UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN A LA ARITMÉTICA Y AL ÁLGEBRA PARA ALUMNOS Y ASESORES DEL CURSO DE MATEMÁTICAS 1 DEL SISTEMA ABIERTO DEL COLEGIO DE BACHILLERES-CÍRCULOS DE ESTUDIO DEL STUNAM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

NORA JUDITH RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

DIRECTORA DE TESIS:
MAT. JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DÍAZ

2006

1. Datos del alumno
   Rodríguez
   Martínez
   Nora Judith
   55 90 08 60
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   091003155
2. Datos del Tutor
   Mat.
   Julieta del Carmen
   Verdugo
   Díaz
3. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Alejandro Ricardo
   Garcíadiego
   Dantán
4. Datos del Sinodal 2
   Act.
   Claudia
   Villegas
   Azcorra
5. Datos del Sinodal 3
   M en C.
   María del Pilar Adela
   Martínez
   Téllez
6. Datos del Sinodal 4
   Mat.
   Luis Alberto
   Briseño
   Aguirre
7. Datos del trabajo escrito
   Introducción a la aritmética y al álgebra para alumnos y asesores del curso de matemáticas 1 del sistema abierto del colegio de bachilleres-círculos de estudio del stunam.
   249 p
   2006

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION A LA ARITMÉTICA Y AL ÁLGEBRA PARA LOS ALUMNOS Y ASESORES DEL CURSO DE MATEMÁTICAS I DEL SISTEMA ABIERTO DEL COLEGIO DE BACHILLERES-CÍRCULOS DE ESTUDIO DEL STUNAM.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M Á T I C A
P R E S E N T A:

NORA JUDITH RODRÍGUEZ MARTÍNEZ

DIRECTORA DE TESIS:
MAT.JULIETA DEL CARMEN VERDUGO DÍAZ

Un viaje a través de una oscura y desconocida mansión

Quizas la mejor forma que tengo para describir mi experiencia al hacer matemáticas es como un viaje a través de una oscura y desconocida mansión.
Entras en la primera estancia y está completamente a oscuras. Tropiezas con el mobiliario que te hace caer, pero con el tiempo acabas sabiendo donde están los muebles.
Finalmente, tras unos seis meses, encuentras el interruptor de la luz, lo accionas y todo se ilumina.
Entonces descubres dónde estabas exactamente.
Luego te trasladas a la siguiente estancia y te pasas otros seis meses en la oscuridad.
De manera que todos estos momentos de iluminación, algunos muy rápidos, otros de un día o dos, son la culminación de los muchos meses de tropiezos y caidas en la oscuridad que los precedieron, y sin los cuales no podían existir.

Andrew Wiles.

Agradecimientos

A mis papás Miguel Ángel Rodríguez Carmona y Blanca Judith Martínez Franco por apoyarme incondicionalmente en todos mis sueños y proyectos, por nunca perder la fe en mí y demostrarme todo el amor que me tienen.

A mis hermanos Elisa y Miguel por ser mis compañeros de aventuras desde el día en que llegaron a este mundo a llenar mi vida de magia, sin ustedes no seria la misma.

A mi tía Maria Franco un pilar en mi vida, que con su apoyo y cariño he podido alcanzar mis más anhelados sueños, gracias por ser mi hada madrina.

A mis abuelitas Guadalupe Franco y Gloria Carmona, porque todo tiene un origen en la vida, gracias por traer al mundo a mi papá y a mi mamá.

A mi tío Raimundo por siempre velar por sus sobrinas consentidas y ser el tío consentidor que toda niña sueña.

A mis tíos Alejandra, Jorge y Juan Manuel por compartir conmigo los domingos y navidades de mi niñez en casa de mi abuelita y formar parte de la familia que me apoya y acompaña.

A mi nueva familia Valentín López, Alejandra García, Sandra y Nayelli porque desde que nos conocimos creo que supimos que nuestro destino era estar juntos, gracias por su cariño, hospitalidad y apoyo incondicional.

A mi esposo Edgar Valentín López García por ser el príncipe azul que siempre soñé, gracias por apoyarme tanto y llenar de amor cada uno de mis días.

A mi directora de tesis la profesora Julieta Verdugo por ser mi guía en la realización de este trabajo, gracias por estar para mi siempre que lo necesite, eres una persona maravillosa.

A mis sinodales los profesores Alejandro Garciadiego, Claudia Villegas, Luis Briseño y Pilar Martínez por su tiempo, sus valiosos comentarios y la orientación que me dieron en la realización de este trabajo.

A mis amigos los monkikis (Alexei Díaz, David Meza, Daniel Varela, Elio Villaseñor, Osvaldo Téllez y Pavel Ramírez) por acompañarme en esos cuartos obscuros en los que tropezábamos contra todo y después de un rato me ayudaban a encontrar el interruptor, la matemática no hubiera sido la misma para mi, sin su amistad y sabiduría.

A mis amigas Alma Elizarraras, Anabel Carrillo, Ana Lilia Cruz, Ana Lilia Martínez, Araceli Castillo, Deirdre Ruiz, Esperanza Zea, Fabiola Muñoz, Isabel Martínez, Ligia Vázquez, Mariana Martínez, Mariana Wences, Marisol Luna, Mirra Rivera, Mónica Salazar, Selene Martínez, Yessenia Alfaro, Yessica Castellanos, Yajseel Beltrán y Xochitl López porque sus consejos y cariño me han acompañado desde el día en que nos hicimos amigas, espero que sigamos cosechando más triunfos y alegrías en lo futuro, las quiero.

Un agradecimiento especial a Erandi Damián que con sus ilustraciones, le dio vida a esta tesis, a Daniel Varela mi gurú en LATEXque resolvió todas mis dudas y a Fabiola Muñoz que con su corrección de estilo no permitió que la gramática y la semántica me hicieran sufrir.

A la Universidad Nacional Autónoma de México que me ha formado desde que estaba en la primaria en el CEPPSTUNAM, en la secundaria y preparatoria en la Preparatoria 2 y ahora en la Facultad de Ciencias, por siempre poner a mi disposición a los mejores profesores, que me ayudaron a llegar a donde estoy, porque lo Hecho en la UNAM esta BIEN HECHO.

Índice general

Antecedentes

Sistema de Enseñanza Abierta del Colegio de Bachilleres [10]

En el *Boletín Bibliográfico de los Sistemas de Educación Abierta*, publicado en Enero de 198l, se menciona que el Colegio de Bachilleres implementó un sistema abierto para sus alumnos, el cual, está diseñado para una población de adultos preferentemente y utiliza una metodología innovadora de estudio ilimitado, que cumple además en cada asignatura con un plan de estudios particular, donde la interrelación de estos factores es la condición elemental que da sentido a la enseñanza abierta. Como la enseñanza abierta está orientada a sectores de la población de adultos que no tuvieron oportunidad de cursar estudios en los diferentes niveles del sistema educativo, por la necesidad de incorporarse a edad temprana a un trabajo de tipo productivo, los alumnos requieren de una metodología especial que atienda a sus intereses y finalidades. En dicho programa se toma en cuenta que el adulto es más estable y maduro, por lo que es capaz de realizar esfuerzos con mayor voluntad, regularidad y perseverancia, pero al mismo tiempo es posible que se enfrente al estudio a partir de un conjunto de premisas equivocadas, o bien que denote una falta de flexibilidad en sus opiniones, con una excesiva seguridad en sí mismo y entorpecer la adquisición de nuevas experiencias de conocimiento. Por estas razones la propuesta del Colegio de Bachilleres es la siguiente:

a)Crear una relación más personal entre los estudiantes y los miembros del sistema abierto, al considerar tiempo, espacio y experiencias de los alumnos.

b) Fomentar el carácter crítico de los estudiantes.

c) Reconocer que el aprendizaje es un proceso interno y que tiene diferentes ritmos de avance y diferentes necesidades del estudiante como sujeto activo.

Con lo anterior se pretende la sustentación y favorecimiento del aprendizaje y del desarrollo en el estudio independiente a partir de la ruptura con las formas tradicionales de enseñar y aprender, al aprovechar que en el sistema abierto, el conocimiento no se considera patrimonio del maestro y que el ritmo de estudio no se ajusta a la organización escolar tradicional lo cual, no obliga al estudiante a asumir un predeterminado ritmo de trabajo como lo puede ser el de un grupo del sistema escolarizado tradicional. Se fomenta, además, el estudio independiente basado en aspectos tales como: el compromiso del estudiante con su proceso de formación, las actividades independientes, las actitudes al trabajar en equipo y el acercamiento a la realidad con capacidad de evaluación y creatividad es decir, la capacidad crítica.

Para poder concretar este estudio independiente se le da un papel muy importante al material impreso sin descartar la televisión y el Internet debido a que para la enseñanza abierta no existe un lugar físico específico de aprendizaje, como en la enseñanza tradicional donde el aula es el punto central de referencia para el alumno. De esta manera, la comunicación verbal, profesor-alumno adquiere otro nivel, porque los contenidos por aprender están primordialmente por escrito y el alumno se apoya en las entrevistas asesor-estudiante, donde el aprendizaje dependerá casi exclusivamente de técnicas pedagógicas que se convierten en modelos de orientación y en criterios de valoración acordes con la metodología de la enseñanza abierta. Por lo tanto, el plan de estudios necesita ser permeable y flexible ante la realidad del estudiante, de manera que los contenidos adquieran sentido, vigencia y actualidad, al orientar al adulto hacia el óptimo aprovechamiento de sus conocimientos, los cuales, les serán necesarios en el ejercicio profesional y en su realización personal. El Sistema Abierto del Colegio de Bachilleres fue diseñado como una alternativa educativa diferente a las concepciones tradicionales de enseñar y aprender, al permitir una acción pedagógica efectiva.

Círculos de Estudio del STUNAM [23]

El 5 de julio del 2001, representantes del *Sindicato de los Trabajadores de la Universidad Nacional Autónoma de México (STUNAM)*, del *Colegio de Bachilleres* y de la UNAM declararon inaugurados los cursos de enseñanza abierta para los trabajadores universitarios. Al crear un sistema semi-escolarizado que toma como base el *Sistema Abierto del Colegio del Bachilleres*, el cual fue denominado bajo el nombre de *Círculos de Estudio del STUNAM*, gracias a un convenio que beneficiaría a los trabajadores universitarios con la creación de estos Círculos de Estudio, estos grupos permiten a los alumnos concluir sus estudios de preparatoria, tener una carrera técnica y la posibilidad de continuar sus estudios a nivel profesional.

El *Colegio de Bachilleres* tiene la función de evaluar a los alumnos, la matriculación a su institución y otorgar las facilidades necesarias para que la Secretaría de Cultura y Educación del STUNAM pueda otorgarles el material publicado por el Colegio de Bachilleres, a los alumnos de estos círculos. Esta misma secretaría proporciona a los estudiantes los asesores de las distintas asignaturas a evaluar y solicita al Colegio de Bachilleres la aplicación de los exámenes; por otro lado, la intervención de las autoridades universitarias facilita los espacios en las diferentes dependencias, para que sea posible impartir las asesorías en el propio lugar de trabajo de los alumnos, además de los permisos correspondientes para ausentarse de sus actividades, y asistir a las asesorías para cubrir una hora de asesoría por cada asignatura a la semana. Los alumnos llevan inicialmente cuatro asignaturas al semestre con la posibilidad de llevar aún más, pero éstas deben de ser estudiadas por su cuenta. Los horarios y los días de asesoría se establecían con cada dependencia por lo que los asesores tienen un horario en el que algunos días imparten asesorías en Ciudad Universitaria y otros días en las escuelas periféricas.

En el caso de la materia de Matemáticas I, los fascículos de los círculos de estudio son seis divididos en tres módulos, los cuales pueden ser evaluados por medio de un examen general o bien, al término de cada dos fascículos. Para que un módulo se considere evaluado se deberán aprobar satisfactoriamente los dos fascículos que lo componen. Los temas que los estudiantes deben manejar al final del curso de matemáticas I son los siguientes:

Fascículo I [13]

Aritmética: Una introducción al álgebra
Operando con números reales.
Reconocimiento de las propiedades de las operaciones y los algoritmos de los números reales, así como su clasificación.

Fascículo II [16]
De la aritmética al álgebra
Algunas ideas para la resolución de problemas.
Modelos algebraicos
Diagramas de operaciones
Lenguaje algebraico

Fascículo III [15]
Expresiones algebraicas
Terminología y notación
Operaciones con expresiones algebraicas (Una generalización de las operaciones aritméticas)
Reducción de términos semejantes
Adición y sustracción de polinomios
Multiplicación de polinomios
Multiplicación de polinomios con coeficientes racionales
División de polinomios

Fascículo IV [22]
Productos notables
Producto de dos binomios con termino común
Producto de dos binomios conjugados
El cuadrado de un binomio
El cubo de un binomio
El binomio de Newton
Factorización
Factorización por factor común
Factorización por agrupación de términos
Factorización de un trinomio cuadrado perfecto
Factorización de una diferencia de cuadrados
Factorización de una suma de cubos
Factorización de una diferencia de cubos
Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$
Simplificación de fracciones algebraicas racionales
Conversión de una fracción a otra equivalente con numerador o denominador dado.
Reducción de una fracción a expresión entera o mixta
Reducción de una expresión mixta a fraccionaria
Reducción de fracciones al mínimo común denominador
Cálculo del mínimo común múltiplo de monomios
Cálculo del mínimo común múltiplo de polinomios
Operaciones con fracciones algebraicas
Adición de fracciones

Resta o sustracción de fracciones
Multiplicación de fracciones
División de fracciones

Fascículo V [17]
Ecuaciones de primer grado
Planteamiento de problemas que dan lugar a una ecuación de primer grado
Solución de ecuaciones de primer grado y su interpretación grafica

Fascículo VI [11]
Sistemas de ecuaciones
Planteamiento de problemas que dan lugar a un sistema de ecuaciones de primer grado con dos o tres incógnitas
Interpretación geométrica
Métodos de solución algebraica de un sistema de ecuaciones
Método de eliminación por suma o resta
Método de eliminación por sustitución
Método de eliminación por igualación
Método de eliminación por determinantes

Introducción

En los círculos de estudio del STUNAM participé como asesora de la asignatura de Matemáticas I al impartir asesorías en veinte de los veintinueve círculos de estudio, en las siguientes dependencias: Actividades Cinematográficas en San Ildefonso, Centro de Instrumentos (CCADET), Ciencias de la Atmósfera y Geofísica, Dirección General de Incorporación y Revalidación de Estudios (DGIRE), Dirección General de Personal (Pitágoras) antes Dirección General de Normatividad y Servicios Administrativos (DGNSA), Escuela Nacional de Artes Plásticas, Instituto de Ciencias del Mar y Limnología, Instituto de Investigaciones Sociales, Facultad de Arquitectura, Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, Facultad de Derecho, Facultad de Psicología, Fomento Editorial y Publicaciones, Posgrado de Odontología, Torre II de Humanidades, Tienda UNAM. Impartí un total de veinte horas a la semana en los diferentes grupos de estas dependencias donde cubrí los turnos matutino y vespertino en algunos casos. La presente tesis está diseñada para los alumnos y asesores de los Círculos de Estudio del STUNAM que en su mayoría son adultos de edades que oscilan entre los 45 y 60 años, que han abandonado los estudios por mucho tiempo, así como para las personas que los retoman para iniciar la preparatoria en el sistema semi-escolarizado. En su mayoría, los estudiantes son auxiliares de intendencia o vigilantes con secundaria terminada, la otra parte son oficiales administrativos y secretarias. En algunos casos los grupos tienen entre sus estudiantes algunos adolescentes de entre 17 y 19 años de edad que abandonaron sus estudios por diversos motivos y los retoman con la finalidad de terminar el bachillerato.

En la práctica se observa que los estudiantes adolescentes han tomado cursos más recientemente y poseen una mayor capacidad para adaptarse a uno nuevo; a excepción de las alumnas con carrera secretarial y los adolescentes, en general, el resto de los alumnos tienen problemas para comprender los textos de los fascículos, por el lenguaje que estos utilizan, incluso al momento de realizar apuntes en clase ya que están deshabituados a copiar de un pizarrón y su velocidad para tomar notas en su cuaderno había disminuido considerablemente, por lo que en las clases se les pide que no copien del pizarrón hasta que la explicación termine y así puedan entender mejor los conceptos y aclarar dudas en el momento en el que se les presentan y al terminar de exponer el tema de clase, se les da el tiempo que requieran para copiar. Entre los alumnos de los círculos en los que impartí asesoría era frecuente encontrarme con algunos que ya no recordaban ningún tema de matemáticas salvo operaciones básicas y uno que otro cálculo específico que tuvieran que realizar por su trabajo.

De acuerdo a mi experiencia docente, la primera reacción de los alumnos ante el curso de matemáticas al final de la primera clase era coincidentemente siempre la misma: los estudiantes se acercaban para hablar conmigo y decirme que ellos en matemáticas nunca habían sido buenos y que en general era una materia a la que le tenían un gran respeto y miedo, pues tenían mucho tiempo que no la habían cursado. También expresaban la dificultad que tenían para resolver problemas, sobre todo cuando se trataba de fórmulas como: “cuando fulanita va a la tienda y compra 14 biscochos regala 4 y vende la tercera parte y ...” Los alumnos no saben qué hacer con la información que se les da, y mucho menos cómo idear una solución para resolver el problema, porque les cuesta trabajo hacer las cuentas sin confundirse.

Al iniciar el curso tomando como base los fascículos del Colegio de Bachilleres, el primer problema con el que los alumnos se enfrentaron era: el lenguaje del texto, ya que desde las primeras páginas les exigía conocimientos que ellos no recordaban. Nombres como: máximo común divisor, mínimo común múltiplo, exponente, factor, etc... eran palabras sin sentido para los alumnos que no sabían a qué se referían estos términos, razón que es motivo de este proyecto de tesis, pues su finalidad es precisamente la de crear una guía que introduzca a los estudiantes de manera sencilla a los conceptos que no recuerdan o que no saben, mismos que son necesarios para el aprendizaje de la materia. Esta tesis está diseñada para ser utilizada como un fascículo 0 ya que es un texto que sirve igualmente a alumnos y asesores a cimentar las herramientas necesarias para el aprendizaje de las matemáticas. Luego de aplicarlo en los diferentes grupos de matemáticas I, notaba la diferencia de los alumnos que habían realizado los ejercicios de esta tesis antes de empezar a trabajar con los fascículos del Colegio de Bachilleres, de aquéllos que no las habían hecho, ya que dicha introducción les da más soltura en el manejo de los conceptos y les facilita manejar los textos del Colegio de Bachilleres, ya sea en el momento de la asesoría o en el estudio individual. También se observó que los alumnos podían razonar de una mejor manera los conceptos nuevos y enfrentar los problemas y actividades sin mayores dificultades, lo cual es el principal objetivo de la presente tesis, es decir, hacer más accesibles los temas de matemáticas que corresponden al primer semestre de preparatoria siguiendo el programa del Bachillerato Técnico del Colegio de Bachilleres-Círculo de Estudios.

Esta tesis es una colección de temas que proponen diferentes opciones de método para mejorar la enseñanza de diversos temas de aritmética, mismos que son la base de pre-álgebra que los alumnos tanto necesitan dominar para aprobar la materia. La tesis se planteó inicialmente en la bitácora de los cursos del bachillerato y se fue desarrollando al presentar los temas en clase y de acuerdo a las necesidades de los estudiantes, así hasta llegar a la presente disposición, la cual facilita el aprendizaje de nuevos conceptos y motiva el resultado más anhelado por los alumnos: aprobar matemáticas.

Para lograr este fin no utilizo demasiados tecnicismos en el desarrollo de la tesis, ya que al utilizar lenguaje matemático (formal), éste crea confusiones en los estudiantes, que no están acostumbrados a él, volviendo - en mi opinión - más difícil la comprensión del tema que se les explica.

A lo largo de esta tesis, pretendo usar, en todo lo posible, un lenguaje coloquial y utilizar en algunos casos términos que los alumnos idearon, que después se enuncian con los términos o con los nombres que se utilizan en cualquier libro de texto que trate de los mismos temas en cuestión.

El texto está dividido en 4 lecciones las cuales pueden ser divididas a su vez en el número de asesorías que convenga a cada alumno y asesor, a continuación se presenta un breve resumen de los temas que componen cada una de éstas.

En la última seccion de cada lección se coleccionan los planteamientos, sugerencias o experiencias que se presentaron en clase en los círculos de estudio, las cuales sugieren al asesor cómo podría trabajar con sus alumnos en el salón de clases, o cómo podrían ejemplificar algunos temas para apoyar el aprendizaje de los alumnos. Estas referencias se marcan a lo largo de las lecciones con asteriscos(*) numerados, los cuales corresponden uno a uno, con cada uno de los comentarios, sugerencias o reportes de actividad que se encuentran en la última sección, si los asesores o alumnos desean consultarlos solamente deberán al leer el texto dirigirse a la referencia que corresponda.

A lo largo del texto es posible identificar las diferentes actividades a realizar ya que se encuentran señaladas con las siguientes ilustraciones[1]:

Si se trata de una pregunta que el alumno necesite reflecccionar, se identifica con estas imagenes.

Las actividades que el alumno debe desarrollar en su cuaderno de manera individual, se señalan de la siguiente manera:

Los razonamientos e ideas que deben discutirse en equipo se señalan de la siguiente manera:

Resumen de Contenidos

En el Capítulo 1, que lleva por título, “Lección 1”, se presenta la historia de los números naturales, se hace especial énfasis en la importancia de dichos números en las diferentes culturas, ya que esto conlleva a una eficiente forma de contar. También se presenta la forma en la que los niños pequeños aprenden a contar, al aprovechar la experiencia de los alumnos que tienen hijos, pues los alumnos pueden comentar entre ellos cómo es que los niños razonan las matemáticas, esto con el propósito de hacer que los estudiantes relacionen las matemáticas con su vida diaria y su entorno social. Finalmente se plantean de manera introductoria, por medio de ejemplos las propiedades de los números naturales para familiarizarlos con éstas, ya que en los fascículos del Colegio de Bachilleres las estudiarán formalmente.

[1] Ilustraciones diseñadas por Isadora Erandi Damián Herrera

En el Capítulo 2, "Lección 2", se utiliza un problema que se discutió en clase, del cual es posible seleccionar diferentes tópicos que se pueden estudiar de manera libre para después, decidir en cuáles de ellos se profundizará más. Con la solución de dichos problemas, se busca introducir los conceptos de: múltiplos, divisores, los números primos, en donde para obtener estos últimos se replantea el problema, al cambiar sus características iniciales, además de que en cada nuevo tema se exponen definiciones que los alumnos pueden manejar con mayor facilidad. Se plantea que los números se pueden clasificar en primos y compuestos, se introduce el tema de la descomposición en números primos y cómo es posible encontrarla a partir de los divisores primos de un número, la cual presenta dos formas diferentes de ser escrita, una con todos sus elementos y la otra a partir de potencias de números primos, con esto se plantea el tema de exponentes y sus propiedades, las cuales son muy útiles para poder calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números. Con estas actividades los alumnos no sólo refuerzan los conocimientos adquiridos de aritmética sino que adquieren nuevos elementos que les serán necesarios en el manejo de conceptos tales como: operaciones con fracciones y factorización de polinomios.

En el Capítulo 3, "Lección 3", se elaboró una actividad en clase al pedir a los alumnos que escribieran el 7 en diferentes formas, actividad cuyo propósito permite evaluar sus conocimientos previos y homogeneizar los del grupo y presentar así un concepto nuevo, como la raíz cuadrada, que tradicionalmente sigue un procedimiento largo, en el cual, los alumnos pueden practicar una gran cantidad de operaciones aritméticas con el propósito de que recordaran y aplicaran conceptos que no utilizan normalmente, además que este tipo de actividades ejercita su habilidad de seguir procedimientos específicos. También se introduce el concepto de números cuadrados para ejemplificar por medio de áreas el concepto de raíz cuadrada. Por los métodos de aproximación: el primero es el método María Montessori, en el cual se utilizan cuadrados para ejemplificar el cálculo de la raíz cuadrada; el segundo, el método Maya se presenta con números arábigos que permite a los alumnos calcular de una forma mas práctica la raíz cuadrada. Además se incluye el método más conocido el de la casita, en el cual los ejemplos presentados requieren de mayor cantidad de operaciones para encontrar la raiz que aquellos ejemplos usados en los libros de texto.

En el Capítulo 4, "Lección 4", se presentan las reglas para operar con los números con signo, al proponer una actividad a partir de cuadrados de colores diferentes para ejemplificar los casos posibles,además al agregar rectángulos de lados de medidas diferentes a la unidad y utilizar el concepto de área, los alumnos pueden realizar operaciones básicas con polinomios y reconocer los términos semejantes, lo que les da bases para la simplificación de operaciones algebraicas, la solución de ecuaciones, sistemas de ecuaciones y factorización.

En el apéndice A, "Reporte de Tarea", se presenta el reporte de una actividad realizada como tarea en los Círculos de Estudio, la cual ayuda a ejemplificar la utilidad de los números naturales. En esta se les pidió a los alumnos que a partir de un problema planteado, idearan su solución y después, en clase o asesoría, explicaran los procedimientos y razonamientos que utilizaron para resolver dicho problema, se presentan algunas de las soluciones de los alumnos y se concluye con el procedimiento de la suma de Gauss para un caso en particular.

Capítulo 1

Lección 1

1.1. A manera de historia de los números

*.1.4

El proceso de operar con números forma parte de nuestra vida diaria, incluso desde las eras antiguas en las que se necesitaba representar las cantidades de animales que se tenían, cuántos miembros tenía una comunidad, etc. Los símbolos numéricos surgieron como una necesidad para expresar cantidades, el hombre en un principio utilizó símbolos muy rudimentarios como marcas en los árboles, cuerdas con nudos que, conforme los cálculos se complicaban, se volvían poco útiles.

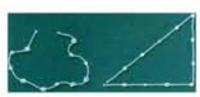


Figura 1.1: [9]

La necesidad de representar con pocos símbolos un mayor número de objetos hizo posible el surgimiento de los sistemas de numeración como el maya, el egipcio, el romano, el sumerio, los cuales entre sí son muy diferentes.

Por ejemplo al inicio de la historia del antiguo Egipto (III milenio a. C) ya tenían un sistema de numeración decimal muy similar al que hoy usan: la escritura egipcia tiene signos especiales para la unidad, para las decenas, centenas, etc.

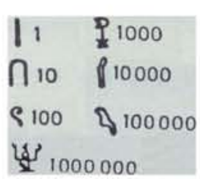


Figura 1.2: [8]

Ejemplo 1:

El **966** lo representan al dibujar nueve veces el símbolo del 100, seis veces el símbolo del 10 y seis veces la unidad.

Figura 1.3: [8]

Ejemplo 2:

Para representar el número **2030**, los egipcios dibujaban dos veces el símbolo que indicaba 1000 y tres veces el símbolo que indicaba 10.

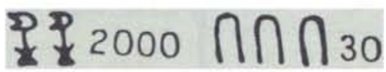


Figura 1.4: [8]

En la siguiente figura están representadas diferentes cantidades con el sistema numérico que utilizaban los egipcios.

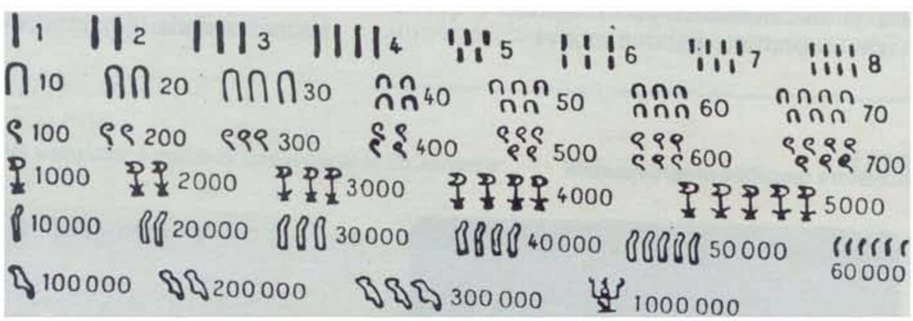


Figura 1.5: [8]

Ejemplo 3:

El **152,023** lo representan al dibujar una vez el símbolo del 100,000, cinco veces el símbolo del 10,000, dos veces el símbolo del 1,000, dos veces el símbolo del 10 y tres veces el símbolo de la unidad.

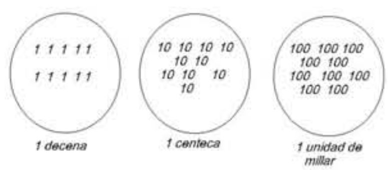
Figura 1.6: [8]

Los símbolos numéricos que conocemos actualmente se originaron en la India, pero fueron los árabes quienes los difundieron por Europa en el siglo XI, por lo cual se le conoce como sistema Indo arábigo. El sistema Hindú contaba sólo con los dígitos del 1 al 9, el cero apareció mucho después. Sólo dos culturas representaron al cero como un símbolo especial: la Maya y la Hindú, esta última utilizó un símbolo llamado *sunya* que significa lugares vacíos, los árabes tradujeron la palabra *sunya* como *sifer*, la cual al pasarla al latín cambió a *cefiro* de donde se originó la palabra cero.[1]

El sistema indo arábigo utiliza 10 símbolos (que reciben el nombre de dígitos) y que representan a los números; éstos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, que al combinarse y seguir las reglas de un sistema posicional[2] representan cualquier cantidad.

El sistema indo arábigo, agrupa de 10 en 10, es decir:

10 unidades forman una decena, 10 decenas forman una centena, 10 centenas forman una unidad de millar.



Ejemplo 1:

En el número 325: El número 3 corresponde a 3 centenas, el 2 corresponde a 2 decenas y el 5 corresponde a 5 unidades.

En cambio el número 523: El número 5 corresponde a 5 centenas, el 2 representa 2 decenas y el 3 corresponde a las unidades.

De esta manera observamos, que la posición que ocupe un dígito en una cantidad representa su valor numérico.

Este procedimiento se sigue para representar cualquier número, por eso nuestro sistema es posicional y de base 10, o simplemente decimal.

[1]De la Rosa R. Rosas A. Zuñiga J. Matemáticas I, Fascículo I, Aritmética: Una introducción al Álgebra, Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta, Pág.10.

[2]Como un ejemplo podemos tomar el sistema posicional en base 10: En donde el valor del dígito depende del lugar que ocupe en el número (unidades, decenas , centenas, etc.).

1.2. ¿Y que son los números naturales?

Podemos decir que los números naturales son los que usamos cuando necesitamos contar cosas.

*.1.4

Cuando somos pequeños los números que nos aprendemos son el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc., conforme crecemos podemos decir más, por ejemplo un niño que ya se siente grande cuenta hasta el 20, como un ejemplo, la realidad es que cuando los niños pequeños los mencionan, la mayoría de las veces no saben la diferencia entre uno y otro, para ellos lo único que les dice el valor es el orden en el que los mencionan.

Figura 1.7: [21]

Cuando los niños y niñas aprenden a contar, necesitan de ciertas reglas para no equivocarse y poder utilizar de manera correcta los números, es por eso que utilizan sin saberlo unos principios fundamentales.

Para entender qué están haciendo cuando cuentan objetos, los niños y niñas tiene que obedecer muchos principios lógicos. Primeramente, tienen que comprender la naturaleza ordinal de los números, es decir, que se encuentran en un orden de magnitud ascendente. Esto es implica algo mas que solo recordar el orden de las palabras numéricas(es decir, las representaciones verbales de los números): significa comprender que este orden obedece a la regla de que si tres es mas que dos y dos es mas que uno. Resulta por lo tanto, bastante razonable señalar que los escolares que no entienden ese sistema de relaciones (Si A es mayor que B y B es mayor que C, entonces A es mayor que C) tendrán una comprensión muy deficiente del número, aún si dicen las palabras numéricas en una secuencia perfecta.

Los niños y niñas también tienen que comprender la importancia del procedimiento que siguen cada vez que cuentan una serie de objetos, lo cual también implica una serie de reglas firmemente basadas en la lógica. Cada objeto debe contarse una vez y solo una, y aunque las palabras numéricas tienen que conservar un orden fijo el orden en el que se cuentan los objetos no implica ninguna diferencia. El número final (denominado número cardinal) es tanto el número de objetos en ese conjunto como el número que relaciona dicho conjunto de objetos con otros.

Piaget señalo en su teoría que a los niños y niñas les toma mucho tiempo apoyarse en los mismos principios lógicos que los adultos. Al empezar a asistir a la escuela, y durante varios años, los escolares normalmente no comprenden algunos de los principios lógicos más elementales que se necesitan para aprender matemáticas. La veracidad o falsedad de que estos pequeños educandos solo capten algunos aspectos de la lógica es una cuestión que todavía genera mucho desacuerdo.

En contraste, hasta donde sabemos hay consenso absoluto sobre otro aspecto de la teoría de Piaget: *los niños deben entender ciertos principios lógicos para comprender las matemáticas.* Esto resulta casi obvio, y las únicas modificaciones que otros investigadores intentaron hacer recientemente han sido simples agregados a la lista de requerimientos lógicos de Piaget. Ahora bien, veamos cuáles son esos requerimientos.

El punto más famosos en esta lista de principios lógico- matemáticos fue el de la conservación. Entender la conservación es saber que el número de una serie de objetos sólo puede cambiarse mediante sumas o restas, y que cualquier otro tipo de cambio es irrelevante.

Aquí afrontamos una forma esencial de entendimiento. Para ver su importancia basta con imaginar las dificultades que encara un escolar que no comprende la conservación. Supóngase que este escolar cuenta las naranjas de una caja y decide que hay seis, y después alguien coloca las naranjas en fila. Si el escolar piensa que hay más naranjas que antes no sabe que significa realmente la palabra numérica “seis”; éste fue uno de los principales aspectos de la acción de contar que atrajo el interés de Piaget.

El niño o niña puede contar bien en el sentido de que expresa los números correctos en el orden correcto, pero no entenderá el significado de esos números hasta que comprenda la conservación.

Para Piaget la lógica es el criterio más sólido para definir la comprensión numérica de los niños. Para saber qué están haciendo cuando cuentan, los niños deben comprender la conservación ya que, de otra forma, simplemente estarían repitiendo como pericos las palabras numéricas.

Cuando los niños y niñas empiezan a contar cosas no sólo tienen que verselas con la actividad misma de contar; deben, además , recordar las palabras numéricas, contar cada objeto en un conjunto -si están contando un conjunto- una sola vez, y entender que el número de objetos está representado por el último número que pronuncian cuando cuentan el conjunto. En otras palabras, tiene que aprender a contar adecuadamente.[3]

Al contar debemos respetar esta serie de principios ya que, en caso contrario, no estaremos contando adecuadamente.

Gelman y Gallistel[4] realizaron la más útil compilación de principios que los niños y niñas deben respetar cuando cuentan. Señalaron que existen tres principios para aprender a contar, los cuales denominaron “Principios para contar un solo conjunto de objetos”. El análisis de Gelman y Gallistel,

---

[3]Nunes, Bryant, Las Matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño, Siglo Veintiuno Editores, México 1997, Págs.17-20.

[4]The Child’s Understanding of Number, Cambridge, Massachussetts, Harvard University Press

se enfocan totalmente en cómo cuenta el niño o la niña un grupo de objetos visibles.

Principio de Correspondencia Biunivoca:

Se le conoce como **principio de correspondencia biunívoca**[5] en el cual al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una sola vez. Si contáramos un objeto dos veces, si nos saltáramos un objeto o si contáramos los espacios entre objetos en el grupo, obtendríamos un resultado totalmente equivocado.

Principio de Orden Constante

Este principio es conocido como **principio de orden constante**, el cual plantea, que cada vez que contamos debemos pronunciar palabras numéricas en el mismo orden. Si cambiáramos el orden de los números (1, 2, 3, 4, 5, 6 en una ocasión, 1, 3, 6, 5, 2, 4 en otra), obtendríamos un número total distinto cada vez que contáramos el mismo conjunto de objetos.

Principio de Cardinalidad

Se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar. Gelman y Gallister denominaron principio de cardinalidad a este requerimiento, y como ellos lo utilizan significa simplemente que si utilizamos términos verbales al contar, por ejemplo, hasta "cinco" (1-2-3-4-5), entonces debe haber un total de cinco objetos en el conjunto que estamos contando.[6]

Figura 1.8: [21]

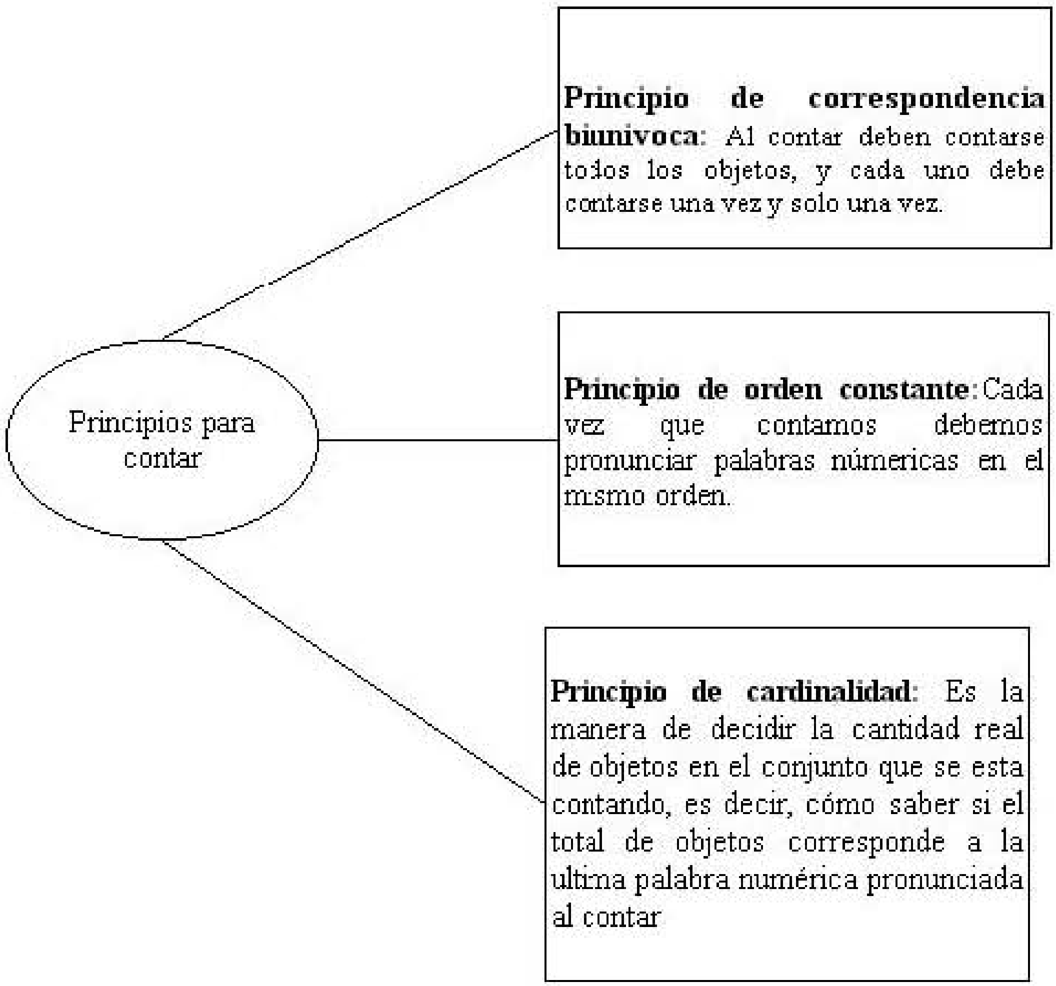
En general tanto adultos como niños pequeños no tienen necesidad de representar al cero ya que cuando no existen elementos, en realidad no hay que contar, por eso es que no incluyen al cero en su lista de números, porque no lo necesitan ya que el contar siempre empiezan con el uno.

[5] A cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento y sólo uno del segundo conjunto, y recíprocamente

[6] Nunes, Bryant, Las Matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño, Siglo Veintiuno Editores, México 1997, Pág. 37.

Recordatorio*1.4

Podemos resumir los principios que utilizamos para contar en el siguiente esquema:



1.3. Las propiedades de los números naturales

Las **operaciones básicas** son suma, resta, multiplicación y división.

La operación **aditiva** corresponde a añadir o sumar, por esa razón las operaciones aditivas son la suma y la resta. La operación **multiplicativa** corresponden a la multiplicación y división.

Para poder decir en nuestras propias palabras lo que significan las cosas en matemáticas necesitamos entender qué significa el enunciado que nos presentan.

Ejemplo 1: Si el enunciado dice, si a, b y c son números naturales, para interpretar la propiedad a lo que nos referimos es, si tenemos tres números naturales, no importa cuál sea su valor, el enunciado que le siga, se va a cumplir, sin importar el valor numérico de los números que utilizamos.

1.3.1. Propiedad Conmutativa de la suma o adición

Sean a, b números naturales entonces:

$$a + b \quad = \quad b + a$$

Es decir el orden de los sumandos no altera la suma.

Ejemplo 1:

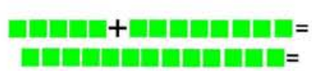
$$5 + 8 \quad = \quad 8 + 5$$

Al hacer la operación.

$$\begin{array}{cc} 5+8 & = \\ \uparrow & \\ \text{suma} & \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{array}{cc} 5+8 & = \\ \downarrow & \\ 13 & = \end{array}$$



Al comparar el otro lado de la igualdad:

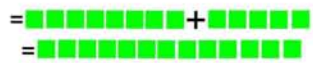
$$5 + 8 \quad = \quad 8 + 5$$

Tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{c} =8+5 \\ \uparrow \\ \text{suma} \end{array}$$

Al hacer la suma:

$$\begin{array}{c} =8+5 \\ \downarrow \\ =13 \end{array}$$



Con esto puedes ver que no importa en qué orden se encuentren los números el resultado es siempre el mismo al sumarlos.

1.3.2. Propiedad Conmutativa de la multiplicación

Sean a, b números naturales entonces:

$$a \cdot b \quad = \quad b \cdot a$$

Es decir el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo 1:

$$5 \cdot 8 \quad = \quad 8 \cdot 5$$

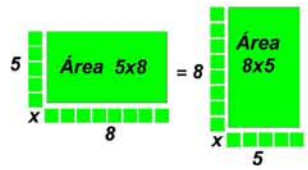
Al llevar a cabo la operación

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 8 & = & 8 \cdot 5 \\ \uparrow & = & \uparrow \\ \text{multiplicación} & & \text{multiplicación} \end{array}$$

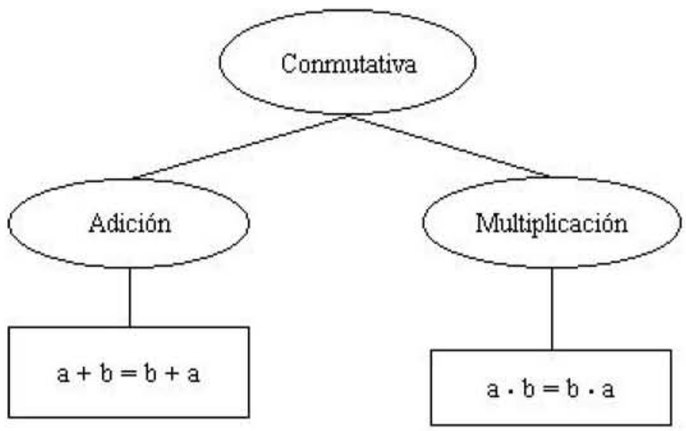
Tenemos que:

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 8 & = & 8 \cdot 5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 40 & = & 40 \end{array}$$

Para ver con los cuadritos el funcionamiento de esta propiedad, tenemos que el area que resulta de multiplicar 5 por 8, es la misma que multiplicar 8 por 5.



Propiedad Conmutativa



1.3.3. Propiedad Asociativa de la Adición.

Si a, b y c son números naturales entonces:

$$(a+b)+c \quad = \quad a+(b+c)$$

Veamos ahora con un ejemplo numérico qué es lo que dice la propiedad y expliquémoslo con nuestras propias palabras.

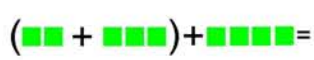
Ejemplo 1:

$$(2+3)+4 \quad = \quad 2+(3+4)$$

Primero hacemos las operaciones de adentro de los paréntesis y no cambiamos a los números de lugar.

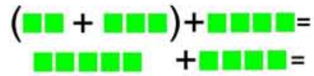
La propiedad se llama asociativa porque asocias a los números en parejas, la primera pareja está señalada en el primer paréntesis y el signo que está en medio de ellos señala la operación que se debe realizar con esos números en este caso es la suma.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma}}}{(2+3)} \quad + \quad 4 =$$



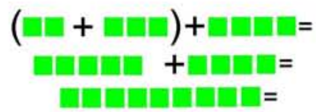
Después de realizar la suma, se obtiene como resultado la siguiente operación: la suma de una pareja de números.

$$\begin{array}{ccc} (2+3) & + & 4= \\ \downarrow & & \\ 5 & + & 4= \end{array}$$



Al hacer la suma obtenemos el resultado.

$$\begin{array}{ccc} (2+3) & + & 4= \\ 5 & + & 4= \\ & \downarrow & \\ & 9 & = \end{array}$$



La misma situación ocurre del otro lado del símbolo igual, pero en este caso la pareja asociada está formada por el segundo y tercer término que se encuentran dentro de los paréntesis.

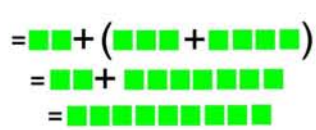
$$\begin{array}{ccc} =2 & + & (3+4) \\ & & \uparrow \\ & & \text{suma} \end{array}$$

Realizamos entonces la siguiente operación que consiste en una nueva pareja de números asociados por la suma.

$$\begin{array}{ccc} =2 & + & (3+4) \\ & & \downarrow \\ =2 & + & 7 \end{array}$$

Al hacer la suma obtenemos el resultado.

$$\begin{array}{ccc} =2 & + & (3+4) \\ =2 & + & 7 \\ & \downarrow & \\ = & 9 & \end{array}$$



Es exactamente el mismo resultado que se obtenía en la operación indicada en un principio.

Al representar las operaciones al mismo tiempo para poder comparar tenemos:

$$\begin{array}{cccc} (2+3) & +\,4 & =2 & +\,(3+4) \\ \downarrow & & & \downarrow \\ 5 & +\,4 & =2 & +\,7 \end{array}$$

Al hacer las últimas sumas:

$$\begin{array}{cccc} (2+3) & +\,4 & =2 & +\,(3+4) \\ 5 & +\,4 & =2 & +\,7 \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & 9 & =9 & \end{array}$$

En esta propiedad podemos ver que no importa si sumo el primero con el segundo número y a su resultado le sumo el tercero, o si a la suma del segundo y tercer número le sumo el primer número, el resultado es el mismo en ambos casos.

$$(2+3)+4 \quad = \quad 2+(3+4)$$

Escribimos el resultado hacia abajo para verificar las operaciones, finalmente tenemos que:

$$\begin{aligned} (2+3)+4 &= 2+(3+4) \\ 5+4 &= 2+7 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

Fíjate muy bien que no cambiamos ningún número de sitio.

