UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS ACATLAN

ECONOMÍA MATEMÁTICA PARA ACTUARIOS I

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

PRESENTA

QUETZALLI IX-CHEL MOGUEL CANTO

MAYO 2006

A “LA MAMÁ”, MI MAMÁ

QUIEN ME HA DADO TODO LO QUE TENGO
Y HECHO DE MÍ TODO LO QUE SOY
GRACIAS
POR HACERME SOÑAR,
CREAR E IMAGINAR UN MUNDO MEJOR,
O AL MENOS,
MÁS FÁCIL.

A FRANCISCO JAVIER

POR EL ORDEN IMPLACABLE DE SU CABEZA Y
EL GENEROSO DESORDEN DE SU CORAZÓN
POR DEMOSTRARME QUE LA HISTORIA PUEDE SER DIFERENTE
GRACIAS
POR LIDIAR CON MI MUNDO Y REGALARME OTRO NUEVO.
ERES MI RAZÓN SIN RAZÓN.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POR DARME ESTA MARAVILLOSA HERRAMIENTA LLAMADA
EDUCACIÓN
Y AYUDAR EN MI FORMACIÓN COMO PERSONA.

A MIS PROFESORES

AQUELLOS QUE ME MOTIVARON Y ME RETARON
SIN ELLOS
NO HABRÍA APRENDIDO
EL VALOR DE LOS CONOCIMIENTOS.

A MIS AMIG@S

POR TODOS LOS MOMENTOS QUE COMPARTIMOS
LOS DE ESTUDIO, DE FIESTAS, DE LLANTO...
(USTEDES SABEN QUIENES)
GRACIAS
POR LAS SONRISAS, TANTAS SONRISAS.

ESTOY EN DEUDA CON TODOS AQUELLOS QUE ME HAN
ALENTADO EN EL CAMINO, SEPAN QUE LES AGRADEZCO
PROFUNDAMENTE EL SER PARTE DE LA HISTORIA DE MI VIDA.

Algo sobre esta tesina

Comenzaré por decir que esta tesina está hecha con la intención de aportar un texto de fácil acceso que ayude en la solución de la falta de libros, en particular de Economía Matemática, en nuestra Facultad.

La tesina, titulada "Economía matemática para actuarios I", tiene la finalidad de que aquel que la lea adquiera un instrumento para la investigación económica, estableciendo una conexión entre el conocimiento de matemática pura y las aplicaciones en el campo de la economía.

Se destaca como objetivo primordial el estudiar las bases teóricas de la microeconomía profundizando en el análisis y el uso de técnicas matemáticas adaptándolas a los problemas del consumidor y del productor.

Está dirigida de forma más directa a los estudiantes de la licenciatura en Actuaría puesto que somos los llamados *matemáticos con sentido social* y una de las áreas sociales en las se ha logrado desarrollar, el actuario, es la Economía. Pero, también espero que sea una contribución para todo aquel interesado en los temas microeconómicos.

El presente trabajo, no busca sustituir en ningún momento otras publicaciones que sean de más fácil asimilación, es más, es capaz de ser acompañada de la literatura económica (no matemática) reciente, lo cual, recomiendo ampliamente para la mejor absorción de los temas.

Índice general

Introducción

Economía es un término acuñado por Aristóteles que proviene del griego *oikos* que significa "casa" y *nomos* que significa "ley", lo que se diría como la ciencia de la administración de los gastos e ingresos de una casa. Actualmente se define como la ciencia social-histórica que estudia los hechos, fenómenos y problemas económicos, los cuales permiten establecer leyes para predecir el comportamiento de los fenómenos correspondientes y así poder influir en ellos.

También podemos dar otras dos definiciones:

Corriente objetiva. De Federico Engels. Señala que la Economía es la ciencia que estudia las leyes que rigen la producción, la distribución, la circulación y el consumo de los bienes materiales que satisfacen las necesidades humanas.

Corriente subjetiva. De Lionel Robbins. Sostiene que la Economía es la ciencia que se encarga del estudio de la satisfacción de las necesidades humanas mediante bienes que, siendo escasos, tienen usos alternativos entre los cuales hay que elegir.

La importancia del por qué estudiamos la Economía radica en el concepto de escasez. La escasez es algo que afecta a todo individuo y significa que no se tiene o no se puede obtener suficiente ingreso o riqueza para satisfacer cada ambición. La escasez obliga a hacer elecciones, la mejor elección será la que provoque mayor bienestar.

La Economía es la ciencia de la elección.

Las dos principales ramas de este tema son: la microeconomía y la macroeconomía.

Microeconomía. Proviene del griego *mikros*, "pequeño" y de *oikonomia*, "economía". Es la parte de la Economía que se ocupa del estudio de los individuos que toman decisiones, incluidos los consumidores y productores, así como de la interacción que sus elecciones provocan en los precios de bienes y factores de la producción, y las cantidades que se demandarán y ofertarán de ellos.

Macroeconomía. Proviene del griego *makros*, "grande" y de *oikonomia*, "economía". Es la parte de la Economía que estudia las relaciones entre las magnitudes económicas amplias, globales, como: ingreso nacional, ahorro, inversión, nivel de precios, consumo, empleo, oferta monetaria, importaciones y exportaciones, y balanza de pagos.

El concepto denominado economía matemática se utiliza para describir los casos en los que los trabajos o investigaciones económicas se incluyen técnicas más allá de la simple geometría, tales como cálculo diferencial e integral, álgebra matricial, ecuaciones diferenciales o teoría de probabilidad. La economía matemática establece hipótesis y conclusiones con símbolos matemáticos y ecuaciones, mientras que la economía literaria lo hace con palabras y frases. Se puede elegir entre uno u otro modo de estudio pero claro está, que el razonamiento matemático es más eficaz y conciso en numerosos problemas.

Con la explicación de estos conceptos, se emprende la idea principal de esta tesina, que se ubica dentro del campo de la microeconomía y las técnicas matemáticas que se adaptarán a los problemas que a esta rama competen.

La tesina se encuentra dividida en tres partes:

I. La teoría del consumidor (Capítulos 1 a 4),

II. La teoría del productor (Capítulos 5 a 8) y

III. Los mercados (Capítulo 9).

El capítulo 1 habla de las preferencias de los individuos, así como de la utilidad que pueden obtener con cada opción de consumo posible y sus limitaciones.

El capítulo 2 hace un análisis del consumidor y su comportamiento, los factores que determinan su elección de consumo, de otro modo, la conducta de demanda del consumidor de acuerdo con las variaciones de ingresos y precios.

El capítulo 3 se enfoca en las dotaciones de los recursos y la distribución que el individuo le dé a sus ingresos.

El capítulo 4 discute algunos planteamientos generales que ayudan la medición de las variaciones del bienestar en los consumidores.

El capítulo 5 analiza las posibles formas de representación de la tecnología con la que cuenta una empresa, mediante la combinación de varios factores y una función de producción.

El capítulo 6 estudia el comportamiento de la empresa por medio del conocimiento de los objetivos de la empresa y las restricciones a las que se enfrenta.

El capítulo 7 analiza la técnica para la minimización de costos de producción, busca la mejor forma de afrontar el problema de la empresa tomando en cuenta la forma más barata de producir un determinado nivel de producción.

El capítulo 8 habla del estudio de los costos y del cómo elegir un nivel de producción óptimo.

Para finalizar, el capítulo 9 se centra en lo que rodea a la empresa, es decir, donde la empresa realiza sus movimientos, es decir, los mercados.

Parte I

La teoría del consumidor

Capítulo 1

La maximización de la utilidad

Las personas demandan bienes y/o servicios basándose en sus ingresos y en los precios a los que se hallen. Es así como limitan sus elecciones de consumo y esto determina las preferencias de las personas y la utilidad que pueden obtener con cada opción de consumo posible. En este capítulo supondremos que las personas eligen una mezcla de consumo posible que los lleve a maximizar su utilidad total, es decir, a buscar su máximo beneficio.

1.1. Preferencias del consumidor

Supongamos el caso de un consumidor que se encuentra frente a varias cestas de consumo pertenecientes a un conjunto X, que denominamos conjunto de consumo. Suponemos la mayoría de los casos que $X \in \mathbb{R}^k$ no negativo, aunque pueden incluirse cestas que permitan, al menos, subsistir al consumidor. Siempre supondremos que X es un conjunto cerrado y convexo.

Sabemos que el consumidor tiene determinadas preferencias respecto a las cestas de consumo de X. Así pues, en adelante cuando escribamos $x \succeq y$, interpretaremos que el consumidor *prefiere débilmente la cesta x sobre la y* o *piensa que la cesta x es, al menos, tan buena como la y.*

Como queremos que el conjunto de cestas se ordene según las preferencias deberemos suponer que se satisfacen ciertas propiedades:

Preferencias completas. Cualesquiera que sean x e $y \in X$, o bien $x \succeq y$, o $y \succeq x$, o ambas relaciones.

Preferencias reflexivas. Cualquiera que sea $x \in X$ con $x \succeq x$.

Preferencias transitivas. Cualesquiera que sean x,y y $z \in X$, si $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces $x \succeq z$.

Ya establecida $\succeq$ como la preferencia débil, definimos $\succ$ como una *preferencia estricta o preferencia fuerte*. Así pues, la expresión $x \succ y$ dice que *la cesta x se prefiere estrictamente a la cesta y.*

De esta misma forma podemos hablar de indiferencia entre las cestas, es decir que si $x \succeq y \cap y \succeq x$ suceden al mismo tiempo, x e y le son indiferentes entre sí al consumidor y se representa como $x \sim y$ o $y \sim x$.

Hay otros supuestos que se hacen sobre las preferencias como lo son:

Continuidad. Cualquiera que sea $y \in X$, los conjuntos $\{x : x \succeq y\}$ y $\{x : x \preceq y\}$ son conjuntos cerrados. Por lo tanto, $\{x : x \succ y\}$ y $\{x : x \prec y\}$ son conjuntos abiertos.

Este anterior supuesto sirve para excluir algunas conductas discontinuas; nos dice que si (x^i) es una secuencia de todas las cestas de consumo que son todas, al menos, tan buenas como la y, y esta última converge a x^*, x^* es, al menos, tan buena como y.

La consecuencia más importante de la continuidad es que si y es preferida estrictamente a z y sabiendo que x es una cesta suficientemente cercana a y, entonces x debe preferirse estrictamente sobre z. Esto precisa que un conjunto de cestas preferidas estrictamente serán pues, un conjunto abierto.

La mayoría de las ocasiones se estudia la conducta de un consumidor con lo que se conoce como función de utilidad, esto es una función $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \succ y$ si y sólo si $u(x) > u(y)$. Se puede demostrar que si el ordenamiento de las preferencias es completa, reflexiva, transitiva y continua, se puede representar con una función de utilidad continua. Las funciones de utilidad sirven para describir las preferencias y su única característica importante es la de ordenar. Si $u(x)$ representa ciertas preferencias $\succeq$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función monótona, $f(u(x))$ representará por tanto las mismas, ya que $f(u(x)) \geq f(u(y))$ si y sólo si $u(x) \geq u(y)$.

Monotonicidad débil. Si $x \geq y$, entonces $x \succeq y$.

Monotonicidad fuerte. Si $x \geq y$ y $x \neq y$, entonces $x \succ y$.

La monotonicidad débil quiere decir que si una cesta contiene como mínimo la misma cantidad de bienes que otra es, como mínimo, igual de buena que la primera. En cuanto a la monoticidad fuerte, esta dice que si una cesta contiene como mínimo la misma cantidad de todos los bienes que otra y una tiene más de algún bien en la otra, la que tenga el bien de más es estrictamente mejor que la otra cesta (esto será así siempre que los bienes se consideren “buenos”, y no “malos”para el consumidor).

Insaciabilidad local. Dada una cesta cualquiera $x \in X$ y un ϵ cualquiera tal que $\epsilon > 0$, exite una cesta $y \in X$ tal que $\|x - y\| < \epsilon$, tal que $y \succ x$.

El supuesto de insaciabilidad local dice que siempre hay la posibilidad de mejorar una cesta de consumo haciendo, incluso, sólo pequeñas variaciones. (El verificar que existe la monotocidad fuerte implica la insaciabilidad local).

Convexidad. Dados x, y y z pertenecientes a X tal que $x \succeq y$ e $y \succeq z$, entonces para cualquiera t con $0 < t < 1$, $tx + (1-t)y \succeq z$.

Convexidad estricta. Dados $x \neq y$ y z pertenecientes a X, si $x \succeq z$ e $y \succeq z$, entonces para cualquiera t con $0 < t < 1$, $tx + (1-t)y \succ z$.

La convexidad es una generalización del supuesto de la "relación marginal de sustitución decreciente".

Las preferencias nos ayudan a ordenar nuestras cestas y esto suele representarse gráficamente, al conjunto de todas las cestas de consumo indiferentes entre sí se denomina curva de indiferencia. Lar curvas de indiferencia se consideran como conjuntos de nivel de una función de utilidad y son análogas a la *isocuantas* que se verán en la teoría del productor.

El conjunto de todas las cestas que están en la curva de indiferencia o por encima de ella se denomina conjunto de puntos del contorno superior y se denota por $\{x \in X : x \succeq y\}$.

Ejemplo 1.1 (La existencia de una función de utilidad.)
Suponiendo que las preferencias son completas, reflexivas, transitivas, continuas y monótonas en sentido fuerte, existe una función continua $u : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ *que representa esas preferencias.*

Demostración. Sea e el vector de $\mathbb{R}^k_+$ formado unicamente de unos, dado cualquier vector x, sea $u(x)$ un número tal que $x \sim u(x)e$. Por demostrar que existe ese número y es único.

Sea $B = \{t \quad en \quad \mathbb{R} : te \succeq x\}$ y $W = \{t \quad en \quad \mathbb{R} : x \succeq te\}$, dado esto la monoticidad fuerte nos dice que B no es un conjunto vacío; W tampoco lo será, y tiene al menos al elemento 0. La continuidad implica que B y W son cerrados. Por lo tanto existe algún t_x tal que $t_x e \sim x$. Debemos demostrar que esta función de utilidad representa las preferencias subyacentes. Sea

$$u(x) = t_x \qquad donde \quad t_x e \sim x$$

$$u(y) = t_y \qquad donde \quad t_y e \sim y$$

Ahora, si $t_x < t_y$, la monoticidad fuerte demuestra que $t_x e \prec t_y e$ y la transitividad que

$$x \sim t_x e \prec t_y e \sim y$$

De forma análoga, si $x \succ y$, entonces $t_x e \succ t_y e$, por lo que t_x es mayor que t_y. □

Ejemplo 1.2 (La relación marginal de sustitución.)
Sea $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *una función de utilidad. Suponiendo que aumentamos la cantidad del bien* i*. El consumidor habrá de introducir cambios en el consumo del bien* j *para mantener la utilidad constante.*

Sean dx_i y dx_j las variaciones de x_i y x_j, por hipótesis la variación de la utilidad deberá ser cero por lo cual

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\, dx_i \;+ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\, dx_j \;=\; 0$$

De ahí que

$$\frac{dx_i}{dx_j} \;=\; -\,\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}}$$

A esta expresión la llamamos relación marginal de sustitución entre los bienes i y j.

Esta relación no depende de la función de utilidad que tengamos, para demostrarlo, sea $v(u)$ una transformación monótona de utilidad, la relación marginal de sustitución de esta función sería

$$\frac{dx_i}{dx_j} \;=\; -\,\frac{v'(u)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{v'(u)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}} \;=\; -\,\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}}$$

1.2. La conducta del consumidor

Ahora que ya sabemos como se manejan las preferencias, debemos partir del supuesto que un consumidor racional siempre elige la cesta que le cause mayor preferencia de un conjunto de opciones alcanzables.

En el problema de maximización de las preferencias, el conjunto de opciones alcanzables será pues el conjunto de todas las cestas que satisfagan la restricción presupuestaria del individuo. Si m es la cantidad fija de dinero del que dispone el consumidor y $p = (p_1, \ldots, p_k)$ es el vector de precios de los bienes, $1, \ldots, k$, el conjunto de cestas alcanzables o conjunto presupuestario del consumidor se denotará por

$$B \;=\; \{x \; en \; X \;:\; px \leq m\}$$

Entonces la maximización de las preferencias la expresaremos como

$$\begin{aligned} &max\ u(x) \\ &\text{sujeta a} \quad px \leq 0 \\ &\qquad\qquad\quad x \in X \end{aligned}$$

Para saber si este problema puede resolverse, hay que verificar que la función objetivo sea continua y que el conjunto de restricciones sea cerrado y acotado. La función de utilidad es, por hipótesis, continua y el conjunto de restricciones es cerrado. Si $p_i > 0$ con $i = 1, \ldots, k$ y $m \geq 0$, no será mayor complicación demostrar que el conjunto de restricciones está acotado. Si se diera el caso que alguno de los precios fuera cero, es posible que el consumidor deseara un infinito de bienes a dicho precio. Por lo general no se tendrá en cuenta los problemas de acotación.

También habrá que examinar la representación de las preferencias. Sabiendo que la elección maximizadora, x^*, es independiente de la elección de la función de utilidad que se emplee como representación de las preferencias, puesto que al elegir x^* como cesta óptima, esta tendrá la propiedad $x^* \succeq x$ para cualquier x perteneciente a B; por lo que cualquier función de utilidad que represente las preferencias $\succeq$ alcanzará su máximo restringido en x^*.

Debemos saber también que si multiplicamos todos los precios y la renta por una constante positiva, no se alterará el conjunto presupuestario y, por ende, no se alterará el conjunto de elecciones óptimas. Esto lo podemos expresar sabiendo que x^* tiene como propiedad que $x^* \succeq x$ cualquiera que sea x tal que $px \leq m$, entonces $x^* \succeq y$ cualquiera que sea y tal que $t\ py \leq t\ m$. Es decir, un conjunto óptimo elegido es "homogéneo de grado cero" en los precios y la renta.

Además retomando el supuesto de insaciabiliad local y sabiendo que x^* es una cesta óptima, es decir, que no hay otra x que maximice la utilidad tan bien como ella, x^* debe cumplir la restricción presupuestaria con igualdad, cambiando así el problema del consumidor a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(p,m) &= max\ u(x) \\ \text{tal que } px &= m \end{aligned}$$

La función $v(p,m)$ la denominaremos función indirecta de utilidad y representa la utilidad máxima alcanzable a los precios y renta dados. La cesta x es la demandada por el consumidor e indica una cantidad deseada de cada bien considerando los precios y renta dados. Para simplificar el análisis suponemos que sólo se demanda una cesta de cada presupuesto.

Se denomina función de demanda del consumidor a la función que relaciona a los precios (p) y a la renta (m) y se expresa como $x(p,m)$. Para asegurar que la función de demanda está bien definida debemos suponer que es *única* lo cual se da por la convexidad estricta de las preferencias.

La función de demanda del consumidor también es homogénea de grado cero en (p,m).

Siempre que la función de utilidad es diferenciable, la optimización de la utilidad se dará por medio de un lagrangiano que escribiremos así:

$$\mathcal{L} = u(x) - \lambda(px - m)$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Así pues sacando la derivada de $\mathcal{L}$ con respecto a x_i, obtendremos:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i \qquad \text{siendo } i = 1,\ldots,k.$$

Ahora, para eliminar el multiplicador de Lagrange y darle forma a lo que buscamos, dividiremos la condición de primer orden i-ésima por la j-ésima:

$$\frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j} \qquad \text{siendo } i,j\ = 1,\ldots,k.$$

Al cociente del primer miembro ya lo habíamos nombrado como relación marginal de sustitución entre el bien i y el j y al segundo se le denominará entonces relación económica de sustitución entre los bienes i y j. Así pues, estas dos relaciones son iguales. Si no lo fueran sucedería algo como por ejemplo

$$\frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Si el consumidor renuncia a una unidad del bien i y compra una del bien j, permanece en la misma curva de indiferencia aún dinero para gastar, por tanto, es posible aumentar la utilidad total, es decir, aún no se ha maximizado.

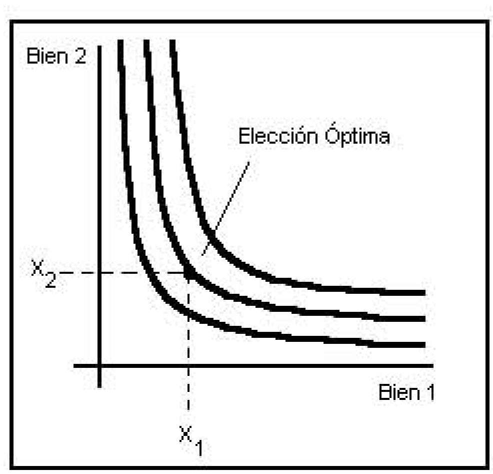

Figura 1.1: Maximización de preferencias.

La figura 1.1 muestra la cesta óptima de consumo que está en el punto en que la restricción presupuestaria es tangente a la curva de indiferencia. La recta presupuestaria viene dada por $\{x \ : \ p_1x_1 + p_2x_2 \ = m\}$. También podemos expresarla como la gráfica de una función implícita: $x_2 = m/p_2 \ - (p_1/p_2)x_1$, de aquí que la pendiente de la recta presupuestaria sea $-p_1/p_2$ y la ordenada al origen sea m/p_2. Como el consumidor desea encontrar la máxima utilidad, se debe satisfacer la condición de tangencia en donde la pendiente de la curva de indiferencia sea igual a la pendiente de la recta presupuestaria.

1.3. La utilidad indirecta.

Habíamos definido la función $v(p, m)$ como la función indirecta de utilidad. Dicha función nos da la máxima utilidad en función de los precios y la renta dados.

Propiedades de la función indirecta de utilidad.

1. $v(p,m)$ es no creciente en p; es decir, si $p' \geq p,\ v(p',m) \leq v(p,m)$. Del mismo modo, $v(p,m)$ es no creciente en m.

   Demostración. Sea $B = \{x : px \leq m\}$ y $B' = \{x : p'x \leq m\}$ siendo $p' \geq p$. Entonces B' está contenido en B, por lo tanto, el máximo de $u(x)$ en B es, al menos, tan elevado como el de $u(x)$ en B'. De forma similar se hace explica el caso de m. □

2. $v(p,m)$ es homogénea de grado cero en (p,m).

