UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupos Kleinianos Complejos En $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A

JUAN PABLO NAVARRETE CARRILLO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ ANTONIO SEADE KURI

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2006

Dedicado a Lanny y Gustavo

Índice general

Introducción

Los grupos Kleinianos fueron introducidos por Henry Poincaré en los años 1880's como los grupos de monodromía de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden en el plano complejo $\mathbb{C}$, y jugaron un papel importante en muchas partes de las matemáticas a través del siglo veinte, por ejemplo en superficies de Riemann y teoría de Teichmüler, formas automorfas, dinámica holomorfa, geometría hiperbólica y conforme, teoría de 3-variedades, etc. Estos grupos se definen como subgrupos de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, que actúan en $P^1_{\mathbb{C}} \cong S^2 \cong \hat{\mathbb{C}}$ con región de discontinuidad no vacía. Equivalentemente, se pueden considerar como grupos de isometrías del espacio hiperbólico real de dimensión tres, o como grupos de automorfismos conformes de la esfera S^2. Gran parte de la teoría de grupos Kleinianos se ha generalizado a grupos Kleinianos conformes en dimensiones superiores; i. e., a grupos de transformaciones conformes de la esfera S^n cuya región de discontinuidad sobre la esfera no es vacía. En [12], [13] José Seade y Alberto Verjovsky introdujeron el concepto de grupos Kleinianos complejos como subgrupos de $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ actuando en $P^n_{\mathbb{C}}$, el espacio proyectivo complejo de dimensión n, cuyo conjunto límite, (ver [8]) $\Lambda(G)$, no es todo $P^n_{\mathbb{C}}$. En otras palabras, un subgrupo G de $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ es Kleiniano complejo si su región de discontinuidad $\Omega(G) = P^n_{\mathbb{C}} - \Lambda(G)$ no es vacía.

En esta tesis nos restringimos al estudio de los subgrupos Kleinianos complejos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ actuando en $P^2_{\mathbb{C}}$. En el primer capítulo damos un repaso a la clasificación de los elementos de $PU(2, 1)$, actuando en el plano hiperbólico complejo $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Esta clasificación, en elípticos, parabólicos y loxodrómicos, que se puede encontrar en el excelente libro de Goldman [5], se da en función de la posición y el número de puntos fijos en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Posteriormente recordamos, en detalle, la clasificación según la traza de los elementos de $PU(2, 1)$, esta clasificación también se puede encontrar en el libro de Goldman [5].

En el segundo capítulo introducimos la definición de conjunto límite de Kulkarni [8], e incluimos algunas propiedades del dominio de discontinuidad que nos serán de utilidad. Cabe mencionar que este conjunto límite se define de manera no estándar, pero la definición se justifica por el hecho que nos proporciona una manera canónica de elegir un conjunto cerrado de $P^2_{\mathbb{C}}$, en cuyo complemento la acción del grupo es propiamente discontinua. No se puede tomar como conjunto límite únicamente la cerradura de los puntos de acumulación de las órbitas, como en el caso clásico, puesto que la acción en el complemento de dicho conjunto no es necesariamente propiamente discontinua. En los grupos Kleinianos clásicos el conjunto límite de Kulkarni coincide con el usual porque se tienen propiedades conformes que no se tienen en nuestro caso. Desafortunadamente, el dominio de discontinuidad no es generalmente el abierto más grande sobre el cual la acción del grupo es propiamente discontinua. Aunque probamos en el último capítulo que en el caso de los subgrupos discretos "no elementales"de $PU(2,1)$ sí se tiene la maximalidad del dominio de discontinuidad.

En las secciones subsecuentes procedemos a la clasificación de los elementos de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ de una manera dinámica-geométrica. Por ejemplo, las transformaciones elípticas son aquellas que preservan una foliación de $P^2_{\mathbb{C}}$ por 3-esferas, con dos hojas singulares, una de ellas un punto y la otra una línea proyectiva compleja. Esta clasificación extiende la clasificación de elementos de $PU(2,1)$ dada en el primer capítulo.

Cada una de las transformaciones de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ genera un grupo cíclico. Nosotros calculamos, en detalle, los conjuntos límites posibles para un grupo de este estilo. Por último, en ese capítulo probamos un teorema de clasificación de elementos según la traza, el cual es una extensión natural del teorema de clasificación, según traza, para el caso de los elementos de $PU(2,1)$.

En el capítulo tres, estudiamos la estructura local del espacio cociente $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ y demostramos que para cada $x \in \Omega(\Gamma)$, la clase de x, denotada por $[x] \in \Omega/\Gamma$, tiene una vecindad, en Ω/Γ, que es homeomorfa al cono con vértice en $[x]$ de un espacio de la forma S^3/G, donde G es un subgrupo finito de $U(2)$, que actúa en S^3 por transformaciones lineales. Al final de este capítulo damos unos ejemplos de grupos Klienianos complejos que no son cíclicos.

En el capítulo cuatro, trabajamos con unas construcciones llamadas suspensiones. José Seade y Alberto Verjovsky introdujeron estas construcciones en [13]. La idea de la construcción es la siguiente: Dado un grupo Kleiniano clásico, es posible tomar su imagen inversa bajo la proyección canónica $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Este subgrupo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ actúa en $\mathbb{C}^2$ y podemos extender su acción a $P^2_{\mathbb{C}}$ de tal manera que su acción en la línea al infinito sea la misma que la de Γ. Así que este grupo puede considerarse como un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$, el cual resulta ser un grupo Kleiniano complejo, puesto que demostramos que su conjunto límite es el cono complejo sobre el conjunto límite clásico de Γ en la línea en el infinito, con vértice $[0:0:1]$. Esta es la construcción que nosotros llamamos la doble suspensión. En algunos casos [13] es posible, en vez de tomar la imagen inversa del grupo Γ bajo la proyección $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, considerar al grupo como un subgrupo de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ y posteriormente proceder de manera similar al caso de la doble suspensión, obteniendo un subgrupo Kleiniano complejo cuyo conjunto límite es nuevamente un cono sobre un conjunto límite clásico. A esta construcción la llamamos la suspensión. Al igual que en el caso de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, existen subgrupos discretos de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ cuya región de discontinuidad en $P^2_{\mathbb{C}}$ es vacía. Damos un ejemplo de esta situación al final del capítulo.

En el último capítulo estudiamos el conjunto límite de los subgrupos discretos de $PU(2,1)$. Estos grupos tienen la importante propiedad de preservar al conjunto de puntos cuyas coordenadas homogéneas satisfacen $|z_1|^2+|z_2|^2 < |z_3|^2$. Esta es una bola que podemos equipar con la métrica de Bergman (ver [5]) y sirve como un modelo para el plano hiperbólico complejo $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, además $PU(2,1)$ es el correspondiente grupo de automorfismos. Así que es natural restringir la acción de los subgrupos discretos de $PU(2,1)$ a $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y usarla para obtener información acerca de la acción en todo $P^2_{\mathbb{C}}$. Para un subgrupo discreto G de $PU(2,1)$ existe una definición (ver [2]) de conjunto límite inspirada en la correspondiente en geometría hiperbólica real. Denotamos por $L(G)$ este conjunto límite el cual resulta estar contenido en la esfera en el infinito $S^3 = \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nuestro objetivo en este capítulo es comparar las dos definiciones de conjunto límite. Primero demostramos que los subgrupos discretos de $PU(2,1)$ siempre son Kleinianos complejos, porque su región de discontinuidad siempre contiene a la bola $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Posteriormente demostramos propiedades del conjunto límite $L(G)$ que son análogas a propiedades de grupos Kleinianos clásicos. Estas propiedades nos son muy útiles para demostrar que $L(G) = \Lambda(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Además, $\Lambda(G)$ es la unión de todas las líneas proyectivas complejas que son tangentes a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en puntos de $L(G)$.

Quiero agradecer a los doctores José Seade, y Alberto Verjovsky por sus enseñanzas. También quiero agradecer a mi esposa Lanny Novelo y a mi hijo Gustavo, porque sin ellos esta tesis se hubiese terminado mucho antes pero no hubiera tenido sentido alguno.

Capítulo 1

Clasificación de Elementos de $\mathbf{PU}(2,1)$

Este capítulo es básicamente un resumen de material presentado en el libro de Goldman [5]. Incluimos algunos ejemplos e hicimos en detalle la prueba del teorema de clasificación de los elementos de $PU(2,1)$ según traza.

1.1. Clasificación de Elementos de $\mathbf{PU}(2,1)$

El **espacio hiperbólico complejo**, $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, es el subconjunto del espacio proyectivo complejo $P^n_{\mathbb{C}}$ dado por

$$\{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2 < 0\},$$

equipado con la métrica de Bergman que en coordenadas inhomogéneas, $z = (z_1/z_{n+1}, \ldots, z_n/z_{n+1})$, tiene la forma

$$4(1 - \langle\langle z, z\rangle\rangle)^{-2}\Big\{\langle\langle z, dz\rangle\rangle\langle\langle dz, z\rangle\rangle + (1 - \langle\langle z, z\rangle\rangle)\langle\langle dz, dz\rangle\rangle\Big\},$$

donde $\langle\langle x, y\rangle\rangle = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$ (con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$) es el producto hermitiano usual de $\mathbb{C}^n$.

El grupo de automorfismos biholomorfos de $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ es el grupo $PU(n,1)$ de transformaciones proyectivas que se obtienen del grupo $U(n,1)$ de transformaciones lineales complejas que preservan la forma hermitiana

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C},$$

dada por

$$\langle X, Y\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} - x_{n+1}\overline{y_{n+1}},$$

donde $X = (x_1, \ldots, x_{n+1}),\ Y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Se denotará mediante $\mathbb{C}^{n,1}$ a $\mathbb{C}^{n+1}$ equipado con esta forma hermitiana.

Un modelo conveniente para $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$ es la bola unitaria $\mathbf{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ dado en términos de coordenadas inhomogéneas $(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}})$. La métrica de Bergman en $\mathbf{B}^n$ es una métrica de Kähler completa, $PU(n,1)$-invariante , y de curvatura seccional holomorfa constante e igual a -1. La intersección de $\mathbf{B}^n$ con un subespacio complejo y afín, de dimensión l, de $\mathbb{C}^n$ resulta ser una subvariedad holomorfa, totalmente geodésica e isomorfa al espacio hiperbólico complejo de dimensión l. Cuando $l = 1$ tales subvariedades se llaman **geodésicas complejas**. Éstas son 2-discos y tienen el modelo de Poincaré del plano hiperbólico. Las geodésicas respecto a la métrica de Bergman son las geodésicas usuales en el modelo de Poincaré y nos referiremos a ellas simplemente como **geodésicas**.

La frontera del espacio hiperbólico complejo, $\partial\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$, es el conjunto dado por

$$\{[z_1 : \ldots : z_{n+1}] \in P^n_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 - |z_{n+1}|^2 = 0\},$$

y es difeomorfo a S^{2n-1}.

Definición. 1.1. *Sean $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{2,1}$ un levantamiento de x y $\tilde{L}$ el subespacio complejo generado por $\tilde{x}$. Definimos la* ***polar*** *a x como la línea proyectiva en $P^2_{\mathbb{C}}$ que se obtiene del subespacio complejo bidimensional ortogonal a $\tilde{L}$.*

Definición. 1.2. *Sea M una geodésica compleja en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, denotemos por $\tilde{M}$ el subespacio bidimensional complejo de $\mathbb{C}^{2,1}$ tal que $M = \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cap [\tilde{M}]$, donde $[\tilde{M}]$ denota la línea proyectiva en $P^2_{\mathbb{C}}$ que se obtiene de $\tilde{M}$. Decimos que un vector $v \in \mathbb{C}^{2,1} - \{0\}$ es* ***polar*** *a M si $v \in (\tilde{M})^{\perp}$, donde $(\tilde{M})^{\perp}$ denota el espacio ortogonal a $\tilde{M}$.*

Supongamos que $F \subset \mathbb{C}^{n,1}$ es un subespacio complejo de $\mathbb{C}^{n,1}$ tal que la restricción de la estructura hermitiana a F es no degenerada, entonces existe una descomposición en suma directa ortogonal dada por

$$\mathbb{C}^{n,1} = F \oplus F^{\perp},$$

donde

$$F^{\perp} = \{Z \in \mathbb{C}^{n,1} : \langle Z, f\rangle = 0\ \forall f \in F\}$$

es el complemento ortogonal de F. Si $\Pi_F : \mathbb{C}^{n,1} \to F$ denota la proyección ortogonal, entonces

$$\langle Z, W\rangle = \langle \Pi_F(Z), \Pi_F(W)\rangle + \langle \Pi_{F^\perp}(Z), \Pi_{F^\perp}(W)\rangle,$$

donde $\Pi_{F^\perp}(Z) = Z - \Pi_F(Z)$ es la proyección ortogonal a $F^\perp$. Si F es unidimensional,

$$\Pi_F(Z) = \frac{\langle Z, V\rangle}{\langle V, V\rangle} V,$$

donde V genera a F.

Definición. 1.3. *Si ζ es un número complejo unitario, la* ***reflexión compleja en*** F ***con factor de reflexión*** ζ *es la transformación*

$$\rho_F^\zeta : X \mapsto \Pi_F(X) + \zeta \Pi_{F^\perp}(X).$$

No es difícil verificar que $\rho_F^\zeta \in U(n,1)$. Si ζ es una raíz p-ésima de la unidad, entonces ρ_F^ζ tiene orden p.

Definición. 1.4. *Una reflexión compleja de orden 2 se llama una* ***inversión****.*

Observemos que si $F = \text{gen}_{\mathbb{C}}\{\tilde{x}\}$ entonces la inversión en F tiene la forma:

$$i_F(Z) = -Z + 2\frac{\langle Z, \tilde{x}\rangle}{\langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle}\tilde{x}$$

Un automorfismo g de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ se levanta a una transformación unitaria $\tilde{g}$ de $\mathbb{C}^{n,1}$ y los puntos fijos de g en $P_{\mathbb{C}}^n$ corresponden a vectores propios de $\tilde{g}$.

Por el teorema del punto fijo de Brouwer, cada automorfismo de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ tiene un punto fijo en $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n \cup \partial \mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$, aunque, como veremos posteriormente, puede tener más de uno.

Definición. 1.5. *Decimos que un automorfismo g de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$ es* ***elíptico*** *si tiene un punto fijo en $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$,* ***parabólico*** *si tiene un único punto fijo en $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$, y* ***loxodrómico*** *si fija un único par de puntos en $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$.*

Decimos que un elemento elíptico g es ***elíptico regular*** *si y sólo si g tiene un levantamiento a $U(n,1)$ tal que sus valores propios son diferentes.*

Un elemento parabólico es ***unipotente*** *si se puede representar por un elemento unipotente de $U(n,1)$; esto es, una transformación lineal que tiene a 1 como su único valor propio.*

*g es **elipto-parabólico** si no es unipotente; en este caso existe una única geodésica compleja invariante, Σ, sobre la cual g actúa como un automorfismo parabólico (de $\mathbf{H}^1_{\mathbf{C}}$) y g actúa como un automorfismo unitario no trivial sobre el haz normal de Σ.*

Proposición. 1.6. *El grupo $PU(n,1)$ actúa transitivamente en $\mathbf{H}^n_{\mathbb{C}}$.*

Prueba.
Sean $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{C}^{n,1}$ vectores negativos. Multiplicando $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$ por números complejos obtenemos vectores $X, Y \in \mathbb{C}^{n,1}$ que satisfacen

$$\langle X, X\rangle = \langle Y, Y\rangle = -1, \quad \langle X, Y\rangle < 0.$$

Explícitamente,

$$X = (-\langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle)^{-1/2}\tilde{x}$$

$$Y = -(-\langle \tilde{y}, \tilde{y}\rangle)^{-1/2}|\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle|^{-1}\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle\tilde{y}.$$

Sea $M = X + Y$; entonces

$$\langle M, M\rangle = -2 + 2\Re\langle X, Y\rangle < 0,$$

así que M genera una línea negativa. La inversión ρ en $\langle M\rangle$ es un elemento de $U(n,1)$ y satisface que $\rho(X) = Y$ y $\rho(Y) = X$.

$\square$

Ahora nos restringimos a nuestro caso de interés, el caso de $PU(2,1)$. Sea $g \in PU(2,1)$ un elemento elíptico. Podemos suponer que un punto fijo de g es $[0:0:1]$, porque $PU(2,1)$ actúa transitivamente sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si $\tilde{g}$ es un levantamiento de g a $U(2,1)$ entonces $(0,0,1)$ es un vector propio de $\tilde{g}$ y por tanto

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $A \in U(2)$, $\lambda \in S^1$, entonces todos los valores propios de $\tilde{g}$ tienen módulo 1 y g genera un grupo cíclico con cerradura compacta.

Recíprocamente, si $\tilde{g}$ es como arriba (un elemento de $U(2)\times S^1$), o bien, un conjugado por un elemento de $U(2,1)$ de un tal elemento, entonces claramente g, la transformación inducida por $\tilde{g}$, es elíptica.

Si g es elíptico regular, entonces tiene exactamente tres puntos fijos, que corresponden a los vectores propios diferentes de $(0, 0, 1)$ y ambos son vectores positivos con respecto al producto hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si g es elíptico pero no regular entonces existen dos casos: Si g es una reflexión en un punto x de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces todos los puntos fijos de g son precisamente los que se encuentran en la polar a x y por tanto no intersectan $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si g es una reflexión en una geodésica compleja entonces g tiene todo un círculo de puntos fijos en $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Por tanto las definiciones de elíptico, loxodrómico y parabólico son mutuamente excluyentes.

Ahora supongamos que $g \in PU(2, 1)$ es un elemento loxodrómico. Sea $\tilde{g}$ un levantamiento de g, denotemos por x, y los puntos fijos de g y por $\tilde{x}, \tilde{y}$ levantamientos respectivos. Sea Σ la geodésica compleja determinada por x, y, y sea σ la geodésica determinada por x, y. Podemos suponer que $\Sigma = \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times 0$ y que σ es el eje real en $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times 0$, o en otras palabras, que $x = [-1 : 0 : 1]$, $y = [1 : 0 : 1]$ (porque si $z \in \sigma$ entonces existe $h \in PU(2, 1)$ tal que $h(z) = (0, 0)$ entonces $h(L)$ pasa por el origen de $\mathbf{B}^2 \leftrightarrow \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. El estabilizador del origen es $U(2)$ y éste actúa transitivamente sobre el conjunto de líneas complejas que pasan por el origen, así que existe $h_1 \in PU(2, 1)$ tal que $h_1(\Sigma) = \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times 0$ y $h_1(\sigma)$ pasa por el origen. Ahora no es difícil verificar que podemos componer con una rotación en $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}}$ para obtener lo deseado).

Observemos que cualquier vector c, polar a Σ, es vector propio de $\tilde{g}$, porque si $v \in \tilde{\Sigma}$ entonces $\langle \tilde{g}(c), \tilde{g}(v) \rangle = \langle c, v \rangle = 0$, entonces $\tilde{g}(c)$ es polar a $g(\Sigma) = \Sigma$ y se sabe que $\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\Sigma})^{\perp} = 1$.

Ahora bien, $c = (0, 1, 0)$ es un vector polar a Σ, entonces podemos suponer que el otro punto fijo de g es $[0 : 1 : 0]$.

Así que podemos tomar $\tilde{g}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

y la transformación de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ inducida por la matriz

$$e^{-i\theta} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

es una transformación hiperbólica que preserva el disco unitario de $\mathbb{C}$ y tiene puntos fijos $1, -1$.

Con toda la información que ya tenemos no es difícil verificar que podemos tomar $\tilde{g}$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta}\cosh u & 0 & e^{i\theta}\sinh u \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ e^{i\theta}\sinh u & 0 & e^{i\theta}\cosh u \end{pmatrix}.$$

y podemos observar, en particular, que si g es loxodrómico, entonces $\tilde{g}$ tiene un valor propio dentro del disco unitario abierto, uno sobre la circunferencia unitaria y otro fuera del disco unitario cerrado.

Ahora damos algunos ejemplos de transformaciones parabólicas.
Ejemplos.

1. Un ejemplo de una transformación unipotente es:

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1+i/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1-i/2 \end{pmatrix}.$$

   La transformación g inducida en $P^2_{\mathbb{C}}$ tiene toda una línea compleja de puntos fijos que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

2. La transformación de $SU(2,1)$ dada por

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{4\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & \sqrt{3} \\ -\frac{2\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

   induce un automorfismo unipotente de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que tiene un único punto fijo en $P^2_{\mathbb{C}}$. De hecho, la forma canónica de Jordan de $\tilde{g}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La transformación en $SU(2,1)$ dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{2+\epsilon i}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{\epsilon i}{2}e^{i\theta} \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ -\frac{\epsilon i}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{2-\epsilon i}{2}e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

donde $\epsilon \neq 0$, induce un automorfismo elipto-parabólico de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, con puntos fijos $[-1 : 0 : 1] \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y $[0 : 1 : 0]$.

1.2. Trazas y Clases de Conjugación en $SU(2,1)$

Sea $\tau : SU(2,1) \to \mathbb{C}$ la función que asigna a un elemento de $SU(2,1)$ su traza. Un automorfismo biholomorfo de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tiene por traza un número complejo bien definido salvo multiplicación por una raíz cúbica de la unidad.

Lema. 1.7. *Sea E un espacio vectorial hermitiano y sea A un automorfismo unitario de E. El conjunto de valores propios de A es invariante bajo la inversión $\imath$ en el círculo unitario en $\mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} \imath : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \frac{1}{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Prueba. A es unitaria con respecto a la forma hermitiana sobre E definida por una matriz hermitiana M si y sólo si

$$\bar{A}^t M A = M.$$

Equivalentemente,

$$A = M^{-1}(\bar{A}^t)^{-1}M.$$

Así que A tiene los mismos valores propios que $(\bar{A}^t)^{-1}$, o lo que es lo mismo, λ es valor propio de A si y solo si $(\bar{\lambda})^{-1}$ también lo es.

$\square$

Podemos deducir del lema anterior que si $\tilde{g} \in SU(2,1)$ entonces $\tilde{g}$ tiene al menos un valor propio de módulo uno. Además, los valores propios que no están en el círculo unitario se dan en parejas $\imath$-invariantes.

En particular, si $\tilde{g} \in SU(2,1)$ tiene dos valores propios de módulos iguales, entonces todos sus valores propios tienen módulo 1.

Lema. 1.8. *El polinomio mónico $\chi(t) = t^3 - xt^2 + yt - 1$ con coeficientes complejos tiene raíces repetidas si y solo si*

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y) &= -x^2y^2 + 4(x^3+y^3) - 18xy + 27. \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -x & y & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & y & -1 \\ 3 & -2x & y & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2x & y \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prueba.

Supongamos que χ tiene raíces repetidas, entonces χ y χ' tienen una raíz común. Supongamos que

$$\chi(t) = (t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)$$

y

$$\chi'(t) = 3(t - a_1)(t - a_4),$$

entonces

$$3(t - a_4)\chi(t) = (t - a_2)(t - a_3)\chi'(t),$$

o lo que es lo mismo,

$$3t\chi(t) - 3a_4\chi(t) - t^2\chi'(t) + (a_2 + a_3)t\chi'(t) - a_2a_3\chi'(t) \equiv 0,$$

lo cual quiere decir que los vectores que se obtienen de los coeficientes de grado ≤ 4 de $t\chi(t)$, $\chi(t)$, $t^2\chi'(t)$, $t\chi'(t)$, $\chi'(t)$ son linealmente dependientes, pero dichos vectores son precisamente los vectores renglón del determinante que define a $\tilde{f}(x,y)$, entonces $\tilde{f}(x,y) = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\tilde{f}(x,y) = 0$ entonces existen $c_1, \ldots, c_5$, números complejos no todos nulos tales que

$$c_1t\chi(t) + c_2\chi(t) + c_3t^2\chi'(t) + c_4t\chi'(t) + c_5\chi'(t) \equiv 0,$$

entonces $(c_1t + c_2)\chi(t) = -(c_3t^2 + c_4t + c_5)\chi'(t)$, lo que implica que $\chi(t)$ y $\chi'(t)$ tienen una raíz común porque $deg(\chi) = 3$. Por tanto, $\chi(t)$ tiene una raíz repetida.

$\square$

Notación. $3C_3 := \{3, 3\omega, 3\omega^2\}$, donde $\omega \in \mathbb{C}$ es una raíz cúbica de la unidad.

