \mathcal{G}\{\mathcal{F}, \mathcal{K}\} \quad (1.25)$$

$$\{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \mathcal{K}\}\} + \{\mathcal{K}, \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\} + \{\mathcal{G}, \{\mathcal{K}, \mathcal{F}\}\} = 0 \quad (1.26)$$

siendo (1.26) la bien conocida identidad de Jacobi.

Es importante hacer notar que la ecuación (1.21) sugiere una arbitrariedad funcional, a través de los multiplicadores de Lagrange, de la evolución temporal

de la variable \mathcal{F} y sería de sumo interés conocer explícitamente las funciones λ^κ . El procedimiento usual para buscar la forma funcional de éstas, es dar por hecho la conservación de las constricciones, $\Phi_\kappa^{(1)} \approx 0$, en el tiempo; en símbolos, esto equivale a sustituir $\mathcal{F} = \Phi_\kappa^{(1)}$ en (1.21) e igualar $\dot{\Phi}_\kappa^{(1)}$ a cero:

$$\dot{\Phi}_\kappa^{(1)}(\mathbf{x}, t) = 0 \approx \left\{ \Phi_\kappa^{(1)}(\mathbf{x}, t), H^{(1)} \right\}.$$

A estas ecuaciones se les conoce como *condiciones de consistencia* [3].

Para el caso particular que aquí se considera, las ecuaciones de consistencia para las constricciones primarias son:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \left\{ \Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}, t), H^{(1)} \right\} \\ &\approx \int d\mathbf{y} \left[\left\{ \Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}_c(\mathbf{y}, t) \right\} + \lambda^b(\mathbf{y}, t) \left\{ \Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}, t), \Phi_b^{(1)}(\mathbf{y}, t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

y usando la Hamiltoniana (1.20), así como las propiedades (1.22) - (1.25), junto con los paréntesis fundamentales de Poisson:

$$\begin{aligned} \{A_\mu^a(\mathbf{x}, t), \pi_b^\nu(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_b^a \delta_\nu^\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \{A_\mu^a(\mathbf{x}, t), A_\nu^b(\mathbf{y}, t)\} &= 0 = \{\pi_a^\mu(\mathbf{x}, t), \pi_b^\nu(\mathbf{y}, t)\} \end{aligned}$$

la expresión (1.27) se reduce a:

$$\Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}, t) \equiv \partial_i \pi_a^i - gf_{abc} A_i^c \pi_b^i \approx 0 \quad (1.28)$$

la cual se puede interpretar como la ley de Gauss, pues es equivalente a:

$$\mathcal{D}_i E_a^i \approx 0,$$

que es la contraparte no abeliana de $\partial_i E^i \approx 0$.

Debido a la forma de (1.28) no hay manera de conocer a los multiplicadores de Lagrange de la teoría a partir de (1.27), claro, en (1.28) no aparecen los multiplicadores. En su lugar se obtiene una expresión, la cual no es una identidad del tipo $0 \approx 0$, sino lo que se llama en el algoritmo una *constricción secundaria*, aunque en este caso r constricciones secundarias $\Phi_a^{(2)}$ para cada punto \mathbf{x} . Continuando con la búsqueda de la forma explícita para λ^a , se exige ahora la condición de consistencia para $\Phi_a^{(2)}$, esto es:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}, t), H^{(1)} \right\} \\ &\approx \int d\mathbf{y} \left[\left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}_c(\mathbf{y}, t) \right\} + \lambda^b(\mathbf{y}, t) \left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}, t), \Phi_b^{(1)}(\mathbf{y}, t) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

En virtud de los paréntesis fundamentales de Poisson, se observa que el factor que multiplica a λ^a es idénticamente cero, mientras que el primer término es:

$$\int d\mathbf{y} \left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}, t), \frac{1}{2}\pi_b^i(\mathbf{y}, t)\pi_b^i(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{4}F_b^{ij}(\mathbf{y}, t)F_{ij}^b(\mathbf{y}, t) - A_0^b\Phi_b^{(2)}(\mathbf{y}, t) \right\}$$

que después de un poco de álgebra y mantener la misma suposición de campos bien comportados al infinito, se puede demostrar que es proporcional a las constricciones secundarias $\Phi_a^{(2)}$. Reinterpretando a las igualdades débiles ahora con respecto a la hipersuperficie de todas las constricciones, tenemos entonces:

$$\dot{\Phi}_a^{(2)} \propto \Phi_a^{(2)} \approx 0.$$

Y no se tienen mas constricciones, $\dot{\Phi}_a^{(2)} \approx 0$ no implicó otra relación distinta a las que ya conocíamos entre los campos y sus momentos, por lo tanto en este punto se da por terminado el algoritmo. Mostremos ahora cómo las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.4) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton que se obtienen con la Hamiltoniana primaria $H^{(1)}$ y los paréntesis fundamentales de Poisson, explícitamente:

$$\dot{A}_\mu^a = \left\{ A_\mu^a, H^{(1)} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{A}_0^a = \lambda^a \\ \dot{A}_i^a = \pi_a^i + \partial_i A_0^a + gf_{abc}A_0^b A_i^c \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\dot{\pi}_a^\mu = \left\{ \pi_a^\mu, H^{(1)} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\pi}_a^0 = \Phi_a^{(2)} \approx 0 \\ \dot{\pi}_a^i = gf_{abc}F_b^{i0} A_0^c + \mathcal{D}_j F_a^{ji} \end{cases} \quad (1.31)$$

donde $\dot{}$ se refiere a ∂_0 . Observe que las ecuaciones para las coordenadas corresponden a definiciones que ya se hicieron: la componente temporal simplemente nos autoriza a identificar a la velocidad de A_0^a como el multiplicador de Lagrange λ^a , mientras que las componentes espaciales corresponden a la definición de los momentos π_a^i expresables en términos de las velocidades de A_i^a . Por otro lado, para los momentos se tiene que: la componente temporal de las ecuaciones es la ecuación de consistencia de la restricción primaria $\Phi_a^{(1)}$ y corresponde débilmente a la ecuación temporal de Euler-Lagrange, i.e. a la ley de Gauss; las componentes espaciales son las componentes espaciales de las ecuaciones de movimiento a nivel Lagrangiano, i.e. $\mathcal{D}_\mu F_a^{\mu i} = 0$.

En suma, la teoría contiene $2r$ constricciones (en cada punto \mathbf{x}) que además de acuerdo con la definición de Dirac, son *constricciones de primera clase*⁽⁵⁾, pues si se calcula el álgebra de constricciones se tiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}), \Phi_b^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= 0, & \left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}), \Phi_b^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}), \Phi_b^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} &= igf_{abc} \Phi_c^{(2)}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \approx 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

de hecho la última igualdad débil es la que se usó para mostrar que $\dot{\Phi}_a^{(2)} \propto \Phi_a^{(2)}$, entonces podemos decir que el álgebra de constricciones (1.32) es fundamental en este caso para la indeterminación de las funciones λ^a . En el cálculo de estos parentésis uno debe tener cuidado y tomar en cuenta el caracter de distribución de los paréntesis de Poisson, para ello se definen las constricciones con una función de peso bien comportada:

$$\begin{aligned} \Phi_a^{(1)}[f] &\equiv \int_{\Sigma} d\mathbf{x} f \pi_a^0, \\ \Phi_a^{(2)}[g] &\equiv \int_{\Sigma} d\mathbf{x} g (\mathcal{D}_i E_a^i) \end{aligned}$$

con lo que el álgebra de constricciones se reescribe como:

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_a^{(1)}[f], \Phi_b^{(1)}[g] \right\} &= 0, & \left\{ \Phi_a^{(2)}[f], \Phi_b^{(1)}[g] \right\} &= 0, \\ \left\{ \Phi_a^{(2)}[f], \Phi_b^{(2)}[g] \right\} &= igf_{abc} \Phi_c^{(2)}[fg] \approx 0, \end{aligned}$$

y se evita así tratar con expresiones de distribución.

La importancia de la clasificación de estas constricciones como de primera clase recae en el remarcable hecho de su conexión con la invariancia de norma local, esta relación quedará explícita en la siguiente sección.

1.4. Constricciones de primera clase y transformaciones de norma

Lo que se ha apuntado en las secciones anteriores refleja un par de resultados muy generales. El primero expresa que cualquier Lagrangiana invariante bajo

⁵ Una funcional $\mathcal{F}(\varphi_A, \pi^A)$ es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas las constricciones (primarias y secundarias) es débilmente cero, es decir, cero en la hipersuperficie de constricciones $\Phi \approx 0$.

transformaciones de norma local es necesariamente singular, aunque la recíproca no es siempre cierta; y el segundo, que la existencia de un grupo de invariancia infinito, para cierta Lagrangiana, lleva siempre a constricciones de primera clase [5].

Por otro lado, la existencia de las funciones arbitrarias $\lambda^a(\mathbf{y}, t)$ en la evolución temporal de \mathcal{F} , descrita por:

$$\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}, t) \approx \int d\mathbf{y} [\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}_c(\mathbf{y}, t)\} + \lambda^a(\mathbf{y}, t)\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \Phi_a^{(1)}(\mathbf{y}, t)\}] \quad (1.33)$$

para la presente teoría, implica que si uno fija el valor inicial de \mathcal{F} , por decir \mathcal{F}_0 al tiempo $t = t_0$, entonces en un tiempo posterior, $t > t_0$, \mathcal{F} tendrá distintos valores los cuales dependerán de cómo uno elija a $\lambda^a(\mathbf{y}, t)$. Dicho de otra manera, $\lambda^a(\mathbf{y}, t)$ da lugar a que exista un conjunto de trayectorias, en el espacio fase y sobre la hipersuperficie de constricciones, distintas una de otra, pero físicamente equivalentes, que evolucionan a partir de un mismo valor inicial \mathcal{F}_0 . De hecho, la transformación que conecta dos trayectorias \mathcal{F}_λ y $\mathcal{F}_{\lambda'}$, para dos valores λ^a y λ'^a distintos, es una transformación de norma en el formalismo Hamiltoniano. La variación infinitesimal, entre estas dos trayectorias a un tiempo t , es en primera instancia:

$$\delta\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \epsilon^a(\mathbf{y}, t)\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \Phi_a^{(1)}(\mathbf{y}, t)\}$$

donde $\epsilon^a \equiv t(\lambda^a - \lambda'^a)$, siendo $\Phi_a^{(1)}$ la restricción primaria de primera clase de la teoría y generadora de las transformaciones de norma. Pero de acuerdo con Dirac, los generadores de la transformación de norma en el formalismo de Hamilton no son solamente las constricciones primarias de primera clase, sino también todas las secundarias (secundarias, terciarias, etc.) de primera clase. Entonces deberemos reemplazar la variación entre las dos trayectorias por:

$$\delta\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{y} \left[\epsilon_1^a(\mathbf{y}, t)\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \Phi_a^{(1)}(\mathbf{y}, t)\} + \epsilon_2^a(\mathbf{y}, t)\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \Phi_a^{(2)}(\mathbf{y}, t)\} \right] \quad (1.34)$$

pues las $2r$ constricciones $\Phi_a^{(1)}, \Phi_a^{(2)}$ son de primera clase. La conjetura de que todas las constricciones de primera clase sean generadoras de transformaciones de norma, no es del todo cierta, ya que se pueden encontrar contraejemplos a dicha proposición [5, 6], es decir, casos donde solamente algunas constricciones de primera clase sean las generadoras de transformaciones de norma.

Note, pues, que en el párrafo anterior se apuntó la existencia de transformaciones de norma a nivel de la Hamiltoniana, pero sería satisfactorio saber cuál es la relación entre esas transformaciones y las transformaciones de norma locales que se dan a nivel de la Lagrangiana, en particular, conocer cuál es la conexión entre (1.34) y las transformaciones (1.10). Para dicho propósito, considere las ecuaciones (1.34) para los campos fundamentales A_μ^a :

$$\delta A_\mu^a(\mathbf{x}, t) = \delta_\mu^0 \epsilon_1^a(\mathbf{x}, t) - \delta_\mu^i (\mathcal{D}_i \epsilon_2)^a(\mathbf{x}, t)$$

y para que correspondan fielmente a las transformaciones de norma local (1.10), que se dan a nivel Lagrangiano, se eligen $\epsilon_1^a \equiv \frac{1}{g} (\mathcal{D}_0 \theta)^a$ y $\epsilon_2 \equiv -\frac{1}{g} \theta^a$ y entonces:

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (\mathcal{D}_\mu \theta)^a = \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a - g f_{abc} \theta^b A_\mu^c)$$

Por lo tanto, para el caso particular que aquí se considera, todas las constricciones de primera clase deben tomarse en cuenta para establecer una conexión entre éstas y las transformaciones de norma infinitesimales, es decir, se puede aplicar la conjetura de Dirac.

En un caso general, se define la Hamiltoniana extendida de la teoría como [3]:

$$H_E \equiv H^{(1)} + \int d\mathbf{x} \eta^{\kappa'}(\mathbf{x}, t) \Phi_{\kappa'}(\mathbf{x}, t)$$

con $\eta^{\kappa'}$ multiplicadores de Lagrange arbitrarios y $\Phi_{\kappa'}$ representando a todas las constricciones no primarias de primera clase. La motivación para definir H_E , según la conjetura de Dirac, es que aunque la Hamiltoniana primaria describe la dinámica del sistema, no refleja la libertad de norma y en ese sentido H_E es superior a $H^{(1)}$. Para el caso particular con el que se ha estado tratando en este capítulo, tal definición sería un tanto redundante ya que la Hamiltoniana primaria:

$$H^{(1)} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \frac{1}{4} F_{ik}^a F_a^{ik} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right]$$

muestra que ésta ya contiene los generadores de la transformación de norma, $\Phi_a^{(1)}$ y $\Phi_a^{(2)}$ con los multiplicadores \dot{A}_0 y A_0 , respectivamente. Por lo tanto es suficiente seguir considerando a la ecuación de movimiento (1.33) como la más general para este caso.

Hasta el momento, el tratamiento sobre la densidad Lagrangiana \mathcal{L} ha sido puramente clásico y entonces se debe cumplir que dado un conjunto de condiciones iniciales, $(\varphi_{\alpha 0}, \pi^{\alpha 0})$ al tiempo $t = t_0$, la evolución temporal del sistema quede totalmente determinada; pero, de la breve discusión que ya se ha hecho acerca de los sistemas con constricciones de primera clase, pareciera ser que esa idea deja de funcionar. Sin embargo, si se define a las observables, o cantidades aptas de someterse a medición, como funcionales, \mathcal{O} , de primera clase, entonces su evolución temporal quedará completamente caracterizada y no dependerá de funciones arbitrarias; así las constricciones de primera clase nos sirven como reglas que seleccionan a cantidades cuya evolución es independiente de la forma que tengan las funciones λ^a .

En general, el proceso para elegir una forma particular de los multiplicadores de Lagrange, no es del todo arbitrario y se le conoce como *proceso de fijación de la norma*. La teoría general [4], indica que para romper con la arbitrariedad funcional dada por m multiplicadores de Lagrange, asociados a m constricciones de primera clase, $\Phi^{1st} \approx 0$, se deben establecer m constricciones suplementarias independientes, $\Phi^G \approx 0$. Una manera de “encontrar” estas m condiciones extra es como sigue: Escoger un conjunto de condiciones suplementarias, $\Phi_{(1)}^G \approx 0$, menor en número a m , posteriormente exigirles que cumplan con las ecuaciones de consistencia correspondientes⁽⁶⁾. De esta forma algunos de los m multiplicadores de Lagrange, asociados a las m constricciones de primera clase, pueden ser determinados y por otro lado nuevas constricciones, distintas de Φ^{1st} y $\Phi_{(1)}^G$, posiblemente aparecerán; y se denotarán por $\Phi_{(2)}^G$. En un segundo paso, se procede a calcular las ecuaciones de consistencia para $\Phi_{(2)}^G$, con la Hamiltoniana primaria donde se han sustituido aquellos multiplicadores que se determinaron en el paso anterior, de aquí nuevos multiplicadores se pueden conocer explícitamente y nuevas constricciones, distintas a Φ^{1st} , $\Phi_{(1)}^G$ y $\Phi_{(2)}^G$, posiblemente aparecerán, denotadas ahora por $\Phi_{(3)}^G$, y así sucesivamente. Si al final del proceso se han determinado todos los multiplicadores de Lagrange (m) y se tiene un total

⁶ Esto significa calcular tales ecuaciones con la Hamiltoniana primaria que se obtuvo al final del procedimiento de Dirac para las constricciones originales del sistema.

de m constricciones $\Phi^G = (\Phi_1^G, \dots, \Phi_m^G)$, tales que:

$$\det [\{ \Phi^G, \Phi^{1st} \}] \neq 0$$

entonces se dice que la norma ha quedado fijada en la región donde esta condición se cumpla. Obviamente, el número de constricciones $\Phi_{(1)}^G$, que se imponen al principio del algoritmo anterior, debe ser al menos igual al número de constricciones primarias de primera clase [4]. Además, este primer conjunto no es del todo arbitrario, ya que debe cumplir al final con que el conjunto de constricciones (Φ^G, Φ^{1st}) sea tal que sus elementos sean cantidades de segunda clase⁽⁷⁾.

De la discusión dada en el párrafo anterior podemos hacer el conteo de las variables canónicas independientes que se dan en una teoría de Yang-Mills pura, pues en ésta se tienen $2r$ constricciones de primera clase (en cada punto del espacio-tiempo) y para que el conjunto de las nuevas variables canónicas sea independiente es necesario fijar las condiciones de norma, lo que en principio, introduce otras $2r$ constricciones (que junto con $\Phi_a^{(1)}$ y $\Phi_a^{(2)}$ serian constricciones de segunda clase). De modo que las $2 \times (d \times r)$ variables canónicas iniciales están sometidas a $4r$ condiciones que definen la hipersuperficie donde se dan las trayectorias en el tiempo sin arbitrariedad alguna, por lo tanto el número de variables canónicas independientes es $2r(d - 2)$, y los grados de libertad físicos son obviamente $r(d - 2)$. En particular, para una teoría abeliana como la de Maxwell en un espacio-tiempo 4-dimensional, de acuerdo con este conteo se tienen $1(4 - 2) = 2$ grados de libertad físicos o los correspondientes modos transversales del fotón.

Solo como una observación deberemos advertir que el proceso que aquí se presenta para el tratamiento de las constricciones y el conteo de los grados de libertad, se hizo siempre bajo el supuesto de que las constricciones obedecen las llamadas *condiciones de regularización*⁽⁸⁾; de otra manera se tienen que hacer ligeros cambios a los resultados generales que ya se presentaron.

Hablando de la cuantización de las teorías singulares, es usual llevar a cabo el proceso de cuantización de una teoría de norma, realizando primero el proceso

⁷ Se dice que una funcional $\mathcal{F}(\varphi_A, \pi^A)$ es de segunda clase si no es de primera clase.

⁸ Esencialmente éstas condiciones verifican la independencia funcional entre las constricciones; aunque las constricciones en una teoría de Yang-Mills las cumplen, existen otras teorías de interés físico donde estas condiciones no se satisfacen (véase por ejemplo [10]).

de fijación de norma y después usando, por ejemplo, el formalismo de integral de trayectoria junto con el método de Faddeev-Popov o bien el teorema de Senjanovic (para una teoría que naturalmente tiene constricciones de segunda clase); sin embargo, históricamente fue Dirac quien primero dio una “receta” para tratar con el problema de la cuantización de un teoría con constricciones de primera clase, en ella no deja de ver a las constricciones de primera clase como reglas de selección y ahora solamente extiende su aplicabilidad a los estados físicos cuánticos. En el siguiente capítulo, revisaremos primero las teorías de Chern-Simons, las cuales, aunque en un principio parecen no tener mucha relación con estas reglas de selección para una teoría cuántica de Yang-Mills mostraran una conexión con ellas la cual será analizada en el tercer capítulo.

Capítulo 2

Teoría de Chern-Simons en altas dimensiones

Una teoría de Chern-Simons corresponde también al tipo de teorías invariantes de norma localmente, donde el campo fundamental es el potencial vector, el cual vive en el álgebra del grupo de norma. En general una teoría de Chern-Simons tiene dos propiedades características, que no comparte con otras teorías de campo: la primera, es que es apta para definirse sobre una variedad Σ (necesariamente de dimensión impar) que bien puede no estar equipada con una métrica; la segunda, es que aunque en general la Lagrangiana no involucra solamente primeras potencias de primeras derivadas de los campos, las ecuaciones de Euler-Lagrange son de primer orden, cuando las teorías de campo usuales dan ecuaciones de segundo orden.

Para los propósitos que tiene el presente trabajo, vamos a considerar a la variedad Σ como la parte espacial de la variedad M , que por los requerimientos de una teoría de Chern-Simons suponemos desde ahora de dimensión par, i.e. $d = 2n$ con n un entero positivo y $M = \mathbb{R} \times \Sigma$. Con esta elección se tendrá que los campos fundamentales para cada teoría de Chern-Simons serán las componentes espaciales del potencial vector A_i^a , con $i = 1, \dots, 2n - 1$. La dinámica proveniente de la frontera no será considerada en este trabajo.

2.1. La n -ésima forma de Chern

Para motivar un poco la existencia de lo que mas adelante llamaremos la acción de Chern-Simons, vamos a partir construyendo una d -forma invariante de norma, con $d = 2n$, que pueda considerarse como una densidad Lagrangiana que no involucre a métrica alguna del espacio base M y que además contenga los objetos geométricos fundamentales A y F . Una opción interesante con estas restricciones es:

$$\text{trs} \underbrace{(F \wedge F \wedge \dots \wedge F)}_{n \text{ factores}} \equiv \text{trs}(F^n),$$

llamada la n -ésima forma de Chern⁽¹⁾, donde el símbolo trs denota la traza simetrizada. Ésta actúa como la función traza definida en el Apéndice A pero simetrizada; en particular si se tienen N formas, B_1, B_2, \dots, B_N , evaluadas en el álgebra del grupo, esto es $B_k = B_{kI}^a T_a dx^I$, de grados p_1, p_2, \dots, p_N respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} \text{trs}(B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_N) &= B_1^{a_1} \wedge B_2^{a_2} \wedge \dots \wedge B_N^{a_N} \otimes \sum_{\text{perm}} \frac{1}{N!} [T_{a_{P(1)}} T_{a_{P(2)}} \dots T_{a_{P(N)}}] \\ &\equiv B_1^{a_1} \wedge B_2^{a_2} \wedge \dots \wedge B_N^{a_N} \otimes \text{trs} [T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_N}] \end{aligned}$$

(i.e. la traza simetrizada primero saca la parte de las formas y después simetriza la parte “matricial”). Algunas propiedades de la traza simetrizada al aplicarse sobre formas $\text{End}(E)$ -evaluadas S y T , de grados p y q respectivamente, son iguales a las que cumple la traza y que se enuncian en el apéndice A, a saber:

$$\begin{aligned} \text{trs}(TS) &= (-1)^{pq} \text{trs}(ST) \\ \text{trs}([T, S]^\circ) &= 0 \\ \text{trs}(d_{\mathcal{D}}T) &= d\text{trs}(T) \\ \int_M \text{trs}(d_{\mathcal{D}}T \wedge S) &= (-1)^{p+1} \int_M \text{trs}(T \wedge d_{\mathcal{D}}S), \text{ con } p + q = d - 1 \end{aligned}$$

pero además ésta cumple con:

$$\text{trs}(B_1 \dots B_k B_{k+1} \dots B_N) = (-1)^{p_k p_{k+1}} \text{trs}(B_1 \dots B_{k+1} B_k \dots B_N). \quad (2.1)$$

¹ A esta forma también se le conoce como la forma de Chern-Pontryagin.