   Demostración. Si los precios y la renta se multiplicaran ambos por un número positivo, el conjunto presupuestario no cambiaría. Por lo tanto, $v(p,m) = v(tp,tm)$ para cualquier $t > 0$. □

3. $v(p,m)$ es cuasiconvexa en p; es decir, $\{p : v(p,m) \leq k\}$ es un conjunto convexa para cualquiera que sea k.

   Demostración. Suponemos que p y p' son tales que $v(p,m) \leq k$, $v(p',m) \leq k$ y decimos $p'' = tp+(1-t)p'$, con esto buscamos demostrar que $v(p'',m) \leq k$. Definimos los conjuntos presupuestarios:

$$\begin{aligned} B &= \{x : px \leq m\} \\ B' &= \{x : p'x \leq m\} \\ B'' &= \{x : p''x \leq m\} \end{aligned}$$

   Demostremos pues que cualquier x que pertenezca a B'', pertenecerá a B o a B', es decir, $B'' \subset (B \cup B')$. Negando lo anterior diríamos que x es tal que $tpx + (1-t)p'x \leq m$, pero $px > m$ y $p'x > m$, lo cual también se expresa como:

$$\begin{aligned} tpx &> tm \\ (1-t)p'x &> (1-t)m \end{aligned}$$

   Sumándolas tendríamos

$$tpx + (1-t)p'x \ > \ m$$

   lo cual contradice el supuesto inicial, por lo tanto x sí pertenece a $(B \cup B')$.

   Ahora,

$$\begin{aligned} v(p'',m) &= \ max\ u(x) \text{ sujeta a } x \in B'' \\ &\leq \ max\ u(x) \text{ sujeta a } x \in B \cup B' \\ &\quad \text{ya que } B'' \subset B \cup B' \\ &\leq \ k \text{ ya que } v(p,m) \leq k \text{ y } v(p',m) \leq k. \end{aligned}$$

   □

4. $v(p, m)$ es continua para cualquier $p \gg 0$, $m > o$.

Las curvas representadas en la figura 1.2 son las "curvas de indiferencia-precio" y no son más que los conjuntos de nivel de la función indirecta de utilidad; con utilidad no decreciente cuando nos desplazamos al origen y con los conjuntos de puntos del contorno inferior convexos también al origen.

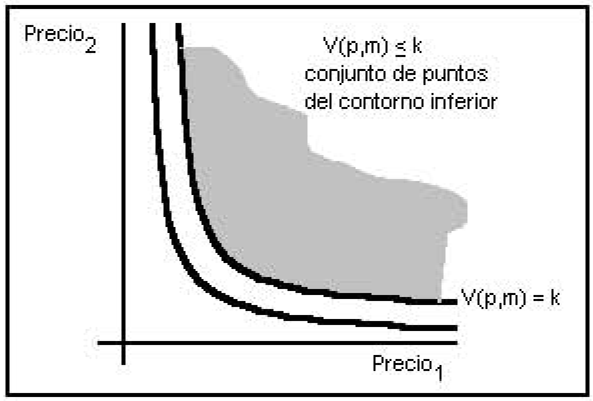

Figura 1.2: Curvas de indiferencia-precio.

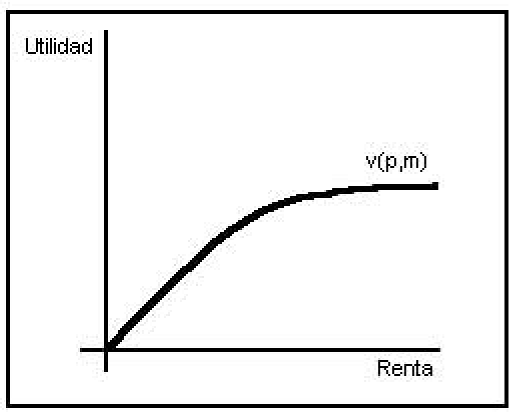

Figura 1.3: La utilidad en función de la renta.

Según la figura 1.3 al graficar la utilidad en función de la renta cualquier aumento en la renta provocará un aumento en la utilidad indirecta, siempre y cuando los precios sean constantes.

Y tomando en cuenta el supuesto de insaciabilidad local, $v(p, m)$ será *estrictamente* creciente en m. Ahora, dado que $v(p, m)$ es estrictamente creciente en m, podemos invertir la función y despejar m en función del nivel de utilidad;

esto es, dado un nivel de utilidad u, hallar la renta necesaria a los precios p. A la función que relaciona la renta y la utilidad de esta forma (inversa de la función de utilidad) le denominaremos función de gasto y la expresaremos como $e(p,u)$.

Con esta nueva definición daremos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} e(p,u) &= min\ px \\ \text{sujeta a} \quad u(x) &\geq u \end{aligned}$$

La función de gasto indica, según un nivel fijo de utilidad, el costo mínimo a alcanzar.

Esta función es totalmente análoga a la función de costos que analizaremos en la teoría del productor.

Propiedades de la función de gasto.

1. $e(p,u)$ es no decreciente en p.[1]

   Demostración. Si $p' \geq p$, entonces $e(p',u) \geq e(p,u)$. Sean x y x' las combinaciones minimizadoras del gasto a precios p y p'. Entonces $px \leq px'$ lo que deduce la minimización y $px' \leq p'x'$, ya que $p \leq p'$. Por transitividad tendríamos que $px \leq p'x'$ □

2. $e(p,u)$ es homogénea de grado 1 en p. Es decir, $e(tp,u) = te(p,u)$.

   Demostración. Si x es la combinación minimizadora del gasto a los precios p, x también minimiza el gasto a los precios tp. Supongamos que no fuera así y que x' es una combinación minimizadora del gasto a los precios tp, de tal manera que $tpx' < tpx$. Pero esta desigualdad implica que $px' < px$, lo que contradice la definición de x. Por lo tanto, la composición de la combinación minimizadora del gasto no varía cuando se multiplican los precios por un número positivo t y por lo tanto, el gasto debe multiplicarse exactamente por t: $e(tp,u) = tpx = te(p,u)$. □

3. $e(p,u)$ es cóncava en p. $e(tp + (1-t)p', u) \geq te(p,u) + (1-t)\, e(p',u)$ si $0 \leq t \leq 1$.

   Demostración. Sean (p,x) y (p',x') dos combinaciones de precios y bienes minimizadores del gasto y $p'' = tp + (1-t)p'$ cualquiera que sea t con $0 \leq t \leq 1$. Ahora bien,

   $$e(p'',u) = p''x'' = tpx'' + (1-t)p'x''$$

   Puesto que x'' no es necesariamente la combinación de cestas o bienes que provean la mayor utilidad a los precios p' o p, tenemos que $px'' \geq e(p,u)$ y $p'x'' \geq e(p',u)$. Esto nos lleva a

   $$e(p'',u) \geq te(p,u) + (1-t)\, e(p',u)$$

   □

[1] Recordar que la utilidad u depende de la cesta x y esta a su vez de los precios p y de la renta m.

4. $e(p, u)$ es continua en p, cuando $p \gg 0$.

5. Si $h(p, u)$ es la cesta minimizadora del gasto necesaria para alcanzar el nivel de utilidad u a los precios p, $h_i(p, u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_i}$ siendo $i = 1, \dots, n$ dando por suposición que existe la derivada y que $p_i > 0$.

La función $h(p, u)$ es denominada función de demanda hicksiana y nos indica la cesta de consumo que alcanza un determinado nivel de utilidad considerado como objetivo y que minimiza el gasto total.

En ocasiones, a la demanda hicksiana, también se le conoce como función de demanda compensada, esto es porque se considera que esta función es creada alterando los precios y la renta para mantener la utilidad requerida por el consumidor.

Las hicksianas no se logran observar directamente pues dependen de la utilidad, que no es visible. Así pues, las funciones de demanda expresadas en función de los precios y la renta serán las observables, a estas demandas observables, las llamaremos funciones de demanda marshallianas denotadas por $x(p, m)$. La función de demanda marshalliana es la que hemos venido estudiando a lo largo del capítulo.

1.4. Identidades en la teoría del consumidor.

Encontramos importantes relaciones que nos unen a la función de gasto, la función indirecta de utilidad, la función de demanda marshalliana y la función de demanda hicksiana.

Tomemos en cuenta el problema de maximización de la utilidad:

$$v(p, m^*) = max\ u(x)$$
$$\text{sujeta a } px \leq m^*$$

Sea x^* la solución óptima del problema de maximización y $u^* = u(x^*)$. Ahora, tomando en cuenta el problema de minimización del gasto tendremos:

$$e(p, u^*) = min\ px$$
$$\text{sujeta a } u(x) \geq u^*$$

1. El gasto mínimo necesario para alcanzar la utilidad $v(p, m)$ es m.
   $e(p, v(p, m)) \equiv m$.

2. La utilidad máxima generada por la renta $e(p, u)$ es u. $v(p, e(p, u)) \equiv u$.

3. La demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta m es idéntica a la demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad $v(p, m)$.
   $x_i(p, m) \equiv h_i(p, v(p, m))$.

4. La demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad u es idéntica a la demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta $e(p, u)$.
   $h_i(p, u) \equiv x_i(p, e(p, u))$.

El punto número 4 es de mucha importancia, pues la función de demanda hicksiana, es decir, el punto óptimo minimizador del gasto, es idéntica a la función de demanda marshalliana en el nivel de renta apropiado, es decir, el nivel de renta mínima con precios dados que nos den el nivel de utilidad deseada.[2]

Identidad de Roy. Si $x(p,m)$ es la función de demanda marshalliana, entonces

$$x_i(p,m) = -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}} \text{ siendo } i = 1, \ldots, n.$$

siempre que el segundo miembro este bien definido y que $p_i > 0$ y $m > 0$.

Demostración. La función indirecta de utilidad proviene de

$$v(p,m) \equiv u(x(p,m)). \tag{1.1}$$

La podemos diferenciar con respecto a p_j, lo que nos daría

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \tag{1.2}$$

Ya que $x(p,m)$, función de demanda marshalliana, satisface las condiciones para la maximización, veremos que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i$, lo que llamamos *utilidad marginal de los precios* y lo cual nos lleva a

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = \lambda \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \tag{1.3}$$

Ahora, las funciones de demanda $x(p,m)$ también satisfacen la restricción presupuestaria $px(p,m) \equiv m$, entonces diferenciando con respecto a p_j tenemos que

$$x_j(p,m) + \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0 \tag{1.4}$$

Despejando $x_j(p,m)$ en (1.4) y sustituyéndola en (1.3).

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = -\lambda x_j(p,m) \tag{1.5}$$

Regresando a (1.1) y diferenciándola con respecto a m, obtendremos

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial m} \tag{1.6}$$

[2]Dicho de forma menos revuelta: La marshalliana es la hicksiana evaluada en la función de utilidad y la hicksiana es la marshalliana evaluada en la función de gasto.

De la diferenciación de la restricción presupuestaria con respecto a m

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial m} = 1 \tag{1.7}$$

Sustituyendo (1.7) en (1.6)

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \lambda \tag{1.8}$$

A λ de (1.8) que es el multiplicador de Lagrange y se le conoce como la *utilidad marginal de la renta* lo sustituimos en (1.5) para después despejar $x_j(p,m)$ lo que nos llevará a

$$x_j(p,m) \;=\; -\frac{\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(p,m)}{\partial m}}$$

que es la identidad de Roy. □

Otra prueba que podemos encontrar sobre esta misma identidad será la siguiente.

Demostración. Debemos suponer que x^* nos da la máxima utilidad u^* que viene de los precios p^* y la renta m^*. Recordemos las identidades

$$x(p^*, m^*) \equiv h(p^*, u^*) \tag{1.9}$$

$$u^* \equiv v(p, e(p, u^*))$$

Independientemente de los precios, la utilidad máxima será u^* y ya que esta función podemos diferenciarla, lo haremos con respecto a p_i, lo cual nos dará

$$\frac{\partial v(p^*, m^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(p^*, m^*)}{\partial m}\frac{\partial e(p, u^*)}{p_i} \;=\; 0.$$

Ordenando esto y utilizando (1.9) llegaremos a

$$x(p^*, m^*) \equiv h(p^*, u^*) \equiv \frac{\partial e(p, u^*)}{p_i} \equiv -\frac{\partial v(p^*, m^*)/\partial p_i}{\partial v(p^*, m^*)/\partial m}.$$

Como $x^* = x(p^*, m^*)$ que es lo que nos planteamos en un inicio y sirve para p^* y m^* queda demostrado. □

1.5. La función de utilidad métrica monetaria

La función de utilidad métrica monetaria es la búsqueda de la cantidad de renta mínima que será suficiente para que un consumidor adquiera una determinada cesta x con bienes a precios p.

Encontramos dos funciones de utilidad métrica monetaria, la directa y la indirecta, ambas están basadas en la función de gasto. Y se resuelven a partir de la minimización siguiente:

$$\begin{aligned} &min_z \;\; pz \\ &\qquad \text{sujeta a } u(z) \geq u(x) \end{aligned}$$

Función directa de utilidad métrica monetaria. La función nos muestra el gasto mínimo necesario a los precios p para comprar una cesta diferente a x que al menos dé la misma satisfacción que x. Se puede ver gráficamente en la figura 1.4.

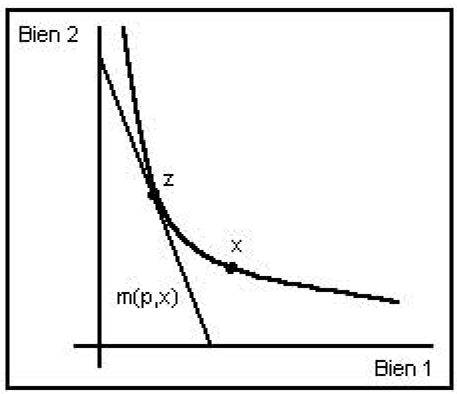

Figura 1.4: Función directa de utilidad métrica monetaria

Esta función también es conocida como "función de renta mínima" o "función de compensación directa", entre otras formas. Y podemos encontrar la definición matemática como

$$m(p, x) \equiv e(p, u(x)).$$

Y nos dice que si x es fijo, $u(x)$ la será también, por lo que $m(p, x)$ es similar a una función de gasto, siendo monótona, cóncava en p, estrictamente creciente si u satisface la continuidad e insaciabilidad local. Y hay que saber que cuando p es fijo, $m(p, x)$ se comporta como una función de utilidad.

Función indirecta de utilidad métrica monetaria. La función indica el gasto mínimo necesario basados en los precios p para que un consumidor se sienta tan satisfecho como se sentiría con una cesta a precios q y renta m. Lo podemos ver da forma gráfica en la figura 1.5. Existe una definición matemática similar a la de la utilidad indirecta que es

$$\mu(p; q, m) \equiv e(p, v(q, m)).$$

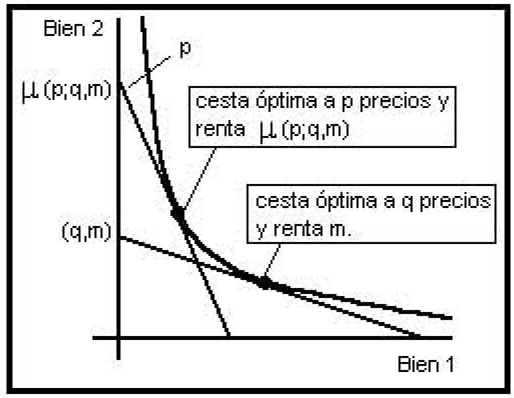

Figura 1.5: Función indirecta de utilidad métrica monetaria

Donde $\mu(p; q, m)$ mide la cantidad necesaria de dinero a los precios p para disfrutar del mismo bienestar que se disfrutaría con los precios q y la renta m. Aquí $\mu(p; q, m)$ se comporta como una función de gasto con respecto a los precios p y como función indirecta de utilidad con respecto a q y a m.

Ejemplo 1.3 (Función de utilidad Cobb-Douglas.)
Se define a la función de utilidad Cobb-Douglas como

$$u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} ,$$

y como cualquiera de sus transformaciones representa las mismas preferencias, también puede hallarse como

$$u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 .$$

Las funciones de demanda marshallianas y la función indirecta de utilidad son obtenidas resolviendo el problema de maximización

$$\begin{aligned} max\ & \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 \\ & \text{sujeta a } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \end{aligned}$$

Utilizando el lagrangiano llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{x_1} - \lambda p_1 &= 0 \\ \frac{1-\alpha}{x_2} - \lambda p_2 &= 0 \end{aligned}$$

Despejamos λ y de ahí igualamos las ecuaciones, llegando a

$$\frac{\alpha}{p_1 x_1} = \frac{1-\alpha}{p_2 x_2} .$$

Ahora, multiplicando por p_1x_1 y p_2x_2 para eliminar los denominadores y haciendo uso de la restricción presupuestaria

$$\begin{aligned}\alpha p_2 x_2 &= p_1x_1 - \alpha p_1 x_1\\ \alpha m &= p_1 x_1\\ x_1(p_1,p_2,m) &= \frac{\alpha m}{p_1}.\end{aligned}$$

Sustituyendo esta variable en la restricción presupuestaria encontraremos la segunda marshalliana

$$\begin{aligned}p_1x_1 + p_2x_2 &= m\\ p_1\left(\frac{\alpha m}{p_1}\right) + p_2x_2 &= m\\ x_2(p_1,p_2,m) &= \frac{(1-\alpha)m}{p_2}.\end{aligned}$$

Ya teniendo x_1 y x_2, las sustituimos en la función objetivo y simplificando encontraremos la función indirecta de utilidad

$$v(p_1,p_2,m) = \ln m - \alpha \ln p_1 - (1-\alpha)\ln p_2 \tag{1.10}$$

En cuanto a la función de gasto y las hicksianas se obtendrán resolviendo

$$\begin{aligned}&min\ \ p_1x_1 + p_2x_2\\ &\quad \text{sujeta a } x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} = u(x_1,x_2)\end{aligned}$$

Iniciamos despejando $x_2 = u^{1/1-\alpha}x_1^{-\alpha/1-\alpha}$ en la restricción. Después, derivamos la función objetivo, ya habiendo sustituido x_2 en ella, llegando a

$$\begin{aligned}p_1 - \frac{\alpha}{1-\alpha}p_2 u^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{\frac{-\alpha-(1-\alpha)}{1-\alpha}} &= 0\\ p_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}p_2 u^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{-\frac{1}{1-\alpha}}&\\ h_1(p_1,p_2,u) \equiv x_1 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} u&\end{aligned}$$

Para obtener el x_2 sustituiremos x_1 en la restricción

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\alpha} u\right)^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = u&\\ h_2(p_1,p_2,u) \equiv x_2 = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\alpha} u&\end{aligned}$$

Para escribir la función de gasto sustituiremos h_1 y h_2 en la función objetivo

$$\begin{aligned}e(p_1,p_2,u) &= p_1\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} u + p_2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} u\\ &= \left(\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha} + \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\right) u\end{aligned}$$

Ya en forma la veremos como

$$e(p_1, p_2, u) = \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u \ . \tag{1.11}$$

Además de la ecuación (1.10) para la función indirecta de utilidad, también podemos encontrar la siguiente, la cual proviene de la inversa de la función de gasto y en donde han sido sustituidas $e(p_1, p_2, u)$ por m y u por $v(p_1, p_2, m)$.[3]

$$v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{\left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}} \tag{1.12}$$

Las funciones de utilidad métrica monetaria se deducen por lo anterior de forma menos complicada, dando como resultado

$$\begin{aligned} m(p, x) &= \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u(x_1, x_2) \\ &= \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(p; q, m) &= \left[\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} v(q_1; q_2, m) \\ &= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} q_1^{-\alpha} q_2^{\alpha-1} m \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4 (La función de utilidad CES)
Se define a la función de utilidad CES (Constant Elasticity of Substitution, es decir, "Elasticidad Constante de Sustitución") como

$$u(x_1, x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{1/\rho} \quad ,$$

y como cualquiera de sus transformaciones representa las mismas preferencias, también puede hallarse como

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\rho} + x_2^{\rho} \ .$$

Las funciones de demanda hicksianas y la función de gasto se obtienen al solucionar el problema de minimización

$$\begin{aligned} & min \ p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ & \qquad \text{sujeta a } x_1^{\rho} + x_2^{\rho} = u^{\rho} \end{aligned}$$

Utilizando el lagrangiano llegamos a

$$\begin{aligned} p_1 - \lambda\rho x_1^{\rho-1} &= 0 \\ p_2 - \lambda\rho x_2^{\rho-1} &= 0 \\ x_1^{\rho} + x_2^{\rho} &= u^{\rho} \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones despejamos x_1^{ρ} y x_2^{ρ}

$$x_1^{\rho} = (\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}} p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} \tag{1.13}$$

$$x_2^{\rho} = (\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}} p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \tag{1.14}$$

[3] La forma descrita en (1.12) no es más que la transformación monótona de (1.10).

