



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELADO Y SIMULACIÓN ANALÓGICA  
DE SISTEMAS DINÁMICOS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO EN ELECTRÓNICA**

**PRESENTA**

**JORGE HUGO SORIA SÁNCHEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
M. en I. MIGUEL ÁNGEL BAÑUELOS SAUCEDO**

**LABORATORIO DE ELECTRÓNICA  
CCADET**

**MÉXICO, D.F.**

**2006**





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
OBJETIVOS.....	3
I. LAS SEÑALES Y LOS SISTEMAS.....	4
I.1. LAS SEÑALES. ....	4
I.1.1. TIPOS DE SEÑALES.....	5
I.2. LOS SISTEMAS.....	15
I.2.1. TIPOS DE SISTEMAS.....	15
I.2.2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS.....	16
II. MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS LTI.....	20
II.1. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS.....	21
II.2. EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS FÍSICOS.....	22
II.3. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.....	23
III. TEORÍA DE CONTROL.....	28
III.1. LOS SISTEMAS DE CONTROL.....	28
III.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.....	29
III.3. LA APLICACIÓN DE LAS SEÑALES A LOS SISTEMAS.....	31
III.4. RESPUESTA IMPULSO.....	31
III.5. DIAGRAMA DE BLOQUES. ....	32
III.6. SISTEMAS EN LAZO CERRADO... ..	33
III.7. SISTEMAS EN LAZO ABIERTO.....	33
III.8. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO ABIERTO Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA TRAYECTORIA DIRECTA.....	35
III.9. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO CERRADO.....	37
III.10. REALIMENTACIÓN POSITIVA Y NEGATIVA.....	40
III.11. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA.....	40

III.12. RESPUESTA TRANSITORIA Y RESPUESTA EN ESTADO ESTABLE.....	41
III.13. ESTABILIDAD ABSOLUTA, ESTABILIDAD RELATIVA Y ERROR EN ESTADO ESTABLE.....	43
III.14. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Y SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.....	43
III.14.1. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN.....	44
III.14.2. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.....	47
III.15. LA RESPUESTA TRANSITORIA.....	52
III.15.1. DEFINICIONES DE LAS ESPECIFICACIONES DE RESPUESTA TRANSITORIA.....	52
III.15.2. ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA.....	54
IV. ESTUDIO DE LA PLANTA DE SEGUNDO ORDEN.....	64
IV.1. SELECCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO A ESTUDIAR....	64
IV.2. EL FACTOR DE CALIDAD Q.....	66
IV.3. CARACTERÍSTICAS DE UN FILTRO PASO-BAJAS.....	67
IV.3.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA UN FILTRO PASO-BAJAS TIPO SALLEN-KEY.....	68
IV.4. CARACTERIZACIÓN DE LA PLANTA POR UTILIZAR.....	71
IV.5. PARÁMETROS DE DISEÑO DEL SISTEMA EN ESTUDIO.....	72
IV.6. ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA EN ESTUDIO.....	77
IV.7. ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA PARA EL SISTEMA EN ESTUDIO.....	79
IV.8. ANÁLISIS DEL SISTEMA MEDIANTE MATLAB.....	81
IV.9. RESPUESTA EXPERIMENTAL DE LA PLANTA FÍSICA.....	82

V. ESTUDIO DEL CONTROLADOR PID.....	86
V.1. DESARROLLO DEL CONTROLADOR CORRESPONDIENTE A LA PLANTA EN SELECCIONADA.....	86
V.2. INTRODUCCIÓN A LOS CONTROLADORES.....	86
V.3. ACCIONES DE CONTROL DE UN CONTROLADOR PID.....	88
V.4. EL CONTROLADOR PID.....	90
V.5. ERRORES EN ESTADO ESTABLE PARA LOS SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN UNITARIA. ....	91
V.6. EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL COMO BLOQUE CONSTITUTIVO DE UN CONTROLADOR ANALÓGICO.....	95
V.7. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA DE UN CONTROLADOR PID.....	103
V.8. SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR PID.....	112
V.9. SINTONIZACIÓN FINA DEL CONTROLADOR PID.....	121
V.10. CONSIDERACIONES DE FRECUENCIA EN LA OPERACIÓN DEL CONTROLADOR PID.....	123
V.11. ASIGNACIÓN DE LOS VALORES DE RESISTENCIAS Y CAPACITORES NECESARIOS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS KP, TI Y TD DEL CONTROLADOR PID.....	127
V.12. ASIGNACIÓN DE LOS VALORES DE RESISTENCIAS Y CAPACITORES NECESARIOS PARA LA OBTENCIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE CORTE DE LOS BLOQUES DEL CONTROLADOR PID.....	128
V. 13. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA DEL CONTROLADOR.....	130
RESULTADOS.....	142
CONCLUSIONES.....	144
BIBLIOGRAFÍA.....	145

## INTRODUCCIÓN.

El estudio de los sistemas dinámicos tiene por objeto desarrollar un modelo que represente a un determinado fenómeno en estudio. Dicha representación permite observar el comportamiento del modelo respecto a una entrada definida. El resultado anterior permite en consecuencia desarrollar un controlador aplicable al modelo con objeto de obtener una respuesta predeterminada.

Los modelos para describir los sistemas físicos pueden ser analíticos y físicos. Los primeros ofrecen la ventaja de ser entidades abstractas cuyo análisis implica la utilización de herramientas matemáticas y programas computacionales sin necesidad de experimentación física. En contraste los modelos físicos implican el uso de elementos materiales que simulan el comportamiento del sistema en estudio. Idealmente los resultados obtenidos mediante el análisis teórico de un modelo deben corresponder exactamente a los obtenidos al utilizar una implementación física del mismo modelo.

Usualmente, para un sistema específico, se desconoce el grado de correspondencia entre la respuesta obtenida mediante el uso de un modelo teórico del sistema y la respuesta obtenida mediante el uso de una implementación física del mismo.

Existe vasta literatura referente al análisis de los sistemas, el desarrollo de los modelos correspondientes a los anteriores, la caracterización del comportamiento de dichos modelos así como para el diseño de los controladores aplicables. La información bibliográfica usualmente consultada por el individuo principiante en la teoría de control presenta ejemplos aislados sin presentar un estudio de caso completo para el cual se apliquen las técnicas correspondientes al diseño, estudio e implementación física de un modelo matemático, su respuesta y el controlador correspondiente. Es dentro del contexto anterior que la presente propuesta de tesis pretende integrar las técnicas arriba descritas y enfocarlas hacia un caso particular además de aspirar a convertirse en una guía didáctica referente a los temas expuestos.

La presente tesis abordará el estudio, diseño e implementación de una planta de segundo orden así como la descripción e interpretación de la teoría básica de control necesaria para desarrollar el controlador analógico respectivo.

El modelado de sistemas dinámicos, su estudio y el desarrollo de los controladores asociados es aplicable a multitud de problemas de diversas disciplinas. En el ámbito de los sistemas lineales generalmente se utilizan simplificaciones que arrojan modelos que incluyen sistemas de primer orden, sistemas de segundo orden o una combinación de ambos. La presente propuesta aborda los sistemas de segundo orden dado su carácter de bloque constitutivo de sistemas más complejos.

Los problemas de ingeniería comúnmente implican el estudio del comportamiento de un sistema dada la aplicación de una entrada. Dicho estudio tiene por objeto conocer “a priori” la forma en la cual un sistema particular responderá durante su operación dentro de un medio particular. Así mismo es de interés aplicar las técnicas pertinentes para forzar la respuesta del sistema hacia un comportamiento deseado. El procedimiento anterior implica la aplicación de la teoría de análisis de sistemas dinámicos así como la teoría de control. En la presente propuesta de tesis se abordará el proceso anterior

enfocándose a los sistemas de segundo orden que forman un bloque esencial en el estudio de los sistemas dinámicos lineales.

Se abordará tanto la descripción de los conceptos teóricos necesarios para el estudio analítico de los sistemas dinámicos como las técnicas aplicables para la implementación física de los modelos correspondientes a los sistemas en estudio. Consecuentemente se intentará realizar una integración entre los conocimientos teóricos y la experimentación física para un estudio de caso proporcionando una visión integral del proceso de análisis, diseño e implementación del modelo correspondiente a un sistema dinámico particular. Dicho procedimiento es a la vez extensivo a diferentes casos por lo cual se intentará conformar una guía práctica para la aplicación de los conceptos correspondientes al análisis de sistemas dinámicos y al diseño del controlador analógico respectivo.

El método a utilizar en la presente propuesta de tesis corresponderá a un método deductivo, partiendo de lo general a lo particular, involucrando los siguientes pasos.

De manera inicial se presentarán los conceptos teóricos necesarios para abordar los temas de análisis de sistemas. Después se procederá con el estudio matemático general de la dinámica de un sistema de segundo orden. Posteriormente se definirán las características de un sistema específico lo cual permitirá la simulación por computadora del sistema seleccionado. Como paso siguiente se procederá a la implementación del sistema de segundo orden mediante un circuito electrónico. Paso siguiente se efectuará una comparación entre los resultados obtenidos teórica y experimentalmente. Una vez concluido el paso anterior se iniciará el estudio matemático del controlador PID a utilizar así como de un método para su implementación electrónica. Finalmente se estudiará la relación entre las respuestas tanto teóricas como experimentales del sistema planta-controlador para concluir respecto a los resultados obtenidos del análisis, diseño e implementación aplicables a un sistema de segundo orden general.

Nota sobre el formato del documento:

Es importante resaltar que a lo largo del presente trabajo se encontrarán escritas múltiples ecuaciones de forma repetida en vez de hacer referencias únicas a las mismas. Dicha situación es intencional con miras a reforzar la familiarización con tales ecuaciones y evitar la bochornosa actividad de recorrer páginas para consultar la información.

## **OBJETIVOS.**

-Integrar una guía para la aplicación, tanto analítica como práctica, de los conceptos concernientes a la dinámica de los sistemas físicos y la teoría de control para los sistemas de segundo orden mediante el uso de un caso de estudio.

-Estudiar la correspondencia entre los resultados obtenidos mediante la utilización de un modelo teórico y un modelo físico experimental para un sistema de segundo orden y su controlador PID paralelo correspondiente.



## I. LAS SEÑALES Y LOS SISTEMAS.

### I.1. LAS SEÑALES.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Acorde con lo anterior, previo a cualquier estudio de un sistema o su control, es necesario presentar el concepto de “señal”.

Las señales contienen información acerca del comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno.

Para los fines del presente trabajo nos interesarán exclusivamente las señales que describen fenómenos físicos. Aunque dichas señales pueden representarse de muchas formas, en todos los casos la información en una señal está contenida en un patrón de variaciones, usualmente respecto al tiempo, que presenta alguna forma determinada. Como ejemplos de lo anterior se encuentran el voltaje, la corriente, la posición, la velocidad, la presión, la temperatura etc. señales todas con comportamientos observables a través del tiempo.

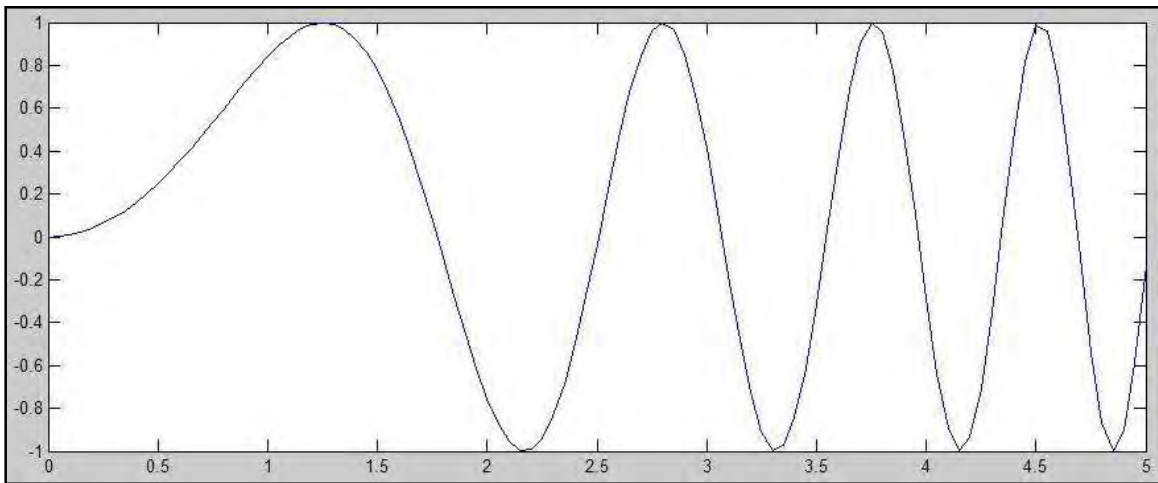


Figura 1. Señal a través del tiempo.

Pero ¿cuál es la justificación para estudiar las señales? La intención de diseñar un controlador para un sistema dado comienza con la definición de las variables por monitorear, en otras palabras se necesita encontrar cuáles señales son las de interés. Si por ejemplo la intención fuese diseñar un sistema de orientación para una aeronave es necesario elegir la variable o “señal” a utilizar pues se podría seleccionar la medición ya sea del campo magnético terrestre, de la dirección de los vientos, de la altura, de la temperatura atmosférica, de la intensidad luminosa de una estrella, del ángulo de la estructura del avión respecto al horizonte y muchas otras posibilidades solo limitadas por la imaginación del diseñador. Así pues si se prefiere por ejemplo la medición de la intensidad luminosa de una estrella se continua entonces con la caracterización de la

señal para definir sus rangos de variación, su aproximación matemática y demás parámetros que ayudarán a conocer el comportamiento del sistema al cual se aplicará la misma si es el caso de que el sistema ya existe. Dicha caracterización auxiliará de igual manera al diseño del sistema y su controlador en caso de no existir. Debe entenderse que la selección de una variable no es forzosamente individual pues se pueden utilizar más de una señales.

Las señales se representan matemáticamente como funciones con una o más variables independientes. La utilización del equivalente matemático de la señal es de mucha utilidad práctica pues de ese modo no se necesita “experimentar” con la señal real sino que se la puede manipular sin necesidad de construir un modelo físico. Para el ejemplo anterior en donde se decidió medir la intensidad luminosa de una estrella después de caracterizar dicha señal tendremos un modelo matemático para simular su comportamiento sin necesitar las mediciones “reales” de la estrella a utilizar. La representación matemática de la señal se vuelve aún más importante si se observa que los sistemas y controladores tienen a su vez la correspondiente representación matemática facilitando enormemente el trabajo de análisis y diseño del sistema completo pues es posible trabajar con entidades matemáticas “en el papel” en vez de construir un simulador del sistema que provocaría iteraciones y rediseños costosos e tardados.

Entendido el concepto de señal y la importancia de su representación matemática, durante el remanente de esta sección se presentarán algunas de las señales más comúnmente empleadas en el diseño, prueba y análisis de los sistemas físicos. El mismo formato también se aplicará en la sección siguiente que concierne a los “sistemas”.

### **I.1.1. TIPOS DE SEÑALES.**

Existen múltiples clasificaciones para las señales pero dada la naturaleza del trabajo de tesis se presentan los siguientes tipos considerados de interés para la caracterización de un sistema y el diseño de un controlador.

#### **-Señales continuas y discretas.**

Para las señales continuas la variable independiente se define para una sucesión continua de valores.

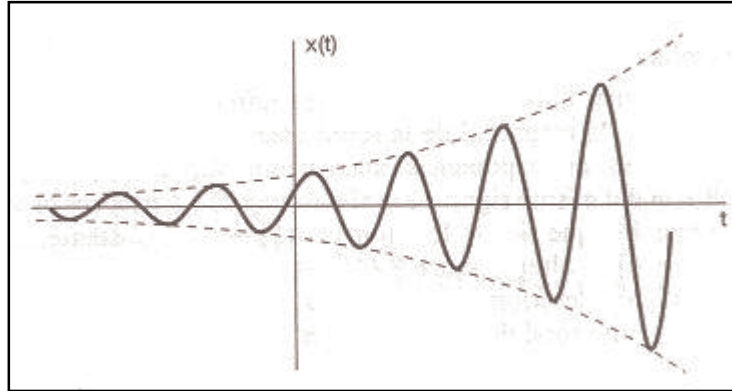


Figura 2. Señal continua.

Por otra parte, para las señales discretas la variable independiente toma solamente un conjunto discreto de valores.

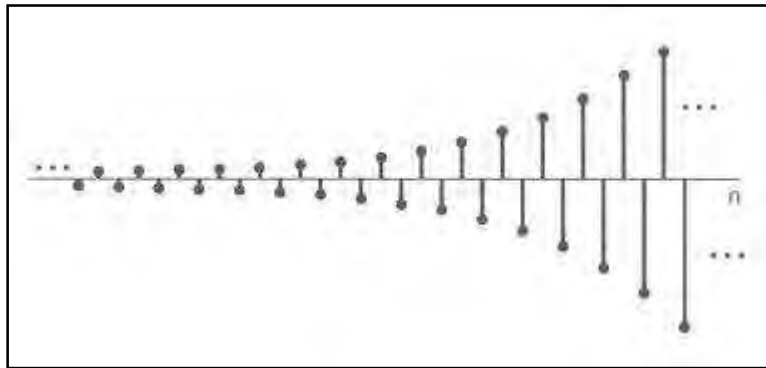


Figura 3. Señal discreta.

**-Señales periódicas y aperiódicas.**

Una señal periódica continua  $x(t)$  tiene un valor positivo  $T$  para el cual

$$x(t) = x(t + T)$$

para todos los valores de  $t$ . En otras palabras, una señal periódica tiene la propiedad de que no cambia para un corrimiento de tiempo  $T$ . Se dice entonces que  $x(t)$  es periódica con periodo  $T$ . Una señal  $x(t)$  que es no periódica se conoce como una señal aperiódica.

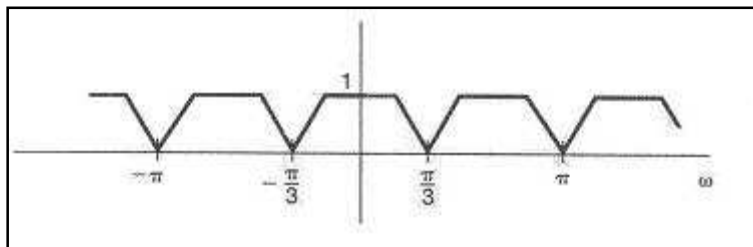


Figura 4. Señal periódica.

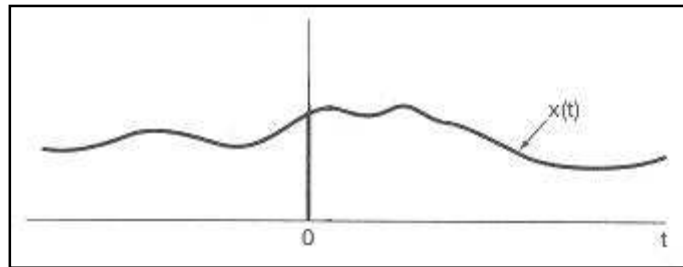


Figura 5. Señal aperiódica.

### -Señales exponenciales y senoidales.

Las señales exponenciales y senoidales no sólo se utilizan con frecuencia para describir fenómenos físicos sino que también sirven para construir muchas otras señales.

Una señal continua exponencial compleja es de la forma

$$x(t) = C e^{at},$$

donde  $C$  y  $a$  son, en general, números complejos. Dependiendo de estos parámetros, la exponencial compleja puede adoptar varias características diferentes.

-Señales exponenciales reales. Si  $C$  y  $a$  son reales existen dos tipos de comportamiento. Si  $a$  es positiva, entonces conforme  $t$  se incrementa  $x(t)$  es una exponencial creciente, una forma que se utiliza para describir muchos procesos físicos como reacciones químicas, la corriente de conducción en un diodo polarizado directamente y multitud de otros fenómenos. Si  $a$  es negativa, entonces  $x(t)$  es una exponencial decreciente, una señal que también se utiliza para describir diversos fenómenos como la respuesta de circuitos  $RC$  y sistemas mecánicos amortiguados.

-Señales exponenciales complejas. Considérese el caso donde  $C$  es real e igual a 1 y  $a$  es igual a  $j\omega_0$  en la ecuación  $x(t) = C e^{at}$ .

Se tiene

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}.$$

Una propiedad importante de esta señal consiste en que es periódica con periodo  $T$ . De la condición de periodicidad  $x(t) = x(t + T)$  tal propiedad se verificará entonces si

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$$

El segundo término de la ecuación puede ser expandido obteniéndose

$$e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}.$$

Consecuentemente para que se cumpla la condición de periodicidad se debe verificar que

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

Tal resultado se obtiene si  $\omega_0 = 0$ . Sustituyendo tal valor de  $\omega_0$  en el lado derecho de la ecuación  $e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$  resulta

$$e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^0 e^0 = 1.$$

Se observa así mismo que la sustitución de  $\omega_0 = 0$  en  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  arroja

$$x(t) = e^0 = 1.$$

De lo anterior se cumple la condición de periodicidad para la señal  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  para cualquier valor de T.

Si  $\omega_0 \neq 0$ , entonces el periodo fundamental  $T_0$ , es decir el valor positivo más pequeño de T, para cumplir con la periodicidad es

$$T_0 = 2\pi / |\omega_0|.$$

Sustituyendo dicho valor en  $e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$  tenemos:

$$e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} e^{j(2\pi)}$$

Empleando la relación de Euler  $e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + j\text{sen}(y))$  al término  $e^{j(2\pi)}$  a la derecha de la igualdad resulta:

$$e^{j(2\pi)} = e^0 (\cos(2\pi) + j\text{sen}(2\pi)) = 1(1 + j0) = 1$$

Del resultado anterior se encuentra entonces que para  $\omega_0 \neq 0$  y  $T_0 = 2\pi / |\omega_0|$ :

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t},$$

con lo cual se cumple la condición de periodicidad.

-Señal senoidal. Relacionada estrechamente con la señal exponencial periódica, una señal senoidal se puede describir mediante la ecuación

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi),$$

misma que se muestra en la siguiente figura. Nótese que a pesar de describir la señal anterior como senoidal se emplea un coseno para la representación matemática. Es común en la literatura encontrar la palabra “senoidal” para describir las señales con la misma forma que la señal generada a partir de la función  $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$ . Lo anterior se fundamenta sobre el hecho de que la señal  $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$  puede expresarse también como  $x(t) = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi) = A \cos(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2})$ .

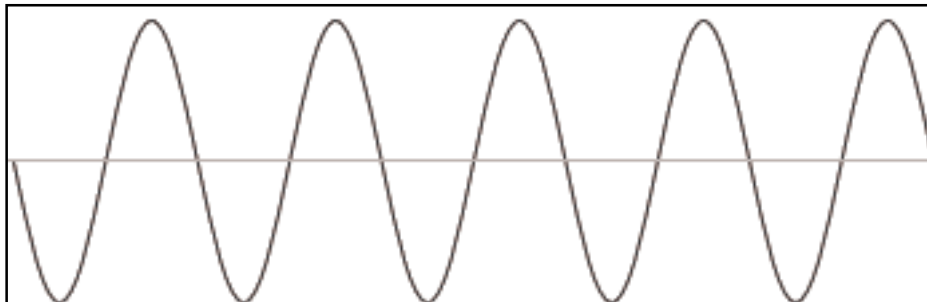


Figura 6. Señal senoidal.

Al igual que la señal exponencial compleja, la señal senoidal también es periódica con periodo fundamental  $T_0$ .

Las señales senoidal y exponencial complejas también se usan para describir las características de fenómenos físicos, en particular aquellos en los cuales se conserva la

energía tales como el movimiento armónico simple de un sistema mecánico consistente en una masa conectada mediante un resorte a un soporte estacionario o la respuesta natural de un circuito LC. Las variaciones de presión acústica correspondientes a una nota musical son también senoidales.

Utilizando la relación de Euler, la exponencial compleja se puede escribir en términos de señales senoidales con el mismo periodo fundamental:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \operatorname{sen} \omega_0 t .$$

De manera similar, la señal senoidal puede escribirse en términos de exponenciales complejas periódicas, una vez más con el mismo periodo fundamental:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} .$$

De la ecuación  $T_0 = 2\pi / |\omega_0|$  se observa que el periodo fundamental  $T_0$  de una señal senoidal continua o una exponencial compleja periódica es inversamente proporcional a  $|\omega_0|$  siendo  $\omega_0$  conocida como la *frecuencia fundamental*. En la siguiente gráfica se presenta el efecto de modificar el término  $\omega_0$ .

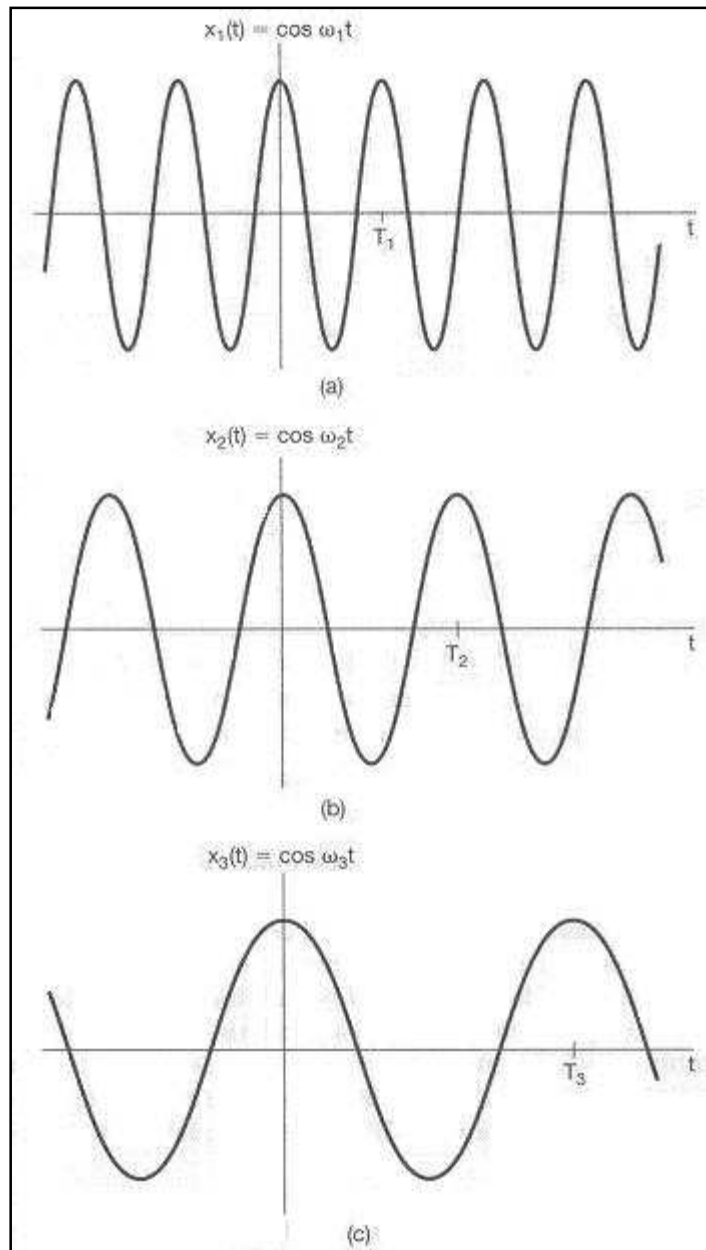


Figura 7. Efecto de la variación del parámetro  $\omega_0$ .  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ .

Si se disminuye la magnitud de  $\omega_0$ , se reduce la velocidad de oscilación y por tanto se incrementa el periodo. Exactamente los efectos contrarios ocurren si se incrementa la magnitud de  $\omega_0$ . Para el caso de  $\omega_0 = 0$ ,  $x(t)$  resulta constante y por tanto periódica con periodo  $T$  para cualquier valor positivo de  $T$ . En consecuencia se tiene que el periodo fundamental de una señal constante es indefinido. En otras palabras, una señal constante tiene una velocidad de oscilación igual a cero.

-Señales exponenciales complejas generales. El caso más general de una exponencial compleja se puede expresar en términos de la exponencial real y la exponencial periódica compleja. Considérese una exponencial compleja  $C e^{at}$ , donde  $C$  se expresa en forma polar y  $a$  en forma rectangular, esto es

$$C = |C| e^{j\theta}$$

y

$$a = r + jw_0.$$

Se tiene entonces

$$C e^{at} = |C| e^{j\theta} e^{(r+jw_0)t} = |C| e^{rt} e^{j(w_0t+\theta)}.$$

Empleando nuevamente la relación de Euler se puede expandir la ecuación anterior aún más de la siguiente forma:

$$C e^{at} = |C| e^{rt} \cos(w_0t + \theta) + j |C| e^{rt} \text{sen}(w_0t + \theta).$$

En consecuencia, para  $r = 0$  las partes real e imaginaria de una exponencial compleja son senoidales. Para  $r > 0$  estas señales corresponden a senoidales multiplicadas por una exponencial creciente, y para  $r < 0$  corresponden a señales senoidales multiplicadas por una exponencial decreciente. Los últimos dos casos se muestran en la siguiente figura.

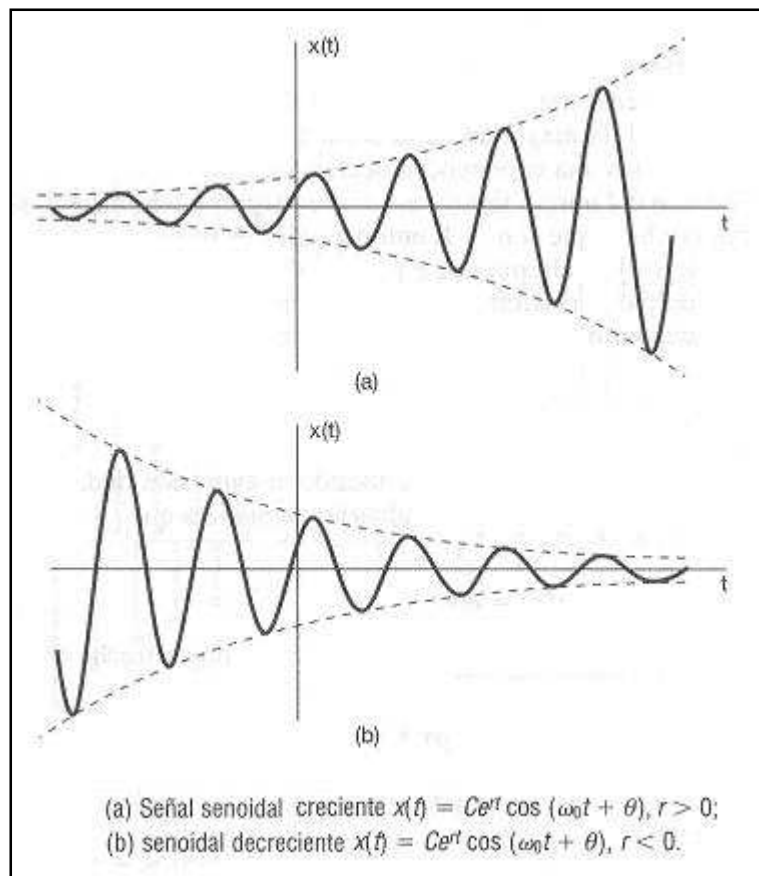


Figura 8. Señales senoidales amortiguadas.



Las líneas punteadas corresponden a las funciones  $\pm |C| e^{rt}$ . De la ecuación  $C e^{at} = |C| e^{j\theta} e^{(r+jw_0)t} = |C| e^{rt} e^{j(w_0t+\theta)}$  se puede observar que el término  $|C| e^{rt}$  es la magnitud de la exponencial compleja. De este modo, las curvas punteadas actúan como una envolvente de la curva oscilatoria de la figura en la que los picos de las oscilaciones apenas tocan dichas curvas, y en consecuencia la envolvente proporciona una manera conveniente de observar la tendencia de las oscilaciones.

Las señales senoidales multiplicadas por las exponenciales decrecientes se conocen comúnmente como *senoides amortiguadas*. Ejemplos de tales señales se presentan en circuitos eléctricos RLC y en sistemas mecánicos que contienen tanto fuerzas de amortiguamiento como de restauración.

Observando las gráficas sobre el comportamiento de las señales senoidales multiplicadas por una exponencial creciente o decreciente ¿tendrán alguna relación con el comportamiento de un sistema? Efectivamente, muchos sistemas presentan respuestas oscilatorias como las mostradas en las figuras anteriores como se mostrará más adelante durante el análisis de los sistemas.

#### -Señales escalón unitario e impulso unitario.

La función *escalón unitario*  $u(t)$  continua se define como

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

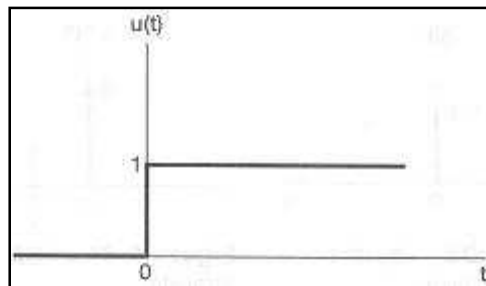


Figura 9. Señal escalón unitario.

Obsérvese que la función escalón unitario es discontinua en  $t = 0$ .

La función *impulso unitario*  $\delta(t)$  continua está relacionada con el escalón unitario mediante la siguiente ecuación:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.$$

O despejando  $\delta(t)$  tenemos:

$$\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}.$$

La ecuación anterior presenta una dificultad formal como representación de la función impulso unitario, ya que  $u(t)$  es discontinua en  $t = 0$  y, en consecuencia, formalmente no es diferenciable. Sin embargo, tal diferenciación puede interpretarse al utilizar una aproximación del escalón unitario  $u_{\Delta}(t)$  como se muestra en la siguiente figura.

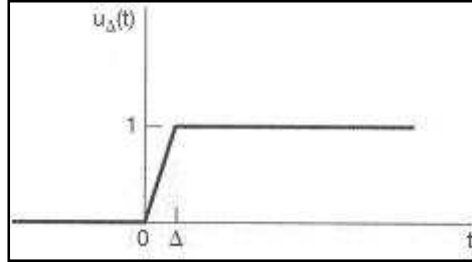


Figura 10. Aproximación a la señal escalón unitario  $u_{\Delta}(t)$ .

Dicha aproximación considera la transición del valor de 0 al valor 1 en un corto intervalo de tiempo de longitud  $\Delta$ . La señal  $u(t)$  es el límite de  $u_{\Delta}(t)$  conforme  $\Delta \rightarrow 0$ . Consecuentemente tenemos que la señal  $\delta_{\Delta}(t)$  se encuentra mediante

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{\partial u_{\Delta}(t)}{\partial t}.$$

De la figura anterior utilizada para mostrar la aproximación de la función escalón obsérvese que la transición del valor de 0 al valor de 1 es mediante una recta con pendiente constante. De la interpretación geométrica de una derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto, tenemos que el valor de dicha pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{\Delta - 0} = \frac{1}{\Delta}$$

Consecuentemente

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{\partial u_{\Delta}(t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta}$$

durante el intervalo de tiempo de 0 a  $\Delta$  como se muestra en la siguiente figura.

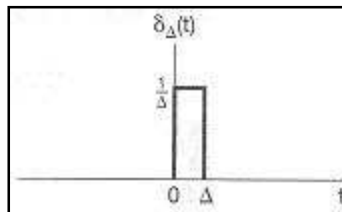


Figura 11. Derivada de la señal  $u_{\Delta}(t)$ .

Se observa que  $\delta_{\Delta}(t)$  es un pulso corto de duración  $\Delta$  y con un área unitaria para cualquier valor de  $\Delta$  pues el área se calcula como  $\text{área}_{\delta_{\Delta}(t)} = (\text{base})(\text{altura}) = (\Delta)(1/\Delta) = 1$ .

A medida que  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\delta_{\Delta}(t)$  se vuelve más angosto y más alto, manteniendo su área unitaria. Su forma límite,

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t),$$

puede considerarse como una idealización del pulso corto  $\delta_{\Delta}(t)$  conforme la duración  $\Delta$  se vuelve insignificante.  $\delta(t)$  no tiene duración sino área representándose por la siguiente figura.



Figura 12. Impulso unitario e impulso escalado.

La flecha en  $t = 0$  indica que el área del pulso está concentrada en  $t = 0$  y la altura de la flecha así como el “1” a un lado de la misma se usan para representar el área del impulso. En los párrafos anteriores se ha trabajado con un impulso unitario con un área igual a “1”. Sin embargo comúnmente es de utilidad emplear un impulso con un área con valor diferente de la unidad. De manera general un impulso escalado  $k \delta(t)$  tendrá un área  $k$ , y cumple con

$$ku(t) = \int_{-\infty}^t k\delta(\tau)d\tau.$$

En los párrafos anteriores se presentaron diversas señales que pueden servir para representar fenómenos físicos. Su aplicación a los sistemas permite el estudio de la respuesta de los mismos; sin embargo generalmente los sistemas se someten a señales diferentes a las presentadas en los párrafos anteriores. Por ejemplo un micrófono no está hecho para captar un único tono cuyo comportamiento puede describirse mediante una señal senoidal; en la realidad el micrófono estará sometido a cualquier sonido y/o a una combinación de éstos. ¿Es válido entonces utilizar una única señal exponencial, senoidal, escalón, impulso u otras en el análisis o diseño de un sistema específico? La respuesta es afirmativa pues el diseñador deberá conocer todas las características de la señal real que pretende manipular. Posteriormente seleccionará la o las señales más adecuadas para aplicarlas al sistema de interés. Las señales aquí presentadas se utilizan como patrones de prueba para aplicarlas a los sistemas; por ello la importancia de su estudio. Su utilización no implica que el sistema responda exclusivamente a dichas señales; lo hará con cualquier señal aplicada en la entrada.

## **I.2. LOS SISTEMAS.**

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Descrito el concepto de señal y sus características en la sección anterior en los párrafos siguientes se introducirá el concepto de sistema.

Los sistemas físicos, en su sentido más amplio, son una interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas. En diversos contextos, un *sistema* puede considerarse como un proceso en el cual las señales de entrada son transformadas por el sistema o provocan que éste responda de alguna forma, lo que da como resultado otras señales como salidas. Para el ejemplo presentado inicialmente sobre el diseño de un sistema de orientación para una aeronave pudiera elegirse como señal de entrada la altura del vehículo. Tal señal será manipulada por un sistema tal que genere como señal de salida la variación del ángulo de deflexión de las superficies de control de la aeronave, un incremento en la potencia de los motores o inclusive el parpadeo de una indicación en el tablero de controles. De nueva cuenta la elección de la señal de salida se limita exclusivamente a la imaginación del diseñador. Con objeto de presentar los tipos de sistemas y sus características es importante resaltar que, al igual que para las señales, los sistemas físicos tienen una representación matemática que facilita su manipulación.

### **I.2.1. TIPOS DE SISTEMAS.**

Existen diversas clasificaciones para los sistemas; sin embargo son de interés para este trabajo los siguientes:

Un *sistema continuo* es aquel en el cual las señales continuas de entrada son transformadas en señales continuas de salida.

De manera semejante, un *sistema discreto*, es aquel que transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto.

Un sistema es *determinístico* si siempre presenta la misma respuesta para una entrada determinada mientras que un sistema *estocástico* es aquel que produce diferentes respuestas para una entrada determinada.

Los sistemas también se pueden clasificar dado el número de entradas y salidas que manejan. Usualmente se encontrarán los siguientes:

-SISO. De las siglas en inglés (Single Input / Single Output) son aquellos sistemas con una sola señal de entrada que resulta en una sola señal de salida.

-SIMO. De las siglas en inglés (Single Input / Multiple Output) son aquellos sistemas con una sola señal de entrada y múltiples señales de salida.

-MISO. De las siglas en inglés (Multiple Input / Single Output) son aquellos sistemas con múltiples señales de entrada y una sola señal de salida.

-MIMO. De las siglas en inglés (Multiple Input / Multiple Output) son aquellos sistemas con múltiples señales de entrada y múltiples señales de salida.

Vale la pena resaltar que los sistemas de entradas y salidas múltiples se pueden estudiar considerándolos la interacción de varios sistemas de una señal de entrada y una señal de salida.

## 1.2.2. PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS SISTEMAS.

Durante esta sección se presentarán algunas propiedades básicas de los sistemas continuos. Dichas propiedades poseen interpretaciones físicas interesantes.

### -Sistemas con o sin memoria.

Se dice que un sistema es *sin memoria* si su salida para cada valor de la señal de entrada en un tiempo dado depende solamente de la entrada en ese mismo tiempo. Considérese como ejemplo de un sistema sin memoria a un resistor pues con una entrada  $x(t)$  tomada como la corriente y considerando al voltaje como la salida  $y(t)$ , la relación entrada-salida está dada por

$$y(t) = Rx(t),$$

donde  $R$  es la resistencia.

Contrariamente un sistema *con memoria* es aquel cuya salida en un tiempo dado está en función de la entrada en algún otro tiempo y/o en un tiempo dado. Un capacitor es un ejemplo de un sistema con memoria pues si la entrada  $x(t)$  se toma como la corriente y la salida  $y(t)$  como el voltaje, entonces

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

donde  $C$  es la capacitancia. De forma general, el concepto de memoria en un sistema corresponde a la presencia de un mecanismo en el sistema que mantiene o almacena información sobre los valores de entrada en instantes diferentes del tiempo actual. En muchos sistemas físicos, la memoria está directamente asociada con el almacenamiento de energía. En la ecuación anterior el capacitor almacena energía mediante la acumulación de carga eléctrica, representada por la integral de la corriente. Genéricamente la integral es una “acumulación” de valores en un rango determinado, en este caso un rango de tiempo desde  $-\infty$  a  $t$ . Mientras que el concepto de memoria en un sistema podría sugerir típicamente el almacenamiento de los valores *pasados* de la entrada y la salida, hay que notar que la definición formal presentada al inicio de esta sección también clasifica a un sistema como *con memoria* si la salida actual depende de valores *futuros* de la entrada y la salida.

### -Invertibilidad y sistemas inversos.

Un sistema es *invertible* si existe un sistema tal que, cuando está en cascada con el sistema original, produce una salida igual a la entrada del primer sistema. Dicho sistema en cascada recibe el nombre de *sistema inverso*.

Un ejemplo de un sistema continuo invertible es

$$y(t) = 2 x(t),$$

para el cual el sistema inverso es

$$w(t) = \frac{1}{2} y(t)$$

como se muestra en la siguiente figura.