1.3.4. Propiedad asociativa de la multiplicación

Si a, b y c son números naturales entonces:

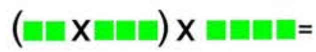
$$(a \cdot b) \cdot c \quad = \quad a \cdot (b \cdot c)$$

Ejemplo 1:

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 \quad = \quad 2 \cdot (3 \cdot 4)$$

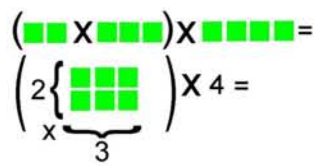
Tomando el lado izquierdo de la igualdad y desarrollandolo tenemos.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicación}}}{(2\cdot 3)} \qquad \cdot\, 4 \quad =$$



Primero hacemos la operación de adentro de los paréntesis y no cambiamos a los números de lugar.

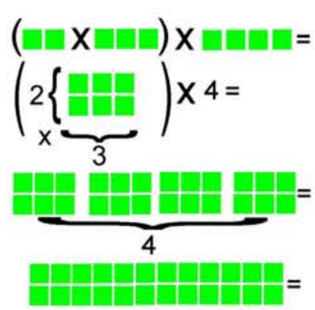
$$\begin{array}{ccc} (2\cdot 3) & \cdot\, 4 & = \\ \downarrow & & \\ (6) & \cdot\, 4 & = \end{array}$$



Al hacer el producto de $(6)\cdot 4$ tenemos:

$$\begin{array}{ccc} (2\cdot 3) & \cdot\, 4 & = \\ (6) & \cdot\, 4 & = \\ & \downarrow & \\ & 24 & = \end{array}$$

El resultado es 24.

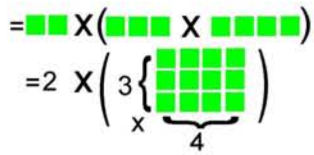


La misma situación ocurre del otro lado del símbolo igual, pero en este caso la pareja asociada está formada por el segundo y tercer término que se encuentran dentro de los paréntesis.

$$= 2 \quad \cdot\, (3\cdot 4)$$

Al plantear el producto señalado tenemos

$$\begin{array}{c} = 2 \quad \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplicación}}}{(3 \cdot 4)} \end{array}$$

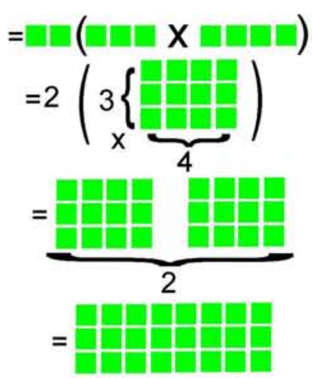


Primero hacemos la operación de adentro de los paréntesis y no cambiamos a los números de lugar.

$$\begin{array}{cc} = 2 & \cdot (3 \cdot 4) \\ & \downarrow \\ = 2 & \cdot (12) \end{array}$$

Al hacer el producto de $2 \cdot (12)$ tenemos:

$$\begin{array}{cc} = 2 & \cdot (3 \cdot 4) \\ = 2 & \cdot (12) \\ & \downarrow \\ = & 24 \end{array}$$



Que es exactamente el mismo resultado que se obtenía en la operación indicada en un principio. Al representar las operaciones al mismo tiempo para poder compararlas tenemos:

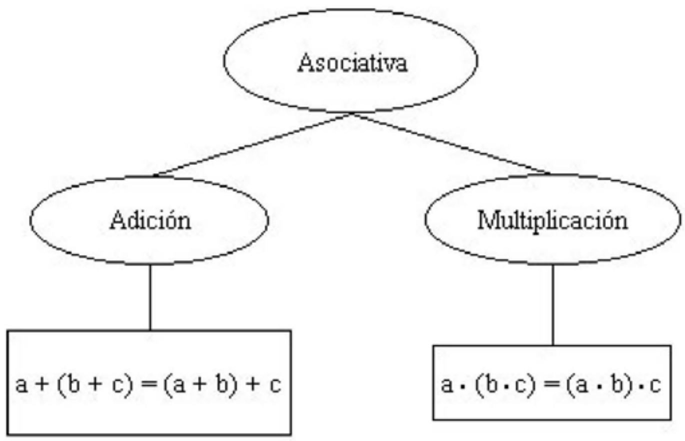
$$\begin{array}{ccccc} (2 \cdot 3) & \cdot 4 & = 2 & \cdot (3 \cdot 4) \\ \downarrow & & & \downarrow \\ (6) & \cdot 4 & = 2 & \cdot (12) \end{array}$$

Al hacer los productos

$$\begin{array}{cccc} (2\cdot 3) & \cdot\, 4 & = 2 & \cdot\,(3\cdot 4) \\ (6) & \cdot\, 4 & = 2 & \cdot\,(12) \\ & \downarrow & \downarrow & \\ & 24 & = 24 & \end{array}$$

Podemos ver que no importa si multiplico el primero con el segundo números y al resultado lo multiplicamos por el tercero, o si multiplico el segundo número y el tercero y a ese resultado lo multiplicamos por el primero, el resultado siempre es el mismo.

Propiedad Asociativa



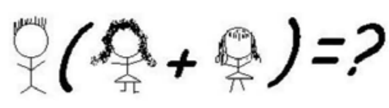
1.3.5. Propiedad Distributiva

Si a, b y c son números naturales entonces:

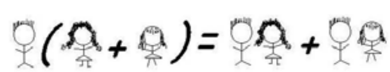
$$a\,(b + c) \quad = \quad a \cdot b + a \cdot c$$

*1.4

Para ejemplificar qué sucede al aplicar esta propiedad, tomaremos como modelo, lo que ocurre en una escuela cuando un niño tiene 2 novias.



Cuando un niño tiene dos novias, una en la escuela, y la otra cerca de su casa, el niño tendría que "repartirse" (es decir, repartir su tiempo) o distribuir su tiempo, por así decirlo en la mañana con su novia de la escuela y en la tarde con su novia de la casa.



La propiedad distributiva es: Si a, b y c son números naturales entonces:

$$a \cdot (b + c) \quad = \quad a \cdot b + a \cdot c$$

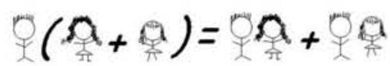
Podemos decir que se multiplica el de afuera por cada uno de los números que se encuentran dentro del paréntesis.

Ejemplo 1:

En este caso veremos el ejemplo de:

$$2 \cdot (3 + 4) \quad = \quad 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

Si tomamos en cuenta el modelo del niño podemos aplicar la propiedad al trabajar con cada uno de los lados de la igualdad.



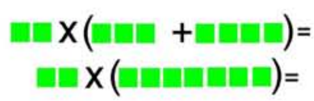
$$2 \cdot (3 + 4) \quad = \quad 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$$

Al hacer la parte izquierda de la igualdad tenemos que sumar 3 con 4.

$$2 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma}}}{\cdot(3{+}4)} \quad =$$

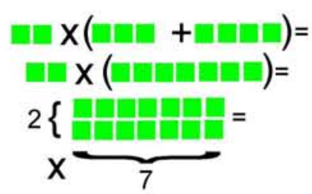
Hacemos la suma y tenemos:

$$\begin{array}{lcl} 2 & \cdot(3+4) & = \\ & \downarrow & \\ 2 & \cdot(7) & = \end{array}$$



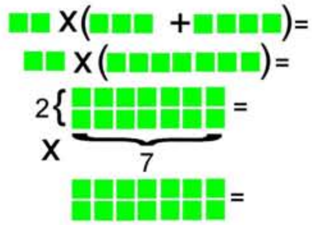
Ahora multiplicamos:

$$\begin{array}{lcl} 2 & \cdot(3+4) & = \\ 2 & \cdot(7) & = \\ & \uparrow & \\ & \text{multiplicación} & \end{array}$$



Que da como resultado:

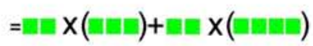
$$\begin{array}{ccc} 2 & \cdot(3+4) & = \\ 2 & \cdot(7) & = \\ & \downarrow & \\ & 14 & = \end{array}$$



Lo que quiere decir que si hacemos la parte derecha de la igualdad debe de dar como resultado 14.

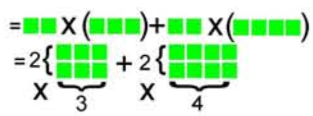
Al analizar el otro lado de la igualdad tenemos:

$$= \quad 2\cdot 3 \quad + 2{\cdot}4$$



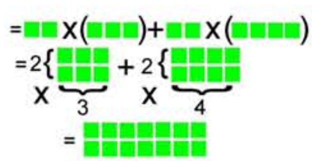
Hacemos las multiplicaciones señaladas.

$$\begin{array}{ccc} = & 2\cdot 3 & + 2{\cdot}4 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{multiplicación} & \text{multiplicación} \end{array}$$



Con lo que obtenemos la siguiente suma.

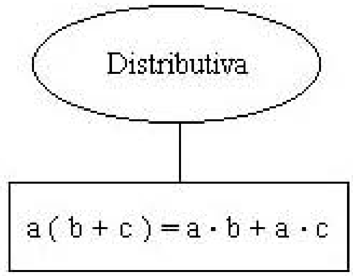
$$\begin{array}{ccc} = & 2\cdot 3 & + 2\cdot 4 \\ = & 6 & + 8 \\ & \uparrow & \\ & \text{suma} & \end{array}$$



Se obtiene el mismo resultado en ambos casos.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \cdot(3+4) & = & 2\cdot 3 & + 2\cdot 4 \\ 2 & \cdot(7) & = & 6 & + 8 \\ & & & \downarrow & \\ & 14 & = & 14 & \end{array}$$

Propiedad Distributiva



1.3.6. Propiedad del elemento neutro de la adición

En la suma que también se le conoce como adición, cuando se le suma cero a un número, no se modifica el número, es decir:

El número 0 es el elemento neutro de la adición.

$a + \mathbf{0} = a$ para cualquier número a.

Ejemplo 1:

$5 + \mathbf{0} = 5$

Cuando a un número le sumamos *cero* da como resultado el mismo número.

Al 0 (cero) también se le conoce como **Neutro Aditivo**.

1.3.7. Propiedad del elemento neutro de la multiplicación

El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación.

Porque $a\cdot$ $\mathbf{1}$= a para cualquier número a

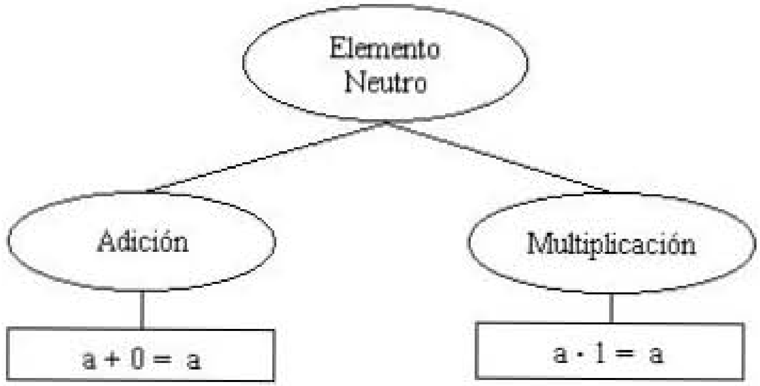
Ejemplo 1:

$5 \cdot \mathbf{1} = 5$

Cuando a un número lo multiplicamos por *uno* da como resultado el mismo número.

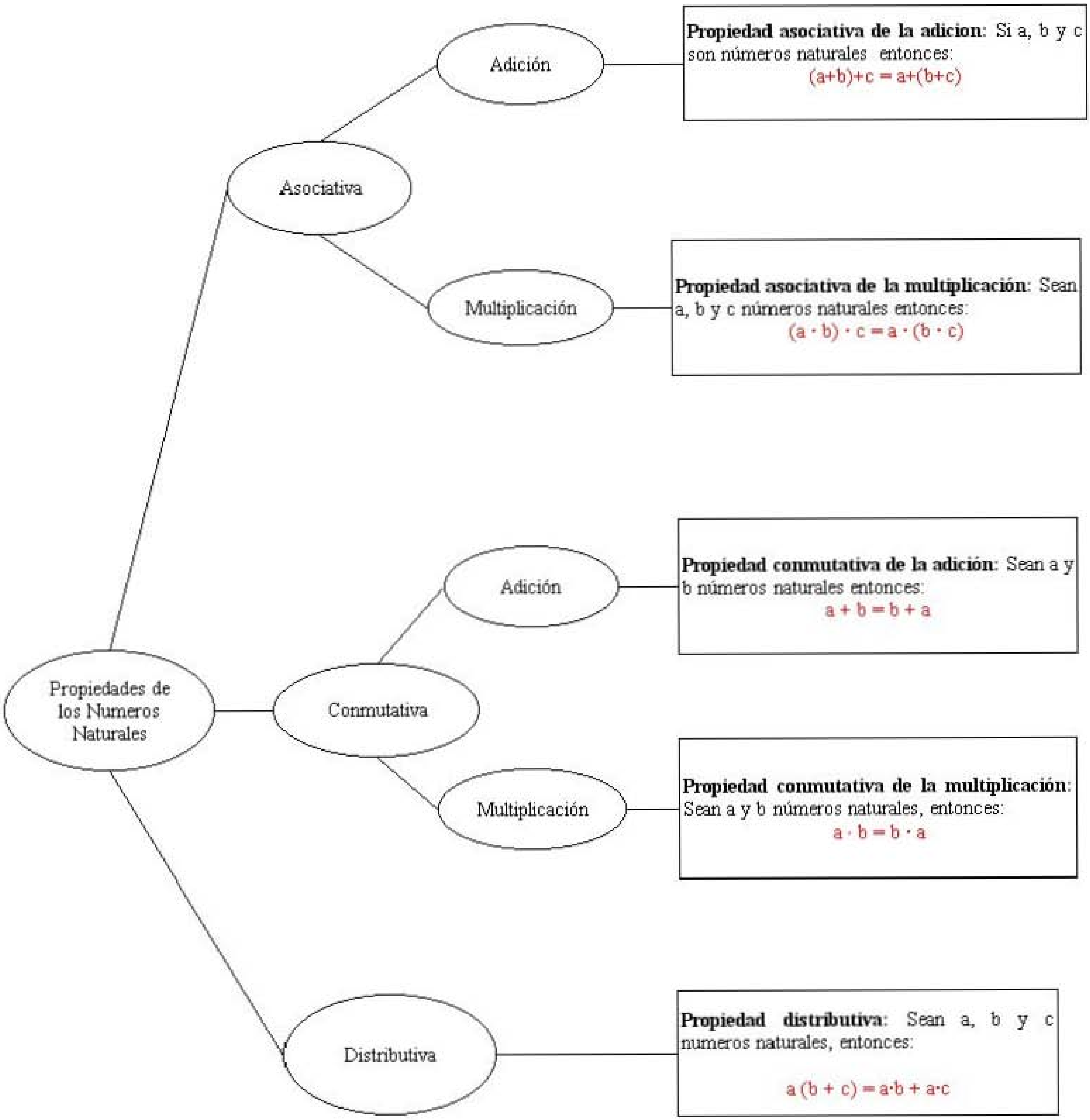
Al 1 (uno) también se le conoce como **Neutro Multiplicativo**.

Elemento Neutro



Recordatorio*. 1.4

Para recordar mejor estas propiedades podemos representarlas en el siguiente diagrama y de esta forma consultarlas de una manera más práctica.



En una tabla, se resumen de la siguiente forma:

Propiedad	Adición	Multiplicación
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$

Propiedad	Adición y Multiplicación
Distributiva	a·(b + c) = a · b + a· c

1.4. Referencias

Sugerencia al asesor:

Para empezar de una manera amena la primera lección, se recomienda ejemplificar históricamente cómo han evolucionado los números a través del tiempo, solamente como breviario cultural.

Experiencia en clase:

Como la mayoría de los alumnos de los círculos de estudio tenían hijos, aproveché que dentro de cada grupo había al menos un alumno que tenía un hijo entre 2 y 4 años de edad y le preguntaba ¿cómo contaba su hijo? , por ejemplo frijolitos. Esto permitió que los alumnos intercambiaran opiniones y a su vez señalaran los errores que los niños cometían al contar.

Utilidad del recordatorio:

El Recordatorio *es un cuadro sinóptico que es muy útil para los alumnos, ya que se puede sacar copia de estas paginas y tenerla dentro del cuaderno de tal forma que si se tiene alguna duda sobre un tema en especial se puede consultar rápidamente.*

Sugerencia al profesor:

El modelo del niño que tiene dos novias es muy útil para recordar la propiedad distributiva y utilizarla como base para que el alumno recuerde mejor la importancia del orden en el producto de polinomios.

Capítulo 2

Lección 2

2.1. Múltiplos

En la secundaria 148 la dirección compró 1000 casilleros mismos que fueron otorgados a igual número de estudiantes, todos con su respectiva llave. Pero los casilleros tenían un defecto de fábrica, que las llaves podían abrir uno o más casilleros como se explica a continuación.

Por ejemplo:

Con la llave 1, al contar de uno en uno, abres todos los casilleros.

Con la llave 2, al contar de dos en dos, se abrirían los siguientes casilleros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	√		√		√		√		√		√		√

Marcamos con una palomita los casilleros que se pueden abrir con la llave 2.

Con la llave 3 pasa lo mismo cuentas de 3 en 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
		√			√			√			√		

Y así con las demás llaves. Ahora que ya más o menos sabes cómo abrir diferentes casilleros con una misma llave, es momento de contarte el chisme de lo que pasó en el recreo ese día que entregaron los casilleros.

Cuando sonó la campana del recreo, los niños salieron corriendo de los salones y fueron directo a los casilleros. Entre gritos y risas gritaban el número de llave 1, 2, 3 ,4 así el dueño de ésta, pasaba y modificaba los casilleros que le tocaran, es decir abría o cerraba los casilleros sólo si su llave podía abrirlos. El casillero 1000 está enfrente de la dirección por eso el director sólo vio a los que modificaron este casillero; entonces esperó a que el recreo terminara para ir a los salones a buscar a los que vio para castigarlos.

Yo podría saber a quienes castigó, con sólo saber el número de su llave, pero es mejor si me lo dices tú. Recuerda que sólo vio a los que modificaron el casillero 1000.

Pregunta: ¿Qué niños tienen llaves que pueden abrir el casillero 1000?

.

Para saber cómo vamos a encontrar la solución, primero tomamos un caso con un número mas pequeño, por ejemplo una escuela con 17 niños.

Veamos cómo están los casilleros a lo largo del pasillo, todos cerrados y con su número de casillero en la puerta.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

.

Para diferenciar mejor los casilleros si queremos representar un casillero cerrado se verá de la siguiente forma:

C

Casillero cerrado.

Si tiene una C, el casillero está cerrado.

Para representar un casillero abierto, representaremos de la siguiente forma:

A

Casillero abierto.

Tratemos de ver lo que sucede con los casilleros cuando los niños pasan de uno en uno. Primero todos los casilleros estaban cerrados. Pero cuando pasa el niño 1, y cuenta de 1 en 1, abre de uno en uno y quedan todos abiertos.

Representaremos en una tabla lo que ocurre en esta escuela. Si el casillero está abierto escribimos A y si está cerrado, escribimos C.

En un principio la tabla sería la siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Cuando pasa el niño 1 con la llave 1. Al contar de 1 en 1, abre todos los casilleros que puede abrir.

Indicamos con una flecha $\hookrightarrow$ cómo cuenta el niño a los casilleros, en este caso cuenta de uno en uno.

La tabla que representa lo que pasa con los casilleros es:

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

$\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$

La flecha $\hookrightarrow$ representa qué casillero se abre, es decir primero abrió el casillero 1, después el 2, a continuación el 3, y así sucesivamente, abrió todos los casilleros.

Cuando pasa el niño 2, después de que pasó el niño uno, se ve de la siguiente forma.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	

$\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$

El niño 2 cuenta de 2 en 2, por eso la flecha está en el 2, 4, 6,...; porque el niño 2 cambia el estado de los casilleros que puede modificar.

Si el casillero está abierto, lo cierra; si está cerrado, lo abre; si el niño no modifica el casillero aparecerá vacío; para ir identificando por renglón qué casilleros modifica cada niño.

Cuando pasa el niño 2, cierra el casillero 2, el 4, el 8, etc. Y no toca, ni le hace nada a los demás casilleros, por esa razón dejamos en blanco esos espacios en la tabla porque el niño no los modificó, estos quedaron abiertos como estaban.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	

$\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$

Si el niño no modifica los casilleros no escribimos nada, ya que no ha cambiado de como estaba, y de esta manera es posible ver de una forma más clara exactamente qué casilleros modificó cada niño ya que aparecen indicados en cada renglón.

Cuando pasa el niño 3, modifica cada tres.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		

$\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$

Como el niño 3 cuenta de tres en tres sólo modifica a los casilleros 3, 6, 9, 12,... por eso la flecha $\hookrightarrow$ salta del 3 al 6, después al 9 y al 12, etc. El casillero 3 lo cierra, el casillero 6 lo abre, el casillero 9 lo cierra, etc.

Hasta el momento en que han pasado solamente tres niños esta tabla representa que: El casillero 1 está abierto, el 2 está cerrado, el 3 cerrado, el 4 cerrado, el 5 abierto, el 6 abierto, el 7 abierto, el 8 cerrado, el 9 cerrado, el 10 cerrado, el 11 abierto, el 12 abierto, el 13 abierto y el 14 cerrado, el 15 cerrado, el 16 cerrado y el 17 abierto, como lo muestra la tabla anterior.

Cuando pasa el niño 4, cuenta de 4 en 4.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
				$\hookrightarrow$				$\hookrightarrow$				$\hookrightarrow$				$\hookrightarrow$	

Se modificaron los casilleros 4, 8, 12, 16,... por eso están indicados con $\hookrightarrow$.

Cuando pasa el niño 5, cuenta de 5 en 5 y se vería de la siguiente manera, después que han pasado los niños 1, 2, 3, 4 y 5.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
5					C					A					A		
					$\hookrightarrow$					$\hookrightarrow$					$\hookrightarrow$		


Actividad: Completa la tabla siguiente con la información de los demás niños.

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
5					C					A					A		
6																	
7																	
8																	
9																	
10																	
11																	
12																	
13																	

Ejemplo 1:

¿Qué casilleros abrió o cerró el niño 2? Observa la información en la tabla anterior.

Son el 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, ...; si tenemos más casilleros.

Mejor conocidos como: Números ——————- .

Ejemplo 2:

¿Qué casilleros abrió o cerró el niño 5? Observa la información en la tabla anterior.

Son el 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55,....

¿Qué casilleros abrió ó cerró el niño 16?

Coloca los números que faltan en la lista de los que modifica el niño 16.

Son el 16, 32,—— , 64,—— , 96,——— ...

En la lista 12, 24, 36, 48, 60, 72,... ¿Cómo sabes qué número sigue?

Y en la lista 5, 10, 15, 20, 25, ... ¿Qué criterio usas para saber quién sigue?

Observa la tabla siguiente:

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
5					C					A					A		

En la lista de 2, 4, 6, 8,...; podríamos decir que vamos de 2 en 2, al tomar como primer número al 2, a estos números los conocemos como los números pares.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, ...

Es decir sumar 2 al número anterior, por ejemplo el primero que es 2, si le sumamos 2, obtenemos al 4, si al 4 le sumamos 2 obtenemos al 6, si al 6 le sumamos 2, tenemos como resultado 8, si repetimos esta operación una y otra vez, obtenemos los números de la lista.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, ...

En la lista del niño 5 se cuenta de 5 en 5, al tomar como primer número al 5.

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,...

Por ejemplo si te preguntaras ahora. ¿Qué número ocupa el tercer lugar en la lista de los casilleros que abre o cierra el niño 5? Podrías contestar lo siguiente, van de 5 en 5, si empiezo con el 5, el segundo es el 10.

Entonces el tercero será 5+5+5=15, es decir, que 5+5+5 es sumar tres veces el cinco.

$$\begin{array}{ccc} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 5+5 & 5+5+5 \end{array}$$

Sumar $5 + 5 + 5$ es lo mismo que 3 x 5 ambas operaciones dan como resultado 15.

En la lista 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ...

El 5 se suma TRES veces para obtener el 15, que es el TERCERO de los números en la lista de los casilleros que modifica el niño 5 y también el 15 es TRES por cinco.

Entonces cuál es la respuesta a ¿cuántas veces cabe el 5 en el 15?. Es 3, ya que el 5 cabe 3 veces en 15.

La lista de los casilleros que abre o cierra el niño 5 puede resultar de multiplicar el número que tomo de base para contar, en este caso el 5, por el número de sitio que ocupará en la lista.

Por ejemplo si necesito el que ocupará el lugar número 8 en la lista, tengo que multiplicar 5 por 8, que es igual a 40, se concluye que el octavo número en la lista sería el 40.

Es decir, si necesito la lista en orden, multiplico al 5 por los números naturales y resultaría la siguiente lista:

$$\begin{array}{rcr} 5 \text{ x } 1 & = & 5 \\ 5 \text{ x } 2 & = & 10 \\ 5 \text{ x } 3 & = & 15 \\ 5 \text{ x } 4 & = & 20 \\ 5 \text{ x } 5 & = & 25 \\ \vdots & & \end{array}$$

o bien:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & 40, & 45 & \ldots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 5 \text{ por} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \end{array}$$

Podemos observar que el número de lugar que ocupan es el número por el que hay que multiplicar al 5, para obtener el número al que le corresponde ese sitio.

Los números que resultan de multiplicar a un número base por todos los números naturales son los Múltiplos de ese número base.

Definición 1 *Los **múltiplos** de un número natural a son aquellos que se obtienen al multiplicarlo por cualquier otro número natural.*[1]

Ejemplos:

Múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30,32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54...

Múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125...

Múltiplos de 25: 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, 325, 350, 375, 400, 425, 450,...

Podemos crear una tabla de Múltiplos como la siguiente:

Tabla de Múltiplos

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255

[1] Álvarez, P. Briseño, L. Palmas, O. Verdugo, J. Descubre y Aprende, Matemáticas 2, Pearson Educación, México 2000, Págs.52,53,55,56,59,61.

Observa que la tabla puede crecer tanto en renglones como en columnas, la lista de múltiplos puede crecer y crecer.

Por ejemplo ahora responde las siguientes preguntas para reafirmar tus conocimientos acerca de los múltiplos de un número.

¿Cuáles son los múltiplos de 9?, ¿Cuáles son los múltiplos de 14?, ¿Cuáles son los múltiplos de 27?

En la escuelita del cuento que se menciona al principio: para resolver el problema necesitamos saber ¿qué niño modifica qué casilleros? Podemos concluir de lo que se ha analizado en esta sección que los múltiplos del número de niño, son los números de las puertas que ese niño modifico, (abrió o cerró).

Si quieres saber qué puertas modificó determinado niño, sólo tendrías que calcular los múltiplos del número de niño y obtendrías la respuesta.

De esta manera podríamos saber qué casilleros modificó un niño en específico, por ejemplo, si queremos saber que casilleros modificó el niño 53, sólo necesitamos escribir los múltiplos de 53.

Calculándolos tenemos:

53, 106, 159, 212, 265, 318, 371, 424, 477, 530, 583, 636, 689, 742, 795, 848, 901, 954.

Recuerda que la lista de múltiplos continua en aumento, en este caso podemos ver en la lista que, por ejemplo, el niño 53 no modificó el casillero 1000 porque del casillero 954 se saltaría hasta el casillero 1007 si lo hubiese, es decir, en la escuela con 1000 casilleros, el último casillero que modificó el niño 53 fue el 954, o sea que a él no lo vio el director, por eso él no estaría castigado.

Tratemos de averiguar si castigaron a algunos niños, si el número 1000 aparece en su lista de múltiplos, entonces ese niño está castigado.

Actividad: Comprueba si los siguientes niños están castigados. Si sí lo están ¿por qué sí? Si no ¿Por qué no?

a)67

b)125

c)40

d)365

Conclusión: Podemos resumir el concepto de múltiplo de la siguiente forma:

2.2. Divisores

No es lo mismo preguntar ¿qué casilleros modificó el niño 6?; que preguntar, ¿qué niños modificaron al casillero 6?

Para responder la pregunta, ¿qué casilleros modificó el niño 6? tendríamos que escribir la lista de los múltiplos de 6, ya que el niño 6 modifica, cada 6 casilleros, es decir los múltiplos del 6.

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...

Si queremos responder a la pregunta, ¿qué niños modificaron el casillero 6?, necesitamos revisar la tabla que obtuvimos al escribir cómo pasan los niños y las puertas que modifican, es decir:

Tabla de niños modificando casilleros

Casillero/Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
5					C					A					A		
6						C						A					
7							C							A			
8								C								C	
9									A								
10										C							
11											C						
12												C					
13													C				
14														C			
15															C		
16																A	
17																	C

El número de casillero que aparece en el primer renglón (horizontal), y los niños que lo modificaron acomodados en línea vertical, al encontrarse en su respectiva coordenada, realizan lo que podríamos decir, es la misma acción, ya sea la de abrir o cerrar el casillero.

Entonces, si necesito saber qué niños modificaron el casillero 6 (horizontal), leo la columna donde está el 6 (vertical) y la respuesta es: los niños 1, 2, 3, 6 modificaron el casillero 6.

Niño	1	2	3	4	5	6 ↓	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				C				A	
5					C					A					A		
6						C						A					
7							C							A			
8								C								C	
9									A								
10										C							
11											C						
12												C					
13													C				
14														C			
15															C		
16																A	
15																	C

Observa que después del niño 6 ya ningún otro niño modificó al casillero 6.

Si escribimos las listas de múltiplos podríamos comprobar en cuáles listas de múltiplos está el 6.

Múltiplos de 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...
↑ (6)

Múltiplos de 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...
↑ (6)

Múltiplos de 3:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...
↑ (6)

Múltiplos de 4:
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, ...

No hay un número natural que al multiplicarlo por 4 de como resultado 6 por eso en la lista de múltiplos del 4 no aparece el 6.

Lo mismo pasa con los múltiplos de 5 que son 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...: no aparece el 6.

Múltiplos de 6:
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...
↑

Múltiplos de 7:
7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, ...

No hay un número natural que al multiplicarlo por 7 de como resultado 6.

Al observar la tabla es posible notar que al casillero 6 solamente lo modificaron niños cuyo número de llave era menor o igual al número del casillero.

Al casillero 6 lo modifican los niños 1, 2, 3, 6 solamente.

¿Qué niños modificaron el casillero 12?

Al observar la tabla o buscar en la lista de múltiplos tenemos que buscar sólo en los números menores o iguales que 12.

La repuesta sería 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

¿Cómo saber que no falta ninguno?

Probemos un truco con el ejemplo del casillero número 12. Para que la lista de números tenga un orden los acomodamos de menor a mayor.

Si multiplicamos el primero y el último número de la lista tenemos que:

1 x 12 = 12

Al multiplicar el segundo con el penúltimo:

2 x 6 = 12

Al multiplicar el tercero con el cuarto:

3 x 4 = 12

Marca las parejas que señalamos y observa que todas ellas dan 12 al multiplicarlas.

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 12 \\ \uparrow & & & & & \uparrow \end{array} \quad 1 \text{ x } 12 = 12$$

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 12 \\ & \uparrow & & & \uparrow & \end{array} \quad 2 \text{ x } 6 = 12$$

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 6, & 12 \\ & & \uparrow & \uparrow & & \end{array}$$
$$3 \text{ x } 4 = 12$$

Al multiplicar los números de dos en dos los resultados son iguales al número de casillero.

Acomodar los números de menor a mayor nos ayuda a saber si nos falta algún niño que haya tocado el casillero; ya que por ejemplo, en este caso el 1 se multiplica por 12, a continuación se multiplica el 2, que al multiplicarlo por 6 también da 12, del 2 sigue el 3, que al multiplicar 3 por 4 resulta 12, y en la lista seguiría el 4, que ya lo multiplicamos por 3, es decir, ahí terminan las parejas de números que dan como resultado 12.

Para evitar que nos falten números de los niños que tocaron el casillero tenemos que probarlos en orden, es decir:

Por ejemplo el casillero 24.

Para iniciar la lista necesitamos al uno, por eso necesitamos un número que multiplicado por el uno de como resultado 24, es decir:

1 x ? = 24

1 x 24 = 24 nos daría 2 números en la lista al 1 y al 24.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad\qquad & 24 \\ \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

El 1 y el 24 son el primero y el último de la lista de los niños que modificaron el casillero 24, los demás números deben estar entre estos dos números.

Después del 1 va el 2 entonces la pregunta es 2 x ? = 24

¿Qué número multiplicado por 2 nos da como resultado 24?

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \qquad\qquad ? & 24 \\ & \uparrow & \qquad\qquad \uparrow & \end{array}$$

2 x 12 = 24

En este caso 2 y 12 son el segundo y el penúltimo de la lista.

En la lista ya tendrías 1, 2, 12, 24

Al agregar otro número seguiría el tres:

3 x ? = 24

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & ? & 12 & 24 \\ & & \uparrow & \uparrow & & \end{array}$$

¿Por qué número debemos multiplicar el 3 para obtener 24?

3 x 8 = 24

En este caso el 3 sería el tercero de la lista y el 8 el antepenúltimo de la lista.

En la lista ya tendrías 1, 2, 3, 8, 12, 24

Al buscar los demás números, ahora se agrega el 4.

4 x ? = 24

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & ? & 8 & 12 & 24 \\ & & & \uparrow & \uparrow & & & \end{array}$$

4x6=24

El 4 es el cuarto número de la lista y el 6 es el anterior al antepenúltimo.

La lista de los niños que tocan el casillero 24 quedaría hasta el momento:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Entre 4 y 6 sólo falta el 5 pero no hay un número natural que cumpla que multiplicado por 5 de como resultado el 24, es decir, no hay un número natural que cumpla la igualdad 5 x ? = 24, por esa razón no agregamos al 5.

Como al multiplicar 4 x 6 es lo mismo que multiplicar 6 x 4, ya que:
4 x 6 = 24 y 6 x 4 = 24
Por esta razón ya no podemos aumentar más números a la lista, por lo tanto, decimos que la lista completa de los niños que modifican el casillero 24 es: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Esta lista está formada por números menores o iguales a 24, y además, podemos dividir al 24 exactamente entre cada uno de los números de la lista.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 1\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 2\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 3\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 4\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 6\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 8\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 12\overline{)24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 24\overline{)24} \\ 0 \end{array}$$

Al dividir 24 entre alguno de los números de la lista de los niños que tocaron el casillero 24 siempre el residuo es cero, es decir la división es exacta y además el cociente es otro número de la lista.

Cuando el residuo es diferente de cero la división no es exacta.

En este ejemplo los números de la lista son los únicos que dividen exactamente al número 24.

A estos números que dividen exactamente a un número se les conoce como Divisores del número.

Definición 1 ***S****i un número divide exactamente a otro número, entonces el primer número es divisor del segundo.* [2]

Ejemplos:

Divisores de 15: 1, 3, 5 y 15.

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Podemos dar una lista de los divisores de los números para descubrir el comportamiento de los divisores de un número.

Número	Divisores positivos del número.
1	1
2	1 y 2
3	1 y 3
4	1,2 y 4
5	1 y 5
6	1,2,3 y 6
7	1 y 7
8	1,2,4 y 8
9	1,3 y 9
10	1,2,5 y 10
11	1 y 11
12	1,2,3,4,6 y 12
13	1 y 13
14	1,2,7 y 14
⋮	

Compara la lista de los divisores y la tabla de los casilleros para descubrir que relación tienen:

[2] Álvarez, P. Briseño, L. Palmas, O. Verdugo, J. Descubre y Aprende, Matemáticas 2, Pearson Educación, México 2000, Págs.52,53,55,56,59,61.

Tabla de niños modificando casilleros

Niño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2		C		C		C		C		C		C		C		C	
3			C			A			C			A			C		
4				A				A				A				A	
5					C					C					C		
6						C						C					
7							C							A			
8								C								A	
9									C								
10										C							
11											C						
12												C					
13													C				
14														C			
15															C		
16																C	
17																	C

Observa que los números de niños que modifican un determinado casillero, coinciden con los divisores del número de casillero.

Ejemplo: Si el casillero es el 35, los niños que lo modificaron son los números que pueden dividir al 35, es decir el 1, 5, 7, 35. Por lo tanto, los niños que modifican al casillero 35 son los niños 1, 5, 7, 35.

Si el casillero tuviera cualquier número, entonces para saber qué niños modifican ese casillero sólo tendríamos que encontrar los divisores de ese número.

Esto lo podemos generalizar, es decir, describir en un enunciado alguna característica que se cumpla en este problema, al representar a los números con letras, como en el caso de las propiedades de los números naturales del capítulo anterior.

En este caso utilizamos la letra "n" para representar a cualquier número, diríamos lo siguiente:

Si el casillero tiene el número "n" entonces los niños que lo modifican son los divisores de n.

Podemos contestar ahora la pregunta inicial:

¿Qué niños tienen llaves que pueden abrir el casillero 1000?, si en la escuela hay 1000 niños y 1000 casilleros.

Sabemos que el casillero es el 1000 así que necesitamos encontrar los divisores de 1000.

Al calcularlos tenemos:

1 x ? = 1000

1 x 1000 = 1000 nos daría 2 números en la lista al 1 y al 1000, los cuales son el primero y el último de los divisores del 1000.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \qquad\qquad & 1000 \\ \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

Para encontrar el siguiente divisor tomamos el número 2, para encontrar: ¿Qué número resulta de dividir 1000 entre 2?

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \qquad\qquad & ? & 1000 \\ & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

El número que estamos buscando, se obtiene al calcular la división de 1000 entre 2.

$$\begin{array}{r} 500 \\ 2\overline{\smash{)}1000} \\ \text{residuo} \rightarrow 0 \end{array}$$

El 2 y el 500 son el segundo y el penúltimo divisores de la lista, ya tendrías 1, 2, 500, 1000

Al agregar otro número seguiría el tres, pero no es divisor de 1000, porque la división no da como residuo cero, así que seguimos con el 4:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 4 & \qquad\qquad & ? & 500 & 1000 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

¿Que número se obtiene de dividir 1000 entre 4?

$$\begin{array}{r} 250 \\ 4\overline{\smash{)}1000} \\ 0 \end{array}$$

El 4 y el 250 son el tercero y el antepenúltimo divisores de la lista.

En la lista ya tendrías 1, 2, 4, 250, 500, 1000.

Al buscar los demás números, tomamos al 5.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & \qquad\qquad & ? & 250 & 500 & 1000 \\ & & & \uparrow & & \uparrow & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ 5\overline{\smash{)}1000} \\ 0 \end{array}$$

En la lista ya tendrías 1, 2, 4, 5, 200, 250, 500, 1000

Al tomar otro número seguiría el 6, pero no es divisor de 1000, porque la división no es exacta, tampoco es divisor el 7, así que seguimos con el 8:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & \quad & \quad & ? & 200 & 250 & 500 & 1000 \\ & & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 8\overline{)1000} \\ 0 \end{array}$$

En la lista ya tendrías 1, 2, 4, 5, 8, 125, 200, 250, 500, 1000

Al buscar los demás números, tomamos al 9 no es divisor de 1000, porque el residuo no es cero, así que tomamos al 10.

$$\begin{array}{r} 111 \\ 9\overline{)1000} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & \quad & \quad & ? & 125 & 200 & 250 & 500 & 1000 \\ & & & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ 10\overline{)1000} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 & 10 & \quad & \quad & 100 & 125 & 200 & 250 & 500 & 1000 \\ & & & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & & \end{array}$$

Al repetir este procedimiento con cada uno de los números obtendrás:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 10 \quad 20 \quad 25 \quad 40 \quad 50 \quad 100 \quad 125 \quad 200 \quad 250 \quad 500 \quad 1000$$

La respuesta de ¿qué niños tienen llaves que pueden abrir el casillero 1000? es los niños que tienen las llaves número: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500 y 1000.

Ademas estos niños son los que modifican el casillero 1000 y estos mismos números son los divisores del número 1000; como resultado estos alumnos aún están en la dirección castigados.

En la escuela sólo hubo 16 castigados, qué bueno, si no, todos habrían tenido que ir a dar a la dirección, porque en realidad todos jugaron a modificar los casilleros, pero por suerte el director sólo vio a los que tenían llaves que pudieran modificar el casillero 1000, es decir sólo vio a los niños cuya llave correspondía con algún divisor del 1000.

**Actividad:**Calcula los divisores de los siguientes ejemplos para practicar lo que aprendiste. ¿A quiénes hubieran castigado si la puerta del director hubiera estado enfrente del casillero...?

a) 526

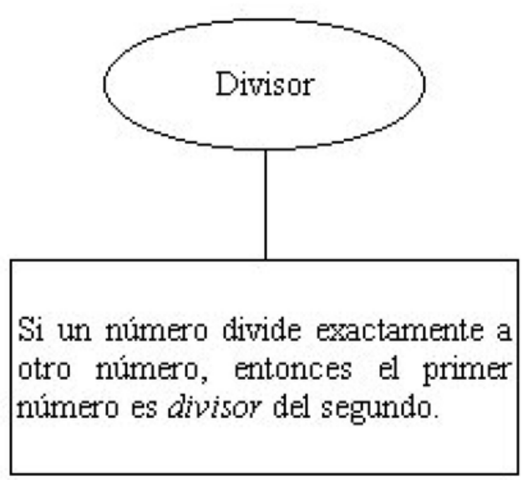
b) 942

c) 55

d) 45

e) 729

Conclusión: Podemos resumir el concepto de divisor de la siguiente manera:



2.3. Los números primos

Hace mucho tiempo existió un hombre llamado Eratóstenes [3] el cual inventó un método para encontrar unos números especiales.

Podemos ejemplificar su método, en el cuento de los niños y los casilleros,si cambiamos un poco las reglas del problema, y nos preguntamos qué pasaría si en la escuela en lugar de abrir los casilleros, todos los niños se escondieran dentro de su respectivo casillero para luego salir de uno por uno, cerrar todos los casilleros a los que su llave tuviera acceso y encerrar a sus compañeros, ¿Quienes se quedarían afuera?

[3]Eratóstenes nació en Cirene lo que ahora se conoce como Libia en el año 276 AC. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral y matemático. Después de estudiar en Alejandría y Atenas se hizo director de la biblioteca de Alejandría. Trabajó en geometría y números primos. Es más recordado su aporte en los números primos. Falleció en el año 197 AC en Alejandría, Egipto.

Para tratar de descubrir qué niños quedan fuera utilizando el método de Eratostenes hacemos lo siguiente:

Eratostenes escribió todos los números en una lista.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56

Se entiende que Eratóstenes escribió muchos números más.

Para ver lo que hizo relacionémoslo con el cuento de los casilleros al imaginar de nuevo los casilleros, al tomar como ejemplo la cantidad de 17 casilleros y 17 niños.

Aquí vemos los 17 casilleros cerrados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C

Supongamos que el niño 1 abrió todos los casilleros y continúa abriéndolos.

En el siguiente dibujo podemos ver que todos los casilleros ya están abiertos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Al ver los casilleros abiertos, los niños se esconden dentro de ellos y cierran la puerta pero no con llave, para esconderse de sus compañeros pero poder salir cuando les toque, es decir, que aún pueden salir a menos de que alguien los encierre.

Ahora los niños van a salir de uno en uno y sólo van a cerrar los casilleros en los que el número de casillero sea múltiplo de su número de llave.

Si encuentran cerrado con llave algún casillero ya no lo abren, eso quiere decir que el dueño del casillero se quedará encerrado dentro.

Escribimos una tablita con los números de casilleros para saber que pasa en la escuela, podemos escribir todos los números que queramos.

El niño 1 esta abriendo casilleros, no esta escondido como los otros, por eso no lo escribimos.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Recuerda que la lista de números de casilleros puede crecer más si tú lo quieres, sólo debes aumentar más números.

Cuando el niño 2 salió y empezó a cerrar los casilleros de dos en dos, borramos los números de los niños que encerró.

	2	3		5		7		9		11		13	
15		17		19		21		23		25		27	
29		31		33		35		37		39		41	
43		45		47		49		51		53		55	
57		59		61		63		65		67		69	

No borramos el número 2, porque el niño salió a cerrar los casilleros que le corresponden al contar de 2 en 2, es decir cerró los casilleros: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20,... mejor conocidos como números pares o múltiplos de 2, pero no cierra su propio casillero y él no está encerrado, por eso lo escribimos.

La lista con los casilleros que aún están abiertos después de que el niño 1 y el 2 pasaron es:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69,...

El niño 3 también sale de su casillero y empieza a cerrar los casilleros al contar de 3 en 3, sin cerrar su propio casillero, recuerda que si encuentra un casillero cerrado ya no lo abre ni lo cierra.

Al niño 3 le tocaría cerrar los casilleros múltiplos de 3 sin cerrar el casillero 3, pero hay múltiplos de 3 que también son múltiplos de 2, entonces ya estarían cerrados por el niño 2, en realidad sólo cerró algunos de ellos como el 9, 15, 21, 27, ...

Borramos de la lista los números de casillero que cerró el niño 3, es la siguiente.

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23		25			
29		31				35		37				41	
43				47		49				53		55	
		59		61				65		67			

No borramos al niño 3 porque nadie lo ha encerrado.

Seguiría el niño 4 pero él ya está encerrado, por eso no aparece en la lista, y como ya está encerrado ya no puede salir, el niño que sigue es el 5. Cuando pasa el niño 5, cierra los casilleros al contar de 5 en 5 sin cerrar su propio casillero, la lista es la siguiente:

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47		49				53			
		59		61						67			

El niño 6 ya está encerrado, el que sigue para cerrar casilleros es el niño 7, recuerda que cierra los casilleros múltiplos de 7 a excepción de su casillero cierra los casilleros 14, 21, 28, 35,..., recuerda que algunos de estos casilleros ya los había cerrado algún otro niño antes que él.

La lista cuando pasa el niño 7 es:

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47						53			
		59		61						67			

El niño 8 ya está encerrado (lo encerró el niño 2), el niño 9 también (lo encerró el niño 3), el niño 10 también está encerrado con llave (lo encerró el niño 2), ahora es el turno del niño 11.

El niño 11 empieza a cerrar los casilleros múltiplos de 11 que no estén ya cerrados con llave, cuyos múltiplos son 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 121, 144, 169... pero el 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, ya están cerrados por otros niños, el primer casillero que el niño 11 cierra es el 121.

