



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE EL TEOREMA DE GAUSS BONNET CHERN

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
M A T E M Á T I C O  
P R E S E N T A :  
NOEL JARAMILLO ARCE

TUTORA:

M. en C. ANA IRENE RAMÍREZ GALARZA



2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Jaramillo

Arce

Noel

57877691

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

094143098

### 2. Datos del tutor

M. en C.

Ana Irene

Ramírez

Galarza

### 3. Datos del sinodal 1

Dr.

Oscar Alfredo

Palmas

Velasco

### 4. Datos del sinodal 2

Dr.

José Guadalupe

Reyes

Victoria

### 5. Datos del sinodal 3

M. en C.

Luis José

Yudico

Anaya

### 6 Datos del sinodal 4

Dr.

Eugenio

Garnica

Vigil

### 7. Datos del trabajo escrito

Sobre el Teorema de Gauss Bonnet Chern

94p

2006

**Tesis de Licenciatura en Matemáticas**  
Facultad de Ciencias, UNAM  
SOBRE EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET-CHERN

## **Agradecimientos**

Deseo agradecer por toda su incommensurable paciencia en este trabajo a la profesora Ana Irene Ramírez. A mi familia por su apoyo y esfuerzo, de igual manera a los sinodales por las sugerencias hechas, y a toda la Banda.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>2</b>
<b>1. Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>5</b>
1.1. Superficies . . . . .	5
1.2. Curvatura gaussiana . . . . .	10
1.3. Derivada covariante . . . . .	15
1.4. Teorema de Gauss-Bonnet local y global . . . . .	19
<b>2. Teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas de dimensión dos</b>	<b>26</b>
2.1. Variedades diferenciables . . . . .	26
2.2. Conexión afín y derivada covariante . . . . .	36
2.3. Tensor de curvatura . . . . .	39
2.4. Marcos móviles, formas de conexión y formas de curvatura . . . . .	41
2.5. La Fórmula de Gauss-Bonnet . . . . .	47
2.6. Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	51
2.7. Teorema del índice de Hopf . . . . .	52
<b>3. La herramienta necesaria</b>	<b>55</b>
3.1. Cohomología de De Rham . . . . .	55
3.2. Sucesión de Mayer-Vietoris . . . . .	60
3.3. Característica de Euler . . . . .	63
3.4. Mayer-Vietoris para soporte compacto y la sucesión exacta de una pareja . . . . .	66

3.5. Dualidad de Poincaré . . . . .	68
3.6. Grupos de Lie . . . . .	70
3.7. Haces . . . . .	72
3.8. Variedad grassmaniana . . . . .	76
3.9. Clase de Thom y clase de Euler . . . . .	78
3.10. Conexión de Ehresmann y curvatura . . . . .	81
<b>4. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern</b>	<b>84</b>
4.1. Pffafiano y curvatura . . . . .	84
4.2. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern . . . . .	90
<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>

# Introducción

El propósito de este trabajo es estudiar uno de los teoremas más célebres y más importantes de la geometría diferencial conocido como el **Teorema de Gauss-Bonnet**, estudiar la geometría involucrada y algunas de sus consecuencias más trascendentes, desarrollando los argumentos necesarios para su justificación.

Si tenemos claro que el quinto postulado de Euclides es equivalente al hecho de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo en el plano es  $\pi$ , nos podemos preguntar qué pasa si en vez de triángulos en el plano tomamos triángulos en cualquier otra superficie.

Gauss en 1827 trabajó este problema con triángulos cuyos lados son geodésicas, es decir, curvas que minimizan distancia entre dos puntos cercanos y expreso la integral de la curvatura en términos de los ángulos interiores del triángulo, es decir, probó que la suma de los ángulos interiores  $\varphi_i$  de un triángulo  $T$  menos  $\pi$  es igual a la integral de la curvatura  $K$  en el interior del triángulo. Gauss definió la curvatura de una superficie en uno de sus puntos, midiendo qué tan rápido cambia su plano tangente en una vecindad alrededor de ese punto.

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i - \pi = \int_T K.$$

Un fruto de este resultado muestra que si la curvatura  $K$  es una constante positiva  $K > 0$  tenemos que  $\sum \varphi_i > \pi$ , cuando es  $K = 0$  recuperamos el resultado del caso euclidiano, es decir,  $\sum \varphi_i = \pi$  y cuando  $K$  es constante negativa  $K < 0$  obtenemos que  $\sum \varphi_i < \pi$ , teniendo así una relación con los modelos de la geometría elíptica, plana e hiperbólica.

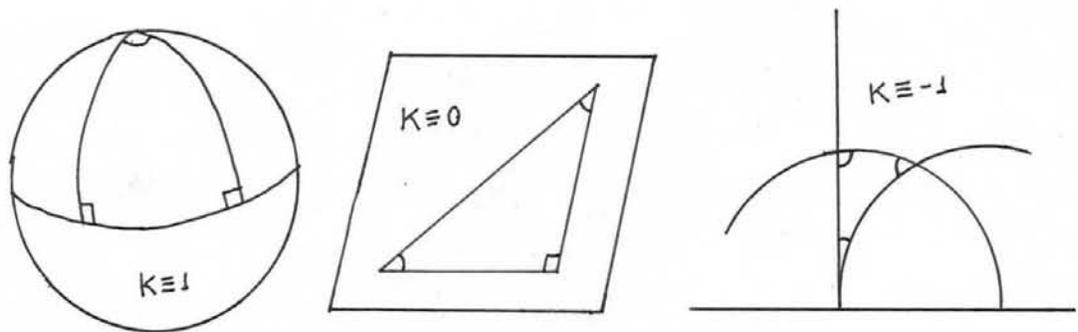


Figura 1: Geometrías

O. Bonnet en 1848 generalizó este resultado para cualquier región  $R$  acotada por una curva simple (no necesariamente geodésica), es decir, una curva sin auto-intersecciones:

$$\iint_R K dV + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi,$$

donde el primer término es la integral de la curvatura  $K$  sobre  $R$ , el segundo es la integral de la curvatura geodésica a lo largo de la curva  $\partial R$  y el tercer término es la suma de los ángulos exteriores de las esquinas.

Pero se puede extender aún más el resultado considerando nociones topológicas como la característica de Euler  $\chi = V - E + F$  (vértices - aristas + caras) que es un número entero que nos da información de la topología global de la superficie. Por lo que si consideramos una superficie compacta, orientable encontramos una fuerte relación entre la geometría y la topología de la superficie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K = \chi(M),$$

es decir, la integral de la curvatura  $K$  de la superficie  $M$  dividida entre  $2\pi$  siempre es la característica de Euler  $\chi(M)$  de la superficie; esto nos dice que la integral global de la curvatura  $K$  es un invariante topológico, por lo que no importa si deformamos la superficie; al final de cuentas la “suma” (la integral) de la curvatura en todos sus puntos es  $2\pi\chi(M)$ .

Como un admirable ejemplo resulta que toda superficie con curvatura positiva en todos sus puntos es homeomorfa a la esfera.

En este trabajo expondremos el teorema para el caso de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  y la generalización del problema; primero al caso de una variedad riemanniana de dimensión dos, es decir, una variedad diferenciable  $M$  en la cual no tenemos un espacio ambiente, lo que quiere decir que lo haremos intrínsecamente, definiendo los conceptos indispensables para ello, como los de variedad riemanniana, métrica, formas diferenciales, conexiones, curvatura, etc.

En el segundo caso extenderemos el resultado para variedades de dimensiones pares  $n = 2m$ , esto es, dada una variedad riemanniana compacta y orientada  $M$  de dimensión par  $n$  y  $K_n$  su curvatura gaussiana, entonces la integral de  $K_n$  sobre  $M$  es igual a un medio del elemento de volumen de la  $n$ -esfera por la característica de Euler de  $M$ :

$$\int_M K_n dV = \frac{1}{2} \text{vol}(S^n) \cdot \chi(M).$$

Este resultado fue obtenido en 1944 por S.S. Chern [1]. Nosotros utilizaremos la teoría de cohomología, marcos móviles, la teoría de haces y clases características cuyo desarrollo se encuentra en Spivak [2].

# Capítulo 1

## Teorema de Gauss-Bonnet para superficies en $\mathbb{R}^3$

En este capítulo introduciremos las nociones más importantes de la geometría de curvas y superficies contenidas en  $\mathbb{R}^3$  haciendo uso de conceptos intrínsecos que facilitarán las generalizaciones que haremos en los capítulos siguientes.

### 1.1. Superficies

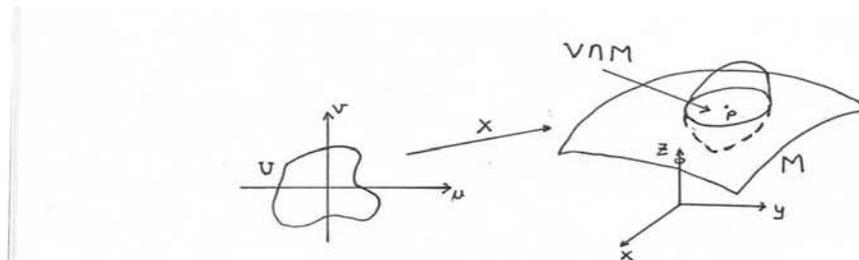


Figura 1.1: Superficie

**Definición 1.1.1** Un subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^3$  es una **superficie regular** si para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^3$  y una aplicación suprayectiva  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \cap V$ , de un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $M \cap V \subset \mathbb{R}^3$ , tal que:

1.  $\mathbf{x}$  es diferenciable, es decir, si dada la aplicación  $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , las funciones  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  tienen derivadas parciales de todos los órdenes para un punto  $(u, v) \in U$ .
2.  $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo, esto es,  $\mathbf{x}$  tiene inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap M \rightarrow U$  continua.
3.  $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva para todo  $q \in U$ .

Podemos decir que una superficie regular encajada en  $\mathbb{R}^3$  se forma al pegar imágenes de abiertos del plano de tal manera que no tengan esquinas, puntas o auto-intersecciones, esto es, que el pegado sea suave para que tenga sentido hablar del espacio tangente en todos sus puntos.

La aplicación  $\mathbf{x}$  se llama **parametrización** o **sistema de coordenadas** en  $p$  y la vecindad  $M \cap V$  de  $p$  en  $M$  se llama **vecindad coordinada**.

Un punto  $p \in M$  puede pertenecer a varias vecindades coordinadas y se puede demostrar que dadas dos parametrizaciones  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ,  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tales que  $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$ , entonces el **cambio de coordenadas**  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  es un difeomorfismo; esto es,  $h$  es diferenciable y con inversa  $h^{-1}$  diferenciable.

### Ejemplos:

- La esfera unitaria  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , tomando la parametrización  $\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , donde el conjunto abierto  $U \in \mathbb{R}^2$  está dado por  $U = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ ; el meridiano que falta lo podemos cubrir con la imagen del siguiente abierto  $V = \{(\theta, \varphi); -\pi/2 < \theta < \pi/2, -\pi < \varphi < \pi\}$ .
- El cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$  con la parametrización  $\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  y considerando a  $U$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  como  $U = \{(u, v); 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ ; el generador que falta lo cubrimos con la imagen de  $V = \{(u, v); -\pi < u < \pi, -\infty < v < \infty\}$ .
- La gráfica de una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable definida en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ .
- Las superficies de revolución; si  $\mathbf{x}(v) = (f(v), g(v))$  es una curva diferenciable en el plano  $XZ$  que no corta al eje  $Z$  y la parametrización  $\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$  sobre el conjunto abierto  $U = \{(u, v); a < v < b, 0 < u < 2\pi\}$ . También a esta superficie le hace falta un meridiano, pero es claro que puede darse otra vecindad abierta cuya imagen cubra al meridiano faltante.

Para encontrar la matriz de la transformación lineal  $d\mathbf{x}_q$  de la condición 3 en la base canónica  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(u, v)$  y la base  $e'_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e'_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e'_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  con coordenadas  $(x, y, z)$ , tomamos  $q = (u_0, v_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ , el vector  $e_1$  es tangente a la curva  $u \rightarrow (u, v_0)$  cuya imagen bajo  $\mathbf{x}$  es la curva  $u \rightarrow (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$  llamada **curva coordinada**  $v = v_0$  que está sobre  $M$  y cuyo vector tangente en  $\mathbf{x}(q)$  está dado por  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})(q)$ .

Análogamente, la curva coordinada  $u = u_0$  cuya imagen bajo la parametrización  $\mathbf{x}$  está dada por  $v \rightarrow (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$ , tiene como vector tangente a  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(q) = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})(q)$ . Esto es,  $d\mathbf{x}_q(e_1) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$  y  $d\mathbf{x}_q(e_2) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ , así la matriz  $d\mathbf{x}_q$  en las bases canónicas es:

$$d\mathbf{x}_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

La inyectividad de la condición tres se traduce en que las columnas de la transformación sean linealmente independientes ó  $(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}) \times (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}) \neq \bar{0}$  y nos permite afirmar que todos los vectores tangentes de las curvas parametrizadas de  $M$  que pasan por un punto constituyen un plano

que será llamado **plano tangente** a  $M$  en  $p$ , que denotaremos por  $T_pM$ ; un **vector tangente**  $\alpha'(0)$  en  $p \in M$  es el vector tangente de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$ , donde  $\alpha(0) = p$ . Si elegimos una parametrización  $\mathbf{x}$ , ésta determina una base  $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\}$  de  $T_pM$ . Como notación usaremos:  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u$  y  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v$ .

**Definición 1.1.2** Una función  $f : V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $V$  es abierto de  $M$ , es **diferenciable en  $p$**  si para alguna parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  tal que  $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$ , la composición  $f \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ .

La definición no depende de la elección de la parametrización  $\mathbf{x}$ , de hecho si  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  es otra parametrización tal que  $p \in \mathbf{y}(V)$  y si  $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y}$ , entonces  $f \circ \mathbf{y} = f \circ \mathbf{x} \circ h$  es también diferenciable.

La definición anterior se puede extender a transformaciones entre superficies:

Una aplicación continua  $\phi : V \subset M_1 \rightarrow M_2$  con  $V$  abierto de  $M_1$ , es **diferenciable en  $p \in V$** , si dadas las parametrizaciones  $\mathbf{x}_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1$  y  $\mathbf{x}_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2$ , con  $p \in \mathbf{x}_1(U_1)$  y  $\phi(\mathbf{x}_1(U_1)) \subset \mathbf{x}_2(U_2)$ , la transformación  $\mathbf{x}_2^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x}_1 : U_1 \rightarrow U_2$  es diferenciable en  $q = \mathbf{x}_1^{-1}(p)$ .

Si  $M_1$  y  $M_2$  son dos superficies regulares y  $\phi : V \subset M_1 \rightarrow M_2$  es una transformación diferenciable de un conjunto abierto  $V$  sobre  $M_2$  y  $p \in V$ , cualquier vector tangente  $w \in T_pM_1$  es el vector velocidad  $\alpha'(0)$  de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow V$  con  $\alpha(0) = p$  y la curva  $\beta = \phi \circ \alpha$  es tal que  $\beta(0) = \phi(p)$  y por lo tanto  $\beta'(0)$  es un vector en  $T_{\phi(p)}M_2$ .

**Proposición 1.1.1** Bajo las condiciones anteriores, el vector  $\beta'(0)$  no depende de la elección de  $\alpha$ . La transformación  $d\phi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\phi(p)}M_2$  definida por  $d\phi_p(w) = \beta'(0)$  es lineal.

**Demostración:** Sean  $\mathbf{x}(u, v)$  y  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$  parametrizaciones en torno a  $p$  y  $\phi(p)$  respectivamente, sea  $\phi(u, v) = (\phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$  la expresión de  $\phi$  en estas coordenadas y consideremos la curva  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  con  $t \in I$ , en el dominio de  $\mathbf{x}$ . Entonces

$$\beta(t) = (\phi_1(u(t), v(t)), \phi_2(u(t), v(t)))$$

es una curva en el dominio de  $\bar{\mathbf{x}}$  y la expresión de  $\beta'(0)$  en la base  $\{\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}}\}$  de  $T_{\phi(p)}M_2$  es

$$\beta'(0) = \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_1}{\partial v} v'(0), \frac{\partial \phi_2}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} v'(0) \right);$$

esta relación muestra que  $\beta'(0)$  sólo depende de  $\phi$  y de las coordenadas  $(u'(0), v'(0))$  de  $w$  en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  y no de  $\alpha$ . Además

$$\beta'(0) = d\phi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix},$$

lo que muestra que  $d\phi_p(w)$  es una transformación lineal de  $T_pM_1$  a  $T_{\phi(p)}M_2$  cuya matriz es la matriz anterior. ♠

Como  $M \subset \mathbb{R}^3$ , el producto punto canónico de  $\mathbb{R}^3$  induce un producto interior en cada plano tangente  $T_pM$  de una superficie regular, es decir, dados  $w_1, w_2 \in T_pM$ , entonces  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  es una forma bilineal simétrica y definida positiva.

**Definición 1.1.3** La forma cuadrática  $I_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2$ , se llama **primera forma fundamental** de la superficie regular  $M \subset \mathbb{R}^3$  en  $p \in M$ .

La primera forma nos permite medir en la superficie: ángulos entre curvas que se cortan, longitudes de curvas, áreas de regiones, etcetera.

Expresaremos la primera forma en términos de la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  inducida por una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $p$ . Si  $w \in T_p M$ , entonces  $w$  es tangente a una curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  con  $p = \alpha(0) = \mathbf{x}(u(0), v(0))$  y como  $\alpha'(0) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  obtenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u' v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 = E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

al calcular en  $t = 0$ , siendo

$$\begin{aligned} E(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p & F(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ G(u(0), v(0)) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  de  $T_p M$ , los cuales son funciones diferenciables de  $(u, v) \in U$ .

La longitud de arco  $s$  de una curva  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  que está contenida en una vecindad coordinada en la superficie  $M$  está dada por:

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(t))} dt = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2} dt.$$

La primera forma fundamental sirve para medir ángulos entre dos curvas regulares parametrizadas  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $\beta : I \rightarrow M$  que se intersecan en  $t = t_0$ ; tal ángulo está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|}.$$

Si las curvas son las curvas coordenadas de una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , el ángulo es:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

**Definición 1.1.4** Una parametrización se llama **ortogonal** si las curvas coordenadas de la parametrización son ortogonales, es decir, si  $F(u, v) = 0$ .

Por ejemplo, la superficie de revolución parametrizada por  $\mathbf{x}(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$  tiene como vectores tangentes a

$$\mathbf{x}_u = (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \quad \mathbf{x}_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v))$$

y por lo tanto los coeficientes de la primera forma son  $E = f^2(v)$ ,  $F = 0$  y  $G = f'^2(v) + g'^2(v)$ .

Un subconjunto  $R$  de una superficie diferenciable  $M$  se llama **dominio** si es la imagen bajo un homeomorfismo de un disco del plano, y se llama **región** cuando se le añade la imagen de

la frontera del disco que sólo puede tener un número finito de picos. La región  $R$  es **acotada** si está contenida en alguna bola de  $\mathbb{R}^3$ .

Si una región  $R$  es la imagen bajo  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , la función  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|$  mide el área del paralelogramo generado por  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \in T_p M$  por lo que es natural definir:

**Definición 1.1.5** Sea  $R \subset M$  una región acotada de una superficie contenida en la vecindad coordinada de la parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ . Entonces el **área** de  $R$  está dada por

$$V(R) = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv.$$

Es fácil ver que la integral no depende de la parametrización, ver [4]. Y si tomamos en cuenta la relación  $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 = |\mathbf{x}_u|^2 |\mathbf{x}_v|^2 - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle^2$ , entonces vemos que

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$$

y por lo tanto el área puede calcularse en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental

$$V(R) = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

### Ejemplos:

- El área  $V$  de una región  $R$  de la superficie correspondiente a la gráfica de una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  dada por  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , está dada por

$$V = \iint_Q \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} dudv$$

donde  $Q$  es la proyección normal de  $R$  sobre el plano  $uv$ . Tenemos que  $\mathbf{x}_u = (1, 0, f_u)$  y  $\mathbf{x}_v = (0, 1, f_v)$  y por lo tanto se cumple la siguiente igualdad  $EG - F^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2$ .

- El área  $V$  del cilindro circular recto parametrizado por  $\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , donde  $U = \{(u, v); 0 < u < 2\pi, 0 < v < h\}$  es:

$$V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{h-\epsilon} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} dudv = 2\pi h.$$

Vale la pena dar la siguiente observación, que usaremos más adelante. Si  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  es una parametrización de  $M$ ,  $R \subset \mathbf{x}(U)$  es una región acotada de  $M$  y  $f$  es una función diferenciable sobre  $R$ , entonces

$$\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

es la **integral de  $f$  sobre la región  $R$**  y se denota por  $\iint_R f dV$ . Se comprueba que esta integral no depende de la parametrización.

Al dar un sistema de coordenadas  $\mathbf{x}(u, v)$  de una superficie regular en un punto  $p$  podemos elegir un vector normal unitario  $N$  como sigue;

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|},$$

y dado otro sistema de coordenadas  $(\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}}, \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}})$  en el mismo punto tenemos que

$$\bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}} \times \bar{\mathbf{x}}_{\bar{v}} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

de aquí que  $N$  preserva su signo si  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  es positivo o bien cambia si  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  es negativo, donde,  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$  es el jacobiano del cambio de coordenadas. Por lo que tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.1.6** Una superficie regular  $M$  es orientable si es posible cubrirla con una familia de vecindades coordenadas de tal manera que si  $p \in M$  pertenece a dos vecindades de la familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en  $p$ . La elección de tal familia se llama una **orientación** de  $M$  y en tal caso  $M$  se dice orientada. Si no existe la cubierta con esa propiedad, la superficie es no-orientable.

## 1.2. Curvatura gaussiana

En geometría diferencial la curvatura de una superficie es un concepto central. En el caso de una curva, la curvatura en uno de sus puntos es la razón de cambio de su vector tangente normalizado. Análogamente, la curvatura en el caso de una superficie en uno de sus puntos mide que tan rápido cambia su plano tangente en una vecindad del punto. Pero medir la variación del plano tangente equivale a medir la variación del vector normal  $N_p$  en una vecindad del punto, lo cual se logra considerando todas las direcciones de  $T_pM$ .

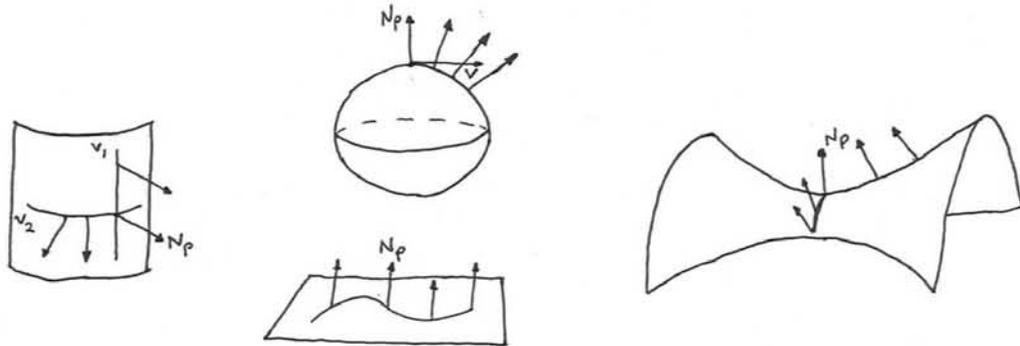


Figura 1.2: Variaciones del vector normal

Por ejemplo, en un plano la variación de  $N_p$  es cero a lo largo de cualquier curva. En un punto  $p$  de un cilindro hay dos direcciones principales (ver figura 1.2), es decir, al mover  $N_p$  en la dirección  $v_1$  es paralelo así mismo, mientras que al moverlo en dirección  $v_2$  el vector normal  $N_p$  se inclina hacia un lado y en cualquier otra dirección el vector normal se inclina en dirección  $v_2$ .

En un punto de una esfera, la variación del vector  $N_p$  siempre es la misma ya que no hay direcciones especiales. En un elipsoide, hay dos direcciones distinguidas en las cuales el vector  $N_p$  en una dirección se inclina más rápido que en la otra. En un punto del hiperboloide, en una dirección el vector normal  $N_p$  cambia positivamente y en la otra negativamente, es decir,  $N_p$  se inclina hacia atrás mientras avanza en esa dirección.

**Definición 1.2.1** Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular orientada. La función  $N : M \rightarrow S^2$  que a cada punto  $p \in M$  asocia el vector  $N(p) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  normal unitario definido por la orientación es llamada la **aplicación de Gauss**.

La diferencial de la aplicación lineal  $N$  evaluada en un punto  $p \in M$  es una transformación  $dN_p : T_pM \rightarrow T_{N(p)}S^2$  que opera como sigue: dada una curva parametrizada  $\alpha(t)$  en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ , tomamos la curva  $N \circ \alpha(t) = N(t)$  en la esfera  $S^2$  que es la restricción del vector normal  $N$  a la curva  $\alpha(t)$ ; entonces el vector tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  puede verse como un vector en  $T_pM$ , ya que  $T_pM$  y  $T_{N(p)}S^2$  son planos paralelos.

Este vector mide la razón de cambio del vector  $N$ , restringido a la curva  $\alpha(t)$  en  $t = 0$ . Por lo tanto  $dN_p$  mide cómo varía  $N$  en una vecindad de  $p$  y está dado por una transformación lineal de  $T_pM$  en sí mismo.

**Definición 1.2.2** Sea  $p \in M$  y  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  la diferencial de la transformación de Gauss. El determinante de  $dN_p$  es la **curvatura gaussiana**  $K(p)$  de  $M$  en  $p$ .

Consideremos una curva en superficie  $M$ , esto es,  $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$  tal que  $\alpha(0) = p$ , el vector tangente es  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$ .

Nosotros queremos ver cuánto se aparta una superficie de su plano tangente; necesitamos analizar la variación de sus vectores tangentes  $\alpha'$ , lo que podemos hacer calculando  $\alpha''$  y la proyección  $\langle N, \alpha'' \rangle$  en el vector normal que es nuestra referencia. Sabemos que  $\langle N, \alpha' \rangle = 0$ , de aquí que:

$$\langle N, \alpha'' \rangle = -\langle N', \alpha' \rangle.$$

**Definición 1.2.3** La forma cuadrática  $II_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ , se llama **segunda forma fundamental** de la superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$  en el punto  $p$ .

Obtendremos las expresiones de la aplicación de Gauss y de la segunda forma en términos de una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  compatible con la orientación  $N$  de  $M$ ; tenemos que el vector tangente a  $\alpha(t)$  en  $p$  es  $\alpha' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$  y

$$dN_p(\alpha') = \frac{d}{dt}(N(u(t), v(t))) = N_u u' + N_v v'.$$

Tomando en cuenta que  $N_u$  y  $N_v$  están contenidos en  $T_pM$ , podemos escribirlos como combinación lineal de  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \quad N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v,$$

de aquí que  $dN_p(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{x}_u + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{x}_v$ , que en forma matricial se expresa como

$$dN_p \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Así, la expresión de la segunda forma fundamental en una base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  está dada por:

$$II_p(\alpha') = -\langle dN_p(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle = e(u')^2 + 2f(u'v') + g(v')^2$$

donde  $e$ ,  $f$  y  $g$  están dados por

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle & g &= -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle \end{aligned}$$

Ya que  $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ ,  $\langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$  al derivar cada una con respecto a  $v$  y  $u$  respectivamente, resulta

$$\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0$$

Utilizando las expresiones de  $N_u$  y  $N_v$  mencionadas anteriormente obtenemos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, & -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, & -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G, \end{aligned}$$

donde  $E$ ,  $F$  y  $G$  son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ . Podemos expresar lo anterior como

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Para encontrar los valores de  $a_{ij}$ , basta multiplicar por la inversa de la matriz de la primera forma fundamental

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

por lo que la curvatura gaussiana  $K(p)$  está dada por

$$K(p) = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

### Ejemplos:

- Para una superficie de revolución con generatriz  $(\phi(v), \psi(v))$  parametrizada por longitud de arco:  $\mathbf{x}(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v))$ , un vector normal unitario está dado por

$$N(u, v) = (\psi' \cos u, \psi' \sin u, -\phi').$$

Por lo tanto los coeficientes de la segunda forma son  $e = -\phi\psi'$ ,  $f = 0$  y  $g = \phi''\psi' - \psi''\phi'$  y obtenemos

$$K = -\frac{\psi'(\phi''\psi' - \psi''\phi')}{\phi}.$$

- Para una superficie que es la gráfica de una función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por la parametrización  $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, h(u, v))$ ; tenemos que  $\mathbf{x}_u = (1, 0, h_u)$ ,  $\mathbf{x}_v = (0, 1, h_v)$ ,  $\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, h_{uu})$ ,  $\mathbf{x}_{uv} = (0, 0, h_{uv})$  y  $\mathbf{x}_{vv} = (0, 0, h_{vv})$ ; entonces el vector normal unitario está dado por

$$N(u, v) = \frac{(-h_u, -h_v, 1)}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}.$$

Los coeficientes de la primera forma fundamental son  $E = 1 + h_u^2$ ,  $F = h_u h_v$  y  $G = 1 + h_v^2$  y los de la segunda forma

$$e = \frac{h_{uu}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}}, \quad f = \frac{h_{uv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad g = \frac{h_{vv}}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^{1/2}};$$

por lo tanto

$$K = \frac{h_{uu}h_{vv} - h_{uv}^2}{(1 + h_u^2 + h_v^2)^2}.$$

Si  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  es una parametrización compatible con la orientación de  $M$ , consideremos un triedro formado por  $\mathbf{x}_u$ ,  $\mathbf{x}_v$  y  $N$  en cada punto de  $\mathbf{x}(U)$  y expresemos sus derivadas en términos de la misma base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, N\}$ ; con esto obtenemos los **símbolos de Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$   $i, j, k = 1, 2$  de  $M$  en la parametrización  $\mathbf{x}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N, & \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + \bar{L}_2 N, & \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_3 N \end{aligned}$$

Como las parametrizaciones son  $C^\infty$ , concluimos que  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$  por lo que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ ; si hacemos el producto punto de las relaciones anteriores con  $N$  encontramos que  $L_1 = e$ ,  $L_2 = \bar{L}_2 = f$  y  $L_3 = g$  que son los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $M$ . Para obtener los símbolos de Christoffel, hacemos el producto punto de las fórmulas anteriores con  $\mathbf{x}_u$  y  $\mathbf{x}_v$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases} \\ \begin{cases} \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases} \\ \begin{cases} \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones forman tres grupos de ecuaciones lineales, donde las incógnitas son los símbolos de Christoffel y el determinante de cada sistema es  $EG - F^2 \neq 0$  lo cual nos dice que cada  $\Gamma_{ij}^k$  se expresa en términos de  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y sus derivadas parciales con respecto a  $u$  y  $v$  respectivamente. Los conceptos que se pueden expresar en términos de la primera forma fundamental y sus derivadas pertenecen a la **geometría intrínseca**.

Para obtener relaciones a partir de los símbolos de Christoffel consideramos, por ejemplo, la siguiente ecuación  $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u = 0$  y usamos las ecuaciones anteriores; así, obtenemos

$$(\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN)_v = (\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN)_u$$

que da lugar a

$$\begin{aligned} & \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_{uv} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v \mathbf{x}_u + (\Gamma_{11}^2)_v \mathbf{x}_v + e_v N \\ &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_{uu} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u \mathbf{x}_u + (\Gamma_{12}^2)_u \mathbf{x}_v + f_v N \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente los símbolos de Christoffel e igualando los coeficientes de  $\mathbf{x}_v$  llegamos a

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + ea_{22} + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + fa_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u$$

Como  $a_{22} = \frac{fF-gE}{EG-F^2}$  y  $a_{21} = \frac{eF-fE}{EG-F^2}$ , entonces

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -E \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = -EK$$

Esta expresión dice que la curvatura se puede expresar en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas, esto es, la curvatura es un concepto intrínseco de la superficie. A este resultado se le conoce como el **Teorema Egregio de Gauss**.

Obtendremos un resultado técnico que necesitaremos más adelante.

**Proposición 1.2.1** *Si  $\mathbf{x}$  es una parametrización ortogonal, entonces*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

**Demostración:** Como  $F = 0$ , si sustituimos las expresiones para los símbolos de Christoffel en la expresión  $-EK$  vemos que

$$\begin{aligned} -EK &= \left( \frac{1}{2G} G_u \right)_u - \left( -\frac{1}{2G} E_v \right)_v - \frac{1}{2E} E_v \frac{1}{2G} E_v + \left( \frac{1}{2G} G_u \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2E} E_u \frac{1}{2G} G_u + \frac{1}{2G} E_v \frac{1}{2G} G_v \end{aligned}$$

Como  $\left( \frac{1}{2G} G_u \right)_u = \frac{1}{2G^2} (GG_{uu} - G_u^2)$  y  $\left( -\frac{1}{2G} E_v \right)_v = \frac{1}{2G^2} (E_v G_v - GE_{vv})$ , entonces

$$\begin{aligned} -EK &= \frac{1}{2G^2} (GG_{uu} - G_u^2) - \frac{1}{2G^2} (E_v G_v - GE_{vv}) - \frac{1}{2E} E_v \frac{1}{2G} E_v + \left( \frac{1}{2G} G_u \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2E} E_u \frac{1}{2G} G_u + \frac{1}{2G} E_v \frac{1}{2G} G_v \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2EG^2} GG_{uu} + \frac{1}{2EG^2} G_u^2 + \frac{1}{2EG^2} E_v G_v - \frac{1}{2EG^2} GE_{vv} + \frac{1}{4E^2 G} E_v^2 - \frac{1}{4EG^2} G_u^2 \\ &\quad + \frac{1}{4GE^2} E_u G_u - \frac{1}{4EG^2} E_v G_v \end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2EG} G_{uu} - \frac{1}{2EG} E_{vv} + \frac{1}{4EG^2} G_u^2 + \frac{1}{4EG^2} E_v G_v + \frac{1}{4E^2 G} E_v^2 + \frac{1}{4GE^2} E_u G_u \\ K &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v - \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

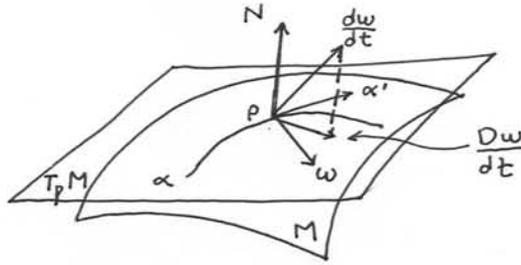


Figura 1.3: Derivada covariante

### 1.3. Derivada covariante

Un concepto fundamental de la geometría diferencial de superficies es el de curva geodésica, es decir, una curva en la superficie que es el camino más corto entre cualesquiera dos puntos cercanos. Para introducir ese concepto necesitamos el concepto de campo vectorial y derivada covariante.

Un **campo vectorial** sobre un conjunto  $U$  abierto de una superficie regular  $M$  es una aplicación  $w$  que a cada punto  $p \in U$  le asocia un vector  $w(p) \in T_pM$ . El **campo vectorial** es **diferenciable** en  $p$  si para alguna parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ , las componentes  $a$  y  $b$  de  $w = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$  son diferenciables en  $p$ .