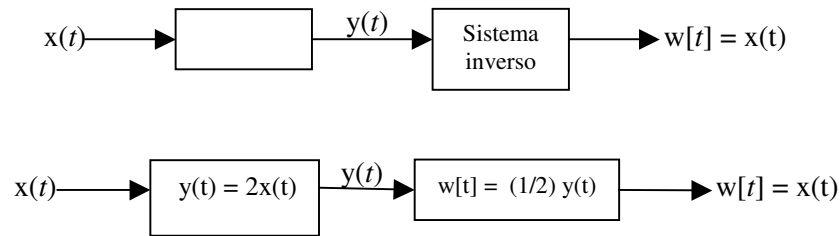


Figura 13. Sistema invertible.

El concepto de invertibilidad es importante en muchos contextos. Un ejemplo son los sistemas de codificación utilizados en las aplicaciones de comunicación. En tales sistemas, una señal que se desea transmitir primero se aplica como entrada a un sistema conocido como codificador. Para una codificación sin pérdidas, la entrada al codificador debe ser recuperable en forma precisa de la salida; es decir, el codificador debe ser invertible.

#### **-Causalidad.**

Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el momento presente y en el pasado. A menudo, a dicho sistema se le conoce como *no anticipativo*, ya que la salida del sistema no anticipa valores futuros de la entrada. En consecuencia, si dos entradas a un sistema causal son idénticas hasta algún punto en el tiempo  $t_0$ , las salidas correspondientes deben ser también iguales hasta ese mismo tiempo. Todos los sistemas sin memoria son causales, ya que la salida responde sólo a valores presentes de la entrada. Vale la pena mencionar que a pesar de no ser de interés para el presente trabajo de tesis existen sistemas no causales con aplicaciones en el mercado de valores, demografía, meteorología y muchos otros.

#### **-Estabilidad.**

La estabilidad es otra importante propiedad de los sistemas. Intuitivamente, un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen. Considérese el la figura siguiente.

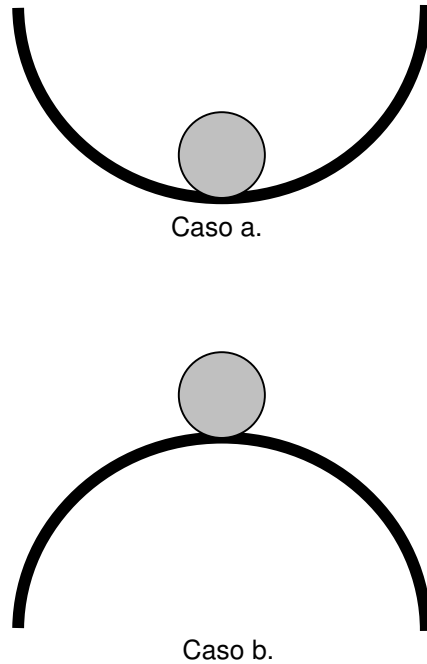


Figura 14. Sistema estable y sistema inestable.

Para el caso “a” al desplazar la pelota ligeramente hacia un lado las fuerzas existentes en el sistema tienden a regresar la pelota a su estado original. En consecuencia, si se aplica una pequeña fuerza  $x(t)$ , la desviación resultante de la posición al centro de la cavidad es también pequeña. Para el caso “b” la aplicación de una pequeña fuerza tiende a *incrementar* el desplazamiento de la pelota respecto del centro de la curva.

El sistema de la figura “a” es un ejemplo de un sistema estable, mientras que el caso “b” es inestable en el cual la respuesta crece sin límite en respuesta a entradas pequeñas. La estabilidad de los sistemas físicos por lo general resulta de la presencia de mecanismos que disipan energía. En un circuito eléctrico los resistores que se oponen al paso de la corriente “limitan” el crecimiento de la misma a los niveles deseados por el diseñador. Los ejemplos anteriores proporcionan una idea intuitiva del concepto de estabilidad. De manera más formal, si la entrada a un sistema estable es limitada en magnitud, entonces la salida también debe ser limitada y por tanto, no puede divergir. Se estudiará en más detalle el concepto de estabilidad más adelante.

#### **-Invariancia en el tiempo.**

Un sistema es invariante en el tiempo si el comportamiento y características del mismo están fijos en el tiempo. Formalmente un sistema es invariante en el tiempo si un corrimiento de tiempo en la señal de entrada ocasiona un corrimiento de tiempo en la señal de salida, es decir el sistema tendrá una salida  $y(t-t_0)$  para una entrada  $x(t-t_0)$ . En otras palabras, si para un sistema determinado se mantienen fijas sus características y se realiza un experimento con el sistema el día de hoy se puede esperar la obtención de los mismos resultados si el experimento se lleva a cabo en forma idéntica el día de mañana.

A su vez si las características se modifican con el tiempo, entonces se puede esperar que los resultados del experimento dependan del tiempo en que se lleva a cabo.

### **-Linealidad.**

Un *sistema lineal* es aquel que posee la propiedad de superposición. Dicha propiedad establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos o más funciones de entradas diferentes es la suma de las respuestas individuales. Por tanto, para un sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada a la vez y sumando los resultados. Matemáticamente, sea  $y_1(t)$  la respuesta del sistema continuo a una entrada  $x_1(t)$ , y sea  $y_2(t)$  la salida correspondiente a la entrada  $x_2(t)$ . Entonces el sistema es lineal si

- La respuesta a  $x_1(t) + x_2(t)$  es  $y_1(t) + y_2(t)$ .
- La respuesta a  $a x_1(t)$  es  $a y_1(t)$ , donde “ $a$ ” es una constante compleja cualquiera.

La primera de estas dos propiedades se conoce como la propiedad de *aditividad*; la segunda se conoce como la propiedad de *escalamiento* u *homogeneidad*.

A los sistemas lineales e invariantes en el tiempo se les conoce como sistemas LTI de las siglas en inglés Linear Time Invariant.

Un sistema es *no lineal* si no se aplica el principio de superposición. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada una a la vez y sumando los resultados. Aunque muchas relaciones físicas se representan a menudo mediante sistemas lineales, en la mayor parte de los casos las relaciones reales no son verdaderamente lineales. De hecho, debe tenerse presente que un estudio cuidadoso de los sistemas físicos revela que incluso los “sistemas lineales” sólo lo son en rangos de operación limitados. En general, los procedimientos para encontrar las soluciones a los problemas que involucran sistemas no lineales son muy complicados. Debido a la dificultad matemática aunada a los sistemas no lineales, resulta necesario introducir los sistemas lineales “equivalentes” en lugar de los no lineales. Tales sistemas equivalentes sólo son válidos para un rango limitado de operación. Una vez que se aproxima un sistema no lineal mediante un modelo matemático lineal, pueden aplicarse las herramientas lineales para su análisis y diseño. Para un sistema no lineal, una operación normal del sistema puede ocurrir alrededor de un punto de equilibrio, y las señales pueden considerarse señales pequeñas alrededor del equilibrio. En dicho caso es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal siendo dicha aproximación válida dentro de un rango de operación limitado.

Durante las secciones subsecuentes del presente trabajo de tesis cuando se refiera a un sistema se deberá entender una referencia a un sistema lineal invariante en el tiempo.

Todos los conceptos anteriores respecto a la clasificación y características de los sistemas se presentaron a partir de sistemas ya existentes pero ¿cómo se encuentra el modelo matemático de un sistema de interés?



## II. MODELADO MATEMÁTICO DE SISTEMAS LTI.

El modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del mismo.

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos y otros se describe en términos de ecuaciones diferenciales.

Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de las leyes físicas que gobiernan un sistema determinado. Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema de que se trate y de las circunstancias específicas del diseño, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros.

Se debe resaltar que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse de muchas formas diferentes. Acorde con lo anterior es posible mejorar la precisión de un modelo matemático para representar un fenómeno específico si se aumenta su complejidad. En algunos casos, se utilizan cientos de ecuaciones para describir un sistema completo. Sin embargo, en la obtención de un modelo matemático, se debe establecer un equilibrio entre la simplicidad del mismo y la precisión de los resultados del análisis. Si no se necesita una precisión extrema, es preferible obtener un modelo razonablemente simplificado. Al obtener dicho modelo simplificado resulta necesario ignorar ciertas propiedades físicas inherentes al sistema. En general, cuando se soluciona un problema nuevo, es conveniente desarrollar un modelo simplificado para obtener una idea general de la solución. Posteriormente se desarrolla un modelo matemático más completo y se usa para un análisis con más detalle. Existe una extensa bibliografía respecto del modelado de sistemas físicos. A manera de breve recordatorio se presenta el siguiente ejemplo.

Considérese el circuito eléctrico de la siguiente figura.

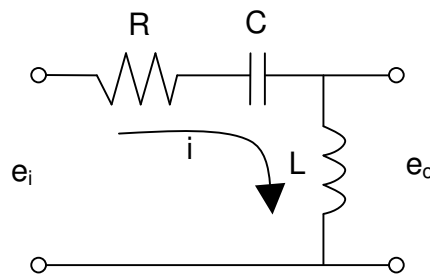


Figura 15. Circuito RLC pasivo.

El circuito está formado por una resistencia  $R$  (ohms), una capacitancia  $C$  (farad) y una inductancia  $L$  (henry) una diferencia de potencial. Cada elemento se comporta acorde a las siguientes ecuaciones.

Para la resistencia tenemos

$$e = R i,$$

para la capacitancia

$$e = \frac{1}{C} \int i dt ,$$

y para la inductancia

$$e = L \frac{di}{dt} .$$

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, la dirección de la corriente mostrada y las expresiones anteriores obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_0$$

Las dos ecuaciones anteriores definen un modelo matemático del circuito.

Como se estableció al inicio de la discusión sobre el modelado de sistemas LTI se puede observar la existencia de ecuaciones diferenciales obtenidas a partir de las leyes físicas que rigen a los dispositivos utilizados.

## II.1. INTERCONEXIÓN DE SISTEMAS.

Considérese ahora que el sistema eléctrico utilizado como ejemplo es solo una parte de un sistema más grande. Tal circuito se considera un *subsistema* del sistema mayor. El diseñador necesitará conocer la manera en la cual relacionará el circuito con el sistema completo. Surge entonces el concepto de la *interconexión* entre sistemas. Muchos sistemas reales están contruidos como interconexiones de varios subsistemas. El estudio individual de tales subsistemas permite conocer el comportamiento del sistema completo. Existen dos interconexiones básicas entre sistemas.

Una interconexión *en serie* o *en cascada* de dos sistemas se presenta en la figura siguiente.

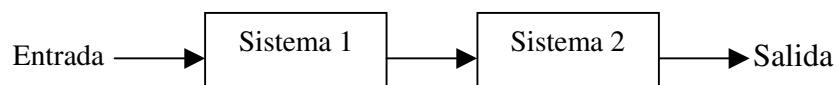


Figura 16. Sistemas en cascada.

De la figura se observa que la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2, y el sistema completo transforma una entrada al procesarla primero por el sistema 1 y posteriormente por el sistema 2.

Una interconexión *en paralelo* de dos sistemas se muestra en la figura siguiente.

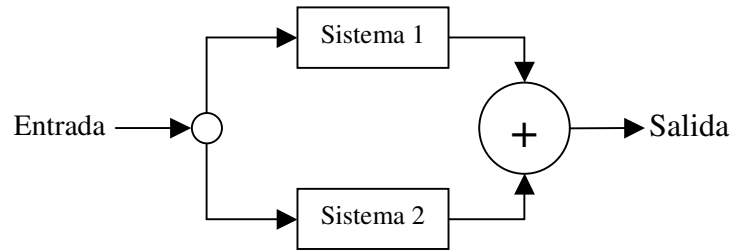


Figura 17. Sistema en paralelo.

En el sistema en paralelo la misma señal de entrada se aplica a los sistemas 1 y 2. El símbolo de adición en la figura denota la manera en la cual las salidas de ambos sistemas se combinan para construir la salida total.

Es importante resaltar que el número posible de sistemas a utilizar para realizar interconexiones en cascada y en paralelo no se restringe a dos.

Existe otro tipo de interconexión denominada *interconexión de realimentación* mostrada en la siguiente figura.

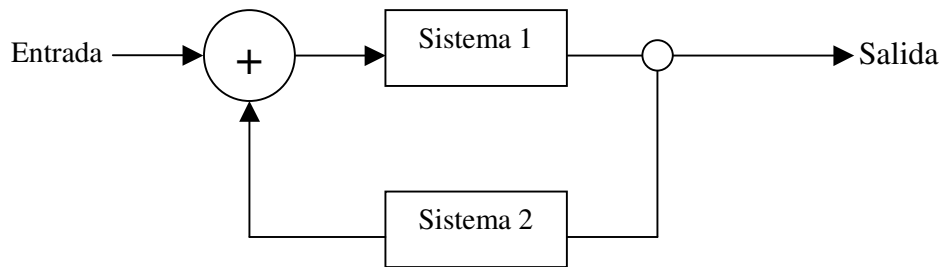


Figura 18. Sistema con realimentación.

En dicho sistema la salida del sistema 1 es la entrada del sistema 2, mientras que la salida del sistema 2 se retroalimenta y se suma a la entrada externa para producir una entrada real al sistema 1. Se abordarán con más detalle en secciones posteriores.

## II.2. EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS FÍSICOS.

Es importante destacar que las descripciones matemáticas de muchos sistemas físicos ya sea mecánicos, eléctricos, térmicos, etc. tienen muchas características en común. En consecuencia existen equivalentes matemáticos para convertir un sistema físico dado en otro conservando el mismo comportamiento dinámico. Por ejemplo se pueden encontrar equivalentes de un sistema mecánico utilizando un sistema eléctrico o un sistema térmico, etc.

Lo anterior es de suma utilidad para la simulación de diversos sistemas pues, dado lo anterior, para el ejemplo del sistema para controlar la orientación de una aeronave no es necesario experimentar con un avión real pues existe la posibilidad de simular todo su comportamiento dinámico mediante un circuito eléctrico si así se eligiera.

Una vez descrita la manera en la cual se obtienen los modelos matemáticos para un sistema determinado el diseñador debe preguntarse como solucionar el modelo matemático.

### II.3. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

-Variable compleja.

Un número complejo tiene una parte real y una parte imaginaria, ambas son constantes. Si la parte real y/o la imaginaria son variables, el número complejo se denomina *variable compleja*. La variable compleja “ $s$ ” se define como:

$$s = \sigma + j\omega$$

donde  $\sigma$  es la parte real y  $\omega$  es la parte imaginaria.

Función compleja.

Una función compleja  $F(s)$ , es una función de  $s$  que tiene una parte real y una parte imaginaria:

$$F(s) = F_x + jF_y,$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son cantidades reales. Los números y funciones complejas se pueden graficar en el *plano complejo* mostrado a continuación.

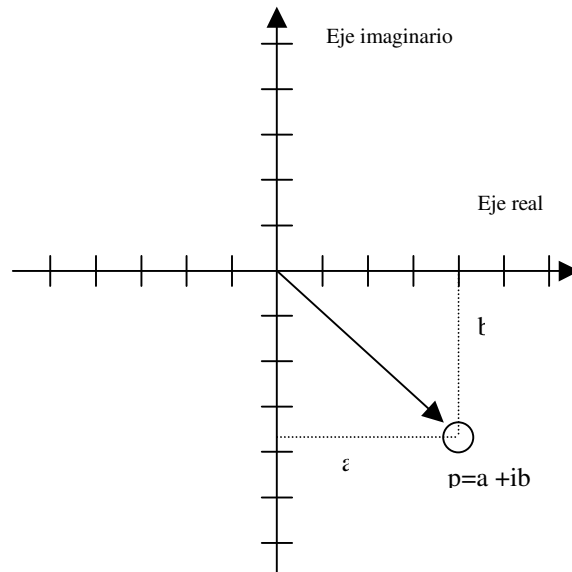


Figura 19. Plano complejo.

El eje de las abscisas representa el eje de los números reales o *eje real* mientras que el eje de las ordenadas representa el eje de los números imaginarios o *eje imaginario*.

Se dice que una función es *analítica* en una región si la función y todas sus derivadas existen en tal región. Es de interés el saber si una función compleja es analítica pues al ser analítica se garantiza que la derivada de la función respecto a la variable  $s$  es única. Una función compleja es analítica si cumple las condiciones de Cauchy-Riemann mostradas a continuación:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = -\frac{\partial G_x}{\partial \omega}.$$

La unicidad de la derivada respecto a la variable  $s$  es importante como se verá posteriormente al analizar la respuesta de los sistemas a diversas entradas.

Los puntos en el plano  $s$  en los cuales la función  $G(s)$  es analítica se denominan puntos *ordinarios*, en tanto que los puntos en el plano  $s$  en los cuales la función no es analítica se denominan puntos *singulares*. Los puntos singulares en los cuales la función compleja o sus derivadas tienden a infinito se denominan *polos*. Los puntos en los cuales la función compleja es igual a cero se denominan *ceros*. El concepto de polos y ceros es de extrema utilidad en el análisis de la respuesta de los sistemas físicos a diferentes entradas como se mostrará más adelante.

Considérese la siguiente función compleja:

$$G(s) = \frac{K(s-3)(s+50)}{s(s+4)(s-2)(s+8)^2}.$$

La función  $G(s)$  tiene ceros en  $s=3$  y  $s=-50$  y polos simples en  $s=0$ ,  $s=-4$ ,  $s=2$  y un polo doble (polo múltiple de orden 2) en  $s=-8$ . Obsérvese que  $G(s)$  se vuelve cero en  $s=\infty$ . Para valores grandes de  $s$  la función  $G(s)$  se puede aproximar mediante:

$$G(s) = \frac{Ks^2}{s^5} = \frac{K}{s^3}.$$

Para la ecuación anterior  $G(s)$  posee un cero triple (cero múltiple de orden 3) en  $s=\infty$ .

Consecuentemente se puede ver que si se incluyen puntos en el infinito, una función compleja tiene la misma cantidad de polos que de ceros.

Habiendo recordado la teoría de la variable compleja recuérdese que el modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica o comportamiento del mismo. Tal comportamiento se encontrará entonces al dar solución a los sistemas de ecuaciones diferenciales que describen el fenómeno en estudio.

El método de la transformada de Laplace se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Mediante el uso de la transformada de Laplace es posible convertir funciones comunes, tales como las funciones senoidales, las funciones senoidales amortiguadas y las funciones exponenciales en funciones algebraicas de una variable “ $s$ ” compleja. Las operaciones tales como la diferenciación y la integración se sustituyen mediante operaciones algebraicas en el plano complejo.

Como se presentó en las secciones anteriores la dinámica de los sistemas generalmente se puede describir mediante la utilización de las funciones senoidales y exponenciales. Tal hecho permite que, mediante la transformada de Laplace, esencialmente se simplifique el modelo matemático en estudio en términos de la variable “s”. El resolver las ecuaciones algebraicas resultantes de aplicar la transformada de Laplace es equivalente a resolver las ecuaciones diferenciales y en consecuencia obtener la solución del modelo matemático de interés.

Así como se aplicó la transformada de Laplace para convertir el sistema de ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas en términos de la variable compleja “s” se necesita reconvertir el sistema a su dominio original, generalmente el tiempo. Para llevar a cabo dicha conversión se aplica la *transformada inversa de Laplace*. El resultado de la transformada inversa de Laplace corresponderá al comportamiento del sistema ya sin términos diferenciales y en función del tiempo.

A manera de resumen la metodología básicamente implica:

- Aplicar la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales.
- Resolver las ecuaciones algebraicas resultantes.
- Aplicar la transformada inversa de Laplace para “regresar” las ecuaciones al dominio del tiempo y encontrar el comportamiento del sistema.

La presentación formal de la transformada de Laplace es como sigue.

Defínase:

$f(t)$  = función del tiempo “ $t$ ” tal que  $f(t) = 0$  para  $t < 0$

$s$  = una variable compleja

$L$  = Símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace

$F(s)$  = transformada de Laplace de  $f(t)$

La transformada de Laplace se define como:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo  $f(t)$  a partir de la transformada de Laplace  $F(s)$  se denomina transformada inversa de Laplace y se define de la siguiente manera.

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \text{ para } t > 0$$

en donde “ $c$ ” es una constante real llamada abscisa de convergencia.

En la práctica la obtención de la transformada de Laplace y la transformada inversa de Laplace no se realiza efectuando las integrales mostradas arriba sino que se utilizan tablas que contienen las funciones  $f(t)$  y los polinomios  $f(s)$  más comunes.

Usualmente las transformadas inversas de Laplace de los polinomios en “s” resultantes de aplicar la transformada de Laplace a un sistema particular no se encontrarán exactamente en las tablas correspondientes. Sin embargo tales polinomios pueden simplificarse mediante una expansión en fracciones parciales. Tal expansión convertirá al polinomio en “s” en una suma de términos sencillos cuyas transformadas inversas generalmente están incluidas en las tablas.

Existe extensa bibliografía sobre la teoría y propiedades de la transformación de Laplace así como del método de expansión en fracciones parciales y no se repetirá dentro de este trabajo de tesis.

A manera de ejemplo se retomarán las ecuaciones para el circuito presentado previamente. Recuérdese que el circuito y las ecuaciones que definen el modelo matemático son:

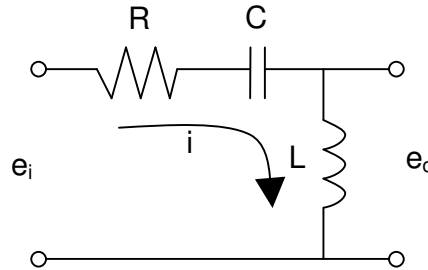


Figura 20. Circuito RLC pasivo.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = e_i$$

$$\frac{1}{C} \int idt = e_o$$

Para efecto de encontrar la respuesta del sistema es necesario definir los conceptos de entrada y salida del sistema. Dichos conceptos se abordarán con detalle posteriormente en el presente trabajo.

Con base en el circuito de la figura defínase entonces la entrada al mismo como  $e_i$  y supóngase que la variable de interés o salida es  $e_o$ . Al cociente  $e_o/e_i$  se le llama *función de transferencia* y es una representación útil para encontrar el comportamiento de un sistema dado. La función de transferencia se estudiará con detenimiento posteriormente. Aplicando entonces la transformada de Laplace a cada término de las ecuaciones anteriores resulta

$$LsI(s) + RI(s) + (1/Cs)I(s) = E_i(s)$$

$$(1/Cs)I(s) = E_o(s)$$

Para el caso en estudio se encuentra la función de transferencia como

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{(1/Cs)I(s)}{LsI(s) + RI(s) + (1/Cs)I(s)}$$

Simplificando resulta

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}$$

Al aplicar la fórmula  $[(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a]$  para simplificar el polinomio de segundo grado del denominador encontramos

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{[s + (\frac{-CR + \sqrt{(CR)^2 - 4CL}}{2CL})][s + (\frac{-CR - \sqrt{(CR)^2 - 4CL}}{2CL})]}$$

Para facilitar los cálculos se tomarán las siguientes consideraciones:

$$A = (\frac{-CR + \sqrt{(CR)^2 - 4CL}}{2CL})$$

$$B = (\frac{-CR - \sqrt{(CR)^2 - 4CL}}{2CL})$$

La ecuación resulta en

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{[s + A][s + B]}$$

La expresión anterior se puede expandir en fracciones parciales para encontrar  $E_o(s)/E_i(s)$  en términos de una sumatoria de términos sencillos a los cuales se les podrá aplicar la transformada inversa de Laplace.

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{[s + A][s + B]} = \frac{a_1}{[s + A]} + \frac{a_2}{[s + B]}$$

$$\frac{1}{[s + A][s + B]} = \frac{[s + B]a_1 + [s + A]a_2}{[s + A][s + B]}$$

Igualando los numeradores se tiene

$$a_1s + a_1B + a_2s + a_2A = 0s + 1.$$

Agrupando términos resulta

$$(a_1 + a_2)s + (a_1B + a_2A) = 0s + 1.$$

Ahora se igualan los coeficientes. A partir de dichas igualaciones se encontrarán los valores de  $a_1$  y  $a_2$ .

$$a_1 + a_2 = 0$$

lo cual implica que

$$a_1 = -a_2.$$

Del mismo modo

$$a_1B + a_2A = 1.$$

Sustituyendo  $a_1 = -a_2$  en la ecuación anterior se encuentran los valores de los numeradores  $a_1$  y  $a_2$ .

$$a_1 = -\frac{1}{(A - B)}$$

$$a_2 = \frac{1}{(A - B)}$$



Con los valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A$  y  $B$  definidos la expresión para  $E_o(s)/E_i(s)$  resulta:

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{[s + A][s + B]} = \frac{a_1}{[s + A]} + \frac{a_2}{[s + B]}.$$

Se puede observar que la ecuación presenta dos términos de la forma  $\frac{1}{s + \alpha}$ .

Como paso siguiente es necesario encontrar la transformada inversa de Laplace de  $E_o(s)/E_i(s)$ . Como puede verificarse en las tablas correspondientes, la transformada inversa de

Laplace de los términos con forma  $\frac{1}{s + \alpha}$  es:

$$L^{-1} \left( \frac{1}{s + \alpha} \right) = e^{-\alpha t}.$$

En consecuencia el comportamiento dinámico en el dominio del tiempo para el circuito estudiado será:

$$e_o(t)/e_i(t) = -\frac{1}{(A - B)} e^{-At} + \frac{1}{(A - B)} e^{-Bt}$$

El ejemplo anterior ilustra el procedimiento general utilizado para encontrar el modelo matemático y el comportamiento de un sistema dado. Inicialmente dicho sistema se describirá con ecuaciones diferenciales. Posteriormente se decide cual es la variable de salida y cual la de entrada y se obtiene así la función de transferencia. A tal expresión se le aplica la transformada de Laplace y se simplifica la ecuación algebraica resultante. Al obtener una expresión en forma de suma de términos de la variable compleja “s” se puede aplicar entonces la transformada inversa de Laplace para “regresar” el modelo matemático al dominio del tiempo y encontrar su comportamiento dinámico como función del tiempo “t”.

Durante las secciones anteriores se presentaron los conceptos de señales, sistemas, modelos matemáticos y transformaciones de Laplace. Básicamente dichos conceptos nos permitieron “convertir” un sistema físico a un equivalente matemático y manipularlo para encontrar a su vez el equivalente matemático de su “comportamiento” en el tiempo. Una vez que lo anterior se ha logrado es posible pensar no solamente en conocer el comportamiento del sistema sino también controlarlo.

### III. TEORÍA DE CONTROL.

#### III.1. LOS SISTEMAS DE CONTROL.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado.

En la presente sección se introducirán los conceptos sobre control y su relación con las señales y los sistemas.

Con los valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A$  y  $B$  definidos la expresión para  $E_o(s)/E_i(s)$  resulta:

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{[s + A][s + B]} = \frac{a_1}{[s + A]} + \frac{a_2}{[s + B]}.$$

Se puede observar que la ecuación presenta dos términos de la forma  $\frac{1}{s + \alpha}$ .

Como paso siguiente es necesario encontrar la transformada inversa de Laplace de  $E_o(s)/E_i(s)$ . Como puede verificarse en las tablas correspondientes, la transformada inversa de

Laplace de los términos con forma  $\frac{1}{s + \alpha}$  es:

$$L^{-1} \left( \frac{1}{s + \alpha} \right) = e^{-\alpha t}.$$

En consecuencia el comportamiento dinámico en el dominio del tiempo para el circuito estudiado será:

$$e_o(t)/e_i(t) = -\frac{1}{(A - B)} e^{-At} + \frac{1}{(A - B)} e^{-Bt}$$

El ejemplo anterior ilustra el procedimiento general utilizado para encontrar el modelo matemático y el comportamiento de un sistema dado. Inicialmente dicho sistema se describirá con ecuaciones diferenciales. Posteriormente se decide cual es la variable de salida y cual la de entrada y se obtiene así la función de transferencia. A tal expresión se le aplica la transformada de Laplace y se simplifica la ecuación algebraica resultante. Al obtener una expresión en forma de suma de términos de la variable compleja “s” se puede aplicar entonces la transformada inversa de Laplace para “regresar” el modelo matemático al dominio del tiempo y encontrar su comportamiento dinámico como función del tiempo “t”.

Durante las secciones anteriores se presentaron los conceptos de señales, sistemas, modelos matemáticos y transformaciones de Laplace. Básicamente dichos conceptos nos permitieron “convertir” un sistema físico a un equivalente matemático y manipularlo para encontrar a su vez el equivalente matemático de su “comportamiento” en el tiempo. Una vez que lo anterior se ha logrado es posible pensar no solamente en conocer el comportamiento del sistema sino también controlarlo.

### III. TEORÍA DE CONTROL.

#### III.1. LOS SISTEMAS DE CONTROL.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado.

En la presente sección se introducirán los conceptos sobre control y su relación con las señales y los sistemas.

Para tal efecto deben definirse ciertos términos básicos.

-Variable controlada y variable manipulada. La variable *controlada* es la cantidad o condición que se mide y controla. Generalmente, la variable controlada es la salida o resultado de un sistema dado. La variable *manipulada* es la cantidad o condición que el controlador modificará para afectar el valor de la variable controlada.

-Controlar. Defínase como la continua modificación del valor de la variable manipulada y su aplicación a un sistema determinado para corregir o limitar la desviación del valor de la variable controlada respecto de un valor deseado.

-Planta. Estrictamente la definición de una planta comprende a cualquier sistema físico que se va a controlar. Durante el presente trabajo se utilizará el término “planta” indistintamente para referirse al sistema físico y/o a su modelo matemático.

-Perturbación. Una perturbación es una señal que tiende a afectar el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, en tanto que una perturbación *externa* se produce afuera del sistema y se convierte en una señal de entrada adicional.

-Control realimentado. Un sistema que mantiene una relación entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control se denomina *sistema de control realimentado*. El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones externas, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia y lo continúa haciendo con base en esta diferencia.

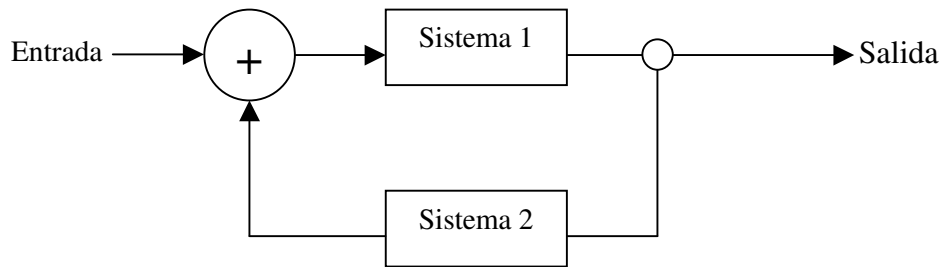


Figura 21. Sistema con realimentación.

En la sección anterior se mencionó el concepto de función de transferencia mismo que se estudia con más detenimiento a continuación.

Recuérdese que las funciones de transferencia se emplean para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes en el tiempo.

### III.2. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

La *función de transferencia* de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de

Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

$$\text{Función de transferencia} = G(s) = \frac{L(\text{salida})}{L(\text{entrada})} \Big|_{\text{condiciones\_iniciales\_cero}}$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en “s”.

Si la potencia más alta de  $s$  en el denominador de la función de transferencia resultante para un sistema en particular es igual a  $n$ , el sistema se denomina *sistema de n-ésimo orden*.

Para el caso del ejemplo del circuito eléctrico mostrado previamente se definió la función de transferencia como

$$E_o(s)/E_i(s) = \frac{1}{CLs^2 + CRs + 1}.$$

Consecuentemente el sistema se denomina un sistema de segundo orden dado el término “ $s^2$ ”.

La aplicación del concepto de función de transferencia está limitada a los sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo.

Se tienen las siguientes características importantes de la función de transferencia:

-La función de transferencia de un sistema es un modelo matemático porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.

-La función de transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada o función de excitación.

-La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida; sin embargo, no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. En otras palabras, las funciones de transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas. Lo anterior es de un gran valor práctico pues al encontrar el comportamiento de un sistema físico particular, en esencia se pudiera estar resolviendo un sistema físico totalmente distinto con el mismo conjunto de ecuaciones. Lo anterior también es de interés en la simulación del comportamiento de sistemas físicos mediante la utilización de elementos de un sistema equivalente. En otras palabras se podría, por ejemplo, estudiar un sistema térmico mediante un sistema mecánico equivalente. El presente trabajo utilizará dicha característica como se mostrará más adelante.

-Si se desconoce la función de transferencia de un sistema físico real, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema. Una vez establecida una función de transferencia, esta proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema.

### III.3. LA APLICACIÓN DE LAS SEÑALES A LOS SISTEMAS.

En las secciones anteriores intuitivamente se analizó la aplicación de una señal a un sistema específico dada la definición de la función de transferencia como

$$G(s) = \frac{L(\text{salida})}{L(\text{entrada})} = \frac{\text{señal\_de\_salida}}{\text{señal\_de\_entrada}}.$$

Como paso siguiente el diseñador deberá preguntarse cuál es el efecto en la respuesta al aplicar las señales a los sistemas. Es decir; se estudiará el resultado de despejar o aislar el término  $L(\text{salida})$  de la ecuación superior. La operación anterior resultará en una ecuación de la forma

$$G(s)L(\text{entrada}) = L(\text{salida})$$

donde el término  $G(s)L(\text{entrada})$  se interpreta como la “aplicación” de la entrada al sistema definido por la función de transferencia. Recuérdese que los términos anteriores se encuentran en función de la variable compleja “s”. Es importante resaltar que en el dominio de Laplace se “multiplican” los términos  $G(s)$  y  $L(\text{entrada})$  pero dicha operación en el dominio del tiempo es equivalente a la convolución entre la señal de entrada y la función que define el comportamiento del sistema. Entiéndase por convolución a la operación matemática que representa el grado de superposición entre dos funciones. En nuestro caso dicha “superposición” involucra a la función de transferencia del sistema y a la señal de entrada. Como se puede entonces deducir, la aplicación de la transformada de Laplace tiene como objetivo el simplificar la manipulación de las funciones implicadas en el cálculo de la respuesta.

De la explicación anterior, si se conoce la función de transferencia de un sistema es de interés estudiar la salida o respuesta para varias formas de la entrada.

### III.4. RESPUESTA IMPULSO.

Considere la salida o respuesta de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Previamente se definió a la función impulso como:

$$\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}.$$

Dicha función se define también como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}, 0 < t < t_0 \\ 0, t < 0, t_0 < t \end{cases}.$$

A partir de las tablas de transformadas de Laplace se encuentra que la transformada de la función Impulso Unitario (donde  $A=1$  para el término  $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0}$ ) es:

$$L[\delta(t)] = 1.$$

Tomando la definición para la función de transferencia tenemos:

$$G(s) = Y(s) / X(s),$$

donde,

$G(s)$  = función de transferencia

$Y(s)$  = salida o respuesta del sistema

$X(s)$  = entrada al sistema, en este caso la función  $\delta(t)$ .

Debido a que la transformada de Laplace de la función impulso unitario es la unidad, la transformada de Laplace del sistema es

$$G(s) = Y(s) / 1 = Y(s).$$

La transformada inversa de Laplace de la salida  $Y(s)$  proporciona la respuesta-impulso.

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior resulta:

$$L^{-1}[G(s)] = g(t).$$

La respuesta  $g(t)$  también se denomina *función de ponderación del sistema*.

Como se puede observar, la respuesta-impulso  $g(t)$  es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. Nótese que la transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia.

Por lo tanto, la función de transferencia y la respuesta-impulso de un sistema lineal e invariante con el tiempo contienen la misma información acerca de la dinámica del sistema.

De esta forma, si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la respuesta, es posible obtener la información completa acerca de sus características dinámicas. Recuérdese que un impulso unitario es una entidad matemática cuyo equivalente físico es difícilmente realizable. En la práctica, una entrada pulso con una duración muy corta comparada con las constantes de tiempo significativas del sistema se considera un impulso. Dichas constantes de tiempo se presentarán más adelante.

La importancia de la respuesta-impulso radica en el hecho de que al obtenerla se obtiene el comportamiento “inherente” del sistema pues se está caracterizando la función de transferencia.

### III.5. DIAGRAMA DE BLOQUES.

El *diagrama de bloques* de un sistema es una representación gráfica que permite mostrar tanto las funciones que lleva a cabo un componente determinado como el flujo de señales a lo largo del sistema. Tal diagrama muestra las relaciones existentes entre los diversos componentes. A diferencia de una representación matemática puramente abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de las señales del sistema real. En un diagrama de bloques se enlazan una con otra todas las variables del sistema, mediante bloques funcionales. El *bloque funcional* o simplemente *bloque* es un símbolo para representar la operación matemática que sobre la señal de entrada hace el bloque para producir la salida. Las funciones de transferencia de los componentes por lo general se introducen en los bloques correspondientes, que se conectan mediante flechas para indicar la dirección del flujo de señales. La señal solo

puede pasar en la dirección de las flechas. En la siguiente figura se presenta un diagrama de bloques para una función de transferencia.

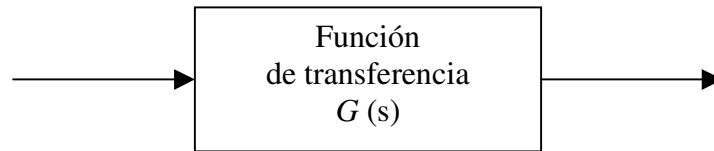


Figura 22. Función de transferencia.

La punta de flecha que señala el bloque indica la entrada, la punta de flecha que se aleja del bloque representa la salida. Tales flechas representan las señales. Recuérdese que para la construcción de los diagramas de bloques se trabaja con la premisa de que todas las señales y los modelos matemáticos a utilizar se encuentran en el dominio de Laplace por lo cual la integración del diagrama de bloques y las ecuaciones relacionadas consistirá meramente en la suma, sustracción y multiplicación de los bloques funcionales. Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en la facilidad de formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales además de permitir la separación de los componentes del sistema para su estudio particular.

### III.6. SISTEMAS EN LAZO CERRADO.

Los sistemas realimentados se denominan también *sistemas en lazo cerrado*. En la práctica, los términos de sistema realimentado y en lazo cerrado se utilizan indistintamente. En un sistema en lazo cerrado, se alimenta a la planta con la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la señal de salida misma o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), a fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor conveniente.

El término de sistema en lazo cerrado siempre implica el uso de una señal realimentada para reducir el error del sistema.

### III.7. SISTEMAS EN LAZO ABIERTO.

Los sistemas en los cuales la salida no se realimenta a la planta se denominan *sistemas en lazo abierto*. En otras palabras, en un sistema en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta a la planta. En consecuencia, a cada entrada al sistema le corresponde una condición de operación fija; como resultado, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, los sistemas en lazo abierto sólo se usan si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas ni externas.

Una ventaja del sistema en lazo cerrado es que el uso de la realimentación vuelve la respuesta del sistema relativamente insensible a las perturbaciones externas y a las variaciones internas en los parámetros del sistema. Dado lo anterior es posible utilizar componentes relativamente precisos y baratos para obtener el control de una planta.

Desde el punto de vista de la estabilidad, el sistema de control en lazo abierto es más fácil de desarrollar, porque la estabilidad del sistema no es un problema importante. Por otra parte, la estabilidad *es* una función principal en el sistema de control en lazo cerrado, lo cual puede conducir a corregir en exceso errores que producen oscilaciones de amplitud constante o cambiante.

### -Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado.

La siguiente figura muestra un diagrama de bloques para un sistema en lazo cerrado.

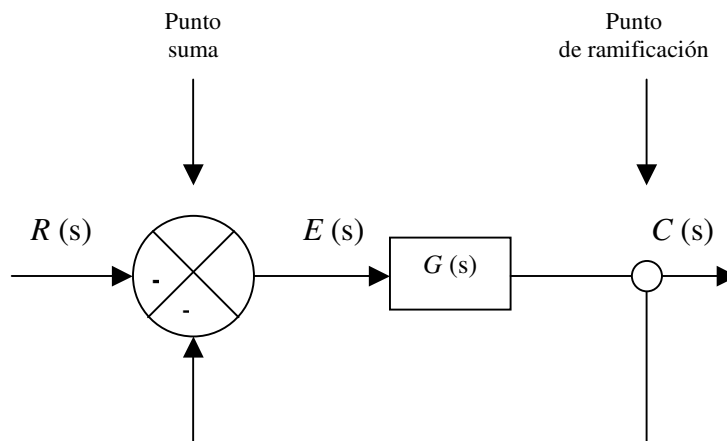


Figura 23. Sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria.

La salida  $C(s)$  se realimenta a un *punto suma*, en donde se compara con la entrada de referencia  $R(s)$ . La salida del bloque,  $C(s)$  en este caso, se obtiene multiplicando la función de transferencia  $G(s)$  por la entrada al bloque,  $E(s)$ . Cualquier sistema lineal puede representarse mediante un diagrama de bloques formado por puntos suma, bloques y puntos de ramificación. Cuando la salida se realimenta al punto suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación, cuya función de transferencia es  $H(s)$  mostrado en la figura anterior. La función del elemento de realimentación es modificar la salida antes de compararla con la entrada. En la práctica el elemento de realimentación es un sensor que mide la salida de la planta. La salida del sensor se compara con la entrada y se genera la señal de error.



### III.8. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO ABIERTO Y FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA TRAYECTORIA DIRECTA.

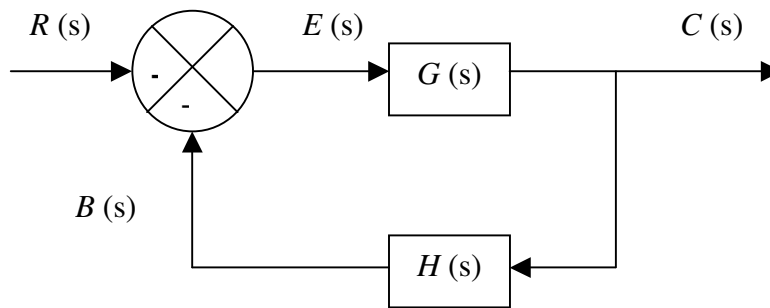


Figura 24. Sistema en lazo cerrado general.

Para la figura anterior se tiene el siguiente desarrollo:

$$C(s) = E(s)G(s).$$

De la misma forma tenemos la expresión adicional:

$$B(s) = C(s)H(s).$$

Sustituyendo  $C(s)$  en  $B(s)$  tenemos:

$$B(s) = E(s) G(s) H(s)$$

La expresión anterior se puede expresar como sigue:

$$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s).$$

El cociente de la señal de realimentación  $B(s)$  entre la señal de error  $E(s)$  se denomina *función de transferencia en lazo abierto*.