El resultado principal involucra al polinomio real $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(z) = -\tilde{f}(z, \bar{z}) = |z|^4 - 8\Re(z^3) + 18|z|^2 - 27.$$

Teorema. 1.9. *(Goldman [5]) La función traza $\tau : SU(2,1) \to \mathbb{C}$ es sobre. Si $A_1, A_2 \in SU(2,1)$ satisfacen $\tau(A_1) = \tau(A_2) \in \mathbb{C} - f^{-1}(0)$, entonces son conjugados. Suponga que $A \in SU(2,1)$.*

1. *A es elíptica regular si y solo si $f(\tau(A)) < 0$;*

2. *A es loxodrómica si y solo si* $f(\tau(A)) > 0$*;*

3. *A es elipto-parabólico si y solo si A no es elíptico y* $\tau(A) \in f^{-1}(0) - 3C_3$*;*

4. *A es una reflexión compleja (ya sea en un punto o en una geodésica compleja) si y solo si A es elíptica y* $\tau(A) \in f^{-1}(0) - 3C_3$*;*

5. $\tau(A) \in 3C_3$ *si y solo si A representa un automorfismo unipotente de* $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$*.*

Prueba. Sea $\chi_A(t)$ el polinomio característico de A:

$$\chi_A(t) = t^3 - xt^2 + yt - 1.$$

Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A son las raíces de $\chi_A(t)$. Se tiene que

$$x = \tau(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

y

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A) = 1. \qquad (1)$$

El coeficiente y en el polinomio χ_A es igual a

$$y = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} + \overline{\lambda_3} = \overline{\tau(A)}.$$

Así que

$$\chi_A(t) = t^3 - \tau(A)t^2 + \overline{\tau(A)}\, t - 1.$$

Si $A \in SU(2,1)$, entonces sus tres valores propios satisfacen la ecuación (1) y forman un conjunto

$$\tilde{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$$

que satisface lo siguiente:

$$\lambda \in \tilde{\lambda} \Rightarrow \imath(\lambda) = \bar{\lambda}^{-1} \in \tilde{\lambda}. \qquad (2)$$

Sea $\tilde{\Lambda}$, (respectivamente Λ) el conjunto de tercias no ordenadas de números complejos que satisfacen (1), (respectivamente (1) y (2)). Entonces $\imath$ induce una involución en $\tilde{\Lambda}$ (que se denota de la misma manera) cuyo conjunto de puntos fijos es Λ. La función

$$\chi : \tilde{\Lambda} \to \mathbb{C}^2$$

$$\tilde{\lambda} \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$$

es biyectiva, con función inversa

$$\mathbb{C}^2 \to \tilde{\Lambda}$$

$$(x, y) \mapsto \{t \in \mathbb{C} : t^3 - xt + yt - 1 = 0\}.$$

La involución j de $\mathbb{C}^2$ definida mediante

$$j(x, y) = (\bar{y}, \bar{x})$$

satisface

$$\chi \circ \imath = j \circ \chi$$

y χ restringida al conjunto de puntos fijos de $\imath$ es una biyección sobre el conjunto de puntos fijos de j en $\mathbb{C}^2$, que es la imagen de

$$e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$$

$$z \mapsto (z, \bar{z}).$$

Claramente se tiene que $e^{-1} \circ \chi|_{\Lambda} = \tau$. Sea $\tilde{\Lambda}_{\text{sing}} \subset \tilde{\Lambda}$ el conjunto que consta de las tercias no ordenadas $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ que no son diferentes. El lema 1.8 implica que χ restringido a $\tilde{\Lambda}_{\text{sing}}$ es una biyección sobre el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \tilde{f}(x, y) = 0\},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y) &= \begin{vmatrix} 1 & -x & y & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & y & -1 \\ 3 & -2x & y & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2x & y & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2x & y \end{vmatrix} \\ &= -x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) - 18xy + 27. \end{aligned}$$

Sea $\Lambda_0 = \Lambda - \tilde{\Lambda}_{\text{sing}}$. Entonces $\tau|_{\Lambda \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}}} : \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}} \to f^{-1}(0)$ es una biyección, así como lo es $\tau|_{\Lambda_0} : \Lambda_0 \to \mathbb{C} - f^{-1}(0)$. [Para ver que $\tau|_{\Lambda \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}}}$ es inyectiva es suficiente observar que $\tau = e^{-1} \circ \chi$, es composición de funciones inyectivas. Ahora bien, si $z \in f^{-1}(0)$ entonces $0 = f(z) = -\tilde{f}(z, \bar{z}) = -\tilde{f}(e(z))$, pero existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\chi(\lambda) = e(z)$, entonces $\tilde{f}(\chi(\lambda)) = 0$, lo que implica que $\lambda \in \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}}$. Además $\tau(\lambda) = e^{-1} \circ \chi(\lambda) = z$. Por tanto, $\tau|_{\Lambda \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}}}$ es sobre. La demostración de que $\tau|_{\Lambda_0}$ es biyectiva también es directa y la omitimos]

Ya hemos demostrado, por tanto, que $\tau : SU(2,1) \to \mathbb{C}$ es sobre. [Aunque implícitamente se ha supuesto que Λ es la imagen de una correspondencia definida en $SU(2,1)$. Dicha correspondencia está definida mediante:

$$L : SU(2,1) \to \Lambda$$

$$L(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de A. Debemos verificar que L es sobre. Sea $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \in \Lambda$, se tienen solo dos posibilidades:

1. $|\lambda_i| = 1$ para $i = 1, 2, 3$; en este caso

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \in SU(2,1),$$

y $L(A) = \lambda$.

2. $\lambda_3 = re^{i\theta}$, $0 < r < 1$ y podemos tomar $\lambda_2 = e^{-2i\theta}$, $\lambda_1 = (1/r)e^{i\theta}$. Sea $r = e^{-u}$ para algún $u \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(u)e^{i\theta} & 0 & \sinh(u)e^{i\theta} \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ \sinh(u)e^{i\theta} & 0 & \cosh(u)e^{i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2,1),$$

y $L(A) = \lambda$.]

Si $A_1, A_2 \in SU(2,1)$ satisfacen que $\tau(A_1) = \tau(A_2) \in \mathbb{C} - f^{-1}(0)$ entonces los polinomios característicos de A_1 y A_2 son iguales, lo que implica que tienen los mismos valores propios (todos los cuales son diferentes entre sí) luego A_1 y A_2 son conjugados de una misma matriz diagonal y por tanto A_1 y A_2 son conjugados.

Sea $\Lambda_0^l = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \cap S^1$ tiene un solo elemento $\}$. Reordenando λ si es necesario, podemos suponer que

$$|\lambda_1| > 1, \qquad |\lambda_2| < 1, \qquad |\lambda_3| = 1. \qquad (3)$$

En particular, $\Lambda_0^l \subset \Lambda_0$. Además, dado λ_1 que satisface (3), se obtienen únicos λ_2, λ_3 mediante

$$\lambda_2 = (\overline{\lambda_1})^{-1}, \qquad \lambda_3 = \frac{\overline{\lambda_1}}{\lambda_1}$$

lo que demuestra que Λ_0^l es homeomorfo al exterior del disco unitario en $\mathbb{C}$ y por tanto conexo. [La topología que tiene $\tilde{\Lambda}$ es la topología inducida por la función biyectiva $\chi : \tilde{\Lambda} \to \mathbb{C}^2$ y la de Λ es la subespacio.]

Sea $\Lambda_0^e = \Lambda_0 - \Lambda_0^l$. Si $\lambda \in \mathbb{R}^* - \{\pm 1\}$, entonces

$$\tau(\lambda, \lambda^{-1}, 1) = \lambda + \lambda^{-1} + 1$$

lo que demuestra que $\tau|_{\Re(\Lambda_0^l)} : \Re(\Lambda_0^l) \to \mathbb{R} - [-1, 3]$ es una biyección, donde $\Re(\Lambda_0^l)$ denota el conjunto de tercias reales en Λ_0^l [observemos que $\tau|_{\Re(\Lambda_0^l)}$ es 1-1 porque es la composición de funciones 1-1 y es fácil verificar que es sobre]. Observemos que f es positiva en $\mathbb{R} - [-1, 3]$, de hecho, si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = (x+1)(x-3)^3.$$

Se tiene que $\tau|_{\Lambda_0^l} : \Lambda_0^l \to f^{-1}(\mathbb{R}^+)$ es biyectiva [Primero, $\tau(\Lambda_0^l) \subset f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, porque de lo contrario, usando que Λ_0^l es conexo, podemos encontrar una tercia $\lambda \in \Lambda_0^l$ tal que $f(\tau(\lambda)) = 0$, lo cual implica que $\lambda \in \Lambda_0 \cap \tilde{\Lambda}_{\text{sing}} = \varnothing$, una contradicción.

Se tiene que τ es inyectiva porque es la composición de las funciones inyectivas e^{-1} y χ.

Para demostrar que $\tau(\Lambda_0^l) = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, sea $z \in f^{-1}(\mathbb{R}^+)$, sabemos que $z = \tau(\lambda)$, para algún $\lambda \in \Lambda$. Supongamos que $\lambda \notin \Lambda_0^l$, entonces todos los elementos de λ tienen módulo 1, lo que implica que

$$|z| = |\tau(\lambda)| \leq 3,$$

y entonces

$$|\Re(z^3)| \leq |z^3| \leq 27,$$

por tanto,

$$f(z) \leq (3)^4 - 8(-27) + 18(3)^2 - 27 = 0,$$

una contradicción.]

También $\tau|_{\Lambda_0^e}$ es una biyección sobre $f^{-1}(\mathbb{R}^-)$. [Primero, $\tau(\Lambda_0^e) \subset f^{-1}(\mathbb{R}^-)$, porque si $\lambda \in \Lambda_0^e$ entonces todos los elementos de λ son diferentes y tienen módulo 1. Ya sabemos que $\tau|_{\Lambda_0^e}$ es inyectiva, puesto que es la restricción de la función inyectiva $\tau|_{\Lambda_0}$. Por último, $\tau(\Lambda_0^e) = f^{-1}(\mathbb{R}^-)$, porque $\tau(\Lambda_0^l) = f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.]

Así que $f(\tau(A)) < 0$ si y sólo si los valores propios de A son números complejos unitarios diferentes; esto es, si y solo si A es elíptica regular. $f(\tau(A)) > 0$ si y solo si A tiene exactamente un valor propio en S^1; esto es, si y solo si A es loxodrómico.

Ahora consideremos cuando $f(\tau(A)) = 0$. Evidentemente $A \in PU(2,1)$ es unipotente si y solo si tiene un levantamiento a $SU(2,1)$ tal que todos sus valores propios son iguales, y por tanto, $\frac{1}{3}\tau(A) \in C_3$. Recíprocamente, si $\frac{1}{3}\tau(A) = \omega \in C_3$, entonces

$$\chi_A(t) = t^3 - 3\omega t^2 + 3\omega^2 t - 1 = (t-\omega)^3,$$

así que A tiene sus tres valores propios iguales y es proyectivamente equivalente a una matriz unipotente.

Finalmente consideremos el caso cuando $\tau(A) \in f^{-1}(0) - 3C_3$. Entonces A tiene un valor propio $\zeta \in \mathbb{T}$ de multiplicidad 2 y otro valor propio igual a ζ^{-2}. Dado que $\tau(A) \notin 3C_3$, se tiene que $\zeta \neq \zeta^{-2}$. Existen dos casos dependiendo de la forma canónica de Jordan de A: Si A es diagonalizable entonces A es elíptica y representa una reflexión compleja. Estas se dividen en dos casos también, dependiendo de si el ζ-espacio propio V_ζ es positivo o indefinido: si V_ζ es indefinido entonces A representa una reflexión compleja alrededor de la geodésica compleja que corresponde a V_ζ; y si V_ζ es positivo, entonces A representa una reflexión compleja alrededor del punto que corresponde al ζ^{-2}-espacio propio. Si A no es diagonalizable, entonces A tiene un valor propio repetido de módulo 1 y tiene forma canónica de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

En este caso el vector propio correspondiente a λ es necesariamente nulo y A es elipto-parabólica.

□

Nos será de mucha utilidad observar que la prueba de este teorema demuestra el siguiente:

Corolario. 1.10. *si el conjunto de valores propios de $g \in SL(3,\mathbb{C})$ es invariante bajo la inversión en el círculo unitario, entonces* *i) Todos los valores propios de* g *son diferentes y tienen módulo* 1 *si y sólo si* $f(\tau(g)) < 0$.

ii) Exactamente uno de los valores propios de g *tiene módulo* 1 *si y solo si* $f(\tau(g)) > 0$.

Capítulo 2

Clasificación de Elementos de $\mathbf{PSL}(3, \mathbb{C})$

2.1. El Conjunto Límite y el Dominio de Discontinuidad

Esta sección es básicamente un resumen de los conceptos y resultados que necesitaremos del artículo desarrollado por Kulkarni [8]. En dicho artículo Kulkarni considera acciones de grupos discretos en espacios más generales que los que nosotros usaremos. Aquí nos restringimos al caso que es importante para nosotros, cuando el grupo G es un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ que actúa en el espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$.

Primero recordemos algunos conceptos. Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$. Decimos que la acción de G en $P^2_{\mathbb{C}}$ es **propiamente discontinua** en un subconjunto invariante Ω de $P^2_{\mathbb{C}}$, si para cualesquiera dos subconjuntos compactos C y D de Ω, $g(C) \cap D \neq \varnothing$ solo para un número finito de $g \in G$. La acción se llama **libre** (resp. **casi libre**) en un subconjunto G-invariante Ω de $P^2_{\mathbb{C}}$ si para cada punto $p \in \Omega$ el grupo de isotropía, G_p, es trivial (resp. finito). Claramente una acción propiamente discontinua es casi libre.

El conjunto límite de Kulkarni nos dará una manera canónica de elegir un conjunto cerrado y G-invariante de $P^2_{\mathbb{C}}$ en cuyo complemento la acción del grupo es propiamente discontinua. Motivamos la definición de Kulkarni con un ejemplo. Sea $g \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ un elemento inducido por la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad |\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|.$$

El elemento g es de un tipo que llamaremos fuertemente loxodrómico, ver 2.27 y 2.28. Sea G el grupo cíclico generado por g y sean $Z_1 = [1:0:0]$, $Z_2 = [0:1:0]$, $Z_3 = [0:0:1]$ sus tres puntos fijos en $P^2_{\mathbb{C}}$. Dado que estos puntos se quedan fijos bajo g, el grupo de isotropía en cada uno de ellos es todo G; obviamente podemos pensar al conjunto $L_0(G) = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ como la cerradura del conjunto de puntos con grupo de isotropía infinito (lo cual demostramos en 2.29).

Ahora, sea $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ la línea proyectiva compleja determinada por estos dos puntos, y análogamente para los otros. Estos tres puntos se pueden distinguir por la dinámica de g (ver 2.29):

- Para cada $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} g^n(Z) = Z_3$; esto es, Z_3 es un punto *atractor* para g.

- Para cada $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_2Z_3}$ tenemos que $\lim_{n\to-\infty} g^n(Z) = Z_1$; esto es, Z_1 es un punto *repulsor* para g.

- El punto fijo Z_2 no es atractor ni repulsor sino un punto *silla* para g.

Recordamos que si $\{A_\beta\}$ es una familia de subconjuntos de $P^2_{\mathbb{C}}$ donde β corre sobre un conjunto infinito de índices B, entonces un punto p en $P^2_{\mathbb{C}}$ se dice un **punto de acumulación** de $\{A_\beta\}$ si cada vecindad de p intersecta a A_β para un número infinito de valores de $\beta \in B$.

Sea $L_1(G)$ la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de las órbitas de todos los puntos en $P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$. Se sigue de las observaciones anteriores acerca de la dinámica de G que en este ejemplo $L_1(G) = L_0(G) = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$. Por tanto, este conjunto es un candidato natural para conjunto límite de G. Sin embargo, observemos que la acción de G sobre $P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ No es propiamente discontinua. De hecho, si tomamos una 3-esfera $W \subset P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ que es frontera de una bola alrededor del punto silla Z_2, entonces $g^n(W) \cap W \neq \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Así que debemos quitar otros puntos de $P^2_{\mathbb{C}}$ además de aquellos en $L_0(G) = L_1(G)$ para obtener una acción propiamente discontinua en su complemento.

Sea $L_2(G) \subset P^2_{\mathbb{C}}$ la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de todos los subconjuntos compactos de $P^2_{\mathbb{C}}$. Demostramos en 2.29 que $L_2(G)$ es la unión de las dos líneas $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ y $\overleftrightarrow{Z_2Z_3}$. Además, la prueba del lema 2.30 nos dice que la acción de G en $P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G))$ es propiamente discontinua.

El ejemplo anterior motiva la definición de Kulkarni de conjunto límite. Sea

$$L_0(G)$$

la cerradura del conjunto de puntos en $P^2_{\mathbb{C}}$ con grupo de isotropía infinito,

$$L_1(G)$$

la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de $\{g(z)\}_{g\in G}$ donde z corre sobre $P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$.

Finalmente hagamos

$$L_2(G)$$

la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de $\{g(K)\}_{g\in G}$ donde K varía sobre subconjuntos compactos de $P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$.

Definición. 2.1. *[8] El conjunto*

$$\Lambda(G) = L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G)$$

se llama el conjunto límite de G. *El conjunto*

$$\Omega(G) = P^2_{\mathbb{C}} - \Lambda(G)$$

se llama el ***dominio de discontinuidad de*** G.

Observación. Cuando no haya confusión escribiremos simplemente L_0 en vez de $L_0(G)$, Λ en vez de $\Lambda(G)$, etc. En el caso cuando G es el grupo cíclico generado por el elemento $g \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, escribiremos simplemente $L_0(g)$ en vez de $L_0(G)$, $\Lambda(g)$ en vez de $\Lambda(G)$, etc.

Observemos que en geometría hiperbólica clásica se considera el conjunto límite como el conjunto de puntos de acumulación de una sola órbita, y la acción en su complemento resulta ser propiamente discontinua. Esta es una consecuencia de propiedades de geometría conforme que están implícitas en geometría hiperbólica.

Recordemos que un grupo kleiniano en geometría hiperbólica se puede definir como un subgrupo de isometrías del espacio hiperbólico real de dimensión n, cuya acción en la esfera en el infinito tiene región de discontinuidad no vacía. Análogamente tenemos:

Definición. 2.2. *Se dice que $G \subset PSL(3,\mathbb{C})$ es **kleiniano complejo** si $\Omega(G) \subset P^2_{\mathbb{C}}$ no es vacío.*

Esta es la definición que Seade y Verjovsky usan en [12] para el caso cuando G es un subgrupo de PSL$(n+1,\mathbb{C})$ actuando en $P^n_{\mathbb{C}}$.

Proposición. 2.3. *[8] Sea G como arriba, donde G tiene la topología compacto-abierto. Entonces L_0, L_1, L_2, Λ y Ω son G-invariantes y G actúa propia y discontinuamente sobre Ω. Si G es kleiniano complejo entonces G es discreto y contable.*

Prueba.

Si p es un punto con grupo de isotropía infinito, G_p, y $g \in G$ entonces $G_{g(p)} = gG_pg^{-1}$ también es infinito. Por tanto L_0 es G-invariante.

Sean $p \in L_1$, $\sigma \in G$, y tomemos U, una vecindad de $\sigma(p)$. Existe un punto $p' \in \sigma^{-1}(U)$ tal que p' es un punto de acumulación de $\{g(z)\}_{g\in G}$ para algún elemento $z \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0$, entonces $\sigma(p') \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0$ es un punto de acumulación de $\{\sigma g(z)\}_{g\in G} = \{g(z)\}_{g\in G}$, y además $\sigma(p') \in U$. Así que $\sigma(p) \in L_1$, y por tanto, L_1 es G-invariante.

Un razonamiento similar al anterior demuestra que L_2 también es G-invariante. El conjunto Λ es G-invariante porque $\Lambda = L_0 \cup L_1 \cup L_2$. El conjunto Ω es G-invariante puesto que $\Omega = P^2_{\mathbb{C}} - \Lambda$.

Sean C y D subconjuntos compactos de Ω. El conjunto

$$S = \{g \in G : g(C) \cap D \neq \varnothing\}$$

debe ser un conjunto finito, porque de lo contrario D contendría un punto de L_0 o uno de L_2 lo cual no puede suceder porque $\Omega \cap L_0 = \varnothing = \Omega \cap L_2$. Por tanto la acción de G en Ω es propiamente discontinua.

Ahora supongamos que G es kleiniano complejo. Sea C una vecindad compacta de un punto $p \in \Omega$, entonces $T \subset T'$, donde

$$T = \{g \in G : g(p) \in \mathring{C}\},$$

y
$$T' = \{g \in G : \{g(p)\} \cap C \neq \varnothing\}.$$

Dado que G actúa propia y discontinuamente en Ω, se tiene que T' es finito. Así que T es finito y por definición abierto en G. La topología de G es Hausdorff porque $P^2_{\mathbb{C}}$ es Hausdorff. Concluimos que G es discreto porque $T \neq \varnothing$.

Finalmente, dado que $P^2_{\mathbb{C}}$ tiene una base contable para su topología entonces también Ω la tiene. Sea $\{U_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ una base contable de vecindades relativamente compactas en Ω y sea

$$G_n = \{g \in G : g(\overline{U_1}) \cap \overline{U_n} \neq \varnothing\}.$$

Cada G_n es finito y la unión de G_n es G. Por tanto, G es contable.

$\square$

Observemos que el conjunto $\Omega(G)$ no es necesariamente el subconjunto abierto maximal de $P^2_{\mathbb{C}}$ sobre el cual la acción de G es propiamente discontinua. En el ejemplo con el cual motivamos la definición de conjunto límite, la acción de G es discontinua en $P^2_{\mathbb{C}} - (\overleftrightarrow{Z_1 Z_2} \cup \{Z_3\})$ y también lo es en $P^2_{\mathbb{C}} - (\overleftrightarrow{Z_2 Z_3} \cup \{Z_1\})$.

Los conjuntos L_0, L_1 y L_2 que conforman a Λ pueden ser bastante diferentes entre ellos, como mostraremos posteriormente. Por ejemplo, cuando G es el subgrupo cíclico de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ generado por un elemento parabólico unipotente $g \in PU(2, 1)$ cuya forma canónica de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que
$$L_0(G) \supsetneq L_1(G) = L_2(G)$$

(la demostración está en 2.14). Si G es generado por un elemento elipto-parabólico racional (ver 2.17) entonces

$$L_0(G) \subsetneq L_1(G), \quad L_2(G) \subsetneq L_1(G), \quad L_2(G) \subsetneq L_0(G)$$

(la demostración también está en 2.14).

En las siguientes secciones generalizaremos los conceptos de transformaciones elípticas, parabólicas y loxodrómicas al caso de PSL$(3, C)$ en general y daremos un teorema de clasificación según traza en el espíritu del teorema 1.9. También analizaremos la estructura local de Ω/G cuando G es un grupo kleiniano complejo de PSL$(3,\mathbb{C})$.

2.2. Transformaciones Elípticas

Definición. 2.4. *Una* 3-esfera en $P^2_{\mathbb{C}}$ *es cualquier trasladado por un elemento de* $PSL(3,\mathbb{C})$ *del conjunto difeomorfo a una 3-esfera dado por*

$$T = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = 0\}.$$

Observemos que la familia de 3-esferas

$$T(r) = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} \,:\, |z_1|^2 + |z_2|^2 = r|z_3|^2\}, r > 0,$$

constituyen una foliación de $P^2_{\mathbb{C}} - (\overleftrightarrow{Z_1 Z_2} \cup \{Z_3\})$, donde

$$\overleftrightarrow{Z_1 Z_2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} | z_3 = 0\} \text{ y } Z_3 = [0 : 0 : 1].$$

Si $h \in$ PSL$(3,\mathbb{C})$, entonces la familia de 3-esferas dada por $h(T(r))$, $r > 0$ también constituye una foliación de $P^2_{\mathbb{C}} - (h(\overleftrightarrow{Z_1 Z_2}) \cup \{h(Z_3)\})$.

Definición. 2.5. *Diremos que una transformación $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ es **elíptica** si preserva cada una de las hojas de alguna foliación por 3-esferas de las antes mencionadas, en otras palabras, $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ es elíptica si y solo si, existe $\hat{h} \in PSL(3,\mathbb{C})$ tal que $\hat{h}^{-1}\hat{g}\hat{h}(T(r)) = T(r)$ para cada $r > 0$.*

Ejemplo.

Cualquier transformación de PSL$(3,\mathbb{C})$ inducida por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_i| = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$ es una transformación elíptica.

En particular, cualquier conjugado de un elemento elíptico de PU(2,1), es un elemento elíptico de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$. El recíproco también se cumple y lo demostramos a continuación.

Proposición. 2.6. *Toda transformación elíptica en* $PSL(3,\mathbb{C})$ *es conjugada de una transformación elíptica de* $PU(2,1)$.

Prueba.
Supongamos que $\hat{g} \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ es elíptica, entonces existe $\hat{h} \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ tal que

$$\hat{h}^{-1}\hat{g}\hat{h}(T(r)) = T(r), \quad \forall r > 0.$$

Por tanto, $\hat{f} = \hat{h}^{-1}\hat{g}\hat{h}$ es una transformación de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ que preserva a $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y tiene un punto fijo, $Z_3 \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces $\hat{f} \in PU(2,1)$ es elíptico.

□

El siguiente corolario se sigue inmediatamente de la proposición anterior y del hecho que una matriz en $U(2)$ es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo uno.

Corolario. 2.7. *Una transformación* $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ *es elíptica si y solo si* $\hat{g}$ *tiene un levantamiento* $g \in SL(3,\mathbb{C})$ *tal que* g *es diagonalizable y tiene todos sus valores propios unitarios.*

Si $\hat{f}$ es una transformación elíptica, entonces existe $\hat{h} \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ tal que $\hat{g} = \hat{h}\tilde{g}\hat{h}^{-1}$ tiene un levantamiento g de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

entonces cada 3-esfera de cada una de las tres familias dadas por:

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(r) &= \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_2|^2 + |z_3|^2 = r|z_1|^2\}, \quad r > 0;\\
T^{(2)}(r) &= \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_3|^2 = r|z_2|^2\}, \quad r > 0;\\
T^{(3)}(r) &= \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r|z_3|^2\}, \quad r > 0,
\end{aligned}$$

es invariante bajo $\hat{g}$. También la intersección de elementos de estas familias es $\hat{g}$ invariante. Así que ahora describiremos las intersecciones posibles de elementos de estas tres familias de 3-esferas. Por simetría es suficiente considerar las intersecciones de la 3-esfera $T^{(3)}(1)$ con cada una de las esferas de cada familia $T^{(1)}(r_1)$, $r_1 > 0$; $T^{(2)}(r_2)$, $r_2 > 0$.

Identificaremos la esfera $T^{(3)}$ con $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

No es difícil deducir que las intersecciones con la familia $T^{(1)}(r_1)$ son:

1. $\varnothing$, si $0 < r_1 < 1$,
2. el círculo $z_2 = 0$, si $r_1 = 1$,
3. el toro $|z_1| = \sqrt{\frac{2}{1+r_1}}$ si $r_1 > 1$,

y las intersecciones con la familia $T^{(2)}(r_2)$ son:

1. $\varnothing$, si $0 < r_2 < 1$,
2. el círculo $z_1 = 0$, si $r_2 = 1$,
3. el toro $|z_2| = \sqrt{\frac{2}{1+r_2}}$, si $r_2 > 1$.

Observemos que cada toro de la familia $|z_1| = \sqrt{\frac{2}{1+r_1}}$, $r_1 > 1$ se puede ver de la forma $|z_2| = \sqrt{\frac{2}{1+r_2}}$ para algún $r_2 > 1$. También observemos que esta familia de toros junto con los círculos $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ forman una foliación de S^3 con los dos círculos como hojas singulares.

Por último, las intersecciones posibles para tres 3-esferas, una de cada familia son: $\varnothing$ o un toro de los ya mencionados. Por tanto, tenemos la siguiente proposición:

Proposición. 2.8. *Cada transformación elíptica, $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$, posee tres familias de 3-esferas invariantes y cada una de estas 3-esferas tiene una foliación, invariante bajo $\hat{g}$, por toros y dos hojas singulares cada una de las cuales es un círculo.*

Ahora describimos el conjunto límite de una transformación elíptica de orden infinito, para este fin necesitaremos el siguiente lema.

Lema. 2.9. *Si $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, y se tiene una acción en*

$$S^3(r) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r\}, \quad r > 0$$

dada por

$$\psi : (z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi\alpha i} z_1, e^{2\pi\beta i} z_2),$$

donde α es un número real, entonces todo punto de $S^3(r)$ es punto de acumulación de alguna órbita, o sea, $L_1(\psi) = S^3(r)$.

Prueba.
Demostraremos el caso cuando $r = 1$. El caso general es análogo.
Consideremos la foliación de S^3 por los toros

$$\{(z_1, z_2) : |z_1| = c\}, \; 0 < c < 1,$$

y los dos círculos

$$z_1 = 0, \text{ y } z_2 = 0,$$

como hojas singulares. Observemos que cada una de las hojas de esta foliación es invariante bajo la acción.

Restringimos nuestra atención a un toro, T, de esta foliación.

Caso 1. $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \in \mathbb{Q}$.