**Definición 1.3.1** Sea  $w$  un campo vectorial diferenciable a lo largo de una curva parametrizada en  $M$ ,  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$ , entonces el vector obtenido mediante la proyección ortogonal de  $(\frac{dw}{dt})(0)$  sobre el plano tangente  $T_pM$  se llama la **derivada covariante** en  $p$  de  $w$  a lo largo de  $\alpha$  y se denota por  $\frac{Dw}{dt}(0)$ .

Si  $\alpha(t)$  es una curva sobre  $M$  y consideramos  $\alpha'(t) = w$  como un campo vectorial, entonces  $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$  es la componente tangencial de la aceleración, que intuitivamente es la aceleración de la curva  $\alpha(t)$  vista desde la superficie.

La derivada covariante pertenece a la geometría intrínseca y no depende de la elección de la curva  $\alpha$ ; para mostrarlo, sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización de  $M$  en  $p$  y tomemos  $\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$  la expresión de la curva  $\alpha$ , entonces

$$w(t) = a(u(t), v(t))\mathbf{x}_u + b(u(t), v(t))\mathbf{x}_v = a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v$$

es la expresión de  $w(t)$  en la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$ . Lo que implica que

$$\frac{dw}{dt} = a(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v') + b(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v') + a'\mathbf{x}_u + b'\mathbf{x}_v$$

Como  $\frac{Dw}{dt}$  es la componente de  $\frac{dw}{dt}$  en el plano tangente, usaremos las expresiones de  $\mathbf{x}_{uu}$ ,  $\mathbf{x}_{uv}$ ,  $\mathbf{x}_{vu}$  y eliminamos la componente normal para llegar a

$$\frac{Dw}{dt} = (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')\mathbf{x}_u + (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')\mathbf{x}_v.$$

Esta ecuación se expresa en términos de los símbolos de Christoffel que pertenecen a la geometría intrínseca de la superficie. También muestra que  $\frac{Dw}{dt}$  depende únicamente del vector  $(u', v')$  y no de la curva  $\alpha$ .

**Definición 1.3.2** Un campo vectorial  $w$  a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$  es **paralelo** si  $\frac{Dw}{dt} = 0$  para cada  $t \in I$ .

Por ejemplo, en el plano el concepto de campo paralelo a lo largo de una curva parametrizada se reduce a un campo constante a lo largo de la curva. Las curvas  $\alpha(t)$  en el plano cuyo campo vectorial  $\alpha'(t)$  es paralelo necesariamente son rectas del plano que son llamadas geodésicas.

**Definición 1.3.3** Una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$  no constante es una **geodésica** si su campo de vectores  $\alpha'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\alpha$ , esto es, si  $\frac{D\alpha'}{dt}(t) = 0$ , para  $t \in I$ .

En otras palabras, una curva de una superficie contenida en  $\mathbb{R}^3$  se dice que es una geodésica si su vector de aceleración es ortogonal al plano tangente de la superficie en cada punto de la curva.

Dada una parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  de una superficie  $M$  y  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$  la expresión de una curva  $\alpha$  en términos de  $\mathbf{x}$  en  $M$ , el campo vectorial tangente  $\alpha'$  está dado por

$$\alpha' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v.$$

Por lo tanto, el hecho de que  $\alpha'$  sea un campo paralelo es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 &= 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras,  $\alpha$  es geodésica, si y sólo si se satisface este sistema en una vecindad coordenada. Este sistema se conoce como las **ecuaciones diferenciales de las geodésicas**.

**Definición 1.3.4** Sea  $w$  un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$  de una superficie orientada  $M$ . Como  $\frac{dw}{dt}$  es normal a  $w(t)$  con  $t \in I$ , entonces

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(t)(N(t) \times w(t))$$

El número  $\lambda(t)$  recibe el nombre de **valor algebraico de la derivada covariante de  $w$  en el punto  $t$**  y se denota por  $\left[\frac{Dw}{dt}\right]$ .

Es conveniente observar que  $\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w(t) \right\rangle$ .

**Definición 1.3.5** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva parametrizada por su longitud de arco  $s$ ; el valor algebraico de la derivada covariante  $\left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] = k_g$  de  $\alpha'(s)$  en un punto  $p \in M$  es la **curvatura geodésica** en  $p$ .

Tomemos ahora  $v$  y  $w$  dos campos vectoriales diferenciables unitarios a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$ ; definiremos una función  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , que determine el ángulo entre  $v(t)$  y  $w(t)$ . Tomemos un campo  $\bar{v}$  también unitario a lo largo de  $\alpha$  de tal manera que la base  $\{v(t), \bar{v}(t)\}$  sea una base ortonormal positiva de  $T_pM$  para cada  $t \in I$ ; entonces expresamos a  $w(t)$  como

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t)$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  son funciones diferenciables en  $I$  tales que  $a^2(t) + b^2(t) = 1$ . Si fijamos un valor  $\varphi_0$  del ángulo entre  $v(t_0)$  y  $w(t_0)$ , podemos extender la función diferenciablemente en  $I$  como sigue.

**Lema 1.3.1** Sean  $a(t)$  y  $b(t)$  funciones diferenciables en  $I$  de tal manera que  $a^2 + b^2 = 1$  y  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi_0$   $b(t_0) = \sin \varphi_0$ . Entonces la función diferenciable

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba')dt$$

cumple que  $a(t) = \cos \varphi(t)$ ,  $b(t) = \sin \varphi(t)$  y  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ .

**Demostración:** Veremos primero que  $a(t) \cos \varphi(t) + b(t) \sin \varphi(t) = 1$ . Si derivamos el lado izquierdo de esta ecuación obtenemos

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)' = a' \cos \varphi - a(\sin \varphi)\varphi' + b' \sin \varphi + b(\cos \varphi)\varphi'.$$

Por la definición de  $\varphi$ ,  $\varphi' = ab' - ba'$ , por lo que si sustituimos en la ecuación anterior obtenemos

$$(a \cos \varphi + b \sin \varphi)' = (b' + aba' - a^2b') \sin \varphi + (a' - b^2a' + bab') \cos \varphi = 0$$

ya que  $a^2 + b^2 = 1$  y  $aa' + bb' = 0$ . Por lo tanto  $a \cos \varphi + b \sin \varphi = cte$  y el valor de la constante resulta al valuar en  $t_0$

$$a(t_0) \cos \varphi(t_0) + b(t_0) \sin \varphi(t_0) = (a^2 + b^2)(t_0) = 1$$

Se sigue que  $(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cos \varphi - 2b \sin \varphi + 1 = 0$ ; entonces se cumplen  $a(t) = \cos \varphi(t)$ ,  $b(t) = \sin \varphi(t)$  y  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ . ♠

El siguiente lema relaciona la derivada covariante de dos campos vectoriales unitarios a lo largo de una curva con la variación del ángulo que forman estos campos.

**Lema 1.3.2** Si  $v$  y  $w$  son dos campos vectoriales unitarios diferenciables a lo largo de una curva  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $t \in I$ , entonces

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt},$$

donde  $\varphi$  está definida como en el lema anterior.

**Demostración:** Sean  $\bar{v} = N \times v$  y  $\bar{w} = N \times w$ , entonces

$$w = (\cos \varphi)v + (\sin \varphi)\bar{v}$$

Haciendo el producto vectorial de  $N$  con  $w$  tenemos que

$$\bar{w} = N \times w = (\cos \varphi)N \times v + (\sen \varphi)N \times \bar{v} = (\cos \varphi)\bar{v} - (\sen \varphi)v,$$

y si derivamos  $w$  respecto a  $t$

$$w' = -(\sen \varphi)\varphi'v + (\cos \varphi)v' + (\cos \varphi)\varphi'\bar{v} + (\sen \varphi)\bar{v}'.$$

Ahora tomamos el producto interior de  $w'$  y  $\bar{w}$ , teniendo en cuenta que  $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$  y  $\langle v, v' \rangle = 0$ , y obtenemos

$$\langle w', \bar{w} \rangle = (\sen^2 \varphi)\varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle \bar{v}, v' \rangle + (\cos^2 \varphi)\varphi' - (\sen^2 \varphi)\langle \bar{v}', v \rangle;$$

como  $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$ , si derivamos tenemos que  $\langle v', \bar{v} \rangle = -\langle v, \bar{v}' \rangle$  y por lo tanto

$$\langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + (\cos^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle + (\sen^2 \varphi)\langle v', \bar{v} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle,$$

lo que implica, por la observación de la definición 1.3.4 que

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \langle w', \bar{w} \rangle = \varphi' + \langle v', \bar{v} \rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \left[ \frac{Dv}{dt} \right]. \quad \spadesuit$$

Una consecuencia del lema anterior, es que si  $\alpha(s)$  es una curva parametrizada por longitud de arco,  $v(s)$  un campo paralelo a lo largo de  $\alpha(s)$  y  $w(s) = \alpha'(s)$ , entonces obtenemos

$$k_g = \left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = \frac{d\varphi}{ds},$$

es decir, la curvatura geodésica es la rapidez con que varía el ángulo que forma el vector tangente a la curva con una dirección paralela a lo largo de la curva.

**Proposición 1.3.1** *Sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización ortogonal de una vecindad de un abierto en una superficie orientada  $M$ , y  $w(t)$  un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de una curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Entonces*

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde  $\varphi(t)$  es el ángulo de  $\mathbf{x}_u$  a  $w(t)$  en la orientación dada.

**Demostración:** Tomemos los vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas  $e_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}$  y  $e_2 = \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$  y sea  $N = e_1 \times e_2$ , donde  $N$  es la orientación dada de  $M$ . Ahora, por el Lema 1.3.2 tenemos

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] + \frac{d\varphi}{dt},$$

donde  $e_1(t)$  es el campo vectorial restringido a la curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ . Ahora si calculamos  $\left[ \frac{De_1}{dt} \right]$  tenemos

$$\left[ \frac{De_1}{dt} \right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle = \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt}.$$

Como  $F = 0$ , tenemos que  $\langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{E_v}{2}$  y  $\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}$ ; por lo tanto,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \quad \text{y} \quad \langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} \right)_v, \frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}} \right\rangle = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}.$$

Sustituyendo estos valores en  $\left[ \frac{Dw}{dt} \right]$ , tenemos

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}. \quad \spadesuit$$

## 1.4. Teorema de Gauss-Bonnet local y global

**Definición 1.4.1** Si  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $I = [0, l]$ , decimos que  $\alpha$  es una **curva simple, cerrada y regular por partes** si

- Para todo  $t_1 \neq t_2$ , con  $t_1, t_2 \in (0, l)$ , se tiene  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ,
- $\alpha(0) = \alpha(l)$ ,
- Existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$  de  $I$  tal que  $\alpha$  es diferenciable y regular en cada  $[t_i, t_{i+1}]$  con  $i = 0, 1, \dots, k$ .

Los puntos  $\alpha(t_i)$  con  $i = 0, 1, \dots, k$  son llamados **vértices** de  $\alpha$  y las trazas  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  con  $i = 0, 1, \dots, k$  son llamados **arcos regulares** de  $\alpha$ . Para cada vértice  $\alpha(t_i)$  podemos definir su **ángulo exterior**  $\theta_i$  como el ángulo que forman la tangente de llegada en el punto  $t_i$ ,  $\alpha'(t_i)^-$  y la tangente de salida  $\alpha'(t_i)^+$  en el mismo punto, definido por la orientación (el sentido de recorrido) de la curva  $\alpha$ . Si  $\alpha'(t_i)^- = \alpha'(t_i)^+$ , entonces  $\theta_i = 0$ ; si  $-\alpha'(t_i)^- = \alpha'(t_i)^+$ , entonces  $\theta_i = -\pi$ .

Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva simple, cerrada y regular por partes, con vértices  $\alpha(t_i)$  y ángulos exteriores  $\theta_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Las funciones diferenciables  $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por el lema 1.3.1 miden el ángulo positivo que forman  $\mathbf{x}_u$  y  $\alpha'(t)$ .

El siguiente teorema establece que la variación total del ángulo que forma el vector tangente a  $\alpha$  con alguna dirección fija, más la suma de los ángulos exteriores en los vértices es igual a  $2\pi$ . El lector puede ver la demostración en [4] o [7].

**Teorema 1.4.1 (Del ángulo de rotación de las tangentes)** Para una curva simple, cerrada y regular por partes, tenemos

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi$$

donde el signo depende de la orientación de  $\alpha$ .  $\spadesuit$

Estamos preparados para enunciar y demostrar la parte local del teorema de Gauss-Bonnet; será sorprendente ver que el lado derecho de la fórmula sea siempre una constante, sin importar en cuál superficie se encuentra la **región simple**, esto es, si  $R$  es homeomorfa a un disco cerrado y  $\partial R$  es una curva simple regular por partes.

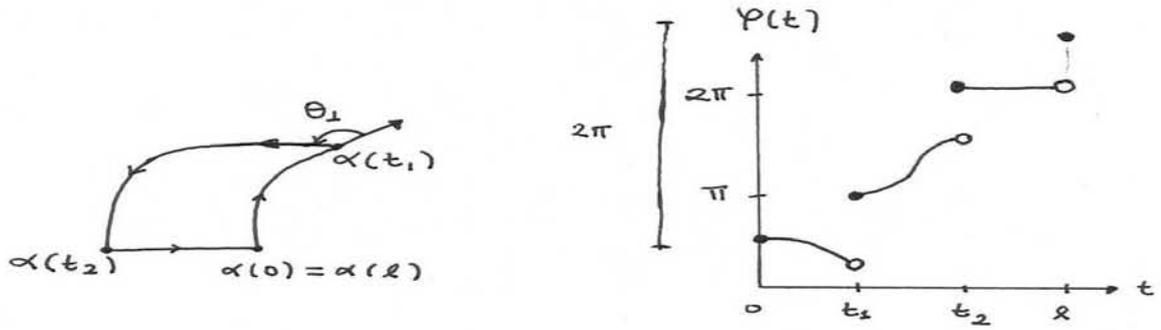


Figura 1.4: Ángulo de rotación de las tangentes de una curva  $\alpha$

**Teorema 1.4.2 (Teorema de Gauss-Bonnet (local))** Sea  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  una parametrización ortogonal ( $F = 0$ ) de una superficie orientada  $M$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^2$  es homeomorfo a un disco abierto y  $\mathbf{x}$  es compatible con la orientación de  $M$ . Tomemos  $R \subset \mathbf{x}(U)$  una región simple de  $M$  y sea  $\alpha : I \rightarrow M$  parametrizada por longitud de arco  $s$  y orientada positivamente tal que  $\partial R = \alpha(I)$ . Sean  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$  los vértices y  $\theta_0, \dots, \theta_k$  los ángulos exteriores de la curva  $\alpha$  respectivamente. Entonces

$$\iint_R K dV + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

en donde  $k_g(s)$  es la curvatura geodésica de los arcos regulares de  $\alpha$  y  $K$  es la curvatura gaussiana de  $M$ .

**Demostración:** Por la proposición 1.3.1 con  $w = \alpha'(s)$ , tenemos que

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right\} + \frac{d\varphi_i(s)}{ds},$$

donde  $\varphi_i(s)$  mide el ángulo positivo entre  $\mathbf{x}_u$  y  $\alpha'(s)$  en cada intervalo  $[s_i, s_{i+1}]$ . Si integramos en cada intervalo la curvatura geodésica y sumamos todas esas integrales, tenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i(s)}{ds} ds.$$

Usando el teorema de Green: si  $P(u, v)$  y  $Q(u, v)$  son funciones diferenciables en una región  $A \subset \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\int_{\partial A} P du + Q dv = \iint_A \left( \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv;$$

con  $P = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$ ,  $Q = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$  y  $A = \mathbf{x}^{-1}(R)$ , obtenemos

$$\int_{\partial R} k_g(s) ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i(s)}{ds} ds.$$

Ahora, usando el hecho de que la parametrización es ortogonal, podemos aplicar la proposición 1.2.1 y por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\int_{\partial R} k_g(s) ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} -K\sqrt{EG}dudv + \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)).$$

Utilizando el teorema del ángulo de rotación de las tangentes y tomando en cuenta que la curva está orientada positivamente, llegamos al resultado deseado:

$$\iint_R KdV + \int_{\partial R} k_g(s)ds + \sum_{i=0}^k \theta_i - 2\pi = 0. \quad \spadesuit$$

Para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet en su versión global necesitamos definir algunos conceptos topológicos.

Una **región**  $R \subset M$  es **regular** si  $R$  es compacta y su frontera  $\partial R$  es unión finita de curvas simples, cerradas y regulares por partes. Una región simple con tres vértices y con ángulos exteriores diferentes de cero es un **triángulo**.

**Definición 1.4.2** Una **triangulación** de una región  $R \subset M$  es una familia finita  $J$  de triángulos  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que

- $\cup_{i=1}^n T_i = R$ ;
- Si  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , entonces  $T_i \cap T_j$  es un lado común de  $T_i$  y  $T_j$  ó un vértice común.

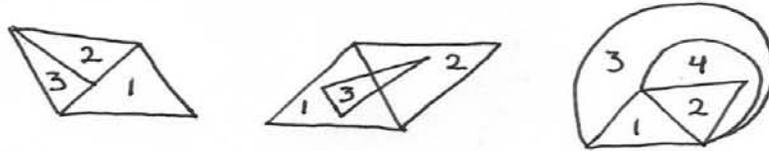


Figura 1.5: Triangulaciones no válidas

Si tenemos una triangulación  $J$  de una región regular  $R \subset M$  de una superficie  $M$ , denotaremos por  $F$  el número de triángulos,  $E$  el número de aristas y  $V$  el número de vértices de la triangulación. El número  $F - E + V = \chi(R)$  es la **característica de Euler** de la región.

Necesitaremos algunos resultados para probar el teorema global de Gauss-Bonnet y cuya demostración pasaremos por alto, ver [9].

Por ejemplo, se demuestra que cada región regular de una superficie regular admite una triangulación.

Si  $R \subset M$  es una región regular de una superficie orientada y  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  una familia de parametrizaciones compatibles con la orientación de  $M$ , existe una triangulación  $J$  de  $R$  de tal manera que

cada triángulo está contenido en alguna vecindad coordenada de la familia  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  y si la frontera de cada triángulo de  $J$  está orientada positivamente, los triángulos adyacentes determinan orientaciones opuestas en el lado común.

Y la más importante; la característica de Euler  $\chi(R)$  no depende de la triangulación.

**Teorema 1.4.3 (Teorema de Gauss-Bonnet (global))** *Sea  $R \subset M$  una región regular de una superficie orientada y sean  $C_1, \dots, C_n$  curvas cerradas, simples y regulares por partes que forman la frontera  $\partial R$  de la región  $R$ . Supongamos que  $C_i$  está orientada positivamente y sean  $\theta_1, \dots, \theta_p$  los ángulos exteriores de las curvas  $C_1, \dots, C_n$ . Entonces*

$$\iint_R K dV + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R)$$

donde  $s$  es la longitud de arco de  $C_i$ .

**Demostración:** Tomamos  $J$  una triangulación de la región  $R$ , tal que cada triángulo  $T_j$  esté contenido en una vecindad coordenada de una familia de parametrizaciones ortogonales ( $F = 0$ ), compatibles con la orientación de  $M$ . Si aplicamos el teorema de Gauss-Bonnet local a cada triángulo  $T_j$  y sumamos sobre los elementos de la triangulación, teniendo en cuenta que las integrales en los lados comunes de dos triángulos se cancelan, obtenemos

$$\iint_R K dV + \sum_{l=1}^n \int_{C_l} k_g(s) ds + \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F$$

donde  $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$  son los ángulos exteriores de  $T_j$ . Entonces los ángulos interiores  $\varphi_{jk}$  de  $T_j$  están dados por  $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ , por lo que la suma de los ángulos exteriores puede expresarse como

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 3\pi F - \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{jk}.$$

Usaremos ahora como notación:  $E_e$  número de lados exteriores de  $J$ ;  $E_i$  número de lados interiores de  $J$ ;  $V_e$  número de vértices exteriores de  $J$ ;  $V_i$  número de vértices interiores de  $J$ .

Se puede mostrar por inducción que  $3F = 2E_i + E_e$ , por lo que

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1, k=1}^{F,3} \varphi_{jk}.$$

También observamos que  $V_e = V_{et} + V_{ec}$  donde  $V_{et}$  es el número de vértices exteriores de la triangulación que no son vértices de alguna curva  $C_i$  y  $V_{ec}$  es el número de vértices de las curvas  $C_i$ ; entonces es claro que para los vértices exteriores la suma de los ángulos interiores es  $\pi$ , mientras que para los vértices interiores de  $J$  la suma de los ángulos interiores es  $2\pi$ , por lo tanto

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{l=1}^p (\pi - \theta_l).$$

Si sumamos y restamos  $\pi E_e$  y tomamos en cuenta que  $E_e = V_e$  ya que  $C_i$  es cerrada, tenemos que

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_e - \sum_{l=1}^p \pi + \sum_{l=1}^p \theta_l.$$

Como  $\sum_{l=1}^p \pi = \pi V_{ec}$ , entonces

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi(V_{et} + V_{ec}) + \sum_{l=1}^p \theta_l;$$

por lo tanto,

$$\sum_{j=1, k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l.$$

porque  $2\pi V_i - \pi V_e - \pi(V_{et} + V_{ec}) = 2\pi V$ . Si sustituimos esta ultima expresión en la primera ecuación que obtuvimos, tenemos que

$$\iint_R K dV + \sum_{l=1}^n \int_{C_l} k_g(s) ds + 2\pi E - 2\pi V + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi F;$$

así llegamos al resultado enunciado,

$$\iint_R K dV + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi \chi(R). \quad \spadesuit$$

Este teorema tiene un gran número de consecuencias importantes; por ejemplo, como la característica de Euler de una región simple  $R$  en una superficie es  $\chi(R) = 1$  tenemos:

**Corolario 1.4.1** *Si  $R$  es una región simple de  $M$ , entonces*

$$\iint_R K dV + \int_{\partial R} k_g(s) ds + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi. \quad \spadesuit$$

Si aplicamos el teorema a una triangulación sobre una superficie compacta y orientable (una superficie compacta se puede considerar como una región), vemos que la región no tiene frontera y no hay ángulos exteriores, por lo que obtenemos:

**Corolario 1.4.2** *Sea  $M$  una superficie compacta orientable, entonces*

$$\iint_M K dV = 2\pi \chi(M). \quad \spadesuit$$

La curvatura total  $\iint_M K dV$  es un invariante topológico, esto es, si  $M$  y  $M'$  son superficies difeomorfas, entonces las curvaturas gaussianas  $K$  y  $K'$  pueden ser diferentes, pero sus curvaturas totales son iguales, pues  $M$  y  $M'$  tienen la misma característica de Euler; por lo tanto,

$$\iint_M K dV = 2\pi \chi(M) = 2\pi \chi(M') = \iint_{M'} K' dV'.$$

Para los siguientes corolarios es preciso utilizar nuevamente un resultado topológico, el teorema de clasificación de superficies compactas, ver [10]; que para el caso de una superficie  $M$  orientable asegura que  $M$  es homeomorfa a una esfera con asas. Con este resultado a la mano, es fácil comprobar que  $\chi(M)$  sólo puede tomar los valores  $2, 0, -2, -4, \dots, -2g$ , dependiendo de que  $M$  sea una esfera, una esfera con 1-asa, una esfera con 2-asas, etc.

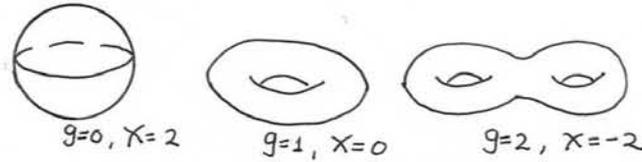


Figura 1.6: Superficies de genero 0, 1, 2

**Corolario 1.4.3** *Cualquier superficie compacta, orientable  $M$  con  $g$ -asas tiene curvatura total  $4\pi(1 - g)$ . ♠*

**Corolario 1.4.4** *Cualquier superficie compacta, orientable  $M$  con  $K > 0$ , es homeomorfa a la esfera; si  $K = 0$ , entonces  $M$  es homeomorfa a una esfera con un asa (toro) y si  $K < 0$ ,  $M$  es homeomorfa a una esfera con más de un asa.*

**Demostración:** Cuando  $K > 0$ , por el corolario anterior tenemos

$$0 < \iint_M K dV = 2\pi\chi(M).$$

Esto pasa si y sólo si  $0 < \chi(M)$  y la esfera es la única superficie compacta orientada que satisface esta condición. Si  $K = 0$  tenemos que  $0 = \chi(M)$  y el toro es la única superficie compacta orientada que satisface esta condición. Si  $K < 0$  es claro que  $M$  es homeomorfa a una esfera con más de una asa. ♠

Para concluir este capítulo veremos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo  $T$  geodésico menos  $\pi$  es igual a la integral de la curvatura  $K$ . Sea  $T$  un triángulo geodésico en una superficie orientada  $M$  y sean  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  los ángulos interiores de  $T$ ; entonces, por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_T K dV = -\sum_{l=1}^3 \theta_l + 2\pi.$$

ya que  $\int_{\partial T} k_g(s) ds = 0$  y  $\chi(T) = 1$ ; como los ángulos interiores de  $T$  son  $\pi - \theta_l$  para  $l = 1, 2, 3$ , esto implica que

$$\iint_T K dV = -\sum_{l=1}^3 (\pi - \varphi_l) + 2\pi = \sum_{l=1}^3 \varphi_l - \pi.$$

Por lo tanto,

1. Si  $K > 0$ , entonces  $\sum_{l=1}^3 \varphi_l > \pi$ . Para un triángulo geodésico en la esfera ( $K = 1$ ) tenemos que  $\text{Área}(T) = \sum_{l=1}^3 \varphi_l - \pi$ .

2. Si  $K = 0$ , entonces tenemos un resultado de la geometría euclidiana  $\sum_{l=1}^3 \varphi_l = \pi$ .
3. Si  $K < 0$ , entonces  $\sum_{l=1}^3 \varphi_l < \pi$ . Para un triángulo geodésico en el plano hiperbólico ( $K = -1$ ) tenemos que  $\text{Área}(T) = -\sum_{l=1}^3 \varphi_l + \pi$ .

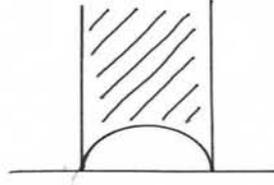


Figura 1.7: Triángulo hiperbólico ideal

En el último caso, como un bonito ejemplo podemos tomar un triángulo ideal, es decir, el caso límite de todos los triángulos hiperbólicos donde cada uno de sus tres ángulos va acercándose a cero, con dos de sus vértices en  $\partial\mathbb{H}^2$  y el tercero se encuentra en el punto al infinito y comprobar que su área es igual a  $\pi$ .

Para superficies de curvatura constante las relaciones 1, 2, 3 dan una de las diferencias más importantes entre los tres modelos clásicos de geometría: si  $K \equiv 1$ , tenemos la geometría de la esfera  $S^2$ ; si  $K \equiv -1$ , tenemos la geometría del semiplano superior  $\mathbb{H}^2$  o geometría hiperbólica y si  $K \equiv 0$ , tenemos la geometría del plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$  que es la que nos sirve de frontera entre las anteriores.

## Capítulo 2

# Teorema de Gauss-Bonnet para variedades riemannianas de dimensión dos

En el capítulo anterior trabajamos con superficies  $M$  contenidas en  $\mathbb{R}^3$  para las cuales desarrollamos conceptos de geometría diferencial que pertenecen a la geometría intrínseca de  $M$  pues no dependen del espacio euclidiano que la rodea (dependen del producto interior en cada punto de  $T_pM$ ); tal es el caso de la curvatura, la derivada covariante y la característica de Euler que es un concepto topológico. Por lo anterior, parece tener sentido el Teorema de Gauss-Bonnet para superficies abstractas, es decir, estudiar la superficie sin referirnos al espacio ambiente.

Para mostrarlo, generalizaremos primero el concepto de superficie al de variedad diferenciable, es decir, un espacio que localmente pueda tratarse como un espacio euclidiano. Para evitar repetición en los siguientes capítulos parte de la teoría la desarrollaremos para variedades de dimensión  $n$ .

### 2.1. Variedades diferenciables

**Definición 2.1.1** *Una variedad diferenciable de dimensión  $n$  es un conjunto  $M^n$  y una familia  $\mathcal{A}$  de aplicaciones inyectivas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de conjuntos abiertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $M$  tales que:*

1.  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ .
2. *Para cada par de aplicaciones en  $\mathcal{A}$  tales que  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  y  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y las aplicaciones  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$ ,  $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$  son diferenciables. (A veces se dirá de clase  $C^\infty$ , es decir, que dichas aplicaciones tiene derivadas de todos sus ordenes y además continuas).*

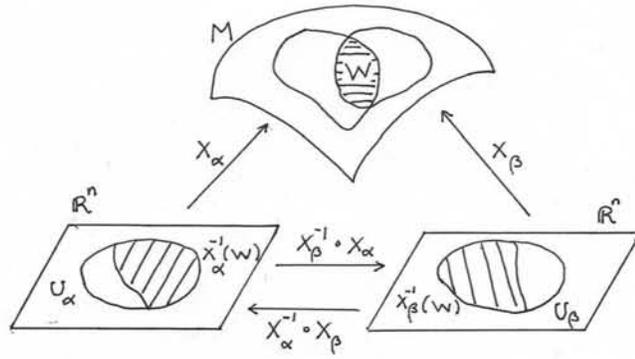


Figura 2.1: Variedad diferenciable

La familia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  es un **atlas** para  $M$ . Cuando la familia es máxima respecto a las dos condiciones anteriores se denomina **atlas máximo**. El par  $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$  con  $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  se llama **sistema de coordenadas** de  $M$  en  $p$ . A  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  se le llama **vecindad coordinada**. Una familia  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  que satisface las condiciones anteriores se llama **estructura diferenciable** en  $M$ .

Una estructura diferenciable sobre  $M$  induce una topología en  $M$  de manera natural, sólo definiendo que un conjunto  $A \subset M$  es un conjunto abierto si  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  para toda  $\alpha$ . Supondremos que todas las variedades diferenciables cumplen los siguientes axiomas:

**Axioma de Hausdorff.** Dados dos puntos distintos en  $M$ , existen vecindades de esos dos puntos que no se intersecan.

**Axioma de Numerabilidad.**  $M$  puede ser cubierta por un conjunto numerable de vecindades coordinadas.

### Ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$ , con la estructura diferenciable dada por la identidad  $\{(\mathbb{R}^n, Id)\}$ .
- $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ . Sea  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1)$  el polo norte y el polo sur respectivamente, definimos la proyección estereográfica respecto al polo norte  $\pi_N : S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que a  $p \in S^n - \{N\}$  lo manda a la intersección del hiperplano  $x_{n+1} = 0$  (identificado con  $\mathbb{R}^n$ ) con la línea que pasa por  $p$  y  $N$ :

$$\pi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Análogamente, definimos la proyección respecto al polo sur  $\pi_S : S^n - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\pi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right);$$

entonces  $(\mathbb{R}^n, \pi_N^{-1})$  y  $(\mathbb{R}^n, \pi_S^{-1})$  cubren a  $S^n$  y el cambio de coordenadas

$$y_j = \frac{x_j}{1 - x_{n+1}} \longleftrightarrow y'_j = \frac{x_j}{1 + x_{n+1}}$$

dado por  $y'_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ , para  $j = 1, \dots, n$  es diferenciable. Por lo tanto  $\{(\mathbb{R}^n, \pi_N^{-1}), (\mathbb{R}^n, \pi_S^{-1})\}$  es una estructura diferenciable en  $S^n$ .

- La generalización del concepto de superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  es la siguiente: Si  $M$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $M$  es una **superficie regular de dimensión  $k$**  si para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y una aplicación suprayectiva  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap V$  de un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^k$  sobre  $M \cap V$  tal que:
  - $\mathbf{x}$  es diferenciable.
  - $\mathbf{x}$  es un homeomorfismo, esto es,  $\mathbf{x}$  tiene inversa  $\mathbf{x}^{-1} : V \cap M \rightarrow U$  continua.
  - $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es inyectiva para todo  $q \in U$ .

Con esta definición,  $M$  es una variedad diferenciable; bastaría ver que dadas dos parametrizaciones  $\mathbf{x} : U_1 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  y  $\mathbf{y} : U_2 \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  tales que  $\mathbf{x}(U_1) \cap \mathbf{y}(U_2) = W \neq \emptyset$ , el cambio de coordenadas dado por  $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$  es un difeomorfismo, ver [4]. Esto implica que todas las superficies vistas en el capítulo uno son variedades diferenciables de dimensión dos.

- Sea  $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos el **plano proyectivo real  $P^n(\mathbb{R})$**  como el espacio cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  por la relación de equivalencia:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}), \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{R};$$

los puntos de  $P^n(\mathbb{R})$  los denotamos por  $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ . Entonces definimos  $V_i \subset P^n(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, n+1$  por  $V_i = \{(x_1 : \dots : x_{n+1}) ; x_i \neq 0\}$  y las aplicaciones  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$  por  $f_i(y_1, \dots, y_n) = (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i-1} : \dots : y_n)$ , que dan lugar a la familia  $\{f_i, \mathbb{R}^n\}$  que es una estructura diferenciable en  $P^n(\mathbb{R})$ .

Definimos una **variedad  $M$  con frontera**, con las mismas condiciones que pedimos para una variedad, pero ahora para abiertos en  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_n \geq 0\}$ . Los puntos de una variedad con frontera que no tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^n$  constituyen la frontera de  $M$  y se denota por  $\partial M$ .

Para variedades diferenciables podemos dar la definición de función diferenciable en un punto que es la misma que la definición 1.1.2. Por lo que podemos hablar de funciones diferenciables  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$  y  $\varphi : M^n \rightarrow N^m$ .

Necesitamos definir el concepto de vector tangente a  $M$  en un punto  $p$ . En el capítulo anterior consideramos una curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha(0) = p$  y el vector tangente  $\alpha'(0)$  es la velocidad de  $\alpha$  visto como un elemento de  $\mathbb{R}^3$ ; en vista de que no tenemos espacio ambiente en nuestras variedades, hay una propiedad característica del vector tangente que no depende del espacio ambiente, y es la que tomamos en cuenta para la siguiente definición.

**Definición 2.1.2** Sea  $\mathcal{D}$  el conjunto de funciones de  $M^n$  en  $\mathbb{R}$  que son diferenciales en  $p$  y tomemos  $\alpha : I \rightarrow M^n$  una curva diferenciable con  $\alpha(0) = p$ . Un **vector tangente** a  $M$  en  $p$  es una aplicación  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) |_{t=0} \quad \text{con} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

Esta definición no depende de una curva específica, esto es, si consideramos todas las curvas diferenciales que pasan por un punto  $p \in M$ , diremos que dos curvas  $\alpha$  y  $\beta$  son equivalentes si sus preimágenes comparten el mismo vector tangente en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es decir,

$$\frac{d}{dt}(x^{-1} \circ \alpha) |_{t=0} = \frac{d}{dt}(x^{-1} \circ \beta) |_{t=0}.$$

Esto resulta ser una relación de equivalencia y por lo tanto la definición anterior solo depende de la clase curva  $\alpha$ .

Mostraremos que el conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  constituye un espacio vectorial de dimensión  $n$  y lo denotaremos por  $T_p M$  o simplemente  $M_p$ .