Cuando pasa el niño 11 la lista es la siguiente:

No quitamos al 11 porque no lo han encerrado.

	2	3		5		7				11		13	
		17		19				23					
29		31						37				41	
43				47						53			
		59		61						67			

Actividad: Escribe en tu cuaderno: ¿qué números tienen los niños que no se quedan encerrados?

Repite el procedimiento que hicimos, si solamente tenemos 100 casilleros y escribe los números que obtuviste en una lista, para poder ejemplificar lo que sucede con los 1000 casilleros en un caso más pequeño y poder descubrir ¿qué niños no se quedan encerrados?

Comparemos resultados después de que han pasado los 1000 niños a cerrar los casilleros, los niños que quedan fuera son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83...

A los números que resultan de realizar este procedimiento se les conoce como números Primos.

El procedimiento que seguiste para encontrarlos se le conoce como la Criba de Eratóstenes.

¿Por qué a los niños que quedan ya no los puede encerrar nadie?

Veamos qué niños tienen las llaves que pueden abrir o cerrar un número particular de casillero.

Observa la siguiente tabla en donde están los números de casillero en una columna y en la otra los niños tienen llaves que pueden abrirlo o cerrarlo.

Número de Casillero	Niños que tienen las llaves que lo abren o cierran.
1	1
2	1 y 2
3	1 y 3
4	1,2 y 4
5	1 y 5
6	1,2,3 y 6
7	1 y 7
8	1,2,4 y 8
9	1,3 y 9
10	1,2,5 y 10
11	1y 11
12	1,2,3,4,6 y 12
13	1 y 13
14	1,2,7 y 14
⋮	⋮

El niño 1 con su llave puede abrir cualquier casillero, porque es **la unidad** es el número a partir del cual podemos formar todos los demás[4], por esa razón el 1, puede abrir todos los casilleros, recuerda que además es el neutro multiplicativo[5] , es decir que si multiplico a un número cualquiera por 1, el resultado de esa multiplicación es el número que tenía originalmente.

El niño 2 con su llave puede abrir todos los casilleros que son múltiplos de 2, observa que en la lista de los casilleros pares aparece el número 2.

Observa lo que ocurre en la tabla con los demás casilleros y qué niños tienen llaves que puedan abrirlos o cerrarlos.

[4]Por ejemplo: $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

[5]El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación. Porque $a\cdot$ $\mathbf{1}$$=a$ para cualquier número a

Para abrir o cerrar un casillero, es necesario que el número de la llave divida exactamente al número de dicho casillero, es decir, los niños pueden abrir un determinado casillero si el número de su llave es divisor del número del casillero.

Por ejemplo:

Al casillero 8 lo pueden abrir o cerrar las llaves 1, 2, 4 y 8. El número 8 se puede dividir entre 1, 2, 4 y 8 estos números son los divisores positivos del 8.

En la siguiente tabla es posible observar qué niños pueden abrir o cerrar los casilleros de quienes no quedaron encerrados, por ejemplo, al casillero 2 sólo lo pueden abrir o cerrar las llaves 1 y 2.

Niños que no quedan encerrados	Número de las llaves que pueden abrir el casillero
2	1 y 2
3	1 y 3
5	1 y 5
7	1 y 7
11	1 y 11
13	1 y 13
17	1 y 17
19	1 y 19
23	1 y 23
29	1 y 29
31	1 y 31
37	1 y 37

Al comparar nuestra tabla con la Criba de Eratóstenes observamos los mismos números. Los primos.

Es posible ver que para los casilleros cuyo número es un primo, sólo hay 2 llaves que lo pueden abrir o cerrar, la del niño 1, que sólo abre los casilleros y la del dueño del casillero.

Por esta razón, nadie más puede cerrar estos casilleros, así, podemos decir que los casilleros que cumplen que la condición de tener sólo dos llaves, son casilleros cuyo número es primo y cuyo dueño no se encuentra encerrado.

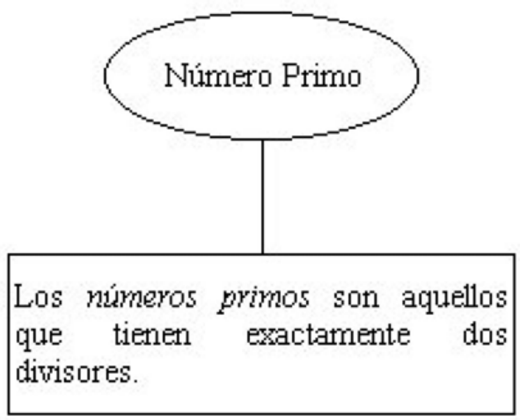
Definición 1 *Los **números primos** son aquellos que tienen exactamente dos divisores. [1]*

En la tabla es posible ver que los números primos tienen 2 divisores positivos diferentes.

En la siguiente tabla escribiremos la palabra PRIMO en la línea en donde el número sólo tiene dos divisores.

Número	Divisores	¿Es Primo?
1	1	
2	1 y 2	PRIMO
3	1 y 3	PRIMO
4	1,2 y 4	
5	1 y 5	PRIMO
6	1,2,3 y 6	
7	1 y 7	PRIMO
8	1,2,4 y 8	
9	1,3 y 9	
10	1,2,5 y 10	
11	1 y 11	PRIMO
12	1,2,3,4,6 y 12	
⋮	⋮	

Conclusión: A los números que sólo tienen dos divisores (la unidad y el mismo número) se les conoce como números primos.



**Pregunta:**Si un número no es primo entonces, ¿qué es?¿Cómo podemos clasificarlos?

2.4. Números Compuestos y su Descomposición en Primos

Los números naturales se clasifican en tres tipos: Números Primos, Números Compuestos y la unidad (el uno).

Ya vimos que los números primos son aquellos números que sólo tienen dos divisores positivos diferentes, sólo pueden dividirse entre el uno y ellos mismos.

Por otro lado, a los números que NO son primos se les conoce como Números Compuestos, tienen más de dos divisores y pueden escribirse como una multiplicación de primos.

Ejemplos :

El 1, es la unidad, el 2 es primo , el 3 es primo.

El número 4 no es primo, lo podemos escribir a partir de números primos de la siguiente forma:

4 = 2 x 2

El 5 es primo.

El 6 no es primo, podemos escribirlo a partir de números primos de la siguiente forma:

6 =2 x 3

El 7 es primo.

El 8 se escribe a partir de números primos de la siguiente forma:

8 = 2 x 2 x 2

Al multiplicar sólo números primos formamos los números compuestos, observa en la siguiente tabla que está indicado en la segunda columna si el número es primo o compuesto.

Número	= Producto de primos	¿Primo o Compuesto?
1	= 1	
2	= 2	PRIMO
3	= 3	PRIMO
4	= 2 x 2	COMPUESTO
5	= 5	PRIMO
6	= 2 x 3	COMPUESTO
7	= 7	PRIMO
8	= 2 x 2 x 2	COMPUESTO
9	= 3 x 3	COMPUESTO
10	= 2 x 5	COMPUESTO
11	= 11	PRIMO
12	= 2 x 2 x 3	COMPUESTO
13	= 13	PRIMO
14	= 2 x 7	COMPUESTO
⋮		⋮

Cuando escribimos un número como el producto de números primos decimos que es su descomposición en números primos. Veamos el siguiente ejemplo:

La descomposición del 24 en números primos es:

24 = 2 x 2 x 2 x 3

La descomposición en primos de 60 es:

60 = 2 x 2 x 3 x 5

Pero te preguntarás ¿cómo encontrar los números primos que forman parte de la descomposición de un número compuesto?

Necesitamos dividir el número entre los números primos de tal forma que vamos acumulando la lista de los números (factores) que forman su descomposición.

Si el número que deseamos descomponer, se puede dividir entre el primo 2, entonces el 2 estará en su descomposición.

Si el número que deseamos descomponer, se puede dividir entre el primo 3, entonces el 3 estará en su descomposición.

Si el número que deseamos descomponer, se puede dividir entre el primo 5, entonces el 5 estará en su descomposición.

Usa este criterio para los demás números primos.

Para encontrar cuáles son los números primos que forman la descomposición de un número, escribimos dos columnas separadas por una línea, de un lado escribimos el número y del otro lado, entre qué números primos se divide, es decir, esta lista de números contiene a todos los factores que forman la descomposición del número.

Utiliza como base para guiarte el siguiente ejemplo:

Número	Descomposición en primos

Ejemplo 1: Calculemos la descomposición en números primos del 144:

Aunque no es necesario seguir el orden de los primos, los utilizamos en orden para facilitar la comprensión del ejemplo.

Tomamos primero al dos y dividimos al 144 entre 2.

$$\begin{array}{r} 72 \\ 2\overline{)144} \\ 0 \end{array}$$

La división es exacta y da como resultado 72, por eso el 2 es divisor de 144, lo escribimos en la segunda columna.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \longleftarrow \text{este 2 significa que} \\ & & \quad\text{divido al 144 entre 2} \\ & & \end{array}$$

Los números se escriben en forma de listado hacia abajo.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & & \longleftarrow \text{el resultado de la división 144} \\ & & \quad\text{entre 2 lo escribimos abajo} \end{array}$$

Verificamos si el 72 también se puede dividir entre 2.

$$\begin{array}{r} 36 \\ 2\overline{)72} \\ 0 \end{array}$$

La división es exacta lo que quiere decir que el 2 también es divisor de 72, por esa razón escribimos otro 2 en la columna de la descomposición en primos.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \longleftarrow \text{Escribo el 2, porque el 2} \\ & & \quad\text{es divisor de 72} \end{array}$$

Escribimos el resultado de dividir 72 entre 2 abajo del 72.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & & \longleftarrow \text{Resultado de dividir 72 entre 2} \\ & & \end{array}$$

Comprobamos si el 36 se puede dividir también entre 2.

$$\begin{array}{r} 18 \\ 2\overline{)36} \\ 0 \end{array}$$

Por eso volvemos a escribir al 2 en la columna de la descomposición en primos del 144.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \longleftarrow \text{El 2 es divisor de 36} \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división abajo.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & & \leftarrowtail \text{Resultado de dividir 36 entre 2} \\ & & \end{array}$$

Comprobamos si el 18 se puede dividir también entre 2.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 2\overline{)18} \\ 0 \end{array}$$

Por eso volvemos a escribir al 2 en la columna de la descomposición en primos del 144.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & 2 & \leftarrowtail \text{El 2 es divisor de 18} \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división abajo.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & 2 & \\ 9 & & \leftarrowtail \text{Resultado de dividir 18 entre 2} \\ & & \end{array}$$

Pero el 2 no es divisor de 9, porque la división no es exacta, ahora utilizamos al siguiente número primo, que es el 3, es decir dividimos 9 entre 3.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 3\overline{)9} \\ 0 \end{array}$$

Como el 3 es divisor de 9, entonces 3 también forma parte de la descomposición en primos del 144, por eso lo escribimos del lado derecho.

$$\begin{array}{r|ll} 144 & 2 & \\ 72 & 2 & \\ 36 & 2 & \\ 18 & 2 & \\ 9 & 3 & \leftarrowtail \text{El 3 es divisor de 9} \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado abajo.

$$
\begin{array}{r|ll}
144 & 2 & \\
72 & 2 & \\
36 & 2 & \\
18 & 2 & \\
9 & 3 & \\
3 & & \longleftarrow \text{Resultado de dividir 9 entre 3}
\end{array}
$$

Comprobamos si el 3 se puede dividir también entre 3.

$$
\begin{array}{r}
1 \\
3\overline{)3} \\
0
\end{array}
$$

Por eso volvemos a escribir al 3 en la columna de la descomposición en primos del 144.

$$
\begin{array}{r|ll}
144 & 2 & \\
72 & 2 & \\
36 & 2 & \\
18 & 2 & \\
9 & 3 & \\
3 & 3 & \longleftarrow \text{El 3 es divisor de 3} \\
 & &
\end{array}
$$

Escribimos el resultado de la división abajo.

$$
\begin{array}{r|ll}
144 & 2 & \\
72 & 2 & \\
36 & 2 & \\
18 & 2 & \\
9 & 3 & \\
3 & 3 & \\
1 & & \longleftarrow \text{Resultado de dividir 3 entre 3} \\
 & &
\end{array}
$$

Como ya llegamos al número 1 ahí se termina el proceso, entonces la descomposición en primos del 144 consta del producto números de la columna de la derecha: 2, 2, 2, 2, 3 y 3

El 144 se puede expresar como el producto de esos primos: 2 por 2 por 2 por 2 por 3 por 3.

Es decir la descomposición en primos del 144 es:

$144 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 3$

Ejemplo 2: Calculemos la descomposición en números primos del 105.

Se utiliza el orden de los números primos tomamos primero al dos y dividimos al 105 entre 2.

$$\begin{array}{r} 52 \\ 2\overline{)105} \\ 1 \end{array}$$

La división no es exacta, por eso el 2 no es divisor de 105.

Verificamos si el 105 se puede dividir entre 3.

$$\begin{array}{r} 35 \\ 2\overline{)105} \\ 0 \end{array}$$

Lo que quiere decir que 3 forma parte de la descomposición en primos del 105, por esa razón escribimos un 3 en la columna de la descomposición en primos del 105.

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \quad \longleftarrow \text{Escribimos el 3 porque es divisor de 105} \\ & \end{array}$$

Escribimos el resultado de dividir 105 entre 3 abajo del 105.

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & \quad\;\; \longleftarrow \text{Resultado de dividir 105 entre 3} \\ & \end{array}$$

Pero el 3 ya no es divisor de 35, porque la división no es exacta, utilizamos al siguiente número primo, que es el 5, es decir dividimos 35 entre 5.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5\overline{)35} \\ 0 \end{array}$$

Como la división es exacta entonces 5 también forma parte de la descomposición en primos del 105, por eso lo escribimos.

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & \quad\;\; \longleftarrow \text{Resultado de dividir 35 entre 5} \\ & \end{array}$$

El 5 ya no es divisor de 7, tomamos al 7 que es divisor de 7, entonces el 7 forma parte de la descomposición en primos de 105, por eso lo escribimos del lado derecho.

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \quad \longleftarrow \text{El 7 es divisor de 7} \\ & \end{array}$$

Escribimos el resultado abajo.

105	3	
35	5	
7	7	
1		⟻ Resultado de dividir 7 entre 7

Como ya llegamos al número 1 ahí se termina el proceso, entonces la descomposición en primos del 105 consta del producto de los primos de la columna de la derecha: 3, 5 y 7

El 105 se puede expresar como el producto de esos primos: 3 por 5 por 7.

Es decir la descomposición en primos del 105 es:

105=3 x 5 x 7

Ahora mediante este procedimiento obtén la descomposición en primos de otros números.

Actividad: Encuentra la descomposición en primos de:

a)42

b)18

c)49

d)63

Actividad: Discúte con tus compañeros las siguientes preguntas:

¿Cómo saber si esa descomposición que encontramos es la única? ¿Hay varias descomposiciones de números primos, para un mismo número?

Veamos un ejemplo. Si tomamos la descomposición del 15, tendríamos que la descomposición del 15 = 5 x 3 y que además 15 = 3 x 5, pero por la propiedad conmutativa de la multiplicación, en donde el orden de los factores no altera el producto, sabemos que 5 x 3 = 3 x 5 por lo que estas 2 descomposiciones representan a una sola.

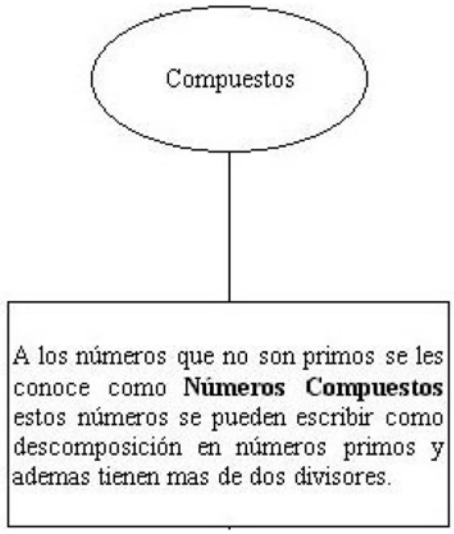
15 = 3 x 5

La descomposición de un número es única, es decir no existen dos descomposiciones diferentes para un mismo número. [6]

[6] La demostración se encuentra en el apéndice de Divisibilidad.

Pregunta:¿Podrías expresar la descomposicion de los números que calculaste de una forma más corta?

Conclusión: Podemos resumir lo siguiente:



2.5. Exponentes de los números.

*.2.9

Al escribir la descomposición en primos del 24 tenemos 24 = 2 x 2 x 2 x 3 ¿Puede expresarse de una manera más corta?

La multiplicacion es la abreviacion de la suma, los exponentes representan la cantidad de veces que tengo que multiplicar un número como factor,es decir, los exponentes expresan la abreviatura del producto, de esta forma se puede expresar la descomposición de un número de una forma más corta.

Ejemplo 1: La descomposición del 25 = 5 x 5, hay que multiplicar un 5 por otro 5.

Esto puedes escribirlo de la siguiente forma:

5 x 5 = 5^2

El dos significa que: multiplicas el 5 por otro 5 y concuerda con que al escribir 5 x 5, el 5 esté escrito, 2 veces como factor.

Veamos otro ejemplo:

3^4=

Escribimos al 3, el número de veces que indique el exponente que en este caso es 4, entonces escribimos 4 veces al 3 y multiplicamos.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & x & 3 & x & 3 & x & 3 & = & 3^4 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \end{array}$$

Es decir multiplico al 3 cuatro veces como factor. Cuenta cuántos 3 hay escritos y observa que el exponente indica exactamente las veces que se multiplica.

De esta manera podemos escribir de una forma más corta la descomposición en primos de un número por ejemplo el número 224, cuya descomposición en primos es:

$$\begin{array}{ll} 224 & = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 7 \\ & = 2^5 \text{ x } 7 \end{array}$$

De esta forma podemos representar que la descomposición en números primos del 224, es multiplicar cinco veces al 2 como factor y una vez al siete como factor.

Es decir podemos escribir la descomposición en primos del 224 como:

224= 2^5 x 7

Lo mismo pasa con la descomposición en primos de cualquier número como por ejemplo el 108, su descomposición en primos es:

$$\begin{array}{ll} 108 & = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \\ & = 2^2 \text{ x } 3^3 \end{array}$$

Es decir podemos escribir la descomposición en primos del 108 como: 108=2^2 x 3^3 ésta es una forma más corta de escribir la descomposición del 108.

Observa que no es lo mismo 2^5 que 5^2 porque:

$$\begin{array}{llcll} 2^5 & = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 & \qquad & 5^2 & = 5 \text{ x } 5 \\ & = 32 & & & = 25 \end{array}$$

Para representar a los números de esta forma, se utiliza un exponente, que es el número de arriba y al número de abajo se le conoce como base, porque es el número que va a estar como factor, el número de veces que diga el exponente.

Que representa en realidad:

2^5 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2
= 32

Actividad: Practica este método al escribir la descomposición de los mismos números pero en la forma más corta, al representarla con exponentes.

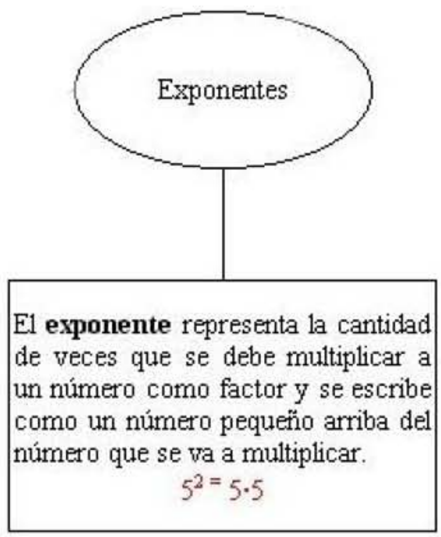
a)42

b)18

c)49

d)63

Conclusión:



2.6. Leyes de los exponentes

2.6.1. Elevación de una potencia a un exponente $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

*.2.9

Ejemplo 1: Para calcular $(7^2)^3$ podemos desarrollar poco a poco los pasos que se nos pidan para ver que ocurre.

Primero nos piden que representemos **3** veces al factor (7^2), lo cual se vería de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(7^2)^3 &= \underbrace{(7^2) \times (7^2) \times (7^2)}_{3} && \text{Multiplico } 7^2 \text{ tres veces como factor.}\\
&= \underbrace{\underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}}_{3} && \text{Al realizar la operación } 7^2\\
&= 7^{2 \cdot 3}
\end{aligned}$$

Que si separamos a los 7 de los paréntesis obtenemos que:

$$\begin{aligned}
(7^2)^3 &= \underbrace{(7^2) \times (7^2) \times (7^2)}_{3} && \text{Multiplico } 7^2 \text{ tres veces como factor.}\\
&= \underbrace{\underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}}_{3} && \text{Al realizar la operación } 7^2\\
&= 7^{2 \cdot 3}\\
&= \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{6}
\end{aligned}$$

Que al contar los sietes tenemos que $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ es lo mismo que escribir 7^6, que es el mismo resultado que al multiplicar los exponentes 2 y 3, que dan como resultado 6, nos queda:

$$\begin{aligned}
(7^2)^3 &= \underbrace{(7^2) \times (7^2) \times (7^2)}_{3} && \text{Multiplico } 7^2 \text{ tres veces como factor.}\\
&= \underbrace{\underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \times \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}}_{3} && \text{Al realizar la operación } 7^2\\
&= 7^{2 \cdot 3} && \text{Ya que tenemos 2 veces al 7, representado 3 veces.}\\
&= \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}_{6} && \text{Al contar los 7}\\
&= 7^6
\end{aligned}$$

Es decir que si tengo $(7^2)^3$ es lo mismo que multiplicar los exponentes 2 y 3, se obtiene como resultado 7^6

Ejemplo 2: Calculemos ahora cuanto vale $(8^4)^3$

Si se escriben sólo las operaciones para facilitar la comprensión tenemos que $(8^4)^3$ es escribir (8^4)

3 veces:

$$(8^4)^3 = (8^4) \times (8^4) \times (8^4)$$

Al desarrollar (8^4) es lo mismo que escribir $(8 \times 8 \times 8 \times 8)$, nos quedaría:

$$\begin{aligned}(8^4)^3 &= (8^4) \quad \times \quad (8^4) \quad \times \quad (8^4)\\ &= \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow\\ &= (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8)\end{aligned}$$

Que podemos escribir ya sin agrupar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}(8^4)^3 &= (8^4) \times (8^4) \times (8^4)\\ &= (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8)\\ &= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8\end{aligned}$$

Al contar los números 8, tenemos que aparecen 12 veces, los representamos como 8^{12}, nos queda que:

$$\begin{aligned}(8^4)^3 &= (8^4) \times (8^4) \times (8^4)\\ &= (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8) \times (8 \times 8 \times 8 \times 8)\\ &= 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8\\ &= 8^{12}\end{aligned}$$

Con esto concluimos que $(8^4)^3 = 8^{12}$, donde 12 también se obtiene de multiplicar los exponentes 4 y 3.

En general elevar a un exponente "n" la base (a^m) significa multiplicar "n" veces (a^m) como factor, es decir multiplicar "m" por "n" factores iguales a "a".

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Para verificar que esta propiedad es cierta.

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n}$$

Tenemos n factores (a^m).

Pero $(a^m) = (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})$.

Tenemos "m" factores multiplicados "n" veces.

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n}$$

$$=\underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})...(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})}_{n}.$$

Si tenemos "m" factores multiplicados "n" veces, es decir, $m \times n$ veces, tenemos $m \times n$ factores, por lo que:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m)(a^m)...(a^m)}_{n}$$

$$=\underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})...(\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m})}_{n}.$$

$$= a^{m \cdot n}$$

Por lo tanto $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

2.6.2. Multiplicación de dos potencias con una misma base. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

A partir de ejemplos tratemos de descubrir qué ocurre.

Ejemplo 1: Calculemos el resultado de $7^3 \cdot 7^2$

$$7^3 \cdot 7^2 = \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3} \quad \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}$$

Con esto tendríamos $3 + 2$ términos siete.

$$7^3 \cdot 7^2 = \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3} \quad \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}$$

$$=7^{3+2} \qquad \text{3+2 términos 7.}$$

Que al poner los términos siete como multiplicación y contarlos tenemos:

$$7^3 \cdot 7^2 = \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3} \qquad \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2}$$

$$=7^{3+2}$$

$$= \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{5} \quad \text{Al contar los 7 tenemos}$$

Cuando contamos $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ tenemos que son 5 términos que son el mismo resultado de sumar los exponentes 2 y 3, es decir, $3+2$ términos, lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned} 7^3 \cdot 7^2 \quad &= \underbrace{(7 \cdot 7 \cdot 7)}_{3} \qquad \underbrace{(7 \cdot 7)}_{2} \\ &= 7^{3+2} \\ &= \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{5} \quad \text{Al contar los 7 tenemos} \\ &= 7^5 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: $5^4 \cdot 5^5 = 5^9$

Al desarrollar los valores tenemos que:

$$5^4 \cdot 5^5 \quad = (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5})$$

Al contar tenemos que son $4+5$ términos, queda como resultado:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \end{aligned}$$

Que al escribir los términos en una sola operación y contarlos tenemos:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \\ &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{9}) \end{aligned}$$

El resultado es:

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^5 \quad &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4}) \cdot (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5}) \\ &= 5^{4+5} \\ &= (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{9}) \\ &= 5^9 \end{aligned}$$

Para verificar la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{n})$$

Tenemos en total al contar $m + n$ términos, ya que la primera multiplicación tiene m veces a como factor y la segunda multiplicación tiene n veces a como factor, tenemos que:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot ...a \cdot a}_{n}) \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

En general al multiplicar un número a primero m veces y después n veces como factor, se tiene al contar los factores, $m + n$ factores iguales a a, resulta por lo tanto.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2.6.3. Multiplicación de dos potencias con el mismo exponente $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Conviene para desarrollar los cálculos, aplicar las propiedades de los números.

Ejemplo 1: $7^3 \cdot 5^3 = (7 \cdot 5)^3$

Tenemos que:

$$7^3 \cdot 5^3 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3}$$

Pero al utilizar la propiedad conmutativa, tenemos que:

$$\begin{aligned} 7^3 \cdot 5^3 &= \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3} \\ &= 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \end{aligned}$$

Que al utilizar la propiedad asociativa de la multiplicación tenemos:

$$\begin{aligned} 7^3 \cdot 5^3 &= \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3} \\ &= 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \\ &= (7 \cdot 5) \quad \cdot (7 \cdot 5) \quad \cdot (7 \cdot 5) \end{aligned}$$

Pero el término $(7 \cdot 5)$ está escrito 3 veces como factor, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
7^3 \cdot 5^3 &= \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3} \\
&= 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \quad \cdot 7 \cdot 5 \\
&= (7 \cdot 5) \quad \cdot (7 \cdot 5) \quad \cdot (7 \cdot 5) \\
&= (7 \cdot 5)^3
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: $6^5 \cdot 2^5 = (6 \cdot 2)^5$

Tenemos que:

$$6^5 \cdot 2^5 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5}$$

Que al utilizar la propiedad conmutativa tenemos:

$$\begin{aligned}
6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\
&= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2
\end{aligned}$$

Al aplicar la propiedad asociativa tenemos:

$$\begin{aligned}
6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\
&= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \\
&= \underbrace{(6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2)}_{5}
\end{aligned}$$

Tenemos $(6 \cdot 2)$ cinco veces como factor, de esto podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
6^5 \cdot 2^5 &= \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{5} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5} \\
&= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \\
&= \underbrace{(6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 2)}_{5} \\
&= (6 \cdot 2)^5
\end{aligned}$$

En general, al multiplicar "n" veces un número "a" y "n" veces un número "b" se tienen "n" factores iguales a $a \cdot b$ es decir:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Desarrollemos el caso general, es decir:

$$a^n \cdot b^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n})$$

Al aplicar la propiedad conmutativa tenemos que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot ... \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Que al aplicar la propiedad asociativa tenemos que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot ... \cdot a \cdot b \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n} \end{aligned}$$

Como tenemos $(a \cdot b)$ representado n veces como factor queda como resultado que:

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}_{n}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot ... \cdot b \cdot b}_{n}) \\ &= a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b ... \cdot a \cdot b \\ &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{n} \\ &= (a \cdot b)^n. \end{aligned}$$

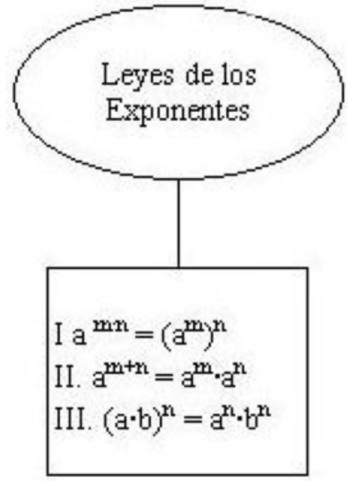
Conclusión: Las propiedades son:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a^{m \cdot n} = (a^m)^n \\ \text{II} & a^{m+n} = a^m \cdot a^n \\ \text{III} & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \end{array}$$

Al aplicar estas propiedades, se pueden escribir a los exponentes de una forma más conveniente.

Ejemplo 1:

El número 20^6 puede ser considerado como $20^{2 \cdot 3}$ en tal caso resulta:



$$\begin{aligned} 20^6 &= 20^{2\cdot 3} \\ &= (20^2)^3 \\ &= 400^3 \end{aligned}$$

El mismo 20^6 puede ser considerado como 20^{4+2} en tal caso se tiene:

$$\begin{aligned} 20^6 &= 20^{4+2} \\ &= 20^4 \cdot 20^2 \\ &= 160000 \cdot 400 \end{aligned}$$

Todavía 20^6 puede ser considerado como $(2 \cdot 10)^6$. En tal caso tenemos:

$$\begin{aligned} 20^6 &= (2 \cdot 10)^6 \\ &= 2^6 \cdot 10^6 \\ &= 64 \cdot 10^6 \\ &= 64000000 \end{aligned}$$

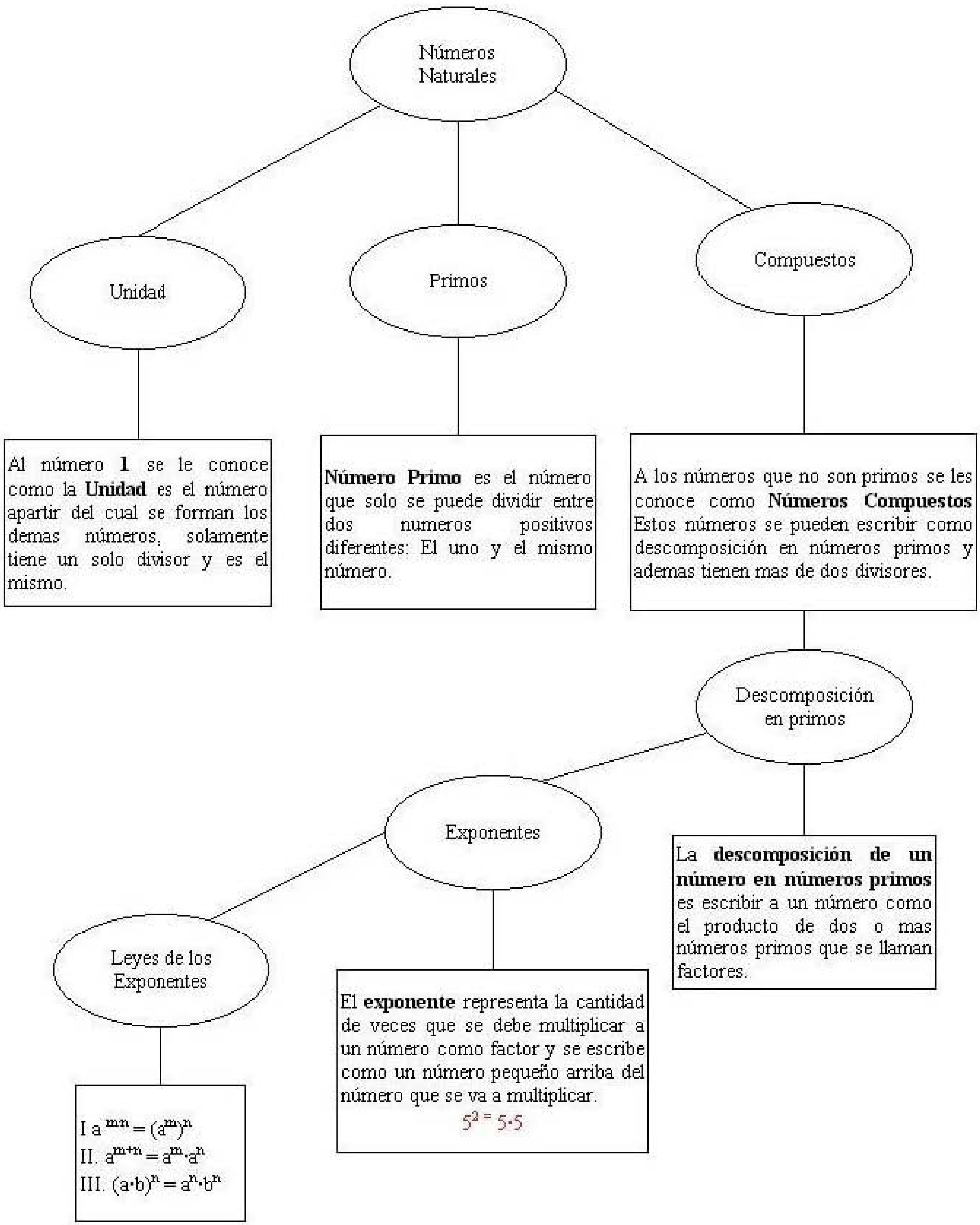
Es decir que puedo representar a un mismo número de diferentes maneras solamente con utilizar las propiedades de los exponentes.

Actividad: Ejercita lo aprendido completando la siguiente tabla.¿Cuáles números puedo poner?

Número dado	Número escrito como potencia de potencia	Número escrito como producto de potencias de igual base	Número escrito como producto de base de igual exponente	Total
15^4	$15^{2\cdot 2} = (15^2)^2$	$15^{2+2} = 15^2 \cdot 15^2$	$(5 \cdot 3)^4 = 5^4 \cdot 3^4$	50625
30^6	$= (30)^3$	$30^{3+3} =$	$(3 \cdot 10)^6 =$	3000000
	$= (12^2)^4$	$= 12^4 \cdot 12^4$	$= 3^8 \cdot 4^8$	2985984
	$24^{4\cdot 2} =$	$= 24^7 \cdot 24$	$= 6^8 \cdot 4^8$	110075314176
21^9	$= (21^3)^3$	$21^{4+5} =$	$(7 \cdot 3)^9 =$	794280046581

Recordatorio:

Para resumir en pocas palabras los conceptos que hemos aprendido hasta este momento representamos la información en un diagrama. Que además puedes utilizar para consultar cuando tengas alguna duda.



2.7. Mínimo común múltiplo

El método de descomposición en primos es muy útil para hacer cálculos rápidos de números específicos, estos números los conoceremos en esta sección.

Retomemos el cuento ¿Cómo saber si dos niños modificaron la misma puerta? es decir, ¿cómo saber si el niño 15 y el niño 24 modificaron en algún momento la misma puerta?

Ejemplo 1:

Recuerda que el niño 15 modificó las puertas al contar de 15 en 15, es decir, modificó las puertas: 15, 30, 45, 60, 75, 90,... y el niño 24 modificó las puertas al contar de 24 en 24, es decir, modificó las puertas 24, 48, 72, 96...

El niño 15, modifica las puertas que eran múltiplos de 15, el niño 24, modifica las puertas múltiplos de 24.

Pero, ¿cómo podríamos saber si dos números tienen múltiplos en común, por ejemplo el 15 y el 24?

Los múltiplos del 15 son: 15, 30, 45, 60... y los del 24 son 24, 48, 96... a simple vista parecen no tener múltiplos en común, para averiguarlo agreguemos más números a las listas:

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180,195, 210, 225, 240, 255...

Múltiplos de 24: 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168, 192, 216, 240, 264, 288, 312, 336, 360, 384,...

En este caso hay números en común en ambas listas, puedes identificarlos subrayados en la siguiente lista:

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, <u>120</u>, 135,150, 165, 180, 195, 210, 225, <u>240</u>, 255...

Múltiplos de 24: 24, 48, 72, 96, <u>120</u>, 144, 168, 192,216, <u>240</u>, 264, 288, 312, 336, 360, 384,....

Los subrayados en este caso el 120, el 240 son múltiplos comunes del 15 y 24, como muchos otros que podríamos encontrar si continuáramos la lista, pero en este caso el 120 es el primero de los múltiplos en común del 15 y el 24, por eso se le conoce como el Mínimo Común Múltiplo de 15 y 24, en los libros lo puedes encontrar como "*m.c.m*"que significa: el más pequeño de los múltiplos en común de los números que se están calculando.

Podríamos escribir que el mínimo común múltiplo entre el 15 y el 24 es el 120 y con el lenguaje matemático, solamente escribir $m.c.m.(15, 24) = 120$

Donde con los paréntesis encerramos a los números a los que les estamos sacando sus múltiplos y después del igual escribimos el número más pequeño que tienen en común es decir al "Mínimo Común Múltiplo, *m.c.m*"

**Pregunta:**¿Cualquier pareja de números naturales tiene $m.c.m$? Calculemos otro ejemplo:
.

Ejemplo 2: Calculemos el mínimo común múltiplo de 95 y 114:

La lista de múltiplos de 95 es: 95, 190, 285, 380, 475, 570, 665, 760, 855, 950, 1045, 1140, 1235, 1330, 1425, 1520, 1615, 1710,...

La lista de los múltiplos de 114 es: 114, 228, 342, 456, 570, 684, 798, 912, 1026, 1140, 1254...

Verificamos cuáles son los múltiplos que ambas listas tienen en común y los subrayamos.

Múltiplos de 95: 95, 190, 285, 380, 475, 570, 665, 760, 855, 950, 1045, 1140, 1235, 1330, 1425, 1520, 1615, 1710,...

Múltiplos de 114: 114, 228, 342, 456, 570, 684, 798, 912, 1026, 1140, 1254...

El mínimo común múltiplo de (95,114)=1140.

Además de la lista de múltiplos, para encontrar el mínimo común múltiplo, se puede utilizar otro método a partir de la descomposición en primos de los números y se puede calcular al mismo tiempo en un sólo procedimiento.

En el primer ejemplo teníamos que encontrar el mínimo común múltiplo de 24 y 15 y encontramos por el método de escribir los múltiplos que el mínimo común múltiplo entre 15 y 24 es el 120 es decir m.c.m.(15,24)=120

Para resolver el mismo ejemplo utilicemos la descomposición en primos de cada uno de los dos números.

Colocamos ambos números de un mismo lado de la línea y del otro lado los números que los forman, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r|l} \text{Números} & \text{Descomposición.} \\ & \end{array}$$

Es decir calculando para el **Ejemplo 1** tenemos que:

$$\begin{array}{cc|l} 24 & 15 & \\ & & \end{array}$$

Dividimos entre 2 a ambos números para verificar si es un divisor de algunos de ellos como hacíamos con la descomposición de un número en números primos.

$$\begin{array}{cc|l} 24 & 15 & 2 \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Verificamos si es posible realizar las divisiones exactas.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 2\overline{)24} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7 \\ 2\overline{)15} \\ 1 \end{array}$$

Como sólo podemos dividir al 24 entre 2 y el resultado de la división es 12, el 12 lo escribimos debajo del 24.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & & \quad\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

En el caso del 15, el 2 no es divisor de 15, entonces el 15 lo volvemos a escribir abajo, porque todavía no lo hemos podido dividir entre ningún número primo.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & \quad\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Volvemos a dividir entre 2, hasta que ya no sea posible dividir.

En este caso ahora dividimos al 12 entre 2 nuevamente, lo escribimos en la columna de la descomposición el resultado de la división debajo del 12.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 2\overline{)12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & & \quad\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Como el 2 no es divisor de 15, repetimos al 15 abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & \quad\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Al 6 es posible dividirlo entre 2

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Realizamos la división y obtenemos que:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2\overline{)6} \\ 0 \end{array}$$

El 2 no es divisor de 15, sólo lo escribimos abajo del 15.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

El 3 es divisor de 15, lo colocamos en la lista de la descomposición.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3\overline{)3} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ 3\overline{)15} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Colocamos el resultado de las divisiones abajo del 3 y del 15.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

El 24 ya se dividió hasta obtener al 1 y el 15 se puede dividir entre 5.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

El 1 lo volvemos a escribir debajo porque ahí se termina esa columna y abajo del 5 escribimos su resultado.

$$\begin{array}{rr|l} 24 & 15 & 2 \\ 12 & 15 & 2 \\ 6 & 15 & 2 \\ 3 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \longleftarrow \end{array}$$

Cuando las dos columnas de los números tengan “1” ya terminamos la descomposición.

Para encontrar el mínimo común múltiplo sólo es necesario multiplicar los números que aparecen en la columna de la descomposición, es decir que el mínimo común múltiplo de 15 y 24 es:

$$\begin{aligned} m.c.m.(15,24) &= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \\ &= 2^3 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Que es el mismo número que calculamos al escribir las listas de los múltiplos de 15 y 24 que observamos antes.

Calculemos más ejemplos:

Ejemplo 3: Calcularemos el mínimo común múltiplo de 56 y 45:

Los múltiplos de 56: 56, 112, 168, 224, 280, 336, 392, 448, 504, 560, 616, 672, 728, 784, 840, 896, 952, 1008, 1064, 1120, 1176, 1232,...

Los múltiplos de 45: 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450, 495, 540, 585, 630, 675, 720, 765, 810, 855, 900, 945, 990, 1035, 108, 1125, 1170, 1215, 1260, 1305, 1350, 1395, 1440, 1485, 1530, 1575, 1620, 1665, 1710, 1755, 1800...

Hasta este momento no hay un múltiplo en común en ambas listas aunque ya estén escritos una gran cantidad de múltiplos, este método no es tan efectivo, necesitamos escribir más múltiplos de 56 y de 45 hasta encontrar alguno que tengan en común.

Los múltiplos de 56: 56, 112, 168, 224, 280, 336, 392, 448, 504, 560, 616, 672,728, 784, 840, 896, 952, 1008, 1064, 1120, 1176, 1232, 1288, 1344, 1400, 1456, 1512, 1568, 1624, 1680, 1736, 1792, 1848, 1904, 1960, 2016, 2072, 2128, 2184, 2240, 2296, 2352, 2408, 2464, <u>2520</u>...

Los múltiplos de 45: 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450,495, 540, 585, 630, 675, 720, 765, 810, 855, 900, 945, 990, 1035, 108, 1125, 1170, 1215, 1260, 1305, 1350, 1395, 1440, 1485, 1530, 1575, 1620,1665, 1710, 1755, 1800, 1845, 1890, 1935, 1980, 2025, 2070, 2115, 2160, 2205, 2250, 2295, 2340, 2385, 2430, 2475, <u>2520</u>...

De este modo encontramos que el mínimo común múltiplo de 45 y 56 es 2520, es decir:

m.c.m.(45,56)=2520

En este caso el mínimo común múltiplo de 45 y 56 es el resultado de la multiplicación 45 por 56 que da como resultado 2520, lo que significa que siempre habrá por lo menos un múltiplo en común entre dos números, y ese es el producto de los números dados.

Calculemos el mínimo común múltiplo de 45 y 56 por el método de la descomposición en primos.

Colocamos ambos números de un mismo lado de la línea y del otro lado los números que los forman, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{c|l} \text{Números} & \text{Descomposición} \\ & \end{array}$$

Es decir:

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & \\ & & \end{array}$$

Dividimos entre 2 a ambos números para verificar si es un divisor de algunos de ellos como hacíamos con la descomposición de un número en números primos.

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & 2 \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Verificamos si es posible realizar las divisiones exactas.

$$\begin{array}{r} 28 \\ 2\overline{)56} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ 2\overline{)45} \\ 1 \end{array}$$

Como sólo podemos dividir al 56 entre 2 y el resultado de la división es 28, el 28 lo escribimos debajo del 56.

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

En el caso del 45, el 2 no es divisor de 45, lo volvemos a escribir abajo.

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Volvemos a dividir entre 2 hasta que ya no sea posible hacerlo.

En este caso ahora dividimos al 28 entre 2, lo escribimos en la columna de la descomposición.

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 2\overline{)28} \\ 0 \end{array}$$

Se escribe el resultado de la división debajo del 28.

$$\begin{array}{cc|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Como 2 no es divisor de 45, escribimos al 45 abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Aún es posible dividir entre 2.

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & 2\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Realizamos la división y obtenemos que:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 2\overline{\left\lceil 14 \right.} \\ 0 \end{array}$$

El 2 no es divisor de 45, sólo lo escribimos abajo del 45.

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & 2 \\ 7 & 45 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

El 2 ni el 3 son divisores de 7, pero el 3 si es divisor de 45 por lo que lo colocamos en la lista de la descomposición.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{\left\lceil 7 \right.} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 3\overline{\left\lceil 45 \right.} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & 2 \\ 7 & 45 & 3\longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Colocamos el resultado de las divisiones debajo del 45, como el 3 no es divisor de 7, rescribimos el 7 abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & 2 \\ 7 & 45 & 3 \\ 7 & 15 & \longleftarrow \\ & & \end{array}$$

Al 15 aún lo puedo dividir entre 3.

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 45 & 2 \\
28 & 45 & 2 \\
14 & 45 & 2 \\
7 & 45 & 3 \\
7 & 15 & 3\longleftarrow \\
 & &
\end{array}$$

El 3 no es divisor de 7, lo volvemos a escribir abajo y debajo del 15 escribimos el resultado de su división entre 3.

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 45 & 2 \\
28 & 45 & 2 \\
14 & 45 & 2 \\
7 & 45 & 3 \\
7 & 15 & 3 \\
7 & 5 & \longleftarrow \\
 & &
\end{array}$$

El 5 no es divisor de 7, pero del 5 si.

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 45 & 2 \\
28 & 45 & 2 \\
14 & 45 & 2 \\
7 & 45 & 3 \\
7 & 15 & 3 \\
7 & 5 & 5\longleftarrow \\
 & &
\end{array}$$

Como el 5 no es divisor de 7, rescribimos al 7, y debajo del 5 escribimos el resultado de la división entre 5.