Supóngase que no se conoce el diagrama de bloques para la ecuación anterior

$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$  y se desea construir tal diagrama. Siguiendo la definición de la

función de transferencia como el cociente de la transformada de Laplace de la salida entre la función de transferencia de la entrada se tiene en consecuencia como salida al término  $B(s)$  mientras que el término  $E(s)$  es la entrada. Los términos  $G(s)$  y  $H(s)$  se encuentran multiplicados lo cual significa que se encuentran interconectados en cascada.

De las condiciones anteriores resulta el siguiente diagrama de bloques.

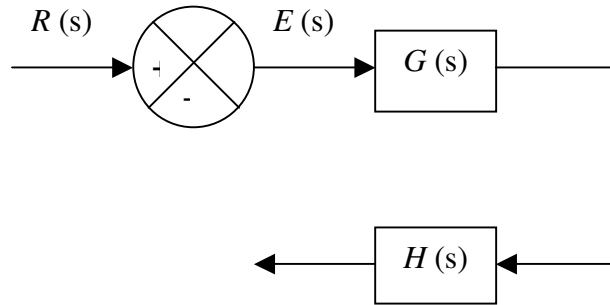


Figura 25. Sistema en lazo abierto.

De la figura anterior se puede observar que la señal de entrada se aplica a los bloques  $G(s)H(s)$  en cascada quedando la trayectoria de las señales “en lazo abierto”. En otras palabras el diagrama de bloques resultante se obtiene al “romper” la realimentación y analizar el flujo de las señales con el “lazo abierto”.

El cociente entre la salida  $C(s)$  y la señal de error  $E(s)$  se denomina *función de transferencia de la trayectoria directa* y se define como

$$\frac{C(s)}{E(s)} = G(s).$$

Se puede observar que tal función de transferencia de la trayectoria directa implica el cálculo de la salida  $C(s)$  en el punto “antes” de que dicha señal sea realimentada como se muestra en la siguiente figura.

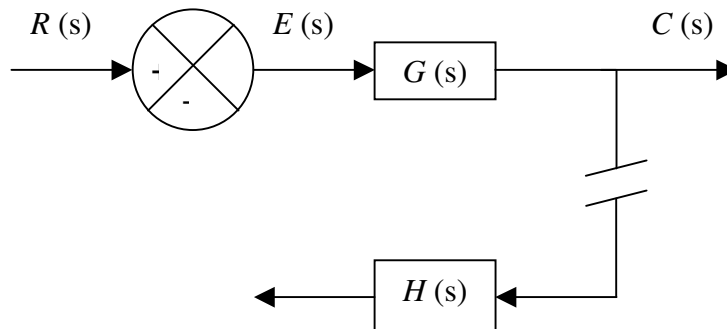


Figura 26. Diagrama de bloques para la trayectoria directa.

Se puede observar en las ecuaciones anteriores que si la función de transferencia de la trayectoria de realimentación  $H(s)$  es la unidad, la función de transferencia en lazo abierto y la función de transferencia de la trayectoria directa son iguales.

### III.9. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LAZO CERRADO.

Considere de nueva cuenta la siguiente figura de un sistema en lazo cerrado.

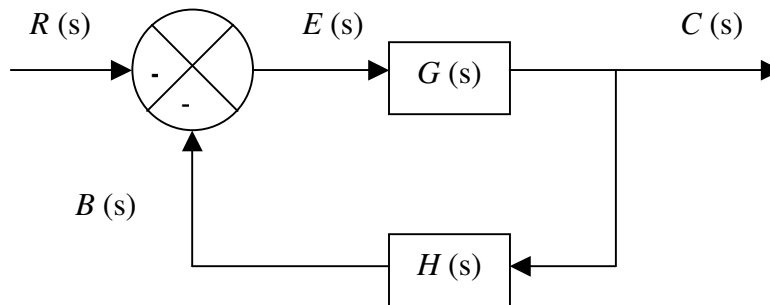


Figura 27. Sistema en lazo cerrado general.

Para dicho sistema se tienen las siguientes expresiones:

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = C(s)H(s)$$

Utilizando las expresiones anteriores y realizando sustituciones resulta:

$$C(s) = G(s)[R(s) - B(s)]$$

$$C(s) = G(s) [R(s) - C(s)H(s)]$$

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)C(s)H(s)$$

$$C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s)$$

A partir de la figura del sistema de lazo cerrado se puede ver que para la ecuación anterior se tiene como salida al término  $C(s)$  mientras que la entrada es  $R(s)$ . Despejando se encuentra que la función de transferencia para el sistema de la figura resulta en

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}.$$

La función de transferencia anterior que relaciona  $C(s)$  con  $R(s)$  se denomina *función de transferencia en lazo cerrado*. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema en lazo cerrado con la dinámica de los elementos de las trayectorias directa y de realimentación.

A lo largo del presente documento se ha resaltado la importancia de conocer la salida para una entrada particular. Tal salida se obtiene de la ecuación anterior aislando al término  $C(s)$  resultando

$$C(s) = \left[ \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] R(s).$$

En consecuencia, se puede ver que la salida del sistema en lazo cerrado depende claramente de la función de transferencia y de la naturaleza de la entrada.

A continuación se estudiará el efecto de una perturbación sobre el sistema y se encontrará la razón de la fortaleza de los sistemas en lazo cerrado ante tales perturbaciones. Obsérvese la siguiente figura.

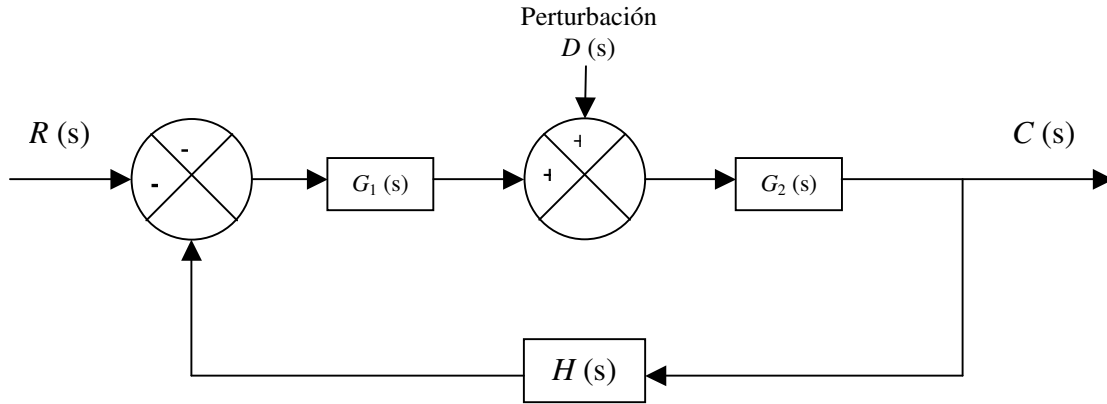


Figura 28. Sistema con perturbaciones.

Dicho sistema en lazo cerrado se encuentra sujeto a una perturbación. Cuando se presentan dos entradas (la entrada de referencia y la perturbación) en un sistema lineal, cada una de ellas puede tratarse en forma independiente; y las salidas correspondientes a cada entrada pueden sumarse para obtener la salida completa.

Al examinar el efecto de la perturbación  $D(s)$ , se puede suponer que el sistema está inicialmente relajado, con un error cero; después se puede calcular la respuesta  $C_D(s)$  sólo para la perturbación. Dicha respuesta se encuentra a partir de

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

Por otra parte, si se considera la respuesta a la entrada de referencia  $R(s)$ , se puede suponer que la perturbación es cero. En consecuencia, la respuesta  $C_R(s)$  a la entrada de referencia  $R(s)$  se obtiene a partir de

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

La respuesta a la aplicación simultánea de la entrada de referencia y la perturbación se obtiene sumando las dos respuestas individuales. En otras palabras, la respuesta  $C(s)$  producida por la aplicación simultánea de la entrada de referencia  $R(s)$  y la perturbación  $D(s)$  se obtiene mediante

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s)$$

lo cual resulta a su vez en

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)].$$

A continuación se presenta un análisis de los posibles valores de los términos de la ecuación anterior con el objeto de caracterizar el comportamiento del sistema resultante al incluir los efectos de la perturbación.

Considere el caso en el que  $|G_1(s)H(s)| \gg 1$  y  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ . Al aplicar tales consideraciones se puede aproximar el denominador como sigue:

$$1 + G_1(s)G_2(s)H(s) \approx G_1(s)G_2(s)H(s).$$

Al aplicar al aproximación anterior a la ecuación donde se define el cociente  $\frac{C_D(s)}{D(s)}$  resulta:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{G_1(s)H(s)}.$$

Se observa que al tener valores grandes de  $G_1(s)$  y  $H(s)$  la función de transferencia  $\frac{C_D(s)}{D(s)}$  decrece su valor y en consecuencia se suprime el efecto de la perturbación.

Al aplicar de nueva cuenta la aproximación  $1 + G_1(s)G_2(s)H(s) \approx G_1(s)G_2(s)H(s)$  a la función de transferencia  $\frac{C_R(s)}{R(s)}$  se tiene que

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{1}{H(s)}.$$

En consecuencia se tiene que la función de transferencia en lazo cerrado  $\frac{C_R(s)}{R(s)}$  se aproxima a  $1 / H(s)$  conforme aumenta la ganancia de  $G_1(s)G_2(s)H(s)$ . Lo anterior significa que si  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ , entonces la función de transferencia en lazo cerrado  $\frac{C_R(s)}{R(s)}$  se vuelve independiente de  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  y se hace inversamente proporcional a  $H(s)$ , por lo que las variaciones de  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  no afectan la función de transferencia en lazo cerrado de  $\frac{C_R(s)}{R(s)}$ .

Del mismo modo se puede observar que, para la respuesta sin perturbaciones, cualquier sistema en lazo cerrado con una realimentación unitaria,  $H(s) = 1$  y  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$ , tiende a hacer iguales la entrada y la salida dado que:

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{1} = 1,$$

lo cual implica la condición:

$$C_R(s) = R(s).$$

### III.10. REALIMENTACIÓN POSITIVA Y NEGATIVA.

Hasta el momento deberá notarse que se ha empleado un signo negativo para la señal retroalimentada en el punto suma de los diagramas de bloques. Lo anterior es equivalente a “restar” dicha señal de la entrada de referencia con objeto de calcular el error o desviación de la salida respecto de la entrada.

Para el caso anterior el tipo de realimentación que se ha empleado recibe el nombre de *realimentación negativa*.

Sin embargo, el diseñador debe preguntarse que ocurre cuando el signo utilizado no es negativo sino positivo. Cuando se presenta dicha condición se presenta un sistema con *realimentación positiva*. En otras palabras el valor de la salida se “suma” al valor de referencia de la entrada.

Al presentarse dicho incremento en la ganancia, es probable que se obtenga una respuesta más rápida pero acompañada de inestabilidades en el sistema.

La realimentación negativa se conoce también como *degenerativa* mientras que a la realimentación positiva también se le llama *regenerativa*. La realimentación positiva puede ser útil pues los efectos de la desestabilización de tal arreglo pueden usarse para generar señales oscilatorias.

Durante las secciones anteriores se han presentado las herramientas necesarias para definir y manipular un sistema físico de interés. Se presentaron los métodos usualmente empleados para modelar los sistemas físicos y las señales aplicables a ellos con el objetivo de integrar una expresión matemática que describe el comportamiento del sistema resultando en el concepto de la función de transferencia. Dicha función de transferencia nos permite relacionar la salida del sistema con su entrada y consecuentemente permitir la “reconversión” del sistema al dominio del tiempo para observar su comportamiento dinámico. En la sección siguiente se presentará el análisis de dicho comportamiento dinámico y las herramientas empleadas para su estudio.

### III.11. ANÁLISIS DE LA RESPUESTA TRANSITORIA.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado.

En la práctica, la señal de entrada para un sistema no se conoce con anticipación, es de naturaleza aleatoria, y la entrada instantánea no puede expresarse en forma analítica. Sólo en algunos casos especiales se conoce con anticipación la señal de entrada y se puede expresar en forma analítica o mediante curvas.

Para diferenciar el comportamiento de un sistema respecto a otro el método que se usa es el de aplicar un conjunto de señales previamente definidas a dichos sistemas para observar sus respuestas particulares a tales entradas.

El anterior procedimiento es en realidad una “simulación” de lo que el sistema experimentará en la vida real. El uso de señales de prueba se justifica pues existe una correlación entre las características de la respuesta de un sistema para un señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales. Adicionalmente, como se mencionó en la sección concerniente a las señales, muchas de las entradas reales a un sistema se pueden modelar con las definiciones de señales exponencial, senoidal, impulso, etc. así como sus combinaciones.

Las señales de prueba que se usan regularmente son las funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales y otras. Con dichas señales es posible realizar análisis matemáticos y experimentales del comportamiento de sistemas físicos.

A pesar de lo anterior el diseñador deberá tener nociones sobre la naturaleza de las señales reales a las cuales un sistema particular estará expuesto. Con dicho conocimiento, la forma de la entrada a la que el sistema estará sujeto con mayor frecuencia bajo una operación normal determinará cuál de las señales de entrada típicas se debe utilizar para analizar las características del sistema. Si las entradas para un sistema son funciones del tiempo que cambien gradualmente, una función rampa sería una buena señal de prueba. Asimismo, si un sistema está sujeto a perturbaciones repentinas, una función escalón sería una buena señal de prueba; y para un sistema sujeto a entradas de choque, una función impulso es la más conveniente.

Una vez diseñado el sistema completo con base en las señales de prueba, por lo general el desempeño del mismo en respuesta a las entradas reales es satisfactorio.

### III.12. RESPUESTA TRANSITORIA Y RESPUESTA EN ESTADO ESTABLE.

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la *respuesta transitoria* y la *respuesta en estado estable*. Es importante señalar que cuando se aplica el método de la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial que describe al sistema es posible obtener simultáneamente tanto el componente transitorio como el componente de estado estable de la solución. Por respuesta transitoria entiéndase a aquella presente desde el inicio de un estímulo hasta un estado final estable del sistema en estudio. A manera de explicación obsérvese la siguiente figura.

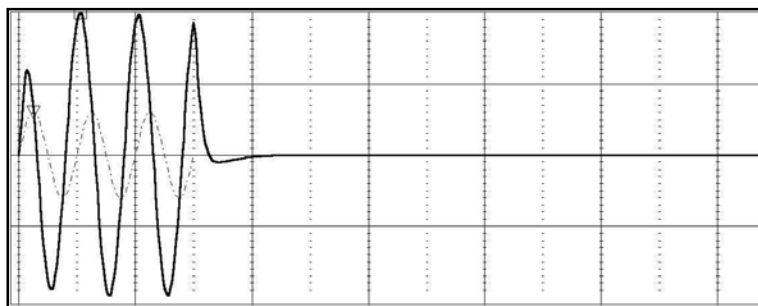


Figura 29. Ejemplo de una respuesta transitoria.

Para la figura debe entenderse que la gráfica corresponde al valor de la señal de salida. El estado inicial del valor de la salida es “cero”; lo cual no implica que no exista salida para tal punto en el tiempo. Por ejemplo la gráfica pudiera interpretarse como un nivel de temperatura en el cual el valor cero significa que la temperatura se encuentra “ni más caliente, ni más fría” que lo deseado por un operador. Tómese ahora la condición en que una nueva entrada se presenta; sea esta un abrupto decrecimiento de la temperatura. El sistema reaccionará a tal señal de entrada y se obtendrá un nuevo nivel de temperatura con el cual el sistema tenderá a estabilizarse. Para el caso de la figura después de la aplicación de la señal de entrada el sistema oscila y vuelve a estabilizarse en el valor inicial. Consecuentemente con la definición se observa que la respuesta transitoria comprende entonces desde la aplicación de una excitación que “modifica” el nivel de la señal de salida original para después regresar al valor original. Es así que el sistema responde a dicha señal de entrada y el valor de la salida es llevado de un “estado inicial” a un nuevo valor o “estado final” que puede o no tener el mismo valor. Debe entenderse por respuesta en estado estable a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme  $t$  tiende a infinito. Obsérvense las siguientes figuras.

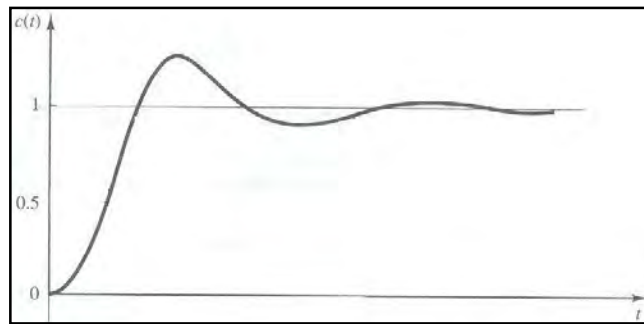


Figura 30. Sistema subamortiguado.

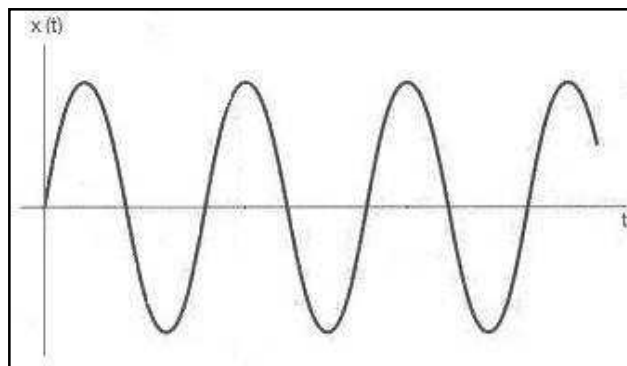


Figura 31. Sistema con factor de amortiguamiento = 0.



Al retomar la descripción de la respuesta en estado estable para las figuras anteriores se puede ver que para la gráfica de la respuesta del primer sistema la respuesta en estado estable “tiende” a un valor a lo largo del tiempo. Por el contrario para el sistema cuya respuesta se muestra en la segunda figura el comportamiento de la respuesta en estado estable es oscilatorio.

### **III.13. ESTABILIDAD ABSOLUTA, ESTABILIDAD RELATIVA Y ERROR EN ESTADO ESTABLE.**

El estudio de la dinámica de un sistema físico tiene como objetivo el poder predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema lineal e invariante en el tiempo es *estable* si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema lineal e invariante en el tiempo es *críticamente estable* si las oscilaciones de la salida continúan para siempre. Será, a su vez, *inestable* si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. En la realidad, la salida de un sistema físico puede aumentar hasta un cierto grado, pero puede estar limitada por “detenciones” físicas. Por ejemplo, a pesar de que la respuesta de un sistema mecánico resulte en oscilaciones cada vez de mayor amplitud es muy probable que tal respuesta matemática resulte primero en la fractura de algún componente en vez de continuar creciendo sin límite. Ante tales respuestas el sistema puede entonces colapsarse o volverse no lineal después de que la salida excede cierta magnitud, por lo cual ya no se aplican las ecuaciones diferenciales lineales. Entre los comportamientos importantes del sistema, aparte de la estabilidad absoluta, se encuentra el error en estado estable. Si la salida de un sistema en estado estable no coincide exactamente con la entrada, se dice que el sistema tiene un error en estado estable. Este error indica la precisión del sistema. Al analizar un sistema, se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estable.

### **III.14. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN Y SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.**

Recuérdese que para comenzar el estudio del comportamiento de un sistema físico se cuenta ya con la función de transferencia del sistema y la señal de entrada; ambas en el dominio de Laplace y listas para su manipulación. Así mismo, como se presentó en las secciones anteriores, si la potencia más alta de  $s$  en el denominador de la función de transferencia resultante para un sistema en particular es igual a  $n$ , el sistema se denomina *sistema de  $n$ -ésimo orden*.

En la sección siguiente se presenta el estudio del comportamiento de los sistemas de primero y de segundo orden con entradas escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario. Se supone que las condiciones iniciales son cero.

### III.14.1. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN.

Considere la siguiente función de transferencia.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

Se puede observar que la potencia del término “s” es 1; en consecuencia el sistema es de primer orden.

#### -Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden.

Tómese como entrada al sistema una función escalón unitario. La transformada de Laplace de la función escalón unitario es  $L[R(s)] = (1/s)$ . Al despejar el término  $C(s)$  y sustituir el valor de  $R(s) = (1/s)$  resulta:

$$C(s) = \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right] \left[ \frac{1}{s} \right].$$

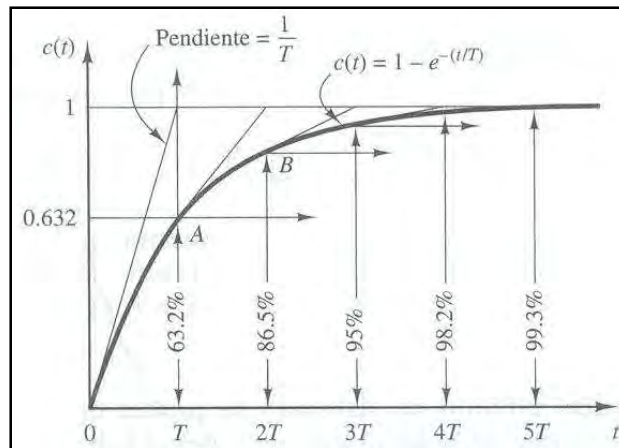
Al expandir la expresión anterior en fracciones parciales se tiene:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)}.$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a los términos anteriores se tiene:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0.$$

De la expresión anterior se observa que la salida es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Obsérvese que, conforme más pequeña es la constante de tiempo  $T$ , más rápida es la respuesta del sistema. La curva correspondiente a la salida  $c(t)$  se presenta a



continuación.

Figura 32. Respuesta de un sistema de primer orden a entrada escalón.

Es de interés conocer el valor de la respuesta después de un periodo  $T$ . Tal valor se encuentra al sustituir  $t=T$  en la ecuación que define a  $c(t)$ . Consecuentemente se encuentra que:

$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

Se puede observar entonces que al transcurrir de un tiempo  $T$  la salida alcanzó un valor de 0.632 o 63.2% de su cambio total pues recuérdese que su valor final tiende a la unidad. Del mismo modo al sustituir un valor de  $t = 4T$  la respuesta alcanza un valor de 98.2% del valor final. En consecuencia para valores de  $t$  mayores a  $4T$ , la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. De la ecuación para  $c(t)$ , el estado estable se alcanza matemáticamente sólo después de un tiempo infinito. Sin embargo, en la práctica, una estimación razonable del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

**-Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden.**

Tómese como entrada al sistema una función rampa unitaria. La transformada de Laplace de la función rampa unitaria es  $L[R(s)]=(1/s^2)$ . Al despejar el término  $C(s)$  y sustituir el valor de  $R(s) = (1/s^2)$  resulta:

$$C(s) = \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right] \left[ \frac{1}{s^2} \right].$$

Al expandir la expresión anterior en fracciones parciales se tiene:

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1}.$$

Al aplicar la transformada inversa de Laplace a los términos anteriores se tiene:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0.$$

Considere la siguiente figura.

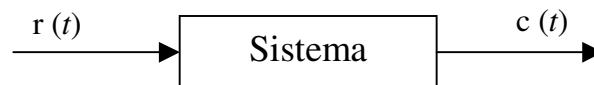


Figura 33. Diagrama de bloques de un sistema general.

Para el caso en estudio la función rampa unitaria se define como:

$$r(t) = t.$$

De la definición del error como la diferencia entre la salida y una entrada de referencia del diagrama de bloques anterior se tiene:

$$e(t) = r(t) - c(t).$$

Sustituyendo el valor de  $r(t) = t$  y la ecuación  $c(t) = t - T + Te^{-t/T}$  en la expresión anterior resulta:

$$e(t) = t - [t - T + Te^{-t/T}]$$

$$e(t) = T(1 - e^{-t/T}).$$

Se observa que conforme  $t$  tiende a infinito el término exponencial se aproxima a cero y por tanto la señal de error se aproxima a  $T$ . Lo anterior se formaliza como sigue:

$$e(\infty) = T.$$

El error después de la entrada rampa unitaria es igual a  $T$  para una  $t$  suficientemente grande. También de la ecuación anterior se deduce que mientras más pequeña es la constante de tiempo  $T$ , más pequeño el error en estado estable después de aplicar la entrada. La entrada rampa unitaria y el error en estado estable se muestran en la siguiente figura.

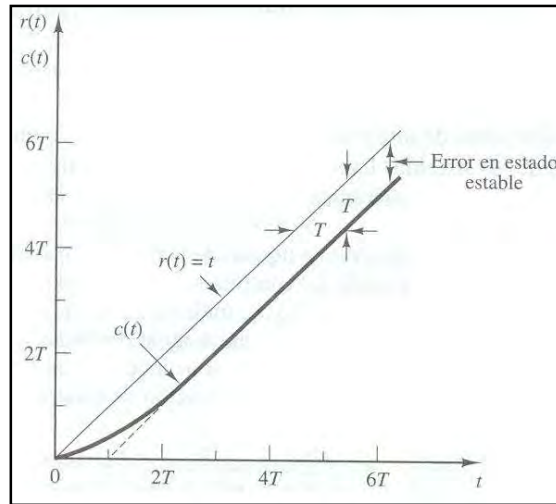


Figura 34. Entrada rampa y salida para un sistema de primer orden.

**-Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden.**

Tómese como entrada al sistema una función impulso unitario. La transformada de Laplace de la función impulso unitario es  $L[R(s)] = 1$ . Al despejar el término  $C(s)$  y sustituir el valor de  $R(s) = 1$  resulta:

$$C(s) = \left[ \frac{1}{Ts + 1} \right].$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión anterior resulta:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}.$$

La respuesta a entrada impulso unitario se presenta en la siguiente figura.

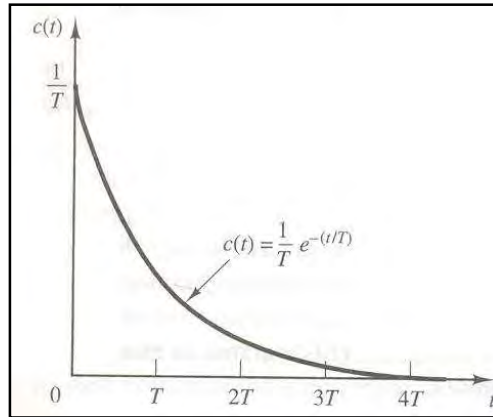


Figura 35. Salida a entrada impulso para sistemas de primer orden.

Debe resaltarse que comparando las respuestas  $c(t)$  para cada una de las tres entradas utilizadas se encuentra que, para la rampa unitaria, la salida es:

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0.$$

Para la entrada escalón unitario, la salida  $c(t)$ , se encuentra como la derivada respecto al tiempo de la respuesta para la entrada rampa unitaria resultando en:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0.$$

Finalmente, para la entrada impulso unitario, la respuesta se encuentra al derivar respecto al tiempo la respuesta obtenida con la entrada escalón unitario para ser:

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}.$$

Se observa que al definirse la respuesta para cualquiera de las 3 entradas utilizadas es posible obtener la respuesta del sistema al otro par de señales sin necesidad de someter el sistema a tales entradas simplemente mediante derivaciones o integraciones de la señal de salida actual. En el caso para obtener la respuesta de interés mediante la integración las constantes que resultan de integrar la función de respuesta se determinan a partir de la condición inicial de salida cero. La propiedad anterior solo es aplicable a los sistemas lineales e invariantes en el tiempo; los sistemas lineales variantes con el tiempo y los sistemas no lineales no poseen la propiedad anterior.

### III.14.2. SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN.

La función de transferencia general para un sistema de segundo orden presenta la siguiente estructura:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

donde:

$$\sigma = \xi \omega_n.$$

Al término  $\sigma$  se le denomina *amortiguamiento*, a  $\xi$  se le nombra *factor de amortiguamiento* y a  $\omega_n$  se le nombra *frecuencia natural no amortiguada*.

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe en términos de los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$ . Si  $0 < \xi < 1$ , los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . El sistema, entonces se denomina *subamortiguado* y la respuesta transitoria es oscilatoria. Si  $\xi = 1$ , el sistema se denomina *críticamente amortiguado*. Los sistemas *sobreamortiguados* corresponden a  $\xi > 1$ . La respuesta transitoria de los sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados no oscila. Si  $\xi = 0$ , la respuesta transitoria no se amortigua y se obtiene una oscilación sostenida.

Así mismo se define la siguiente expresión:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}.$$

A la variable  $\omega_d$  se le denomina *frecuencia natural amortiguada*.

### -Respuesta escalón unitario de sistemas de segundo orden.

-Para un sistema subamortiguado ( $0 < \xi < 1$ ). Al sustituir  $R(s) = (1/s)$  en la función de transferencia de  $C(s)/R(s)$  se tiene:

$$C(s) = \left[ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right] \left[ \frac{1}{s} \right].$$

Al expandir la expresión anterior por el método de fracciones parciales y utilizar la expresión para la frecuencia natural amortiguada se obtiene:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}.$$

De las tablas para transformadas de Laplace se tiene que:

$$L^{-1} \left[ \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t$$

y

$$L^{-1} \left[ \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\xi\omega_n t} \text{sen} \omega_d t$$

Al aplicar las expresiones anteriores para la obtención de la transformada inversa de Laplace de la función  $C(s)$  se obtiene:

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right), \text{ para } t \geq 0.$$

A partir de la ecuación anterior se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ , misma que es función del amortiguamiento relativo  $\xi$ .

La señal de error para este sistema es la diferencia entre la entrada y la salida, y es:

$$e(t) = r(t) - c(t).$$

$$e(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

Dicha señal de error presenta una oscilación senoidal amortiguada durante el lapso transitorio mientras que para el estado estable ó  $t = \infty$  no existe error ente la entrada y la salida pues el factor exponencial decae.

-Para un caso críticamente amortiguado ( $\xi = 1$ ). En este caso los dos polos de  $C(s)/R(s)$  son casi iguales. Al sustituir el valor de  $\xi = 1$  en la expresión de la función de transferencia general para un sistema de segundo orden resulta:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2(1)\omega_n s + \omega_n^2}.$$

El denominador de la expresión anterior se puede factorizar para obtener una nueva expresión para la función de transferencia como se muestra a continuación.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2(1)\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

Sustituyendo la entrada escalón unitaria  $R(s)=1/s$  en la expresión anterior resulta:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \frac{1}{s}$$

Aplicando la expansión en fracciones parciales para la ecuación anterior se encuentra la siguiente ecuación:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \omega_n)} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión para  $C(s)$  se encuentra que:

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \text{ para } t \geq 0.$$

-Para un caso sobreamortiguado ( $\xi > 1$ ). En este caso los dos polos de  $C(s)/R(s)$  son reales negativos y diferentes.

Considérese de nueva cuenta la función de transferencia  $C(s)/R(s)$ .

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Las raíces del polinomio en el denominador se encuentran al aplicar la fórmula  $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$  resultando en:

$$\begin{aligned} \text{raíces} &= \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{(2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 \omega_n^2 - \omega_n^2} \\ \text{raíces} &= -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \end{aligned}$$

En consecuencia el polinomio del denominador se puede también expresar como el producto de sus raíces de la siguiente manera:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s + \xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})$$

Sustituyendo lo anterior en la función de transferencia  $C(s)/R(s)$  se tiene:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

Para la entrada escalón unitario  $R(s)=1/s$  la ecuación para  $C(s)$  resulta en:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1})} \frac{1}{s}.$$

Se puede observar que la expresión consiste en tres términos de primer orden en el denominador. Tal ecuación puede expandirse en fracciones parciales y al aplicar la transformada inversa de Laplace resultará:

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$$

Para la expresión anterior aplíquense las siguientes sustituciones.

$$\begin{aligned} s_1 &= (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \\ s_2 &= (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \end{aligned}$$

Al aplicar dichas equivalencias a la expresión para  $c(t)$  se encuentra que:

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right).$$

De la ecuación anterior se observa que la respuesta incluye dos términos exponenciales que decaen. Cuando  $\xi$  es mucho mayor que la unidad uno de los exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede pasarse por alto. Lo anterior se permite debido a que el efecto de  $-s_1$  en la respuesta es más pequeño que el de  $-s_2$ , dado que el término que incluye  $s_1$  en la ecuación de  $c(t)$  se descompone más rápido que el término que tiene a  $s_2$ . Una vez



desaparecido el término exponencial que decae más rápido, la respuesta es similar a la de un sistema de primer orden y la función de transferencia  $C(s)/R(s)$  se aproxima mediante:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{(s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})(s + s_2)} = \frac{s_2}{s + s_2}$$

Con la función de transferencia aproximada anterior la respuesta escalón unitario es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}{(s + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})} \frac{1}{s}$$

y la respuesta en el tiempo se define mediante:

$$c(t) = 1 - e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0.$$

La respuesta aproximada al escalón unitario definida en la ecuación anterior es aplicable cuando uno de los polos de la función de transferencia puede ignorarse. La aplicación de dicha consideración depende del lapso de tiempo por analizar pues si es de interés estudiar la respuesta transitoria durante los primeros instantes en que la planta experimenta una entrada no se pueden omitir los efectos de la exponencial que decrece más rápidamente.

La siguiente figura presenta una descripción gráfica del comportamiento de la salida de un sistema de segundo orden al variar el valor del factor de amortiguamiento  $\xi$ .

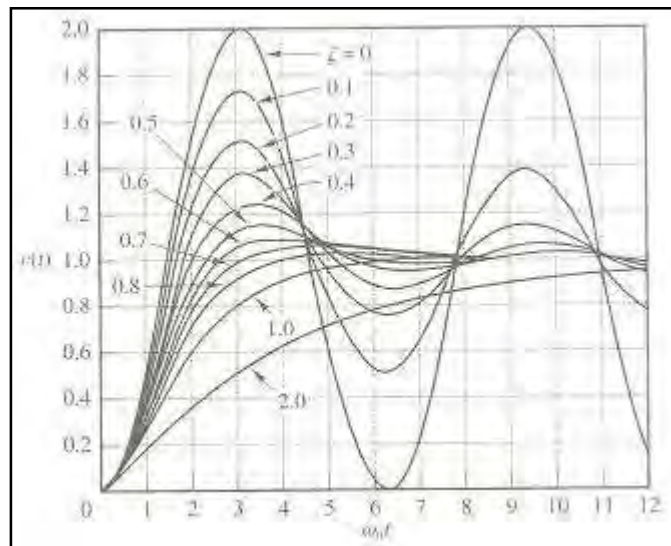


Figura 36. Salida al variar el factor de amortiguamiento.

De la figura anterior se observa que un sistema subamortiguado con  $\xi$  entre 0.5 y 0.8 se acerca al valor final con mayor rapidez que un sistema críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Entre los sistemas que responden sin oscilación, un sistema críticamente amortiguado presenta la respuesta más rápida. Un sistema sobreamortiguado siempre es lento para responder a las entradas.

Se debe resaltar que, para los sistemas de segundo orden, cuyas funciones de transferencia en lazo cerrado son diferentes a la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\sigma\gamma + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

las curvas de respuesta escalón son distintas a las presentadas en la figura anterior y deberán de construirse a partir de las ecuaciones resultantes para el sistema en estudio.

### **III.15. LA RESPUESTA TRANSITORIA.**

#### **III.15.1. DEFINICIONES DE LAS ESPECIFICACIONES DE RESPUESTA TRANSITORIA.**

En las secciones anteriores se analizó el comportamiento matemático de los sistemas ante diferentes entradas. En el siguiente apartado se presentarán los parámetros que se miden en la señal de respuesta. Tales parámetros permiten comparar sistemas diferentes para una entrada similar además de proporcionar un conjunto de valores que facilitan la comprensión de la dinámica del sistema en estudio.

En muchos casos prácticos, las características de desempeño de un sistema se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Los sistemas que pueden almacenar energía no responden instantáneamente a una entrada y exhiben una respuesta transitoria. Obsérvese que la gran mayoría de los sistemas físicos almacenan energía por lo cual es difícil encontrar sistemas cuya respuesta no oscile.

Generalmente las características de desempeño se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario, dado que ésta señal de entrada es fácil de generar además de representar un cambio usualmente experimentado por los sistemas. Recuérdese que a partir de la respuesta escalón es posible obtener matemáticamente la respuesta a otras entradas.

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Usualmente, para comparar las respuestas transitorias de varios sistemas, se asume que el sistema está inicialmente en reposo por lo cual la salida y todas las derivadas con respecto al tiempo son cero.

La respuesta transitoria de un sistema práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable.

Las características de la respuesta transitoria comúnmente empleadas para caracterizar una entrada escalón unitario son:

-Tiempo de retardo,  $t_d$ . Se define como el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez la mitad del valor final.

-Tiempo de levantamiento,  $t_r$ . Se define como el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10% al 90% de su valor final. También puede definirse un rango diferente como del 5% al 95% ó del 0% al 100%. Para sistemas subamortiguados de segundo orden usualmente se emplea el rango de 0% a 100%. Para sistemas sobreamortiguados suele utilizarse el rango de 10% a 90%.

-Tiempo pico,  $t_p$ . Se define como el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso.

-Sobrepaso máximo,  $M_p$ . Se define como el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobrepaso máximo que se define como:

$$\% M_p = \left( \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right) \times 100\%.$$

La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica de manera directa la estabilidad relativa del sistema. Lo anterior se entiende al analizar la diferencia entre el valor de la respuesta para  $t = t_p$  y el valor de la respuesta en el infinito o en estado estable. Cuando tal diferencia es pequeña el valor del pico más “alto” de la respuesta no se aleja del valor de la respuesta final implicando que el sistema es *relativamente estable* en vez de variar desde un valor grande para dicha diferencia hasta llegar al valor final.

-Tiempo de asentamiento,  $t_s$ . Se define como el tiempo requerido para que la curva de respuesta permanezca dentro de un rango alrededor del valor final. Dicho rango se calcula como un porcentaje absoluto del valor final, generalmente de 2% a 5%. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema. En otras palabras se relaciona con la tasa de decaimiento de los términos exponenciales presentes en la respuesta.

La mayoría de los sistemas se encuentran en el dominio del tiempo. En consecuencia las características de la respuesta transitoria son muy importantes y es la intención del diseñador modificar la dinámica del sistema para que presente una respuesta transitoria satisfactoria.

Es importante resaltar que las características anteriores no necesariamente se aplican en todos los casos. Por ejemplo, para un sistema sobreamortiguado no se utilizan los conceptos de tiempo pico y sobrepaso máximo pues no se presentan en la respuesta para este tipo de sistemas ya que el nuevo valor de la respuesta nunca se ve rebasado.

Las características de la respuesta transitoria se muestran en la figura siguiente:

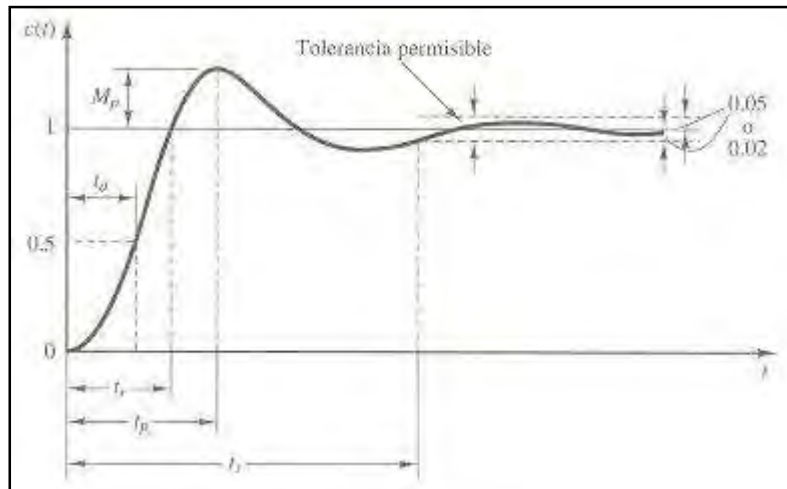


Figura 37. Características de la respuesta transitoria.

Es conveniente que la respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada. Para obtener una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, el factor de amortiguamiento relativo usualmente se selecciona con un valor entre 0.4 y 0.8. Valores menores a 0.4 producen un valor de sobrepaso excesivo en la respuesta transitoria, y un sistema con un valor mayor a 0.8 responde con lentitud.

### III.15.2. ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA.

Para los cálculos considérese un sistema de segundo orden subamortiguado con función de transferencia y ecuación de respuesta en el dominio del tiempo dadas por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

- Tiempo de levantamiento,  $t_r$ . De la definición del tiempo de levantamiento para un sistema subamortiguado se observa que dicho valor será tal que la respuesta adquiera el 100% de su valor. Al considerar una entrada escalón unitario el valor de la salida transcurrido el tiempo de levantamiento debe tener un valor igual a la unidad. Tal sustitución se aplica en la ecuación de la respuesta en el dominio del tiempo resultando en:

$$c(t) = 1 = 1 - e^{-\xi\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r \right)$$

$$1 - 1 = e^{-\xi\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r \right)$$

$$0 / e^{-\xi\omega_n t_r} = \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r \right)$$

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t_r = 0$$

o bien,

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

Recordando que  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  y sustituyendo en la ecuación anterior se encuentra:

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\omega_d}{\omega_n \xi}.$$

Del denominador de la función de transferencia para un sistema de segundo orden se observa que:

$$\sigma = \xi\omega_n.$$

Al sustituir la expresión anterior en  $\tan \omega_d t_r = -\frac{\omega_d}{\omega_n \xi}$  resulta:

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\omega_d}{\sigma}.$$

Al resolver el tiempo de levantamiento a partir de la ecuación anterior se encuentra que:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Donde  $\beta$  se define en la siguiente figura:

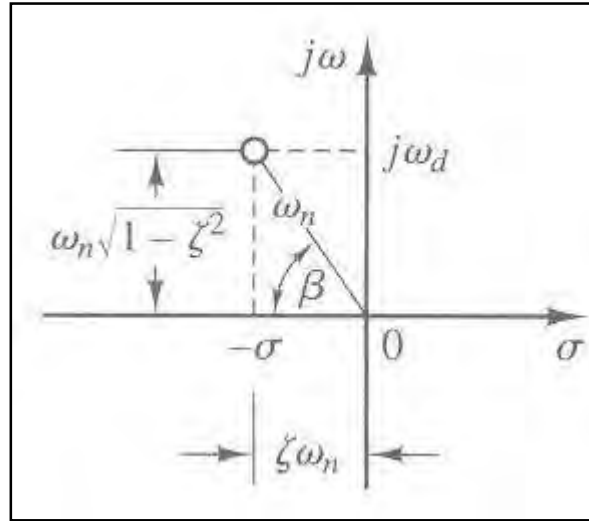


Figura 38. Ángulo Beta.

