UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRAS DE LINDENBAUM.

UNA INTRODUCCIÓN BOOLEANA A LA LÓGICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

CÉSAR HERNÁNDEZ CRUZ

TUTOR: DR. JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO

2006

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   Hernández
   Cruz
   César
   Teléfono: 55 19 99 16
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas.

2. Datos del tutor:
   Doctor
   José Alfredo
   Amor
   Montaño

3. Datos del sinodal 1
   Maestro en Ciencias
   Rafael
   Rojas
   Barbachano

4. Datos del sinodal 2
   Doctora
   Yolanda
   Torres
   Falcón

5. Datos del sinodal 3
   Matemático
   David
   Meza
   Alcántara

6. Datos del sinodal 4
   Doctora
   Gabriela
   Campero
   Arena

7. Datos del trabajo escrito.
   Álgebras de Lindenbaum.
   Una Introducción Booleana a la Lógica.
   87 páginas
   2006.

Índice general

Introducción

El propósito del presente trabajo, como su título lo indica, es hacer un acercamiento a la Lógica Matemática utilizando las herramientas que las Álgebras Booleanas nos proporcionan. Esto lo lograremos mediante las Álgebras de Lindenbaum[1], que son el resultado de dotar de una estructura de Álgebra Booleana al conjunto de fórmulas del lenguaje de un sistema formal. Lo más usual es encontrar las Álgebras de Lindenbaum de sistemas con lenguajes proposicionales o de predicados, más específicamente sobre Cálculos Proposicionales o Cálculos de Predicados; nuestra intención es trabajar con sistemas formales lo más generales posibles.

Aunque no es estrictamente necesario un conocimiento previo de Lógica Matemática por parte del lector, es recomendable que esté familiarizado con la Lógica Proposicional y la Lógica de Predicados, sobre todo para contrastar los métodos algebraicos utilizados en las demostraciones de los teoremas con los métodos lógicos habituales. También son recomendables conocimientos básicos de Teoría de Conjuntos, aunque tampoco son absolutamente necesarios.

El primer capítulo es una breve presentación de las Álgebras de Boole, los conceptos y teoremas que utilizaremos para trabajar con las Álgebras de Lindenbaum. Aprovechamos la teoría desarrollada en esta sección para demostrar el teorema de representación de Stone para las Álgebras Booleanas, que tiene una demostracion bastante simple y es un resultado clásico en el tema.

El capítulo 2 está dedicado a introducir el concepto de sistema formal y hacer la relación entre Lógica y Álgebra Booleana, acotando mediante ciertas propiedades a los sistemas formales sobre los que podremos construir una Álgebra de Lindenbaum. Es conveniente señalar que, la forma en que se consideran las condiciones para el sistema, es una construcción bastante

[1] Que en muchos textos pueden encontrarse bajo el nombre de Álgebras de Lindenbaum-Tarski.

intuitiva, tomando la definición de Álgebra de Boole punto por punto y pidiendo al sistema que los vaya cumpliendo; por este motivo, es claro que esta forma de proceder, ni es única, ni es la más elegante, pero a mi parecer es muy ilustrativa y es interesante ver como desemboca en estructuras conocidas. Finalizamos este capítulo con dos definiciones importantes, la de Álgebra de Lindenbaum de un sistema formal y la de Sistema Booleano, que serán el eje del resto de la exposición, puesto que demostramos resultados para Sistemas Booleanos, la mayoría utilizando a las álgebras de Lindenbaum.

En los capítulos 3 y 4 trabajamos a la Lógica Proposicional y a la Lógica de Pedicados, temas clásicos de la Lógica Matemática, pero desde el punto de vsta Booleano. La primera queda comprendida en la primera sección del capítulo 3 y hacemos un estudio de sus propiedades mediante los conceptos definidos en el capítulo anterior, mostrando que es posible partir de un Sistema Booleano con un lenguaje proposicional y obtener de esta manera un Cálculo de Proposiciones; en este caso, por partir de un Sistema Booleano tendremos automáticamente una Álgebra de Lindenbaum asociada al sistema. Para la Lógica de Predicados procedemos a la inversa (que es la manera usual), proponiendo un sistema formal con un lenguaje de predicados, definiendo las reglas de inferencia y el sistema axiomático para después revisar que cumple las propiedades de un Sistema Booleano y construir su Álgebra de Lindenbaum. Sin embargo la teoría que tenemos hasta el tercer capítulo no nos alcanza para demostrar los teoremas de Compacidad y Completud para la Lógica de Predicados utilizando Álgebra Boolena, por lo que en el capítulo 4 introducimos algunas nociones y resultados de teoría de modelos para poder cerrar el tema.