Ahora, si sustituimos estos resultados en la función de utilidad y factorizamos, llegaremos a

$$(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]=u^\rho$$

Despejando $(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$ y sustituyéndola en el sistema de ecuaciones (1.14) obtendremos las funciones de demanda hicksianas

$$h_1(p_1,p_2,u)\equiv x_1=p_1^{\frac{1}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}u$$
$$h_2(p_1,p_2,u)\equiv x_2=p_2^{\frac{1}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}u$$

Para obtener la función de gasto, sustituimos las hicksianas en la función objetivo

$$\begin{aligned} e(p_1,p_2,u) &= p_1h_1(p_1,p_2,u)+p_2h_2(p_1,p_2,u)\\ &= \left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}}u\\ &= \left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}+p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}u \end{aligned}$$

Si decimos $\gamma=\frac{\rho-1}{\rho}$ entonces

$$e(p_1,p_2,u)=\left[p_1^\gamma+p_2^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}u$$

Para encontrar las funciones indirectas de utilidad y las marshallianas podemos partir de la función de gasto aquí calculada. Así pues, al invertirla, tendremos

$$v(p_1,p_2,m)=(p_1^\gamma+p_2^\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}}m\ .$$

Y las funciones de demanda marshallianas las podemos encontrar con ayuda de la identidad de Roy

$$\begin{aligned} x_1(p_1,p_2,m)= \quad -\frac{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial p_1}{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial m} &= \frac{\frac{1}{\gamma}\left(p_1^\gamma+p_2^\gamma\right)^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}p_1^{\gamma-1}\gamma m}{\left(p_1^\gamma+p_2^\gamma\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}\\ &= \frac{p_1^{\gamma-1}m}{(p_1^\gamma+p_2^\gamma)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(p_1,p_2,m)= \quad -\frac{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial p_2}{\partial v(p_1,p_2,m)/\partial m} &= \frac{\frac{1}{\gamma}\left(p_1^\gamma+p_2^\gamma\right)^{-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}p_2^{\gamma-1}\gamma m}{\left(p_1^\gamma+p_2^\gamma\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}\\ &= \frac{p_2^{\gamma-1}m}{(p_1^\gamma+p_2^\gamma)} \end{aligned}$$

Las funciones de utilidad métrica monetaria pueden hallarse con los resultados que hemos visto

$$\begin{aligned} m(p,x) &= (p_1^\gamma + p_2^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\ \mu(p;q,m) &= (p_1^\gamma + p_2^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} (q_1^\gamma + q_2^\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} m \ . \end{aligned}$$

Capítulo 2

La elección

A lo largo de este capítulo analizaremos al consumidor y su comportamiento. Como sabemos, la elección de consumo de las personas está determinada por diversos factores, los cuales podemos concretar bajo los siguientes conceptos: *posibilidades de consumo* y *preferencias*, en otras palabras, veremos la conducta de demanda del consumidor de acuerdo con las variaciones de la renta y los precios.

2.1. Equilibrio comparativo

Continuando con el problema de maximización de utilidad para un consumidor de dos bienes, veremos cómo cambia la demanda de estos cuando varían los datos del problema. Si mantenemos constantes los precios de los bienes y lo que variamos es la renta, el espacio que existirá entre las cestas maximizadoras de la utilidad es denominada senda de expansión de la renta. Gracias a esta senda encontraremos funciones que relacionan a la demanda de cada bien con la renta. Estas funciones son conocidas como curvas de Engel. Con la variación de la renta se pueden dar varios casos:

1. Si la senda de expansión de la renta es una línea recta que pasa por el origen, las curvas de Engel también seguirán esta medida y las demandas del consumidor tendrán una elasticidad-renta unitaria (igual a 1). Esto quiere decir que el consumidor requerirá la misma proporción de cada uno de los bienes a cualquier nivel de renta. Lo representamos en la figura 2.1.

2. Si la senda de expansión de la renta tiende más hacia uno de los bienes que al otro, quiere decir que cuando el consumidor tiene más ingresos, es decir, mayor renta, consume mayores cantidades de los dos bienes pero adquiere más de uno, al que llamaremos *bien de lujo*, que del otro denominado *bien necesario*. Lo representamos en la figura 2.2.

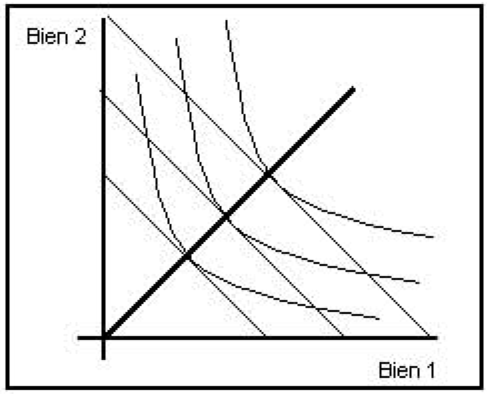

Figura 2.1: Demandas de elasticidad unitaria.

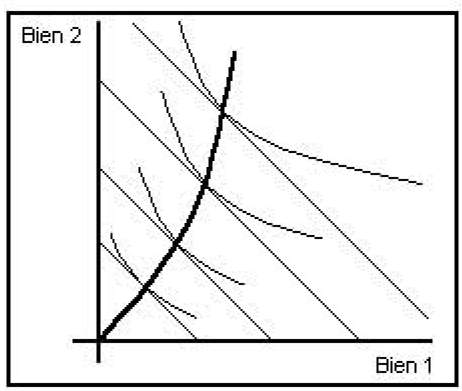

Figura 2.2: Bien de lujo (2) y bien necesario (1).

3. Si la senda de expansión de la renta pudiese doblarse conforme se recibe mayor renta, quiere decir que el aumento en la renta induce al consumidor a requerir una cantidad menor de uno de los bienes. Estos bienes que ya no se desean consumir tanto como se es posible con más renta se llaman *bienes inferiores*; en tanto que hay bienes que se demandan en proporción al aumento de renta que se tenga, estos son los *bienes normales*. Lo representamos en la figura 2.3.

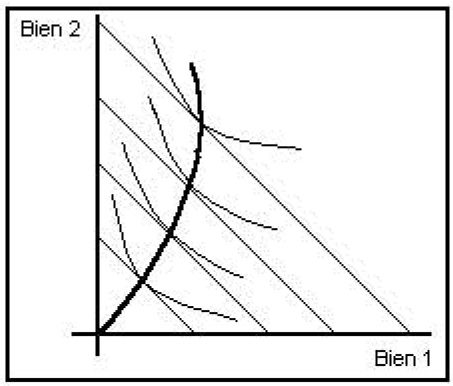

Figura 2.3: Bien inferior (2) y bien normal (1).

Cuando dejamos los precios fijos y la renta es la que varía, la recta presupuestaria se mueve de forma paralela una a la otra, en cambio cuando dejamos fija la renta y los precios son los que varían la recta presupuestaria buscará hacer tangencia a la curva de utilidad. A la curva que se forma entre una tangente y otra se llama curva de oferta-precio.

Suponiendo que el precio del bien 1 varía y el precio del bien 2 y la renta se quedan fijos se verá algo parecido a la figura 2.4 en la cual se da una disminución en el precio del bien 1 y por tanto se aumenta su demanda.[1] Existen otro tipo de bienes que denominan *bienes Giffen*, los cuales distinguimos porque al aumentar su precio aumenta su demanda.

Ejemplo 2.1 (Impuestos indirectos e impuestos sobre la renta.) *Un gobierno busca gravar a los consumidores que maximizan sus utilidades con un impuesto para obtener ingresos. La restricción presupuestaria del consumidor es* $p_1x_1 + p_2x_2 = m$.

Impuesto indirecto. Si el impuesto es gravado sobre las ventas de los bienes, imaginemos es sobre el bien 1, la restricción presupuestaria del consumidor será $(p_1+t)x_1+p_2x_2 = m$. La cantidad recaudada por el gobierno será tx_1^* con la maximización en (x_1^*, x_2^*).

[1] El bien 1 es un bien necesario.

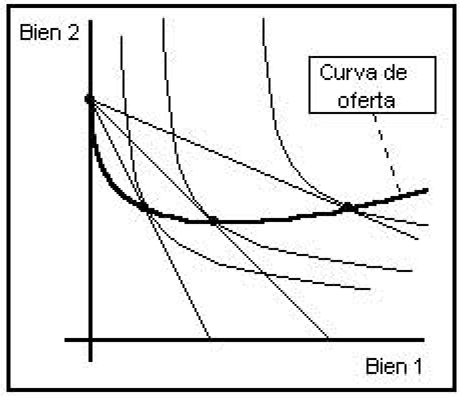

Figura 2.4: Curva de oferta

Impuesto sobre la renta. Si el impuesto es gravado sobre la renta, la restricción presupuestaria del consumidor se convertirá en $p_1x_1+p_2x_2 = m-tx_1^*$, esta recta tendrá pendiente $-p_1/p_2$ y pasa por (x_1^*, x_2^*).

Estas condiciones las podemos observar mejor en la figura 2.5. Otro punto que debemos ver con detalle es que el consumidor tendrá mayor utilidad con un impuesto sobre la renta que con uno indirecto, tomando en cuenta que cualquiera de ellos producirá el mismo ingreso para el gobierno.

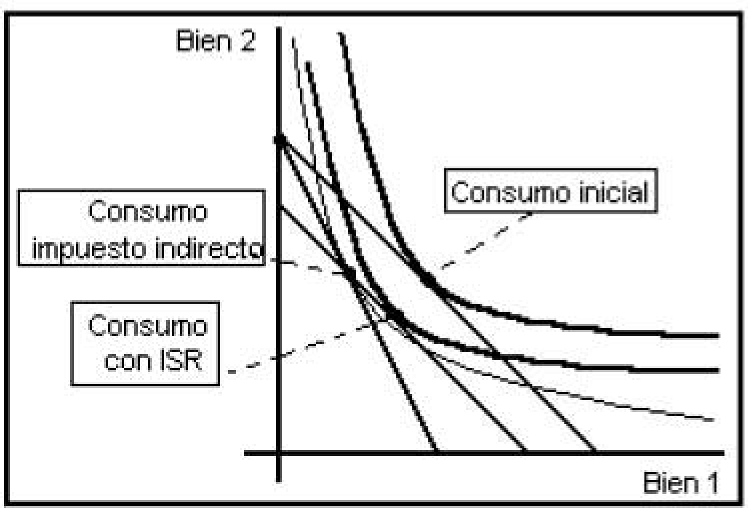

Figura 2.5: Impuesto indirecto e impuesto sobre la renta.

2.2. La ecuación de Slutsky

La ecuación de Slutsky no es más que una relación entre las derivadas de las funciones marshallianas y las derivadas de las funciones hicksianas. Lo veremos a continuación.

Ecuación de Slutsky.

$$\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p,v(p,m))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m} x_i(p,m)$$

Demostración. Si x^* es la cesta que maximiza la utilidad con la renta y los precios (p^*, m^*) , y $u^* = u(x^*)$ se cumple que

$$h_j(p,u^*) \equiv x_j(p, e(p,u^*)) \ .$$

Ahora diferenciamos esta identidad con respecto a p_i y evaluamos en p^*

$$\frac{\partial h_j(p^*,u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial m}\frac{\partial e(p^*,u^*)}{\partial p_i} \ .$$

Así pues, recordando que $\partial e(p^*,u^*)/\partial p_i = x_i^*$ y reordenando la ecuación llegamos a

$$\frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p^*,m^*)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p^*,m^*)}{\partial m} x_i^* \ .$$

que es la ecuación de Slutsky.

□

La ecuación de Slutsky nos puede servir para estudiar los efectos en la demanda de los bienes provocados por la variación de los precios. Estos son los llamados: efecto renta y efecto sustitución, que de forma matemática veremos así:

$$\Delta x_j \approx \frac{\partial x_j(p,m)}{\partial p_i}\Delta p_i = \underbrace{\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i}}_{\text{Efecto sustitución}} - \underbrace{\frac{\partial x_j(p,m)}{\partial m}}_{\text{Efecto renta}} x_i \Delta p_i$$

Efecto renta. Es el efecto en el consumo producido por una variación en el ingreso del demandante de los bienes. Cuando sube el precio de un bien, con otras cosas constantes, su precio relativo[2], su costo de oportunidad[3], sube. Aunque cada bien es único, tiene sustitutos, es decir, hay otros bienes que pueden usarse en su lugar. Al subir el costo de oportunidad de un bien, la gente adquiere menos ese bien y más de sus sustitutos.

[2] La razón de un precio a otro se denomina precio relativo, es decir, el precio de un bien dividido entre el precio de otro.

[3] El costo de oportunidad de una acción o bien es la alternativa desaprovechada de mayor valor para el individuo. Un precio relativo es un costo de oportunidad.

Efecto sustitución. Es el efecto que un cambio en los precios de los bienes provoca en la cantidad adquirida por un consumidor. Cuando un precio aumenta y todos los factores que influyen sobre los planes de compra se mantienen sin cambio, el precio, relativo a los ingresos de la gente, aumenta. Al enfrentar un precio y un ingreso inalterado, la gente no puede permitirse comprar lo mismo que adquiría anteriormente, por tanto, la cantidad demandada de algunos bienes y servicios deberá disminuir.

El efecto renta mueve la recta presupuestaria de forma paralela hacia el origen y el efecto sustitución varía de acuerdo al aumento o descenso de demanda del bien en cuestión. La forma gráfica puede ser tomada de la figura 2.5.

Ejemplo 2.2 (Aplicación de la ecuación de Slutsky en la Cobb-Douglas) *Recordemos*

$$\begin{aligned} v(p_1, p_2, m) &= mp_1^{-\alpha} \\ e(p_1, p_2, u) &= up_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha} \\ x_1(p_1, p_2, m) &= \frac{\alpha m}{p_1} \\ h_1(p_1, p_2, u) &= \alpha p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}u \end{aligned}$$

Para la ecuación de Slutsky debemos buscar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial p_1} &= -\frac{\alpha m}{p_1^2} \\ \frac{\partial x_1(p,m)}{\partial m} &= \frac{\alpha}{p_1} \\ \frac{\partial h_1(p,u)}{\partial p_1} &= \alpha(\alpha-1)p_1^{\alpha-2}p_2^{1-\alpha}u \\ \frac{\partial h_1(p,v(p,m))}{\partial p_1} &= \alpha(\alpha-1)p_1^{\alpha-2}p_2^{1-\alpha}mp_1^{-\alpha}p_2^{alpha-1} \\ &= \alpha(\alpha-1)p_1^{-2}m \end{aligned}$$

Sustituyendo todas estas deducciones en la ecuación de Slutsky

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1}{\partial m} &= \frac{\alpha(\alpha-1)m}{p_1^2} - \frac{\alpha}{p_1}\frac{\alpha m}{p_1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) - \alpha^2 m}{p_1^2} \\ &= -\frac{\alpha m}{p_1^2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \end{aligned}$$

2.3. El problema dual en el consumo

Hasta este momento sabemos cómo encontrar la función indirecta de utilidad basándonos en las funciones de demanda y la función de utilidad.

Existe un problema dual que da solución a la búsqueda de la función directa de utilidad y esto se hace a partir de la función indirecta de utilidad normalizada[4], que expresamos como

$$\begin{aligned} v(p) = \ & max_x \ u(x) \\ & \text{sujeta a } px = 1 \ . \end{aligned}$$

Ahora, la función directa se encontrará resolviendo

$$\begin{aligned} u(x) = \ & min_p \ v(p) \\ & \text{sujeta a } px = 1 \ . \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3 (Búsqueda de la función directa de utilidad.)

$$v(p_1, p_2) = -a \ln p_1 - b \ln p_2$$

es la nuestra función indirecta de utilidad.

Debemos resolver el problema de minimización

$$\begin{gathered} min_{p_1,p_2} \ -a \ln p_1 - b \ln p_2 \\ \text{sujeta a } p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1 \ . \end{gathered}$$

Las condiciones de primer orden provenientes del lagrangiano con respecto a p_1 y p_2 respectivamente son

$$\begin{aligned} \frac{-a}{p_1} = \lambda x_1 \qquad & \Rightarrow \qquad -a = \lambda p_1 x_1 \\ \frac{-b}{p_2} = \lambda x_2 \qquad & \Rightarrow \qquad -b = \lambda p_2 x_2 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la restricción presupuestaria podemos sumar los resultados anteriores y llegar a

$$\lambda = -a - b$$

Ahora, sustituimos λ en las condiciones de primer orden, lo que nos dará

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a}{(a+b)x_1} \\ p_2 &= \frac{b}{(a+b)x_2} \end{aligned}$$

Estos precios, p_1 y p_2 son los minimizadores de la utilidad indirecta. Así que sustituyéndolos en la función objetivo diremos

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -a \ln \frac{a}{(a+b)x_1} - b \ln \frac{b}{(a+b)x_2} \\ &= a \ln x_1 + b \ln x_2 + \text{constante} \end{aligned}$$

Con lo anterior queremos decir que la función de utilidad es una Cobb-Douglas.

[4]La función indirecta de utilidad normalizada se obtiene dividiendo los precios por la renta de forma que el gasto se hace igual a uno.

Capítulo 3

La demanda

La renta de un individuo depende de tres aspectos: los precios de los recursos, las dotaciones de los recursos y las decisiones. La distribución que el individuo le dé a su renta depende de la distribución de estos factores. Los dos primeros están normalmente fuera del control propio y quedan determinados por el mercado y la historia. Desde otro punto de vista los precios y las dotaciones parecen estar determinados por mera suerte. El último factor está bajo el control propio. Hacemos elecciones y tomamos decisiones de acuerdo a nuestro ingresos. En este capítulo nos enfocaremos en las dotaciones.

3.1. Las dotaciones en los recursos

Hasta este punto hemos visto a la renta como un dato establecido, pero dentro de la Economía se puede ver de forma más compleja, así pues, se considera que el consumidor tiene una dotación de varios bienes que se pueden vender a sus precios respectivos p. Esta dotacion la definiremos como $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ y diremos que la renta m que el individuo utiliza para comprar otros bienes es $m = p\omega$.

Reformularemos el problema de maximización de la utilidad como

$$\begin{aligned} &max_x \; u(x) \\ &\qquad \text{sujeta a } px = p\omega \end{aligned}$$

Este problema encuentra solución de la misma forma que lo hemos visto, es decir con la búsqueda de $x(p, p\omega)$. Ahora, el consumidor podrá tener demandas netas positivas o negativas dependiendo de los deseos que le permite tener su dotación, esto es porque a la demanda neta del bien i la encontramos con $x_i - \omega_i$.

En este modelo más complejo vemos que los precios influyen en el valor de lo que se desea adquirir pero también en el valor de lo que, el consumidor, desea vender. Lo dicho se puede observar mejor en la ecuación de Slutsky.

Iniciamos diferenciando la demanda con respecto al precio:

$$\frac{dx_i(p,p\omega)}{dp_i} = \left.\frac{\partial x_i(p,p\omega)}{\partial p_i}\right|_{p\omega} = \underbrace{\text{constante}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial x_i(p,p\omega)}{\partial m}}_{(2)} \underbrace{\omega_i}_{(3)}$$

(1) Derivada de la demanda con respecto a los precios que mantiene fija la renta.

(2) Derivada de la demanda con respecto a la renta.

(3) Variacion de la renta.

Ahora utilizando la ecuación de Slutsky y agrupando llegaremos a:

$$\frac{dx_i(p,p\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,p\omega)}{\partial m}\ (\omega_j - x_j)$$

Aquí tendremos que el efecto-renta dependerá de la demanda del bien j y no de la demanda bruta.

Es más fácil explicarlo pensando en un bien normal. Cuando sube el precio de este, el efecto sustitución y el efecto renta tienden ambos a disminuir el consumo. Ahora, suponiendo que el consumidor es un vendedor del bien en cuestión, su renta efectiva aumenta y este efecto renta-dotación provocará un aumento del consumo del bien.

La oferta de trabajo

Formulemos el problema de maximización siguiente:

$$max_{c,l}\ v(c,l)$$
$$\text{sujeta a } pc = wl + m$$

donde el consumidor elige dos bienes, consumo (c) y trabajo (l), y tiene una renta no laboral m. La función $v(c,l)$ es la utilidad del consumo y del trabajo.

Al trabajo en la mayoría de los casos se le vería como un mal, así que habremos de cambiarlo para tener la misma idea de los problemas planteados anteriormente.

Supongamos que $\bar{L}$ es la cantidad máxima de horas que puede trabajar un consumidor y que $L = \bar{L} - l$ es por lo tanto el esparcimiento. La función de utilidad del consumo y el esparcimiento es $u(c,\bar{L}-l) = v(c,l)$. Ya habiendo definido esto el problema lo reescribiremos como:

$$max_{c,l}\ u(c,\bar{L}-l)$$
$$\text{sujeta a } pc + w(\bar{L}-l) = w\bar{L} + m$$

Y sustituyendo $L = \bar{L} - l$

$$max_{c,l}\ u(c,L)$$
$$\text{sujeta a } pc + wL = w\bar{L} + m$$

En este planteamiento, el consumidor “vende” su dotación de trabajo al precio w y “compra” esparcimiento.

Con la ecuación de Slutsky podemos calcular la variación de la demanda del esparcimiento cuando el salario cambia, de la forma siguiente:

$$\frac{dL(p,w,m)}{dw} = \frac{\partial L(p,w,u)}{\partial w} + \frac{\partial L(p,w,m)}{\partial m}[\bar{L} - \epsilon]$$

El término entre paréntesis por definición es no negativo, eso junto con la derivada de la demanda del esparcimiento, nos dice que es la suma de un número negativo con uno positivo, dicho de otro modo, un aumento de salario puede provocar tanto un aumento como una reducción de la oferta de trabajo.

Un aumento de salario podría traer consigo un incremento en la oferta de trabajo pues el esparcimiento acrecenta su precio, pero del mismo modo, el aumento de salario puede enriquecer al que lo obtiene, y este podría buscar una alza en su demanda de esparcimiento.

3.2. Funciones de utilidad homotética

Recordando, una función homogénea de grado 1 es una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumple con $f(tx) = tf(x)$ cualquiera que sea $t > 0$.

Entonces diremos que una función $f(x)$ es homotética si $f(x) = g(h(x))$, donde g es una función estrictamente creciente y h es homogénea de grado 1.

Una función homotética no es más que una transformación monótona de una función homogénea, y debemos recordar que una transformación monótona de una función de utilidad representará las mismas preferencias. Así pues, si las preferencias que se están representando son por medio de una función homotética, se dirá que el consumidor tiene preferencias homotéticas.

Con esto llegamos a la deducción que si la función de utilidad de un consumidor es homogénea de grado 1, la función de gasto podrá expresarse como $e(p,u) = e(p)u$.

De la misma forma, las funciones lineales con respecto a la renta serán: la función indirecta de utilidad que podrá expresarse como $v(p,m) = v(p)m$. Y, desprendiéndose de la identidad de Roy, las funciones de demanda se encontraran como $x_i(p,m) = x_i(p)m$.

3.3. La continuidad de las funciones de demanda

Desde el comienzo hemos supuesto que las funciones de demanda son continuas y diferenciables, para así facilitar nuestro estudio; pero esto sucederá sólo si las demandas se encuentran bien definidas (casi con seguridad, cuando $p \gg 0$ y $m > 0$). Es decir que la demanda variará continuamente con los precios p y la renta m en la medida en que $x(p,m)$ sea la única cesta maximizadora.