En este caso las curvas $t \mapsto (e^{2\pi t\alpha i} z_1, e^{2\pi t\beta i} z_2), t \in [0, 1]$ son cerradas simples para cualquier $(z_1, z_2) \in T$. Además la órbita de un punto cualquiera de esta curva es densa en ésta, porque $\beta \notin \mathbb{Q}$. Por tanto, $L_1(\psi) = S^3$

Caso 2. $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma \notin \mathbb{Q}$.

En este caso las curvas $t \mapsto (e^{2\pi t\alpha i} z_1, e^{2\pi t\beta i} z_2), t \in [0, 1]$ son simples, no son cerradas y su imagen es densa en T, Al igual que en el caso anterior la órbita de un punto cualquiera en esta curva es densa en ella, lo que implica que $L_1(\psi) = S^3$.

□

Proposición. 2.10. *Si $\hat{g}$ es una transformación elíptica, entonces*

i) $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \Lambda(\hat{g}) = \varnothing$, *si el orden de $\hat{g}$ es finito.*

ii) $L_0(\hat{g}) = \{x : x$ *es punto fijo de* $\hat{g}\}$, $L_1(\hat{g}) = P^2_{\mathbb{C}}$, $L_2(\hat{g}) = \varnothing$, *si el orden de $\hat{g}$ es infinito.*

Prueba.

i) Se sigue claramente del hecho que $\hat{g}$ tiene orden finito.

ii) Es directo verificar que $L_0 = \{x : x \text{ es punto fijo de } \hat{g}\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\hat{g}$ tiene una levantamiento a $PGL(3,\mathbb{C})$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y en esta forma, se tiene que $\hat{g}$ actúa en la familia de esferas

$$T(r) = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = r|z_3|^2\},$$

dejando invariante cada uno de los miembros de ésta. Además toda esta familia está contenida en el sistema de coordenadas inhomogéneas $U_3 = \{[z_1 : z_2 : 1] \in P^2_{\mathbb{C}}\}$, y en tal sistema de coordenadas se puede considerar como la familia de 3-esferas en $\mathbb{C}^2$ con centro en el origen y radio positivo. El lema anterior implica que $L_1(\hat{g}) = P^2_{\mathbb{C}}$. Por definición, se sigue que $L_2(\hat{g}) = \varnothing$.

$\square$

2.3. Transformaciones Parabólicas

Definición. 2.11. *La transformación $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ se llama* parabólica *si existe una familia de 3-esferas invariantes bajo $\hat{g}$, T_r, $r \in \mathbb{R}$, y un punto fijo de $\hat{g}$, el cual denotamos mediante Z_f, que satisfacen las siguientes propiedades:*

i) Para cada par de elementos diferentes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$,

$$T_{r_1} \cap T_{r_2} = \{Z_f\}.$$

ii) $\Lambda(\hat{g})$ es una línea compleja.

iii) Además,

$$P^2_{\mathbb{C}} - \bigcup_{r\in\mathbb{R}} (T_r - \{Z_f\}) = \Lambda(\hat{g}).$$

Proposición. 2.12. *Si la transformación $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ es parabólica, entonces $\hat{g}$ es conjugada, en $PSL(3, \mathbb{C})$, de una transformación parabólica de $PU(2, 1)$.*

Prueba. Sea $\hat{g} \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ una transformación parabólica. El inciso i) de la definición 2.11 implica que existe una 3-esfera invariante bajo $\hat{g}$, denotada T, y un punto fijo de $\hat{g}$, denotado Z tal que $Z \in T$. El inciso ii) de la definición 2.11 implica que $\hat{g}$ no puede ser conjugada, en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, de un elemento elíptico de $PU(2, 1)$. Finalmente, el inciso iii) de la definición 2.11 implica que Z es el único punto fijo de $\hat{g}$ en T. Por tanto $\hat{g}$ es conjugada, en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, de una transformación parabólica de $PU(2, 1)$.

□

El recíproco de la proposición 2.12 es verdadero, pero necesitaremos algunas herramientas para demostrarlo.

Notación. Si $X, Y \in P^2_{\mathbb{C}}$, denotamos mediante $\overleftrightarrow{XY}$ la línea determinada por dichos puntos.

Recordemos que para $X, Y \in P^2_{\mathbb{C}}$, se tiene que $d(X, Y)$, la distancia entre X e Y inducida por la métrica riemanniana de Fubini-Study, satisface la ecuación

$$\cos^2(d(X, Y)) = \frac{\langle\langle x, y\rangle\rangle\langle\langle y, x\rangle\rangle}{\langle\langle x, x\rangle\rangle\langle\langle y, y\rangle\rangle},$$

donde $x, y \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ son representantes de X e Y, respectivamente, y $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle$ es el producto hermitiano usual de $\mathbb{C}^3$.

Lema. 2.13. *Sea G un subgrupo de $PSL(3, \mathbb{C})$. Si $C \subset P^2_{\mathbb{C}}$ es un conjunto cerrado tal que para cada subconjunto compacto $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - C$, los puntos de acumulación de la familia de conjuntos compactos $\{g(K)\}_{g\in G}$ están contenidos en $L_0(G) \cup L_1(G)$, entonces $L_2(G) \subset C$.*

Prueba. Procedamos por contradicción y supongamos que existe un punto $X \in P^2_{\mathbb{C}} - C$, una sucesión de puntos $(k_n) \subset P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$, y una sucesión (g_n) de diferentes elementos de G, tales que $k_n \to k \in P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$ y $g_n(k_n) \to X \in P^2_{\mathbb{C}} - C$. Podemos suponer que

$g_n(k_n) \in P^2_{\mathbb{C}} - C$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (eliminando un número finito de términos de la sucesión si es necesario). Entonces la hipótesis aplicada al conjunto compacto $\{g_n(k_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{X\}$ implica que $k \in L_0(G) \cup L_1(G)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $L_2(G) \subset C$.

$\square$

Proposición. 2.14. *Sea $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$.*

i) Si $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $SL(3,\mathbb{C})$ que es conjugado de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces $L_0(\hat{g}) = L_f$, $L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = \{Z_1\}$, donde L_f es la línea de puntos fijos de $\hat{g}$, y Z_1 es un punto en L_f.

ii) Si $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $SL(3,\mathbb{C})$ que es conjugado de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $\hat{g}$ tiene un único punto fijo, digamos Z_1, $L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = \{Z_1\}$, y $L_2(\hat{g})$ es una línea invariante de $\hat{g}$ sobre la cual $\hat{g}$ actúa como una transformación parabólica clásica de $PSL(2,\mathbb{C})$.

iii) Si $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $GL(3,\mathbb{C})$ que es conjugado de una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $\lambda = e^{2\pi i x} \neq 1$, entonces $\hat{g}$ tiene dos puntos fijos Z_1, Z_3 y

$$L_0(\hat{g}) = \begin{cases} \overleftrightarrow{Z_1Z_3} & \text{si } x \text{ es racional,} \\ \{Z_1, Z_3\} & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

$$L_1(\hat{g}) = \begin{cases} \{Z_1\} & \text{si } x \text{ es racional,} \\ \overleftrightarrow{Z_1Z_3} & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases}$$

$$L_2(\hat{g}) = \{Z_1\}.$$

Prueba.

i) Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y en este caso

$$L_0(\hat{g}) = L_f = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} \,|\, z_2 = 0\}.$$

Sean $Z_1 = [1 : 0 : 0] \in L_f$, y $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(\hat{g})$. Las ecuaciones

$$\cos^2(d(\hat{g}^n(Z), Z_1)) = \frac{|z_1 + nz_2|^2}{|z_1 + nz_2|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2},$$

$$\cos^2(d(\hat{g}^{-n}(Z), Z_1)) = \frac{|z_1 - nz_2|^2}{|z_1 - nz_2|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2},$$

implican que $L_1(\hat{g}) = \{Z_1\}$.

Ahora consideremos, para $\epsilon > 0$, el subconjunto de $P^2_{\mathbb{C}}$ dado por $K^{(i)}_\epsilon := \pi(\tilde{K}^i_\epsilon)$, donde $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ es la proyección canónica y

$$\tilde{K}^{(i)}_\epsilon = \{(z_1, z_2, z_3) \in S^5 : |z_i| \geq \epsilon\}.$$

Demostraremos que la sucesión de funciones $\hat{h}_n = \hat{g}^n\big|_{K^{(2)}_\epsilon}$ convergen uniformemente a la función constante con valor Z_1.

Sea $k = [z_1 : z_2 : z_3] \in K^{(2)}_\epsilon$, entonces

$$\cos^2(d(\hat{g}^n(k), Z_1)) = \frac{|z_1 + nz_2|^2}{|z_1 + nz_2|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2} \leq 1.$$

Además, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n\epsilon - 1 > 0$ para toda $n \geq N$. Luego

$$\frac{(n\epsilon - 1)^2}{(n\epsilon - 1)^2 + 1 + 1} \leq \frac{|z_1 + nz_2|^2}{|z_1 + nz_2|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2},$$

para toda $n \geq N$, lo que comprueba nuestra afirmación acerca de la convergencia uniforme.

Ahora bien, si K es un subconjunto compacto de $P^2_{\mathbb{C}} - L_f$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $K \subset K^{(2)}_{\epsilon}$. Luego, para cada vecindad U de Z_1, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{g}^n(K) \subset U$ para toda $n \geq N$, lo que demuestra que Z_1 es el único punto de acumulación de la familia $\{\hat{g}^n(K)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Una prueba similar demuestra que el único punto de acumulación de la familia $\{\hat{g}^{-n}(K)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es Z_1. Concluimos que $L_2(\hat{g}) = \{Z_1\}$.

ii) Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, $Z_1 = [1:0:0]$ y claramente $L_0 = \{Z_1\}$. Observemos que si $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}}$, entonces

$$\cos^2(d(\hat{g}^n(Z), Z_1)) = \frac{|z_1 + nz_2 + \frac{n(n-1)}{2} z_3|^2}{|z_1 + nz_2 + \frac{n(n-1)}{2} z_3|^2 + |z_2 + nz_3|^2 + |z_3|^2},$$

y

$$\cos^2(d(\hat{g}^{-n}(Z), Z_1)) = \frac{|z_1 - nz_2 + \frac{n(n+1)}{2} z_3|^2}{|z_1 - nz_2 + \frac{n(n+1)}{2} z_3|^2 + |z_2 - nz_3|^2 + |z_3|^2},$$

lo que implica que $\hat{g}^n(Z)$ y $\hat{g}^{-n}(Z)$ convergen a Z_1 cuando $n \to \infty$. Por tanto, $L_1(\hat{g}) = \{Z_1\}$.

Lema. 2.15. *Si $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$, donde $Z_2 = [0:1:0]$, entonces el único punto de acumulación de la familia de conjuntos $\{\hat{g}^n(K)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es Z_1.*

Prueba.

Es suficiente demostrar que las sucesiones de funciones $\hat{g}^n$ y $\hat{g}^{-n}$ convergen uniformemente en subconjuntos compactos de $P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ a la función constante con valor Z_1.

Sea $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $K \subset K^{(3)}_\epsilon$, donde $K^{(3)}_\epsilon$ es la imagen bajo la proyección canónica $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ del conjunto $\{(z_1, z_2, z_3) \in S^5 : |z_3| \geq \epsilon\}$. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\frac{n(n-1)}{2}\epsilon - (n+1) > 0,$$

así que si $n \geq N$, tenemos que

$$\frac{(\frac{n(n-1)}{2}\epsilon - (n+1))^2}{(\frac{n(n-1)}{2}\epsilon - (n+1))^2 + (1+n)^2 + 1} \leq \cos^2(d(\hat{g}^n(Z), Z_1)) \leq 1,$$

lo que demuestra que $\hat{g}^n$ converge uniformemente en K a la función constante $Z \mapsto Z_1$. Un argumento similar se aplica cuando los exponentes son negativos.

$\square$

Ahora bien, los lemas 2.15 y 2.13 implican que $L_2(\hat{g}) \subseteq \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$.

Para demostrar la inclusión opuesta, observemos que la sucesión $\{[\frac{z_1}{2} : -\frac{n-1}{2n} : \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$ converge al punto $[z_1 : -1 : 0] \neq Z_1$ y además $g^n([\frac{z_1}{2} : -\frac{n-1}{2n} : \frac{1}{n}]) = [\frac{z_1}{2} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} : \frac{1}{n}]$, converge al punto $[z_1 : 1 : 0]$. Concluimos que $L_2(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$.

iii) Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $GL(3, \mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

tal que $1 \neq \lambda = e^{2\pi i x}$. En este caso, $Z_1 = [1 : 0 : 0]$, $Z_3 = [0 : 0 : 1]$, y claramente

$$L_0(\hat{g}) = \begin{cases} \overleftrightarrow{Z_1Z_3} & \text{si } x \text{ es racional}, \\ \{Z_1, Z_3\} & \text{si } x \text{ es irracional}. \end{cases}$$

Sea $Z = [z_1 : z_2 : z_3]$, tenemos que $\hat{g}^n(Z) = [z_1 + nz_2 : z_2 : \lambda^n z_3]$ y $\hat{g}^{-n}(Z) = [z_1 - nz_2 : z_2 : \lambda^{-n} z_3]$, entonces $\hat{g}^n(Z)$ y $\hat{g}^{-n}(Z)$ convergen a Z_1 si $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$.

a) Supongamos que x es racional, entonces ya sabemos que $L_0(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$. Por tanto, $L_1(\hat{g}) = \{Z_1\}$.

b) Si x es irracional, entonces $\hat{g}$ actúa en $\overleftrightarrow{Z_1Z_3}$ como una transformación elíptica de $P^1_{\mathbb{C}}$ para la cual todo punto está en la cerradura del conjunto de puntos de acumulación de las órbitas, así que $L_1(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$.

Ligeras modificaciones en el argumento que se usó en i) demuestran que si $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_3} = P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g}))$ es un compacto, entonces el único punto de acumulación de la familia de conjuntos $\{\hat{g}^n(K)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es $\{Z_1\}$ (independientemente de si $\hat{g}$ es racional o no). Por lo tanto, $L_2(\hat{g}) = \{Z_1\}$.

$\square$

Proposición. 2.16. *Si $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ es una transformación conjugada, en $PSL(3,\mathbb{C})$, de un elemento parabólico de $PU(2,1)$, entonces $\hat{g}$ es parabólica en $PSL(3,\mathbb{C})$.*

Prueba. Es suficiente especificar las familias T_r, $r \in \mathbb{R}$, cuando $\hat{g}$ está inducida por matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta & 1 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^{-2} \end{pmatrix}, |\zeta| = 1.$$

En el primer caso,

$$T_r = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid r|z_2|^2 + |z_3|^2 + i(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 0\}, \quad r \in \mathbb{R};$$

en el segundo caso,

$$T_r = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid |z_2|^2 + r|z_3|^2 - (\overline{z_1}z_3 + z_1\overline{z_3}) - \frac{1}{2}(\overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3}) = 0\}, \; r \in \mathbb{R};$$

y por último,

$$T_r = \{[z_1 : z_2 : z_3] \mid r|z_2|^2 + |z_3|^2 + i(\overline{\zeta}\overline{z_1}z_2 - \zeta z_1\overline{z_2}) = 0\}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

La proposición 2.14 y un cálculo directo prueban que cada familia T_r satisface las condiciones de la definición 2.11.

□

Definición. 2.17. *La transformación parabólica $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ se llama:*

i) Unipotente*, si se tiene un levantamiento $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que cada valor propio de g es igual a* 1*.*

ii) Elipto-parabólico*, si no es unipotente. Decimos que $\hat{g}$ es* racional *(respectivamente* irracional*) si $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $PSL(3,\mathbb{C})$ tal que el cociente de los dos valores propios diferentes es igual a $e^{2\pi ix}$ con x racional (respectivamente irracional).*

Observemos que el elemento $\hat{g} \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ es parabólico si y solo si $\hat{g}$ tiene un levantamiento $g \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ que no es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo igual a 1.

2.4. Transformaciones Loxodrómicas

Definición. 2.18. *Un elemento $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ se llama* ***loxodrómico****, si existe una 3-esfera , $\hat{W}$, en $P^2_{\mathbb{C}}$, tal que $\hat{g}(\hat{W} \cup \mathbb{X}_i) \subset \mathbb{X}_i$, para algún $i = 1,2$; donde $\mathbb{X}_1$ y $\mathbb{X}_2$ son las componentes de $P^2_{\mathbb{C}} - \hat{W}$.*

Proposición. 2.19. *Sea $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ un elemento loxodrómico, entonces:*

i) El orden de $\hat{g}$ es infinito.

ii) $L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})$ es no vacío y disconexo.

Prueba.

Sean $\hat{W}$ una 3-esfera y $\mathbb{X}_i$, $i = 1,2$ las componentes de $P^2_{\mathbb{C}} - \hat{W}$. Supongamos que $\hat{g}(\hat{W} \cup \mathbb{X}_1) \subset \mathbb{X}_1$.

i) Observemos que $\hat{g}^n(\hat{W}) \subset \mathbb{X}_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así que si $w \in \hat{W}$, entonces $\hat{g}^n(w) \neq w$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

ii) Primero, observemos que $\hat{W} \cap (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})) = \varnothing$, puesto que existe una vecindad de $\hat{W}$ sobre la cual $\langle \hat{g} \rangle$ actúa propia y discontinuamente.

Segundo, $\mathbb{X}_i \cap (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})) \neq \varnothing$, para $i = 1,2$ (porque $\hat{g}(\hat{W} \cup \mathbb{X}_1) \subset \mathbb{X}_1$, $\hat{W} \cap (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})) = \varnothing$ y $\hat{W} \cup \mathbb{X}_1$ es compacto).

Por tanto, $\mathbb{X}_1 \cap (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g}))$ y $\mathbb{X}_2 \cap (L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g}))$ forman una separación de $(L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g}))$.

$\square$

Observemos que los conjuntos de transformaciones parabólicas, elípticas y loxodrómicas son ajenos entre sí, porque $L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})$ es diferente para cada tipo de transformación.

Ejemplo. 2.20. *Cualquier transformación $\hat{g}$ de $PSL(3,\mathbb{C})$ inducida por una matriz de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_i| < |\lambda_3|$ para $i < 3$, es una transformación loxodrómica. En particular, las transformaciones loxodrómicas de $PU(2,1)$ son loxodrómicas en $PSL(3,\mathbb{C})$.

Prueba.

Sea $\hat{W} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = 0\} = \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{X}_1 = \{[v] \in P^{p+q-1}_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 0\} = \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ una de sus componentes.

Sea $z = [z_1 : z_2 : z_3] \in \hat{W} \cap \mathbb{X}_1$, y $|\lambda| = \text{máx}\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$ entonces

$$\begin{aligned} |\lambda_1 z_1|^2 + |\lambda_2 z_2|^2 &\leq |\lambda|^2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \\ &\leq |\lambda|^2 |z_3|^2 \\ &< |\lambda_3 z_3|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\hat{g}(z) = [\lambda_1 z_1 : \lambda_2 z_2 : \lambda_3 z_3] \in \mathbb{X}_1$.

$\square$

Ejemplo. 2.21. *Una transformación $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$, inducida por una matriz de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, es una transformación loxodrómica.

Prueba.

Podemos suponer, conjugando e invirtiendo si es necesario, que $\hat{g}$ está inducida por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda| > 1$ y $0 < c < 1 - |\lambda|$.

Ahora bien, si $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \cup \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tenemos que

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 \leq 0,$$

o en coordenadas inhomogéneas $Z_i = \frac{z_i}{z_3}$, $i = 1, 2$,

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 \leq 1.$$

Tenemos que $\hat{g}(Z) = [z_1 + cz_2 : z_2 : \lambda z_3]$, y

$$|z_1 + cz_2|^2 + |z_2|^2 - |\lambda z_3|^2 = |z_3|^2(|Z_1 + cZ_2|^2 + |Z_2|^2 - |\lambda|^2),$$

así que $\hat{g}(Z) \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ si y solo si

$$|Z_1 + cZ_2|^2 + |Z_2|^2 - |\lambda|^2 < 0.$$

Por último, observemos que

$$\begin{array}{rcl} |Z_1 + cZ_2|^2 + |Z_2|^2 - |\lambda|^2 & = & c^2|Z_2|^2 + 2c\Re(Z_1\overline{Z_2}) + |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - |\lambda|^2 \\ & \leq & c^2 + 2c + 1 - |\lambda|^2 \\ & < & (|\lambda| - 1)^2 + 2(|\lambda| - 1) + 1 - |\lambda|^2 \\ & = & 0. \end{array}$$

Por tanto, g es loxodrómica.

□

Una transformación de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ que es conjugada de una transformación como la del ejemplo 2.21 se llama **loxo-parabólica**.

Proposición. 2.22. *Si $\hat{g}$ es una transformación loxo-parabólica, con puntos fijos Z_1, Z_3, entonces $L_0(\hat{g}) = \{Z_1, Z_3\} = L_1(\hat{g})$ y $L_2(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$, donde $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ es una línea invariante de $\hat{g}$, sobre la cual, $\hat{g}$ actúa como una transformación parabólica.*

Prueba.

Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $GL(3,\mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda| > 1$. En este caso $Z_1 = [1:0:0]$, $Z_2 = [0:1:0]$, $Z_3 = [0:0:1]$ y claramente $L_0(\hat{g}) = \{Z_1, Z_3\}$. Observemos que si $Z \notin \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ entonces $\hat{g}^n(Z) \to Z_3$; y si $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$, entonces $\hat{g}^{-n}(Z) \to Z_1$. Al restringirse a $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ las órbitas positivas y las negativas convergen a Z_1. Por tanto, $L_1(\hat{g}) = \{Z_1, Z_3\}$. No es difícil de comprobar que las sucesiones de funciones $\hat{g}^n$ y $\hat{g}^{-n}$ convergen uniformemente a las funciones constante con valor Z_3 y Z_1 respectivamente, en compactos de $P^2_{\mathbb{C}} - (\overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_1Z_3})$. Entonces el lema 2.13 nos dice que $L_2(\hat{g}) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$.

Observemos que la sucesión $\{[n : \lambda^n : nz_3]\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Z_2 \notin L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})$, y $\hat{g}^n([n : \lambda^n : nz_3]) = [1 + \frac{1}{\lambda^n} : \frac{1}{n} : z_3]$ converge a $[1 : 0 : z_3]$, lo que implica que $\overleftrightarrow{Z_1Z_3} \subset L_2(\hat{g})$.

También se tiene que $\{[1 + \frac{1}{\lambda^n} + \frac{1}{n} : \frac{z_2}{n} : 1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $[1 : 0 : 1] \notin L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g})$ y $\hat{g}^{-n}([1 + \frac{1}{\lambda^n} + \frac{1}{n} : \frac{z_2}{n} : 1]) = [\lambda^n + n : \lambda^n z_2 : n]$ converge a $[1 : z_2 : 0]$, lo que implica que $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} \subset L_2(\hat{g})$

□

Proposición. 2.23. *Un elemento $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ es loxodrómico si y solo si tiene un levantamiento $g \in SL(3,\mathbb{C})$ tal que no todos los valores propios tienen el mismo módulo.*

Prueba.

Supongamos que $\hat{g}$ tiene un levantamiento $g \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ tal que no todos los valores propios tienen el mismo módulo, entonces se tienen dos posibilidades:

1. Si g es diagonalizable entonces la proposición se sigue del ejemplo 2.20.
2. Si g no es diagonalizable entonces la afirmación se sigue del ejemplo 2.21.

Ahora supongamos que $\hat{g}$ tiene un levantamiento $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ tal que todos sus valores propios tienen el mismo módulo, entonces existen dos posibilidades:

1. g es diagonalizable y entonces se tiene una transformación elíptica, y entonces $L_0(\hat{g}) \cup L_1(\hat{g}) = \varnothing$, así que $\hat{g}$ no es loxodrómica.

2. g no es diagonalizable y en este caso $\hat{g}$ es parabólica y por tanto no puede ser loxodrómica.

$\square$

Definición. 2.24. *Una **homotecia compleja** es un elemento de $PSL(3, \mathbb{C})$ que tiene un levantamiento que es conjugado de una matriz de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

*donde $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Un **tornillo racional** (resp. **irracional**) es una función de $PSL(3, \mathbb{C})$ que no es una homotecia compleja y tiene un levantamiento que es conjugado de una matriz de la forma*

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| = |\lambda_2| \neq |\lambda_3|$, $\lambda_1/\lambda_2 = e^{2\pi i x}$ con $x \in \mathbb{Q}$ (resp. $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

Observemos que una homotecia compleja y un tornillo son transformaciones loxodrómicas.

Proposición. 2.25.

i) Si $\hat{g}$ es una homotecia compleja cuyo conjunto de puntos fijos consiste de una línea R y un punto $Z_f \notin R$, entonces

$$L_0(\hat{g}) = L_1(\hat{g}) = L_2(\hat{g}) = R \cup \{Z_f\}.$$

ii) Si $\hat{g}$ es un tornillo con puntos fijos Z_1, Z_2, Z_3, entonces

$$L_0(\hat{g}) = \begin{cases} \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\} & \textit{si } \hat{g} \textit{ es racional,} \\ \{Z_1, Z_2, Z_3\} & \textit{si } \hat{g} \textit{ es irracional,} \end{cases}$$

$L_1(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\} = L_2(\hat{g})$, donde $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ es una línea sobre la cual $\hat{g}$ actúa como una transformación elíptica de $PSL(2,\mathbb{C})$

Prueba.

i) Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento $g \in \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

y en este caso, $R_f = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} \,|\, z_3 = 0\}$, $Z_f = [0:0:1]$. Entonces $L_0(\hat{g}) = R_f \cup \{Z_f\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Observemos que si $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \notin L_0(\hat{g})$, entonces $\hat{g}^n(Z) \to Z_f$ cuando $n \to \infty$. También tenemos que $\hat{g}^{-n}(Z) \to [z_1 : z_2 : 0] \in R_f$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $L_1(\hat{g}) = L_0(\hat{g}) = R_f \cup \{Z_f\}$.