Si tenemos un sistema de coordenadas en torno a  $p$ ,  $\mathbf{x} : U \rightarrow M^n$  podemos expresar la función  $\varphi$  como:  $\varphi \circ \mathbf{x}(q) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ , con  $q \in U \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{x}(q) = p$  y a la curva  $\alpha$  como

$$\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Nótese que designamos con la misma letra a las funciones  $\varphi$  y  $\varphi \circ \mathbf{x}$ ; entonces

$$\alpha'(0)(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) |_{t=0} = \frac{d}{dt}\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t)) |_{t=0} = \left( \sum_{i=1}^n x_i'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) \varphi$$

por lo que tiene sentido escribir  $\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x_i'(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ , donde  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  es el vector tangente en  $p$  a la curva coordenada  $x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$  y cualquier vector tangente a  $M$  en el punto  $p$  lo podemos ver como combinación lineal de  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0$ . Es inmediato que cualquier combinación lineal de  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$  da lugar a un vector tangente  $\beta'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  y en consecuencia el conjunto de vectores tangentes forma un espacio vectorial.

- Otro ejemplo muy importante de variedad diferenciable es el llamado **haz tangente**. Si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , definimos el haz tangente de  $M$  como

$$TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\}.$$

Daremos a  $TM$  una estructura diferenciable de dimensión  $2n$ : Sea  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  con  $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$ , cualquier  $v \in T_{x_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ , puede escribirse como  $v = \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$ , entonces definimos la aplicación  $\mathbf{y}_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$  como:

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha) = \left( \mathbf{x}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_i y_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right).$$

Como  $\{U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha\}$  es una estructura diferenciable sobre  $M$ , resulta también que  $\{U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\alpha\}$  es una estructura diferenciable para  $TM$ .

Primero observamos que  $\bigcup_\alpha \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$ ; esto se sigue porque  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$  y  $(d\mathbf{x}_\alpha)(\mathbb{R}^n) = T_{\mathbf{x}_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ . Sólo falta verificar que los cambios de coordenadas son difeomorfismos; si

$$(p, v) \in \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{y}_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$$

tenemos que  $(p, v) = (\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta(q_\beta), d\mathbf{x}_\beta(v_\beta))$ , donde  $q_\alpha \in U_\alpha$ ,  $q_\beta \in U_\beta$  y  $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = \mathbf{y}_\beta^{-1}(\mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d\mathbf{x}_\alpha(v_\alpha)) = (\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha(q_\alpha), d(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)(v_\alpha))$$

como  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  es diferenciable, tenemos que  $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$  es diferenciable.

En variedades, como en superficies, tenemos el concepto de campo vectorial.

**Definición 2.1.3** *Un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$  un vector  $X(p)$  que está contenido en  $T_p M$  (sección del haz tangente).*

Si tenemos  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  y  $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es la base de  $T_p M$  asociada a la parametrización, el campo vectorial  $X(p)$  lo podemos escribir en  $\mathbf{x}(U)$  como una combinación lineal:

$$X(p) = \sum_i^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

donde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función sobre  $U$ ; si las funciones  $a_i$  son diferenciables entonces el campo vectorial  $X$  también lo es. El conjunto de todos los campos vectoriales  $C^\infty$  en  $M$  tiene una estructura de espacio vectorial y se denota  $\mathfrak{X}(M)$ .

Pensaremos un campo vectorial como una aplicación  $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  del conjunto de funciones diferenciables en si mismo, definida localmente de la siguiente manera:

$$(X\varphi)(p) = \sum_i^n a_i(p) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p), \quad \text{donde } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Podemos entonces decir que  $X$  es diferenciable si y sólo si  $X\varphi \in \mathcal{D}$  para toda  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Dados  $X$  y  $Y$  campos diferenciables y  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable podemos considerar las funciones  $X(Y\varphi)$  y  $Y(X\varphi)$ ; vemos que estas operaciones no nos conducen a campos vectoriales ya que su expresión en términos de una parametrización involucra derivadas de orden mayor que uno. Pero sí podemos considerar la operación  $X(Y\varphi) - Y(X\varphi)$ , cuya expresión coordenada elimina las derivadas de segundo orden y obtenemos un nuevo campo vectorial, lo que da lugar al siguiente lema.

**Lema 2.1.1** *Sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre una variedad  $M$ . Entonces existe un único campo vectorial  $Z$  sobre  $M$  tal que, para toda función  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $Z\varphi = (XY - YX)\varphi$ . Este campo vectorial se denota por  $[X, Y] = XY - YX$  y es llamado **corchete de Lie**. ♠*

Observamos que los campos vectoriales  $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$  provenientes de una parametrización son  $C^\infty$ , por lo que tenemos  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ . Es fácil verificar que el corchete de Lie satisface las siguientes propiedades. Ver demostración en [11] o [12].

**Proposición 2.1.1** Sean  $X, Y$  y  $Z$  campos vectoriales diferenciables sobre  $M$ ,  $a$  y  $b$  números reales,  $\phi$  y  $\theta$  funciones diferenciables. Entonces,

1. *Anticonmutatividad:*  $[X, Y] = -[Y, X]$
2. *Bilinealidad:*  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
3. *Identidad de Jacobi:*  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
4.  $[\theta X, \phi Y] = \theta\phi[X, Y] + \theta X(\phi)Y - \phi Y(\theta)X.$  ♠

Otro paso hacia la geometría intrínseca es dar una manera de medir en cada punto de la variedad.

**Definición 2.1.4** Una **métrica riemanniana** en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$  un producto interior  $\langle -, - \rangle_p$  en  $T_pM$  definido positivo, bilineal y simétrico, en el cual la colección  $\{\langle -, - \rangle_p\}$  varía diferenciablemente en una vecindad  $V$  de  $M$  en el siguiente sentido: si  $X$  y  $Y$  son dos campos vectoriales diferenciables en  $M$ , la función  $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle$  es diferenciable en  $M$ .

La matriz  $(g_{ij}(p)) = (\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p)$  es llamada la **representación local** de la **métrica riemanniana** en un sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ . Una variedad diferenciable con una métrica riemanniana es llamada **variedad riemanniana**.

**Ejemplos:**

- $M = \mathbb{R}^n$ , con  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  identificado con  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . La métrica está dada de manera usual por  $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij} = g_{ij}$ .
- Para una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ , tenemos  $g_{11} = E$ ,  $g_{12} = g_{21} = F$  y  $g_{22} = G$ .
- El semiplano superior  $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  con la métrica dada por  $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$  y  $g_{12} = g_{21} = 0$ , es llamado **plano hiperbólico**.
- Sean  $M^n$  y  $N^{n+k}$  variedades diferenciables y  $f : M \rightarrow N$  una **inmersión**, es decir,  $f$  es diferenciable y  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  es inyectiva. Cuando  $N$  tiene una estructura riemanniana,  $f$  induce una estructura riemanniana en  $M$  definiendo  $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$  para cualquier  $u, v \in T_pM$ . La métrica sobre  $M$  es llamada la **métrica inducida** por  $f$ .

Se puede mostrar que cualquier variedad diferenciable admite una métrica riemanniana, usando el teorema de existencia de particiones de la unidad en una variedad diferenciable. Sólo daremos la definición que usaremos más adelante y la referencia [5].

Sea  $M$  una variedad diferenciable, una cubierta de abiertos  $V_\alpha \subset M$  tales que  $\cup_\alpha V_\alpha = M$  es llamada **cubierta localmente finita** si cualquier punto  $p \in M$  tiene una vecindad  $W$  tal que  $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$  para sólo un número finito de índices.

El **soporte**  $K$  de una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es la cerradura del conjunto de puntos donde  $f$  es diferente de cero.

Decimos que una familia  $\{f_\alpha\}$  de funciones diferenciables  $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una **partición diferenciable** de la **unidad** si y sólo si:

1. Para toda  $\alpha$ ,  $f_\alpha \geq 0$  y el soporte de la función  $f_\alpha$  está contenido en una vecindad coordinada  $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  de una estructura  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  de  $M$ .
2. La familia  $\{V_\alpha\}$  es localmente finita.
3.  $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ , para todo  $p \in M$ .

Decimos que la partición de la unidad  $\{f_\alpha\}$  es una **partición subordinada** a la **cubierta**  $\{V_\alpha\}$ .

Introduciremos las formas diferenciales cuyas propiedades algebraicas son necesarias para definir la integración y veremos también las propiedades del pull-back y la derivada exterior, ver [3].

Dado un espacio vectorial  $V$ , denotamos por  $\Omega^k(V)$  el conjunto de aplicaciones multilineales de orden  $k$ ,  $w : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que son **alternantes**, es decir,

$$w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -w(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

En general, no cualquier aplicación multilinear  $w$  es alternante pero hay una manera de obtener de cualquier aplicación multilinear, una que sí lo sea, a saber:

$$\text{Alt}(w)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn} \sigma \cdot w(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}),$$

donde  $S_k$  es el grupo de todas las permutaciones de  $\{1, \dots, k\}$  y  $\text{sgn} \sigma$  es 1 si la permutación es par y -1 si es impar. Definamos una operación  $\wedge$  en el conjunto de las aplicaciones alternantes: si  $w \in \Omega^k(V)$  y  $\eta \in \Omega^l(V)$ , entonces su producto, llamado **producto cuña**  $w \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(V)$  está dado por

$$w \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(w \otimes \eta);$$

donde  $w \otimes \eta(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_l) = w(v_1, \dots, v_k) \cdot \eta(v_{k+1}, \dots, v_l)$  es el llamado **producto tensorial**.

En el caso de variedades diferenciables, al considerar en cada  $p \in M$  el espacio vectorial  $T_p M$  tenemos  $\Omega^k(T_p M)$ .

**Definición 2.1.5** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Definimos una  **$k$ -forma diferencial**  $w$  en  $M$  como la elección para cada  $p \in M$  de un elemento  $w(p)$  en el espacio  $\Omega^k(T_p M)$  de las aplicaciones multilineales alternantes de orden  $k$  del espacio  $T_p M$ .*

En una vecindad coordinada  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  podemos escribir una  $k$ -forma diferencial  $w$  como

$$w_\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

donde  $\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}\}$  es una base de  $\Omega^k(T_p M)$ ,  $(i_1 < \dots < i_k)$  y  $w_{i_1 \dots i_k}$  son funciones diferenciables. Como notación usaremos  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  con  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , entonces tenemos que  $w = \sum_I w_I dx_I$ .

La dimensión de  $\Omega^k(T_p M)$  es  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  y en particular para  $k > n$  tenemos  $\Omega^k(T_p M) = \{0\}$ . Enunciaremos las propiedades de las formas diferenciales, cuya demostración se encuentra en [2].

**Proposición 2.1.2** Si  $w_1$  es una  $k$ -forma,  $w_2$  es una  $s$ -forma y  $w_3$  es una  $r$ -forma, entonces se tiene:

1. *Asociatividad:*  $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3)$ .
2. *Anticonmutatividad:*  $(w_1 \wedge w_2) = (-1)^{ks}(w_2 \wedge w_1)$ .
3. *Bilinealidad:* Si  $r = s$ ,  $w_1 \wedge (w_2 + w_3) = w_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge w_3$ . ♠

Dada  $f : M_1 \rightarrow M_2$  una aplicación diferenciable entre variedades y  $w$  una  $k$ -forma en  $M_2$ , entonces el **pull-back** de  $w$ ,  $f^*w$  es una  $k$ -forma en  $M_1$  definida de la manera obvia:

$$f^*w(p)(v_1, \dots, v_k) = w(f(p))(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

con  $p \in M$ ,  $v_1, \dots, v_k \in T_pM_1$  y donde  $df_p : T_pM_1 \rightarrow T_{f(p)}M_2$  es la diferencial de  $f$  en el punto  $p$ .

**Proposición 2.1.3** Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es una aplicación diferenciable y  $w_1, w_2$  son  $k$ -formas diferenciales sobre  $M_2$  y  $g : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una  $0$ -forma (funciones de la variedad en  $\mathbb{R}$ ), entonces

1.  $f^*(w_1 + w_2) = f^*w_1 + f^*w_2$ .
2.  $f^*(gw_1) = f^*(g)f^*(w_1)$ .
3.  $f^*(w_1 \wedge w_2) = f^*(w_1) \wedge f^*(w_2)$ . ♠

Si  $w$  es una  $k$ -forma definimos una  $(k+1)$ -forma  $dw$ , la diferencial de  $w$ , por  $dw = \sum_I da_I \wedge dx_I$  que es conocida como la **derivada exterior** y tiene las propiedades siguientes.

**Proposición 2.1.4** Si  $w_1$  y  $w_2$  son  $k$ -formas y  $w_3$  es una  $r$ -forma, la derivada exterior satisface:

1.  $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$ .
2.  $d(w_1 \wedge w_3) = dw_1 \wedge w_3 + (-1)^k w_1 \wedge dw_3$ .
3.  $d(dw_1) = d^2w_1 = 0$ .
4.  $d(f^*w_1) = f^*(dw_1)$ . ♠

Existe una relación entre la derivada exterior de 1-formas diferenciales y la operación corchete dada en la siguiente proposición:

**Proposición 2.1.5** Sea  $w$  una 1-forma sobre una variedad diferenciable  $M$ , sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre  $M$ , entonces  $dw$  satisface la relación siguiente

$$dw(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]).$$

**Demostración:** En un sistema de coordenadas tenemos  $w = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  y como la ecuación afirma que vale para cualquier 1-forma  $w$  podemos suponer que  $w = f dg$ , donde  $f, g$  son funciones  $C^\infty$  sobre  $M$  (0-formas). Evaluando en el primer lado de la ecuación tenemos

$$dw(X, Y) = df \wedge dg(X, Y) = df(X)dg(Y) - dg(X)df(Y) = X(f)Y(g) - X(g)Y(f)$$

y si evaluamos en el segundo miembro, llegamos al resultado:

$$\begin{aligned} Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y]) &= X(fdg(Y)) - Y(fdg(X)) - fdg([X, Y]) \\ &= X(fY(g)) - Y(fX(g)) - f(XY(g) - YX(g)) = X(f)Y(g) - X(g)Y(f). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Daremos el concepto de orientabilidad de una variedad  $M$  utilizando formas diferenciales. Sea  $f : V \rightarrow V$  una aplicación lineal no-singular de un espacio vectorial de dimensión finita en sí mismo y sean  $(v_1, \dots, v_n)$  y  $(v'_1, \dots, v'_n)$  dos bases ordenadas de  $V$ ; determinamos un isomorfismo con  $f(v_i) = v'_i$ ; donde la matriz  $A = (a_{ij})$  de  $f$  está dada por  $v'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}v_j$ .

Decimos que  $(v_1, \dots, v_n)$  y  $(v'_1, \dots, v'_n)$  tienen la misma orientación si  $\det A > 0$  (u orientación opuesta si  $\det A < 0$ ). La relación de tener la misma orientación es una relación de equivalencia, dividiendo toda la colección de bases ordenadas en dos clases. Una de las clases es llamada una **orientación** de  $V$  y denotada por  $[v_1, \dots, v_n] = \mu$ , la otra orientación será denotada por  $-\mu$ .

**Lema 2.1.2** Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de un espacio vectorial  $V$  y  $w$  una  $n$ -forma distinta de cero; entonces, para cualquier conjunto de vectores  $v_1, \dots, v_n$  tales que  $v_i = \sum_j \alpha_i^j e_j$  tenemos  $w(v_1, \dots, v_n) = \det(\alpha_i^j)w(e_1, \dots, e_n)$ .

**Demostración:** Sea  $w$  una  $n$ -forma y  $v_1, \dots, v_n \in V$ ; por la linealidad de las formas escribimos

$$w(v_1, \dots, v_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_n^{j_n} w(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}),$$

que se puede expresar por la antisimetría como

$$w(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn} \sigma) \alpha_1^{\sigma(1)} \cdots \alpha_n^{\sigma(n)} w(e_1, \dots, e_n) = \det(\alpha_i^j) w(e_1, \dots, e_n). \quad \spadesuit$$

**Corolario 2.1.1** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $w$  una  $n$ -forma en  $\Omega^n(V)$ , tal que  $w \neq 0$ , entonces existe una única orientación  $\mu$  para  $V$  tal que  $[v_1, \dots, v_n] = \mu$  si y sólo si  $w(v_1, \dots, v_n) > 0$ .  $\spadesuit$

En vista de este corolario definimos la orientación de una variedad como sigue:

**Definición 2.1.6** Una variedad  $M$  es **orientable**, si existe una  $n$ -forma  $w \in \Omega^n(T_p M)$  tal que  $w(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$ . Tal forma es la **forma de orientación**. Dos formas de orientación  $w$  y  $\tau$  sobre  $M$  son equivalentes si  $\tau = f \cdot w$ , para alguna 0-forma  $f \in \Omega^0(T_p M)$  con  $f(p) > 0$  (u orientación opuesta si  $f(p) < 0$ ) para todo  $p \in M$ . Una **orientación** de  $M$  es una clase de equivalencia de formas de orientación sobre  $M$ .

Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$  con frontera, la frontera  $\partial M$  es nuevamente una variedad de dimensión  $(n - 1)$  y podemos darle una orientación inducida por  $M$ : una base  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  de  $T_p\partial M$  es positiva si  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  es una base positiva de  $T_pM$ , para un vector  $v_0 \in T_pM$  que apunta hacia afuera de  $T_p\partial M$ .

Dada una métrica riemanniana nos permite definir el volumen sobre una variedad  $M$ ; para ello necesitamos definir la integral de una  $n$ -forma  $w$  sobre  $M$ . Si definimos el **soporte** de  $w$  como

$$K = \overline{\{p \in M : w(p) \neq 0\}}$$

y suponemos que  $M$  es compacta, entonces el soporte  $K$  de  $w$  también es compacto.

Supondremos que el soporte  $K$  de  $w$  está contenido en alguna vecindad coordenada  $V_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ . Entonces podemos escribir a  $w$  como

$$w_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

y definimos la **integral** de  $w$  sobre  $M$  como

$$\int_M w = \int_{V_\alpha} w_\alpha = \int_{U_\alpha} a_\alpha(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde la integral de la derecha es una integral en  $\mathbb{R}^n$ .

Si el soporte  $K$  está contenido en otra vecindad coordenada, se muestra que la integral no depende de la elección de la vecindad coordenada, ver [10] o [3].

En el caso donde el soporte  $K$  no está contenido en una vecindad coordenada, tomamos en cuenta una partición  $\{f_\alpha\}$  de la unidad subordinada a la cubierta  $\{V_\alpha\}$  (con  $\{V_\alpha\}$  compatible con la orientación). El soporte de cada forma  $f_\alpha w$  está contenida en  $V_\alpha$  y tiene sentido definir la **integral** de  $w$  sobre  $M$  como

$$\int_M w = \sum_\alpha \int_M f_\alpha w.$$

También se puede verificar que la integral no depende de la partición de la unidad elegida.

El **Teorema fundamental del cálculo** toma en la teoría de integración de variedades la forma siguiente:

**Teorema 2.1.1 (Teorema de Stokes)** *Sea  $M$  una variedad compacta orientada de dimensión  $n$ , con frontera  $\partial M$  y con la orientación de  $\partial M$  inducida por  $M$ . Sea  $w$  una  $(n - 1)$ -forma sobre  $M$ , entonces*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} w. \quad \spadesuit$$

Tomemos  $p \in M$  y una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  compatible con la orientación de  $M$ . Consideremos una base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_pM$  y escribamos  $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}$  en la base  $\{e_i\}$ :  $X_i(p) = \sum_k a_i^k e_k(p)$ ; entonces

$$g_{ij}(p) = \langle X_i, X_j \rangle(p) = \left\langle \sum_k a_i^k e_k, \sum_l a_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \langle e_k, e_l \rangle = \sum_k a_i^k a_j^k$$

para  $i, j = 1, \dots, n$ . Por lo tanto, la matriz de la métrica se escribe como  $(g_{ij}) = A^t A$  con  $A = (a_i^j)$ .

Usando el lema 2.1.2, el volumen  $dV(X_1(p), \dots, X_n(p))$  del paralelepípedo formado por el conjunto de vectores  $X_1(p), \dots, X_n(p)$  en  $T_p M$  es igual a  $dV(e_1, \dots, e_n) = 1$  multiplicado por el determinante de la matriz  $A$ . Podemos ver además que  $\det(g_{ij}) = \det(A^t A) = \det^2 A$  y así

$$dV(X_1(p), \dots, X_n(p)) = \det(a_i^j) dV(e_1, \dots, e_n) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p).$$

La forma  $dV(X_1(p), \dots, X_n(p))$  se conoce como **forma de volumen**. Si  $R \subset M$  es una región (esto es, un subconjunto abierto y conexo de  $M$ ), tal que  $R$  está contenida en una vecindad coordinada  $\mathbf{x}(U)$  y la parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  es compatible con la orientación, definimos el **volumen** de  $R$  por una integral en  $\mathbb{R}^n$ :

$$\text{vol}(R) = \int_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n.$$

## 2.2. Conexión afín y derivada covariante

El concepto de derivada covariante visto en el capítulo anterior, es un concepto intrínseco esto hace que ideas básicas como geodésicas y curvatura se puedan generalizar a variedades riemannianas y para eso es necesario definir cómo se derivan los campos vectoriales, una operación con ciertas propiedades que permitan desarrollar geometría diferencial sobre la variedad.

**Definición 2.2.1** Una **conexión afín**  $\nabla$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que a cualesquiera dos campos vectoriales  $X, Y$  les asocia otro campo  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  de forma tal que, para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f, g \in \mathcal{D}$ , tenemos

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

En un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ , escribimos  $X = \sum_i x_i X_i$  y  $Y = \sum_j y_j X_j$  donde  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ; por las propiedades de la definición 2.2.1 tenemos

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left( \sum_j y_j X_j \right) = \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} x_i X_i(y_j) X_j.$$

Generalizamos los símbolos de Christoffel escribiendo  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ , donde  $\Gamma_{ij}^k$  son funciones diferenciables; así

$$\nabla_X Y = \sum_k \left( \sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Esto dice que  $\nabla_X Y$  sólo depende de  $x_i(p)$ ,  $y_k(p)$  y las derivadas  $X(y_k)(p)$  de  $y_k$  por  $X$ .

Si en una variedad riemanniana existe una conexión afín, podemos derivar campos vectoriales a lo largo de una curva:

**Proposición 2.2.1** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ . Entonces existe una correspondencia única la cual asocia a un campo  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$ , el campo vectorial  $\frac{DV}{dt}$  a lo largo de  $c$ , llamado la **derivada covariante** de  $V$  a lo largo de  $c$  tal que:

1.  $\frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
2.  $\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$
3. Si el campo  $V$  está inducido por el campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , es decir,  $V(t) = Y(c(t))$ , entonces  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{c'(t)}Y$ .

**Demostración:** Supongamos que hay una correspondencia que satisface 1, 2 y 3. Tomemos  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  un sistema de coordenadas tal que  $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$  y sea  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  la expresión local de la curva  $c(t)$  con  $t \in I$ . Si expresamos  $V = \sum_j v^j X_j$ , donde  $v^j = v^j(t)$  y  $X_j = X_j(c(t))$ , por 1 y 2 tenemos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}$$

Ahora, por la condición 3 y utilizando 1 de la definición 2.2.1 tenemos que

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{c'(t)}X_j = \nabla_{(\sum_i \frac{dx_i}{dt} X_i)}X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i}X_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

por lo que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i}X_j.$$

Esta ecuación nos muestra que existe una única correspondencia que satisface las condiciones de la proposición. Para mostrar la existencia definimos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\mathbf{x}(U)$  mediante la fórmula anterior. Si  $\mathbf{y}(W)$  es otra vecindad coordenada, tal que tenemos  $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(W) \neq \emptyset$ , definimos  $\frac{DV}{dt}$  en  $\mathbf{y}(W)$  por la ecuación anterior; por la unicidad, ambas definiciones coinciden en  $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(W)$ . Se sigue que esta definición se puede extender a toda la variedad. ♠

Como antes, en una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$ , se dice que un campo vectorial  $V$  a lo largo de una curva  $c : I \rightarrow M$  es **paralelo** a lo largo de  $c$  cuando  $\nabla_{c'(t)}V = 0$ . Y una curva  $c : I \rightarrow M$  es una **geodésica** si  $c'(t)$  es un campo paralelo a lo largo de  $c$ .

La siguiente proposición nos dice que dado  $V_0 \in T_pM$  y una curva  $c$  tal que  $c(t_0) = p$ , existe un único campo  $V$  de vectores paralelos a lo largo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ . Ver demostración en [5].

**Proposición 2.2.2** Si  $M$  es una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y tenemos un curva  $c : I \rightarrow M$  tal que  $V_0$  es un vector tangente a  $M$  en  $c(t_0)$ , con  $t_0 \in I$ , entonces hay un único campo paralelo de vectores  $V$  a lo largo de  $c$ , tal que  $V(t_0) = V_0$ .  $V(t)$  es llamado **transporte paralelo** de  $V(t_0)$  a lo largo de  $c$ . ♠

Si en una variedad diferenciable se tiene la estructura de métrica riemanniana y de conexión afín, es importante establecer qué se entiende por la compatibilidad de ambas estructuras.

**Definición 2.2.2** Sea  $M$  una variedad diferenciable con una conexión afín  $\nabla$  y una métrica riemanniana  $\langle -, - \rangle$ . La **conexión** se dice que es **compatible con la métrica**  $\langle -, - \rangle$ , cuando para cualquier curva diferenciable  $c(t)$  y cualquier par de campos vectoriales  $P$  y  $P'$  paralelos a lo largo de  $c(t)$ , tenemos que  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .

**Proposición 2.2.3** Sea  $M$  una variedad riemanniana. Una **conexión**  $\nabla$  sobre  $M$  es **compatible con la métrica** si y sólo si para cualesquiera campos vectoriales  $V$  y  $W$  a lo largo de una curva diferenciable  $c : I \rightarrow M$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

**Demostración:** Supongamos que  $\nabla$  cumple esta ecuación, entonces si  $V$  es un campo paralelo a lo largo de  $c$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = 2 \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle = 0$$

esto es,  $\langle V, V \rangle$  es constante a lo largo de  $c$ . Recíprocamente, sea  $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$  una base ortonormal de  $T_{x(t_0)}M$ ; por la proposición 2.2.2, podemos extender los vectores  $P_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a lo largo de  $c$  con el transporte paralelo.

Como  $\nabla$  es compatible con la métrica y  $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$  es base de  $T_{c(t)}M$  podemos escribir

$$V = \sum_i v^i P_i \quad \text{y} \quad W = \sum_j w^j P_j \quad i, j = 1, \dots, n$$

donde  $v^i$  y  $w^j$  son funciones diferenciables sobre  $I$ ; por el paralelismo

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_j \frac{dw^j}{dt} P_j$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \sum_j w^j P_j \right\rangle + \left\langle \sum_i v^i P_i, \sum_j \frac{dw^j}{dt} P_j \right\rangle &= \sum_i \left\{ \frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i v^i w^i \right\} = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

**Corolario 2.2.1** Una conexión  $\nabla$  en una variedad riemanniana  $M$  es compatible con la métrica si y sólo si

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad \spadesuit$$

**Definición 2.2.3** Una conexión afín  $\nabla$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es **simétrica** cuando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

El siguiente teorema es llamado el Teorema fundamental de la geometría riemanniana, pues muestra que siempre hay una buena conexión, es decir, que sea compatible con la métrica riemanniana y simétrica. Ver demostración en [5].

**Teorema 2.2.1 (Levi-Civita)** *Dada una variedad riemanniana  $M$ , existe una única conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$  tal que  $\nabla$  es simétrica y compatible con la métrica riemanniana. ♠*

### 2.3. Tensor de curvatura

En el capítulo uno vimos que la curvatura se expresa en forma intrínseca, es decir, en términos de la primera forma fundamental y sus derivadas como:

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -EK.$$

El lado izquierdo de esta ecuación es muy importante y se le conoce como **tensor de curvatura**.

En hipersuperficies de codimensión uno se tiene una fórmula análoga que es intrínseca y se escribe como:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{lj}^i - \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{kj}^i + \sum_u (\Gamma_{lj}^u \Gamma_{ku}^i - \Gamma_{kj}^u \Gamma_{lu}^i)$$

La expresión  $R_{jkl}^i$  está bien definida para cualquier variedad riemanniana y es el fundamento para encontrar información de la curvatura en las variedades; aunque su aspecto puede parecer obscuro veremos que se sigue de la siguiente definición.

**Definición 2.3.1** *La curvatura  $R$  de una variedad riemanniana  $M$  es una correspondencia que asocia a cada par de campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  una aplicación  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

donde  $\nabla$  es una conexión sobre una variedad riemanniana  $M$ .

La demostración de la proposición siguiente es solamente un cálculo, ver [5]. Pero gracias a ello sabemos que la curvatura es un tensor.

**Proposición 2.3.1** *La curvatura  $R$  de una variedad  $M$  tiene las siguientes propiedades:*

1.  *$R$  es bilineal en  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , esto es,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$$

$$\text{con } f, g \in \mathcal{D}(M), \quad X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M).$$

2. *El operador  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es lineal, esto es,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$$

$$\text{con } f \in \mathcal{D}(M), \quad Z, W \in \mathfrak{X}(M). \quad \spadesuit$$

**Proposición 2.3.2** Si ahora escribimos  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$ , entonces son válidas:

1.  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$       *Identidad de Bianchi*
2.  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T) = -(X, Y, T, Z) = (Z, T, X, Y)$ .      ♠

Es importante expresar la curvatura en un sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$  alrededor de un punto  $p \in M$ ; teniendo en cuenta que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , para los campos coordenados escribimos

$$R(X_k, X_l)X_j = \sum_i R_{jkl}^i X_i,$$

donde  $R_{jkl}^i$  son las componentes de la curvatura  $R$  en  $(U, \mathbf{x})$ . Además si tenemos en cuenta que  $[X_k, X_l] = 0$ , vemos que

$$R(X_k, X_l)X_j = \nabla_{X_k} \nabla_{X_l} X_j - \nabla_{X_l} \nabla_{X_k} X_j.$$

Podemos expresar  $R_{jkl}^i$  en términos de los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  de una conexión riemanniana, donde  $\Gamma_{ij}^k$  están dados por  $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ ;

$$\begin{aligned} R(X_k, X_l)X_j &= \nabla_{X_k} \nabla_{X_l} X_j - \nabla_{X_l} \nabla_{X_k} X_j = \nabla_{X_k} \left( \sum_u \Gamma_{lj}^u X_u \right) - \nabla_{X_l} \left( \sum_u \Gamma_{kj}^u X_u \right); \\ R(X_k, X_l)X_j &= \sum_i \left( \sum_u \Gamma_{lj}^u \Gamma_{ku}^i - \sum_u \Gamma_{kj}^u \Gamma_{lu}^i + \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma_{lj}^i - \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{kj}^i \right) X_i. \end{aligned}$$

Si ahora escribimos  $\langle R(X_k, X_l)X_j, X_i \rangle = \sum_s g_{is} R_{jkl}^s = R_{ijkl}$ , donde  $(g_{is})$  es la matriz de la métrica. También podemos escribir las identidades de la proposición 2.3.2 como

$$\begin{aligned} R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} &= 0 \\ R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \quad R_{ijkl} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = R_{klij}. \end{aligned}$$

Algo sorprendente es que basta conocer todas las curvaturas de subvariedades de dimensión dos para determinar cualquier posible  $R_{ijkl}$ .

Empecemos por considerar un punto  $p$  en una variedad riemanniana  $M$  y su espacio tangente  $T_p M$ ; definimos la **aplicación exponencial**  $exp_p$ , mandando a cada vector distinto de cero  $v \in T_p M$  al punto  $q \in M$  de la geodésica que comienza en  $p$  en dirección de  $v$  y que corresponde a una longitud  $|v|$ .

Por ejemplo, en  $M = \mathbb{R}^n$ , la aplicación exponencial no es más que la identificación canónica del espacio tangente  $T_p \mathbb{R}^n$  con  $\mathbb{R}^n$ , más precisamente  $exp_p(tv) = p + tv$ .

En  $M = S^2$ ,  $exp_p(v)$  está definida en  $S^2$  para todo  $v \in T_p S^2$ . Los puntos de los círculos de radio  $(2n + 1)\pi$  son aplicados al punto antípoda de  $p$ . Y los puntos de los círculos de radio  $2n\pi$  son mandados nuevamente a  $p$ .

Se muestra que la aplicación  $exp_p(v)$  siempre está definida y es diferenciable en una vecindad del punto  $p$ , ver más detalles en [5] o [7].

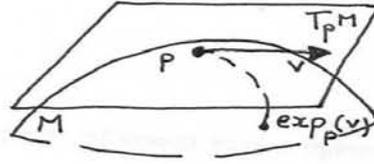


Figura 2.2: Aplicación exponencial

Diremos que  $M$  es **geodésicamente completa**, si las geodésicas pueden definirse sobre todo  $\mathbb{R}$ . También diremos que un conjunto  $U \subset M$  es **geodésicamente convexo** si para cualquier par de puntos  $q, q' \in U$  hay una geodésica entre ellos de longitud mínima contenida en  $U$ .

Sea  $p$  un punto en una variedad riemanniana  $M$ ; dado un subespacio de dimensión dos del espacio tangente  $T_p M$ :  $\sigma \subset T_p M$ , podemos considerar la aplicación exponencial y tomar todas las geodésicas que pasan por  $p$  y que son tangentes al plano  $\sigma$ ; resulta así una subvariedad de dimensión dos,  $S \subset M$ , la cual tiene una métrica inducida por la inclusión. Como la curvatura de una superficie está expresada en términos de la métrica, podemos hablar de la curvatura de  $S$  en  $p$ , indicada como  $K(p, \sigma)$  llamada la **curvatura seccional** de  $M$  en  $p$  con respecto a  $\sigma$ .

**Definición 2.3.2** Dado un punto  $p \in M$  en una variedad riemanniana y  $\sigma \subset T_p M$  un subespacio de dimensión dos, el número real  $K(\sigma)$  dado por

$$K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

donde  $X, Y$  es cualquier base de  $\sigma$ , es llamada la **curvatura seccional** de  $\sigma$ .

La curvatura seccional depende sólo de  $\sigma$  y no de la base  $X, Y$ . Ver demostración en [5].

## 2.4. Marcos móviles, formas de conexión y formas de curvatura

Ahora, para facilitar los cálculos conviene introducir la herramienta de marcos móviles debidos a Elie Cartan.

Una base ordenada  $\{V_1, \dots, V_n\}$  de un espacio vectorial  $V$  es un **marco** de  $V$ . Si  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  son los vectores tangentes a las curvas coordenadas de un sistema coordenado  $(\mathbf{x}, U)$ , entonces el conjunto  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  es una base ordenada de  $T_p M$  y por lo tanto un marco. Los campos de vectores  $\{X_i\}$  determinan una función de  $p \rightarrow \{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$ , es decir, en cada punto  $p$  se tiene un marco del espacio tangente, lo que da lugar a la siguiente definición.

**Definición 2.4.1** Un **marco móvil** en  $M^n$  es una función  $F : M \rightarrow \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)$  de clase  $C^\infty$ , que a cada punto  $p \in M$  le asocia un marco  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\} \subseteq T_p M$ .