Para asegurar que la demanda es continua, cualquiera que sea $p \gg 0$ y $m > 0$, se necesita que la demanda sea única, y esto se deduce de la condición de la convexidad estricta.

Cesta única demandada. Si las preferencias son estrictamente convexas, entonces para cada precio, $p \gg 0$, existe una única cesta x que maximiza a la utilidad u, dentro del conjunto presupuestario del consumidor $B(p, m)$.

Demostración. Supongamos que x' y x'' maximizan ambos a u en $B(p, m)$, y definimos otro caso, $x''' = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$ que también pertenece a $B(p, m)$. Como las preferencias son estrictamente convexas, x''' se prefiere estrictamente a x' y x''. Llegamos a una contradicción, así que concluímos que es única. □

Con esto afirmaremos que si las funciones de demanda se encuentran bien definidas y son continuas en todos los puntos y se deducen de la maximización de las preferencias, las preferencias deberán estar por debajo en forma estrictamente convexa. Si no se diera la continuidad y la convexidad, podría existir algún punto en el cual exista más de una cesta maximizadora como podemos ver en la figura 3.1.

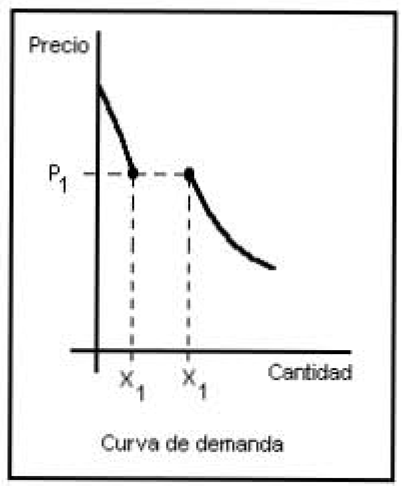

Figura 3.1: La demanda es discontinua.
La demanda es discontinua debido a que las prefencias no son convexas.

Capítulo 4

El excedente del consumidor

En este capítulo vamos a discutir algunos planteamientos generales que nos ayudan a medir las variaciones del bienestar en los consumidores. Veremos algunos términos de la disposición a pagar o de disposición a ser compensado, es decir, la diferencia entre medir la cantidad máxima de dinero que una persona estaría dispuesta a pagar para consumir una determinada cantidad de un bien y la mínima cantidad de dinero que estaría dispuesta a aceptar en compensación por dejar de consumir tal bien.

4.1. Variaciones equivalentes y compensatorias

Suponiendo que tenemos dos presupuestos, (p^0, m^0) y (p^1, m^1), que nos marcan los precios y las rentas a los que se enfrenta un consumidor en dos países diferentes. Decimos que (p^0, m^0) es la relación de precios y renta habituales del consumidor y (p^1, m^1) el cambio que sufre la relación de un país con respecto a otro. La variación que experimentaría el bienestar del consumidor al sustituir (p^0, m^0) por (p^1, m^1) es la diferencia entre las utilidades indirectas, es decir:

$$v(p^1, m^1) - v(p^0, m^0)$$

Si la diferencia entre las utilidades es positiva, será de beneficio para el consumidor adquirir bienes en el país diferente; pero en caso de que sea negativo, no convendrá ningún consumo.

Ya que la teoría de la utilidad es meramente doctrinaria no hay un método que pueda asegurar cuantitativamente las variaciones de la utilidad. Empero en algunas ocasiones se utilizan medidas monetarias del bienestar para concebir ideas aproximadas de la dimensión de las variaciones de este con el objetivo de jerarquizar o comparar los beneficios y costos de los diferentes consumidores. Con frecuencia, para facilitar el estudio, se utiliza una medida “normalizada” de las diferencias de utilidad.

Nosotros tomaremos en cuenta la función indirecta de utilidad métrica monetaria para nuestro análisis. (Estudiado en la pág.**??**.)

Recordemos, $\mu(q; p, m)$ mide la renta necesaria del consumidor a los precios q para disfrutar del mismo bienestar que tendría a los precios p y renta m. Ahora, si definimos $e(q, v(p, m)) = \mu(q; p, m)$ y la tomamos para la diferencia de utilidades, tenemos

$$\mu(q; p^1, m^1) - \mu(q; p^0, m^0) \tag{4.1}$$

Debemos empezar introduciendo dos conceptos. Se trata de lo que se conoce por variación compensatoria y variación equivalente. Tales variaciones se miden en unidades monetarias y representan cantidades de dinero que valoran lo que se gana o se pierde con un cambio en el nivel de bienestar de la persona. Las estudiaremos basándonos en la diferencia planteada en la ecuación (4.1), diciendo que q tiene dos posibles valores $q = p^0$ y $q = p^1$. Con esto y utilizando (4.1) escribimos las diferencias de utilidades siguientes:

$$VE = \mu(p^0; p^1, m^1) - \mu(p^0; p^0, m^0) = \mu(p^0; p^1, m^1) - m^0 \tag{4.2}$$
$$VC = \mu(p^1; p^1, m^1) - \mu(p^1; p^0, m^0) = m^1 - \mu(p^1; p^0, m^0) \tag{4.3}$$

La variación equivalente. VE, está basada en los precios actuales y busca respuesta a la pregunta ¿Cuál es la cantidad monetaria ante la cual, al recibirla el consumidor, se volverá indiferente a aceptar un cambio en los precios, en el caso de que el cambio propuesto provoque variaciones en su utilidad?. (El valor será negativo si el cambio en precios hace que el consumidor se encuentre peor).

La variación compensatoria. VC, medirá el ingreso neto que debe compensarse al consumidor por el cambio en precios una vez que éste ya ha ocurrido, de tal forma que el consumidor recobre su nivel original de utilidad.

Las magnitudes de estos dos conceptos son diferentes, pero su signo siempre será el mismo, ya que ambos miden diferencia de utilidades. En las figuras 4.1 y 4.2 vemos de forma gráfica estos dos conceptos haciendo uso de dos bienes.

Ejemplo 4.1 (Variación compensatoria y equivalente.)
Para explicar de forma simple imaginemos lo siguiente: supongamos que por la ventana de nuestra habitación se veía un jardín lleno de rosas, hasta que el propietario decidió quitar los rosales y plantar girasoles. Supongamos también que preferimos el paisaje anterior a contemplar el jardín con girasoles. Con el cambio hemos perdido bienestar. La variación compensatoria es la cantidad mínima de dinero que nos deberían pagar en compensación por esta perdida de bienestar para que nos quedáramos indiferentes entre la vista de los girasoles, con la cantidad de dinero, o el paisaje del jardín lleno de rosas, sin dicho dinero. Por tanto, teóricamente, la variación equivalente corresponde a los términos de mínima disposición a que seamos compensados.

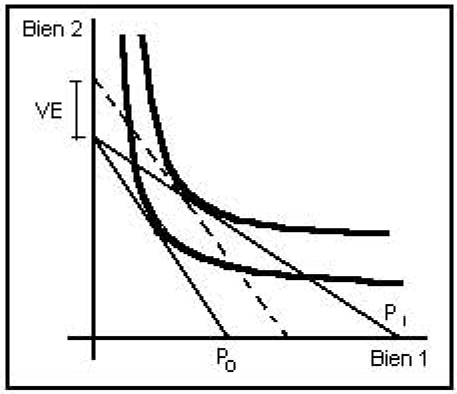

Figura 4.1: Variación equivalente.
El precio del bien 1 baja de P_0 a P_1.

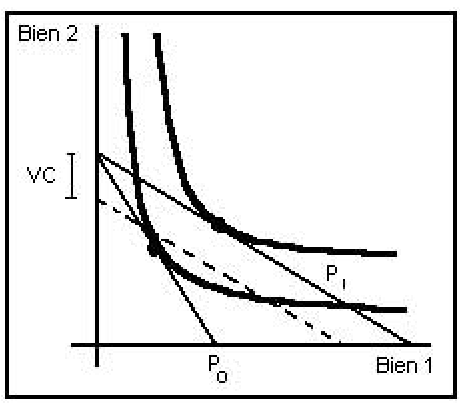

Figura 4.2: Variación compensatoria.
El precio del bien 1 baja de P_0 a P_1.

La variación compensatoria puede ser positiva -como la descrita- o negativa. Sería negativa si en lugar de un jardín con girasoles, los rosales se hubieran sustituido por alcatraces, suponiendo que prefiriéramos los alcatraces a los girasoles y a los rosales. Por tanto la variación compensatoria equivaldría a la mínima cantidad de dinero que estaríamos dispuestos a pagar para que nos diera igual contemplar el jardín de rosas o de alcatraces. Es decir, equivaldría a nuestra disposición al pago.

Supongamos ahora que aún disfrutamos de la vista del jardín lleno de rosas, y la plantación de alcatraces o girasoles, es todavía un proyecto por realizarse. Examinemos en primer lugar la propuesta del jardín de alcatraces. Si se realizara, nuestro bienestar incrementaría. Para que nuestro bienestar no aumentara ni disminuyera deberíamos pagar una determinada cantidad de nuestros ingresos. Llamamos a esta cantidad de dinero variación equivalente y supone expresar la cantidad en términos de mínima disposición a pagar.

En el caso del proyecto del jardín de girasoles, la variación equivalente sería la mínima cantidad de dinero que deberían darnos para quedarnos indiferentes entre los rosales o el jardín al nivel de bienestar previo al cambio. Es decir, que uno y otro fueran equivalentes.

Para medir la variación equivalente y compensatoria hay que resolver las funciones de utilidad métrica monetaria, $\mu(q; p, m)$, como lo vimos anteriormente, esto es observando la demanda del consumidor, $x(p, m)$, de las preferencias descritas por $\mu(q; p, m)$.

La variación equivalente y compensatoria serán observables si lo son las funciones de demanda de su función de utilidad y si satisfacen las condiciones de maximización de la utilidad. La conducta que muestre la demanda ayudará a la medida de la variación del bienestar.

4.2. Excedente del consumidor

La curva de demanda revela la cantidad de un producto que los consumidores compran a diferentes niveles de precios; adicionalmente, también revela el precio que el consumidor estaría dispuesto a pagar por cada unidad adicional del bien. Si comparamos el precio de mercado con el precio que el consumidor estaría dispuesto a pagar podríamos ver que el consumidor adquirirá el bien, si y sólo si, el precio es menor o igual a lo que está dispuesto a pagar. En este sentido, sólo el consumidor marginal[1] paga un precio igual a la valuación que tiene por el bien, el resto paga un precio inferior al valor asignado al bien y el resto no adquiere el producto. Estos consumidores que pagan un precio menor están "ahorrando" u obteniendo un "excedente". A esta diferencia entre el precio que se está dispuesto a pagar y el precio que realmente pagamos se denomina excedente del consumidor.

El excedente es una variación del bienestar.

[1] Consumidor marginal es aquel consumidor que es exactamente indiferente entre comprar un bien o no comprarlo. Su excedente es nulo.

Si tenemos que la demanda de un bien al precio p es $x(p)$, el excedente que un consumidor tendrá con una variación del precio p^0 a p^1 será

$$EC = \int_{p^0}^{p^1} x(t)dt$$

Cuando la función de utilidad dada es una función cuasilineal el excedente del consumidor es igual a la variación equivalente y a la compensatoria. En general, el excedente puede ser una aproximación de las medidas del bienestar, en teoría, ideales.

4.3. Función de utilidad cuasilineal

Supongamos la existencia de una transformación monótona de la utilidad que se ve de la forma

$$U(x_0, x_1, \ldots, x_k) = x_0 + u(x_1, \ldots, x_k)$$

Se nota que la función es lineal en uno de lo bienes, más no se sabe, con seguridad, si en los demás. A esta función se le llama *función de utilidad cuasilineal*.

Para facilitar el estudio diremos que $k = 1$, aunque k podría tratarse de cualquier número de bienes. Tendremos entonces, $x_0 + u(x_1)$, donde $u(x_1)$ es una función estrictamente cóncava.

Definimos el problema de maximización de la utilidad como

$$\begin{array}{l} max_{x_0, x_1}\ x_0 + u(x_1) \\ \quad \text{sujeta a } x_0 + p_1 x_1 = m\ . \end{array}$$

Si introducimos la restricción presupuestaria en la función objetivo podríamos verla como

$$max_{x_1} u(x_1) + m - p_1 x_1\ .$$

La condición de primer orden será pues

$$u'(x_1) = p_1$$

que nos dice que la utilidad marginal del consumo del bien 1 será igual al precio de este.

La demanda del bien 1 será pues dependiente de p_1. La demanda del bien 0 la rescataremos de la restricción presupuestaria, $x_0 = m - p_1 x_1(p_1)$.

La función indirecta de utilidad la veremos entonces como

$$v(p_1, m) = u(x_1(p_1)) + m - p_1 x_1(p_1)\ .$$

Nos debemos dar cuenta que la demanda del bien 1 no puede ser independiente totalmente de la renta, es decir, imaginemos que el nivel de renta es muy bajo, esto forzosamente limitará el consumo del bien 1.

Si definimos el problema de maximización con una restricción extra de que x_0 no puede ser negativo tendremos

$$\begin{aligned} max_{x_0,x_1} \; & x_0 + u(x_1) \\ \text{sujeta a } & x_0 + p_1 x_1 = m \\ & x_0 \geq 0 \ , \end{aligned}$$

y deberemos buscar la función indirecta de utilidad en caso que $x_0 = 0$ ó $x_0 > 0$.

En el caso de $x > 0$ se obtendrá la solución explicada antes, con la demanda del bien 1 dependiente sólo del precio del bien 1 e independiente de la renta. Pero en caso que $x_0 = 0$ la utilidad indirecta estará descrita por $u(m/p_1)$.

De la forma en que encontramos la variación del bienestar encontraremos la función métrica monetaria, es decir, estará dada por

$$\mu(q; p, m) = \int_p^q x_1(t)dt + m \ .$$

Las variaciones equivalente y compensatoria las encontraremos con la función métrica monetaria como ya la habíamos visto

$$VE = \mu(p^0; p^1, m^1) - \mu(p^0; p^0, m^0) = \mu(p^1; p^1, m^1) - \mu(p'; p^0, m^0) = VC \ .$$

4.4. El excedente del consumidor aproximado

En el caso de la función cuasilineal las variaciones equivalente y compensatoria son iguales, sin embargo, en lo general son aproximaciones razonables.

Supongamos la situación en que sólo el precio del bien 1 varía, de p^0 a p^1 y el nivel de renta es constante $m = m^0 = m^1$. Usando las ecuaciones (4.2) y (4.3), y sabiendo que $\mu(p; p, m) \equiv m$ las variaciones quedan dadas por

$$\begin{aligned} VE &= \mu(p^0; p^1, m) - \mu(p^0; p^0, m) = \mu(p^0; p^1, m) - \mu(p^1; p^1, m) \\ VC &= \mu(p^1; p^1, m) - \mu(p^1; p^0, m) = \mu(p^0; p^0, m) - \mu(p^1; p^0, m) \ , \end{aligned}$$

y están en función de p.

Definiendo $u^0 = v(p^0, m)$ y $u^1 = v(p^1, m)$, utilizamos la definición de la función de utilidad métrica monetaria vista en la sección **??** de la página **??** y expresamos

$$\begin{aligned} VE &= e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) \\ VC &= e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0) \ . \end{aligned}$$

Recordando que la función de demanda hicksiana es la derivada de la función de gasto, $h(p, u) \equiv \partial e/\partial p$, podemos reformular lo anterior de tal manera que

$$VE = e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) = \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^1)dp \tag{4.4}$$

$$VC = e(p^0, u^0) - e(p^1, u^0) = \int_{p^1}^{p^0} h(p, u^0)dp \ . \tag{4.5}$$

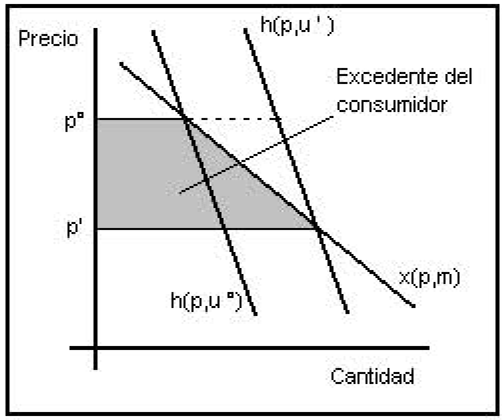

Figura 4.3: Frontera del excedente del consumidor.
Si el bien es normal, la derivada de la curva de la demanda hicksiana será mayor que la de marshalliana. Por tanto con $p^0 > p^1$ las áreas son negativas y $VE >$ excedente del consumidor $> VC$.

Gráficamente lo podemos ver como lo representa la figura 4.3.

Parte II

La teoría del productor

Capítulo 5

La tecnología

La producción se puede ver como la combinación de varios factores y la magnitud total de esa producción se determinará sumando la productividad que cada factor aporte en el proceso productivo. La función de producción, por tanto, expresará una determinada combinación de factores de acuerdo con las relaciones técnicas que se establecen entre ellos. La función de producción no es más que la forma matemática de describir, de forma general, la tecnología con que cuenta una empresa. En este capítulo analizaremos esas posibles formas de representación de la tecnología de una empresa.

5.1. Descripción de la tecnología

Definamos un plan de producción como una lista de de producciones netas[1] de distintos bienes. Al conjunto de todos los planes de producción factibles, se le conoce como el conjunto de posibilidades de producción de una empresa, y lo representaremos como Y, donde $Y \subset \mathbb{R}^n$ y describe todas las combinaciones de factores y productos tecnológicamente factibles.

Conjunto de cantidades necesarias de factores.

Supongamos que una empresa produce sólo un bien.

La combinación de producciones netas de la empresa se representan como $(y, -x)$ donde x es un vector que enumera todos los factores, o materias primas, que pueden generar y unidades del bien en producción. También podemos definir un conjunto restringido de posibilidades de producción

$$V(y) = x \text{ en } \mathbb{R}^n_+ : (y, -x) \in Y$$

que es el conjunto de cantidades necesarias de factores, es decir, el conjunto de todas las combinaciones de factores que generan al menos y unidades de

[1] La *producción neta* es la cantidad de elementos producidos menos la cantidad de unidades utilizadas para su producción.

producción.

La isocuanta.

Una isocuanta es un conjunto que define todas las combinaciones de factores, o materias primas, que producen exactamente y unidades del bien. Y se expresa como

$$\begin{aligned} Q(y) &= \{x \text{ en } \mathbb{R}^n_+ : x \in V(y) \\ &\quad \text{ y } x \notin V(y') \text{ cuando } y' > y\}. \end{aligned}$$

Las isocuantas son análogas a lo que, en la teoría del consumidor, vimos como curvas de indiferencia.

Conjunto de posibilidades de producción a corto plazo.

Podemos decir que cualquier tipo de producción depende de trabajo (l) y de capital k. Por esto nuestros planes de producción serán entonces $(y, -l, -k)$, con y nivel de producción, l cantidad de trabajo y k cantidad de capital. Supongamos que el trabajo puede alterarse pero el capital es constante e igual a $\bar{k}$ en el corto plazo. Definiremos entonces a conjunto de posibilidades de producción a corto plazo como

$$Y(\bar{k}) = (y, -l, -k) \text{ en } Y : k = \bar{k}\ .$$

La función de producción.

En el caso dado de que una empresa produce sólo un bien, podemos definir a la función de producción de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \{y \text{ en } \mathbb{R} : y \text{ es el nivel máximo de producción} \\ &\quad \text{que corresponde a } -x \text{ en } Y\}. \end{aligned}$$

La función de transformación.

Un plan de producción y en Y es tecnológicamente eficiente si no existe otro plan y' en Y tal que $y' \geq y$, es decir, un plan es eficiente siempre que no exista otro que produzca más con la misma cantidad de factores, o, en dado caso, la misma producción con menos factores. La función de transformación representa el conjunto de planes de producción tecnológicamente eficientes como

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ donde } T(y) = 0, \text{ con } y \text{ eficiente.}$$

Ejemplo 5.1 (Tecnología Cobb-Douglas)
Sea α un parámetro tal $o < \alpha < 1$. Definiremos la tecnología Cobb-Douglas como:

$$\begin{aligned} Y &= (y, -x_1, -x_2) \text{ en } \mathbb{R}^3 : y \leq x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ V(y) &= (x_1, x_2) \text{ en } \mathbb{R}^2_+ : y \leq x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ Q(y) &= (x_1, x_2) \text{ en } \mathbb{R}^2_+ : y = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ Y(z) &= (y, -x_1, -x_2) \text{ en } \mathbb{R}^3 : y \leq x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, x_2 = z \\ T(y, x_1, x_2) &= y - x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ f(x_1, x_2) &= x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Podemos observarla en la figura 5.1.

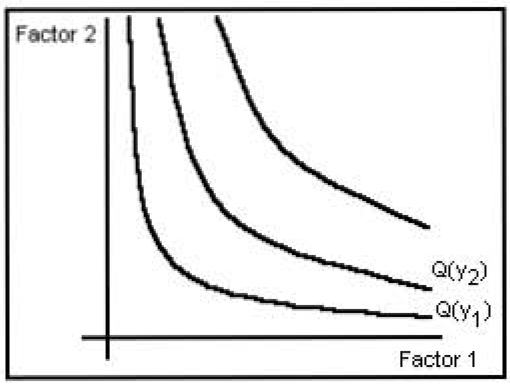

Figura 5.1: Tecnología Cobb-Douglas

Ejemplo 5.2 (Tecnología Leontief)
Sean $a > 0$ y $b > 0$ los parámetros. La tecnología de Leontief se define como:

$$\begin{aligned} Y &= \{(y, -x_1, -x_2) \text{ en } \mathbb{R}^3 : y \leq min(ax_1, bx_2)\} \\ V(y) &= \{(x_1, x_2) \text{ en } \mathbb{R}^2_+ : y \leq min(ax_1, bx_2)\} \\ Q(y) &= \{(x_1, x_2) \text{ en } \mathbb{R}^2_+ : y = min(ax_1, bx_2)\} \\ T(y, x_1, x_2) &= y - min(ax_1, bx_2) \\ f(x_1, x_2) &= min(ax_1, bx_2) \end{aligned}$$

Podemos observarla en la figura 5.2.