Ahora demostraremos que $L_2(\hat{g}) = R_f \cup \{Z_f\}$, para ello, tomemos K un subconjunto compacto de $P^2_{\mathbb{C}} - (R_f \cup \{Z_f\})$. Observemos que existe una $\epsilon > 0$ tal que $K \subset K_\epsilon^{(3)}$, donde $K_\epsilon^{(3)}$ es la imagen bajo la proyección canónica $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ del conjunto $\{(z_1, z_2, z_3) \in S^5 \,|\, |z_3| \geq \epsilon\}$. Pero en $K_\epsilon^{(3)}$ se tiene que la sucesión de funciones $\{\hat{g}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función constante con valor Z_f, de hecho, la desigualdad

$$\frac{|\lambda_2|^{2n}\epsilon^2}{|\lambda_1|^2 + |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^{2n}\epsilon^2} \leq \cos^2(d(\hat{g}^n(k), Z_f)) \leq 1, \quad \forall k \in K_\epsilon^{(3)}$$

comprueba esta afirmación. Así que Z_f es el único punto de acumulación de la familia de conjuntos compactos $\{\hat{g}^n(K)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $p : P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_f\} \to R_f$, tal que $p([z_1 : z_2 : z_3]) = [z_1 : z_2 : 0]$. Dado que $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - (R_f \cup \{Z_f\})$, existe una $\delta > 0$ tal que K está totalmente contenido en el conjunto compacto C_δ que es la imagen bajo $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ del conjunto $\{(z_1, z_2, z_3) \in S^5 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 \geq \delta\}$. Ahora bien, si $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in C_\delta$, la desigualdad

$$\frac{|\lambda_1|^{-2n}\delta}{|\lambda_1|^{-2n}\delta + |\lambda_2|^{-2n}} \leq \cos^2(d(g^{-n}(Z), p(Z))) \leq 1,$$

implica que la sucesión de funciones $\hat{g}^{-n}|_{C_\delta}$ converge uniformemente a la función $p|_{C_\delta}$, lo que implica, a su vez, que los puntos de acumulación de la familia de conjuntos $\{\hat{g}^{-n}(K)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se encuentran todos en R_f. Por tanto, $L_2(\hat{g}) \subset R_f \cup \{Z_f\}$.

Es fácil verificar que $R_f \cup \{Z_f\} \subset L_2(\hat{g})$. Concluimos que

$$R_f \cup \{Z_f\} = L_2(\hat{g}).$$

ii) Podemos suponer que $\hat{g}$ tiene un levantamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$. En este caso,

$$Z_1 = [1:0:0], Z_2 = [0:1:0], Z_3 = [0:0:1].$$

Claramente

$$L_0(\hat{g}) = \begin{cases} \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\} & \text{si } \hat{g} \text{ es racional,} \\ \{Z_1, Z_2, Z_3\} & \text{si } \hat{g} \text{ es irracional,} \end{cases}$$

Ahora bien, sea $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_1, Z_2, Z_3\}$

Lema. 2.26. *a) La sucesión* $\{d(\hat{g}^n(Z), \overleftrightarrow{Z_1Z_2})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* 0 *en compactos de* $P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$.

b) La sucesión de funciones $\{\hat{g}^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente, en subconjuntos compactos de* $P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ *a la función constante con valor* Z_3.

Prueba. Sean $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$ un compacto y $Z = [z_1 : z_2 : z_3] \in K$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $K \subset C_\delta$, donde $C_\delta = \pi(\{(z_1, z_2, z_3) \in S^5 : |z_1|^2 + |z_2|^2 \geq \delta\})$ y $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ es la proyección canónica. Observemos que

$$d(\hat{g}^n(Z), \overleftrightarrow{Z_1Z_2}) \leq d(\hat{g}^n(Z), [\lambda_1^n z_1 : \lambda_2^n z_2 : 0]),$$

lo que implica que

$$\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2+|(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^n z_3|^2} \le \cos^2(d(\hat{g}^n(Z),\overleftrightarrow{Z_1Z_2})) \le 1,$$

entonces

$$\frac{\delta}{\delta+|(\frac{\lambda_3}{\lambda_1})^n|^2} \le \cos^2(d(\hat{g}^n(Z),\overleftrightarrow{Z_1Z_2})) \le 1$$

Esta última desigualdad demuestra el inciso a).

Ahora, probaremos b): Sea $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ y sea $Z \in K$. Existe un $\epsilon > 0$ tal que $K \subset K^{(3)}_\epsilon$, donde $K^{(3)}_\epsilon$ es la imagen bajo la proyección canónica $\pi : S^5 \to P^2_{\mathbb{C}}$ del conjunto $\{(z_1,z_2,z_3) \in S^5 : |z_3| \ge \epsilon\}$. Ahora bien,

$$\cos^2(d(\hat{g}^n(Z),Z_3)) = \frac{|\lambda_3^{-n}z_3|^2}{|\lambda_1^{-n}z_1|^2+|\lambda_2^{-n}z_2|^2+|\lambda_3^{-n}z_3|^2},$$

entonces

$$\frac{|\lambda_3|^{-2n}\epsilon^2}{|\lambda_1|^{-2n}+|\lambda_2|^{-2n}+|\lambda_3|^{-2n}\epsilon^2} \le \cos^2(d(\hat{g}^n(Z),Z_3)) \le 1.$$

Esta última desigualdad demuestra la segunda afirmación.

$\square$

El lema 2.26 implica que $L_1(\hat{g}) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$ y que $Z_3 \in L_1(\hat{g})$.

Si $\hat{g}$ es un tornillo racional, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_1^k = \lambda_2^k$ y entonces la sucesión de trasladados de Z dada por $\{\hat{g}^{nk}(Z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $[z_1 : z_2 : 0]$, luego $\{Z_3\} \cup \overleftrightarrow{Z_1Z_2} = L_1(\hat{g})$.

Si $\hat{g}$ es un tornillo irracional, entonces $\hat{g}\Big|_{\overleftrightarrow{Z_1Z_2}}$ es una transformación elíptica tal que todo punto es punto de acumulación de alguna órbita, así que $L_1(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$.

Ahora que ya sabemos que $L_1(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$, el lema de arriba implica, que $L_2(\hat{g}) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$, y no es difícil demostrar que $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\} \subset L_2(\hat{g})$.

□

Definición. 2.27. *Una transformación $\hat{g}$ se llama **fuertemente loxodrómica** si existen dos 3-esferas en $P^2_{\mathbb{C}}$, $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$, tales que*

$$\hat{g}(T^{(1)} \cup B_1) \subset B_1,$$

$$\hat{g}^{-1}(T^{(2)} \cup B_2) \subset B_2, \ y$$

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

donde B_i, $i = 1, 2$ es la componente de $P^2_{\mathbb{C}} - T^{(i)}$ que es difeomorfa a una bola abierta en $\mathbb{C}^2$.

Proposición. 2.28. *Una transformación $\hat{g} \in PSL(3, \mathbb{C})$ es fuertemente loxodrómica si y solo si existe un levantamiento $g \in SL(3, \mathbb{C})$ tal que todos los valores propios de g tienen módulos diferentes.*

Prueba. Primero supongamos que g es un levantamiento de $\hat{g}$ que tiene valores propios de módulos diferentes, podemos suponer que g tiene la forma:

$$g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$, entonces si tomamos

$$T^{(1)} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2\},$$

$$T^{(2)} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2\},$$

se tiene que

$$\hat{g}(T^{(1)} \cup B_1) \subset B_1,$$

$$\hat{g}^{-1}(T^{(2)} \cup B_2) \subset B_2,$$

donde B_i es la componente de $P^2_{\mathbb{C}} - T^{(i)}$ que es difeomorfa a una bola abierta de $\mathbb{C}^2$.

Recíprocamente, supongamos que $\hat{g}$ es fuertemente loxodrómica, entonces $\hat{g}$ es loxodrómica, luego existe un levantamiento $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ tal que no todos sus valores propios tienen módulo uno.

Si g no es diagonalizable, entonces $\hat{g}$ es loxo-parabólico y dichas transformaciones tienen: dos puntos fijos, y dos rectas invariantes, en una de las cuales $\hat{g}$ actúa como una transformación parabólica (de $P^1_{\mathbb{C}}$). Sean $T^{(1)}$ y $T^{(2)}$, tales que

$$\hat{g}(T^{(1)} \cup B_1) \subset B_1, \qquad (1)$$

$$\hat{g}^{-1}(T^{(2)} \cup B_2) \subset B_2, \qquad (2)$$

donde B_i, $i = 1, 2$ es la componente de $P^2_{\mathbb{C}} - T^{(i)}$ que es difeomorfa a una bola abierta en $\mathbb{C}^2$, entonces los dos puntos fijos de $\hat{g}$ están uno en cada bola B_i, $i = 1, 2$ por el teorema de punto fijo de Brouwer, y por (1) y (2). Luego, la línea invariante en la que $\hat{g}$ actúa como una transformación parabólica intersecta, por ejemplo, a $T^{(1)} \cup B_1$ en un disco cerrado y dicho disco cerrado va a parar bajo $\hat{g}$ a su interior, lo cual solo sucede si $\hat{g}$ actúa como una transformación loxodrómica en dicha línea, una contradicción.

Si g es diagonalizable y dos de los valores propios tienen el mismo módulo. Entonces $\hat{g}$ tiene una línea invariante, L, en la cual $\hat{g}$ actúa como una transformación elíptica (de $P^1_{\mathbb{C}}$). Si $\hat{g}$ fuera fuertemente loxodrómica entonces, por un razonamiento análogo al del caso loxo-parabólico, existe un disco cerrado en L el cual va a parar a su interior bajo $\hat{g}$ ó bajo $\hat{g}^{-1}$ y por tanto $\hat{g}$ actúa como una transformación loxodrómica en L, lo cual es una contradicción.

Concluimos que g necesariamente debe tener sus tres valores propios de diferente módulo.

$\square$

Proposición. 2.29. *Si $\hat{g}$ es una transformación fuertemente loxodrómica y Z_1, Z_2, Z_3 son sus puntos fijos entonces $L_0(\hat{g}) = \{Z_1, Z_2, Z_3\} = L_1(\hat{g})$, donde Z_3 es un punto atractor en $P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$, y Z_1 es un punto repulsor en $P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_2 Z_3}$. Además, $L_2(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1 Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_2 Z_3}$.*

Prueba. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\hat{g}$ tiene un levantamiento h de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$. Así que

$$Z_1 = [1 : 0 : 0], \; Z_2 = [0 : 1 : 0], \; Z_3 = [0 : 0 : 1].$$

Ahora bien, $L_0(\hat{g}) = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ porque $\hat{g}$ tiene orden infinito y para cada $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\hat{g}^n$ tiene conjunto de puntos fijos igual a $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$.

No es difícil verificar lo siguiente:

- Si $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$, entonces $\hat{g}^n(Z) \to Z_3$ cuando $n \to \infty$,

- Si $Z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_2Z_3}$, entonces $\hat{g}^{-n}(Z) \to Z_1$ cuando $n \to \infty$.

- Cuando nos restringimos a la línea invariante $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ obtenemos una transformación loxodrómica de $P^1_{\mathbb{C}}$ tal que Z_2 es un atractor y Z_1 es un repulsor.

- Cuando nos restringimos a la línea invariante $\overleftrightarrow{Z_2Z_3}$, obtenemos una transformación loxodrómica de $P^1_{\mathbb{C}}$ tal que Z_2 es un repulsor y Z_3 es un atractor.

Concluimos que $L_1(\hat{g}) = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$.

Ahora queremos demostrar que $L_2(\hat{g}) = \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_2Z_3}$. Primero probaremos la inclusión $L_2(\hat{g}) \supset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_2Z_3}$. Consideremos el subconjunto compacto, K, de $P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ dado por

$$K = \{[z_1 : z_2 : z_3] \,|\, |z_2|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2\}.$$

Claramente $Z_3 \in L_2(\hat{g})$, ahora sea $[0 : z_2 : z_3] \in \overleftrightarrow{Z_2Z_3} - \{Z_3\}$, Consideremos la sucesión k_n de elementos de K definidos de la siguiente manera:

$$k_n = [(|\lambda_3^n z_2|^2 + |\lambda_2^n z_3|^2)^{1/2} : \lambda_3^n z_2 : \lambda_2^n z_3].$$

Observemos que

$$\hat{g}^n(k^n) = [\left|\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n}\right|^2 (|z_2|^2 + \left|\frac{\lambda_2^n}{\lambda_3^n}\right|^2 |z_3|^2) : z_2 : z_3] \to [0 : z_2 : z_3]$$

cuando $n \to \infty$. Lo que implica que $[0 : z_2 : z_3]$ es un punto de acumulación de la familia de conjuntos $\hat{g}^n(K)$, y esto implica que $[0 : z_2 : z_3] \in L_2(\hat{g})$. Concluimos que $\overleftrightarrow{Z_2Z_3} \subset L_2(\hat{g})$. Un argumento similar aplicado a $\hat{g}^{-1}$ implica que $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} \subset L_2(\hat{g})$. Por tanto $L_2(\hat{g}) \supset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \overleftrightarrow{Z_2Z_3}$.

Para demostrar la otra inclusión usaremos el siguiente lema:

Lema. 2.30. *Si K es un compacto contenido en $P^2_{\mathbb{C}}-(\overleftrightarrow{Z_1Z_2}\cup\overleftrightarrow{Z_2Z_3})$, entonces los únicos puntos de acumulación de la familia de compactos $\{\hat{g}^n(K)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ son Z_1 y Z_3.*

Prueba Consideremos, para $\epsilon>0$, el subconjunto $K^{(i)}_\epsilon$ de $P^2_{\mathbb{C}}$ dado por $\pi(\tilde{K}^i_\epsilon)$, donde $\pi: S^5\to P^2_{\mathbb{C}}$ es la proyección canónica y

$$\tilde{K}^{(i)}_\epsilon=\{(z_1,z_2,z_3)\in S^5:|z_i|\geq\epsilon\}.$$

Demostraremos que la sucesión de funciones $\hat{h}_n=\hat{g}^n\big|_{K^{(3)}}$ converge uniformemente a la función constante con valor Z_3. Sea $k=[z_1:z_2:z_3]\in K^{(3)}_\epsilon$, entonces

$$\cos^2(d(\hat{g}^n(k),Z_3))=\frac{|\lambda_3^n z_3|^2}{|\lambda_1^n z_1|^2+|\lambda_2^n z_2|^2+|\lambda_3^n z_3|^2},$$

luego, la desigualdad

$$\frac{|\lambda_3|^{2n}\epsilon^2}{|\lambda_1|^{2n}+|\lambda_2|^{2n}+|\lambda_3|^{2n}\epsilon^2}\leq\cos^2(d(\hat{g}^n(k),Z_3))\leq 1$$

comprueba nuestra afirmación.

Sea $K\subset P^2_{\mathbb{C}}-(\overleftrightarrow{Z_1Z_2}\cup\overleftrightarrow{Z_2Z_3})$, un compacto, entonces existe una $\epsilon>0$ tal que $K\subset K^{(3)}_\epsilon$, entonces para cada vecindad, U, de Z_3 existe una $N\in\mathbb{N}$ tal que $\hat{g}^n(K)\subset U$, $\forall n\geq N$. Así que el único punto de acumulación de la familia de conjuntos $\hat{g}^n(K)$, $n\in\mathbb{N}$ es Z_3.

Un argumento similar demuestra que el único punto de acumulación de la familia $\hat{g}^{-n}(K)$, $n\in\mathbb{N}$ es Z_1. □

Los lemas 2.13 y 2.30 implican que $L_2(\hat{g})\subset\overleftrightarrow{Z_1Z_2}\cup\overleftrightarrow{Z_2Z_3}$.

□

2.5. El Teorema de Clasificación.

Primero que nada, enunciamos y demostramos el siguiente teorema:

Teorema. 2.31. *Toda transformación de $PSL(3,\mathbb{C})$ resulta ser de uno y solo uno de los tipos que hemos definido: elíptica, parabólica o loxodrómica. Una transformación elíptica es de uno y solo uno de los siguientes dos tipos:* regular *(tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son diferentes)* *o bien conjugada de una* reflexión *(tiene un levantamiento tal que dos valores propios son iguales). Una transformación parabólica es de uno y solo uno de los siguientes dos tipos:* unipotente *(tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son iguales a* 1*), o* elipto-parabólica *(no es unipotente). Una transformación loxodrómica es de uno y solo uno de los siguientes cuatro tipos: loxo-parabólica, homotecia compleja, tornillo o fuertemente loxodrómica.*

Prueba. Sean $\hat{g} \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C}) - \{1\}$, y $g \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ un levantamiento de $\hat{g}$, con valores propios λ_i, $i = 1, 2, 3$. Tenemos los siguientes casos:

1) g tiene valores propios repetidos

   a) $|\lambda_i| = 1$, para $i = 1, 2, 3$.

      - g es diagonalizable si y solo si $\hat{g}$ es conjugada, en $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$, de una reflexión compleja (corolario 2.7).
      - g no es diagonalizable si y solo si $\hat{g}$ ya sea es parabólica unipotente o elipto-parabólica dependiendo de si $\lambda_i \in C_3$ para toda $i = 1, 2, 3$, o no; donde $C_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$ es el conjunto de raíces cúbicas de la unidad.

   b) Si $|\lambda_i| \neq 1$ para algún $i = 1, 2, 3$ entonces $\hat{g}$ es loxodrómico (proposición 2.23).

      - g es diagonalizable si y solo si $\hat{g}$ es una homotecia compleja.
      - g no es diagonalizable si y solo si $\hat{g}$ es loxo-parabólica.

2) g no tiene valores propios repetidos.

   a) Los valores propios tienen el mismo módulo (igual a 1) si y solo si $\hat{g}$ es elíptico regular (corolario 2.7)

   b) Exactamente dos valores propios tienen el mismo módulo si y solo si $\hat{g}$ es un tornillo.

   c) $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ cuando $i \neq j$ si y solo si $\hat{g}$ es fuertemente loxodrómica (proposición 2.28)

□

Para enunciar nuestro teorema de clasificación, tenemos que introducir nueva terminología: Una transformación loxodrómica regular será una transformación loxodrómica que tiene un levantamiento tal que todos sus valores propios son diferentes. Las transformaciones fuertemente loxodrómicas y los tornillos son, precisamente, las transformaciones loxodrómicas regulares.

Diremos que una transformación loxodrómica es hiperbólica compleja, si preserva una 3-esfera. Así que una transformación hiperbólica compleja es necesariamente fuertemente loxodrómica, pero no todas las transformaciones fuertemente loxodrómicas son hiperbólicas complejas.

Con estas observaciones en mente, no será difícil darse cuenta que las transformaciones mencionadas en el teorema 2.33 constituyen una partición de PSL$(3,\mathbb{C})$.

Aún más, una transformación elíptica, parabólica o loxodrómica en $PU(2,1)$ resulta ser una de la clase correspondiente en PSL$(3,\mathbb{C})$.

Lema. 2.32. *Sea $g \in SL(3,\mathbb{C})$. El conjunto de valores propios de g es invariante bajo la inversión en el círculo unitario si y solo si $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$.*

Prueba. Supongamos que el conjunto de valores propios es invariante bajo la inversión en el círculo unitario. Si $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ es el conjunto de valores propios de g entonces $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\} = \{(\overline{\lambda_1})^{-1},(\overline{\lambda_2})^{-1},(\overline{\lambda_3})^{-1}\}$, de donde se desprende rápidamente que $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. Recíprocamente, supongamos que $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. Es suficiente demostrar que g y $\overline{(g)^{-1}}$ tienen los mismos polinomios característicos. El polinomio característico de g es $\chi_g(t) = t^3 - xt^2 + yt - 1$, donde $x = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \tau(g)$ y $y = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = \tau(g^{-1})$. La hipótesis implica que $\tau(g) = \tau(\overline{g^{-1}})$ y $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)} = \tau((\overline{g^{-1}})^{-1})$.

□

Teorema. 2.33. *Sea $F(x,y) = x^2y^2 - 4(x^3+y^3) + 18xy - 27 \in \mathbb{C}[x,y]$, $g \in SL(3,\mathbb{C})$, y $\hat{g}$ la transformación de $PSL(3,\mathbb{C})$ inducida por g .*

1. *$\hat{g}$ es una transformación elíptica y regular (todos los valores propios de g son diferentes) si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g),\overline{\tau(g)}) < 0$.*

2. *$\hat{g}$ es hiperbólico complejo (loxodrómico y preserva una 3-esfera junto con la bola de la cual es frontera) si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g),\overline{\tau(g)}) > 0$.*

3. *$\hat{g}$ es elipto-parabólico si y solo si $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$, $F(\tau(g),\overline{\tau(g)}) = 0$, $\tau(g) \notin 3C_3$, y $\hat{g}$ no es elíptico.*

4. *$\hat{g}$ es conjugada de una reflexión compleja (ya sea alrededor de una geodésica compleja o un punto en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$) si y solo si $\hat{g}$ es elíptica, $\tau(g) \notin 3C_3$, $\overline{\tau(g)} = \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$.*

5. *$\hat{g}$ es una transformación parabólica unipotente si y solo si $\tau(g) \in 3C_3$, $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$ y $\hat{g}$ no es la identidad.*

6. *$\hat{g}$ es loxodrómico regular pero no hiperbólico complejo si y solo si $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) \neq 0$.*

7. *$\hat{g}$ es una homotecia compleja si y solo si g es diagonalizable, $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$ y $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$.*

8. *$\hat{g}$ es loxo-parabólico si y solo si $\overline{\tau(g)} \neq \tau(g^{-1})$, $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$, y $\tau(g)$ no es diagonalizable.*

Prueba. El polinomio característico de g tiene la forma:

$$\chi_g(t) = t^3 - \tau(g)t^2 + \tau(g^{-1})t - 1,$$

entonces g tiene valores propios repetidos si y solo si el discriminante de χ_g; i.e. el número complejo $\tilde{f}(\tau(g), \tau(g^{-1}))$ (ver el lema 1.8); es igual a 0. Sin embargo, $F = -\tilde{f}$. Por lo tanto, g tiene valores propios repetidos si y solo si $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$.

1. Supongamos que $\hat{g}$ es elíptica regular entonces $\hat{g}$ es conjugada de un elemento elíptico regular de $PU(2,1)$, por tanto todos los valores propios de g son números complejos unitarios, así que $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. El Teorema 1.9 implica $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) < 0$. Recíprocamente, dado que $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$, entonces el conjunto de valores propios de g es invariante bajo la inversión en el círculo unitario. Dado que $F(\tau(g), \overline{\tau(g)} < 0$, el corolario 1.10 implica que los valores propios de g son todos diferentes y de módulo 1, concluimos que $\hat{g}$ es elíptica regular.

2. Si $\hat{g}$ es hiperbólico complejo, entonces es conjugado de un elemento loxodrómico de $PU(2,1)$. Por tanto, $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$ y el Teorema 1.9 implica que $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) > 0$. Recíprocamente, Si $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$ y $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) > 0$, entonces el conjunto de valores propios de g es invariante bajo la inversión en el círculo unitario. El corolario 1.10 implica que solo uno de los valores propios tiene módulo 1, así que dicha transformación es conjugada de una transformación de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} re^{i\theta_0} & & \\ & e^{-2i\theta_0} & \\ & & \frac{1}{r}e^{i\theta_0} \end{pmatrix},$$

donde suponemos, sin pérdida de generalidad, que $0 < r < 1$. Sea $u \in \mathbb{R}^+$ tal que $r = e^{-u}$. Tomemos

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene que BAB^{-1} tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \cosh(u)e^{i\theta_0} & 0 & \sinh(u)e^{i\theta_0} \\ 0 & e^{-2i\theta_0} & 0 \\ \sinh(u)e^{i\theta_0} & 0 & \cosh(u)e^{i\theta_0} \end{pmatrix},$$

concluimos que $\hat{g}$ es hiperbólico complejo.

3. Supongamos que $\hat{g}$ es elipto-parabólico, entonces todos sus valores propios tienen módulo 1 y por tanto, $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. Además, como tiene un valor propio repetido, necesariamente se tiene que $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$. Claramente g no es elíptico. Observemos que $\tau(g) \notin 3C_3$ porque de lo contrario todos los valores propios de g serían iguales y por tanto g sería proyectivamente equivalente a una transformación que tiene todos sus valores propios iguales a 1.

   Recíprocamente, si $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$, entonces el conjunto de valores propios es invariante bajo la inversión en el círculo unitario. Además, $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$ implica que g tiene valores propios repetidos y entonces todos tienen módulo 1. Como $\tau(g) \notin 3C_3$, entonces g tiene dos valores propios diferentes, uno de ellos de multiplicidad dos, el hecho de que $\hat{g}$ no es elíptica implica que g no es diagonalizable, por tanto, g es elipto-parabólica. (Es importante observar que una transformación elipto-parabólica siempre preserva una 4-bola junto con la 3-esfera que la acota)

4. Supongamos que $\hat{g}$ es conjugado de una reflexión compleja, entonces necesariamente es una transformación elíptica y tiene un valor propio

de multiplicidad 2, se sigue que $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$, $F(\tau(g), \overline{\tau(g)}) = 0$ y $\tau(g) \notin 3C_3$.

Recíprocamente, $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$ implica que el conjunto de valores propios es invariante bajo la inversión en el círculo unitario. La ecuación $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$ implica que g tiene valores propios repetidos y entonces todos ellos tienen módulo 1. Como $\tau(g) \notin 3C_3$ entonces uno de los valores propios tiene multiplicidad 2, y como $\hat{g}$ es elíptica entonces se tiene que $\hat{g}$ es conjugado de una reflexión compleja.

5. Si $\hat{g}$ es parabólica unipotente entonces claramente $\tau(g) \in 3C_3$ y $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. Recíprocamente, si $\tau(g) \in 3C_3$ y $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$, entonces el polinomio característico de g tiene la forma:

$$t^3 - 3\omega t^2 + 3\omega^2 t - 1$$

donde $\omega^3 = 1$, entonces todos los valores propios son iguales a ω y g es proyectivamente equivalente a una transformación unipotente.

6. Supongamos que $\hat{g}$ es loxodrómico regular y no hiperbólico complejo, entonces no todos los valores propios de g son iguales en módulo. Si $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$ entonces g es hiperbólico, lo cual no puede suceder por hipótesis, así que $\tau(g^{-1}) \neq \overline{\tau(g)}$. El hecho que g sea regular implica que $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) \neq 0$. Recíprocamente, si $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) \neq 0$, entonces g es regular. Ahora bien, no todos los valores propios pueden tener el mismo módulo, porque entonces todos tendrían módulo 1 y esto implicaría que, $\tau(g^{-1}) = \overline{\tau(g)}$. Así que g es loxodrómica (se puede conjugar g de tal manera que quede una matriz diagonal donde no todos los elementos de la diagonal tienen el mismo módulo), y $\hat{g}$ no es hiperbólico complejo puesto que $\tau(g^{-1}) \neq \overline{\tau(g)}$.

7. Supongamos que $\hat{g}$ es una homotecia compleja, entonces g es diagonalizable, tiene un valor propio de multiplicidad dos y no todos los valores propios tienen el mismo módulo, entonces $\tau(g^{-1}) \neq \overline{\tau(g)}$ (porque de lo contrario, el conjunto de valores propios es invariante bajo la inversión en el círculo unitario y si tenemos un valor propio repetido, entonces todos tienen módulo uno), también $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$. Recíprocamente, si $F(\tau(g), \tau(g^{-1})) = 0$, entonces g tiene un valor propio repetido. Además, $\tau(g^{-1}) \neq \overline{\tau(g)}$ implica que no todos los valores propios tienen el mismo módulo. Dado que g es diagonalizable, se obtiene que $\hat{g}$ es una homotecia compleja.