Observamos que los marcos móviles no necesariamente provienen de una única parametrización: por ejemplo en el toro  $T^2$  es posible definir un marco móvil en toda su superficie, pero no existe una sola parametrización que cubra el toro.

Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un marco móvil en  $a \in \mathbb{R}^n$ ; entonces existen las formas duales  $\theta^i$  de  $X_i$  tal que  $\theta^i(X_j) = \delta_{ij}$  y las llamamos el **comarco asociado**. Si  $X_a$  es un vector tangente a  $\mathbb{R}^n$  en un punto  $a$ , entonces  $\theta^1(X_a), \dots, \theta^n(X_a)$  son las componentes de  $X_a$  en el marco móvil  $\{X_1(a), \dots, X_n(a)\}$ .

Por lo tanto

$$X_a = \sum_{i=1}^n \theta^i(X_a) X_i(a).$$

Ahora, como cada  $X_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación diferenciable, la diferencial en un punto  $p$  es una aplicación lineal  $(dX_j)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuyo valor en  $v \in \mathbb{R}^n$  lo podemos escribir en el marco  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  como:

$$(dX_j)_p(v) = \sum_{i=1}^n (w_j^i)(v) \cdot X_i(p) \quad \text{para} \quad v \in T_p M.$$

En particular podemos expresar la diferencial de  $X_i$  en términos del mismo marco y obtener que  $(w_j^i)(X_a)$  es la  $X_i$  componente de  $(dX_j)(X_a)$ . Las  $n^2$  formas  $w_j^i$  se llaman **formas de conexión** de  $\mathbb{R}^n$  en el marco  $\{X_1(p), \dots, X_n(p)\}$  y satisfacen las siguientes ecuaciones:

**Proposición 2.4.1** *Las 1-formas  $\theta^i$  y  $w_j^i$  para un marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  satisfacen las ecuaciones estructurales:*

1.  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i = - \sum_k w_k^i \wedge \theta^k$  *Primera ecuación estructural*
2.  $dw_j^i = - \sum_k w_k^i \wedge w_j^k$  *Segunda ecuación estructural*

**Demostración:** Sea la aplicación  $X_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que a cada  $a \in \mathbb{R}^n$  le asocia  $X_i(a)$  y tomemos  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación identidad; entonces  $dP(X_a) = X_a$  por lo que se tiene  $dP(X_a) = \sum_{i=1}^n \theta^i(X_a) \cdot X_i(a)$ . Como  $d^2 w = 0$  y  $X_i$  es una función, podemos escribir, tomando  $X_i$  como una 0-forma con valores en  $\mathbb{R}^n$  (veremos esto en la sección 3.6):

$$0 = d^2 P = d \left( \sum_{i=1}^n \theta^i \wedge X_i \right) = \sum_{i=1}^n d\theta^i \wedge X_i - \sum_{k=1}^n \theta^k \wedge dX_k.$$

Al introducir las formas de conexión tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^n d\theta^i \wedge X_i - \sum_{k=1}^n \theta^k \wedge \sum_{i=1}^n w_k^i X_i,$$

como  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una base los coeficientes deben anularse. Esto implica la primera ecuación estructural:  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i$ . Para obtener la segunda, volvemos a utilizar las identidades del caso anterior:

$$0 = d^2 X_j = d \left( \sum_{i=1}^n w_j^i X_i \right) = \sum_{i=1}^n dw_j^i X_i - \sum_{k=1}^n w_j^k \wedge dX_k;$$

$$0 = \sum_{i=1}^n dw_j^i X_i - \sum_{k=1}^n w_j^k \wedge \sum_{i=1}^n w_k^i X_i,$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n dw_j^i X_i = \sum_{i,k=1}^n w_j^k \wedge w_k^i X_i;$$

de aquí se sigue la segunda ecuación estructural:  $dw_j^i = -\sum_k w_k^i \wedge w_j^k$ . ♠

**Proposición 2.4.2** Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un marco móvil ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ ; entonces las 1-formas  $w_j^i$  para este marco satisfacen  $w_j^i = -w_i^j$ .

**Demostración:** Como el marco es ortonormal entonces  $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$ ;

$$0 = d\delta_{ij} = d\langle X_i, X_j \rangle = \langle dX_i, X_j \rangle + \langle X_i, dX_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n w_j^i X_j, X_j \right\rangle + \left\langle X_i, \sum_{i=1}^n w_j^i X_i \right\rangle$$

Por lo tanto vemos que  $w_j^i = -w_i^j$ . ♠

Si consideramos un marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$  en una variedad  $M$ , podemos definir las 1-formas duales  $\theta^i$  por  $\theta^i(X_j) = \delta_{ij}$  y  $X_q = \sum_{i=1}^n \theta^i(X_q) X_i(q)$  para  $X_q \in M_q$  como antes, pero no podemos utilizar  $dX_j = \sum_{i=1}^n w_j^i X_i$  para definir las 1-formas  $w_j^i$ , ya que “ $dX_i$ ” no tiene sentido para una variedad en general. Para este caso, dado un marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$  y su comarco asociado en  $M$  las proposiciones 2.4.1 y 2.4.2 sugieren la manera de definir las formas de conexión sobre la variedad.

**Proposición 2.4.3** Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un marco móvil sobre una variedad  $M$  y tomemos  $\theta^i$  sus 1-formas duales. Entonces existen 1-formas  $w_j^i$  únicas que cumplen

1.  $w_j^i = -w_i^j$ .
2.  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i$ .

**Demostración:** Supondremos que  $w_j^i$  son 1-formas que satisfacen 1 y 2; como  $\theta^i$  son base de las 1-formas, existen funciones únicas  $a_{jk}^i$  y  $b_{jk}^i$  tales que

$$w_j^i = \sum_k a_{jk}^i \theta^k \quad \text{y} \quad d\theta^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k \quad \text{donde} \quad b_{jk}^i = -b_{kj}^i.$$

Como se cumple 1, vemos que  $a_{jk}^i = -a_{ik}^j$ , mientras que al cumplirse 2 tenemos que:

$$d\theta^i = \sum_j \theta^j \wedge w_j^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k;$$

si sustituimos  $w_j^i$  por su expresión inicial resulta

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k = \sum_j \theta^j \wedge w_j^i = \sum_{j,k} a_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k.$$

Concluimos que  $a_{jk}^i - a_{kj}^i = b_{jk}^i$ . Si permutamos cíclicamente  $i, j, k$  de las expresiones  $a_{jk}^i = -a_{ik}^j$  y  $a_{jk}^i - a_{kj}^i = b_{jk}^i$  obtenemos  $a_{jk}^i = \frac{1}{2}(b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k)$ , lo que prueba la unicidad de las  $w_j^i$ .

Entonces definimos  $w_j^i = \sum_k a_{jk}^i \theta^k$ , donde  $a_{jk}^i$  está definida por esta última relación; para demostrar 2, valuamos  $d\theta^i(X_j, X_k)$ :

$$\begin{aligned} d\theta^i(X_j, X_k) &= \sum_l \theta^l \wedge w_l^i(X_j, X_k) = \sum_l (\theta^l(X_j)w_l^i(X_k) - \theta^l(X_k)w_l^i(X_j)) \\ &= \sum_l \delta_{lj} w_l^i(X_k) - \delta_{lk} w_l^i(X_j) = w_j^i(X_k) - w_k^i(X_j) = b_{jk}^i. \end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos la segunda igualdad. ♠

Cuando tenemos un marco móvil ortonormal  $\{X_1, \dots, X_n\}$  sobre una variedad riemanniana orientable  $M$ , las 1-formas  $w_j^i$  dadas por la proposición anterior se llaman **formas de conexión** para el marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$  que satisfacen  $w_j^i = -w_i^j$  y la primera ecuación estructural  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i$ . Pero no existe razón para que se cumpla la segunda ecuación estructural de la proposición 2.4.1; entonces definimos las 2-formas  $\Omega_j^i$  que expresan la diferencia con el caso euclidiano:

$$dw_j^i = - \sum_k w_k^i \wedge w_j^k + \Omega_j^i.$$

A las 2-formas  $\Omega_j^i$  se les llama **formas de curvatura** para un marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Para justificar esto necesitaremos la siguiente proposición, en la cual usaremos que en un marco móvil tenemos:

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k, \quad R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^n R_{kij}^l X_l$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita,  $R$  es la forma de curvatura de  $M$ .

**Proposición 2.4.4** *Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un marco móvil ortonormal sobre una variedad riemanniana orientable  $M$  y sean  $\theta^i, \omega_j^i$  y  $\Omega_j^i$  las formas duales, formas de conexión y formas de curvatura respectivamente para este marco móvil, entonces se cumplen las siguientes **ecuaciones estructurales**:*

1.  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i = - \sum_k w_k^i \wedge \theta^k$
2.  $dw_j^i = - \sum_k w_k^i \wedge w_j^k + \Omega_j^i$

donde

$$w_j^i = \sum_k \Gamma_{kj}^i \theta^k \quad y \quad \Omega_j^i = \sum_{k < l} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l.$$

**Demostración:** Por la unicidad mostrada en la proposición anterior, podemos mostrar la primera ecuación estructural definiendo  $w_j^i = \sum_k \Gamma_{kj}^i \theta^k$  y comprobando que satisfacen 1 y 2 de tal proposición. Por el corolario 2.2.1 y usando que el marco móvil es ortonormal, tenemos

$$0 = X_k \langle X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle + \langle X_i, \nabla_{X_k} X_j \rangle$$

esto es,

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^n \Gamma_{ki}^j X_j, X_j \right\rangle + \left\langle X_i, \sum_{i=1}^n \Gamma_{kj}^i X_i \right\rangle = \Gamma_{ki}^j + \Gamma_{kj}^i$$

Por lo tanto  $\Gamma_{ki}^j = -\Gamma_{kj}^i$ , es decir,  $w_j^i = -w_i^j$  que es la parte 1 de la proposición 2.4.3. En la prueba de esa misma proposición obtuvimos:

$$\sum_l \theta^l \wedge w_l^i(X_j, X_k) = w_j^i(X_k) - w_k^i(X_j).$$

Si usamos que  $\theta^i(X_j) = \delta_{ij}$  y la proposición 2.1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} d\theta^i(X_j, X_k) &= X_j(\theta^i(X_k)) - X_k(\theta^i(X_j)) - \theta^i([X_j, X_k]) = -\theta^i(\nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_k} X_j) \\ \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i &= w_j^i(X_k) - w_k^i(X_j) = b_{jk}^i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, resulta la parte 2 de la proposición 2.4.3 que es la primera ecuación estructural  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i$ . Para la segunda ecuación estructural, desarrollamos

$$\sum_i R_{jkl}^i X_i = R(X_k, X_l)X_j = \nabla_{X_k} \nabla_{X_l} X_j - \nabla_{X_l} \nabla_{X_k} X_j - \nabla_{[X_k, X_l]} X_j;$$

aplicando  $\theta^i$  a ambos lados, obtenemos

$$R_{jkl}^i = \sum_u (\Gamma_{ku}^i \Gamma_{lj}^u - \Gamma_{lu}^i \Gamma_{kj}^u) + X_k(\Gamma_{lj}^i) - X_l(\Gamma_{kj}^i) - \theta^i(\nabla_{[X_k, X_l]} X_j).$$

Ahora desarrollamos  $dw_j^i + \sum_k w_k^i \wedge w_j^k = \Omega_j^i$  y luego comparamos las dos ecuaciones; usamos la proposición 2.1.5 para  $dw_j^i$  y la definición de producto cuña para  $\sum_u w_u^i \wedge w_j^u$ :

$$\begin{aligned} \{dw_j^i + \sum_u w_u^i \wedge w_j^u\}(X_k, X_l) &= X_k(w_j^i(X_l)) - X_l(w_j^i(X_k)) - w_j^i([X_k, X_l]) \\ &\quad + \sum_u (w_u^i(X_k)w_j^u(X_l) - w_u^i(X_l)w_j^u(X_k)). \end{aligned}$$

y como  $w_j^i(X_k) = \Gamma_{kj}^i$  por la primera ecuación estructural, resulta

$$\Omega_j^i(X_k, X_l) = R_{jkl}^i. \quad \spadesuit$$

**Corolario 2.4.1** *Para una variedad riemanniana  $M$  de dimensión dos y  $\{X_1, X_2\}$  un marco móvil ortonormal, tenemos  $dw_1^2 = \Omega_1^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2$ .*

**Demostración:**  $K = \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle = R_{1212}$ , ya que  $X_1, X_2$  son ortonormales. Por la proposición anterior

$$dw_1^2 = -\sum_k w_k^2 \wedge w_1^k + \Omega_1^2, \quad \Omega_1^2 = \sum_{1 < 2} R_{112}^2 \theta^1 \wedge \theta^2 = R_{112}^2 \theta^1 \wedge \theta^2$$

como  $w_j^i = -w_i^j$  implica  $-\sum_k w_k^i \wedge w_j^k = 0$ ; por lo tanto

$$dw_1^2 = \Omega_1^2 = R_{112}^2 \theta^1 \wedge \theta^2 = -R_{212}^1 \theta^1 \wedge \theta^2 = -K\theta^1 \wedge \theta^2. \quad \spadesuit$$

Veamos qué condiciones deben cumplir las ecuaciones estructurales si cambiamos el marco móvil. Podemos escribir la ecuación  $\nabla_{X_k} X_j = \sum_{i=1}^n w_j^i(X_k) X_i$ , como  $\nabla X_j = \sum_{i=1}^n w_j^i X_i$  y si abreviamos  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$  y  $(w_j^i) = w$  podemos escribirla como  $\nabla \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot w$ . Entonces consideramos otro marco móvil  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$ , donde  $a$  es una matriz de funciones  $a = (a_j^i)$  para obtener

$$\sum_{i=1}^n w_j^i X'_i = \nabla X'_j = \nabla \sum_l a_j^l X_l = \sum_l da_j^l X_l + \sum_l a_j^l \nabla X_l,$$

que en notación matricial es

$$\mathbf{X}' \cdot w' = \nabla \mathbf{X}' = \nabla(\mathbf{X} \cdot a) = \mathbf{X} \cdot da + \nabla \mathbf{X} \cdot a = \mathbf{X} \cdot da + \mathbf{X} \cdot (w \cdot a);$$

por lo tanto, tenemos la siguiente relación para dos marcos móviles  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}'$ :

$$\mathbf{X}' \cdot (aw') = (\mathbf{X} \cdot a) \cdot w' = \mathbf{X}' \cdot w' = \mathbf{X} \cdot (da + wa).$$

La última igualdad motiva la siguiente definición.

**Definición 2.4.2** Una **conexión de Cartan** sobre una variedad  $M$  es una asociación de una matriz  $w = (w_j^i)$  de 1-formas para cada marco móvil  $\mathbf{X}$  tal que se cumple  $w' = a^{-1}da + a^{-1}wa$  con respecto al cambio de marcos móviles  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$ , donde  $w' = (w_j^i)$  es la matriz de 1-formas de  $\mathbf{X}'$ .

**Proposición 2.4.5** Sobre una variedad  $M$  existe una única conexión de Cartan con las propiedades de la proposición 2.4.3 para un marco móvil ortonormal.

**Demostración:** En la proposición 2.4.3 se vio que dado un marco móvil ortonormal las 1-formas  $w_j^i$  que satisfacen  $w_j^i = -w_i^j$  y  $d\theta^i = \sum_k \theta^k \wedge w_k^i$  son únicas; entonces, si definimos  $w' = a^{-1}da + a^{-1}wa$  para  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$  basta demostrar que  $w_j^i = -w_i^j$  y que  $d\theta'^i = \sum_k \theta'^k \wedge w_k^i$ .

Como  $\mathbf{X}'$  y  $\mathbf{X}$  son ortonormales y  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$ , entonces la matriz  $a$  es ortogonal; esto es,  $a \cdot a^t = I$  o bien  $a^t = a^{-1}$ .

Derivando  $0 = da \cdot a^t + a \cdot da^t$ , es decir,  $da^t = -a^{-1} \cdot da \cdot a^t = -a^t \cdot da \cdot a^t$ , ahora vemos que

$$(a^{-1}da)^t = (a^t da)^t = da^t \cdot a = -a^t \cdot da \cdot a^t \cdot a = -a^t \cdot da = -a^{-1}da$$

y

$$(a^{-1}wa)^t = (a^t wa)^t = a^t w^t a = -a^t wa = -a^{-1}wa;$$

por lo tanto  $w_j^i = -w_i^j$ . Para demostrar  $d\theta'^i = \sum_k \theta'^k \wedge w_k^i$ , aplicamos  $\theta'^i$  a  $\mathbf{X}_j$ :

$$\theta'^i(\mathbf{X}_j) = \theta'^i \left( \sum_k (a^{-1})_j^k \right) \mathbf{X}'_k = (a^{-1})_j^i = \sum_k (a^{-1})_k^i \theta^k(\mathbf{X}_j),$$

esto es;

$$\theta'^i = \sum_k (a^{-1})_k^i \theta^k,$$

que escribimos como  $\theta' = a^{-1} \cdot \theta$ . Derivando y sustituyendo  $da^{-1}$  tenemos

$$d\theta' = da^{-1} \wedge \theta + a^{-1}d\theta = (-a^{-1} \cdot da \cdot a^{-1}) \wedge \theta + a^{-1}d\theta = -a^{-1}da \wedge a^{-1}\theta - a^{-1}w \wedge \theta.$$

Por otro lado,  $w' \wedge \theta' = -a^t daa^t \wedge \theta + a^{-1}d\theta = -a^{-1}daa^{-1} \wedge \theta + a^{-1}w \wedge \theta$ ; así tenemos

$$w' \wedge \theta' = (a^{-1}da + a^{-1}wa) \wedge a^{-1}\theta = -d\theta'$$

que es lo que queríamos demostrar. ♠

**Proposición 2.4.6** Si  $\Omega_j^i$  es la forma de curvatura para el marco móvil  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$ , entonces  $\Omega' = a^{-1}\Omega a$ .

**Demostración:** Usamos que  $w' = a^{-1}da + a^{-1}wa$ ,  $dw = -w \wedge w + \Omega$  y  $dw' = -w' \wedge w' + \Omega'$ ; entonces, si diferenciamos la primera ecuación resulta

$$dw' = da^{-1} \wedge da + a^{-1}d(da) + da^{-1} \wedge wa + a^{-1}dwa + a^{-1}w \wedge da.$$

Sustituimos las relaciones  $da^{-1} = -a^{-1}daa^{-1}$ ,  $d^2 = 0$  en esta ecuación para obtener

$$dw' = (-a^{-1}daa^{-1}) \wedge da + (-a^{-1}daa^{-1}) \wedge wa + a^{-1}(-w \wedge w + \Omega)a + a^{-1}w \wedge da.$$

Por otro lado si sustituimos la primera ecuación en la tercera llegamos a

$$\begin{aligned} dw' &= -(a^{-1}da + a^{-1}wa) \wedge (a^{-1}da + a^{-1}wa) + \Omega' \\ &= -(a^{-1}da \wedge a^{-1}da) - (a^{-1}da \wedge a^{-1}wa) - (a^{-1}wa \wedge a^{-1}da) - (a^{-1}wa \wedge a^{-1}wa) + \Omega'; \end{aligned}$$

igualando las dos ecuaciones  $dw'$  llegamos a  $\Omega' = a^{-1}\Omega a$ . ♠

## 2.5. La Fórmula de Gauss-Bonnet

En esta sección nos restringiremos a variedades riemannianas de dimensión dos. Sean  $\{X_1, X_2\}$  y  $\{X'_1, X'_2\}$  dos marcos móviles ortonormales con la misma orientación sobre  $M$  y  $w_1^2, w_1'^2$  las formas de conexión correspondientes.

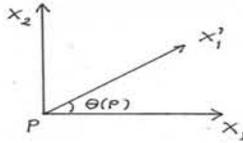


Figura 2.3: Ángulo entre  $X_1$  y  $X'_1$

Tenemos que la conexión de Cartan cumple  $w' = a^{-1}da + a^{-1}wa$  donde  $a$  es la matriz ortogonal

$$a(p) = \begin{pmatrix} \cos \theta(p) & -\text{sen } \theta(p) \\ \text{sen } \theta(p) & \cos \theta(p) \end{pmatrix}$$

y donde  $\theta(p)$  es una elección diferenciable del ángulo de  $X_1$  a  $X'_1$ ; así obtenemos la siguiente relación:

**Proposición 2.5.1** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos. Sean dos marcos móviles  $\{X_1, X_2\}$  y  $\{X'_1, X'_2\}$  con la misma orientación,  $w_1^2, w_1'^2$  las formas de conexión correspondientes a cada marco y  $\theta$  una elección del ángulo entre  $X_1$  y  $X'_1$  que varía diferenciablemente, entonces

$$w_1'^2 = w_1^2 + d\theta.$$

**Demostración:** Utilizando que  $w' = a^{-1}da + a^{-1}wa$  tenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & w_1'^2 \\ -w_1'^2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta d\theta & \cos \theta d\theta \\ -\cos \theta d\theta & -\operatorname{sen} \theta d\theta \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_1^2 \\ -w_1^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & w_1'^2 \\ -w_1'^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d\theta \\ -d\theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w_1^2 \\ -w_1^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

**Corolario 2.5.1** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos y sea  $c : [a, b] \rightarrow M$  una curva en una región de  $M$  sobre la cual hay un marco móvil ortonormal orientado  $\{X_1, X_2\}$ . Sea  $V$  un campo vectorial unitario ( $C^\infty$ ) a lo largo de  $c$ , tomemos  $\phi$  una elección diferenciable del ángulo entre  $X_1$  y  $V$ ; entonces  $V$  es paralelo a lo largo de  $c$  si y sólo si

$$w_1^2(c'(t)) + \phi'(t) = 0.$$

**Demostración:** Localmente podemos encontrar un marco móvil ortonormal  $\{Y_1, Y_2\}$  cuya orientación sea compatible con la del marco  $\{X_1, X_2\}$  y tal que  $Y_1 = V$  a lo largo de  $c$  y podemos elegir diferenciablemente el ángulo  $\theta(p)$  entre  $X_1$  y  $Y_1$  como  $\theta(c(t)) = \phi(t)$ . Entonces  $V$  es paralelo a lo largo de  $c$  si y sólo si  $\nabla_{c'(t)}Y_1 = 0$ ; por lo tanto

$$0 = \langle \nabla_{c'(t)}Y_1, Y_2 \rangle = \bar{w}_1^2(c'(t)).$$

Por la proposición anterior tenemos  $\bar{w}_1^2(c'(t)) = w_1^2(c'(t)) + d\phi(c'(t))$ . Por lo tanto podemos ver que  $0 = w_1^2(c'(t)) + d\phi(c'(t)) = w_1^2(c'(t)) + (\theta \circ c)'(t)$ . Así nos queda  $0 = w_1^2(c'(t)) + \phi'(t)$ .  $\spadesuit$

Si nosotros tenemos una curva  $c$  parametrizada por longitud de arco  $s$  en una variedad riemanniana de dimensión dos, definimos la **curvatura geodésica**  $k_g$  por en  $c(s)$  por

$$k_g(s) = \left\langle \frac{Dc'(s)}{ds}, u(s) \right\rangle$$

donde  $u(s) \in T_{c(s)}M$  es un vector perpendicular unitario a  $c'(s)$  y donde la base  $\{u(s), c'(s)\}$  esta orientada positivamente.

**Corolario 2.5.2** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos y sea  $c : [a, b] \rightarrow M$  una curva parametrizada por longitud de arco en una región de  $M$  sobre la cual hay un marco móvil ortonormal orientado  $\{X_1, X_2\}$ . Sea  $\phi$  la elección diferenciable del ángulo entre  $X_1$  y  $c'(s)$ ; entonces la curvatura geodésica está dada por

$$k_g(s) = w_1^2(c'(s)) + d\phi(s).$$

**Demostración:** Localmente podemos encontrar un marco móvil ortonormal  $\{Y_1, Y_2\}$  orientado tal que  $Y_1 = c'$  a lo largo de  $c$  y podemos elegir diferenciablemente el ángulo  $\theta(p)$  entre  $X_1$  y  $Y_1$  a lo largo de  $c$  como  $\theta(c(s)) = \phi(s)$ . Por la proposición 2.5.1 tenemos

$$k_g(s) = \langle \nabla_{Y_1} Y_1, Y_2 \rangle(c(s)) = \bar{w}_1^2(c'(s)) = w_1^2(c'(s)) + (\theta \circ c)'(s)$$

por lo tanto,  $k_g(s) = w_1^2(c'(s)) + d\phi(s)$ . ♠

Estos corolarios tienen un gran efecto para obtener resultados importantes, el primero nos da una descripción cuantitativa del desplazamiento paralelo.

**Teorema 2.5.1** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos orientada, con curvatura gaussiana  $K$  y elemento de volumen  $dV$ . Consideremos  $N \subset M$  una variedad compacta de dimensión dos con frontera, de tal manera  $\partial N$  sea conexa, tomemos  $c : [a, b] \rightarrow \partial N$ , una curva  $C^\infty$ , cerrada y orientada positiva. Sea  $V$  un campo paralelo de vectores unitarios a lo largo de  $c$ . Si  $\{X_1, X_2\}$  es un marco móvil orientado positivamente definido sobre  $N$  y sea  $\phi$  la elección continua del ángulo entre  $X_1$  y  $V$ , entonces*

$$\int_N K dV = \phi(b) - \phi(a).$$

**Demostración:** Por el corolario 2.4.1 y usando el teorema de Stokes tenemos

$$\int_N K dV = \int_N K \theta^1 \wedge \theta^2 = - \int_N dw_1^2 = - \int_{\partial N} w_1^2 = - \int_a^b w_1^2(c'(t)) dt$$

y por el corolario 2.5.1 tenemos

$$- \int_a^b w_1^2(c'(t)) dt = \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a). \quad \spadesuit$$

En el siguiente teorema la región  $N$  es más especial.

Un subconjunto  $N \subset M$ , es un **polígono** si existe una curva simple, cerrada, orientada positivamente y regular por pedazos  $c : [a, b] \rightarrow M$ , tal que  $\partial N = c([a, b])$  como la definimos en el capítulo uno.

Tomemos una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$  de  $[a, b]$  tal que  $c$  es diferenciable y regular en cada  $[t_i, t_{i+1}]$  con  $i = 0, 1, \dots, n$ . Los puntos  $c(t_i)$  son llamados **vértices** de  $c$  y las trazas  $c([t_i, t_{i+1}])$  con  $i = 1, \dots, n$  son llamados **arcos regulares** de  $c$ .

Para cada vértice  $c(t_i)$  definimos su **ángulo interior**  $\iota_i \in [0, 2\pi]$  como el ángulo que forma el vector tangente de salida en el punto  $t_i$ ,  $c'(t_i)^+$  y el negativo del vector, la tangente de llegada, es decir,  $-c'(t_i)^-$  en el mismo punto, definidas por la orientación de la curva  $c$ . Si  $-c'(t_i)^- = c'(t_i)^+$ , entonces  $\iota_i = 0$ , si  $c'(t_i)^- = -c'(t_i)^+$ , entonces  $\iota_i = -\pi$ .

Definimos el **ángulo exterior**  $\delta_i$  en  $t_i$  como  $\delta_i = \pi - \iota_i \in [-\pi, \pi]$ . Si  $\phi$  es el ángulo entre  $c'(t_i)^-$  y algún vector  $X \in T_{c(t_i)}M$ , entonces  $\phi + \delta_i$  es el ángulo entre  $c'(t_i)^+$  y  $X$ .

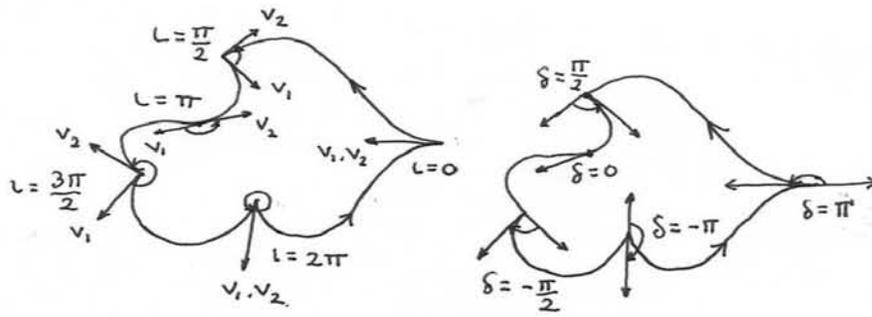


Figura 2.4: Ángulos interiores y exteriores

**Teorema 2.5.2 (La fórmula de Gauss-Bonnet)** Tomemos  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos orientada, con curvatura gaussiana  $K$  y elemento de volumen  $dV$ . Sea  $N \subset M$  un polígono difeomorfo a un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , sea  $ds$  el elemento de volumen de  $\partial N$  y  $k_g$  su curvatura geodésica. Supongamos que  $\partial N$  tiene vértices  $t_0, \dots, t_n$  y ángulos exteriores  $\delta_0, \dots, \delta_n$ , entonces

$$\int_N K dV + \int_{\partial N} k_g ds + \sum_{i=0}^n \delta_i = 2\pi \quad \text{o} \quad \int_N K dV = - \int_{\partial N} k_g ds + \sum_{i=0}^n \iota_i + (2-n)\pi.$$

**Demostración:** Definimos un marco móvil ortonormal  $\{X_1, X_2\}$  de tal manera que  $X_1$  sea un múltiplo positivo de  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  y elegimos una curva  $c : [a, b] \rightarrow \partial N$  parametrizada por longitud de arco  $s$  orientada positivamente; tomamos  $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  como el ángulo que varía continuamente entre  $X_1$  y  $c'(s)$  sobre  $(t_i, t_{i+1})$ .

Sea  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n < s_{n+1} = b$  una partición del intervalo  $[a, b]$ , en los cuales  $c([s_i, s_{i+1}])$  es suave. Por el teorema del ángulo de rotación de las tangentes 1.4.1 y el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} d\phi_i(s) ds + \sum_{i=0}^n \delta_i = 2\pi$$

Por el corolario 2.5.2 tenemos

$$\sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds - \sum_{i=0}^n \int_{s_i}^{s_{i+1}} w_1^2(c'(s)) ds + \sum_{i=0}^n \delta_i = 2\pi,$$

por lo tanto

$$\int_{\partial N} k_g ds - \int_{\partial N} w_1^2 + \sum_{i=0}^n \delta_i = 2\pi,$$

ahora, por el teorema de Stokes vemos que  $\int_{\partial N} w_1^2 = \int_N dw_1^2$  y por el corolario 2.4.1 tenemos  $-dw_1^2 = K dV$ , en consecuencia

$$\int_N K dV + \int_{\partial N} k_g ds + \sum_{i=0}^n \delta_i = 2\pi. \quad \spadesuit$$

Por ejemplo, si consideramos a  $N$  como un octante de la esfera unitaria ( $K = 1$ ), vemos que

$$\int_N K dV + \int_{\partial N} k_g ds + \sum_{i=1}^n \delta_i = \frac{4\pi}{8} + 0 + \frac{3\pi}{2} = 2\pi.$$

**Corolario 2.5.3** *Si los  $n$  lados de un polígono  $N$  son geodésicas e  $\iota_i$  son los ángulos interiores de  $N$  con  $i = 1, \dots, n$ . entonces*

$$\int_N K dV = - \sum_{i=1}^n \iota_i + (2 - n)\pi. \quad \spadesuit$$

## 2.6. Teorema de Gauss-Bonnet

Volvamos nuevamente a una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , para definir ahora qué se entiende por una triangulación.

**Definición 2.6.1** *Un  $n$ -simplejo  $\Delta_n$  se define como el conjunto*

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq x^i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=1}^{n+1} x^i = 1\}.$$

*El subconjunto de  $\Delta_n$  que se obtiene haciendo  $n - k$  de las coordenadas iguales a cero es homeomorfo a  $\Delta_k$  y es llamado  $k$ -cara de  $\Delta_n$ . Una cara de dimensión cero es un **vértice**. Por una **triangulación** de una variedad compacta  $M$  de dimensión  $n$ , entenderemos una colección finita  $\{\sigma_i^n\}$  de imágenes difeomorfas a  $\Delta_n$  cuya unión cubre a  $M$  y que satisface la siguiente condición: si  $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n \neq \emptyset$ , entonces para alguna  $k$  la intersección  $\sigma_i^n \cap \sigma_j^n$  es una  $k$ -cara de  $\sigma_i^n$  y  $\sigma_j^n$ .*

Sea  $\{\sigma_i^n\}$  una triangulación de  $M$ , llamaremos a cada  $\sigma_i^n$  un  **$n$ -simplejo de la triangulación**; cualquier  $k$ -cara de la triangulación la llamaremos  **$k$ -simplejo de la triangulación** y denotaremos por  $\alpha_k$  el número de estos  $k$ -simplejos.

**Teorema 2.6.1 (Gauss-Bonnet)** *Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión dos, compacta y orientable, con curvatura  $K$  y elemento de volumen  $dV$ ; entonces*

$$\int_M K dV = 2\pi\chi(M).$$

**Demostración:** Como hicimos en el capítulo uno, consideramos una triangulación  $\sigma_1, \dots, \sigma_F$  de  $M$ , y  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  denotan los ángulos interiores del triángulo  $\sigma_j$ ; entonces por el teorema anterior, vemos que

$$\int_M K dV = \sum_{j=1}^F \int_{\sigma_j} K dV = - \sum_{j=1}^F \int_{\partial\sigma_j} k_g ds + \sum_{j=1}^F (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) + \sum_{j=1}^F (2 - 3)\pi.$$

Como antes,  $F$  es el número de triángulos (2-simplejos),  $E$  el número de aristas (1-simplejos),  $V$  el número de vértices (0-simplejos) de la triangulación y el número  $V - E + F = \chi(M)$  es la característica de Euler de  $M$ .

La suma  $\sum_{j=1}^F \int_{\partial\sigma_j} k_g ds = 0$ , porque cada lado del triángulo aparece dos veces pero con orientaciones opuestas.

La suma  $\sum_{j=1}^F (\alpha_j + \beta_j + \gamma_j) = 2\pi V$ , porque la suma de los ángulos interiores que concurren en un vértice es  $2\pi$ .

La suma  $-\sum_{j=1}^F 3\pi = -3\pi F$  y como  $3F = 2E$ , por que  $3F$  es el número total de lados de todas las caras y cada lado es contado dos veces, entonces  $-\sum_{j=1}^F 3\pi = -2\pi E$ . Por último  $\sum_{j=1}^F 2\pi = 2\pi F$ . Por lo tanto

$$\int_M K dV = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F = 2\pi(V - E + F) = 2\pi\chi(M). \quad \spadesuit$$

## 2.7. Teorema del índice de Hopf

Una de las consecuencias del Teorema de Gauss-Bonnet tiene que ver con el concepto de índice de un campo vectorial. Si  $X$  es un campo vectorial suave en una variedad riemanniana orientada  $M$  de dimensión dos, decimos que  $p \in M$  es un **punto singular** si  $X(p) = 0$  y es **aislado** si existe una vecindad  $U$  de  $p$  en  $M$  tal que  $X$  no tiene puntos singulares en  $U$  distintos de  $p$ .