5.2. Las tecnologías

En la teoría del consumidor, en la sección **??** de la página **??**, vimos las preferencias y las curvas de indiferencia, discutimos el hecho de que debemos suponer que se cumplen ciertas propiedades que ayudan al estudio de esa parte de la teoría económica. Para poder estudiar las tecnologías también debemos cumplir algunas de esas propiedades, y las veremos a continuación.

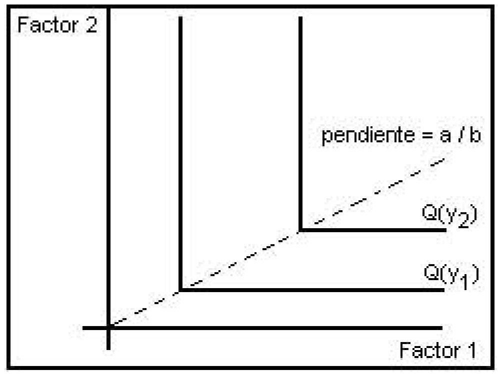

Figura 5.2: Tecnología de Leontief

Primero, si x es una manera factible de obtener y unidades de producción y x' es un vector de factores que tiene como mínimo la misma cantidad de cada uno de los factores, x' debe ser entonces una forma factible de obtener y.

Monoticidad. Si x pertenece a $V(y)$ y $x' \geq x$, entonces x' pertenece a $V(y)$.

Es también un supuesto para los conjuntos de producción, es decir, si y pertenece a Y e $y' \leq y$, entonces y' también debe pertenecer a Y.

Convexidad. Si x y x' pertenecen a $V(y)$, $tx + (1-t)x'$ pertenece a $V(y)$ cualquiera que sea t, tal que $0 < t < 1$. Es decir, $V(y)$ es un conjunto convexo.

Cuando hablamos que $V(y)$ es un conjunto convexo, decimos que si x y x' logran generar y unidades de producción, cualquier media ponderada $tx + (1-t)x'$, también podrá generar y unidades.

Se aplica del mismo modo al conjunto de producción, es decir, si y y y' pertenecen a Y, $ty+(1-t)y'$ pertenece a Y si $0 < t < 1$. En otras palabras, Y es un conjunto convexo.

Cabe aclarar que la convexidad de Y, conjunto de producción, lleva consigo otros aspectos que no aplican en $V(y)$, conjunto de cantidades necesarias de factores.

- **Si Y es convexo, $V(y)$ es convexo.** Si un conjunto de producción es convexo, también lo es el conjunto de cantidades necesarias de factores.

  Demostración. Si Y es conjunto convexo, entonces, dados cualesquiera x y x' tales que $(y, -x)$ y $(y, -x')$ pertenecen Y, $(ty+(1-t)y, -tx-(1-t)x')$ debe pertenecer a Y. Esto, equivale a que $(y, -(tx + (1-t)x'))$ pertenezca a Y. Por tanto, si x y x' pertenecen a $V(y)$, $tx + (1-t)x'$ pertenece a $V(y)$. Esto nos dice que $V(y)$ es convexo. □

- $V(y)$ **es convexo si y sólo si la función de producción es cuasicóncava.** Un conjunto de un conjunto de cantidades necesarias de factores convexo equivale a una función de producción cuasicóncava.

Ejemplo 5.3 (La relación técnica de sustitución, RTS.)
Supongamos que tenemos una tecnología representada por una función de producción lisa. Estamos produciendo $y^* = f(x_1^*, x_2^*)$. Ahora, queremos aumentar la cantidad del factor 1 y disminuir la del 2 con el fin de mantener la misma producción.

En este ejemplo, de dos factores, la relación técnica de sustitución es la pendiente de la isocuanta, para el caso $n-$dimensional será la pendiente de una superficie isocuanta con una dirección determinada.

Sea $x_2(x_1)$ la cantidad que se necesita del factor 2 para producir y y depende de x_1 pues este varía. Así tendremos entonces que

$$f(x_1, x_2(x_1)) \equiv y \ .$$

Buscamos la expresión $\partial x_2(x_1^*)/\partial x_1$ por medio de la derivada de la función anterior, entonces tenemos:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = 0$$

Y despejamos

$$\frac{\partial x_2(x_1^*)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}}.$$

que es la relación técnica de sustitución.

En la figura 5.3 vemos gráficamente la relación técnica de sustitución, la cual nos indica el ajuste que debe tener uno de los factores para mantener un nivel constante de producción conforme varía el otro.

A las variaciones de la función de producción con respecto a variaciones de los factores se le conoce como la productividad marginal.

Ejemplo 5.4 (RTS de una tecnología Cobb-Douglas.)
La función de producción es $x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$. Tomando las condiciones de primer orden, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = \alpha\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{1-\alpha}\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= (1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = (1-\alpha)\left[\frac{x_1}{x_2}\right]^{\alpha}.\end{aligned}$$

Se dividen las derivadas y tenemos la RTS.

$$\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}.$$

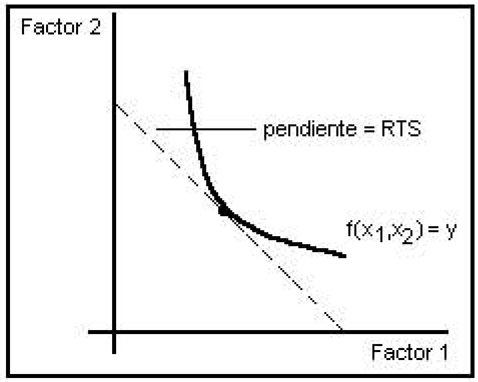

Figura 5.3: Relación técnica de sustitución.

5.3. Los rendimientos de escala

Manejamos los rendimientos de escala cuando hablamos de querer aumentar o disminuir todos los factores, o materias primas, de producción en una proporción $t > 0$, suponiendo que utilizamos un vector x de factores que nos hacen obtener una cantidad y de producción.

Rendimientos constantes de escala. Se dice que una tecnología tiene rendimientos constantes de escala si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

1. y pertenece a Y implica que ty pertenece a Y con cualquier $t \geq 0$;
2. x pertenece a $V(y)$ implica que tx pertenece a $V(ty)$ con cualquier $t \geq 0$;
3. La función de producción es homogénea de grado 1, es decir, $f(tx) = tf(x)$ cualquiera que sea $t \geq 0$.

Dichas propiedades ya las hablamos anteriormente.[2]

Rendimientos crecientes de escala. Se dice que una tecnología tiene rendimientos crecientes de escala si $f(tx) > tf(x)$ cualquiera que sea $t > 1$.

Rendimientos decrecientes de escala. Se dice que una tecnología tiene rendimientos decrecientes de escala si $f(tx) < tf(x)$ cualquiera que sea $t > 1$.

Una medida local de los rendimientos de escala es la elasticidad-escala. Mide la variación porcentual que experimenta el nivel de producción cuando varían los factores un uno por ciento. Siendo $y = f(x)$ la función de producción y t un número positivo. Será pues $y(t) = f(tx)$ la función del nivel de escala en que

[2] Los rendimientos constantes de escala son doctrinarios pues en casi ninguna aplicación se da.

varían las operaciones. Si $t = 1$ esta es la escala actual de las operaciones; si $t > 1$ todos los factores, o materia prima, se multiplica por el valor de t, por último, si $t < 1$ se estarían dividiendo los insumos por t.

La elasticidad-escala se mide con:

$$e(x) = \frac{\frac{dy(t)}{y(t)}}{\frac{dt}{t}}.$$

Organizando y tomando el valor de $t = 1$ diremos

$$\begin{aligned} e(x) &= \left.\frac{dy(t)}{dt}\frac{t}{y(t)}\right|_{t=1} \\ &= \left.\frac{f(tx)}{dt}\frac{t}{f(tx)}\right|_{t=1}. \end{aligned}$$

Así pues, la tecnología tendrá localmente, rendimientos constantes, crecientes o decrecientes, dependiendo si el valor de $e(x)$ sea igual, mayor o menor que 1.

Ejemplo 5.5 (Rendimientos de escala en la Cobb-Douglas.)
La tecnología nos dice $y = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.

Dado esto, $f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{\beta} = t^{\alpha+\beta}x_1^{\alpha}x_2^{\beta} = t^{\alpha+\beta}f(x_1, x_2)$. Por tanto, $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$ siempre que $\alpha + \beta = 1$. De aquí también podemos deducir que si $\alpha+\beta > 1$ habrán rendimientos crecientes de escala, y si $\alpha+\beta < 1$, los rendimientos de escala serán decrecientes.

La elasticidad-escala de la Cobb-Douglas será pues:

$$\frac{d(tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{\beta}}{dt} = \frac{dt^{\alpha+\beta}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}}{dt} = (\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$$

evaluada en $t = 1$ y dividida entre $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.

5.4. Tecnologías homotéticas

En la sección **??** estudiada en la página **??** vimos las condiciones de las funciones homogéneas y homotéticas. Sabemos ya que una función homotética es una transformación monótona de una función homogénea de grado 1.

Las transformaciones monótonas se pueden tomar como formas de medición de la producción. Por esto, una tecnología homotética será aquella tecnología para la cual existe una forma de medición de producción que aparente tener rendimientos constantes de escala.

Las isocuantas de las funciones homogéneas y homotéticas varían según cambie el nivel de producción. Es decir, si $f(x)$ es homogénea de grado 1, y sabemos que x y x' pueden producir hasta y unidades, tx y tx' pueden producir ty unidades. En el caso que $f(x)$ sea homotética, sabremos que x y x' pueden producir hasta y unidades y, tx y tx' podrán producir el mismo nivel de unidades, más no necesariamente un nivel multiplicado t veces por la producción inicial. Las isocuantas de una tecnología homotética y una homogénea serán iguales, más los niveles de producción variarán.

Capítulo 6

La maximización del beneficio

Cada empresa es una institución que contrata recursos productivos y los organiza para producir y vender bienes y servicios. La finalidad de este capítulo es estudiar el comportamiento de la empresa. Para hacerlo, es necesario conocer los objetivos de una empresa y las restricciones a las que se enfrenta.

La meta de una empresa es maximizar sus utilidades o beneficios económicos; una empresa que no busque maximizar sus beneficios es eliminada del mercado o adquirida por otras que sí busquen hacerlo.

Los beneficios económicos de una empresa son iguales a su ingreso total menos su costo total de oportunidad. El costo total de oportunidad de la empresa es la suma de sus costos explícitos[1] e implícitos[2].

6.1. La conducta del productor

El problema de una empresa, donde se consideran dados los precios (p), tanto del mercado de su producto como de sus factores, se puede formular de la siguiente manera:

$$\pi(p) = max\ py$$
$$\text{sujeta a } y \in Y.$$

Las cantidades dadas de producción son positivas y negativas en caso que sean de los factores. La función objetivo será pues el beneficio económico, es decir, los ingresos menos los costos.

[1] Los costos explícitos se pagan con dinero. La cantidad pagada por un recurso pudo haberse gastado en otra cosa, por ello es costo de oportunidad.

[2] Los costos implícitos son en los que se incurre cuando la empresa renuncia a una alternativa pero no se hace un pago. Pueden ser cuando se utiliza el capital propio y cuando se usa el tiempo del propietario o los recursos financieros de este.

A la función $\pi(p)$ que maximiza los beneficios de la empresa, y que depende de los precios, se le denomina función de beneficios.

Podemos reformular el problema de la empresa para el caso de maximización a corto plazo por medio de la función de beneficios a corto plazo, llamada también función restringida de beneficios, como:

$$\pi(p, z) = max\ py \quad \text{sujeta a } y \in Y(z).$$

En el caso de que la empresa produzca un sólo tipo de bien[3], encontramos a la función de beneficios expresada de la siguiente forma:

$$\pi(p, w) = max\ py - wx,$$

donde p es el precio del producto del que se producen y unidades, w el vector de precios de los factores, y $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es el vector, no negativo, que muestra las cantidades utilizadas de los factores, o materias primas.

Con lo anterior, se puede definir entonces a la función de costos

$$c(w, y) = min\ wx \quad \text{sujeta a } x \in V(y).$$

que analizaremos más adelante.

La conducta maximizadora del beneficio puede determinarse por las condiciones de optimización que, en el caso de un único producto, veremos de la forma:

$$\overbrace{p \underbrace{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}}_{\text{producto marginal}}}^{\text{ingreso marginal}} = w_i \qquad i = 1, \ldots, n\ ,$$

la cual significa que el ingreso marginal (o valor del producto marginal) de cada uno de los factores debe ser igual a su precio.

En el caso que $p\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} > w_i$ se dice que el productor está teniendo una plusvalía.

En la figura 6.1 podemos observar gráficamente la conducta maximizadora del beneficio.

Ejemplo 6.1 (Maximización de beneficio con la Cobb-Douglas.) *Consideremos la función de producción $f(x1, x2) = x_1^\alpha x_2^\beta$. En tal caso, dados los precios, el problema de maximizar beneficio consiste en*

$$max\ p(x_1^\alpha x_2^\beta) - w_1x_1 - w_2x_2.$$

[3]Decimos que la empresa se dedica a la producción de un sólo tipo de bien para facilitar el estudio.

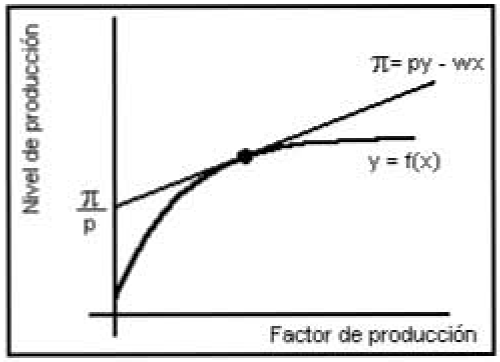

Figura 6.1: Maximización del beneficio.
El punto maximizador es la cantidad del factor que da el mayor beneficio, es decir, el punto único donde se intersectan la pendiente de la línea isobeneficio y la función de producción.

Luego, con las condiciones de optimización, tenemos

$$
\begin{aligned}
p\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= p\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta} = w_1 \\
p\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= p\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1} = w_2
\end{aligned}
$$

Dividiendo ambas ecuaciones, se tiene que $\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{w_1}{w_2}$, con lo cual

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}x_1.$$

Sustituyendo x_2 en la primera de las ecuaciones anteriores se tiene que

$$p\alpha x_1^{\alpha-1}\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}x_1\right)^{\beta} = w_1,$$

con lo cual llegaremos finalmente a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \left[\frac{w_1}{p\alpha}\left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \\
x_2 &= \left[\frac{w_2}{p\beta}\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}
\end{aligned}
$$

Ya sabiendo las x_i conocidas como demandas de los factores podemos deducir la función de la oferta que viene dada por

$$
\begin{aligned}
y(p,w) &= y(p,w_1,w_2) = f(x(p,w)) = f(x_1(p,w_1,w_2), x_2(p,w_1,w_2)) \\
&= x_1^{\alpha}x_2^{\beta} = \left[\frac{w_1}{p\alpha}\left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}\left[\frac{w_2}{p\beta}\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}
\end{aligned}
$$

Con las demandas de los factores y la función de oferta podemos, directamente, obtener la función de beneficio sustituyendo en

$$\pi(p, w) = py(p, w) - wx(p, w).$$

6.2. La función de beneficios

Definimos, anteriormente, a $\pi(p)$ como la función de beneficios. Dicha función nos ayuda a obtener el beneficio máximo que puede tener una empresa según los precios dados de sus productos y sus insumos.

Propiedades de la función de beneficios.

1. $\pi(p)$ es no decreciente en los precios de los productos y no creciente en los precios de los factores. Si $p'_i \geq p_i$ en el caso de los productos y $p'_j \leq p_j$ en el caso de los factores, entonces $\pi(p') \geq \pi(p)$.

   Demostración. Sean y y y' vectores de producción que maximizan los beneficios a los precios p y p', respectivamente, entonces $\pi(p) = py$ y $\pi(p') = p'y'$. Ahora, por definición sabemos que $p'y' \geq p'y$, pues $p'_i \geq p_i$ y sabemos que $p'y \geq py$. Entonces decimos $\pi(p') = p'y' \geq py = \pi(p)$. □

2. $\pi(p)$ es homogénea de grado 1 en p. Es decir, $\pi(tp) = t\pi(p)$ cualquiera que sea $t \geq 0$.

   Demostración. Si y es vector de producción que maximiza el beneficio a los precios p, de forma que $py \geq py'$ cualquiera que sea $y' \in Y$. Entonces, si $t \geq 0$, $tpy \geq tpy'$ cualquiera que sea $y' \in Y$. Así pues, y también maximiza los beneficios a los precios tp. Por lo tanto, $\pi(tp) = tpy = t\pi(p)$. □

3. $\pi(p)$ es convexa en p. Es decir, sea $p'' = tp + (1-t)p'$ cualquiera que sea t tal que $0 \leq t \leq 1$, $\pi(p'') \leq t\pi(p) + (1-t)\pi(p')$.

   *Demostración.*Si y maximiza los beneficios a los precios p, y' a los precios p' e y'' a los precios p'', tenemos que:

   $$\pi(p'') = p''y'' = (tp + (1-t)p')y'' = tpy'' + (1-t)p'y''. \tag{6.1}$$

   Por definición de maximización de beneficio,

   $$\begin{aligned} tpy'' \leq tpy &= t\pi(p) \\ (1-t)p'y'' \leq (1-t)p'y' &= (1-t)\pi(p'), \end{aligned}$$

   así que sumando las desigualdades y usando la ecuación (6.1) llegamos a $\pi(p'') \leq t\pi(p) + (1-t)\pi(p')$. □

4. $\pi(p)$ es continua en p, al menos cuando $\pi(p)$ está bien definida y $p_i > 0$ con $i = 1, \ldots, n$.

6.3. Funciones de la oferta y de la demanda

Hasta ahora hemos supuesto que se nos da la función de producción y con ella buscamos maximizar el beneficio. Pero, a partir de π podemos encontrar la función de oferta de la producción y la función de demanda de los factores, es decir $y(p)$ y $x(p)$. Esto lo podemos comprobar por medio del siguiente Lema.

Lema de Hotelling. (La propiedad de la derivada.)

(1) Sea $y_i(p, w)$ la función de oferta neta del bien i de la empresa. Entonces,

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p_i} = y_i(p, w) \qquad \textit{siendo } i = 1, \ldots, n,$$

.

(2) Sea $x_i(p, w)$ la función de demanda del factor i de la empresa. Entonces,

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial w_i} = -x_i(p, w) \qquad \textit{siendo } i = 1, \ldots, n,$$

Demostración. ***(1)*** Derivemos directamente la función de beneficios con respecto a p:

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p_i} = \frac{\partial [p_i f(x)]}{\partial p_i} - w_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

Pero, $\frac{\partial [p_i y_i(p,w)]}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial [p_i f(x)]}{\partial p_i} + y_i(p, w)$. Aplicando regla de la cadena, y simplificando la notación, se tiene que

$$p_i \frac{\partial f(x)}{\partial p_i} = p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

Por otro lado, de la condición de optimización, sabemos que $p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = w_i \quad i = 1, \ldots, n$. Luego, sustituyendo en la expresión original, se concluye que:

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p_i} = \left[w_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} + y_i(p, w) \right] - w_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

Simplificando términos, se tiene lo indicado, es decir,

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p_i} = y_i(p, w).$$

□

Demostración. ***(2)*** Derivando directamente con respecto a w_i, y simplificando la notación, se tiene que:

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{w_i} = p \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \frac{\partial x_i}{\partial w_i} - w_i \frac{\partial x_i}{\partial w_i} - x_i.$$

De las condiciones de optimalidad, se tiene que $p\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = w_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Luego, reemplazando esto en la expresión anterior se obtiene el resultado siguiente:

$$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial w_i} = -x_i(p,w)$$

$\square$

Capítulo 7

La minimización de los costos

En este capítulo analizaremos la técnica para la minimización de los costos de producción. Así pues, buscaremos la mejor forma de afrontar el problema de la empresa descomponiéndolo en dos partes: la forma más barata de producir un determinado nivel de producción que estudiaremos aquí y cómo elegir ese nivel de producción, que veremos en el siguiente capítulo.

7.1. El problema de minimización de costos

Al problema de obtener un nivel de producción con el costo mínimo lo podemos encontrar como:

$$\begin{gathered} min_x \; wx \\ \text{sujeta a } f(x) = y. \end{gathered}$$

Y se resolverá ocupando nuevamente a los lagrangianos que hemos venido estudiando.

Así pues encontraremos con las condiciones de primer orden, respecto de cada factor o insumo

$$\begin{aligned} w_i - \lambda \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} &= 0 \\ f(x^*) &= y \end{aligned}$$

Recordando que $i = 1, \ldots, n$ por cada uno de los x_i factores, w_i el precio de cada factor o materia prima, y nivel de producción y λ multiplicador de Lagrange.

Estas condiciones las interpretaremos con la relación técnica de sustitución que nos dejará constante el nivel de producción y la encontramos como el precio del factor i entre el precio del factor j

$$\underbrace{\frac{w_i}{w_j}}_{\text{Rel. económica de sust.}} = \overbrace{\frac{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}}}^{\text{Rel. técnica de sust.}}$$

Cuando representamos gráficamente las condiciones de primer orden podemos verlas como en la figura 7.1, donde las curvas son las isocuantas y las rectas el costo constante. Cuando la producción y es constante, el problema del productor es el hallar un punto en que la isocuanta optimice el costo. Para verlo en $\mathbb{R}^2$, una curva de costos constante estará dada por $C = w_1x_1 + w_2x_2$ y puede reexpresarse como $x_2 = C/w_2 - (w_1/w_2)x_1$. Con los precios de los factores o materias primas estipulados, la empresa, debe encontrar un punto en que una isocuanta sea tangente con un punto de la ordenada donde el costo sea el mínimo. Además, algo que debemos tomar en cuenta es que al derivar una

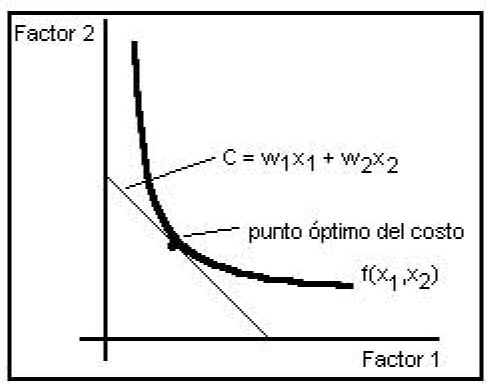

Figura 7.1: Minimización de los costos.
El punto óptimo estará donde la isocuanta sea tangente a la recta de costos constante.

segunda vez, la isocuanta cumplirá la concavidad hacia arriba, esto es, por arriba de la recta de isocostos. Es decir que las variaciones de uso de los factores que mantengan constante el costo provocarán que disminuya la producción o, a lo más, la mantengan constante.