- Tiempo pico,  $t_p$ . Para el cálculo del tiempo pico se utiliza la interpretación geométrica de la derivada. La ecuación de la respuesta del sistema  $c(t)$  proporciona el valor de la salida a través del tiempo. En los puntos donde ocurren picos una recta tangente a la curva deberá tener un valor igual a cero, es decir deberá ser horizontal. Consecuentemente al derivar la ecuación de la respuesta con respecto al tiempo e igualar el resultado a cero es posible encontrar el valor de tiempo para el cual la respuesta presenta el valor pico. Tal desarrollo se muestra a continuación:

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

$$\frac{dc}{dt} = 0 + \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right) - e^{-\xi\omega_n t} \left( -\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_d t \right)$$

Empleando la expresión  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  para sustituir  $\omega_n$  por  $\omega_d$  en el segundo término de la ecuación anterior resulta:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right) - e^{-\xi\omega_n t} \left( -\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_d t \right)$$

$$\frac{dc}{dt} = e^{-\xi\omega_n t} \left( \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_d t + \frac{\xi^2\omega_d}{1-\xi^2} \operatorname{sen} \omega_d t \right) - e^{-\xi\omega_n t} \left( -\omega_d \operatorname{sen} \omega_d t + \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \omega_d t \right)$$

Se observa que los términos coseno se cancelan uno al otro y la función  $dc/dt$  evaluada en  $t_p$ , se simplifica a:

$$\left( \text{sen} \omega_d t_p \right) e^{-\xi \omega_n t_p} \left( \frac{\xi^2 \omega_d}{1 - \xi^2} + \omega_d \right) = 0,$$

$$\text{sen} \omega_d t_p = 0$$

$$t_p \omega_d = \text{arcsen}(0) = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Dado que el tiempo pico corresponde al primer pico sobrepaso máximo,  $\omega_d t_p = \pi$ . Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

El tiempo pico  $t_p$  corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada. Lo anterior se explica al utilizar la expresión  $\omega_d = 2\pi f_d$  y operar los términos como se muestra a continuación:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2\pi f_d} = \frac{\pi/1}{2\pi/T_d} = \frac{T_d}{2}.$$

- Sobrepaso máximo,  $M_p$ . El sobrepaso máximo se presenta en el tiempo pico  $t=t_p$ . Al considerar una entrada escalón unitario se entiende que el valor en estado estable de la respuesta tenderá a la unidad. En consecuencia para la obtención del valor del sobrepaso máximo es necesario restar la unidad del valor de la salida en  $t=t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ :

$$M_p = c(t_p) - 1$$

$$M_p = 1 - e^{-\xi \omega_n \left( \frac{\pi}{\omega_d} \right)} \left[ \cos \omega_d \left( \frac{\pi}{\omega_d} \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen} \omega_d \left( \frac{\pi}{\omega_d} \right) \right] - 1$$

$$M_p = -e^{-\xi \omega_n \left( \frac{\pi}{\omega_d} \right)} \left[ \cos(\pi) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{sen}(\pi) \right]$$

$$M_p = -e^{-\xi \omega_n \left( \frac{\pi}{\omega_d} \right)} [-1]$$

Sustituyendo la expresión  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$  en la ecuación anterior resulta:

$$M_p = e^{-\xi \omega_n \pi / \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = e^{-\left( \xi / \sqrt{1 - \xi^2} \right) \pi}$$

Como se mencionó previamente, el sobrepaso máximo se puede expresar como un porcentaje dado por  $e^{-\left( \xi / \sqrt{1 - \xi^2} \right) \pi} \times 100$ .

- Tiempo de asentamiento,  $t_s$ . Recuérdese que la respuesta de un sistema de segundo orden se puede expresar como:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right), \text{ para } t \geq 0.$$

Las curvas  $1 \pm \left( e^{-\xi\omega_n t} / \sqrt{1-\xi^2} \right)$  son las curvas envolventes de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario. La curva de respuesta  $c(t)$  siempre permanece dentro de un par de curvas envolventes como se muestra en la siguiente figura.

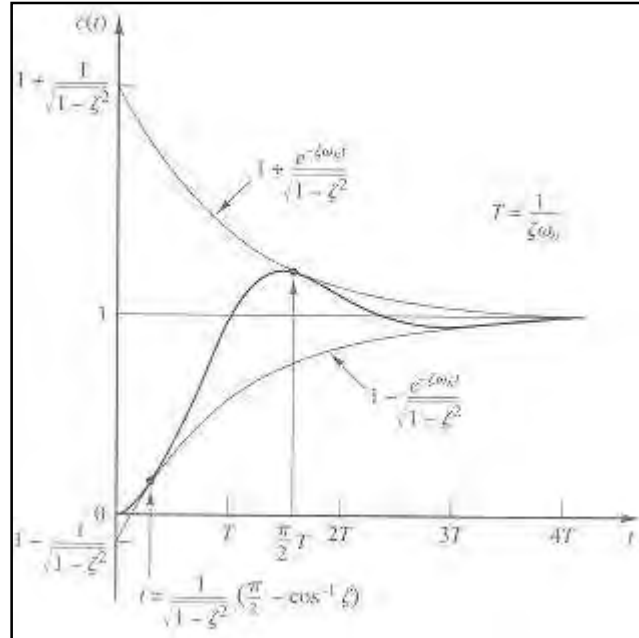


Figura 39. Curvas envolventes para la respuesta de un sistema de segundo orden.

La constante de tiempo de estas curvas envolventes es  $1/\xi\omega_n$ . La velocidad de decaimiento de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo  $1/\xi\omega_n$ . Para un valor de  $\omega_n$  determinado, el tiempo de asentamiento  $t_s$ , es una función del factor de amortiguamiento relativo  $\xi$ . De la figura anterior se puede observar que para un valor de  $\omega_n$  y para un rango de  $\xi$  entre 0 y 1, el tiempo de asentamiento  $t_s$ , para un sistema ligeramente amortiguado es más grande que para un sistema amortiguado de manera moderada. Para un sistema sobreamortiguado, el tiempo de asentamiento  $t_s$  se vuelve más grande dado el lento inicio de la respuesta.

El tiempo de asentamiento correspondiente a una tolerancia de  $\pm 2$  ó  $\pm 5$  % se mide en términos de la constante de tiempo  $T = 1/\xi\omega_n$ .



Utilizando el criterio del 2% el tiempo de asentamiento  $t_s$  se define como:

$$t_s = 4T = 4 / \zeta\omega_n$$

mientras que con el criterio del 5% se determina por:

$$t_s = 3T = 3 / \zeta\omega_n .$$

Del par de ecuaciones anteriores se puede observar que el tiempo de asentamiento es inversamente proporcional al producto del factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Dado que el valor de  $\zeta$  se determina, por lo general, a partir de los requerimientos del sobrepaso máximo permisible, el tiempo de asentamiento se determina principalmente mediante la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Lo anterior implica que la duración del transitorio en la respuesta del sistema se puede variar, sin modificar el sobrepaso máximo, ajustando la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ . Consecuentemente si se desea una respuesta rápida,  $\omega_n$  debe ser grande. Para limitar el sobrepaso máximo  $M_p$ , y para reducir el tiempo de asentamiento, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  no debe ser demasiado pequeño. La relación entre el sobrepaso en porcentaje del sobrepaso máximo  $M_p$  y el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  se presenta en la siguiente figura. Dicha gráfica se encuentra al graficar la ecuación  $M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$ .

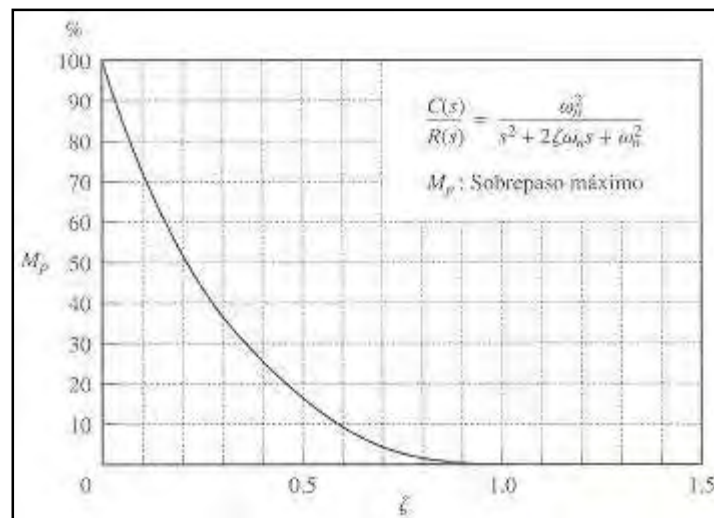


Figura 40. Sobrepaso en función del amortiguamiento.

Se puede observar que si el factor de amortiguamiento relativo tiene un valor entre 0.4 y 0.8, el porcentaje de sobrepaso máximo para la respuesta escalón se encuentra entre un 25 y un 2.5 %.

Una vez definidas las especificaciones de la respuesta transitoria vale la pena recordar que todo el análisis para los sistemas de segundo orden se ha presentado considerando

una señal escalón unitario como la entrada. A continuación se presenta el comportamiento de un sistema de segundo orden para una entrada impulso unitario.

**-Respuesta impulso unitario de sistemas de segundo orden.**

Para una entrada impulso unitario  $r(t)$ , la respectiva transformada de Laplace  $R(s)$  tiene como valor la unidad; es decir  $R(s) = 1$ . En consecuencia:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Empleando las tablas para la transformada inversa de Laplace para la ecuación anterior se determina la respuesta en el tiempo  $c(t)$  del sistema como se muestra enseguida:

Para  $0 \leq \xi < 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right), \text{ para } t \geq 0$$

para  $\xi = 1$ ,

$$c(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \text{ para } t \geq 0$$

y para  $\xi > 1$ ,

$$c(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{\xi^2-1}} e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n \sqrt{\xi^2-1} t\right), \text{ para } t \geq 0.$$

Recuérdese que también es posible obtener la ecuación para la respuesta  $c(t)$  sin tomar la transformada inversa de Laplace de  $C(s)$  al diferenciar la respuesta escalón unitario correspondiente, dado que la función impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de escalón unitario. En la siguiente figura se presenta una familia de curvas de la respuesta impulso unitario obtenidas al utilizar las ecuaciones de la respuesta anteriores para  $0 \leq \xi < 1$  y para  $\xi = 1$  con diversos valores de  $\xi$ .

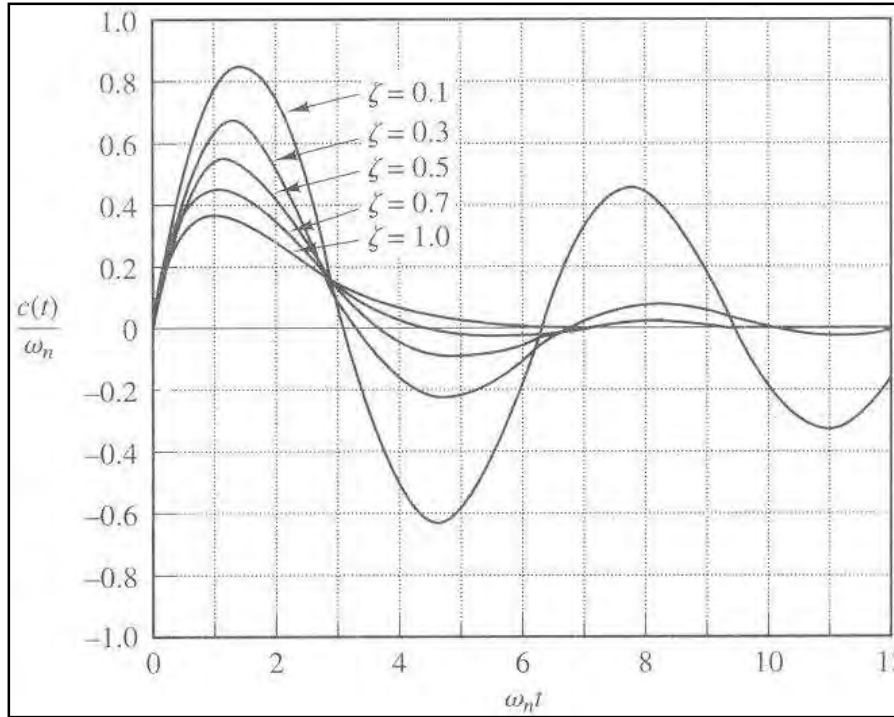


Figura 41. Respuestas en función del amortiguamiento.

Las curvas  $c(t)/\omega_n$  se grafican contra la variable adimensional  $\omega_n t$  y, por tanto, sólo son funciones de  $\xi$ . Para los casos críticamente amortiguado y sobreamortiguado, la respuesta impulso unitario siempre es positiva o cero; es decir,  $c(t) \geq 0$ . Para el caso subamortiguado, la respuesta impulso unitario  $c(t)$  oscila alrededor de cero y toma valores tanto positivos como negativos. A partir del análisis anterior se puede concluir que si la respuesta impulso  $c(t)$  no cambia de signo, el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado, en cuyo caso la respuesta escalón correspondiente no se sobrepasa pero aumenta o disminuye en forma monótonica y tiende a un valor constante. Entiéndase que una función decrece de manera monótonica cuando una función  $g(x)$ , para valores de la variable independiente  $x > y$ , resulta en  $g(x) < g(y)$ . Lo anterior se interpreta gráficamente para la función  $g(x)$  como un decrecimiento paulatino en el valor de la variable dependiente en el eje de las ordenadas para valores cada vez más grandes de la variable independiente en el eje de las abscisas.

El sobrepaso máximo para la respuesta impulso unitario del sistema subamortiguado ocurre en:

$$t = \frac{\left( \frac{\tan^{-1} \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}, \text{ donde } 0 < \xi < 1$$

y el sobrepaso máximo es:

$$c(t)_{\max} = \omega_n \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right), \text{ donde } 0 < \xi < 1.$$

Dado que la respuesta impulso unitario es la derivada con respecto al tiempo de la función de respuesta escalón unitario, el sobrepaso máximo  $M_p$  para la respuesta escalón unitario se encuentra a partir de la respuesta impulso unitario correspondiente. Es decir, el área bajo la curva de respuesta impulso unitario desde  $t = 0$  hasta el tiempo del primer cero es  $1 + M_p$ , en donde  $M_p$  es el sobrepaso máximo (para la respuesta escalón unitario). El tiempo pico  $t_p$  (para la respuesta escalón unitario) corresponde al tiempo en que la respuesta impulso unitario cruza primero el eje del tiempo tal y como se muestra en la siguiente figura.

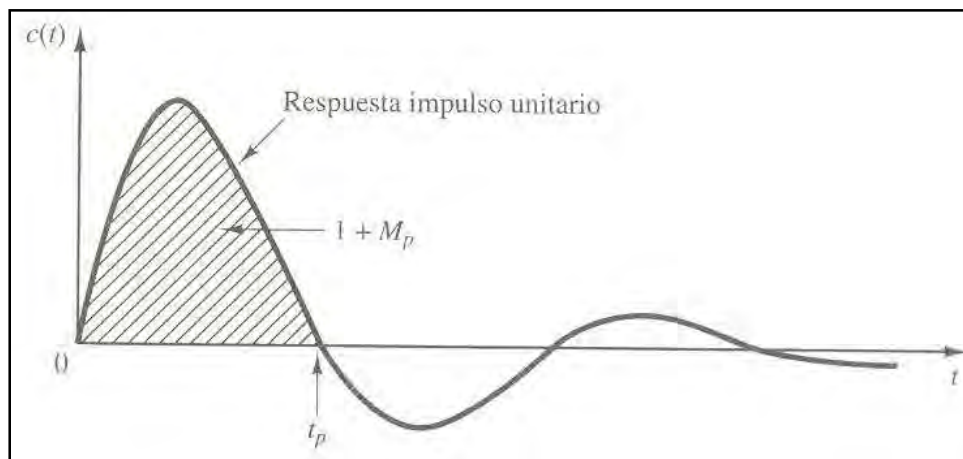


Figura 42. Curva de respuesta impulso unitario.

En las secciones anteriores se presentaron los sistemas de primero y segundo orden. Es importante resaltar que un sistema puede ser de orden mayor que 2. Tales sistemas se denominan *sistemas de orden superior* y se presentan comúnmente al describir los fenómenos físicos. Mientras más complejo es un sistema, el orden del denominador de la función de transferencia correspondiente se incrementa lo cual se traduce en una mayor cantidad de términos senoidales o exponenciales en la ecuación de la respuesta pues recuérdese que al realizar la expansión en fracciones parciales del denominador de la función de transferencia y al aplicar la transformada inversa de Laplace resultan los términos arriba mencionados.

La aplicación de las técnicas expuestas en las secciones anteriores de este trabajo es válida para los sistemas de orden superior pues dichos sistemas se pueden estudiar considerándolos una combinación de sistemas de primero y segundo orden.

Tómese como ejemplo un sistema de quinto orden. Dicho modelo se integra como una combinación de sistemas de primero y segundo orden; por ejemplo sean dos sistemas de

segundo orden y un sistema de primer orden o un sistema de segundo orden y tres sistemas de primer orden, etc. Como se verá más adelante existen términos en la respuesta de un sistema que tienen mayor influencia, lo cual permite que el análisis de dichos términos y la omisión de los restantes presente una aproximación aceptable del sistema. La consideración anterior es, sin embargo, regida por el detalle requerido en el estudio del fenómeno.

A su vez, en párrafos anteriores, se presentaron las especificaciones de la respuesta transitoria de los sistemas; mismas que permiten comparar el desempeño de sistemas diferentes respecto a un conjunto de entradas predeterminadas que funcionan como “simulaciones” de las entradas reales que el sistema experimentará durante su operación normal.

Con los métodos y herramientas anteriores el diseñador tiene la capacidad de analizar la respuesta de un sistema dado. Consecuentemente, a partir de la función de transferencia de un sistema determinado, es posible aplicar “matemáticamente” las técnicas anteriores para conocer de manera “analítica” el comportamiento de la respuesta de un sistema; es decir, se pueden realizar los cálculos pertinentes sin necesidad de utilizar elementos físicos.

Lo anterior proporciona un alto grado de versatilidad y ahorro de recursos en el estudio de los modelos matemáticos y sus respuestas.

Sin embargo considérese la situación en la cual se requieren datos “reales” sobre el comportamiento de un sistema dado. En dicho caso es necesario observar experimentalmente tal comportamiento mediante la implementación física del modelo matemático correspondiente. Para efectos de la anterior implementación del modelo matemático, usualmente el diseñador se ve en la necesidad de desarrollar un sistema equivalente dada la aparición de limitaciones tanto económicas como prácticas en la construcción del sistema físico real. Tomando como ejemplo el análisis de la orientación de una aeronave, es económica y prácticamente complicada la construcción de un avión de prueba con el único objetivo de conocer su comportamiento y después desechar el objeto físico. En consecuencia, el diseñador debe recurrir a la construcción de un sistema físico equivalente que pudiese ser hidráulico, mecánico, eléctrico o de cualquier otra naturaleza. En la actualidad, una gran parte de los diseños de sistemas prácticos se efectúan mediante “simulaciones” de dichos sistemas utilizando sistemas de prueba de naturaleza diferente al original. Dada la relativa facilidad con la cual se implementan los circuitos eléctricos es común su utilización como sistemas equivalentes para simular sistemas mecánicos, hidráulicos y térmicos por citar algunos.

Generalmente los textos que detallan los procesos para llevar a cabo la implementación anterior no son tan accesibles para el diseñador común. Tal implementación inicia cuando el diseñador recibe o calcula un modelo matemático y procede con su implementación física mediante un sistema eléctrico equivalente para posteriormente analizar la respuesta correspondiente como se presentó en las secciones anteriores.

Durante el presente trabajo de tesis se estudiarán analíticamente tanto un modelo matemático de interés como su respuesta asociada pero dicho análisis “teórico” se verá complementado con la parte de la implementación física del modelo matemático

utilizando un modelo eléctrico equivalente acompañado del análisis experimental de su respuesta. Tal desarrollo se presentará en las secciones siguientes.

#### **IV. ESTUDIO DE LA PLANTA DE SEGUNDO ORDEN.**

##### **IV.1. SELECCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO A ESTUDIAR.**

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Hasta el momento se han mostrado las herramientas necesarias para entender los conceptos de señales, sistemas y para estudiar las respuestas de los últimos al aplicar entradas conocidas. Así mismo, como se expuso en párrafos anteriores, durante esta sección se presentará el sistema dinámico por estudiar a lo largo del presente trabajo para posteriormente introducir una técnica para encontrar un sistema eléctrico equivalente y poder así obtener el comportamiento experimental del sistema.

Recuérdese que el modelo matemático correspondiente a un fenómeno físico puede describirse como una función en el dominio de Laplace; la función de transferencia. Dicha función representa entonces un sistema de grado “n” donde “n” es el mayor exponente del polinomio denominador en dicha función de transferencia. Se encontrarán en consecuencia sistemas de primer orden cuando  $n=1$ ; sistemas de segundo orden cuando  $n=2$  y sistemas de orden superior cuando  $n \geq 3$ . A lo largo de la presente tesis se estudiará un sistema de segundo orden. En secciones previas se presentó el análisis de los sistemas de primer y segundo orden a la vez que se especificó que los sistemas de orden superior se pueden estudiar como una combinación de los dos tipos de sistemas anteriores. El modelo matemático de muchos sistemas físicos puede simplificarse para resultar en un sistema de segundo orden. En consecuencia al seleccionarse, para el presente trabajo, un sistema de segundo orden se está cubriendo una amplia gama de fenómenos así como un bloque constitutivo importante de los sistemas de orden superior. El análisis de un sistema particular comienza con la definición de ciertos parámetros que la planta debe cumplir. En el mundo real el diseñador deberá estudiar el sistema por controlar y obtener dichos parámetros a partir del diseño o de la operación real del sistema de interés.

Como se describió previamente, la intención durante esta sección es encontrar un sistema eléctrico equivalente con el cual poder simular la respuesta de una planta determinada. Para tal efecto es necesario introducir el concepto de “*filtro eléctrico*”. El sistema eléctrico equivalente para un sistema sea mecánico, hidráulico, térmico, etc. es un “*filtro eléctrico*”.

En las secciones anteriores se presentó la forma general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden como se recuerda a continuación:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

utilizando un modelo eléctrico equivalente acompañado del análisis experimental de su respuesta. Tal desarrollo se presentará en las secciones siguientes.

#### **IV. ESTUDIO DE LA PLANTA DE SEGUNDO ORDEN.**

##### **IV.1. SELECCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO A ESTUDIAR.**

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Hasta el momento se han mostrado las herramientas necesarias para entender los conceptos de señales, sistemas y para estudiar las respuestas de los últimos al aplicar entradas conocidas. Así mismo, como se expuso en párrafos anteriores, durante esta sección se presentará el sistema dinámico por estudiar a lo largo del presente trabajo para posteriormente introducir una técnica para encontrar un sistema eléctrico equivalente y poder así obtener el comportamiento experimental del sistema.

Recuérdese que el modelo matemático correspondiente a un fenómeno físico puede describirse como una función en el dominio de Laplace; la función de transferencia. Dicha función representa entonces un sistema de grado “n” donde “n” es el mayor exponente del polinomio denominador en dicha función de transferencia. Se encontrarán en consecuencia sistemas de primer orden cuando  $n=1$ ; sistemas de segundo orden cuando  $n=2$  y sistemas de orden superior cuando  $n \geq 3$ . A lo largo de la presente tesis se estudiará un sistema de segundo orden. En secciones previas se presentó el análisis de los sistemas de primer y segundo orden a la vez que se especificó que los sistemas de orden superior se pueden estudiar como una combinación de los dos tipos de sistemas anteriores. El modelo matemático de muchos sistemas físicos puede simplificarse para resultar en un sistema de segundo orden. En consecuencia al seleccionarse, para el presente trabajo, un sistema de segundo orden se está cubriendo una amplia gama de fenómenos así como un bloque constitutivo importante de los sistemas de orden superior. El análisis de un sistema particular comienza con la definición de ciertos parámetros que la planta debe cumplir. En el mundo real el diseñador deberá estudiar el sistema por controlar y obtener dichos parámetros a partir del diseño o de la operación real del sistema de interés.

Como se describió previamente, la intención durante esta sección es encontrar un sistema eléctrico equivalente con el cual poder simular la respuesta de una planta determinada. Para tal efecto es necesario introducir el concepto de “*filtro eléctrico*”. El sistema eléctrico equivalente para un sistema sea mecánico, hidráulico, térmico, etc. es un “*filtro eléctrico*”.

En las secciones anteriores se presentó la forma general de la función de transferencia de un sistema de segundo orden como se recuerda a continuación:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Un filtro eléctrico de segundo orden paso bajas tiene una función de transferencia con la siguiente forma:

$$A(s) = \frac{A_0}{(as^2 + bs + 1)}.$$

Al observar las dos ecuaciones anteriores resulta evidente la similitud en la estructura de ambas funciones de transferencia. Es por dicha similitud que para encontrar el sistema eléctrico equivalente para la función de transferencia general de segundo orden, se recurre al filtro paso bajas seleccionado. Como se verá posteriormente, mediante manipulaciones matemáticas, es posible igualar los coeficientes de las dos ecuaciones anteriores. Los coeficientes de la expresión para el filtro paso bajas se convierten en valores de resistores y capacitores que se utilizarán para la construcción del circuito eléctrico equivalente. Es importante resaltar que la estructura de la función de transferencia puede variar dependiendo del modelo matemático. El caso presentado de un sistema de segundo orden es general pero el diseñador debe siempre considerar que no es único y pudiese encontrar una función de transferencia diferente. En tal situación el diseñador deberá buscar un sistema equivalente cuya función de transferencia sea similar a la correspondiente al fenómeno de interés.

A manera de introducción a la teoría de los filtros eléctricos se debe entender un filtro eléctrico como un dispositivo que permite el paso de señales eléctricas a ciertas frecuencias o rangos de frecuencia a la vez que obstruye el paso de otras.

Los circuitos de filtrado se utilizan en multitud de aplicaciones y existe literatura extensa referente a su análisis. De interés para los objetivos del presente trabajo de tesis son las funciones de transferencia que los describen. Tales funciones pueden ser utilizadas para simular el comportamiento de fenómenos físicos pues es posible encontrar semejanzas entre las funciones de transferencia tal y como se resaltó previamente. Los filtros eléctricos contruidos con elementos pasivos tales como resistencias, capacitores e inductores reciben el nombre de “*filtros pasivos*” mientras que los “*filtros activos*” son circuitos que emplean amplificadores operacionales en combinación con resistores y capacitores para desempeñar la misma función. Durante esta sección se utilizará un filtro activo para simular una planta. Como se presentará más adelante, el producto de los valores de los resistores y capacitores utilizados en la construcción del filtro activo resulta en la obtención de una frecuencia de corte del filtro y un valor para el factor de amortiguamiento que son los coeficientes de la función de transferencia. En consecuencia es posible, mediante la selección de los componentes adecuados, obtener un circuito eléctrico con una función de transferencia y comportamiento equivalente a los correspondientes a un sistema determinado.



## IV.2. EL FACTOR DE CALIDAD Q.

Como se vio en secciones anteriores todos los modelos matemáticos experimentarán un comportamiento específico ante una entrada determinada. Dicho comportamiento se verá afectado por el amortiguamiento presente en el sistema. Dependiendo del valor del amortiguamiento el sistema presentará o no una oscilación y consecuentemente se tendrá un sistema subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Asociada también a la oscilación del sistema se tiene una cantidad denominada factor de calidad Q. El factor de calidad Q es una medida de la “calidad” de un sistema resonante. Recuérdese que en la función de transferencia general para un sistema de segundo orden se encuentra un factor llamado *frecuencia natural de oscilación*  $\omega_n$ . Los sistemas resonantes responden sensiblemente a frecuencias cercanas a dicha frecuencia natural de oscilación. El factor Q indica la cantidad de “resistencia” de un sistema para resonar. Los sistemas con factores de calidad Q grandes presentan resonancia con gran amplitud en comparación con los sistemas con un factor de calidad Q bajo.

El factor de calidad Q es de interés para el diseño de los modelos matemáticos pues mediante su manipulación es posible alterar la manera en que una planta determinada va a oscilar y en consecuencia representar el comportamiento de un sistema de interés. Si el valor del factor de calidad Q es grande el comportamiento del filtro tiende hacia la inestabilidad u oscilación no amortiguada. En consecuencia el factor Q se deberá calcular de acuerdo al comportamiento deseado para la planta en estudio.

Recuérdese que la función de transferencia para un filtro eléctrico paso bajas está dada por:

$$A(s) = \frac{A_0}{(as^2 + bs + 1)}.$$

Para los filtros paso-bajas y paso-altas el factor Q está determinado por:

$$Q = \frac{\sqrt{a}}{b}.$$

Recuérdese que la función de transferencia general para un sistema de segundo orden está dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Con objeto de comparar e igualar coeficientes entre las funciones de transferencia del filtro eléctrico paso-bajas y la función de transferencia general para un sistema de segundo orden se procede mediante las siguientes manipulaciones matemáticas:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 / \omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) / \omega_n^2},$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}.$$

En consecuencia se tiene:

$$a = 1/\omega_n^2$$

$$b = 2\xi/\omega_n.$$

Sustituyendo en la ecuación para determinar el factor de calidad:

$$Q = \frac{\sqrt{1/\omega_n^2}}{2\xi/\omega_n} = \frac{1/\omega_n}{2\xi/\omega_n} = \frac{1}{2\xi}.$$

De la expresión anterior se observa claramente una relación inversamente proporcional entre el factor de calidad y el amortiguamiento presente en el sistema tal y como se mencionó anteriormente. Entre más pequeño el factor de amortiguamiento más grande el factor Q y en consecuencia una oscilación más pronunciada y viceversa.

Así mismo se clarifica la equivalencia entre el establecimiento, ya sea del factor de calidad Q o del factor de amortiguamiento  $\xi$ , como un parámetro de diseño de la planta que simulará un modelo matemático de interés. En otras palabras; mediante la manipulación del factor de calidad Q se afecta el amortiguamiento y viceversa dando como resultado un comportamiento oscilatorio que deberá emular al comportamiento propio de un modelo matemático de interés.

### IV.3. CARACTERÍSTICAS DE UN FILTRO PASO-BAJAS.

Durante esta sección se presentarán los conceptos necesarios para encontrar la función de transferencia de los filtros paso-bajas aplicables al caso particular que se estudiará en la presente tesis. Como importante recordatorio el diseñador debe estar conciente de la existencia de otros filtros eléctricos y consecuentemente de la existencia de otras funciones de transferencia diferentes a la correspondiente al filtro paso-bajas. Dichas funciones de transferencia, que no se estudiarán en este trabajo, son útiles para describir los fenómenos físicos con funciones de transferencia similares.

Recuérdese que se utilizará un filtro activo para desarrollar el circuito de interés. Para la implementación de los filtros electrónicos es frecuente el empleo de una arquitectura de circuito conocida como configuración Sallen-Key. Un filtro tipo Sallen-Key produce una respuesta de dos polos utilizando dos resistencias, dos capacitores y un amplificador operacional.

La configuración Sallen-Key para un filtro paso-bajas se muestra en la siguiente figura:

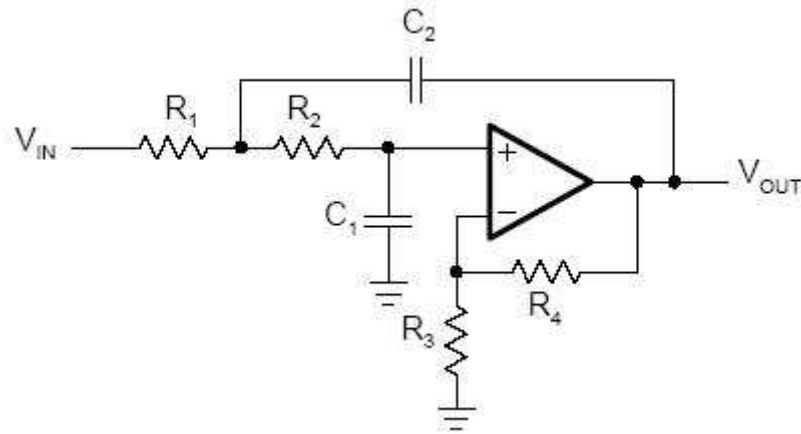


Figura 43. Circuito Sallen-Key general.

La operación del circuito se puede describir cualitativamente de la siguiente manera:

A bajas frecuencias, donde  $C_1$  y  $C_2$  se comportan como circuitos abiertos, la salida está formada por la señal original afectada por una ganancia dada por las resistencias  $R_3$  y  $R_4$ .

A altas frecuencias, donde  $C_1$  y  $C_2$  se comportan como circuitos cortos, la señal es llevada a tierra a la entrada no inversora del amplificador y en consecuencia no aparece señal en la salida tal y como se esperaría de un filtro paso-bajas; es decir, el filtro bloquea el paso de señales por encima de la frecuencia de corte.

En la región cercana a la frecuencia de corte del filtro, donde la impedancia de  $C_1$  y  $C_2$  es del mismo orden que la de  $R_1$  y  $R_2$ , se obtiene un circuito con realimentación positiva a través del capacitor  $C_2$ . Dicha realimentación positiva presenta características de interés como se verá más adelante.

#### IV.3.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA UN FILTRO PASO-BAJAS TIPO SALLEN-KEY.

A continuación se presenta la deducción matemática de la función de transferencia del arreglo Sallen-Key paso-bajas.

Utilizando la figura anterior del circuito Sallen-Key paso bajas se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo  $V_1$  resultando la siguiente ecuación:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Representando la impedancia de cada capacitor por  $Z_n = 1/j\omega C_n = 1/sC_n$  al sustituir en la ecuación anterior se puede expresar alternativamente como:

$$\frac{V_e - V_1}{R_1} = \frac{V_1}{R_2 + Z_1} + \frac{V_1 - V_s}{Z_2}$$

El voltaje en la entrada no inversora del amplificador operacional  $V_+$  se puede determinar en función de  $V_1$  a partir de un divisor de voltaje como se muestra a continuación:

$$V_+ = V_1 \left( \frac{Z_1}{R_2 + Z_1} \right)$$

La salida del amplificador operacional está conectada a la terminal  $V$  por el divisor de voltaje formado por las resistencias  $R_3$  y  $R_4$ . En consecuencia se tiene la siguiente expresión:

$$V_- = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_s$$

La conexión anterior forma un seguidor de voltaje entre los puntos  $V_+$ ,  $V_-$  y  $V_s$ . Es decir  $V_+ \approx V_-$ . Utilizando la consideración anterior al igualar las expresiones para  $V_+$  y  $V_-$  se puede observar que el voltaje de salida  $V_s$  es una combinación del voltaje  $V_+$  afectado por el divisor de voltaje en la terminal  $V$  como se presenta a continuación:

$$V_1 \frac{Z_1}{R_2 + Z_1} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} V_s.$$

Despejando el voltaje de salida  $V_1$  se tiene:

$$V_1 = V_s \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \left( \frac{R_2 + Z_1}{Z_1} \right)$$

Si en la ecuación anterior se sustituye el divisor de voltaje en la terminal  $V$  por una literal  $b = R_3/(R_3 + R_4)$  se tiene:

$$V_1 = b V_s \left( \frac{R_2 + Z_1}{Z_1} \right).$$

Como se mostrará durante el desarrollo matemático a continuación, es conveniente utilizar el inverso de la literal  $b$  para llegar a la expresión para la función de transferencia. Se define entonces arbitrariamente la variable  $K$  como sigue:

$$K = \frac{1}{b} = \frac{R_3 + R_4}{R_3}$$

Sustituyendo  $K$  en la ecuación anterior para  $V_1$  resulta:

$$V_1 = \frac{1}{K} V_s \left( \frac{R_2 + Z_1}{Z_1} \right).$$

Recuérdese que la ecuación alternativa para la suma de corrientes es:

$$\frac{V_e - V_1}{R_1} = \frac{V_1}{R_2 + Z_1} + \frac{V_1 - V_s}{Z_2}.$$

Sustituyendo el valor de  $V_1$  en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{V_e}{R_1} - \frac{1}{KR_1} \left( \frac{R_2 + Z_1}{Z_1} \right) V_s = \frac{1}{KZ_1} V_s + \frac{1}{KZ_2} \left( \frac{R_2 + Z_1}{Z_1} \right) V_s - \frac{1}{Z_2} V_s.$$

Agrupando términos resulta:

$$V_s \left( \frac{1}{KZ_1} + \frac{R_2 + Z_1}{KZ_1Z_2} - \frac{1}{Z_2} + \frac{R_2 + Z_1}{KR_1Z_1} \right) = \frac{1}{R_1} V_e.$$

Se calcula un denominador común:

$$V_s \left( \frac{Z_2 + (R_2 + Z_1) - KZ_1 + [Z_2 (R_2 + Z_1)/R_1]}{KZ_1Z_2} \right) = \frac{1}{R_1} V_e.$$

A continuación se busca la estructura de una función de transferencia de segundo orden general resultando:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{KZ_1Z_2}{Z_2 \left( \frac{R_1 + R_2 + Z_1}{R_1} \right) + (R_2 + Z_1) - KZ_1} \right),$$

introduciendo el término  $R_1$  en el paréntesis resulta:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{KZ_1Z_2}{Z_2(R_1 + R_2 + Z_1) + R_1(R_2 + Z_1) - KR_1Z_1} \right),$$

factorizando el término  $R_1Z_1$  en el denominador:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{KZ_1Z_2}{Z_2(R_1 + R_2 + Z_1) + R_1R_2 + (1 - K)R_1Z_1} \right),$$

desarrollando términos:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{KZ_1Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2(R_1 + R_2) + R_1R_2 + (1 - K)R_1Z_1} \right),$$

dividiendo numerador y denominador entre  $Z_1Z_2$ :

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{K}{1 + \frac{(R_1 + R_2)}{Z_1} + \frac{R_1R_2}{Z_1Z_2} + \frac{(1 - K)R_1}{Z_2}} \right).$$

Recordando que  $Z_n = 1/j\omega C_n = 1/sC_n$  y sustituyendo dicha expresión en la ecuación anterior resulta:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{K}{1 + \frac{(R_1 + R_2)/1}{1/sC_1} + \frac{R_1R_2/1}{1/s^2C_1C_2} + \frac{(1 - K)R_1/1}{1/sC_2}} \right),$$

simplificando:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{K}{1 + sC_1(R_1 + R_2) + s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_2(1 - K)} \right),$$

finalmente al reordenar términos resulta:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{K}{s^2R_1R_2C_1C_2 + s[C_1(R_1 + R_2) + R_1C_2(1 - K)] + 1} \right).$$

Se puede observar que la expresión anterior se asemeja a la función de transferencia general para un sistema de segundo orden.

Del resultado anterior es claro que a partir de la selección de los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y de  $K$  es posible encontrar una función de transferencia que se acople a una necesidad específica. Tal será el método que se utilizará para encontrar la función de transferencia por utilizar en el presente trabajo a partir de algunos parámetros que se definirán posteriormente.

La función de transferencia anterior se puede utilizar directamente para calcular una función de transferencia de interés. Sin embargo existen diversas simplificaciones aplicables a la función de transferencia  $V_s/V_e$  todas ellas enfocadas a facilitar el empleo de componentes con valores comerciales. Comúnmente se emplean cuatro aproximaciones que consisten en:

1. Establecer los valores de los componentes como proporciones:  
 $R_1=mR$ ,  $R_2=R$ ,  $C_1=C$  y  $C_2=nC$ , donde  $m$  y  $n$  son números reales positivos.
2. Establecer los valores de los componentes como proporciones y la ganancia  $K=1$ :  
 $R_1=mR$ ,  $R_2=R$ ,  $C_1=C$ ,  $C_2=nC$  y  $K=1$ , donde  $m$  y  $n$  son números reales positivos.
3. Establecer los valores de los resistores como proporciones y los correspondientes a los capacitores iguales:  
 $R_1=mR$ ,  $R_2=R$  y  $C_1=C_2=C$ , donde  $m$  es un número real positivo.
4. Establecer los valores tanto de los resistores como de los capacitores iguales:  
 $R_1=R_2=R$  y  $C_1=C_2=C$ .

En el presente trabajo de tesis se utilizará la segunda aproximación como se verá más adelante.

#### **IV.4. CARACTERIZACIÓN DE LA PLANTA POR UTILIZAR.**

Es importante resaltar que las herramientas y la metodología que se utilizarán en las secciones siguientes son aplicables a cualquier modelo matemático que cumpla con las características del citado en este trabajo. Es decir; se podría cambiar la función de transferencia acorde a alguna aplicación de interés para el diseñador y también sería válida la utilización del proceso presentado a continuación para encontrar el comportamiento de la respuesta del sistema a una entrada determinada así como para la construcción de un circuito eléctrico equivalente para la corroboración experimental de los hallazgos analíticos.

Recuérdese que la función de transferencia es el equivalente en el dominio de Laplace de las ecuaciones diferenciales que describen un fenómeno de interés. Es importante destacar que una vez obtenida la función de transferencia el diseñador cuenta con una “abstracción matemática” del fenómeno en estudio y se encuentra en posibilidad de manipular al sistema matemáticamente y efectuar un estudio analítico del mismo.

Debe entenderse que los parámetros utilizados en el cálculo de la función de transferencia por emplearse en el presente trabajo se definieron de manera arbitraria por el autor de esta tesis y sirven para presentar un ejemplo para efectos del estudio analítico y experimental por realizarse. En un caso general el diseñador deberá ajustar dichos parámetros a la aplicación que sea de su interés. En el caso de la función utilizada como muestra en esta tesis no es necesario saber “cual fenómeno” es el que resulta en la función de transferencia anterior pues pudiese ser cualquiera.

La función de transferencia por utilizar durante el presente trabajo corresponde a un sistema de segundo orden, continuo, determinístico, SISO, con memoria, invertible, causal, estable, lineal e invariante en el tiempo. Las características anteriores permiten la utilización de las herramientas hasta el momento presentadas para encontrar la respuesta del sistema a una entrada específica.

#### IV.5. PARÁMETROS DE DISEÑO DEL SISTEMA EN ESTUDIO.

Como paso inicial se obtendrá la caracterización del sistema dinámico por estudiar. Recuérdese que para la construcción del sistema eléctrico equivalente a un modelo matemático específico es necesaria la obtención previa de ciertos parámetros que describen el comportamiento del sistema original que se desea simular eléctricamente.

Supóngase que el sistema original presenta las siguientes características.

-Amortiguamiento con valor de 0.2.

-Frecuencia natural de oscilación con valor de 3500 Hz.