8. Supongamos que $\hat{g}$ es loxo-parabólico, entonces g tiene un valor propio de multiplicidad dos y no todos los valores propios tienen el mismo módulo, por tanto $F(\tau(g),\tau(g^{-1}))=0$ y $\tau(g^{-1})\neq\overline{\tau(g)}$. Además g no es diagonalizable.

   Recíprocamente, supongamos que g no es diagonalizable y $\tau(g^{-1})\neq\overline{\tau(g)}$, entonces g tiene un valor propio de módulo diferente de 1 (pues de lo contrario $\tau(g^{-1})=\overline{\tau(g)}$), por tanto, $\hat{g}$ es loxo-parabólica.

$\square$

Capítulo 3

La Estructura Local de $\Omega(\Gamma)/\Gamma$

3.1. La estructura local de $\Omega(\Gamma)/\Gamma$

Sea $\Gamma \leq \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ y supongamos que $x \in \Omega(\Gamma)$, entonces $Stab(x)$, el estabilizador de x en Γ, consta de un número finito de elementos. Estamos interesados en conocer todas las posibilidades para el grupo $Stab(x)$ y en analizar localmente a Ω/Γ

Proposición. 3.1. *Todo subgrupo finito de $GL(n,\mathbb{C})$ es conjugado de un subgrupo de $U(n)$.*

Prueba.

Denotemos mediante $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ el producto hermitiano usual de $\mathbb{C}^n$. Sea $((\cdot,\cdot))$ producto hermitiano de $\mathbb{C}^n$ definido mediante

$$((u,v)) = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G}\langle\langle g(u), g(v)\rangle\rangle\Big).$$

Este producto hermitiano es positivo definido y por tanto equivalente al usual, además G está contenido en el grupo unitario que corresponde al producto $((\cdot,\cdot))$, lo que implica que existe un elemento $h \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ tal que $hGh^{-1} \subset U(n)$.

□

Corolario. 3.2. *Todo subgrupo finito de $SL(3,\mathbb{C})$ es conjugado de un subgrupo finito de $SU(3)$.*

Prueba. Sea G un subgrupo finito de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ La proposición anterior implica que existe $h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ tal que $hGh^{-1} \subset U(3)$, pero $hGh^{-1} \subset \mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$, entonces $hGh^{-1} \subset SU(3)$.

$\square$

Proposición. 3.3. *Sea $G \leq PSL(3,\mathbb{C})$ un grupo finito, tal que G fija un punto $x \in P^2_{\mathbb{C}}$, entonces G es conjugado en $PSL(3,\mathbb{C})$ de un subgrupo finito de $PU(2,1)$ de la forma $\mathbb{P}(\hat{G})$, donde $\hat{G}$ es un subgrupo de $SL(3,\mathbb{C}) \cap (U(2) \times U(1))$ isomorfo a un subgrupo finito de $U(2)$, y $\mathbb{P} : SL(3,\mathbb{C}) \to PSL(3,\mathbb{C})$ es la proyección canónica.*

Prueba.
Sea $\tilde{G} = \mathbb{P}^{-1}(G)$. Existe $h_1 \in GL(3,\mathbb{C})$ tal que $h_1\tilde{G}h_1^{-1} \subset SU(3)$. Además, existe un subespacio complejo unidimensional de $\mathbb{C}^3$, digamos el generado por $\tilde{x} \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$, que es invariante bajo $h_1\tilde{G}h_1^{-1}$. Dado que $U(3)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de subespacios complejos de dimensión uno, existe $h_2 \in U(3)$ tal que $h_2(\langle\tilde{x}\rangle) = \langle(0,0,1)\rangle$ entonces $\hat{G} = h_2h_1\tilde{G}(h_2h_1)^{-1}$ es un subgrupo finito de $SU(3)$ tal que cada uno de sus elementos tiene una matriz asociada de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (det(A))^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in U(2).$$

$\square$

Corolario. 3.4. *Si G es un subgrupo finito de $PSL(3,\mathbb{C})$ que deja fijo al punto $x \in P^2_{\mathbb{C}}$, entonces para cada vecindad V de x existe una vecindad de x de la forma $U = f(\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}})$, $f \in PSL(3,\mathbb{C})$ tal que $U \subset V$ es invariante bajo G.*

Prueba.
Usando la notación de la prueba de 2.36, tenemos que $f^{-1}Gf = \mathbb{P}(\hat{G})$, donde $f = \mathbb{P}((h_2h_1)^{-1})$ y cada elemento de $\mathbb{P}(\hat{G})$ tiene un levantamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (det(A))^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in U(2).$$

lo que implica que $\mathbb{P}(\hat{G})$ preserva la familia de vecindades de $[0:0:1]$ dadas por $\{[z_1 : z_2 : z_3] : |z_1|^2 + |z_2|^2 < r|z_3|^2\}, r > 0$. El resultado se sigue ahora, del hecho que esta familia constituye una base para la topología en el punto $[0:0:1]$.

□

Se dice que un conjunto A es precisamente invariante bajo un subgrupo G de Γ si

i) $g(A) = A$ para toda $g \in G$, y

ii) $\gamma(A) \cap A = \varnothing$ para toda $\gamma \in \Gamma - G$.

Corolario. 3.5. *Sea $\Gamma \leq PSL(3, \mathbb{C})$, y sea $x \in \Omega(\Gamma)$, entonces existe una vecindad de x en Ω de la forma $h(\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}})$, donde $h \in PSL(3, \mathbb{C})$, la cual es precisamente invariante bajo $Stab(x)$ en Γ.*

Prueba El corolario anterior implica que es suficiente encontrar una vecindad precisamente invariante bajo $Stab(x)$ en Γ para concluir esta demostración. Sea V una vecindad de x en $\Omega(\Gamma)$ con cerradura compacta en $\Omega(\Gamma)$. Dado que solo hay un número finito de elementos de Γ para los que $\overline{V} \cap g(\overline{V}) \neq \varnothing$, podemos encontrar una vecindad más pequeña de x, que aún llamamos V, tal que $g(V) \cap V \neq \varnothing$ solamente para elementos $g \in Stab(x)$. Entonces $\cap_{g \in Stab(x)} g(V)$ es una vecindad de x que es precisamente invariante bajo $Stab(x)$ en Γ.

□

Todo lo ya demostrado implica el siguiente teorema:

Teorema. 3.6. *Para cada $x \in \Omega(\Gamma)$, la clase de x, denotada por $[x] \in \Omega/\Gamma$, tiene una vecindad, en Ω/Γ, que es homeomorfa al cono con vértice en $[x]$ de un espacio de la forma S^3/G, donde G es un subgrupo finito de $U(2)$, que actúa en S^3 por transformaciones lineales.*

3.2. Ejemplos

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que $\Omega(G)/G$ puede ser compacto y G contener elementos parabólicos.

1. Sea $G = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$ el grupo generado por las transformaciones de PSL$(3, \mathbb{C})$ inducidas por las matrices:

$$\hat{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{g}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\hat{g}_s\hat{g}_t = \hat{g}_t\hat{g}_s$, para cualesquiera $s, t = 1, 2, 3, 4$; también, para cada g_s, $1 \leq s \leq 4$ se tiene que el orden de g_s es infinito, y de hecho, $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Además, cada elemento de G tiene la forma

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} g_4^{n_4}, \quad n_s \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s \leq 4$$

y es inducido por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 + in_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_3 + in_4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así que cada elemento $g \in G - \{1\}$ es parabólico y

$$\Lambda(g) = \overleftrightarrow{Z_1 Z_3} = L_0(g),$$

donde $Z_1 = [1 : 0 : 0]$, $Z_3 = [0 : 0 : 1]$.

Fijemos $g_0 \in G - \{1\}$, y sea $x \in P^2_{\mathbb{C}}$ tal que $Stab_G(x)$ es infinito. Tomemos $g \in Stab_G(x) - \{1\}$ y observemos que $x \in L_0(g) = L_0(g_0)$, puesto que el orden de cualquier $g \neq 1$ es infinito. Por tanto, $L_0(G) \subset L_0(g_0)$. La inclusión opuesta se sigue por definición de L_0, entonces $L_0(G) = L_0(g_0) = \overleftrightarrow{Z_1 Z_3}$.

Supongamos que existe una sucesión de diferentes elementos $\{g_k\}$ de G y un elemento $y \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1 Z_3}$ tal que $g_k(y) \to x$, podemos suponer que cada elemento g_k tiene una matriz asociada de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1(k) + in_2(k) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_3(k) + in_4(k) & 1 \end{pmatrix},$$

Observemos que $|n_1(k)+in_2(k)|^2+|n_3(k)+in_4(k)|^2 \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Luego, si $y = [y_1 : y_2 : y_3]$, entonces

$$\cos^2 d(g_k(y), \overleftrightarrow{Z_1 Z_3}) =$$

$$= \frac{|y_1 + y_2(n_1(k) + in_2(k))|^2 + |y_2(n_3(k) + in_4(k)) + y_3|^2}{|y_1 + y_2(n_1(k) + in_2(k))|^2 + |y_2|^2 + |y_2(n_3(k) + in_4(k)) + y_3|^2}$$

tiende a 1 cuando $k \to \infty$, entonces $x \in \overleftrightarrow{Z_1Z_3} = L_0(g_0)$. Por tanto, $L_1(G) \subset L_0(g_0) = \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$.

Sea $x \in P^2_{\mathbb{C}}$ tal que $g_k(z_k) \to x$, donde $\{g_k\}$ es una sucesión de diferentes elementos de G y $z_k \to z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$, entonces un razonamiento similar al anterior demuestra que $x \in \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$. Por tanto, $L_2(G) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$. Concluimos que $\overleftrightarrow{Z_1Z_3} = \Lambda(G)$.

Entonces $\Omega(G) = P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z_1Z_3}$ y podemos identificar Ω con $\mathbb{C}^2$, mediante $(z_1, z_3) \longleftrightarrow [z_1 : 1 : z_3]$. Bajo esta identificación, tenemos que

$$g_1(z_1, z_3) = (z_1 + 1, z_3), \quad g_2(z_1, z_3) = (z_1 + i, z_3),$$

$$g_3(z_1, z_3) = (z_1, z_3 + 1), \quad g_4(z_1, z_3) = (z_1, z_3 + i),$$

de donde resulta claro que $\Omega(G)/G \cong S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$.

El siguiente ejemplo nos da una aplicación del teorema 2.29.

2. Sean $\imath_1, \imath_2 \in \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ transformaciones de orden 2. Si $G = \langle \imath_1, \imath_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, entonces

$$L_0(G) = L_0(\imath_1\imath_2), \quad (1)$$

$$L_1(G) = L_1(\imath_1\imath_2) \cup \imath_1(L_1(\imath_1\imath_2)) \cup \imath_2(L_1(\imath_1\imath_2)), \quad (2)$$

$$L_2(G) = L_2(\imath_1\imath_2) \cup \imath_1(L_2(\imath_1\imath_2)) \cup \imath_2(L_2(\imath_1\imath_2)). \quad (3)$$

Concluimos que G es kleiniano complejo si y solo si $\imath_1\imath_2$ no es elíptico. En particular, el teorema de clasificación según la traza que ya demostramos implica que G es kleiniano complejo si $\overline{\tau(\imath_1\imath_2)} \neq \tau(\imath_2\imath_1)$, o bien, si

$$\overline{\tau(\imath_1\imath_2)} = \tau(\imath_2\imath_1) \text{ y } F(\tau(\imath_1\imath_2), \overline{\tau(\imath_1\imath_2)}) > 0.$$

Prueba.

Primero observemos que las palabras de longitud impar son conjugados de $\imath_1$ o de $\imath_2$ y las palabras de longitud par son potencias enteras de $\imath_1\imath_2$. No es difícil darse cuenta de que $L_0(\imath_1\imath_2) \cup \imath_1(L_0(\imath_1\imath_2)) \cup \imath_2(L_0(\imath_1\imath_2)) \subset L_0(G)$.

Ahora bien, si $Stab_G(x)$ tiene orden infinito, entonces existe una sucesión de elementos diferentes de $Stab_G(x)$, digamos g_k. Consideremos los siguientes casos:

- g_k contiene una subsucesión de elementos de longitud par, entonces $x \in L_0(\imath_1\imath_2)$.

- g_k contiene una subsucesión de elementos de longitud impar, entonces cada g_k es una $(1,1)$-forma o una $(2,2)$-forma. Si se tiene una subsucesión, que denotamos g_k, de $(1,1)$-formas entonces $g_k g_{k+1}$ es una palabra de longitud par que fija a x, luego $x \in L_0(\imath_1\imath_2)$. Si se tiene una subsucesión de $(2,2)$-formas se procede análogamente para demostrar que $x \in L_0(\imath_1\imath_2)$.

Lo anterior prueba que $L_0(G) = L_0(\imath_1\imath_2)$.

Para demostrar (2), sea $x \in P^2_{\mathbb{C}}$ y supongamos que existe g_k una sucesión de elementos diferentes de G, y un punto $y \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G) = P^2_{\mathbb{C}} - L_0(\imath_1\imath_2)$ tales que $g_k(y) \to x$ cuando $k \to \infty$. Consideremos los siguientes casos:

- g_k contiene una subsucesión de elementos de longitud par, entonces $x \in L_1(\imath_1\imath_2)$.

- g_k contiene una subsucesión de $(1,1)$-formas, entonces $\imath_2(x) \in L_1(\imath_1\imath_2)$.

- g_k contiene una subsucesión de $(2,2)$-formas, entonces $\imath_1(x) \in L_1(\imath_1\imath_2)$.

Concluimos que $L_1(G) \subset L_1(\imath_1\imath_2) \cup \imath_1(L_1(\imath_1\imath_2)) \cup \imath_2(L_1(\imath_1\imath_2))$.

La otra inclusión se obtiene de que $L_1(\imath_1\imath_2) \subset L_1(G)$ y de que $L_1(G)$ es G-invariante.

Si $\imath_1\imath_2$ es elíptico, entonces tiene orden infinito y ambos lados de (3) son vacíos. Cuando $\imath_1\imath_2$ no es elíptico, un proceso análogo al anterior se usa para demostrar que $L_2(G) \subset L_2(\imath_1\imath_2) \cup \imath_1(L_2(\imath_1\imath_2)) \cup \imath_2(L_2(\imath_1\imath_2))$.

La otra inclusión se obtiene del hecho que $(L_0(G) \cup L_1(G)) - (L_0(\imath_1\imath_2) \cup L_1(\imath_1\imath_2))$ consta de a lo más seis puntos.

$\square$

Capítulo 4

Las Suspensiones

En este capítulo estudiamos el conjunto límite de unas construcciones de un grupo kleiniano complejo de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$, a partir de un grupo kleiniano clásico.

Definición. 4.1. *Sea $g \in PSL(2,\mathbb{C})$, y supongamos que los dos levantamientos de g a elementos de $SL(2,\mathbb{C})$ están dados por las matrices $\pm\mathbf{g}$. Cada uno de los elementos de $PSL(3,\mathbb{C})$ inducidos, respectivamente, por las matrices*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{g} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se llama una ***suspensión*** *de g.*

Observemos que la línea $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} = \{[z_1 : z_2 : 0] \in P^2_{\mathbb{C}}\}$ permanece invariante bajo la acción de cada una de las suspensiones de g en $P^2_{\mathbb{C}}$, aún más, la acción sobre $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ de una suspensión de g es la misma que la acción de g sobre $P^1_{\mathbb{C}}$.

Proposición. 4.2. *Sea $g \in PSL(2,\mathbb{C})$, y $\hat{g} \in PSL(3,\mathbb{C})$ una de sus suspensiones.*

a) Si g es la identidad entonces $\hat{g}$ es la identidad o un elemento elíptico de orden 2.

b) Si g es elíptico entonces $\hat{g}$ es elíptico.

c) Si g es parabólico entonces $\hat{g}$ es parabólico unipotente y tiene toda una línea de puntos fijos, o bien es elipto-parabólico racional.

d) Si g es hiperbólico, entonces $\hat{g}$ es hiperbólico complejo.

e) Si g es loxodrómico, entonces $\hat{g}$ es fuertemente loxodrómico.

Prueba. Denotemos por $\mathbf{g}$ un levantamiento de g a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

a) Se sigue de que la identidad en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tiene como levantamientos a $I, -I \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

b) Un levantamiento a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, de un elemento elíptico en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, es diagonalizable y todos sus valores propios tienen módulo 1. El corolario 2.7 demuestra la afirmación b).

c) Si g es parabólico, entonces existe $\mathbf{h} \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que

$$\mathbf{hgh}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\hat{g}$ es inducido por una matriz conjugada a una de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el inciso c) se deduce fácilmente de la última afirmación.

d) Si g es hiperbólico entonces los valores propios de $\mathbf{g}$ son reales y de la forma $r, 1/r$, donde $r \neq \pm 1$, entonces $\hat{g}$ tiene un levantamiento a $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ cuyos valores propios tienen todos módulos diferentes entre sí y además el conjunto de valores propios es invariante bajo la inversión en el círculo unitario, se sigue que $\hat{g}$ es hiperbólico complejo (ver la prueba de 2.33 inciso 2)).

e) Si g es loxodrómico, entonces los valores propios λ_1, λ_2 de $\mathbf{g}$, satisfacen que $|\lambda_1| = 1/|\lambda_2| \neq 1$. Por tanto, $\hat{g}$ tiene un levantamiento tal que sus valores propios tienen diferentes módulos entre sí. El inciso e) se sigue de la proposición 2.28.

□

Seade y Verjovsky incluyen la siguiente construcción en [12] sin demostración. Esta construcción permite construir un grupo kleiniano complejo $\hat{\Gamma} \subset \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ a partir de un grupo kleiniano clásico $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Notemos que $P^1_{\mathbb{C}}$ es el espacio de líneas complejas en $\mathbb{C}^2$ que pasan por el origen y $P^2_{\mathbb{C}}$ se puede pensar como $\mathbb{C}^2$ unión el hiperplano en el infinito. Si extendemos la acción de Γ en $P^1_{\mathbb{C}}$ a una acción lineal (unimodular) en $\mathbb{C}^2$; esto es, a una acción de un subgrupo $\hat{\Gamma} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^2$, entonces tenemos una acción de $\hat{\Gamma}$ en $P^2_{\mathbb{C}}$. Se tiene una sucesión exacta:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \to 1,$$

donde la función $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ es la proyectivización $\mathbb{P}$. Siempre se puede levantar Γ a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tomando la imagen inversa bajo $\mathbb{P}$, así que Γ siempre se puede extender a un grupo kleiniano $\hat{\Gamma}$ en $P^2_{\mathbb{C}}$, cuya restricción al $P^1_{\mathbb{C}}$ en el infinito es Γ. En otras palabras,

$$\hat{\Gamma} = \{\hat{\gamma} \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C}) : \hat{\gamma} \text{ es suspension de algún elemento de } \Gamma\}.$$

Así que cada elemento de $\hat{\Gamma}$ tiene un levantamiento a $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm A & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix},$$

para algún $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\mathbb{P}(A) \in \Gamma$. El grupo $\hat{\Gamma}$ se llama la **doble suspensión** de Γ. Si podemos levantar Γ a un subgrupo $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ que intersecta el kernel de $\mathbb{P}$ solamente en la identidad, entonces $\tilde{\Gamma}$ puede considerarse como un subgrupo de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$. En este caso, decimos que Γ se puede suspender y llamamos a $\tilde{\Gamma}$ una **suspensión** de Γ.

Proposición. 4.3. *Sea* $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ *un grupo kleiniano clásico, con conjunto límite clásico* $\Lambda(\Gamma)$ *considerado como subconjunto de la línea en el infinito* $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : z_3 = 0\}$. *Denotemos por* $\hat{\Gamma}$ *la doble suspensión de* Γ, *y mediante* Z_3 *al punto* $[0:0:1]$. *Entonces*

$$\Lambda(\hat{\Gamma}) = \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}.$$

La prueba de la proposición 4.3 está dividida en los siguientes cuatro lemas (4.4 a 4.7).

Lema. 4.4.

$$L_0(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} & \textit{si } \Gamma \textit{ contiene elementos parabólicos },\\ \\ \Lambda(\Gamma)\cup\{Z_3\} & \textit{si } \Gamma \textit{ no contiene elementos parabólicos.}\end{cases}$$

Prueba.

Caso 1. Supongamos que Γ contiene elementos parabólicos.

Sea $\hat{Z} \in P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$ un punto que tiene grupo de isotropía infinito, entonces el punto de intersección de las líneas $\overleftrightarrow{\hat{Z}Z_3}$ y $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ también tiene grupo de isotropía infinito y es, por tanto, un elemento de $\Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Así que $\hat{Z} \in \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$ y deducimos que $L_0(\hat{\Gamma}) \subset \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$.

Ahora demostraremos la inclusión opuesta; esto es, $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} \subset L_0(\hat{\Gamma})$. Para este fin tomemos $\gamma_0 \in \Gamma$ un elemento parabólico y denotemos por $\hat{\gamma}_0$ la suspensión de γ_0 que es parabólica unipotente (ver la proposición 4.2 c)). El conjunto de puntos fijos de $\hat{\gamma}_0$ es una línea que pasa por un punto $X \in \Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ y por Z_3, lo que implica que $\overleftrightarrow{XZ_3} \subset L_0(\hat{\Gamma})$.

Si Γ es elemental entonces necesariamente $|\Lambda(\Gamma)| = 1$ (porque si $|\Lambda(\Gamma)| = 2$ entonces Γ no es discreto puesto que contiene un elemento loxodrómico y un parabólico con un punto fijo común) y ya acabamos.

Supongamos que Γ no es elemental. La doble suspensión $\hat{\Gamma}$ restringida a $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ induce la misma acción que Γ, y dado que la órbita de $X \in \Lambda(\Gamma)$ bajo Γ es densa en $\Lambda(\Gamma)$, tenemos que la órbita de $\overleftrightarrow{XZ_3} \subset L_0(\hat{\Gamma})$ bajo $\hat{\Gamma}$ es densa en $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$. Así que $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} \subset L_0(\hat{\Gamma})$, porque $L_0(\hat{\Gamma})$ es cerrado y $\hat{\Gamma}$ invariante.

Caso 2. Supongamos que Γ no contiene elementos parabólicos.

Sea $\mathbf{g} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ tal que $\mathbb{P}(\mathbf{g}) \in \Gamma - \{1\}$, entonces ningún valor propio de $\mathbf{g}$ es igual a 1 ó -1, porque Γ no tiene elementos parabólicos. Así que los puntos fijos en $P^2_{\mathbb{C}}$ de una transformación de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ inducida por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm\mathbf{g} & 0_{2\times 1}\\ 0_{1\times 2} & 1\end{pmatrix},$$

pertenecen a $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$. Por tanto, $L_0(\hat{\Gamma}) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2} \cup \{Z_3\}$ y dado que la acción de $\hat{\Gamma}$ en $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ es la misma que la de Γ, se tiene que

$$L_0(\hat{\Gamma}) \subset L_0(\Gamma) \cup \{Z_3\} = \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\}.$$

Por último, no es difícil ver que

$$\{Z_3\} \cup \Lambda(\Gamma) = \{Z_3\} \cup L_0(\Gamma) \subset L_0(\hat{\Gamma}).$$

$\square$

Lema. 4.5. *Sea $\hat{\gamma}_n$ una sucesión de diferentes elementos de $\hat{\Gamma}$ entonces:*

i) Existe una subsucesión, que aún denotamos $\hat{\gamma}_n$, y puntos $Z, Z' \in \Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ tales que $\hat{\gamma}_n(\cdot) \to Z$ uniformemente en subconjuntos compactos de $P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z' Z_3}$.

ii) Si $\hat{X} \in \overleftrightarrow{Z' Z_3} - \{Z'\}$ entonces existe otra subsucesión, que seguimos denotando $\hat{\gamma}_n$ tal que $\hat{\gamma}_n(\hat{X}) \to Z_3$.

Prueba. Primero que nada, observemos que el conjunto $P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$ es una vecindad tubular de la línea $\overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ en $P^2_{\mathbb{C}}$, con proyección normal dada por

$$\pi : P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\} \to \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$$
$$\pi([y_1 : y_2 : y_3]) = [y_1 : y_2 : 0].$$

Esta proyección envía un punto en $P^2_{\mathbb{C}} - \{Z_3\}$ al punto de intersección de la línea proyectiva compleja $\overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ y la línea proyectiva compleja determinada por el punto $Z_3 = [0 : 0 : 1]$ y el punto en cuestión.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el subgrupo de isotropía del punto $[1 : 0 : 0] \in \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ consiste únicamente de la identidad, que $[1 : 0 : 0] \in \overleftrightarrow{Z_1 Z_2} - \Lambda(\Gamma)$ y que cada $\hat{\gamma}_n$ tiene un levantamiento de la forma

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora utilizamos una propiedad de un grupo kleiniano clásico, en este caso Γ, que nos garantiza la existencia de una subsucesión de $\hat{\gamma}_n$, que aún denotamos $\hat{\gamma}_n$, y puntos $Z, Z' \in \Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ tales que $\hat{\gamma}_n\Big|_{\overleftrightarrow{Z_1 Z_2}}(\cdot) \to Z$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overleftrightarrow{Z_1 Z_2} - \{Z'\}$.

i) Sea $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{Z'Z_3}$ un conjunto compacto y $\hat{X} = [x_1 : x_2 : x_3] \in K$.

Queremos demostrar que $\hat{\gamma}_n(\hat{X}) \to Z$ uniformemente en K. Para este fin, es suficiente verificar que la distancia de Fubini-Study

$$d(\hat{\gamma}_n(\hat{X}), \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X}))) \to 0$$

uniformemente en K (puesto que la subsucesión que elegimos nos garantiza la convergencia uniforme $\hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X})) \to Z$ en el conjunto compacto K).

Por construcción, la subsucesión de $\hat{\gamma}_n$ que se toma es tal que $[-d_n : c_n : 0] \to Z'$. También tenemos lo siguiente:

$$\cos^2(d(\hat{\gamma}_n(\hat{X}), \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X})))) = \frac{\langle\!\langle \hat{\gamma}_n(\hat{X}), \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X}))\rangle\!\rangle \langle\!\langle \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X})), \hat{\gamma}_n(\hat{X})\rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \hat{\gamma}_n(\hat{X}), \hat{\gamma}_n(\hat{X})\rangle\!\rangle \langle\!\langle \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X})), \hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X}))\rangle\!\rangle}$$

$$= \frac{|a_n x_1 + b_n x_2|^2 + |c_n x_1 + d_n x_2|^2}{|a_n x_1 + b_n x_2|^2 + |c_n x_1 + d_n x_2|^2 + |x_3|^2}$$

$$= \frac{|\frac{a_n x_1 + b_n x_2}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2 + 1}{|\frac{a_n x_1 + b_n x_2}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2 + 1 + |\frac{x_3}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2}.$$

La última expresión converge uniformemente a 1 en K porque

$$|\frac{a_n x_1 + b_n x_2}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2 \to |\frac{z_1}{z_2}|^2$$

uniformemente en K y

$$|\frac{x_3}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2 = \frac{|\frac{x_3}{c_n}|^2}{|x_1 + \frac{d_n}{c_n} x_2|} \to 0,$$

uniformemente en K, porque $1/|c_n|$, el radio del círculo isométrico de

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

converge a 0, y $[-d_n : c_n : 0]$ converge al punto $Z' \in \Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1 Z_2}$ que no pertenece a $\pi(K)$.

ii) En este caso suponemos que $\hat{X} = [x_1 : x_2 : x_3] \neq Z'$ pertenece a la línea $\overleftrightarrow{Z'Z_3}$. Si $\hat{X} = Z_3$ entonces el lema es obvio puesto que todo elemento de $\hat{\Gamma}$ fija a Z_3, así que podemos suponer que $\hat{X} \neq Z_3$ y entonces $\pi(\hat{X}) = Z'$. Por tanto, $[-d_n : c_n : 0] \to \pi(\hat{X}) = [x_1 : x_2 : 0]$.