El problema de minimización del costo nos dice que existe un punto óptimo x^*, que minimiza el costo con cada alternativa de precios w y que nos ofrece la realización de y unidades de producción. Así que, llamaremos función condicionada de los factores a la elección óptima que dependa de esos precios y nivel de producción, y se expresa como $x(w, y)$. Habrá también otra función que depende de los precios de los factores y el nivel de producción, conocida como función de costos, que nos dará el costo mínimo, y se expresa como $c(w, y)$.

Existe una relación entre la función condicionada de los factores y la función de costos y se define como $wx(w,y) = c(w,y)$.

Como en otros casos de la maximización de beneficios, durante la búsqueda de la función condicionada de los factores encontraremos ciertas dificultades que podemos resumir en los siguientes puntos:

1. La tecnología planteada no se puede ver como una función de producción diferenciable, por tanto no pueden usarse las técnicas matemáticas. (Un caso podría ser la tecnología Leontief.)

2. Las condiciones de orden sólo son válidas para soluciones interiores, así que deben modificarse las condiciones en casos que el punto mínimo se encuentre en una esquina, es decir, se modificarán a:

$$\lambda \frac{\partial f_(x^*)}{\partial x_i} - w_i \leq 0 \text{ si } x_i^* = 0$$

$$\lambda \frac{\partial f_(x^*)}{\partial x_i} - w_i = 0 \text{ si } x_i^* > 0.$$

3. Las condiciones de primer orden pueden no determinar una única posición del productor, pues las técnicas matemáticas son sólo condiciones necesarias. De otro modo, para que globalmente exista un sólo óptimo se debe cumplir la convexidad de las necesidades del productor, es decir, que $V(y)$ sea convexo.

Ejemplo 7.1 (Función de costos con la Cobb-Douglas.)
Del mismo modo que en el ejemplo **??** *de la página* **??**, *estudiado en la teoría del consumidor, buscamos la minimización del gasto, encontraremos la solución para*

$$\begin{aligned} c(w,y) = \quad & min\ w_1x_1 + w_2x_2 \\ & sujeta\ a\ Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} = y\ . \end{aligned}$$

Llegando a que la demanda condicionada del factor 1 es

$$x_1(w_1,w_2,y) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

y la del factor 2:

$$x_2(w_1,w_2,y) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Así pues, la función de costos quedará como

$$\begin{aligned} c(w_1,w_2,y) &= w_1x_1 + w_2x_2 \\ &= A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}}\right] w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Normalmente se utiliza $A = 1$ y $\alpha + \beta = 1$ con lo cual la función de costos se reduce a

$$c(w, y) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha} y.$$

Ejemplo 7.2 (Función de costos con la CES.)
También vimos anteriormente la minimización del gasto de la función CES, en el ejemplo **??** *de la página* **??**, *con la cual de igual forma definiríamos el problema del productor de minimizar el costo como*

$$c(w, y) = \quad min\ w_1x_1 + w_2x_2 \quad \text{sujeta a } x_1^{\rho} + x_2^{\rho} = y^{\rho}.$$

Obteniendo las funciones de demanda condicionadas de los factores

$$\begin{aligned} x_1(w, y) &= w_1^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} y \\ x_2(w, y) &= w_2^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} y\ . \end{aligned}$$

Y como función de costos

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1x_1(w_1, w_2, y) + w_2x_2(w_1, w_2, y) \\ &= \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right] \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} y \\ &= \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} y\ . \end{aligned}$$

Si decimos $\gamma = \frac{\rho-1}{\rho}$ entonces

$$c(w_1, w_2, y) = [w_1^{\gamma} + w_2^{\gamma}]^{\frac{1}{\gamma}}\ y\ .$$

Ejemplo 7.3 (Función de costos con la Leontief.)
Definiendo la función de producción Leontief como $f(x_1, x_2) = min\{ax_1, bx_2\}$. *La función de producción se encontrará como* $y = ax_1 = bx_2$, *por tanto, para obtener* y *unidades de producción la empresa debe utilizar* y/a *unidades del bien 1 y* y/b *del bien 2, sean cuales sean los precios de los factores.*

Dado esto, sabemos que la función de costos será

$$c(w, y) = \frac{w_1 y}{a} + \frac{w_2 y}{b} = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b} \right) y.$$

Capítulo 8

La función de costos

Continuando con el problema del capítulo anterior, el estudio de los costos, estudiaremos ahora un importante instrumento: la función de costos, o curva de costos, y sus propiedades. Con los precios de los factores dados, la función de costos mide el costo mínimo de obtener cierto nivel de producción.

8.1. Costos medios y costos marginales

Anteriormente se expresó a la función de costos como un valor de funciones de demanda condicionadas de factores

$$c(w, y) = wx(w, y),$$

esto es, el costo mínimo para producir y unidades de producción se dará con la forma más barata de producir y.

Cuando hablamos del corto plazo podemos expresarlo como

$$c(w, y, x_f) = w_v x_v(w, y, x_f) + w_f x_f \ ,$$

donde x_f es el vector de factores de producción fijos, x_v el vector de factores de producción variables y $w = (w_f, w_v)$ vectores de precios de los factores fijos y variables. Las funciones de demanda condicionadas de factores a corto plazo normalmente dependen de los factores fijos, lo que denotamos como $x_v(w, y, x_f)$.

Así mismo, a $w_v x_v(w, y, x_f)$ se le nombra como el costo variable a corto plazo[1] (CVC) y a $w_f x_f$ como el costo fijo (CF)[2].

[1] Los costos variables son aquellos que dependen del nivel de producción.
[2] Los costos fijos son aquellos que son independientes del nivel de producción.

Con esto, definimos los siguientes conceptos:

$$\begin{aligned}
\text{costo marginal a corto plazo} &= \text{CMC} = \frac{\partial c(w,y,x_f)}{\partial y}\\
\text{costo total a corto plazo} &= \text{CTC} = w_v x_v(w,y,x_f) + w_f x_f\\
\text{costo medio a corto plazo} &= \text{CMeC} = \frac{c(w,y,w_f)}{y}\\
\text{costo fijo medio a corto plazo} &= \text{CFMeC} = \frac{w_f x_f}{y}\\
\text{costo variable medio a corto plazo} &= \text{CVMeC} = \frac{w_v x_v(w,y,x_f)}{y}
\end{aligned}$$

En caso que todos los factores sean variables, la empresa escogerá el factor, x_f^*, que optimice.

La función de costos a largo plazo se puede expresar por medio de la de corto plazo como sigue:

$$c(w,y) = w_v x_v(w,y) + w_f x_f(w,y) = c(w,y,x_f(w,y))$$

donde $x_f(w,y)$ es la elección óptima de los factores fijos y $x_v(w,y) = x_v(w,y,x_f(w,y))$ la elección óptima de los factores variables a largo plazo.

De lo anterior, con la definición de costos a largo plazo podemos definir los siguientes conceptos:

$$\begin{aligned}
\text{costo medio a largo plazo} &= \text{CMeL} = \frac{c(w,y)}{y}\\
\text{costo marginal a largo plazo} &= \text{CML} = \frac{\partial c(w,y)}{\partial y}
\end{aligned}$$

El costo medio a largo plazo será igual al costo variable medio a largo plazo puesto que todos los costos son variables a largo plazo, además, por ello, los costos fijos a largo plazo son cero.

Ejemplo 8.1 (Funciones de costo a corto plazo con la Cobb-Douglas.) *En este ejemplo digamos que la empresa sólo quiere usar una cantidad k del segundo factor. El problema de minimización de costos se traduce en:*

$$\begin{aligned}
c(w,y) = &\quad \mathit{min}\ w_1 x_1 + w_2 k\\
&\quad \mathit{sujeta\ a}\ y = x_1^{\alpha} k^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

De la restricción se despeja x para dejarla en función de y y k

$$x_1 = (yk^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

De ahí, diremos entonces que

$$c(w_1, w_2 y, k) = w_1 (yk^{\alpha-1})^{\frac{1}{\alpha}} w_2 k.$$

De esta forma podemos encontrar:

$$\begin{aligned}
\text{CMeC} &= w_1\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{w_2 k}{y} \\
\text{CVMeC} &= w_1\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\
\text{CFMeC} &= \frac{w_2 k}{y} \\
\text{CMC} &= \frac{w_1}{\alpha}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8.2 (Función de costos y rendimientos de escala.)
Si se da el caso que la función de producción tenga rendimientos constantes de escala, significa que la función de costos debe ser lineal al nivel de producción. Es decir, $c(w, y) = yc(w, 1)$.

Demostración. Dados los precios de los factores w, sea x^* la opción menos costosa de obtener una unidad de producción, de forma que $c(w, 1) = wx^*$. Podemos aseverar que $c(w, y) = wx^*y = yc(w, 1)$. Con x^*y decimos que se producen y unidades. □

Dada una tecnología que tenga rendimientos constantes de escala, las funciones de costos medio, variable medio y marginal serán todos iguales.

8.2. Las curvas de costo

Para el estudio del comportamiento de la empresa, la función de costo es una herramienta de gran importancia. Muestra de forma concisa la información económicamente viable que la empresa puede aprovechar en tecnología. A partir de aquí $c(y)$ denominará la función de costos.

Supondremos que los precios de los factores son fijos, por tanto, los costos obedecen únicamente al nivel de producción de la empresa. Por hipótesis la curva de costo total siempre es monótona respecto al nivel de producción, es decir, cuanto más produzca la empresa, más le costará. Difiere en esto, la curva de costo medio, la cual puede aumentar o disminuir con el nivel de producción dependiendo del ascenso o descenso de los costos totales.

En el corto plazo se halla una relación que dice:

$$\text{CMeC} = \frac{c(w, y, x_f)}{y} = \frac{w_f x_f}{y} + \frac{w_v x_v(w, y, x_f)}{y} = \text{CFMeC} + \text{CVMeC}\,.$$

En su gran mayoría, los factores fijos a corto plazo son activos fijos como edificios, máquinas u otros equipos de capital; en tanto que los factores variables son el trabajo y las materias primas.

Así pues, graficando el nivel de producción contra los costos, dada la suposición de factores anterior, podemos ver la variación de los costos medios como se muestra en la figura 8.1.

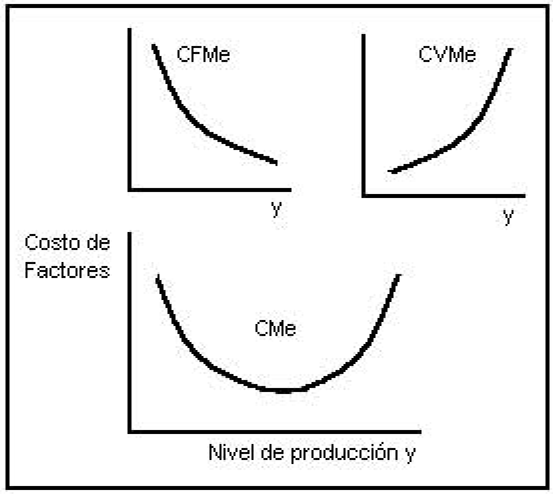

Figura 8.1: Curvas de costo medio.

Si la empresa está a un nivel cercano a su capacidad máxima de producción: 1) Si se eleva el uso de factores variables para que ascienda la producción, la función de costos variables medios aumentará. 2) Disminuirá la función de costos fijos medios, al aumentar la producción. 3) La suma de las funciones de costos fijos medios y costos variables medios, dará la función de costos medios.

En ocasiones, al nivel de producción óptimo, es decir, el que minimiza el costo medio de producción, se nombra escala mínima eficiente.

Ya habíamos dicho que en el largo plazo todos los costos son variables, y en ese caso, los costos medios suelen ser decrecientes o, a lo más, constantes. Si algunos factores permanecieran fijos a largo plazo, la curva de costo medio podría tomar forma de U, de forma parecida a lo planteado a corto plazo.

La relación existente entre la función de costos medios y la función de costos marginal se expresa como

$$c'(y^*) = \frac{c(y)}{y^*}.$$

Demostración. Sea y^* el punto óptimo de la función de costo medio, por lo tanto, a la izquierda de y^* los costos medios son decrecientes, es decir que, cuando $y \leq y'$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{c(y)}{y}\right) \leq 0.$$

Expresando la derivada

$$\frac{yc'(y) - c(y)}{y^2} \leq 0,$$

es decir,

$$c'(y) \leq \frac{c(y)}{y}.$$

$c'(y)$ es el costo marginal. La desigualdad dice que el costo marginal es menor que el costo medio a la izquierda del punto óptimo del costo medio. Por ello, si hacemos lo mismo pero tomando en cuenta la derecha del óptimo, es decir, $y \geq y'$

$$c'(y) \geq \frac{c(y)}{y}.$$

Así que se debe cumplir

$$c'(y) = \frac{c(y)}{y},$$

es decir, los costos marginales son iguales a los costos medios en el punto óptimo que minimiza los costos medios.[3] $\square$

Dos anotaciones importantes que haremos son:

1. El costo medio de la primera unidad producida por la empresa es igual al costo variable medio de la primera unidad, la magnitud de ambos es $c_v(1) - c_v(0)$.

2. El costo variable medio es igual al costo marginal cuando el nivel de producción es igual a cero.

Ejemplo 8.3 (Curvas de costos con la Cobb-Douglas.)
En el ejemplo **??** *de la página* **??** *vimos que la función de costos era*

$$c(w_1, w_2, y) = A^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \right] w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Podemos generalizarla, lo que nos dará

$$c(y) = K y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \text{ con } \alpha + \beta < 1,$$

donde K está en función de los precios de los factores y los parámetros α y β.

De ahí que

$$\begin{aligned} \mathrm{CMe}(y) &= \tfrac{c(y)}{y} &= K y^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \\ \mathrm{CM}(y) &= c'(y) &= \frac{K}{\alpha+\beta} y^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Dado el caso que $\alpha + \beta < 1$ las curvas de costos mostrarán costos medios crecientes, y dado $\alpha + \beta = 1$ las curvas de costos medios serán constantes.

Si las funciones de costo buscadas fueran a corto plazo

$$c(y) = K y^{\frac{1}{\alpha}} + F$$

por ende

$$\mathrm{CMe}(y) = \frac{c(y)}{y} = K y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{F}{y}.$$

[3]Gráficamente, la curva de costos marginales se intersecta, es decir, corta, la curva de costos medios en los puntos críticos u óptimos.

8.3. Las funciones de costos

Hemos llegado al punto en que hay que analizar el comportamiento de la empresa y de las funciones de costos con la complicación de los precios variables.

Propiedades de la función de costos.

1. $c(w,y)$ es no decreciente en w. Entonces $c(w',y) \geq c(w,y)$.

   Demostración. Si $w' \geq w$, entonces $c(w',y) \geq c(w,y)$. Sean x y x' las combinaciones minimizadoras del costo a los precios w y w'. Entonces $wx \leq wx'$ lo que deduce la minimización y $wx' \leq w'x'$, ya que $w \leq w'$. Por transitividad tendríamos que $wx \leq w'x'$ □

2. $c(w,y)$ es homogénea de grado 1 en w. Es decir, $c(tw,y) = tc(w,y)$.

   Demostración. Si x es la combinación minimizadora del costo a los precios w, x también minimiza el costo a los precios tw. Supongamos que no fuera así y que x' es una combinación minimizadora del costo a los precios tw, de tal manera que $twx' < twx$. Pero esta desigualdad implica que $wx' < wx$, lo que contradice la definición de x. Por lo tanto, la composición de la combinación minimizadora del costo no varía cuando se multiplican los precios por un número positivo t y por lo tanto, el costo debe multiplicarse exactamente por t: $c(tw,y) = twx = tc(w,y)$. □

3. $c(w,y)$ es cóncava en w. $c(tw + (1-t)w', y) \geq tc(w,y) + (1-t)\,c(w',y)$ si $0 \leq t \leq 1$.

   Demostración. Sean (w,x) y (w',x') dos combinaciones de precios y factores minimizadores del costo y $w'' = tw + (1-t)w'$ cualquiera que sea t con $0 \leq t \leq 1$. Ahora bien,

   $$c(w'',y) = w''x'' = twx'' + (1-t)w'x''$$

   Puesto que x'' no es necesariamente la combinación menos costosa de factores que provean la producción y a los precios w' o w, tenemos que $wx'' \geq c(w,y)$ y $w'x'' \geq c(w',y)$. Esto nos lleva a

   $$c(w'',y) \geq tc(w,y) + (1-t)\,c(w',y)$$

   □

4. $c(w,y)$ es continua en w, cuando $w \geq 0$.

La figura 8.2 podemos ver gráficamente la concavidad de la función de costos. C simboliza los costos cuando un precio varía. Por ejemplo, el precio del factor 1 cambia, $C = w_1x_1^* + \sum_{i=2}^{n} w_ix_i^*$. A esta función de costos con una variación en los precios se llamará "pasiva".

Para finalizar con las propiedades de la función de costos debemos estudiar un lema de gran importancia que sirve para expresar la demanda condicionada de los factores y es otra propiedad que cumple la función de costos.

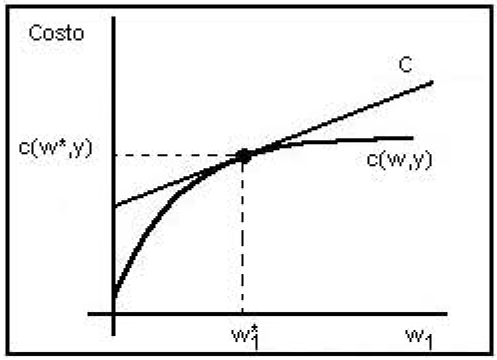

Figura 8.2: La función de costos.

Lema de Shephard. (La propiedad de la derivada.) *Bajo supuestos generales, la demanda condicionada de la empresa del factor i, $x_i(w,y)$, corresponde al cambio marginal de los costos ante variaciones en el precio del factor respectivo, es decir, dado un nivel de precios de factores y un nivel de producción, (w^*,y) con $w_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$, entonces:*

$$x_i(w^*,y) = \frac{\partial c(w^*,y)}{\partial w_i} \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Siempre y cuando la función de costo sea diferenciable en (w,y).

Demostración. ***(1)*** Dado $w^* \in \mathbb{R}^n$, consideremos la función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(w) = c(w,y) - \sum_{i=1}^{m} w_i x_i(w^*,y),$$

donde $g(w) \leq 0$, $\forall w \in \mathbb{R}^n$ y que $g(w^*) = 0$, ya que $g(\cdot)$ tiene un máximo en $w = w^*$.

Por lo tanto, utilizando las condiciones de primer orden se deduce que

$$\frac{\partial g(w^*,y)}{\partial w_i} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial g(w^*,y)}{\partial w_i} = \frac{\partial c(w^*,y)}{\partial w_i} - x_i(w^*,y) = 0.$$

Con lo cual se obtiene el resultado.

$$x_i(w^*,y) = \frac{\partial c(w^*,y)}{\partial w_i}.$$

□

Demostración. (2) Puesto que la función de costos es homogénea de grado 1 en los precios de los factores, es decir, $c(tw, y) = tc(w, y)$ y sabiendo que en la funciones homogéneas de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumple $f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.
Se tiene que

$$c(w, y) = \sum_{i=1}^{m} w_i \frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i}.$$

Entonces se dirá que

$$c(w, y) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i(w, y),$$

lo que nos ayuda a concluir directamente que

$$\frac{\partial c(w, y)}{\partial w_i} = x_i(w, y).$$

□

Parte III

El mercado

Capítulo 9

El mercado y sus imperfecciones

En este punto ya contamos con los instrumentos necesarios para intentar responder a la pregunta de cuánto producir. Ahora, la respuesta dependerá de elementos ajenos a la empresa, fundamentalmente del tipo de mercado en que actúe y de la demanda que haya en esos mercados. Esto es en lo cual se centra este capítulo.

9.1. Competencia perfecta

Los mercados en los que operan las empresas son muy variados, algunos altamente competidos donde existe gran dificultad para obtener utilidades; otros, son libres de competencia y brindan grandes utilidades; algunos a los que es fácil acceder porque no hay barreras y otros en los que sucede lo contrario.

Podemos definir a una empresa competitiva, ó empresa aceptante, como aquella que considera el precio del mercado del producto como estipulado y fuera de su control, aún cuando los actos de las empresas en su conjunto son los que determinan el precio de mercado. Así que se llama mercado competitivo a aquel en que se dice que el precio es independiente de los actos de las empresas.

Si el precio $\bar{p}$ es el precio de mercado, la curva de demanda que tenga una empresa competitiva "ideal" tomará la siguiente forma:

$$D(p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > \bar{p} \\ \text{cualquier cantidad} & \text{si} \quad p = \bar{p} \\ \infty & \text{si} \quad p < \bar{p}. \end{cases}$$

Una empresa aceptante, en el caso que lo deseara, podría establecer su precio y producir la cantidad que, según su tecnología, le sea posible; pero, si dicha empresa es participante de un mercado competitivo y establece un precio por arriba del que el mercado estipula, nadie comprará su producto. Si por el contrario, la empresa estableciera un precio inferior, muchos clientes preferirán su producto pero perderá beneficios ya que podría conseguir consumidores que pagaran un precio por encima del suyo. Así pues, si una empresa desea vender algo, deberá introducirlo al precio de mercado.