El conocimiento de los valores anteriores determina por completo el comportamiento de una planta con comportamiento correspondiente a un filtro paso-bajas en configuración Sallen-Key y dicho conocimiento constituye el primer paso del diseñador para la construcción del circuito eléctrico equivalente a un sistema dado.

Recuérdese que durante el presente trabajo se utilizará la segunda simplificación aplicable a la función de transferencia de un filtro paso-bajas en configuración Sallen-Key. Recuérdese que la función de transferencia para un filtro paso-bajas tipo Sallen-Key esta dada por:

$$\frac{V_s}{V_e} = \left( \frac{K}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s [C_1 (R_1 + R_2) + R_1 C_2 (1 - K)] + 1} \right).$$

Las consideraciones para aplicar el segundo método de simplificación consisten en establecer los valores de los componentes como proporciones, es decir  $R_1 = mR$ ,  $R_2 = R$ ,  $C_1 = C$ ,  $C_2 = nC$ , donde  $m$  y  $n$  son números reales positivos y adicionalmente definir la ganancia  $K$  unitaria ó  $K=1$ .

Aplicando dichas consideraciones a la función de transferencia resulta:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2[mnR^2C^2] + s[CR(m+1) + mnRC(1-1)] + 1},$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2(mnR^2C^2) + s[CR(m+1)] + 1},$$

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2 + s\frac{m+1}{mnRC} + \frac{1}{(mnR^2C^2)}}.$$

La definición del valor  $K=1$  en la simplificación anterior implica que la entrada inversora  $V_-$  del amplificador operacional se conecta directamente a la salida  $V_s$  y no se utilizan los resistores  $R_3$  y  $R_4$ . La función de transferencia anterior se utilizará durante el presente trabajo para simular la planta que se desea controlar. La configuración resultante se muestra en la siguiente figura.

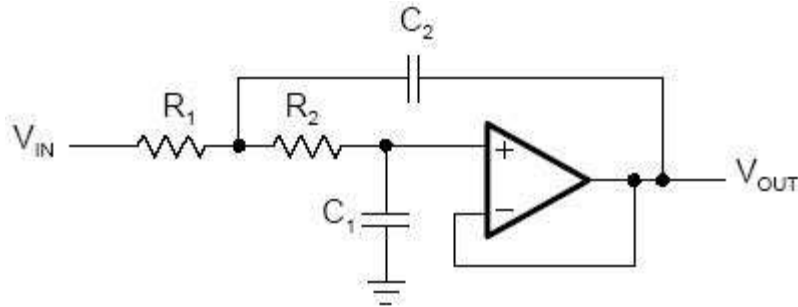


Figura 44. Circuito Sallen-Key con retroalimentación unitaria.

Con objeto de igualar los coeficientes de la función de transferencia resultante con los correspondientes a la función de transferencia general de un sistema de segundo orden se comparan ambas ecuaciones. Recuérdese que la función de transferencia general para un sistema de segundo orden se define como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

De la igualación de coeficientes para el primer término a la derecha en el denominador de la función de transferencia resulta:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{(mnR^2C^2)},$$

$$\omega_n = \frac{1}{RC\sqrt{mn}}.$$



Recuérdese sin embargo que:

$$\omega_n = 2\pi f_c,$$

donde  $f_c$  es la frecuencia de corte del filtro paso-bajas.

Despejando  $f_c$  se tiene:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC\sqrt{mn}}.$$

En lo concerniente al segundo coeficiente de la función de transferencia se encuentra que:

$$2\xi\omega_n = \frac{m+1}{mnRC}.$$

De la última expresión nos interesa conocer el valor del factor de amortiguamiento por lo cual se despeja para encontrar:

$$\xi = \frac{m+1}{2\sqrt{mn}}.$$

Recuérdese que el factor de calidad  $Q$  se define como:

$$Q = \frac{1}{2\xi},$$

de lo cual resulta, al sustituir el valor de  $\xi$ :

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{m+1}.$$

Se debe observar que las expresiones anteriores, para la frecuencia natural de oscilación, para la frecuencia de corte del filtro, para el factor de amortiguamiento y para el factor de calidad, se encuentran en función de las literales  $m$ ,  $n$  y los valores  $R$  y  $C$ . Lo anterior permite manipular tales cantidades para calcular la frecuencia natural de oscilación, la frecuencia de corte, el factor de amortiguamiento y el factor de calidad necesarios para implementar una planta determinada. Como se mencionó en secciones anteriores el diseñador deberá conocer a priori los parámetros de diseño de la planta que desea controlar y dichos parámetros se sustituirán en alguna combinación de las ecuaciones anteriores para obtener la función de transferencia deseada. Así mismo es importante resaltar que los valores de  $m$  y  $n$  se reflejarán en valores de los resistores y capacitores que forman el filtro paso-bajas Sallen-Key permitiendo además la obtención de valores comerciales para los componentes electrónicos del filtro.

Conociendo el diseñador las expresiones anteriores se encuentra en posibilidad de sustituir los parámetros de interés para el cálculo de los componentes electrónicos necesarios para simular el comportamiento de una planta determinada.

Recuérdese la propuesta de simulación de una planta con los siguientes parámetros de diseño:

$$f_c = 3.5 \text{ kHz},$$
$$\xi = 0.2.$$

Consecuentemente se tiene:

$$\omega_n = 2\pi(3500) = 21991.1485 \frac{rad}{s},$$

$$Q = \frac{1}{2(0.2)} = 2.5.$$

Recuérdese así mismo la expresión para la frecuencia natural amortiguada como:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 21546.8370 \frac{rad}{s}.$$

El objetivo a partir de la obtención de los parámetros anteriores es encontrar los valores de las variables  $m$ ,  $n$ ,  $R$  y  $C$ . Para tal efecto se deben escoger los valores de  $m$  y  $n$  ó los valores de  $R$  y  $C$  pues de esta forma se definirá un sistema de ecuaciones simultáneas que permitirá conocer el valor del par complementario de valores.

Para el caso en estudio se seleccionan los valores  $R$  y  $C$  como sigue:

$$R = 1k\Omega,$$

$$C = 10nF.$$

Sustituyendo todos los valores conocidos en las expresiones para  $f_c$  y para el factor de calidad  $Q$  se tiene:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC \sqrt{mn}},$$

$$Q = \frac{\sqrt{mn}}{m+1},$$

$$3500 = \frac{1}{2\pi(1k\Omega)(10nF)\sqrt{mn}},$$

$$2.5 = \frac{\sqrt{mn}}{m+1}.$$

El par de ecuaciones anteriores constituye un sistema de ecuaciones simultáneas a partir del cual se pueden obtener los valores de  $m$  y de  $n$  y en consecuencia los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$  necesarios para la construcción del circuito que se comportará de acuerdo con los parámetros iniciales.

A partir de la ecuación para la frecuencia de corte se obtiene:

$$mn = 20.6778.$$

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación para el factor de calidad resulta:

$$2.5 = \frac{\sqrt{20.6778}}{m+1}.$$

El valor de  $m$  se define entonces como:

$$m = 0.8191$$

$$n = 25.2445.$$

Empleando tales valores y recordando las consideraciones para el segundo método de simplificación de la función de transferencia,  $R_1=mR$ ,  $R_2=R$ ,  $C_1=C$ ,  $C_2=nC$  se determinan los valores de los componentes electrónicos como sigue:

$$R_1 = (0.8191)(1k\Omega) = 819.1\Omega$$

$$R_2 = 1k\Omega$$

$$C_1 = 10nF$$

$$C_2 = (10nF)(25.2445) = 252.445nF.$$

Los valores anteriores se pueden aproximar a los valores comerciales más cercanos resultando en:

$$R_1 = 820\Omega$$

$$R_2 = 1k\Omega$$

$$C_1 = 10nF$$

$$C_2 = 220nF.$$

El circuito resultante se muestra en la siguiente figura.

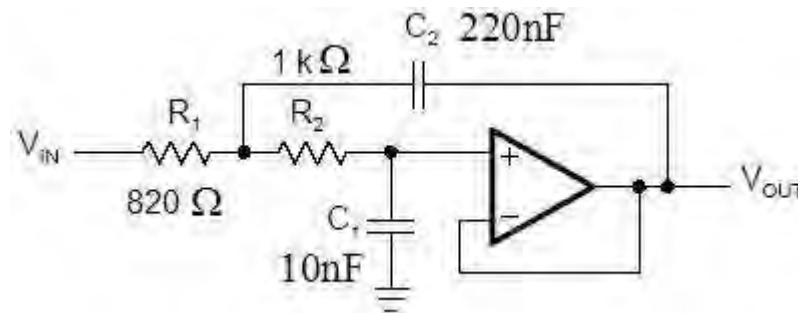


Figura 45. Circuito Sallen-Key práctico.

Es importante resaltar que los valores empleados para llegar al sistema de ecuaciones simultáneas no siempre arroja valores útiles y el procedimiento se convierte en una serie de iteraciones para llegar a valores satisfactorios para las necesidades del diseñador. Para reducir las labores tediosas de cálculos repetidos es recomendable introducir, en algún programa de hoja de cálculo para computadora, las expresiones para los factores que se necesiten calcular. De esta manera el diseñador puede analizar infinidad de valores y seleccionar los más convenientes de acuerdo a sus necesidades reduciendo el excesivo tiempo necesario en calcular de nueva cuenta un sistema una vez que se determina que no es útil.

Con los valores de  $m$ ,  $n$ ,  $R$  y  $C$  obtenidos en la sección anterior es necesario regresar a la expresión para la función de transferencia correspondiente al filtro paso-bajas para de esta manera poder analizar la respuesta del sistema a una entrada determinada.

La función de transferencia a utilizar en el presente trabajo tiene la forma:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2(mnR^2C^2) + s[CR(m+1)] + 1}.$$

Al sustituir los valores de  $m$ ,  $n$ ,  $R$  y  $C$  resulta:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2(2.0677E-09) + s(1.8189E-05) + 1}$$

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. En la sección anterior se mostró el método para determinar un circuito que simule el comportamiento de un sistema de interés resultando además en una función de transferencia acorde a los parámetros de diseño preestablecidos. De esta forma se tienen dos entidades, una experimental (circuito electrónico) y una matemática (función de transferencia), que servirán para estudiar el comportamiento del modelo matemático seleccionado.

Como paso siguiente se encuentra el estudio matemático de la respuesta transitoria de la función de transferencia anterior para posteriormente compararse con la respuesta experimental del circuito.

#### IV.6. ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA RESPUESTA DEL SISTEMA EN ESTUDIO.

Acorde con lo expuesto en secciones anteriores, al contar el diseñador con la función de transferencia acorde al sistema de interés, es necesario seleccionar una entrada para aplicarla al sistema. En el presente desarrollo se utilizará la entrada escalón unitario. Recuérdese que la función de transferencia anterior se encuentra en el dominio de Laplace por lo cual la entrada correspondientemente será  $V_e = 1/s$ . La respuesta entonces se encuentra al aplicar la transformada inversa de Laplace a la función de transferencia con la señal de entrada aplicada.

Es importante recordar que en secciones anteriores del presente trabajo de tesis se presentó el desarrollo de la transformada inversa de Laplace para los sistemas de segundo orden subamortiguados, es decir con  $(0 < \xi < 1)$ . Dicho desarrollo es aplicable pues para el caso en estudio se tiene que  $\xi = 0.2$ . Las expresiones correspondientes al caso subamortiguado se recuerdan a continuación:

$$C(s) = \left[ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right] \left[ \frac{1}{s} \right]$$

Al expandir la expresión anterior por el método de fracciones parciales y utilizar la expresión para la frecuencia natural amortiguada se obtiene:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

De las tablas para transformadas de Laplace se tiene que:

$$L^{-1} \left[ \frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\xi\omega_n t} \cos \omega_d t$$

y

$$L^{-1} \left[ \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right] = e^{-\xi\omega_n t} \text{sen} \omega_d t$$

Al aplicar las expresiones anteriores para la obtención de la transformada inversa de Laplace de la función  $C(s)$  se obtiene:

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

O de otra forma:

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \text{sen} \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right), \text{ para } t \geq 0.$$

Como paso siguiente se deben sustituir los valores del modelo matemático en estudio en cualquiera de las dos últimas expresiones para obtener el comportamiento de la respuesta del sistema en el dominio del tiempo.

Al emplear la primera expresión y sustituir valores resulta:

$$V_s(t) = 1 - e^{-4398.2297t} [\cos(21546.8370t) + 0.2041 \text{sen}(21546.8370t)], \text{ para } t \geq 0.$$

Es importante resaltar que los factores de las funciones coseno y seno en la función anterior se encuentran en radianes y deberán interpretarse adecuadamente.

La función anterior permite observar el comportamiento de la respuesta del sistema a una entrada escalón unitario a través del tiempo. Nuevamente es recomendable que el diseñador introduzca la función anterior a un programa de hoja de cálculo para computadora para poder graficar el comportamiento del sistema. A continuación se presenta una imagen de la respuesta al introducir la dicha función al programa Microsoft Excel. El incremento de tiempo es de 0.00001 segundos y se calcularon 150 puntos.

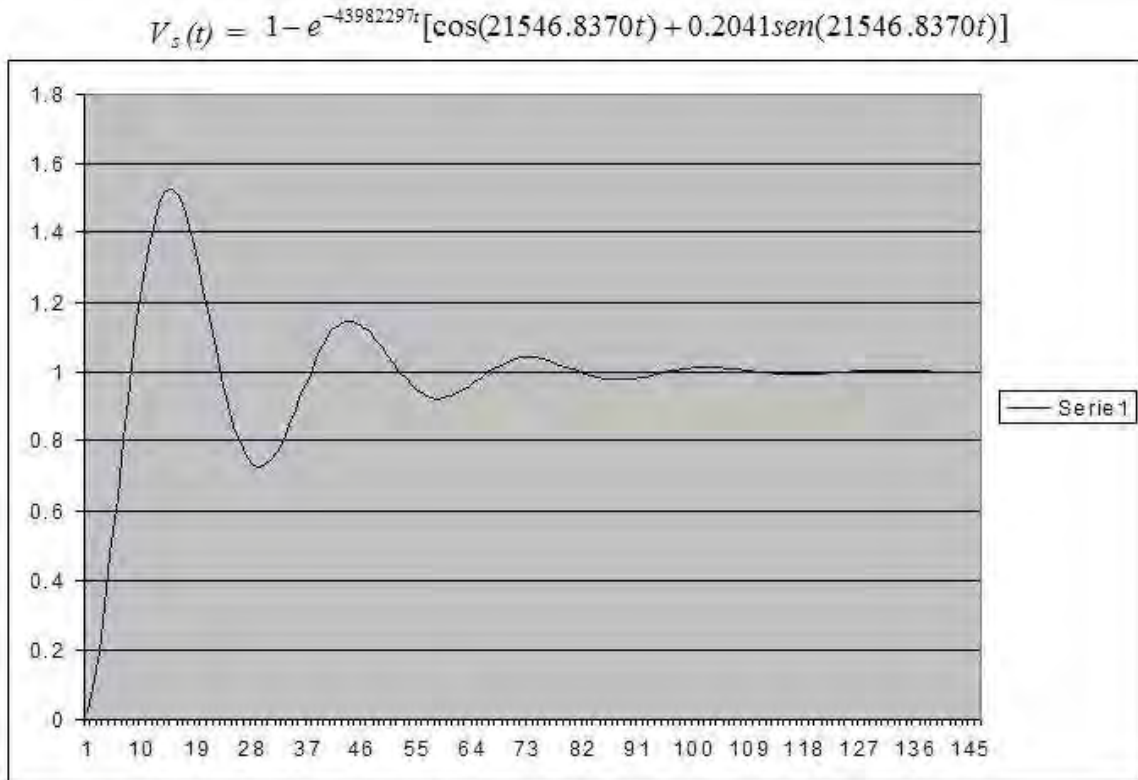


Figura 46. Gráfica de la respuesta del sistema utilizando Excel.

Como se presentará posteriormente, la utilización del programa para computadora Matlab facilita todas las etapas de diseño y análisis para las plantas y sistemas de control.

#### IV.7. ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA PARA EL SISTEMA EN ESTUDIO.

Una vez obtenida la respuesta del sistema para una entrada escalón unitario es posible obtener las especificaciones de la respuesta transitoria. Tales cantidades permiten al diseñador caracterizar el comportamiento del sistema. Para el caso en estudio dichas características de la respuesta se calculan como sigue.

Recuérdese que para el modelo matemático utilizado se encontraron los siguientes parámetros:

$$\omega_n = 21991.1486 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_d = 21546.8370 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\xi = 0.20$$

**-Tiempo de levantamiento,  $t_r$ .** Previamente se definió el tiempo de levantamiento como:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d},$$

donde  $\sigma = \xi \omega_n = (0.20)(21991.1486) = 4398.2297$ . Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{1}{21546.8370} \tan^{-1} \left( \frac{21546.8370}{-4398.2297} \right) = \frac{1}{21546.8370} \left( \frac{78.46\pi}{180} \right) = \frac{1.36943}{21546.8371}$$

$$t_r = 63.55 \mu s$$

Lo anterior significa que la salida del sistema llegará al 90% de su valor final en aproximadamente 60 microsegundos posterior a la aplicación de la señal de entrada. Nótese la conversión de grados sexagesimales a radianes al multiplicar por  $\pi$  y dividir entre 180 antes de interpretar los resultados en la fórmula para encontrar el tiempo de levantamiento. Dicha conversión se debe llevar a cabo pues la función  $\tan^{-1}$  arroja el resultado en grados sexagesimales y no tiene sentido la aplicación de dicho valor en grados con los demás coeficientes de la fórmula.

**-Tiempo pico,  $t_p$ .**

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{2\pi f_d} = \frac{\pi/1}{2\pi/T_d} = \frac{T_d}{2}.$$

Sustituyendo el valor de la frecuencia de oscilación amortiguada se obtiene:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{21546.873} = 145.80 \mu s.$$

Consecuentemente la respuesta alcanzará el valor máximo en lapso de tiempo anterior.

**-Sobrepaso máximo,  $M_p$ .**

Previamente se definió la fórmula para el cálculo del sobrepaso máximo como:

$$M_p = e^{-\xi \omega_n \pi / \omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = e^{-\left(\xi / \sqrt{1-\xi^2}\right) \pi}.$$

Sustituyendo valores se encuentra:

$$M_p = e^{-\left(\xi / \sqrt{1-\xi^2}\right) \pi} = e^{-(0.2/\sqrt{0.96})\pi} = e^{-0.6412} = 0.5266.$$

$$\%M_p = 0.5266 \times 100 = 52.66\%.$$

El resultado anterior implica que el valor del sobrepaso máximo será 52.66% más grande que el valor estable de la salida. Para el caso en estudio recuérdese la aplicación de una entrada escalón unitario. Dicha señal de entrada implica que el valor estable de la respuesta es cercano a la unidad. En consecuencia el valor del sobrepaso para este caso será cercano al valor de 1.5266.

#### **-Tiempo de asentamiento, $t_s$ .**

La expresión para el cálculo del tiempo de asentamiento utilizando el criterio del 2% se definió previamente como:

$$t_s = 4T = 4 / \xi\omega_n$$

Sustituyendo valores se encuentra:

$$t_s = 4 / \xi\omega_n = 4 / (0.2 \times 21991.1486) = 909.45 \mu s .$$

El valor anterior implica la estabilización de la respuesta alrededor de su valor final con un 2% de variación aproximadamente a los 900 microsegundos después de la aplicación de la entrada.

Todas las características de la respuesta transitoria mostradas hasta el momento para el sistema en estudio podrán ser corroboradas mediante el empleo del programa Matlab así como comparadas contra el comportamiento físico del circuito eléctrico que simula a la planta de interés.

#### **IV.8. ANÁLISIS DEL SISTEMA MEDIANTE MATLAB.**

Matlab es un programa computacional cuyo uso es frecuente en la ingeniería de control. Su empleo en algunas secciones del presente trabajo facilitará las labores de cálculo de la respuesta del sistema en estudio así como para el cálculo de los parámetros de control en la sección correspondiente.

Se utiliza la función de transferencia de la planta en estudio definida previamente por:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2(2.0677E - 09) + s(1.8189E - 05) + 1} .$$

En Matlab la nomenclatura para estudiar el sistema anterior se introduce como:

```
num1=[1];  
den1=[0.0000000020677 0.000018189 1];  
N=tf(num1,den1);  
step (N);
```



El resultado arrojado por Matlab se muestra en la siguiente figura.

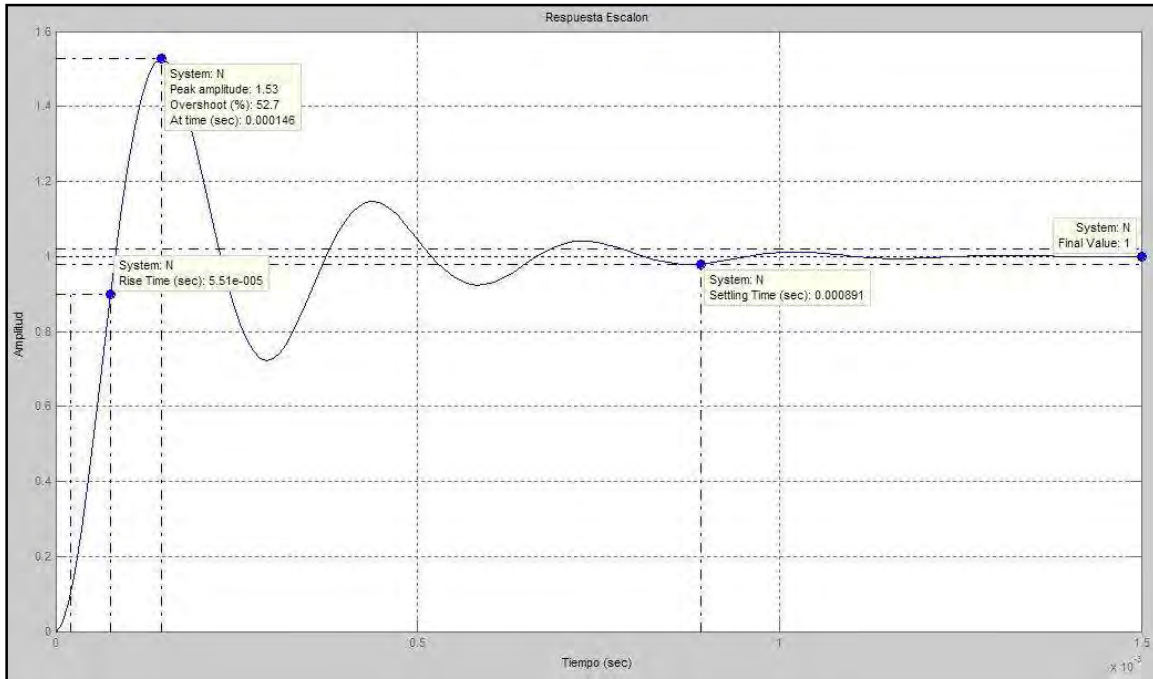


Figura 47. Respuesta del sistema en Matlab.

A partir de la figura se puede observar que Matlab proporciona los valores de las especificaciones de la respuesta transitoria directamente. Dichos valores se resumen en la siguiente tabla.

Parámetro	Valor
Tiempo de levantamiento $t_r$	55.1 $\mu s$
Tiempo pico $t_p$	146 $\mu s$
Sobrepaso máximo $M_p$	52.7 %
Tiempo de asentamiento $t_s$	891 $\mu s$

#### IV.9. RESPUESTA EXPERIMENTAL DE LA PLANTA FÍSICA.

Como se mencionó previamente las especificaciones de la respuesta transitoria obtenidas matemáticamente deberán verse reflejadas en el comportamiento físico del circuito eléctrico ante la entrada correspondiente. Dicho circuito se debe construir utilizando componentes con los valores encontrados en las secciones anteriores en conjunción con un amplificador operacional. Se seleccionó el amplificador de uso general LM741 para

implementar el circuito que simulará el comportamiento del modelo matemático. El circuito resulta en:

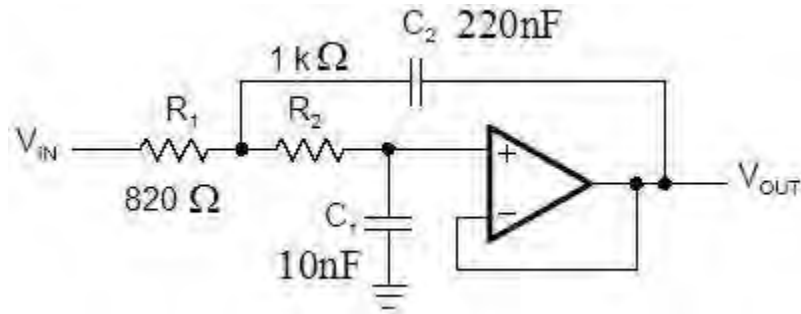


Figura 48. Circuito práctico de la planta en estudio.

Debe entenderse que el estudio matemático de la respuesta de la planta se efectuó considerando como entrada la función escalón unitario. En la realidad el estudio del comportamiento de la planta física se efectúa al aplicar una señal de entrada continua proveniente de un generador de funciones. Dado que la observación del comportamiento del sistema es dinámica, o en otras palabras, es de interés analizar la respuesta ante cambios continuos de la señal de entrada, usualmente se aplica una señal cuadrada como se muestra en la siguiente figura.

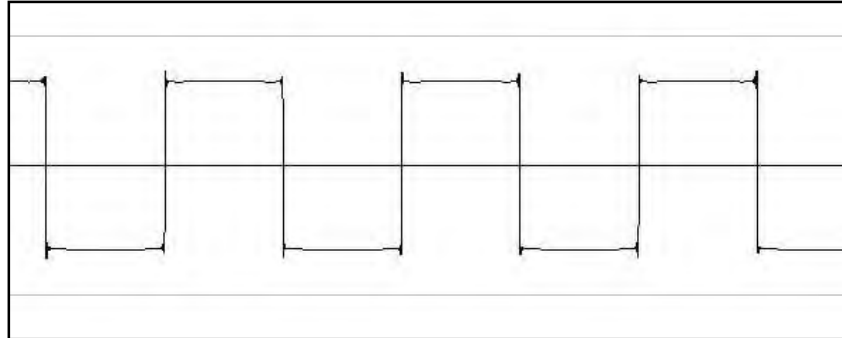


Figura 49. Señal cuadrada.

La ecuación matemática, en el dominio del tiempo, para la respuesta del sistema a entrada escalón describe únicamente el comportamiento de la planta considerando que en  $t=0$  se aplicó la señal de entrada y después se deja estabilizar el sistema mientras  $t$  tiende a infinito. En el caso práctico la señal cuadrada deberá entenderse, en el contexto de la aplicación como señal de entrada al sistema, como una sucesión de funciones escalón positivo y escalón negativo. En consecuencia el sistema responderá alternando el signo de la función de respuesta obtenida analíticamente.

No se debe olvidar que el circuito empleado para simular la planta de interés es en realidad un filtro eléctrico paso-bajas. Acorde con lo anterior el circuito permitirá el paso de señales por debajo de la frecuencia de corte utilizada como parámetro de diseño del filtro. El diseñador debe entonces seleccionar una señal cuadrada de entrada dentro del rango de frecuencias de operación del filtro. Las señales con frecuencias por encima de la frecuencia de corte serán atenuadas por el circuito.

A continuación se presenta un diagrama esquemático del arreglo eléctrico utilizado para observar la respuesta del sistema.

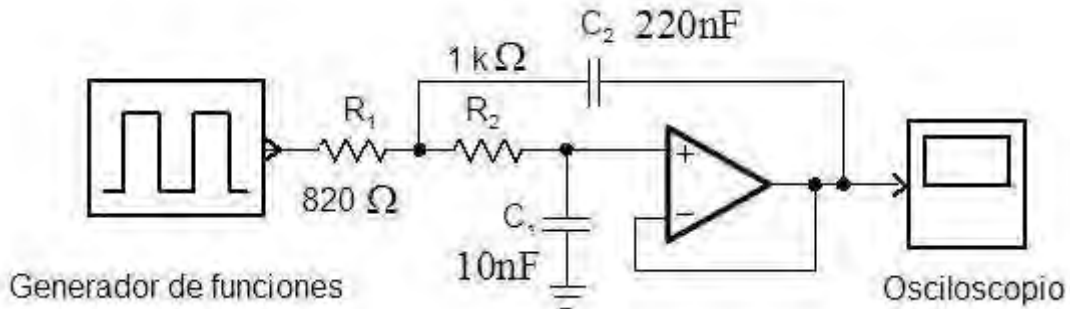


Figura 50. Diagrama del circuito de prueba, generador de funciones y osciloscopio.

Para el presente estudio se selecciona como entrada una señal cuadrada con frecuencia de 330Hz y amplitud de 2 volts pico y se conecta a la entrada del circuito en R1. La respuesta del sistema se muestra en la siguiente imagen.

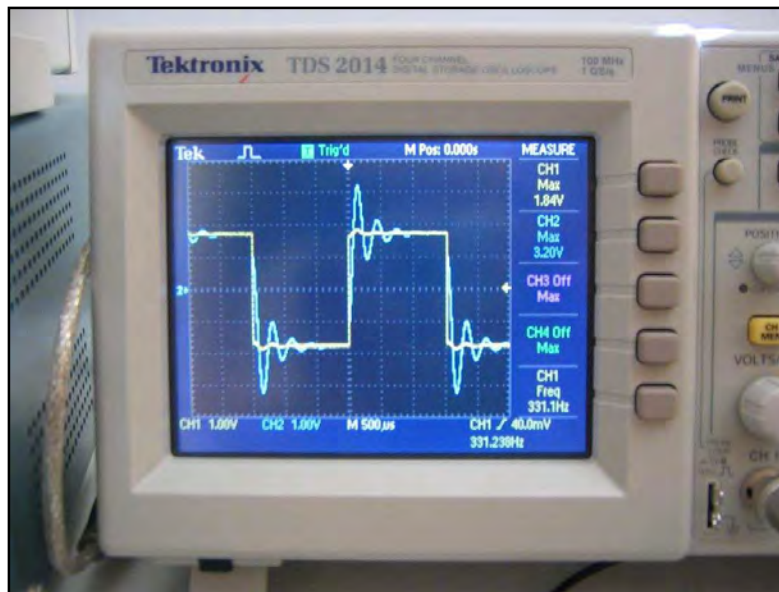


Figura 51. Salida del circuito equivalente a la planta en estudio.

En la pantalla del osciloscopio se muestran la señal de entrada y la señal de salida del sistema. Obsérvese el comportamiento del sistema ante la aplicación de la entrada. Se aprecia claramente el sobrepaso y la oscilación de la respuesta tal y como se predijo en el análisis matemático y la simulación en Matlab.

A continuación se muestran un acercamiento de la zona de oscilación de la respuesta.

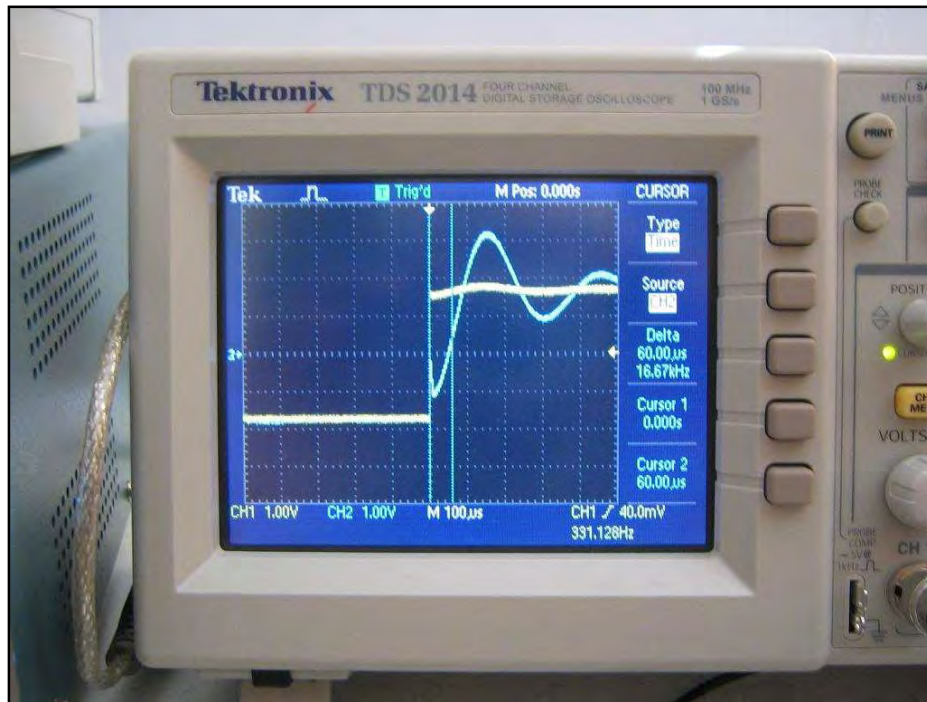


Figura 52. Acercamiento de la respuesta de la planta.

Mediante el uso de las funciones del osciloscopio es posible evaluar las características de la respuesta transitoria reales del sistema. De tal forma se encuentra que:

**-Tiempo de levantamiento,  $t_r$ .**

$$t_r = 60\mu s .$$

**-Tiempo pico,  $t_p$ .**

$$t_p = 152\mu s .$$

**-Sobrepaso máximo,  $M_p$ .**

$$\%M_p = 73.33\% .$$

**-Tiempo de asentamiento,  $t_s$ .**

$$t_s = 920\mu s .$$

A continuación se pueden comparar los valores encontrados utilizando el método analítico, Matlab y el circuito equivalente a la planta en estudio.

Parámetro	Análisis teórico	Matlab	Circuito
Tiempo de levantamiento $t_r$	63.55 $\mu s$	55.1 $\mu s$	60 $\mu s$
Tiempo pico $t_p$	145.8 $\mu s$	146 $\mu s$	152 $\mu s$
Sobrepaso máximo $M_p$ (%)	52.66%	52.7 %	50%
Tiempo de asentamiento $t_s$	909.45 $\mu s$	891 $\mu s$	920 $\mu s$

Se puede observar una aproximación aceptable entre todos los valores para las características de la respuesta transitoria.

## V. ESTUDIO DEL CONTROLADOR PID.

### V.1. DESARROLLO DEL CONTROLADOR CORRESPONDIENTE A LA PLANTA SELECCIONADA.

En las secciones anteriores se presentaron las herramientas y métodos necesarios para el estudio de las características de un modelo matemático así como para su implementación electrónica.

En las secciones subsecuentes se describirán así mismo las herramientas y métodos necesarios para el análisis, simulación e implementación de un controlador acorde a la planta en estudio.

Para tal efecto de manera inicial se presentará la teoría relacionada a los controladores. En seguida se abordará el tema de los amplificadores operacionales, sus características de operación y las diferentes configuraciones en las cuales se pueden utilizar para construir los bloques necesarios para implementar un controlador PID analógico. Posteriormente se obtendrán analíticamente los valores de los componentes electrónicos necesarios para la construcción del controlador. Una vez obtenidos tales parámetros se estudiará la respuesta del conjunto controlador-planta mediante la utilización de herramientas de simulación con objeto de realizar los ajustes necesarios antes de proceder a la corroboración de los resultados de forma experimental mediante la implementación del circuito correspondiente al controlador PID calculado.

### V.2. INTRODUCCIÓN A LOS CONTROLADORES.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Durante la presente sección se introducirán los conceptos de controlador y acción de control así como una técnica para el diseño del controlador electrónico analógico correspondiente a la planta objeto de estudio en el presente trabajo de tesis.

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia, determina el error y produce una señal de control que reducirá el error a

A continuación se pueden comparar los valores encontrados utilizando el método analítico, Matlab y el circuito equivalente a la planta en estudio.

Parámetro	Análisis teórico	Matlab	Circuito
Tiempo de levantamiento $t_r$	63.55 $\mu s$	55.1 $\mu s$	60 $\mu s$
Tiempo pico $t_p$	145.8 $\mu s$	146 $\mu s$	152 $\mu s$
Sobrepaso máximo $M_p$ (%)	52.66%	52.7 %	50%
Tiempo de asentamiento $t_s$	909.45 $\mu s$	891 $\mu s$	920 $\mu s$

Se puede observar una aproximación aceptable entre todos los valores para las características de la respuesta transitoria.

## V. ESTUDIO DEL CONTROLADOR PID.

### V.1. DESARROLLO DEL CONTROLADOR CORRESPONDIENTE A LA PLANTA SELECCIONADA.

En las secciones anteriores se presentaron las herramientas y métodos necesarios para el estudio de las características de un modelo matemático así como para su implementación electrónica.

En las secciones subsecuentes se describirán así mismo las herramientas y métodos necesarios para el análisis, simulación e implementación de un controlador acorde a la planta en estudio.

Para tal efecto de manera inicial se presentará la teoría relacionada a los controladores. En seguida se abordará el tema de los amplificadores operacionales, sus características de operación y las diferentes configuraciones en las cuales se pueden utilizar para construir los bloques necesarios para implementar un controlador PID analógico. Posteriormente se obtendrán analíticamente los valores de los componentes electrónicos necesarios para la construcción del controlador. Una vez obtenidos tales parámetros se estudiará la respuesta del conjunto controlador-planta mediante la utilización de herramientas de simulación con objeto de realizar los ajustes necesarios antes de proceder a la corroboración de los resultados de forma experimental mediante la implementación del circuito correspondiente al controlador PID calculado.

### V.2. INTRODUCCIÓN A LOS CONTROLADORES.

Recuérdese que el objetivo principal de este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. Durante la presente sección se introducirán los conceptos de controlador y acción de control así como una técnica para el diseño del controlador electrónico analógico correspondiente a la planta objeto de estudio en el presente trabajo de tesis.

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia, determina el error y produce una señal de control que reducirá el error a

cero o a un valor pequeño. El resultado del proceso anterior recibe el nombre de *acción de control*.

Los controladores usualmente se clasifican en:

- De encendido y apagado (on/off)
- Proporcionales
- Integrales
- Proporcionales-integrales
- Proporcionales-derivativos
- Proporcionales-integrales-derivativos

En el presente trabajo de tesis se desarrollará un controlador tipo proporcional-integral-derivativo.

Para tal efecto se presentan en las secciones subsecuentes los bloques que integran un controlador proporcional-integral-derivativo comúnmente conocido como un controlador PID.

Como se definió en secciones anteriores un diagrama de bloques describe las interconexiones entre los elementos de un modelo matemático determinado. El diagrama de bloques siguiente corresponde a una planta con realimentación negativa.

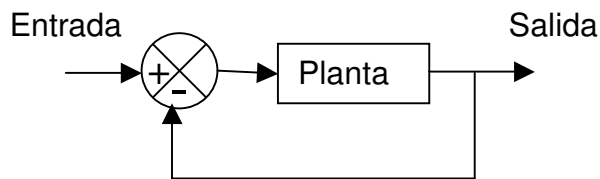


Figura 53. Sistema con realimentación negativa.

De la figura se entiende que para los sistemas realimentados negativamente la planta recibe como entrada la diferencia entre el nivel deseado y el valor actual de la salida de la planta. A tal señal se le denomina *señal de error*.

Como se mencionó anteriormente un controlador utiliza como entrada la señal de error y genera como salida la señal de control que se alimenta directamente a la planta como se observa en el diagrama de bloques a continuación.

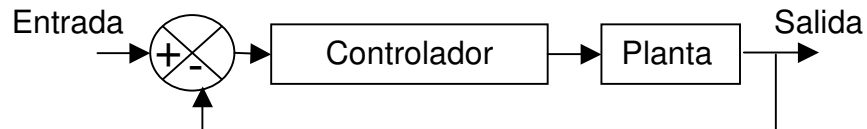


Figura 54. Sistema controlador-planta.

Un controlador PID es una conjunción de tres clases de acciones de control y el estudio de sus bloques constitutivos se presenta a continuación.

### V.3. ACCIONES DE CONTROL DE UN CONTROLADOR PID.

#### -Acción proporcional.

Para un controlador proporcional la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es:

$$u(t) = K_p e(t),$$

o mediante el uso de la transformada de Laplace resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p,$$

en donde  $K_p$  se considera la ganancia proporcional.

Es entonces que al observar la expresión en Laplace se puede concluir que un controlador proporcional es un amplificador con ganancia ajustable. Recuérdese que  $u(t)$  es la salida del controlador, no de la planta. Dicha señal  $u(t)$  es la que se le aplicará a la planta para obtener la salida deseada. Al observar la expresión para la salida del controlador se observa que ésta se encuentra en función del valor de la ganancia proporcional  $K_p$  y del valor de la señal de error. En otras palabras un valor grande de la señal de error tenderá a incrementar el valor de la salida del controlador proporcional; sin embargo dicho incremento se verá afectado por el valor de la ganancia proporcional. Así mismo, si el valor de la señal de error disminuye el valor de la salida del controlador proporcional se reducirá siendo afectado nuevamente por el valor de la ganancia proporcional.

Como se verá más adelante cada acción de control tiene un efecto directo sobre la velocidad de respuesta y el valor del error en estado estable.

#### -Acción integral.

Para un controlador con acción integral la tasa de cambio del valor de la salida del controlador  $u(t)$  está en función de una constante integral y la señal de error como se muestra en la siguiente expresión:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t).$$

Recuérdese que  $u(t)$  es la salida del controlador, no de la planta. Dicha señal  $u(t)$  es la que se le aplicará a la planta para obtener la salida deseada. De la expresión anterior se observa que la tasa de cambio de la salida del controlador  $u(t)$  es función de la ganancia integral  $K_i$  y de la señal de error. En consecuencia si el valor de la señal de error es grande significa que la tasa de cambio del valor de la salida será grande. En otras palabras el controlador “cambiará” su salida más rápido si el valor de la señal de error es grande y más lento si el valor de la señal de error es pequeño. De ahí que la acción integral se utilice para darle capacidad de procesamiento temporal al controlador pues continuamente se encuentra “cambiando” su salida de acuerdo a la magnitud presente de la señal de error. Importante es resaltar también que si la señal de error se mantiene constante la tasa de variación de la salida del controlador es también constante y crecerá de forma permanente.



Al integrar la expresión inicial resulta:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

en donde  $K_i$  es una constante ajustable.

De la misma manera usualmente se conoce a la acción integral como una acción de control “con memoria”. Lo anterior se basa en la naturaleza de la expresión anterior para la acción integral. Geométricamente la integral representa el valor del área bajo la curva de la señal de error en un periodo de tiempo. Para el cálculo de dicha área es necesario utilizar los valores de la señal de error en el periodo de tiempo de  $0$  a  $t$  para la expresión anterior. Lo anterior puede entenderse entonces como una acción “con memoria” por parte de la acción integral. En otras palabras la acción integral constantemente utiliza el error acumulado durante un lapso de tiempo para calcular el valor de la respuesta de la acción integral.