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 45 & 2 \\
28 & 45 & 2 \\
14 & 45 & 2 \\
7 & 45 & 3 \\
7 & 15 & 3 \\
7 & 5 & 5 \\
7 & 1 & \longleftarrow
\end{array}$$

Ahora dividimos al 7 entre 7 y terminamos con el procedimiento.

$$\begin{array}{rr|l}
56 & 45 & 2 \\
28 & 45 & 2 \\
14 & 45 & 2 \\
7 & 45 & 3 \\
7 & 15 & 3 \\
7 & 5 & 5 \\
7 & 1 & 7\longleftarrow \\
 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} 56 & 45 & 2 \\ 28 & 45 & 2 \\ 14 & 45 & 2 \\ 7 & 45 & 3 \\ 7 & 15 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \longleftarrow \end{array}$$

Para encontrar el mínimo común múltiplo sólo es necesario multiplicar los números que aparecen en la columna de la descomposición, es decir que el mínimo común múltiplo de 56 y 45 es:

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(56{,}45) &= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 3 \text{ x } 3 \text{ x } 5 \text{ x } 7 \\ &= 2^3 \text{ x } 3^2 \text{ x } 5 \text{ x } 7 \\ &= 2520 \end{aligned}$$

Definición 1 *El* ***Mínimo Común Múltiplo*** *de dos (o más) números es el producto de todos sus factores primos (comunes y no comunes), elevados al máximo exponente con que aparecen en las descomposiciones de cada número. [1]*

Siempre es posible encontrar a un múltiplo en común ya que por lo menos el resultado de multiplicarlos entre sí, es un múltiplo que tienen en común.

Ejemplo 4: Calculemos los múltiplos comunes de 15 y el 26, al escribir las listas de múltiplos y tendríamos que:

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, 285, 300, 315, 330, 345, 360, 375, <u>390</u>, 405, 420, 435, 450...

Múltiplos de 26: 26, 52, 78, 104, 130, 156, 182, 208, 234, 260, 286, 312, 338, 364, <u>390</u>, 416, 442, 468, 494, 520, 546...

Si realizas la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 26 \\ \text{x}15 \\ \hline 390 \end{array}$$

El 390 está en la lista.

Lo que quiere decir que siempre encontrarás al menos un múltiplo en común, en este caso el mínimo común múltiplo de 26 y 15 es el 390, m.c.m(26,15)=390

Si utilizáramos el cálculo del mínimo común múltiplo por medio de la descomposición en primos obtendríamos que:

$$\begin{array}{rr|l}
26 & 15 & 2 \\
13 & 15 & 3 \\
13 & 5 & 5 \\
13 & 1 & 13 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{m.c.m}(26{,}15) &= 2\text{x}3\text{x}5\text{x}13 \\
&= 390
\end{aligned}$$

Calculemos el $m.c.m$ de más de 2 números con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5: Calcular el mínimo común múltiplo de 248, 644 y 545.

$$\begin{array}{rrr|l}
248 & 644 & 545 & 2
\end{array}$$

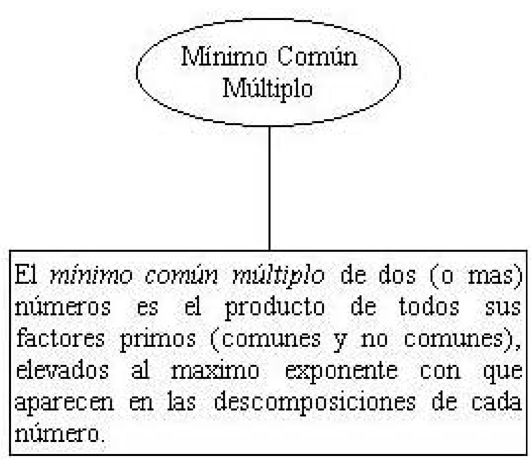
Coloca los números como en la descomposición en primos, resuélvela en tu cuaderno y verifica si al calcular el mínimo común múltiplo de 248, 644 y 545 llegaste a la descomposición siguiente.

$$\begin{array}{rrr|l}
248 & 644 & 545 & 2 \\
124 & 322 & 545 & 2 \\
62 & 161 & 545 & 2 \\
31 & 161 & 545 & 5 \\
31 & 161 & 109 & 7 \\
31 & 23 & 109 & 23 \\
31 & 1 & 109 & 31 \\
1 & 1 & 109 & 109 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

De lo anterior podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
m.c.m\ (248, 644, 545) &= 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 5 \text{ x } 7 \text{ x } 23 \text{ x } 31 \text{ x } 109 \\
&= 2^3 \text{ x } 5 \text{ x } 7 \text{ x } 23 \text{ x } 31 \text{ x } 109 \\
&= 21760760
\end{aligned}$$

Conclusión:



Actividad: Practica lo anterior al calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes números en tu cuaderno:

a) 46 y 86

b) 445, 566 y 875

c) 121, 55

2.8. El Máximo Común Divisor

Si cuando calculábamos el $m.c.m$ utilizábamos los múltiplos.Al utilizar los divisores encontraremos otro número especial

Pregunta: ¿Podremos encontrar un divisor común de varios números?
Así como calculábamos el mínimo de los múltiplos comunes probemos qué pasa con los divisores, por ejemplo calculemos los divisores comunes de varios números.

Ejemplo 1: Encontremos a partir de los divisores de 24 y 18 un divisor común:

Utiliza y practica el método para calcular los divisores que se vio en este capítulo.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Los divisores que tienen común el 24 y el 18 son: 1, 2, 3, 6.

El más grande de los divisores comunes del 24 y el 18 es 6.

Es decir el máximo común divisor de 24 y 18 es el 6.

Ejemplo 2:

Encontremos el máximo común divisor de 64 y 92:

Los divisores de 64 : 1, 2, 4, 6, 8, 16, 32, 64.

Los divisores de 92: 1, 2, 4, 23, 46, 92.

Los divisores comunes de 64 y 92 son: 1, 2, y 4.

El más grande de los divisores comunes es el 4.

Es decir, que el máximo común divisor de 64 y 92 es el 4.

El $m.c.d$ de 64 y 92 en símbolos matemáticos se escribe $m.c.d.[64, 92] = 4$.

Podemos calcular el $m.c.d$ a partir de la descomposición en primos de ambos números:

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & \\ & & \end{array}$$

En ambos casos podemos dividirlos entre 2 por esa razón lo indicamos.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2 \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división en ambos casos.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2 \\ 32 & 46 & \\ & & \end{array}$$

Ambos números los pudimos dividir entre 2 por esta razón marcamos al dos con $\leftarrowtail$, porque este 2 está en las descomposiciones de ambos números.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & \\ & & \end{array}$$

Continuamos la descomposición de los números, el 32 y el 46 aún es posible dividirlos entre 2.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2 \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de ambas divisiones. Como el 2 aún forma parte de la descomposición de ambos números lo marcamos con $\leftarrowtail$

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & \\ & & \end{array}$$

El 16 aún puede dividirse entre 2 pero el 23 ya no se puede dividir, como sólo divide a uno de los dos números no lo marcamos.

$$\begin{array}{cc|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división, como el 23 no tiene mitad escribimos nuevamente el 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & \\ & & \end{array}$$

El 8 todavía se puede dividir entre 2.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ & & \end{array}$$

Escribimos el resultado de la división del 8 entre 2 debajo, como el 23 no tiene mitad escribimos nuevamente el 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & \\ & & \end{array}$$

Aún podemos dividir entre 2 al 4.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ & & \end{array}$$

Y escribimos el resultado abajo.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & \\ & & \end{array}$$

Dividimos aún entre 2, al número 2.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\leftarrowtail \\ 32 & 46 & 2\leftarrowtail \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ & & \end{array}$$

Y escribimos el resultado.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\longleftarrow \\ 32 & 46 & 2\longleftarrow \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ 1 & 23 & \\ & & \end{array}$$

El 23 es un número primo, por eso sólo puede dividirse entre el 1 y el 23, entonces dividimos al 23 entre 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\longleftarrow \\ 32 & 46 & 2\longleftarrow \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ 1 & 23 & 23 \\ & & \end{array}$$

Terminamos la descomposición al escribir los resultados de la división del 23.

$$\begin{array}{rr|l} 64 & 92 & 2\longleftarrow \\ 32 & 46 & 2\longleftarrow \\ 16 & 23 & 2 \\ 8 & 23 & 2 \\ 4 & 23 & 2 \\ 2 & 23 & 2 \\ 1 & 23 & 23 \\ 1 & 1 & \\ & & \end{array}$$

Los números que están marcados por la flechita son los factores que dividieron a ambos números, para obtener el máximo común divisor sólo multiplicamos los marcados con una flecha:

$$\begin{aligned} m.c.d\,[64, 92] &= 2 \times 2 \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ya que al escribir la descomposición en primos de 64 obtenemos:

$$\begin{aligned} 64 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

y al calcular la descomposición de 92 tenemos:

$$\begin{aligned} 92 &= 2 \times 2 \times 23 \\ &= 2^2 \times 23 \end{aligned}$$

Al observar la descomposición de ambos números y compararlas entre sí, es posible ver que coinciden en lo siguiente:

$64 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$94 = \underline{2 \times 2} \times 23$

Es decir que ambos números son divisibles entre el 2^2, si construimos una descomposición que tenga los factores que tienen en común, tendríamos que esa descomposición es:

2×2

Que al calcular el valor al que corresponde tenemos:

$2 \times 2 = 4$

El 4 es el máximo común divisor de 64 y 92:

$m.c.d\ [64, 92] = 4$

Definición 1 *El **Máximo Común Divisor** de dos (o más) números es el producto de sus factores primos comunes, elevados al mínimo exponente con que aparecen en las descomposiciones de cada número. [1]*

En el caso en que la descomposición de los números no tenga factores en común, se dice que los números son primos relativos, y que el único divisor que tienen en común es el "1".

Ejemplo: Encontrar el $m.c.d$ de 34 y 69.

Al calcular la descomposición de cada uno de los números tenemos que:

$34 = 2 \times 17$

$69 = 3 \times 23$

Las descomposiciones no tienen ningún factor en común, pero ambas descomposiciones pueden multiplicarse por el "1" sin que se altere el resultado, de la siguiente forma:

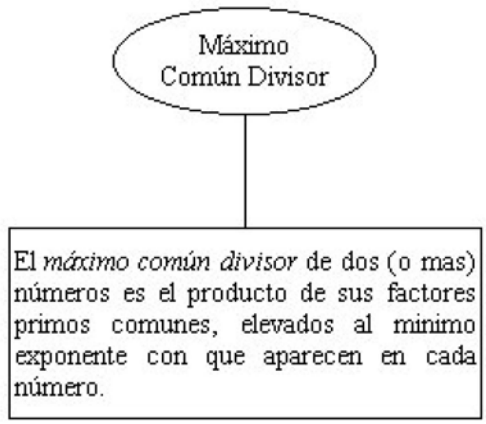
$34 = 1 \times 2 \times 17$

$69 = 1 \times 3 \times 23$

De esta forma es posible ver que ambas descomposiciones tiene en común por lo menos al "1", es decir que cuando aparentemente dos o más números no tienen en su descomposición a un factor común, su $m.c.d$ es el "1".

$m.c.d.[34, 69] = 1$

Conclusión:



En caso de que los números "n" y "m" no tengan factores en común, se les denomina como primos relativos y su máximo común divisor es el "1", es decir $m.c.d.[n, m] = 1$.

Actividad: Practica lo aprendido al calcular el máximo común divisor de los siguientes números en tu cuaderno:

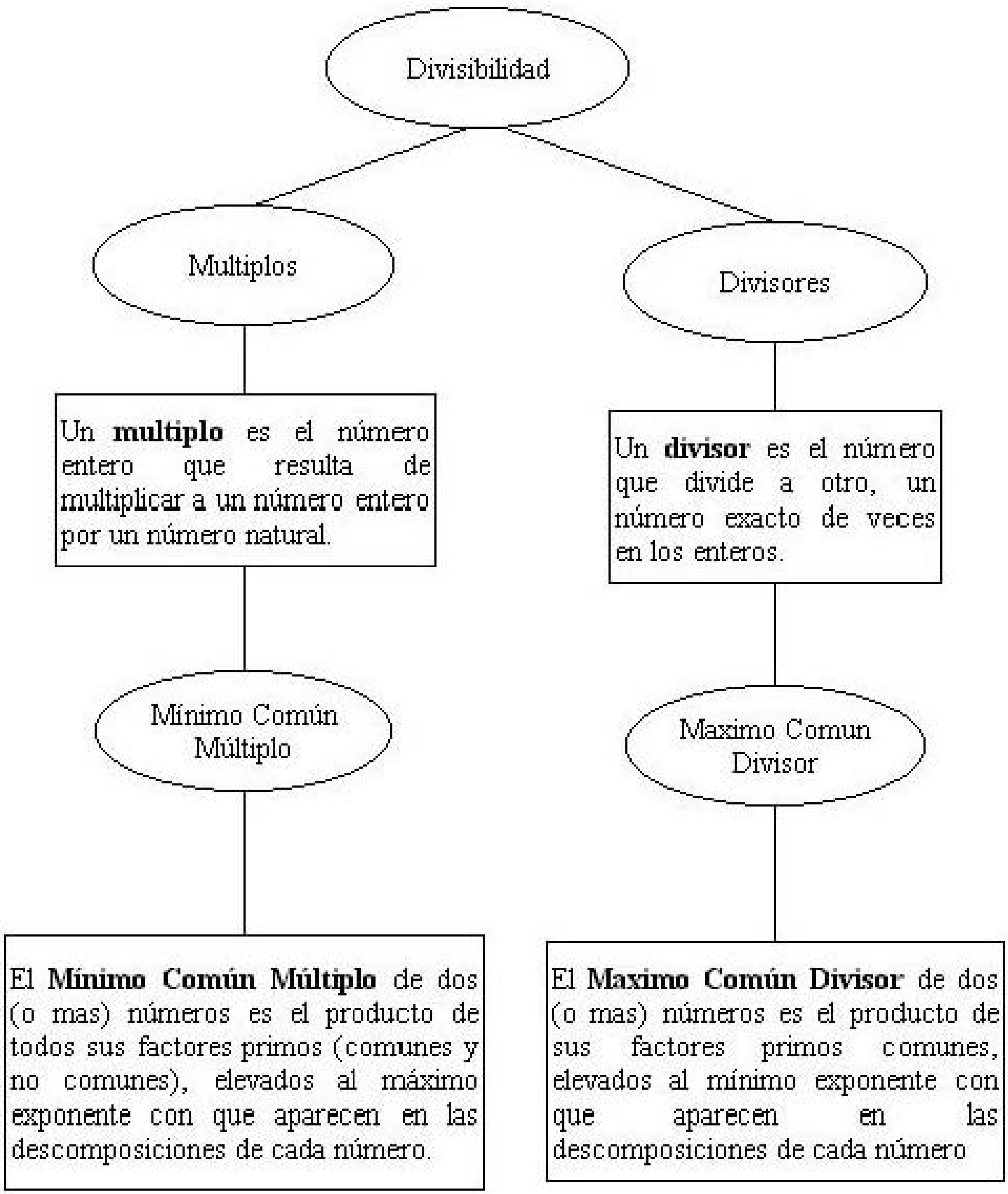
a)325 y 90

b)256, 58

c)584, 888 y 54

Recordatorio:

En el siguiente diagrama tenemos las definiciones de múltiplo y de divisor donde además se presenta las definiciones de máximo común divisor y la de mínimo común múltiplo lo que te será útil para repasarlas y utilizarlas cuando lo necesites a lo largo de tus estudios.



2.9. Referencias

Sugerencia al profesor

Se puede aprovechar el tema de la descomposición en primos para introducir el tema de exponentes.

Sugerencia al profesor

Es posible en este momento explicar las propiedades que cumplen los exponentes, por medio de ejemplos.

Capítulo 3

Lección 3

3.1. ¿Qué más sabemos de los números?

Como una actividad introductoria podriamos pedir que escribas al número 7 de direferentes formas.

Algunas de las formas que podrías contestar son:

7	3+4
$\frac{14}{2}$	$2^3 - 1$
10-3	7x1
2x2x2-1	12345678910-12345678903
6.5+0.5	$2\overline{)14}$
1x7	$\sqrt{49}$
siete	

* .3.7.1

Pregunta:¿Todas esas son formas de escribir al 7?
Tratemos con un relato, de contestar la pregunta anterior.

Había una vez una ciudad amurallada, como esas de la Edad Media, en donde había puentes levadizos y fosas con cocodrilos. Solo que esta ciudad no tenía mucha vigilancia; mas bien tenía un excelente vigilante y éste era un verdugo que seguía un único criterio: para permitir el paso a cualquiera que quisiera visitar la ciudad. Cuando llegaban a la puerta se ponía frente al que quisiera entrar y le decía:

“Puedes decirme lo que quieras, si dices una verdad, puedes entrar; pero si dices una mentira, te corto la cabeza.”

Figura 3.1:

¡Tal vez esa era la razón de que a la entrada de la ciudad hubiera una gran cantidad de cuerpos sin cabeza y un canasto lleno de cabezas justo al lado del verdugo!

Un buen día llegó un forastero que quería entrar al pueblo, después de escuchar al verdugo le dijo lo siguiente:

"Vengo a que me cortes la cabeza."

Figura 3.2:

Este comentario dejó dudando al verdugo, ¿Qué debía hacer?

*.3.7.2

Pregunta: ¿En dónde está el forastero?,¿dentro de la ciudad o afuera?, ¿lo dejó entrar? o ¿le cortó la cabeza?

Actividad: Discúte con tus compañeros las preguntas anteriores.

Primer caso:

Si el forastero estuviera dentro de la ciudad, querría decir que dijo la **verdad**, porque adentro solo están los que dicen la verdad. Analicémoslo un poco. Él dijo "Vengo a que me cortes la cabeza". Si estuviera adentro, querría decir que no se la cortaron, entonces en realidad habría dicho una **mentira**, porque dijo que venía a que le cortaran la cabeza y no fue así, en conclusión el tendría que estar afuera.

Segundo caso:

Si el forastero estuviera afuera, querría decir que dijo una **mentira** porque afuera sólo están aquellos que dicen mentiras. Cuando dijo: "Vengo a que me cortes la cabeza", el verdugo le cortó la cabeza. Si lo analizamos bien en realidad dijo la **verdad**, porque dijo que iba a que le cortaran la cabeza y se la cortaron, entonces él debería estar adentro.

Podría decirse que esto depende del punto de vista del verdugo. Un punto de vista puede hacer que las cosas cambien, como en este caso, que sean verdad o sean mentira.

En matemáticas a esas contradicciones sin sentido se les dice paradojas.

Pregunta: ¿Y qué es una paradoja?

En los libros lo definen: [18] Una **paradoja** es algo que a primera vista parece ser falso, pero que en realidad es cierto; o que parece ser cierto pero que en rigor es falso; o sencillamente que encierra en sí mismo contradicciones.

Una paradoja ocurre cuando se llega a dos resultados opuestos al utilizar dos métodos de razonamiento en apariencia válidos.

Las paradojas se basan en enunciados que inicialmente se dan por verdaderos, a estos enunciados se les conoce como **premisas válidas**, pero el dar por verdadero lo que dicen los enunciados, hace que lleguemos a conclusiones contradictorias.

En el cuento del verdugo lo que damos como premisa válida es un enunciado que se podría decir que no esta completo porque a partir de él, no podemos definir si es verdadero o falso "Yo vengo a que me cortes la cabeza". [3]Es una oración que no está bien fundada, no informa nada, y no podemos decir si es verdadera o es falsa y nos lleva a contradicciones sin sentido, en pocas palabras es una **paradoja**.

Aunque las formas que encontramos para escribir al 7 reflejan diferentes razonamientos, todas ellas son efecto un siete, en ninguna de estas hay contradiccion.

7	siete	3+4	10-3
6.5+0.5	$\frac{14}{2}$	7x1	
$2\overline{)14}$	2x2x2-1	$\sqrt{49}$	
$2^3 - 1$	12345678910-12345678903	1x7	

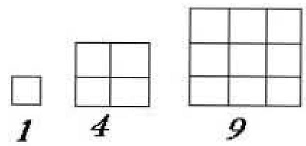
*. 3.7.3

3.2. Áreas de cuadrados y los números cuadrados

Podemos trabajar con cuadrados de "foami"[1], todos del mismo tamaño los cuales utilizaremos como piezas para la siguiente actividad.

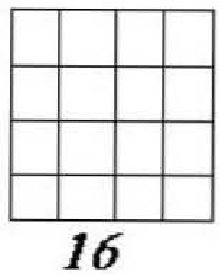
[1] Material muy flexible que puede ser sustituido por papel cartoncillo

Con una sola pieza tenemos un cuadrado, si queremos formar un cuadrado con una mayor cantidad de piezas necesitamos 4 de ellas, al menos; si queremos formar uno mas grande necesitamos 9 piezas o cuadrados.



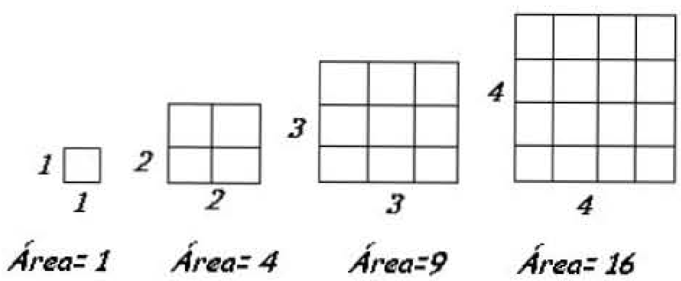
Para formar el siguiente cuadrado con más piezas.

Necesitamos 16.



¿Cual es el area de cada uno de los cuadrados que hemos construido?. Si definimos como unidad de longitud el lado del cuadrado mas pequeño, entonces la unidad de area sera el area de este cuadrado.

El area de cada uno es:



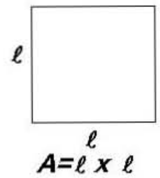
Recordemos que el área de un cuadrado, cuando sabes la longitud de su lado, se calcula mediante la fórmula.

$Area = (lado)$ por $(lado)$

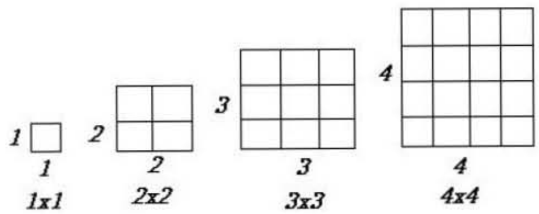
En los libros también aparece como:

$$A = l \times l,$$

que también podemos escribir como $A = l^2$.



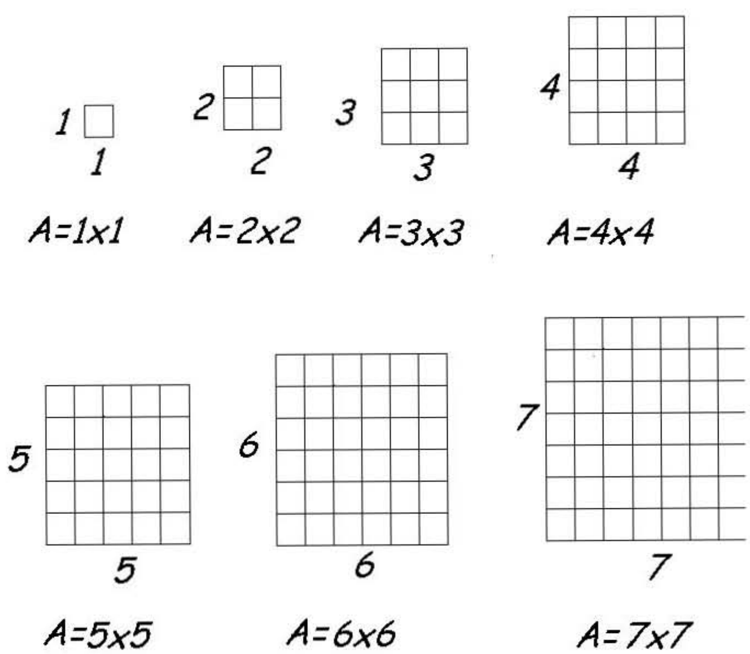
En los cuadrados que formamos tenemos.



De lo anterior podríamos decir que en los cuadrados que construimos, el número de piezas que utilizamos para formarlo coincide con el área del cuadrado.

$$
\begin{aligned}
1 \text{ x } 1 &= 1 \\
2 \text{ x } 2 &= 4 \\
3 \text{ x } 3 &= 9 \\
4 \text{ x } 4 &= 16
\end{aligned}
$$

Estos son los cuadrados que construimos, pero si construyeramos los demás cuadrados tendríamos que agregar más piezas.



Al construir los cuadrados tenemos una lista mas grande de áreas de los cuadrados, se les conoce como números cuadrados, los que hemos construido hasta el momento son:

$$\begin{array}{ccccc} 1^2 & = & 1 \times 1 & = & 1 \\ 2^2 & = & 2 \times 2 & = & 4 \\ 3^2 & = & 3 \times 3 & = & 9 \\ 4^2 & = & 4 \times 4 & = & 16 \\ 5^2 & = & 5 \times 5 & = & 25 \\ 6^2 & = & 6 \times 6 & = & 36 \\ 7^2 & = & 7 \times 7 & = & 49 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Recuerda que los puntitos significan que aun se puede aumentar la lista.

De lo anterior tendríamos que los primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,...

Ya que se necesitan por ejemplo 49 piezas para construir el cuadrado de área 49, al utilizar como medida para sus lados al 7, encontramos que el área como es 7 por 7 tambien da como resultado 49.

Actividad: Completa la siguiente tabla de números cuadrados en tu cuaderno, hasta que tengas los primeros 20 números cuadrados.

Medida del lado	Cálculo del Área	Área	Número cuadrado.
1	A=1x1	1	1
2	A=2x2	4	4
3	A=3x3	9	9
4	A=4x4	16	16
5	A=5x5	25	25
6	A=6x6	36	36
7	A=7x7	49	49
8	A=		
9	A=		
10	A=		
11	A=		
12	A=		
13	A=		
14	A=		
15	A=		
16	A=		
17	A=		
18	A=		

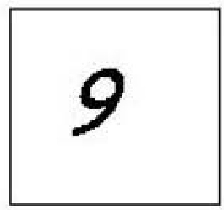
A los números que resultan de multiplicar un número por sí mismo se les conoce como ***números cuadrados***.

Ejemplo 1:

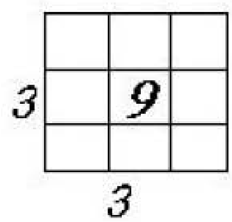
¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es 9?, ¿Cómo procederíamos para encontrar el lado?, ¿Cuánto debe medir el lado para que la multiplicacion de lado por lado de como resultado nueve?

Cuando queremos saber cuanto vale el lado de un cuadrado del cual conocemos su área lo representamos con el símbolo $\sqrt{area}$. Si queremos saber el lado de un cuadrado cuya área es 9, lo representamos como $\sqrt{9}$.

Buscamos qué cuadrado esta formado por 9 piezas y contamos cuantas piezas tiene por lado.



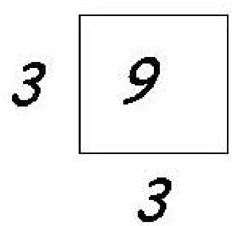
El cuadrado que está formado por nueve piezas tiene 3 en su lado.



Entonces

$$\sqrt{9} = 3$$

ya que $3 \times 3 = 9$



Es decir, $\sqrt{area}$ =lo que mide el lado del cuadrado que tiene esa "cantidad de piezas de tamaño uno".

Si tenemos un cuadrado de área A entonces: $\sqrt{A}$ = la longitud del lado del cuadrado de area A.

En general podríamos encontrar la raíz cuadrada de todos los números que son cuadrados, como $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \ldots$

Al utilizar la tabla que completaste anteriormente, si copiamos en una tabla nueva la información que se encuentra en las columnas señaladas con una flecha podemos formar otra tabla, en la que solamente tenemos al número cuadrado y la medida del lado que lo forma.

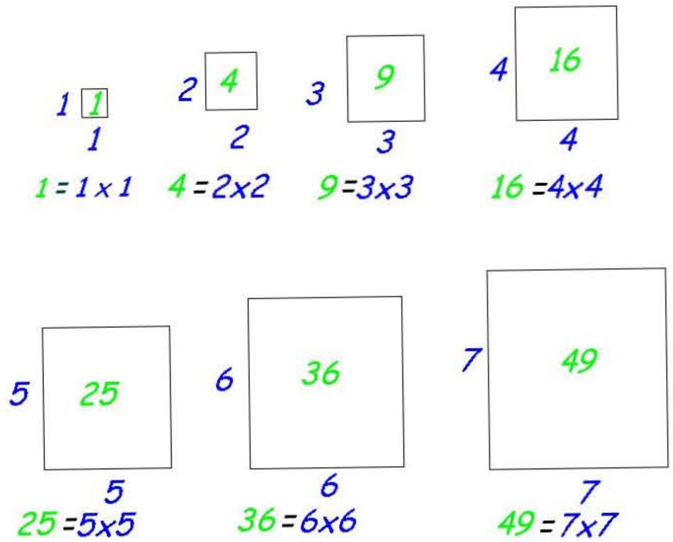
Observa la tabla:

↓		↓	
Medida del lado	Cálculo del Área	Área	Número cuadrado.
1	A=1x1	1	1
2	A=2x2	4	4
3	A=3x3	9	9
4	A=4x4	16	16
5	A=5x5	25	25
6	A=6x6	36	36
7	A=7x7	49	49
8	A=8x8	64	64
9	A=9x9	81	81
10	A=10x10	100	100
11	A=11x11	121	121
12	A=12x12	144	144
13	A=13x13	169	169
14	A=14x14	196	196
15	A=15x15	225	225
16	A=16x16	256	256

La tabla con la información señalada es la siguiente:

Área	Medida del lado.
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10
121	11
144	12
169	13
196	14
225	15
256	16

Ya podemos observa en la siguiente figura que la relación de las áreas de los cuadrados que hemos construido y la medida de sus lados se expresa mediante la ráiz cuadrada.



De los cuadrados que elaboramos, podemos decir que al calcular los lados de cada uno ellos tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1} &= 1 \\
\sqrt{4} &= 2 \\
\sqrt{9} &= 3 \\
\sqrt{16} &= 4 \\
\sqrt{25} &= 5 \\
\sqrt{36} &= 6 \\
\sqrt{49} &= 7 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

De lo anterior podríamos concluir que los números cuadrados tienen raiz exacta debido a que se obtienen de calcular las áreas de los cuadrados cuyo lado es números naturales.

Es decir los números cuadrados tienen siempre raíz cuadrada "exacta" y esta raíz es siempre un número natural.

Ya podemos contestar la pregunta, ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado de área 100?

El 100 es un número cuadrado y al observar la tabla que elaboramos tenemos que del número cuadrado 100, la medida de su lado es 10, por lo que tenemos que:

$$\sqrt{100} = 10$$

Pero si los números cuadrados son solamente los que cumplen el ser un número natural multiplicado por sí mismo, como:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,...

entonces ¿qué pasa con los demás números que no son cuadrados?

¿Tendrán raíz cuadrada?

¿Habrá un cuadrado con área 2, ó 3, ó 5, etc?

¿Qué pasa con los demás números?

Por ejemplo con el 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20 ,21,... Si nos ponemos a sacar cuentas en realidad son la gran mayoría, los números que no son números cuadrados.

Si tuvieran raíz cuadrada, ¿cómo se calcula la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado?

Si por ejemplo tomamos un cuadrado de área 10.

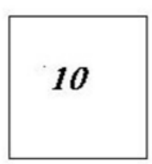
Pregunta:¿Cuánto vale su lado?

3.3. Acercándose a la raíz cuadrada

¿Qué pasa con los números que no son cuadrados?, ¿Es posible encontrar la medida del lado del cuadrado cuya área es ese número?

Ejemplo 1:

Si quisiéramos saber cuánto mide el lado de un cuadrado con área 10:



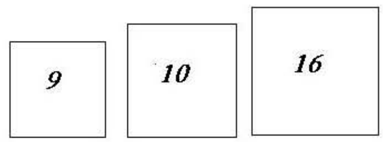
Cómo encontramos ¿cuánto mediría el lado del cuadrado de área 10?

Lo representamos como hicimos en los otros casos.

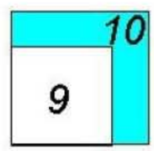
$$\sqrt{10} = ?$$

Busquemos un número que al multiplicarse por sí mismo de como resultado 10.

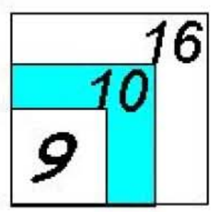
En el cuadrado de área 10, no sabemos exactamente cuánto mide su lado, pero conocemos el valor del lado del cuadrado de área 9 y el lado del cuadrado de área 16, el cuadrado de área 10 quedaría entre esos 2 cuadrados, ya que:



El cuadrado de área 9 es más pequeño que el cuadrado de área 10 y si los tratamos de poner uno sobre otro se verían de la siguiente forma.



Comparado el cuadrado de área 10 con el de área 16, el de área 10 es menor que el de área 16, y al encimarlos para compararlos se ven de la siguiente forma:



en símbolos matemáticos tenemos que:

$$9 < 10 < 16$$

Al representar así que el 9 es más chico (menor que) 10 y que a su vez es más chico (menor que) 16.

Cuando se usan los símbolos mayor que ($>$) o menor que ($<$) la abertura señala al valor mayor y la punta señala al valor menor.

Si pregunto cuánto mide el lado de cada uno de los cuadrados tendría que representarlos con el símbolo $\sqrt{area}$. Al calcular el lado de cada uno de los cuadrados de la siguiente manera:

El lado del cuadrado de área 9, es más chico que el lado del cuadrado de área 10 que es mas chico que el lado del cuadrado de área 16. Esto es:

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

Pero el lado del cuadrado de área 9 es 3, es decir $\sqrt{9} = 3$ y el lado del cuadrado de área 16 es 4, es decir $\sqrt{16} = 4$, como resultado tendríamos:

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

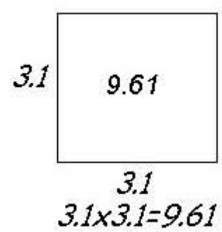
Con esto podemos decir que el valor del lado de un cuadrado de área 10 está entre tres y cuatro, utilizamos los números decimales, para aproximar el valor del lado del cuadrado de área 10, podríamos decir que es "Tres punto y algo", es decir, podría ser 3.1 o 3.2 o 3.9, cualquier valor de este tipo podría ser una aproximación al valor que buscamos, porque son números entre 3 y 4.

Sabemos que para poder calcular al lado del cuadrado de área 10, tiene que cumplir la fórmula del área del cuadrado ($A = l^2$), usamos el mismo principio, es decir multiplicamos el valor por sí mismo para ver cuánto resulta y descubrir qué valor se aproxima más a 10 sin pasarse.

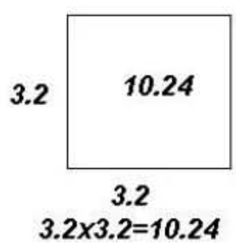
si fuera 3.1 tendríamos: si fuera 3.2:

$$\begin{array}{r} 3.1 \\ \underline{\text{x}3.1} \\ 9.61 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.2 \\ \underline{\text{x}3.2} \\ 10.24 \end{array} \text{ se pasa de 10}$$

Al multiplicar 3.1 x 3.1 obtenemos como resultado 9.61 lo que en área de los cuadrados estaría representado como:



Al multiplicar 3.2 x 3.2 obtenemos 10.24, sería:



Pero 10.24 ya es un valor mayor que 10, por eso 3.1 es un valor aproximado y menor a la raíz de 10. Podríamos concluir lo siguiente:

$$\sqrt{10} \doteq 3.1$$

Este símbolo $\doteq$ significa aproximadamente, lo que quiere decir que el enunciado anterior sería "La raíz cuadrada de diez es aproximadamente tres punto uno.", es decir tres enteros un décimo.

Si el número no es cuadrado las aproximaciones a una raíz cuadrada siempre pueden ser mejoradas, es decir puedo aumentar más decimales al valor que encontré.

Pregunta: ¿Qué son las aproximaciones de los números?

3.3.1. Aproximación por Truncamiento o por Redondeo

Aproximación por truncamiento:

A la forma más simple de aproximar un número se le conoce como **truncar o aproximación por truncamiento**, es decir, escribir las primeras cifras después del punto decimal y eliminar todas las demás.

Ejemplo 1:

$\frac{1}{3}$=0.33333333... pero al truncar el número para que la aproximación sea mas fácil de utilizar, tenemos que $\frac{1}{3} \doteq 0.33$ que es un truncamiento a centésimos.

Ejemplo 2:

El símbolo π (pi) es una letra griega que representa un número cuyo valor es muy útil al calcular áreas de los círculos y otras "cosillas", su valor en una calculadora, o en una computadora, podría dar como resultado $\pi = 3.14159264...$ y al escribirlo en una forma truncada sería $\pi \doteq 3.141592$ que es un truncamiento a millonésimos. Pero las aproximaciones por truncamiento resultan muchas veces poco adecuadas; por ejemplo un número como 0.498 es muy cercano a 0.5 pero al aproximarlo por truncamiento a décimos escribiríamos $0.498 \doteq 0.4$ que está "muy lejos" de 0.498.(Escribimos "muy lejos" porque siempre es relativo a las distancias que se miden).

También hay otra forma de aproximarse a un número.

Aproximación por Redondeo

Es posible obtener **aproximaciones al redondear el número**, es decir escribir solo las primeras cifras después del punto y eliminar todas las demás, se toman como base las siguientes reglas.

Caso I.

Si la primera cifra eliminada es 0, 1, 2, 3 o 4, se dejan las cifras a su izquierda sin alterar.

Ejemplo 3:

5.682347... Eliminamos a partir del 3 todas las siguientes cifras, como la primera cifra que se va a eliminar es 3 entonces no alteramos el número, solo borramos los números a partir de ese 3,es decir el 347... ya no lo escribimos y obtenemos lo siguiente:

$$5.682\underbrace{347...}_{\downarrow \atop \text{ya no los escribo}} \doteq 5.682$$

y obtuvimos una aproximación por redondeo a milésimos.

En este caso vemos que coincide con la aproximación por truncamiento a milésimos porque como el número 3 está en la lista de 0, 1, 2, 3 y 4 solo quitamos los dígitos que están a su lado derecho, sin modificar la cifra, que al truncar a milésimos solo quitamos los números que están después del que ocupa la posición de los milésimos, en este caso, después del 2. Es decir después de aplicarle al número 5.682347... la operación de truncamiento tenemos que:

$5.682347... \doteq 5.682$

Caso II.

Si la primera cifra eliminada es 5, 6, 7, 8, o 9 se le aumenta uno a la última cifra que sí se escriba.

Ejemplo 4:

6.83472... Eliminamos a partir del 7 todas las siguientes cifras, como la primera cifra que se va a eliminar es el 7 entonces aumentamos uno a la última cifra que si se va a escribir, que en el caso 6.83472..., si a partir del 7 borro todas las cifras, el último número que si se escribe es el 4 a este número es al que le aumento uno, en vez de escribir un cuatro escribiría un cinco y el resultado sería:

$$6.83\underbrace{472...}_{\downarrow \atop {\text{ya no los escribo} \atop \text{en lugar de 472...}}} \doteq 6.83\mathbf{5}$$

escribo solo 5 que es una aproximación por redondeo a milesimos

Después de aplicarle al número 6.83472... la operación de redondeo a milésimos obtenemos que 6.83**472...**$\doteq$6.83**5**

Ejemplo 5:

El valor aproximado de $\pi = 3.14159264...$ cuando se redondea a diezmilésimos es 3.1416, porque a partir del 9 borro todas las demás cifras y él último número que si se escribe es el 5 y al aproximar por redondeo le corresponde el caso 2, como el número es un 5 le aumento uno y se convierte en un 6:

$$3.141\underbrace{59264...}_{\downarrow \atop {\text{ya no los escribo} \atop \text{en lugar de 59264...}}} \doteq 3.141\mathbf{6}$$

escribo sólo 6

Por eso se concluye que $\pi \doteq 3.1416$ que también es una aproximación redondeada a diezmilésimos y es el valor que tal vez recuerdes, porque es el valor que le dan en los libros. Si utilizáramos su valor aproximado 3.14159264... Sería poco práctico de manejar para hacer operaciones, por eso lo redondeamos para tener una aproximación de este número, que además tiene pocas cifras, con esto obtenemos que $\pi = 3.1416$ aproximadamente.

Actividad: Practica los métodos de aproximación al completar la siguiente tabla, al representar a los números solamente con tres cifras después del punto decimal, es decir redondearlos a milésimos.

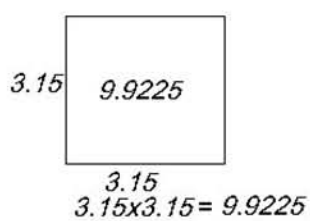
Número	Aproximación por truncamiento	Aproximación por redondeo
5.158**645**	5.158	5.15**9**
4.853**325**	5.853	
2.112**732**		2.11**3**
9.454**8955**		
4.756**4545**		
9.315**89**		
6.879**38**		

Pero regresemos a ¿Cómo calcular el valor de la raíz cuadrada por aproximación? o ¿Cómo encontramos una mejor aproximacion a $\sqrt{10}$?

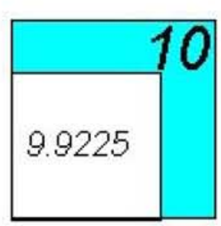
Hasta el momento sabemos que $\sqrt{10} \doteq 3.1$, pero sería una mejor aproximación si cada vez aumentamos más cifras decimales, es decir el valor de $\sqrt{10}$ podría ser: 3.11 o 3.12 o 3.15 o 3.19, probemos con algunos valores para encontrar al que se acerca más al valor de $\sqrt{10}$, tomemos 3.15, 3.16 y 3.17.

$$\begin{array}{rrr} 3.15 & 3.16 & 3.17 \\ \underline{\text{x}3.15} & \underline{\text{x}3.16} & \underline{\text{x}3.17} \\ 9.9225 & 9.9856 & 10.0454 \end{array}$$

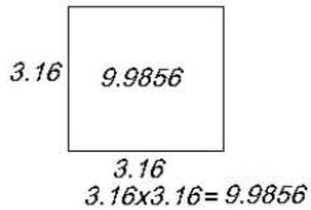
En la multiplicación de 3.15×3.15 obtenemos el valor 9.9225, que representándolo como área de un cuadrado se vería de la siguiente manera:



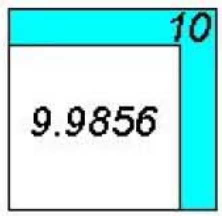
Y al compararlo con el cuadrado de área 10



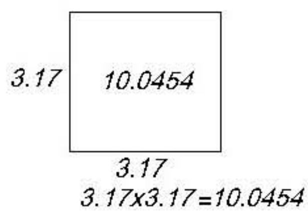
Pero con la operación 3.16×3.16 nos aproximamos aún más porque obtenemos 9.9856 y su representación sería la siguiente:



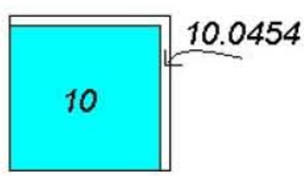
Que al compararlo con el cuadrado de área 10, es posible ver que se parece más a este valor.



Al probar con 3.17 x 3.17 el valor que obtenemos ya es 10.0454



Al hacer una comparación con el cuadrado de área 10, resulta que es más grande que el de área 10.



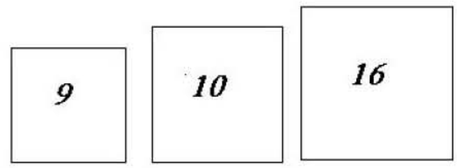
Lo cual significa que el lado del cuadrado de área 10 está entre 3.16 y 3.17.

$$3.16 < \sqrt{10} < 3.17$$

Al tomar el valor de 3.17 el área que se obtiene es mayor que 10 por lo tanto la mejor aproximación por debajo de 10 sería 3.16, concluimos que $\sqrt{10} \doteq 3.16$, conforme aumentamos los decimales nos aproximamos aún más al valor que buscamos, podemos repetir este procedimiento una vez por cada cifra decimal que deseemos encontrar para una mejor aproximació.

Ejemplo 1: $\sqrt{10}$ por aproximación a centésimos.

1. Cuando tomamos el cuadrado de área 10 vimos que la medida de su lado está entre la del cuadrado de área 9 y la del cuadrado de área 16.



2. Es decir la medida del lado del cuadrado de área 10 está entre 3 sin ser 3 y 4 sin ser 4.

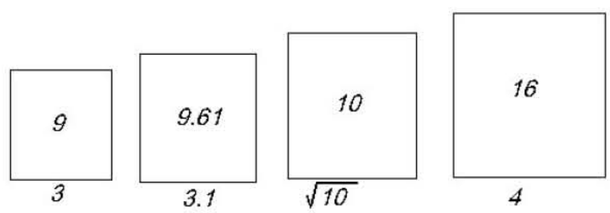
$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

Que es.

$$3 < \sqrt{10} < 4$$

3. Pero al aumentar un poco la medida del lado obtuvimos áreas más grandes que 9 pero todavía más pequeñas que 10.

4. Cuando el lado medía 3.1 obtuvimos como área 9.61, si ordenáramos los cuadrados de menor a mayor se verían de la siguiente forma.



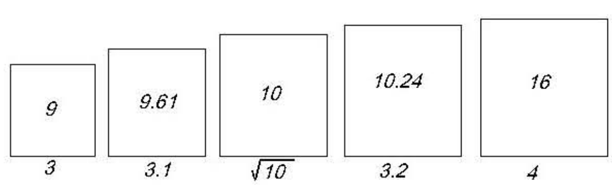
$$\sqrt{9} < \sqrt{9.61} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

Es decir

$$3 < 3.1 < \sqrt{10} < 4$$

Ahora el valor $\sqrt{10}$ está encerrado entre 3.1 y 4, quiere decir que su valor está entre 3.1 sin ser 3.1 y 4 sin ser 4.

5. Cuando el lado medía 3.2 obtuvimos como área 10.24, si ordenáramos los cuadrados de menor a mayor se verían de la siguiente forma.



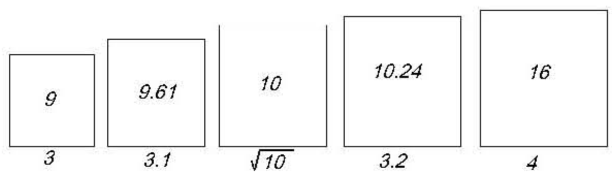
Con esto obtuvimos que la medida de los lados de cada uno de los cuadrados cumple.

$$\sqrt{9} < \sqrt{9.61} < \sqrt{10} < \sqrt{10.24} < \sqrt{16}$$

Es decir

$$3 < 3.1 < \sqrt{10} < 3.2 < 4$$

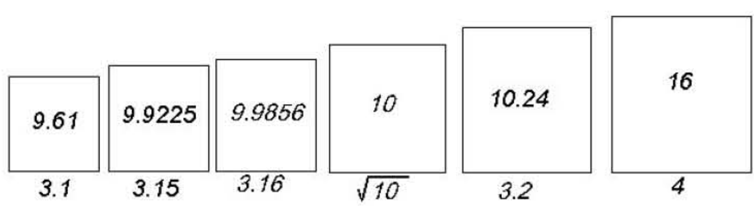
6. Ahora el valor $\sqrt{10}$ está encerrado entre 3.1 y 3.2, quiere decir que su valor está entre 3.1 sin ser 3.1 y 3.2 sin ser 3.2, se vería de la siguiente manera.