Cuando el campo vectorial  $X$  sobre  $U$  tenga exactamente un punto singular  $p$ , es decir, cuando  $q \in U - \{p\}$  y  $X(q) \neq 0$ , entonces hay un campo vectorial unitario

$$X_1 = \frac{X}{\|X\|}$$

el cual determina un marco móvil ortonormal  $\{X_1, X_2\}$  con una orientación consistente con la de  $M$  en  $U - \{p\}$ .

A cada punto singular aislado  $p$  le podemos asociar un número entero, el índice de  $X$  en  $p$ , definido como sigue: supongamos que  $R$  es una región regular que contiene al punto  $p$  y a ninguna otra singularidad, cuya frontera es una curva suave, simple y cerrada  $c = \partial R$ , con la orientación inducida por  $M$ .

Supongamos también que  $c$  está parametrizada por longitud de arco  $s$  y  $0 \leq s \leq L$ . Como  $c(0) = c(L)$ , entonces  $c$  es compacta y puede ser cubierta por una familia finita de vecindades en la cual existe una variación continua del ángulo  $\theta$ , el ángulo de  $X_1$  a  $X_1'$  visto en la proposición 2.5.1. En general,  $\theta(a) \neq \theta(b)$  y la diferencia entre dos valores de  $\theta$  es un múltiplo de  $2\pi$ . Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\theta(L) - \theta(0) = \int_c d\theta$$

Pero  $\theta(L) - \theta(0)$  es el ángulo entre  $X_1$  y  $X_1'$  en el mismo punto  $c(0)$ , entonces el lado izquierdo de esta ecuación es un múltiplo de  $2\pi$  y es independiente de la elección de  $\theta(s)$ , esto es que no depende de la elección del marco móvil  $\{X_1', X_2'\}$ .

**Definición 2.7.1** Sean  $X$  un campo de vectores tangentes con un punto singular aislado  $p$  y sea  $U$  una vecindad coordinada de  $p$  tal que  $p$  es el único punto singular de  $X$  en  $U$ , entonces el número entero

$$I_p = \frac{1}{2\pi}(\theta(L) - \theta(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_c d\theta,$$

se conoce como el **índice del campo vectorial  $X$  en  $p$** .

La definición tampoco depende de la elección de la curva  $c$ , ya que si hay otra región  $R_1 \subset R$  simplemente conexa que contiene a  $p$ , tomamos  $c_1 = \partial R_1$ , entonces  $R - \text{int}R_1$  es una región con frontera en  $M$  y la orientación inducida de esta frontera es  $c - c_1$ . Por el Teorema de Stokes y la proposición 2.5.1 tenemos

$$\begin{aligned} \int_{c-c_1} d\theta &= \int_{c-c_1} w_1'^2 - \int_{c-c_1} w_1^2 = \int_{c-c_1} w_1'^2 - \int_{R-R_1} dw_1^2. \\ &= \int_{c-c_1} w_1'^2 + \int_{R-R_1} K dV. \end{aligned}$$

Como el lado derecho de esta ecuación es independiente de la elección del marco móvil  $\{X'_1, X'_2\}$  sobre  $R - R_1$ , podemos suponer que  $X_i = X'_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $\bar{\theta} = 0$ , donde  $\bar{\theta}$  es el ángulo de  $X_1$  a  $X'_1$ . Por lo tanto

$$\int_{c-c_1} w_1'^2 + \int_{R-\text{int}R_1} K dV = \int_{c-c_1} d\bar{\theta} = 0,$$

entonces

$$\int_{c-c_1} d\theta = 0 \quad \text{por lo tanto} \quad \int_c d\theta = \int_{c_1} d\theta.$$

**Teorema 2.7.1 (Teorema del índice de Hopf)** Sea  $M$  una variedad riemanniana compacta y orientable de dimensión dos, con curvatura gaussiana  $K$  y elemento de volumen  $dV$ . Sea  $X$  un campo vectorial sobre  $M$  con un número finito de singularidades, entonces  $\sum_i I_{p_i} = \chi(M)$ .

**Demostración:** Tomemos  $p_1, \dots, p_r$  los puntos singulares aislados de  $X$ , consideremos vecindades cerradas  $D_i$  en torno a cada  $p_i$ , donde  $D_i$  es difeomorfo a  $D = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1\}$ . Denotemos  $D_i(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| \leq \epsilon\}$ .

Sea  $N(\epsilon) = M - \cup_i \text{int}D_i(\epsilon)$ , tomemos un marco ortonormal orientado positivamente  $\{X_1, X_2\}$  con  $X_1 = \frac{X}{\|X\|}$ ; entonces

$$\int_{N(\epsilon)} K dV = - \int_{N(\epsilon)} dw_1^2 = - \sum_i \int_{\partial D_i(\epsilon)} w_1^2.$$

Por un momento consideremos alguna  $i$  fija, tomemos  $\{X'_1, X'_2\}$  un marco móvil ortonormal y orientado positivamente sobre  $D_i$ . Sobre  $D_i$  elegimos el ángulo  $\theta$  entre  $X_1$  y  $X'_1$  que varíe diferenciablemente. Por la proposición 2.5.1 tenemos

$$- \int_{\partial D_i(\epsilon)} w_1^2 = \int_{\partial D_i(\epsilon)} d\theta - \int_{\partial D_i(\epsilon)} w_1'^2 = 2\pi I_{p_i} - \int_{\partial D_i(\epsilon)} w_1'^2,$$

como  $w_1^2$  no depende de  $i$  tenemos que

$$-\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_i(\epsilon)} w_1^2 = 2\pi I_{p_i} - 0$$

Ahora, usamos el teorema de Gauss-Bonnet para llegar a

$$\int_M K dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{N(\epsilon)} K dV = 2\pi \sum_i I_{p_i} = 2\pi \chi(M). \quad \spadesuit$$

Este teorema nos dice que la suma de los índices es independiente de un campo  $X$ . Por ejemplo, se puede construir un campo vectorial en la esfera con dos ceros o con un sólo cero; también con este teorema se puede ver que en el toro se puede construir un campo sin singularidades.

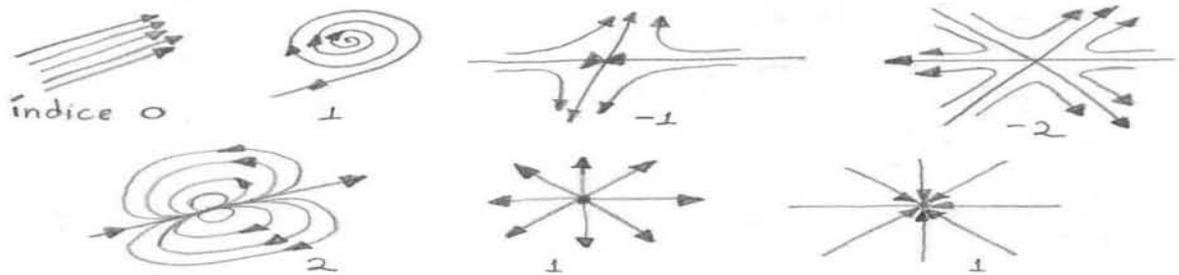


Figura 2.5: Índices de campos vectoriales

## Capítulo 3

# La herramienta necesaria

En este capítulo veremos algunos conceptos y resultados de topología algebraica, haces y otros temas que serán necesarios para extender el Teorema de Gauss-Bonnet a dimensiones pares. Haremos pocas demostraciones de los resultados dados, pero en los casos sin demostración proporcionaremos la referencia.

### 3.1. Cohomología de De Rham

La idea de la cohomología de De Rham es explotar el uso de las formas diferenciales sobre una variedad para construir invariantes topológicos.

**Definición 3.1.1** Una  $k$ -forma  $w$  sobre  $M$  es llamada **cerrada** si  $dw = 0$  y **exacta** si existe una  $(k-1)$ -forma  $\eta$  tal que  $w = d\eta$ . Para cada número entero  $k$ , definimos dos espacios vectoriales sobre  $M$

$$Z^k(M) = \text{Ker}\{d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\} = \{k\text{-formas cerradas}\},$$

$$B^k(M) = \text{Img}\{d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\} = \{k\text{-formas exactas}\}.$$

La condición  $d^2 = 0$  implica que  $B^k(M)$  es un subespacio de  $Z^k(M)$ , por lo que podemos formar el cociente de estos espacios vectoriales:

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M),$$

llamado el  $k$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham sobre  $M$ .

Un elemento de  $H^k(M)$  puede ser representado por una  $k$ -forma cerrada  $w$  y escribimos su clase como  $[w]$ ; entonces dos  $k$ -formas  $w_1$  y  $w_2$  son equivalentes si y sólo si  $w_1 - w_2$  es exacta, es decir,  $w_1 = w_2 + d\eta$  para alguna  $(k-1)$ -forma  $\eta$ . Así el  $k$ -ésimo grupo de cohomología mide cuáles  $k$ -formas cerradas son exactas.

Si tenemos  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y tomamos cualquier  $k$ -forma sobre  $M$  tal que  $k > n$ , entonces  $H^k(M) = 0$  ya que  $\Omega^k(M) = 0$ . Si  $M$  es una variedad conexa y  $f \in C^\infty(M)$ , la condición  $df = 0$  nos dice que  $H^0(M) \approx \mathbb{R}$ , ya que  $B^0(M) = 0$  y  $Z^0(M)$  es el conjunto de las

funciones constantes. En general para una variedad  $M$  no conexa, la dimensión de  $H^0(M)$  es el número de componentes conexas de  $M$ .

Para calcular otros grupos de cohomología usaremos el Lema de Poincaré, ver [8] o [2].

Primero decimos que una variedad  $M$  es **suavemente contraíble a un punto**  $p_0 \in M$  si hay una función  $H : M \times [0, 1] \rightarrow M$  de clase  $C^\infty$  tal que para todo  $p \in M$  tenemos que  $H(p, 1) = p$  y  $H(p, 0) = p_0$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$  es contraíble a  $0 \in \mathbb{R}^n$  con  $H(p, t) = pt$ . Un subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  con la propiedad de que para todo punto  $p \in U$ ,  $p_0 + t(p - p_0) \in U$  con  $t \in [0, 1]$  es contraíble a  $p_0 \in U$ ; estas regiones son llamadas **regiones estrella**.

**Lema 3.1.1 (Lema de Poincaré)** *Sea  $M$  una variedad diferenciable suavemente contraíble a un punto y  $w$  una  $k$ -forma diferencial en  $M$  tal que  $dw = 0$ ; entonces  $w$  es exacta, es decir, existe una  $(k - 1)$ -forma  $\alpha$  en  $M$  tal que  $d\alpha = w$ . ♠*

En términos del Lema de Poincaré tenemos que  $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$  ya que  $\mathbb{R}^n$  es contraíble a un punto ( $k > 0$ ); en general, si una variedad  $M$  es suavemente contraíble a un punto entonces  $H^k(M) = 0$  para toda  $k > 0$ .

Otro ejemplo: si tenemos una variedad  $M$  **simplemente conexa**, es decir,  $M$  es conexa y cualquier curva cerrada es suavemente contraíble a un punto, entonces tenemos que  $H^1(M) = 0$  ya que toda 1-forma  $w$  cerrada sobre  $M$  es exacta.

Definimos el  **$k$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham sobre  $M$  con soporte compacto** de manera análoga a como lo hicimos antes:

$$H_c^k(M) = Z_c^k(M) / B_c^k(M),$$

donde  $Z_c^k(M)$  es el espacio vectorial de  $k$ -formas cerradas con soporte compacto y  $B_c^k(M)$  es el espacio vectorial de  $k$ -formas  $d\eta$  donde  $\eta$  es una  $(k - 1)$ -forma con soporte compacto. El **soporte** de una  $k$ -forma  $w$  está definido como la cerradura del conjunto  $\{p \in M; w(p) \neq 0\}$  y cuando  $M$  es compacta tenemos  $H_c^k(M) = H^k(M)$ .

Notemos que el conjunto  $B_c^k(M)$  no coincide con el conjunto de todas las  $k$ -formas exactas con soporte compacto. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^n$ , si  $f \geq 0$  es una función con soporte compacto y  $f > 0$  para algún punto, entonces la forma  $w = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  es una forma exacta (cualquier forma cerrada en  $\mathbb{R}^n$  es exacta ya que  $\mathbb{R}^n$  es contraíble) y tiene soporte compacto. Pero  $w \neq d\eta$  para  $\eta$  con soporte compacto, porque si  $w = d\eta$ , donde  $\eta$  tiene soporte compacto, por el Teorema de Stokes tendríamos

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} w = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta = \int_{\partial\mathbb{R}^n} \eta = 0.$$

lo cual es una contradicción.

De paso, lo anterior muestra que  $H_c^n(\mathbb{R}^n) \neq 0$ . Utilizando un argumento similar se muestra que si  $M$  es una variedad orientable  $H_c^n(M) \neq 0$ .

Para una variedad conexa orientable  $M$  de dimensión  $n$  se tiene que  $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$ . Esto significa que si fijamos una forma  $w$  tal que  $\int_M w \neq 0$ , entonces para cualquier  $n$ -forma  $w'$  con

soporte compacto existe un número real  $a$  y una  $(n-1)$ -forma  $\eta$  con soporte compacto de tal manera que  $w' - aw = d\eta$ . El número  $a$  lo podemos encontrar viendo que

$$\int_M w' - \int_M aw = \int_M d\eta = 0,$$

por lo que

$$a = \int_M w' / \int_M w.$$

Notemos que  $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$  es equivalente al hecho de que la aplicación  $[w] \rightarrow \int_M w$  sea un isomorfismo, es decir, que una forma cerrada  $w$  con soporte compacto sea la diferencial de otra forma con soporte compacto si  $\int_M w = 0$ . Así tenemos:

**Proposición 3.1.1** *Supongamos que  $M$  es una variedad de dimensión  $n$ , conexa y orientable, entonces  $H_c^n(M) \approx \mathbb{R}$ . ♠*

Para la demostración, véase [2], donde aparece también la siguiente tabla: Para una variedad  $M$  conexa de dimensión  $n$ , tenemos

$$H_c^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } M \text{ es orientable} \\ 0 & \text{si } M \text{ no es orientable} \end{cases} \quad H^n(M) = \begin{cases} H_c^n(M) & \text{si } M \text{ es compacta} \\ 0 & \text{si } M \text{ no es compacta.} \end{cases}$$

Veamos cuál es la relación de los grupos de cohomología bajo una aplicación  $f : M \rightarrow N$  de clase  $C^\infty$  entre variedades: si  $w$  es una  $k$ -forma cerrada en  $N$  entonces  $f^*w$  es también cerrada, ya que  $d(f^*w) = f^*(dw) = 0$ , por lo tanto  $f^*$  manda  $Z^k(N)$  en  $Z^k(M)$ .

Además  $f^*$  manda  $B^k(N)$  en  $B^k(M)$ , pues si  $w$  es una forma exacta, es decir,  $w = d\eta$ ; entonces  $f^*(w) = f^*(d\eta) = d(f^*\eta)$ .

Por lo tanto,  $f^*$  induce una aplicación entre los grupos de cohomología,  $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  que está definida por  $f^*([w]) = [f^*(w)]$ .

Y dada otra aplicación  $C^\infty$  entre variedades  $g : N \rightarrow P$ , entonces se cumple la siguiente relación  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^k(P) \rightarrow H^k(M)$ .

Por otro lado, el concepto de grado de una aplicación entre variedades compactas, orientadas y de la misma dimensión es muy importante porque nos servirá para definir el índice de un campo vectorial en un variedad. Intuitivamente, lo definimos como el número de preimágenes contadas, cada una con el signo determinado por la orientación del espacio tangente. Por ejemplo en la figura 3.1, el número de preimágenes del punto  $y$  es  $1 + 1 - 1 + 1 = 2$ .

Daremos la definición formal: Sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación entre variedades diferenciables de la misma dimensión. Un punto  $x \in M$  en la preimagen es llamado **regular** si la diferencial de  $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  es no singular.

Por ejemplo, la figura muestra que el punto  $x$  es regular, pero el punto  $x'$  no lo es.

El **grado** de una **aplicación**  $f$  en un punto regular  $x$  es el número  $\deg_x(f)$  que es igual a  $+1$  o  $-1$  dependiendo si  $f_{*x}$  lleva la orientación dada de  $T_x M$  en la orientación  $T_{f(x)} N$  o en la orientación opuesta.

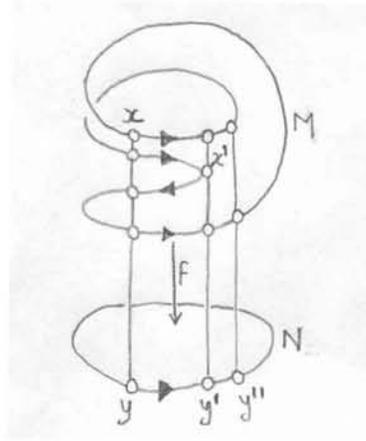


Figura 3.1: Grado de una aplicación

Los puntos  $y \in N$  son llamados **valores regulares** de la aplicación  $f$  si todos los puntos  $f^{-1}(y)$  son regulares. Otra vez en la figura, el punto  $y$  es valor regular de  $f$  pero el punto  $y'$  no lo es.

Entonces, definimos el **grado** de una **aplicación**  $f$  como la suma de los grados de  $f$  en todos los puntos de las preimágenes de los valores regulares:

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f.$$

Ahora, sean  $M$  y  $N$  dos variedades conexas, compactas y orientables de la misma dimensión  $n$ , consideramos la aplicación inducida  $f^* : H^n(N) \rightarrow H^n(M)$ ; por la proposición 3.1.1 tenemos que  $H^n(M) \approx \mathbb{R}$  (similarmente para  $N$ ), donde el isomorfismo se establece mediante la integral. Entonces, para cualquier  $n$ -forma  $w \in H^n(N)$  se tiene necesariamente la relación

$$\int_M f^* w = c \cdot \int_N w.$$

El número  $c$  es el grado de  $f$ , denotado por  $\deg(f)$ , sólo depende de  $f$  y siempre es un número entero. Con esta definición también se puede demostrar que  $\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x f$ , ver demostración en [2].

El cálculo de grupos de cohomología de una variedad  $M$ , puede reducirse al cálculo en otra variedad  $N$  si existe una relación que establezcamos a continuación.

Decimos que dos funciones  $f, g : M \rightarrow N$  entre dos variedades son **homotópicas** si hay una aplicación continua  $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que para todo  $p \in M$  tenemos

$$H(p, 0) = f(p) \quad \text{y} \quad H(p, 1) = g(p).$$

La aplicación  $H$  es llamada una **homotopía** entre  $f$  y  $g$ .

**Teorema 3.1.1** Si  $f, g : M \rightarrow N$  son dos funciones homotópicas, entonces las aplicaciones  $f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  y  $g^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$  son iguales,  $f^* = g^*$ . ♠

Daremos una aplicación de este teorema; consideremos  $A \subset X$  y  $r : X \rightarrow A$  continua tal que  $r(a) = a$  para toda  $a \in A$ , entonces  $r$  es llamada una **retracción** de  $X$  sobre  $A$ . Por ejemplo, definimos la retracción  $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  por  $r(p) = \frac{p}{|p|}$ .

Sea  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  la inclusión, entonces  $r \circ i : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  es la identidad en  $S^{n-1}$  e  $i \circ r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  es  $(i \circ r)(p) = \frac{p}{|p|}$ , que no es la identidad, pero si definimos  $H(p, t) = tp + (1-t)r(p) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , resulta que  $(i \circ r)(p) = \frac{p}{|p|}$  es homotópica a la identidad.

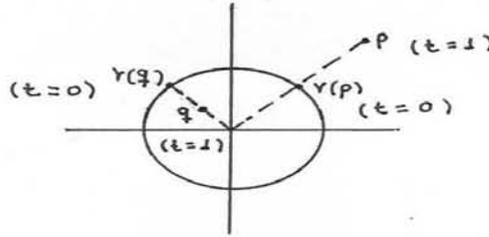


Figura 3.2: Retracción por deformación de  $S^n$

Una retracción con esta propiedad es llamada **retracto por deformación**. Cuando  $r$  es un retracto por deformación, las aplicaciones  $(i \circ r)^*$  y  $(r \circ i)^*$  son la identidad; esto es, para el caso de  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$  tenemos  $r^* : H^k(S^{n-1}) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$  y  $i^* : H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow H^k(S^{n-1})$  por lo que

$$r^* \circ i^* = (i \circ r)^* \quad \text{e} \quad i^* \circ r^* = (r \circ i)^*$$

son, respectivamente, la identidad en

$$H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \quad \text{y} \quad H^k(S^{n-1}).$$

Como  $r^*$  e  $i^*$  son inversos entre sí, llegamos a que  $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) \approx H^k(S^{n-1})$  para toda  $k$ . Por la proposición 3.1.1 tenemos que  $H^{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{R}$ , por lo tanto  $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \approx \mathbb{R}$ .

Como  $M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}^l$  es un retracto por deformación de  $M \times \mathbb{R}^l$  para toda variedad  $M$ , entonces  $H^k(M) \approx H^k(M \times \mathbb{R}^l)$ .

La cohomología de la  $n$ -esfera será de gran utilidad más adelante, por eso es importante tener el siguiente resultado:

**Teorema 3.1.2** Si  $0 < k < n - 1$ , entonces  $H^k(\mathbb{R}^n - \{0\}) = H^k(S^{n-1}) = 0$ .

**Demostración:** La demostración usa inducción. Pero sólo lo haremos para  $n = 3$ ; esto es, demostraremos que  $H^1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = H^1(S^2) = 0$ . Sea  $w$  una 1-forma cerrada en  $\mathbb{R}^3$ , sean  $A$  y  $B$  los conjuntos abiertos

$$A = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0) \times (-\infty, 0]\}, \quad B = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0) \times [0, \infty)\}$$

Ambos son conjuntos estrella con respecto a los puntos  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$  respectivamente; por el lema de Poincaré existen 0-formas  $f_A$  y  $f_B$  sobre  $A$  y  $B$  tales que  $w = df_A$  sobre  $A$  y  $w = df_B$  sobre  $B$ . Ahora  $d(f_A - f_B) = 0$  sobre  $A \cap B = [\mathbb{R}^2 - (0, 0)] \times \mathbb{R}$ , entonces claramente  $f_A - f_B$

es una constante  $c$  sobre  $A \cap B$ . En consecuencia,  $w$  es exacta, ya que  $w = d(f_A - c)$  sobre  $A$ ,  $w = d(f_B)$  sobre  $B$  y  $f_A - c = f_B$  sobre  $A \cap B$ . ♠

Por la proposición 3.1.1 y este último teorema obtenemos la cohomología de las esferas  $H^k(S^n)$  para  $n > 0$ ;

$$H^k(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < k < n - 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \end{cases} .$$

Nosotros podemos sumar clases de cohomología y multiplicarlas por escalares como elementos de un espacio vectorial, pero también podemos definir una multiplicación entre dos clases de cohomología.

**Definición 3.1.2** La aplicación  $\smile: H^k(M) \times H^l(M) \rightarrow H^{k+l}(M)$ , definida por la operación  $[w] \smile [\eta] = [w \wedge \eta]$  es llamada **producto copa**.

Comprobaremos a continuación que este producto está bien definido, es decir, si  $[w_1] = [w_2]$  y  $[\eta_1] = [\eta_2]$ , entonces  $[w_1 \wedge \eta_1] = [w_2 \wedge \eta_2]$ . Supongamos que  $w_1 = w_2 + d\alpha$  y  $\eta_1 = \eta_2 + d\beta$ , entonces

$$w_1 \wedge \eta_1 = (w_2 + d\alpha) \wedge (\eta_2 + d\beta) = w_2 \wedge \eta_2 + d\alpha \wedge \eta_2 + w_2 \wedge d\beta + d\alpha \wedge d\beta;$$

por la propiedad 2 de la proposición 2.1.4 y usando que la forma  $\eta_2$  es cerrada, obtenemos  $d(\alpha \wedge \eta_2) = d\alpha \wedge \eta_2 + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d\eta_2 = d\alpha \wedge \eta_2$ ; similarmente

$$d((-1)^k w_2 \wedge \beta) = (-1)^k dw_2 \wedge \beta + (-1)^k (-1)^k w_2 \wedge d\beta = w_2 \wedge d\beta,$$

por lo tanto  $w_1 \wedge \eta_1 = w_2 \wedge \eta_2 + d(\alpha \wedge \eta_2) + d((-1)^k w_2 \wedge \beta) + d\alpha \wedge d\beta$ . Y así tenemos que  $w_1 \wedge \eta_1 = w_2 \wedge \eta_2 + d(\alpha \wedge \eta_2 + ((-1)^k w_2 \wedge \beta) + \alpha \wedge d\beta)$  lo que nos dice  $[w_1 \wedge \eta_1] = [w_2 \wedge \eta_2]$ .

Utilizando las propiedades de las formas diferenciales se puede mostrar que el producto copa es asociativo, distributivo sobre la suma y satisface también que para  $w \in H^k(M)$  y  $\eta \in H^l(M)$ ,

$$w \smile \eta = (-1)^{kl} \eta \smile w.$$

Otra propiedad importante del producto copa nos dice que dada una aplicación  $C^\infty$  entre variedades  $f: M \rightarrow N$  y formas  $w \in H^k(N)$  y  $\eta \in H^l(N)$ , entonces

$$f^*(w \smile \eta) = f^*(w) \smile f^*(\eta).$$

## 3.2. Sucesión de Mayer-Vietoris

La Sucesión de Mayer-Vietoris proporciona una técnica fundamental en cohomología, por un lado por la eficacia en el cálculo de la cohomología de variedades y por otro lado porque puede ser usada para probar algunos resultados que nos serán útiles. Si  $M = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ , esta sucesión nos permite encontrar la cohomología de  $M$  en términos de la cohomología de las subvariedades  $U$ ,  $V$  y  $U \cap V$ .

Tomemos  $M$  una variedad de dimensión  $n$ , tal que  $M = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ ; denotamos  $C^k(M)$  el espacio vectorial de las  $k$ -formas sobre  $M$ , y consideremos dos tipos de inclusiones

$$\begin{aligned} i_U : U &\rightarrow M & i_V : V &\rightarrow M \\ j_U : U \cap V &\rightarrow U & j_V : U \cap V &\rightarrow V, \end{aligned}$$

que dan lugar a las aplicaciones lineales  $\alpha = i_U^* \oplus i_V^*$  y  $\beta = j_U^* - j_V^*$

$$C^k(M) \xrightarrow{\alpha} C^k(U) \oplus C^k(V) \xrightarrow{\beta} C^k(U \cap V),$$

y están dadas por

$$\alpha(w) = (i_U^*(w), i_V^*(w)), \quad \beta(\lambda_1, \lambda_2) = j_U^*(\lambda_1) - j_V^*(\lambda_2),$$

donde  $i_U^*$  es la restricción de  $w$  en  $U$ , etc. Claramente  $\beta \circ \alpha = 0$ , es decir,  $Img(\alpha) \subset Ker(\beta)$ . Más aún,  $Ker(\beta) \subset Img(\alpha)$ , pues si  $\beta(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ , entonces  $\lambda_1 = \lambda_2$  sobre  $U \cap V$ , y se puede definir  $w$  sobre  $M$  como  $\lambda_1$  sobre  $U$  y  $\lambda_2$  sobre  $V$  por lo que  $\alpha(w) = (\lambda_1, \lambda_2)$ . Entonces  $Ker(\beta) = Img(\alpha)$  lo que implica que la siguiente sucesión sea exacta.

**Lema 3.2.1** *Si  $M = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ , la sucesión siguiente es exacta*

$$0 \rightarrow C^k(M) \xrightarrow{\alpha} C^k(U) \oplus C^k(V) \xrightarrow{\beta} C^k(U \cap V) \rightarrow 0.$$

**Demostración:** Sólo falta ver que  $\alpha$  es inyectiva y que  $\beta$  es sobre. Si  $\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$  entonces la restricción de  $w_1$  a  $U$  es igual a la restricción de  $w_2$  a  $U$ ; análogamente, las restricciones de  $w_1$  y  $w_2$  a  $V$  son iguales, entonces como  $M = U \cup V$  tenemos que  $w_1 = w_2$ . Para probar que  $\beta$  es sobre usamos que  $\{U, V\}$  es una cubierta finita de  $M$  y si  $\{\phi_U, \phi_V\}$  es una partición de la unidad subordinada a  $\{U, V\}$ , entonces, dada  $w \in C^k(U \cap V)$ , extendemos  $w_U$  a  $U$  con  $\phi_V$  para que se anule en  $U - V$ , también extendemos  $w_V$  a  $V$  con  $-\phi_U$  para que se anule en  $V - U$  y entonces

$$\beta(\phi_V w, -\phi_U w) = j_U^*(\phi_V w) - j_V^*(-\phi_U w) = \phi_V w + \phi_U w = w$$

para todo  $p \in U \cap V$ . ♠

Utilizaremos la derivada exterior  $d$  para ampliar nuestra sucesión exacta.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^k(M) & \xrightarrow{\alpha} & C^k(U) \oplus C^k(V) & \xrightarrow{\beta} & C^k(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & d \downarrow & & d \oplus d \downarrow & & d \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1}(M) & \xrightarrow{\alpha} & C^{k+1}(U) \oplus C^{k+1}(V) & \xrightarrow{\beta} & C^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Es fácil verificar que este diagrama conmuta, esto es, las composiciones conmutan

$$(d \oplus d) \circ \alpha = \alpha \circ d; \quad d \circ \beta = \beta \circ (d \oplus d).$$

El siguiente resultado depende sólo de la estructura algebraica de este diagrama, de aquí que definimos un **complejo**  $C$  como una sucesión de espacios vectoriales  $C^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  junto con una sucesión de aplicaciones lineales  $d^k : C^k \rightarrow C^{k+1}$  que satisfacen  $d^{k+1} \circ d^k = 0$ . Una **aplicación entre complejos**  $\alpha : C_1 \rightarrow C_2$  es una sucesión de aplicaciones lineales  $\alpha^k : C_1^k \rightarrow C_2^k$  tal que el siguiente diagrama conmuta para toda  $k$ :

$$\begin{array}{ccc} C_1^k & \xrightarrow{\alpha^k} & C_2^k \\ d_1^k \downarrow & & \downarrow d_2^k \\ C_1^{k+1} & \xrightarrow{\alpha^{k+1}} & C_2^{k+1} \end{array}$$

El ejemplo más importante de complejo resulta cuando  $C^k$  es  $C^k(M)$ , el conjunto de las  $k$ -formas sobre  $M$  con  $d^k$  la aplicación  $d$  sobre las  $k$ -formas. Para cualquier complejo  $C$  definimos los **espacios vectoriales de cohomología** de  $C$  por

$$H^k(C) = \frac{\text{Ker}(d^k)}{\text{Img}(d^{k-1})}.$$

Naturalmente si  $C = \{C^k(M)\}$ , entonces  $H^k(C)$  es  $H^k(M)$ . Si tenemos que  $C_1^k = C^k(M)$ ,  $C_2^k = C^k(N)$  y  $\alpha : C^k(M) \rightarrow C^k(N)$  es  $f^*$  para  $f : N \rightarrow M$ , entonces  $\alpha$  es la aplicación  $f^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$ .

Si tenemos la sucesión exacta de complejos  $0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha} C_2 \xrightarrow{\beta} C_3 \rightarrow 0$ , entonces en general **no** es cierto que tengamos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow H^k(C_1) \xrightarrow{\alpha} H^k(C_2) \xrightarrow{\beta} H^k(C_3) \rightarrow 0.$$

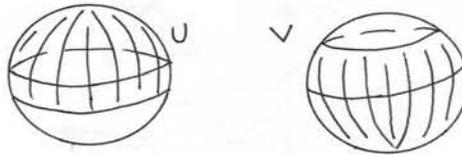


Figura 3.3: U y V

Por ejemplo, si  $S^n = U \cup V$  donde  $U$  es la  $n$ -esfera menos el polo sur y  $V$  es la  $n$ -esfera menos el polo norte, entonces  $U \cap V$  puede retraerse al ecuador  $S^{n-1}$ , y tenemos la exactitud de la sucesión  $0 \rightarrow C^k(S^n) \rightarrow C^k(U) \oplus C^k(V) \rightarrow C^k(U \cap V) \rightarrow 0$ , pero no la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow H^1(S^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow 0,$$

esto puesto que  $H^1(S^2) = 0$ ,  $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$  y  $H^1(U \cap V) = \mathbb{R}$ . Sin embargo se tiene el siguiente resultado, ver [2].

**Teorema 3.2.1** Si  $0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\alpha} C_2 \xrightarrow{\beta} C_3 \rightarrow 0$  es una sucesión exacta de complejos, entonces hay aplicaciones lineales  $\delta^k : H^k(C_3) \rightarrow H^{k+1}(C_1)$ , tales que la siguiente sucesión infinita sea exacta

$$0 \rightarrow H^0(C_1) \xrightarrow{\alpha} H^0(C_2) \xrightarrow{\beta} H^0(C_3) \xrightarrow{\delta} H^1(C_1) \rightarrow \dots$$

$$\cdots \rightarrow H^k(C_1) \xrightarrow{\alpha} H^k(C_2) \xrightarrow{\beta} H^k(C_3) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(C_1) \rightarrow \cdots \spadesuit$$



Figura 3.4: Cohomología de  $T^2$

Usando el lema 3.2.1 y el teorema 3.2.1 tenemos un resultado muy útil.

**Teorema 3.2.2 (Sucesión de Mayer-Vietoris)** Si  $M = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ , entonces tenemos una sucesión exacta:

$$\cdots \rightarrow H^k(M) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M) \rightarrow \cdots \spadesuit$$

Por ejemplo, consideremos el toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ , tomemos  $T^2 = U \cup V$  tal que hay un retracts de  $U$  y de  $V$  en  $S^1$  y la deformación de  $U \cap V$  a dos círculos, entonces la sucesión de Mayer-Vietoris se reduce a

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(T^2) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(T^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow H^2(T^2) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

sabemos que  $H^1(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ,  $H^2(T^2) = \mathbb{R}$  y  $H^1(U) = H^1(V) = \mathbb{R}$ , entonces como  $H^1(U \cap V) \rightarrow H^2(T^2)$  es exacta en  $H^2(T^2)$ , el kernel es de dimensión 1. De esta manera, la imagen de  $H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V)$  es de dimensión 1. Como el kernel de esta aplicación es de dimensión 1, entonces  $H^1(T^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V)$  tiene imagen de dimensión 1.

De manera análoga se muestra que el kernel de  $H^1(T^2) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V)$  tiene dimensión 1 y por lo tanto  $\dim H^1(T^2) = 2$ , es decir  $H^1(T^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ .

### 3.3. Característica de Euler

Usaremos la sucesión de Mayer-Vietoris para relacionar las dimensiones de  $H^k(M)$  con la cardinalidad de los simplejos de distintas dimensiones que surgen de la triangulación de una variedad.