Con conocimiento explícito de la función trs , podemos escribir de forma un poco más desarrollada la n -ésima forma de Chern como:

$$\text{trs}(F^n) = g_{a_1 a_2 \dots a_n} F^{a_1} \wedge F^{a_2} \dots \wedge F^{a_n}$$

donde introducimos el tensor invariante ($d_{\mathcal{D}} g_{a_1 a_2 \dots a_n} = 0$) y totalmente simétrico $g_{a_1 a_2 \dots a_n} \equiv \text{trs}(T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n})$, el cual se reduce a la forma de Killing K_{ab} asociada al álgebra del grupo para el caso $n = 2$.

Tomando seriamente como una densidad Lagrangiana a la n -ésima forma de Chern, e integrándola sobre el espacio-tiempo $2n$ dimensional M para obtener la acción correspondiente, se pueden hallar ahora las ecuaciones de movimiento de esta teoría mediante la variación respecto al potencial vector A :

$$\begin{aligned} \delta \int_M \text{trs}(F^n) &= \int_M \text{trs}(\delta F F^{n-1} + F \delta F^{n-1}) \\ &= \int_M \text{trs}(\delta F F^{n-1} + F \delta F F^{n-2} + \dots + F^{n-1} \delta F) \\ &= n \int_M \text{trs}(\delta F F^{n-1}) = n \int_M \text{trs}(d_{\mathcal{D}}(\delta A) F^{n-1}) \\ &= n \int_M \text{trs}(\delta A d_{\mathcal{D}} F^{n-1}), \end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades de trs y supuesto que los campos tienen buen comportamiento al infinito como para poder prescindir de términos de frontera. Ahora bien, usando la fórmula para la derivada exterior covariante de un producto de formas evaluadas en el álgebra del grupo, así como la identidad de Bianchi (cf. ecuaciones (A.8) y (A.13)) se tiene que $d_{\mathcal{D}} F^{n-1} = 0$ y así la variación de la acción formada con la n -ésima forma de Chern es idénticamente cero para cualquier variación del potencial vector; esto es, $\delta S = 0$ *no* impone en este caso restricción alguna sobre el campo de norma o dicho de otra forma, cualquier potencial vector A hace de la acción $\int_M \text{trs}(F^n)$ una acción estacionaria.

Aunque el resultado anterior parece poco profundo, realmente revela un resultado muy general (véase [16]) el cual indica que si $P(F)$ es un polinomio, con $P(0) = 0$, en la 2-forma de curvatura F que satisface:

$$P(F) = P(gFg^{-1}) \tag{2.2}$$

para toda transformación de norma $g \in \mathcal{G}$, entonces se debe cumplir que:

- (i) $P(F)$ es una forma cerrada, $dP(F) = 0$.
- (ii) $P(F)$ tiene integrales topológicamente invariantes (i.e. invariantes bajo difeomorfismos de campos de norma y dependientes solamente de las funciones de transición).

Al ser $P_n \equiv \text{trs}(F^n)$, un monomio que cumple con (2.2), se tiene de acuerdo con el resultado (i), que $dP_n = 0$, y de hecho se deduce inmediatamente usando la identidad de Bianchi:

$$dP_n = d \text{trs}(F^n) = \text{trs}(d_{\mathcal{D}}F^n) = \text{trs}(d_{\mathcal{D}}F F^{n-1} + \dots + F^{n-1}d_{\mathcal{D}}F) \equiv 0.$$

Ahora, el resultado (ii), para el monomio P_n lo podemos escribir como:

$$P_n(F_1) - P_n(F_0) = d\omega_{2n-1}(A_1 - A_0, F) \quad (2.3)$$

$$\Leftrightarrow \int_M P_n(F_0) = \int_M P_n(F_1) \quad (2.4)$$

donde F_1 y F_0 son las 2-formas asociadas a los dos potenciales vectores distintos A_1 y A_0 , respectivamente, los cuales están relacionados por la interpolación uniparametrica continua:

$$\left. \begin{aligned} A_s &= A_0 + s(A_1 - A_0) \\ F_s &= dA_s + A_s^2 = (1-s)F_0 + sF_1 - s(1-s)(A_1 - A_0)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

y $\omega_{2n-1}(A_1 - A_0, F)$ es una $(2n-1)$ -forma de la cual hallaremos su dependencia funcional explicita más adelante. La ecuación (2.4) es la manera de indicar que cualquier P_n tiene una integral independiente de la conexión (hasta un término de frontera), y por lo tanto al considerar la variación de la acción $\int_M P_n$ no tenemos restricción alguna sobre A en forma de ecuaciones de Euler-Lagrange.

2.2. La forma de Chern-Simons

Ya verificamos que la n -ésima forma de Chern es cerrada, entonces en virtud del lema de Poincaré, tenemos que localmente podemos hallar una $(2n-1)$ -forma cuya derivada exterior sea precisamente P_n . Para ver explícitamente tal $(2n-1)$ -forma usaremos un procedimiento general. Consideremos la interpolación (2.5)

y un polinomio arbitrario $P(A, F)$, con $P(0) = 0$. Definimos el operador ℓ_s que actúa sobre la 1-forma A_s y la 2-forma F_s , que viven en el álgebra del grupo, como [16]:

$$\left. \begin{aligned} \ell_s A_s &= 0 \\ \ell_s F_s &= ds(A_1 - A_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

junto con el requerimiento:

$$\ell_s(R_s T_s) = \ell_s R_s T_s + (-1)^p R_s \ell_s T_s$$

al actuar sobre el producto entre las formas R_s y T_s , evaluadas en el álgebra del grupo, cuyo grado es p y q respectivamente. Entonces así como el operador ‘d’ aumenta el grado de una forma cualquiera en la unidad, ‘ ℓ_s ’ lo disminuye de la misma forma. No es difícil mostrar las siguiente identidades:

$$\begin{aligned} (d\ell_s + \ell_s d)A_s &= ds(A_1 - A_0) = ds \frac{dA_s}{ds} \\ (d\ell_s + \ell_s d)F_s &= ds d_{\mathcal{D}}^s(A_1 - A_0) = ds \frac{dF_s}{ds} \end{aligned}$$

que se siguen de (2.6) y la definición de ℓ_s sobre un producto de formas. En estas expresiones el operador ‘ $d_{\mathcal{D}}^s$ ’ denota la derivada covariante exterior asociada al potencial vector A_s , i.e. $d_{\mathcal{D}}^s \cdot \equiv d \cdot + [A_s, \cdot]$. Con esto tenemos entonces que sobre el polinomio $P(A_s, F_s)$, resultado de sustituir en $P(A, F)$ a $A \rightarrow A_s$ y $F \rightarrow F_s$, la operación de $(d\ell_s + \ell_s d)$ implica:

$$(d\ell_s + \ell_s d)P(A_s, F_s) = ds \frac{dP(A_s, F_s)}{ds}.$$

Integrando ahora a ambos lados de la igualdad respecto al parámetro continuo s , se tiene la importante identidad:

$$P(A_1, F_1) - P(A_0, F_0) = (dk_{01} + k_{01}d)P(A_s, F_s) \quad (2.7)$$

donde k_{01} es el llamado *operador de homotopía*, el cual actúa sobre cualquier polinomio $Q(A_s, F_s)$ como sigue:

$$k_{01}Q(A_s, F_s) \equiv \int_0^1 \ell_s Q(A_s, F_s).$$

A la identidad (2.7) se le puede ahora particularizar convenientemente para obtener tanto lo que más adelante llamaremos la forma de Chern-Simons, como

el cambio de ésta misma bajo una transformación de norma general. De hecho haciendo en (2.7) la sustitución $P = P_n$ se tiene la ecuación (2.3) después de usar la cerradura de la n -ésima forma de Chern, con:

$$\omega_{2n-1} = \int_0^1 \ell_s \text{trs} (F_s^n)$$

o bien, usando (2.6) junto con la ciclicidad de la traza simetrizada y la acción de ℓ_s sobre el producto de formas, tenemos que (2.7) se reduce a:

$$P_n(F_1) - P_n(F_0) = d\omega_{2n-1} = d \left[n \int_0^1 ds \text{trs} ((A_1 - A_0)F_s^{n-1}) \right].$$

Usando ahora la interpolación particular:

$$\begin{aligned} A_s &= sA, \quad (\Leftrightarrow A_0 = 0 \text{ y } A_1 = A) \\ F_s &= sF - s(1-s)A^2 \quad (\Leftrightarrow F_0 = 0 \text{ y } F_1 = F) \end{aligned}$$

se tiene que esta ecuación es:

$$P_n(A) = d \left[n \int_0^1 ds \text{trs} (AF_s^{n-1}) \right], \quad (2.8)$$

que muestra explícitamente que las formas cerradas P_n siempre se pueden escribir localmente como exactas⁽²⁾. A la $(2n-1)$ -forma que aparece en el lado derecho de (2.8),

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}(A, F) &\equiv \int_0^1 \ell_s \text{trs} (F_s^n) \quad \text{con } A_s = sA \\ &= n \int_0^1 ds \text{trs} (AF_s^{n-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

se le conoce como la n -ésima forma de Chern-Simons asociada a P_n . Recalamos entonces que (2.8) es la razón por la cual la acción $\int_M P_n$ no proporciona ecuaciones de movimiento de mucho interés, lo cual es claro, pues al obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange uno supone que puede prescindir de términos de frontera y en este caso la acción por sí misma corresponde a un término de frontera. Aún así, con la forma ω_{2n-1} podemos construir ahora una acción invariante de norma infinitesimalmente sobre una variedad de dimensión impar, que se analizará con detalle en la siguiente sección.

² La localidad en esta fórmula se encuentra en la cantidad $dA = \partial_\mu A_\nu dx^\mu dx^\nu$ que aparece dentro de la 2-forma de curvatura.

2.3. Acción de Chern-Simons

Se define la acción de Chern-Simons sobre una variedad $(2n-1)$ -dimensional, la cual en este caso escogemos como la parte espacial Σ de la variedad $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, como la integral de la n -ésima forma de Chern-Simons:

$$S_{CS}^{(2n-1)} [A_i^a] \equiv \int_{\Sigma} \tilde{\omega}_{2n-1} \quad (2.10)$$

siendo $\tilde{\omega}_{2n-1}$ la parte espacial de la $(2n-1)$ -forma ω_{2n-1} ⁽³⁾.

A continuación mostremos como la acción (2.10) es invariante bajo transformaciones de norma infinitesimales o pequeñas. Para ver esto vamos a deducir primero como cambia $\omega_{2n-1}(A, F)$ bajo las llamadas transformaciones de norma grandes (i.e. aquellas que no necesariamente están conectadas con la identidad). Partiendo de la ecuación (2.7) hagamos $P = \omega_{2n-1}$ con lo que:

$$\omega_{2n-1}(A_1, F_1) - \omega_{2n-1}(A_0, F_0) = (dk_{01} + k_{01}d)\omega_{2n-1}(A_s, F_s) \quad (2.11)$$

donde de (2.9) tenemos:

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}(A_s, F_s) &= n \int_0^1 ds' \operatorname{trs} (A_s F_{s'}^{n-1}) \\ &= n \int_0^1 ds' \operatorname{trs} [A_s (s' F_s - s'(1-s') A_s^2)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Considerando ahora la interpolación particular donde A_0 corresponda a un campo puro de norma (i.e. a un potencial vector que venga de la transformación de norma de un potencial vector nulo), y A_1 a un potencial vector resultado de la transformación de norma aplicada a un potencial $A \neq 0$:

$$\begin{aligned} A_s &= sgAg^{-1} + gdg^{-1}, \quad (\Leftrightarrow A_0 = gdg^{-1} \text{ y } A_1 = g(A+d)g^{-1}) \\ F_s &= sgFg^{-1} - s(1-s)(gdg^{-1}) \quad (\Leftrightarrow F_0 = 0 \text{ y } A_1 = gFg^{-1}). \end{aligned}$$

Tenemos del lado izquierdo de (2.11) las cantidades:

$$\begin{aligned} \omega_{2n-1}(A_1, F_1) &= \omega_{2n-1}(A^g, F^g) \\ \omega_{2n-1}(A_0, F_0) &= n \int_0^1 ds' [A_0 (s' F_0 - s'(1-s') A_0^2)^{n-1}] \\ &= (-1)^{n-1} n B(n, n) \operatorname{trs} (A_0^{2n-1}) \end{aligned}$$

³ En lo que sigue si p es una p -forma evaluada en el álgebra, i.e. $p = \frac{1}{p!} p_{\mu \dots \nu}^a T_a dx^\mu \dots dx^\nu$, denotamos su parte espacial o la correspondiente a la variedad Σ como $\tilde{p} = \frac{1}{p!} p_{i \dots j}^a T_a dx^i \dots dx^j$.

donde $B(n, n)$ es la función Beta cuya relación con la función Γ , $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, arroja el resultado:

$$\omega_{2n-1}(A_0, F_0) = \omega_{2n-1}(\text{gdg}^{-1}, 0) = (-1)^{n-1} \frac{n!(n-1!)}{(2n-1)!} \text{trs} [(\text{gdg}^{-1})^{2n-1}]; \quad (2.12)$$

mientras el lado derecho de la ecuación (2.11) se puede escribir, usando la definición del operador de homotopía k_{01} y las ecuaciones (2.8) y (2.9), como:

$$\begin{aligned} (dk_{01} + k_{01}d)\omega_{2n-1}(A_s, F_s) &= d \int_0^1 \ell_s \omega_{2n-1}(A_s, F_s) + \int_0^1 \ell_s \text{trs}(F_s^n) \\ &\equiv d\varrho_{2n-2} + \omega_{2n-1}(A, F). \end{aligned}$$

Por lo tanto la identidad (2.7) resulta, bajo las elecciones convenientes del polinomio P y de la interpolación (2.5), en el cambio de la n -ésima forma de Chern-Simons bajo las transformaciones de norma grandes g en \mathcal{G} :

$$\omega_{2n-1}(A^g, F^g) = \omega_{2n-1}(A, F) + \omega_{2n-1}(\text{gdg}^{-1}, 0) + d\varrho_{2n-2} \quad (2.13)$$

donde:

$$\varrho_{2n-2} \equiv \int_0^1 \ell_s \omega_{2n-1}(A_s, F_s). \quad (2.14)$$

En palabras, la n -ésima forma de Chern-Simons cambia, bajo una transformación de norma, por un término que depende solamente de la transformación misma y una derivada total. De tal manera que la acción de Chern Simons cambia bajo esta transformación como:

$$S_{CS}^{(2n-1)}[(A_i^a)^g] = S_{CS}^{(2n-1)}[A_i^a] + \int_{\Sigma} \tilde{\omega}_{2n-1}(\text{gdg}^{-1}, 0) \quad (2.15)$$

hasta un término de frontera. Restringiendo esta expresión a transformaciones de norma infinitesimales, esto es a elementos $g \in \mathcal{G}$ de la forma $\mathbb{1} - \frac{1}{g}\theta$, se tiene que $\omega_{2n-1}(\text{gdg}^{-1}, 0) \sim \text{trs} [(d\theta)^{2n-1}]$ y entonces para los casos donde $n \geq 2$ tenemos que la acción de Chern-Simons es invariante bajo transformaciones de norma pequeñas. El caso particular $n = 2$ sera analizado en detalle en la siguiente sección.

El siguiente paso es ahora calcular las ecuaciones de movimiento de la acción de Chern-Simons, y en vista del ahorro en la escritura con la notación libre de índices, definimos la variación de cualquier polinomio $P(A, F)$ por medio de un

operador, que en cierta forma es una generalización de ℓ_s , denotado por ℓ , el cual actúa sobre el potencial vector A y la dos forma de curvatura F como:

$$\ell A = 0, \quad \ell F = \delta A \quad (2.16)$$

y satisface:

$$\left. \begin{aligned} (\ell d + d\ell)A &= \delta A, \\ (\ell d + d\ell)F &= d_{\mathcal{D}}(\delta A) = \delta F, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

lo cual puede probarse inmediatamente usando las definiciones (2.16) y aceptando que ℓ actúa sobre un producto de formas evaluadas en el álgebra tal y como lo hace ℓ_s . La expresión (2.17) indica que al aplicarse sobre cualquier polinomio arbitrario en A y F , $(\ell d + d\ell)$ genera la variación respectiva. En particular si aplicamos este operador sobre la n -forma de Chern-Simons ω_{2n-1} , se tendrá:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{2n-1} &\equiv \omega_{2n-1}(A + \delta A, F + \delta F) - \omega_{2n-1}(A, F) = (\ell d + d\ell)\omega_{2n-1}(A, F) \\ &= \ell \text{trs}(F^n) + d\ell \left[n \int_0^1 ds \text{trs}(A F_s^{n-1}) \right] \\ &= n \text{trs}(\delta A F^{n-1}) - d \left[n \int_0^1 ds \text{trs}(A \ell F_s^{n-1}) \right] \end{aligned}$$

pero como:

$$\text{trs}(A \ell F_s^{n-1}) = (n-1) \text{trs}(A_s \delta A F_s^{n-2}), \quad \text{con } A_s = sA,$$

después de usar las propiedades de la traza simetrizada y la manera de actuar de ℓ sobre el producto de formas, se tiene que:

$$\delta\omega_{2n-1} = n \text{trs}(\delta A F^{n-1}) - d \left[n(n-1) \int_0^1 \text{trs}(A_s \delta A F_s^{n-2}) \right]$$

De este modo la variación de la acción de Chern-Simons (2.10) respecto al potencial vector A se obtiene usando la parte espacial de este último resultado, i.e.:

$$\delta S_{CS}^{(2n-1)} = \int_{\Sigma} (\delta\omega_{2n-1})^{\sim} = n \int_{\Sigma} [\text{trs}(\delta A F^{n-1})]^{\sim}$$

donde hemos omitido ya el término de frontera y esto es lo que quiere decir que no se está tomando en cuenta la dinámica de frontera de la teoría. Otra manera de decir esto es afirmando que se han impuesto las condiciones a la frontera

favorables para tener un extremo bien definido de $S_{CS}^{(2n-1)}$. Igualando ahora a cero la variación $\delta S_{CS}^{(2n-1)}$ se tienen las ecuaciones de campo:

$$n \operatorname{trs}(\delta A F^{n-1}) = n g_{a_1 \dots a_{n-1}} \delta A^a F^{a_1} \dots F^{a_{n-1}} = 0$$

o bien escribiendo todos los índices, las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i^a} &\equiv \frac{\delta \tilde{\omega}_{2n-1}}{\delta A_i^a} \\ &= \frac{n(-ig)^n}{2^{n-1}} g_{a_1 \dots a_{n-1}} \epsilon^{ij_1 k_1 \dots j_{n-1} k_{n-1}} F_{j_1 k_1}^{a_1} \dots F_{j_{n-1} k_{n-1}}^{a_{n-1}} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cabe mencionar que en virtud de la invariancia de norma local infinitesimal con la cual cuenta la Lagrangiana de Chern-Simons $\mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)} \equiv \tilde{\omega}_{2n-1}$, las $2n - 1$ ecuaciones (2.18) para las $2n - 1$ cantidades A_i^a no son independientes (véase Teorema 1).

2.4. Algunos casos particulares y sus propiedades

En esta sección se aplicará el formalismo de las secciones 2.2 y 2.3 a los casos particulares $n = 1$ y $n = 2$, además de motivar su uso en algunos problemas físicos específicos. Se discutirá también la posibilidad de reescribir las formas de Chern-Simons correspondientes a estos casos como formas exactas y se precisará la relación de este resultado con las formas de Chern asociadas (véase sección 2.1). Finalmente se hacen algunos apuntes sobre el caso general.

2.4.1. Caso particular $n = 1$

La acción de Chern-Simons unidimensional. Este caso trata con una variedad espacio-temporal de Minkowski $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ de dimensión $d = 2$. La primera forma de Chern, una 2-forma en esta variedad, se reduce a:

$$\operatorname{trs}(F^1) = \operatorname{tr}(F) = -ig \operatorname{tr}(T_a) F_{\mu\nu}^a dx^\mu dx^\nu \equiv -ig g_a F_{\mu\nu}^a dx^\mu dx^\nu,$$

donde g_a ($a = 1, \dots, r$) es la traza de cada generador del grupo y los índices griegos toman los valores 0 y 1. De acuerdo con la identidad de Bianchi esta 2-forma

es cerrada⁽⁴⁾ y entonces localmente podemos hallar una 1-forma cuya derivada exterior sea precisamente P_1 (cf. ec. (2.8)). Retomando la ecuación (2.9) con $n = 1$, tenemos que la primera forma de Chern-Simons asociada a $P_1 = \text{trs}(F^1)$ es:

$$\omega_1(A) = 1 \int_0^1 ds \text{trs}(AF_s^0) = \text{trs}(A) = -ig g_a A_\mu^a dx^\mu, \quad (2.19)$$

con $d\omega_1 = \text{dtrs}(A) = \text{trs}(d_{\mathcal{D}}A) = \text{trs}(dA + [A, A]^\circ) = \text{trs}(dA) = \text{trs}(F)$, pues $\text{trs}(A^2) = 0$. La manera en que cambia esta 1-forma bajo todas las transformaciones de norma, incluso bajo las que no son homótopicamente triviales, es en virtud de la ecuación (2.13):

$$\omega_1(A^g) = \omega_1(A) + \text{tr}(gdg^{-1})$$

la cual también puede obtenerse directamente sustituyendo una transformación de norma general, $A^g = g(A+d)g^{-1}$, en la primera forma de Chern-Simons (2.19). Infinitesimalmente, la transformación correspondiente es:

$$\omega_1(A') = \omega_1(A) + \frac{1}{g} \text{dtr}(\theta),$$

siendo $\theta = -ig\theta_a T^a$ una 0-forma que vive en el álgebra del grupo y θ_a son parámetros infinitesimales.