Estos cuadrados ya son más parecidos entre sí porque sus áreas 9.61, 10 y 10.24 ya que son muy parecidas entre ellas.

7. Cuando quisimos aproximarnos aún más al valor del lado tomamos la medida 3.15 y obtuvimos como área 9.9225, que es más grande que el de área 9.61,tomamos el valor que le seguía 3.16 que nos daba como área 9.9856 que se aproxima más a 10.

Al ordenar los cuadrados de menor a mayor se tiene:



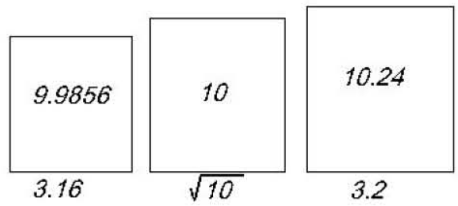
Con lo cual, podemos deducir que al obtener la medida de los lados de cada uno de los cuadrados.

$$\sqrt{9.61} < \sqrt{9.9225} < \sqrt{9.9856} < \sqrt{10} < \sqrt{10.24}$$

Es decir

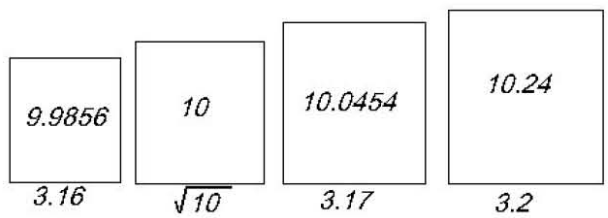
$$3.1 < 3.15 < 3.16 < \sqrt{10} < 3.2$$

Ahora el valor $\sqrt{10}$ está encerrado entre 3.16 y 3.2, quiere decir que su valor está entre 3.16 sin ser 3.16 y 3.2 sin ser 3.2



Estos cuadrados ya son más parecidos entre sí porque sus áreas 9.9856, 10 y 10.24 ya son muy parecidas entre ellas.

8. Cuando el lado mide 3.17 el área es 10.0454, si ordenáramos los cuadrados de menor a mayor se verían de la siguiente forma.



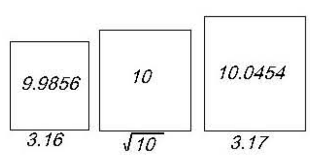
De tal forma sabemos que para obtener la medida de los lados de cada uno de los cuadrados.

$$\sqrt{9.9856} < \sqrt{10} < \sqrt{10.0454} < \sqrt{10.24}$$

Tenemos que:

$$3.16 < \sqrt{10} < 3.17 < 3.2$$

Ahora el valor $\sqrt{10}$ está encerrado entre 3.16 y 3.17, quiere decir que su valor está entre 3.16 sin ser 3.16 y 3.17 sin ser 3.17



Estos cuadrados ya son más parecidos entre sí porque sus áreas son 9.9856, 10 y 10.0454 y ya son muy parecidas entre sí.

Observa que los pasos son esencialmente muy parecidos entre sí incluso podría decirse que son casi iguales y que su única finalidad es encerrar al valor que no conozco entre valores que si conozco.

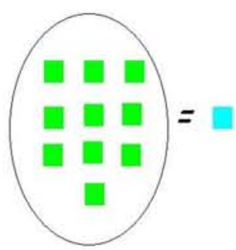
Para obtener la raíz cuadrada aproximada a centésimos nos interesa que el valor del área no se pase de 10 y que además sea el más próximo a 10, por estas razones escogemos que el valor del lado del cuadrado de área 10 es 3.16, en otras palabras $\sqrt{10} \doteq 3.16$, que es una aproximación a centesimos por truncamiento.

Actividad: Calcula el valor a proximado a centesimos del lado del cuadrado de área 21 por el procedimiento anterior.

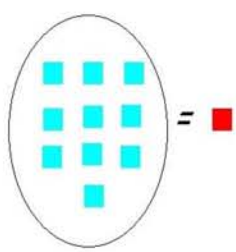
3.4. Método Maria Montessori

*. 3.7.4

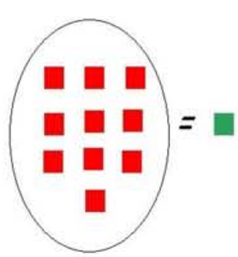
Para trabajar en esta seccion utilizaremos cuadrados de foami de los siguientes colores:
Unidades = verde claro
Decenas = azul claro
Centenas = rojo claro
Unidades de millar = verde oscuro
Decenas de millar = azul oscuro
Centenas de millar = rojo oscuro
Donde 10 unidades (color verde claro) equivalen a 1 cuadrado de decena (color azul claro).



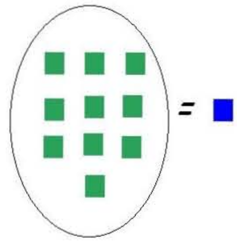
10 decenas (color azul claro) equivalen a 1 cuadrado de centena (color rojo claro).



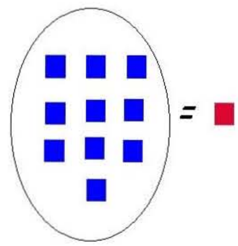
10 centenas (color rojo claro) equivalen a 1 cuadrado de unidad de millar (color verde oscuro).



10 unidades de millar(color verde oscuro) equivalen a 1 cuadrado de decenas de millar (color azul oscuro).



10 decenas de millar (color azul oscuro) equivalen a 1 cuadrado de centena de millar (color rojo oscuro).

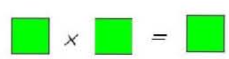


*. 3.7.5

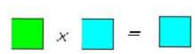
Para calcular la raíz cuadrada de un número, necesitamos formar de alguna manera un cuadrado que tenga exactamente esa área, por eso vamos a utilizar las piezas de “foami” de colores para formar este cuadrado.

Cuando calculábamos el área de un cuadrado bastaba con multiplicar lado por lado para encontrarla.

Veamos como multiplicar las unidades por las decenas o las unidades por las centenas, con los cuadrados de foami.



Porque 1x1=1, es decir, verde por verde no cambia de color.

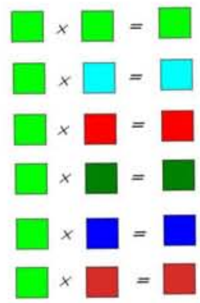


Porque 1x10=10, es decir, verde por azul es azul.

Podemos usar la siguiente tablita para no cometer equivocaciones, multiplicamos a la unidad por las decenas, a la unidad por las centenas, a la unidad por las unidades de millar, etc.

$$\begin{array}{ll} 1 \times 1 & = 1 \\ 1 \times 10 & = 10 \\ 1 \times 100 & = 100 \\ 1 \times 1000 & = 1000 \\ 1 \times 10000 & = 10000 \\ 1 \times 100000 & = 100000 \end{array}$$

Que en cuadrados de foami es la siguiente.

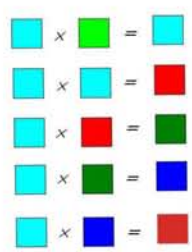


Observa que al multiplicar por la unidad no cambian los colores de los cuadrados que resultan.

Si multiplicamos de la misma manera las demás decenas por las unidades, las decenas por decenas, las decenas por centenas, etc. Resulta la siguiente tabla de multiplicación por una decena:

10×1	$=10$
10×10	$=100$
10×100	$=1000$
10×1000	$=10000$
10×10000	$=100000$

Que al representarlo con los cuadrados de "foami" se muestra de la siguiente manera:



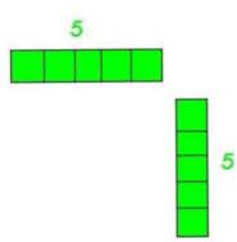
Observa que al multiplicar por una decena si cambian de color los cuadrados que resultan.

Pero,¿Cómo construimos a los números cuadrados con foami?

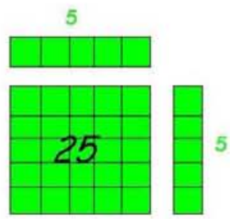
Podemos construir los números cuadrados al calcular sus áreas al multiplicar lado por lado de la siguiente forma:

Ejemplo 1:

El cuadrado formado por el lado que mide 5.



Sabemos que $5 \times 5 = 25$

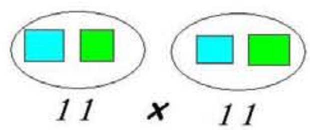


Tenemos 25 cuadrados de unidad.

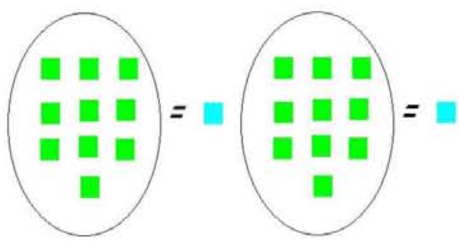
De esta forma representamos al cuadrado de área 25 con igual cantidad de cuadrados de foami. 25 cuadrados verde claro, que se pueden acomodar en un cuadrado de lado 5.

Ejemplo 2:

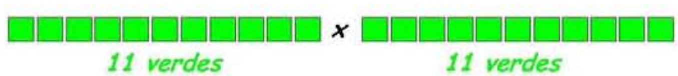
El cuadrado formado por el lado que mide 11. Sabemos que $11 \times 11 =$, pero, ¿cómo se representa 121 en un cuadrado?



Cambiamos cada cuadrado azul por 10 cuadrados verdes.



La multiplicacion de 11x11=

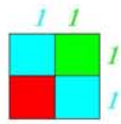


Al resolver la multiplicacion tenemos que 11x11 = 121.

Al agrupar los 121 cuadrados tenemos:

Al intercambiar los 100 cuadrados verdes obtenemos uno rojo, al cambiar los 20 cuadrados verdes obtenemos 2 azules y además queda un cuadrado verde.

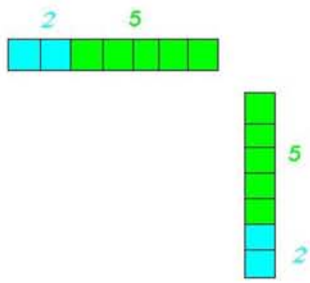
Al reacomodar los cuadrados podemos representar la multiplicacion 11x11=121 como:



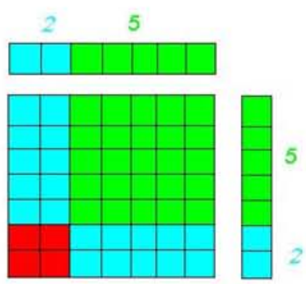
Que "podría" verse como un cuadrado de 11 unidades por lado.

Ejemplo 3:

Para representar la multiplicacion del cuadrado de lado 25, tenemos que al multiplicar $25 \times 25 =$ se representaría de la siguiente forma:



Al utilizar la tabla de multiplicacion de las unidades y la de las decenas, tenemos que la multiplicación da como resultado:



Cuando calculamos la raíz cuadrada tenemos que encontrar el valor del lado que debo de multiplicar cuando el número tiene 2 cifras, el resultado de multiplicar $5 \times 5 = 25$. Este número es posible representarlo solamente con unidades, pero al multiplicar por ejemplo $11 \times 11 = 121$ se necesita utilizar los cuadrados de las unidades y las decenas para poder realizar la multiplicación, lo mismo ocurre al multiplicar 25 por 25.

Actividad: Con los cuadrados de foami construye los siguientes cuadrados.

a) El cuadrado de área 225, que tiene como lado 15.

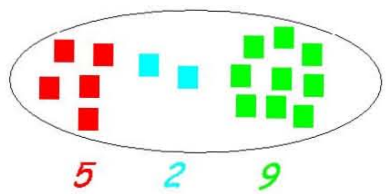
b) El cuadrado de lado 17, es decir representa la multiplicación 17 por 17.

Al calcular la raíz cuadrada por este método lo que necesitamos es convertir las piezas que nos dan, de alguna forma, para crear un cuadrado que tenga cómo área el número que buscamos. Para ejemplificar como se haría veamos lo siguiente.

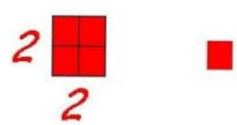
Ejemplo 1:

Calculemos la raíz cuadrada de 529 para ejemplificar el método con este material.

1. En cuadrados de colores el 529 equivale a 5 centenas, 2 decenas y 9 unidades que es.



2. Tomamos la primera cantidad que es 5. Es necesario encontrar la forma de acomodar los cuadrados rojos de tal manera que se empiece a formar un cuadrado más grande, podemos utilizar cuatro cuadrados y acomodarlos de la siguiente forma y sobraría uno.

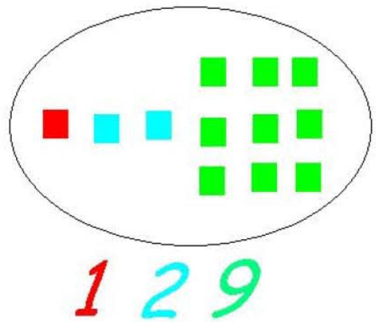


El 5 lo puedo acomodar en un cuadrado de lado 2, porque 2x2=4 y es menor que 5. Es decir necesito cuatro cuadrados de centenas (rojos claros)para formar un cuadrado y encontrar la raíz de 529.

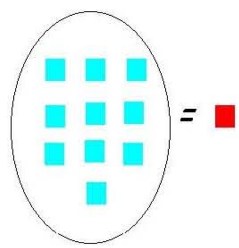
3. Para encontrar el cuadrado de área 529 restamos los 4 cuadrados rojos que ya acomodamos, es decir le restamos al número original 400

$$\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 9 \\ -4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 9 \end{array}$$

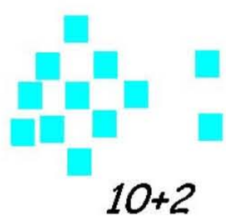
El resultado nos dice que sobra un cuadrado de centenas (rojo claro), dos cuadrados de decenas (azul claro) y 9 cuadrados de unidades (verde claro).



4. El cuadrado que representa una centena lo podemos convertir en 10 cuadrados de decenas (azul claro).



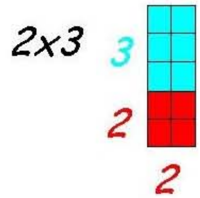
5. Y le aumentamos los otros 2 cuadrados azules que teníamos y entonces obtenemos.



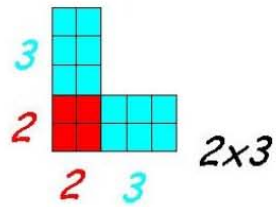
6. Tenemos 12 cuadrados azules y se trata de repartirlos en los lados del cuadrado rojo para completar un cuadrado más grande. El 12 representa 12 cuadrados azules, es decir, representa 12 decenas, por lo que tenemos que repartirlo en los espacios de tal manera que queden en dos grupos que tengan la misma cantidad, para que cada lado que resulte mida lo mismo que el otro.

   Observa el ejemplo.

   Se calcularía de la siguiente forma como es 12 tendríamos que repartir esos 12 en 2 partes iguales, en donde el número que completarían la medida de cada lado podrían ser 3 y 3 porque 2x3=6 y 6+6=12



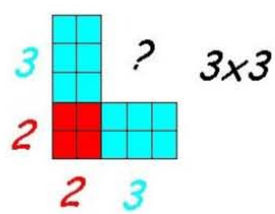
7. Al colocar el siguiente 3 tenemos que:



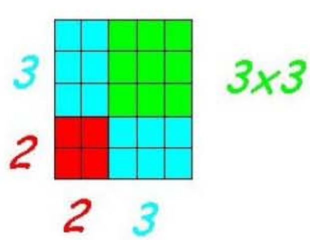
8. Repartidos estarían los 12 cuadraditos, quedaría hacer la resta.

5	2	9
-4	0	0
1	2	9
-1	2	0
	0	9

Pero para completar el cuadrado la distribución de los cuadrados que hicimos nos obliga un número.



9. Al calcular la multiplicación tendríamos:



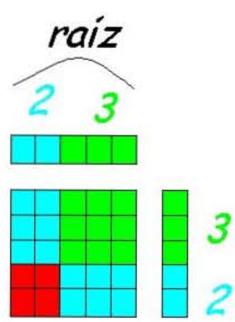
Que son exactamente los 9 cuadrados de unidad (verdes claro) que nos quedaban todavía por repartir.

10. En este caso restaríamos 9 y se obtiene

5	2	9
-4	0	0
1	2	9
-1	2	0
	0	9
		-9
		0

Que es exactamente la cantidad que necesitábamos repartir.

La respuesta es que $\sqrt{529} = 23$

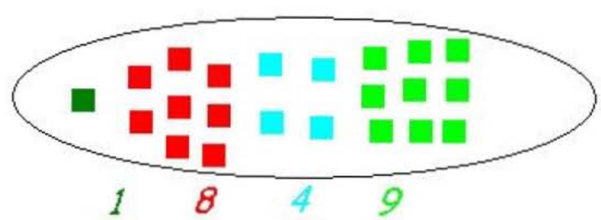


Porque el lado del cuadrado que tiene como área 529 mide 23.

Ejemplo 2:

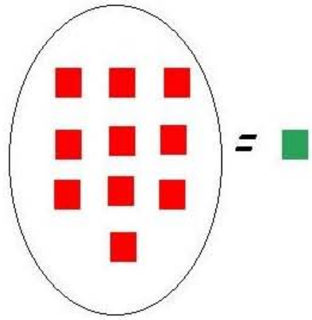
Calculemos la raíz cuadrada de 1849

1. En cuadrados de colores el 1849 equivale a 1 unidad de millar, 8 centenas, 4 decenas y 9 unidades.

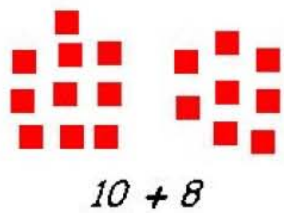


2. Primero separamos las cifras de 2 en 2 de derecha a izquierda para formar con ese valor el cuadrado de área 1849, al separar las cifras obtenemos 18,49.

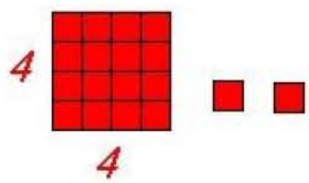
La primera cantidad es 18, habrá que acomodarla de tal manera que se pueda formar un cuadrado de un solo color, pero en este caso no es posible porque son dos colores diferentes, primero es necesario convertir el 1 de las unidades de millar en cuadros rojos de las centenas, es decir.



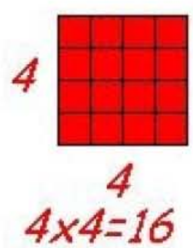
Al juntar los 10 cuadrados de las centenas que acabamos de cambiar, con los 8 que ya teníamos nos queda lo siguiente:



Ahora tenemos 18 rojos , 4 azules y 9 verdes, necesitamos acomodar los 18 cuadrados de tal manera que se forme un cuadrado de un solo color, para poder lograrlo necesito solamente 16 cuadrados de centenas (rojos claros) y sobrarían dos cuadrados de centenas.



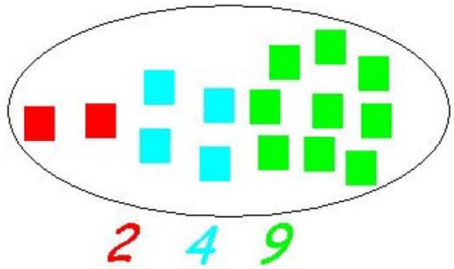
3. Cuando repartimos los 16 primeros cuadrados, al tomar como lado 4, tenemos.



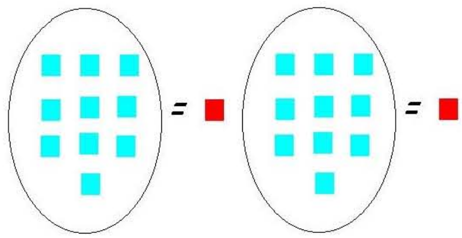
4. Realizamos la resta, al quitar los 16 cuadrados rojos.

18	4	9
-16	0	0
2	4	9

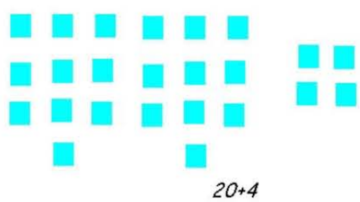
Sobran 2 cuadrados de centenas (rojo claro), 4 azules y 9 verdes, que además hay que distribuir de manera tal, que se forme un cuadrado mas grande que el de 16 rojos.



5. Podemos convertir los 2 rojos en 20 cuadrados de decenas (azul claro).



6. Y le aumentamos los otros 4 cuadrados azules que teníamos, entonces el resultado es.

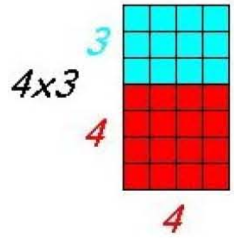


7. De esta manera ya tenemos 24 azules y 9 verdes, ahora los 24 azules hay que repartirlos en los espacios de tal manera que queden en dos grupos en donde tengan la misma cantidad en ambos grupos, para poder formar un cuadrado más grande.

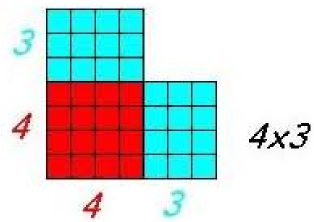
   Se calcula de la siguiente forma, como al 24 tenemos que repartirlo en 2 partes iguales y sabemos que además debe de ser "4 por algo"

$$\frac{24}{2} = 4(?)$$

   En donde el número que completarían la medida es el 3, porque 4x3=12 y 12+12=24



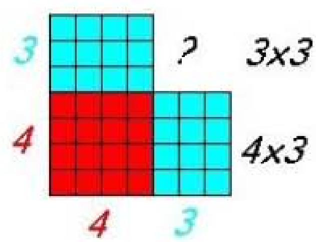
8. Al colocar el siguiente 3 tenemos que:



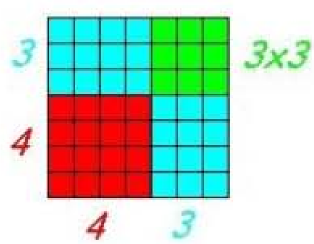
9. Ya están repartidos los 24 cuadraditos azules y quedaría hacer la resta.

18	4	9
-16	0	0
2	4	9
-2	4	0
	0	9

10. Tendríamos 9 unidades por repartir para formar el cuadrado, pero la operación nos obliga un número, tiene que ser $3 \times 3 =$.

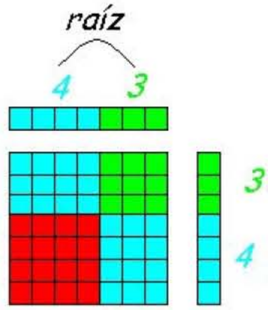


11. Al calcular la multiplicación tendríamos:



Que son exactamente los 9 cuadrados de unidad (verdes claro) que nos quedan todavía por repartir.

La respuesta es que $\sqrt{1849} = 43$



Representamos la medida del lado en la orilla, $\sqrt{1843} = 43$.

Otra forma de representar este método es como lo practicaban los antiguos mayas pero ellos escribían las cantidades en lugar de representarlos con cantidades de cuadritos. Veamos como lo hacían.

3.5. Calculando la raíz cuadrada- Método Maya

Para calcular la raíz cuadrada en el método maya trataremos de completar un cuadrado, casi como se hace en el método de Maria Montessori, pero en el método maya solo vamos a escribir la cantidad de cuadrados que necesitamos, no es necesario que dibujemos todos los cuadraditos pero si dibujamos el cuadrado que se forma.

Ejemplo 1:

Calculemos la raíz cuadrada de 256 al utilizar el método maya.

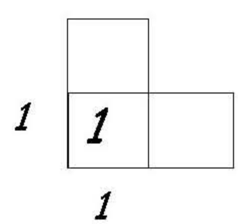
Como queremos formar al cuadrado mas grande que cabe mas o menos en el de área 256.

1. Al igual que en el método de Montessori separamos las cifras de 2 en 2 de derecha a izquierda.

   2 5 6

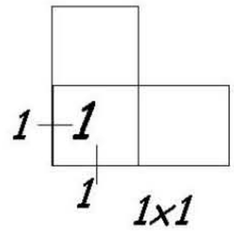
   Obtenemos 2,56 y empezamos a repartir las centenas.

2. Como en el método de María Montessori la primera cantidad, en este caso 2, solo hay un cuadrado que cabe en 2 centenas y es el 1, es decir una centena, porque 1x1=1 y es menor que 2.



3. Colocamos en los lados del cuadrado los números que forman el área del cuadrado.

4. Al momento de multiplicar las medidas de los lados del cuadrado que están afuera, dan como resultado el área del cuadrado que dibujamos.



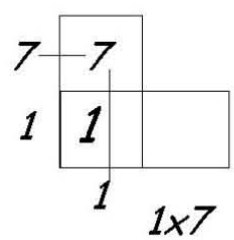
Como es una centena, entonces los "unos"de los lados representan 1 decena cada uno. Por eso están en el segundo lugar de la derecha a izquierda como corresponde en el sistema decimal.

5. Realizamos la resta.

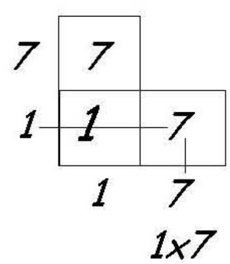
2	5	6
-1	0	0
1	5	6

6. Ahora toca repartir las decenas pero como tenemos 156 tenemos que tomar las decenas pero como nos sobra 1 centena tenemos que tomarla junto con las decenas, es decir tenemos 15 decenas por repartir ya que en 1 centena caben 10 decenas, sumándole las 5 decenas del 156 da como resultado 15 decenas que hay que repartir.

7. Podrían ser 7 y 7 porque 7x1=7 y 7+7=14



Al colocar el siguiente 7 tenemos que:



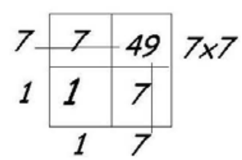
Ya repartimos 14 cuadraditos, quedaría hacer la resta de los 15 que teníamos

2	5	6
-1		
1	5	
-1	**4**	
	1	

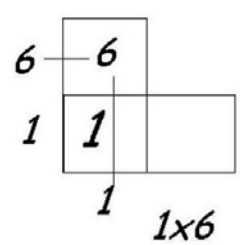
Cuando baja la siguiente unidad tendríamos 16.

2	5	6
-1		↓
1	5	
-1	4	
	1	**6**

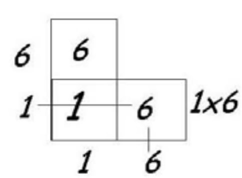
8. Pero para completar el cuadrado no serian suficientes porque los 7 de la operación nos obligan otro número.



No alcanzarían porque a repartir solo tenemos 16 lo que nos indica que el 7 es un número muy grande, escogemos uno menor 6 y calculamos.



9. Lo que indica que el otro número también debe ser 6.Porque ambos deben ser iguales para que se pueda formar un cuadrado.



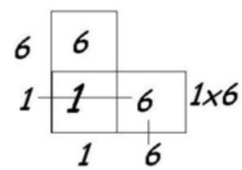
10. En este caso restaríamos 12 y se obtiene

2	5	6
-1		↓
1	5	
-1	**2**	
	3	

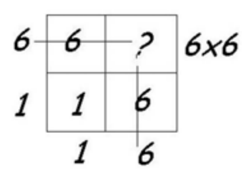
11. Y al bajar el siguiente número obtenemos 36, que es el número que debemos repartir.

2	5	6
-1		↓
1	5	
-1	2	
	3	**6**

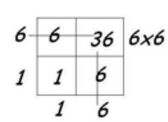
Se vería de la siguiente forma.



Al calcular el que completa el cuadrado tenemos que ya esta obligado un número, el resultado de 6x6.



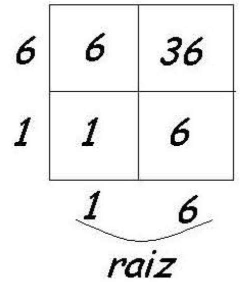
Quedaría.



Que es exactamente la cantidad que necesitábamos repartir.

2	5	6
-1		↓
1	5	
-1	2	
	3	6
	-3	**6**
		0

La respuesta es que $\sqrt{256} = 16$



Ejemplo 2:

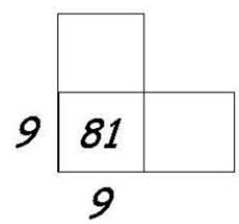
Calculemos la raiz cuadrada de 9604 por el metodo maya.

Primero separamos las cifras de 2 en 2 de derecha a izquierda y obtenemos 96,04.

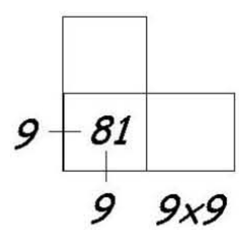
En la primera cantidad que es 96, es necesario encontrar un número cuadrado que le podamos restar , tomamos por eso como medida del lado del número cuadrado al 9, porque 9x9=81 y es menor que 96.

Es decir se vería de la siguiente forma.

Colocamos en los lados del cuadrado los números que forman el de adentro.



Y al momento de multiplicar los de afuera como se indica dan el área del cuadrado que mas se acerca al número 96.



12. Realizamos la resta.

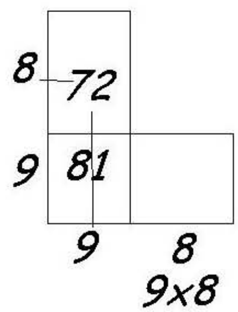
9	6	0	4
-8	1		
1	5		

13. Bajamos la siguiente cifra y resulta 150.

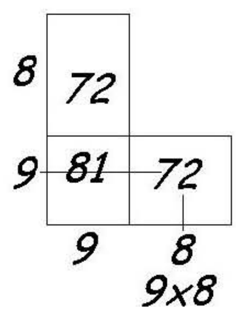
9	6	0	4
		↓	
-8	1		
1	5	0	

14. El número 150 hay que repartirlo en los espacios de tal manera que no falten para el siguiente paso.

    Se calcularía de la siguiente forma como es 150 tendríamos que repartir esos 150 en 2 partes iguales, podrían ser 8 porque 8x9=72 y 72+72=144 que es mas pequeño que 150.



15. Al colocar el siguiente 8 tenemos que:



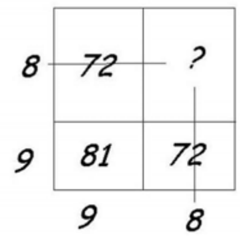
16. De esta manera ya se repartieron 144 cuadraditos, quedaría hacer la resta.

9	6	0	4
-8	1		
1	5	0	
-1	4	4	
		6	

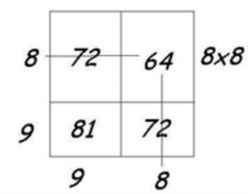
17. Cuando baja la siguiente unidad tendríamos 64.

9	6	0	4
-8	1		↓
1	5	0	
-1	4	4	
		6	4

18. Pero para completar el cuadrado la operación nos obliga un número.



19. Al calcular la multiplicación tendríamos:

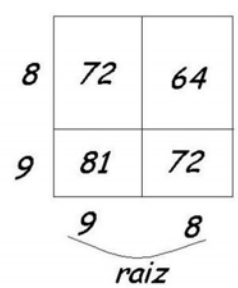


20. En este caso restaríamos 64, se obtiene

9	6	0	4
-8	1		↓
1	5	0	
-1	4	4	
		6	4
		-6	4
			0

Que es exactamente la cantidad que necesitábamos repartir.

21. La respuesta es que $\sqrt{9604} = 98$



Calcula las siguientes raíces por el método maya y practícalo.

a)729

b)7396

c)2916

d)5776

3.6. Raíz cuadrada método tradicional - La casita

Para resolver el método de la casita se utiliza el siguiente método.

Como un ejemplo para explicarlo obtendremos la raíz cuadrada de $\sqrt{103245}$

Ejemplo 1:

1. Primero se separan de dos en dos de derecha a izquierda el número que te piden, separándolos con comas.

   $\longleftarrow\!\prec$
   $\sqrt{103245}$

   $\sqrt{10,32,45}$

   A cada par de números se le conoce como periodo.

2. Se toman los dos primeros números.

   En este caso los dos primeros es el número 10.

   $\sqrt{103245}$
   $.\ \ \upuparrows$

3. Se busca un número que sin pasarse al multiplicarlo por si mismo se acerque al número que tome.

   En el ejemplo los dos primeros números que tome forman al 10, entonces tengo que encontrar un número que al multiplicarlo por si mismo no se pase de 10.

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ x } 1 & = & 1 \\ 2 \text{ x } 2 & = & 4 \\ 3 \text{ x } 3 & = & 9 \\ 4 \text{ x } 4 & = & 16 \\ 5 \text{ x } 5 & = & 25 \\ \vdots & & \end{array}$$

   El número que al multiplicar por si mismo no se pasa de 10 es el 3 porque 3x3=9 y 4x4=16.

4. Ese número se escribe en la línea.

   En ese caso escribo 3 en la línea.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{\mathbf{3}}\longleftarrow \end{array}$$

5. Realizamos la multiplicación de el número que acabamos de obtener por si mismo y escribimos el resultado abajo del primer par de números.

   En este caso multiplicamos 3x3=9 y escribimos el 9 abajo de los dos primeros números.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{3} \\ \ \ \mathbf{9}\quad\longleftarrow & \\ & \end{array}$$

6. Hacemos la resta.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3\ } \\ \ \underline{\mathbf{-9}} & \\ & \end{array}$$

7. Al escribir el resultado abajo.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3\ } \\ \ \underline{-9} & \\ \ \ \mathbf{1}\quad\longleftarrow & \\ & \end{array}$$

8. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3\ } \\ \ \underline{-9}\downarrow & \\ \ \ 1\mathbf{32} & \\ & \end{array}$$

9. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, que es siempre el que se encuentra en la primera línea.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{3} \longleftarrow \text{raíz del número.} \\ \ \underline{-9} & \\ \ \ 132 & \\ & \end{array}$$

   En el ejemplo al multiplicar 2x3 obtenemos 6, esa misma multiplicación también podemos escribirla como (2)(3)=6 porque los paréntesis también significan multiplicación.

10. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3\ } \\ \underline{-9} & \\ 132 & \underline{(\mathbf{2})(\mathbf{3}) = \mathbf{6}} \leftarrowtail \\ & \end{array}$$

11. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

    Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

    Representamos a ese número con el símbolo "?"

    El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\leftarrowtail$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3\mathbf{?}} \\ \underline{-9} & \\ 132\leftarrowtail & \underline{6?} \\ & \end{array}$$

En el ejemplo seria al resolver la multiplicación

Sesenta y algo por ese mismo algo...

$$\begin{array}{rr} 6 & \mathbf{?} \\ \text{x} & \mathbf{?} \\ \hline \end{array}$$

El resultado no debe de pasarse de 132.

Probemos valores:

Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{rr} 6 & \mathbf{1} \\ \text{x} & \mathbf{1} \\ \hline 6 & 1 \end{array}$$

Cuando el **? vale 2:**

$$\begin{array}{rrr} & 6 & \mathbf{2} \\ & \text{x} & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Cuando el **? vale 3:**

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \mathbf{3} \\ & \text{x} & \mathbf{3} \\ \hline 1 & 8 & 9 \end{array}$$

El valor que cumple que al multiplicar sesenta y algo por el algo no se pase de 132 es el 2 porque:

$$\begin{array}{ccc} & 6 & 2 \\ & \text{x} & 2 \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Que es más pequeño que 132.

12. Entonces escribimos al 2 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la segunda línea para completar el número.

    En la raíz se vería en lugar de escribir **?**:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{\ 3?\leftarrowtail} \\ \underline{-9}\quad\ \ & \\ 132\leftarrowtail & \underline{6?\ \leftarrowtail} \\ & \end{array}$$

13. Al escribir el **2** donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{\ \mathbf{32}\leftarrowtail} \\ \underline{-9}\quad\ \ & \\ 132\ \ & \underline{6\mathbf{2}\leftarrowtail} \\ & \end{array}$$

14. Utilizamos que 62x2=124 y ese resultado lo escribimos debajo del 132.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{32} \\ \underline{-9}\quad\ \ & \\ 132\ \ & \underline{62} \\ \mathbf{124}\ \ & \\ & \end{array}$$

15. Resolvemos la resta.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{32} \\ \underline{-9}\quad\ \ & \\ 132\ \ & \underline{62} \\ \underline{\mathbf{-124}}\ \ & \\ & \end{array}$$

Observa que a partir de este momento los pasos se van a repetir.

16. Al escribir el resultado abajo.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{32} \\
\underline{-9}\quad\;\; & \\
132\;\; & \underline{62} \\
\underline{-124}\;\; & \\
\mathbf{8}\leftarrowtail & \\
 &
\end{array}$$

17. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{32} \\
\underline{-9}\quad\;\; & \\
132\;\; & \underline{62} \\
\underline{-124}\downarrow & \\
8\mathbf{45} & \\
 &
\end{array}$$

18. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, que es siempre el que se encuentra en la primera línea.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{32} \leftarrowtail \text{raíz del número} \\
\underline{-9}\quad\;\; & \\
132\;\; & \underline{62} \\
\underline{-124}\;\; & \\
845 & \\
 &
\end{array}$$

En el ejemplo al multiplicar 2x32 obtenemos 64.

19. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{32} \\
\underline{-9}\quad\;\; & \\
132\;\; & \underline{62} \\
\underline{-124}\;\; & \\
845 & \underline{(\mathbf{2})(\mathbf{32}) = 64}\leftarrowtail \\
 &
\end{array}$$

OJO: Para este paso siempre es una línea diferente y las que hayas escrito antes ya no se utilizan, podrías incluso tacharlas. Para representar que esa línea no se usa vamos a escribir un $\ntriangleleft$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{32} \\
\underline{-9}\quad\;\; & \\
132\;\; & \underline{62} \ntriangleleft \text{ este renglón ya no se va a utilizar.} \\
\underline{-124}\;\; & \\
845 & \underline{64} \\
 &
\end{array}$$

20. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

    Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

    Representamos a ese número con el símbolo “?”

    El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\leftarrowtail$

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{103245} & \underline{32\textbf{?}} \\ \underline{-9} & \\ \quad 132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\ \underline{-124} & \\ \qquad 845 \leftarrowtail & \underline{64\textbf{?}} \\ & \end{array}$$

    En el ejemplo seria al resolver la multiplicación

    Seiscientos cuarenta y algo por ese mismo algo...

$$\begin{array}{ccc} 6 & 4 & \textbf{?} \\ & \text{x} & \textbf{?} \\ \hline & & \end{array}$$

    El resultado no debe de pasarse de 845.

    Probemos valores:

    Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{ccc} 6 & 4 & \textbf{1} \\ & \text{x} & \textbf{1} \\ \hline 6 & 4 & 1 \end{array}$$

    Cuando el **? vale 2:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 4 & \textbf{2} \\ & & \text{x} & \textbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 8 & 4 \end{array}$$

    El valor que cumple que al multiplicar seiscientos cuarenta y algo por el algo no se pase de 845 es el **1** porque:

$$
\begin{array}{ccc}
6 & 4 & 1 \\
 & \text{x} & 1 \\
\hline
6 & 4 & 1
\end{array}
$$

Que es más pequeño que 845.

Entonces escribimos al 1 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la tercera línea para completar el número.

En la raíz se vería en lugar de:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{\ 32\mathbf{?}} \\
\underline{-9} & \\
132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
845 \leftarrowtail & \underline{\ 64\mathbf{?}\ } \\
 &
\end{array}
$$

Al escribir el 1 donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{\ 32\mathbf{1}} \\
\underline{-9} & \\
132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
845 \leftarrowtail & \underline{\ 64\mathbf{1}\ } \\
 &
\end{array}
$$

21. Utilizamos que 641x1=641 y ese resultado lo escribimos debajo del 845.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{321} \\
\underline{-9} & \\
132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
845 & \underline{641} \\
\mathbf{641} \leftarrowtail & \\
 &
\end{array}
$$

22. Resolvemos la resta.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{103245} & \underline{321} \\
\underline{-9} & \\
132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
845 & \underline{641} \\
\underline{\mathbf{-641}} \leftarrowtail & \\
 &
\end{array}
$$

23. Al escribir el resultado abajo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{321} \\ \underline{-9}\quad\quad\quad & \\ 132\quad\quad & \underline{62}\ \not{4} \\ \underline{-124}\quad\quad & \\ 845\quad & \underline{641} \\ \underline{-641}\quad & \\ \mathbf{204}\leftarrowtail & \end{array}$$

24. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245} & \underline{321} \\ \underline{-9}\quad\quad\quad & \\ 132\quad\quad & \underline{62}\ \not{4} \\ \underline{-124}\quad\quad & \\ 845\quad & \underline{641} \\ \underline{-641}\ \downharpoonleft & \\ 204\quad & \end{array}$$

Cuando ya no hay cifras para bajar como en este caso.

Tomamos en cuenta que en los números decimales los números pueden escribirse de la siguiente forma:

35=35.00000

Si el número es entero para convertirlo a decimal puedo ponerle todos los ceros que quiera después del punto decimal.

Por eso es posible hacer el siguiente paso.

25. Se escribe un punto decimal en la línea donde esta la raíz y se bajan dos ceros.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{103245}\quad & \underline{\ 321.}\leftarrowtail \\ \underline{-9}\quad\quad\quad\quad & \\ 132\quad\quad\quad & \underline{62}\ \not{4} \\ \underline{-124}\quad\quad\quad & \\ 845\quad\quad & \underline{641} \\ \underline{-641}\quad\quad & \\ 204\mathbf{00}\leftarrowtail & \end{array}$$

26. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, no tomes en cuenta el punto decimal.

$\sqrt{103245}$	$\underline{\ 321.}\longleftarrow$raiz
$\underline{-9}$	
132	$\underline{62}\ \ntriangleleft$
$\underline{-124}$	
845	$\underline{641}$
$\underline{-641}$	
20400	

En el ejemplo al multiplicar 2x321 obtenemos 642.

27. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$\sqrt{103245}$	$\underline{\ 321.}$
$\underline{-9}$	
132	$\underline{62}\ \ntriangleleft$
$\underline{-124}$	
845	$\underline{641}$
$\underline{-641}$	
20400	$\underline{(\mathbf{2})(\mathbf{321}) = 642}\ \longleftarrow$

28. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

Representamos a ese número con el símbolo "?"

El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\longleftarrow$

$\sqrt{103245}$	$\underline{\ 321.\mathbf{?}}$
$\underline{-9}$	
132	$\underline{62}\ \ntriangleleft$
$\underline{-124}$	
845	$\underline{641}\ \ntriangleleft$
$\underline{-641}$	
20400	$\underline{642\mathbf{?}}\longleftarrow$

En el ejemplo seria al resolver la multiplicación

Seis mil cuatrocientos veinte y algo por ese mismo algo...

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 2 & \mathbf{?} \\ & & \text{x} & \mathbf{?} \\ \hline \end{array}$$

El resultado no debe de pasarse de 20400

Probemos valores:

Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 2 & \mathbf{1} \\ & & \text{x} & \mathbf{1} \\ \hline 6 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

Cuando el **? vale 2**

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 2 & \mathbf{2} \\ & & & \text{x} & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 8 & 4 & 4 \end{array}$$

Cuando **? vale 3:**

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 2 & \mathbf{3} \\ & & & \text{x} & \mathbf{3} \\ \hline 1 & 9 & 2 & 6 & 9 \end{array}$$

Cuando **? vale 4**

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 2 & \mathbf{4} \\ & & & \text{x} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & 5 & 6 & 9 & 6 \end{array}$$

El valor que cumple que al multiplicar seis mil cuatro cientos veinti y algo por el algo no se pase de 20400 es el **3** porque:

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 4 & 2 & 3 \\ & & & \text{x} & 3 \\ \hline 1 & 9 & 2 & 6 & 9 \end{array}$$

Que es más pequeño que 20400.

Entonces escribimos al 3 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la cuarta línea para completar el número.

En la raíz se vería en lugar de:

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{103245} & \underline{\ 321.\mathbf{?}}\ \leftarrowtail \\
\underline{-9} & \\
\quad 132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
\qquad 845 & \underline{641}\ \ntriangleleft \\
\quad \underline{-641} & \\
\qquad\quad 20400 & \ \underline{642\mathbf{?}}\leftarrowtail \\
 &
\end{array}
$$

Al escribir el 3 donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{103245} & \underline{\ 321.\mathbf{3}}\ \leftarrowtail \\
\underline{-9} & \\
\quad 132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
\qquad 845 & \underline{641}\ \ntriangleleft \\
\quad \underline{-641} & \\
\qquad 20400 & \ \underline{642\mathbf{3}}\leftarrowtail \\
 &
\end{array}
$$

29. Utilizamos que 6423x3=19269 y ese resultado lo escribimos debajo del 20400.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{103245} & \underline{321.3} \\
\underline{-9} & \\
\quad 132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
\qquad 845 & \underline{641}\ \ntriangleleft \\
\quad \underline{-641} & \\
\qquad 20400 & \ \underline{6423} \\
\quad \underline{\mathbf{19269}}\leftarrowtail & \\
 &
\end{array}
$$

30. Resolvemos la resta.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{103245} & \underline{\ 321.3} \\
\underline{-9} & \\
\quad 132 & \underline{62}\ \ntriangleleft \\
\underline{-124} & \\
\qquad 845 & \underline{641}\ \ntriangleleft \\
\quad \underline{-641} & \\
\qquad 20400 & \ \underline{6423} \\
\qquad \underline{19269} & \\
\qquad \mathbf{1131}\leftarrowtail & \\
 &
\end{array}
$$

Este es el procedimiento que se usa para resolver una raíz cuadrada varia siempre en la cantidad de pares pero ya notaste que después del paso 8 los pasos son los mismos, porque sirven para encontrar mas cifras para la raíz cuadrada.

La raíz cuadrada de 103245 es 321.3 que en símbolos es $\sqrt{103245}$ =321.3 pero puedes aproximarte mas al repetir los pasos para obtener mas cifras en la raíz cuadrada.