A este mercado que en raras ocasiones se da, donde las empresas competitivas se manejan de forma ideal, se le llama mercado en competencia perfecta o perfectamente competitivo.[1]

Maximizando en competencia perfecta.

El problema de maximización del beneficio de la empresa aceptante, debe elegir una cantidad de y unidades para producir y define el problema como:

$$max_y \; py - c(y).$$

Usando la primera y segunda derivadas se llega a la solución del problema

$$\begin{aligned} p = c'(y^*) = \frac{\partial c}{\partial y} &= \text{ Costo Marginal} \\ c''(y^*) \geq 0 & \qquad . \end{aligned}$$

La función de oferta, $y(p)$, nos dice el nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa según los precios. Por ello, esta función debe cumplir

$$p \equiv c'(y(p)), \tag{9.1}$$

y también

$$c''(y(p)) \geq 0.$$

La función inversa de oferta, $p(y)$, medirá el precio que sería necesario para que una empresa no pierda rentabilidad dado un nivel de producción. Con la condición de primer orden, la función inversa de la oferta es

$$p(y) = c'(y).$$

Ahora, derivando la ecuación (9.1) con respecto a p

$$1 = c''(y(p))y'(p),$$

y como normalmente $c''(y) > 0$, entonces $y'(p) > 0$, se ve que cuando hay una variación del precio del producto, la curva de oferta de una empresa aceptante tiene pendiente positiva, en el caso común.

Para obtener la función de oferta de la industria se debe sumar la función de oferta de cada una de las empresas que haya en el mercado que se dedique al mismo ámbito. Es decir

$$Y(p) = \sum_{i=i}^{m} y_i(p),$$

[1]En la competencia perfecta la curva de demanda es infinitamente elástica.

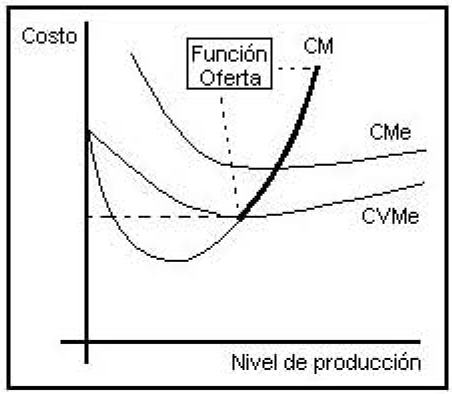

Figura 9.1: Función de oferta y curva de costo.
La función de oferta de una empresa aceptante es la parte de la curva de costo marginal por encima de la de costo variable medio.

donde $y_i(p)$ es la función de oferta de la empresa i de una industria con m empresas.

Por lo tanto, la función inversa de oferta de la industria indica el precio mínimo que la industria pactará para ofrecer una cantidad de producción. Todas las empresas que produzcan cantidades positivas tendrán el mismo costo marginal, esto es porque cada una de las empresas debe tener un costo marginal igual al precio ya que cada una elige su nivel de producción.

En competencia perfecta el beneficio económico de cada empresa siempre es nulo.

Ejemplo 9.1 (Función de costo con diferentes plantas.)
Imaginando que existen dos plantas productoras de algo, no se puede tener el mismo costo en ambas pues no existen los mismos insumos (como trabajadores por ejemplo), entonces

$$c_1 = \frac{y^2}{2} = \text{costo de producir en la planta 1} \tag{9.2}$$
$$c_2 = y^2 = \text{costo de producir en la planta 2} \tag{9.3}$$

Recordemos que $p = c'(y)$.

La función de oferta de la dos plantas es

$$y = y_1 + y_2 \tag{9.4}$$

y la función de costo

$$c(y) = c(y_1) + c(y_2). \tag{9.5}$$

Ahora,

$$\frac{\partial c_1}{\partial y} = \quad \mathrm{CM}_1 \quad = y_1 \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial y} = \quad \mathrm{CM}_2 \quad = 1. \tag{9.7}$$

Para saber la cantidad que debe producir cada planta en un sólo ciclo se igualan los costos marginales, es decir, $\mathrm{CM}_1 = \mathrm{CM}_2$ lo que nos dice $y_1 = 1$.

Sustituyendo y_1 en la ecuación (9.4)

$$y = 1 + y_2 \qquad \Longrightarrow \qquad y_2 = y - 1.$$

Entonces, regresando a la ecuación (9.5)

$$\begin{aligned} c(y) &= \frac{(1)^2}{2} + y_2 \\ &= \frac{1}{2} + y - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de costos de las dos plantas es

$$c(y) \quad = \quad y - \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 9.2 (Oferta de la industria — iguales costos —.)
Supongamos una industria formada por m empresas con función de costos de producción iguales: $c(y) = 1 + y_2$.

La función de costo marginal es $\mathrm{CM}(y) = 2y$ y la función de costo variable medio es $\mathrm{CVMe}(y) = y$.

La función inversa de la oferta de cada empresa es $p = \mathrm{CM}(y) = 2y$; por ello, la función de oferta es $y(p) = p/2$. De ahí que la función de oferta de la industria sea $Y(p) = mp/2$.

La función inversa de la oferta de la industria será pues $p = 2Y/m$.

Ejemplo 9.3 (Oferta de la industria — diferentes costos —.)
Una industria competitiva tiene sólo dos empresas cada una con las siguientes funciones de costo

$$\begin{aligned} c_1(y) &= y_1^2 \\ c_2(y) &= 2y_2^2 \end{aligned}$$

Sacando el costo marginal con respecto a cada una de sus producciones

$$\begin{aligned} p = c_1'(y) = 2y_1 \quad &\Longrightarrow \quad y_1 = \frac{p}{2} \\ p = c_2'(y) = 4y_2 \quad &\Longrightarrow \quad y_2 = \frac{p}{4}. \end{aligned}$$

El precio, p, es el mismo porque son empresas aceptantes.

La oferta de la industria es

$$Y(p) = y_1 + y_2 = \frac{p}{2} + \frac{p}{4} = \frac{3p}{4}.$$

Y para obtener el costo marginal de producción de cada empresa despejamos p, lo que nos lleva a:

$$p = \frac{4Y}{3}.$$

El equilibrio del mercado.

La producción total que ofrece la industria está dada por su función de oferta. Del mismo modo, la producción total demandada se ve en la función de demanda de la industria.

Además, el precio de equilibrio es aquel en la que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida en el mercado.

Ahora, consideremos la función de demanda del individuo i como $d_i(p)$, con $i = 1, \ldots, n$; y la función de oferta de la empresa j como $y_j(p)$, con $j = 1, \ldots, m$. El precio en equilibrio es

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(p) = \sum_{j=1}^{m} y_j(p).$$

Ejemplo 9.4 (Demanda de la industria — identicas ofertas —.) *Supongamos que la demanda de la industria está dada por $D(p) = 100 - 2p$ y que la curva de oferta es la del ejemplo 9.2, es decir, $Y(p) = mp/2$.*

El precio de equilibrio viene dado por

$$100 - 2p = mp/2,$$
$$p^* = \frac{100}{\frac{m}{2} + 2} = \frac{200}{m + 4}.$$

El precio descenderá entre más empresas estén en la industria.[2]

De forma general, la función de demanda de la industria queda expresada como

$$D(p) = my(p),$$

y como p está en función del número de empresas, la variación del precio bajo variaciones del m se ve como

$$D'(p)p'(m) = my'(p)p'(m) + y(p),$$

es decir,

$$p'(m) = \frac{y(p)}{D'(p) - my'(p)}.$$

[2]Siempre que la demanda de la industria tenga pendiente negativa, el precio de equilibrio bajará conforme aumente el número de empresas.

Ejemplo 9.5 (Empresas en competencia perfecta.)
Supongamos $c(y) = 1 + y^2$.

El costo marginal es $\text{CM} = 2y$ y el costo medio es $\text{CMe} = \frac{1}{y} + y$.
Por lo tanto el precio es igual al costo marginal en el óptimo, es decir, donde el costo marginal sea igual al costo medio

$$\begin{aligned} \text{CM} &= \text{CMe} \\ 2y &= \frac{1}{y} + y \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Así pues, el costo marginal evaluado en $y = 1$

$$\text{CM} \;=\; p \;=\; 2y \;=\; 2(1) \;=\; 2.$$

Ahora, supongamos que la demanda de la industria es $D(p) = 100 - 2p$, como el precio de competencia perfecta es $p = 2$ y sabemos que la producción en un sólo ciclo debería ser una unidad ya que $y = 1$,

$$D(2) = 100 - 2(2) = 96$$

donde el resultado nos dice que la industria necesita de 96 empresas aceptantes para que la industria sea competitiva, es decir, trabaje en competencia perfecta.

Economía del bienestar.

En los siguientes puntos de esta sección se dan varias definiciones, algunas ya estudiadas con anterioridad, con el fin observarlas desde la perspectiva del bienestar tanto del productor como del consumidor, además de una forma gráfica que ayuda a su fácil entendimiento.

Demanda. El conjunto de precios máximos que el consumidor está dispuesto a pagar por un bien o insumo por las diferentes cantidades producidas de dicho bien o insumo.(Figura 9.2)

Oferta. El conjunto de precios mínimos a los que los productores están dispuestos a ofrecer las diferentes cantidades producidas.(Figura 9.3)

Equilibrio. Es el encuentro entre la demanda y la oferta. En este punto de encuentro, las cantidades de oferta y demanda son las mismas, y ahí se halla el precio de equilibrio, es decir, la asignación eficiente.(Figura 9.4)

Excedente del consumidor. Representa el ahorro que los consumidores obtienen debido a la competencia en el mercado.(Figura 9.5)

Excedente del productor. Son las ganancias adicionales de los productores debido a la competencia del mercado.(Figura 9.6)

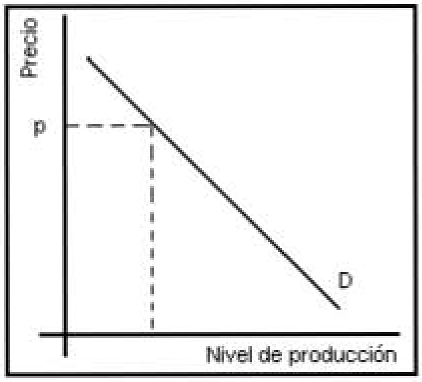

Figura 9.2: Demanda.

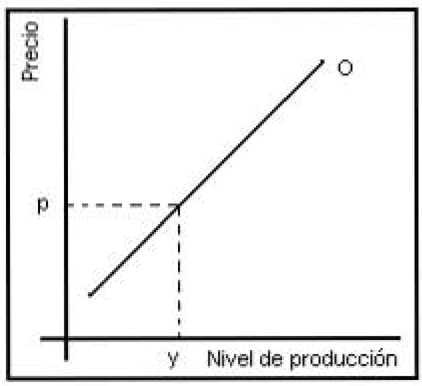

Figura 9.3: Oferta.

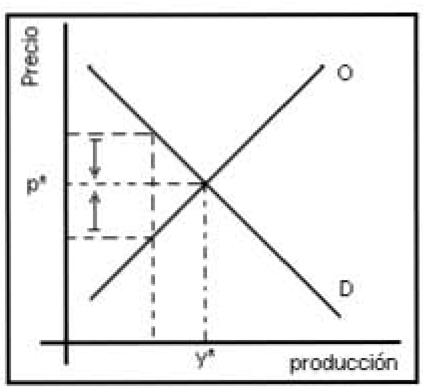

Figura 9.4: Equilibrio.

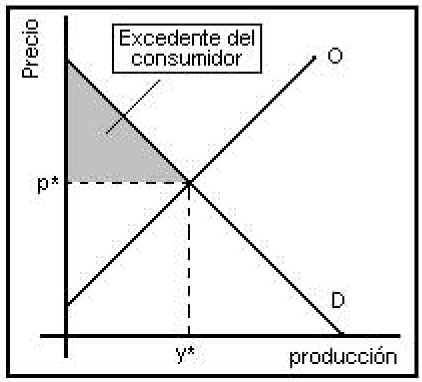

Figura 9.5: Excedente del consumidor.

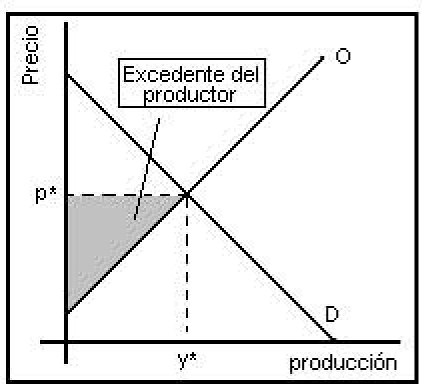

Figura 9.6: Excedente del productor.

Impuestos y subsidios.

Como lo normal es que todo mercado este bajo las reglas de un gobierno, este último aplica impuestos y subsidios que afectan la producción y el consumo, es decir, los movimientos de compra–venta. Por ello, siempre existen dos precios: el precio de demanda, P_d, que es la cantidad monetaria que pagan los consumidores, o demandantes, del bien, y el precio de oferta, P_s, que es el precio que reciben aquellos que ofrecen un producto. Estos normalmente se diferencian en la cantidad de impuesto o subsidio que exista con respecto al bien o producto en cuestión.

- Un impuesto sobre la cantidad es aquel que grava la proporción, es decir, la cantidad que se consume de un bien, lo que hace ver que un demandante paga más por el bien de lo que el oferente puede percibir por el mismo, esto se explica como:

  $$P_d = P_s + t \qquad \text{donde } t \text{ es la cantidad de impuesto.}$$

- Un impuesto sobre el valor es aquel que grava las unidades monetarias que se ocupan para adquirir un bien, es decir, lo que se gasta en lo que se está comprando. En su mayoría estos impuestos se ven porcentualmente, y expresaremos la diferencia de precios como:

  $$P_d = P_s(1 + \tau) \qquad \text{donde } \tau \text{ es el porcentaje de impuesto.}$$

- Un subsidio a la cantidad, o *específico*, es un pago realizado (normalmente por el gobierno) a la empresa que ofrece un bien o producto, o al individuo que adquiere el bien, para que el consumidor adquiera más unidades del producto necesario. El monto del subsidio es una cantidad fija por unidad de bien que se desee consumir o vender.

  Si se da la cantidad al que adquirirá el bien se expresa como

  $$P_d - s = P_s \qquad \text{donde } s \text{ es la cantidad neta de subsidio.}$$

  Si se da la cantidad al que ofrece el producto se expresa como

  $$P_d = P_s - s \qquad \text{donde } s \text{ es la cantidad neta de subsidio.}$$

- Un subsidio sobre al valor, o *ad valorem*, se maneja como el anterior, pero la cantidad no es fija, sino que es una proporción del valor del bien a ser adquirido o a vender.

  Si el porcentaje de subsidio se da al que adquirirá el bien se expresa como

  $$P_d(1 - \delta) = P_s \qquad \text{donde } \delta \text{ es el porcentaje de subsidio.}$$

  Si el porcentaje de subsidio se da al que ofrece el producto se expresa como

  $$P_d = P_s(1 - \delta) \qquad \text{donde } \delta \text{ es el porcentaje de subsidio.}$$

En caso que existan impuestos o subsidios, excepto en el caso de un impuesto pigouviano[3] existirá una diferencia entre los excedentes conseguidos con el impuesto, o subsidio, y el bienestar del que se disfruta en el equilibrio de mercado, a esta diferencia se le nombra pérdida irrecuperable de eficiencia y mide la ineficiencia que se crea por el impuesto o subsidio. Es igual a la pérdida del excedente total (excedente del consumidor más el excedente del productor) cuando la producción es inferior o superior a su nivel eficiente.

Ejemplo 9.6 (Impuestos y subsidios.)
Con impuestos a consumidores y a productores podemos verlo como la muestra la figura 9.7.

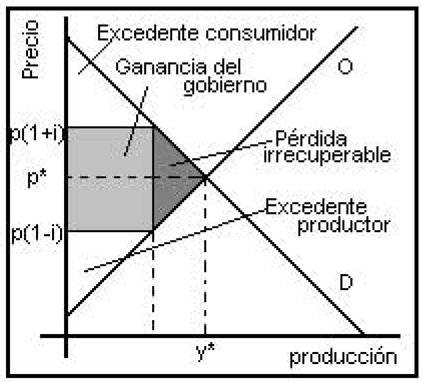

Figura 9.7: Impuestos y subsidios.

Sí se habla de un impuesto al valor agregado (IVA) se expresa gráficamente en la figura 9.8.

El caso de un impuesto sobre la renta (ISR) se observa en la figura 9.9.

[3]La aproximación pigouviana tiene una larga historia (Meade (1952), Cropper and Oates (1992)), aboga por una intervención estatal inmediata y completa. Consiste en gravar con un impuesto la actividad productiva del agente generador, con el fin de restablecer el "óptimo" económico confiando ciegamente en la capacidad de un Estado que actúa sin errores en la búsqueda del bien común; esta tendencia estaría bien definida en un ambiente económico en que las políticas las defina un regulador y los productores sencillamente la asuman, adecuen o evadan.

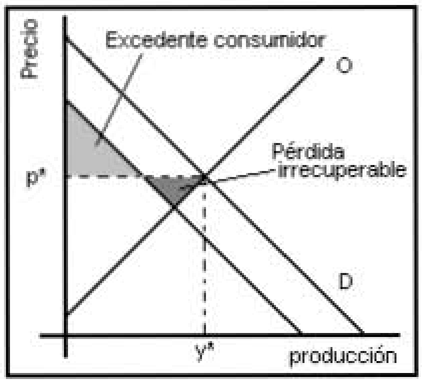

Figura 9.8: Impuesto al Valor Agregado (IVA).

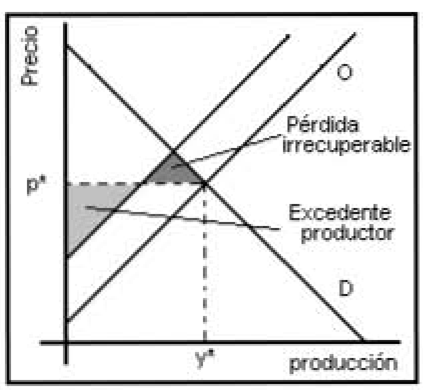

Figura 9.9: Impuesto Sobre la Renta

9.2. Monopolio

La competencia y el poder de mercado son dos de las fuerzas que operan en la mayor parte del mercado. Definimos al poder de mercado como el potencial de influir sobre el mercado, y en particular, sobre el precio, esto último a través del predominio que se tiene sobre la cantidad total que oferta la industria.

Las empresas competitivas no tienen poder de mercado y son tomadoras de precios; sin embargo, existen ciertas empresas no se enfrentan a la competencia y ejercen un poder de mercado total. A este extremo opuesto, se le llama monopolio.

El término monopolio proviene del griego *monos* que significa "único" y *polein* que significa "vendedor"; es decir que, el monopolio es una forma de mercado en la que existe un solo vendedor.

Así pues, el monopolio, por tener poder de mercado ya que es el único en la industria que produce un bien o servicio para el cual no existe sustituto, es precio-decisor, es decir, fija el precio.

Una característica del monopolio es que el ser capaz de abastecer o desabastecer el mercado con su producción, y esto afecta los precios y sus utilidades o beneficios. El monopolista está supeditado a dos restricciones al momento de elegir su nivel de producción y los precios:

1. Las restricciones tecnológicas, que normalmente están condicionadas por los costos $c(y)$.

2. El comportamiento de los consumidores, quienes están, o no, dispuestos a adquirir ciertos productos en diferentes cantidades y a diversos precios, lo cual se resume en la función de demanda $D(p)$.

Expresamos entonces, al problema de maximizar el beneficio del monopolio, como

$$max_{p,y}\ py - c(y)$$
$$\text{sujeta a } D(p) \leq y,$$

pero, ya que el monopolista es el único productor, produce la cantidad que le es demandada, es decir, $y = D(p)$, con lo que también podemos definir al problema como

$$max_p\ pD(p) - c(D(p)).$$

Del mismo modo, se puede reformular el problema tomando en cuenta la función inversa de la demanda, $p(y)$, que es el precio que debe cobrarse para vender y unidades de producción. A partir de ello, podemos definir al ingreso que generan y unidades como: $r(y) = p(y)y$ y expresar el problema como

$$max_y\ p(y)y - c(y).$$

Partiendo de este último planteamiento, las condiciones de primer[4] y segundo orden son

$$\begin{aligned} p(y) + p'(y)y &= c'(y) \\ 2p'(y) + yp''(y) - c''(y) &\leq 0. \end{aligned}$$

En el modelo de competencia perfecta se vio que el nivel de producción óptimo se encontraba al igualar el costo marginal y el costo medio. El nivel óptimo de producción del monopolista es aquel en el que la curva de ingreso marginal corta la curva de costo marginal, es decir, IM = CM .

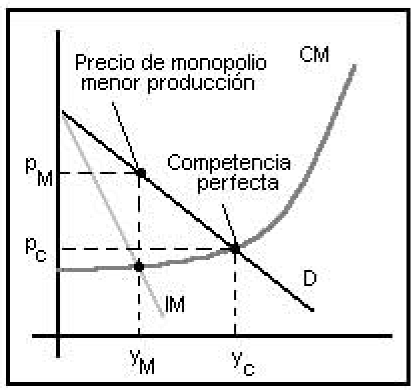

Figura 9.10: Precio y producción de monopolio.
El nivel óptimo de producción está donde el IM = CM.

El ingreso marginal se expresa como $r'(y) = p(y) + p'(y)y$, donde $p'(y) < 0$, y por tanto, se encuentra por debajo de la curva inversa de la demanda. De ahí que, cuando $y = 0$ el ingreso marginal que se obtiene de la venta de una unidad adicional es $p(0)$. Pero cuando $y > 0$, el ingreso marginal que se obtiene de la venta de una unidad adicional de producción es menor que el precio, pues la única manera de vender esa unidad, y las siguientes, será reduciendo el precio. Se puede ver en la figura 9.11.

Discriminación de precios.

La discriminación de precios no es más que la venta de una cantidad de un bien o un servicio a diferentes precios, ó a uno sólo consumidor[5], o a diversos consumidores.