Sea una triangulación  $\{\sigma_i^n\}$  de  $M$ , donde  $\alpha_n$  es el número de  $n$ -simplejos,  $\alpha_{n-1}$  es el número de  $(n-1)$ -simplejos, etc. Definamos  $U$  como la unión ajena de bolas abiertas, cada una contenida en un  $n$ -simplejo  $\sigma_i^n$  y sea  $V_{n-1}$  el complemento del conjunto que consiste en los centros de esas bolas, así  $V_{n-1}$  es una vecindad de la unión de todos los  $(n-1)$ -simplejos de  $M$ . Entonces  $M = U \cup V_{n-1}$  donde  $U \cap V_{n-1}$  tiene la misma cohomología que la unión disjunta de  $\alpha_n$  copias de  $S^{n-1}$ . Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris para  $n > 2$ ; que es posible considerar en varios pedazos:



Figura 3.5:  $M = U \cup V_{n-1}$

- El primero

$$0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V_{n-1}) \rightarrow H^0(U \cap V_{n-1}) \rightarrow H^1(M) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V_{n-1}) \rightarrow H^1(U \cap V_{n-1})$$

donde  $H^1(U) \oplus H^1(V_{n-1}) = 0$  y  $H^1(U \cap V_{n-1}) = 0$ .

- Para  $1 < k < n - 1$  tenemos

$$H^{k-1}(U \cap V_{n-1}) \rightarrow H^k(M) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V_{n-1}) \rightarrow H^k(U \cap V_{n-1})$$

donde todos los términos se anulan menos  $H^k(M)$  y  $H^k(V_{n-1})$ .

- Finalmente,

$$H^{n-2}(U \cap V_{n-1}) \rightarrow H^{n-1}(M) \rightarrow H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V_{n-1}) \rightarrow \\ \rightarrow H^{n-1}(U \cap V_{n-1}) \rightarrow H^n(M) \rightarrow H^n(U) \oplus H^n(V_{n-1})$$

Aquí  $H^{n-2}(U \cap V_{n-1})$  y  $H^{n-1}(U)$  se anulan al igual que  $H^n(U) \oplus H^n(V_{n-1})$ .

Tomamos en cuenta un resultado de álgebra: Para  $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_k \rightarrow 0$  una sucesión exacta, tenemos que  $\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0$ .

Teniendo en cuenta que  $\dim H^{n-1}(U \cap V_{n-1}) = \dim H^{n-1}(S^{n-1}) = \alpha_n$  y al considerar las tres sucesiones anteriores, tenemos

$$\dim H^k(V_{n-1}) = \dim H^k(M), \quad 0 \leq k \leq n - 2$$

$$\dim H^{n-1}(V_{n-1}) = \dim H^{n-1}(M) - \dim H^n(M) + \alpha_n.$$

Cuando  $n = 2$ , el resultado es el mismo.

En los capítulos anteriores, la característica de Euler fue definida como una suma de cardinalidades de simplejos de distintas dimensiones,  $V - E + F$ ; aquí la definiremos de distinta manera y veremos que coincide con esta definición.

**Definición 3.3.1** La característica de Euler de  $\chi(M)$  de una variedad  $M$  está dada por

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H^k(M).$$

Por ejemplo, la característica de Euler del toro por la definición es  $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ . Y la de esfera es  $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ ; en consecuencia, si  $n$  es par  $\chi(S^n) = 2$  y si  $n$  es impar  $\chi(S^n) = 0$ .

La suma en la fórmula tiene sentido si todas las  $H^k(M)$  son de dimensión finita, lo cual es cierto si  $M$  es compacta. Ahora, si  $H^k(M)$  tiene dimensión finita, entonces la característica de Euler  $\chi$  de  $V_{n-1}$  es

$$\begin{aligned} \chi(V_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim H^k(V_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \dim H^k(M) + (-1)^{n-1} [\dim H^{n-1}(M) - \dim H^n(M) + \alpha_n] = \chi(M) - (-1)^n \alpha_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\chi(M) = (-1)^n \alpha_n + \chi(V_{n-1}).$$

La idea ahora es tomar a  $V_{n-1}$  y definir un nuevo abierto  $U_1$ , que consiste en la unión de conjuntos difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  ajenos, que unen los centros de las bolas de  $U$ , uno por cada  $(n-1)$ -cara. También tomamos  $V_{n-2}$  como el complemento de los arcos en el nuevo  $U_1$  que unen los centros de las bolas de  $U$ , para así utilizar el argumento anterior y llegar a

$$\chi(V_{n-1}) = \chi(V_{n-2}) + (-1)^{n-1} \alpha_{n-1}.$$

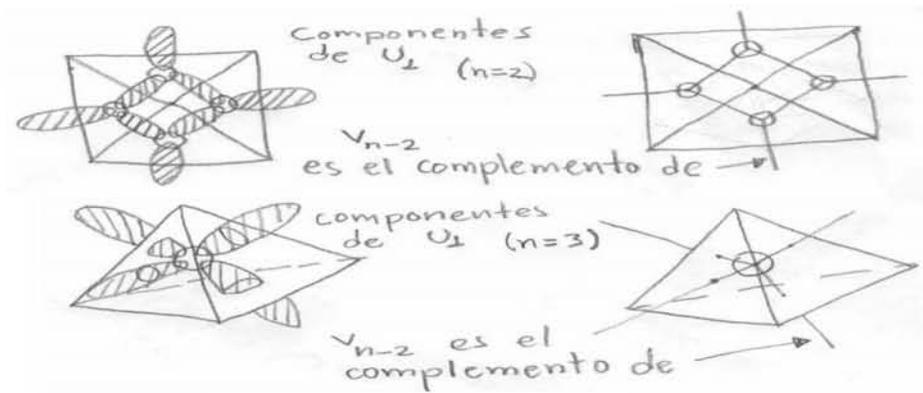


Figura 3.6: componentes de  $V_{n-1}$

Análogamente introducimos  $V_{n-3}, \dots, V_0$ , donde  $V_0$  es la unión ajena de  $\alpha_0$  conjuntos que son suavemente contraíbles a un punto. Entonces  $\chi(V_0) = \alpha_0$ , mientras que en todos los demás casos

$$\chi(V_k) = \chi(V_{k-1}) + (-1)^k \alpha_k.$$

Todas estas relaciones justifican el resultado siguiente:

**Teorema 3.3.1** *Para cualquier triangulación de una variedad compacta  $M$ , tenemos*

$$\chi(M) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n. \quad \spadesuit$$

### 3.4. Mayer-Vietoris para soporte compacto y la sucesión exacta de una pareja

Procederemos a estudiar los grupos de cohomología  $H_c^k(M)$  de formas diferenciables con soporte compacto, que en general resulta ser es una situación mucho muy diferente a la de  $H^k(M)$ .

Si  $U$  es abierto de  $M$ , una forma  $w$  con el soporte compacto contenido en  $M$  no siempre puede ser restringida a una forma con soporte compacto en  $U$ ; es decir, la inclusión de  $U$  a  $M$  no es propia, donde una aplicación es **propia** si la imagen inversa de compactos es compacta. Por otro lado, si  $w$  es una forma con soporte compacto contenido en  $U$ , entonces  $w$  se puede extender a  $M$  definiéndola como 0 fuera de  $U$ ; denotaremos esta forma extendida por  $i'_U(w)$ .

Si  $C_c^k(M)$  denota el espacio vectorial de las  $k$ -formas con soporte compacto sobre  $M$ , definimos las aplicaciones:

$$\alpha' = j'_U \oplus -j'_V \quad \text{y} \quad \beta' = i'_U + i'_V,$$

donde  $j'_u : C_c^k(U \cap V) \rightarrow C_c^k(U)$  y  $j'_v : C_c^k(U \cap V) \rightarrow C_c^k(V)$ . Y poder demostrar el siguiente lema, ver [2]:

**Lema 3.4.1** *La sucesión siguiente es exacta*

$$0 \rightarrow C_c^k(U \cap V) \xrightarrow{\alpha'} C_c^k(U) \oplus C_c^k(V) \xrightarrow{\beta'} C_c^k(M) \rightarrow 0. \quad \spadesuit$$

Ver demostración en [2]. Si aplicamos el teorema 3.2.1 a la sucesión del lema anterior obtenemos:

**Teorema 3.4.1 (Mayer-Vietoris para espacios con soporte compacto)** *Sea  $M$  una variedad,  $U$  y  $V$  abiertos de  $M$  tales que  $M = U \cup V$ ; entonces tenemos una sucesión exacta larga:*

$$\dots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots \quad \spadesuit$$

**Corolario 3.4.1** *Si  $M$  es una variedad tal que  $M = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ . Entonces hay una sucesión exacta larga dual:*

$$\dots \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V)^* \rightarrow H_c^k(M)^* \rightarrow [H_c^k(U) \oplus H_c^k(V)]^* \rightarrow H_c^k(U \cap V)^* \rightarrow \dots \quad \spadesuit$$

Para la sucesión exacta de una pareja, consideramos  $N \subset M$  una subvariedad compacta de  $M$ ; entonces se tiene que  $M - N$  es también una variedad y por consiguiente tenemos la sucesión

$$C_c^k(M - N) \xrightarrow{e} C_c^k(M) \xrightarrow{i^*} C_c^k(N)$$

donde  $e$  es la extensión. Esta sucesión **no** es exacta en el término central, ya que el kernel de  $i^*$  contiene todas las formas  $w \in C_c^k(M)$  que son 0 en  $N$ , mientras que la imagen de  $e$  contiene todas las formas  $w \in C_c^k(M)$  que son 0 en una vecindad de  $N$ .

Para convertir la sucesión anterior en una sucesión exacta, se utiliza el concepto de germen: consideramos una vecindad tubular compacta  $V$  de  $N$  y la proyección  $\pi : V \rightarrow N$ ;  $V$  es una variedad con frontera y si  $j : N \rightarrow V$  es la inclusión, entonces tenemos que  $\pi \circ j$  es la identidad en  $N$ , mientras que  $j \circ \pi$  es homotópica a la identidad de  $V$ ; ver [2].

Ahora consideremos una sucesión de vecindades tubulares compactas de  $N$  tales que cumplan  $V = V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$  con la condición  $\cap_i V_i = N$ .

Consideremos dos formas  $w_i \in C^k(V_i)$  y  $w_j \in C^k(V_j)$ ; decimos que  $w_i$  es equivalente a  $w_j$  si existe  $l > i, j$  tal que  $w_i|_{V_l} = w_j|_{V_l}$ ; el conjunto de clases de equivalencia admite una estructura de espacio vectorial y lo denotamos por  $\mathcal{G}^k(N)$ , los llamados **gérmenes de formas** de  $N$ .

Más aún, podemos definir  $d : \mathcal{G}^k(N) \rightarrow \mathcal{G}^{k+1}(N)$  y así obtenemos un complejo  $\mathcal{G}$ . Definimos también una aplicación entre complejos

$$i^* : C_c^k(M) \rightarrow \mathcal{G}^k(N)$$

de tal forma que manda una  $k$ -forma  $w$  en la clase de equivalencia de cualquier  $w|_{V_i}$ .

Por lo que tenemos la siguiente sucesión exacta, así como el isomorfismo  $H^k(\mathcal{G}) \approx H^k(N)$ , ver demostración en [2].

**Lema 3.4.2** *La sucesión siguiente es exacta*

$$0 \rightarrow C_c^k(M - N) \xrightarrow{e} C^k(M) \xrightarrow{i^*} \mathcal{G}^k(N) \rightarrow 0. \quad \spadesuit$$

**Lema 3.4.3** *Los espacios vectoriales de cohomología  $H^k(\mathcal{G})$  del complejo  $\{\mathcal{G}^k(N)\}$  son isomorfos a  $H^k(N)$  para toda  $k$ .  $\spadesuit$*

Aplicando el teorema 3.2.1 a la sucesión del lema 3.4.2 y usando el lema 3.4.3 obtenemos la sucesión exacta de una pareja.

**Teorema 3.4.2 (La sucesión exacta de una pareja)** *Si  $N \subset M$  es una subvariedad compacta de  $M$ , entonces la sucesión siguiente es exacta:*

$$\dots \rightarrow H_c^k(M - N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(N) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(M - N) \rightarrow \dots \quad \spadesuit$$

Si consideramos una variedad  $M$  con frontera  $\partial M$  y utilizamos el teorema anterior para la pareja  $(M, \partial M)$  usando vecindades tubulares  $V_i$  de  $\partial M$  en  $M$ , par obtener:

**Teorema 3.4.3** *Sea  $M$  una variedad con frontera, donde la frontera  $\partial M$  es compacta, entonces la sucesión siguiente es exacta:*

$$\dots \rightarrow H_c^k(M - \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H^k(\partial M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(M - \partial M) \rightarrow \dots \quad \spadesuit$$

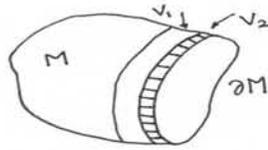


Figura 3.7: Sucesión de vecindades en  $\partial M$

### 3.5. Dualidad de Poincaré

En esta sección veremos la razón de la restricción de la generalización del teorema de Gauss-Bonnet a variedades de dimensión par. Lo haremos mostrando que la característica de Euler es cero para variedades de dimensión impar utilizando la dualidad de Poincaré.

Sabemos que cuando  $U$  es una región estrella en  $\mathbb{R}^n$ , por el lema de Poincaré  $H^k(U) \approx H^k(\mathbb{R}^n)$ ; pero se puede mostrar algo un poco más general que es el siguiente lema, ver [2].

**Lema 3.5.1** *Si  $U$  es una región estrella en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $H^k(U) \approx H^k(\mathbb{R}^n)$  y  $H_c^k(U) \approx H_c^k(\mathbb{R}^n)$  para toda  $k$ . ♠*

Usaremos el lema anterior para definir lo que se entiende por variedad de tipo finito: sea un punto  $p$  en una variedad  $M$  compacta y con una métrica riemanniana, elegimos  $U \subset M$  una vecindad geodésicamente convexa; entonces para cada  $p \in U$ , la aplicación exponencial  $exp_p$  aplica un subconjunto abierto de  $T_p M$  de manera difeomorfa en  $U$ .

Tomemos  $U_1, \dots, U_r$  una cubierta finita de  $M$  por conjuntos abiertos geodésicamente convexos; ahora, si  $V = U_1 \cap \dots \cap U_r$  es diferente del vacío, entonces  $V$  es claramente geodésicamente convexo. Si  $p \in V$ , entonces la aplicación exponencial establece un difeomorfismo de  $V$  en una región estrella de  $T_p M$  y por el lema anterior se sigue que  $V$  tiene los mismos grupos de cohomología  $H^k$  y  $H_c^k$  que  $\mathbb{R}^n$ .

En general, se dice que una variedad  $M$  es de **tipo finito** si hay una cubierta finita  $U_1, \dots, U_r$  tal que cada intersección distinta del vacío tenga la misma cohomología  $H^k$  y  $H_c^k$  que  $\mathbb{R}^n$ ; a tal cubierta la llamaremos **buena**.

Para construir una variedad que no es de tipo finito se considera a  $N = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\}$  como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ ; veremos entonces que  $M = \mathbb{R}^2 - N$  no es de tipo finito, usando la sucesión de Mayer-Vietoris para  $\mathbb{R}^2 = M \cup V$ , donde  $V$  es la unión disjunta de bolas alrededor de  $\{(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots\}$  obtenemos

$$H^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow H^1(M) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(M \cap V) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^2)$$

donde  $M \cap V$  tienen el mismo  $H^1$  que la unión disjunta de infinitas copias de  $S^1$ ; esto muestra que  $H^1(M)$  es de dimensión infinita. Esto nos lleva enunciar el siguiente resultado, ver [2].

**Proposición 3.5.1** *Si  $M$  es de tipo finito, entonces  $H^k(M)$  y  $H_c^k(M)$  son de dimensión finita para todo  $k$ . ♠*

Tomemos una variedad conexa y orientada  $M$ , con orientación  $\mu$ ; tenemos por la proposición 3.1.1 que hay un único elemento de  $H_c^n(M)$  representado por una forma  $\eta \in C_c^n(M)$  que cumple

$$\int_{(M,\mu)} \eta = 1.$$

Denotaremos como  $\mu$  a dicho elemento de  $H_c^n(M)$ , este elemento es conocido como la **clase fundamental** de  $M$ . También denotaremos por  $\mu$  al isomorfismo  $H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que manda al elemento  $\mu$  a  $1 \in \mathbb{R}$ .

Ahora, notemos que cualquier  $\alpha \in H^k(M)$  determina un elemento del espacio dual  $H_c^{n-k}(M)^*$  dado por

$$\beta \mapsto \alpha \smile \beta \in H_c^n(M) \xrightarrow{\mu} \mathbb{R};$$

denotamos a este elemento de  $H_c^{n-k}(M)^*$  por  $PD(\alpha)$ , llamado el **dual de Poincaré** de  $\alpha$ , teniendo entonces la siguiente aplicación:

$$PD : H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*, \quad PD(\alpha)(\beta) = \mu(\alpha \smile -)(\beta).$$

Notemos que la definición de producto copa vista anteriormente varía un poco, ahora definimos  $\smile : H^k(M) \times H_c^l(M) \rightarrow H_c^{k+l}(M)$  por

$$[w] \smile [\eta] = [w \wedge \eta].$$

lo cual tiene sentido porque el soporte de  $w \wedge \eta$  está contenido en la intersección de los soportes de  $w$  y de  $\eta$ .

Nosotros queremos demostrar que  $H^k(M) \approx H_c^{n-k}(M)^*$ , para ello necesitamos un importante resultado puramente algebraico, ver [8].

**Lema 3.5.2 (Lema de cinco)** *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios vectoriales y aplicaciones lineales, donde los renglones son exactos y  $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$  son isomorfismos; entonces  $\phi_3$  es también isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & V_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & V_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & V_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & V_5 \\ \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \phi_4 \downarrow & & \phi_5 \downarrow \\ W_1 & \xrightarrow{\beta_1} & W_2 & \xrightarrow{\beta_2} & W_3 & \xrightarrow{\beta_3} & W_4 & \xrightarrow{\beta_4} & W_5 \end{array}$$



**Lema 3.5.3** *Si  $M = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos de  $M$ , y  $PD$  es un isomorfismo para toda  $k$  en  $U$ ,  $V$  y  $U \cap V$ , entonces  $PD$  es un isomorfismo en  $M$  para toda  $k$ .*

**Demostración:** Sea  $l = n - k$ . Consideremos el siguiente diagrama, cuyo renglón de arriba es la sucesión de Mayer-Vietoris y el renglón de abajo es la sucesión dual de Mayer-Vietoris para soporte compacto.

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\ PD \oplus PD \downarrow & & PD \downarrow & & PD \downarrow & & PD \oplus PD \downarrow & & PD \downarrow \\ [H_c^{l+1}(U) \oplus H_c^{l+1}(V)]^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & [H_c^l(U) \oplus H_c^l(V)]^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^* \end{array}$$

Por hipótesis, todas las aplicaciones son isomorfismos excepto la intermedia; utilizando el Lema de cinco, obtenemos el resultado. ♠

**Teorema 3.5.1 (Dualidad de Poincaré)** *Si  $M$  es una variedad conexa, orientada y de tipo finito, entonces la aplicación  $PD : H^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$  es un isomorfismo.*

**Demostración:** Por inducción sobre el número de abiertos de una cubierta buena de  $M$ . El teorema es claramente válido para  $r = 1$ . Supongamos que es verdadero para un cierto  $r$  y tomemos  $\{U_1, \dots, U_r, U\}$  una buena cubierta de  $M$ . Sea  $V = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_r$ , entonces el teorema es válido para  $U$ ,  $V$  y  $U \cup V$  y por el lema anterior es verdad también para  $M$ . ♠

**Corolario 3.5.1** *Si  $M$  es una variedad conexa, orientable y de tipo finito, entonces  $H^k(M)$  y  $H_c^{n-k}(M)$  tienen la misma dimensión.* ♠

**Corolario 3.5.2** *Si  $M$  es una variedad conexa, orientable y compacta, entonces  $H^k(M)$  tiene la misma dimensión que  $H^{n-k}(M)$ .* ♠

**Corolario 3.5.3** *Si  $M$  es una variedad conexa, orientable, compacta de dimensión impar, entonces  $\chi(M) = 0$ .*

**Demostración:** En la expresión de  $\chi(M)$ , los términos  $(-1)^k \dim H^k(M)$  y los términos  $(-1)^{n-k} \dim H^{n-k}(M) = (-1)^{k+1} \dim H^{n-k}(M)$  se cancelan por pares. ♠

Lo anterior justifica trabajar únicamente con variedades de dimensión par, ya que para dimensiones impares  $\chi(M) = 0$  y el teorema de Gauss-Bonnet no tiene por qué ser verdadero; por ejemplo, en  $S^3$  con curvatura  $K = 1$  tenemos que  $\int_{S^3} dV = \text{vol}(S^3) \neq 0$  y  $\chi(S^3) = 0$ .

## 3.6. Grupos de Lie

Si un grupo  $G$  es también una variedad diferenciable  $C^\infty$  y la transformación  $G \times G \rightarrow G$  dada por  $(x, y) = xy^{-1}$  es diferenciable, entonces tenemos un **grupo de Lie**. Ejemplos clásicos de grupos de Lie son: El grupo general lineal  $GL(n, \mathbb{R})$  que es el conjunto de todas las matrices de  $n \times n$  con determinante distinto de cero, el grupo ortogonal  $O(n, \mathbb{R})$  que consiste de todas las matrices  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  tales que  $A \cdot A^t = I$ , y el grupo  $SO(n, \mathbb{R})$  de las matrices  $A \in O(n, \mathbb{R})$  tales que su determinante es 1.

En un grupo de Lie  $G$  definimos la **traslación izquierda**  $L_a : G \rightarrow G$  por  $L_a(b) = ab$  y la **traslación derecha**  $R_a : G \rightarrow G$  por  $R_a(b) = ba$ ; que inducen las aplicaciones  $(L_a)_* : G_b \rightarrow G_{ab}$  y  $(R_a)_* : G_b \rightarrow G_{ba}$ .

Un campo vectorial  $X$  sobre  $G$  es un **campo invariante izquierdo** si  $(L_a)_* X = X$  e **invariante derecho** si  $(R_a)_* X = X$ . La aplicación  $(L_a)_*$  es tal que  $(L_a)_* X_b = X_{ab}$ . Si  $b = e$ , donde  $e$  es el neutro de  $G$ , tenemos que dado  $X_e \in G_e$  podemos asociar un único campo vectorial izquierdo sobre  $G$  definido por  $(L_a)_* X_e = X_a$ .

Usaremos  $X, Y, \dots$  para denotar elementos de  $G_e$  y  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \dots$  para denotar los campos invariantes izquierdos tales que  $\tilde{X}(e) = X, \tilde{Y}(e) = Y$ .

Definimos una operación  $[-, -]$  en  $G_e$  mediante el corchete de Lie  $[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}](e)$ . Se puede mostrar que si  $X$  y  $Y$  son campos invariantes izquierdos, entonces el corchete  $[X, Y]$  es también invariante izquierdo, ver [5] o [12]. Entonces el espacio vectorial  $G_e$  junto con la operación  $[-, -]$  constituye un **álgebra de Lie** y la denotaremos por  $\mathfrak{g}$ .

Muchas propiedades de grupos de Lie se expresan en términos de formas diferenciales; una **forma**  $w$  es **invariante izquierda** si  $(L_a)^*w = w$  para toda  $a \in G$ , es decir,  $w(b) = (L_a)^*[w(ab)]$ . Desde luego, una  $k$ -forma invariante izquierda está determinada por  $w(e) \in \Omega^k(G_e)$ . Si  $w$  es invariante izquierda, entonces para  $a \in G$  tenemos  $(L_a)^*(dw) = (d(L_a)^*w) = dw$  y por lo tanto  $dw$  también es invariante izquierda.

Teniendo en cuenta la proposición 2.1.2 y consideremos campos invariantes izquierdos  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ , se tiene que

$$dw(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{X}w(\tilde{Y}) - \tilde{Y}w(\tilde{X}) - w([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = -w([\tilde{X}, \tilde{Y}]),$$

por lo tanto  $dw(e)(X, Y) = -w(e)([X, Y])$ .

Por otro lado, dada una base de 1-formas  $w^1, \dots, w^n$  invariantes izquierdas podemos expresar  $dw^k$  en términos de  $w^i \wedge w^j$ . Primero elegimos una base  $X_1, \dots, X_n$  de  $G_e$  dual de  $w^1(e), \dots, w^n(e)$ ; entonces hay constantes  $C_{ij}^k$  tales que  $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$ .

También tenemos  $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \tilde{X}_k$ , los números  $C_{ij}^k$  se llaman **constantes de estructura** del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  con respecto a la base  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ . De la anticonmutatividad de  $[-, -]$  y la identidad de Jacobi obtenemos

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^n \left( C_{ij}^h C_{hk}^l + C_{jk}^h C_{hi}^l + C_{ki}^h C_{hj}^l \right) = 0.$$

Y de  $dw(e)(X, Y) = -w(e)([X, Y])$ , llegamos a que

$$dw^k = - \sum_{i < j} C_{ij}^k w^i \wedge w^j = -\frac{1}{2} \sum_{i, j} C_{ij}^k w^i \wedge w^j.$$

Para terminar esta sección, consideremos un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $d$ , definimos una  **$k$ -forma  $V$ -valuada** sobre una variedad  $M$  como una aplicación multilineal alternante

$$w(p) : M_p \times \dots \times M_p \rightarrow V.$$

Si  $v_1, \dots, v_d$  es una base de  $V$  existen usuales  $k$ -formas  $w^1, \dots, w^d$  tales que para  $k$  vectores  $X_1, \dots, X_k \in M_p$  tenemos

$$w(p)(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^d w^i(p)(X_1, \dots, X_k) v_i,$$

que escribiremos como  $w = \sum_{i=1}^d w^i \cdot v_i$ .

Dada  $w$  una  $k$ -forma  $V$ -valuada, definimos una  $(k+1)$ -forma  $V$ -valuada como  $dw = \sum_{i=1}^d dw^i \cdot v_i$ . También podemos definir un producto cuña entre dos formas con valores en un espacio vectorial, para eso supongamos que tenemos  $U$ ,  $V$  y  $W$  espacios vectoriales y una aplicación bilineal

$$\rho : U \times V \rightarrow W,$$

donde  $U$  y  $V$  tienen como bases  $u_1, \dots, u_c$  y  $v_1, \dots, v_d$  respectivamente. Si  $w = \sum_{i=1}^c w^i \cdot u_i$  es una  $k$ -forma  $U$ -valuada y  $\eta = \sum_{j=1}^d \eta^j \cdot v_j$  es una  $l$ -forma  $V$ -valuada, vemos que

$$\rho(w \wedge \eta) = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^d w^i \wedge \eta^j \cdot \rho(u_i, v_j)$$

es una  $(k+l)$ -forma  $W$ -valuada. Este concepto se puede utilizar en el caso de grupos de Lie. Aunque no hay una manera natural de elegir una base de 1-formas invariantes izquierdas, hay una 1-forma natural  $\mathfrak{g}$ -valuada sobre  $G$  dada por  $w(a)(\tilde{X}(a)) = X \in \mathfrak{g}$ .

Usando la bilinealidad del corchete  $[-, -]$ , cuando los espacios vectoriales  $U = V = W = \mathfrak{g}$ ; entonces para cualesquiera formas  $\eta$  una  $k$ -forma  $\mathfrak{g}$ -valuada y  $\lambda$  una  $l$ -forma  $\mathfrak{g}$ -valuada, obtenemos la  $(k+l)$ -forma  $\mathfrak{g}$ -valuada  $[\eta \wedge \lambda]$  sobre  $G$ .

Tomemos una base  $X_1, \dots, X_n \in G_e = \mathfrak{g}$  y la base dual de 1-formas invariantes izquierdas  $w^1, \dots, w^n$  definidas como antes, esto es,  $w(a)(\tilde{X}(a)) = X \in \mathfrak{g}$ ; escribimos  $w$  como  $\sum_{k=1}^n w^k \cdot X_k$  y en consecuencia

$$dw = \sum_{k=1}^n dw^k \cdot X_k = - \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i < j} C_{ij}^k w^i \wedge w^j \right) \cdot X_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j} C_{ji}^k w^i \wedge w^j \right) \cdot X_k.$$

Por otro lado  $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$  y por la definición de producto cuña, tenemos que

$$[w, w] = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^k w^i \wedge w^j \right) \cdot X_k.$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones obtenemos las llamadas **ecuaciones de estructura** de  $G$ :

$$dw = -\frac{1}{2}[w \wedge w].$$

### 3.7. Hazes

El concepto de haz tangente ha dado lugar a diversas generalizaciones de gran utilidad. Así como una variedad es localmente  $\mathbb{R}^n$ , un haz es localmente el producto de dos variedades; en el caso de un haz vectorial tenemos:

**Definición 3.7.1** Un haz vectorial de dimensión  $n$  (o haz  $n$ -plano),  $\xi = (E, \pi, B, \oplus, \odot)$  consta de:

1. Los espacios topológicos,  $E$  (el espacio total de  $\xi$ ) y  $B$  (el espacio base de  $\xi$ ).
2. Una aplicación continua  $\pi : E \rightarrow B$  llamada **proyección**.
3. Aplicaciones  $\oplus$  y  $\odot$  tales que

$$\oplus : \bigcup_{p \in B} \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \rightarrow E, \quad \odot : \mathbb{R} \times E \rightarrow E,$$

con

$$\oplus(\pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p)) \subset \pi^{-1}(p) \quad \text{y} \quad \odot(\mathbb{R} \times \pi^{-1}(p)) \subset \pi^{-1}(p),$$

lo que hace que cada **fibra**  $\pi^{-1}(p) = F_p$ , sea un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Además, se satisface la condición de **trivialización local**, es decir, para cada  $p \in B$ , existe una vecindad  $U$  de  $p$  junto con un homeomorfismo  $t : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  el cual es un isomorfismo lineal de cada  $\pi^{-1}(q)$  sobre  $q \times \mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.7.2** Dado un haz vectorial  $\xi = \pi : E \rightarrow B$ , una aplicación continua  $s : B \rightarrow E$  que asigna a cada  $p \in B$  un vector  $s(p)$  en la fibra  $\pi^{-1}(p)$  y que satisface  $\pi \circ s = Id_B$ , es llamada **sección** de un haz.

**Ejemplos:**

- El haz **trivial**  $E = M \times \mathbb{R}^n$  con  $\pi$  la proyección al primer factor.
- El haz tangente  $E = TM$ , tal que para cada  $v \in T_p M$  tenemos la proyección  $\pi(v) = p$ . Las secciones de  $TM$  son precisamente los campos vectoriales sobre  $M$ .
- Consideremos una variedad  $M$  de dimensión  $n$  tal que  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos el conjunto  $M_p^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in M_p\}$ . Ahora, si  $E = \bigcup_{p \in M} M_p^\perp$  y consideramos la proyección  $\pi : E \rightarrow M$  que manda al vector  $v \in M_p^\perp$  en el punto  $p$ , tenemos el llamado **haz normal** de  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , denotado por  $NorM$ .
- Para el haz tangente  $\xi = TM$ , definimos un nuevo haz vectorial  $\Omega^k(\xi)$ , reemplazando cada fibra  $\pi^{-1}(p)$  por  $\Omega^k(\pi^{-1}(p))$ . Una sección  $w$  de  $\Omega^k(\xi)$  es una función tal que para cada  $p \in M$  tenemos  $w(p) \in \Omega^k(\pi^{-1}(p))$ .

Si  $\eta$  es una sección de  $\Omega^l(\xi)$ , podemos definir una nueva sección  $w \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(\xi)$  por  $(w \wedge \eta)(p) = w(p) \wedge \eta(p) \in \Omega^{k+l}(\pi^{-1}(p))$ . Las secciones de  $\Omega^k(TM)$  son llamadas  **$k$ -formas** sobre  $M$  y satisfacen las propiedades vistas en el capítulo dos.

El conjunto de todas las secciones de un haz vectorial  $\xi$  forman un espacio vectorial  $\Gamma(\xi)$ , el neutro en  $\Gamma(\xi)$  es la **sección cero** la cual para todo  $p \in B$  asigna el origen en la fibra  $\pi^{-1}(p)$ .

Sea  $U \subset B$  un conjunto abierto; podemos encontrar secciones locales  $s_1, \dots, s_n$  de  $E$  sobre  $U$ , tales que  $\{s_1(p), \dots, s_n(p)\}$  es una base de la fibra  $\pi^{-1}(p)$  para cada  $p \in U$ . Llamaremos a esto un **marco móvil**.

**Definición 3.7.3** Una **aplicación entre haces**  $\xi_i = \pi_i : E_i \rightarrow B_i$ ,  $i = 1, 2$ , consta de un par de funciones  $(\tilde{f}, f)$  continuas  $\tilde{f} : E_1 \rightarrow E_2$  y  $f : B_1 \rightarrow B_2$ , tales que  $\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(f(p))$  es una aplicación lineal y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Dos haces vectoriales  $\xi_i = \pi_i : E_i \rightarrow B$  son **equivalentes** ( $\xi_1 \simeq \xi_2$ ) si hay un homeomorfismo  $h : E_1 \rightarrow E_2$  tal que la fibra  $\pi_1^{-1}(p)$  es isomorfa a la fibra  $\pi_2^{-1}(p)$ . La aplicación  $h$  es llamada una **equivalencia**.

Por ejemplo, para cualquier aplicación diferenciable  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  la pareja  $(f_*, f)$  es una aplicación de haces entre  $T\mathbb{R}^k$  y  $T\mathbb{R}^l$ .

Dados  $\xi = \pi : E \rightarrow B$ , un haz vectorial de dimensión  $n$  y  $\eta = \pi' : E' \rightarrow B$ , un haz de dimensión  $m$ ; sea

$$E'' \subset E \times E' = \{(e, e') : \pi(e) = \pi'(e')\}.$$

Tomemos la proyección  $\pi''(e, e') = \pi(e) = \pi'(e')$ , entonces el haz  $\pi'' : E'' \rightarrow B$  es un haz vectorial de dimensión  $(n + m)$  llamado la **suma de Whitney**  $\xi \oplus \eta$  de  $\xi$  y  $\eta$ ; la fibra de  $\xi \oplus \eta$  sobre  $p$  es la suma directa de  $\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p)$ .

Otro haz muy importante en geometría diferencial surge cuando las fibras tienen estructura de grupo.

**Definición 3.7.4** Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ ,  $G$  un grupo de Lie. Un **haz principal sobre  $M$ , con grupo**  $(G, \cdot)$ , es tal que  $(P, \pi, M, G, \cdot)$  cumple:

1.  $P$  es una variedad  $C^\infty$  (el **espacio total** del haz principal).
2. La aplicación  $\cdot$  (la **acción** de  $G$ ) es una aplicación  $C^\infty$  de  $P \times G$  en  $P$  definida como  $(u, a) = u \cdot a$ , tal que para toda  $u \in P$  y  $a, b \in G$  se satisface:  $u \cdot (ab) = (u \cdot a) \cdot b$ .
3.  $\pi : P \rightarrow M$  es una aplicación  $C^\infty$  (la **proyección** del haz) sobre  $M$  (el **espacio base** del haz), que satisface  $\pi(u \cdot a) = \pi(u)$  para todo  $u \in P$  y  $a \in G$ .
4. Y que sea **localmente trivial**: para cada  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  y un difeomorfismo  $t : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  de tal forma que

$$t(u) = (\pi(u), \phi(u)); \quad \text{donde } \phi \text{ satisface } \phi(u \cdot a) = \phi(u)a.$$

### Ejemplos:

- Tomemos el haz  $P = M \times G$ , con la proyección al primer factor  $\pi : M \times G \rightarrow M$  y la acción  $(p, a) \cdot b = (p, ab)$ ; este haz es llamado el **haz principal trivial** con grupo  $G$ .