La acción de Chern-Simons, la integral de $\tilde{\omega}_1$ sobre la parte espacial de la variedad bidimensional de $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, es en este caso (cf. ec. (2.10)):

$$S_{CS}^{(1)}[A_1^a] = \int_{\Sigma} \tilde{\omega}_1 = -ig g_a \int A_1^a dx^1. \quad (2.20)$$

De modo que esta acción definida sobre la variedad unidimensional Σ cambia bajo todas las transformaciones finitas $g \in \mathcal{G}$ como:

$$S_{CS}^{(1)}[(A_1^a)^g] = S_{CS}^{(1)}[A_1^a] + \int \text{trs}(g\partial_1 g^{-1}) dx^1. \quad (2.21)$$

Tomando en cuenta, como también se hace en el caso $n = 2$, solamente transformaciones aceptables, esto es elementos del grupo de norma con un límite bien definido al infinito [17]:

$$\lim_{|x^1| \rightarrow \infty} g(x^0, x^1) = g_\infty; \quad (2.22)$$

⁴ Otra manera de ver que $\text{dtrs}(F) = 0$ es recordando que una 3-forma es trivialmente cero al estar definida en una variedad bidimensional.

o lo que es lo mismo una compactificación de la variedad unidimensional Σ a S^1 , tendremos que $g \in \mathcal{G}$ bien se puede ver como un mapeo $S^1 \rightarrow \mathcal{G}$ para cada x^0 . Por otro lado, la variedad del grupo no-abeliano de norma es en general de dimensión mayor que 1 y entonces los mapeos $g \in \mathcal{G}$ pueden ser clasificados usando las clases de homotopía⁽⁵⁾, pero del resultado:

$$\Pi_1(\mathcal{M}) = 0, \quad \forall \text{ variedad } \mathcal{M} \text{ de dimensión } > 1 \quad (2.23)$$

tenemos que todas las transformaciones de norma pertenecen en este caso necesariamente a la parte conexas con la identidad; en otras palabras, en dimensión uno resulta redundante hablar de un teoría no-abeliana de Chern-Simons, y así el segundo término del lado derecho de (2.21), al ser considerado como el “winding number”, es entonces siempre nulo. Por lo tanto, la acción de Chern-Simons en dimensión uno, con un grupo de norma no-abeliano, es invariante bajo todas las transformaciones de norma aceptables en el sentido (2.22).

La acción $S_{CS}^{(1)}$ como término de frontera. Mostraremos que es posible escribir la acción de Chern-Simons unidimensional como un término de frontera solamente. Para ello es conveniente separar explícitamente la derivada exterior usual $d = dx^\mu \partial_\mu$, definida en la variedad bidimensional M , en su parte temporal y espacial

$$d = d_t + \tilde{d}, \quad \text{con } d_t \equiv dx^0 \partial_0 \text{ y } \tilde{d} \equiv dx^1 \partial_1, \quad (2.24)$$

y con esta notación podremos ver que $\tilde{\omega}_1(A)$ se puede expresar como $\tilde{d}\Omega_0$ para cierta 0-forma Ω_0 . Aunque este resultado es trivial en esta dimensión, se complica notablemente al pasar al caso $n = 2$. Para sustentar la derivación de este hecho, pensemos en un caso más sencillo: el de una teoría de Chern-Simons abeliana $U(1)$ sobre una variedad unidimensional Σ ; en ese caso, la acción correspondiente es:

$$S_{CS}^{(1)}[A_1] = -ig \int_{\Sigma} A_1 dx^1 \quad (2.25)$$

que al compararla con (2.20) se observa que el índice interno a ya no aparece, pues un grupo de norma $U(1)$ no tiene más que un generador. Notando que

⁵ Dos mapeos $g_1(x^1)$ y $g_2(x^1)$ son homotopicos si existe una función $g(x^1, s)$, continua en s , tal que $g(x^1, 0) = g_1(x^1)$ y $g(x^1, 1) = g_2(x^1)$.

el número de funciones independientes con las que cuenta esta Lagrangiana es igual a uno, y esta única función puede siempre ser representada por la derivada de alguna otra, i.e.:

$$-ig A_1 = -ig \partial_1 \Omega,$$

tenemos entonces que la acción de Chern-Simons abeliana $U(1)$ unidimensional corresponde a un término de frontera. Similarmente, la acción correspondiente al caso “no-abeliano” (2.20) cuenta con $1 \times r$ funciones independientes y entonces siempre podemos escribir:

$$-ig g_a A_1^a = -ig g_a \partial_1 \Omega^a$$

para r funciones $\{\Omega_a\}$. En la notación libre de índices, este resultado figura como:

$$\tilde{\omega}_1(A) = \tilde{d}\Omega_0, \quad \text{con } \Omega_0 \equiv -ig g_a \Omega^a. \quad (2.26)$$

Esta manera de escribir la parte espacial de ω_1 , implica que la primera forma de Chern, la 2-forma $P_1 = \text{tr}(F)$ definida en M , tiene necesariamente la parte espacio-espacio un valor nulo. Efectivamente, escribiendo $\omega_1 = \omega_{1t} + \tilde{\omega}_1$ con ω_{1t} la parte temporal de ω_1 ($\omega_{1t} = -ig g_a A_0^a dx^0$) y usando (2.24):

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{tr}(F^1) = d\omega_1 = (d_t + \tilde{d})(\omega_{1t} + \tilde{\omega}_1) \\ &= d_t \omega_{1t} + d_t \tilde{\omega}_1 + \tilde{d} \omega_{1t} + \tilde{d} \tilde{\omega}_1 \end{aligned}$$

con el primer y último término iguales a cero en virtud de $dx^0 dx^0 = 0$ y $\tilde{d}^2 = 0$.; escribiendo explícitamente los términos restantes:

$$P_1 = -ig g_a (\partial_0 A_1^a - \partial_1 A_0^a) dx^0 dx^1 = \text{tr}(dA) = \text{tr}(F).$$

Este resultado es obvio en el caso $n = 1$, pues en cualquier variedad bidimensional ninguna 2-forma puede tener componentes espacio-espacio, ya que estas van acompañadas de $dx^1 dx^1 \equiv 0$. El caso $n = 2$ ya no resulta tan trivial, pero antes de empezar a analizarlo vamos a mencionar una aplicación interesante de una acción tipo (2.20) a un sistema con grados de libertad discretos.

Un sistema Hamiltoniano completamente integrable normado.

Consideremos un sistema Hamiltoniano con r grados de libertad discretos. Denotamos las coordenadas locales del espacio fase Γ como $\{\eta^\alpha\}$, con los índices

$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1 \dots 2r$ y $(\eta^\alpha) = (\eta^a, \eta^{r+a}) = (q^a, p_a)$. La 2-forma symplectica en Γ es $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta$, donde:

$$(\omega_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

con inversa:

$$(\omega_{\alpha\beta})^{-1} \equiv (\omega^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

siendo \mathbb{O} y \mathbb{I} las matrices $r \times r$ correspondientes a la matriz cero (aquella con todos sus elementos nulos) y a la matriz identidad. En componentes tenemos:

$$(\omega_{\alpha\beta})(\omega_{\alpha\beta})^{-1} = \mathbb{I}_{2r \times 2r} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta.$$

El paréntesis de Poisson entre dos variables cualesquiera $f(\eta, t)$ y $g(\eta, t)$, funciones en $C^\infty(\mathbb{R} \times \Gamma)$, es en esta notación:

$$\{f, g\} = (\partial_\alpha f)\omega^{\alpha\beta}(\partial_\beta g), \quad \text{con } \partial_\alpha f \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta^\alpha}.$$

En particular, la evolución temporal de las variables fundamentales (η^α) es:

$$\dot{\eta}^\alpha = \{\eta, H\} = \omega^{\alpha\beta}\partial_\beta H \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha H = \omega_{\alpha\beta}\dot{\eta}^\beta \quad (2.27)$$

conocidas como ecuaciones de Hamilton. Estas ecuaciones se pueden derivar, mediante el principio variacional de mínima acción, a partir de la acción:

$$S_0 = \int dt L(\eta, t) \equiv \int dt \left[\frac{1}{2} \eta^\alpha \omega_{\alpha\beta} \dot{\eta}^\beta - H(\eta, t) \right].$$

Ahora reduzcamos la discusión al tomar en cuenta un sistema con r grados de libertad completamente integrable, que es aquel que cumple con:

- (a) Tener una Hamiltoniana independiente del tiempo, donde existen r constantes de movimiento $I_a(\eta)$ (además de H) independientes unas de otras y en involución, i.e.:

$$\{I_a, H\} = 0$$

$$\{I_a, I_b\} = 0.$$

- (b) Tener subvariedades $\Sigma_{\mathbf{I}} = \cap_a^r \Sigma_a$ de dimensión r , con $\Sigma_a \equiv \{\eta^\alpha \in \Gamma / I_a(\eta^\alpha) = \sigma_a = \text{const}\}$ las superficies de nivel de $I_a(\eta)$, tales que para cada conjunto de valores constantes $\mathbf{I} = \{\sigma_a\}$ éstas sean compactas.

La existencia de una constante de movimiento en un sistema cualquiera implica que se cuenta con una transformación canónica infinitesimal, que deja invariante la Hamiltoniana (véase por ejemplo [18]), y cuya función generadora es la constante de movimiento misma. En este caso, con las r constantes I_a podemos generar la transformación:

$$\eta'^\alpha = \eta^\alpha + \delta\eta^\alpha, \quad \text{con } \delta\eta^\alpha \equiv \epsilon^a \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta I_a(\eta) \quad (2.28)$$

que se puede ver como elemento de un grupo continuo con r parámetros ϵ^a y abeliano en virtud de la involución que obedecen sus generadores $\{I_a\}$. Así pues podemos pensar en (2.28) como elemento infinitesimal de $[U(I)]^r$, [19]. La acción:

$$S_0 = \int dt \left[\frac{1}{2} \eta^\alpha \omega_{\alpha\beta} \dot{\eta}^\beta - H(\eta) \right] \quad (2.29)$$

es en particular invariante hasta un término de frontera bajo (2.28) aún en el caso de que no se usen las ecuaciones de movimiento (2.27). En efecto:

$$\begin{aligned} \delta S_0 &= \int dt \left(\omega_{\alpha\beta} \dot{\eta}^\beta - \partial_\alpha H \right) \delta\eta^\alpha + \frac{1}{2} \int dt \frac{d}{dt} \left(\eta^\alpha \omega_{\alpha\beta} \delta\eta^\beta \right) \\ &= \int dt \left(-\epsilon^a \dot{I}_a + \epsilon^a \{I_a, H\} \right) + \frac{1}{2} \int dt \frac{d}{dt} \left(\epsilon^a \eta^\alpha \partial_\alpha I_a \right) \\ &= \int dt \frac{d\Lambda}{dt} \end{aligned}$$

con:

$$\Lambda \equiv \epsilon^a \left[\frac{1}{2} \eta^\alpha \partial_\alpha I_a - I_a \right],$$

y donde en la segunda línea del cálculo no debemos sustituir $\dot{I}_a = \dot{\eta}^\alpha \partial_\alpha I_a(\eta)$ igual a cero, pues para ello se requiere que el campo vectorial η , definido en Γ , sea solución a las ecuaciones de movimiento. El hecho de que la acción sea invariante hasta una contribución a la frontera es irrelevante para la física clásica del sistema, la cual está enteramente codificada en las ecuaciones de Hamilton.

La idea es ahora proseguir como se hace en una teoría de campos usual, y normar el grupo de simetría de la teoría, en este caso ello corresponde a

permitir que los parámetros en (2.28) sean dependientes de la variedad que subyace a la teoría, esto es, hacemos: $\epsilon^a = \epsilon^a(t)$. Y como en una teoría de norma ordinaria requerimos ahora de un campo de norma $A = A^a(t)$, el cual se acople a los “campos” $\eta^\alpha(t)$, de manera que la acción antes invariante bajo las transformaciones rígidas (2.28) sea ahora invariante bajo las transformaciones locales:

$$\left. \begin{aligned} \eta'^\alpha(t) &= \eta^\alpha(t) + \delta\eta^\alpha(t), \quad \text{con } \delta\eta^\alpha \equiv \epsilon^a(t)\omega^{\alpha\beta}\partial_\beta I_a(\eta) \\ A'^a(t) &= A^a(t) + \delta A^a(t), \quad \text{con } \delta A^a(t) \equiv \dot{\epsilon}^a(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Primero observe que la acción (2.29) transforma bajo éstas como:

$$\delta S_0 = \int dt \left(\frac{d\Lambda}{dt} + \dot{\epsilon}^a I_a \right)$$

y para tener al final un término puramente de frontera, a ella le sumamos la cantidad $-A_a(t)I_a(\eta)$ que cambia bajo (2.30) como:

$$\begin{aligned} \delta(-A^a(t)I_a(\eta)) &= -\delta A^a I_a - A^a \delta I_a = -\dot{\epsilon}^a I_a - A^a \epsilon^b \{I_a, I_b\} \\ &= -\dot{\epsilon}^a I_a \end{aligned}$$

al usar la propiedad de involución de los generadores del grupo de simetría. En suma, la acción:

$$S_m = S_0 + S_{\text{int}} = \int dt \left[\frac{1}{2} \eta^\alpha \omega_{\alpha\beta} \dot{\eta}^\beta - H(\eta) \right] - \int dt A^a(t) I_a(\eta) \quad (2.31)$$

es invariante, hasta un término de frontera, bajo las transformaciones canónicas locales e infinitesimales (2.30). Continuando con la analogía de este sistema con el de un sistema de campos invariante bajo una simetría de norma, es natural pensar en sumar a (2.31) un término cinético tipo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, pero en la dimensión uno, la curvatura es siempre nula debido a la antisimetría de sus índices. Sin embargo, conocemos ya una cantidad invariante bajo transformaciones (2.30) que involucra exclusivamente al potencial vector, a saber la acción de Chern-Simons en una dimensión. Con estos argumentos podemos escribir una acción para un sistema con r grados de libertad discretos completamente integrable y normado (en el sentido (2.30)), con un término cinético en el potencial vector,

como:

$$\begin{aligned} S &= S_m + S_{CS}^{(1)} \\ &= \int dt \left[\frac{1}{2} \eta^\alpha \omega_{\alpha\beta} \dot{\eta}^\beta - H(\eta) - A^a(t) I_a(\eta) \right] + k_a \int dt A^a(t), \end{aligned} \quad (2.32)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \delta\eta_\alpha : \quad \dot{\eta}^\alpha &= \omega^{\alpha\beta} \partial_\beta (H + A^a I_a) \\ \delta A^a : \quad I_a &= k_a \end{aligned}$$

2.4.2. Caso particular $n = 2$

La acción de Chern-Simons tridimensional. De acuerdo con el formalismo desarrollado en las secciones 2.2 y 2.3, a este caso le corresponde una variedad espacio-temporal de Minkowski $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ de dimensión $d = 4$. La segunda forma de Chern, una 4-forma en esta variedad, se reduce a:

$$\text{trs}(F^2) = (-ig)^2 \text{tr}(T_a T_b) F^a F^b \equiv (-ig)^2 g_{ab} F_{\lambda\mu}^a F_{\nu\rho}^b dx^\lambda dx^\mu dx^\nu dx^\rho.$$

Como 4-forma en una variedad cuadridimensional, es automáticamente cerrada, i.e. $dP_2 = \text{dtrs}(F^2) = 0$, entonces localmente podemos hallar una 3-forma (la segunda forma de Chern-Simons) tal que su derivada exterior sea precisamente P_2 ; particularizando la ecuación (2.9), tenemos explícitamente la forma de Chern-Simons de este caso:

$$\omega_3 = 2 \int_0^1 ds \text{trs}(A F_s) = \text{trs} \left(A F - \frac{1}{3} A^3 \right) = \text{trs} \left(\text{Ad}A + \frac{2}{3} A^3 \right). \quad (2.33)$$

Las propiedades de transformación de esta 3-forma bajo una transformación de norma general, se obtienen directamente de las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14), de modo que:

$$\omega_3(A^g, F^g) = \omega_3(A, F) - \frac{1}{3} \text{tr} \left[(\text{gdg}^{-1})^3 \right] - \text{dtr}(\text{dg}^{-1} g A),$$

resultado que también se puede obtener sustituyendo directamente en $\omega_3(A^g, F^g)$ la transformación $A^g = g(A + \text{d})g^{-1}$. Al tomar en cuenta solamente las transformaciones infinitesimales, la relación anterior se reduce a:

$$\omega_3(A') = \omega_3(A) - \frac{1}{g} \text{dtr}(\text{d}\theta A)$$

donde $\theta = -ig\theta_a T^a$ es una 0-forma que vive en el álgebra del grupo y θ_a son parámetros infinitesimales.

La acción de Chern-Simons, la integral de $\tilde{\omega}_3$ sobre la parte espacial tridimensional Σ de M , es ahora:

$$S_{CS}^{(3)}[A_i^a] = \int_{\Sigma} \tilde{\omega}_3 = \int_{\Sigma} \text{trs} \left(\text{Ad}A + \frac{2}{3} A^3 \right)^{\sim} \quad (2.34)$$

la cual cambia bajo una transformación de norma como lo hace la parte espacial de la segunda forma de Chern-Simons, i.e.:

$$S_{CS}^{(3)}[(A_i^a)^g] = S_{CS}^{(3)}[A_i^a] - \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \text{trs} \left[(\text{gdg}^{-1})^3 \right]^{\sim} - \int_{\Sigma} (\text{d trs} (\text{dg}^{-1} gA))^{\sim}$$

En esta ley de transformación es siempre posible anular el último término mediante una restricción muy natural sobre la parte espacial del potencial vector, esta se refiere simplemente a no admitir soluciones tipo monopolo que se comportan como $x^i/r^2 \sim 1/r$, y producirían una cantidad divergente al hacer la integral de superficie al infinito. Por otro lado, también es importante mencionar que aunque tengamos “buenos” potenciales en este sentido, se requieren transformaciones de norma aceptables definidas por una condición análoga a (2.22), a saber:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} g(x^0, x^i) = g_{\infty} \quad (2.35)$$

Similarmente al caso $n = 1$, esta condición establece una compactificación del espacio Σ a una tres esfera S^3 . Interpretando a los elementos del grupo $g \in \mathcal{G}$ como mapeos $S^3 \rightarrow \mathcal{G}$ para cada x^0 , podemos entonces clasificarlos de acuerdo a la clase homotópica a la que estos pertenecen, aplicando el resultado [17]:

$$\Pi_3(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}, \text{ con } \mathcal{G} \text{ un grupo de norma compacto no-abeliano,} \quad (2.36)$$

con \mathbb{Z} el grupo de enteros bajo la operación suma. En particular a los elementos del grupo que pertenecen a la parte conexas con la identidad les corresponde el entero $m = 0$, mientras que a los elementos que no son homotópicamente triviales les concierne un número entero distinto de cero⁽⁶⁾. De hecho, la segunda integral en la manera de transformarse la acción de Chern-Simons es el “winding number” del grupo, esto es, $\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \text{trs} \left[(\text{gdg}^{-1})^3 \right]^{\sim} \propto m(g)$ y si aquí se

⁶ Para un ejemplo de tales elementos con el grupo particular $SU(2)$ véase [20].

introduce un elemento g en la parte conexa con la identidad esta integral resultará en el número 0 y al sustituir cualquier otro elemento, el resultado será un número entero m no nulo; por ejemplo para un elemento infinitesimal tenemos: $\text{trs} \left[(g d g^{-1})^3 \right] = \text{trs} [d\theta]^3 \equiv 0$, pues θ contiene exclusivamente parámetros infinitesimales e implica $m = 0$. En conclusión, la acción de Chern-Simons no-abeliana en una variedad tridimensional (Σ) es invariante bajo las transformaciones homotópicamente triviales:

$$S_{CS}^{(3)}[(A_i^a)^g] = S_{CS}^{(3)}[A_i^a], \text{ con } g \text{ en la parte conexa con la identidad.}$$

La acción $S_{CS}^{(3)}[A_i^a]$ como término de frontera. Mostremos ahora una propiedad por demás interesante que tiene que ver con escribir a la acción de Chern-Simons como un término puro de frontera, para ello seguiremos las referencias [21, 22]. Primero derivemos el resultado para el caso abeliano, donde la segunda forma de Chern-Simons, una 3-forma definida sobre la variedad cuatridimensional $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, es $\omega_3(A) = \text{Ad}A$ con $A = -igA_\mu dx^\mu = -igA_0 dx^0 + \tilde{A}$ y la acción de Chern-Simons:

$$S_{CS}^{(3)}[A_i] = \int_{\Sigma} \tilde{\omega}_3 = \int_{\Sigma} (\text{Ad}A)^\sim$$

donde desaparece por obvias razones el índice de grupo. Usando la parametrización de Clebsch para un 3-vector:

$$A_i = \partial_i \vartheta + \alpha \partial_i \beta$$

o bien su versión libre de índices:

$$\tilde{A} = (d\vartheta + \alpha d\beta)^\sim = \tilde{d}\vartheta + \alpha \tilde{d}\beta$$

siendo ϑ, α y β funciones en $C^\infty(\Sigma)$, tenemos directamente que la parte espacial de la segunda forma de Chern es la parte espacial de la derivada exterior de una 2-forma:

$$\begin{aligned} (\text{Ad}A)^\sim &= [(d\vartheta + \alpha d\beta) d(d\vartheta + \alpha d\beta)]^\sim = [d(\vartheta d\alpha d\beta)]^\sim \\ &\Leftrightarrow \epsilon^{ijk} A_i \partial_j A_k = \partial_i \left(\vartheta \epsilon^{ijk} \partial_j \alpha \partial_k \beta \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Observe que no podemos decir que el potencial vector completo $-igA_0dx^0 + \tilde{A} = d\vartheta + \alpha d\beta$, pues mientras del lado izquierdo de esta igualdad tenemos cuatro funciones independientes, del otro lado contamos solamente con tres. Así, pues, queda mostrado que la acción de Chern-Simons tridimensional en el caso abeliano se puede reescribir como un término de frontera⁽⁷⁾.

A continuación mostremos este hecho para el caso no-abeliano, para ello nos apoyaremos en un grupo de norma \mathcal{G}' mayor en dimensión al grupo \mathcal{G} , el cual se construye de manera tal que el último es un subgrupo normal del primero con las siguientes dos restricciones:

- (i) La dimensión de \mathcal{G}' sea mayor o igual a tres veces la dimensión de \mathcal{G} :

$$\dim \mathcal{G}' \geq 3 \dim \mathcal{G} = 3 \times r$$

- (ii) El grupo cociente \mathcal{G}'/\mathcal{G} sea un espacio simétrico, condición que se traduce en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= if_{abc}T_c \\ [T_a, S_A] &= ih_{aAB}S_B \\ [S_A, S_B] &= iNh_{aAB}T_a \end{aligned}$$

con los generadores de \mathcal{G}' separados como $\{T_a, S_A\}$, siendo $\{T_a\}$ los generadores del subgrupo \mathcal{G} y $\{S_A\}$ con $A, B, C = 1, \dots, (\dim \mathcal{G}' - \dim \mathcal{G})$ el complemento.