Para poder discriminar, el monopolio, tiene que buscar una estrategia posible donde:

1. Reconozca y clasifique a los consumidores, y

[4]De esta condición de primer orden se llega a que en el nivel óptimo de producción, la elasticidad de la demanda del monopolista es inelástica y mayor que el valor absoluto de 1.

[5]El término *monopsonio* se usa para decir que en un mercado existe un sólo comprador.

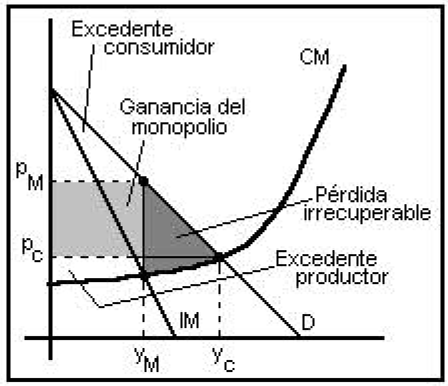

Figura 9.11: Ganancias del monopolio.

2. Oferte un producto evitando la reventa.

El punto principal por el cual las empresas discriminan los precios es obtener mayores beneficios intentando capturar lo más posible del excedente del consumidor. Esta extracción del exceso del consumidor se hace por alguna de las siguientes formas:

Discriminación de precios de primer grado. También conocida como *discriminación de precios perfecta*. Es la discriminación que extrae la totalidad del excedente del consumidor. En este caso, el oferente cobra un precio diferente por cada unidad de producción; de tal forma que el precio que busca obtener de cada unidad es idéntico al precio más alto que está dispuesto a pagar un consumidor.

Cuando más perfecta es la discriminación de precios del monopolio, su producción se encontrará más cerca de la producción competitiva y el resultado será más eficiente.

La diferencia entre la competencia perfecta y la discriminación perfecta radica en la distribución del excedente. Mientras que en la competencia perfecta el excedente se reparte entre consumidor y productor; en la discriminación de precios perfecta, el productor se atribuye todo el excedente.

Sea $r_i(x)$ la máxima disposición a pagar por un nivel de consumo x del consumidor i. Por tanto, el monopolista debe ofrecer la combinación que maximice el precio y la producción, (r^*, x^*). Con dicha combinación obtendrá el máximo beneficio.

El consumidor que desee el bien debe pagar r^* por él y adquirir x^* unidades o no lo obtendrá, así pues se plantea el problema de maximización del beneficio del monopolio discriminador de primer grado como

$$max_{r,x}\ r - cx$$
$$\text{sujeta a } u(x) \geq r.$$

La restricción hace ver que para que el consumidor adquiera el bien debe obtener un excedente no negativo por el consumo del bien. Por el lado del monopolista está restricción será más satisfactoria si se da la igualdad, $u(x) = r$. Por tanto, reformularemos el problema e introduciendo la restricción en la función objetivo tenemos

$$max_{r,x} \quad u(x) - cx$$

Así que la búsqueda de la condición de primer orden llega a su solución con

$$u'(x) = c\ ,$$

y bajo el nivel de producción, el precio que deberá pagar el consumidor, o poner el monopolio, es

$$r^* = u(x^*).$$

Aquí, el monopolio comienza por producir una cantidad eficiente, es decir, cuando produzca un nivel donde el costo marginal de producto sea igual a la disposición marginal a pagar por el consumidor. Y continuará hasta llegar al punto en que su producción sea igual a la de la industria competitiva.

De esto último llegamos a la función inversa de la demanda $p = p(x) = u'(x) = c$.

Discriminación de precios de segundo grado. También conocida como de *fijación no lineal de precios*. En esta discriminación, los precios se diferencian de acuerdo a la cantidad de unidades adquiridas del producto, más no diferencia entre un consumidor y otro. Cada consumidor tiene posibilidad de acceder a una misma lista de precios, pero puede hacer uso de los diferentes precios en función de la cantidad que adquiera del bien.

En esta discriminación, el monopolista elige una función $p(x)$, no lineal, que es el precio que pagará el consumidor por consumir x unidades. Entonces, en esta discriminación, el consumidor i que desea x_i unidades, gastará $r_i = p(x_i)x_i$, es decir que, el consumidor 1 elige la combinación (r_1, x_1), el consumidor 2 (r_2, x_2), así consecutivamente.

Algo en lo que el monopolista debe fijarse es que aunque dos consumidores adquieran la misma cantidad de unidades, la utilidad es diferente en cada uno, y ya que cada venta es diferente, los consumidores deben obtener la utilidad compensando la probable ambición que pueda haber entre consumidores.

El monopolista debe fijar el precio de acuerdo a la disposición a pagar de cada consumidor y a las unidades que adquiera. Entre mayor sea la cantidad demandada del producto, menor será el costo marginal por ese nivel de producción, por lo tanto, menor deberá ser el precio.

Como ejemplo, esto se aplica en los descuentos que los consumidores adquirimos por comprar en grandes cantidades.

Discriminación de precios de tercer grado. Los precios que se establecen mediante este método varía de consumidor a consumidor, con la salvedad que cada consumidor paga un precio constante por cada una de las unidades que adquiere del producto.

El problema del monopolio discriminador de tercer grado se puede definir como

$$max_{\,x_i|_{i=i}^{n}} \sum p_i(x_i)x_i - \sum cx_i,$$

donde $p_i(x_i)$ es la función inversa de la demanda del grupo i.

Diferenciando, las condiciones de primer orden son

$$p_i(x_i) + p_i'(x_i)x_i = c.$$

Esta discriminación es la más utilizada y se basa en la separación de grupos que tengan ciertas características con similaridad, el mejor ejemplo: los grupos diferenciados por las edades.

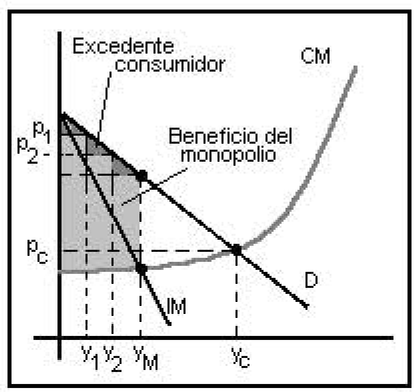

Figura 9.12: Discriminación de precios.
La discriminación de precios del monopolista busca absorver el excedente del consumidor para hacerlo propio.

Ejemplo 9.7 (Beneficio, precio y producción en monopolio.) *Supongamos que la función inversa de la demanda es $p(y) = 50 - \frac{y}{2}$ para una empresa que maneja toda la producción de una industria, y la función de costos de la misma es $c(y) = 1 + y^2$.*

El beneficio π de la empresa se dará maximizando

$$\pi_M \;=\; max\ p(y)y - c(y)$$

Sustituyendo

$$max\ \pi_M \;=\; \left(50 - \frac{y}{2}\right) y - \left(1 + y^2\right)$$

Se obtiene la condición de primer orden

$$\frac{\partial \pi_M}{\partial y} = 50 - y - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{50}{3} = 16.666^{-}$$

Lo que significa que la producción óptima del monopolista según las circunstancias dadas es producir 16.666^{-} unidades del bien que oferta en el mercado.

Ahora, si suponemos que las circunstancias conocidas son que la demanda está dada por $D(p) = y = 100 - 2p$ y la cantidad de producción que ofrece la empresa monopolista es 16.666 unidades.

El precio que deberá fijar, despejando de la función de demanda, es

$$p_M = 50 - \frac{y}{2} = 50 - \frac{16.666}{2} = 41.667 \ ,$$

En competencia perfecta, recordando el ejemplo 9.1 de la página 76 donde $p(y) = 2$ y $y = 1$, el beneficio es

$$\begin{aligned} \pi_c &= p(y)y - c(y) \\ &= (2)(1) - (1 + (1)) = 0 \ , \end{aligned}$$

es decir, el beneficio es nulo.

Con los valores obtenidos en este ejemplo, el beneficio del monopolio es

$$\begin{aligned} \pi_M &= p(y)y - c(y) \\ &= (41.667)(16.666) - (1 + (16.666)^2) \\ &= 415.666^{-} \ . \end{aligned}$$

9.3. Oligopolio

El oligopolio es una estructura de mercado de competencia imperfecta en la que compite un pequeño número de empresas. Como caso especial, la industria que se caracteriza por existencia de solamente dos oferentes o vendedores de la mercancía se denomina duopolio.

En el oligopolio, la cantidad ofertada por cualquiera de las empresas depende de su propio precio y de la producción y precios de las otras empresas. Así pues, ninguna empresa, dentro de esta estructura, logra ser independiente de la otra, por tanto deben tomar en cuenta las decisiones de las otras.

Se han desarrollado diversos modelos para explicar los precios y las cantidades en los mercados de oligopolio. Los modelos caen dentro de dos grupos: los modelos tradicionales y modelos de teoría de juegos.

Modelos tradicionales.

- **Modelo de la curva de demanda quebrada.** Se basa en el supuesto de que cada empresa cree que si aumenta su precios, las demás no lo harán; y si rebaja su precio las otras harán lo mismo.

En la figura 9.13 se ve la demanda (D) que cree enfrentar una empresa. Al momento de que el precio p llega a un nivel de producción y, la curva de demanda tiene un quiebre. Lo que provoca que un aumento pequeño en el precio de lugar a una disminución profunda en la cantidad de venta, esto es porque las otras empresas mantienen los precios constantes y la empresa que aumente el precio en primer lugar, se queda con el precio del bien más alto, y esto lo lleva a perder su participación en el mercado. Por otro lado, si disminuye su precio logra un mínimo aumento de la cantidad demandada. El quiebre que se da en la demanda crea una discontinuidad en la curva de ingreso marginal.

Para maximizar el beneficio del oligopolio, la empresa produce donde el costo marginal es igual al ingreso marginal. Si esa cantidad óptima de producción y la del costo marginal están entre la brecha que produce el quiebre, la empresa no cambia ni precio ni nivel de producción; solamente los cambiará cuando su costo marginal salga de ese rango (ab).

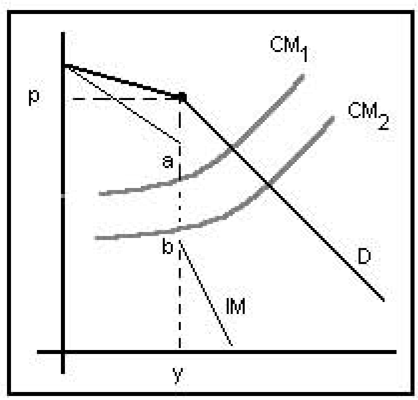

Figura 9.13: Modelo de demanda quebrada.

- **Modelo de la empresa dominante.** Supone que dentro de una industria bajo la estructura de oligopolio compuesta de m empresas, existe una empresa dominante, la cual tiene ventajas en costos sobre las demás y produce gran parte del total de la industria. Por lo anterior, la empresa dominante estipula el precio de mercado y las demás son aceptantes de ese precio.

  Para establecer los precios y maximizar sus beneficios, la empresa dominante opera como un monopolio (Figura 9.14), mientras que las otras empresas actuán tal como las empresas en competencia perfecta (Figura 9.15).

  La curva de demanda de la industria está dada por D, existen $m-1$ empresas competitivas que juntas tienen una curva de oferta O_{m-1}. Además hay un empresa dominante la cual se enfrenta a la curva de $XD = D - O_{m-1}$, esto es la demanda que no puede ser cubierta por las otras $m-1$ empresas. El ingreso marginal y el costo marginal de la empresa dominante están dados por IM y CM, así que para maximizar su beneficio, la empresa dominante debe igualar estos valores; lo cual le dará su nivel de producción y el precio, que las empresas restantes aceptarán.

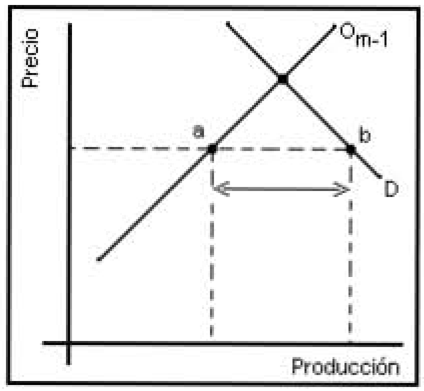

Figura 9.14: Decisión de la empresa dominante.

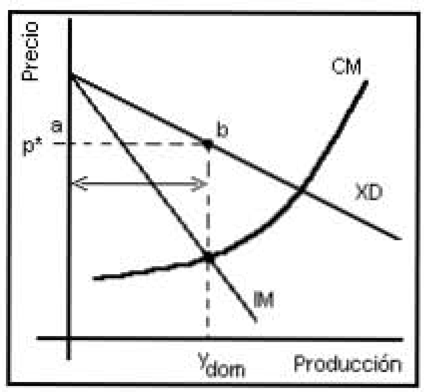

Figura 9.15: Decisión de las empresas aceptantes en oligopolio.

Teoría de juegos.

La teoría de juegos fue inventada por John Von Newmann a finales de la década de los 30's y ampliada por él mismo y Oskar Morgenstern durante los 40's. La teoría de juegos es una herramienta que busca analizar el comportamiento estratégico, es decir, el comportamiento de otro suponiendo que hará una determinada toma de decisiones y el reconocimiento de la interdependencia mutua existente.

La teoría de juegos busca comprender rivalidades de todo tipo: económicas, políticas, sociales. Por ello hay métodos que ayudan al estudio del oligopolio.

Juegos.

Un juego es una actividad que tiene las características de tener reglas, estrategias y recompensas.

Juego de suma cero. Es aquel juego en el cual los intereses de los jugadores son completamente opuestos, y durante los cuales, lo que gana uno es exactamente lo que pierde el otro. Es como el evento de tirar una moneda al aire y pedir cara o cruz, el que haya pedido el símbolo que cae gana y el otro pierde.

Juego de suma variable. Es aquel juego en que los intereses de los jugadores están parcialmente en conflicto, es decir, la decisión que tome un jugador puede o no afectar al otro.

- **El dilema de los prisioneros.** Digamos que dos personas fueron capturadas por posible robo, de confirmarse que fueron los ladrones cada uno recibirá una condena. Las reglas son tener a cada prisionero en habitaciones diferentes sin posible comunicación. A cada sospechoso se le plantea el hecho de que si ambos resultan culpables pero sin cooperar con la policía la sentencia de ambos será grave, si cooperan serán tratados normalmente, pero en caso que uno confiese o acuse al otro, el que confiese tendrá una sentencia muy reducida en comparación con el otro.

  Las estrategias son todas las acciones posibles a tomar por cada sospechoso, es decir que cada uno tiene dos opciones, confesar el robo o negar completamente haber participado.

  De ahi, que haya varias recompensas: 1) Ambos confiesan y reciben sentencia y trato normal, 2) Ambos lo niegan resultando culpables, por tanto tienen una sentencia igualmente grave, y 3) Uno confiesa y el otro no, por tanto uno recibe mayor castigo que el otro.

El equilibrio de un juego.

El equilibrio de un juego se da cuando un jugador realiza la mejor opción posible dada la acción del otro.

Equilibrio de Nash. También denominado equilibrio de estrategia dominante[6]. Se da una estrategia dominante cuando la mejor estrategia para un jugador es la misma, independientemente de la acción tomada por el otro jugador, es decir, que cada jugador tiene una sola acción que es la mejor decisión. El equilibrio de Nash pretende que cada jugador maximice sus propias ganancias y se da cuando hay una estrategia dominante para cada jugador.

Colusión.

Un convenio de colusión es un acuerdo entre varias empresas pertenecientes a una industria con el fin de restringir la producción y así, elevar los precios y sus beneficios. Al grupo de empresas que se coluden se la llama cártel. En algunos lugares la colusión es ilegal.

La colusión es un juego de fijación de precios, donde las estrategias que pueden llevar a cabo las empresas coludidas son respetar el acuerdo o violar el acuerdo de modo tal que la empresa que comete el engaño obtiene un beneficio mayor.

Ejemplo 9.8 (Duopolio en colusión.)
Dos empresas que tienen el poder total de la industria entran en un convenio de colusión.

De acuerdo a las dos estrategias que se pueden llevar a cabo, pueden darse los siguientes resultados:

1. Ambas empresas cumplen,
2. Ambas empresas se engañan
3. Una empresa cumple y la otra engaña o viceversa.

Las dos empresas producen actualmente a un precio establecido de forma separada porque también tienen costos de producción a parte. Así que, si lo que quieren es maximizar el beneficio, lo harán coludiéndose para maximizar como maximizaría un monopolio, el único conflicto radica en ponerse de acuerdo en la cantidad de producción total que cada uno realizará. Si el costo promedio de las dos empresas es mayor que el costo que pueden obtener como monopolio se verán beneficiadas.

En las figuras 9.16 y 9.17, se observa el beneficio obtenido al unirse como si fueran una sola.

En la figura 9.16 CP es el costo promedio y CM_i el costo marginal, al que se enfrentan las empresas individualmente, su producción es limitada y su precio menor.

En la figura 9.17 CM es el costo marginal al que se enfrentan como monopolio, es la suma de las curvas de costos marginales individuales. La demanda

[6] Se da este nombre pues fue propuesto por el ganador del premio Nobel de ciencias económicas de 1994, John Nash de la Universidad de Princeton.

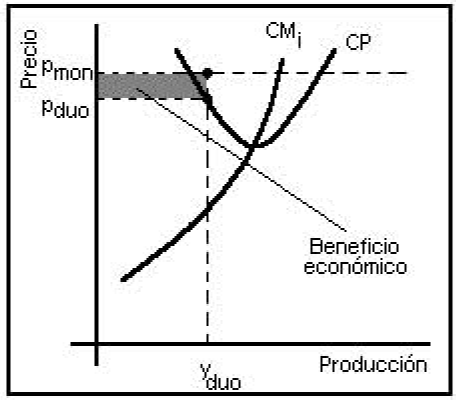

Figura 9.16: Decisión de las empresas en forma individual.

D y el ingreso marginal IM son los que proporciona la industria. Ello dará la producción que deben producir ambas empresas en conjunto.

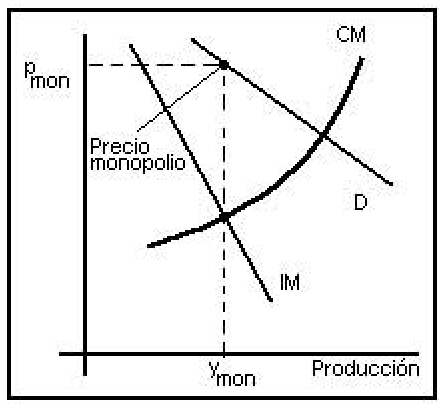

Figura 9.17: Colusión del duopolio.

En caso que alguna de las dos empresas, o ambas, incurran en el incumplimiento del convenio provocarán desvios que pueden ser desde la pérdida de producción de la otra empresa y ganancia de la que engaña, hasta el desplome de la industria por sobreoferta o desabastecimiento.

Al equilibrio en el cual los jugadores obtienen y comparten el beneficio de monopolio se nombra equilibrio cooperativo.

Conclusiones

La Economía no puede concebirse nunca verdaderamente como científica si no persigue continuamente el cultivo de la ciencia.

Esta tesina refleja mi creencia en la necesidad de resaltar el enfoque matemático y gráfico de la teoría microeconómica, sobretodo en estudiantes que poseen las herramientas fundamentales para el enfoque formal, ya que cuando se requiere un razonamiento elaborado, las exposiciones matemáticas y gráficas ofrecen mayor precisión.

La economía matemática hace uso de métodos tomados de las Matemáticas para desarrollar una teoría formal. Con la suposición de funciones y la maximización de los comportamientos, se desarrolla una teoría de la conducta de los agentes microeconómicos y del equilibrio general, razonablemente, completa.

El instrumento matemático básico con el que se apoya la Economía es el cálculo, del cual, se utilizan en gran proporción las derivadas totales o parciales y los multiplicadores de Lagrange, lo que se vio en los casos de maximizar utilidades y evaluar costos y beneficios, entre otros.

Las Matemáticas pueden y deben ser utilizadas de forma fundamental para trabajar las ideas económicas. La economía matemática no es solamente el refinamiento de las reflexiones verbales desarrolladas en la literatura económica, ya que muchos de los conceptos importantes pueden únicamente ser tratados por medio del razonamiento matemático, el cual permite exteriorizar con mayor facilidad los problemas económicos de más de dos dimensiones o variables.

En el presente trabajo se realizó una breve exposición de las características que definen la economía matemática. Así como un resumen de los distintos avances que se han producido en la incorporación de las distintas teorías, métodos y concepciones propias de las matemáticas.

Definitivamente, la enseñanza de la economía matemática para los futuros actuarios debe combinar de una forma unida a los instrumentos y su utilización considerándolos siempre fusionados como un todo. La formulación clara e inmediata de un problema económico solucionable con el instrumental matemático que se ha dado a conocer, supone una gran ayuda para el estudio y además busca ser una forma de despertar la necesidad para el estudiante de una disciplina que le resultará esencial en el caso que oriente su futuro hacia la investigación económica.

Bibliografía

1. Bagnai, Alberto. "Modelli non lineari: la stima di funzioni di domanda di fattori con tecnologia CES". Dipartimento di Economia Pubblica, Università di Roma La Sapienza. 2003

2. Chiang, A. C. "Métodos fundamentales de economía matemática". Mc Graw Hill. 1988

3. Clement, Norris et al. "Economía: enfoque América latina". Mc Graw Hill. 2000

4. Escobar Uribe, Diego. "Economía matemática". Alfaomega Grupo Editor. 2002

5. Leroy, Roger Miller. "Microeconomía". Mc Graw Hill. 1992

6. Luenberger, D. L. "Microeconomic theory". Mc Graw Hill. 1995

7. Parkin, Michael et al. "Microeconomía". 5ta Edición. Addison Wesley. 2001

8. Samuelson, Paul Anthony. "Fundamentos de análisis económicos". Ateneo. 1947

9. Silberberg, E. "The structure of economics: a mathematical analysis". Mc Graw Hill. 1990

10. Varian, Hal R. "Análisis microeconómico". 3ra. Edición. Antoni Bosch Editor. 1992

11. Varian, Hal R. "Microeconomía intermedia". Antoni Bosch Editor. 1997

Índice alfabético