Al aplicar la transformada de Laplace a la expresión anterior resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_i \frac{1}{s}$$

#### **-Acción derivativa.**

La acción de control derivativa se define como:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Recuérdese que  $u(t)$  es la salida del controlador, no de la planta. Dicha señal  $u(t)$  es la que se le aplicará a la planta para obtener la salida deseada. De la expresión anterior se observa que el valor de la salida del controlador se encuentra en función de una ganancia derivativa  $K_d$  y de la tasa de cambio de la señal de error. Lo anterior implica que si el valor de la señal de error varía grandemente, la magnitud de la salida del controlador será también de magnitud grande.

Aplicando la transformada de Laplace resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s$$

Mediante las expresiones anteriores es posible observar el comportamiento general de un controlador PID. La acción proporcional opera directamente utilizando el valor de la señal de error en un momento determinado tratando de corregir dicha variación. A su vez la acción integral regirá la tasa de cambio de la señal de control utilizando también la magnitud de la señal de error. Finalmente la acción derivativa contribuirá al valor de la acción de control al “monitorear” la tasa de cambio de la señal de error fungiendo como un control “predictivo” de la señal de error. Usualmente se considera que la acción derivativa “conoce” el valor de la señal de error a priori; sin embargo en la realidad sucede que la acción derivativa proporciona un pronóstico de la señal de error basado en la tasa de cambio del error. En otras palabras tómese por ejemplo una señal de error con forma de onda tipo rampa. El error crecerá continuamente y la acción derivativa al

conocer, en un instante determinado, la tasa de cambio para la rampa “predice” que la señal de error seguirá creciendo y arroja un valor para la señal de control acorde a dicha tasa de variación.

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se presentará el desarrollo de un controlador proporcional-integral-derivativo o controlador PID.

#### V.4. EL CONTROLADOR PID.

Un controlador PID se construye mediante la combinación de las tres acciones de control descritas en la sección anterior. Consecuentemente el controlador PID presenta simultáneamente el comportamiento de las tres acciones de control que lo integran.

La ecuación de un controlador con acción PID se obtiene mediante:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Con objeto de facilitar el uso de la ecuación anterior las constantes de cada término a la derecha se dejan en función de la ganancia proporcional  $K_p$  definiendo las cantidades siguientes:

$$K_i = K_p / T_i$$

$$K_d = K_p T_d.$$

A la cantidad  $T_i$  se le denomina *tiempo integral* mientras que al valor  $T_d$  se le denomina *tiempo derivativo*. Al inverso del tiempo integral se le denomina *velocidad de reajuste*. Aplicando las expresiones anteriores la ecuación para definir la salida de un controlador PID resulta en:

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Factorizando el valor de la ganancia proporcional se obtiene:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right].$$

Utilizando la transformada de Laplace la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$

Así pues el paso siguiente es la utilización de la expresión anterior para encontrar una señal de control aplicable a la planta en estudio. Del mismo modo que para la planta se emplearán tanto un método analítico como la experimentación con un circuito electrónico para observar el comportamiento del controlador resultante. Pevio a la presentación de los métodos para implementar el controlador es necesario estudiar las capacidades del controlador elegido. Tal desempeño se puede visualizar al estudiar el error en estado estable para los sistemas de control como se muestra en la sección siguiente.

## V.5. ERRORES EN ESTADO ESTABLE PARA LOS SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN UNITARIA.

Son muchos los factores responsables de la existencia del error en los sistemas de control. En esta sección se presentará el error en estado estable provocado por la incapacidad del sistema de control para seguir ciertos tipos de entradas. Los sistemas de control se clasifican de acuerdo a la capacidad para seguir entradas escalón, rampa, parábola y otras. Como se mencionó con anterioridad las señales reales se pueden modelar utilizando las señales arriba listadas.

Tómese la siguiente expresión como la correspondiente a un sistema de control con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)}.$$

El término  $s^N$  es un polo de multiplicidad  $N$  en el origen.

La clasificación del tipo de controlador se da en base a la cantidad de integradores en la función de transferencia en lazo abierto. En consecuencia un sistema será tipo 0 si  $N=0$ , tipo 1 si  $N=1$  y así respectivamente.

Es importante resaltar que se está clasificando el tipo de controlador, no se está definiendo el orden de la planta como se describió en secciones anteriores. En otras palabras se podría tener una planta de 5 orden y utilizar un controlador tipo 2.

Entre mayor sea el número de integradores mayor será la precisión del controlador sin embargo dicho incremento se encuentra asociado con problemas de inestabilidad por lo cual se deberá realizar un balance entre el tipo de controlador y su estabilidad.

Considérese la siguiente figura:

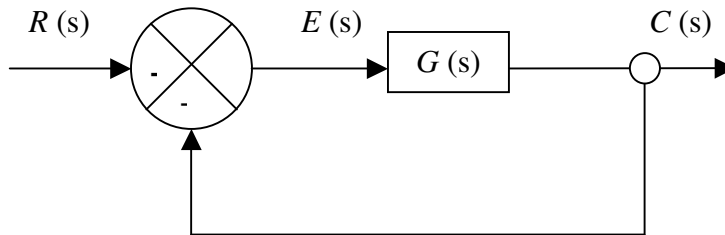


Figura 55. Sistema de control.

La función de transferencia en lazo cerrado está dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

Así mismo la señal de error se define como:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}.$$

El teorema del valor final se calcula como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(g(0))$$

Aplicando el teorema del valor final a la expresión para el error resulta el error en estado estable  $e_{ss}$  por sus siglas en inglés “*steady-state*”:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}.$$

Para facilitar la manipulación de los resultados, mostrados en la siguiente sección, al aplicar los diferentes tipos de entradas se definen los términos de señal de *posición* correspondiente a una entrada escalón, señal de *velocidad* correspondiente a una entrada rampa y señal de *aceleración* para una entrada parábola. Lo anterior se fundamenta en las formas de señal resultantes de aplicar la transformada inversa de Laplace a las expresiones en el dominio de  $s$  para los tres tipos de entradas listados.

#### -Aplicación de una entrada escalón.

Considérese el caso en el cual se aplica una entrada escalón y se desea conocer el valor del error en estado estable. Para tal caso  $R(s)=(1/s)$  y resulta:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{1 + G(0)}. \end{aligned}$$

Recuérdese que la función  $G(s)$  representa la función de transferencia de un controlador. Se define entonces la *constante de error de posición estática*  $K_p$  mediante:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0).$$

Regresando a la expresión para el error en estado estable se tiene:

$$e_{ss} = \frac{s}{1 + K_p}.$$

Para un sistema tipo 0, es decir con  $N=0$ ,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K.$$

Para un sistema tipo 1 o mayor, es decir con  $N \geq 1$ ,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty$$

El par de valores de  $K_p$  calculados se sustituyen entonces en la expresión para el error en estado estable resultando en:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K}, \text{ para sistemas tipo } N=0.$$

$$e_{ss} = 0, \text{ para sistemas tipo } N \geq 1.$$

De los resultados anteriores se puede concluir que la no existencia de un integrador ( $1/s$ ) en la trayectoria directa del controlador presenta un error en estado estable que se puede minimizar aumentando el valor de la ganancia  $K$ . Sin embargo se pudiera pensar que se debe incrementar considerablemente el valor de la constante  $K$  para reducir el error en estado estable pero tal acción va acompañada de problemas de inestabilidad.

**-Aplicación de una entrada rampa.**

Para tal efecto la señal de entrada  $R(s)=1/s^2$ .

Al aplicar dicho valor a la expresión para el error en estado estable resulta:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)}. \end{aligned}$$

Se define entonces *la constante de error de velocidad estática*  $K_v$  como:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s).$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación para el error en estado estable se tiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}.$$

Para un sistema tipo 0, es decir con  $N=0$ ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = 0.$$

Para un sistema tipo 1, es decir con  $N=1$ ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K.$$

Para un sistema tipo 2 o mayor, es decir con  $N \geq 2$ ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty.$$

Los valores de  $K_v$  calculados se sustituyen entonces en la expresión para el error en estado estable resultando en:

$$e_{ss} = \infty, \text{ para sistemas tipo } N=0.$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \text{ para sistemas tipo } N=1.$$

$$e_{ss} = 0, \text{ para sistemas tipo } N \geq 2.$$

De los resultados anteriores se observa que un sistema sin un integrador ( $1/s$ ) en la trayectoria directa es incapaz de seguir una entrada rampa mientras que la existencia de un integrador presenta un error en estado estable constante. Así mismo la presencia de dos o más integradores cancela el error en estado estable.

### -Aplicación de una entrada parábola.

Para tal efecto la señal de entrada  $R(s)=1/s^3$ .

Al aplicar dicho valor a la expresión para el error en estado estable resulta:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G(s)}. \end{aligned}$$

Se define entonces *la constante de error de aceleración estática*  $K_a$  como:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s).$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación para el error en estado estable se tiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}.$$

Para un sistema tipo 0, es decir con  $N=0$ ,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = 0.$$

Para un sistema tipo 1, es decir con  $N=1$ ,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = 0.$$

Para un sistema tipo 2, es decir con  $N=2$ ,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = K.$$

Para un sistema tipo 3 o mayor, es decir con  $N \geq 3$ ,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K (T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^3 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} = \infty.$$

Los valores de  $K_a$  calculados se sustituyen entonces en la expresión para el error en estado estable resultando en:

$$e_{ss} = \infty, \text{ para sistemas tipo } N=0 \text{ y } N=1.$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}, \text{ para sistemas tipo } N=2.$$

$$e_{ss} = 0, \text{ para sistemas tipo } N \geq 3.$$

De los resultados anteriores se observa que los sistemas tipo 0 y 1 son incapaces de seguir una entrada parábola mientras que un sistema tipo 2 presenta un error en estado estable constante siendo los sistemas de tipo 3 o superiores los únicos que pueden seguir una entrada parábola.

Una vez presentada la manera en la cual se clasifican los controladores en función de su habilidad para responder a entradas predefinidas recuérdese que el objetivo principal de

este trabajo de tesis es presentar una metodología para el diseño de un controlador aplicable a una planta o sistema determinado. En las secciones anteriores se definió la manera mediante la cual es posible la implementación de un modelo matemático utilizando un circuito electrónico. Se presentó así mismo el estudio de la respuesta transitoria de la planta correspondiente mediante el uso de matlab y de la experimentación física con el circuito electrónico. En la sección inmediata anterior se presentó la teoría básica de un controlador PID y la clasificación de los controladores respecto a su desempeño. Respecto al controlador tipo PID se presentaron los bloques que lo integran siendo éstos las acciones proporcional, integral y derivativa. Tales bloques se pueden implementar electrónicamente mediante el uso de amplificadores operacionales en las configuraciones de amplificador, integrador, derivador y sumador como se mostrará más adelante.

## V.6. EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL COMO BLOQUE CONSTITUTIVO DE UN CONTROLADOR ANALÓGICO.

Un amplificador operacional, u op-amp, es un amplificador diferencial con una ganancia muy alta, con una elevada impedancia de entrada y una impedancia de salida baja. Su uso típico es proporcionar cambios de amplitud de voltaje, osciladores, filtros eléctricos y en circuitos de instrumentación. Un amplificador operacional contiene varias etapas de amplificador diferencial para lograr una ganancia de voltaje alta.

A continuación se presentará la implementación electrónica mediante amplificadores operacionales de los bloques constitutivos de un controlador PID. No se abordará con detalle la deducción de las ecuaciones correspondientes, mismas que pueden ser consultadas en la abundante literatura existente al respecto.

### -Amplificador diferencial.

La siguiente figura muestra un amplificador operacional básico con dos entradas y una salida.

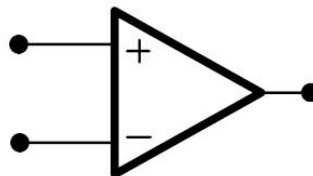


Figura 56. Amplificador operacional.

Los amplificadores operacionales pueden utilizarse con entrada en una sola terminal con la otra terminal conectada a tierra así como con entradas independientes en cada terminal de entrada también conocida como entrada *diferencial*.

Cuando se aplica la misma señal de entrada a ambas terminales de entrada, se obtiene como resultado la *operación en modo común*. Resulta ideal cuando las dos entradas son amplificadas de manera igual, y dado que a la salida se presenta como resultado señales de polaridad opuesta dichas señales se cancelan. Es importante señalar que en la realidad la señal de salida de un amplificador operacional funcionando en modo diferencial presentará una señal pequeña a la salida.

Como se verá más adelante en el presente trabajo, una característica importante de una conexión diferencial es la gran amplificación que sufren las señales que son opuestas en las entradas, mientras que las que son comunes a las dos entradas son sólo ligeramente amplificadas; la operación global amplifica la señal diferencial, mientras que rechaza la señal común en las dos entradas. Debido a que el ruido (cualquier señal de entrada no deseada) es por lo general común a ambas entradas, la conexión diferencial tiende a proporcionar atenuación de esta entrada no deseada, mientras proporciona una salida amplificada de la señal diferencial aplicada a las entradas. Esta característica de operación se conoce como *rechazo en modo común*. Lo anterior es de suma importancia al recordar los diagramas de bloques asociados tanto al modelo electrónico de la planta como del controlador pues los puntos suma son esencialmente amplificadores operacionales funcionando en modo diferencial. Recuérdese que para un sistema con retroalimentación negativa la señal de error se obtiene al restar la señal retroalimentada de la señal de entrada con el objetivo de conocer “la desviación” de la señal de salida de la planta respecto a la entrada al sistema. Es así entonces que el amplificador en configuración diferencial permite el cálculo de dicha “diferencia” que efectivamente es la señal de error.

### -Amplificador inversor.

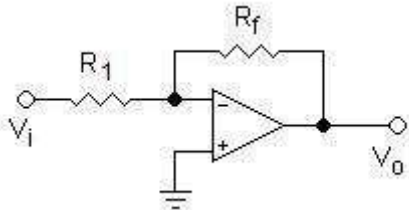


Figura 57. Amplificador inversor.

Para un amplificador operacional en configuración de amplificador inversor la salida se obtiene multiplicando la entrada por una ganancia determinada por la resistencia de entrada  $R_1$  y la resistencia de retroalimentación  $R_f$ , con la salida invertida respecto a la entrada. Es así que la ecuación para la salida se define como:

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_i.$$



**-Amplificador no inversor.**

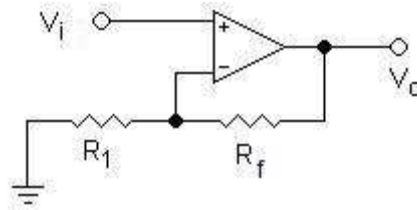


Figura 58. Amplificador no inversor.

La expresión para encontrar el voltaje de salida respecto a la entrada se encuentra dada por:

$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1}.$$

**-Amplificador sumador.**

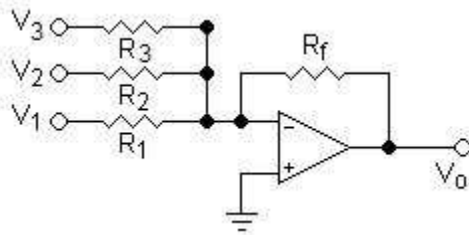


Figura 59. Amplificador sumador.

La configuración anterior proporciona un medio para sumar algebraicamente los voltajes a la entrada del amplificador operacional. La figura se muestra para una configuración de 3 entradas sin embargo dicho número podría modificarse de acuerdo a la aplicación. La señal de salida para la configuración de tres entradas mostrada en el diagrama superior se calcula mediante:

$$V_o = -R_f \left( \frac{1}{R_1} V_1 + \frac{1}{R_2} V_2 + \frac{1}{R_3} V_3 \right).$$

### -Amplificador integrador.

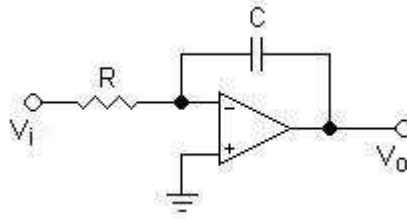


Figura 60. Amplificador integrador.

La expresión para el voltaje de salida del amplificador operacional en configuración de integrador de la figura es:

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int v_i(t) dt .$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la ecuación anterior resulta:

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{sRC} .$$

La expresión en el dominio del tiempo para el integrador indica que la salida es la integral de la entrada, con inversión en la polaridad y una ganancia dada por  $1/(RC)$ . Dicho comportamiento que involucra la integración de una señal proporciona al bloque integrador la habilidad de resolver ecuaciones diferenciales y en consecuencia solucionar eléctricamente la operación de los sistemas físicos. De la teoría matemática de la integral si se considera como entrada un valor constante el resultado de la integración será una señal tipo rampa. Como se vio en las secciones anteriores, usualmente las características de la respuesta transitoria de los sistemas se encuentran mediante la aplicación de una señal escalón unitario. Si dicha señal se aplica a un circuito integrador con amplificador operacional se encontrará que la salida del circuito deberá ser una rampa concordando con la integración de un valor constante de voltaje representado por la señal escalón a la entrada. Lo anterior se deberá corroborar al implementar electrónicamente el controlador.

La expresión matemática para el amplificador integrador anterior es limitada pues la ruta de retroalimentación se encuentra dada exclusivamente por un capacitor. A bajas frecuencias donde dicho elemento actúa como un circuito abierto no existe ruta de retroalimentación y se puede considerar que el amplificador se encuentra en lazo abierto. En tal condición de operación las corrientes y voltajes de desvío, explicadas en breve, provocan que el amplificador no se comporte deseablemente. Es por ello que en la configuración del amplificador integrador a utilizar en el presente trabajo se introduce una resistencia de realimentación para evitar tales efectos indeseables.

En consecuencia la configuración del amplificador operacional integrador resulta en la siguiente figura:

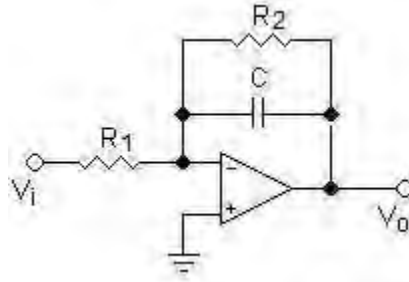


Figura 61. Integrador compensado para bajas frecuencias.

El cálculo de la función de transferencia correspondiente al circuito anterior se realiza como sigue.

La impedancia del capacitor se puede expresar como:

$$X_c = 1/sC$$

La resistencia equivalente de retroalimentación se define como:

$$R_{equivalente} = \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{X_c} \right)^{-1} = \frac{R_2}{(R_2 Cs + 1)}.$$

Utilizando la expresión para un amplificador inversor resulta:

$$V_s = -\frac{R_{equivalente}}{R_1} V_e$$

Finalmente al sustituir valores el circuito para el integrador tiene una función de transferencia dada por:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \left( \frac{1}{R_2 Cs + 1} \right).$$

**-Amplificador diferenciador.**

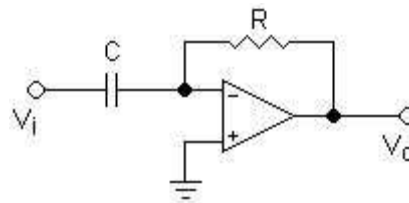


Figura 62. Amplificador diferenciador.

La expresión para el cálculo de la salida de un amplificador diferenciador se define mediante:

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt}.$$

Al aplicar la transformada de Laplace a la función anterior resulta:

$$\frac{V_o}{V_1} = -sRC.$$

La expresión en el dominio del tiempo para el diferenciador indica que la salida es la derivada de la entrada, con inversión en la polaridad y una ganancia dada por  $RC$ .

Al igual que para el caso del integrador la expresión matemática para el amplificador diferenciador anterior presenta problemas pues a altas frecuencias el capacitor actúa como un circuito corto provocando que la ganancia del amplificador sea excesiva. Es por ello que en la configuración del amplificador diferenciador a utilizar en el presente trabajo se introduce una resistencia en la ruta de entrada de la señal para limitar la ganancia a altas frecuencias. En consecuencia la configuración del amplificador operacional integrador resulta en la siguiente figura:

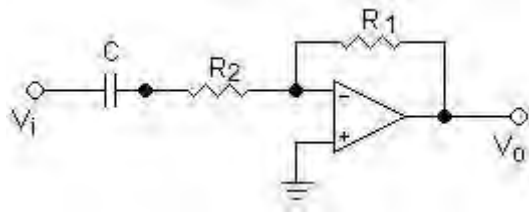


Figura 63. Diferenciador compensado para altas frecuencias.

El cálculo de la función de transferencia correspondiente al circuito anterior se realiza como sigue.

La impedancia del capacitor se puede expresar como:

$$X_c = 1/sC$$

La resistencia equivalente se define como:

$$R_{equivalente} = R_2 + X_c = R_2 + \frac{1}{sC} = \frac{R_2Cs + 1}{sC}.$$

Utilizando la expresión para un amplificador inversor resulta:

$$V_s = -\frac{R_1}{R_{equivalente}} V_e.$$

Finalmente al sustituir valores el circuito para el diferenciador tiene una función de transferencia dada por:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_1Cs}{R_2Cs + 1}.$$

### **Consideraciones importantes sobre amplificadores operacionales.**

Antes de proceder a la implementación electrónica de los bloques anteriormente expuestos con objeto de construir el controlador PID analógico es necesario describir ciertas características de desempeño de los amplificadores operacionales pues dichas propiedades limitarán el uso de tales dispositivos en la implementación del controlador PID.

#### **-Corrientes y voltajes de desvío.**

La operación ideal de un amplificador operacional implica considerar las etapas de amplificación correspondientes a ambas entradas como completamente idénticas. En la realidad lo anterior no es factible. Existen diferencias inherentes entre dichas etapas. En el caso real al conectar ambas terminales a un potencial cero la salida presenta un valor. Así mismo un amplificador operacional ideal considera que la impedancia de entrada es infinita resultando en corrientes nulas en las terminales de entrada. Lo anterior tampoco ocurre en la realidad. Existen valores muy pequeños de corriente entrando a las terminales y de nuevo dichos valores no son exactamente iguales. El efecto anterior debido a las corrientes se denomina comúnmente como los *efectos de la corriente de bias* que tendrán impacto sobre la señal de salida.

#### **-Parámetros de frecuencia.**

Los amplificadores operacionales están diseñados para tener altos valores de ganancia y gran ancho de banda. Las características anteriores generalmente tienden a convertir al dispositivo en inestable. Para asegurar la operación estable, los amplificadores operacionales se construyen con circuitos de compensación internos que provocan que la ganancia muy alta de lazo abierto disminuya con el incremento de la frecuencia. A esta reducción de ganancia se le conoce como *atenuación progresiva*. En la mayoría de los amplificadores, la atenuación progresiva se presenta con un porcentaje de 20dB por década.

#### **-Ganancia-ancho de banda.**

Debido a los circuitos de compensación interna de los amplificadores operacionales la ganancia de voltaje cae conforme se incrementa la frecuencia. Las especificaciones del op-amp proporcionan una descripción de la ganancia en función del ancho de banda. La siguiente figura proporciona una gráfica de la ganancia en función de la frecuencia para un amplificador operacional típico.

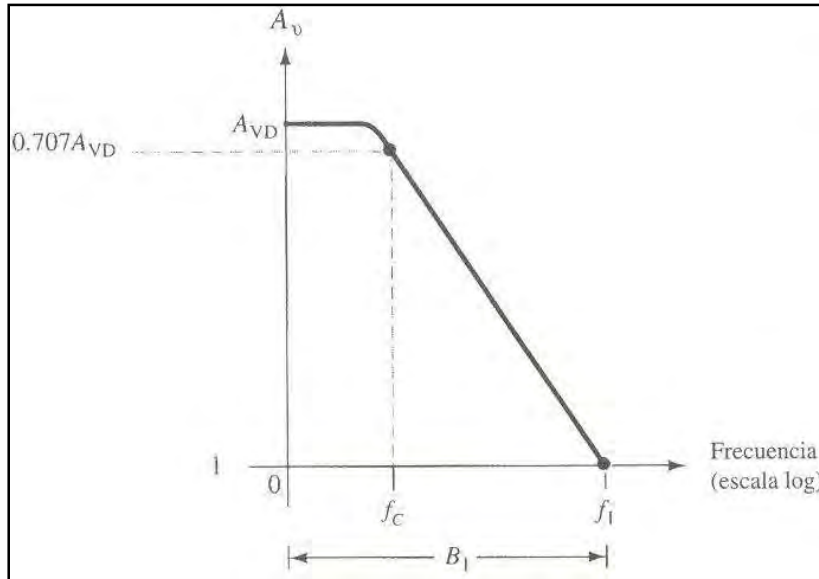


Figura 64. Gráfica de la ganancia en función de la frecuencia para un op-amp general.

Si se decrece la frecuencia hasta DC, la ganancia se convierte en el valor listado por la especificación como *ganancia diferencial de voltaje*  $A_{VD}$ . Conforme aumenta la frecuencia de la señal de entrada, la ganancia en lazo abierto cae hasta que finalmente llega al valor de 1. La frecuencia en este valor de ganancia la especifica el fabricante como el ancho de banda de ganancia unitaria,  $B_1$ . Dicho valor se considera un ancho de banda puesto que representa un rango de frecuencia desde 0 Hz hasta el valor de frecuencia en donde la ganancia es unitaria. Otra frecuencia de interés es aquella para la cual la ganancia cae 3dB. Dicha frecuencia es la frecuencia de corte del amplificador operacional  $f_c$ . La frecuencia de ganancia unitaria y la frecuencia de corte se encuentran relacionadas por la siguiente expresión:

$$f_1 = A_{VD} f_c.$$

Dado lo anterior a la frecuencia  $f_1$  también se le conoce como *producto ganancia – ancho de banda* del amplificador operacional.

#### **-Rapidez de respuesta SR (Slew Rate).**

Otro parámetro que refleja la habilidad del amplificador operacional para manejar diversas señales es la rapidez de respuesta, definida como la tasa máxima a la cual la salida del amplificador puede cambiar en volts por microsegundo ( $V/\mu s$ ).

$$SR = \frac{\Delta V_o}{\Delta t}.$$

Lo anterior implica que si se intenta llevar a la salida a una tasa de cambio de voltaje mayor que la rapidez de respuesta, la salida no será capaz de cambiar lo suficientemente

rápido, por lo que no variará a lo largo del intervalo completo esperado, y se obtendrá como resultado el recorte o distorsión de la señal.

#### **-Frecuencia máxima de señal.**

La frecuencia máxima a la que puede operar un amplificador operacional depende tanto de los parámetros de ancho de banda (BW) como de la rapidez de respuesta (SR) del mismo. Para una señal senoidal definida por:

$$v_o = Ksen(2\pi ft),$$

la tasa de cambio de voltaje máxima es  $2\pi fK$ .

Para evitar la distorsión en la salida la tasa de cambio tiene que ser menor también a la velocidad de respuesta por lo que:

$$f \leq \frac{SR}{2\pi K}.$$

### **V.7. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA DE UN CONTROLADOR PID.**

A lo largo de la sección anterior se presentó brevemente la teoría necesaria para la utilización de los amplificadores operacionales en la implementación de los bloques constitutivos de un controlador PID analógico.

En los párrafos siguientes se presentará un método para calcular los diferentes valores de los componentes electrónicos necesarios para construir el controlador PID.

Recuérdese la función de transferencia de un controlador PID como sigue:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$

Estudiando la expresión anterior se observa que la implementación electrónica de tal controlador implica la utilización de un amplificador con ganancia unitaria para obtener el primer término dentro del paréntesis; la utilización de un amplificador en configuración de integrador para obtener el segundo término dentro del paréntesis así como un amplificador diferenciador para obtener el tercer término dentro del paréntesis. Los tres elementos anteriores se suman resultando en la necesidad de utilizar un amplificador sumador. Finalmente se requiere un amplificador con ganancia  $K_p$  que afecte al conjunto de bloques dentro del paréntesis.

Tal implementación resulta en un circuito para el controlador PID con la siguiente configuración:

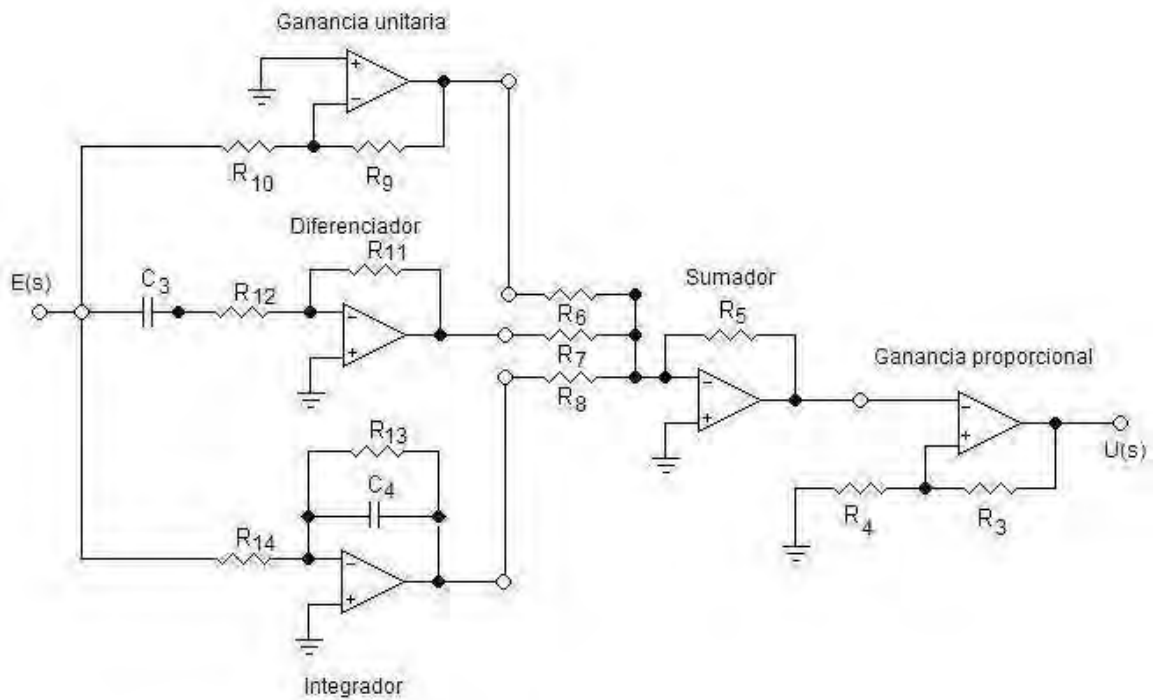


Figura 65. Circuito del controlador PID.

De la figura anterior se observa el uso de configuraciones de amplificador operacional que provocan un cambio en la polaridad de la señal de salida. Como se verá más adelante tales cambios de polaridad no tienen efecto en la salida final de la planta pues en la configuración final el cambio de polaridad a través de las etapas del circuito completo resulta en la obtención de una señal con la polaridad correcta. El circuito final propuesto es de la forma:



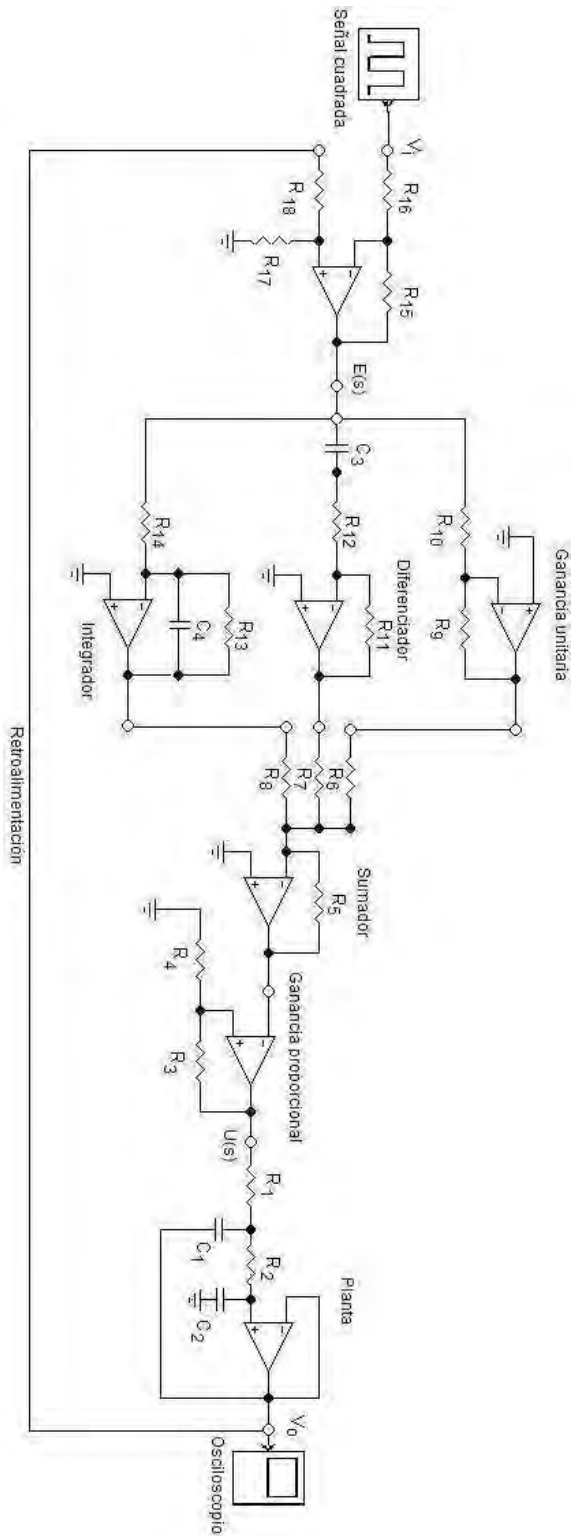


Figura 66. Circuito completo para el sistema controlador-planta.

Utilizando las expresiones analíticas para las acciones de control y las expresiones que definen la salida de los amplificadores operacionales en sus diferentes configuraciones es posible comparar los coeficientes con el objetivo de encontrar los valores de los componentes electrónicos (resistores y capacitores) necesarios para construir el circuito que fungirá como controlador PID.

**-Amplificador con ganancia unitaria.**

La función matemática que describe la salida de un amplificador inversor está dada por:

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_1.$$

Para el caso en estudio la expresión correspondiente es:

$$V_o = -\frac{R_9}{R_{10}} V_1$$

Si se selecciona  $R_9 = R_{10}$  resulta:

$$V_o = -(1)V_1,$$

y se obtiene la ganancia unitaria requerida en el primer término de la expresión para el controlador PID.

De la figura para el circuito del controlador y la planta observe que siguen en cascada al amplificador de ganancia unitaria un amplificador sumador inversor y un amplificador de ganancia inversor. Si se desea conocer el valor total de la ganancia al seguir la trayectoria de la señal a partir del bloque con ganancia unitaria hasta la entrada a la planta se tiene:

$$G_{Total \text{ de ruta ganancia } 1} = 1 \times \frac{R_5}{R_6} \times \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_5 R_3}{R_6 R_4}.$$

Recordando la expresión correspondiente al controlador PID se tiene:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$

Se observa que el primer término dentro del paréntesis corresponde al amplificador con ganancia unitaria. Sin embargo tal factor se ve multiplicado por el término  $K_p$ . A partir de la función de transferencia para el controlador PID el resultado de aplicar todas las ganancias en cascada a lo largo de la trayectoria del amplificador con ganancia unitaria desde el punto de la señal de entrada hasta el punto de entrada a la planta debe igualar al valor de  $K_p$ . Se tiene entonces que:

$$K_p = \frac{R_5 R_3}{R_6 R_4}.$$

### -Amplificador integrador.

Recuérdese que el término correspondiente al bloque integrador en la función de transferencia del controlador PID es:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{integrador}}} = K_p \frac{1}{T_i s}.$$

De manera similar al caso del amplificador con ganancia unitaria para el caso del amplificador integrador se calcula también la ganancia total a lo largo de la trayectoria de integración desde el punto de la señal de entrada hasta el punto de entrada a la planta. La ganancia total, en valor absoluto, a lo largo de la trayectoria de integración se calcula como:

$$G_{\text{Total de ruta integración}} = \frac{R_{13}}{R_{14}} \times \frac{R_5}{R_8} \times \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_{13} R_5 R_3}{R_{14} R_8 R_4}.$$

Se puede observar, a partir de la función de transferencia para el controlador PID, que el numerador del coeficiente del término integral es  $K_p$ .

Sin embargo solo se conoce el valor total de la ganancia a lo largo de la ruta de integración con valor definido por el término  $G_{\text{Total de ruta integración}}$ . Se puede considerar que la ganancia total a lo largo de la ruta de integración “contiene” de alguna manera al valor  $K_p$ . Lo anterior se plantea con objeto de manipular los valores de ganancia de forma que resulten con la estructura requerida por la función de transferencia del controlador PID. Para lograr lo anterior es necesario plantear la siguiente ecuación:

$$G_{\text{Total de ruta integración}} = A \times K_p.$$

Donde  $A$  es un coeficiente necesario para que el resultado final de la aplicación de  $K_p$  resulte en la ganancia total del circuito al utilizar la ruta de integración.

Al despejar el término  $A$  se encuentra su valor dado por:

$$\frac{R_{13} R_5 R_3}{R_{14} R_8 R_4} = A \times \frac{R_5 R_3}{R_6 R_4}$$
$$A = \frac{R_6 R_{13}}{R_8 R_{14}}.$$

A partir de la ecuación  $G_{\text{Total de ruta integración}} = A \times K_p$ , se puede despejar el valor de  $K_p$  resultando:

$$K_p = (G_{\text{Total de ruta integración}}) / A.$$

Recordando el término integral, obtenido a partir de la función de transferencia para el controlador PID, se tiene entonces que al aplicar el valor de la ganancia proporcional  $K_p$

recién calculada al término  $K_p \frac{1}{T_i s}$  resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{integrador}}} = K_p \frac{1}{T_i s} = \frac{G_{\text{Total de ruta integración}}}{A} \frac{1}{T_i s}.$$

Se observa la existencia de un nuevo valor en el denominador resultado de la multiplicación de  $A$  con  $T_i$ . Se definirá dicho término como  $T_i'$ .

Consecuentemente el término correspondiente a la acción integral resulta en:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{integrador}}} = \frac{G_{\text{Total de ruta integración}}}{T_i'} \frac{1}{s}.$$

Adicionalmente a partir de las dos ecuaciones anteriores se encuentra que:

$$T_i' = AT_i.$$

La importancia de la variable  $T_i'$  se verá a continuación.

Utilizando la función matemática con resistencia de retroalimentación, que describe la salida de un amplificador operacional en configuración de integrador se encuentra que para el caso en estudio:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{13}}{R_{14}} \left( \frac{1}{R_{13}C_4s + 1} \right).$$

A diferencia de la expresión ideal para un amplificador integrador la ecuación anterior se ve afectada por una ganancia dada por  $R_{13}/R_{14}$  además de contar con un polo desplazado en lugar de un polo en el origen. La expresión anterior se puede generalizar mediante la siguiente función de transferencia:

$$\frac{V_s}{V_e} = -G_i \left( \frac{1}{T_i's + 1} \right),$$

Donde  $T_i'$  es un tiempo integral diferente de  $T_i$  resultado de la utilización de la resistencia de retroalimentación.

Para el caso en estudio  $T_i' = R_{13}C_4$ .

El valor  $G_i$  es un valor de ganancia parcial a través del amplificador operacional integrador inversor y su valor se absorbe dentro del término  $G_{\text{Total de ruta integración}}$  calculado previamente.

Al haber obtenido los valores de  $A$  y de  $T_i'$  es posible entonces calcular el tiempo integral  $T_i$  mediante la ecuación  $T_i' = AT_i$ . Resulta entonces:

$$T_i = \frac{T_i'}{A} = \frac{R_{13}C_4/1}{R_6R_{13}/R_8R_{14}} = \frac{R_8R_{14}R_{13}C_4}{R_6R_{13}},$$

$$T_i = \frac{R_8R_{14}C_4}{R_6}.$$

Mediante la selección de valores para las resistencias y el capacitor en la ecuación anterior es posible definir el tiempo integral  $T_i$  y consecuentemente definir el bloque integrador del controlador PID.

Como se mostrará posteriormente existen reglas para la definición del tiempo integral  $T_i$  así como restricciones de operación de los amplificadores operacionales que limitan la selección de los valores para las resistencias y el capacitor involucrados.

### **-Amplificador diferenciador.**

Recuérdese que el término correspondiente al bloque diferenciador en la función de transferencia del controlador PID es:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{diferenciador}}} = K_p (T_d s).$$

De manera similar a los casos del amplificador con ganancia unitaria y el amplificador integrador para el caso del amplificador diferenciador se calcula también la ganancia total a lo largo de la trayectoria de diferenciación desde el punto de la señal de entrada hasta el punto de entrada a la planta. La ganancia total, en valor absoluto, a lo largo de la trayectoria de diferenciación se calcula como:

$$G_{\text{Total de ruta diferenciación}} = \frac{R_{11}}{R_{12}} \times \frac{R_5}{R_7} \times \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_{11}R_5R_3}{R_{12}R_7R_4}.$$

Se puede observar, a partir de la función de transferencia para el controlador PID, que el numerador del coeficiente del término diferenciador es  $K_p T_d$ .

Sin embargo solo se conoce el valor total de la ganancia a lo largo de la ruta de diferenciación con valor definido por el término  $G_{\text{Total de ruta diferenciación}}$ . Nuevamente se puede considerar que la ganancia total a lo largo de la ruta de diferenciación “contiene” de alguna manera al valor  $K_p$ . Lo anterior se plantea con objeto de manipular los valores de ganancia de forma que resulten con la estructura requerida por la función de transferencia del controlador PID. Para lograr lo anterior es necesario plantear la siguiente ecuación:

$$G_{\text{Total de ruta diferenciación}} = K_p \times B.$$

Donde  $B$  es un coeficiente necesario para que el resultado final de la aplicación de  $K_p$  resulte en la ganancia total del circuito al utilizar la ruta de diferenciación.