Además se convienen las condiciones de normalización:

$$\text{tr}(T_a T_b) = -N_1 \delta_{ab}, \quad \text{tr}(S_A S_B) = -N_2 \delta_{AB}, \quad \text{tr}(T_a S_B) = 0.$$

que al combinarlas con las reglas de conmutación resulta $N_1 N = N_2$. Una conexión cualquiera asociada al G' -haz, pensado sobre una variedad tridimensional digamos Σ , es una 1-forma que vive en álgebra del grupo, i.e.:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^a T_a + \alpha^A S_A = -ig (\mathcal{A}_i^a T_a + \alpha_i^A S_A) dx^i$$

⁷ Aunque a primera vista ello indique que una acción de Chern-Simons tendrá ecuaciones de movimiento triviales, esto no es así ya que la parametrización de Clebsch es incompleta al usarse en principios variacionales [23].

y un campo de norma puro en este G' -haz (esto es un campo que viene de la transformación de norma de un potencial vector nulo) viene dado por:

$$\bar{\mathcal{A}} \equiv g' \tilde{d}g'^{-1} = \bar{\mathcal{A}}^a T_a + \bar{\alpha}^A S_A, \quad \text{con } g' \in \mathcal{G}'. \quad (2.38)$$

usando la barra por encima del símbolo \mathcal{A} y sus componentes para recordar que se esta trabajando con un campo de norma puro. Considerando las relaciones de normalización entre los generadores podemos despejar:

$$\bar{\mathcal{A}}^a = -\frac{1}{N_1} \text{tr} \left(T_a g' \tilde{d}g'^{-1} \right) = -ig \bar{\mathcal{A}}_i^a dx^i \quad (2.39)$$

de modo que la proyección de un campo de norma puro, en el G' -haz, en la álgebra del subgrupo \mathcal{G} tiene un total de $3 \times r$ funciones independientes y arbitrarias $\bar{\mathcal{A}}_i^a$, esto último en virtud de la condición (i). Al campo de norma puro $\bar{\mathcal{A}}$ le corresponde obviamente un curvatura nula: $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{d}\bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{A}}^2 = 0$, de donde se obtienen al usar las condiciones de normalización de los generadores:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a + \frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\mathcal{A}}^b \bar{\mathcal{A}}^c &= -\frac{N}{2} i h^{aAB} \bar{\alpha}^A \bar{\alpha}^B \\ \tilde{d}\bar{\alpha}^A + i h^{aBA} \bar{\mathcal{A}}^a \bar{\alpha}^B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Para relacionar lo hasta ahora discutido con el resultado que deseamos obtener, nos tomamos la libertad de escoger a las $3 \times r$ funciones independientes de la parte espacial de una conexión cualquiera A del G -haz como las codificadas en las componentes del campo de norma puro $\bar{\mathcal{A}}$ del G' -haz de la ecuación (2.39):

$$\tilde{A} = -ig A_i^a T_a dx^i \equiv -ig \bar{\mathcal{A}}_i^a T_a dx^i.$$

Con esta elección, basada principalmente en la generalidad de $\bar{\mathcal{A}}^a$, de la parte espacio-espacio de la segunda forma de Chern-Simons, ecuación (2.33), se pueden

ahora escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_3(A) &= \text{trs} \left(\text{Ad}A + \frac{2}{3}A^3 \right)^\sim = -N_1 \left(\tilde{A}^a \tilde{d}\tilde{A}^a + \frac{1}{3}if_{abc}\tilde{A}^a \tilde{A}^b \tilde{A}^c \right) \\
&= -N_1 \left(\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a + \frac{1}{3}if_{abc}\bar{\mathcal{A}}^a \bar{\mathcal{A}}^b \bar{\mathcal{A}}^c \right) \\
&= -N_1 \left(\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a + \frac{1}{3}(2\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{F}^a - 2\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a) \right) \\
&= -N_1 \left(\frac{1}{3}\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a + \frac{2}{3}\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{F}^a \right) \\
&= -N_1 \left(\frac{1}{3}\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a - \frac{N}{3}\bar{\mathcal{A}}^a i h^{aAB} \bar{\alpha}^A \bar{\alpha}^B \right) \\
&= -\frac{N_1}{3} \left(\bar{\mathcal{A}}^a \tilde{d}\bar{\mathcal{A}}^a + N \tilde{d}\bar{\alpha}^B \bar{\alpha}^B \right) \\
&= -\frac{N_1}{3} \left(-\frac{1}{N_1} \text{tr}(\text{Ad}A)^\sim + \frac{N}{N_2} \text{tr}(\bar{\alpha}d\bar{\alpha})^\sim \right), \quad \text{con } \bar{\alpha} \equiv \bar{\alpha}^A S_A \\
&= -\frac{1}{3} \text{trs} (\bar{\mathcal{A}}d\bar{\mathcal{A}} + \bar{\alpha}d\bar{\alpha})^\sim = -\frac{1}{3} \text{trs} (g'dg'^{-1}d(g'dg'^{-1}))^\sim \\
&= \frac{1}{3} \text{trs} \left[(g'dg'^{-1})^3 \right]^\sim,
\end{aligned}$$

donde hemos usado tanto las convenciones de normalización para $\{T_a, S_A\}$ como las relaciones de consistencia (2.40). Entonces vemos que la acción de Chern-Simons $\int_\Sigma \tilde{\omega}_3(A)$ tridimensional no-abeliana es de hecho proporcional al “winding number” del elemento g' , que define al campo puro de norma (2.38), del grupo \mathcal{G}' . En la referencia [17] se demuestra que $\text{trs} \left[(g'dg'^{-1})^3 \right]^\sim$ es una derivada total (posiblemente una suma no finita de derivadas totales) $\tilde{d}\gamma$, obteniéndose así la conclusión a la que se deseaba llegar. Finalmente mencionemos que un ejemplo específico con el grupo $\mathcal{G}' = O(5)$ y $\mathcal{G} = O(3) \times O(2)$ se puede hallar en las referencias [21, 22], de donde se puede obtener mediante un proceso recursivo la forma explícita en que se puede escribir la acción $O(3)$ de Chern-Simons como un término de frontera.

Analicemos en detalle el resultado anterior, primero hay que mencionar que es de esperar, tal como en el caso abeliano, que este tipo de parametrización de una teoría de Chern-Simons sea incompleta en un proceso variacional. Por otro lado, esta parametrización se refleja en la segunda forma de Chern (véase sección 2.1) como sigue: al usar la descomposición de la derivada exterior en parte temporal y espacial $d = d_t + \tilde{d}$, en forma análoga a (2.24), entonces la

derivada de la 3-forma $\omega_3(A)$:

$$\begin{aligned}\omega_3(A) &= \frac{1}{3!}(\omega_3)_{\mu\nu\rho}dx^\mu dx^\nu dx^\rho = \frac{1}{2}(\omega_3)_{0ij}dx^0 dx^i dx^j + \frac{1}{3!}(\omega_3)_{ijk}dx^i dx^j dx^k \\ &\equiv (\omega_3)_{\text{mixed}} + \tilde{\omega}_3\end{aligned}$$

es:

$$\begin{aligned}P_2 &= \text{tr}(F^2) = d\omega_3 = \left(d_t + \tilde{d}\right) \left((\omega_3)_{\text{mixed}} + \tilde{\omega}_3\right) \\ &= d_t \tilde{\omega}_3 + \tilde{d}(\omega_3)_{\text{mixed}} + \tilde{d}\tilde{\omega}_3 = \left(d_t \tilde{\omega}_3 + \tilde{d}(\omega_3)_{\text{mixed}}\right) + \tilde{d}^2 \gamma \\ &= (d\omega_3)_{\text{mixed}} = (P_2)_{\text{mixed}} + \tilde{P}_2\end{aligned}$$

y por lo tanto de acuerdo con este resultado la parte espacio-espacio de la segunda forma de Chern, P_2 , es necesariamente nula y solamente se tienen componentes con uno de los índices siendo temporal. Note que este hecho no impone restricción alguna sobre las $4 \times r$ funciones independientes de A , ya que es trivial tener $(P_2)_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l = 0$, pues i, j, k, l toman valores de 1 a 3.

Chern-Simons y teorías de norma tridimensionales. Dado que el presente trabajo no es un tratado exclusivo de las teorías de Chern-Simons, nos limitamos simplemente a dos ejemplos en este caso tridimensional, los cuales resaltan en buena medida la importancia intrínseca del estudio de estas teorías. A la acción de Chern-Simons tridimensional se le puede considerar por si misma como una teoría de campo quasi-invariante de norma sobre cierta variedad Σ , con la ventaja de que su construcción no requiere que tal variedad esté dotada con una métrica. Denotando por el momento a las coordenadas locales de Σ como $\{x^\mu\} = \{(x^0, x^1, x^2)\}$, para enfatizar la existencia de esta teoría independientemente de contar con la variedad $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, las ecuaciones de movimiento, ecuaciones (2.18), se reducen en este caso a:

$$g_{ab} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}^b = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}^a = 0$$

lo que indica que el espacio de soluciones de la teoría es el espacio de todas las conexiones planas modulo transformaciones de norma conectadas con la identidad. Este resultado permite intuir una relación entre esta teoría y la teoría de

la gravedad en tres dimensiones, de hecho en la referencia [24] se prueba que una teoría de Chern-Simons tridimensional con un grupo de norma como el de Poincaré es equivalente a la gravedad tridimensional sin constante cosmológica, la inclusión de la constante cosmológica genera un cambio del grupo de norma.

En el contexto de una teoría de Yang-Mills confinada a un espacio-tiempo tridimensional, es posible extender la acción con un término de Chern-Simons como:

$$\begin{aligned} S &= S_{YM}^{(3)} + S_{CS}^{(3)} \\ &= \frac{1}{2g^2} \int_{\Sigma} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^3x - \frac{m}{2g^2} \int_{\Sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{tr} (F_{\mu\nu} A_{\rho} - \frac{2}{3} A_{\mu} A_{\nu} A_{\rho}) d^3x \end{aligned}$$

donde en tres dimensiones g^2 tiene dimensiones de masa al igual que el parámetro másico m . Tal extensión invariante de norma, induce la existencia de excitaciones del campo con una masa distinta de cero [25], pues las ecuaciones de movimiento pueden llevarse a la forma:

$$(\mathcal{D}^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} + m^2) {}^*F^{\nu} = \epsilon^{\nu\rho\sigma} [{}^*F_{\rho}, {}^*F_{\sigma}],$$

siendo ${}^*F^{\mu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}$. Linealizando las ecuaciones para extraer la información cinética de la teoría prescindimos del lado derecho de la ecuación, obteniendo así una ecuación del tipo Klein-Gordon y mostrando a nivel clásico la existencia de los campos masivos. Entonces podemos decir que: *en 3 dimensiones la invariancia de norma no prohíbe un término másico en la Lagrangiana*

2.4.3. Otros casos

Finalmente vamos a escribir explícitamente, a partir de las expresiones de las secciones 2.2 y 2.3, las fórmulas correspondientes a los casos $n = 3$ y $n = 4$. Por un lado tenemos la tercera y cuarta forma de Chern-Simons:

$$\begin{aligned} \omega_5 &= 3 \int_0^1 ds \text{trs} (A F_s^2) = \text{trs} \left(F^2 A - \frac{1}{2} F A^2 + \frac{1}{10} A^5 \right) \\ &= \text{trs} \left(A (dA)^2 + \frac{3}{2} A^3 dA + \frac{3}{5} A^5 \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
\omega_7 &= 4 \int_0^1 ds \operatorname{trs}(AF_s^3) = \operatorname{trs} \left(F^3 A - \frac{1}{5} F A^2 F A - \frac{2}{5} F^2 A^3 + \frac{1}{5} F A^5 - \frac{1}{35} A^7 \right) \\
&= \operatorname{trs} \left(A(dA)^3 + \frac{8}{5} A^3 (dA)^2 + \frac{4}{5} A(dA)A^2(dA) + \right. \\
&\quad \left. + 2A^5 dA + \frac{4}{7} A^7 \right), \tag{2.42}
\end{aligned}$$

respectivamente. Aunque el autor no tiene conocimiento que en la literatura aparezca una expresión explícita general para obtener ω_{2n-1} , más que la forma integral (2.9), en este trabajo se consiguió una fórmula tal que al sustituir una n particular se obtiene inmediatamente la n -ésima forma de Chern-Simons. La deducción de esta fórmula se hace usando la expresión (2.9) y el teorema del binomio para desarrollar F^{n-1} en ésta, la validez del uso de este teorema se basa en la propiedad (2.1), la cual no es compartida por la simple traza. La fórmula desarrollada es:

$$\begin{aligned}
\omega_{2n-1}(A, F) &= n \int_0^1 ds \operatorname{trs}(AF_s^{n-1}) \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{[(n-1)!]^2}{(n+k)!(n-k+1)!} \operatorname{trs} \left(F^{n-k-1} A^{2k+1} \right) \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que ω_1 , ω_3 , y ω_5 dadas por las ecuaciones (2.19), (2.33) y (2.41), respectivamente, concuerdan con el resultado obtenido directamente de (2.43) aún en el caso en que se use la ‘tr’ en lugar de ‘trs’. La 7-forma ω_7 dada en (2.42) sigue siendo válida si usamos ‘tr’ en vez de ‘trs’, pero al usar la propiedad (2.1) vemos que en (2.42) el segundo y tercer sumando del lado izquierdo se reducen a un sólo término y ese resultado es el que concuerda con el que obtendría directamente de (2.43) al sustituir $n = 4$.

Las teorías de Chern-Simons en dimensiones mayores o iguales a 5 son interesantes por sí mismas, en buena medida porque su estructura de constricciones no es trivial al depender de la estructura del tensor $g_{a_1 \dots a_n}$ (definido en la sección 2.2) vía las llamadas condiciones genéricas [15, 26] y porque se pueden localizar regiones del espacio fase donde las condiciones de regularidad no se cumplan [15]. Una consecuencia importante que se obtiene del estudio de estas teorías es que, en los sectores del espacio fase donde las constricciones son funcionalmente independientes, y se satisfacen las condiciones genéricas sobre el tensor $g_{a_1 \dots a_n}$, se

presenta la existencia de grados de libertad locales; a saber, si se tiene un grupo con r generadores, y se define la teoría sobre un espacio $2n - 1$ dimensional, el número de grados de libertad locales es:

$$N_o = (n - 1)r - (n - 1) - r \quad (n > 2, r > 1)$$

Y así en el caso de un grupo no-abeliano, la teoría de Chern Simons en 5 dimensiones tiene grados de libertad locales. En dimensiones 1 y 3 esta teoría no tienen esta peculiaridad. Una teoría abeliana con un solo generador, tampoco tiene grados de libertad locales en dimensión alguna, esto es, es una teoría de campo topológica.

Capítulo 3

El estado de Loos-Kodama

En este capítulo se analiza la inclusión de la acción de Chern-Simons para construir un estado en la teoría cuántica de Yang-Mills, presentada a la Dirac, en dimensiones espacio-temporales pares; esto será posible gracias a la ley de transformación (2.15) deducida en el capítulo anterior. Se iniciará la discusión con un breve recuento de algunos enfoques que se han propuesto para la cuantización de teorías con constricciones, posteriormente con el método de “constricciones como condiciones sobre los estados” se estudiarán detenidamente los casos $n = 1$ y $n = 2$. En particular el segundo caso, el correspondiente a cuatro dimensiones, ha sido analizado ya en 1969 por Hendricus G. Loos [27] y su contraparte en el contexto de una teoría cuántica de la gravitación fue presentada por Hideo Kodama 21 años después [28]; de ahí el nombre que asignamos al estado construido bajo estos conceptos. Para finalizar, se extenderán estos resultados a cualquier dimensión par.

3.1. Cuantización de sistemas con constricciones

Para llevar a cabo la transición de una teoría clásica a su contraparte cuántica pueden ser utilizados varios enfoques. Históricamente, uno de los primeros métodos para cuantizar sistemas fue el de *cuantización canónica*, desarrollado a principios del siglo XX y aplicable a sistemas sin constricciones, el cual está basado en el formalismo de operadores. En él se involucran formalmente los

siguientes pasos:

- (i) Describir el estado cuántico del sistema por un vector normalizado $|\psi\rangle$, el cual es un elemento de un espacio de Hilbert \mathbb{H} con producto escalar $\langle\psi|\psi'\rangle$. La función de onda $\langle x|\psi\rangle$ asociada al estado $|\psi\rangle$ se denota por $\psi(x)$.
- (ii) Las cantidades aptas de medición, u observables cuánticas, se representan por operadores hermíticos. El resultado de su medición se asocia con un eigenvalor correspondiente, específicamente esto significa que si el vector $|\psi\rangle$ se escribe en términos de los eigenvectores $|\psi_j\rangle$ del operador \hat{O} ,

$$\begin{aligned}\hat{O}|\psi_j\rangle &= o_j|\psi_j\rangle, & (\text{sin suma}) \\ |\psi\rangle &= c_j|\psi_j\rangle,\end{aligned}$$

el número $c_j c_j^*$ es la probabilidad de que el valor o_j sea medido. El valor medio de la medida es $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \equiv \langle\hat{O}\rangle$

- (iii) La evolución dinámica del sistema se obtiene a partir de la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

que involucra al operador Hamiltoniano \hat{H} . Para \hat{O} esta ecuación implica:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{O}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{O}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{O}}{\partial t}\right\rangle.$$

Expresión que se puede obtener mediante la sustitución:

$$\begin{aligned}O &\longrightarrow \hat{O} \\ \{A, B\} &\longrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]\end{aligned}$$

en las ecuaciones de Hamilton.

La última prescripción no es de ninguna manera una regla general que funcione con todos los sistemas físicos, la razón principal es que una observable clásica no tiene en general una única observable cuántica asociada. Es importante también notar que una cantidad fundamental en este formalismo es la Hamiltoniana

$H \rightarrow \widehat{H}$ y de ahí el gran interés por parte de Dirac en la “Hamiltonización” de la teoría y el estudio de las constricciones.

La aplicación de una cuantización canónica a sistemas con constricciones no es directa, pues este tipo de sistemas poseen simetrías subyacentes (como la simetría de norma si hay constricciones de primera clase) que complican la extracción de los “verdaderos grados de libertad”, los cuales se conocen inicialmente sólo de manera implícita en las ecuaciones de constricciones y forman el llamado espacio fase reducido. A este problema se tienen las siguientes propuestas para hallar el espacio de Hilbert⁽¹⁾:

1. Elementos de matriz nulos para las constricciones. En esta propuesta se supone que ya se cuenta con una teoría con constricciones de segunda clase solamente, i.e. ya se fijó la norma si se contaba inicialmente con constricciones de primera clase (véase al final del capítulo 1), de modo que la Hamiltoniana del sistema y la evolución temporal ya no poseen arbitrariedad funcional alguna en el tiempo. Con la Hamiltoniana sin multiplicadores de Lagrange arbitrarios se procede a escribir el operador cuántico correspondiente y a resolver la ecuación de Schrödinger. Ya que el espacio de Hilbert donde se está trabajando es en este caso más grande que el que definen los estados físicos, se postula que los estados pertenecientes al espacio de Hilbert físico \mathbb{H}_p sean aquellos que cumplan:

$$\langle \psi' | \widehat{\Phi}_a^{2nd} | \psi \rangle = 0 \quad (3.1)$$

para todos los operadores de restricción $\widehat{\Phi}_a^{2nd}$, contraparte cuántica de todas las constricciones Φ_a^{2nd} de segunda clase.

2. Paréntesis de Dirac promovido a conmutador. En esta propuesta también se supone, como en la propuesta anterior, un sistema con constricciones de segunda clase solamente. Clásicamente en este tipo de sistemas se pueden llevar todas las igualdades débiles a igualdades fuertes si se usa el paréntesis de Dirac, en lugar del paréntesis de Poisson, para escribir la evolución temporal de

¹ En esta lista no se incluyen las propuestas basadas en la simetría BRST desarrollada por Becchi-Rouet-Stora-Tyutin.

cualquier función en el espacio fase. El paréntesis de Dirac entre dos funciones A y B se define en términos del paréntesis de Poisson como:

$$\{A, B\}^* \equiv \{A, B\} - \{A, \Phi_a^{2nd}\} \Delta^{ab} \{\Phi_b^{2nd}, B\}$$

donde Δ^{ab} es la matriz inversa de la matriz formada con todas las constricciones de segunda clase $\Delta_{ab} = (\{\Phi_a^{2nd}, \Phi_b^{2nd}\})$. Observe entonces que $\{A, \Phi_b^{2nd}\}^* \equiv 0$ para toda función A definida en el espacio fase y por lo tanto si imponemos cuánticamente:

$$\begin{aligned} \cdot \widehat{\Phi}_a^{2nd} &= 0 \\ \cdot \{A, B\}^* &\longrightarrow \frac{i}{\hbar} [\widehat{A}, \widehat{B}] \end{aligned}$$

recuperamos (3.1) inmediatamente, pero además se cumple:

$$[\widehat{\Phi}_a^{2nd}, \widehat{\Phi}_b^{2nd}] |\psi\rangle = 0$$

consistentemente con la contraparte clásica $\{\Phi_a^{2nd}, \Phi_b^{2nd}\}^* \equiv 0$. Aunque este método es a primera vista un buen candidato para la generalización de la cuantización canónica de los sistemas regulares, una dificultad técnica importante, incluso a nivel clásico, es hallar Δ^{ab} , además en general no es posible hallar coordenadas canónicamente conjugadas con respecto a los paréntesis de Dirac de manera global con las que se cumplan las relaciones de conmutación usuales:

$$[\widehat{P}_i, \widehat{Q}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [\widehat{Q}_i, \widehat{Q}_j] = 0 = [\widehat{P}_i, \widehat{P}_j],$$

punto de partida de la cuantización canónica. La siguiente propuesta trata con un sistema con constricciones de primera clase, y como todo sistema con constricciones de segunda clase se puede llevar a uno de este tipo [6], ésta es aplicable en general.

3. Constricciones como condiciones sobre los estados. Esta propuesta es particularmente útil para los sistemas con constricciones de primera clase que cuentan con una Hamiltoniana primaria $H^{(1)} = H_c + \lambda^a \varphi_a^{1st}$, donde φ_a^{1st} son las constricciones primarias de primera clase que pertenecen al conjunto formado por todas las constricciones de primera clase $\{\Phi_a^{1st}\}$. La idea central es

otra vez resolver la ecuación de Schrödinger con el operador asociado a esta Hamiltoniana, pero con la restricción de que sobre los estados físicos y solo sobre ellos se cumpla la condición:

$$\widehat{\Phi}_a^{1st} |\psi\rangle = 0 \quad (3.2)$$

donde $\widehat{\Phi}_a^{1st}$ es la contraparte cuántica de la restricción Φ_a^{1st} . Vemos que esta restricción es equivalente a exigir que los estados cuánticos sean invariantes bajo las transformaciones de norma conectadas con la identidad. Recuerde primero que las constricciones de primera clase son las generadoras de dichas transformaciones y entonces exigir:

$$e^{i\theta^a \widehat{\Phi}_a^{1st}} |\psi\rangle \equiv |\psi\rangle + \sum_{k=1} \frac{1}{k!} (i\theta^a)^k [\widehat{\Phi}_a^{1st}]^k |\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (3.3)$$

implica (3.2) y viceversa, dada (3.2) se tiene inmediatamente (3.3). En otras palabras, al escribir la condición (3.2) en la representación de coordenadas, obligamos a que la función de onda este definida solamente en aquellas coordenadas físicas independientes o dicho de otra forma con esta restricción se prescinde de los grados de libertad superfluos en la función de onda. Por consistencia de (3.2), se debe tener también

$$[\widehat{\Phi}_a^{1st}, \widehat{\Phi}_b^{1st}] |\psi\rangle = 0; \quad (3.4)$$

sin embargo, la contraparte del paréntesis de Poisson $\{\Phi_a^{1st}, \Phi_b^{1st}\} = C_{ab}^c \Phi_c^{1st}$ no es necesariamente de la forma:

$$[\widehat{\Phi}_a^{1st}, \widehat{\Phi}_b^{1st}] = \widehat{C}_{ab}^c \widehat{\Phi}_c^{1st}$$

ya que en general los coeficientes C_{ab}^c son operadores también y puede pasar que algunos de estos aparezcan a la derecha de $\widehat{\Phi}_c^{1st}$, lo que podría destruir el requerimiento básico (3.4).