Ejemplo 2:

Cuando tratamos de calcular el valor de la raíz cuadrada de 10, utilizamos el método de aproximación con multiplicaciones y con áreas de cuadrados, llegamos al mismo resultado, que la raíz cuadrada de 10 es 3.16 escrito con símbolos $\sqrt{10}$ =3.16

Podemos utilizar el método de la casita para comprobar nuestros resultados.

1. Primero se separan de dos en dos de derecha a izquierda el número que te piden, separándolos con comas.

   $\longleftarrow\!\prec$
   $\sqrt{10}$

   En el ejemplo solo hay 2 números.

2. Se toman los dos primeros números.

   En este caso los dos primeros es el número 10.

   $\sqrt{10}$
   $\cdot \ \upuparrows$

3. Se busca un número que sin pasarse al multiplicarlo por si mismo se acerque al número que tome.

   En el ejemplo los dos primeros números que tome forman al 10, entonces tengo que encontrar un número que al multiplicarlo por si mismo no se pase de 10.

$$\begin{aligned} 1 \text{ x } 1 &= 1 \\ 2 \text{ x } 2 &= 4 \\ 3 \text{ x } 3 &= 9 \\ 4 \text{ x } 4 &= 16 \\ 5 \text{ x } 5 &= 25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   El número que al multiplicar por si mismo no se pasa de 10 es el 3 porque 3x3=9 y 4x4=16.

4. Ese número se escribe en la línea.

   En ese caso escribo 3 en la línea.

   $$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{\ \mathbf{3}}\leftarrowtail \\ & \end{array}$$

5. Realizamos la multiplicación de el número que acabamos de obtener por si mismo y escribimos el resultado abajo del primer par de números.

   En este caso multiplicamos 3x3=9 y escribimos el 9 abajo de los dos primeros números.

   $$\begin{array}{r|l} \sqrt{10\ \ } & \underline{3} \\ \mathbf{9}\leftarrowtail & \\ & \end{array}$$

6. Hacemos la resta.

   $$\begin{array}{r|l} \sqrt{10\ \ } & \underline{\ 3\ } \\ \underline{\mathbf{-9}} & \\ & \end{array}$$

7. Al escribir el resultado abajo.

   $$\begin{array}{r|l} \sqrt{10\ \ } & \underline{\ 3\ } \\ \underline{-9} & \\ \mathbf{1}\leftarrowtail & \\ & \end{array}$$

8. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

   Cuando ya no hay cifras para bajar como en este caso.

   Tomamos en cuenta que los números enteros se pueden escribir en decimales de la siguiente forma:

   9=9.0000

   Es posible poner todos los ceros que se quieran después del punto decimal, por eso bajarían dos ceros.

9. Se escribe un punto decimal en la línea donde esta la raíz y se bajan dos ceros.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3.} \\
\underline{-9} \downarrow & \\
1\mathbf{00} & \\
\end{array}
$$

10. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, que es siempre el que se encuentra en la primera línea.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3} \leftarrowtail \text{raíz del número.} \\
\underline{-9} & \\
100 & \\
\end{array}
$$

En el ejemplo al multiplicar 2x3 obtenemos 6, esa misma multiplicación también podemos escribirla como (2)(3)=6 porque los paréntesis también significan multiplicación.

11. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{(\mathbf{2})(\mathbf{3}) = \mathbf{6}} \leftarrowtail \\
\end{array}
$$

12. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

Representamos a ese número con el símbolo "**?**"

El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\leftarrowtail$

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3.\mathbf{?}} \\
\underline{-9} & \\
100 \leftarrowtail & \underline{6\mathbf{?}} \\
\end{array}
$$

En el ejemplo seria al resolver la multiplicación.

Sesenta y algo por ese mismo algo...

$$
\begin{array}{rr}
6 & \mathbf{?} \\
\text{x} & \mathbf{?} \\
\hline
\end{array}
$$

El resultado no debe de pasarse de 100.

Probemos valores:

Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{rr} 6 & \mathbf{1} \\ \text{x} & \mathbf{1} \\ \hline 6 & 1 \end{array}$$

Cuando el **? vale 2:**

$$\begin{array}{rrr} & 6 & \mathbf{2} \\ & \text{x} & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}$$

El valor que cumple que al multiplicar sesenta y algo por el algo no se pase de 132 es el **1** porque:

$$\begin{array}{rr} 6 & 1 \\ \text{x} & 1 \\ \hline 6 & 1 \end{array}$$

Que es más pequeño que 100.

Entonces escribimos al 1 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la segunda línea para completar el número.

En la raíz se vería en lugar de:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.\mathbf{?}\leftarrowtail} \\ \underline{-9} & \\ 100\leftarrowtail & \underline{6\mathbf{?}}\leftarrowtail \\ & \end{array}$$

Al escribir el 1 donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.\mathbf{1}}\leftarrowtail \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{6\mathbf{1}}\leftarrowtail \\ & \end{array}$$

13. Utilizamos que 61x1=61 y ese resultado lo escribimos debajo del 100.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.1} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61} \\ \mathbf{61}\leftarrowtail & \end{array}$$

14. Resolvemos la resta.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.1} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61} \\ \underline{\mathbf{-61}}\leftarrowtail & \\ & \end{array}$$

Observa que a partir de este momento los pasos se van a empezar a repetir.

15. Al escribir el resultado abajo.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.1} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61} \\ \underline{-61} & \\ \mathbf{39}\leftarrowtail & \end{array}$$

16. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

En este caso volvemos a bajar dos ceros porque ya no hay mas cifras.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.1} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61} \\ \underline{-61}\downarrow & \\ 39\mathbf{00} & \\ & \end{array}$$

17. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, que es siempre el que se encuentra en la primera línea.

Cuando haya punto decimal no lo tomes en cuenta y utiliza el número sin el punto decimal.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{3.1} \leftarrowtail \text{ raíz del número.} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61} \\ \underline{-61} & \\ 3900 & \\ & \end{array}$$

En el ejemplo al multiplicar 2x31 obtenemos 62.

18. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3.1} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{61} \\
\underline{-61} & \\
3900 & \underline{(\mathbf{2})(\mathbf{31}) = 62} \leftarrowtail
\end{array}
$$

OJO Para este paso siempre es una línea diferente y las que hayas escrito antes ya no se utilizan podrías incluso tacharlas. Para representar que esa línea no se usa vamos a escribir un $\ntrianglelefteq$

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3.1} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{61} \ntrianglelefteq \text{ este renglón ya no se va a utilizar.} \\
\underline{-61} & \\
3900 & \underline{62}
\end{array}
$$

19. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

Representamos a ese número con el símbolo "?"

El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\leftarrowtail$

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{3.1\mathbf{?}} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{61} \ntrianglelefteq \\
\underline{-61} & \\
3900 \leftarrowtail & \underline{62\mathbf{?}}
\end{array}
$$

En el ejemplo seria al resolver la multiplicación

Seiscientos veinti y algo por ese mismo algo...

$$
\begin{array}{ccc}
6 & 2 & \mathbf{?} \\
 & \text{x} & \mathbf{?} \\
\hline
\end{array}
$$

El resultado no debe de pasarse de 3900.

Probemos valores:

Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{ccc} 6 & 2 & \mathbf{1} \\ & \text{x} & \mathbf{1} \\ \hline 6 & 2 & 1 \end{array}$$

Cuando el **? vale 2:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{2} \\ & & \text{x} & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 4 & 4 \end{array}$$

Cuando **? vale 3:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{3} \\ & & \text{x} & \mathbf{3} \\ \hline 1 & 8 & 6 & 9 \end{array}$$

Cuando el **? vale 4:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{4} \\ & & \text{x} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & 4 & 9 & 6 \end{array}$$

Cuando **? vale 5:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{5} \\ & & \text{x} & \mathbf{5} \\ \hline 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

Cuando el **? vale 6:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{6} \\ & & \text{x} & \mathbf{6} \\ \hline 3 & 7 & 5 & 6 \end{array}$$

Cuando el **? vale 7:**

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & \mathbf{7} \\ & & \text{x} & \mathbf{7} \\ \hline 4 & 3 & 8 & 9 \end{array}$$

El valor que cumple que al multiplicar seiscientos veinti y algo por el algo no se pase de 3900 es el **6** porque:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 2 & 6 \\ & & \mathrm{x} & 6 \\ \hline 3 & 7 & 5 & 6 \end{array}$$

Que es más pequeño que 3900.

Entonces escribimos al 6 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la tercera línea para completar el número.

En la raíz se vería en lugar de:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.1\mathbf{?}} \\ \underline{-9} & \\ \quad 100 & \underline{61}\ \not\triangleleft \\ \ \underline{-61} & \\ \quad 3900 \longleftarrow & \underline{\ 62\mathbf{?}} \\ & \end{array}$$

Al escribir el 6 donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.1\mathbf{6}} \\ \underline{-9} & \\ \quad 100 & \underline{61}\ \not\triangleleft \\ \ \underline{-61} & \\ \quad 3900 \longleftarrow & \underline{\ 62\mathbf{6}} \\ & \end{array}$$

20. Utilizamos que 626x6=3756 y ese resultado lo escribimos debajo del 3900.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.16} \\ \underline{-9} & \\ \quad 100 & \underline{61}\ \not\triangleleft \\ \ \underline{-61} & \\ \qquad 3900 & \underline{626} \\ \quad \mathbf{3756} \longleftarrow & \\ & \end{array}$$

21. Resolvemos la resta.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16} \\
\underline{-9} & \\
\ \ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\ \underline{-61} & \\
\ \ \ 3900 & \underline{626} \\
\ \underline{\mathbf{-3756}}\longleftarrow & \\
\end{array}
$$

22. Al escribir el resultado abajo.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16} \\
\underline{-9} & \\
\ \ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\ \underline{-61} & \\
\ \ \ 3900 & \underline{626} \\
\ \underline{-3756} & \\
\ \ \ \mathbf{144}\longleftarrow & \\
\end{array}
$$

23. Bajamos las dos siguientes cifras de la raíz.

Como no hay mas números bajamos dos ceros, porque es posible escribir al número 10 como 10.00000 y escribir todos los ceros que necesitemos después del punto decimal.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16} \\
\underline{-9} & \\
\ \ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\ \underline{-61} & \\
\ \ \ 3900 & \underline{626} \\
\ \ \underline{-3756}\downarrow & \\
\ \ 144\mathbf{00} & \\
\end{array}
$$

24. Multiplicamos por dos el valor de la raíz, no tomes en cuenta el punto decimal.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16}\ \longleftarrow \text{raiz} \\
\underline{-9} & \\
\ \ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\ \underline{-61} & \\
\ \ \ 3900 & \underline{626} \\
\ \underline{-3756} & \\
\ \ \ \ 14400 & \\
\end{array}
$$

En el ejemplo al multiplicar 2x316 obtenemos 632.

25. El valor que resulte de multiplicar la raíz por dos lo escribimos en otra línea.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\underline{-61} & \\
3900 & \underline{626}\ \ntriangleleft \\
\underline{-3756} & \\
14400 & \underline{(\mathbf{2})(\mathbf{316}) = 632} \leftarrowtail
\end{array}$$

26. Para encontrar el siguiente valor de la raíz cuadrada tiene que cumplir lo siguiente:

Que el número que busco para la raíz ayude a resolver la operación de la siguiente forma:

Representamos a ese número con el símbolo "**?**"

El número que falta forma a dos números diferentes que al multiplicarse no tienen que ser mayor que el valor marcado con $\leftarrowtail$

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{10} & \underline{\ 3.16\mathbf{?}} \\
\underline{-9} & \\
100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\
\underline{-61} & \\
3900 & \underline{626}\ \ntriangleleft \\
\underline{-3756} & \\
14400 & \underline{632\mathbf{?}} \leftarrowtail
\end{array}$$

En el ejemplo seria al resolver la multiplicación

Seis mil trescientos veinti y algo por ese mismo algo...

$$\begin{array}{cccc}
6 & 3 & 2 & \mathbf{?} \\
 & & \text{x} & \mathbf{?} \\
\hline
\end{array}$$

El resultado no debe de pasarse de 14400.

Probemos valores:

Cuando **? vale 1:**

$$\begin{array}{cccc}
6 & 3 & 2 & \mathbf{1} \\
 & & \text{x} & \mathbf{1} \\
\hline
6 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

Cuando el **? vale 2:**

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & 2 & \mathbf{2} \\ & & & \text{x} & \mathbf{2} \\ \hline 1 & 2 & 6 & 4 & 4 \end{array}$$

Cuando **? vale 3:**

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & 2 & \mathbf{3} \\ & & & \text{x} & \mathbf{3} \\ \hline 1 & 8 & 9 & 6 & 9 \end{array}$$

El valor que cumple que al multiplicar seis mil tres cientos veinti y algo por el algo no se pase de 14400 es el **2** porque:

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 3 & 2 & 2 \\ & & & \text{x} & 2 \\ \hline 1 & 2 & 6 & 4 & 4 \end{array}$$

Que es más pequeño que 14400.

Entonces escribimos al 2 en la primera línea porque es un digito más de la raíz cuadrada y en la cuarta línea para completar el número.

En la raíz se vería en lugar de:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.16\mathbf{?}} \longleftarrow \\ \underline{-9} & \\ \quad 100 & \underline{61} \not\triangleleft \\ \quad \underline{-61} & \\ \qquad 3900 & \underline{626} \not\triangleleft \\ \quad \underline{-3756} & \\ \qquad\quad 14400 & \underline{632\mathbf{?}} \longleftarrow \end{array}$$

Al escribir el 2 donde le corresponde se vería de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.16\mathbf{2}} \longleftarrow \\ \underline{-9} & \\ \quad 100 & \underline{61} \not\triangleleft \\ \quad \underline{-61} & \\ \qquad 3900 & \underline{626} \not\triangleleft \\ \quad \underline{-3756} & \\ \qquad\quad 14400 & \underline{632\mathbf{2}} \longleftarrow \end{array}$$

27. Utilizamos que 6322x2=12644 y ese resultado lo escribimos debajo del 14400.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.162} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\ \underline{-61} & \\ 3900 & \underline{626}\ \ntriangleleft \\ \underline{-3756} & \\ 14400 & \underline{6322} \\ \underline{\mathbf{12644}}\leftarrowtail & \end{array}$$

28. Resolvemos la resta.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10} & \underline{\ 3.162} \\ \underline{-9} & \\ 100 & \underline{61}\ \ntriangleleft \\ \underline{-61} & \\ 3900 & \underline{626}\ \ntriangleleft \\ \underline{-3756} & \\ 14400 & \underline{6322} \\ \underline{12644} & \\ \mathbf{1756}\leftarrowtail & \end{array}$$

El resultado de la raíz de 10 en todos los casos al aplicar diferentes formas de calcularla valía lo mismo $\sqrt{10} \doteq 3.16$ incluso cuando aplicamos el método de la casita pudimos aproximarnos aun mas en el valor y llegamos a que $\sqrt{10} \doteq 3.162$.

El valor de la raíz cuadrada siempre es una aproximación solo al calcular raíces cuadradas de números cuadrados se obtienen valores exactos.

Actividades

**Actividad 1:** Forma equipos con tus compañeros para reforzar entre todos sus conocimientos y aclarar tus dudas.

**Actividad 2:** Practica los diferentes métodos para calcular la raíz cuadrada al utilizar como base los diferentes procedimientos que se utilizaron en este capitulo al calcular los valores de:

a)$\sqrt{35} =$

b)$\sqrt{24} =$

c)$\sqrt{50} =$

Después de resolverlos compara tus resultados entre si, recuerda que la aproximación debe ser la misma.

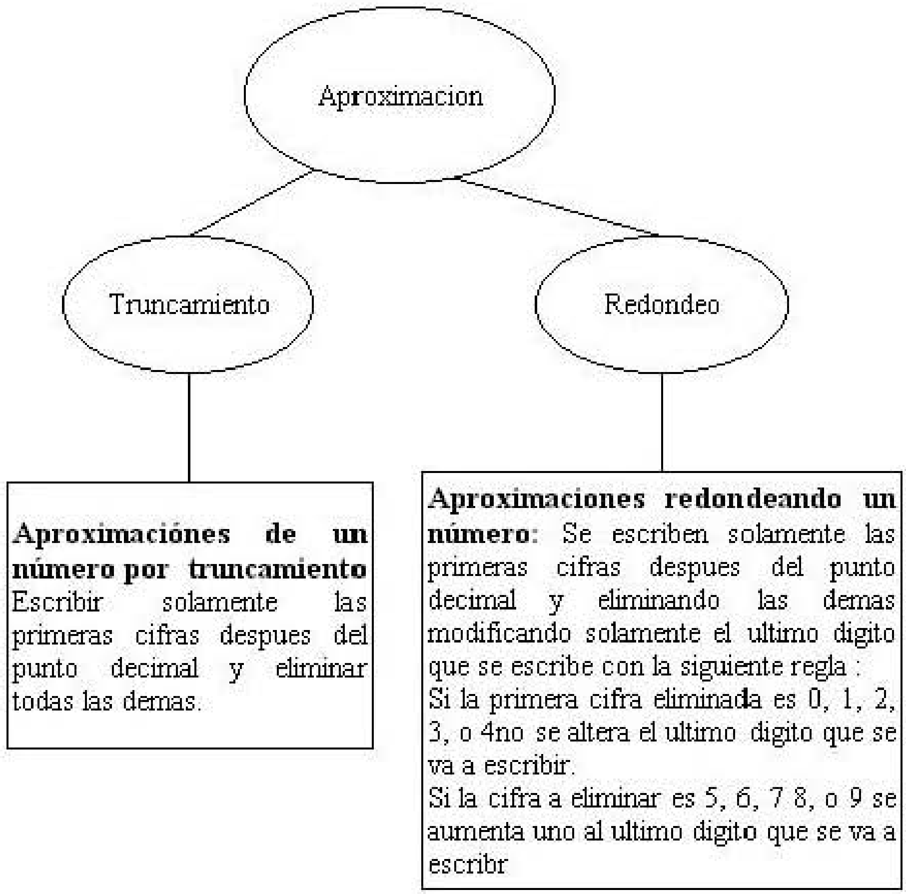
Actividad 3: Calcula por el método de la casita y comprueba tu resultado con calculadora en los siguientes ejemplos:

d)$\sqrt{65536} =$

e)$\sqrt{1468} =$

Recordatorio:

Para recordar los conceptos que vimos en este capitulo los resumimos en el siguiente diagrama.



3.7. Referencias

3.7.1. Sugerencia al asesor:

En estas diferentes formas de escribir el siete podemos evaluar un poco cuáles son los temas que no recuerdan. Raíz cuadrada, fracciones, divisiones, operaciones con punto decimal, en sí depende de cada uno de los estudiantes, incluso puede decirse que depende de los intereses y vivencias particulares de ellos.

3.7.2. Sugerencia al asesor:

Para generar la reflexión en los alumnos se pueden plantear algunas preguntas como las siguientes:

3.7.3. Sugerencia al asesor:

Preguntamos cuáles de estas formas de escribir al siete no recuerdan. Una duda general es la Raíz cuadrada. Para explicarla se les plantea a los alumnos lo siguiente:

3.7.4. Sugerencia al asesor:

Este método puede manejarse como una sugerencia didáctica con cuadrados de foami en el salón de clase, para ejemplificar mejor y diferenciar las unidades de las decenas, centenas etc., el método de María Montessori, asigna un color a cada unidad.

3.7.5. Sugerencia al asesor:

Se sigue la misma lógica si es que se desean elaborar unidades más grandes como la unidad de millón, decena de millón etc. Pero didacticamente puede resultar poco practico, seria bueno que empezaran a abstraer el concepto sin utilizar los cuadritos.

Capítulo 4

Lección 4

4.1. La recta numérica y las leyes de los números

Los números con signo se pueden representar en la forma que conocemos como "Recta Numérica", que es exactamente la misma que nos presentaron en la primaria como "Recta de la rana", dibujando una línea recta, fijando un punto al que le llamaremos origen, que es en realidad el punto de partida, es decir, el cero. Como se observa en la figura

- +

o

$\overline{\wedge}$

0

Se toma una unidad de medida y a partir de ésta se divide la recta en pedazos o segmentos del mismo tamaño, hacia la derecha, así el primer pedazo es del 0 al 1, el segundo pedazo es del 1 al 2 el tercer pedazo es del 2 al 3 y así vas colocando los demás números a los que llamaremos enteros positivos.

- +

o

$\overline{\wedge}$

0 1 2 3 4 5 6

Esta representación tiene dos importantes características.

1. Muestra a los números en una fila ordenada.

2. Sugiere la idea de que la recta continua infinitamente y así se pueden tener números enteros positivos muy lejanos del cero.

-																	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Pero hasta aquí esta recta solo tiene números enteros positivos, para representar a los números enteros negativos, tomamos la misma medida que estábamos utilizando para los positivos y dividimos a la recta en la misma forma, ahora hacia la izquierda y tenemos del 0 al -1, del -1 al -2, del -2 al -3, del -3 al -4 y así continuamos.

De esta manera los números enteros se encuentran ordenados tanto a la derecha con los números enteros positivos como a la izquierda con los números enteros negativos.

-												+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Las operaciones básicas son cuatro: Suma, Resta, Multiplicación y División.

Para poder realizar las operaciones con los números enteros se definen las leyes de los signos, en donde la ley de la suma y resta, sirve para sumar y restar números con signo, y la ley de la multiplicación y división, sirve para multiplicar o dividir a los números con signo.

4.2. La ley de la suma y resta

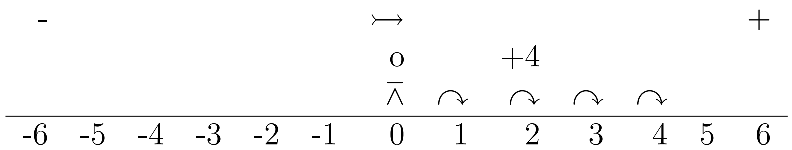
Número positivo y Número positivo.

Para la ley de la suma y resta, es posible observar su comportamiento si trabajamos en la recta numérica.

-												+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

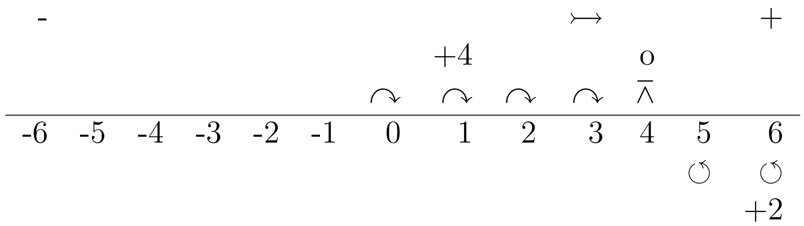
Ejemplo 1:

Cuando hacemos la operación +4+2=, en la recta numérica tendríamos que +4 significa que tenemos que avanzar 4 unidades con dirección hacia los positivos, es decir, hacia el “+”, podemos representar la primera instrucción con $\curvearrowright$. Como se observa en la figura.

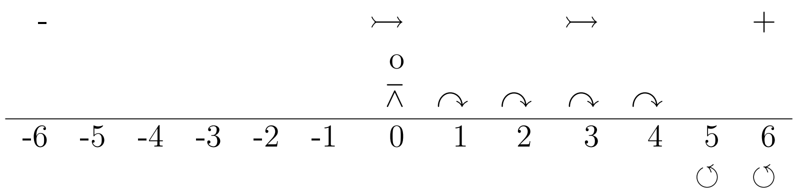


Lo que significaría que ahora estarías parado en el +4

Pero la operación es +4+2=, lo que significa que aun falta avanzar 2 unidades hacia los positivos, es decir, al "+", la segunda instrucción la representaremos con ⥁. Como se observa en la figura.



Entonces después de caminar 4 unidades hacia los positivos "+" y seguido de avanzar 2 unidades hacia los positivos "+", terminamos en el 6 de los positivos "+".



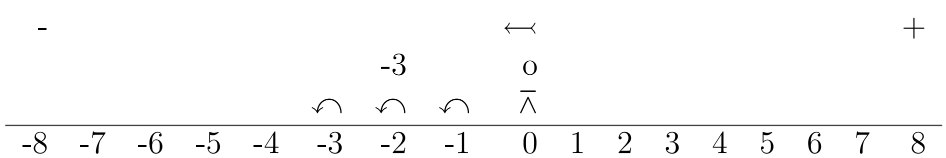
Es decir si tengo un número positivo y un número positivo el resultado de sumarlos es positivo.

Número negativo y número negativo.

Ejemplo 1:

Veamos el ejemplo -3-4=?

Las instrucciones son: primero avanza 3 unidades en dirección de los negativos " -", esta instrucción la representamos con ↶ .



Después caminamos en la dirección de los negativos "-", 4 unidades, a partir de donde quedamos, representamos esta instrucción con ⥀.

-					$\longleftarrow\!\!\prec$											+
					o		-3									
					$\overline{\wedge}$	↶	↶	↶								
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	↻	↻	↻	↻												
			-4													

Quiere decir que termino en el 7 de los negativos es decir, -3-4=-7.

-					$\longleftarrow\!\!\prec$			$\longleftarrow\!\!\prec$								+
								o								
					↶	↶	↶	$\overline{\wedge}$								
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	↻	↻	↻	↻												

Es decir si tengo un número negativo y número negativo el resultado es negativo.

Conclusión

Caso I (Positivo y positivo):

Cuando se avanza en una misma dirección, en ambas instrucciones, aumento la distancia recorrida y conservo la dirección que llevaba.

Es decir que si camino en los positivos y después camino otra vez en los positivos termino en los positivos.

-						$\rightarrowtail$			$\rightarrowtail$			+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Sumo los números para obtener la distancia total recorrida, porque es la distancia que recorro con un número, más la distancia que recorro con el otro número, es decir.

Si tengo un número positivo y otro número positivo, el signo del resultado es positivo y para obtener el resultado, los números se suman, podemos escribir lo anterior de la siguiente forma:

$$\text{los números se suman}\left\{\quad +y+ = \quad + \text{ es el signo del resultado.}\right.$$

Ejemplo 1:

+3+2=?

Al utilizar la regla anterior tenemos que:

$$\text{los números se suman}\left\{\; +y+ = \quad + \text{ es el signo del resultado.}\right.$$

Es decir positivo y positivo es positivo, en el ejemplo es:

+3+2=+

Para obtener el resultado sumamos los números: 3+2= 5. Por lo tanto el resultado de la operación:

+3+2=+5

Caso II (Negativo y negativo):

Si camino en dirección hacia los negativos y después camino otra vez en la dirección de los negativos termino en los negativos.

-				⟵		⟵						+
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Sumo los números auque sean negativos, porque ambos números van en la misma dirección y es la distancia que recorro con un número mas la distancia que recorro con el otro, y conservo la dirección que llevaba, en este caso hacia los negativos, es decir:

Si tengo un número negativo y otro número negativo, el resultado es negativo y para obtenerlo los números se suman.

Escribimos lo anterior de la siguiente forma:

$$\text{los números se suman}\left\{\; -y- = \quad - \text{ es el signo del resultado.}\right.$$

Ejemplo 1:

-3-4=?

Al utilizar la regla anterior tenemos que:

$$\text{los números se suman}\left\{\; -y- = \quad - \text{ es el signo del resultado.}\right.$$

Es decir negativo y negativo es negativo, en el ejemplo es:

-3-4=-

Para obtener el resultado, sumamos los números: 3+4= 7. Por lo tanto el resultado de la operación:

-3-4=-7

Números con signos diferentes

Para analizar este caso, tendríamos que descubrir la respuesta de la siguiente pregunta.

Pregunta: ¿Qué pasa cuando en la recta numérica camino en direcciones diferentes?

Número positivo y número negativo

Ejemplo 1:

Si tenemos +3-2, primero camino tres hacia los positivos "+".

- $\rightarrowtail$ +3 +

o

$\barwedge$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

Lo que quiere decir que ahora estaría parado en el +3

Después tengo que caminar 2 en dirección de los negativos "-", lo represento con $\circlearrowright$ y se vería de la siguiente forma.

- $\rightarrowtail$ +

o

$\barwedge$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\circlearrowright$ $\circlearrowright$

-2 $\leftarrowtail$

Cambiar la dirección que llevaba hace que me regrese 2 lugares por lo que termino en el 1 de los positivos "+"

- $\rightarrowtail$ +3 +

o

$\barwedge$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\circlearrowright$ $\circlearrowright$

-2 $\leftarrowtail$

El resultado de +3-2=+1

Número negativo y número positivo

Ejemplo 1:

Si tenemos -3+2=?

Las instrucciones son: primero avanza 3 en dirección de los negativos "-", lo representamos con $\curvearrowleft$, en la recta numérica se ve de la siguiente forma.

-					-3			$\leftarrowtail$								+
								o								
					$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	$\overline{\wedge}$								
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Después en la segunda instrucción camino 2 hacia los positivos "+", lo representamos con $\circlearrowleft$

-					$\rightarrowtail$		+2									+
					o											
					$\overline{\wedge}$											
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
						$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft$									
						+2										

Si avanzo 3 hacia los negativos "-" y después 2 con dirección a los positivos "+", entonces terminamos en el 1 de los negativos "-", porque al cambiar el sentido que llevaba me regrese 2 lugares.

-						-3		$\leftarrowtail$								+
								o								
					$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	$\curvearrowleft$	$\overline{\wedge}$								
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
						$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft$									
				$\rightarrowtail$	+2											

Es decir -3+2=-1.

Cuando tenemos el caso en el que el signo de los números es diferente, es decir, que un número es positivo y el otro es negativo, tomemos estos ejemplos:

$$
\begin{array}{ll}
+3-2= & +1 \\
-3+2= & -1
\end{array}
$$

Pregunta: ¿Qué ocurre con el signo del resultado?, ¿de qué depende que en algunos casos sea negativo y en otros positivo?

Conclusión

Caso I (Positivo y negativo):

En el ejemplo +3-2=

Cuando se avanzó en una dirección positiva, la distancia es positiva, pero al momento que se cambió la dirección hacia los números negativos, ya no avanzo sino que me regreso y no conservo la dirección que llevaba.

Es decir que si camino en los positivos y después camino en los negativos termino en la parte de la recta hacia donde haya caminado una distancia mayor.

- $\rightarrowtail$ +

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\leftarrowtail$

En el caso de +3-2= terminaría en los positivos porque el número positivo es mayor.

- $\rightarrowtail$ +3 +

o

$\overline{\wedge}$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$ $\curvearrowright$

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\circlearrowright$ $\circlearrowright$

-2 $\leftarrowtail$

Por esta razón tenemos que +3-2=+1.

Para obtener el resultado los números se restan, es decir, al número mayor le resto el número menor, por eso le resto al 3 el 2, y da como resultado 1.

Cuando tengo un **número positivo** y un **número negativo**, el signo del resultado depende del **signo** que tenga el **número mayor**.

Para obtener el valor numérico del resultado se le resta al número mayor el número menor, podemos resumirlo de la siguiente manera.

$$\text{los números se restan}\left\{\ +y- = \ \text{ el signo del número mayor}\right.$$

Al utilizar la regla anterior para resolver la operación del ejemplo, tenemos:

+3-2=?

La distancia que recorro con el primer número, en este caso es +3 es hacia los positivos, la cantidad que indica el segundo número, en el ejemplo es -2 , el signo que resulta depende solamente de qué número sea el mayor, en este caso el número mayor es 3 y es positivo "+", por lo tanto el resultado es positivo "+".

+3-2=+

Se restan los números y tenemos que 3-2=1.

Por lo tanto el resultado de:

+3-2=+1

Caso II (Negativo y positivo):

En el ejemplo -3+2=

Si avanzo en dirección de los negativos y después avanzo en dirección de los positivos termino en el lado en el que haya recorrido una distancia mayor.

- $\longleftarrow$ +

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

$\rightarrowtail$

En el caso de -3+2= termino en los negativos porque el número negativo es mayor.

- $\rightarrowtail$ $\longleftarrow$ +

o

$\overline{\wedge}$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Los números los resto, porque los números van en diferente dirección.

Al restarle al número mayor, el número menor, es decir, en este caso al 3 le quito 2, como resultado obtengo 1.

Por lo tanto si tengo un número negativo y un número positivo, el signo del resultado depende del signo que tenga el número mayor y para obtener el valor numérico del resultado se le resta al número mayor el número menor, resumiendo lo anterior tenemos lo siguiente.

$$\text{los números se restan} \left\{ \; -y+ = \quad \text{el signo del número mayor} \right.$$

Para ejemplificar la regla, resolvamos el siguiente ejemplo:

-3+2=

Como la distancia que recorro con el primer número, en este caso es -3, con dirección hacia los negativos, la cantidad que indica el segundo número en el ejemplo es +2, el signo que resulta depende solamente de que número sea el mayor en este caso 3, por lo tanto la distancia mayor la recorrí en la dirección de los números negativos, el signo que se obtiene en el resultado es el negativo “-”.

Es decir:

-3+2=-

Al restar los números se obtiene que 3-2=1

Por lo tanto el resultado de:

-3+2=-1

Conclusión General:

La ley de la suma y resta la podemos resumir de la siguiente forma:

Ley de la Suma y Resta.

$$\text{se suman los números}\left\{\begin{array}{ll} +y+= & + \\ -y-= & - \\ \end{array}\right.$$

$$\text{se restan los números}\left\{\begin{array}{ll} +y-= & \text{signo del} \\ -y+= & \text{número mayor} \\ \end{array}\right.$$

Para utilizarla solo necesitas buscar el renglón que le corresponde a la operación que te den, es decir si la operación que me dieran a resolver es:

+585-887= ?

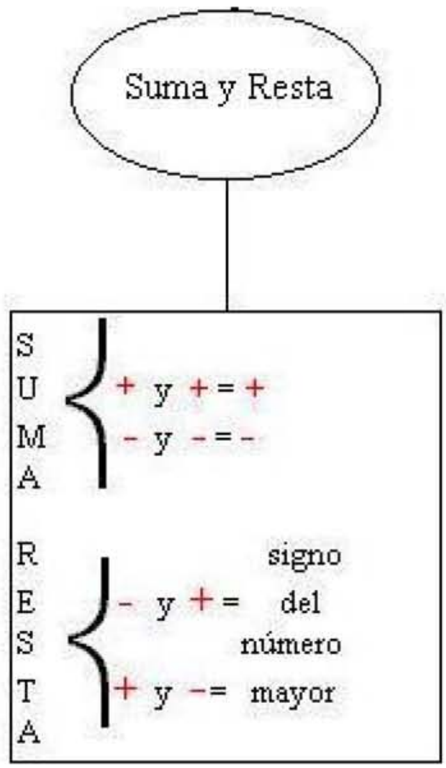
Le corresponde el renglón:

$$\text{se restan los números}\left\{\begin{array}{ll} +y-= & \text{signo del número mayor} \end{array}\right.$$

Al utilizar la regla tengo que el signo del número mayor es el negativo "-" y al restar los números 887 - 585= 302, por lo tanto obtengo que la operación.

+585-887=-302

Podemos representar a la ley de la suma en el siguiente diagrama.



Actividad: Realiza las siguientes operaciones de números con signo en tu cuaderno y práctica la regla anterior.

a)-15 -20=

b)+27-45=

c)+7+89=

d)-45+8=

4.3. Ley de la multiplicación y la división

Para trabajar con la ley de la multiplicación y la división vamos a necesitar una ficha de trabajo.

De un lado de la ficha vas a escribir lo siguiente:

Ley de la Suma y Resta.

$$\text{se suman}\left\{\begin{array}{ll} +y+ = & + \\ -y- = & - \end{array}\right.$$

$$\text{se restan} \begin{cases} +y- = & \text{signo del} \\ -y+ = & \text{número mayor} \end{cases}$$

Volteamos la ficha del otro lado y escribimos:

Ley de la Multiplicación y División.

$$\text{se multiplican} \begin{cases} (+)(+) = & + \\ (+)(-) = & - \\ (-)(-) = & + \\ (-)(+) = & - \end{cases}$$

Es importante que las leyes estén una de cada lado de la ficha, porque si están del mismo lado es más fácil confundirse.

4.3.1. Multiplicando a los números con signo

En esta sección utilizaremos la tarjeta de la regla de los signos que acabamos de hacer, por medio de ejemplos veamos como funciona la regla de la multiplicación y la división.

Para multiplicar dos números con signo, utilizaremos la regla de la multiplicación y la división de la siguiente manera:

Número positivo por número positivo

Para multiplicar dos números positivos el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican} \left\{ (+)(+) = \quad + \right.$$

Ejemplo 1: (+3)(+7)=

Al multiplicar dos números positivos tenemos que positivo por positivo, el signo del resultado es positivo, en el ejemplo realizamos la multiplicación de 3 por 7, lo que da como resultado:

(+3) (+7) = + 21

Ejemplo 2: (+42)(+73)=

Número positivo por número positivo da como resultado en número positivo, así que solamente multiplico a los números 42 por 73, se obtiene como resultado:

(+42)(+73) =+ 3066

Número negativo por número negativo

Para multiplicar dos números negativos el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (-)(-) = \ \ +\right.$$

Ejemplo 1: (-5)(-7)=

Al multiplicar un número negativo por otro número negativo, el signo que resulta es positivo, y realizamos la multiplicación de 5 por 7, lo que da como resultado:

(-5) (-7) = + 35

Ejemplo 2: (-52)(-29)=

Un número negativo por un número negativo da como resultado un número negativo, así que solamente multiplico a los números 52 por 29, se obtiene como resultado:

(-52)(-29) = + 1508

Número positivo por número negativo

Para multiplicar un número positivo por un número negativo el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (+)(-) = \ \ -\right.$$

Ejemplo 1: (+8)(-6)=

Si tenemos un número positivo por un número negativo, el signo que resulta es negativo, al realiza la multiplicación de 8 por 6, da como resultado:

(+8) (-6) = - 48

Ejemplo 2: (+87)(-25)=

Número positivo por número negativo da como resultado en número negativo, así que solamente multiplico a los números 87 por 25, se obtiene como resultado:

(+87)(-25) =-2175

Número negativo por número positivo

Para multiplicar un número negativo por un número positivo, el renglón que corresponde es el siguiente:

$$\text{se multiplican}\left\{\ (-)(+) = \ \ -\right.$$

Ejemplo 1: (-9)(+5)=

Al multiplicar un número negativo por un número positivo, el signo que resulta es negativo, la multiplicación de 9 por 5 da como resultado 45, por lo tanto.

(-9) (+5) = - 45

Ejemplo 2: (-45)(+17)=

Un número negativo por un número positivo da como resultado un número negativo, así que solamente multiplico a los números 45 por 17, se obtiene como resultado:

(-45)(+17) = -765

De esta misma manera podemos dividir a dos números con signo.

Actividad: Realiza las siguientes multiplicaciones de números con signo en tu cuaderno y practica lo que haz aprendido.

a) $(-25)(+43) =$

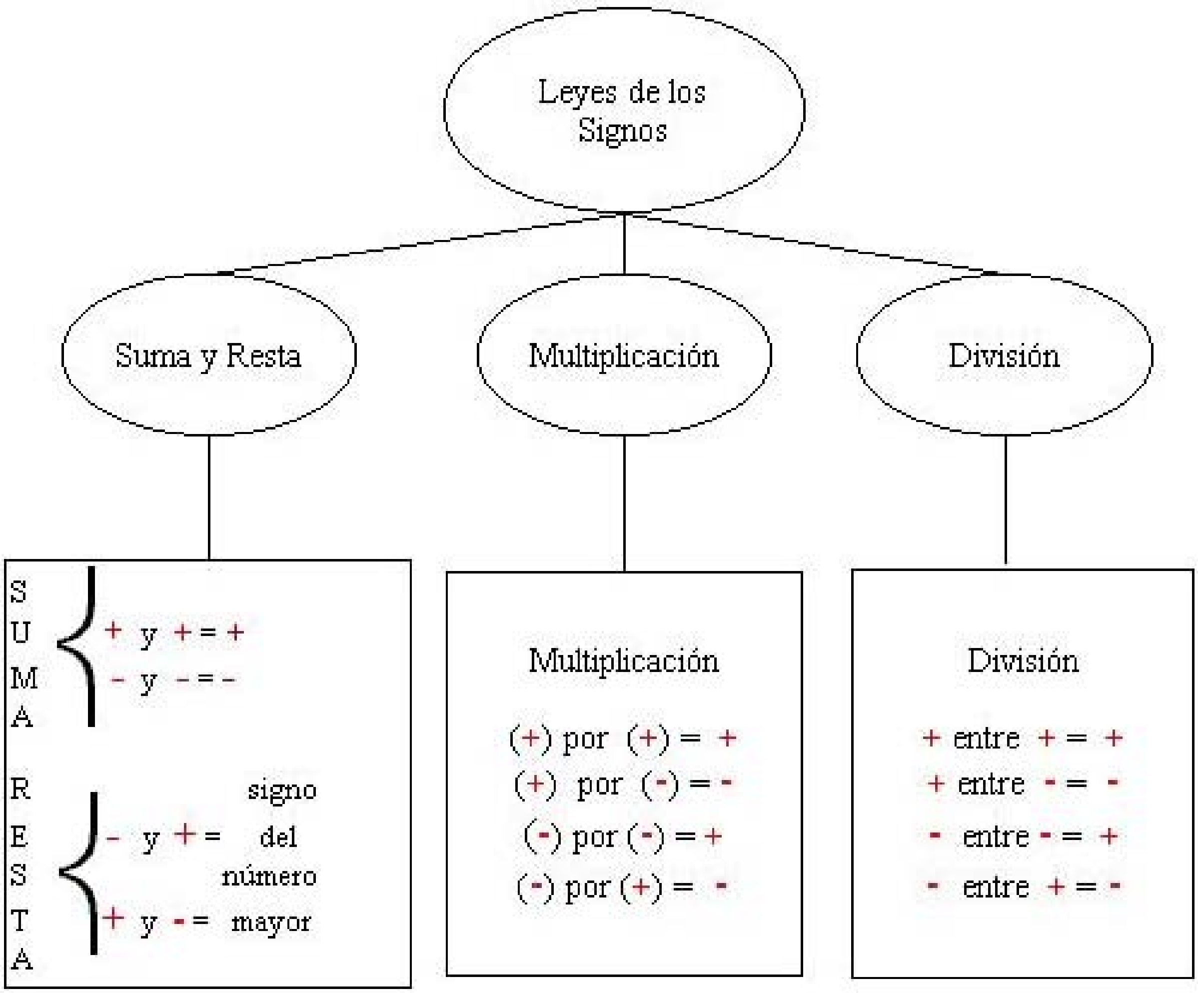
b) $(+15)(-17) =$

c) $(+63)(+75) =$

d) $(-49)(-58) =$

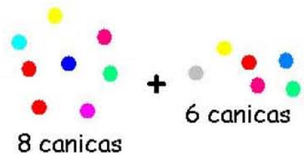
Recordatorio:

Para poder representar las leyes de los signos utilizamos el siguiente diagrama.



4.4. Sumas y restas con polinomios

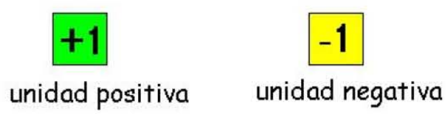
En un principio teníamos operaciones como +8+6=+14, ¿qué pasaría si tuviéramos 8 canicas y le agregamos 6 canicas mas?, tendríamos lo siguiente:



Al contarlas tenemos que 8 canicas + 6 canicas = 14 canicas

Al sumar canicas más canicas el resultado siguen siendo canicas.

A partir de cuadros de cartoncillo de dos colores representaremos a la unidad con signo positivo de un color y al ponerla del otro lado representamos a la unidad con signo negativo con otro color.

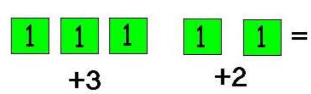


Para resolver operaciones con el material, lo utilizaremos de la siguiente forma.

Número positivo y número positivo

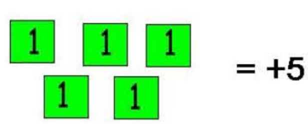
Ejemplo 1: Si tenemos la siguiente suma: +3+2 =

Al sumar cantidades positivas, se toman los cuadros que sean necesarios para realizar las operaciones, en este caso se colocan sobre la mesa del lado del color que va a representar a los números positivos.



Al contar los cuadros que representan a los números positivos, tenemos que el resultado de la operación es el siguiente:

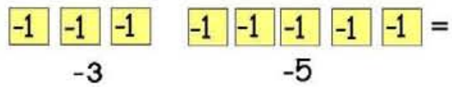
+3+2 =+5



Número negativo y número negativo

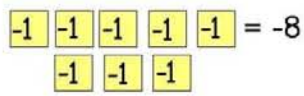
Ejemplo 2: Si tengo la siguiente operación: -3-5 =

Cuando realizamos operaciones con números negativos utilizamos el otro lado de los cuadros, que es de un color distinto, para diferenciar a los negativos de los positivos y realizamos un procedimiento similar al anterior.



Al contar los cuadros negativos, es posible ver que se trata de 8 cuadros del color que representa a los negativos, la operación da como resultado.

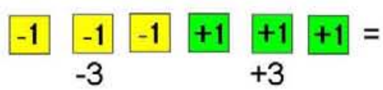
-3-5 = -8



Número negativo y número positivo

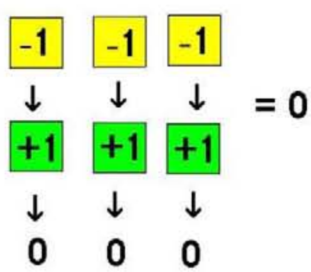
Ejemplo 3: -3+3=

Cuando tengo números iguales con signos diferentes, puedo ir asociando un cuadro positivo con un negativo, formando las parejas de tal manera que si a un positivo le quito un negativo da como resultado cero, es decir, esa pareja se anula o se cancela.



Cuando formo las parejas obtengo que:

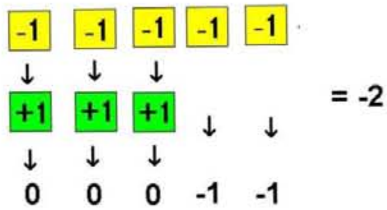
-3+3=0



De esta manera, si asociamos las parejas podríamos realizar operaciones de signos diferentes.

Ejemplo 4: -5+3=

Al asociar al -5 con el +3 en parejas de cuadrados contrarios el resultado es:

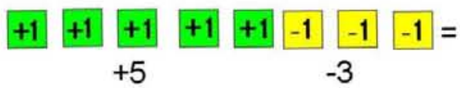


Como se cancelan las tres primeras parejas solo quedan dos cuadrados de -1 y -1 que da como resultado -2, por lo tanto el resultado de la operación:

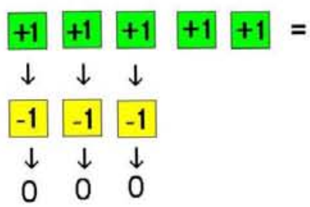
-5+3=-2

Número positivo y número negativo

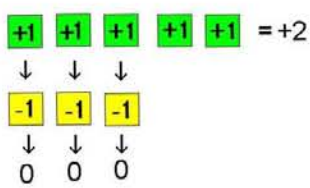
Ejemplo 5: +5-3=



Al asociar los cuadros podemos ver las parejas que se cancelan.