Al despejar el término  $B$  se encuentra su valor dado por:

$$\begin{aligned} \frac{R_{11}R_5R_3}{R_{12}R_7R_4} &= \frac{R_5R_3}{R_6R_4} \times B \\ B &= \frac{R_6R_{11}}{R_7R_{12}}. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación  $G_{\text{Total de ruta diferenciación}} = K_p \times B$ , se puede despejar el valor de  $K_p$  resultando:

$$K_p = (G_{\text{Total de ruta diferenciación}}) / B.$$

Recordando el término diferenciador, obtenido a partir de la función de transferencia para el controlador PID, se tiene entonces que al aplicar el valor de la ganancia proporcional  $K_p$  recién calculada al término  $K_p (T_d s)$  resulta:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{diferenciador}}} = K_p T_d s = \frac{G_{\text{Total de ruta diferenciación}}}{B} T_d s.$$

Se observa la existencia de un nuevo valor en el numerador resultado del cociente  $T_d / B$ . Se definirá dicho término como  $T_d'$ .

Consecuentemente el término correspondiente a la acción derivativa resulta en:

$$\frac{U(s)}{E(s)_{\text{diferenciador}}} = G_{\text{Total de ruta diferenciación}} T_d' s.$$

Adicionalmente a partir de las dos ecuaciones anteriores se encuentra que:

$$T_d' = \frac{T_d}{B}.$$

La importancia de la variable  $T_d'$  se verá a continuación.

Utilizando la función matemática con resistencia para regular la ganancia a altas frecuencias que describe la salida de un amplificador operacional en configuración de diferenciador inversor se encuentra que para el caso en estudio:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{11}C_3s}{R_{12}C_3s + 1}.$$

A diferencia de la expresión ideal para un amplificador diferenciador la ecuación anterior se ve afectada por una ganancia dada por  $R_{11}C_3$  además de contar con un cero en el origen. La expresión anterior se puede generalizar mediante la siguiente función de transferencia:

$$\frac{V_s}{V_e} = -G_d \left( \frac{s}{T_d's + 1} \right),$$

Donde  $T_d'$  es un tiempo derivativo diferente de  $T_d$  resultado de la utilización de la resistencia de limitación de ganancia a altas frecuencias.

Para el caso en estudio  $T_d' = R_{12}C_3$ .

El valor  $G_d$  es un valor de ganancia parcial a través del amplificador operacional diferenciador inversor y su valor se absorbe dentro del término  $G_{Total \text{ de ruta diferenciación}}$  calculado previamente.

Al haber obtenido los valores de  $B$  y de  $T_d'$  es posible entonces calcular el tiempo derivativo  $T_d$  mediante la ecuación  $T_d' = \frac{T_d}{B}$ .

Resulta entonces:

$$T_d = B \times T_d' = \frac{R_6 R_{11} R_{12} C_3}{R_7 R_{12} \cdot 1},$$

$$T_d = \frac{R_6 R_{11} C_3}{R_7}.$$

Mediante la selección de valores para las resistencias y el capacitor en la ecuación anterior es posible definir el tiempo derivativo  $T_d$  y consecuentemente definir el bloque diferenciador del controlador PID.

Al igual que con el bloque de ganancia unitaria y el bloque integrador existen reglas para la definición del tiempo derivativo  $T_d$  así como restricciones de operación de los amplificadores operacionales que limitan la selección de los valores para las resistencias y el capacitor involucrados.

A manera de resumen se presentan a continuación las ecuaciones correspondientes a la ganancia proporcional, al tiempo integral y al tiempo derivativo para el circuito del controlador PID desarrollado.

$$K_p = \frac{R_5 R_3}{R_6 R_4}$$

$$T_i = \frac{R_8 R_{14} C_4}{R_6}$$

$$T_d = \frac{R_6 R_{11} C_3}{R_7}$$

El desarrollo anterior proporciona las ecuaciones a utilizar para el cálculo de los parámetros de operación del controlador PID. Sin embargo, al estudiar el circuito completo del controlador electrónico, se observa que se emplea también un amplificador operacional para restar la señal de entrada de la señal de retroalimentación además de un amplificador operacional en configuración de sumador para integrar las 3 acciones de control.

### -Amplificadores sumadores.

#### -Amplificador diferencial a la entrada.

Se observa que a la entrada del circuito se presenta un amplificador cuya función es la de restar la señal de entrada de la señal de retroalimentación. Dicho amplificador tiene la siguiente configuración:

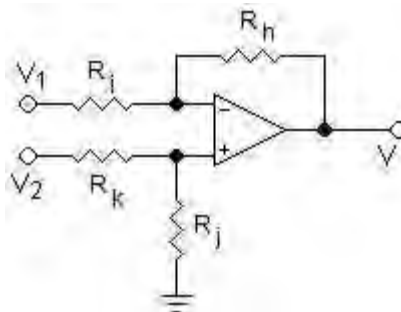


Figura 67. Amplificador operacional diferencial.

Tal función se puede implementar con un amplificador operacional en configuración diferencial. La expresión para el comportamiento del amplificador diferencial de la figura anterior se define como:

$$V_{salida} = V_2 \left( \frac{(R_h + R_i) R_j}{(R_j + R_k) R_i} \right) - V_1 \left( \frac{R_h}{R_i} \right)$$

Para el caso en el cual  $R_h = R_i$  y  $R_j = R_k$  la expresión anterior se simplifica a:

$$V_{salida} = V_2 - V_1$$

### -Amplificador sumador a la salida de los bloques PID.

Así mismo se emplea un amplificador operacional a la salida de las 3 acciones de control para sumarlas. La configuración del sumador anterior es como se muestra en la siguiente figura.

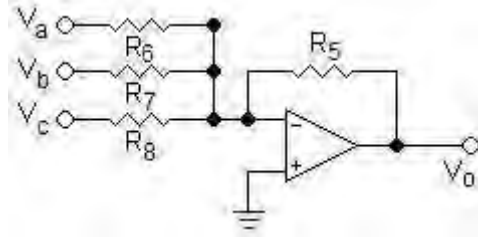


Figura 68. Amplificador sumador.

La expresión para el amplificador sumador resulta entonces en:

$$V_s = -R_5 \left( \frac{V_a}{R_6} + \frac{V_b}{R_7} + \frac{V_c}{R_8} \right).$$

Los desarrollos anteriores proporcionan las ecuaciones necesarias para calcular los parámetros de sintonización del controlador PID así como para la configuración de los bloques sumadores necesarios para la implementación del controlador. En la siguiente sección se presentará la metodología necesaria para encontrar los valores adecuados de la ganancia proporcional  $K_p$ , del tiempo integral  $T_i$  y del tiempo derivativo  $T_d$ .

## V.8. SINTONIZACIÓN DEL CONTROLADOR PID.

La elección de los valores más adecuados para la ganancia proporcional  $K_p$ , para el tiempo integral  $T_i$  y para el tiempo derivativo  $T_d$  recibe el nombre de *sintonización del controlador PID*.

Existen diversos métodos de sintonización para los controladores. En el presente trabajo se abordará exclusivamente la metodología Ziegler-Nichols.

Ziegler y Nichols sugirieron dos reglas para sintonizar los controladores PID.

La primera regla se basa en las respuestas escalón experimentales mientras que la segunda se sustenta en el valor de la ganancia proporcional  $K_p$  cuando sólo se utiliza la acción proporcional para el control de la planta y se presenta una condición de estabilidad marginal. Entiéndase la estabilidad marginal como aquella condición en la cual el sistema comienza a oscilar.

Usualmente la elección de los valores de sintonización se realiza mediante experimentación directa con la planta en estudio. Es decir se presenta un ejercicio de prueba y error hasta encontrar la respuesta deseada.

En el presente trabajo de tesis se empleará el primer método dado que la condición de estabilidad marginal, tal y como la requiere el segundo método de Ziegler-Nichols, no se presenta para la planta en estudio. Para conocer si un sistema es susceptible de sintonizar



utilizando el segundo método de Ziegler-Nichols se utiliza alguno de los criterios de estabilidad existentes en la literatura para valorar el comportamiento del sistema y encontrar si existe la estabilidad marginal para algún de la ganancia. Para el caso en estudio el sistema no presenta oscilación sostenida para ningún valor de la ganancia proporcional. Consecuentemente se aplica el primer método de sintonización.

**-Primer método de sintonización de Ziegler-Nichols.**

Para la aplicación del primer método de sintonización se obtiene de manera experimental la respuesta de la planta a una entrada escalón unitario como se muestra en la siguiente figura.

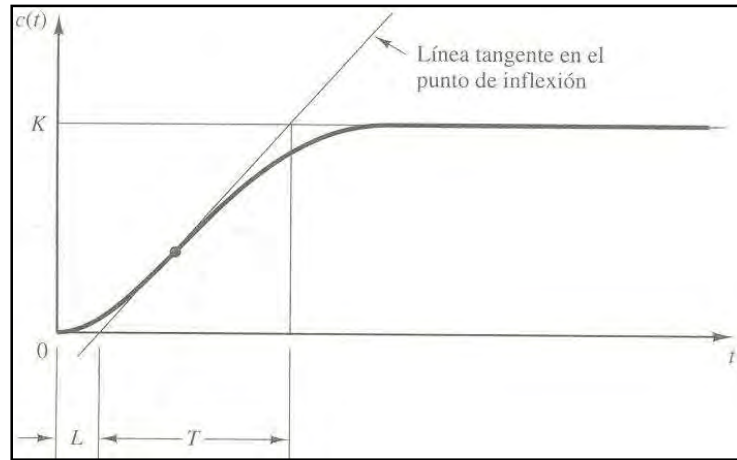


Figura 69. Curva de respuesta y parámetros  $L$  y  $T$ .

Si la planta no contiene integradores (polos en el origen) ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener forma de  $S$  mostrada en la figura anterior.

Como se encontraron en las secciones anteriores, la respuesta a entrada escalón del sistema en estudio en el presente trabajo no tiene exactamente forma de  $S$ . Lo anterior implica que la aplicación del primer método de sintonización de Ziegler-Nichols no arrojará los valores exactos para la ganancia proporcional y el tiempo integral y el tiempo derivativo. Sin embargo el método se utilizará para obtener una aproximación analítica de los valores de sintonización.

A partir de dicha aproximación se realizará una sintonización adicional para encontrar los valores más adecuados para la aplicación. Posteriormente se efectuará una comparación con la respuesta experimental del circuito equivalente a la planta en estudio.

A partir de la figura anterior para una respuesta con forma de  $S$  se observan dos parámetros. El tiempo de retardo  $L$  y la constante de tiempo  $T$ . El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión

de la curva de respuesta y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y la línea correspondiente al valor de error en estado estable  $K$ . Ziegler y Nichols sugirieron los valores de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  de acuerdo con la siguiente tabla.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/L$	$\infty$	$0$
PI	$0.9(T/L)$	$L/0.3$	$0$
PID	$1.2(T/L)$	$2L$	$0.5L$

El presente estudio desarrollará un controlador PID. En consecuencia las ecuaciones en la última fila son aplicables al caso de estudio.

Recuérdese que usualmente los métodos de sintonización de Ziegler-Nichols se emplean de manera experimental; sin embargo el método también se puede utilizar analíticamente para encontrar los valores de sintonización como se mostrará en breve.

En los párrafos anteriores se mostró que el primer método de sintonización implica el cálculo de los parámetros  $L$  y  $T$  a partir de una recta tangente a la curva de respuesta en el punto de inflexión.

En las secciones referentes al análisis de la respuesta transitoria se encontró una expresión matemática que define la curva de respuesta a entrada escalón para la planta en estudio.

Para la aplicación del primer método de sintonización es necesario encontrar la recta tangente al punto de inflexión de la curva de respuesta de la planta. La definición matemática de dicha recta es posible al conocer el valor de su pendiente y el de un punto cualquiera.

Lo anterior se obtiene a partir de la expresión matemática para la respuesta a entrada escalón de la planta.

Matemáticamente el punto de inflexión de una curva se encuentra mediante la igualación a cero de la segunda derivada de la expresión para la respuesta del sistema. De tal igualación a cero resultarán los valores de  $t$  para los cuales la curva presenta puntos de inflexión. Para la definición de la recta tangente de interés es necesario calcular el valor de  $t$  del primer punto de inflexión.

Una vez obtenido el punto de inflexión es posible valorar la función de la respuesta en el valor  $t$  y de esta manera obtener el punto que será común tanto a la recta tangente como a la curva de la respuesta del sistema.

Paso restante es encontrar el valor de la pendiente de la recta para entonces definir la ecuación de la recta tangente y como resultado poder calcular los parámetros  $L$  y  $T$ .

La primera derivada de una función se interpreta geoméricamente como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado. De ésta manera, la sustitución del valor de  $t$  correspondiente al primer punto de inflexión en la ecuación para la primera derivada de la función de respuesta resulta en el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión.

Una vez obtenida la ecuación de la recta correspondiente es posible calcular los valores de  $L$  y  $T$  mediante el estudio de la intersección de tal recta con el eje del tiempo y con el eje del valor de la salida en estado estable.

Es así que utilizando las ecuaciones y valores obtenidos en las secciones previas el primer método de Ziegler-Nichols se aplica como sigue.

Recuérdese que la ecuación para la curva de respuesta a entrada escalón para el sistema en estudio se definió como:

$$c(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right), \text{ para } t \geq 0.$$

O equivalentemente al sustituir valores como:

$$V_s(t) = 1 - e^{-4398.2297t} [\cos(21546.8370t) + 0.2041 \operatorname{sen}(21546.8370t)], \text{ para } t \geq 0.$$

Siguendo los pasos necesarios para la aplicación del primer método es necesario encontrar la primera y segunda derivadas de la expresión anterior.

-Primera derivada.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{d}{dt} 1 - \frac{d}{dt} \left[ e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_d t \right) \right] \\ &= 0 - e^{-\xi\omega_n t} (-\operatorname{sen} \omega_d t)(\omega_d) - (\cos \omega_d t) e^{-\xi\omega_n t} (-\xi\omega_n) \\ &\quad - \frac{e^{-\xi\omega_n t} \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos \omega_d t)(\omega_d) - (\operatorname{sen} \omega_d t) \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} (e^{-\xi\omega_n t})(-\xi\omega_n). \end{aligned}$$

Realizando simplificaciones resulta:

$$\frac{d}{dt} c(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ \operatorname{sen} \omega_d t \left( \omega_d + \frac{\xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) + \cos \omega_d t \left( \xi\omega_n - \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right].$$

Analizando independientemente los términos dentro de los paréntesis y recordando que

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \left( \omega_d + \frac{\xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) &= \omega_n \sqrt{1-\xi^2} + \frac{\xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\omega_n (1-\xi^2) + \xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ \left( \xi\omega_n - \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) &= \xi\omega_n - \frac{\xi(\omega_n \sqrt{1-\xi^2})}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo los coeficientes anteriores en la expresión para la primera derivada resulta:

$$\frac{d}{dt} c(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[ \operatorname{sen} \omega_d t \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right].$$

Se tiene entonces que la segunda derivada se define como:

$$\frac{d^2}{dt^2} c(t) = \frac{d}{dt} \left[ e^{-\xi\omega_n t} \operatorname{sen} \omega_d t \left( \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right].$$

Operando acorde con la expresión anterior se encuentra:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} c(t) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) (\omega_d) + (\operatorname{sen} \omega_d t) e^{-\xi\omega_n t} (-\xi\omega_n) \right] \\ &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} [(\cos \omega_d t) (\omega_d) - (\operatorname{sen} \omega_d t) (\xi\omega_n)]. \end{aligned}$$

Recordando nuevamente que  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$  se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2} c(t) = (e^{-\xi\omega_n t}) \omega_n^2 \left[ \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} (\operatorname{sen} \omega_d t) \right].$$

Sustituyendo los valores correspondientes al modelo matemático de la planta en estudio las expresiones para la primera y segunda derivadas resultan en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= e^{-4398.2297t} [22444.62195 \operatorname{sen}(21546.837t)] \\ \frac{d^2}{dt^2} c(t) &= 483610612.3 (e^{-4398.2297t}) [\cos(21546.837t) - 0.2041 (\operatorname{sen} 21546.837t)]. \end{aligned}$$

Al igualar la segunda derivada con cero se despeja la variable  $t$  para encontrar el tiempo en el cual se presenta el punto de inflexión en la curva de respuesta del sistema resultando en:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(21546.837t) - 0.2041 (\operatorname{sen} 21546.837t) \\ 0 &= 1 - 0.2041 (\tan 21546.837t) \\ 4.89956 &= \tan 21546.837t \\ \arctan(4.89956) &= 21546.837t \\ 78.46^\circ &= 21546.837t. \end{aligned}$$

Es importante resaltar que es erróneo despejar directamente la variable  $t$  a partir de la expresión anterior ya que el valor al lado izquierdo de la ecuación es una cantidad en grados sexagesimales. Es necesario convertir tal ángulo a radianes para poder así despejar la variable  $t$ .

$$\begin{aligned} \frac{78.46\pi}{180} &= 21546.837t, \\ t &= 63.5574 \mu s. \end{aligned}$$

El resultado anterior implica que el punto de inflexión de la curva de respuesta del sistema en estudio a una entrada escalón ocurre transcurridos 63.5574 microsegundos. El valor de tiempo anterior se sustituye en la expresión de la respuesta del sistema para encontrar el punto común a la recta tangente y a la curva de la respuesta del sistema.

Consecuentemente el valor de la salida del sistema para 63.5574 microsegundos es:

$$V_s(t) = 0.6975 \text{ para } t = 63.5574 \mu s .$$

Con objeto de calcular el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión se sustituye el valor de  $t = 63.5574 \mu s$  en la primera derivada. Es importante resaltar nuevamente que para el cálculo del valor de la pendiente anterior es necesario notar que el término dentro de la función seno en la ecuación de la primera derivada se encuentra en radianes y generalmente el cálculo de la función seno utilizando una calculadora asume el uso de una cantidad en grados sexagesimales. Se deberá entonces considerar lo anterior y efectuar la conversión para el cálculo del valor de la pendiente resultando en:

$$\frac{d}{dt} c(t) = 16627.0288 .$$

Utilizando el valor de la pendiente y el punto  $(0.6975, 63.5574 \mu s)$  es posible calcular la ordenada al origen para la recta de interés y en consecuencia definir la expresión matemática de la misma resultando:

$$y = (16627.0288)x - 0.35927 .$$

Nuevamente es muy útil la utilización de una hoja de cálculo por computadora para obtener resultados inmediatos respecto al cálculo de la recta tangente a la curva de respuesta en el punto de inflexión. Una gráfica de ambas curvas se presenta a continuación.

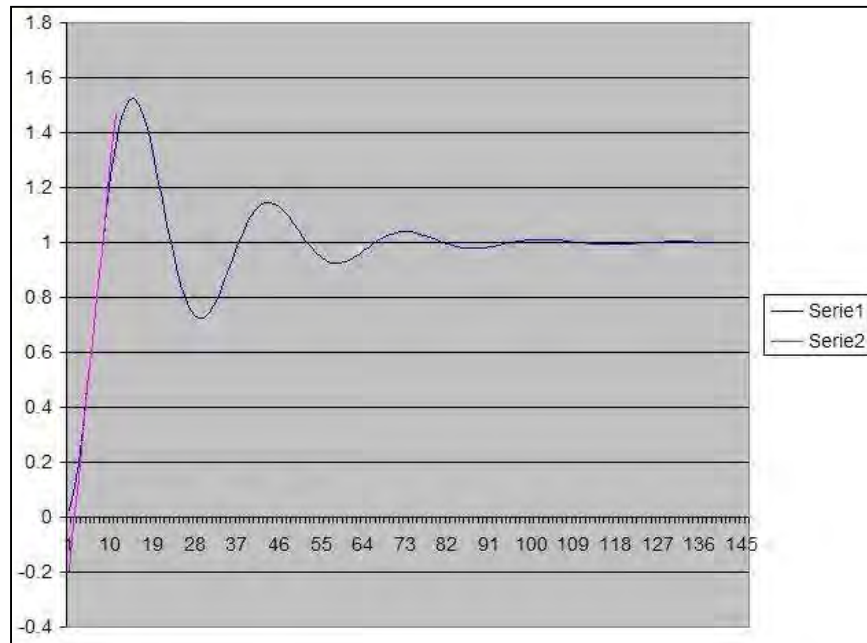


Figura 70. Gráfica en Excel de la respuesta y la recta tangente en el punto de inflexión.

La utilización de una hoja de cálculo proporciona una valoración rápida sobre las consideraciones del primer método de sintonización Sallen-Key permitiendo corroborar si la recta calculada es satisfactoria afectando así mismo los valores de  $L$  y  $T$ .

### Cálculo de los parámetros $L$ y $T$ .

Durante los cálculos analíticos de la planta en estudio se consideró como entrada una señal escalón unitario. Tal consideración resulta en un valor de la salida en estado estable cercano a la unidad. Se puede asumir que para un valor de tiempo suficientemente grande el valor de la salida es 1.

Lo anterior se utilizará para calcular las intersecciones de la recta tangente a la respuesta en el punto de inflexión con el eje del tiempo y con la línea horizontal correspondiente al valor de la salida en estado estable.

Consecuentemente se sustituye el valor de 1 en la ecuación de la recta tangente para obtener la constante de tiempo  $T$ .

$$1 = (16627.0288)T - 0.35927,$$

$$T = 81.7506\mu s.$$

De la misma manera se sustituye un valor de 0 para encontrar el valor  $L$  que representa el tiempo en el cual la recta interseca con el eje del tiempo.

$$0 = (16627.0288)L - 0.35927,$$

$$L = 21.6075\mu s.$$

Una vez calculados los dos parámetros anteriores el diseñador se encuentra en posibilidad de obtener los valores de sintonización para la ganancia proporcional  $K_p$ , para el tiempo integral  $T_i$  y para el tiempo derivativo  $T_d$  utilizando las reglas propuestas por el primer método de sintonización de Ziegler-Nichols.

Consecuentemente se tiene para la ganancia proporcional:

$$K_p = 1.2 (T/L) = 1.2 (81.7506/21.6075) = 4.5401.$$

Para el tiempo integral:

$$T_i = 2 L = 2(21.6075\mu s) = 43.215\mu s.$$

Para el tiempo derivativo:

$$T_d = 0.5 L = 0.5(21.6075\mu s) = 10.8037\mu s.$$

Los cálculos anteriores se resumen en la siguiente tabla:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PID	$1.2(T/L)$	$2L$	$0.5L$
PID	$K_p = 4.5401$	$T_i = 43.215\mu s$	$T_d = 10.8037\mu s$

Antes de calcular los valores para la selección de los componentes electrónicos necesarios en la configuración analógica del controlador PID se debe estudiar la respuesta del sistema utilizando los valores de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  recién calculados. Como se mencionó anteriormente dichos valores resultan directamente aplicables para un sistema que presente una respuesta a entrada escalón en forma de  $S$ . Al no ser el caso para el sistema

en estudio se necesita observar anticipadamente el comportamiento de la planta al utilizar dichos valores para evitar la selección de componentes electrónicos para el controlador que no presenten la respuesta deseada.

Con objeto de encontrar el comportamiento de la salida para el nuevo sistema controlador-planta se puede aplicar el método analítico presentado con anterioridad en el cual se debe calcular la función de transferencia y posteriormente aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener la expresión matemática en función del tiempo  $t$  que describe la curva de respuesta a una entrada escalón y observar si es satisfactoria. La función de transferencia del nuevo sistema se encuentra al multiplicar la función de transferencia del controlador PID y la función de transferencia de la planta.

Durante la presente etapa del trabajo de tesis no se seguirá la metodología anterior y se utilizará alternativamente la utilidad *Simulink* de Matlab. Dicha utilidad permite la simulación de sistemas dinámicos al interconectar bloques predefinidos existentes en el programa. Recuérdese que la aplicación de un controlador PID en serie con la planta no hace más que convertir al sistema original y al controlador en una nueva “planta” con un comportamiento diferente. De esta manera es posible simular el sistema final completamente en *Simulink*.

A continuación se presenta una imagen de la ventana de *Simulink* incluyendo el modelo de la planta así como del controlador utilizando los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  encontrados.

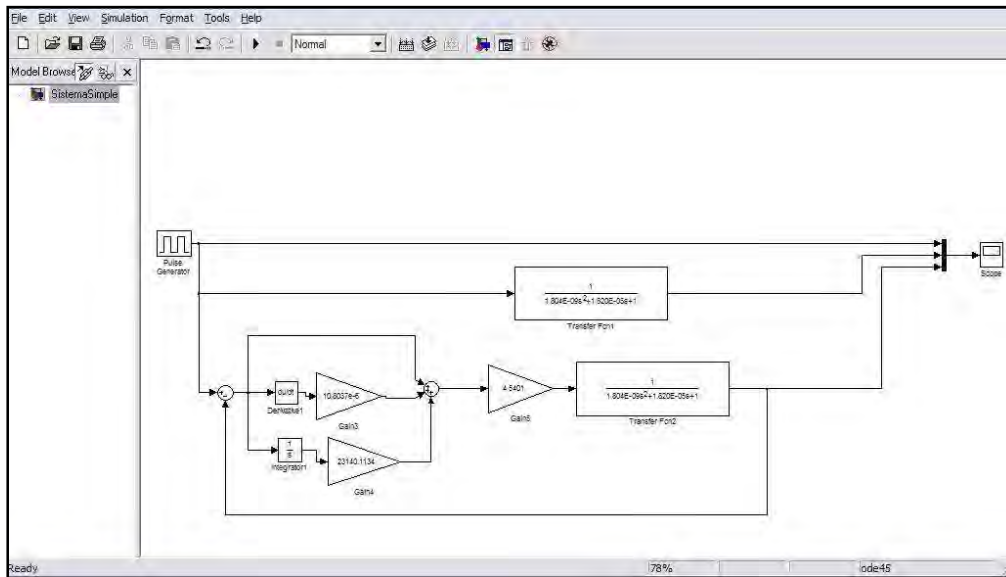


Figura 71. Ventana de *Simulink*.

A continuación se muestra la salida de la planta sin tener un controlador conectado así como el tren de pulsos utilizado como señal de entrada.

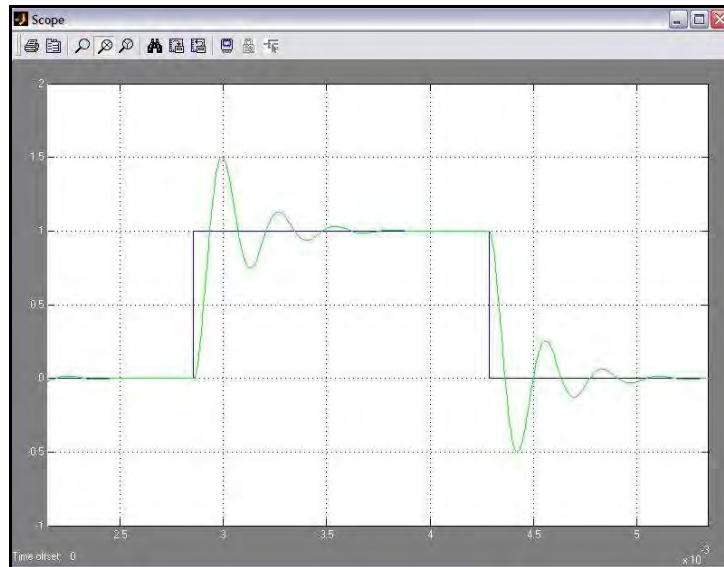


Figura 72. Salida en *Simulink* de la planta sin controlador.

A partir de la figura anterior se observa la correspondencia entre la curva de la respuesta obtenida mediante el uso de la hoja de cálculo obtenida previamente y los resultados de la simulación empleando *Simulink*.

La figura siguiente presenta la respuesta del sistema empleando el controlador PID con los parámetros resultado del primer método de sintonización de Ziegler-Nichols.

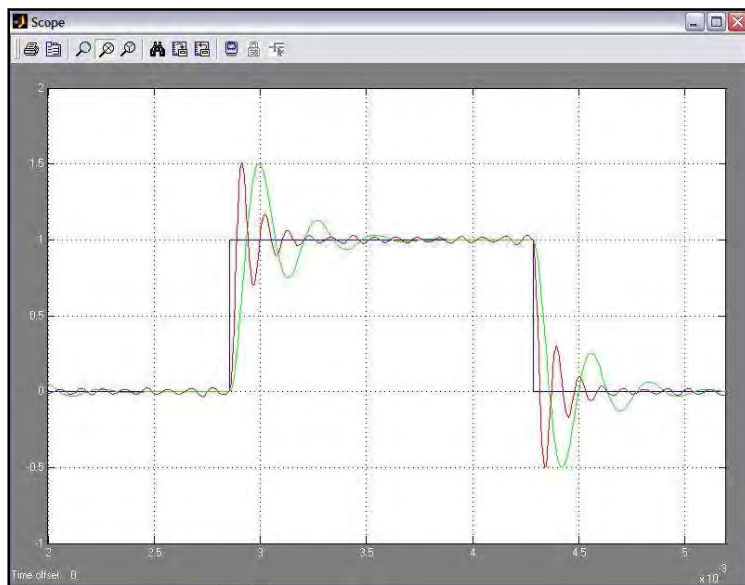


Figura 73. Salida del sistema controlador-planta (rojo) y de la planta original (verde) con los parámetros calculados para el controlador PID.



Se observa que la salida es nuevamente oscilatoria con un sobrepaso semejante al de la respuesta original.

Así mismo, se puede observar que la nueva señal de salida (en rojo) responde más rápidamente que la original y adicionalmente presenta un asentamiento más rápido que la señal original.

La existencia de la oscilación en la señal resultante al aplicar el controlador se explica en la forma de la señal de salida de la planta original pues dicha función no tiene la forma de  $S$  requerida para la aplicación directa del primer método de sintonización Ziegler-Nichols.

Sin embargo se tienen ya los valores iniciales de los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  cuya manipulación permite la sintonización fina del controlador.

La manipulación anterior se lleva a cabo utilizando los efectos de las acciones proporcional, integral y derivativa y recordando sus efectos sobre la salida de la planta.

## V.9. SINTONIZACIÓN FINA DEL CONTROLADOR PID.

De las figuras anteriores para la respuesta del sistema completo se observa que la salida del sistema presenta un sobrepaso excesivo. Por definición, el primer método de sintonización de Ziegler-Nichols calcula la ganancia necesaria para obtener una respuesta con un sobrepaso máximo de aproximadamente el 25% de la señal original. Es importante resaltar nuevamente que dicho método implica la consideración de una señal de salida con forma de  $S$ . En otras palabras, la salida del sistema utilizado en la definición del primer método Ziegler-Nichols no rebasa la línea horizontal con valor igual al valor del error en estado estable. Lo anterior no es el caso para la planta en estudio. Consecuentemente es que se obtiene una respuesta con un sobrepaso cercano al 50% para la planta analizada.

A partir de la curva de respuesta obtenida utilizando *Simulink* se puede notar que el sistema se encuentra mejor amortiguado que el original. Dado lo anterior como una primera acción de sintonización fina del controlador se incrementará el valor de la ganancia proporcional  $K_p$  aprovechando las características de amortiguamiento proporcionadas por la acción derivativa. Así mismo, a partir de la misma gráfica de la respuesta del sistema, se considera que la velocidad de respuesta es satisfactoria.

De manera arbitraria se incrementa el valor de la ganancia por un factor de 10 para observar el nuevo comportamiento de la planta, se tendrá entonces que la nueva ganancia a utilizar será de  $10 \times K_p = 45.401$ ; misma que se redondeará al valor de 45.

Recuérdese que la expresión que describe a la acción proporcional es:

$$u(t) = K_p e(t).$$

Dado que en el caso en estudio la respuesta del sistema al utilizar el controlador presenta un sobrepaso excesivo el efecto de incrementar el valor de la ganancia proporcional se traduce en una acción de control aún más pronunciada ya que el valor del error es grande. El producto a la derecha de la ecuación anterior se incrementará y la señal  $u(t)$  producida por el controlador aumentará correspondientemente.

A continuación se presenta la curva de la respuesta en *Simulink* para el nuevo sistema utilizando el nuevo valor de ganancia de 45.

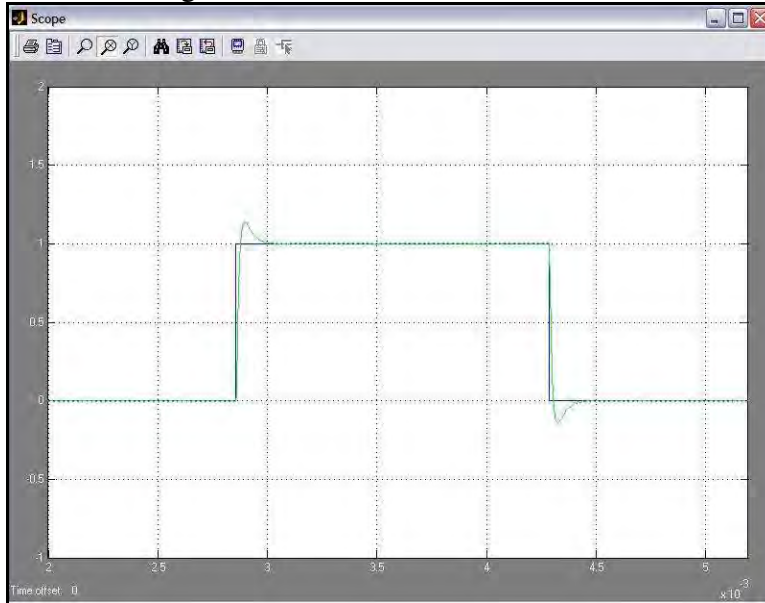


Figura 74. Salida en *Simulink* del sistema controlador-planta con ganancia = 45.

Se puede observar que el nuevo valor de ganancia efectivamente reduce el valor del sobrepaso máximo además de cancelar la oscilación de la respuesta gracias a la interacción con la acción derivativa. Así mismo se puede observar que se mejoró la velocidad de respuesta del sistema como se muestra a continuación.

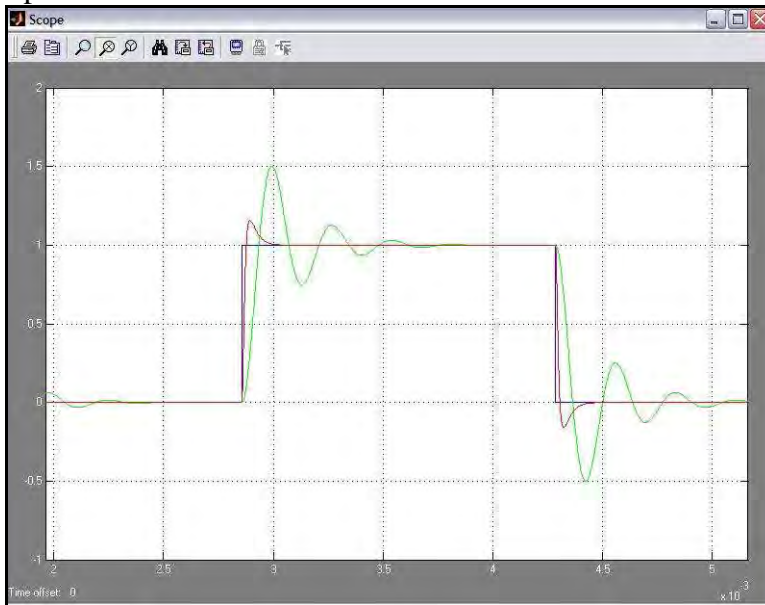


Figura 75. Salida de la planta sin controlador y respuesta del sistema controlador-planta con ganancia = 45.

Para los efectos del presente estudio el resultado obtenido es satisfactorio y se procederá a la implementación electrónica del controlador.

Sin embargo, el diseñador debe tener presente que la curva de respuesta del sistema podría necesitar responder a requerimientos específicos de la aplicación. Por ejemplo podría requerirse que no existiera sobrepaso. En tal caso el diseñador deberá realizar una valoración de cuales parámetros de la respuesta transitoria es necesario sacrificar con objeto de cumplir otros.

Una vez obtenida una respuesta satisfactoria se presentan a continuación los valores de la ganancia proporcional  $K_p$ , del tiempo integral  $T_i$  y del tiempo derivativo  $T_d$  que se utilizarán en el diseño electrónico del controlador.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
PID	$K_p = 45$	$T_i = 43.215\mu s$	$T_d = 10.8037\mu s$

## V.10. CONSIDERACIONES DE FRECUENCIA EN LA OPERACIÓN DEL CONTROLADOR PID.

Como un paso previo al cálculo de los valores para los componentes electrónicos del circuito para el controlador es importante realizar un estudio de las frecuencias de operación de todos los bloques que integrarán al controlador PID.

Como se mencionó previamente existen restricciones de operación de los amplificadores operacionales que limitan la selección de los valores para las resistencias y los capacitores involucrados.

Dado que la configuración de los bloques del controlador PID es en cascada, el diseñador se debe asegurar que el ancho de banda de la última etapa contenga al ancho de banda de los bloques anteriores.

Para verificar lo anterior se presentará el comportamiento en frecuencia de los bloques del controlador iniciando a la entrada de las señales y continuando hacia la derecha rumbo al circuito de la planta como se presenta a continuación.

### -Limitaciones en frecuencia del bloque de ganancia unitaria.

Recordando la función de transferencia para el bloque de ganancia unitaria se tiene:

$$\frac{V_s}{V_e} = -1.$$

La ecuación anterior no presenta ninguna limitación de operación respecto a la frecuencia. Sin embargo debe recordarse que dicho bloque se implementa mediante un amplificador operacional y las características de operación respecto a la frecuencia son aquellas dadas por la hoja de especificación del fabricante.

Durante el presente trabajo de tesis se utilizarán amplificadores operacionales tipo LM741.

A partir de la hoja de especificaciones del amplificador LM741 se extraen las siguientes características.

Modo de rechazo común (CMRR) = 95 dB

Ancho de banda (BW) = 1.5 MHz

Slew Rate = 0.7 V/ $\mu$ s

**-Limitaciones en frecuencia del bloque integrador.**

Recordando la función de transferencia para el integrador se tiene:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{13}}{R_{14}} \left( \frac{1}{R_{13}C_4s + 1} \right).$$

La expresión anterior se puede modelar de forma general como:

$$\frac{Salida}{Entrada} = P_i \left( \frac{1}{\frac{1}{\omega_n} s + 1} \right),$$

donde  $P_i = 1/\omega_n$ .

A partir de la expresión anterior es de interés calcular la frecuencia  $\omega_n$  pues a partir de dicho valor es posible determinar la frecuencia de corte del bloque integrador.

Consecuentemente al igualar coeficientes entre la expresión para el circuito y la expresión general resulta:

$$\frac{1}{\omega_n} = R_{13}C_4.$$

Al despejar  $\omega_n$  y recordando que  $\omega_n = 2\pi f_c$  se encuentra la frecuencia de corte como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi(R_{13}C_4)}.$$

Un circuito integrador funciona como un filtro paso bajas; de lo anterior se tiene que el bloque integrador funcionará como tal solamente para frecuencias superiores a la frecuencia de corte  $f_c$  del integrador.

**-Limitaciones en frecuencia del bloque derivador.**

Recordando la función de transferencia para el derivador se tiene:

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_{11}C_3s}{R_{12}C_3s + 1}.$$

La expresión anterior se puede modelar de forma general como:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = Q_i \left( \frac{s}{\frac{1}{\omega_n} s + 1} \right),$$

donde  $Q_i = 1/\omega_n$ . A pesar de la existencia del cero en el origen en la expresión anterior, es de interés encontrar la frecuencia  $\omega_n$  pues a partir de dicho valor es posible determinar la frecuencia de corte del bloque derivador.

Consecuentemente al igualar coeficientes entre la expresión para el circuito y la expresión general resulta:

$$\frac{1}{\omega_n} = R_{12} C_3.$$

Al despejar  $\omega_n$  y recordando que  $\omega_n = 2\pi f_c$  se encuentra la frecuencia de corte como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi(R_{12}C_3)}.$$

Un circuito derivador funciona como un filtro paso altas; de lo anterior se tiene que el bloque derivador funcionará como tal solamente para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte  $f_c$  del derivador.

#### **-Limitaciones en frecuencia del bloque sumador.**

Para el cálculo de la frecuencia de corte correspondiente al bloque sumador se debe recordar la información de *ganancia-ancho de banda* introducida en la sección referente a los parámetros de frecuencia de los amplificadores operacionales.

De tal sección recuérdese que la frecuencia de ganancia unitaria y la frecuencia de corte se encuentran relacionadas por la siguiente expresión:

$$f_1 = A_{VD} f_c.$$

Donde la frecuencia  $f_1$  es el *producto ganancia – ancho de banda* y  $A_{VD}$  es la ganancia diferencial de voltaje.

A partir de la hoja de especificaciones del amplificador LM741 se encuentra que el ancho de banda  $f_1$  tiene un valor de 1.5 MHz.

Para el cálculo de la ganancia diferencial de voltaje  $A_{VD}$  primero recuérdese la configuración para el amplificador diferencial dada por:

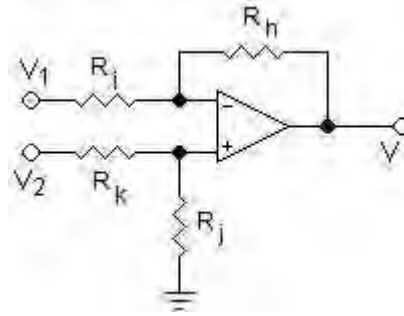


Figura 76. Amplificador operacional diferencial.

Así mismo la ecuación que define la salida en función de la entrada se definió como:

$$V_{salida} = V_2 \left( \frac{(R_h + R_i)R_j}{(R_j + R_k)R_i} \right) - V_1 \left( \frac{R_h}{R_i} \right).$$

Sin embargo obsérvese que en el circuito en estudio la terminal  $V_2$  se encuentra conectada a tierra y consecuentemente  $V_2 = 0$ .

Al sustituir lo anterior en la ecuación anterior resulta:

$$V_{salida} = -V_1 \left( \frac{R_h}{R_i} \right).$$

Dado el resultado anterior la ganancia diferencial de voltaje  $A_{VD}$  resulta:

$$|A_{VD}| = \left| \frac{R_h}{R_i} \right|.$$

Al sustituir los nombres de las resistencias utilizadas en el circuito se tiene:

$$|A_{VD}| = \left| \frac{R_5}{R_{eq}} \right|.$$

Donde  $R_{eq}$  es el paralelo de las resistencias  $R_6$ ,  $R_7$  y  $R_8$  dado por:

$$R_{eq} = \left( \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right)^{-1} = \left( \frac{R_6 R_7 R_8}{R_7 R_8 + R_6 R_8 + R_6 R_7} \right).$$

Dado el resultado anterior la ganancia diferencial resulta:

$$A_{VD} = \frac{R_5 (R_7 R_8 + R_6 R_8 + R_6 R_7)}{R_6 R_7 R_8}.$$

Al obtenerse el valor del ancho de banda  $f_l$  y de la ganancia diferencial de voltaje  $A_{VD}$  el diseñador se encuentra en posibilidad de calcular la frecuencia de corte  $f_c$  del sumador mediante la siguiente expresión.

$$f_c = \frac{f_l}{A_{VD}} = \frac{(1.5 \times 10^6) R_6 R_7 R_8}{R_5 (R_7 R_8 + R_6 R_8 + R_6 R_7)}.$$

A partir de la expresión anterior se debe notar que todas las etapas anteriores al bloque sumador deben operar a una frecuencia inferior a la frecuencia de corte del bloque sumador.