4. Modificación de la integral de trayectoria. Además de las propuestas 1, 2 y 3 para cuantizar teorías con constricciones, basadas en métodos con operadores, se tiene la formulación por integral de trayectoria para hacerlo. Este enfoque tiene varias ventajas prácticas con respecto a las formulaciones anteriores, además de que ha mostrado ser extremadamente útil en la cuantización

de teorías de norma. Para incorporar a las teoría singulares, y en particular a las teorías de norma, dentro del formalismo de cuantización a la Feynman, se cuenta con los teoremas de *Faddeev* y de *Senjanović* [29], útiles para sistemas con constricciones de primera clase (originales de la teoría) y sistemas con constricciones de segunda clase, respectivamente. En ambos teoremas se restringe a la integral de trayectoria al espacio fase reducido mediante la redefinición conveniente de los elementos de volumen, un requerimiento básico en estos teoremas es que en la teoría clásica correspondiente se debió haber fijado la norma previamente a diferencia de lo que se requiere en la propuesta 3.

Un aspecto sutil en la cuantización de sistemas con constricciones de primera clase, es la definición correcta del producto entre los estados físicos. La importancia de esta cantidad es inobjetable, pues a partir de ella, podemos dar un sentido físico a los estados en términos de la interpretación estadística de la mecánica cuántica, donde se precisa que el producto sea normalizable. Por ejemplo, cuando se trata con una teoría sin constricciones con N grados de libertad discretos se suele definir el producto (en la representación de coordenadas) como:

$$\langle \psi | \psi' \rangle \equiv \int dq^1 \cdots dq^N \psi^*(q^\alpha, t) \psi'(q^\alpha, t)$$

y la norma de un estado a través de:

$$\langle \psi | \psi \rangle \equiv \int dq^1 \cdots dq^N \psi(q^\alpha, t) \psi^*(q^\alpha, t) \quad (3.5)$$

con las integrales definidas en la variedad del espacio de configuración. Si usáramos esta expresión, conocida como *producto cinématico*, como producto entre estados cuánticos de una teoría con constricciones, inmediatamente nos encontraríamos con que todos los estados físicos (i.e. los que cumplen (3.2)) no son susceptibles de normalización pues al estar definidos en un subespacio del espacio de configuración, la integral (3.5) sobre todas las variables divergerá si el espacio no es acotado.

Para fijar ideas, pensemos en el ejemplo simple, pero muy ilustrativo, en donde se cuenta con un sistema con N grados de libertad $\{q^\alpha\}$ pero con las constricciones primarias $p_{\alpha'} \approx 0$, con los índices primados tomando valores sobre los primeros $N' < N$ números; tales constricciones generan las traslaciones en las

coordenadas $q^{\alpha'} \rightarrow q^{\alpha'} + \epsilon^{\alpha'}$ las cuales dejan invariante al sistema. Cuánticamente la condición sobre los estados (3.2), en la representación de coordenadas, es $\widehat{p}_{\alpha'} \psi(q^{\alpha}, t) = -i \partial_{\alpha'} \psi(q^{\alpha}, t) = 0$ lo que implica inmediatamente que la función de onda de este sistema no está definida en todo el espacio de configuración inicial, sino que solamente lo está en el complemento del espacio con coordenadas primadas, i. e. $\psi = \psi(q^{N'+1} \dots q^N)$. Observe que si se introducen estos estados físicos dentro del producto (3.5), para obtener su norma, entonces la integral sobre las primeras N' variables automáticamente divergerá, pues ψ no depende de ellas, haciendo ver a este estado como uno que no es posible normalizar y por lo tanto excluido automáticamente de toda interpretación física ortodoxa. Una manera de redefinir el producto interno en este caso, es introducir esencialmente un producto de deltas de Dirac en (3.5) de manera que se restrinja a la integral a llevarse a cabo en la región de interés del espacio de configuración, como $\prod_{\alpha'} \delta(q^{\alpha'})$, región que llamaremos “espacio de configuración reducido”.

En general, la definición correcta del producto interno se basa en ideas como la del ejemplo anterior y su forma explícita depende del sistema en particular. Uno de los principales problemas que se hallan en este proceso es que el espacio fase reducido (en el ejemplo anterior, el de coordenadas $(q^{N'+1}, \dots, q^N, p_{N'+1}, \dots, p_N)$), no es en general un haz tangente de espacio de configuración alguno [5] (aunque en el ejemplo, este espacio corresponde al de coordenadas complemento de $(q^{\alpha'})$), que es donde al final de cuentas quedan definidos los vectores de estado físicos al usar la representación de coordenadas.

En la siguiente sección se hará uso de las ideas aquí presentadas, para el caso de la teoría de Yang-Mills en dos dimensiones; en particular, se aplicará el método de cuantización de “Constricciones como condiciones sobre los estados”, ampliamente usado en la cuantización de teorías mucho más complicadas como la del campo gravitatorio expresada en las llamadas *variables de Ashtekar*.

3.2. Teoría de Yang-Mills en dos dimensiones

Consideremos la teoría de Yang-Mills en un espacio-tiempo bidimensional y más aún, guiados por la restricción (2.22) y sus consecuencias mencionadas ya en el capítulo 2, nos restringiremos a un espacio-tiempo de la forma $\mathbb{R} \times S^1$ con

métrica de Minkowski. En este caso, el potencial vector y la 2-forma de curvatura son:

$$\begin{aligned} A &= A_\mu dx^\mu = -ig (A_0^a dx^0 + A_1^a dx^1) T_a, \\ F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -ig F_{01}^a T_a dx^0 dx^1, \end{aligned}$$

respectivamente, y el operador de Hodge aplicado a F da como resultado una 0-forma evaluada en el álgebra del grupo, i.e. una función la cual es explícitamente:

$$\star F = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = ig F_{01}^a T_a.$$

Con estas particularizaciones, la acción de Yang-Mills en dos dimensiones es:

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{g^2} \int_M \text{tr} (F \wedge \star F) = -\frac{1}{2} \int_M F_{01}^a F_a^{01} d^2x \quad (3.6)$$

y las ecuaciones de movimiento son, de acuerdo con (1.4):

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{D}_1 F_a^{10} = \partial_1 F_a^{10} - gf_{abc} F_b^{10} A_1^c = 0, \\ \mathcal{D}_0 F_a^{10} = \partial_0 F_a^{10} - gf_{abc} F_b^{10} A_0^c = 0. \end{cases}$$

Ecuaciones que podemos reescribir en términos de los vectores del álgebra del grupo $A_\mu = -ig A_\mu^a T_a$ y $F_{\mu\nu} = -ig F_{\mu\nu}^a T_a$ como:

$$\begin{aligned} \partial_1 F^{10} - [F^{10}, A_1] &= 0 \quad (\text{componente temporal}) \\ \partial_0 F^{10} - [F^{10}, A_0] &= 0 \quad (\text{componente espacial}) \end{aligned}$$

Igualmente, de acuerdo con el análisis general de la sección 1.3, las constricciones de primera clase en el formalismo Hamiltoniano se pueden escribir como:

$$\Phi_a^{(1)} \equiv \pi_a^0 \approx 0 \quad (3.7)$$

$$\Phi_a^{(2)} \equiv \partial_1 \pi_a^1 - gf_{abc} A_1^c \pi_b^1 \approx 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^{(2)} = \partial_1 F^{10} - [F^{10}, A_1] \approx 0 \quad (3.8)$$

con $\Phi_a^{(2)} \equiv -ig \Phi_a^{(2)} T_a$ y donde se usó $\pi_a^1 = F_a^{10}$ para el momento conjugado de la coordenada A_a^1 . Vemos que la constricción secundaria corresponde precisamente a la componente temporal de las ecuaciones de movimiento a nivel de la Lagrangiana (hecho que es general para la teoría en cualquier dimensión).

La componente espacial de las ecuaciones de Euler-Lagrange corresponde a la ecuación de Hamilton:

$$\dot{\pi}_a^1 = \left\{ \pi_a^1, H^{(1)} \right\} = gf_{abc} F_b^{10} A_0^c \quad \Leftrightarrow \quad \partial_0 F^{10} = [F^{10}, A_0]. \quad (3.9)$$

La Hamiltoniana primaria que arroja esta ecuación de movimiento es:

$$H^{(1)} = \int_{S^1} dx^1 \left[\frac{1}{2} \pi_a^1 \pi_a^1 - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right] \quad (3.10)$$

Usemos ahora la prescripción (3.2) para cuantizar la teoría, en particular usaremos la “representación de coordenadas” o “representación de conexiones”, donde:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(\mathbf{x}) &\longrightarrow \widehat{A}_\mu^a(\mathbf{x}) \equiv A_\mu^a(\mathbf{x}), \\ \pi_a^\mu(\mathbf{x}) &\longrightarrow \widehat{\pi}_a^\mu(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta}{i \delta A_\mu^a(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

y los estados son representados por las funcionales de onda $\Psi = \Psi [A_\mu^a]$, elementos del espacio de todas las funcionales complejas $\mathcal{F} = \{\Psi(A)\}$ dependientes del potencial vector. De acuerdo con esto tenemos que el operador \widehat{A}_μ^a actúa sobre los estados multiplicativamente y $\widehat{\pi}_a^\mu$ lo hace mediante una derivada funcional. La condición sobre los estados físicos es en esta representación [17]:

$$\widehat{\Phi}_a^{(1)} \Psi = \frac{\delta \Psi}{\delta A_0^a} = 0 \quad (3.11)$$

$$\widehat{\Phi}_a^{(2)} \Psi = \left(\partial_1 \frac{\delta}{\delta A_1^a} - gf_{abc} A_1^c \frac{\delta}{\delta A_1^b} \right) \Psi = 0. \quad (3.12)$$

Y se puede verificar que los operadores de constricción, con el ordenamiento aquí escogido, satisfacen la misma álgebra que su contraparte clásica (1.32), a saber:

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\Phi}_a^{(1)}(\mathbf{x}), \widehat{\Phi}_b^{(1)}(\mathbf{y}) \right] &= \left[\widehat{\Phi}_a^{(1)}(\mathbf{x}), \widehat{\Phi}_b^{(2)}(\mathbf{y}) \right] = 0 \\ \left[\widehat{\Phi}_a^{(2)}(\mathbf{x}), \widehat{\Phi}_b^{(2)}(\mathbf{y}) \right] &= gf_{abc} \delta_{\mathbf{xy}} \widehat{\Phi}_c^{(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

con las constantes de estructura siendo números y no operadores, de modo que el requerimiento básico (3.4) se cumple inmediatamente, evitando las llamadas anomalías en esta teoría. Aunque mencionamos este resultado para el caso de dos dimensiones, éste sigue siendo válido en cualquier dimensión de la variedad base.

En este punto definimos el espacio de funcionales que cumplan con las dos condiciones (3.11) y (3.12) como:

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} \equiv \left\{ \Psi(A) \in \mathcal{F} / \widehat{\Phi}_a^{(1)}\Psi = 0, \widehat{\Phi}_a^{(2)}\Psi = 0 \right\}.$$

Analicemos ahora las ecuaciones que seleccionan a los estados físicos. Por un lado, la condición (3.11) implica que Ψ no puede ser funcional de la componente temporal del potencial vector, mientras la segunda ecuación exige la invariancia de la funcional de onda bajo transformaciones de norma:

$$\Psi[A_1^a] = \Psi[gA_1^a g^{-1} + g\partial_1 g^{-1}] \quad (3.13)$$

para toda g en la parte conexa con la identidad del grupo, siendo la funcional de onda únicamente dependiente de la parte espacial del potencial vector: $\Psi = \Psi[A_1^a]$. Clásicamente podemos hacer también, mediante una transformación de norma, que en las ecuaciones relevantes (3.8)-(3.10) desaparezca la componente A_0 ; tomando $\bar{g} \in \mathcal{G}$ tal que cumpla con:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^0} = \bar{g}A_0,$$

tenemos que las componentes del potencial vector y la 2-forma de curvatura son transformados a:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= 0, \\ \bar{A}_1 &= \bar{g}A_1\bar{g}^{-1} + \bar{g}\frac{\partial \bar{g}^{-1}}{\partial x^1}, \\ \bar{F}^{10} &= \bar{g}F^{10}\bar{g}^{-1} = \partial_0\bar{A}_1 = \dot{\bar{A}}_1. \end{aligned}$$

y así reducimos las ecuaciones (3.8)-(3.10) a:

$$\frac{\partial \bar{F}^{10}}{\partial x^1} + [\bar{A}_1, \bar{F}^{10}] \approx 0, \quad \frac{\partial \bar{F}^{10}}{\partial x^0} = 0, \quad H^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{S^1} dx^1 \bar{F}_a^{10} \bar{F}_a^{10}. \quad (3.14)$$

Observe que con esta transformación particular no hemos roto con la invariancia de norma, pues todavía tenemos libertad de transformar a la componente \bar{A}_1 ; usualmente, algunos autores inician la discusión de la teoría de Yang-Mills con $A_0^a = 0$ y la llaman “norma” de Weyl, pero de ninguna manera se esta fijando norma alguna pues subsiste la ley de Gauss que es justamente generadora de la simetría.

Retomando la relación (3.13), vemos que las funcionales de onda deben estar definidas en un espacio donde cada punto corresponda a una clase tal que todos los elementos en ella estén conectados por una transformación de norma. Una manera de entender este espacio es primero reconocer en el espacio fase Γ , de coordenadas locales $(\bar{A}_1, \bar{F}^{01})$, la superficie de constricción Γ_C como la formada por todos los pares $(\bar{A}_1, \bar{F}^{01})$ que cumplan con la ley de Gauss, sobre la cual dos pares son equivalentes si son conectados por una transformación de simetría, i.e.

$$(\bar{A}_1, \bar{F}^{01}) \sim (\bar{A}_1^g, (\bar{F}^{01})^g) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{A}_1^g = g (\bar{A}_1 + \partial_1) g^{-1} \\ (\bar{F}^{01})^g = g \bar{F}^{01} g^{-1} \end{cases}$$

Con esta observación construimos el espacio fase reducido Γ_R del sistema como el conjunto de clases de equivalencia de pares $(\bar{A}_1, \bar{F}^{01})$ en Γ_C . En símbolos:

$$\Gamma_R = \Gamma_C / \sim,$$

y así podríamos pensar al espacio sobre el cual se definen las funcionales físicas (3.13) como el correspondiente al sector de coordenadas en Γ_R . Es claro ahora que la Hamiltoniana primaria dada en (3.14) es función de clases, esto es, una función sobre Γ_R , ya que es invariante de norma.

Otra manera de concebir al espacio sobre el cual definimos los estados físicos se puede hacer en términos del grupo mismo, pues es posible encontrar un mapeo biyectivo del espacio fase reducido Γ_R en el espacio cociente $(\mathcal{G} \times \mathfrak{g})/\mathcal{G}_{\text{adj}}$, [30]. Para esto se resuelve primero la constricción que encierra la ley de Gauss no-abeliana, cuyo resultado es:

$$\bar{F}^{01}(x^1) = S(x^1) \bar{F}^{01}(0) S^{-1}(x^1)$$

con $S(x^1)$ solución a la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial S}{\partial x^1} + \bar{A}_1 S(x^1) = 0, \quad \text{con } S(0) = 1.$$

Reconociendo a esta ecuación diferencial como la ecuación que define a la holonomía, se tiene:

$$S(x^1) = P \left[\exp \left(- \int_0^{x^1} dt \bar{A}_1 \right) \right] S(0) = P \left[\exp \left(- \int_0^{x^1} dt \bar{A}_1 \right) \right]$$

que corresponde geoméricamente al transporte paralelo de S , por el círculo S^1 , de 0 a x^1 . Así, resolver la constricción clásica (3.14), es lo mismo que decir que un par $(\bar{A}_1, \bar{F}^{01}(x^1))$ en Γ_C es necesariamente de la forma $(\bar{A}_1, S(x^1)\bar{F}^{01}(0)S^{-1}(x^1))$.

Con la holonomía se define ahora el mapeo ϕ entre Γ_C y $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \phi : \Gamma_C &\longrightarrow \mathcal{G} \times \mathfrak{g} \\ &: (\bar{A}_1, \bar{F}^{01}) \longmapsto (S(2\pi), \bar{F}^{10}(0)) \end{aligned}$$

donde $S(2\pi)$ corresponde a la holonomía alrededor del círculo S^1 , y en virtud de que esta última cantidad se transforma covariantemente, o bien de manera adjunta, bajo una transformación de norma tenemos que:

$$\phi(\bar{A}_1^g, (\bar{F}^{01})^g) = \phi(g(\bar{A}_1 + \partial_1)g^{-1}, g\bar{F}^{01}g^{-1}) = (gS(2\pi)g^{-1}, g\bar{F}^{10}(0)g^{-1}).$$

Y así \mathcal{G} actúa sobre $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$ de forma adjunta. Dicho de otra forma, ϕ no solo es un mapeo entre Γ_C y $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$, sino que además induce un mapeo, que resulta ser biyectivo, entre clases de Γ_C y clases de $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$, estas últimas definidas mediante la relación:

$$(S(2\pi), \bar{F}^{01}(0)) \sim (S'(2\pi), \bar{F}'^{01}(0)) \Leftrightarrow \begin{cases} S'(2\pi) = gS(2\pi)g^{-1} \\ \bar{F}'^{01}(0) = g\bar{F}^{01}(0)g^{-1} \end{cases}$$

Con la existencia de este mapeo se puede traducir la condición sobre los estados físicos:

$$\Psi \in \mathcal{F}_{\text{phys}} \Leftrightarrow \Psi[A_1^a] = \Psi[gA_1^a g^{-1} + g\partial_1 g^{-1}]$$

a:

$$\Psi \in \mathcal{F}_{\text{phys}} \Leftrightarrow \Psi[g] = \Psi[\text{hgh}^{-1}] \quad (3.15)$$

dependiendo de lo que se quiera ver como “espacio de configuración reducido”, si el espacio de las conexiones módulo transformaciones de norma o el espacio formado por las holonomías módulo transformaciones de norma. La ventaja del segundo punto de vista es que con él se puede definir un producto interno en $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ con la posibilidad de darle a éste la calidad de espacio de Hilbert, $\mathbb{H}_{\text{phys}} \subset \mathcal{F}_{\text{phys}}$. Para comenzar observe que la condición (3.15) la satisfacen los caracteres $\{\chi_\rho(g)\}$ de las representaciones irreducibles ρ del grupo de norma,

recuerde que el carácter de una representación es una función de clases. Entonces por las relaciones de ortogonalidad de Schur, el conjunto $\{\chi_\rho(g)\}$ forma una base ortonormal del espacio de Hilbert físico $\mathbb{H}_{\text{phys}} \equiv L^2(\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\text{adj}})$. De hecho la Hamiltoniana de la teoría cuántica queda diagonalizada en esta base:

$$\hat{H}\chi_\rho(g) = \frac{1}{2}c_2(\rho)\chi_\rho(g) \quad (3.16)$$

con $c_2(\rho)$ el valor del operador de Casimir $\sum T_a T_a$ en la representación ρ . El producto interno entre estados físicos se define en este caso como:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) \Psi_1^*[g] \Psi_2[g] \quad (3.17)$$

donde $d\mu(g)$ es la medida de Haar normalizada a dar volumen unidad, teniendo así un producto interno invariante bajo la acción del grupo.

Al tomar en cuenta el primer punto de vista, el de pensar al espacio de configuración reducido como el de las conexiones módulo transformaciones de norma \mathcal{A}/\mathcal{G} , también podemos hallar una solución explícita a la ecuación diferencial funcional (3.12) que define a los estados físicos. Recordando que la acción de Chern-Simons depende solamente de la parte espacial del potencial vector y que además es invariante bajo transformaciones de norma pequeñas, podemos proponer con base a esto la solución:

$$\Psi_2 = \exp\left(\pm S_{\text{CS}}^{(1)}[A_1^a]\right) \quad (3.18)$$

donde en el exponente aparece la acción de Chern-Simons unidimensional que discutimos en la sección 2.4, y a dicho estado lo llamamos el estado de Loos-Kodama de la teoría bidimensional. De hecho podemos mostrar explícitamente que (3.18) es solución, para ello es suficiente usar:

$$\frac{\delta S_{\text{CS}}^{(1)}}{\delta A_1^a} = -igg_a$$

que implica:

$$\frac{\delta \Psi_2}{\delta A_1^a} = \pm \Psi_2 \frac{\delta S_{\text{CS}}^{(1)}}{\delta A_1^a} = \mp ig \Psi_2 g_a.$$

Y así tenemos que el lado izquierdo de (3.12) equivale en este caso a:

$$\left(\partial_1 \frac{\delta}{\delta A_1^a} - gf_{abc} A_1^c \frac{\delta}{\delta A_1^b}\right) \Psi_2 = \mp ig \Psi_2 (\partial_1 g_a - gf_{abc} A_1^c g_b)$$

el primer sumando se anula trivialmente pues las cantidades $g_a = \text{tr}(T_a)$ son independientes de la variedad S^1 ; el segundo sumando también se anula, ya que al considerar la identidad que se sigue de la ciclicidad de la traza:

$$\text{tr}([A, \theta]) = 0 \quad \forall \theta = -ig\theta^a T_a$$

en coordenadas locales, se tiene:

$$(-ig)^2 f_{abc} A_\mu^a \theta^b g_c dx^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad g f_{abc} A_1^c g_b = 0$$

donde se usó la relación de conmutación entre los generadores de grupo.

En conclusión, en la dimensión par más baja para el espacio base, contamos con el estado Ψ_2 como solución exacta a las condiciones que seleccionan a los estados físicos en la teoría cuántica de Yang-Mills. Con respecto a la normalización de este estado, no podemos de ninguna manera decir que se trata de un estado no-normalizable solo por el hecho de que respecto al producto cinemático su norma diverge (la acción de Chern-Simons *no* es positiva o negativa definida), pues como ya advertimos éste no es el producto correcto en el espacio de Hilbert físico. Más aún, de acuerdo con la existencia del mapeo biyectivo entre las clases de Γ_R y clases de $\mathcal{G} \times \mathfrak{g}$, y la existencia de un producto interno (3.17) se debe poder definir en principio un producto donde se haga evidente la posibilidad de que el estado (3.18) sea normalizable de acuerdo al producto interno correcto.

Finalmente calculemos la energía asociada a este estado, el operador Hamiltoniano asociado a (3.10) es:

$$\widehat{H} = \int_{S^1} dx \left(\frac{1}{2} \widehat{\pi}_a^1 \widehat{\pi}_a^1 - A_0^a \widehat{\Phi}_a^{(2)} + \lambda^a \widehat{\Phi}_a^{(1)} \right)$$

Aplicando al estado Ψ_2 , tenemos al usar la representación de coordenadas:

$$\widehat{H}\Psi_2 = E_2\Psi_2; \quad E_2 \equiv \pi g^2 g_a g_a. \quad (3.19)$$

Observe que tomando a \mathcal{A}/\mathcal{G} como espacio de configuración reducido, tenemos el eigenvalor de energía mínimo igual a cero (simplemente tome una representación de grupo con traza nula para los generadores) y el vector asociado es el estado de Loos-Kodama (3.18) $\Psi_2 = 1$. Por otro lado de la ecuación (3.16) se observa que el estado de mínima energía es también la función 1, la cual corresponde a $\chi_\rho(g)$ para ρ la representación trivial.