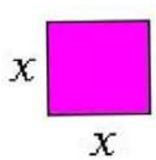
De esta manera es posible ver que se cancelan las tres primeras parejas y que quedan sueltos dos cuadros de +1.



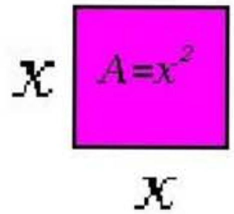
Por lo tanto el resultado de la operación.

+ 5 - 3 = + 2

De igual manera podemos sumar cantidades diferentes si cambiamos las medidas de los lados del cuadrado, por ejemplo si tomamos un cuadrado de medida de lado x.

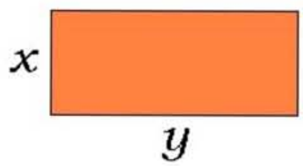


Al calcular el área de la figura se resuelve la multiplicación Área = $(lado)(lado)$ que al escribir el valor de los lados tenemos $A = (x)(x)$ lo que nos da como resultado x con exponente 2, por lo tanto el área de la figura es $A = x^2$

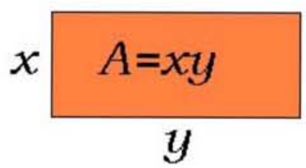


De esta manera tenemos cuadrados de área=x^2 para seguir realizando operaciones como las que hacíamos con los otros cuadrados de unidades.

Además si tomamos por ejemplo un rectángulo de base "y" con altura "x" tendríamos lo siguiente.



Al calcular su área tenemos que Área= $(base)(altura)$, al sustituir los valores $A = (x)(y)$ que da como resultado $A = xy$.

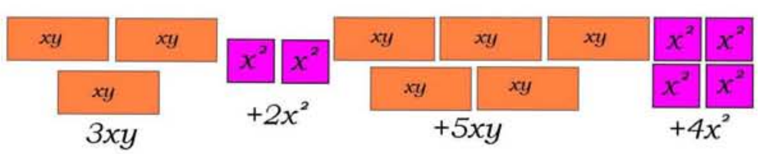


Con esto tenemos un rectángulo de área=xy para realizar mas operaciones como las anteriores.

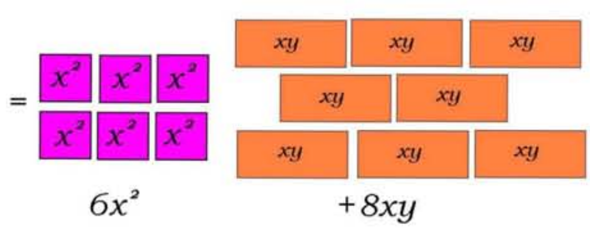
Por ejemplo para resolver sumas como las que hacíamos con las canicas o con los cuadrados de área "uno" o "menos uno" utilizamos el mismo concepto que antes y podemos hacer la siguiente operación.

$3xy$ + $2x^2$ + $5xy$ + $4x^2$=

Que al representarlo con las figuras que acabamos de construir se tiene lo siguiente.



Agrupando las figuras que son del mismo tipo (es decir semejantes) tenemos que al contarlos tenemos en total 6 cuadrados de área x^2 y también tenemos 8 rectángulos de área xy.

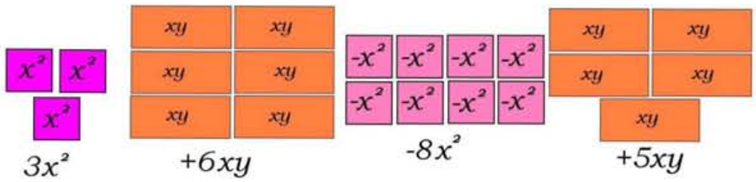


Por lo tanto la operación $3xy + 2x^2 + 5xy + 4x^2 = 6x^2 + 8xy$

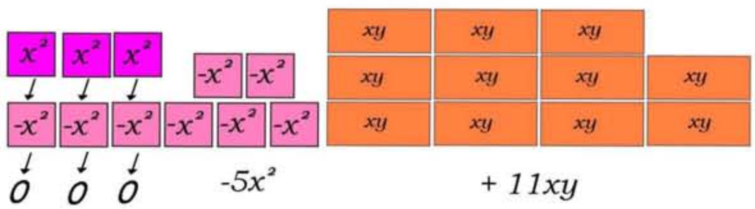
Si tomamos como base que las figuras tienen 2 colores diferentes uno para representar su valor con signo positivo y otro para los valores negativos de esta manera podemos realizar sumas y restas.

Por ejemplo $3x^2 + 6xy$ - $8x^2 + 5xy =$

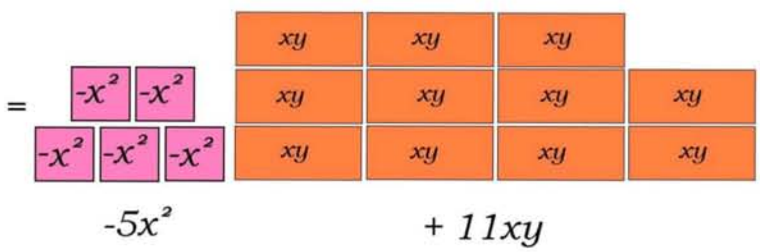
Al representarla con las figuras tenemos:



Que al agrupar las figuras semejantes, tenemos que en el caso de las x^2 se van a cancelar algunas parejas.



Al contarlas tenemos que dan como resultado después de quitar las que se cancelan, quedan 5 cuadros de área x^2 de signo negativo y además al contar los rectángulos de área xy son 11.



Por lo tanto el resultado de $3x^2 + 6xy$ - $8x^2 + 5xy =$ -$5x^2 + 11xy$

Con lo anterior es importante recalcar que para resolver operaciones con polinomios necesitamos como principio base agrupar los términos que son semejantes y después contarlos para ver que cantidad tenemos de cada uno.

Si sumáramos letras, por ejemplo sumáramos letras "a"pasa lo mismo.

3a+2a=5a

Porque solamente cuento cuantas letras"a" tengo.

Si la operación fuera -6b-3b= para resolverla apoyándome en la ley de la suma y resta, para resolver la operación numérica tenemos:

Ley de la Suma y Resta.

$$\text{se suman}\begin{cases} +y+= & +\\ -y-= & - \end{cases}$$

$$\text{se restan}\begin{cases} +y-= & \text{signo del}\\ -y+= & \text{número mayor} \end{cases}$$

Si la operación es -6b-3b= como al sumar o restar letras “b” en el resultado también tengo letras “b” solo necesito saber cual es la cantidad numérica de letras “b” que me falta en el resultado.

-6b-3b= ?b

Si resuelvo la operación numérica, en el ejemplo tendría que resolver -6-3=

Para resolverla el renglón que le corresponde en la ley de la suma y resta en este caso seria.

$$\text{se suman}\left\{\ -y-= \quad -\right.$$

Que significa que si tengo un número negativo y un número negativo el signo del resultado es negativo “-”.

-6b -3b = -

Además los números se tienen que sumar 6+3=9, el resultado es.

-6b - 3b = -9b

El resultado de la operación -6b-3b=-9b

Con este ejemplo podría resolver cualquier operación.

Otro ejemplo podría ser $5x - 3x - 5x - 8x + 2x$.

Todos tienen “x”, en el resultado debo de tener también “x” porque solo cuento cuantas “x” hay.

$5x - 3x - 5x - 8x + 2x$=?x

Tengo que resolver la operación numérica 5-3-5-8+2 y utilizar la regla de la suma y resta, separo los números por parejas para poder resolver la operación mas claramente.

5-3 -5-8 +2

En la ley de la suma y resta le corresponde el renglón:

$$\text{se restan}\left\{\begin{array}{ll} +y- = & \text{signo del} \\ & \text{número mayor} \end{array}\right.$$

Le corresponde el signo del número mayor que entre 5 y 3, el mas grande es el 5, que tiene el signo "+" (positivo); los números se restan, es decir al 5 le quito 3 y da como resultado 2.

$$\begin{array}{ccc} \text{5-3} & \text{-5-8} & +2 \\ \searrow\swarrow & & \\ +2 & & \end{array}$$

La siguiente operación que hay que resolver es -5-8.

$$\begin{array}{ccc} \text{5-3} & \text{-5-8} & +2 \\ \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \\ +2 & & \end{array}$$

Le corresponde en la ley de la suma y resta el renglón de:

$$\text{se suman}\left\{\begin{array}{ll} -y- = & - \end{array}\right.$$

Si tengo un número negativo y otro número negativo el resultado es negativo.

$$\begin{array}{ccc} \text{5-3} & \text{-5-8} & +2 \\ \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \\ +2 & \text{-} & \end{array}$$

Los números se suman así que tengo que sumar 5 y 8, que da como resultado 13.

$$\begin{array}{ccc} \text{5-3} & \text{-5-8} & +2 \\ \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \\ +2 & \text{-13} & \end{array}$$

Como en esta caso quedo un número suelto en este caso el +2, como no tiene pareja lo bajo igual.

$$\begin{array}{ccc} \text{5-3} & \text{-5-8} & +2 \\ \searrow\swarrow & \searrow\swarrow & \downarrow \\ 2 & -13 & +2 \end{array}$$

Para obtener el resultado ahora tengo que resolver la operación 2-13+2 tengo que seguir el mismo procedimiento, resolverlos por parejas, primero hay que resolver 2-13.

5-3 -5-8 +2
$\downarrow$
2 -13 +2

Le corresponde en la ley de la suma y reta el renglón:

$$\text{se restan}\left\{\begin{array}{ll} +y- = & \text{signo del} \\ & \text{número mayor} \end{array}\right.$$

Al resultado le corresponde el signo del número mayor, en este caso entre 2 y 13 el mayor es el 13, y el signo que tiene el 13 es menos, por eso el signo del resultado es -.

5-3 -5-8 +2
$\downarrow$
2 -13 +2
-

Los numeros se restan y como no le puedo quitar al 2 el 13, la operación que hago es al 13 le quito 2 y eso es un 11, el resultado es:

5-3 -5-8 +2
$\downarrow$
2 -13 +2
-11

Como el +2 no tiene pareja lo bajo.

5-3 -5-8 +2
$\downarrow$
2 -13 +2
$\downarrow$
-11 +2

Finalmente para obtener el resultado es la operación que tengo que resolver es -11+2

5 -3 -5-8 +2
$\downarrow$
2 -13 +2
$\downarrow$
-11 +2

Para resolver -11+2 en la ley de la suma y resta le corresponde el renglón:

$$\text{se restan}\begin{cases} -y+= & \begin{array}{l}\text{signo del}\\ \text{número mayor}\end{array}\end{cases}$$

Le corresponde el signo del mayor en donde entre 11 y 2 el número mas grande es el 11 le toca el signo -.

5 -3 -5-8 +2
↓
2 −13 +2
↓
-11 +2
-

Y los números se restan, por eso a 11 le quito 2 y obtengo como resultado 9.

5 -3 -5-8 +2
↓
2 −13 +2
↓
-11 +2
-9

Entonces la operación 5-3-5-8+2=-9.

Quiere decir que la operación $5x$-$3x$-$5x$-$8x$+$2x$=?x

La respuesta es:$5x$-$3x$-$5x$-$8x$+$2x$=-$9x$

De igual manera si agrupamos términos semejantes podemos resolver operaciones con factores de diferente tipo.

Por ejemplo $3a$ -$4b$ + $7a$ -$6b$ + $5b$ =

Para resolverla basta con agrupar los términos que son semejantes, nos queda acomodada de la siguiente forma.

$3a$ + $7a$ - $4b$ - $6b$ + $5b$ =
Para saber la cantidad cuantas "a" tengo solamente necesito resolver la operación.

$3a$ + $7a$ =

Que al contarlas tenemos que son 10a.

En cambio para contar cuantas "b" tengo necesito resolver la operación.

-4b - 6b + 5b =

Resolviendo los signos a partir de la regla de los signos tenemos que.

$$\begin{array}{cc} -5\ -6 & +5 \\ \searrow\swarrow & \end{array}$$

Le corresponde en la ley de la suma y resta el renglón:

$$\text{se suman} \left\{ \; -y- = \quad - \right.$$

El resultado que obtenemos es:

$$\begin{array}{cc} -5\ -6 & +5 \\ \searrow\swarrow & \\ -11 & \end{array}$$

Como en este caso el +5 se queda solo lo copiamos abajo y tenemos.

$$\begin{array}{cc} -5\ -6 & +5 \\ \searrow\swarrow & \downarrow \\ -11 & +5 \end{array}$$

Para resolverla el renglón de la ley de la suma y resta que le corresponde es:

$$\text{se restan} \left\{ \begin{array}{ll} -y+ = & \text{signo del} \\ & \text{número mayor} \end{array} \right.$$

Al resolver de la operación -11 +5 = -6

Finalmente el resultado de -5b -6b +5b = -6b

Por lo tanto el resultado de la operación.

3a -4b + 7a -6b + 5b = 10a -6b

Actividad: Practica lo que haz aprendido realizando en tu cuaderno las siguientes sumas y restas con polinomios.

a)5x -4x + 6x=

b)-6x + 2y + 5y -4x=

c)8a + 5b + 6c +4a -7b=

d)4x^2 + 2xy -3xy + 6x^2=

Capítulo 5

Conclusiones

Este trabajo es apto para alumnos y asesores de los Círculos de Estudio del STUNAM, adultos que en su mayoria tienen edades que oscilan entre los 45 y 60 años.

La motivación principal, es apoyar a los alumnos que presentan problemas para comprender los textos de los fascículos del Colegio de Bachilleres correspondientes al curso de Matemáticas 1, debido al lenguaje formal y los conceptos previos que el alumno debe manejar para poder utilizarlos.

Al desarrollar esta tesis, se tomó en cuenta que algunos alumnos ya no recuerdan ningún tema de matemáticas, a excepción de operaciones básicas, por lo que la finalidad principal es crear una guía que introduzca a los estudiantes, de manera sencilla, a los conceptos que no recuerden, mismos que son necesarios para el aprendizaje de la materia.

De esta forma, este trabajo pretende ser el fascículo 0 que provee de las herramientas necesarias a los alumnos para el mejor aprovechamiento de los fascículos del Colegio de Bachilleres, mejorando de esta forma su aprendizaje de las matemáticas.

En el transcurso del desarrollo de esta tesis, se utilizó parte del material de la misma para impartir asesorías, en donde se notaron diferencias entre los alumnos que habían realizado los ejercicios de esta tesis antes de empezar a trabajar con los fascículos del Colegio de Bachilleres y de aquellos alumnos que no lo habian hecho. Entre las diferencias se pudo notar que los alumnos que resolvieron las actividades presentadas en esta tesis antes de utilizar los fasciculos del Colegio de Bachilleres tenian un desempeño y aprovechamiento mayor, al estudiar los textos bachilleres en asesorías o por cuenta propia, ya que el lenguaje de los fascículos posteriores ya no fue una barrera para los alumnos, porque ya tenían ademas un mejor manejo de los conceptos.

Con la colección de temas que se proponen en esta tesis, se tienen diferentes opciones en cuanto al método de estudio para diversos temas de aritmética, los que son la base de pre-álgebra que es un tema que se estudia en los fascículos del Colegio de Bachilleres, correspondientes al curso de matemáticas 1 y posteriores.

Debido a que la presente tesis se fue desarrollando al presentar los temas en clase, se obtuvieron mejores resultados, ya que se iban modificando las actividades de acuerdo a las necesidades de los estudiantes. De esta manera se obtuvo el objetivo principal: facilitar el aprendizaje de nuevos conceptos.

Otra de las características que posee este trabajo es que los temas son introducidos en un primer acercamiento de forma intuitiva, de tal forma que evita utilizar tecnicismos o lenguaje matemático formal hasta que el alumno está familiarizado con el concepto.

Se utilizaron cuentos en los cuales se planteaban preguntas a los alumnos con la intención de que se fueran involucrando con los conceptos que no conocían y fueran deduciéndolos a partir de razonamientos propios, despertando de esta manera el interés en el descubrir y aprender. Un objetivo que a lo largo de las asesorías se logro satisfactoriamente.

Apéndice A

Reporte de Actividad complementaria a la Leccion 1

A.1. Del fútbol a la suma de Gauss

Con el fin de que los alumnos ejercitaran lo que reconocían sobre las operaciones de los números, se les planteó de tarea un problema, donde ellos debían desarrollar la solución, como se les ocurriera, ya sea con dibujos, con operaciones, pero debían simbolizar, representar y contar para obtener una respuesta. Se les presento el siguiente texto:

Resolviendo un problema en casa: "Queremos contar ¿Cuantos partidos son?´´

El domingo es un día conocido en la televisión mexicana, como el domingo futbolero, quiere decir que los partidos de fútbol nacional se juegan en domingo, día en que los aficionados a este deporte tienen oportunidad de apoyar a sus equipos favoritos ya sea asistiendo al estadio o viendo el partido en televisión.

Hay 18 equipos diferentes en el torneo de fútbol soccer nacional, cada equipo juega un solo partido cada domingo. En cada jornada cada equipo juega un partido contra algún otro equipo hasta que al terminar el torneo ha jugado con cada uno de los equipos. Por ejemplo el partido PUMAS vs AMERICA es el mismo que AMERICA vs PUMAS y se contaría como un solo partido y asi sucesivamente.

Figura A.1: [20]

Escribí las preguntas en el pizarrón para que los alumnos las analizaran en sus casas y completarán las respuestas para que las presentaran individualmente la siguiente clase.

Planteando preguntas:

Si hay 18 equipos, al terminar el torneo regular. ¿Contra cuántos equipos jugará cada equipo?, ¿Cuántos partidos diferentes hay en total en el torneo regular?

Las soluciones que dieron los alumnos se presentaron en la siguiente clase de forma individual, a continuación presento algunas de las soluciones que los alumnos dieron al problema y las razones para justificarlas.

Tarea de Angélica

Angélica escribió el rol de juegos para ver qué ocurría con los equipos. Supuso que se estaban jugando el mundial por lo que escribió los nombres de los equipos que representan a cada país.

Para Angélica fue necesario escribir todo el rol porque no sabía como eran los torneos de fútbol.

Tomo al azar los equipos para escribir el rol de juegos, cuidando que no hubiera partidos repetidos, que cada equipo jugara un solo partido en cada una de las jornadas y que debía usar 18 equipos en total.

Escribió seis jornadas con sus respectivos juegos, de esta manera observó que en cada jornada se juegan 9 partidos, justificando con estos roles de juegos que son 9 partidos en cada una de las jornadas del torneo regular.

El ver el rol de juegos le dio la idea de que, como eran 18 equipos, entonces un equipo tendría que jugar contra 17 contrincantes por lo que solamente podía haber 17 jornadas.

Decidió multiplicar 17 por 9, donde 17 es el número de jornadas y 9 el número de partidos que se juegan en cada una de ellas.

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 7 \\ \times & & 9 \\ \hline 1 & 5 & 3 \end{array}$$

Con esto Angélica concluye que hay 9 partidos en cada jornada, que son 17 jornadas en total y que además se juegan 153 partidos en el torneo regular

Angélica González Hernández.

Torneo de Futbol

18 equipos compiten. en 17 fechas. "Jornadas"

9 juegos por fecha. $\begin{array}{r} 17 \\ \times 9 \\ \hline 153 \end{array}$

¿Cuantos partidos se juegan en total? 153 total.

Selecciones 1 Jornada.	2. Jornada	3 Jornada
Mexico vs E.U.	Peru vs. E.U.	Mexico vs Peru.
Peru vs Salvador	Mexico vs. Salvador	E.U vs Salvador
Corea vs. Holanda	Corea vs. Costarica	Corea - VS Holanda
Brasil vs. Costa rica	Holanda vs. Brasil	Costa - VS Brasil
Argentina vs. Francia	Argentina - Nigeria	Argentina vs Francia.
Bulgaria vs. Nigeria	Francia - Bulgaria	Nigeria vs Bulgaria
Colombia v.s. España	Colombia - China	Colombia - vs Alemania
Uruguay v.s China	Alemania - Uruguay	Paraguay vs Uruguay
Paraguay vs. Alemania.	España - Parguay	España v.s China.

4 Jornada.	5 Jornada	6 Jornada.
Mexico vs Alemania.	Mexico vs CostaRica	Mexico V.S Brasil
E.U vs Paraguay	E.U. vs Alemania	Alemania V.S Argentina
Pero vs China.	Peru vs España	Francia V.S Peru
Salvador vs Uruguay	Bulgara vs Francia	España V.S Uruguay
Corea vs España	China v.s Corea	Nigeria V.S Corea.
Brasil vs Francia	Brasil v.s Argentina	salvador V.S paraguay
Bulgaria vs. Nigeria	Colombia vs Holanda	Colombia V.S China.
Francia V.S Colombia	Salvador vs Uruguay	E.U. V.S Holanda
Holanda V.S Argentina.	Nigeria V.S Paraguay	Costa Rica V.S Bulgaria.

Comparemos más respuestas de sus compañeros.

Tarea de Linda

Villanueva Acolt Linda 25/Febrero/2002.

TAREA:

Torneo Futbol

18 Equipos
17 Jornadas
9 Equipos por jornada.

Jornada I 9 Partidos	Jornada II 9 Partidos	Jornada III 9 Partidos	Jornada IV 9 Partidos
Jornada V 9 Partidos	Jornada VI 9 Partidos	Jornada VII 9 Partidos	Jornada VIII 9 Partidos
Jornada IX 9 Partidos	Jornada X 9 Partidos	Jornada XI 9 Partidos	Jornada XII 9 Partidos
Jornada XIII 9 Partidos	Jornada XIV 9 Partidos	Jornada XV 9 Partidos	Jornada XVI 9 Partidos
Jornada XVII 9 Partidos	Para sacar el resultado de cuantos partidos se juegan en el torneo, tienes, Si son 9 partidos por jornada y tienes 17 Jornadas multiplicas: 17 Jornadas x 9		

partidos esto da:

¿CUANTOS PARTIDOS SE JUEGAN EN TOTAL?
153 Partidos por torneo

Linda explicó a sus compañeros que si son 18 equipos, son 17 jornadas, porque un equipo solo puede jugar contra los demás; y que son 9 partidos por jornada, porque los partidos se juegan entre 2 equipos y como son 18 equipos entonces la mitad es 9, y que esa es la cantidad de partidos por jornada, ella escribió en una tabla en la que se representaban las 17 jornadas, y ejemplificó que de esa forma era posible ver el desarrollo de todo el torneo.

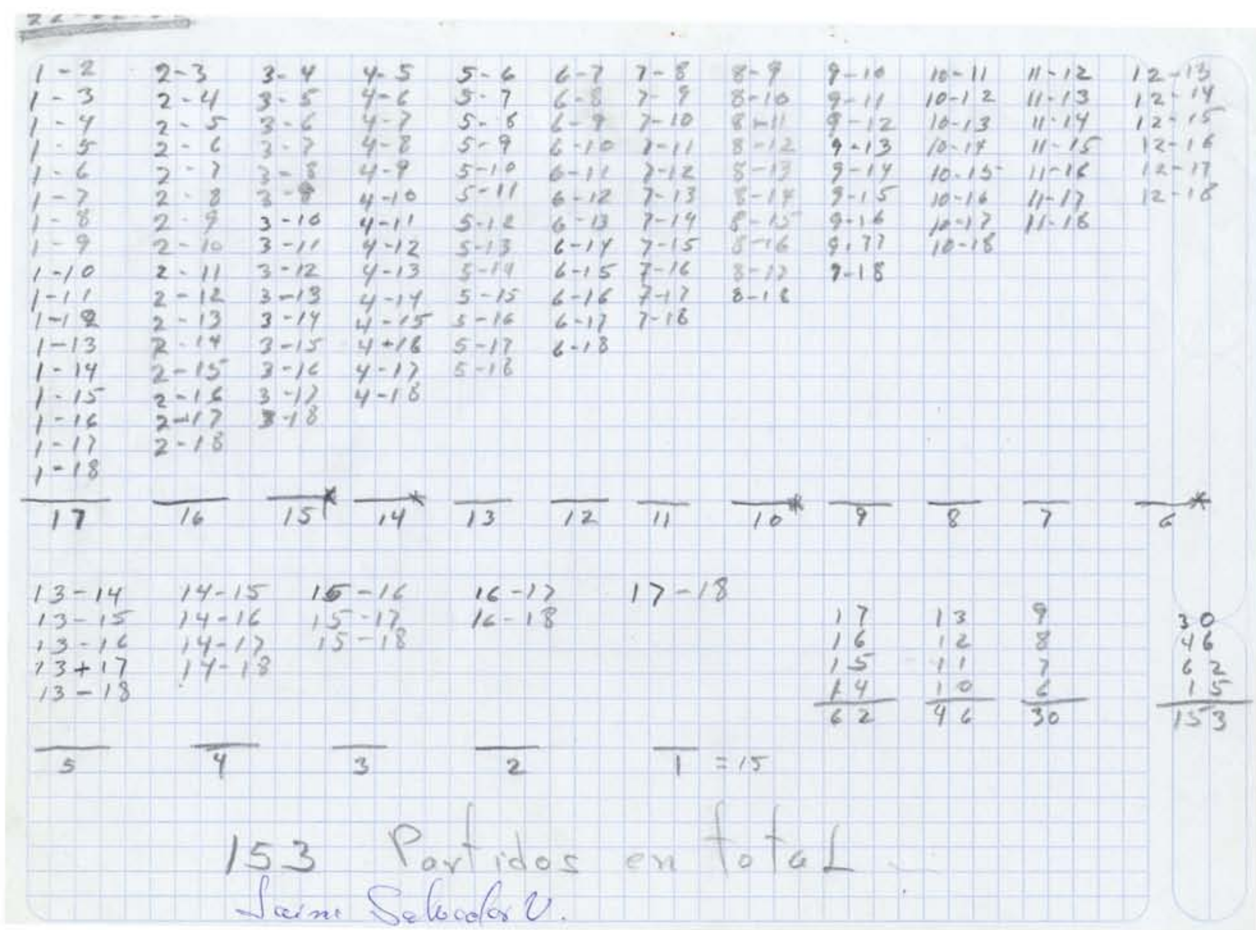
En cada uno de los cuadrados de la tabla escribió que hay 9 partidos y el número de jornadas que le correspondía, además Linda escribió una breve explicación de como había resuelto el problema, que fue la siguiente: “Para sacar el resultado de cuantos partidos se juegan en el torneo, tienes, si son 9 partidos por jornadas y tienes 17 jornadas multiplicas: 17 jornadas × 9 partidos, esto da:´´

$$\begin{array}{rrr} & 1 & 7 \\ \times & & 9 \\ \hline 1 & 5 & 3 \end{array}$$

¿Cuántos partidos se juegan en total? 153 partidos por torneo.

Esta forma de sacar la cantidad de partidos coincidió con la forma que utilizó Angélica, ya que ambas multiplican sólo que para Linda no fue necesario escribir el rol de juegos para resolver el problema y explicó a sus compañeros que a partir de tablas también es posible resolver problemas matemáticos porque se ejemplifica de una forma más práctica.

<u>**Tarea de Jaime**</u>



1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13
1-3	2-4	3-5	4-6	5-7	6-8	7-9	8-10	9-11	10-12	11-13	12-14
1-4	2-5	3-6	4-7	5-8	6-9	7-10	8-11	9-12	10-13	11-14	12-15
1-5	2-6	3-7	4-8	5-9	6-10	7-11	8-12	9-13	10-14	11-15	12-16
1-6	2-7	3-8	4-9	5-10	6-11	7-12	8-13	9-14	10-15	11-16	12-17
1-7	2-8	3-9	4-10	5-11	6-12	7-13	8-14	9-15	10-16	11-17	12-18
1-8	2-9	3-10	4-11	5-12	6-13	7-14	8-15	9-16	10-17	11-18	
1-9	2-10	3-11	4-12	5-13	6-14	7-15	8-16	9-17	10-18		
1-10	2-11	3-12	4-13	5-14	6-15	7-16	8-17	9-18			
1-11	2-12	3-13	4-14	5-15	6-16	7-17	8-18				
1-12	2-13	3-14	4-15	5-16	6-17	7-18					
1-13	2-14	3-15	4+16	5-17	6-18						
1-14	2-15	3-16	4-17	5-18							
1-15	2-16	3-17	4-18								
1-16	2-17	3-18									
1-17	2-18										
1-18											
17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6

13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
13-15	14-16	15-17	16-18	
13-16	14-17	15-18		
13+17	14-18			
13-18				
5	4	3	2	1 = 15

$$\begin{array}{r} 17 \\ 16 \\ 15 \\ 14 \\ \hline 62 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \\ \hline 46 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 46 \\ 62 \\ 15 \\ \hline 153 \end{array}$$

153 Partidos en total.

Jaime Salcedo V.

Para escribir el rol de juegos Jaime representó a cada equipo con los números del 1 al 18.

Escribió primero todos los partidos que juega el equipo 1 de la siguiente forma:

1 - 1
1 - 2
1 - 3
1 - 4
1 - 5
1 - 6
1 - 7
1 - 8
1 - 9
1 - 10
1 - 11
1 - 12
1 - 13
1 - 14
1 - 15
1 - 16
1 - 17
1 - 18

Sólo que el partido 1-1 no es posible jugarlo porque un equipo no juega contra él mismo por lo que Jaime decidió borrar el partido 1-1 y escribir los partidos a partir del juego 1-2 y quedó de la siguiente forma:

1 - 2
1 - 3
1 - 4
1 - 5
1 - 6
1 - 7
1 - 8
1 - 9
1 - 10
1 - 11
1 - 12
1 - 13
1 - 14
1 - 15
1 - 16
1 - 17
1 - 18

Al contar el número de partidos, contó 17 partidos, y empezó a escribir también los juegos del equipo número 2, en una lista.

2 - 1
2 - 2
2 - 3
2 - 4
2 - 5
2 - 6
2 - 7
2 - 8
2 - 9
2 - 10
2 - 11
2 - 12
2 - 13
2 - 14
2 - 15
2 - 16
2 - 17
2 - 18

Jaime escribió todo el rol de juegos y después tomó en cuenta que si el 1 juega con el 2, es decir 1-2, es lo mismo que el 2 juegue con el 1, que es el partido 2-1.Además un equipo no puede jugar contra sí mismo, a partir de ese razonamiento borro de la lista de juegos a las parejas: 1-1, 2-2.

De esta forma la lista partidos hasta el momento sería la siguiente:

1 - 2	2 - 3
1 - 3	2 - 4
1 - 4	2 - 5
1 - 5	2 - 6
1 - 6	2 - 7
1 - 7	2 - 8
1 - 8	2 - 9
1 - 9	2 - 10
1 - 10	2 - 11
1 - 11	2 - 12
1 - 12	2 - 13
1 - 13	2 - 14
1 - 14	2 - 15
1 - 15	2 - 16
1 - 16	2 - 17
1 - 17	2 - 18
1 - 18	

Jaime escribió el mismo procedimiento con los otros equipos.

De esta manera Jaime ya no escribía los partidos anteriores al que jugaba contra el equipo que tuviera el siguiente número natural a él, como en el caso del 1, empezó a escribir a partir del 1-2, en el caso del 2 empezó a escribir a partir del 2-3, en el caso del 3 escribió a partir del 3-4, lo que quiere decir que tiene que escribir para los demás partidos a partir del 4-5, del 5-6, 6-7, 7-8 .... hasta el 17-18.

De esta forma se evita repetir partidos, quedando como ejemplo la siguiente lista.

1 - 2	2 - 3	3 - 4
1 - 3	2 - 4	3 - 5
1 - 4	2 - 5	3 - 6
1 - 5	2 - 6	3 - 7
1 - 6	2 - 7	3 - 8
1 - 7	2 - 8	3 - 9
1 - 8	2 - 9	3 - 10
1 - 9	2 - 10	3 - 11
1 - 10	2 - 11	3 - 12
1 - 11	2 - 12	3 - 13
1 - 12	2 - 13	3 - 14
1 - 13	2 - 14	3 - 15
1 - 14	2 - 15	3 - 16
1 - 15	2 - 16	3 - 17
1 - 16	2 - 17	3 - 18
1 - 17	2 - 18	
1 - 18		

Al escribir los juegos del equipo 1 escribe 17 juegos , al escribir los del equipo 2 escribe 16 juegos, cuando escribe los del equipo 3 escribe 15 juegos y así continua con los demás equipos, los juegos se van reduciendo en 1 partido, hasta que el equipo 16 tiene 2 partidos en su lista y el equipo 17 tiene sólo uno diferente que es el partido que disputará contra el equipo 18.

Al escribir la lista completa de partidos también escribió el número total de juegos que resultaban en cada una de las listas para llevar la cuenta.

1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5	5 - 6	6 - 7	7-8	8-9	9-10	10-11
1 - 3	2 - 4	3 - 5	4 - 6	5 - 7	6 - 8	7-9	8-10	9-11	10-12
1 - 4	2 - 5	3 - 6	4 - 7	5 - 8	6 - 9	7-10	8-11	9-12	10-13
1 - 5	2 - 6	3 - 7	4 - 8	5 - 9	6 - 10	7-11	8-12	9-13	10-14
1 - 6	2 - 7	3 - 8	4 - 9	5 - 10	6 - 11	7-12	8-13	9-14	10-15
1 - 7	2 - 8	3 - 9	4 - 10	5 - 11	6 - 12	7-13	8-14	9-15	10-16
1 - 8	2 - 9	3 - 10	4 - 11	5 - 12	6 - 13	7-14	8-15	9-16	10-17
1 - 9	2 - 10	3 - 11	4 - 12	5 - 13	6 - 14	7-15	8-16	9-17	10-18
1 - 10	2 - 11	3 - 12	4 - 13	5 - 14	6 - 15	7-16	8-17	9-18	8
1 - 11	2 - 12	3 - 13	4 - 14	5 - 15	6 - 16	7-17	8-18	9	
1 - 12	2 - 13	3 - 14	4 - 15	5 - 16	6 - 17	7-18	10		
1 - 13	2 - 14	3 - 15	4 - 16	5 - 17	6 - 18	11			
1 - 14	2 - 15	3 - 16	4 - 17	5 - 18	12				
1 - 15	2 - 16	3 - 17	4 - 18	13					
1 - 16	2 - 17	3 - 18	14						
1 - 17	2 - 18	15							
1 - 18	16								
17									

11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18
11-13	12-14	13-15	14-16	15-17	16-18	1
11-14	12-15	13-16	14-17	15-18	2	
11-15	12-16	13-17	14-18	3		
11-16	12-17	13-18	4			
11-17	12-18	5				
11-18	6					
7						

Jaime sumó la cantidad de partidos:

17	13	9	5	30
16	12	8	4	46
15	11	7	3	62
+14	+10	+6	2	+15
62	46	30	+1	153
			15	

Para obtener finalmente como resultado que son 153 partidos.

Jaime explicó que él había escrito el rol de juegos de esa forma para poder contar los partidos y a la vez ordenarlos para no confundirse y también le daba el mismo resultado.

Para redondear la discusión de la tarea, presenté de manera introductoria en el pizarron, la suma de Gauss en el caso concreto para $n = 17$*, de la siguiente forma:*

Comparando las respuestas tenemos que multiplicar:

$17 \times 9 = 153$

que es lo mismo que sumar:

$17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 153$

que tambien es lo mismo que sumar:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 153$

Gaus[1] creo una forma de sumar una gran cantidad de una forma muy practica.

Si relacionaramos los números como parejas de suma de la siguiente forma , observa lo que sucede.

Al sumar el primero con el ultimo tenemos que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ \uparrow & & & & & & & & & & & & & & & & \uparrow \end{array}$$

$$1 + 17 = 18$$

La suma del primero y el ultimo da como resultado 18.

Al sumar el segundo y el penultimotenemos que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & \uparrow & & & & & & & & & & & & & & \uparrow & \end{array}$$

$$2 + 16 = 18$$

tambien da como resultado 18.

Al sumar el tercero con el antepenultimo tenemos que:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & \uparrow & & & & & & & & & & & & \uparrow & & \end{array}$$

$$3 + 15 = 18$$

Si continuamos sumando de esta forma tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & & \uparrow & & & & & & & & & & \uparrow & & & \end{array}$$

$$4 + 14 = 18$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & & & \uparrow & & & & & & & & \uparrow & & & & \end{array}$$

[1] Carl-Friedrich Gauss (1777-1885)

$$5 + 13 = 18$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & & & & \uparrow & & & & & & \uparrow & & & & & \end{array}$$

$$6 + 12 = 18$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & & & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & & & \end{array}$$

$$7 + 11 = 18$$

Al sumar el 8 con el 10, da como resultado tambien 18 solo que el se queda sin pareja asi que lo tendremos que sumar a el solito.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & +2 & +3 & +4 & +5 & +6 & +7 & +8 & +9 & +10 & +11 & +12 & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 \\ & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & & & \end{array}$$

$$8 + 10 = 18$$

Al contar las parejas que nos quedaron tenemos que:

$$\begin{array}{c} 1 + 17 = 18 \\ 2 + 16 = 18 \\ 3 + 15 = 18 \\ 4 + 14 = 18 \\ 5 + 13 = 18 \\ 6 + 12 = 18 \\ 7 + 11 = 18 \\ 8 + 10 = 18 \end{array}$$

Si contamos los número 18 que resultan de sumar las parejas, son 8, y si además le sumamos el 9 que se quedo sin pareja, tenemos:

$$\begin{aligned} 9 + 8(18) &= 9 + 144 \\ &= 153 \end{aligned}$$

Sumando de esta forma se obtiene el mismo resultado que en las otras [2] concluyendo con esto la Leccion 1.

[2] La demostracion del caso general se encuentra en el apendice C.

Apéndice B

El anillo de los números enteros

$\mathbb{Z}$ denotará el conjunto de los números enteros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

B.1. Propiedades básicas de las operaciones en $\mathbb{Z}$

Los números enteros constan del conjunto $\mathbb{Z}$ y dos operaciones binarias, la adición y la multiplicación que satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1 *: La suma de números enteros es conmutativa, es decir, si a, $b \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a + b = b + a$$

Axioma 2 *: La suma de números enteros es asociativa, es decir, si a, b, $c \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Axioma 3 *: Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la suma, el 0. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$,*

$$a + 0 = 0 + a = a$$

Axioma 4 *: Para cada a en $\mathbb{Z}$ existe en $\mathbb{Z}$ su inverso aditivo que se denota por $-a$. Esto es*

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Axioma 5 *: El producto de números enteros es conmutativo, es decir, si a, $b \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$ab = ba$$

Axioma 6 *: El producto en $\mathbb{Z}$ es asociativo, es decir, si a, b, $c \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$(ab)c = a(bc)$$

Axioma 7 *: Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el 1. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$*

$$a(1) = (1)a = a$$

Axioma 8 *: En $\mathbb{Z}$ el producto distribuye a la suma, es decir, si a, b, $c \in \mathbb{Z}$ entonces*

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)c = ac + bc$$

B.2. Anillos

En matemáticas aparecen con mucha frecuencia conjuntos en los cuales se tienen dos operaciones que cumplen los axiomas 1, 2, ..., 8 que acabamos de mencionar. En estos casos se dice que dichos conjuntos, con las operaciones respectivas, constituyen un anillo conmutativo, con elemento unitario (el 1).

Podemos decir que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, con las operaciones suma y producto forman un anillo.

Cuando se cumplen todos los axiomas menos (posiblemente) el 5 y el 7, a dichas estructuras se les llama simplemente anillos.

B.3. Propiedades de anillo de los enteros

Proposición 1 ***:(Ley de la cancelación.)*** *Si a, b y c son enteros y $a+b = a+c$, entonces $b = c$.*

Demostración. Supongamos que $a + b = a + c$. Por el axioma 4 existe un entero, $-a$, tal que $(-a) + a = 0$. Tenemos entonces que

$$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$

Por la propiedad asociativa (axioma 2), podemos escribir

$$((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$$

Donde

$$0 + b = 0 + c$$

y como 0 es el elemento neutro aditivo (axioma 3), obtenemos que $b = c$. Esta propiedad podríamos llamarla, con más precisión, ley de cancelación por la izquierda.

Corolario 1 *: Si a, b, y c son enteros y $a + c = b + c$, entonces $a = b$.*

Demostración. Ya que $a + c = b + c$, por el axioma 1, obtenemos $c + a = c + b$ y por la ley de cancelación, resulta que $a = b$.

Corolario 2 *: Si a y b son enteros y $a + b = a$, entonces $b = 0$.*

Demostración. Por hipótesis, ya que $a = a + 0$, tenemos que

$$a + b = a + 0$$

de donde, por la ley de cancelación, obtenemos $b = 0$.

Proposición 2 *: Para todo entero a, se tiene que $0 \cdot a = 0$.*

Demostración. Ya que $0 = 0 + 0$ (por el axioma 3) tenemos por la propiedad asociativa que:

$$0 \cdot a = (0 + 0)a$$
$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

Por lo tanto, por el corolario anterior, resulta que $0 \cdot a = 0$.

Corolario 3 *: El inverso aditivo del inverso aditivo de un número entero a es a. Es decir*

$$-(-a) = a$$

Demostración. Por definición de inverso aditivo de un entero sabemos que

$$(-a) + a = 0$$

y también que

$$-(-a) + (-a) = 0$$

Igualando ambas obtenemos

$$a + (-a) = -(-a) + (-a)$$

Ahora bien, usando la propiedad de cancelación obtenemos que $a = -(-a)$ que es lo que se quería demostrar.

Reglas de los signos

Proposición 3 *: Si a, $b \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$\begin{aligned}(-a)b &= -(ab)\\ (-a)(-b) &= ab\end{aligned}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}(-a)b + ab \quad &= ((-a) + a)b\\ &= 0 \cdot b\\ &= 0\end{aligned}$$

también, por definición de inverso aditivo,

$$-(ab) + ab = 0$$

Por consiguiente

$$(-a)b + ab = -(ab) + ab$$

y por la ley de cancelación resulta que

$$(-a)b = -(ab)$$

con lo que queda demostrada la primera parte.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}(-a)b + (-a)(-b) &= (-a)(b + (-b))\\ &= (-a)0\\ &= 0\end{aligned}$$

y también, como se vio antes

$$(-a)b + ab = 0$$

Por consiguiente,

$$(-a)b + (-a)(-b) = (-a)b + ab$$

y cancelando, obtenemos

$$(-a)(-b) = ab$$

con lo que queda probada la segunda parte.

Corolario 4 $(-1)a = -a$ *con* $a \in \mathbb{Z}$
$(-1)(-1) = 1$

B.4. Diferencia de dos números enteros.

La diferencia de dos números enteros se puede definir utilizando la adición y los inversos aditivos.

Definición 1 *: Si* a, $b \in \mathbb{Z}$, *la diferencia* $a - b$ *es el entero* $a - b = a + (-b)$.

Proposición 4 *: Si* a, b, $c \in \mathbb{Z}$, *entonces*

$$a(b - c) = ab - ac$$

Demostración:

$$\begin{aligned}a(b - c) &= a(b + (-c))\\ &= ab + a(-c)\\ &= ab + (-ac)\\ &= ab - ac\end{aligned}$$

Corolario 5 *:* $-(a + b) = -a - b$.

Demostración:

$$\begin{aligned} -(a+b) &= (-1)(a+b) \\ &(-1)a+(-1)b \\ &= -a+(-b) \\ &= -a-b \end{aligned}$$

Axioma 9 *: Si a, b son números enteros diferentes de cero, entonces su producto ab es diferente de cero.*

B.5. Dominios enteros

Definición 1 *: Si A es un anillo conmutativo con 1 (unidad) en el cual se cumple el axioma 9, se dirá que A es un dominio entero.*

Así pues, podemos decir que $\mathbb{Z}$ es un dominio entero.

Proposición 1 *: En un dominio entero vale la ley de cancelación para la multiplicación. Es decir, si a, b, $c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ entonces $ab = ac$ implica $b = c$.*

Demostración. Ya que $ab = ac$ tenemos que $ab - ac = 0$, de donde $a(b - c) = 0$ y como $a \neq 0$ forzosamente $b - c = 0$, es decir, $b = c$.

B.6. El orden en $\mathbb{Z}$

Un aspecto muy importante en el anillo de los números enteros es el orden. Sabemos cuándo un número es mayor que otro.

Los números naturales $\mathbb{N}$ forman un subconjunto de los números enteros:

$$\mathbb{N} = \{\ 1, 2, 3, ...\ \} \subset \mathbb{Z}$$

Axioma 10 *:La suma de dos números naturales es un número natural.*

Axioma 11 *:El producto de dos números naturales es un número natural.*

Axioma 12 *:Si a es un número entero se cumple una y solamente una de las tres condiciones siguientes:*
i)a es un número natural;
ii)$a = 0$
iii)$-a$ es un número natural

Dicho de otra manera, un entero puede ser o bien un natural, o bien cero, o bien su inverso aditivo es natural.

Usando el subconjunto $\mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}$ y estas tres propiedades, podemos definir el orden y demostrar las propiedades básicas del orden y las que de ellas se deduzcan.

Definición 1 *: Si a y b son números enteros, decimos que a es mayor que b si $a - b$ es un número natural.*

Notación: $a > b \Longleftrightarrow a - b \,\epsilon\, \mathbb{N}$.

Observemos que, de esta definición se sigue que

$$a > 0 \Longleftrightarrow a \,\epsilon\, \mathbb{N}$$

pues $a - 0 = a$.

A los números a tales que $a > 0$ se les llama *positivos*. Así pues, *los números naturales son los enteros positivos*.

Proposición 1 *: **(propiedad transitiva)** Si a, b y c son enteros tales que $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.*

Demostración: $a > b$ significa, por la definición, que $a - b \,\epsilon\, \mathbb{N}$.

Análogamente, como $b > c$, sabemos que $b - c \,\epsilon\, \mathbb{N}$. Por el axioma 10, como $a - b \,\epsilon\, \mathbb{N}$ y $b - c \,\epsilon\, \mathbb{N}$ tenemos que su suma

$$(a - b) + (b - c) \,\epsilon\, \mathbb{N}$$

Pero $(a - b) + (b - c) = a - c$.

Por lo tanto $a - c \,\epsilon\, \mathbb{N}$, lo que por definición significa que $a > c$.

Notación: $a < b$ equivale a $b > a$ y $a \geq b$ significa que $a > b$ o que $a = b$. Análogamente $a \leq b$ significa $a < b$, o bien $a = b$.