Tomemos nuevamente una subsucesión, que seguimos denotando $\hat{\gamma}_n$, tal que $\hat{\gamma}_n(\pi(\hat{X})) \to W$, y observemos que

$$\cos^2(d(\hat{\gamma}_n(\hat{X}), Z_3)) = \frac{|x_3|^2}{|a_n x_1 + b_n x_2|^2 + |c_n x_1 + d_n x_2|^2 + |x_3|^2} \neq 0,$$

pero dado que $|\frac{a_n x_1 + b_n x_2}{c_n x_1 + d_n x_2}|^2$ converge a un número real, y $|c_n x_1 + d_n x_2|^2$ converge a 0, tenemos que $|a_n x_1 + b_n x_2|^2$ también converge a 0, lo que implica que

$$\cos^2(d(\hat{\gamma}_n(\hat{X}), Z_3)) \to 1,$$

y por tanto, $\hat{\gamma}_n(\hat{X}) \to Z_3$.

$\square$

Lema. 4.6.

$$L_1(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \Lambda(\Gamma) & \textit{si } \Gamma \textit{ contiene elementos parabólicos,} \\ \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\} & \textit{si } \Gamma \textit{ no contiene elementos parabólicos.} \end{cases}$$

Prueba.

Caso 1. Supongamos que Γ no contiene elementos parabólicos.

Sea $\hat{X} = [x_1 : x_2 : x_3] \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(\hat{\Gamma}) = P^2_{\mathbb{C}} - (\Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\})$ y $\hat{\gamma}_n$ una sucesión de diferentes elementos de $\hat{\Gamma}$ tal que $\hat{\gamma}_n(\hat{X})$ converge a $\hat{Z} = [z_1 : z_2 : z_3]$. El lema 4.5 implica que $\hat{Z} \in \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\}$. Por tanto, $L_1(\hat{\Gamma}) \subset L_1(\Gamma) \cup \{Z_3\}$.

La demostración de la inclusión opuesta, se sigue de lo siguiente:

Si $\hat{X} \in \overleftrightarrow{Z_1Z_2} - \Lambda(\Gamma)$ entonces el conjunto de los puntos de acumulación de su órbita bajo $\hat{\Gamma}$ es igual a $\Lambda(\Gamma)$.

Sea $\gamma_0 \in \Gamma$ un elemento loxodrómico (dicho elemento existe si $\Lambda(\Gamma) \neq \varnothing$, porque estamos suponiendo que Γ no contiene elementos parabólicos). Sea $Z \in \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$ un punto fijo de γ_0, si $\hat{X} \in \overleftrightarrow{ZZ_3} - \{Z, Z_3\}$ entonces Z_3 es un punto de acumulación de $\{\hat{\gamma}_0^n(\hat{X})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (ver las proposiciones 4.2 y 2.29).

Caso 2. Supongamos que Γ contiene elementos parabólicos.

Sea $\hat{X} \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(\hat{\Gamma}) = P^2_{\mathbb{C}} - \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$ y tomemos una sucesión de diferentes elementos $\hat{\gamma}_n$ de $\hat{\Gamma}$ tal que $\hat{\gamma}_n(\hat{X})$ converge a $\hat{Z}$. El lema 4.5 i) implica que $\hat{Z} \in \Lambda(\Gamma) \subset \overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Por tanto, $L_1(\hat{\Gamma}) \subset \Lambda(\Gamma)$.

Recíprocamente, si $\hat{X} \in \overleftrightarrow{Z_1Z_2} - \Lambda(\Gamma) \subset P^2_{\mathbb{C}} - L_0(\hat{\Gamma})$ entonces el conjunto de los puntos de acumulación de su órbita bajo $\hat{\Gamma}$ es igual a $\Lambda(\Gamma)$. Por tanto $\Lambda(\Gamma) \subset L_1(\hat{\Gamma})$.

$\square$

Lema. 4.7.

$$L_2(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \Lambda(\Gamma) & \textit{si } \Gamma \textit{ contiene elementos parabólicos ,} \\ \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} & \textit{si } \Gamma \textit{ no contiene elementos parabólicos.} \end{cases}$$

Prueba.
Caso 1. Supongamos que Γ no contiene elementos parabólicos.

Primero demostramos la inclusión $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} \subset L_2(\hat{\Gamma})$. Podemos suponer que $|\Lambda(\Gamma)| \geq 2$, porque si $|\Lambda(\Gamma)| = 0$ entonces el lema es trivial, y si $|\Lambda(\Gamma)| = 1$ entonces Γ contiene un elemento parabólico. Sea $X \in \Lambda(\Gamma)$ un punto fijo del elemento loxodrómico $\gamma \in \Gamma$, y consideremos un levantamiento $\mathbf{g}$, de γ, a $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, entonces la suspensión $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$, de γ, inducida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix},$$

es un elemento fuertemente loxodrómico de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$. Además $L_2(\hat{\gamma}) \subset L_2(\hat{\Gamma})$, porque $L_0(\hat{\Gamma}) = L_1(\hat{\Gamma}) = \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\}$ (ver la prueba de 2.29). Ahora bien, $L_2(\hat{\gamma})$ consiste de dos líneas: las determinadas por cada punto fijo de γ en $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$, y Z_3 (proposición 2.29). Si $|\Lambda(\Gamma)| = 2$ entonces ya acabamos puesto que $\Lambda(\Gamma)$ consiste precisamente de los dos puntos fijos de $\hat{\gamma}$ en $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$. Si $|\Lambda(\Gamma)| > 2$ entonces la acción de $\hat{\Gamma}$ en $\Lambda(\Gamma)$ es minimal, lo que implica que la órbita bajo $\hat{\Gamma}$ de cualquiera de las dos líneas que forman a $L_2(\hat{\gamma}) \subset L_2(\hat{\Gamma})$, es densa en $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$. Además $L_2(\hat{\Gamma})$ es cerrado y $\hat{\Gamma}$-invariante. Por tanto, $\bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} \subset L_2(\hat{\Gamma})$.

Para demostrar la inclusión $L_2(\hat{\Gamma}) \subset \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$ tomemos un subconjunto compacto $\hat{K}$ de $P^2_{\mathbb{C}} - \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$ y un punto de acumulación Z

de la familia de conjuntos compactos $\{\hat{\gamma}(\hat{K})\}_{\hat{\gamma}\in\hat{\Gamma}}$. Existe una sucesión $\hat{\gamma}_n$ de diferentes elementos de $\hat{\Gamma}$ y κ_n una sucesión de elementos de K tales que $\kappa_n \to k \in K$ y $\hat{\gamma}_n(\kappa_n) \to Z$. El lema 4.5 i) aplicado a la sucesión $\hat{\gamma}_n$ implica que $Z \in \Lambda(\Gamma) \subset L_1(\hat{\Gamma})$. Por último, el lema 2.13 implica que $L_2(\hat{\Gamma}) \subset \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$.

Caso 2. Supongamos que Γ contiene elementos parabólicos.

Si K es un subconjunto compacto de

$$P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(\hat{\Gamma}) \cup L_1(\hat{\Gamma})) = P^2_{\mathbb{C}} - \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$$

entonces el lema 4.5 i) implica que los puntos de acumulación de la órbita de K están contenidos en $\Lambda(\Gamma)$. Por tanto, $L_2(\hat{\Gamma}) \subset \Lambda(\Gamma)$.

Recíprocamente, si tomamos el conjunto compacto que consta de un punto contenido en $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} - \Lambda(\Gamma) \subset P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(\hat{\Gamma}) \cup L_1(\hat{\Gamma}))$ entonces el conjunto de los puntos de acumulación de su $\hat{\Gamma}$-órbita es igual a $\Lambda(\Gamma)$.

$\square$

La prueba de la siguiente proposición es prácticamente la misma que la de la proposición 4.3.

Proposición. 4.8. *Sea $\Gamma \subset PSL(2,\mathbb{C})$ un grupo kleiniano clásico, con conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ considerado como subconjunto de la línea en el infinito $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : z_3 = 0\}$. Supongamos que Γ tiene una suspensión $\tilde{\Gamma} \subset PSL(3,\mathbb{C})$ y denotemos por Z_3 al punto $[0 : 0 : 1]$. Se tienen las siguientes igualdades:*

$$L_0(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ contiene elementos parabólicos unipotentes,} \\ \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\} & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ no contiene elementos parabólicos unipotentes,} \end{cases}$$

$$L_1(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \Lambda(\Gamma) & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ contiene elementos parabólicos unipotentes,} \\ \Lambda(\Gamma) \cup \{Z_3\} & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ no contiene elementos parabólicos unipotentes,} \end{cases}$$

$$L_2(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} \Lambda(\Gamma) & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ contiene elementos parabólicos unipotentes,} \\ \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3} & \textit{si } \tilde{\Gamma} \textit{ no contiene elementos parabólicos unipotentes.} \end{cases}$$

Por lo tanto, $\Lambda(\hat{\Gamma}) = \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}$.

El siguiente corolario nos será de utilidad en la prueba del teorema 5.33.

Corolario. 4.9. *Sea $\check{\Gamma}$ un subgrupo de $PSL(3,\mathbb{C})$ que satisface las siguientes condiciones:*

i) Cada elemento $\check{\gamma}\in\check{\Gamma}$ tiene un levantamiento a $SL(3,\mathbb{C})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} A_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & \lambda \end{pmatrix}, \quad |\lambda| = 1.$$

ii) El grupo $\check{\Gamma}$ actúa como un grupo kleiniano clásico en la línea $\overleftrightarrow{Z_1Z_2} = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} : z_3 = 0\}$ (denotamos por $\Lambda(\Gamma)$ el conjunto límite clásico obtenido de la acción de $\check{\Gamma}$ sobre $\overleftrightarrow{Z_1Z_2}$).

iii) $L_0(\check{\Gamma}) = \Lambda(\Gamma)\cup\{Z_3\}$, donde $Z_3 = [0:0:1]$,

entonces

$$L_1(\check{\Gamma}) = \Lambda(\Gamma)\cup\{Z_3\}$$

y

$$L_2(\check{\Gamma}) = \bigcup_{Z\in\Lambda(\Gamma)} \overleftrightarrow{ZZ_3}.$$

La prueba del corolario 4.9 es prácticamente la misma que la del caso cuando Γ no tiene elementos parabólicos en la proposición 4.3.

Por último consideramos un ejemplo de un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ que no es un grupo kleiniano complejo.

Sea $\mathcal{P} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}[i])$ el grupo de Picard. Se sabe que este subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ tiene región de discontinuidad vacía en $\hat{\mathbb{C}}$. De hecho, si $w = (\frac{p}{r}) + i(\frac{q}{r}), p,q,r\in\mathbb{Z}, r\neq 0$ entonces el elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ inducido por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1-wr^2 & (rw)^2 \\ -r^2 & 1+wr^2 \end{pmatrix}$$

pertenece a $\mathcal{P}$ y es parabólico con punto fijo w. Claramente el conjunto de puntos $\{w = (\frac{p}{r}) + i(\frac{q}{r}) : p,q,r\in\mathbb{Z}, r\neq 0\}$ es denso en $\mathbb{C}$. Sea $\hat{\mathcal{P}}$ la doble suspensión de $\mathcal{P}$ a $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$, entonces $\hat{\mathcal{P}}$ es un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ y Además $L_0(\hat{\mathcal{P}}) = P^2_{\mathbb{C}}$. Por tanto $\Omega(\hat{\mathcal{P}}) = \varnothing$.

Capítulo 5

Subgrupos Discretos de $PU(2,1)$

Sea G un grupo discreto de $PU(2,1) \cong U(2,1)/U(1)$. Este grupo actúa en el plano hiperbólico complejo $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ por isometrías holomorfas, donde pensamos en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ como la bola

$$\{[z_1 : z_2 : z_3] \in P^2_{\mathbb{C}} | \, |z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_3|^2\},$$

equipado con la métrica de Bergman. El conjunto límite $L(G)$ de G en el sentido de Chen-Greenberg [2] es el conjunto de puntos de acumulación de cualquier G-órbita de un punto en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$; precisamente como sucede para grupos kleinianos clásicos en geometría hiperbólica real, $L(G)$ está contenido en la "esfera en el infinito" $S^3 = \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Por otra parte, ya tenemos la noción de conjunto límite según Kulkarni [8] que podemos usar para G, considerado como un grupo de automorfismos de $P^2_{\mathbb{C}}$.

En este capítulo demostramos que, si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$, y $\Lambda(G)$ denota el conjunto límite según Kulkarni [8] de G actuando en $P^2_{\mathbb{C}}$, entonces el conjunto límite de Chen-Greenberg [2] coincide con la restricción de $\Lambda(G)$ a $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$. Aún más, demostramos que el conjunto $\Lambda(G)$ se obtiene del conjunto límite, $L(G)$, según Chen-Greenberg, tomando la unión de todas las líneas complejas tangentes a $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que pasan por puntos de $L(G)$.

5.1. El Conjunto Límite Según Chen-Greenberg

Denotaremos por ρ la métrica de Bergman en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. La expresión $B_\rho(x, C)$, denotará la bola con centro en $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y radio $C > 0$, con la métrica de Bergman en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Lema. 5.1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tal que $x_n \to q \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, y C es un número positivo fijo, entonces el diámetro euclidiano de $B_\rho(x_n, C)$ tiende a cero.*

Prueba. Usaremos el modelo de la bola unitaria $B^2 \subset \mathbb{C}^2$ para $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Sea $x \in B^2$. Todas las geodésicas complejas que pasan por x tienen la forma

$$\Sigma_y = \{x + \zeta y : \zeta \in \mathbb{C}, |x + \zeta y| < 1\}, y \in \mathbb{C}^2, |y| = 1.$$

La distancia euclidiana de Σ_y al origen de B^2 es igual a

$$|x - \langle\langle x, y\rangle\rangle y| =: r(y),$$

y Σ_y es un disco euclidiano de radio euclidiano

$$(1 - r(y)^2)^{1/2} = (1 - |x|^2 + |\langle\langle x, y\rangle\rangle|^2)^{1/2} =: R(y).$$

Aún más, la métrica de Bergman en Σ_y tiene la forma

$$\frac{4R(y)^2 dz d\bar{z}}{(R(y)^2 - |z|^2)^2}.$$

Ahora bien, $B_\rho(x, C) \cap \Sigma_y$ es un disco hiperbólico de radio hiperbólico C en Σ_y y cuyo centro hiperbólico, $x \in \Sigma_y$, se encuentra a distancia euclidiana $|\langle\langle x, y\rangle\rangle|$ del centro euclidiano de Σ_y (dicho centro corresponde al punto $x - \langle\langle x, y\rangle\rangle y$), entonces $B_\rho(x, C) \cap \Sigma_y$ es un disco euclidiano de radio euclidiano

$$C_e(y) = R(y)\tanh(C/2)\frac{R(y)^2 - |\langle\langle x, y\rangle\rangle|^2}{R(y)^2 - \tanh^2(C/2)|\langle\langle x, y\rangle\rangle|^2}.$$

Si x permanece fijo, entonces $C_e(y)$ es una función continua de $y \in S^3$. Sea y_M tal que $C_e(y_M) \geq C_e(y), \forall y \in S^3$. Sean $X_1, X_2 \in B_\rho(x, C)$, entonces existen $y_1, y_2 \in S^3$ tales que $X_k \in \Sigma_{y_k} \cap B_\rho(x, C)$, $k = 1, 2$. Si σ_k denota el centro euclidiano del disco $\Sigma_{y_k} \cap B_\rho(x, C)$, se tiene que

$$|X_1 - X_2| \leq |X_1 - \sigma_1| + |X_2 - \sigma_2| \leq 2C_e(y_1) + 2C_e(y_2) \leq 4C_e(y_M).$$

Por último, observemos que $C_e(y) \to 0$ para cada y, cuando x se acerca a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. $\square$

Definición. 5.2. *El* conjunto límite, *$L(G)$, (* de Chen-Greenberg*) es el conjunto de puntos en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que son puntos de acumulación de la G-órbita de algún punto en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Es importante observar que el siguiente lema 5.3, el cual es una ligera generalización para el caso complejo bidimensional del lema 4.3.1 de [2], implica que $L(G)$ no depende del punto $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Lema. 5.3. *Sea $p \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $PU(2,1)$ tal que $\lim_{n\to\infty} g_n(p) = q \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Entonces para toda $p' \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} g_n(p') = q$. Aún más, si $K \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es un conjunto compacto, entonces la sucesión de funciones $g_n\big|_K$ converge uniformemente a la función constante con valor q.*

Prueba. Procedamos por contradicción, y supongamos que existe $p' \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tal que sucesión $\{g_n(p')\}$ no converge a q. Sin embargo, existe una subsucesión de $\{g_n(p')\}$ que converge a un punto $q' \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, $q' \neq q$. Así que podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} g_n(p) = q$ y $\lim_{n\to\infty} g_n(p') = q'$. Denotemos por $[p,p']$ y $[q,q']$ los segmentos geodésicos (con respecto a la métrica de Bergman) que unen a p con p' y a q con q', respectivamente. La distancia, inducida por la métrica de Bergman, entre p y p' es igual a la longitud de $[p,p']$, la cual a su vez es igual a la longitud de $[g_n(p), g_n(p')]$, pero esta longitud tiende a ∞ cuando $n \to \infty$, una contradicción. Por tanto $g_n(p') \to q$.

Ahora demostramos que la convergencia es uniforme. Si K es un conjunto compacto en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces existe $C > 0$ tal que $K \subset B_\rho(\mathbf{0}, C)$, donde $\mathbf{0}$ denota el origen en el modelo de la bola B^2 para $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. La primera parte de la prueba implica que $g_n(\mathbf{0}) \to q$. Dado que g_n es una isometría de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, tenemos que $g_n(B_\rho(\mathbf{0}, C)) = B_\rho(g_n(\mathbf{0}), C)$ para cada n. El resultado se obtiene de 5.1.

$\square$

El siguiente lema, que nos será de gran utilidad, se encuentra en [2], y nos dice que el conjunto $L(G)$ es minimal en un sentido.

Lema. 5.4. *[2] Sea $G \leq PU(2,1)$. Si $X \subset \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es un conjunto cerrado, G-invariante, y contiene más de un punto entonces $L(G) \subset X$.*

Prueba.

Sea $q \in L(G)$. Existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $g_n(p) \to q$ para todo $p \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Supongamos, tomando subsucesiones si es necesario, que $g_n(x) \to \hat{x}$, $g_n(y) \to \hat{y}$, con $\hat{x} \neq q, \hat{y} \neq q$. Sea $p' \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ un punto sobre la geodésica determinada por x e y. Entonces $g_n(p')$ está sobre la geodésica determinada por $g_n(x)$ y $g_n(y)$. Dado que $q \neq \hat{x}$, $q \neq \hat{y}$, se tiene que $q = \lim_{n\to\infty} g_n(p')$ pertenece a la geodésica determinada por $\lim_{n\to\infty} g_n(x) =$

$\hat{x}$ y $\lim_{n\to\infty} g_n(y) = \hat{y}$, esto es una contradicción. Entonces, $g_n(x) \to q$ o $g_n(y) \to q$, lo que implica que $q \in X$. Por tanto, $L(G) \subset X$. $\square$

La siguiente proposición es un caso especial de un teorema de Siegel [14].

Proposición. 5.5. *Sea G un subgrupo de $PU(2,1)$. El grupo G es discreto si y solo si G actúa propia y discontinuamente sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Prueba. Supongamos que G no actúa propia y discontinuamente en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Sea $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ para el cual existe una sucesión de elementos diferentes, g_n de G, tal que $g_n(U) \cap U \neq \varnothing$ para cada n, donde U es la bola abierta de radio r (con respecto a la métrica de Bergman) con centro en x, entonces $\rho(x, g_n(x)) < 2r$, lo que implica que existe una subsucesión, que aún denotamos por g_n tal que $g_n(x) \to y \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Dado que $PU(2,1)$ actúa transitivamente sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, existe $f \in PU(2,1)$ tal que $f(y) = x$, y entonces

$$f \circ g_n(x) \to x.$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar $x = [0 : 0 : 1]$, y en este caso existe una bola cerrada de radio finito (por tanto compacta), B, en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que contiene a todos los puntos $f \circ g_n(x)$. Ahora bien, la función

$$\phi : PU(2,1) \to \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$$

$$\phi(g) = g(x)$$

es la proyección de un haz fibrado con base $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y fibra compacta $U(2)$. La sucesión $f \circ g_n$ está contenida en el conjunto compacto $\phi^{-1}(B)$. Luego, existe $g \in PU(2,1)$ tal que $f \circ g_n \to g$ y G no es discreto.

Recíprocamente, si G no es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$, entonces existe una sucesión de elementos g_n de G tal que $g_n \to 1$, lo que implica que, para cada $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, $g_n(x) \to x$. Por tanto, G no actúa propia y discontinuamente sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

$\square$

Este es un buen momento para recordar que $\Omega(G)$ no es necesariamente la región de discontinuidad maximal. Sin embargo, tenemos la siguiente proposición.

Proposición. 5.6. *Si $G \subset PU(2,1)$ es un subgrupo discreto entonces G es un grupo kleiniano complejo. De hecho, $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \subset \Omega(G)$.*

Prueba.

Primero tenemos que $L_0(G) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$ porque la acción de G sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es propiamente discontinua (proposición 5.5).

Si x es un punto en $P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces la cerradura de la órbita de x no intersecta a $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, porque $P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es un cerrado $PU(2,1)$-invariante. Si $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces no hay puntos de acumulación de la órbita de x en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ porque la acción de G sobre $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es propiamente discontinua. Por tanto, $L_1(G) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$.

Si $x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y existe un compacto $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G) \cup L_1(G)$ tal que x es punto de acumulación de $\{g(K)\}_{g \in G}$, entonces existe una sucesión g_n de elementos de G y una sucesión k_n de elementos de K, que podemos suponer convergente, digamos a $k \in K$, tales que $g_n(k_n) \to x \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Podemos suponer, entonces, que $(k_n) \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y entonces $k \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$.

Si $k \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces existe una subsucesión de $(g_n(k))$, que converge a $q \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, pero necesariamente $q \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, porque $L_1(G) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$. Ahora bien, usando la métrica de Bergman, la longitud del segmento geodésico que une k_n con k es igual a la longitud del segmento geodésico que une $g_n(k_n)$ con $g_n(k)$. Cuando $n \to \infty$ esta longitud se aproxima a la longitud del segmento geodésico que une x con q, pero esta longitud es infinita, lo cual contradice que $k = \lim k_n$. Por tanto $k \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que g_n^{-1} converge uniformemente en compactos de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ a una función constante con valor $q \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ (por el lema 5.3). Entonces la sucesión de funciones g_n^{-1} restringidas al compacto $\{g_n(k_n)\} \cup \{x\}$ converge a la función constante con valor q, en particular, $k_n = g_n^{-1}(g_n(k_n)) \to q$, lo que implica que $k = q \in L_1(G)$, una contradicción. Por tanto, $L_2(G) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$.

□

5.2. Bisectrices y Esferas Isométricas.

Ahora haremos un paréntesis para introducir útil maquinaria que el lector puede encontrar en el bonito libro de Goldman [5]. La herramienta que necesitamos es el concepto análogo a la circunferencia isométrica.

Definición. 5.7. *Sean $z_1, z_2 \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ dos puntos diferentes. La* bisectriz equidistante de z_1 y z_2 *(o la* bisectriz *de $\{z_1, z_2\}$) se define como*

$$\mathfrak{E}\{z_1, z_2\} := \{z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} : \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\},$$

donde ρ es la métrica de Bergman en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Una superficie equidistante *o* bisectriz *es un subconjunto $\mathfrak{E}$ tal que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\{z_1, z_2\}$ para alguna pareja z_1, z_2. En este caso se dice que $\mathfrak{E}$ es* equidistante de *z_1 (o de z_2). La frontera de una bisectriz en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es por definición una* esfera vertebral *en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.*

Sean z_1, z_2 como antes. Sea $\Sigma \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ la geodésica compleja generada por z_1 y z_2, diremos que Σ es la vértebra compleja *(ó* $\mathbb{C}$-vértebra*) de $\mathfrak{E}$ (*con respecto a *z_1, z_2). La* vértebra de $\mathfrak{E}$ *(*con respecto a *z_1, z_2) es igual a*

$$\sigma\{z_1, z_2\} = \mathfrak{E}\{z_1, z_2\} \cap \Sigma = \{z \in \Sigma | \rho(z_1, z) = \rho(z_2, z)\};$$

esto es, la bisectriz ortogonal del segmento geodésico que une z_1 y z_2 en Σ.

Lema. 5.8. *[5] Sea $L \subset B^2_{\mathbb{C}}$ un subespacio lineal complejo uni-dimensional, con proyección ortogonal Π. Entonces para toda $u \in B^2_{\mathbb{C}} - L$ y $s \in L$, las geodésicas de $\Pi(u)$ a u y de $\Pi(u)$ s son ortogonales y generan un 2-plano totalmente real y totalmente geodésico. Además*

$$\cosh\left(\frac{\rho(u,s)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\rho(u,\Pi(u))}{2}\right)\cosh\left(\frac{\rho(\Pi(u),s)}{2}\right).$$

Prueba. Aplicando un automorfismo, podemos suponer que $L = \{0\} \times B^1 \subset B^2$, de tal manera que si $z = (\zeta_1, \zeta_2)$, entonces $\Pi(z) = (0, \zeta_2)$. Aún más, aplicando un automorfismo que preserva a L, podemos suponer que $\Pi(u) = (0,0)$, y entonces $u = (u_1, 0)$. Dado que las geodésicas que pasan por $(0,0)$ son líneas euclidianas, vemos que la geodésica que une $\Pi(u)$ con u (resp. la que une $\Pi(u)$ con s) tiene vector tangente

$$\vec{v_u} = (v_1, 0) \text{ (resp. } \vec{v_s} = (0, v_2))$$

y $\langle \vec{v_u}, \vec{v_s} \rangle = 0$. Por tanto $\vec{v_u}$ y $\vec{v_s}$ son ortogonales (porque $Re\langle \vec{v_u}, \vec{v_s} \rangle = 0$) y generan un subespacio totalmente real de T_0B^2 (porque $Im\langle \vec{v_u}, \vec{v_s} \rangle = 0$). Se sigue que el 2-plano $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{R}s \oplus \mathbb{R}u$ intersecta a B^2 en una subvariedad totalmente geodésica y totalmente real. La última afirmación es simplemente el teorema de Pitágoras.