3.3. Teoría de Yang-Mills en cuatro dimensiones

A continuación extenderemos algunos resultados de la sección anterior al caso de la dimensión cuatro. Tomemos como espacio base a $M = \mathbb{R} \times S^3$ con una métrica de Minkowski, la razón principal de esta elección es consecuencia de la restricción (2.35) que da las transformaciones de norma admisibles y cuyas implicaciones ya se discutieron en el capítulo anterior. En esta dimensión las ecuaciones presentan en buena parte el patrón a seguir en dimensiones mayores, aunque los cambios que aparecen después son relevantes.

En cuatro dimensiones la acción de Yang-Mills libre luce simplemente como la acción general (1.2):

$$S_{YM}[A] = -\frac{1}{4} \int_M F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} d^4x$$

donde los índices latinos corren de 1 a 3, y no existen muchas particularizaciones visibles con respecto al caso general en lo que se refiere tanto a las ecuaciones de movimiento como a la estructura de constricciones. Por un lado las ecuaciones de movimiento, que vienen de la variación de la acción de Yang-Mills, son:

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{D}_i F_a^{i0} = \partial_i F_a^{i0} - gf_{abc} F_b^{i0} A_i^c = 0 \\ \mathcal{D}_0 F_a^{0i} + \mathcal{D}_j F_a^{ji} = \partial_\mu F_a^{\mu i} - gf_{abc} F_b^{\mu i} A_\mu^c = 0 \end{cases}$$

y las constricciones de primera clase de la teoría son:

$$\begin{aligned} \Phi_a^{(1)} &\equiv \pi_a^0 \approx 0, \\ \Phi_a^{(2)} &\equiv \partial_i \pi_a^i - gf_{abc} A_i^c \pi_b^i \approx 0. \end{aligned}$$

Donde la componente temporal de las ecuaciones de Euler-lagrange corresponde a la constricción secundaria que encierra a la ley de Gauss no-abeliana. La componente espacial de dichas ecuaciones corresponde a la ecuación de Hamilton para los momentos $\pi_a^i = F_a^{i0}$, con la Hamiltoniana primaria:

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= \int_{S^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right] \\ &= \int_{S^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (E_a^i E_a^i + B_a^i B_a^i) - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Y en esta dimensión como en las superiores aparece el término cuadrático del “campo magnético” B_a^i a diferencia de lo que sucede en la dimensión dos, donde esta cantidad es nula pues no existen tensores antisimétricos definidos sobre variedades unidimensionales.

Pasemos ahora a la cuantización del sistema usando la prescripción de “constricciones como condiciones sobre los estados” usando la misma representación de coordenadas que usamos en la sección anterior, i.e.

$$\begin{aligned} A_\mu^a(\mathbf{x}) &\longrightarrow \widehat{A}_\mu^a(\mathbf{x}) \equiv A_\mu^a(\mathbf{x}), \\ \pi_a^\mu(\mathbf{x}) &\longrightarrow \widehat{\pi}_a^\mu(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta}{i \delta A_\mu^a(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

donde los estados se representan por funcionales de onda $\Psi = \Psi[A_\mu^a] \in \mathcal{F}$, y los operadores asociados a las constricciones de la teoría aplicados a las funcionales de onda son:

$$\widehat{\Phi}_a^{(1)}\Psi = \frac{\delta\Psi}{\delta A_0^a} = 0 \quad (3.21)$$

$$\widehat{\Phi}_a^{(2)}\Psi = \left(\partial_i \frac{\delta}{\delta A_i^a} - g f_{abc} A_i^c \frac{\delta}{\delta A_i^b} \right) \Psi = 0. \quad (3.22)$$

Y al igual que en el caso anterior se puede verificar que estos operadores de restricción, satisfacen la misma álgebra que su contraparte clásica, evitando así las llamadas anomalías en la teoría. De estas restricciones sobre las funcionales de onda, la primera implica que ningún estado físico en esta representación puede depender de la componente temporal del potencial vector; la segunda implica que las funcionales de onda deben ser invariantes bajo transformaciones de norma, i.e.:

$$\Psi[A_i^a] = \Psi[g A_i^a g^{-1} + g \partial_i g^{-1}] \quad (3.23)$$

con g elemento en la parte conexa a la identidad del grupo, en analogía con (3.13). Note pues, que los estados pertenecientes a $\{\mathcal{F}_{\text{phys}}\}$ definidos por (3.21) y (3.22) dependen solamente de la parte espacial del potencial vector. Clásicamente, tal como se demostró para el caso bidimensional, es posible “borrar” la componente temporal de escena; basta hacer una transformación de norma con un elemento del grupo que cumpla con la ecuación:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x^0} = \bar{g} A_0,$$

de donde precisamente:

$$\begin{aligned}\bar{A}_0 &= 0, \\ \bar{A}_i &= \bar{g}A_i\bar{g}^{-1} + \bar{g}\frac{\partial\bar{g}^{-1}}{\partial x^i}, \\ \bar{F}^{i0} &= \bar{g}F^{i0}\bar{g}^{-1} = \partial_0\bar{A}_i = \dot{\bar{A}}_i.\end{aligned}$$

con $A_\mu = -igA_\mu^a T_a$ y $F^{\mu\nu} = -igF_a^{\mu\nu}$. Esta transformación se puede repetir para toda dimensión, mostrando así que la componente temporal de A es un grado de libertad superfluo en la teoría de Yang-Mills. Las ecuaciones relevantes en el formalismo Hamiltoniano son después de esta transformación:

$$\partial_i\bar{F}_a^{i0} - gf_{abc}\bar{F}_b^{i0}\bar{A}_i^c \approx 0, \quad \partial_0\bar{F}_a^{0i} = \bar{D}_j\bar{F}_a^{ij}, \quad H^{(1)} = \int_{S^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\bar{F}_a^{i0}\bar{F}_a^{i0} + \frac{1}{4}\bar{F}_a^{ij}\bar{F}_a^{ij} \right]$$

para el caso $n = 2$.

Retomando las ecuaciones cuánticas, de la relación (3.23) vemos que las funcionales están definidas sobre un espacio donde cada punto corresponde más bien a una clase de equivalencia respecto a la relación inducida por una transformación de norma pequeña. Dicho de otra forma, las funcionales de onda están definidas en el espacio de configuración reducido correspondiente al espacio fase reducido:

$$\Gamma_R = \Gamma_C / \sim$$

con Γ_C la hipersuperficie de constricción definida por la ley de Gauss no-abeliana y \sim denota la relación de equivalencia.

En la sección 2.2.4 escribimos explícitamente la acción de Chern-Simons en tres dimensiones que en estos términos resulta ser una funcional definida precisamente en este espacio de configuración reducido, ya que es invariante bajo las transformaciones pequeñas (quasi-invariante bajo transformaciones de norma grandes) y que además depende exclusivamente de las componentes espaciales de la conexión. Con estos argumentos construimos entonces el estado de Loos-Kodama, correspondiente a la teoría cuántica de Yang-Mills en cuatro dimensiones, como:

$$\Psi_4 = \exp\left(\pm \frac{1}{g^2} S_{CS}^{(3)}[A_i^a]\right) \quad (3.24)$$

análogo a (3.18). En la definición de este estado hemos introducido por conveniencia el factor $\frac{1}{g^2}$ con g una cantidad adimensional en este caso de cuatro dimensiones. Mostremos ahora explícitamente que este estado es solución a las ecuaciones que seleccionan a los estados físicos, por un lado:

$$\frac{1}{g^2} \frac{\delta S_{CS}^{(3)}}{\delta A_i^a} = -g_{ab} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a$$

la cual podemos obtener fácilmente si leemos el lado izquierdo de la ecuación (2.18) como la variación de la acción de Chern-Simons para el caso $n = 2$. La derivada funcional anterior implica directamente:

$$\frac{\delta \Psi_4}{\delta A_i^a} = \pm \Psi_4 \frac{1}{g^2} \frac{\delta S_{CS}^{(3)}}{\delta A_i^a} = \mp \Psi_4 g_{ab} \epsilon^{ijk} F_{jk}^b.$$

Con esta identidad tenemos que al sustituir al lado izquierdo de (3.22) y usar que en cuatro dimensiones podemos reducir el tensor invariante g_{ab} a la forma de Killing $K_{ab} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$:

$$\left(\partial_i \frac{\delta}{\delta A_i^a} - g f_{abc} A_i^c \frac{\delta}{\delta A_i^b} \right) \Psi_4 = \mp \frac{1}{2} \Psi_4 \epsilon^{ijk} (\mathcal{D}_i F_{jk})^a. \quad (3.25)$$

Por otro lado analicemos la identidad de Bianchi $d_{\mathcal{D}} F = 0$ en coordenadas locales (cf. ec. (A.13)):

$$d_{\mathcal{D}} F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu F_{\rho\mu} = 0,$$

considerando las componentes espaciales y contrayendo con el pseudo-tensor ϵ^{ijk} se obtiene:

$$\epsilon^{ijk} (\mathcal{D}_i F_{jk}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^{ijk} (\mathcal{D}_i F_{jk})^a = 0$$

de donde concluimos que el lado izquierdo de (3.22) no es mas que las componentes espaciales de la identidad de Bianchi.

En suma hasta el momento hemos mostrado explícitamente que (3.22) tienen como solución al estado de Loos-Kodama formado con la acción de Chern-Simons tridimensional. Esto lo logramos a través de la identidad de Bianchi, la cual es consecuencia de las definiciones de curvatura y de derivada covariante exterior.

Finalmente calculemos la energía asociada a este estado, el operador Hamiltoniano asociado a (3.20) es:

$$\widehat{H} = \int_{S^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \widehat{\pi}_a^i \widehat{\pi}_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a \widehat{\Phi}_a^{(2)} + \lambda^a \widehat{\Phi}_a^{(1)} \right]$$

donde no hemos puesto $\hat{}$ en algunas cantidades pues vamos a usar la representación de coordenadas en el cálculo. Dado que por construcción Ψ_4 es aniquilado por las constricciones, solo resta calcular esencialmente la acción de una doble derivada funcional sobre éste; el resultado es (módulo regularizaciones):

$$\frac{1}{2}\hat{\pi}_a^i\hat{\pi}_a^i\Psi_4 = -\frac{1}{4}F_{ij}^a F_a^{ij}\Psi_4$$

de modo que al aplicar \hat{H} al estado obtenemos:

$$\hat{H}\Psi_4 = E_4\Psi_4, \quad E_4 = 0. \quad (3.26)$$

Entonces el estado de Loos-Kodama tienen un eigenvalor de energía nulo. Como una observación diremos que en el caso de tomar una métrica euclídea este último resultado no se conserva, esto es, el estado de Loos-Kodama para una teoría de Yang-Mills euclídea en cuatro dimensiones tiene una energía no nula.

A partir del resultado (3.26), se ha especulado sobre la posible interpretación física del estado de Loos-Kodama, y más aún sobre tal interpretación el estado análogo existente en la teoría de la gravedad cuantizada bajo estos conceptos [31]. Lo que es importante recalcar es que uno no puede descartar al estado de Loos-Kodama como estado físico por el hecho de que no sea normalizable con respecto al producto interno cinemático, ya sabemos que en general este producto no es el idóneo en el espacio $\mathbb{H}_{\text{phys}} \subset \mathcal{F}_{\text{phys}}$. En general esta propiedad la comparte cualquier estado invariante de norma que cumpla con las condiciones (3.2).

3.4. Teoría de Yang-Mills en $2n$ dimensiones

Con las secciones anteriores hemos ganado suficiente confianza para tratar ahora el caso general bajo el mismo esquema. En esta sección mostraremos explícitamente que es posible llevar a cabo la generalización de los estados Ψ_2 y Ψ_4 a estados similares en una teoría de Yang-Mills de mayor dimensión. Solamente para fijar ideas en algunas ocasiones escribiremos las ecuaciones correspondientes a los casos de seis y ocho dimensiones. Para comenzar vamos a reescribir las ecuaciones relevantes generales de la teoría de Yang-Mills, nos refe-

rimos a (1.4), (1.17), (1.28) y (1.20):

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\mu\nu} = 0,$$

$$\Phi_a^{(1)}(\mathbf{x}) \equiv \pi_a^0 \approx 0,$$

$$\Phi_a^{(2)}(\mathbf{x}) \equiv \partial_i \pi_a^i - g f_{abc} A_i^c \pi_b^i \approx 0,$$

$$H^{(1)} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}^{(1)} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \pi_a^i \pi_a^i + \frac{1}{4} F_a^{ij} F_{ij}^a - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right].$$

El único cambio en estas ecuaciones al particularizarlas a dimensiones seis y ocho es que los índices latinos corren de 1 a 5 y de 1 a 7, respectivamente. Por otro lado, las ecuaciones generales que seleccionan a los estados físicos:

$$\widehat{\Phi}_a^{(1)} \Psi = \frac{\delta \Psi}{\delta A_0^a} = 0, \quad (3.27)$$

$$\widehat{\Phi}_a^{(2)} \Psi = \left(\partial_i \frac{\delta}{\delta A_i^a} - g f_{abc} A_i^c \frac{\delta}{\delta A_i^b} \right) \Psi = 0, \quad (3.28)$$

seguirán dictando (al ser expresadas en la representación de coordenadas) funcionales de onda independientes de la componente temporal de la respectiva conexión e invariantes bajo las transformaciones de norma pequeñas. Recuerde que las constricciones de una teoría de norma solamente generan las transformaciones conectadas a la identidad, las llamadas transformaciones grandes no están incluidas pero su presencia puede dar lugar a efectos físicos observables⁽²⁾.

Como solución exacta a estas ecuaciones podemos escribir, de acuerdo a las propiedades de la acción de Chern-Simons, los estados de Loos-Kodama:

$$\Psi_6 = \exp \left(\pm S_{CS}^{(5)} [A_i^a] \right)$$

$$\Psi_8 = \exp \left(\pm S_{CS}^{(7)} [A_i^a] \right)$$

para los casos de seis y ocho dimensiones de la teoría cuántica de Yang-Mills, respectivamente. La generalización a una teoría en $2n$ dimensiones es inmediata:

$$\Psi_{2n} = \exp \left(\pm S_{CS}^{(2n-1)} [A_i^a] \right) \quad (3.29)$$

² En el caso de las teorías de Yang-Mills, la inclusión de transformaciones de norma grandes y la exigencia de la invariancia de los estados bajo estas, permite sumar un término de frontera a la acción de Yang-Mills que está relacionado con la degeneración de estados base inherentes a la teoría [20], [32].

y de acuerdo con la ecuación (2.15) que expresa la invariancia de $S_{CS}^{(2n-1)}$ bajo transformaciones infinitesimales de norma, es de esperar que este estado cumpla con las ecuaciones generales que seleccionan estados físicos. Para mostrar explícitamente que esto sucede, intentemos generalizar las ideas que nos llevaron a concluir este mismo hecho para el caso cuatridimensional. Para comenzar recuerde que para el caso de dimensión cuatro se echó mano de la identidad de Bianchi, la cual es válida en cualquier dimensión del espacio base, entonces con la mira en la generalización del resultado, nos gustaría hallar una manera de deducir que Ψ_4 es solución a (3.22) sin usar tal identidad y tomando sólo en cuenta argumentos relacionados con la dimensión particular. Por un lado, sabemos que la teoría de Chern-Simons es invariante bajo las transformaciones de norma g conectadas con la identidad:

$$(A_i)^g = g(A_i + \partial_i)g^{-1},$$

que infinitesimalmente son:

$$\delta A_i^a = \frac{1}{g}(\partial_i \theta^a - g f_{abc} \theta^b A_i^c), \quad (3.30)$$

donde $i = 1, 2, 3$ para el caso cuatridimensional, e $i = 1, \dots, 2n - 1$ para el caso $2n$ dimensional. Ahora, de acuerdo con el Teorema de Noether citado en el capítulo anterior, tenemos que las ecuaciones de movimiento obtenidas de $S_{CS}^{(3)}[A_i^a]$ no son todas independientes, de hecho si comparamos (3.30) con la expresión general (1.6) reconoceremos inmediatamente las cantidades:

$$G_{Ab} = G_{ib}^a = -f_{abc} A_i^c \quad \text{y} \quad T_{Ab}^i = T_{ib}^{aj} = \frac{1}{g} \delta_b^a \delta_i^j \quad (3.31)$$

las cuales nos ayudaran a adaptar la identidad (1.7) a una teoría de Chern-Simons, resultando en:

$$\partial_j \left(T_{ib}^{aj} \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(3)}}{\delta A_i^a} \right) = G_{ib}^a \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(3)}}{\delta A_i^a} \Leftrightarrow \frac{1}{g} \left(\mathcal{D}_i \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(3)}}{\delta A_i} \right)^a = -g g_{ab} \epsilon^{ijk} (\mathcal{D}_i F_{jk})^b \equiv 0, \quad (3.32)$$

relación que se debe cumplir independientemente del uso de un potencial vector que sea solución a las ecuaciones de movimiento de la teoría de Chern-Simons en tres dimensiones. La ecuación (3.32) es esencialmente el resultado de aplicar

la constricción $\widehat{\Phi}_a^{(2)}$ al estado Ψ_4 (cf. ec. (3.25)) y por lo tanto hemos mostrado, sin usar la identidad de Bianchi, que Ψ_4 es precisamente un estado físico en el sentido (3.2). De paso, ha quedado de manifiesto un hecho curioso, la invariancia de norma de la acción de Chern-Simons tridimensional implica las componentes espaciales de la identidad de Bianchi en espacio base cuadrimensional.

De la discusión en el párrafo anterior resulta casi inmediata la generalización de este cálculo para el caso $2n$ dimensional. Por un lado la acción de $\widehat{\Phi}_a^{(2)}$ sobre el estado de Loos-Kodama Ψ_{2n} es:

$$\left(\partial_i \frac{\delta}{\delta A_i^a} - gf_{abc} A_i^c \frac{\delta}{\delta A_i^b} \right) \Psi_{2n} = \pm \Psi_{2n} \left(\mathcal{D}_i \frac{\delta S_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i} \right)^a \quad (3.33)$$

pues:

$$\frac{\delta \Psi_{2n}}{\delta A_i^a} = \pm \Psi_{2n} \frac{\delta S_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i^a}$$

y así la acción del operador asociado a la ley de Gauss sobre el estado de Loos-Kodama general (3.29) resulta en la derivada covariante de las ecuaciones de la teoría de Chern-Simons en $2n - 1$ dimensiones. Por otro lado, sabemos que tales ecuaciones están relacionadas una con otra debido a la invariancia de norma infinitesimal de la teoría, la relación entre ellas se halla usando el teorema de Noether. El resultado es que al adaptar la relación (1.7) a la teoría de Chern-Simons reconociendo las cantidades definidas en (3.31), donde $i = 1, \dots, 2n - 1$ en el caso general, se tiene que las ecuaciones de movimiento cumplen las identidades:

$$\partial_j \left(T_{ib}^{aj} \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i^a} \right) = G_{ib}^a \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i^a} \Leftrightarrow \frac{1}{g} \left(\mathcal{D}_i \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i} \right)^a \equiv 0, \quad (3.34)$$

análogas a (3.32), las cuales se cumplen off-shell, i.e. son identidades independientes del uso de las soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(2n-1)}}{\delta A_i^a} = 0$.

Dado que la ecuación (3.34) es esencialmente el lado izquierdo de (3.33), concluimos inmediatamente que el estado Ψ_{2n} es precisamente un estado físico para la teoría cuántica $2n$ dimensional de Yang-Mills en el sentido (3.2). Las únicas bases de este resultado son la invariancia de la acción $S_{CS}^{(2n-1)}$ bajo transformaciones infinitesimales de norma y el uso del teorema de Noether, ambos demostrados en este trabajo. Observe también que el resultado es igualmente

válido ante el uso de la traza o de la traza simetrizada en la definición de la acción de Chern-Simons.

Por ejemplo adaptar el teorema de Noether al caso de seis y ocho dimensiones requiere simplemente de tomar en cuenta que los índices latinos en (3.31) deberán correr de 1 a 5 y de 1 a 7, respectivamente; mientras la ecuación (3.32) en estos casos se vera modificada como:

$$\begin{aligned} \partial_j \left(T_{ib}^{aj} \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(5)}}{\delta A_i^a} \right) &= G_{ib}^a \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(5)}}{\delta A_i^a} \Leftrightarrow \frac{1}{g} \left(\mathcal{D}_i \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(5)}}{\delta A_i} \right)^a \equiv 0 \\ \partial_j \left(T_{ib}^{aj} \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(7)}}{\delta A_i^a} \right) &= G_{ib}^a \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(7)}}{\delta A_i^a} \Leftrightarrow \frac{1}{g} \left(\mathcal{D}_i \frac{\delta \mathcal{L}_{CS}^{(7)}}{\delta A_i} \right)^a = 0 \end{aligned}$$

para cada caso respectivamente. Estas ecuaciones corresponderán, en cada caso, esencialmente a la acción del operador $\widehat{\Phi}_a^{(2)}$ sobre los estados Ψ_6 Y Ψ_8 , teniéndose así que estos estados son estados físicos de la teoría cuántica correspondiente. Hay que notar que para llegar a esta conclusión, no es necesario calcular explícitamente las ecuaciones de movimiento de la teoría de Chern-Simons asociada a la dimensión que estemos tratando.

Una cuestión inmediata a partir de lo que hemos hecho en las secciones anteriores es tratar de conocer ahora cuál es el eigenvalor de energía del estado de Loos-Kodama en cualquier dimensión. Para responder al cuestionamiento, sí es necesario calcular explícitamente las ecuaciones de movimiento de la teoría de Chern-Simons. Por ejemplo, calculemos primero dicho eigenvalor para los casos seis y ocho dimensiones, por un lado de (2.18) se tiene que la derivada funcional de las acciones de Chern-Simons correspondientes son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{CS}^{(5)}}{\delta A_i^a} &= \frac{3i}{4} g_{abc} \epsilon^{ijklm} F_{jk}^b F_{lm}^c \quad (i, \dots, m = 1, 2, \dots, 5) \\ \frac{\delta S_{CS}^{(7)}}{\delta A_i^a} &= \frac{1}{2} g_{abcd} \epsilon^{ijklmop} F_{jk}^b F_{lm}^c F_{op}^d \quad (i, \dots, p = 1, 2, \dots, 7) \end{aligned}$$

con lo que podemos calcular la derivadas funcionales $\frac{\delta \Psi_6}{\delta A_i^a}$ y $\frac{\delta \Psi_8}{\delta A_i^a}$ explícitamente y con ellas la acción del operador Hamiltoniano:

$$\widehat{H} = \int_{\Sigma} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \widehat{\pi}_a^i \widehat{\pi}_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^a F_a^{ij} - A_0^a \widehat{\Phi}_a^{(2)} + \lambda^a \widehat{\Phi}_a^{(1)} \right]$$

sobre los estados correspondientes. Sabemos que por construcción los últimos dos términos dentro de la integral aniquilan a dichos estados. Este último hecho

es el que asegura que el operador Hamiltoniano es un operador que envía a estados físicos en estados físicos, i.e. $\hat{H} : \mathbb{H}_{\text{phys}} \rightarrow \mathbb{H}_{\text{phys}}$. Es posible hacer una afirmación mas o menos inversa, esto es, podemos decir que si deseamos que \hat{H} sea un operador invariante de norma, necesariamente se deben cumplir las ecuaciones que seleccionan a los estados físicos. Para ver esto, observe que \hat{H} cambia bajo una transformación de norma infinitesimal como:

$$\delta\hat{H} = \frac{1}{g} \int_{\Sigma} d\mathbf{x} \left[\partial_0 (\mathcal{D}_0\theta)^a \cdot \hat{\Phi}_a^{(1)} - (\mathcal{D}_0\theta)^a \cdot \hat{\Phi}_a^{(2)} \right].$$

Entonces, proyectar al operador Hamiltoniano a un subespacio en el cual sea invariante con respecto a las transformaciones de norma pequeñas, implica la condición de proyectar los estados en un subespacio donde sean aniquilados por los generadores de tales transformaciones.