Utilizando las expresiones anteriores para encontrar las frecuencias de corte de los bloques integrador, derivador y sumador además de considerar las características de diseño del amplificador operacional seleccionado para el circuito, el diseñador se encuentra en posibilidad de definir los valores de las resistencias y capacitores del circuito del controlador PID.

### **V.11. ASIGNACIÓN DE LOS VALORES DE RESISTENCIAS Y CAPACITORES NECESARIOS PARA LA OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS $K_p$ , $T_i$ Y $T_d$ DEL CONTROLADOR PID.**

Recuérdese que los valores de los parámetros de sintonización  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  ya se encuentran definidos. Ahora resta asignar los valores de las resistencias y capacitores necesarios.

Para el cálculo de la ganancia proporcional  $K_p$  se tiene:

$$K_p = \frac{R_5 R_3}{R_6 R_4}.$$

De la sección de sintonización del controlador PID se obtuvo:

$$K_p = 45.$$

Si  $R_3 = 12 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 22 \text{ k}\Omega$  y  $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$  resulta:

$$R_4 = 1.777 \text{ k}\Omega.$$

Para el cálculo del tiempo integral  $T_i$  se tiene:

$$T_i = \frac{R_8 R_{14} C_4}{R_6}.$$

De la sección de sintonización del controlador PID se obtuvo:

$$T_i = 43.215 \mu\text{s}.$$

Si  $C_4 = 47 \text{ nF}$ ,  $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$  y  $R_8 = 1.2 \text{ k}\Omega$  resulta:

$$R_{14} = 2.528 \text{ k}\Omega.$$

Para el cálculo del tiempo derivativo  $T_d$  se tiene:

$$T_d = \frac{R_6 R_{11} C_3}{R_7}.$$

De la sección de sintonización del controlador PID se obtuvo:

$$T_d = 10.8037 \mu s .$$

Si  $C_3 = 4.7 \text{ nF}$ ,  $R_6 = 3.3 \text{ k}\Omega$  y  $R_{11} = 10 \text{ k}\Omega$  resulta:

$$R_7 = 14.356 \text{ k}\Omega .$$

## V.12. ASIGNACIÓN DE LOS VALORES DE RESISTENCIAS Y CAPACITORES NECESARIOS PARA LA OBTENCIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE CORTE DE LOS BLOQUES DEL CONTROLADOR PID.

Recuérdese que la planta fue diseñada para tener una frecuencia de corte de 3.5 kHz.

Dado lo anterior es necesario asignar los valores de las resistencias y capacitores para los bloques integral, derivativo y sumador tomando en cuenta dicha restricción.

### -Bloque integral.

Para la etapa integral es necesario recordar que el bloque integrador funcionará como tal solamente para frecuencias superiores a la frecuencia de corte  $f_c$  del integrador. Por tanto no es deseable tener una frecuencia de corte cercana a los 3.5 kHz de la planta. Por el contrario, para el bloque integral es conveniente establecer una frecuencia de corte baja.

Para el bloque integrador de interés se asignará una frecuencia de corte de 130 Hz.

La expresión para la frecuencia de corte del integrador se definió como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi(R_{13}C_4)} .$$

Si  $C_4 = 47 \text{ nF}$  se tiene:

$$R_{13} = 26.048 \text{ k}\Omega .$$

### -Bloque derivativo.

Para la etapa derivativa es necesario recordar que el bloque derivador funcionará como tal solamente para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte  $f_c$  del derivador. Dado lo anterior no es favorable tener una frecuencia de corte cercana a los 3.5 kHz de la planta. Para el bloque derivativo es útil establecer una frecuencia de corte mucho más alta que la frecuencia natural de la planta.

Para el bloque derivativo de interés se asignará una frecuencia de corte de 33 kHz.

La expresión para la frecuencia de corte del derivador se definió como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi(R_{12}C_3)} .$$

Si  $C_3 = 4.7 \text{ nF}$  se tiene:

$$R_{12} = 1.026 \text{ k}\Omega .$$

### -Bloque sumador.

Para la etapa del sumador es necesario recordar que el ancho de banda del mismo deberá contener a las frecuencias de corte de los demás bloques para garantizar el



funcionamiento del circuito. De lo contrario se presentaría distorsión de la señal. El ancho de banda del sumador se debe considerar desde  $f = 0$  hasta la frecuencia de corte del sumador.

La expresión para la frecuencia de corte se definió como:

$$f_c = \frac{f_1}{A_{VD}} = \frac{(1.5 \times 10^6) R_6 R_7 R_8}{R_5 (R_7 R_8 + R_6 R_8 + R_6 R_7)}.$$

Se puede observar que algunos los valores de las resistencias en la ecuación ya fueron calculados cuando se obtuvieron las frecuencias de corte de los bloques integral y derivativo. De ahí la importancia de utilizar una hoja de cálculo por computadora o algún otro método de cálculo rápido para observar de inmediato el impacto de las dichas frecuencias sobre la frecuencia de corte del sumador.

De lo anterior se nota que no es posible definir de forma independiente las frecuencias de corte del integrador, derivador y el sumador pues se encuentran relacionadas.

Sustituyendo los valores de las resistencias resulta:

$$f_c = 56.048 \text{ kHz.}$$

### **-Comparación de los valores de las frecuencias de corte para los bloques del controlador PID.**

Los valores de las frecuencias de corte para los diferentes bloques del controlador PID se listan a continuación:

Para el bloque integral:

$$f_c = 130 \text{ Hz.}$$

Para el bloque derivativo:

$$f_c = 33 \text{ kHz.}$$

Para el bloque sumador:

$$f_c = 56 \text{ kHz.}$$

Ancho de banda del amplificador operacional (hoja de datos):

$$f_c = 1.5 \text{ MHz.}$$

A partir del listado anterior se observa que las etapas en cascada se encuentran habilitadas para manejar las frecuencias de la etapa anterior a ellas.

La asignación de valores para las resistencias y los capacitores se puede convertir en un proceso iterativo que consume mucho tiempo. En otras palabras, se pueden asignar inicialmente valores de resistencias y capacitores que resulten en valores de frecuencias de corte que no cumplan con los requerimientos del comportamiento en frecuencia de los bloques del controlador. Es por ello que se recomienda nuevamente la utilización de una hoja de cálculo por computadora que facilite la sustitución rápida de valores para las resistencias y capacitores. Lo anterior permite la obtención inmediata de los valores de frecuencias de corte para los diferentes bloques y consecuentemente una revisión inmediata del cumplimiento de las restricciones planteadas en la sección anterior.

### V.13. IMPLEMENTACIÓN ELECTRÓNICA DEL CONTROLADOR.

A lo largo de los cálculos para los parámetros del controlador PID así como durante la obtención de las frecuencias de corte de los bloques se definieron todos los valores de las resistencias y capacitores del circuito.

Dicha asignación se resume en la siguiente tabla.

$R_1 = 805 \Omega$	$R_2 = 1k \Omega$	$R_3 = 12k \Omega$	$R_4 = 1.777k \Omega$
$R_5 = 22k \Omega$	$R_6 = 3.3k \Omega$	$R_7 = 14.356k \Omega$	$R_8 = 1.2k \Omega$
$R_9 = 10k \Omega$	$R_{10} = 10k \Omega$	$R_{11} = 10k \Omega$	$R_{12} = 1.026k \Omega$
$R_{13} = 26.048k \Omega$	$R_{14} = 2.528k \Omega$	$R_{15} = 10k \Omega$	$R_{16} = 10k \Omega$
$R_{17} = 10k \Omega$	$R_{18} = 10k \Omega$		
$C_1 = 220 nF$	$C_2 = 10 nF$	$C_3 = 4.7 nF$	$C_4 = 47 nF$

#### -Comportamiento del circuito electrónico.

Una vez calculados todos los parámetros de sintonización y los valores de las resistencias y capacitores necesarios para el circuito el diseñador se encuentra en posibilidad de verificar mediante la experimentación el comportamiento del conjunto controlador-planta.

A continuación se presenta una imagen del circuito y los instrumentos utilizados.

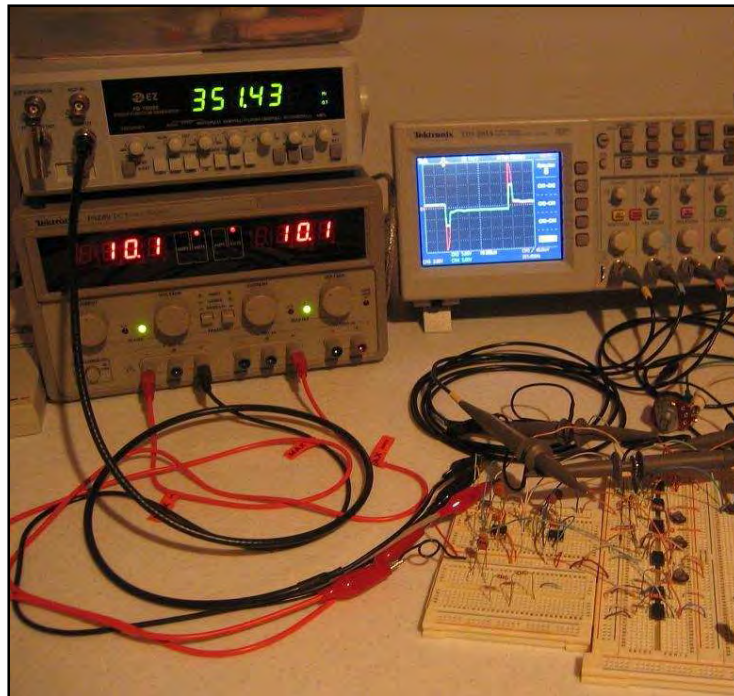


Figura 77. Foto del circuito e instrumentos utilizados.

Con objeto de utilizar los valores de resistencias resultado del análisis del circuito se debe notar que a pesar de la asignación de valores comerciales para la mayoría de las resistencias fue necesaria la utilización de resistencias variables dados los valores requeridos por los cálculos matemáticos. Con los valores de resistencias y capacitores implementados es posible estudiar el comportamiento del circuito como se muestra a continuación. En la siguiente sección se presentará la operación de cada etapa utilizando una señal cuadrada como entrada como demostración del funcionamiento individual del bloque. Inmediatamente después se mostrará la operación del bloque en el circuito del controlador con la planta.

Para tal efecto se incluyen a continuación las imágenes de la señal cuadrada utilizada como referencia y la señal de entrada al circuito real al emplear el circuito completo (controlador-planta), siendo ésta última la señal de error.

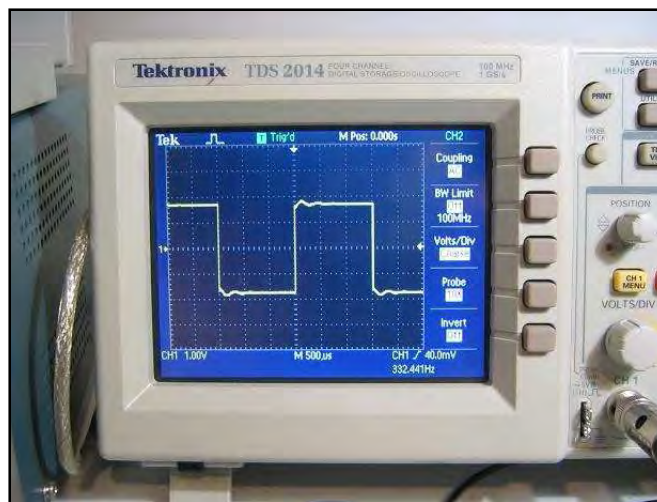


Figura 78. Señal cuadrada.

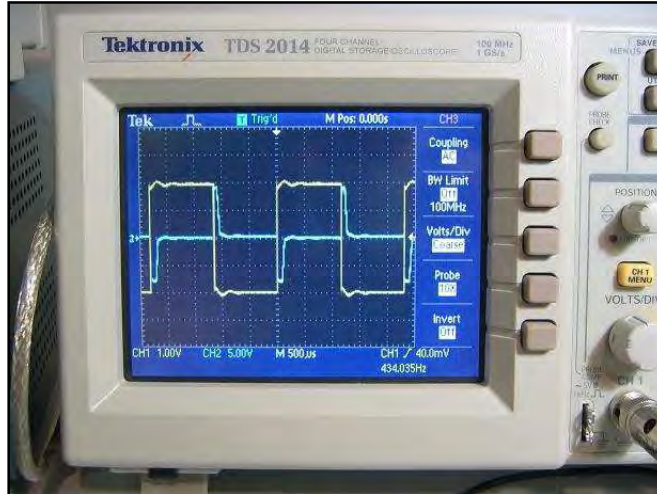


Figura 79. Señal de error (señal similar a tren de impulsos).

Dadas las características de operación de los bloques constitutivos del controlador PID respecto a la frecuencia y considerando los valores de alimentación del circuito es que la señal cuadrada utilizada como entrada tiene las siguientes características.

Amplitud = 2 V pico.

Frecuencia = 330 Hz.

**-Etapa de ganancia unitaria.**

La forma de onda a la salida del bloque con ganancia unitaria, utilizando un tren de pulsos como señal de entrada, se muestra a continuación.

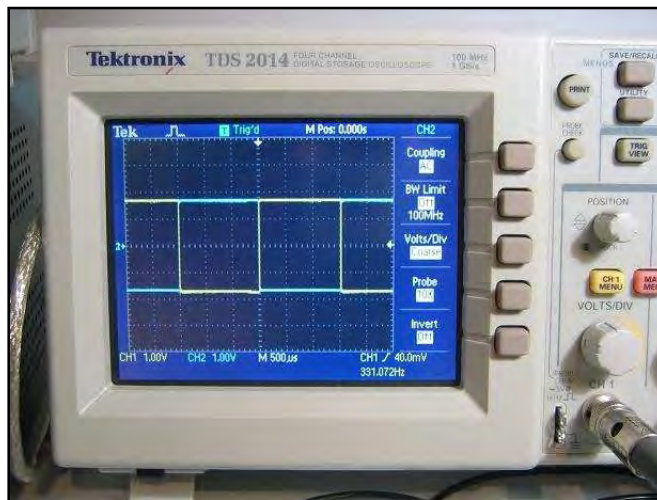


Figura 80. Salida del bloque de ganancia unitaria con señal cuadrada como entrada.  
Foto del op-amp con ganancia unitaria, señal cuadrada.

Como es de esperarse la salida del bloque presenta la misma señal con la misma magnitud pero con inversión de signo.

En la siguiente imagen se muestra la operación del bloque de ganancia unitaria dentro del circuito final.

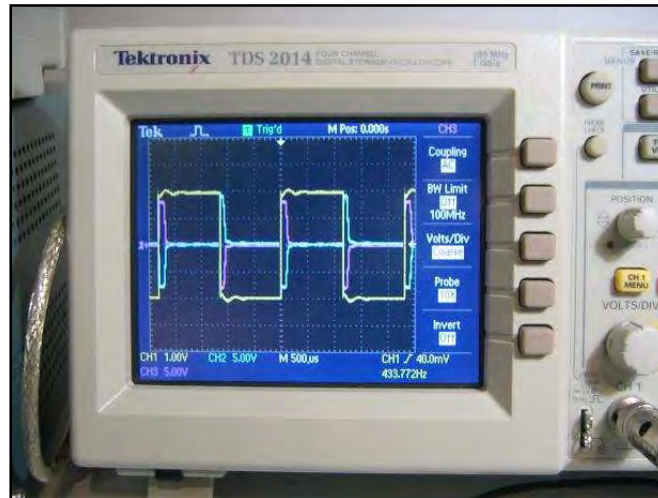


Figura 81. Salida del bloque de ganancia unitaria utilizando la señal de error.

Correspondientemente se observa que la salida del bloque de ganancia unitaria es la señal de entrada real con misma magnitud e inversión de signo.

#### **-Etapa integradora.**

La forma de onda a la salida del bloque integrador, utilizando un tren de pulsos como señal de entrada, se muestra a continuación.

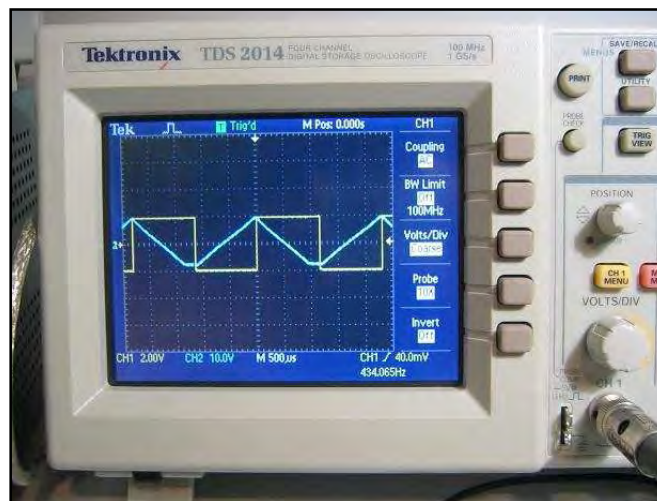


Figura 82. Salida del integrador utilizando una señal cuadrada como entrada.

La integración de una señal cuadrada es una señal triangular tal y como se muestra en la figura superior.

En la siguiente imagen se muestra la operación del bloque integrador dentro del circuito final.

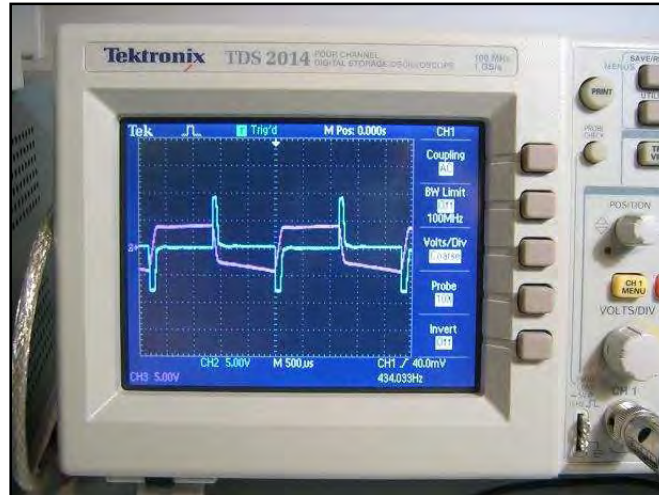


Figura 83. Salida del integrador utilizando la señal de error como entrada.

Se puede observar que la salida del bloque integrador se constituye de dos rectas con diferente pendiente. Lo anterior es congruente con la operación del circuito pues recuérdese la forma de onda de la señal real que el integrador tiene como entrada es la señal de error. A partir de su forma de onda tal señal se puede considerar como una secuencia de dos pulsos; el primero con un periodo muy corto y el segundo con un periodo más extenso. Lo anterior se traduce en una recta con pendiente pronunciada para el primer pulso y una recta con una pendiente de menor magnitud durante el lapso de tiempo restante tal y como muestra la figura anterior.

### -Etapa derivadora.

La forma de onda a la salida del bloque derivador, utilizando un tren de pulsos como señal de entrada, se muestra a continuación.

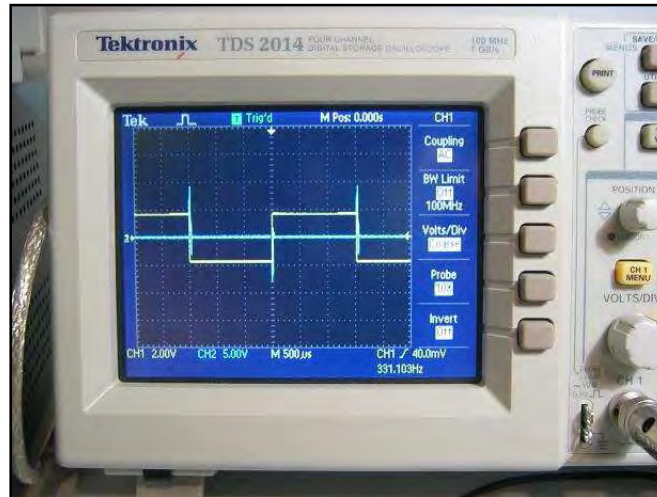


Figura 84. Salida del derivador utilizando una señal cuadrada como entrada.

La derivada de una señal cuadrada es un tren de impulsos tal y como se muestra en la figura anterior.

En la siguiente imagen se muestra la operación del bloque derivador dentro del circuito final.

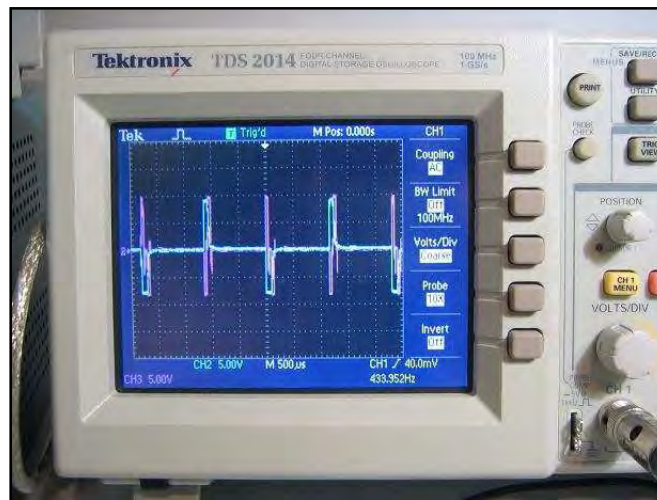


Figura 85. Salida del derivador utilizando la señal de error como entrada.

A partir de la figura anterior se puede observar que la señal producida por el bloque derivador consiste en una serie de impulsos que corresponden a los cambios de la señal de error. Lo anterior concuerda con el comportamiento del bloque derivador pues recuérdese que la acción derivativa actúa en función de la tasa de cambio de la señal de error. Lo anterior se entiende al observar la curva de la señal de error, misma que se puede aproximar a un pulso con periodo corto. Dado lo anterior la etapa derivadora produce impulsos en los puntos en los cuales la aproximación a señal cuadrada de la señal de error cambia de polaridad.

#### **-Etapa sumadora.**

El amplificador operacional en configuración de sumador simplemente proporciona una ganancia a la suma de las señales a su entrada.

En la siguiente imagen se muestra la operación del bloque sumador dentro del circuito final.

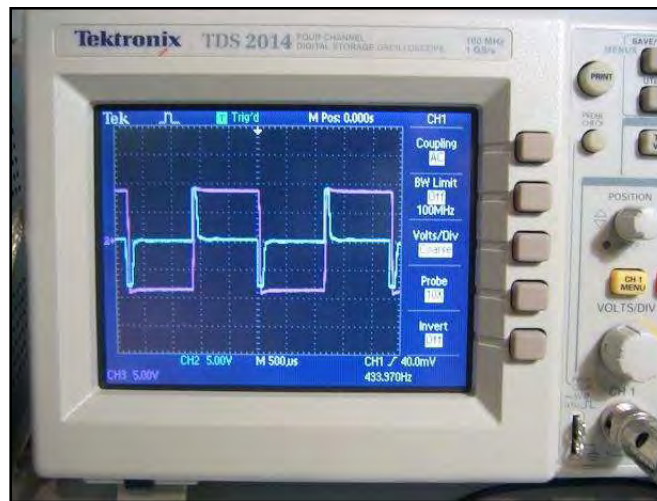


Figura 86. Salida del sumador.

Como es de suponerse la señal a la salida del sumador debe ser muy semejante a la señal de entrada de referencia; es decir la salida del bloque sumador debe ser muy parecida al tren de pulsos utilizado como entrada del sistema dado que dicha señal solamente será modificada por una etapa final de ganancia antes de aplicarse a la planta.

#### **-Etapa de ganancia final.**

Como paso previo a la aplicación de la señal de control a la planta es necesario cumplir con la aplicación de la ganancia proporcional del controlador a la señal producida por el sumador.



La forma de onda a la salida del bloque final de ganancia se muestra a continuación.

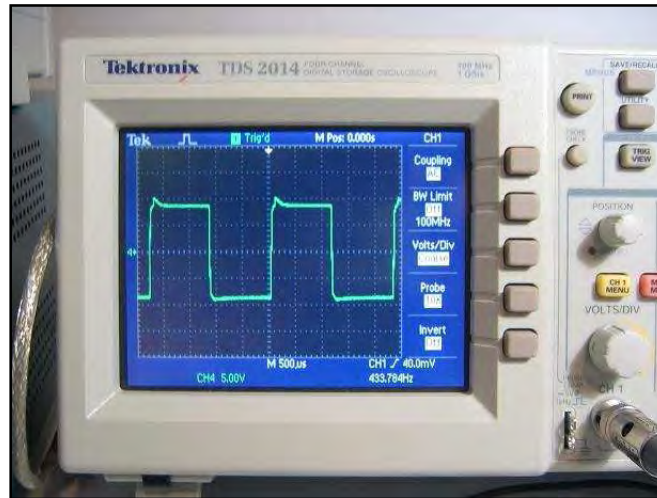


Figura 87. Salida del controlador.

Así como se detalló para la etapa del sumador, la señal a la salida del bloque correspondiente a la aplicación de la ganancia proporcional debe ser semejante al tren de pulsos utilizado como entrada del sistema completo. Dicha curva solo será modificada por el factor de ganancia proporcional asociado al circuito.

#### **-Etapa de entrada diferencial.**

Es necesario resaltar que, a lo largo de toda la trayectoria que experimenta la señal de entrada a través de los diferentes bloques del controlador y la planta, la señal se ve afectada por los valores de ganancia independientes de cada módulo. En consecuencia la señal total de salida presenta una ganancia global que ocasiona que dicha señal de salida no se encuentre en el mismo rango de magnitud que la señal de entrada original. Por ejemplo considérese una señal de tren de pulsos de referencia a la entrada del amplificador diferencial con un valor de pico definido. Sea la señal de salida total del sistema afectada por una ganancia global mayor a 1. En consecuencia la señal realimentada tendrá un valor con magnitud mayor a la señal de entrada original. Si el amplificador diferencial proporciona los mismos valores de ganancia a las dos señales la diferencia efectuada por el amplificador introducirá un offset. Durante el presente trabajo se intenta operar tanto la señal de entrada de referencia como la señal de retroalimentación dentro de un mismo nivel de voltaje para efectuar la resta exclusivamente de la diferencia entre ambas señales siendo ésta última señal la señal de error.

Para obtener el resultado anterior es necesario compensar la diferencia en ganancia entre la señal de referencia y la señal de retroalimentación mediante la manipulación de las resistencias utilizadas en las entradas del amplificador diferencial.

Lo anterior se efectuó de manera experimental directamente a partir de la manipulación de las resistencias variables ubicadas a la entrada del amplificador diferencial. Los valores obtenidos fueron:

$R_{15} = 10k\Omega$	$R_{16} = 3.279k\Omega$
$R_{17} = 1.716k\Omega$	$R_{18} = 9.98k\Omega$

De esta manera se obtiene la señal de error mostrada en la siguiente figura.

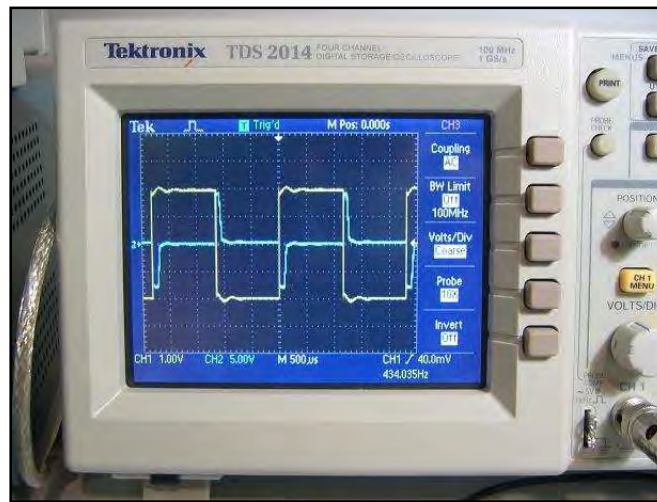


Figura 88. Salida del bloque diferencial. (Señal de error).

Se puede observar que la señal de error tiene una magnitud alta al inicio de ciclo de la señal. Lo anterior es razonable pues recuérdese que el comportamiento del sistema sin el controlador es subamortiguado con un sobrepaso máximo. La forma de onda de la señal de error concuerda con la diferencia entre la señal de entrada de referencia y la señal de salida del sistema sin controlador.

#### **-Salida del sistema completo.**

A continuación se presenta una figura con la señal de entrada original, la señal de salida del controlador y la salida del sistema controlado.

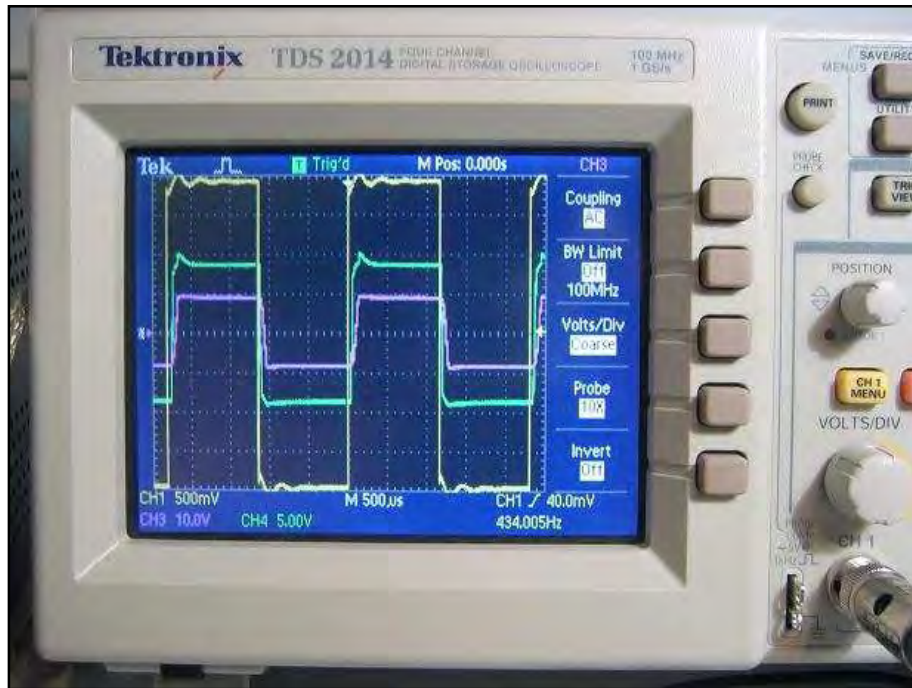


Figura 89. Gráfica de la entrada, la salida del controlador y la salida del sistema controlado.

Las tres señales se encuentran en diferentes escalas por motivos de claridad. La señal con amplitud más grande es la señal de entrada. La señal con la cresta es la salida del controlador y la señal de amplitud más baja es la salida del sistema controlado. Se puede observar que efectivamente se mejoró el comportamiento oscilatorio original de la señal de salida de la planta. Así mismo se redujo significativamente el valor del sobrepaso máximo experimentado por el sistema original. A pesar de mostrarse de forma diferente en la gráfica (diferente escala en el osciloscopio), la magnitud de la salida es más grande que la señal de entrada de referencia. Lo anterior se explica dado el efecto de las ganancias en cascada presentes a lo largo del circuito del controlador.

A continuación se presenta una figura con la señal de salida del circuito controlado comparándola con la señal de salida de la planta sin controlar.

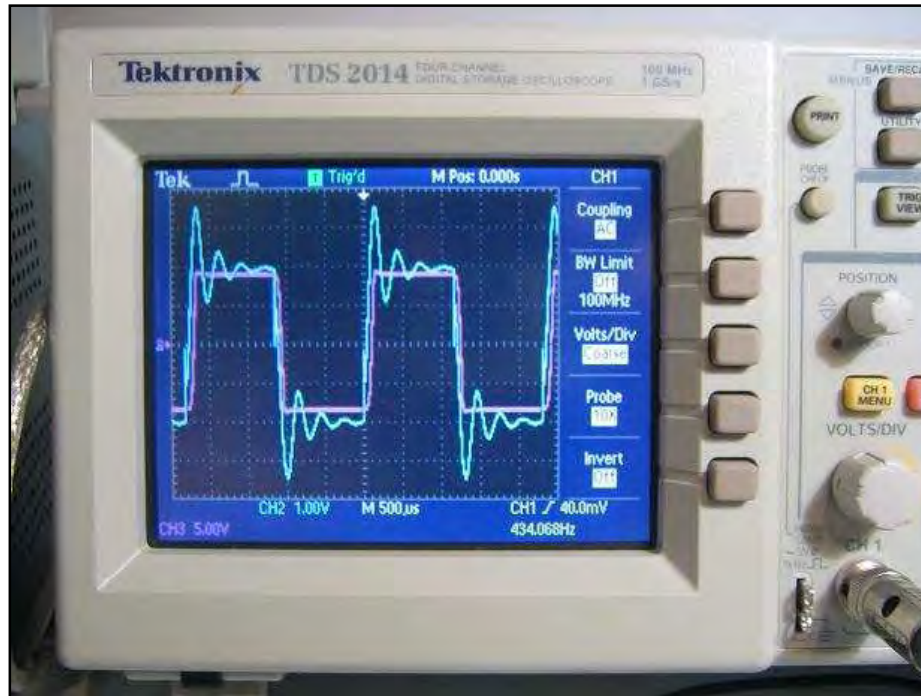


Figura 90. Salida de la planta controlada y de la planta original.

Para los objetivos del presente trabajo el comportamiento del conjunto planta-controlador se considera satisfactorio y se puede corroborar la efectividad del primer método de sintonización analítico Ziegler-Nichols como herramienta para la aproximación inicial de los parámetros de sintonización ya que se respetaron los valores del tiempo integral y del tiempo derivativo calculados previamente. El único valor que se modificó fue la ganancia proporcional dadas las diferencias en ganancia de la entrada de referencia y la salida del sistema completo. Es importante resaltar que usualmente la sintonización práctica de un controlador PID se efectúa repetidamente hasta encontrar los valores más adecuados para la aplicación en estudio.

En las secciones anteriores se presentó el comportamiento del circuito equivalente al sistema controlador-planta.

Es importante sin embargo resaltar las características de los componentes electrónicos utilizados para la construcción del circuito.

El amplificador operacional utilizado es el LM741. Tal amplificador es de propósito general y tiene prestaciones acordes con dicho objetivo. Para los objetivos del presente trabajo tales características son satisfactorias; sin embargo para aplicaciones con requerimientos más exigentes es indispensable considerar dispositivos con un desempeño acorde con los requerimientos.

Adicionalmente todas las resistencias utilizadas no fueron de precisión sino generales con tolerancia de  $\pm 5\%$ .

Los factores anteriores afectan directamente el desempeño del circuito final por lo que el diseñador debe considerar dicha situación.

Importante es resaltar la importancia de verificar la continuidad entre los componentes electrónicos ya que durante el presente trabajo se observó que la utilización de los *protoboards* para la experimentación práctica presentó muchas dificultades ya que los componentes visualmente se encontraban conectados y en la realidad existía un falso contacto entre los componentes y las pistas del *protoboard*.

## RESULTADOS.

A lo largo de presente trabajo se desarrollaron dos líneas de estudio de una planta de segundo orden siendo la primera analítica y la segunda experimental.

### -Planta.

Se estudió una planta de segundo orden diseñada a partir de los parámetros de frecuencia de corte  $f_c = 3.5$  kHz y amortiguamiento  $\zeta = 0.2$ . La función de transferencia resultante fue de la forma:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{s^2(2.0677E-09) + s(1.8189E-05) + 1}$$

Así mismo la solución en el dominio del tiempo resultó en:

$$V_s(t) = 1 - e^{-4398.2297t} [\cos(21546.8370t) + 0.2041\text{sen}(21546.8370t)], \text{ para } t \geq 0.$$

Dicha función de transferencia se implementó electrónicamente mediante un filtro paso-bajas Sallen-Key.

A continuación se presenta una tabla con los valores analíticos y experimentales para las especificaciones de la respuesta transitoria para la planta.

Parámetro	Análisis teórico	Matlab	Circuito
Tiempo de levantamiento $t_r$	63.55 $\mu s$	55.1 $\mu s$	60 $\mu s$
Tiempo pico $t_p$	145.8 $\mu s$	146 $\mu s$	152 $\mu s$
Sobrepaso máximo $M_p$ (%)	52.66%	52.7 %	50%
Tiempo de asentamiento $t_s$	909.45 $\mu s$	891 $\mu s$	920 $\mu s$

A partir de la tabla anterior se observa concordancia entre los valores calculados y la respuesta experimental para el comportamiento de la planta.

### -Controlador.

Se estudió un controlador PID paralelo diseñado a partir de los parámetros de sintonización resultado de la utilización del primer método de sintonización de Ziegler-Nichols. La función de transferencia para el controlador resultado de los cálculos matemáticos fue de la forma:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = 4.5401 \left( 1 + \frac{1}{(43.215 \times 10^{-6})_s} + (10.8037 \times 10^{-6})_s \right)$$

El controlador anterior se implementó electrónicamente utilizando los parámetros de sintonización resultados del método de Ziegler-Nichols. Sin embargo se encontró que, dadas las limitaciones de dicho método para su uso con plantas con respuestas sin sobrepaso, se presentó una señal de salida de la planta oscilatoria y con sobrepaso.

Utilizando la consideración anterior y conociendo los efectos de cada una de las acciones de control presentes en el controlador PID se aumentó el valor de la ganancia

proporcional por un factor de 10 resultando una nueva función de transferencia definida como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = 45 \left( 1 + \frac{1}{(43.215 \times 10^{-6})s} + (10.8037 \times 10^{-6})s \right).$$

El controlador PID definido por la ecuación anterior efectivamente suprimió el sobrepaso y la oscilación presentes en la respuesta original y permitió la obtención de una respuesta satisfactoria.

Así mismo se comprobó la utilidad del primer método de sintonización de Ziegler-Nichols como ayuda para establecer una aproximación inicial de los parámetros de sintonización para la ganancia proporcional, el tiempo integral y el tiempo derivativo de un controlador PID para una planta de segundo orden. Así mismo se comprobó cierto grado de robustez de los valores para el tiempo integral y el tiempo derivativo del controlador pues dichos valores no cambiaron y permitieron el incremento de la ganancia proporcional resultando en una respuesta aceptable.

A continuación se presenta una tabla con los parámetros de sintonización analíticos y experimentales para el controlador PID desarrollado.

Parámetro	Análisis matemático	Respuesta experimental
Ganancia proporcional $K_p$	4.5401	45
Tiempo integral $T_i$	$43.215 \times 10^{-6}$	$43.215 \times 10^{-6}$
Tiempo derivativo $T_d$	$10.8037 \times 10^{-6}$	$10.8037 \times 10^{-6}$

Los valores presentes en las dos tablas anteriores permiten la correlación entre los comportamientos teórico y experimental correspondientes a una planta de segundo orden y su controlador PID observándose un nivel aceptable de equivalencia entre ambos tipos sistemas, el abstracto y su contraparte física.

## CONCLUSIONES.

Acorde con lo expuesto en la sección introductoria, se abordó de manera didáctica el análisis teórico y práctico de una planta de segundo orden y su controlador asociado.

La etapa teórica condensó la información básica necesaria para abordar los temas relacionados con el análisis e implementación electrónica de una planta de segundo orden y un controlador PID.

Correspondientemente se presentó un caso de estudio completo referente al diseño y análisis de una planta de segundo orden subamortiguada y el controlador PID asociado. Se dio especial énfasis a la presentación de todos los cálculos importantes así como a la inclusión de explicaciones sobre pasos específicos para facilitar la comprensión de los procedimientos presentados. De esta manera es que se cumplió con el objetivo didáctico establecido al inicio del trabajo.

Adicionalmente a lo largo del presente documento se presentó una metodología para, de manera secuencial, definir teóricamente una planta de segundo orden y estudiar el comportamiento de su respuesta a una entrada determinada resultando en la construcción de un circuito paso-bajas Sallen-Key. A partir del análisis teórico y la implementación electrónica de la planta se obtuvieron resultados satisfactorios para la caracterización del sistema de segundo orden por controlar en las secciones siguientes.

Una vez completado el paso anterior se siguieron los pasos necesarios para analizar teóricamente un controlador PID y obtener los parámetros necesarios para su correcta operación. Dicha respuesta fue verificada utilizando *Simulink* como herramienta para la verificación teórica del comportamiento del conjunto planta-controlador encontrándose resultados aceptables. Acto seguido se presentó en detalle una técnica para la implementación electrónica del controlador PID paralelo correspondiente. El método de sintonización Ziegler-Nichols utilizado para el controlador exhibió una limitación respecto a su aplicación para las plantas de segundo orden subamortiguadas con sobrepaso pues la respuesta experimental utilizando los valores teóricos arrojó una respuesta con características inaceptables. Sin embargo el método anterior se utilizó únicamente para obtener una primera aproximación en el cálculo de los parámetros de las acciones de control asociadas al conjunto PID. Dichas aproximaciones se probaron útiles al únicamente necesitarse una modificación en una de ellas, la ganancia proporcional  $K_p$ , encontrándose finalmente un desempeño aceptable por parte del circuito del controlador.

Finalmente la comparación del desempeño teórico y el correspondiente a la implementación electrónica del sistema presentó una correlación aceptable. Dado lo anterior se cumplió el objetivo práctico del presente trabajo.



## **BIBLIOGRAFÍA**

Oppenheim, A., Señales y Sistemas. Ed. Prentice Hall, 1998.

Ogata, K., Ingeniería de Control Moderna. Ed. Prentice Hall, 1998.

Boylestad, R., Electrónica: Teoría de Circuitos. Ed. Prentice Hall, 1997.

Bañuelos, M., Análisis y Diseño de un Controlador PID Analógico. Reporte Técnico RTSTE9905 Centro de Instrumentos UNAM.

Mancini, R., Op Amps for Everyone. Texas Instruments Design Reference SLOD006A, 2001.

Karki, J., Analysis of the Sallen-Key Architecture. Texas Instruments Application Report SLOA024A, 1999.

Swokowski, E., Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, 1989.

O'Neil, P., Matemáticas avanzadas para ingeniería. Ed. CECSA, 1996.