□

Proposición. 5.9. *(Giraud [4], Mostow [10]) Sean $\mathfrak{E}, \Sigma$ y σ como antes. Si*

$$\Pi_\Sigma : \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \to \Sigma$$

es la proyección ortogonal sobre Σ, entonces

$$\mathfrak{E} = \Pi_\Sigma^{-1}(\sigma) = \bigcup_{s \in \sigma} \Pi_\Sigma^{-1}(s).$$

Prueba. Sea $z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. El lema anterior implica que

$$\cosh\left(\frac{\rho(z, z_j)}{2}\right) = \cosh\left(\frac{\rho(z, \Pi(z))}{2}\right) \cosh\left(\frac{\rho(\Pi(z), z_j)}{2}\right)$$

para $j = 1, 2$, así que

$$\begin{aligned} z \in \mathfrak{E}\{z_1, z_2\} &\iff \rho(z, z_1) = \rho(z, z_2) \\ &\iff \rho(\Pi_\Sigma(z), z_1) = \rho(\Pi_\Sigma(z), z_2) \\ &\iff \Pi_\Sigma(z) \in \sigma\{z_1, z_2\}, \end{aligned}$$

como se quería.

□

Definición. 5.10. *(Mostow [10]) Las geodésicas complejas $\Pi_\Sigma^{-1}(s)$, para $s \in \sigma$ se llaman las* rebanadas *de $\mathfrak{E}$ (con respecto a z_1, z_2).*

Corolario. 5.11. *Una bisectriz es una subvariedad analítica real de codimensión real uno en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, que es difeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Una esfera vertebral es una subvariedad analítica real de codimensión 1 en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que es difeomorfa a S^2.*

Prueba. La demostración se sigue directamente del hecho que la proyección ortogonal

$$\Pi_\Sigma : \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \to \Sigma$$

es una fibración analítica real.

□

Salvo que se mencione lo contrario, en lo que resta del capítulo supondremos que $g \in PU(2,1)$ y g no fija a $\mathbf{0} \in B^2$. Una consecuencia inmediata de la descomposición en rebanadas de una bisectriz es el hecho que el semi-espacio $\{z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \,|\, \rho(z, z_1) \geq \rho(z, z_2)\}$ es igual al conjunto $\Pi_\Sigma^{-1}\{z \in \Sigma \,|\, \rho(z_1, z) \geq \rho(z_2, z)\}$. Usamos esta propiedad en la prueba del siguiente lema.

Lema. 5.12. *Sea (x_n) una sucesión de elementos de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $x_n \to q \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Para simplificar la notación, identificamos $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ con la bola unitaria de $\mathbb{C}^2$.*

i) Si S_n denota el semi-espacio cerrado $S_n = \{z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \,|\, \rho(z, \mathbf{0}) \geq \rho(z, x_n)\}$, y $\partial S_n \subset \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es su frontera, entonces el diámetro euclidiano del conjunto $S_n \cup \partial S_n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$.

ii) Si (z_n) es una sucesión tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $z_n \in S_n \cup \partial S_n$, entonces $z_n \to q$.

Prueba.

i) Podemos suponer que $x_n = (r_n, 0)$, $0 < r_n < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, porque el estabilizador de $\mathbf{0} \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ bajo la acción de $PU(2,1)$ es $U(2)$, entonces $r_n \to 1$ cuando $n \to \infty$. Luego, para cada n, la vértebra compleja, Σ_n, de $\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}\{\mathbf{0}, x_n\}$ es $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$, así que $\Pi_{\Sigma_n}(z_1, z_2) = (z_1, 0)$. La descomposición en rebanadas 5.10 implica que $S_n = \Pi_\Sigma^{-1}(\{z \in \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\} \,|\, \rho(z, \mathbf{0}) \geq \rho(z, x_n)\})$, y observamos que el conjunto $\{z \in \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\} \,|\, \rho(z, \mathbf{0}) \geq \rho(z, x_n)\}$ está contenido en el conjunto $\{(z_1, 0) \in \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \,|\, Re(z_1) \geq m_n\}$ para cada n, donde m_n denota al punto de intersección del eje real en $\mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\}$ y la vértebra, σ_n, de $\mathfrak{E}\{\mathbf{0}, x_n\}$. Entonces $S_n \subset \Pi_\Sigma^{-1}(\{(z_1, 0) \in \mathbf{H}^1_{\mathbb{C}} \times \{0\} \,|\, Re(z_1) \geq m_n\}) = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \,|\, Re(z_1) \geq m_n\}$, por lo tanto

$$S_n \cup \partial S_n \subset \{(z_1, z_2) \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \,|\, Re(z_1) \geq m_n\},$$

y el diámetro euclidiano del conjunto $\{(z_1, z_2) \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \,|\, Re(z_1) \geq m_n\}$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$, porque $m_n \to 1$ cuando $n \to \infty$.

ii) Se sigue directamente de i).

$\square$

Proposición. 5.13. *Si g_n es una sucesión de elementos diferentes de un subgrupo discreto G de $PU(2,1)$, entonces existe una subsucesión, que aún denotamos g_n, y puntos $x, y \in L(G)$, tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$.*

Prueba. Podemos suponer, eliminando un número finito de términos de la sucesión, si es necesario, que $g_n(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ para cada n, porque $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \subset \Omega(G)$. Existe una subsucesión, que aún denotamos g_n, tal que $g_n(\mathbf{0}) \to x \in L(G)$ y $g_n^{-1}(\mathbf{0}) \to y \in L(G)$. Sean

$$S_{g_n} = \{z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \mid \rho(z,0) \geq \rho(z, g_n^{-1}(0))\},$$

y

$$S_{g_n^{-1}} = \{z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \mid \rho(z,0) \geq \rho(z, g_n(0))\}.$$

El resultado se sigue de que los diámetros euclidianos de los conjuntos, $S_{g_n} \cup \partial S_{g_n}$, $S_{g_n^{-1}} \cup \partial S_{g_n^{-1}}$ tienden a cero, de que g_n envía $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - (S_{g_n} \cup \partial S_{g_n})$ a $S_{g_n^{-1}} \cup \partial S_{g_n^{-1}}$, y de ii) del lema 5.12.

□

La prueba de la proposición anterior está inspirada en la prueba en [9] del resultado análogo en geometría hiperbólica real. Los conjuntos $S_{g_n} \cup \partial S_{g_n}$ juegan un papel similar al del círculo isométrico. De hecho, en [5], la frontera topológica de ∂S_n en $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ se llama la esfera isométrica de g_n con respecto a $\mathbf{0} \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Corolario. 5.14. *Si g_n es una sucesión de diferentes elementos de G entonces existe un a subsucesión, que aún denotamos g_n, y puntos $x, y \in L(G)$ tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$ y $g_n^{-1}(z) \to y$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x\}$.*

Prueba.

La proposición anterior nos dice que existe una subsucesión, g_n, y puntos $x, y \in L(G)$ tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$. Repitiendo la prueba de la proposición 5.13, pero ahora usando la sucesión $h_n = g_n^{-1}$, se obtiene que $g_n^{-1}(z) \to y$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x\}$.

□

El siguiente resultado es el teorema 2.15 c) de [7]. Nosotros damos una prueba que es una imitación de la prueba para grupos kleinianos clásicos (ver [9]).

Proposición. 5.15. *Si $L(G)$ tiene más de dos puntos entonces es un conjunto perfecto.*

Prueba.
Suponga que $L(G)$ contiene al menos tres puntos. Para cualquier punto $x \in L(G)$, existe una sucesión $\{g_m\}$ y existe un $y \in L(G)$ tal que $g_m(z) \to x$ para toda $z \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$. En particular, existe tal sucesión y existen dos puntos $x_1, x_2 \in L(G)$ no necesariamente diferentes de x, tales que $g_m(x_1) \to x$ y $g_m(x_2) \to x$. Para cada m, ya sea $g_m(x_1) \neq x$ ó $g_m(x_2) \neq x$. Por tanto, existe una sucesión de elementos diferentes de $L(G)$ que convergen a x. $\square$

Definición. 5.16. *Un subgrupo discreto, G, de $PU(2,1)$ se llama* elemental *si $L(G)$ consta de 2 o menos elementos, de lo contrario, se llama* no elemental.

Lema. 5.17. *Si G es un subgrupo no-elemental de $PU(2,1)$, entonces existen $x, y \in L(G)$, $x \neq y$, y una sucesión, g_n, de elementos diferentes de G tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$ y $g_n^{-1}(z) \to y$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x\}$.*

Prueba. Primero observemos G deja fijo a lo más un punto (porque si $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ son dos puntos diferentes que satisfacen que $g(z_j) = z_j$ para todo $g \in G$, $j = 1, 2$, entonces $\{z_1, z_2\}$ es un cerrado G-invariante. El lema 5.4 implica que $L(G) \subset \{z_1, z_2\}$, lo que contradice que G es no-elemental). Sea $x \in L(G)$ un punto que no se queda fijo bajo todo elemento de G. El corolario 5.14 implica que existe una sucesión, g_n, de diferentes elementos de G y un punto $x' \in L(G)$, no necesariamente diferente de x, tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente, en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x'\}$, y $g_n^{-1}(z) \to x'$ en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x\}$.
Si $x' \neq x$ entonces ya acabamos.
Si $x = x'$ entonces existe $g \in G$ tal que $y = g(x') \neq x$, y en este caso los elementos x, y y la sucesión $g_n g^{-1}$ satisfacen las condiciones del lema.

$\square$

El siguiente resultado está contenido esencialmente en [7].

Proposición. 5.18. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ tal que $L(G)$ contiene al menos dos puntos diferentes, entonces existe un elemento loxodrómico en G.*

Prueba. Primero supongamos que $L(G)$ tiene precisamente dos puntos, entonces podemos considerar G como un grupo fuchsiano clásico, porque la geodésica compleja determinada por los dos puntos de $L(G)$ es G-invariante. Además, $L(G)$ concuerda con el conjunto límite clásico, así que G tiene un elemento loxodrómico.

Si G no es elemental entonces usamos el lema 5.17 y encontramos $x, y \in L(G)$, $x \neq y$, y una sucesión, g_n, de elementos diferentes de G tales que $g_n(z) \to x$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$ y $g_n^{-1}(z) \to y$ uniformemente en compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{x\}$. Sean $D_x, D_y \subset \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ dos 3-bolas abiertas ajenas, tales que $x \in D_x$, $y \in D_y$. Existe n tal que $g_n(\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - D_y) \subset D_x$ y $g_n^{-1}(\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - D_x) \subset D_y$. El teorema del punto fijo de Brouwer implica que g_n tiene un punto fijo $z_1 \in D_x$. Un razonamiento análogo prueba que g_n^{-1} tiene un punto fijo $z_2 \in D_y$. Por tanto, g_n tiene dos puntos fijos en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, así que g_n es loxodrómico o una reflexión compleja. Si g_n fuera una reflexión compleja, entonces toda la frontera de la geodésica compleja determinada por z_1 y z_2 está fija, punto por punto, por g_n, lo cual no sucede puesto que hay puntos de dicha frontera contenidos en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - D_y$. Por tanto g_n es loxodrómico.

□

Proposición. 5.19. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ tal que cada elemento tiene orden finito, entonces G es finito.*

Prueba. Supongamos que G es infinito, entonces $|L(G)| \geq 1$. La proposición 5.18 implica que $L(G)$ contiene exactamente un punto. Denotemos por x el único elemento de $L(G)$. Observemos que la línea tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en x, la cual denotamos por l_x, es G-invariante. Aún más, G actúa como un grupo kleiniano clásico y finito en l_x, porque de lo contrario G tendría un elemento de orden infinito. Sea $g \in G - \{1\}$ un elemento que actúa como la identidad en l_x (dicho elemento existe puesto que supusimos que G es infinito), entonces g tiene orden finito y fija a $x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces g es una reflexión compleja cuya geodésica compleja fija contiene a x en su frontera. Sin embargo, un elemento de $PU(2,1)$ con tales características no existe. Por lo tanto, G es finito.

□

5.3. Comparando $\Lambda(G)$ y $L(G)$

En esta sección enunciamos y demostramos los resultados principales de este capítulo. Necesitaremos varios lemas. El primero de ellos será útil para relacionar los conjuntos $\Lambda(G)$ y $L(G)$.

Lema. 5.20. *Sea $(w_n) \subset P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ una sucesión tal que $w_n \to w$. Denotemos por Σ_n la geodésica compleja que es polar a w_n. Supongamos que (v_n) es una sucesión tal que $v_n \in \Sigma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $v_n \to v$.*

a) Si $w \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ entonces $w = v$.

b) Si $w \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ entonces $v \in \Sigma \cup \partial\Sigma$, donde Σ denota la geodésica compleja que es polar a w. En particular, si $v \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ entonces $w \in l_v$, donde l_v denota a la única línea compleja que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en v.

Prueba. Recordemos que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota al producto hermitiano de $\mathbb{C}^3$ dado por

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1\bar{y_1} + x_2\bar{y_2} - x_3\bar{y_3}.$$

Sea $\tilde{w}_n$ (respectivamente $\tilde{v}_n$) un levantamiento a S^5 de w_n (respectivamente de v_n). Tomando subsucesiones, si es necesario, podemos suponer que $\tilde{v}_n \to v$ y $\tilde{w}_n \to w$. Observemos que los elementos $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ son levantamientos, a S^5, de v y w, respectivamente. Además las ecuaciones

$$\langle \tilde{v}_n, \tilde{w}_n\rangle = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

implican que $\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle = 0$.

a) Supongamos que $w \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces la línea compleja en $P^2_{\mathbb{C}}$ inducida por el espacio complejo y bidimensional $\{w\}^\perp$, es la única línea compleja que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en w. Dado que $\tilde{v} \in \{w\}^\perp$ y $v \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, tenemos que $v = w$.

b) Supongamos que $w \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, entonces la ecuación $\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle = 0$ implica que $v \in \Sigma \cup \partial\Sigma$. En particular, si $v \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces la ecuación $\langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle = 0$ implica que $w \in l_v$. $\square$

Lema. 5.21. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L(G) = L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}.$$

Prueba. Si $L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$ entonces la proposición 5.19 implica que G es finito, así que $L(G) = \varnothing$.

Supongamos que $|L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}| = 1$. Denotemos por x al único elemento de $L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y observemos que, para cada $g \in G$, tenemos que $g(x) = x$, porque $L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es G-invariante. Así que la proposición 5.13 implica que $x \in L(G)$. Procedamos por contradicción y supongamos que existe $y \in L(G)$, $y \neq x$, entonces existe un elemento loxodrómico en G (proposición 5.18), cuyos puntos fijos en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ pertenecen a $L_0(G)$; una contradicción. Por tanto, $L(G) = L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Si $|L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}| \geq 2$ entonces el lema 5.4 implica que $L(G) \subset L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Solo falta demostrar la inclusión opuesta. Primero observamos que $L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \overline{\{x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} : x \text{ tiene grupo de isotropía infinito}\}}$, y por último, si $x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es un punto que tiene grupo de isotropía infinito, entonces el lema 5.13 implica que x pertenece al conjunto (cerrado) $L(G)$. $\square$

Lema. 5.22. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L(G) = L_1(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}.$$

Prueba. Si G es finito entonces ambos conjuntos en la igualdad son vacíos. Supongamos que G es infinito y observemos que la definición de $L(G)$ y el hecho que $L_0(G) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$ implican que $L(G) \subset L_1(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Ahora demostraremos la inclusión opuesta; esto es, que $L_1(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \subset L(G)$. Sea $z \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, y supongamos que existe una sucesión g_n de diferentes elementos de G y un punto $\zeta \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$ tal que $g_n(\zeta) \to z$. Consideramos los siguientes tres casos:

1. Supongamos que $\zeta \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$, entonces por definición $z \in L(G)$.

2. Si $\zeta \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$, entonces el lema 5.21 implica que $\zeta \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - L(G)$. La proposición 5.13 implica que $z \in L(G)$.

3. Finalmente suponemos que $\zeta \in P^2_{\mathbb{C}} - (\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \cap L_0(G))$. Sea Σ la geodésica compleja que es polar a ζ, entonces la geodésica compleja $g_n(\Sigma)$ es polar a $g_n(\zeta)$. Tomemos un punto $x \in \Sigma$ y una subsucesión de g_n aún denotada g_n, tal que $g_n(x) \to q \in L(G)$. El lema 5.20 a) implica que $z = q \in L(G)$.

$\square$

Lema. 5.23. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L(G) = L_2(G) \cap \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}.$$

Prueba. Suponemos que G es infinito, porque cuando G es finito la igualdad es trivial. La definición de $L(G)$ y el hecho que $(L_0(G) \cup L_1(G)) \cap \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \varnothing$ implican que $L(G) \subset L_2(G) \cap \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Demostremos la otra inclusión; esto es, que $L_2(G) \cap \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} \subset L(G)$. Sea $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$ un conjunto compacto. Si $z \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ es un punto de acumulación de la órbita de K, entonces existe una sucesión $(k_n) \subset K$, tal que $k_n \to k \in K$, y una sucesión de diferentes elementos $(g_n) \subset G$ tal que $g_n(k_n) \to z$. Consideramos cuatro casos:

1. Si $k \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$ entonces podemos suponer que $k_n \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ para toda n. La proposición 5.13 nos dice que existe una subsucesión, que aún denotamos g_n, y puntos $x, y \in L(G)$ tales que $g_n(\cdot) \to x$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - \{y\}$, entonces $z = x \in L(G)$.

2. Supongamos que $k \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$ y existe una subsucesión de k_n, aún denotada k_n, tal que $k_n \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para cada n. Los lemas 5.21 y 5.22 implican que $k \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - L(G)$, y por la proposición 5.13 tenemos que $z \in L(G)$.

3. Supongamos que $k \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cap L_1(G)) = \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - L(G)$ y existe una subsucesión de k_n, aún denotada k_n, tal que $k_n \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para toda n. Sea x_n un elemento de Σ_n. Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $x_n \to x \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$. El lema 5.20 a) implica que $x = k$. La proposición 5.13 garantiza la existencia de una subsucesión de g_n, aún denotada g_n, tal que $g_n(x_n) \to q \in L(G)$.

   La geodésica compleja $g_n(\Sigma_n)$ es polar a $g_n(k_n)$, y sabemos que $g_n(k_n) \to z$, entonces el lema 5.20 a) implica que $z = q \in L(G)$.

4. Si $k \in P^2_{\mathbb{C}} - (\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \cup L_0(G) \cup L_1(G))$, entonces podemos suponer, eliminando un número finito de términos si es necesario, que $k_n \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para toda n. Sea Σ_n (respectivamente Σ) la geodésica compleja que es polar a k_n (respectivamente k). Consideremos para cada n un elemento $x_n \in \Sigma_n$. Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $x_n \to x \in \Sigma \cup \partial\Sigma$. Aún más, podemos escoger la sucesión x_n de tal

manera que $x \in \Sigma \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Una vez más aplicamos la proposición 5.13 para encontrar subsucesiones de g_n y x_n, tales que $g_n(x_n) \to q \in L(G)$. Finalmente, la geodésica compleja $g_n(\Sigma_n)$ es polar a $g_n(k_n)$, y sabemos que $g_n(k_n) \to z$, entonces el lema 5.20 a) implica que $z = q \in L(G)$.

□

Teorema. 5.24. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L(G) = L_0(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = L_1(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = L_2(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \Lambda(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}},$$

donde $\Lambda(G) = L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G)$ es el conjunto límite según Kulkarni [8] de G actuando en $P^2_{\mathbb{C}}$, y $L(G)$ es el conjunto límite, según Chen-Greenberg [2], de G actuando en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Prueba. Los lemas 5.21, 5.22, 5.23 demuestran las tres primeras igualdades. La última igualdad, $L(G) = \Lambda(G) \cap \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, se obtiene directamente de las primeras tres igualdades puesto que, por definición, $\Lambda(G) = L_0(G) \cup L_1(G) \cup L_2(G)$.

□

Queremos demostrar la siguiente proposición que el lector puede encontrar en el artículo [6]. Para este fin, introduciremos nueva notación.

Proposición. 5.25. *[6] Sea $g \in PU(2,1)$ un elemento loxodrómico. Si $f \in PU(2,1)$ tiene exactamente un punto fijo en común, en $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, con g, entonces el subgrupo de $PU(2,1)$ generado por f y g no es discreto.*

Sea $\mathbb{C}^{1,2}$ el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ con la forma hermitiana

$$\Phi(z,w) = -\bar{z}_0 w_0 + \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2,$$

donde $z = (z_0, z_1, z_2)$ y $w = (w_0, w_1, w_2)$. Denotamos mediante $U(1,2)$ al grupo de transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^{1,2}$. Sea e_0, e_1, e_2 la base estándar en $\mathbb{C}^{1,2}$ y hagamos $\hat{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_1), \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 + e_1), \hat{e}_2 = e_2$. Sea D la matriz que cambia la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ en la base $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2\}$, entonces

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\hat{U}(1,2) = D^{-1}U(1,2)D$, el grupo de automorfismos de la forma hermitiana $\hat{\Phi}(z,w) = -(\overline{z_0}w_1 + \overline{z_1}w_0) + \overline{z_2}w_2$. Sea $G_0 = \{g \in \hat{U}(1,2) : g([\hat{e}_0]) = [\hat{e}_0]\}$, $G_\infty = \{g \in \hat{U}(1,2) : g([\hat{e}_1]) = [\hat{e}_1]\}$, y $G_{0,\infty} = G_0 \cap G_\infty$.

Lema. 5.26. *i) Si $g \in G_0$, entonces, con respecto a la base $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$,*

$$g = \begin{pmatrix} \xi & t & \beta \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & \alpha & A \end{pmatrix}$$

con $\bar{\xi}\eta = 1, Re(\bar{t}\eta) = 1/2|\alpha|^2$, $\beta = \xi\bar{\alpha}A$ y $|A| = 1$.

ii) Si $g \in G_\infty$, entonces, con respecto a la base $\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2$,

$$g = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ s & \lambda & b \\ a & 0 & A \end{pmatrix}$$

con $\bar{\mu}\lambda = 1, Re(\bar{\mu}s) = 1/2|a|^2$, $b = \lambda\bar{a}A$ y $|A| = 1$.

iii) Un elemento en $G_{0,\infty}$ tiene la forma

$$g = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

donde $\bar{\mu}\lambda = 1$ y $|A| = 1$.

Prueba. La prueba del lema se sigue de un cálculo directo usando que g preserva la forma hermitiana $\hat{\Phi}$

$\square$

Prueba de la Proposición 5.25. Es suficiente demostrar la proposición para elementos de $P\hat{U}(1,2)$. Podemos suponer que los puntos fijos de g son $[\hat{e}_0], [\hat{e}_1]$ y que el último es el punto fijo común de f y g. Así que $f \in G_\infty$ y $g \in G_{0,\infty}$. Tenemos que

$$g = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

donde $\bar{\mu}\lambda = 1$ y $|A| = 1$. También tenemos que

$$f = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ s & \eta & b \\ a & 0 & B \end{pmatrix}$$

con $\bar{\xi}\eta = 1, Re(\bar{\xi}s) = 1/2|a|^2$, $b = \eta\bar{a}B$ y $|B| = 1$. El conmutador de f y g^n es

$$fg^nf^{-1}g^{-n} = h_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(n)} & 1 & a_{23}^{(n)} \\ a_{31}^{(n)} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_{21}^{(n)} &= s\xi^{-1} - \lambda^n s\xi^{-1}\mu^{-n} + \lambda^n bB^{-1}a\xi^{-1}\mu^{-n} \\ &\quad -bA^nB^{-1}a\xi^{-1}\mu^{-n}, \\ a_{23}^{(n)} &= -\lambda^n bB^{-1}A^{-n} + bB^{-1}, \\ a_{31}^{(n)} &= a\xi^{-1} - A^n a\xi^{-1}\mu^{-n}. \end{aligned}$$

Demostraremos que $h_1, h_2, \ldots$, son proyectivamente diferentes. Supongamos que $h_k = h_m$ con $k \neq m$, y hagamos $n = m-k$. Entonces $fg^nf^{-1}g^{-n} = \chi\, id$, pero $fg^nf^{-1}g^{-n}$ tiene solo unos en la diagonal, lo que implica que $\chi = 1$. Además,

$$a_{31}^{(n)} = a\xi^{-1} - A^n a\xi^{-1}\mu^{-n} = 0$$

$$a_{21}^{(n)} = s\xi^{-1} - \bar{\mu}^{-n}s\xi^{-1}\mu^{-n} + \bar{\mu}^{-n}bB^{-1}a\xi^{-1}\mu^{-n} - bB^{-1}a\xi^{-1} = 0.$$

Así que

$$\begin{aligned} Re(a_{21}^{(n)}) &= Re(s\bar{\xi})|\xi|^{-2} - Re(s\bar{\xi})|\xi|^{-2}|\mu|^{-2n} \\ &\quad -(1-|\mu|^{-2n})Re((\eta\bar{a}B)B^{-1}a\xi^{-1}) \\ &= (-1/2)|a|^2|\xi|^{-2}(1-|\mu|^{-2n}) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $|\mu| = 1$ ó $a = 0$. Si $|\mu| = 1$ entonces g no sería loxodrómico. Si $a = 0$, entonces $a_{21}^{(n)} = s\xi^{-1} - \bar{\mu}^{-n}s\xi^{-1}\mu^{-n} = 0$. Dado que $|\mu| \neq 1$, tenemos que $s = 0$, entonces f fija a $[\hat{e}_0]$, una contradicción. Por tanto, los elementos

$h_1, h_2, \ldots$, son proyectivamente diferentes. Por último, si $|\mu| > 1$ ($|\mu| < 1$), no es difícil verificar que

$$fg^n f^{-1} g^{-n} = h_n \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s\xi^{-1} & 1 & bB^{-1} \\ a\xi^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \hat{U}(1,2),$$

cuando $n \to \infty$ ($n \to -\infty$).

$\square$

Corolario. 5.27. *Si G es un subgrupo no elemental de $PU(2,1)$, entonces la órbita de cualquier punto en $L(G)$ es densa en $L(G)$.*

Prueba. El lema 5.4 implica que existe a lo más un punto en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ que se queda fijo bajo todo elemento de G, porque, de lo contrario, si $z_1, z_2 \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ son dos puntos diferentes que se quedan fijos bajo todo elemento de G, entonces $\{z_1, z_2\} \subset \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, es un conjunto cerrado y G-invariante y por tanto $L(G) \subset \{z_1, z_2\}$, lo cual contradice que G es no elemental.