Retomando la acción de \hat{H} sobre los estados Ψ_6 y Ψ_8 , tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi_6 &= E_6\Psi_6, & E_6 &= \frac{3}{8} \left[\left(g_{abc} \epsilon^{ijklm} F_{jk}^b F_{lm}^c \right)^2 + \frac{2}{3} F_{ij}^a F_a^{ij} \right] \\ \hat{H}\Psi_8 &= E_8\Psi_8, & E_8 &= \frac{1}{4} \left[F_{ij}^a F_a^{ij} - \frac{1}{2} \left(g_{abcd} \epsilon^{ijklmop} F_{jk}^b F_{lm}^c F_{op}^d \right)^2 \right] \end{aligned}$$

para las dimensiones seis y ocho, respectivamente. Note cómo en el caso general, el de dimensiones $2n$ mayores o iguales a seis, la energía del estado deja de ser nula y tiene que ver con polinomios de grado $2(n-1)$ en las componentes espaciales de la curvatura. Por lo tanto, en el caso general uno no puede seguir afirmando que el estado de Loos-Kodama es un estado con energía nula.

Otra manera de entender este resultado es el siguiente, observe primero que al operador de energía lo podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int_{\Sigma} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \left(\hat{E}_a^i \hat{E}_a^i + B_a^i B_a^i \right) - A_0^a \hat{\Phi}_a^{(2)} + \lambda^a \hat{\Phi}_a^{(1)} \right] \\ &= \int_{\Sigma} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{\delta}{\delta A_a^i} + B_a^i \right) \left(\frac{\delta}{\delta A_a^i} + B_a^i \right) - A_0^a \hat{\Phi}_a^{(2)} + \lambda^a \hat{\Phi}_a^{(1)} \right]. \end{aligned}$$

Mientras que en toda dimensión tenemos por construcción $\hat{\Phi}_a^{(1)}\Psi_{2n} = \hat{\Phi}_a^{(2)}\Psi_{2n} = 0$, solamente en dimensión cuatro contamos con la identidad $\frac{\delta\Psi_4}{\delta A_a^i} = \mp\Psi_4 B_a^i$.

Conclusiones

En este trabajo se analizó la acción de Yang-Mills en $2n$ dimensiones,

$$S_{YM}[A] = \frac{1}{2g^2} \int_M \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})d^{2n}x$$

siendo la variable básica la 1-forma de conexión A definida sobre el espacio de Minkowski $2n$ dimensional $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, y evaluada en el álgebra del grupo de norma (compacto y semisimple) de dimensión r . Se demostró que la teoría contiene $2r$ constricciones de primera clase en cada punto, resumidas en:

$$\Phi^{1st} \equiv \left\{ \Phi_a^{(1)} = \pi_0^a \approx 0, \Phi_a^{(2)} = \mathcal{D}_i E_a^i \approx 0 \right\} \quad i = 1, \dots, 2n - 1,$$

donde $\Phi_a^{(2)}$ es el análogo no-abeliano de la ley de Gauss y E_a^i el momento canónico conjugado a A_i^a . Tales constricciones son consecuencia de la invariancia de norma local de la teoría y a la vez generadoras de la misma. Durante el estudio de la estructura de constricciones se halló la Hamiltoniana de la teoría que es en el caso genérico:

$$H^{(1)} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (E_a^i E_a^i + B_a^i B_a^i) - A_0^a \Phi_a^{(2)} + \lambda^a \Phi_a^{(1)} \right].$$

Debido a la simetría de norma, en el capítulo 3 se apuntó que el espacio de configuraciones físicas de la teoría de Yang-Mills es el espacio cociente \mathcal{A}/\mathcal{G} , i.e. el espacio de los potenciales vectores, modulo transformaciones de norma locales; siendo el espacio fase físico correspondiente, el haz tangente $T^*(\mathcal{A}/\mathcal{G})$. En general en este haz tangente no es posible contar globalmente con pares conjugados canónicos y por lo tanto el proceso de cuantización canónica no se puede llevar a cabo de forma estándar.

Para cuantizar la teoría se usó la prescripción de Dirac en la representación de conexiones, donde primero se cuantiza en el espacio fase no-físico (en el de todas las conexiones $T^*(\mathcal{A})$) asumiendo las reglas de conmutación:

$$\left[\widehat{A}_\mu^a(x), \widehat{E}_b^\nu(y) \right] = i\delta_\mu^\nu \delta_a^b \delta(x-y),$$

y después se exige la invariancia de norma de los vectores de estado para proyectar el espacio de todas las funciones de onda $\mathcal{F} = \{\Psi(A)\}$ en el subespacio de las funciones:

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} \equiv \left\{ \Psi(A) \in \mathcal{F} / \widehat{\Phi}^{1st} \Psi(A) = 0 \right\}.$$

Se demostró que para cualquier teoría de Yang-Mills de dimensión par existe al menos una funcional de onda $\Psi_{2n}(\mathbf{A})$, que la llamamos el estado de Loos-Kodama $2n - 1$ dimensional, que pertenece a $\mathcal{F}_{\text{phys}}$, i.e. que es solución a las ecuaciones de constricciones cuánticas. Este estado es construido mediante la exponenciación de la acción de Chern-Simons en $2n - 1$ dimensiones y corresponde a la generalización del estado de Loos-Kodama tridimensional que se presenta en la Ref. [27].

Dos hechos básicos nos llevaron a la construcción de este estado: (i) la acción de Chern-Simons $2n - 1$ dimensional es quasi-invariante de norma, tal y como lo mostramos en este trabajo, y en particular es invariante bajo las transformaciones de norma infinitesimales; y (ii) esta invariancia implica un conjunto de identidades entre las ecuaciones de movimiento de la teoría, codificadas en el teorema de Noether, que se deben cumplir off shell y que corresponden a $\widehat{\Phi}_a^{(2)} \Psi_{2n} = 0$ al usar la representación de conexiones.

En lo que a las teorías de Chern-Simons se refiere, se escribió una fórmula explícita (no integral) para la construcción de la n -ésima forma de Chern-Simons (cf. ec. (2.43)) escrita con la traza simetrizada, con la cual construimos tal acción. Un ejercicio interesante, y como prueba de la efectividad de la fórmula, sería recobrar a partir de ésta tanto las propiedades de transformación como las ecuaciones de Euler-Lagrange de la teoría.

Es importante recalcar que con la notación \mathcal{F} y $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ indicamos que estos conjuntos se tratan de espacios de funciones complejas dependientes la conexión, y que hasta este momento no tienen una estructura de espacio de Hilbert. Aunque esto no se requiere para el espacio \mathcal{F} , si es necesario para $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ si

se quiere dar una interpretación física de las funcionales de onda en este espacio. Una estructura de espacio de Hilbert necesariamente requiere de la definición de un producto interno, en este caso uno del tipo:

$$\langle \Psi_{\text{phys}} | \Psi'_{\text{phys}} \rangle = \int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} [dA]_{\mathcal{G}} \Psi_{\text{phys}}^*(A) \Psi'_{\text{phys}}(A)$$

con una medida apropiada invariante de norma $[dA]_{\mathcal{G}}$. En virtud de las ambigüedades de Gribov de la teoría, es de esperarse que esta integral no se pueda definir en todo el espacio \mathcal{A}/\mathcal{G} sino que solamente en las regiones donde estén bien definidos los grados de libertad físicos; esto es, habría que definir la integral en cada copia de Gribov de manera similar a como se hace en el formalismo de integral de trayectoria cuando se consideran estos efectos. Dado este producto interno, el espacio físico de las funcionales de onda correspondería a:

$$\mathbb{H}_{\text{phys}} \equiv \{ \Psi(A) \in \mathcal{F}_{\text{phys}} / \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \} = \{ \Psi_{\text{phys}} \} \subset \mathcal{F}_{\text{phys}}.$$

esto es, a elementos de $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ de cuadrado integrable con respecto a la medida $[dA]_{\mathcal{G}}$. Con esto recalamos la diferencia entre estados físicos y soluciones a las constricciones cuánticas, los estados físicos son soluciones normalizables a las ecuaciones de constricciones con respecto a la medida $[dA]_{\mathcal{G}}$. Aunque en el capítulo 3 hemos presentado un producto como éste para el caso de una teoría de Yang-Mills en dos dimensiones, escrito en términos del espacio cociente $\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\text{adj}}$, en el caso general no se cuenta con la medida deseada. Entonces en este sentido no podemos descartar al estado de Loos-Kodama $2n - 1$ dimensional de ser un estado físico, pues ni siquiera contamos todavía con el producto interno general y entonces no podemos hablar de su normalización respecto a la medida $[dA]_{\mathcal{G}}$.

En suma, con esto hemos dado una respuesta afirmativa al cuestionamiento referente a la generalización del estado de Loos-Kodama tridimensional citado en la introducción de este trabajo.

En lo que se refiere al eigenvalor de energía asociado al estado de Loos-Kodama en cada dimensión, demostramos que en contraste con el caso de cuatro dimensiones, el estado asociado a teorías de orden mayor no tiene un eigenvalor nulo. Esto pone en evidencia una diferencia importante en la cuantización a la Dirac de la teoría de Yang-Mills y de la teoría de la gravedad, y es que mientras en esta última (en cuatro dimensiones) se tiene a la hamiltoniana misma como

constricción, y por lo tanto $\widehat{H}_{GR}\Psi = 0$ es un requerimiento mínimo para los estados físicos, en el caso de la teoría de Yang-Mills esta condición no se tiene que cumplir necesariamente y en particular no se cumple para las dimensiones de orden mayor. La razón por la cual en cuatro dimensiones el estado de Loos-Kodama tiene un eigenvalor de energía nulo es que en ésta la acción de Yang-Mills se deforma esencialmente en un término de frontera, mientras que en otras dimensiones este no es el caso. Para verlo explícitamente, observe como solamente en cuatro dimensiones se cuenta con la identidad $i\widehat{E}_a^i\Psi_4 = \frac{\delta\Psi_4}{\delta A_a^i} = \mp\Psi_4 g_{ab}\epsilon^{ijk}F_{jk}^b = \mp\Psi_4 B_a^i$, de modo que clásicamente tenemos $E_a^i = \pm iB_a^i$ para tener una Hamiltoniana nula; esta sustitución causa en la acción de Yang-Mills la deformación:

$$\begin{aligned} S_{YM} &= -\frac{1}{4} \int_M F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} d^4x = \frac{1}{2} \int_M (E_a^i E_a^i - B_a^i B_a^i) d^4x \\ &\longrightarrow \pm i \int_M E_a^i B_a^i d^4x = \mp i \int_M \text{trs}(F \wedge F) = \mp i \int_M d\omega_3. \end{aligned}$$

Por otro lado en dimensiones más altas, al no contar con la relación entre la derivada del estado de Loos-Kodama y el campo magnetico, la acción de Yang-Mills no se ve deformada en un término de frontera. Aunque uno pudiera esperar que la teoría de Yang-Mills de seis dimensiones se viera deformada en algo como $\int_M \text{trs}(F \wedge F \wedge F) = \int_M d\omega_5$, este no es el caso en virtud de que la definición del campo magnetico B_a^i no cambia con la dimensión de la teoría y de que $\widehat{E}_a^i\Psi_6 = \frac{3}{4}g_{abc}\epsilon^{ijklm}F_{jk}^b F_{lm}^c$. Entonces en general S_{YM} no puede deformarse en un término de frontera, el hecho de que en cuatro dimensiones se de esta deformación mediante la sustitución $E_a^i = \pm iB_a^i$ nos dice que en tal caso la teoría no contiene grados de libertad locales y por lo tanto no tenemos contribución alguna a los eigenvalores del operador local \widehat{H} por parte de estados que cumplan $\widehat{E}_a^i\Psi = \pm iB_a^i\Psi$. En contraste, para los estados de dimensiones mayores la teoría no se deforma a un término de frontera, además de que en éstas los estados de Loos-Kodama están hechos de acciones con grados de libertad locales, las acciones de Chern-Simons en altas dimensiones.

APÉNDICES

Apéndice A

G-haces y campos de norma

La idea general de este apéndice consiste en presentar la notación que se usa en este trabajo así como en introducir a los campos de norma como objetos geométricos. Aunque las teorías de norma en la literatura estándar [7, 11, 12, 13, 14] son presentadas de una manera inductiva por razones históricas y pedagógicas, es claro que los ingredientes esenciales - conexión, potencial vector, derivada covariante, curvatura, grupos de Lie - tienen una estructura matemática intrínseca la cual es independiente del contexto. Esta estructura ha sido bien estudiada por los matemáticos con argumentos de geometría diferencial (para una importante introducción con un énfasis especial en teoría de campos y gravitación se puede ver [33]). Cabe mencionar que la formulación de las teorías de Yang-Mills dentro del contexto de G -haces no es necesaria para trabajar con aquellos aspectos que son locales en el espacio-tiempo, pero se vuelve importante para el entendimiento de cuestiones globales, tales como anomalías [16], condiciones de fijación de norma (ambigüedades de Gribov), efecto de Aharonov-Bohm, teorías de Chern-Simons, entre otras.

A.1. Definiciones básicas

Nos referimos a un **haz** cuando hablamos de la estructura (M, E, Π) consistente de la variedad d -dimensional M llamada espacio base, la variedad E llamada espacio total y un mapeo suprayectivo llamado proyección $\Pi : E \longrightarrow M$.

Reconocemos a la **fibra** E_p sobre un punto $p \in M$ como el conjunto en E :

$$E_p = \{q \in E / \Pi(q) = p\}.$$

Si para todo $p \in M$ se tiene $E_p = F$, decimos que $(M, M \times F, \Pi)$ es un **haz trivial** con **fibra estándar** F . En el presente trabajo estamos particularmente interesados en haces localmente triviales, esto es, haces que localmente sean isomorfos al haz trivial, ya que estos son fundamentales en el concepto de **haz vectorial k -dimensional**. Este último es un haz localmente trivial (M, E, Π) donde cada fibra E_p es un espacio vectorial de dimensión k .

Otro concepto importante en esta construcción es el de **sección** de un haz vectorial (M, E, Π) que corresponde a una función $s : M \rightarrow E$, tal que para cada $p \in M$, $s(p) \in E_p$; en palabras, una sección asigna a cada punto en el espacio base un vector en la fibra sobre ese punto. La importancia de las secciones es que son estos objetos los que se suelen interpretar como campos físicos. Es posible demostrar que el conjunto de secciones de un haz vectorial forma un $C^\infty(M)$ -módulo⁽¹⁾, denotado como $\Gamma(E)$, con las operaciones de suma entre secciones y multiplicación de éstas por funciones $f \in C^\infty(M)$ dadas por:

$$\begin{aligned}(s + s')(p) &\equiv s(p) + s'(p), \\ (fs)(p) &\equiv f(p)s(p);\end{aligned}$$

por su calidad de módulo, en $\Gamma(E)$ no se puede hacer referencia precisamente a una base que lo genere, sin embargo localmente (donde el haz es isomorfo a un haz trivial) es siempre factible hallar un conjunto finito de secciones que lo genere cuyo rango sea k .

Puesto que deseamos presentar las teorías de Yang-Mills y de Chern-Simons en este contexto, es necesario referirnos a los llamados **G-haces** que son haces vectoriales en cuya construcción subyace un grupo de Lie. Precisamente requerimos de:

- (i) Una variedad M , que será espacio base del haz vectorial.

¹ $C^\infty(M)$ denota, como es costumbre, al espacio de todas las funciones infinitamente diferenciables de M en M

- (ii) Una cubierta $\{U_\alpha\}$ de M , i.e. un conjunto de abiertos tal que $\cup_\alpha U_\alpha = M$. Además suponemos que cada abierto U_α es espacio base del haz trivial $(U_\alpha, U_\alpha \times V, \pi_\alpha)$.
- (iii) Un espacio vectorial V , fibra estándar de cada haz trivial $(U_\alpha, U_\alpha \times V, \pi_\alpha)$.
- (iv) Un grupo de Lie $(G, *)$, que suponemos compacto y semi-simple, con álgebra denotada por \mathfrak{g} .
- (v) Una representación ρ de G sobre el espacio vectorial V .

La idea ahora es “pegar” los haces triviales mencionados en (ii) para conjuntar un haz vectorial total, el cual por construcción será localmente trivial; intuitivamente definimos la unión:

$$\bigcup_{\alpha} (U_\alpha \times V)$$

como el espacio total E del nuevo haz vectorial (M, E, Π) y denotamos a $(p, v) \in (U_\alpha \times V) \subset E$ como $[p, v]_\alpha$. El proceso de “pegado” se hace identificando puntos en E . Decimos que los puntos $[p, v]_\alpha$ y $[p, v']_\beta$ están identificados si

$$v = \rho(h_{\alpha\beta}(p))v'$$

donde $h_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición:

$$h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

que se encargan de hacer este proceso de pegado suave y no trivial. Es importante mencionar que este método da un haz vectorial si las funciones de transición satisfacen las condiciones de consistencia:

$$\begin{aligned} \rho(h_{\alpha\beta}(p)) &= \mathbb{1} \\ \rho(h_{\alpha\beta}(p) * h_{\beta\gamma}(p) * h_{\gamma\alpha}(p)) &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

para toda $p \in M$, tales condiciones expresan que no deseamos identificar dos puntos del mismo $U_\alpha \times V$ y entonces la identificación de puntos se hace solamente en el traslape de dos o más haces triviales. Para concluir se define la proyección del espacio total al espacio base, $\Pi : E \longrightarrow M$ como:

$$\Pi([p, v]_\alpha) \equiv p.$$

Con esta definición para la proyección, y las condiciones de consistencia sobre las funciones de transición, contamos con un haz vectorial, i.e. con un haz cuyas fibras son espacios vectoriales y que cuenta con una trivialización local sobre cada conjunto U_α . A este tipo de haces son a los que llamamos G -haces y al grupo G **grupo de norma** del haz.

Formalmente, dado un haz vectorial (como un G -haz) (M, E, π) podemos construir el haz vectorial de endomorfismos $(M, \text{End}(E), \Pi)$ donde la fibra sobre $p \in M$ es $\text{End}(E_p)$, el espacio vectorial de los mapeos lineales de E_p a sí mismo; para este haz las secciones son mapeos:

$$T : M \longrightarrow \text{End}(E)$$

que a cada $p \in M$ asignan el mapeo lineal $T(p) : E_p \longrightarrow E_p$. Para el caso especial de un G -haz vamos a decir que una transformación $T(p) \in \text{End}(E_p)$ vive en el grupo G si es de la forma $\rho(h(p))$, i.e. si $T(p)$ pertenece al grupo, homomorfo a G vía ρ , subconjunto de $\text{End}(E_p)$; similarmente $T(p) \in \text{End}(E_p)$ vive en el álgebra \mathfrak{g} si pertenece al álgebra, homomorfa al álgebra \mathfrak{g} , subconjunto de $\text{End}(E_p)$. Ahora, si $T(p)$ vive en G para toda $p \in M$, decimos entonces que T (la sección) es una **transformación de norma**. El conjunto de todas las transformaciones de norma (un subconjunto de $\Gamma(\text{End}(E))$) forman un grupo, denotado por \mathcal{G} , con la operación:

$$(TS)(p) \equiv T(p)S(p)$$

y elementos inversos e identidad dados por:

$$T^{-1}(p) \equiv (T(p))^{-1}$$

$$I(p) \equiv \mathbb{1},$$

respectivamente.

Para escribir en estos términos el principio de norma solo resta definir la acción de una sección T del haz $(M, \text{End}(E), \Pi)$ sobre una sección s del G -haz (M, E, π) , ésta da como resultado la nueva sección $s' \in \Gamma(E)$:

$$s'(p) \equiv (T(s))(p) \equiv (T(p))(s(p))$$

Con esta última definición, establecemos:

El principio de norma. Describiendo a los campos físicos por secciones de G -haces, las leyes de la física deberán ser ecuaciones diferenciales tal que si s es solución, entonces también $T(s)$ sea solución, con T en \mathcal{G} .

A.2. Conexiones

El principal obstáculo con el cual nos enfrentamos para construir ecuaciones diferenciales invariantes de norma, en el sentido del principio de norma, es que las derivadas de $T(s)$ pueden ser muy diferentes a las derivadas de s , ya que T depende del punto p . Es aquí donde necesitamos el concepto de conexión.

Para ser precisos, sea (M, E, π) un haz. Una **conexión** D sobre el haz es una relación que asigna a cada campo vectorial v , definido en M , una función $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ con las propiedades:

$$\left. \begin{aligned} D_v(\alpha s + r) &= \alpha D_v s + D_v r, & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ D_v(fs) &= v(f)s + fD_v s, & \forall f \in C^\infty(M) \\ D_{fv+w}(s) &= fD_v s + D_w s \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

$\forall s$ y $r \in \Gamma(E)$. Llamamos a $D_v s$ la derivada covariante de la sección s . Esta derivada covariante queda especificada en términos de cierta sección del haz $(M, \text{End}(E) \otimes T^*M, \Pi)$ denominada **potencial vector**; en coordenadas locales $\{x^\mu\}$ del espacio base M podemos escribir a esta sección como $A = A_\mu dx^\mu$ ⁽²⁾, con A_μ secciones $A_\mu : M \rightarrow \text{End}(E)$, i.e. $A_\mu \in \Gamma(\text{End}(E))$, y de ahí que uno se refiera a A como una 1-forma evaluada en $\Gamma(\text{End}(E))$ o $\text{End}(E)$ -evaluada. En general, podemos definir una p -forma $\text{End}(E)$ -evaluada como una sección, T , del haz $(M, \text{End}(E) \otimes \wedge^p T^*M, \pi)$ ⁽³⁾ y escribirla como:

$$T = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \equiv \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$$

donde $T_{\mu_1 \dots \mu_p} \in \Gamma(\text{End}(E))$. Durante este trabajo, para ahorrar escritura, entenderemos, a menos que se especifique lo contrario, el producto de formas como el

² Cuando trabajemos en coordenadas locales se hará uso de suma implícita sobre índices repetidos, con los índices griegos $\lambda, \mu, \nu, \rho, \tau, \sigma$, etiquetando los números del 0 al $d-1$.