- Si tenemos un haz vectorial  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  definimos  $F(E)$  como el conjunto de todos los marcos  $(u_1, \dots, u_n)$  del espacio vectorial  $\pi^{-1}(p)$ , para todo  $p \in M$  con la proyección  $\varpi : F(E) \rightarrow M$  que manda un marco  $u$  de  $\pi^{-1}(p)$  a  $\varpi(u) = p$ , para todo  $p \in M$ . Este resulta ser un haz principal llamado el **haz de marcos** de  $E$  con grupo  $GL(n, \mathbb{R}^n)$  y se denota como  $F(\xi) = \varpi : F(E) \rightarrow M$ .

Como antes, una **aplicación entre haces principales**  $\xi_i = \pi_i : P_i \rightarrow X_i$ ,  $i = 1, 2$  con el mismo grupo  $G$  es un par  $(\tilde{f}, f)$ , donde  $f : X_1 \rightarrow X_2$  y  $\tilde{f} : P_1 \rightarrow P_2$  son tales que  $\pi_2 \circ \tilde{f} = f \circ \pi_1$  y además satisface  $\tilde{f}(u \cdot a) = \tilde{f}(u) \cdot a$  para todo  $u \in P$  y  $a \in G$ . Esta condición implica que  $\tilde{f}$  manda fibras en fibras.

En un haz vectorial siempre hay definida una sección cero, pero en un haz principal no siempre hay tal sección. Esto es, si el haz  $\xi = \pi : P \rightarrow M$  con grupo  $G$  tiene una sección  $s : M \rightarrow P$ , entonces el haz es trivial porque existe una aplicación global de  $M \times G$  en  $P$  dada por  $(p, a) = s(p) \cdot a$ .

Construiremos otro haz vectorial (o principal) como sigue: si  $\xi = \pi : E \rightarrow Y$  es un haz vectorial de dimensión  $n$  y  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, consideramos

$$E' \subset X \times E = \{(x, e) : f(x) = \pi(e)\}.$$

Definimos  $\pi' : E' \rightarrow X$  por  $\pi'(x, e) = x$  y  $\tilde{f}(x, e) = e$ ; entonces se puede dar una estructura de espacio vectorial sobre la fibra  $\pi'^{-1}(x) = \{(x, e) : e \in \pi^{-1}(f(x))\}$  usando la estructura de espacio vectorial de  $\pi^{-1}(f(x))$ ; es fácil verificar que  $\pi' : E' \rightarrow X$  es un haz vectorial y  $(\tilde{f}, f)$  es una aplicación de haces. El haz se denota por  $f^*\xi$  y se llama el **haz inducido por  $f$** .

Para el caso de un haz principal, usamos la acción de  $G$  sobre la fibra  $\pi^{-1}(f(x))$  para definir la acción en  $\pi'^{-1}(x)$ . Ahora, si  $g : W \rightarrow X$  es otra aplicación continua, entonces tenemos que  $g^*(f^*\xi) \simeq (f \circ g)^*\xi$ . Si  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  es un haz vectorial, entonces  $f^*(F(\xi)) \simeq F(f^*\xi)$ .

Volvamos a los haces vectoriales; definimos una métrica riemanniana sobre un haz vectorial  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  como una función  $\langle -, - \rangle$  la cual asigna a cada  $p \in M$  un producto punto definido positivo  $\langle -, - \rangle_p$  sobre cada fibra  $\pi^{-1}(p)$  y que es continua en el sentido de que para cualesquiera dos secciones continuas  $s_i : M \rightarrow E$ , la siguiente función también es continua  $p \mapsto \langle s_1(p), s_2(p) \rangle_p$ .

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial y  $\langle -, - \rangle$  una métrica para  $\xi$ ; consideremos el haz principal de marcos ortonormales  $O(\xi) = \varpi : O(E) \rightarrow M$  con el grupo ortogonal  $O(n)$ , en el cual la fibra  $\varpi^{-1}(x)$  es el conjunto de todos los marcos que son ortonormales con respecto a la métrica del haz. Si  $\langle -, - \rangle'$  es otra métrica sobre  $\xi$ , entonces tenemos otro haz principal  $O'(\xi) = \varpi' : O'(E) \rightarrow M$  que consiste de los marcos que son ortonormales con la nueva métrica. Un resultado natural pero de gran trascendencia es el siguiente, ver [2].

**Teorema 3.7.1** *Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial con dos métricas riemannianas  $\langle -, - \rangle$  y  $\langle -, - \rangle'$ , entonces  $O(\xi) \simeq O'(\xi)$ . ♠*

En el capítulo dos definimos la orientación de un espacio vectorial, dividiendo todas las bases ordenadas en dos clases según el signo del determinante. Una de las clases es llamada una **orientación** de  $V$  y se denota por  $[v_1, \dots, v_n] = \mu$ , la otra orientación será denotada por  $-\mu$ . Esa idea se aplica también a los haces vectoriales.

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial. Una orientación  $\mu$  para  $E$  está definida por una colección  $\mu_p$  de orientaciones para las fibras  $\pi^{-1}(p)$  que satisfacen la **condición de compatibilidad** para cualquier conjunto abierto y conexo  $U \subset M$ , esto es:

Si  $t : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  es una equivalencia y las fibras de  $U \times \mathbb{R}^n$  tienen dada la orientación estándar, es decir, tenemos la orientación  $[(x, e_1), \dots, (x, e_n)]$  sobre cada fibra  $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ , entonces  $t$  preserva orientación o la invierte sobre todas las fibras.

Si  $t' : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  es otra equivalencia entonces satisface la misma condición ya que  $t' \circ t^{-1} : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  es una equivalencia. Esto muestra que una orientación  $\mu_p$  define una orientación sobre  $E$  si la condición de compatibilidad se satisface para una colección de abiertos  $U$  que cubran  $M$ . Un haz  $E$  es llamado **orientable** si tiene una orientación que es justamente el par  $(\xi, \mu)$ , y no orientable en el otro caso.

Dado  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial con una orientación  $(\xi, \mu)$  y una aplicación continua  $f : N \rightarrow M$ , hay una manera de definir una orientación  $f^*\mu$  para  $f^*\xi$ ; definimos  $f^*(\xi, \mu)$  como la orientación del haz  $(f^*\xi, f^*\mu)$ .

Dados dos espacios vectoriales orientados  $(V, \mu)$  y  $(W, \nu)$ , nosotros orientamos  $V \oplus W$ , tomando  $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$  como una base orientada positiva si  $v_1, \dots, v_n$  y  $w_1, \dots, w_m$  están orientadas positivamente con respecto a  $\mu$  y  $\nu$  respectivamente. Así la orientación de  $W \oplus V$  es  $(-1)^{mn}$  veces la orientación de  $V \oplus W$ .

Lo anterior permite dar una orientación a la suma de Whitney  $\xi_1 \oplus \xi_2$  usando la orientación de las sumas directas de las fibras; esto es,  $(\xi_1 \oplus \xi_2, \mu_1 \oplus \mu_2)$ , donde  $(\xi_1, \mu_1)$  y  $(\xi_2, \mu_2)$  son dos haces sobre el mismo espacio  $M$ .

### 3.8. Variedad grassmaniana

En esta sección construiremos el haz universal y veremos que cualquier haz orientado se puede expresar como el haz inducido por el haz universal a través de una aplicación continua adecuada.

Definimos la **variedad grassmaniana**  $G_n(\mathbb{R}^N)$  como el conjunto de todos los subespacios de  $\mathbb{R}^N$  de dimensión  $n$  siempre que  $n < N$ ; ésta es una variedad de dimensión  $n(N - n)$ , ver [2]. Tenemos por ejemplo que  $P^n(\mathbb{R}) = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Sobre la variedad grassmaniana se puede construir un haz vectorial  $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$  de dimensión  $n$ , llamado el **haz universal**, de la siguiente manera: El espacio total  $E(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$  lo definimos como el subconjunto de  $G_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$  que consiste en todas las parejas  $(W, w) \in G_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$  tales que  $w \in W$ , con la proyección  $\pi : E(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^N)$  dada por  $\pi(W, w) = W$ .

Esto es, la fibra  $\pi^{-1}(W)$  en el punto  $W \in G_n(\mathbb{R}^N)$  es el conjunto  $\{(W, w); w \in W\}$ . La estructura de espacio vectorial sobre la fibra está definida usando la estructura de espacio vectorial del subespacio  $W$  de  $\mathbb{R}^N$ ;

$$(W, w_1) + (W, w_2) = (W, w_1 + w_2), \quad a \cdot (W, w) = (W, aw)$$

Para ver que  $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$  es localmente trivial consideramos  $W \in G_n(\mathbb{R}^N)$  y el complemento ortogonal  $W^\perp$  dado por la descomposición  $\mathbb{R}^N = W \oplus W^\perp$ , la proyección  $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow W$  y los conjuntos abiertos  $\mathbf{U} \subset G_n(\mathbb{R}^N)$  que consisten de todos los subespacios  $V$  tales que  $V \cap W^\perp = \{0\}$ .

Ahora definimos la siguiente aplicación:  $\pi^{-1}(\mathbf{U}) \rightarrow \mathbf{U} \times W \approx \mathbf{U} \times \mathbb{R}^n$  dada por  $(V, v) = (V, \rho(v))$ . Esta aplicación es un difeomorfismo y un isomorfismo sobre cada fibra, entonces  $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$  es un haz vectorial suave sobre  $G_n(\mathbb{R}^N)$ .

Para  $N < M$  hay una aplicación natural  $\alpha : G_n(\mathbb{R}^N) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^M)$  ya que cualquier subespacio de dimensión  $n$  de  $\mathbb{R}^N$  puede ser considerado como subespacio de  $\mathbb{R}^M$ . También hay una aplicación  $\tilde{\alpha} : E(\gamma^n(\mathbb{R}^N)) \rightarrow E(\gamma^n(\mathbb{R}^M))$  tal que  $(\alpha, \tilde{\alpha})$  es una aplicación de los haces  $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$  a  $\gamma^n(\mathbb{R}^M)$ , por lo que tenemos  $\gamma^n(\mathbb{R}^N) \simeq \alpha^* \gamma^n(\mathbb{R}^M)$ .

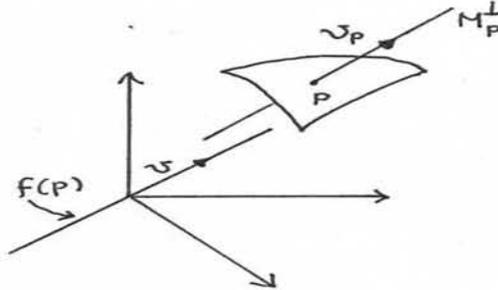


Figura 3.8: Aplicación  $f$

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  no necesariamente orientable; puede no ser posible definir la aplicación de Gauss, pero podemos definir la aplicación  $f : M \rightarrow G_1(\mathbb{R}^{n+1})$  como sigue: a cada  $p \in M$  le asociamos el subespacio 1-dimensional de  $\mathbb{R}^{n+1}$  paralelo a la línea  $M_p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

También definimos  $\tilde{f} : \text{Nor}M \rightarrow \gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})$  mandando  $v_p \in M_p^\perp$  a  $(f(p), v)$  por lo que tenemos una aplicación de haces  $(\tilde{f}, f)$  del haz normal de  $M$  en el haz  $\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1})$  y en consecuencia  $\text{Nor}M \simeq f^*(\gamma^1(\mathbb{R}^{n+1}))$ .

Otro caso más interesante surge de considerar la aplicación  $f : M \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+1})$  definida por  $f(p) =$  subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  paralelo a  $M_p$  y definir  $\tilde{f} : TM \rightarrow E(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+1}))$  mandando a  $v_p \in M_p$  a  $(f(p), v)$ ; con eso tenemos que el haz tangente  $TM$  es equivalente a  $f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+1}))$ .

Esto nos lleva a generalizarlo. Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión  $n$  de tal manera que  $M \subset \mathbb{R}^N$  para alguna  $N$  suficientemente grande, podemos definir  $f : M \rightarrow G_n(\mathbb{R}^N)$  por  $f(p) =$  subespacio de  $\mathbb{R}^N$  paralelo a  $M_p$ . También definimos  $\tilde{f} : TM \rightarrow E(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$  mandando a cada  $v_p \in M_p$  a  $(f(p), v)$ . Así,  $(\tilde{f}, f)$  es una aplicación del haz  $TM$  en  $\gamma^n(\mathbb{R}^N)$ , es decir,  $TM \simeq f^*(\gamma^n(\mathbb{R}^N))$ .

En resumen “*Un haz vectorial se puede expresar como el haz inducido por el haz universal a través de una aplicación continua adecuada*”.

Análogamente definimos la **variedad grassmaniana orientada**  $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  como el conjunto de todos los subespacios de dimensión  $n$  de  $\mathbb{R}^N$  orientados, siempre que  $n < N$ . Sobre  $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  definimos el haz  $(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \mu)$ , el espacio total  $E(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$  que consiste en todas las parejas  $((W, \mu), w) \in \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$  tal que  $w \in W$ , junto con la proyección  $\pi : E(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  dada por  $\pi((W, \mu), w) = W$ .

La estructura de espacio vectorial está definida como antes y definimos la orientación natural

$\mu$  sobre la fibra  $\pi^{-1}(W, \mu) = \{(W, \mu), w\}; w \in W\}$  usando la orientación  $\mu$  de  $W$ .

Como antes, podemos hacer que cualquier haz orientado se pueda expresar como el haz inducido por el haz universal a través de una aplicación continua, (ver demostración en [2] o [13]).

**Teorema 3.8.1** ■ Sea  $(\xi, \mu)$  un haz suave orientado de dimensión  $n$  sobre  $M$  una variedad orientada, entonces para un número  $N$  suficientemente grande hay una aplicación continua  $f : M \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  tal que  $(\xi, \mu) \simeq f^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \mu)$ .

- Sea  $\alpha : \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N) \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^M)$  la inclusión natural con  $M \geq 2N$  y si  $f_0, f_1 : M \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  son dos aplicaciones tales que cumplen  $f_0^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \mu) \simeq f_1^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N), \mu)$ , entonces la composición  $\bar{f}_0 = \alpha \circ f_0$  y la composición  $\bar{f}_1 = \alpha \circ f_1$  son homotópicas. Si  $f_0$  y  $f_1$  son aplicaciones suaves, entonces  $\bar{f}_0$  y  $\bar{f}_1$  son suavemente homotópicas. ♠

### 3.9. Clase de Thom y clase de Euler

Usaremos la dualidad de Poincaré para poder decir mucho más de la característica de Euler de una variedad conexa, compacta y orientada  $M$  de dimensión  $n$ .

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial de dimensión  $k$  sobre  $M$ , con orientación  $\mu$  para  $M$  y  $\nu$  para  $\xi$ , que induce la orientación  $\mu \oplus \nu$  para la variedad  $(n+k)$ -dimensional  $E$ . Si  $U_1, \dots, U_r$  es una buena cubierta de  $M$  por conjuntos geodésicamente convexos tan pequeños que cada haz  $\xi|_{U_i}$  es trivial, entonces es posible demostrar que  $\{\pi^{-1}(U_1), \dots, \pi^{-1}(U_r)\}$  es una buena cubierta de  $E$ ; así,  $E$  es de tipo finito. Notemos que para las aplicaciones  $\pi : E \rightarrow M$  y  $s : M \rightarrow E$  (0-sección) tenemos que

$$\pi \circ s = Id_M \quad \text{y} \quad s \circ \pi \simeq Id_E$$

de modo que

$$\pi^* : H^l(M) \rightarrow H^l(E)$$

es un isomorfismo para todo  $l$ . Entonces, por el Teorema de dualidad de Poincaré existe una única clase  $U \in H_c^k(E)$  tal que

$$\pi^* \mu \smile U = \mu \oplus \nu \in H_c^{n+k}(E).$$

La clase  $U$  es llamada la **clase de Thom** del haz  $\xi$ . Necesitamos una propiedad que caracterice a  $U$ ; sea  $F_p = \pi^{-1}(p)$  una fibra de  $\xi$  sobre cualquier  $p \in M$ , sea  $j_p : F_p \rightarrow E$  la inclusión de la fibra en  $E$ . Puesto que  $j_p$  es propia existe un elemento  $j_p^* U \in H_c^k(F_p)$ . Por otro lado, la orientación  $\nu$  de  $\xi$  determina una orientación  $\nu_p$  para  $F_p$  y entonces da un elemento  $\nu_p \in H_c^k(F_p)$ . Entonces,  $U(\xi)$  es la única clase cuya restricción a cada fibra  $\pi^{-1}(p)$  es el generador de  $\nu_p \in H_c^k(F_p)$  determinado por la orientación. Ver demostración en [2], [8].

**Teorema 3.9.1** Dada  $(M, \mu)$  una variedad conexa, compacta y orientada, sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial sobre  $M$  de dimensión  $k$  con una orientación  $\nu$ . Entonces la clase de Thom  $U$  es el único elemento de  $H_c^k(E)$  con la propiedad de que para cada  $p \in M$  tenemos  $j_p^* U = \nu_p$ , donde  $j_p : F_p \rightarrow E$  es la inclusión de la fibra en  $E$ .

La clase de Thom  $U \in H_c^k(E)$  de  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  puede usarse para determinar un elemento en  $H^k(M)$ : sea  $s : M \rightarrow E$  cualquier sección del haz (por ejemplo la sección cero); definimos la **clase de Euler**  $\chi(\xi) \in H^k(M)$  por  $\chi(\xi) = s^*U$ .

En el capítulo dos demostramos que la suma de los índices de los ceros de un campo vectorial sobre una variedad compacta y orientable de dimensión dos es la característica de Euler. Para generalizar este hecho, primero tenemos que ver cómo se mide el índice en dimensiones mayores que dos.

Por ejemplo, en una variedad  $M \subset \mathbb{R}^n$ , tenemos que un campo vectorial  $X$  es una asignación de un vector tangente a  $M$  en cada punto  $p \in M$ . Sabemos la información del comportamiento del campo está centrada en las singularidades  $X(p) = 0$ , ya que cuando  $X(p) \neq 0$ , el campo es casi constante alrededor del punto  $p$ . En cambio cuando  $X(p) = 0$ , la dirección de  $X$  puede cambiar drásticamente.

Para analizar la dirección del campo en torno de sus singularidades; supongamos que  $X(0) = 0$  para  $0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces la dirección de  $X$  en torno a  $p$  es precisamente

$$\frac{X(p)}{\|X(p)\|}.$$

Así, la variación de la dirección del campo alrededor del 0 se mide por medio de la aplicación  $p \mapsto \frac{X(p)}{\|X(p)\|}$  que lleva una esfera de radio  $\epsilon$  en torno a 0 a la esfera unitaria  $S^{n-1}$ . El radio se puede escoger tan pequeño del tal manera que  $S_\epsilon$  no contenga más singularidades. Entonces, definimos el **índice** del campo  $X$  en 0 como el grado de la transformación  $S_\epsilon \rightarrow S^{n-1}$ .

Por ejemplo, en el caso de dimensión dos, el índice de un campo  $X$  en una singularidad cuenta el número de veces que el campo  $X$  gira completamente si recorremos la circunferencia en sentido contrario a las de las manecillas del reloj; considerando que la rotación de  $X$  en una dirección suma  $+1$ , mientras que en la otra suma  $-1$ .

Para variedades no contenidas en algún  $\mathbb{R}^n$ , usaremos las parametrizaciones locales para definir el índice.

Si  $X$  es un campo sobre  $M$ , con un punto singular  $p \in M$ , elegimos un sistema de coordenadas  $(x, U)$  de tal manera que  $x(0) = p$  y definimos el índice de  $X$  en  $p$  como el índice de  $x_*^{-1}X$  en 0. Se demuestra que no depende de la parametrización escogida, ver demostración y más detalles sobre esto en [10].

La clase de Euler de  $TM$  está relacionada con la clase fundamental de  $M$  mediante la suma de los índices de un campo vectorial sobre la variedad y es nuestro siguiente resultado.

**Teorema 3.9.2** *Sea  $M$  una variedad conexa, compacta y con una orientación  $\mu$ , la cual da una orientación para el haz tangente  $\xi = \pi : TM \rightarrow M$ . Tomemos un campo vectorial  $X : M \rightarrow TM$  con sólo un número finito de ceros, y sea  $\sigma$  la suma de los índices de los ceros de  $X$ . Entonces*

$$\chi(\xi) = \sigma \cdot \mu \in H^n(M) \quad \spadesuit$$

Enunciaremos la generalización del teorema del índice de Hopf cuya demostración se encuentra en [2].

**Teorema 3.9.3 (Poincaré-Hopf)** *La suma de los índices de cualquier campo vectorial sobre  $M$  es igual a la característica de Euler  $\chi(M)$ , esto es, para  $\xi = \pi : TM \rightarrow M$  tenemos*

$$\chi(\xi) = \chi(M) \cdot \mu. \quad \spadesuit$$

De aquí obtenemos una primera propiedad de la clase de Euler, si la variedad es de dimensión impar, entonces  $\chi(\xi) = 0$ . Otras propiedades importantes son las siguientes:

**Lema 3.9.1** *Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial suave orientado sobre una variedad compacta y orientada  $M$  y sea  $f : M' \rightarrow M$  una aplicación continua, donde  $M'$  también es una variedad compacta y orientada. Si  $E'$  es el espacio total de  $f^*\xi$  y  $\tilde{f} : E' \rightarrow E$  es una aplicación de haces, entonces*

$$\tilde{f}^*(U(\xi)) = U(f^*\xi) \in H_c^n(E').$$

**Demostración:** Como  $\tilde{f}$  es continua,  $\tilde{f}$  es propia y entonces la imagen inversa de un compacto es compacta, por lo tanto  $\tilde{f}^*$  manda  $H_c^n(E)$  en  $H_c^n(E')$ . Sea  $f^*\xi$  el haz  $\pi' : E' \rightarrow M'$ . Ahora, si  $p' \in M'$  y  $j_{p'} : \pi'^{-1}(p') \rightarrow E'$  es la inclusión, entonces  $j_{p'}^* \tilde{f}^*(U(\xi)) = (\tilde{f} \circ j_{p'})^*(U(\xi))$ .

Vemos que  $(\tilde{f} \circ j_{p'})^*(U(\xi))$  debe ser el generador de  $H_c^n(\pi'^{-1}(p'))$ , entonces  $j_{f(p')}^*(U(\xi))$  es el generador de  $H_c^n(\pi^{-1}(f(p)))$ . Esto muestra que  $\tilde{f}^*(U(\xi))$  debe ser  $U(f^*\xi)$ .  $\spadesuit$

**Proposición 3.9.1** *Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial suave orientado sobre una variedad compacta y orientada  $M$  y sea  $f : M' \rightarrow M$  una aplicación continua, donde  $M'$  también es una variedad compacta y orientada. Entonces*

$$f^*\chi(\xi) = \chi(f^*\xi) \in H^k(M).$$

**Demostración:** Si elegimos la sección cero  $s = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{0}'$  denota la sección cero del haz  $f^*\xi$ , entonces  $\tilde{f} \circ \mathbf{0}' = \mathbf{0} \circ f$ . Por la definición de clase de Euler  $\chi(f^*\xi) = (\mathbf{0}')^*U(f^*\xi)$ , entonces por el lema 3.9.1 y propiedades del pull-back tenemos

$$(\mathbf{0}')^*U(f^*\xi) = (\mathbf{0}')^* \tilde{f}^*(U(\xi)) = (\tilde{f} \circ \mathbf{0}')^*(U(\xi)) = (\mathbf{0} \circ f)^*(U(\xi)) = (f^* \circ \mathbf{0}^*)(U(\xi)) = f^*\chi(\xi). \quad \spadesuit$$

**Lema 3.9.2** *Si  $n \in \mathbb{N}$  es par, entonces  $\chi(\tilde{\gamma}(\mathbb{R}^n)) \neq 0$  para toda  $n < N$ .*

**Demostración:** Sea  $S^n \subset \mathbb{R}^N$  para  $n < N$ , entonces tenemos una aplicación entre haces  $(\tilde{f}, f) : TS^n \rightarrow E(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^n))$  como en la sección 3.8, es decir,  $TS^n \simeq f^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$ .

Por la proposición 3.9.1  $\chi(TS^n) = \chi(f^*(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))) = f^*\chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$ . Por el teorema de Poincaré-Hopf  $\chi(TS^n)$  es el producto de  $\chi(S^n)$  por la clase fundamental de  $S^n$  y  $\chi(S^n) = 2 \neq 0$ .  $\spadesuit$

Esta clase cumple también que dados  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos haces vectoriales orientados, suaves, sobre una variedad  $M$  compacta y orientada:  $\chi(\xi_1 \oplus \xi_2) = \chi(\xi_1) \smile \chi(\xi_2)$  (ver demostración en [8] o [2]).

El siguiente lema es necesario para mostrar que la clase de Euler es un múltiplo de una clase que está relacionada con la curvatura que veremos en el capítulo cuatro.

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial suave, orientado, de dimensión  $k$  sobre una variedad  $M$  de dimensión  $n$ , conexa, compacta y orientada. Tomemos  $\langle -, - \rangle$  una métrica riemanniana sobre  $\xi$ , entonces definimos el **haz de esferas** asociado a  $\xi$  como  $S(E) = \{e \in E : \langle e, e \rangle = 1\}$  y el **haz de bolas** asociado a  $\xi$  como  $D(E) = \{e \in E : \langle e, e \rangle \leq 1\}$ . Consideremos  $\pi|_S = \pi_0 : S(E) \rightarrow M$  la restricción de  $\pi$  a  $S$ .

**Lema 3.9.3** Una clase  $\alpha \in H^k(M)$  satisface  $\pi_0^*(\alpha) = 0$  si y sólo si  $\alpha$  es un múltiplo de la clase de Euler  $\chi(\xi)$ .

**Demostración:** Consideremos el siguiente diagrama dado por el Teorema 3.4.3 para la pareja  $(D, S)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 H_c^k(D-S) & \xrightarrow{e} & H^k(D) & \xrightarrow{i^*} & H^k(S) \\
 & \searrow s^* & \downarrow \bar{s}^* & \uparrow (\pi|_D)^* & \nearrow \pi_0^* \\
 & & H^k(M) & & 
 \end{array}$$

Las secciones nulas  $s : M \rightarrow D - S$  y  $\bar{s} : M \rightarrow D$  son las mismas. Notemos que el diagrama conmuta; esto es,  $\pi_0^* = i^* \cdot (\pi|_D)^*$  pues  $\pi_0 = (\pi|_D) \circ i$ .

También  $s^* = \bar{s}^* \cdot e$ , porque al extender una forma a  $D$  no afecta su valor sobre  $s(M)$ . Y  $\bar{s}^* \cdot (\pi|_D)^* = Id_{H^k(M)}$ , porque  $(\pi|_D) \circ \bar{s}$  es suavemente homotópica a la identidad.

Tomemos  $\alpha \in H^k(M)$  tal que  $\pi_0^*(\alpha) = 0$ , entonces  $i^* \cdot (\pi|_D)^*(\alpha) = 0$  por lo tanto  $(\pi|_D)^*\alpha \in \text{Im}e$ . Tenemos que  $D - S$  es difeomorfo a  $E$  y cualquier elemento de  $H_c^k(D - S)$  es un múltiplo de la clase de Thom  $U$  de  $\xi$ . Entonces concluimos que  $(\pi|_D)^*\alpha = c \cdot e(U)$ , para alguna  $c \in \mathbb{R}$ . Así

$$\alpha = \bar{s}^* \cdot (\pi|_D)^*\alpha = c \cdot \bar{s}^*(e(U)) = c \cdot s^*(U) = c \cdot \chi(\xi).$$

El recíproco es similar; si  $\alpha = c \cdot s^*(U)$ , entonces  $\pi_0^*\alpha = c \cdot \pi_0^* \cdot s^*(U) = c \cdot (i^* \cdot e(U)) = 0$ . ♠

### 3.10. Conexión de Ehresmann y curvatura

Tenemos que un haz es localmente un producto, pero eso no es necesariamente cierto a nivel global; uno puede medir qué tanto se aleja el haz del caso trivial con el concepto de conexión.

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial; localmente  $E$  se puede ver como el producto  $U \times \mathbb{R}^n$ , donde  $U$  es un abierto de  $M$  y cualquier punto de  $E$  es de la forma  $u = (p, v)$ . Entonces el espacio tangente  $T_u E$  lo escribimos como la suma de dos subespacios  $T_u E = T_p U \oplus T_v \mathbb{R}^n$ ; uno en dirección de la base y el otro en dirección de la fibra, de tal suerte que tenemos el **espacio vertical**  $V_u = T_u F_p \subset T_u E$ , donde  $p = \pi(u)$  y  $F_p = \pi^{-1}(p)$ .

Ahora tomamos  $u \in E$  y elegimos diferenciablemente un subespacio  $H_u \subset T_u E$  de tal manera que  $H_u$  sea un **espacio transversal** a la fibra, es decir,  $T_u E = H_u \oplus V_u$  y decimos que el haz tiene dada una **conexión**.

Para un haz principal  $\xi = \pi : P \rightarrow M$  con grupo  $G$  es natural relacionar la conexión con la acción de  $G$ . Una **conexión** en un **haz principal** es una regla que asigna para cada  $u \in P$  un subespacio  $H_u$  de  $T_uP$  de manera tal que:

1.  $H_u$  es transversal a la fibra, es decir,  $T_uP = H_u \oplus V_u$ .
2.  $H_u$  es invariante por la acción derecha de  $G$ , es decir, si  $R_a : P \rightarrow P$  es la traslación derecha dada por  $R_a(u) = u \cdot a$ , entonces  $H_{u \cdot a} = (R_a)_*H_u$ .
3.  $H_u$  es diferenciable en  $u$ .

La conexión puede también ser definida como una cierta 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada que satisface ciertos axiomas, que veremos enseguida.

Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie del grupo de Lie  $G$  del haz principal  $\pi : P \rightarrow M$  que actúa sobre  $P$  por la derecha; para  $X \in \mathfrak{g}$  tenemos la curva  $t \mapsto \exp(tX)$  en  $G$ . Y para cada  $u \in P$ , esto da lugar a una curva en  $P$

$$c_u(t) = u \cdot \exp(tX) = R_{\exp(tX)}(u)$$

y lo que obtenemos es un campo  $c'_u(0)$  en  $P$  denotado por  $\sigma(X)(u)$ , llamado **campo vectorial fundamental correspondiente a  $X$** , por lo que tenemos la aplicación  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{X}(P)$ . Podemos describir a  $\sigma(X)$  como sigue: sea  $u \in P$  y  $\sigma_u : G \rightarrow P$  dado por  $\sigma_u(a) = u \cdot a$ , entonces  $\sigma(X)(u) = \sigma_{u*}(X)$ . Por lo tanto el conjunto  $\sigma(X)(u)$  es precisamente el conjunto de vectores verticales en  $u$ .

Definimos ahora  $ad(a) : G \rightarrow G$  por la conjugación  $ad(a)(b) = aba^{-1}$  para toda  $a \in G$ , este homomorfismo es llamado la **representación adjunta** de  $G$ . Tomemos  $ad(a)_* : G_b \rightarrow G_{aba^{-1}}$ ; vemos que, si  $b = e$ ,  $ad(a)(e) = e$  y  $ad(a)_* : G_e \rightarrow G_e$ .

Si identificamos a  $G_e$  con el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , llamamos  $Ad(a)$  a la **aplicación adjunta**, dada por  $Ad(a) = ad(a)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Consideremos las traslaciones izquierda y derecha  $L_a$  y  $R_a$  respectivamente, notamos que  $ad(a)(b) = L_a \circ R_a^{-1}(b) = R_a^{-1} \circ L_a(b)$  y por lo tanto

$$Ad(a) = (L_a \circ R_a^{-1})_* = (R_a^{-1} \circ L_a)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Si  $\tilde{X}$  es un campo invariante izquierdo sobre  $G$  con  $\tilde{X}(e) = X \in \mathfrak{g}$ , entonces

$$Ad(a)X = (R_a^{-1})_*(L_{a*}\tilde{X})(e) = [(R_a^{-1})_*\tilde{X}](e).$$

Así, llevamos a cabo la introducción de la 1-forma de conexión  $\mathfrak{g}$ -valuada.

**Definición 3.10.1** Una **conexión de Ehresmann** en un haz principal  $\xi = \pi : P \rightarrow M$  con grupo  $G$ , es una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada  $w$  sobre  $P$  tal que:

1.  $w(\sigma(X)) = X$ , para todo  $X \in \mathfrak{g}$ .
2.  $w_{u \cdot a}((R_a)_*Y) = Ad(a^{-1})(w_u(Y))$ , para todo  $a \in G$  y todo  $Y \in TP$ .

Si  $w$  es una conexión de Ehresmann, de la condición 2 observamos que

$$R_a^*w_{u \cdot a} = w_{u \cdot a}((R_a)_*Y) = Ad(a^{-1})(w_u(Y)) = a^{-1}w_u(Y)a$$

Y definimos  $H_u$  el **subespacio horizontal** en  $u$ , como el kernel de  $w$

$$H_u = \{Y \in T_u P; w(Y) = 0\}.$$

los vectores de  $H_u$  son llamados **horizontales**.

Si  $\langle -, - \rangle$  es una métrica riemanniana para  $\xi$ ,  $SO(E)$  es el haz de marcos ortonormales, que es un haz principal con grupo  $SO(n)$ . Entonces hay una conexión  $w$  sobre el haz de marcos  $\varpi : SO(E) \rightarrow M$ , donde  $w$  es una 1-forma sobre  $SO(E)$  con valores en  $\mathfrak{o}(n)$ . Para cualquier punto de  $SO(E)$  definimos la parte vertical  $V$  y la parte horizontal  $H$  de su espacio tangente. Y para cualquier  $k$ -forma  $\alpha$  de  $SO(E)$  con valores en un espacio vectorial  $U$ , definimos una  $(k+1)$ -forma  $U$ -valuada  $D\alpha$  como

$$D\alpha(Y_1, \dots, Y_{k+1}) = d\alpha(hY_1, \dots, hY_{k+1})$$

donde  $d$  es la derivada exterior y  $hY$  es la componente horizontal de  $Y$ .

En particular, tenemos la **forma de curvatura**  $\Omega = Dw$ , donde la matriz de 2-formas  $\Omega_j^i$  también toma sus valores en  $\mathfrak{o}(n)$ .

Supongamos que  $\pi : P \rightarrow M$  es un haz principal con grupo  $G$  y con 1-forma de conexión  $w$ . Si  $P = M \times G$ , teníamos la ecuación de estructura  $dw = -\frac{1}{2}[w \wedge w]$ , (sección 3.6) que es válida cuando nos restringimos a cada fibra, pero no es cierto cuando evaluamos en vectores horizontales y por lo tanto definimos la **ecuación de estructura**  $dw = -\frac{1}{2}[w \wedge w] + \Omega$ , donde la 2-forma  $\Omega$  toma sus valores en  $\mathfrak{g}$ . Algunas propiedades de la forma de curvatura son las siguientes, ver demostración en [2].