Proposición 2 *: Si a es un número entero, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:*
i) $a > 0$
ii) $a = 0$
iii) $a < 0$

Proposición 3 *: Si a, b y c son enteros y $a > b$, entonces $a + c > b + c$*

Demostración. Puesto que $a > b$, sabemos que $a - b \epsilon \mathbb{N}$.

$$a - b > 0$$

$$\begin{aligned} a - b &= (a - b) + 0 \\ &= (a - b) + [c + (-c)] \\ &= a - b + c + (-c) \\ &= a + c - b + (-c) \\ &= a + c - b - c \\ &= (a + c) - (b + c) \end{aligned}$$

$$(a + c) - (b + c) > 0$$
$$(a + c) - (b + c) \epsilon \mathbb{N}$$
$$a + c > b + c$$

Proposición 4 *: Si a, b y c son enteros tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.*

Demostración. Por hipótesis $a - b \epsilon \mathbb{N}$ y $c \epsilon \mathbb{N}$. Luego, por el axioma 11, $(a - b)c \epsilon \mathbb{N}$, es decir, $ac - bc$ es natural, de donde, $ac > bc$.

Proposición 5 *: Si a y b son enteros positivos y $b > 1$, entonces $ab > a$.*

Demostración: $b > 1$ y $a > 0$. Por lo tanto tenemos que $ba > 1a$, es decir, $ab > a$.

B.7. Unidades en $\mathbb{Z}$

Uno de los axiomas que se cumplen para los enteros (el que hemos numerado con 4), asegura la existencia de un inverso aditivo para cada elemento de $\mathbb{Z}$. Podríamos ahora preguntamos qué ocurre con los inversos multiplicativos de los números enteros.

Proposición 1 *: Los únicos elementos de $\mathbb{Z}$ que tienen inverso multiplicativo (en $\mathbb{Z}$) son 1 y -1.*

Demostración. 0 no tiene inverso multiplicativo pues $0 \cdot a = 0 \neq 1$ para cualquier a:

$$\begin{gathered} 1 \text{ tiene a } 1 \text{ por inverso multiplicativo, pues } 1 \cdot 1 = 1 \\ -1 \text{ tiene a } -1 \text{ como inverso multiplicativo, pues } (-1)(-1) = 1 \end{gathered}$$

Supongamos ahora que $a > 1$.

Si a tuviera inverso multiplicativo, digamos $a^{-1} \epsilon\ \mathbb{Z}$ entonces, ya que $a \cdot a^{-1} = 1$, a^{-1} no puede ser negativo.

Por lo tanto $a^{-1} > 0$.

También $a^{-1} \neq 1$, pues si $a^{-1} = 1$, $a = 1$ (porque $a \cdot a^{-1} = 1$).

Por lo tanto $a^{-1} > 1$. Pero como $a > 1$ y $a^{-1} > 1$, $a \cdot a^{-1} > 1$ también, lo cual contradice que $a \cdot a^{-1} = 1$.

En un anillo, a los elementos que tienen inverso multiplicativo se les llama unidades.

Así, en el anillo de los números enteros, 1 y -1 son las únicas unidades.

B.8. El principio de inducción

Principio de inducción: 1 *: Sea M un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que se cumplen las condiciones*
i) $1\ \epsilon\ M$*;*
ii) si $n\ \epsilon\ M$*, entonces* $n + 1\ \epsilon\ M$*.*

Entonces $M = \mathbb{N}$.

En otras palabras, si un conjunto M de números naturales contiene al 1 y contiene a $n + 1$ cada vez que contenga a n, entonces M es el conjunto de *todos* los números naturales.

Ejemplo: Demostrar que para cualquier número natural n,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

Es decir, la suma de todos los números desde 1 hasta n es $\frac{n(n+1)}{2}$.

Veamos casos particulares

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1(1+1)}{2} \\ 1+2 &= \tfrac{2(2+1)}{2} \\ 1+2+3 &= \tfrac{3(3+1)}{2} \\ 1+2+3+4 &= \tfrac{4(4+1)}{2}, \text{ etcétera.} \end{aligned}$$

Sea M el conjunto de números naturales para los cuales la fórmula es cierta.

Vemos que

i) $1 \epsilon M$, pues cumple la formula $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
ii) si $n \epsilon M$, por demostrar que $n+1 \epsilon M$.

Tomamos que $n \epsilon M$ por lo que la igualdad de la formula para el natural n se cumple, es decir.

$$1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Al demostrar para $n+1$ tenemos:

$1+2+3+...+(n+1)$
Tenemos que según la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} 1+2+3+...+n+(n+1) &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \tfrac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

es decir, vale la fórmula para $n+1$, o sea $n+1 \epsilon M$ ya que:

$$1+2+3+...+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Luego, por el principio de inducción, podemos afirmar que $M = \mathbb{N}$ y como M es el conjunto de n para los cuales vale la igualdad podemos asegurar que dicha fórmula vale para todo $n \epsilon \mathbb{N}$, que es lo que queríamos demostrar.

B.9. El principio de buen orden

En los números naturales se cumple también una propiedad que recibe el nombre de principio de buen orden. Esta propiedad es equivalente al principio de inducción.

Principio de buen orden 1 *: Si A es un subconjunto no vacío de números naturales entonces A tiene un elemento que es menor que todos los demás elementos de A.*

Proposición 1 *: El principio de inducción implica el del buen orden.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y supongamos que A no tiene ningún elemento menor que todos los demás de A.

Construyamos un conjunto B con todos los números naturales b tales que $b < a$ para todo a en A.

Como ningún elemento es menor que sí mismo, B está contenido en el complemento A' de A:

$$\underbrace{1, 2, 3, ...b, b+1}_{B}$$

Ahora bien, tenemos que:

i) $1 \in B$. En efecto, $1 \notin A$ pues de lo contrario en A habría un elemento, el 1, menor que todos los demás de A.

Además 1 es menor que todos los demás naturales, 1 es menor que todos los elementos de A. Luego $1 \in B$.

ii) Supongamos que $b \in B$ (es decir $b < a$ para toda a en A). Entonces $b+1 \in B$ también.

En efecto, si $b+1 \notin B$, $b+1 \geqslant a$ para cierta $a \in A$.

Y como $b < a$, $b+1 \geqslant a$, de donde $b+1 = a \in A$.

Entonces $b+1$ sería un elemento de A menor que todos los demás de A, contra lo supuesto.

Por lo anterior, según el principio de inducción, $B = \mathbb{N}$ y como $B \subset A'$, resulta que $A' = \mathbb{N}$, de donde $A = \phi$, contra la hipótesis, con lo que queda demostrada la proposición.

Proposición 2 *: El principio del buen orden implica el principio de inducción.*

Demostración. Sea M un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in M$ y si $n \in M$ entonces $n+1 \in M$. Suponiendo el principio del buen orden demostraremos que $M = N$.

Sea M' el complemento de M en $\mathbb{N}$.

Si M' es no vacío.

M' tiene un elemento mínimo m'.

Por consiguiente ya que $m' - 1 < m'$.

$m' - 1 \notin M'$.

es decir, $m' - 1 \epsilon M$.

Pero por hipótesis $(m' - 1) + 1$ pertenece también a M.

es decir, $m' \epsilon M$, lo cual es una contradicción.

Luego $M' = \phi$ y $M = \mathbb{N}$.

Apéndice C

Divisibilidad

C.1. Definiciones y Propiedades Elementales

Definición: 1 *Si a y b son números enteros, decimos que b divide a a si existe un entero q tal que*

$$a = b \cdot q. \tag{C.1}$$

Notación: b divide a a lo representamos con $b|a$ y $b \nmid a$ significa que b no divide a a.

Proposicíon 1 ***(Propiedad reflexiva):*** *Para todo número entero a, se tiene que a divide a a.*

$$a = a \cdot 1 \tag{C.2}$$

Proposicíon 2 ***(Propiedad transitiva):*** *Si a, b y c son números enteros tales que $a|b$ y $b|c$, entonces: $a|c$.*

Demostración. Por definición de divisibilidad y por hipótesis, existen enteros q y r tales que

$$\begin{gathered} b = aq \\ c = br \\ c = (aq)r \\ c = a(qr) \\ a|c \end{gathered}$$

De lo anterior tenemos que a divide a c.

Proposicíon 3 *:Si a y b son números enteros y u, u' son unidades, entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*
i) a divide a b
ii) ua divide $au'b$.

Demostración.$i) \Longrightarrow ii)$.

Supongamos que:

$$a|b$$
$$b = aq$$

Ya que u es unidad, existe u_1 tal que

$$uu_1 = 1$$
$$b = (uu_1)b$$
$$b = (uu_1)aq$$
$$b = ua(u_1q)$$
$$ua|b$$

Pero $b|u'b$, por transitividad tenemos que $ua|u'b$.

$ii) \Longrightarrow i)$.

Tenemos que:

$$ua|u'b$$
$$u'b = uar$$

Como u' es unidad, existe u'_1 tal que

$$u'u'_1 = 1$$
$$b = (u'_1u')b$$
$$b = u'_1(uar)$$
$$b = a(u'_1ur)$$
$$a|b$$

Como las unidades de los enteros son el 1 y el -1 la proposición anterior indica que al considerar la divisibilidad en los números enteros basta referirse a los enteros no negativos.

Corolario 1 *: Si a y b son enteros, las condiciones siguientes son equivalentes:*
i) a divide a b
ii)$|a|$ *divide a* $|b|$.

Demostración:

Sean a y b enteros, $|a| = ua$ y $|b| = ub$ en donde u es una unidad. Si

$$a|b$$
$$b = aq$$
$$bu = (aq)u$$
$$bu = (au)q$$
$$\mid b \mid = \mid a \mid q$$
$$|a| \mid |b|$$

Por lo anterior $|a|$ divide a $|b|$.

Otra proposición relativa a la divisibilidad y las unidades es:

Proposicíon 4 ***(propiedad de simetría):*** *Si a y b son dos enteros distintos de cero tales que $a|b$ y $b|a$ entonces $a = bu$ en donde u es una unidad.*

Demostración: Por hipótesis tenemos que

$$b = ar$$
$$a = bq$$
$$a = (ar)q$$
$$a = a(rq)$$

Como $a \neq 0$, cancelando tenemos que $1 = rq$, lo que prueba que q es unidad.

Proposicíon 5 *: Si a y $b \neq 0$ son enteros y $a|b$ entonces $|a| \leqslant |b|$.*

Demostración. Por el corolario de la proposición 3 tenemos que

$$|a| \mid |b|$$
$$|b| = |a|q$$

Como $q \geqslant 1$, Si q = 1 :

$$|b| = |a|$$

Si $q \neq 1$, $q = 1 + q'$ con q' positivo. Por lo tanto

$$|b| = |a|(1 + q')$$
$$|b| = |a| + |a|q'$$
$$|b| - |a| = |a|q' \geqslant 1$$
$$|b| > |a|$$

Veamos algunas propiedades que relacionan la divisibilidad con las operaciones en $\mathbb{Z}$.

Proposicíon 6 *: Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(b+c)$*

Demostración: Por hipótesis

$$\begin{gathered} b = aq \\ c = ar \\ b + c = aq + ar \\ b + c = a(q + r) \\ a|(b + c) \end{gathered}$$

Proposicíon 7 *: Si $a|b$ y c es un entero arbitrario, entonces $a|bc$*

Demostración: Como

$$\begin{gathered} a|b \\ b = aq \\ bc = a(qc) \\ a|bc \end{gathered}$$

De las proposiciones obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 1 *: Si a, b y c son enteros tales que $c|a$ y $c|b$, entonces $c|ar + bs$ para enteros arbitrarios r y s.*

Demostración:

$$\begin{gathered} c|a \\ c|b \\ a = cq \\ b = cp \\ ar = (cq)r \\ bs = (cp)s \\ ar + bs = c(qr) + c(ps) \\ ar + bs = c(qr + ps) \\ c|ar + bs \end{gathered}$$

Cuando se tienen, como en el corolario anterior, dos números a y b, a los enteros de la forma $ar + bs$ con r y s enteros, se les llama *combinaciones lineales* de a y b.

Corolario 2 *: Un entero c divide a los enteros a y b si y solo si c divide a cualquier combinación lineal de a y b.*

Demostración. El corolario anterior asegura que si c divide a a y b, entonces c divide a cualquier combinación lineal de a y b.

Inversamente, ya que $a = a \cdot l + b \cdot O$ y $b = a \cdot O + b \cdot l$, a y b son combinaciones lineales de a y b; por lo tanto si c divide a cualquier combinación lineal de a y b, $c|a$ y $c|b$.

El corolario anterior asegura que una condición necesaria para que un número g sea combinación lineal de a y b es que g sea divisible entre todo divisor común de a y b.

Si hay un número e tal que $e|a$ y $e|b$ pero $e \nmid g$, entonces g no es combinación lineal de a y b.

Cuando se tiene una sucesión de enteros,$b_1, b_2, ..., b_n$, a los enteros de la forma

$$c_1b_1 + c_2b_2 + ... + c_nb_n$$

con $c_1, c_2, ..., c_n$, enteros, se les llama *combinaciones lineales* de $b_1, b_2, ..., b_n$. Obsérvese que cada uno de los enteros b_i es combinación lineal de $b_1, b_2, ..., b_n$.

Ejemplo:

$$b_1 = lb_1 + Ob_2 + ... + Ob_n$$

C.2. Algoritmo de la división

Dados dos números enteros a y $b \neq 0$, no siempre a es divisible entre b, es decir, no siempre existe otro entero q tal que $a = bq$. Sin embargo, en todos los casos podemos "dividir"a entre b y obtener un cociente y un residuo.

Teorema 1 *: Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r, únicos, tales que*

$$a = bq + r, \qquad \text{con} \quad 0 \leqslant r < |\, b\,|$$

Demostración. $a > 0$, $b > 0$.

Consideremos el conjunto de números enteros *no negativos* que sean de la forma

$$a - bs$$

con s entero. Este conjunto, por las hipótesis hechas, no es vacío, porque $a - b \cdot O > 0$.

Por el principio del buen orden dicho conjunto tiene un elemento menor que todos los demás. Sea

$$r = a - bq \geqslant 0$$

dicho elemento. De aquí obtenemos que

$$a = bq + r$$

lo único que resta por demostrar es que $r < |b| = b$. Si $r \geqslant b$, obtenemos

$$\begin{gathered} r = a - bq \\ r - b = a - bq - b \\ r - b = a - b(q+1) \end{gathered}$$

como $r - b \geqslant 0$, tenemos que

$$a - b(q+1) \geqslant 0$$

que contradice que $r = a - bq$ es menor que todas las expresiones no negativas de la forma $a - bs$, ya que

$$a - b(q+1) = r - b < r = a - bq$$

lo que terminada la demostración de este caso.

Si $a > 0$ y $a < b$, la expresión

$$a = b \cdot 0 + a$$

demuestra el teorema en este caso, pues $a < |b| = b$.

Si $b < 0$

$$\begin{gathered} r = a - bq \\ r + b = a - bq + b \\ r + b = a - b(q-1) \\ r + b < r \\ a - b(q-1) < 0 \\ r + b < 0 \\ r < -b = |b| \\ r < |b| \end{gathered}$$

Para demostrar la unicidad de q y r. Supongamos que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leqslant r < |b|$$
$$a = bq' + r' \text{ con } 0 \leqslant r' < |b|$$
$$bq + r = bq' + r'$$
$$bq - bq' = r' - r$$
$$b(q - q') = (r' - r)$$
$$|b|\ |q - q'| = |r - r'|$$
$$|b| \mid |r - r'|$$

Pero $|r - r'| < |b|$, por la proposición 5 de divisibilidad, tenemos

$$|b| \mid |r - r'|$$
$$|b| \leqslant |r - r'|$$
$$|b|\ |q - q'| = |r - r'|$$
$$|b|\ |q - q'| = 0 \text{ y } |r - r'| = 0$$

Como $|b| \neq 0$, obtenemos

$$q = q' \text{ y } r = r'$$

lo que demuestra la unicidad.

Para encontrar todos los divisores de un número $a \neq 0$, basta encontrar todos los divisores positivos de $|a|$.

Ahora bien, como cualquier divisor positivo de $|a|$ es menor que $|a|$ y solamente hay un número finito de enteros positivas menores que $|a|$, en un número finito de pasos se pueden encontrar todos los divisores positivos de $|a|$ y por lo dicho antes, de todos los divisores de a.

C.3. Máximo común divisor

Como el conjunto de divisores de cualquier número entero es finito. Por lo tanto, dados dos números enteros a y b, el conjunto de divisores comunes de a y b es también un conjunto finito pues este es la intersección del conjunto de divisores de a con el conjunto de divisores de b. Por consiguiente, podemos hablar del máximo de los divisores comunes de a y b. Al *mcd* de a y b lo denotaremos (a, b).

Al hablar del *mcd* de dos números a y b nos podremos restringir al caso $a > 0$ y $b > 0$.

Con objeto de caracterizar de otra manera el *mcd* de dos enteros observaremos cómo se relaciona este concepto con el de combinación lineal de dichos enteros.

Recordemos que las combinaciones lineales de dos enteros a y b son los números c que se pueden expresar en la forma

$$c = ar + bs \text{ con } r \text{ y } s \text{ enteros}$$

Una condición necesaria para que un número c sea combinación lineal de a y b es que c sea divisible entre cualquier divisor común de a y b; en particular, entre el *mcd* de a y b.

Proposición 1 *: Si a y b son enteros Positivos y $d = as + bt$ es su combinación lineal positiva mínima, entonces todo divisor de d es divisor también de a y b.*

Demostración. Por la transitividad de la divisibilidad basta demostrar que $d|a$ y $d|b$.

Por el algoritmo de la división, tenemos:

$$\begin{gathered} a = dq + r \text{ con } r < d. \\ d = as + bt \\ a = (as + bt)q + r \\ r = a - (as + bt)q \\ r = a - asq - btq \\ r = a(1 - sq) - btq \end{gathered}$$

Como $0 \leqslant r < d$ y d es la *combinación lineal positiva mínima* de a y b, resulta que $r = 0$, es decir

$$\begin{gathered} a = dq + r \\ a = dq + 0 \\ a = dq \\ d|a \end{gathered}$$

Análogamente se prueba que $d|b$.

Corolario 1 *: El mcd de dos enteros a y b es la combinación lineal positiva mínima de a y b.*

Demostración. Sea $d' = (a, b)$ el mcd de a y b y $d = as + bt$ la combinación lineal mínima de a y b. Por la proposición 1, d es un divisor común de a y b y como d' es el mcd, resulta que $d \leqslant d'$. Ahora bien, como $d'|a$ y $d'|b$ entonces $d'|d$ por ser d combinación lineal de a y b. Por lo tanto, $d' \leqslant d$. Las dos desigualdades implican que $d = d'$.

Corolario 2 *Un entero c es combinación lineal de a y b si y solo si el mcd(d) de a y b, divide a c.*

Demostración. Si $c = am + bn$, $d|c$, por el corolario anterior
el *mcd* de a y b es combinación lineal de a y b : $d = as + bt$. Si $d|c$, $c = dk$, de donde $c = ask + btk$.

De esta forma pueden darse definiciones equivalentes de mcd.

Teorema 1 *: Si a, b y $d > 0$ son enteros, las cuatro condiciones siguientes son equivalentes:*
i) $d = (a, b)$
ii) $d = as + bt$ es la combinación lineal positiva mínima de a y b.
iii) $d|a$, $d|b$, y si $c|verta$ y $c|b$, entonces $c|d$.
iv) $d|a$, $d|b$, y d es combinación lineal de a y b.

Demostración. El corolario 1 de la proposición 1 asegura que (i) y (ii) son equivalentes.

Por demostrar que (i) y (iii) son equivalentes.

Sea $d' = (a, b)$ y d entero que satisface la condición (iii). Como d es divisor común y d' el máximo común divisor tenemos que $d \leqslant d'$. Además, como $d'|a$ y $d'|b$, por (iii), $d'|d$ y como $d > 0$, $d' \leqslant d$. Las dos desigualdades muestran que $d = d'$.

Por demostrar que (iv) es equivalente a (ii)

$$d = as + bt$$
$$d|a \text{ y } d|b$$

d divide a toda combinación lineal entre a y b

$$\text{Si } aq + bk > 0$$
$$d|(aq + bk)$$
$$d \leqslant aq + bk$$

d es la mínima combinación lineal positiva.

Con esto queda probado el teorema.

Observación: Las definiciones de *mcd* dadas por las condiciones (iii) y (iv) no utilizan el concepto de orden en $\mathbb{Z}$. Por ello estas definiciones serán útiles en aquellas generalizaciones del concepto de *mcd* a anillos en los que no se tenga el concepto de orden.

Cuando los únicos divisores comunes de dos números a y b son 1 y -1, los números se llaman *primos entre si.*

Definición 1 *: Se dice que dos enteros a y b son primos entre sí (o primos relativos) si su máximo común divisor es 1.*

Como 1 es el menor entero positiva, resulta que

Proposición 2 : *a y b son primos entre sí, si y solo si*

$$1 = as + bt$$

Observación: Cuando un número a divide a un producto bc, no necesariamente a divide a alguno de los factores.

Proposición 3 : *Si $a|bc$ y $(a,b) = 1$ entonces $a|c$.*

Demostración. Por hipótesis,

$$1 = as + bt$$
$$c = asc + bct$$

Como $a|a$ y $a|b$ (por hipótesis), a divide a la combinación lineal $c = a(sc) + (bc)t$ lo que prueba la proposición.

Proposición 4 : *Las soluciones enteras de la ecuación*

$$ax + by = 0 \text{ con } (a,b) = 1 \text{ y } a, b \neq 0$$

son $x = -bt$, $y = at$ con t entero arbitrario.

Demostración. Como $x = -bt$, $y = at$ es solución, cualquiera que sea el entero t. Por demostrar que toda solución es de esta forma. En efecto, si (x, y) es una solución de la ecuación $ax + by = 0$, tenemos que $ax = -by$, de donde, $a|by$. Como $(a,b) = 1$, por la proposición anterior tenemos que $a|y$, por lo que $y = at$ para cierto entero t.

Por lo tanto, $ax = -bat$, de donde $x = -bt$.

Sean a y b dos enteros *distintos de cero.*El conjunto de múltiples comunes positivos de a y b no es vacío pues, por ejemplo, el producto $|ab|$ es un múltiplo común positivo. Por el axioma del buen orden este conjunto tiene un elemento mínimo, el cual se llama el mínimo común múltiplo de a y b. Lo denotaremos con $[a,b]$.

Proposición 5 : *Sean a y b enteros distintos de cero. El mcm, $m = [a,b]$ divide a cualquier múltiplo común de a y b. Inversamente si $m' > 0$ es un múltiplo común de a y b que divide a todos los múltiples comunes de a y b entonces $m' = m$.*

En otras palabras, el mcm de a y b queda caracterizado como aquel entero positivo m' tal que:

i)$a|m'$, $b|m'$;
ii) si $a|m$" *y* $b|m$' *entonces* m'$|m$".

Demostración. Sea m" un múltiplo común de a y b.

Por el algoritmo de la división

$$m" = mq + r, \text{ con } 0 \leqslant r < m$$
$$a|m"$$
$$m" = ap$$
$$a|m$$
$$m = as$$
$$m" = mq + r$$
$$ap = (as)q + r$$
$$r = ap - asq$$
$$r = a(p - sq)$$
$$a|r$$

Análogamente, $b|r$. Por lo tanto r es un múltiplo común no negativo de a y b y si r fuera distinto de cero se tendría que $m \leqslant r$ lo cual es falso. Por lo tanto $r = 0$. Es decir, m divide a cualquier múltiplo común.

Proposición 6 *: Si a y b son enteros positivos entonces su producto ab es igual al producto de su mcd y mcm.*

$$ab = (a, b)[a, b]$$

Demostración. Sea $m = [a, b]$. Entonces, como ab es un múltiplo común, $m|ab$. Sea d tal que

$$md = ab$$

i) Por demostrar que d es un divisor común de a y b.

Ya que m es múltiplo común de a y b , tenemos que

$$m = ap$$
$$m = bs$$
$$md = (ap)d$$
$$md = (bs)d$$
$$md = ab$$

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$ obtenemos que

$$\begin{gathered} md = a(pd) \\ md = ab \\ pd = b \\ d|b \\ md = (sd)b \\ sd = a \\ d|a \end{gathered}$$

lo cual prueba i).

ii) Por demostrar que d es divisible entre cualquier divisor común de a y b.

Sea d' tal que $d'|a$ y $d'|b$. Entonces

$$\begin{gathered} d'|a \\ a = d'a' \\ d'|b \\ b = d'b' \end{gathered}$$

Tenemos el entero m' definido como sigue

$$\begin{gathered} m' = a'b'd' \\ m' = ab' \\ m' = ba' \end{gathered}$$

Como m' es un múltiplo común de a y b. Por lo tanto $m' = mt$. Entonces

$$\begin{gathered} m' = mt \\ m'd' = mtd' \\ mtd' = a'd'b'd' \\ mtd' = ab \\ mtd' = md \end{gathered}$$

Como $m \neq 0$, $td' = d$, es decir, $d'|d$.

Las condiciones i) y ii) implican (por el teorema 1) que $d = (a, b)$.

Por lo tanto $ab = (a, b)[a, b]$.

C.4. El algoritmo de Euclides y ecuaciones Diofantinas

El algoritmo de Euclides es el procedimiento que permite calcular el mcd.

Sean a, b dos enteros que supondremos positivos y tales que a no sea múltiplo de b. Podemos aplicar iteradamente el algoritmo de la división en la forma siguiente.

$$\begin{gathered} a = bq + r_1 \text{ con } 0 < r_1 < b \\ b = r_l q_1 + r_2 \text{ con } 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3 \text{ con } 0 < r_3 < r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \text{ con } 0 < r_n < rn - 1 \\ r_{n-1} = r_n q_n \end{gathered}$$

Ya que $0 < r_n < r_{n-1} < \ldots < r_2 < r_1 < b$ es claro que después de aplicar el algoritmo de la división un número finito de veces obtenerlos un residuo cero (como lo indica $r_{n-1} = r_n q_n$).

Este proceso es el llamado **algoritmo de Euclides**.

Proposición 1 *:Si a, b son enteros positivos y $b \nmid a$, entonces el último residuo distinto de cero en el algoritmo de Euclides es el mcd de a y b. Con la notación anterior tenemos*

$$r_n = (a, b)$$

Para la demostración de esto basta aplicar el siguiente lema a cada uno de los pasos del proceso.

Lema 1 *: Si $a = bq + r$, entonces $(a, b) = (b, r)$.*

El algoritmo de Euclides no s6lo permite calcular el *mcd* de dos números enteros sino también nos da un procedimiento para expresar este como combinación lineal de ellos.

Lema 2 *: Si c es combinación lineal de a, b y c' es combinación lineal de c y b, entonces c' es combinación lineal de a y b.*

Veamos un ejemplo; supongamos que a y b son tales que

$$\begin{gathered} a = bq + r_1 \text{ con } 0 < r_1 < b \\ b = r_1 q_1 + r_2 \text{ con } 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_2 \end{gathered}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} b &= r_1q_1 + r_2 \\ r_2 &= b - r_1q_1 \\ a &= bq + r_1 \\ r_1 &= a - bq \\ r_1q_1 &= aq_1 - bqq_1 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} r_2 &= b - (aq_1 - bqq_1) \\ r_2 &= b - aq_1 + bqq_1 \\ r_2 &= a(-q_1) + b(1 + qq_1) \end{aligned}$$

que expresa r_2 como combinación lineal de a y b.

Los resultados de divisibilidad que hemos visto, pueden aplicarse para encontrar las soluciones en números enteros de ecuaciones como

$$ax + by = c$$

en donde a, b y c son números enteros. A este tipo de ecuaciones se les llama **ecuaciones diofantinas**.

Proposición 2 *:Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación*

$$ax + by = c \textit{ con } a,\ b,\ c \textit{ enteros}$$

tenga solución en enteros es que el máximo común divisor de a y b divida a c.

El algoritmo de Euclides que permite expresar el *mcd* de dos números como combinación lineal de estos nos da un procedimiento para encontrar soluciones a ecuaciones diofantinas. Consideremos la ecuación

$$ax + by = c \text{ con } a,\ b,\ c \text{ enteros}$$

Sea $d = (a, b)$ y supongamos que $d|c$. Aplicando el algoritmo de Euclides podemos escribir

$$ar + bs = d$$

Sea $c = dc'$; entonces

$$\begin{gathered} ar + bs = d \\ arc' + bsc' = dc' \\ arc' + bsc' = c \end{gathered}$$

por consiguiente si

$$x_0 = rc' \text{ y } y_0 = sc'$$

es una solución de la ecuación.

Veamos ahora como conociendo una solución entera se pueden encontrar todas las soluciones en enteros de una ecuación diofantina.

Proposición 3 *: El conjunto, de soluciones enteras x, y de la ecuación*

$$ax + by = c \textit{ con } a,\ b,\ c \textit{ enteros}$$

es de la forma

$$x = x_0 + u \textit{ y } y = y_0 + v$$

en donde x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación $ax + by = c$ y u, v son soluciones arbitrarias de la ecuación homogénea asociada

$$ax + by = 0$$

Demostración. Sea x_0, y_0 una solución particular de $ax + by = c$ y x_1, y_1 otra solución. Entonces

$$u = x_1 - x_0,\ v = y_1 - y_0$$

es solución de $ax + by = 0$. En efecto

$$\begin{gathered} au + bv = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) \\ au + bv = ax_1 + by_1 - (ax_0 + by_0) \\ au + bv = c - c \\ au + bv = 0 \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$x_1 = x_0 + u \text{ y } y_1 = y_0 + v$$

en donde u, v es solución de

$$ax + by = 0$$

Sea ahora u, v una solución de

$$ax + by = 0$$

Entonces

$$x_1 = x_0 + u \text{ y } y_1 = y_0 + v$$

es solución de la ecuación original. En efecto

$$\begin{gathered}
ax_1 + by_1 = a(x_0 + u) + b(y_0 + v) \\
ax_1 + by_1 = ax_0 + by_0 + au + bv \\
ax_1 + by_1 = c + 0 \\
ax_1 + by_1 = c
\end{gathered}$$

Recordemos como encontramos todas las soluciones de la ecuación homogénea

$$ax + by = 0 \text{ con } a,\ b \text{ enteros}$$

Si $a = 0$, $b = 0$, entonces toda pareja de, enteros es solución.

Supongamos ahora que $a \neq 0$, o bien $b \neq 0$. Sea $d = (a, b)$; escribimos

$$a = da',\ b = db'$$

Ya que $d \neq 0$, la ecuación

$$a'x + b'y = 0$$

tiene las mismas soluciones que la anterior. Ahora bien, las soluciones de esta última son, según la proposición 4 de la sección anterior.[1]

[1] Proposición 4: Las soluciones enteras de la ecuación $ax + by = 0$ con $(a, b) = 1$ y $a, b \neq 0$ son $x = -bt$, $y = at$ con t entero arbitrario.

$$x = -b't \text{ y } y = at \text{ con t entero arbitraria}$$

Combinando estos resultados con la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1 *: Sean a, b y c enteros tales que a y b no son ambos ceros; supongamos además que $d = (a, b)$ divide a c. Sea $a = da'$, $b = db'$. Entonces el conjunto x, y de soluciones enteras de la ecuación*

$$ax + by = c$$

es $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + a't$ en donde t es un entero arbitrario y x_0, y_0, es una solución particular entera de $ax + by = c$.

El caso $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ no tiene solución. Si $c = 0$ entonces, toda pareja de enteros es solución.

C.5. Factorización Única

Definición 1 *: Se dice que un número entero p distinto de ± 1 es primo si sus únicos divisores son $\pm l$ y $\pm p$.*

Un número p es primo si y solo si $-p$ lo es.

Los primeros números primos positivos son

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59
61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113, ...

Observemos que si p es primo y a un entero entonces el *mcd* de p y a puede ser o bien p o bien 1. Por lo tanto $(p, a) = p$ si y solo si p divide a a.

Proposición 1 *: Si un número primo p divide al producto ab de dos enteros, entonces p divide a a o bien p divide a b.*

$$p|ab \Longrightarrow p|a \text{ o bien } p|b$$

Demostración. Si $p|a$ no hay que demostrar. Si $p \nmid a$ entonces $(p, a) = 1$ y por lo tanto, según la proposición 3 del *mcd*[2] tenemos que $p|b$.

La propiedad de la proposición 1 caracteriza a los números primos.

[2]Proposición 3: Si $a|bc$ y $(a, b) = 1$ entonces $a|c$.

Proposición 2 *: Si p es un entero distinto de ± 1 con esta propiedad:*

Si a, $b \in \mathbb{Z}$ y $p|ab$ entonces $p|a$ o $p|b$,

$$\text{entonces } p = 0 \text{ o } p \text{ es un número primo. (*)}$$

Entonces p es primo.

Demostración. Podemos, suponer que $p \geqslant 0$. Examinemos primero el caso $p > 1$. Si p no fuera primo entonces

$$p = ab \text{ con } 1 < a < p \text{ , } 1 < b < p.$$

La igualdad anterior prueba que $p|ab$ y las desigualdades indican que $p \nmid a$ y $p|b$, es decir, p no cumpliría la propiedad (*). Luego, si $p > 1$ cumple entonces p es primo.

Observemos finalmente que 0 cumple la propiedad(*). En efecto, si $0|ab$ entonces $ab = 0$, por lo que, $a = 0$ o $b = 0$. Esto equivale a $0|a$ o $0|b$.

Observación: Debido a la propiedad de la proposición anterior, es conveniente considerar que en $\mathbb{Z}$, 0 es primo. Sin embargo, para facilitar los enunciados, en lo que sigue hablaremos únicamente de números primos distintos de 0.

Teorema de factorización única 1 *:Todo número entero a, distinto de ± 1 se puede expresar en la forma*

$$a = up_1p_2...p_h \text{ (*)}$$

en donde $u = \pm 1$ y $p_1, p_2, ..., p_h$ son primos positivos.

Además, si $a \neq 0$ la expresión (*) es única, excepto el orden de las factores.

Demostración. Si $a = 0$, hacemos $u = 1$, $h = 1$, $p_1 = 0$ y obtenemos $a = up_1$.

Por lo tanto, bastará demostrar que todo entero $a > 1$ puede expresarse en la forma (*).

Sea M el conjunto de enteros mayor que 1 que no se pueden expresar en la forma (*). Nuestro propósito es demostrar que $M = \emptyset$.

Para ello, veremos que si suponemos que $M \neq \emptyset$ se llega a una contradicción.

Supongamos que $M \neq \emptyset$. Por el principio de buen orden, M tiene un elemento mínimo a. Ahora bien, si a fuera primo, haciendo $h = 1$, $u = 1$ y $a = p_1$ obtendríamos $a = up$, lo cual contradice que a pertenezca a M. Por consiguiente a no es primo. Entonces

$$a = bc \text{ con } 1 < b < a \text{ y } 1 < c < a$$

Por ser a elemento mínimo de M, las desigualdades anteriores indican que b y c no pertenecen a M y, por lo tanto se pueden expresar en la forma (*):

$$b = p_1p_2...p_n;\ c = q_1q_2...q_r$$

Pero como $a = bc$, obtenemos la descomposición

$$a = P_1p_2...p_hq_1q_2...q_h$$

en primos positivos, que es una expresión de la forma (*). Esto contradice nuevamente el hecho de que a esté en M, con lo que queda probada la primera parte del teorema.

Demostraremos ahora la unicidad (excepto el orden de los factores) de las descomposiciones en primos positivos. Supongamos que hay dos tales descomposiciones para un número $a \neq 0$:

$$a = up_1p_2...p_h$$
$$a = u'q_1q_2...q_t$$

Desde luego, $u = u'$ por lo que

$$p_1p_2...p_h = q_1q_2...q_t$$

Como p_1 divide al miembro de la izquierda, p_1 debe dividir al producto $q_1q_2...q_t$ y como p_1, es primo, p_1 debe dividir a alguna de las q_j, digamos a q_1. Pero como q_1 es también primo, resulta que $p_1 = q_1$. Simplificando, obtenemos la expresión

$$p_2p_3...p_h = q2q_3...q_t$$

Análogamente, llegamos a que $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$,.... Si h fuera menor que t llegaríamos finalmente a una expresión de la forma

$$1 = q_{h+l}...q_t$$

lo cual no es posible. Análogamente, si $t < h$. Por lo tanto $t = h$, con lo que queda probada la unicidad.

En una descomposición de primos como la del teorema anterior podemos juntar los primos iguales que en ella figuren y entonces ésta quedará en la forma

$$a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_r^{m_r} \text{ con } m_i > 0$$

y si, además, ordenamos los primos en la forma $p_1 < p_2 < ... < p_h$, entonces la expresión es, según lo demostrado, única.

A veces, dados dos enteros conviene escribir descomposiciones en las que figuren los mismos primos.

En general, si a y b son dos enteros, existe una colección de primos tales que

$$\begin{array}{c} a = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_h^{m_h} \text{ con } m_i \geqslant 0 \\ b = \pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_h^{n_h} \text{ con } n_i \geqslant 0 \end{array}$$

Apéndice D

Raíz Cuadrada

D.1. Segmentos inconmensurables, números irracionales

Al comparar las magnitudes de dos segmentos de línea a y b, puede suceder que a esté contenido en b exactamente un número entero r de veces, en ese caso podemos expresar la medida del segmento b en términos de la de a diciendo que la longitud de b es r veces la de a, o puede suceder que aunque ningún múltiple entero de a iguale a b, podamos dividir al segmento a, digamos en n segmentos iguales, cada uno de longitud $\frac{a}{n}$ y tal que algún múltiplo entero m del segmento $\frac{a}{n}$ sea igual a b:

$$b = \frac{m}{n} \cdot a \qquad (1)$$

Cuando se cumple una ecuación de la forma (1) decimos que los dos segmentos son conmensurables, pues tienen como una medida común al segmento $\frac{a}{n}$ que cabe n veces en a y m veces en b. La totalidad de los segmentos conmensurables con a serán aquellos cuya longitud pueda ser expresada en la forma (1) para alguna elección de los enteros m y n ($n \neq 0$). Si escogemos al segmento a como el segmento unitario $[0, 1]$

\- +

-3 -2 -1 0 1 2 3

a

Los segmentos conmensurables con el segmento unitario corresponderán a todos los puntos racionales $\frac{m}{n}$ en la recta numérica.

\- +

-2 $\frac{-5}{3}$ -1 0 $\frac{5}{16}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2 3

Para todos los propósitos prácticos de medición, los números racionales son suficientes; incluso desde un punto de vista teórico, como el conjunto de los puntos racionales cubre densamente a la recta, podría parecer que todos los puntos en la recta son puntos racionales. Si así fuera, entonces cualquier segmento sería conmensurable con la unidad.

Uno de los descubrimientos más sorprendentes de las matemáticas griegas tempranas (la escuela pitagórica) fue que la situación no es de ninguna manera tan sencilla, pues existen *segmentos inconmensurables* o, si suponemos que a cada segmento corresponde un número que da su longitud en términos de la unidad, *números irracionales*. Esa revelación fue un acontecimiento científico de la mayor importancia que muy posiblemente marcó el origen de lo que consideramos como la contribución específicamente griega al procedimiento riguroso en las matemáticas.

Ciertamente ha afectado de manera profunda a las matemáticas y a la filosofía desde la época de los griegos hasta nuestros días.

La teoría de los inconmensurables de Eudoxo, presentada en forma geométrica en los Elementos de Euclides, llegó a ser apreciada por completo sólo hacia fines del siglo XIX, después de que Dedekind, Cantor y Weierstrass construyeron una teoría rigurosa de los números irracionales.

Primero mostraremos que *la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado.*

Podemos suponer que el lado del cuadrado dado se toma como unidad de longitud y que la diagonal tiene longitud x. Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Notación: Podemos denotar a x con el símbolo $\sqrt{2}$.

Si x fuera conmensurable con 1, podríamos encontrar dos enteros p y q tales que $x = \frac{p}{q}$ y que

$$p^2 = 2q^2$$

Supongamos que $p|q$ ya está dada en términos reducidos, porque cualquier factor común en el numerador y el denominador podría cancelarse desde el principio.

Dado que 2 aparece como un factor en el segundo miembro, p^2 es un entero par, y por consiguiente p mismo es par, ya que el cuadrado de un número impar es impar. Podemos por lo tanto escribir $p = 2r$. Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \\ (2r)^2 &= 2q^2 \\ 4r^2 &= 2q^2 \\ 2r^2 &= q^2 \end{aligned}$$

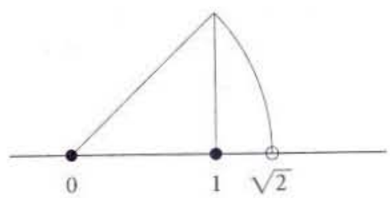
Como 2 es un factor del primer miembro, entonces q^2 debe ser par y por lo tanto q también. Así que p y q son ambos divisibles entre 2, lo que contradice la suposición de que p y q no tenían factor común. Por lo tanto, la ecuación

$$p^2 = 2q^2$$

no puede cumplirse y x no puede ser un número racional.

Por lo tanto no hay algún número racional igual a $\sqrt{2}$.

De esta forma es posible observar que de una construcción geométrica muy simple puede dar como resultado un segmento inconmensurable con la unidad. Si con un compás se marca este segmento en la recta numérica, el punto así construido no puede coincidir con alguno de los puntos racionales: *El sistema de los puntos racionales, aunque es denso en todas partes, no cubre a toda la recta numérica.*



Se pueden construir tantos segmentos inconmensurables con la unidad como se quiera.

Los extremos de tales segmentos, si se marcan a partir del punto 0 de la recta numérica, son llamados *puntos irracionales*.

Un número irracional representa la longitud de un segmento inconmensurable con la unidad.

D.2. Construcciones geométrica de la raíz cuadrada [12]

Si está dado un segmento a entonces también puede construirse $\sqrt{a}$ usando sólo regla y compás.

1. En una línea recta marcamos $\overline{OA} = a$ y $\overline{AB} = 1$.

2. Trazamos un círculo con el segmento $\overline{OB}$ como diámetro.

3. Construimos la perpendicular a $\overline{OB}$ que pase por A y el cual cruce al círculo en C.

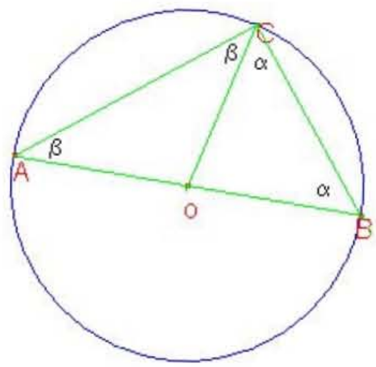
Teorema: 1 *Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.*

Demostración: Se traza el segmento de recta que une al punto C localizado sobre el semicírculo de diámetro AB con su centro O.

Tenemos que

$$\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OA}$$

Por lo tanto los triángulos BOC y AOC son isósceles.



A partir de la figura es posible observar que

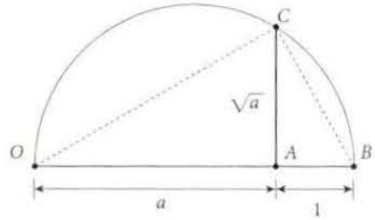
$$2\alpha + 2\beta = 180^o$$
$$\alpha + \beta = 90^o$$

Por lo tanto el ángulo formado por ACB es un ángulo recto.

4. Por el teorema anterior el triángulo OBC tiene un ángulo recto en C. Por lo tanto $\angle OCA = \angle ABC$.

5. Los triángulos rectángulos OAC y CAB son semejantes y para $x = AC$ tenemos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}$$
$$x^2 = a$$
$$x = \sqrt{a}$$



De esta forma obtenemos la $\sqrt{a}$ de forma geométrica.

Índice de figuras

Bibliografía

[1] Álvarez, P. Briseño, L. Palmas, O. Verdugo, J. *Descubre y Aprende, Matemáticas 2.* Pearson Educación.México 2000.

[2] Álvarez, P. Martínez, P. Palmas, O. Struk, F. *Descubre y Aprende, Matemáticas 3.* Pearson Educación.México 2000.

[3] Amor, J.A. "Paradojas, intuición y lógica", *Ciencias*, **No.29**, Enero 1993.

[4] Amor, J.A.*Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México 1997.

[5] Aparicio, E. *Teoria de los Números*, Curso básico, Bilbao, Servicio Editorial Universidad del pais Vasco.

[6] Calderón, H. *La ciencia matemática de los mayas.* Editorial Orion, 1966.

[7] Cardenas, H. Lluis, E. Raggi, F. Tomàs, F. *Algebra Superior.* Editorial Trillas. México 1995.

[8] Castelnuovo, E. Gori, C. Valenti, D. *Matemática oggi 1.* La Nuova Italia. 1995.

[9] Castelnuovo, E. Gori, C. Valenti, D. *Matemática oggi 2.* La Nuova Italia. 1995.

[10] Colegio de Bachilleres-Cordinación de Administracion escolar y del Sistema Abierto. *Curso Introductorio al Sistema de Enseñanza Abierta.* Febrero,2002.

[11] Coronel, G. Rodriguez, R.Alaniz, J. *Matemáticas I. Fasciculo VI. Ecuaciones:Modelos generalizadores.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[12] Courant, R. Robbins, H. *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* Fondo de Cultura Económica. México 2002.

[13] De la Rosa R. Rosas A. Zuñiga J. *Matemáticas I. Fascículo I. Aritmética: Una introducción al Álgebra.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[14] Enzensberger.H, *El Diablo de los números.* Siruela. Febrero 2000.

[15] Flores,M. Ruíz, E. *Matemáticas I. Fascículo III. Lenguaje Algebraico: Operatividad.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[16] Lucio, M. Páez, J. *Matemáticas I. Fascículo II. De la Aritmética al Álgebra.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[17] Matus, P. Castillo F. *Matemáticas I. Fascículo V. Ecuaciones: Modelos Generalizadores.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[18] Northorp,E. *Paradojas Matemáticas.* UTEHA, 1968.

[19] Nunes, Bryant, *Las Matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño.* Siglo Veintiuno Editores. México 1997.

[20] RECORD Diario Deportivo, *Lunes 18 de octubre de 2004.* Año 2, **No.891**.

[21] Labinowicz, E. *Introduccion a Piaget Pensamiento Aprendizaje Enseñanza.* Addison-Wesley Iberoamericana.

[22] Romo, P. Pous, R. Sosa, A. *Matemáticas I. Fascículo IV. Lenguaje Algebraico: Operatividad Productos Notables y Factorización.* Colegio de Bachilleres, Coordinación del Sistema de Enseñanza Abierta.

[23] UNION,Órgano Semanario del Sindicato de Trabajadores de la Universidad Nacional Autonoma de México(STUNAM). *viernes 20 de julio 2001.* cuarta época. año XXIV, **No.607**.

Índice alfabético