El último capítulo es independiente de los dos anteriores, hacemos un análisis sobre las propiedades que tienen las teorías formales de los Sistemas Booleanos en general; cómo es que estas propiedades pueden 'traducirse'como propiedades de ciertos filtros en una Álgebra de Lindenbaum del sistema y viceversa, qué características de algún filtro en una Álgebra de Lindenbaum se reflejan como características de las correspondientes teorías formales. Finalizamos demostrando la equivalencia del Teorema de Compacidad para la Lógica de Predicados con el Teorema del Ultrafiltro en de las Álgebras de Boole, que, como sabemos, son versiones débiles del Axioma de Elección, que ilustra perfectamente la idea con la que fué realizado este trabajo, aprovechar la teoría desarrollada en una rama de las matemáticas para aplicarla sobre otra.

Capítulo 1

Álgebras de Boole

1.1. Redes

Un *orden parcial reflexivo* es un par ordenado $\langle X, \leq \rangle$ donde X es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación binaria sobre X con las siguientes propiedades:

(a) *Reflexividad:* para cada $x \in X$, $x \leq x$.

(b) *Antisimetría:* para cada $x, y \in X$, si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

(c) *Transitividad:* para cada $x, y, z \in X$, si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Una relación binaria sobre un conjunto X, que cumple únicamente con (a) y con (c), será un *preorden*.

Diremos que un orden parcial $\langle X, \leq \rangle$ es un *orden total* si $\leq$ cumple además:

(d) *Dicotomía:* para cada $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ o $y \leq x$.

Si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden parcial reflexivo, podemos definir una nueva relación $<$ sobre X por $x < y$ si y sólo si $x \leq y$ y $x \neq y$. $<$ es llamado el *orden parcial irreflexivo* de X inducido por $\leq$. Si $\langle X, \leq \rangle$ es un orden total, $<$ es el *orden estricto* de X inducido por $\leq$. Es común la utilización de órdenes estrictos, que consisten en conjuntos dotados de un orden estricto.

De ahora en adelante, no mencionaremos la relación de orden $\leq$ explícitamente, a menos que sea necesario para evitar ambigüedad, así, nos referiremos al "conjunto parcialmente ordenado X" donde la relación de orden en X será $\leq$, a menos que se indique lo contrario. Si $x \leq y$ a menudo utilizaremos el lenguaje natural y lo referiremos como "x es menor o igual que y" o "y es mayor o igual que x".

Si X es un orden parcial, una *cadena* en X es un subconjunto de X totalmente ordenado con la relación de orden sobre X.

Si A es un subconjunto del conjunto parcialmente ordenado X, una *cota superior* de A en X es un elemento de X mayor o igual que todos los elementos de A. Entonces, $x \in X$ es una cota superior para A en X si y sólo si $a \leq x$ para todo $a \in A$. Análogamente $x \in X$ es una *cota inferior* de A en X si para cada $a \in A$, $x \leq a$.

$x \in X$ es llamado el *supremo* (o *mínima cota superior*) de A si x es una cota superior de A en X y es una cota inferior para el conjunto de todas las cotas superiores de A en X. Es decir, $x \in X$ es el supremo de de A si y sólo si para cada $a \in A$, $a \leq x$ y, si y es cualquier cota superior de A en X, $x \leq y$. Análogamente decimos que $x \in X$ es el *ínfimo* (o *máxima cota inferior*) de A si es una cota inferior de A y es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de A en X. Cabe señalar que tanto el supremo como el ínfimo de un subconjunto A de X no necesariamente existen[1].

Denotaremos al supremo de A, si es que existe, por $\sup(A)$, y al ínfimo de A, si existe, por $\inf(A)$. Si $A = \{a_i | i \in I\}$ es una colección indexada de elementos de X, denotamos por $\bigvee_{i\in I} a_i$ al supremo de A y por $\bigwedge_{i\in I} a_i$ a $\inf(A)$. Si A es el conjunto conformado únicamente por los dos elementos x y y, *i. e.* $A = \{x, y\}$, entonces escribimos $x \vee y$ para $\sup(A)$ y $x \wedge y$ para $\inf(A)$. $x \vee y$ y $x \wedge y$ son llamadas, respectivamente, la *unión* y la *intersección* de x y y.

Definición 1.1.1 *Un conjunto parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ será llamado una* red *si para cualesquiera $x, y \in X$, tanto el ínfimo como el supremo del conjunto $\{x, y\}$ existen.*

Utilizando la notación antes definida, podemos decir que en una red R, para cualesquiera $x, y \in R$ existen $x \vee y$ y $x \wedge y$. Las redes también son conocidas con los nombres de *latices* o *retículas*.

Si κ es un cardinal infinito, una red *κ-completa* es una red para la cual, cada conjunto de elementos con cardinal $\leq \kappa$ tiene tanto ínfimo como supremo. Una red es $< \kappa - completa$ si cada conjunto de elementos con cardinal $< \kappa$ tiene ínfimo y supremo. Una red es *completa* si es κ-completa para cada cardinal κ.

[1]Consideremos por ejemplo al conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, con su orden usual. El subconjunto $\{r \in \mathbb{Q} | r \cdot r < 2\}$ carece de supremo en $\mathbb{Q}$.