**Proposición 3.10.1** *Para todo  $a \in G$  tenemos  $R_a^* \Omega = Ad(a^{-1})\Omega$ . En otras palabras, para  $Y_1, Y_2 \in P_u$  tenemos*

1.  $R_a^* \Omega(Y_1, Y_2) = Ad(a^{-1})\Omega(Y_1, Y_2)$ .
2. Si  $X, Y \in T_u P$ , entonces  $\Omega(X, Y) = dw(X_h, Y_h)$ .
3. *Dados dos campos vectoriales verticales  $X, Y$  sobre el espacio total  $P$ , entonces se cumple la ecuación  $\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}w([X, Y])$ . ♠*

## Capítulo 4

# Teorema de Gauss-Bonnet-Chern

En este último capítulo obtendremos una fórmula que expresa la curvatura de una variedad de dimensión par contenida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , por lo que uno puede preguntarse dónde está lo intrínseco de la generalización del teorema; lo importante es que la fórmula no depende del espacio ambiente de la variedad. Antes, obtendremos otros resultados necesarios para la demostración. Concluiremos con el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para variedades riemannianas con frontera.

### 4.1. Pffafiano y curvatura

Consideremos  $V$  un espacio vectorial de dimensión par,  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal y  $A = (a_{ij})$  la matriz asociada a la transformación con respecto a la base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$ . Nuestro propósito es encontrar  $\det f = \det A$  en términos de todos los determinantes de las submatrices de  $2 \times 2$  de  $A$ . Definimos

$$D(i_1, i_2; j_1, j_2) = a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} \cdot a_{i_2 j_1},$$

si  $i_1 < i_2$  y  $j_1 < j_2$ ; entonces  $D(i_1, i_2; j_1, j_2)$  es el determinante de la submatriz de  $2 \times 2$  cuyos elementos pertenecen a los renglones  $i_1$  e  $i_2$  y a las columnas  $j_1$  y  $j_2$  de  $A$ . Ahora, la transformación lineal  $f$  nos da la aplicación  $f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(V)$  definida por

$$f^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T(f(v_1), \dots, f(v_k)) \quad \text{con} \quad T \in \Omega^k(V);$$

en particular, si  $n = k$  tenemos la aplicación  $f^* : \Omega^n(V) \rightarrow \Omega^n(V)$  y como  $\dim \Omega^n(V) = 1$ , la aplicación debe ser la multiplicación por una constante que es justo  $\det f$ , ver [10]. Como  $f^*$  satisface

$$f^*(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) = f^*(\phi_1) \wedge \dots \wedge f^*(\phi_n), \quad \text{para toda} \quad \phi_i \in \Omega^1(V).$$

en particular, si  $\phi_i$  es la base dual de la base  $v_i$ , entonces  $f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$  lo que implica  $f^*(\phi_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j$ . Usando que el producto cuña es asociativo llegamos a

$$\begin{aligned} f^*(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) &= [f^*(\phi_1) \wedge f^*(\phi_2)] \wedge [f^*(\phi_3) \wedge f^*(\phi_4)] \wedge \dots \\ &= \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} \phi_j \wedge \sum_{k=1}^n a_{2k} \phi_k \right) \wedge \left( \sum_{r=1}^n a_{3r} \phi_r \wedge \sum_{s=1}^n a_{4s} \phi_s \right) \wedge \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{j < k} [a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j}] \phi_j \wedge \phi_k \right) \wedge \left( \sum_{r < s} [a_{3r}a_{4s} - a_{3s}a_{4r}] \phi_r \wedge \phi_s \right) \wedge \cdots \\
&= \left( \frac{1}{2} \sum_{j,k} D(1, 2; j, k) \phi_j \wedge \phi_k \right) \wedge \left( \frac{1}{2} \sum_{r,s} D(3, 4; r, s) \phi_r \wedge \phi_s \right) \wedge \cdots
\end{aligned}$$

Así podemos ver que

$$\det f = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j_1, \dots, j_n} D(1, 2; j_1, j_2) \cdots D(n-1, n; j_{n-1}, j_n) \epsilon^{j_1 \cdots j_n},$$

donde

$$\epsilon^{j_1 \cdots j_n} \begin{cases} 1 & \text{si } j_1, \dots, j_n \text{ es una permutación par de } 1, \dots, n. \\ -1 & \text{si } j_1, \dots, j_n \text{ es una permutación impar de } 1, \dots, n. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También podemos escribir  $\det f$  como:

$$\det f = \frac{1}{2^{n/2} n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n}} D(i_1, i_2; j_1, j_2) \cdots D(i_{n-1}, i_n; j_{n-1}, j_n) \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n}.$$

Por un momento consideremos a  $M$  como una subvariedad de  $\tilde{M}$ , es decir,  $M \subset \tilde{M}$ .  $\tilde{\nabla}$  es la conexión de  $\tilde{M}$ , entonces la descomponemos como  $\tilde{\nabla}_X Y = (\tilde{\nabla}_X Y)^\top + (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$  y definimos la segunda forma fundamental de  $M$  por  $II(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$ , que es una aplicación que va de  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  en  $NorM$

Se puede demostrar que  $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y)$  para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , donde  $\nabla$  es la conexión sobre  $M$ . Esta fórmula es conocida como la **fórmula de Gauss**.

También se demuestra la **ecuación de Gauss**: Para  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  es:

$$\tilde{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle,$$

donde  $\tilde{R}(X, Y, Z, W)$  es el tensor de curvatura de  $\tilde{M}$ , ver más detalles en [7].

En la sección 1.2 definimos la curvatura de una superficie en un punto  $p$  como el determinante de la diferencial de la transformación de Gauss, esto es,  $K(p) = \det(dN_p)$ ; con un poco de más de trabajo se puede mostrar que esta fórmula también vale para variedades de dimensión  $n$  contenidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$ : en términos de una base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $M_p$ , tenemos

$$K(p) = \frac{1}{\det(\langle X_i, X_j \rangle)} \cdot \det(II(X_i, X_j)),$$

donde  $(II(X_i, X_j))$  es la matriz de la segunda forma fundamental de  $M$  y  $(\langle X_i, X_j \rangle)$  es la matriz de la métrica, con  $\langle X_i, X_j \rangle$  la métrica inducida por la inclusión en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

En nuestro caso  $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$  con la métrica usual, entonces  $\tilde{R}(X, Y, Z, W) = 0$  y por lo tanto

$$R(X, Y, Z, W) = \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

Si aplicamos la ecuación de Gauss a las submatrices de  $2 \times 2$  de la matriz  $(II(X_i, X_j))$ , vemos que

$$D(i_1, i_2; j_1, j_2) = \langle R(X_{i_2}, X_{i_1}) X_{j_1}, X_{j_2} \rangle.$$

Aplicando la fórmula de  $\det f$  a  $K(p)$  tenemos

$$K(p) = \frac{1}{2^{n/2}n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n}} \langle R(X_{i_2}, X_{i_1})X_{j_1}, X_{j_2} \rangle \cdots \langle R(X_{i_n}, X_{i_{n-1}})X_{j_{n-1}}, X_{j_n} \rangle \cdot \frac{\epsilon^{i_1 \cdots i_n}}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\epsilon^{j_1 \cdots j_n}}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Si tenemos un sistema de coordenadas  $X_1, \dots, X_n$  sobre  $M$  tal que  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , sabemos que

$$\langle R(X_{i_2}, X_{i_1})X_{j_1}, X_{j_2} \rangle = R_{j_2 j_1 i_2 i_1} = R_{i_1 i_2 j_1 j_2}.$$

Así expresamos a la curvatura en un punto  $p$  de una hipersuperficie como

$$K(p) = \frac{1}{2^{n/2}n!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n}} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cdots R_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n} \cdot \frac{\epsilon^{i_1 \cdots i_n}}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\epsilon^{j_1 \cdots j_n}}{\sqrt{\det(g_{ij})}}.$$

Por ejemplo, si tenemos una variedad de dimensión  $n = 2$  y  $X_1, X_2$  es un sistema de coordenadas ortonormal vemos que

$$K(p) = \frac{1}{2^1 \cdot 2!} (R_{1212} - R_{1221} - R_{2112} + R_{2121}) = R_{1212}.$$

Lo importante de la expresión anterior es que involucra las 2-formas de curvatura  $\Omega_j^i$  para un marco móvil ortonormal positivo  $\{X_1, \dots, X_n\}$  en  $M$ , esto es, escribimos la  $n$ -forma  $K_n dV$  (donde  $n$  indica que la variedad es de dimensión par, es decir,  $n = 2m$ ) como:

$$\begin{aligned} & \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(X_1, \dots, X_n) = \\ & = \frac{(2 + \cdots + 2)!}{2! \cdots 2!} \frac{1}{n!} \sum_{j_1, \dots, j_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} \Omega_{i_2}^{i_1}(X_{j_1}, X_{j_2}) \cdots \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(X_{j_{n-1}}, X_{j_n}) \\ & = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j_1, \dots, j_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} \langle R(X_{j_1}, X_{j_2})X_{i_2}, X_{i_1} \rangle \cdots \langle R(X_{j_{n-1}}, X_{j_n})X_{i_n}, X_{i_{n-1}} \rangle \\ & = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{j_1, \dots, j_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \cdots R_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n}. \end{aligned}$$

De esta ecuación y la fórmula de la curvatura para hipersuperficies llegamos a

$$K_n = \frac{1}{2^{n/2}n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \cdot 2^{n/2} \cdot \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(X_1, \dots, X_n),$$

por lo tanto

$$K_n dV = \frac{1}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}.$$

Ésta es una expresión intrínseca ya que la  $n$ -forma  $K_n dV$  involucra las 2-formas de curvatura  $\Omega_j^i$  que pertenecen a la geometría intrínseca de la variedad. Pero conviene demostrar que su expresión no depende de la elección del marco móvil  $\{X_1, \dots, X_n\}$  y esto es un problema algebraico, que expondremos a continuación.

**Definición 4.1.1** Para una matriz  $A = (a_{ij})$  de  $n \times n$  con  $n = 2m$  par, se define el **Pfaffiano**  $Pf(A)$  de  $A$  por

$$Pf(A) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{n-1} i_n}.$$

Tenemos por ejemplo que  $Pf \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a$  y para una matriz antisimétrica  $(a_{ij})$  de  $4 \times 4$ ,  $Pf(a_{ij}) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$ .

**Proposición 4.1.1** Sea  $n = 2m$ , entonces para cualesquiera matrices  $A$  y  $B$  de  $n \times n$  se cumple que  $Pf(B^t A B) = (\det B) \cdot Pf(A)$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} 2^m m! Pf(B^t A B) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} \sum_{j_1, \dots, j_n} (b_{j_1 i_1} a_{j_1 j_2} b_{j_2 i_2}) \cdots (b_{j_{n-1} i_{n-1}} a_{j_{n-1} j_n} b_{j_n i_n}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \left( \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} b_{j_1 i_1} \cdots b_{j_n i_n} \right) \cdot a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{n-1} j_n} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} (\epsilon^{j_1 \dots j_n} \det B) \cdot a_{j_1 j_2} \cdots a_{j_{n-1} j_n} = 2^m m! \cdot (\det B) Pf(A). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Este resultado sigue siendo válido cuando las entradas de  $A$  y  $B$  son elementos de un álgebra conmutativa  $\mathfrak{a}$  sobre  $\mathbb{R}$ , como es el caso de la siguiente álgebra conmutativa sobre  $\mathbb{R}$ , bajo el producto cuña  $\wedge$ :

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R} \oplus \Omega^2(M_p) \oplus \Omega^4(M_p) \oplus \Omega^6(M_p) \oplus \cdots.$$

Así, si  $\Omega(p)$  es la matriz  $(\Omega_j^i(p))$  de las 2-formas de curvatura en  $p \in M$  podemos escribir  $Pf(\Omega(p))$  como:

$$Pf(\Omega(p)) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{i_1, \dots, i_n} \epsilon^{i_1, \dots, i_n} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(p).$$

Si  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} \cdot a$  es otro marco móvil ortonormal orientado positivamente con  $a(p) \in O(n)$ , entonces por la proposición 2.4.6 y la proposición anterior tenemos que

$$Pf(\Omega'(p)) = Pf(a^{-1}(p)\Omega(p)a(p)) = Pf(\Omega(p));$$

por lo tanto, vemos que  $Pf(\Omega)$  no depende del marco ortonormal elegido.

Consideremos el haz principal  $\varpi : SO(E) \rightarrow M$  de marcos ortonormales orientados positivos, con grupo  $SO(n)$  y con conexión de Ehresmann  $w$ . Recordemos que  $w$  es una 1-forma sobre  $SO(E)$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(n)$  y la forma de curvatura  $\Omega = Dw$  es una 2-forma sobre  $SO(E)$  con valores en  $\mathfrak{o}(n)$ . Entonces la  $n$ -forma  $2^m m! Pf(\Omega)$  está definida en  $SO(E)$  y se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.1.2** Existe una única  $n$ -forma  $\Lambda$  sobre  $M$  tal que

$$\varpi^*(\Lambda) = \sum \epsilon^{i_1 \dots i_n} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}} = 2^m m! Pf(\Omega).$$

**Demostración:** Dados  $X_1, \dots, X_n \in M_p$ , elegimos un marco  $u$  en la fibra  $\varpi^{-1}(p)$  y sean  $Y_1, \dots, Y_n \in SO(E)_u$  vectores tangentes tales que  $\varpi_* Y_i = X_i$ . Vemos que  $\Lambda$  debe satisfacer

$$\Lambda(X_1, \dots, X_n) = 2^m m! Pf(\Omega)(Y_1, \dots, Y_n)$$

lo cual prueba la unicidad. La existencia quedará probada una vez que demos demos que  $\Lambda$  está bien definida. Primero consideremos qué pasa cuando tomamos otros vectores tangentes  $Z_1, \dots, Z_n \in SO(E)_u$  tales que  $\varpi_* Z_i = X_i$ ; entonces  $\varpi_*(Y_i - Z_i) = 0$  lo cual implica que  $Y_i - Z_i$  son verticales. Pero  $\Omega(Y, Z) = 0$  si  $Y$  o  $Z$  son verticales; entonces

$$\begin{aligned} Pf(\Omega)(Y_1, \dots, Y_n) &= Pf(\Omega)(Z_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ &= Pf(\Omega)(Z_1, Z_2, Y_3, \dots, Y_n) = \dots = Pf(\Omega)(Z_1, Z_2, \dots, Z_n). \end{aligned}$$

Así,  $\Lambda$  no depende de la elección de  $Y_i$ . Supongamos que elegimos otro marco  $\bar{u} \in \varpi^{-1}(p)$ , se sigue que  $\bar{u} = R_A(u) = u \cdot A$  para alguna  $A \in SO(n)$  y podemos tomar  $\bar{Y}_i \in SO(E)_{\bar{u}}$  tal que  $\bar{Y}_i = (R_A)_* Y_i$ ; entonces

$$Pf(\Omega)(\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n) = Pf(\Omega)((R_A)_* Y_1, \dots, (R_A)_* Y_n) = Pf(R_A^* \Omega)(Y_1, \dots, Y_n);$$

por el inciso 1 de la proposición 3.10.1 y la proposición 2.4.6 llegamos a

$$Pf(R_A^* \Omega)(Y_1, \dots, Y_n) = Pf(A^{-1} \Omega A)(Y_1, \dots, Y_n) = Pf(\Omega)(Y_1, \dots, Y_n). \quad \spadesuit$$

**Proposición 4.1.3** *La única  $n$ -forma  $\Lambda$  sobre  $M$  de la proposición anterior es cerrada,  $d\Lambda = 0$ .*

**Demostración:** Dados  $X_1, \dots, X_{n+1} \in M_p$ , elegimos un marco  $u$  en la fibra  $\varpi^{-1}(p)$  y sean  $Y_1, \dots, Y_{n+1} \in SO(E)_u$  vectores tangentes tales que  $\varpi_* Y_i = X_i$ . Sea  $hY_i$  la componente horizontal de  $Y_i$ , entonces

$$\begin{aligned} d\Lambda(X_1, \dots, X_{n+1}) &= d\Lambda(\varpi_* Y_1, \dots, \varpi_* Y_{n+1}) = d\Lambda(\varpi_* hY_1, \dots, \varpi_* hY_{n+1}) \\ &= (\varpi^* d\Lambda)(hY_1, \dots, hY_{n+1}) = d(\varpi^* \Lambda)(hY_1, \dots, hY_{n+1}) \\ &= 2^m m! d\{Pf(\Omega)\}(hY_1, \dots, hY_{n+1}) = 2^m m! D\{Pf(\Omega)\}(Y_1, \dots, Y_{n+1}). \end{aligned}$$

Utilizando la **segunda identidad de Bianchi**:  $D\Omega = 0$ , que se obtiene aplicando el operador  $d$  a la segunda ecuación estructural  $dw = -w \wedge w + \Omega$ , es decir,  $0 = -(dw \wedge w) + (w \wedge dw) + d\Omega$ . Y usando que  $w(hA) = 0$  para toda  $A \in SO(n)_u$  para obtener

$$D\Omega(X, Y, Z) = d\Omega(hX, hY, hZ) = dw \wedge w(hX, hY, hZ) - w \wedge dw(hX, hY, hZ) = 0,$$

por tanto  $D\{Pf(\Omega)\} = 0$ .  $\spadesuit$

Esta proposición implica que la  $n$ -forma  $\Lambda$  determina una clase de cohomología  $[\Lambda] \in H^n(M)$  y aunque en la definición de  $\Lambda$  interviene la conexión y la métrica, su clase  $[\Lambda] \in H^n(M)$  resulta ser independiente de ambas, ver demostración en [2].

**Proposición 4.1.4** *La clase de cohomología  $[\Lambda]$  es independiente de la métrica  $\langle -, - \rangle$  y de la conexión  $w$ .  $\spadesuit$*

Por lo tanto, cualquier haz suave orientado  $\xi : E \rightarrow M$  sobre  $M$  de fibra de dimensión par  $n$  determina una clase de cohomología  $C(\xi) = [\Lambda] \in H^n(M)$ .

**Teorema 4.1.1** *Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial suave orientado sobre una variedad  $M$ , cuya fibra tiene dimensión par  $n$  y sea  $f : M' \rightarrow M$  una aplicación suave, donde la dimensión de  $M$  y  $M'$  es la misma; entonces*

$$C(f^*\xi) = f^*(C(\xi)) \in H^n(M').$$

**Demostración:** Sea  $E'$  el espacio total de  $f^*\xi$  y sea  $\tilde{f} : E' \rightarrow E$  la aplicación de haces. Si  $\langle -, - \rangle$  es una métrica en  $E$ , entonces  $\tilde{f}^*\langle -, - \rangle$  es una métrica para el haz  $f^*\xi$  en  $E'$ . Tenemos que existe una equivalencia  $\bar{f} : SO(E') \rightarrow SO(E)$  de tal manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} SO(E') & \xrightarrow{\bar{f}} & SO(E) \\ \varpi' \downarrow & & \downarrow \varpi \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Si  $w$  es una conexión para  $SO(E)$ , entonces  $\bar{f}^*(w)$  es una conexión para  $SO(E')$  y las correspondientes formas de conexión satisfacen  $\Omega' = \bar{f}^*\Omega$ ; por lo tanto  $Pf(\Omega') = Pf(\bar{f}^*\Omega) = \bar{f}^*Pf(\Omega)$ . Para la  $n$ -forma  $\Lambda$  sobre  $M$  dada por la proposición 4.1.2 tenemos

$$\varpi'^* f^*(\Lambda) = \bar{f}^* \varpi^*(\Lambda) = 2^m m! \bar{f}^* Pf(\Omega) = 2^m m! Pf(\Omega')$$

Así,  $f^*\Lambda$  debe ser la única  $n$ -forma  $\Lambda'$  sobre  $M'$  mencionada en la proposición 4.1.2. ♠

Esta clase cumple:  $C(\xi_1 \oplus \xi_2) = \frac{(m_1+m_2)!}{m_1!m_2!} C(\xi_1) \smile C(\xi_2)$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son las dimensiones de las fibras de los haces  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , respectivamente, y  $n_i = 2m_i$ . Para  $n_1$  o  $n_2$  impar tenemos que  $C(\xi_1 \oplus \xi_2) = 0$ . Ver [2].

**Lema 4.1.1** *Si el haz orientado  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  tiene una sección  $s$  que nunca se anula, entonces  $C(\xi) = 0$ .*

**Demostración:** Sea  $E_1 \subset E$  tal que  $E_1 = \bigcup_{p \in M} \mathbb{R} \cdot s(p)$  y sea  $E_2 \subset M$  su complemento ortogonal  $\bigcup_{p \in M} (\mathbb{R} \cdot s(p))^\perp$  con respecto a la métrica riemanniana de  $E$ .

Entonces  $\xi_1 = \pi|_{E_1} : E_1 \rightarrow M$  es un haz 1-dimensional orientado y como  $\xi_2 = \pi|_{E_2} : E_2 \rightarrow M$  también es un haz orientado ya que  $\xi$  era orientado, vemos que  $\xi \simeq \xi_1 \oplus \xi_2$  y por el comentario anterior,  $C(\xi) = 0$ . ♠

**Corolario 4.1.1** *Si  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  es un haz vectorial suave orientado con fibra de dimensión par  $n$  sobre una variedad compacta orientada  $M$ , entonces la clase  $C(\xi) \in H^n(M)$  es un múltiplo de la clase de Euler.*

**Demostración:** Sea  $S$  el haz de esferas correspondiente a alguna métrica riemanniana en  $E$ , sea  $\pi_0 : S \rightarrow M$  la restricción de  $\pi$  a  $S$ . El haz  $\pi_0^*\xi$  tiene un sección que no se anula: por construcción para cada  $e \in S$  la fibra de  $\pi_0^*\xi$  sobre  $e$  es

$$\{e\} \times \pi^{-1}(\pi_0(e)) = \{e\} \times \pi^{-1}(\pi(e)).$$

Definimos la sección  $s$  de  $\pi_0^*\xi$  como  $s(e) = (e, e) \in \{e\} \times \pi^{-1}(\pi(e))$ . Entonces  $s(e) \neq (e, 0) = 0$  que es un elemento de la fibra  $\pi_0^*\xi$  sobre  $e$ .

Por lo tanto, el haz  $\pi_0^*\xi$  tiene un sección que no se anula, Entonces por el lema 4.1.1 y el teorema 4.1.1 tenemos que  $0 = C(\pi_0^*\xi) = \pi_0^*C(\xi)$ . Por el lema 3.9.3  $C(\xi)$  es un múltiplo de la clase de Euler. ♠

Aplicando este resultado al haz tangente  $\xi = \pi : TM \rightarrow M$  de una variedad riemanniana, compacta y orientada de dimensión par, encontramos que  $C(TM) \in H^n(M)$  es algún múltiplo de la clase de Euler  $\chi(TM)$ .

Otro caso interesante es cuando aplicamos esto al haz universal  $\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ .

**Corolario 4.1.2** *Sea  $\xi$  un haz vectorial de dimensión  $n$  sobre una variedad compacta y orientada  $M$ . Si  $n$  es un número par, existe una “constante universal”  $\mathbf{A}_n$  tal que*

$$C(\xi) = \mathbf{A}_n \cdot \chi(\xi).$$

**Demostración:** Sea el haz  $\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ ,  $n < N$ . Por el lema 4.1.1 hay una constante  $\mathbf{A}_{n,N}$  tal que  $C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \mathbf{A}_{n,N} \cdot \chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \in H^n(\tilde{G}_n(\mathbb{R}^N))$ .

Si  $N < M$  y  $\alpha : \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N) \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^M)$  es la inclusión natural, entonces  $\alpha^*\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^M) \simeq \tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$ ; por la proposición 3.9.1 y el teorema 4.1.1 vemos

$$\chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \alpha^*\chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^M)), \quad C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \alpha^*C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^M)).$$

Por lo tanto  $\mathbf{A}_{n,N} \cdot \chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \mathbf{A}_{n,M} \cdot \chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^M))$  y como  $\chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) \neq 0$  por el lema 3.9.2 tenemos que  $\mathbf{A}_{n,N} = \mathbf{A}_{n,M}$  para toda  $n < N, M$ . Denotaremos por  $\mathbf{A}_n$  al número en común, es decir,  $C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \mathbf{A}_n \cdot \chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$ .

Ahora por el teorema 3.8.1 cualquier haz  $\xi$  suave orientado de dimensión  $n$  sobre una variedad  $M$  es equivalente a  $f^*\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)$  con  $f : M \rightarrow \tilde{G}_n(\mathbb{R}^N)$  una aplicación continua adecuada. Utilizando la proposición 4.1.1, tenemos

$$C(\xi) = C(f^*\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = f^*C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N));$$

sustituyendo lo que vale  $C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N))$  y usando el teorema 3.9.1, obtenemos

$$f^*C(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \mathbf{A}_n \cdot f^*\chi(\tilde{\gamma}^n(\mathbb{R}^N)) = \mathbf{A}_n \cdot \chi(\xi).$$

Por lo tanto  $C(\xi) = \mathbf{A}_n \cdot \chi(\xi)$ . ♠

## 4.2. Teorema de Gauss-Bonnet-Chern

Antes de enunciar el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern daremos la fórmula para calcular el volumen  $V_n$  de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ :

$$V_n = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdots n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Si  $vol(S^{n-1})$  denota el elemento de volumen de  $S^{n-1}$ , entonces la relación que guarda  $V_n$  y  $vol(S^{n-1})$  es  $nV_n = vol(S^{n-1})$ .

**Teorema 4.2.1 (Teorema de Gauss-Bonnet-Chern)** Para un número par,  $n = 2m$ , la constante universal  $\mathbf{A}_n$  es

$$\mathbf{A}_n = \frac{n!}{2} \cdot \text{vol}(S^n) = \frac{n! \pi^m 2^{n+1} m!}{2 n!} = \pi^m 2^n m!;$$

consecuentemente, si  $M$  es una variedad riemanniana, compacta, orientada y de dimensión  $n$ , entonces

$$\int_M K_n dV = \frac{1}{2} \text{vol}(S^n) \cdot \chi(M) = \frac{\pi^m 2^n m!}{n!} \cdot \chi(M).$$

**Demostración:** Consideremos  $\varpi^*(\Lambda) = 2^m m! Pf(\Omega)$ , la  $n$ -forma dada en la proposición 4.1.2. Para el haz  $SO(\xi) = SO(TM)$ , la  $n$ -forma es  $\Lambda = n! K_n dV$ .

Entonces, si multiplicamos la clase fundamental  $\mu$  por la integral de  $K_n dV$ , recordando el isomorfismo de la proposición 3.1.1 y aplicando el corolario 4.1.1 tenemos

$$\left( \int_M K_n dV \right) \cdot \mu = \frac{1}{n!} \left( \int_M \Lambda \right) \cdot \mu = \frac{1}{n!} C(\xi) = \frac{1}{n!} \mathbf{A}_n \cdot \chi(\xi).$$

Por el Teorema de Poincaré-Hopf, llegamos a

$$\left( \int_M K_n dV \right) \cdot \mu = \frac{1}{n!} \mathbf{A}_n \chi(M) \cdot \mu.$$

Por lo tanto,

$$\int_M K_n dV = \frac{1}{n!} \mathbf{A}_n \chi(M).$$

De esta fórmula, tomando  $M = S^n$ , con curvatura  $K_n = 1$  y usando el hecho que  $\chi(S^n) = 2$ , obtenemos

$$\text{vol}(S^n) = \frac{1}{n!} \mathbf{A}_n \chi(S^n) = \frac{2 \mathbf{A}_n}{n!},$$

entonces

$$\mathbf{A}_n = \frac{n! \pi^m 2^{n+1} m!}{2 n!} = \pi^m m! 2^n.$$

Por lo tanto

$$\int_M K_n dV = \frac{1}{2} \text{vol}(S^n) \cdot \chi(M) = \frac{\pi^m 2^n m!}{n!} \cdot \chi(M). \quad \spadesuit$$

Por último, demostraremos el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para variedades riemannianas con frontera. Antes mencionaremos algunos preliminares.

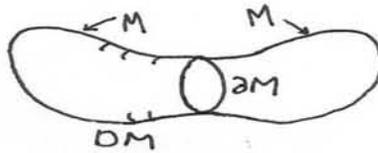


Figura 4.1: doble de una variedad con frontera

**Definición 4.2.1** Sea  $M$  una variedad con frontera, orientada, compacta y de dimensión  $n$ ; definimos el **doble** de  $M$ , denotado por  $DM$ , tomando dos copias de  $M$  e identificando los puntos de su frontera  $\partial M$ .

**Proposición 4.2.1** La característica de Euler de  $DM$  está dada por  $\chi(DM) = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$ .

**Demostración:** Sean  $U$  y  $V$  vecindades abiertas de las dos copias de  $M$  en  $DM$  tales que  $H^k(U) \approx H^k(V) \approx H^k(M)$  y  $H^k(U \cap V) \approx H^k(\partial M)$  para toda  $k$ , entonces por Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H^k(DM) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(DM) \rightarrow \cdots$$

Usando que la suma alternada de la dimensiones de los grupos de cohomología es cero, obtenemos el resultado. ♠

De aquí que si la dimensión de la variedad es impar,  $\chi(DM) = 0$ , por lo que  $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$ . Para una variedad de dimensión par tenemos que  $\chi(\partial M) = 0$ ; por lo tanto  $\chi(DM) = 2\chi(M)$ .

Nuestro siguiente resultado nos dice cuál es la suma de los índices de un campo en  $DM$ , ver demostración en [2].

**Corolario 4.2.1** Sea  $M$  una variedad compacta de dimensión par con frontera. Sea  $X$  un campo de vectores sobre  $M$  con un número finito de ceros en  $M - \partial M$ , tal que  $X$  apunta hacia afuera en la frontera. Entonces la suma de los índices de  $X$  es  $\chi(M)$ . ♠

Sea  $\xi = \pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial en el que elegimos una métrica y  $\pi|_S = \pi_0 : S \rightarrow M$  el haz de esferas asociado; como la clase  $[\Lambda] = C(\xi)$  es un múltiplo de la clase de Euler, por el corolario 4.1.1 tenemos que  $\pi_0^*C(\xi) = 0$  lo que implica que la  $n$ -forma  $\pi_0^*\Lambda$  es exacta sobre  $S$  y por lo tanto  $\pi_0^*\Lambda = d\phi$  para alguna  $(n-1)$ -forma  $\phi$  sobre  $S$ .

Cuando  $\xi = TM$  y  $X$  es un campo vectorial unitario sobre  $M$  con un solo punto singular  $p \in M$ , tomemos  $B(\epsilon)$  una bola cerrada de radio  $\epsilon$  alrededor de  $p$  y consideramos el conjunto  $M_\epsilon = M - \text{int}B(\epsilon)$ ; en  $M_\epsilon$  tenemos la sección que nunca se anula  $X : M - \{p\} \rightarrow S$ , se muestra que  $X(M_\epsilon) \subset S$  es una variedad con frontera y entonces calculamos

$$\begin{aligned} \int_M \Lambda &= \int_{M-\{p\}} \Lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M_\epsilon} \Lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M_\epsilon} X^* \pi^* \Lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{X(M_\epsilon)} \pi^* \Lambda \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{X(M_\epsilon)} d\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial X(M_\epsilon)} \phi \end{aligned}$$

Como  $\partial X(M_\epsilon)$  cubre a  $\pi_0^{-1}(p)$  tantas veces como el índice de  $X$ , llegamos a

$$\int_M \Lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial X(M_\epsilon)} \phi = (\text{índice de } X \text{ en } p) \cdot \int_{\pi_0^{-1}(p)} \phi = \chi(M) \cdot \int_{\pi_0^{-1}(p)} \phi.$$

Para  $n = 2m$  el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern nos dice que

$$\int_M \Lambda = \int_M n! K_n dV = \pi^m m! 2^n \chi(M)$$

y por lo tanto

$$\int_{\pi_0^{-1}(p)} \phi = \pi^m m! 2^n.$$

**Teorema 4.2.2 (Teorema de Gauss-Bonnet-Chern para variedades con frontera)** Sea  $M$  una variedad riemanniana de dimensión  $n = 2m$ , compacta, orientada y con frontera  $\partial M$ . Con haz tangente  $\xi = \pi : TM \rightarrow M$  y haz de esferas asociado  $\pi_0 = \pi|_S : S \rightarrow M$ . Sea  $w$  una conexión de de Ehresmann sobre el haz principal  $\varpi : SO(TM) \rightarrow M$ , con forma de curvatura  $\Omega$ . Sea  $\Lambda$  la única  $n$ -forma sobre  $M$  tal que

$$\varpi^*(\Lambda) = \sum \epsilon^{i_1 \dots i_n} \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}} = 2^m m! Pf(\Omega).$$

Finalmente, sean  $\phi$  la  $(n-1)$ -forma sobre  $S$  tal que  $\pi_0^* \Lambda = d\phi$  y  $\nu : \partial M \rightarrow S$  un campo vectorial normal unitario que apunta hacia afuera a lo largo de  $\partial M$ . Entonces

$$\int_M K_n dV = \frac{1}{n!} \int_M \Lambda = \frac{\pi^m 2^n m!}{n!} \chi(M) + \frac{1}{n!} \int_{\partial M} \nu^* \phi.$$

**Demostración:** Extendemos  $\nu$  a un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  con sólo un número finito de ceros  $p_1, \dots, p_k \in M - \partial M$ . Sean  $B_i(\epsilon)$  bolas cerradas disjuntas de radio  $\epsilon$  y centro en  $p_i$ , tomemos  $M_\epsilon = M - \cup_{i=1}^k \text{int} B_i(\epsilon)$ . Como acabamos de obtener la primera igualdad

$$\begin{aligned} \int_M \Lambda &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial X(M_\epsilon)} \phi = \int_{\nu(\partial M)} \phi + \sum_{i=1}^k \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_i(\epsilon)} \phi \\ &= \int_{\partial M} \nu^* \phi + \sum_{i=1}^k \pi^m m! 2^n \cdot (\text{índice de } X \text{ en } p_i), \end{aligned}$$

usamos el corolario 4.2.1 y dividimos entre  $\frac{1}{n!}$ , concluyendo que

$$\int_M \Lambda = \int_{\partial M} \nu^* \phi + \pi^m m! 2^n \cdot \chi(M). \quad \spadesuit$$

# Bibliografía

- [1] Chern, S. S. *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. Annals of Mathematics, Vol.45, 1944.
- [2] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Vol. I-V, 1975-1979.
- [3] Spivak, M. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
- [4] Do Carmo, M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [5] Do Carmo, M.P. *Riemannian Geometry*. Impa, 1979.
- [6] O'Neill, B. *Elementos de Geometría Diferencial*. Limusa-Wiley, 1972
- [7] Lee, M. J. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.
- [8] Madsen, I., Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, 1977.
- [9] Armstrong, M. A. *Topología Básica*. Editorial Reverté, S. A. 1987.
- [10] Guillemin, V., Pollack, A. *Differential Topology*. Prentice Hall, 1975.
- [11] Hicks, J. N. *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand Reinhold, 1971.
- [12] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag 1983.
- [13] Aguilar, M., Gitler, S., Prieto, C. *Topología algebraica, un enfoque homotópico*. McGraw-Hill, 1998.
- [14] Uribe, J. A. *El Teorema de Chern-Gauss-Bonnet*. Tesis de Licenciatura, UNAM, 1978.
- [15] Reyes, R. *Curvatura, Construcción y Algunos Resultados*. Tesis de Licenciatura, UNAM, 1990.