Probaremos que ningún punto en $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ se queda fijo bajo todo elemento de G. Procedamos por contradicción, sea $x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ tal que $g(x) = x$ para toda $g \in G$. Sea $g_0 \in G$ un elemento loxodrómico. Si $y \neq x$ es el otro punto fijo de g_0, entonces la órbita de y es densa en $L(G)$ (porque existe $g \in G$ tal que $g(y) \neq y$ y por el lema 5.4). Sean $y' \in L(G)$, $x \neq y' \neq y$, y $g \in G$ tal que $g(y) = y'$, entonces gg_0g^{-1} y g_0 son transformaciones loxodrómicas con un solo punto fijo en común en $\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, entonces G no es discreto (proposición 5.25), una contradicción. Por tanto, no hay puntos en $L(G)$ que se queden fijos bajo todo elemento de G.

Si $z \in L(G)$ entonces la cerradura de la órbita de z está contenida en $L(G)$, porque $L(G)$ es cerrado y G-invariante. Recíprocamente, el lema 5.4 implica que $L(G)$ está contenido en la cerradura de la órbita de z.

$\square$

Recordemos que si $g \in \mathrm{PSL}(3,\mathbb{C})$ es un elemento fuertemente loxodrómico entonces g tiene exactamente tres puntos fijos en $P^2_{\mathbb{C}}$, digamos z_1, z_2, z_3, que satisfacen:

1. $g^n(z) \to z_3$, cuando $n \to \infty$, para toda $z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{z_1 z_2}$.

2. $g^n(z) \to z_1$, cuando $n \to -\infty$, para toda $z \in P^2_{\mathbb{C}} - \overleftrightarrow{z_2 z_3}$.

Decimos que z_3 es un punto fijo *atractor*, z_2 es un punto fijo *silla*, y z_1 es un punto fijo *repulsor* de g.

La siguiente versión del λ-lema para puntos fijos hiperbólicos nos será de gran utilidad (ver [11]) para demostrar que el conjunto límite $\Lambda(G)$ contiene una línea proyectiva compleja siempre que $G \subset PU(2,1)$ contenga un elemento loxodrómico. Recordemos que $\overleftrightarrow{xy}$ denota la línea proyectiva compleja determinada por los puntos $x, y \in P^2_{\mathbb{C}}$.

Lema. 5.28. *Sea $g \in PSL(3,\mathbb{C})$ un elemento fuertemente loxodrómico con puntos fijos $z_1, z_2, z_3 \in P^2_{\mathbb{C}}$, de los cuales z_1 es repulsor, z_2 es un punto silla y z_3 es atractor. Si $S \subset P^2_{\mathbb{C}}$ es una 3-esfera que no contiene a z_1 ni a z_2, y que intersecta transversalmente a $\overleftrightarrow{z_1 z_2}$ en un círculo, entonces el conjunto de puntos de acumulación de la familia de conjuntos compactos $\{g^n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a la línea compleja $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$.*

Prueba. Podemos suponer que, salvo conjugación, g es inducido por un elemento de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

donde $|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|$, y entonces $z_1 = [1:0:0], \quad z_2 = [0:1:0], \quad z_3 = [0:0:1]$. El conjunto de puntos de acumulación de la familia $\{g^n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenido en $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$ porque la sucesión de funciones

$$\{d(g^n(\cdot), \overleftrightarrow{z_2 z_3})\}$$

converge uniformemente a 0 en S, donde $d(\cdot,\cdot)$ denota la métrica de Fubini-Study en $P^2_{\mathbb{C}}$.

Ahora demostraremos que cada punto de la línea $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$ es un punto de acumulación de la familia $\{g^n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para este fin, tomemos $z \in \overleftrightarrow{z_2 z_3} - \{z_3\}$ y $\epsilon > 0$. Dado que la sucesión de funciones $d(g^n(\cdot), \overleftrightarrow{z_2 z_3})$ converge uniformemente a cero en S, existe $N_1 > 0$ tal que $d(g^n(s), \overleftrightarrow{z_2 z_3}) < \epsilon$ siempre que $n > N_1$ y $s \in S$.

Denotemos por $\Pi : P^2_{\mathbb{C}} - \{z_1\} \to \overleftrightarrow{z_2 z_3}$ la proyección dada por $[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [0 : x_2 : x_3]$. Observamos que $\Pi(S)$ es una vecindad de z_2 en $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$, y tomamos un disco D en $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$ con centro z_2 y tal que $D \subset \Pi(S)$. La transformación g actúa en $\overleftrightarrow{z_2 z_3} \cong P^1_{\mathbb{C}}$ como una transformación loxodrómica clásica, con z_2 como punto repulsor, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in g^{N_2}(D)$.

Si $n > \max(N_1, N_2)$ entonces $g^{N_2}(D) \subset g^n(D) \subset g^n(\Pi(S))$, lo que implica que $z = g^n(\Pi(s))$ para algún $s \in S$. Además,

$$d(g^n(s), z) = d(g^n(s), g^n(\Pi(s))) = d(g^n(s), \Pi(g^n(s))) = d(g^n(s), \overleftrightarrow{z_2 z_3}) < \epsilon.$$

Entonces z es un punto de acumulación de la familia de compactos $\{g^n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$, y hemos demostrado que el conjunto $\overleftrightarrow{z_2 z_3} - \{z_3\}$ está contenido en el conjunto (cerrado) de puntos de acumulación de $\{g^n(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, toda la línea $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$ está contenida en este conjunto de puntos de acumulación.

$\square$

Observemos que un razonamiento similar se aplica para probar que los puntos de acumulación de $\{g^{-n}(S)\}_{n\in\mathbb{N}}$ son todos los puntos de línea $\overleftrightarrow{z_1 z_2}$, cuando S es una 3-esfera que intersecte a $\overleftrightarrow{z_2 z_3} - \{z_2, z_3\}$ en un círculo.

Usando la notación del lema anterior tenemos el siguiente:

Lema. 5.29. *Si $G \subset PSL(3, \mathbb{C})$ es un grupo kleiniano complejo y $g \in G$ es un elemento fuertemente loxodrómico, entonces*

$$\overleftrightarrow{z_1 z_2} \subset \Lambda(G) \quad \textit{o bien} \quad \overleftrightarrow{z_2 z_3} \subset \Lambda(G).$$

Prueba. Claramente tenemos que $\{z_1, z_2, z_3\} \subset L_0(G)$. Si $\overleftrightarrow{z_1 z_2} \subseteq (L_0(G) \cup L_1(G))$ entonces ya acabamos. Si $\overleftrightarrow{z_1 z_2} \nsubseteq (L_0(G) \cup L_1(G))$ entonces $\overleftrightarrow{z_1 z_2} - (L_0(G) \cup L_1(G)) \neq \varnothing$ es un conjunto abierto en $\overleftrightarrow{z_1 z_2}$, lo que implica que existe una 3-esfera que satisface las hipótesis del lema 5.28. Por tanto, $\overleftrightarrow{z_2 z_3} \subset \Lambda(G)$.

$\square$

No es mala idea recordar en este momento que si $z \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces la única línea compleja que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en z se puede construir de la siguiente manera: Si $\tilde{z}$ es un levantamiento de z a un vector nulo de $\mathbb{C}^{2,1}$, entonces dicha línea compleja es la inducida por el subespacio bidimensional complejo de $\mathbb{C}^{2,1}$ dado por $(gen_{\mathbb{C}}\{\tilde{z}\})^{\perp}$. También hacemos notar, usando la notación de los dos lemas anteriores, que la línea $\overleftrightarrow{z_2 z_3}$ (respectivamente $\overleftrightarrow{z_1 z_2}$) es la única línea proyectiva compleja tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en el punto z_3 (respectivamente z_1). Por tanto, cuando $G \subset PU(2,1)$ es un grupo discreto que contiene algún elemento loxodrómico, el conjunto límite $\Lambda(G)$ contiene al menos una línea proyectiva compleja que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en un punto de $L(G)$. En lo que sigue denotaremos por l_z la única línea proyectiva compleja que es tangente a $\partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en el punto $z \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Lema. 5.30. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L_0(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z.$$

Prueba. Sea $\zeta \in P^2_{\mathbb{C}}$ un punto cuyo grupo de isotropía tiene orden infinito, y consideremos los dos casos posibles: ya sea $\zeta \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ o no. En el caso cuando $\zeta \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, proposición 5.6 y el teorema 5.24 implican que

$$\zeta \in L_0(G) \cap \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = L(G).$$

Si $\zeta \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, denotemos por Σ la geodésica compleja que es polar a ζ. Observemos que $\partial\Sigma$ es invariante bajo el subgrupo de isotropía de ζ, así que el lema 5.4 implica que el conjunto límite según Chen-Greenberg de este grupo de isotropía está contenido en $\partial\Sigma$. Por tanto, existe un punto $z \in L(G)$ tal que $z \in \partial\Sigma$, luego $\zeta \in l_z$ para algún $z \in L(G)$.

$\square$

Lema. 5.31. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L_1(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z.$$

Prueba. La proposición 5.6 implica que $L_0(G) \subset P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si $L_0(G) = P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ entonces $L_1(G) = L(G) \subset \cup_{z \in L(G)} l_z$, y ya terminamos. Por tanto, suponemos que $L_0(G) \subsetneq P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Tomemos $x \in P^2_{\mathbb{C}} - L_0(G)$ y consideramos dos casos dependiendo de si $x \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - L_0(G) = \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} - L(G)$ o no. En el primer caso, la proposición 5.13 implica que los puntos de acumulación de la órbita de x están contenidos en $L(G) \subset \cup_{z \in L(G)} l_z$, probando el lema en este caso.

Si $x \in P^2_{\mathbb{C}} - (\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \cup L_0(G))$, y g_n es una sucesión de elementos diferentes de G tales que $g_n(x) \to \xi \in L_1(G)$, entonces se tienen dos posibilidades: $\xi \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ o no. En el primer caso, la proposición 5.6 implica que $\xi \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, y el teorema 5.24 implica que $\xi \in L(G) \subset \cup_{z \in L(G)} l_z$.

Supongamos que $\xi \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$. Sea Σ la geodésica compleja que es polar a x, entonces $g_n(\Sigma)$ es la geodésica compleja que es polar a $g_n(x)$. Sea Σ' la geodésica compleja que es polar a ξ. Usando la proposición 5.13 podemos suponer que existe un punto $p \in L(G)$ tal que $g_n(z) \to p$ para toda $z \in \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. En particular, si $\sigma \in \Sigma$, entonces $g_n(\sigma) \to p$, y $g_n(\sigma) \in g_n(\Sigma)$. Así que, el lema 5.20 b) implica que $p \in \partial\Sigma'$, entonces $\xi \in l_p \subset \cup_{z \in L(G)} l_z$.

□

Lema. 5.32. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ entonces*

$$L_2(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z.$$

Prueba. La proposición 5.6 implica que $L_0(G) \cup L_1(G) \subset P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Si $L_0(G) \cup L_1(G) = P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, entonces $L_2(G) = L(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z$ y ya terminamos. Por lo tanto, supondremos que $L_0(G) \cup L_1(G) \subsetneq P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Sea z un punto de acumulación de la órbita del conjunto compacto $K \subset P^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$, entonces existe una sucesión $(k_n) \subset K$, tal que $k_n \to k \in K$, y una sucesión de diferentes elementos $(g_n) \subset G$ tal que $g_n(k_n) \to z$.

Si $z \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ entonces la proposición 5.6 y el teorema 5.24 implican que $z \in L_2(G) \cap \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = L(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z$. Si $z \notin \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ entonces $k \notin \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ y consideramos dos casos:

1. Si $k \in \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - (L_0(G) \cup L_1(G))$ entonces $k_n \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$, porque de lo contrario existe una subsucesión, que aún denotamos k_n, tal que $k_n \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para toda n, y dado que $g_n(k_n) \to z$, tenemos que $z \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, lo cual es una contradicción.

   Denotamos por Σ_n la geodésica compleja que es polar a k_n. Sea x_n un punto en Σ_n; podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $x_n \to x \in \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$. El lema 5.20 a) implica que $x = k$. También podemos suponer, usando la proposición 5.13 y tomando una subsucesión si se necesita, que $g_n(x_n) \to q \in L(G)$. La geodésica compleja $g_n(\Sigma_n)$ es polar a $g_n(k_n)$, y sabemos que $g_n(k_n) \to z$, entonces el lema 5.20 b) implica que $z \in l_q$.

2. Si $k \in P^2_{\mathbb{C}} - (\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \cup L_0(G) \cup L_1(G))$, entonces podemos suponer, eliminando un número finito de términos, que $k_n \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ para toda n. Sea Σ_n (respectivamente Σ) la geodésica compleja que es polar a k_n (respectivamente k). Sea x_n un punto de Σ_n. Suponemos, tomando una subsucesión si lo necesitamos, que $x_n \to x \in \Sigma \cup \partial \Sigma$. También podemos escoger la sucesión de tal manera que $x \in \Sigma \subset \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Nuevamente, aplicamos la proposición 5.13 y encontramos subsucesiones de g_n y x_n tales que $g_n(x_n) \to q \in L(G)$. Finalmente, la geodésica compleja $g_n(\Sigma_n)$ es polar a $g_n(k_n)$, y sabemos que $g_n(k_n) \to z$, entonces el lema 5.20 b) implica que $z \in l_q$.

$\square$

Teorema. 5.33. *Si G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$ y $\Lambda(G)$ denota el conjunto límite según Kulkarni [8] de G actuando en $P^2_{\mathbb{C}}$, entonces*

$$\Lambda(G) = \bigcup_{z \in L(G)} l_z,$$

donde l_z es la única línea compleja tangente a $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en z, y $L(G)$ es el conjunto límite, según Chen-Greenberg [2], de G actuando en $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Aún más, si G es no elemental entonces la órbita de cada línea l_z, con $z \in L(G)$, es densa en $\Lambda(G)$ (aunque la acción de G en $\Lambda(G)$ no es minimal).

Prueba. Primero observemos que los lemas 5.30, 5.31 y 5.32 implican que $\Lambda(G) \subset \bigcup_{z \in L(G)} l_z$, así que es suficiente demostrar la inclusión opuesta. Si $L(G) = \varnothing$ entonces G es finito y no hay nada que hacer. Dividiremos la prueba en tres casos dependiendo de si la cardinalidad de $L(G)$ es 1, 2 ó mayor que 2. Empezamos con el último caso, el cual es el más interesante.

Si $|L(G)| > 2$ entonces G es no-elemental. Sea $g_0 \in G$ un elemento loxodrómico, y $p \in L(G)$ un punto fijo de g_0 tal que la línea l_p, tangente a $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ en p, está contenida en $\Lambda(G)$ (lemma 5.29). Observemos que $g(l_p) = l_{g(p)}$ para cada $g \in G \subset PU(2,1)$. Así que $\cup_{g \in G} l_{g(p)}$ está contenido en $\Lambda(G)$, puesto que $\Lambda(G)$ es un conjunto cerrado y G-invariante. Luego,

$$\Lambda(G) \supset \overline{\bigcup_{g \in G} l_{g(p)}} = \overline{\bigcup_{z \in \{g(p)\}_{g \in G}} l_z} = \bigcup_{z \in \overline{\{g(p)\}_{g \in G}}} l_z = \bigcup_{z \in L(G)} l_z.$$

Observemos que la proposición 5.27 implica que la órbita de $l_z \subset \Lambda(G)$ es densa en $\Lambda(G)$ cuando G es no-elemental. Lo cual demuestra el teorema cuando G es no-elemental.

Ahora supongamos que $L(G)$ consta de dos puntos, digamos que $L(G) = \{x, y\}$. Usaremos el corolario 4.9 para demostrar que $\Lambda(G) = l_x \cup l_y$. Primero, observamos que la línea $\overleftrightarrow{xy} \subset P^2_{\mathbb{C}}$ es G-invariante, y el punto $z = l_x \cap l_y \notin \overleftrightarrow{xy}$ es un punto fijo de cada elemento de G, así que conjugando G podemos ver que la hipótesis i) de 4.9 se cumple.

El grupo G actúa como un grupo fuchsiano en la línea $\overleftrightarrow{xy}$ con conjunto límite clásico igual a $\{x, y\}$. Así que ii) de 4.9 se cumple.

El teorema 5.24 implica que $\{x, y, z\} \subset L_0(G)$. A fin de demostrar la inclusión opuesta, sea $z' \in P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$, tal que $H = estab_G(z')$ tiene orden infinito. La geodésica compleja, Σ', que es polar a z' es H-invariante, entonces $\varnothing \neq L(H) \subset \Sigma'$ (por el lema 5.4), pero $L(H) \subset L(G)$. Si $\varnothing \neq L(H) \subsetneq L(G)$ entonces $L(H)$ consta de un solo punto el cual permanece fijo bajo cualquier elemento de H. Dado que H es discreto e infinito, la proposición 5.19 implica que tiene un elemento de orden infinito, digamos h, y se tiene que $h(x) = x$, dado que $L(G)$ es H-invariante, tenemos que $h(y) = y$, lo que implica que $y \in L(H)$, una contradicción. Por tanto, $L(H) = L(G)$ luego $\{x, y\} \subset \Sigma'$, lo que implica que $z = z'$. Por tanto $L_0(G) = \{x, y, z\}$ y iii) de 4.9 se cumple. Concluimos que $\Lambda(G) = l_x \cup l_y$.

Si $L(G) = \{x\}$ entonces G contiene un elemento de orden infinito, el cual necesariamente es parabólico puesto que solo fija a $x \in \partial\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Consideramos los siguientes casos: El grupo G actúa como un grupo kleiniano en l_x o no. Si no actúa como un grupo kleiniano en l_x entonces $l_x \subset \Lambda(G)$, y ya acabamos. Si G actúa como un grupo kleiniano en l_x entonces G actúa como un grupo kleiniano finito en l_x o no. Si actúa como un grupo kleiniano finito en l_x entonces existe un elemento parabólico en G que actúa como la identidad en l_x, lo que implica que $L_0(G) = l_x$ y ya acabamos. Si G actúa como un grupo kleiniano infinito en l_x y no existe ningún elemento parabólico en G que actúe como la identidad en l_x, entonces $L_0(G) = \{x\}$. De hecho, G es un grupo euclidiano al restringir su acción a l_x. Si $\zeta \in (\overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}} \cup l_x) - \{x\}$ entonces el único punto de acumulación de la órbita de ζ es x. Ahora, si $\zeta \in P^2_{\mathbb{C}} - (l_x \cup \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}})$ entonces afirmamos que el único punto de acumulación de su órbita es x. Para demostrar nuestra afirmación, usamos la proposición 5.13: Si $g_n(\zeta) \to x'$ entonces existe una subsucesión de g_n, aún denotada g_n, tal que $g_n(\cdot) \to x$ uniformemente en conjuntos compactos de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} - \{x\}$. Si Σ denota la geodésica compleja polar a ζ entonces $g_n(\Sigma)$ es la geodésica compleja polar a $g_n(\zeta)$ y entonces $g_n(\Sigma \cup \partial\Sigma)$ está arbitrariamente cerca de x (sin pasar por x). Por tanto $x' = x$, pues de lo contrario se contradice el que las geodésicas complejas polares a puntos cercanos en $P^2_{\mathbb{C}} - \overline{\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}}$ están cercanas. Solo falta mencionar que $L_2(G) = l_x$, puesto que G contiene a un elemento parabólico unipotente que tiene un solo punto fijo, y ya sabemos que $L_0(G) \cup L_1(G) = \{x\}$.

$\square$

Corolario. 5.34. *Si G, G_1, G_2 son subgrupos discretos de $PU(2,1)$ entonces:*

a) El conjunto límite $\Lambda(G)$ es conexo por trayectorias.

b) Si $L(G)$ es todo $\partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ entonces $\Lambda(G) = P^2_{\mathbb{C}} - \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$.

c) Si $G_1 \subset G_2$, entonces $\Lambda(G_1) \subset \Lambda(G_2)$.

d) Si G es no elemental y W es un conjunto abierto invariante bajo G, sobre el cual G actúa propia y discontinuamente, entonces $W \subset \Omega(G)$. En otras palabras, $\Omega(G)$ es el conjunto abierto maximal sobre el cual G actúa propia y discontinuamente.

Observemos que la primera afirmación en este corolario se satisface también para grupos que nos son discretos, puesto que cuando G no es discreto se tiene que $\Lambda(G) = P^2_{\mathbb{C}}$. Esta observación también se puede aplicar a la afirmación c) por las mismas razones.

Prueba.

a) Sean x_1, x_2 puntos en $\Lambda(G)$. Existen $z_1, z_2 \in L(G)$ tales que $x_1 \in l_{z_1}$ y $x_2 \in l_{z_2}$. Si $z_1 = z_2$ entonces se puede unir x_1 con x_2 por una trayectoria totalmente contenida en la línea $l_{z_1} \subset \Lambda(G)$. Si $z_1 \neq z_2$ entonces también se puede unir x_1 con x_2 por una trayectoria totalmente contenida en la unión $l_{z_1} \cup l_{z_2} \subset \Lambda(G)$, porque dos líneas proyectivas complejas en $P^2_{\mathbb{C}}$ siempre se intersectan.

b) Esta afirmación se sigue inmediatamente del teorema 5.33.

c) Esta afirmación se sigue del teorema 5.33 y del hecho que para el conjunto límite de Chen-Greenberg uno claramente tiene que $L(G_1) \subset L(G_2)$.

d) Si $W \nsubseteq \Omega(G)$ entonces $W \cap l_z \neq \varnothing$ para cada $z \in L(G)$ (de lo contrario, existe $z_0 \in L(G)$ tal que $l_{z_0} \subset P^2_{\mathbb{C}} - W$. El teorema 5.33 y el hecho que $P^2_{\mathbb{C}} - W$ es un conjunto cerrado y G-invariante implican que $\Lambda(G) = \overline{\cup_{z \in L(G)} l_z} \subset P^2_{\mathbb{C}} - W$. Así que $W \subset \Omega(G)$, una contradicción a nuestra suposición). En particular, cuando g_0 es un elemento loxodrómico de G y $z_1, z_2 \in L(G)$ son dos de sus puntos fijos, entonces $W \cap l_{z_1} \neq \varnothing \neq W \cap l_{z_2}$. Sin embargo, el lema 5.28 implica que G no actúa propia y discontinuamente en W, lo cual es una contradicción. Concluimos que $W \subset \Omega(G)$.

$\square$

Conclusiones

En el siguiente trabajo empezamos un estudio sistemático de los subgrupos Kleinianos complejos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ [12, 13]. Introducimos los conceptos de elementos elípticos, parabólicos y loxodrómicos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ considerados como biholomorfismos de $P^2_{\mathbb{C}}$, y que extienden lo hecho para el caso de los elementos de $PU(2,1)$ considerados como isometrías del plano hiperbólico complejo $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ [5]. También dimos una clasificación según la traza para este caso. Calculamos el conjunto límite según Kulkarni [8] de cada uno de los grupos cíclicos generados por elementos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ actuando en $P^2_{\mathbb{C}}$.

Analizamos la estructura local de la región de discontinuidad módulo la acción del grupo, y dimos unos ejemplos sencillos de subgrupos Kleinianos complejos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$.

Estudiamos unas construcciones de subgrupos Kleinianos complejos de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ a partir de un subgrupo Kleiniano clásico de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, las cuales llamamos suspensiones [13]. Usamos estas ideas para dar un ejemplo de un subgrupo discreto de $\mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ que no es Kleiniano complejo.

Cuando G es un subgrupo discreto de $PU(2,1)$, G actúa en $P^2_{\mathbb{C}}$ y preserva la bola $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$, equipada con la métrica de Bergman. Si $L(G) \subset S^3 = \partial \mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ denota el conjunto límite de Chen-Greenberg [2], y $\Lambda(G) \subset P^2_{\mathbb{C}}$ es el conjunto límite según Kulkarni de la acción de G sobre $P^2_{\mathbb{C}}$. Demostramos que $L(G) = \Lambda(G) \cap S^3$ y que $\Lambda(G)$ es la unión de todas las líneas proyectivas complejas que son tangentes a S^3 en un punto de $L(G)$.

Como proyecto futuro podemos mencionar la descripción del conjunto límite $\Lambda(G)$ de un grupo $G \subset \mathrm{PSL}(3, \mathbb{C})$ que no sea conjugado de una suspensión de un grupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, ni conjugado de un subgrupo de $PU(2,1)$.

También será de gran utilidad el poder demostrar un teorema del tipo de combinación de Maskit, que mediante condiciones geométricas dinamicas sobre dos grupos Kleinianos complejos, digamos G_1, G_2, nos garantice que el grupo generado por $G_1 \cup G_2$ también sea Kleiniano complejo.

Bibliografía

[1] A. Beardon; The Geometry of Discrete Groups. Graduate Texts in Mathematics 91. Springer-Verlag 1983.

[2] S. S. Chen, L. Greenberg. Hyperbolic Spaces. Contributions to Analysis. Academic Press, New York. pp. 49-87 (1974).

[3] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds I. Ann. of Maths. No. 95. pp. 492-510 (1972).

[4] G. Giraud. Sur certaines fonctions automorphes de deux variables. Ann. Ec. Norm. (3), **38** (1921), pp. 43-164.

[5] W. Goldman; Complex Hiperbolic Geometry. Oxford Science Publications 1999.

[6] S. Kamiya. Notes on non-discrete subgroups of $\hat{U}(1,n;F)$. Hiroshima Math. J. No. 13. pp. 501-506 (1982).

[7] S. Kamiya. Notes on elements of $U(1,n;\mathbb{C})$, Hiroshima Math. J. Num. 21 pp. 23-45 (1991).

[8] R. S. Kulkarni. Groups with Domains of Discontinuity. Mathematische Annalen No. 237. pp. 253-272 (1978).

[9] B. Maskit; Kleinian Groups. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 287. Springer-Verlag 1988.

[10] G. D. Mostow. On a remarkable class of polyhedra in complex hyperbolic space. Pac. J. Math. No. 86. pp. 171-276 (1980).

[11] J. Palis and W. de Melo (1982) Geometric theory of dynamical systems: an introduction. Springer-Verlag.

[12] J. Seade, A. Verjovsky. Actions of Discrete Groups on Complex Projective Spaces. Contemporary Mathematics No. 269. pp. 155-178 (2001)

[13] J. Seade, A. Verjovsky. Higher Dimensional Complex Kleinian Groups. Mathematische Annalen No. 322. pp. 279-300 (2002).

[14] C. L. Siegel. Discontinuous groups. Annals of Maths. 44 pp. 674-689 (1943).

[15] G. Sienra. Complex Kleinian Groups and Limit Sets in CP^2. Complex Variables Vol. 49 No. 10. pp. 689-701 (2004).