³ $\wedge^p V$ denota la p -ésima potencia (exterior) antisimétrica tensorial de V .

producto “wedge” (e.g. $dx^1 dx^2 \equiv dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$); así el producto de dos formas $\text{End}(E)$ -evaluadas, T y S , de grado p y q , respectivamente, se define entonces como la $(p+q)$ -forma $\text{End}(E)$ -valuada:

$$TS = \frac{1}{p!q!} T_I S_J dx^I dx^J$$

donde I, J son índices que condensan a un número de p y q índices respectivamente.

Si el haz vectorial donde está definida la conexión D se trata de un G -haz, y estamos describiendo las teorías de Yang-Mills o de Chern-Simons, sólo interesan las llamadas G -conexiones que son las que corresponden a conexiones especificadas por potenciales vectores que no solamente estén evaluados en $\Gamma(\text{End}(E))$, sino que además vivan en \mathfrak{g} , explícitamente esto es⁽⁴⁾:

$$A = A_\mu dx^\mu = -ig A_\mu^a T_a dx^\mu \quad (\text{A.2})$$

donde el factor constante $-ig$ se introduce por conveniencia y $\{T_a\}$ corresponde a los generadores del grupo de Lie \mathcal{G} . Para ser consistentes con el principio de norma, es necesario exigir que la derivada D_v se transforme covariantemente bajo transformaciones de norma $g \in \mathcal{G}$, i.e.:

$$D'_v(g(s)) = g(D_v s).$$

Trabajando localmente es posible demostrar que esta condición es equivalente a que los potenciales vectores asociados, A y A' , a D y a D' , respectivamente, satisfagan:

$$A^g = g(A + d)g^{-1}, \quad (\text{A.3})$$

donde a g , una sección de $\Gamma(\text{End}(E))$ que vive en el grupo de norma G , aquí se le considera una 0-forma evaluada en el grupo \mathcal{G} y al producto gAg^{-1} se le entiende como $g \wedge A \wedge g^{-1}$, además el símbolo “d” que figura en (A.3) es la derivada exterior usual sobre p -formas evaluadas en $\Gamma(\text{End}(E))$, a saber, si T es una de estas formas:

$$dT = d \left(\frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \right) = \frac{1}{p!} \partial_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$$

⁴ Usaremos los índices a, b, c, d, e para denotar a los números del 0 a la dimensión del grupo de Lie, r .

siendo $T_{\mu_1 \dots \mu_p}$ una sección en $\Gamma(\text{End}(E))$ para cada valor de los subíndices.

Por otro lado, dada una conexión D en el haz vectorial (M, E, π) ésta induce una conexión \mathcal{D} en el haz de endomorfismos $(M, \text{End}(E), \Pi)$, ésta es una regla que asigna a cada campo vectorial v , definido sobre la variedad M , un función:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_v : \Gamma(\text{End}(E)) &\longrightarrow \Gamma(\text{End}(E)) \\ &: T \longrightarrow \mathcal{D}_v T \end{aligned}$$

donde la sección $\mathcal{D}_v T$ actúa sobre $s \in \Gamma(E)$ como:

$$(\mathcal{D}_v T)(s) = D_v(T(s)) - T(D_v s)$$

y \mathcal{D}_v cumple automáticamente con las condiciones (A.1). Así como la derivada exterior usual, podemos definir la **derivada covariante exterior** sobre una p -forma $\text{End}(E)$ -evaluada, T , como la $(p+1)$ -forma evaluada en $\Gamma(\text{End}(E))$:

$$d_{\mathcal{D}} T = d_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \right) = \frac{1}{p!} \mathcal{D}_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p},$$

con

$$\mathcal{D}_\nu T_{\mu_1 \dots \mu_p} = \mathcal{D}_{\partial_\nu} T_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

una sección en $\Gamma(\text{End}(E))$. Para hacer cálculos específicos es conveniente escribir $d_{\mathcal{D}} T$ en términos del potencial vector, haciendo un poco de álgebra en coordenadas locales, se puede mostrar que:

$$d_{\mathcal{D}} T = dT + [A, T]^\circ \quad (\text{A.4})$$

siendo $[\cdot, \cdot]^\circ$ el **conmutador graduado**⁽⁵⁾ entre formas $\text{End}(E)$ -evaluadas, a saber si T y S son p y q formas evaluadas en $\Gamma(\text{End}(E))$ entonces este conmutador es una $(p+q)$ -forma $\text{End}(E)$ -evaluada dada por:

$$[S, T]^\circ = ST - (-1)^{pq} TS. \quad (\text{A.5})$$

Para un G -haz la derivada covariante exterior sobre una p -forma que vive en el álgebra \mathfrak{g} , esto es, un objeto $B = \frac{1}{p!} B_{\mu_1 \dots \mu_p}^a T_a dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$, se vuelve convenientemente fácil ya que si se toma en cuenta la relación de conmutación entre

⁵ Introducimos el superíndice $^\circ$ solamente para no llegar a confundir a este conmutador con el conmutador usual, $[\cdot, \cdot]$, entre operadores.

los generadores $\{T_a\}$ del álgebra⁽⁶⁾:

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c \quad (\text{A.6})$$

se tiene:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}} B &= \frac{1}{p!} (\mathcal{D}_\nu B_{\mu_1 \dots \mu_p})^a T_a dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \\ &\equiv \frac{1}{p!} \left(\partial_\nu B_{\mu_1 \dots \mu_p}^a - g f_{abc} B_{\mu_1 \dots \mu_p}^b A_\nu^c \right) T_a dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Es útil escribir una fórmula para la derivada covariante exterior del producto TS , donde T y S son p y q formas evaluadas en $\Gamma(\text{End}(E))$, respectivamente; el resultado es la $(p+q+1)$ -forma $\text{End}(E)$ -evaluada:

$$d_{\mathcal{D}}(TS) = (d_{\mathcal{D}}T)S + (-1)^p T(d_{\mathcal{D}}S). \quad (\text{A.8})$$

A.3. Curvatura

Así como el potencial vector es claramente un objeto geométrico, pues sirve para comparar secciones en distintas fibras de un haz, la curvatura también lo es y esencialmente nos da una idea de si las derivadas covariantes conmutan. Para ser mas precisos, supongamos que (M, E, π) es un haz vectorial con conexión D , definimos la **curvatura** asociada a esa conexión como una sección del haz $(M, \text{End}(E) \otimes \wedge^2 T^*M, \Pi)$ (una 2-forma evaluada en $\Gamma(\text{End}(E))$), denotada por F , tal que al dar dos campos vectoriales v y w la sección $F(v, w) \in \Gamma(\text{End}(E))$ actúa sobre las secciones $s \in \Gamma(E)$ como:

$$\begin{aligned} F(v, w) : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ &: s \longrightarrow s' \equiv F(v, w)s \end{aligned}$$

donde

$$F(v, w) \equiv (D_v D_w - D_w D_v - D_{[v, w]}) s.$$

⁶ Debido a las propiedades del grupo de Lie G , compacto y semi-simple, es posible hallar una base en su álgebra donde la forma de Killing sea diagonal, dando a ésta una estructura de un espacio vectorial Euclídeo [34]. Ello implica que el conjunto de constantes de estructura $\{f_{ab}{}^c\}$ es equivalente a $\{f_{abc}\}$ con $f_{abc} \equiv \delta_{cd} f_{ab}{}^c$, elementos totalmente antisimétricos en sus índices. La estructura de espacio Euclídeo del álgebra nos permite, así, subir y bajar los índices del grupo (a, b, c, d, e) sin restricción alguna.

Usando esta expresión para F , y las definiciones de la sección anterior, se puede escribir la curvatura en términos del potencial vector A como sigue:

$$F = dA + A^2, \quad (\text{A.9})$$

una manera alternativa de expresar la curvatura es usando las coordenadas locales $\{x^\mu\}$ del espacio base M , de manera que:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

con

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{A.10})$$

Observe que para las teorías de norma que aquí tratamos, donde se trabaja con un G -haz y G -conexiones asociadas, la definición de curvatura implica que ésta vive necesariamente en el álgebra del grupo. Esto queda de manifiesto si se usa la expresión (A.10) y las relaciones de conmutación entre elementos que generan al álgebra (cf. ecuación (A.6)); de hecho se tiene explícitamente que:

$$F_{\mu\nu} = -ig F_{\mu\nu}^a T_a = -ig \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) T_a. \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, si el potencial vector $A = A_\mu dx^\mu = -ig A_\mu^a T_a dx^\mu$ vive en el álgebra del grupo, entonces también lo hace la curvatura asociada pues en este caso $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\frac{ig}{2} F_{\mu\nu}^a T_a dx^\mu dx^\nu$. Otra propiedad importante, con respecto a la curvatura, es que si se le aplica una transformación de norma g (lo que equivale a sustituir (A.3) en (A.9)) resulta que este objeto se transforma de manera homogénea:

$$F^g = g F g^{-1} \quad (\text{A.12})$$

a diferencia de la manera inhomogénea de transformación que sufre la 1-forma A bajo el mismo cambio. Esta ley de transformación para F tiene implicaciones directas en la construcción de las teorías físicas invariantes de norma.

Una de las identidades más importantes en este contexto, es la llamada **identidad de Bianchi**. Ésta es consecuencia directa de la definición de curvatura y de derivada covariante exterior, se puede escribir como:

$$d_{\mathcal{D}} F = 0 \quad (\text{A.13})$$

y usando la forma explicita (A.7) para la derivada covariante exterior, tenemos que la identidad de Bianchi se reduce a:

$$\mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu F_{\rho\mu} = 0.$$

Finalmente para completar este apéndice revisemos brevemente el operador de Hodge en la siguiente sección.

A.4. Operador de Hodge

Para definir el mapeo de Hodge vamos a definir primero el mapeo **isomorfismo dual**, denotado por $*$, éste lo construimos pensando en la variedad d -dimensional M y la d -forma de volumen $\epsilon^{(7)}$, de modo que $*$ es un mapeo que toma p -campos vectoriales v (secciones de $(M, \wedge^p TM, \pi)$) y los manda a $(d-p)$ -formas (secciones de $(M, \wedge^{(d-p)} T^*M, \pi)$), con la regla:

$$\begin{aligned} *v \equiv \epsilon(v) &= \frac{1}{(d-p)!} (*v)_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{d-p}} \\ &= \frac{1}{p!(d-p)!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_1 \dots \mu_{d-p}} v^{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{d-p}} \end{aligned}$$

y es un isomorfismo dual pues también puede aplicarse en sentido opuesto, i.e. $*$ puede mapear p -formas α en $(d-p)$ -campos vectoriales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} *\alpha \equiv \epsilon(\alpha) &= \frac{1}{(d-p)!} (*\alpha)^{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_{d-p}} \\ &= \frac{1}{p!(d-p)!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p \mu_1 \dots \mu_{d-p}} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_p} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_{d-p}}. \end{aligned}$$

Y ya que asumimos que la variedad M esta equipada con una métrica Lorentziana η con signatura $(1, d-1)$, por compatibilidad se tiene que:

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} = \eta^{\mu_1 \nu_1} \dots \eta^{\mu_d \nu_d} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_d}$$

⁷ Por simplicidad escogemos la d -forma de volumen con componentes unidad:

$$\epsilon_{\mu \dots \nu} = \begin{cases} +1, & \text{si } \mu \dots \nu \text{ es una permutación par de } 01 \dots d-1 \\ -1, & \text{si } \mu \dots \nu \text{ es una permutación impar de } 01 \dots d-1 \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde $\epsilon_{01 \dots d-1} = 1$ y por consistencia $\epsilon^{01 \dots d-1} = -1$

pues por otro lado con la métrica η podemos mapear p -campos vectoriales v en p -formas $\eta(v)$, y viceversa, p -formas α en p -campos vectoriales $\eta(\alpha)$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\eta(v) &= \frac{1}{p!} (\eta(v))_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} \eta_{\mu_1 \nu_1} \dots \eta_{\mu_p \nu_p} v^{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \\ \eta(\alpha) &= \frac{1}{p!} (\eta(\alpha))^{\mu_1 \dots \mu_p} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_p} = \frac{1}{p!} \eta^{\mu_1 \nu_1} \dots \eta^{\mu_p \nu_p} \alpha_{\nu_1 \dots \nu_p} \partial_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \partial_{\mu_p}.\end{aligned}$$

Definimos ahora el **operador de Hodge** como la composición:

$$\star \equiv * \circ \eta = \eta \circ *$$

de manera que éste mapea p -formas, α , en $(d-p)$ -formas, $\star\alpha$, como sigue:

$$\begin{aligned}\star\alpha &= \frac{1}{(d-p)!} (\star\alpha)_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{d-p}} \\ &= \frac{1}{p!(d-p)!} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_1 \dots \mu_{d-p}} [\eta^{\nu_1 \rho_1} \dots \eta^{\nu_p \rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p}] dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}.\end{aligned}$$

Y con la signatura de la métrica en M , se puede ver que sobre p -formas la doble acción del operador de Hodge no es más que:

$$\star^2 = (-1)^{p(d-p)+1}.$$

No es ahora difícil extender la acción del operador de Hodge que se hace sobre p -formas ordinarias, a hacerse sobre p -formas evaluadas en secciones de algún haz vectorial; ya que cualquiera de estos últimos objetos tiene la forma general de una suma tipo:

$$T = \sum (T' \otimes \alpha), \quad (\text{A.14})$$

con T' secciones de $\Gamma(\text{End}(E))$ y α representando p -formas ordinarias, podemos escribir entonces:

$$\star T = \sum (T' \otimes \star\alpha)$$

logrando así el efecto de que \star envíe p -formas $\text{End}(E)$ -evaluadas en $(d-p)$ -formas $\text{End}(E)$ -evaluadas, si la variedad base M tiene dimensión d . En particular la acción de este operador sobre la 2-forma de curvatura de un G -haz, $F = F^a T_a$ con $F_a = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a dx^\mu dx^\nu$, es por ejemplo:

$$\star F = (\star F^a) T_a = [(* \circ \eta) F^a] \otimes T_a$$

una $(d - 2)$ -forma evaluada en el álgebra \mathfrak{g} del grupo.

Finalmente para definir la acción $S = \int_M d^d x \mathcal{L}$ de una teoría de norma, sobre un espacio base d -dimensional, es imperante contar con una d -forma ordinaria invariante de norma para su integración. Entonces de alguna manera requerimos un medio para hacer de formas $\text{End}(E)$ -evaluadas formas ordinarias, este medio es precisamente la función **traza**; digamos que si $T' \in \Gamma(\text{End}(E))$, podemos definir la función $\text{tr}(T')$ en el espacio base M cuyo valor en $p \in M$ es precisamente la traza del endomorfismo $T'(p) : E_p \rightarrow E_p$,

$$(\text{tr}(T'))(p) \equiv \text{tr}(T'(p)).$$

Con esta definición entenderemos la traza de una forma evaluada en $\Gamma(\text{End}(E))$, cuya forma general es del tipo (A.14), como:

$$\text{tr}(T) = \sum (\text{tr}(T') \otimes \alpha)$$

(i.e. con $\text{tr}(T)$ sacamos solamente la traza usual de la parte $\text{End}(E)$ -evaluada de T). Al ser $\text{tr}(T')$ una función en $C^\infty(M)$, hace de $\text{tr}(T)$ una forma ordinaria de grado dictado por el grado de la forma α . Algunas propiedades de la traza sobre las formas $\text{End}(E)$ -evaluadas T y S , de grado p y q respectivamente, son:

$$\text{tr}(TS) = (-1)^{pq} \text{tr}(ST)$$

$$\text{tr}([T, S]^\circ) = 0$$

$$\text{tr}(d_{\mathcal{D}}T) = d\text{tr}(T)$$

$$\int_M \text{tr}(d_{\mathcal{D}}T \wedge S) = (-1)^{p+1} \int_M \text{tr}(T \wedge d_{\mathcal{D}}S), \text{ con } p + q = d - 1$$

Para los propositos que interesan en este trabajo, particularicemos la traza, en un G -haz, de una forma cualquiera B que viva en el álgebra del grupo. Ésta es:

$$\text{tr}(B) = \text{tr}\left(\frac{1}{p!} B_{\mu_1 \dots \mu_p}^a T_a dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}\right) = \text{tr}(T_a) \frac{1}{p!} B_{\mu_1 \dots \mu_p}^a dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$$

y su valor depende de la representación del grupo de norma.

Apéndice B

Prueba del Teorema de Noether

Este teorema lo podemos probar escogiendo coordenadas locales $\{x^\mu\}$ en el espacio base M y reacomodando términos en la variación de la densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta\mathcal{L}(\varphi_A, \varphi_A) = \delta\varphi_A \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + \delta(\partial_\mu\varphi_A) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} \\ &= \left(G_{Aa} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + \partial_\mu G_{Aa} \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} \right) \theta^a(x) + \\ &\quad + \left(G_{Aa} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} + T_{Aa}^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_A} + \partial_\nu T_{Aa}^\mu \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_A)} \right) \partial_\mu\theta^a(x) + \\ &\quad + \left(T_{Aa}^\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_A)} \right) \partial_\mu\partial_\nu\theta^a(x) \\ &= \left\{ \left[G_{Aa} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A} - \partial_\mu \left(T_{Aa}^\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_A} \right) \right] + \partial_\mu J_a^\mu \right\} \theta^a(x) \\ &\quad + (J_a^\mu + \partial_\nu K_a^{\nu\mu}) \partial_\mu\theta^a(x) + \frac{1}{2} (K_a^{\mu\nu} + K_a^{\nu\mu}) \partial_\mu\partial_\nu\theta^a(x) \quad (\text{B.1})\end{aligned}$$

Donde aquí hemos usado las definiciones de las cantidades J_a^μ y $K_a^{\mu\nu}$ así como la relación:

$$\delta(\partial_\mu\varphi_A) = \partial_\mu(\delta\varphi_A)$$

que se sigue de la suposición de que las transformaciones infinitesimales (1.6) no involucran transformaciones espacio-temporales explícitas. De la ecuación (B.1)

es fácil ver que la invariancia de la Lagrangiana \mathcal{L} es equivalente a que se cumplan las relaciones:

$$\begin{aligned} G_{\Lambda a} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\Lambda}} &= \partial_{\mu} \left(T_{\Lambda a}^{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\Lambda}} \right) - \partial_{\mu} J_a^{\mu} \\ \partial_{\nu} K_a^{\nu\mu} + J_a^{\mu} &= 0 \\ K_a^{\nu\mu} + K_a^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned}$$

en virtud de arbitrariedad de las funciones $\theta^a(x)$ y la independencia entre $(\theta^a(x))$, $(\partial_{\mu}\theta^a(x))$ y $(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\theta^a(x))$. Ahora de estas ecuaciones, al combinar la segunda, se implica:

$$\partial_{\mu} J_a^{\mu} = 0$$

de modo que al sustituir en la primera ecuación, esta se reduce a (1.7). Así concluimos que:

$$\delta \mathcal{L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_{\mu} \left(T_{\Lambda a}^{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\Lambda}} \right) = G_{\Lambda a} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_{\Lambda}}, \\ \partial_{\nu} K_a^{\nu\mu} + J_a^{\mu} = 0, \\ K_a^{\mu\nu} = -K_a^{\nu\mu}. \end{cases}$$

■

Bibliografía

- [1] Yang C.N. and Mills R. . *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Physical Review Letters **96**, 191, 1954.
- [2] Utiyama R. . *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Physical Review Letters **101**, 1597, 1956.
- [3] Dirac P.A.M. . *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
- [4] Tyutin I.V., Gitman D.M. . *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] Sundermeyer Kurt. *Constrained Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [6] Henneaux M., Teitelboim C. . *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1991.
- [7] Kaku Michio. *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [8] Faddeev L.D. . *From Yang-Mills field to solitons and back again*, January 1999, E-print Archive **hep-th/9901037**
- [9] Gervais J.L., Sakita B. and Wadia S. . *The surface term in gauge theories*, Physics Letters **63B**, 1976.
- [10] O. Mišković, Zanelli J. . *Irregular Hamiltonian Systems*, Proceedings of the XIII Symposium of Physics, Concepción, Chile, November 2002, E-print Archive **hep-th/0301256**

-
- [11] Abers E.S., Lee B.W. . *Gauge Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
- [12] Faddeev L.D., Slavnov A.A. . *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, U.S.A., 1980.
- [13] Ryder H. Lewis. *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Great Britain, 1987.
- [14] Peskin E. Michael, Schroeder V. Daniel. *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [15] O. Mišković. *Dynamics of Wess-Zumino-Witten and Chern-Simons theories*, Ph.D. Thesis, Universidad de Santiago de Chile, January 2004, E-print Archive **hep-th/0401185**
- [16] Alvares-Gaumé L. and Ginsparg P. . *The structure of gauge and gravitational anomalies*, Annals of Physics **161**, 423, 1985.
- [17] Jackiw R. Topological investigations of quantized gauge theories, *Relativity, Groups and Topology II*, ed B. S. De Witt, North Holland, Amsterdam, 1982.
- [18] Goldstein H. . *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [19] Dittrich W. and Reuter M.. *Classical and Quantum Dynamics, from classical paths to path integrals*, Springer-Verlag, Berlin, Third Ed. 2001.
- [20] Jackiw R. and Rebbi C. *Vacuum periodicity in a Yang-Mills theory*, Physical Review Letters **37**, 172, 1986.
- [21] Jackiw R., Nair V.P., Pi S-Y. and Polychronakos A.P.. *Perfect fluid theory and its extensions*, July 2004, E-print Archive **hep-th/0407101**
- [22] Jackiw R.. *S.S. Chern and Chern-Simons terms*, November 2005, E-print Archive **hep-th/0408051**
- [23] Deser S., Jackiw R. and Polychronakos A.P.. *Clebsch (string) decomposition in $D=3$ field theory*, Physical Letters A **279**, 151, 2001.

-
- [24] Witten E.. *2+1 dimensional gravity as an exactly soluble system.*, Nuclear Physics B **311**, 46, 1988.
- [25] Deser S., Jackiw R. and Templeton S.. *Three-dimensional massive gauge theories*, Physical Review Letters **48**, 975, 1982.
- [26] Bañados M., Garay J.L. and Henneaux M.. *Existence of local degrees of freedom for higher dimensional pure Chern-Simons theories*, Physical Review D **53**, 593, 1996.
- [27] Loos G.H.. *Canonical gauge and Lorentz invariant quantization of the Yang-Mills field*, Physical Review **188**, 2342, 1969.
- [28] Kodama H.. *Holomorphic wave function of the universe*, Physical Review D**42**, 2548, 1990.
- [29] Senjanović P. . *Path Integral Quantization of Fields Theories with Second-Class Constraints*, Annals of Physics **100**, 227, 1976.
- [30] Rajeev S.G. . *Yang-Mills theory on a cylinder*, Physics letters B **212**, 203, 1988.
- [31] Smolin L. . *Quantum gravity with a positive cosmological constant*, September 2002, E-print Archive **hep-th/0209079**. Witten E. . *A note on the Chern-Simons and Kodama wavefunctions*, June 2003 , E-print Archive **hep-th/0306083**.
- [32] Jackiw R. . *Fifty years of Yang-Mills theory and my contribution to it*, March 2004, E-print Archive **hep-th/0403109**.
- [33] Baez John and Muniain P. Javier . *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, 1994.
- [34] Hamermesh Morton. *Group Theory and its Applications to Physical Problems*, Dover, New York, 1962.