Es rutinario verificar que en un orden parcial, si éste tiene una cota superior, entonces dicha cota es única. Esto es cierto, en particular, para las redes y, en caso de que dicha cota superior única exista, la llamamos el *máximo* de la red y lo denotamos por 1. De manera análoga, si una red tiene una cota inferior, esta cota inferior es única, a la cual llamaremos el *mínimo* de la red y lo denotamos por 0.

Se debe tener cuidado de distinguir entre el elemento máximo de una red y un elemento *maximal* de la red. Diremos que un elemento x de una red es *maximal* si no hay elementos en la red estrictamente mayores que x. Aunque en general los órdenes parciales no tienen necesariamente un único elemento maximal, en las redes se cumple la propiedad que enuncia el siguiente lema.

Lema 1.1.2 *Si la red R tiene un elemento maximal, entonces dicho elemento maximal es único.*

Demostración. Supongamos que x y y son elementos maximales de R. Entonces $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$ así que, como x y y son maximales, $x = x \vee y$ y $y = x \vee y$. Concluimos que $x = y$, tal como se quería. ■

El siguiente lema enuncia algunas de las propiedades que cumplen las redes.

Lema 1.1.3 *Para cualquier red R, y cualesquiera $x, y, z \in R$, se cumplen las siguientes igualdades:*

L_1	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
L_2	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
L_3	$(x \vee y) \wedge y = y$	$(x \wedge y) \vee y = y$

Demostración. La demostración es sencilla a partir de la definición de ínfimo y supremo en un orden parcial. ■

Diremos que una red R es *complementada* si tiene un elemento máximo 1, un elemento mínimo 0, y para cada $x \in R$ existe un elemento $y \in R$ tal que:

$$L_4 \quad x \vee y = 1 \quad \text{y} \quad x \wedge y = 0$$

Dicho elemento y es llamado el *complemento* de x. En una red complementada no necesariamante cada elemento tiene un único complemento, *e.g.* la red cuyo conjunto subyacente es $X = \{0, a, b, c, 1\}$ y cuya relación de orden es $\leq$ dada por:

para toda $x, y \in X$, $x \leq y$ si y sólo si $x = 0$ ó $y = 1$ ó $x = y$.

Entonces, dado que en esta red $a \vee b = b \vee c = c \vee a = 1$ y $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 0$, cada uno de los elementos a, b, c es el complemento de los otros dos.

La condición extra que requerimos que cumpla una red complementada para asegurar la unicidad de los complementos es la distributividad. Diremos que una red R es *distributiva* si para cualesquiera $x, y, z \in R$, se cumplen las siguientes identidades:

L_5
$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$
$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

Observemos que en una red complementada R, para cada $x \in R$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 0 = x$.

Lema 1.1.4 *Sea $\langle R, \leq \rangle$ una red. Para cualesquiera $x, y, z \in R$ se cumplen:*

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$
$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee z$$

Demostración. Utilizando únicamente las definiciones de supremo e ínfimo, tenemos que $(x \wedge z) \leq z$ y $(y \wedge z) \leq z$, con lo que $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq z$. Por otro lado $(x \wedge z) \leq x \leq (x \vee y)$ y $(y \wedge z) \leq y \leq (x \vee y)$, que implica $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y)$. De estas dos observaciones se sigue que $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$, como queríamos demostrar.

La otra desigualdad se demuestra de manera análoga. ■

Como consecuencia directa de este lema, podemos observar que en lugar de la condición L_5, basta pedirle a una red complementada R que, si x, y y z son elementos de R se cumpla

L_5'
$$(x \vee y) \wedge z \leq (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$
$$(x \wedge y) \vee z \leq (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

para que sea R sea distributiva.

Lema 1.1.5 *En una red complementada distributiva cada elemento tiene un único complemento.*

Demostración. Supongamos que R es una red complementada distributiva en la que y y z son complementos del elemento x de R. Entonces $x \vee y = 1$ y $x \wedge z = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} y = y \vee 0 &= y \vee (x \wedge z) \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= 1 \wedge (y \vee z) \\ &= y \vee z \end{aligned}$$

Análogamente $z = y \vee z$, y por tanto $y = z$. ■

En una red complementada distributiva el complemento único de un elemento x es denotado por x^*. Es claro además, a partir de la unicidad de los complementos y observando que la relación "ser complemento de" es simétrica, que $(x^*)^* = x$.

Definición 1.1.6 *Una **Álgebra Booleana** es una red complementada, distributiva con al menos 2 elementos*[2]*.*

Tomemos por ejemplo al conjunto parcialmente ordenado $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ donde X es cualquier conjunto, ésta es una Álgebra Booleana donde las operaciones intersección, unión y complemento corresponden a las operaciones intersección, unión y complemento conjuntistas; el elemento máximo es el conjunto X, el mínimo es el conjunto vacío. Las Álgebras Booleanas de la forma $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ se conocen como *Álgebras Booleanas Potencia* o simplemente *Álgebras Potencia*.

Hemos introducido la noción de Álgebra Booleana, o Álgebra de Boole, construyendo su estructura gradualmente a partir de un orden parcial, desde un punto de vista más próximo a la Teoría de Conjuntos. De manera alternativa, podríamos haber definido una Álgebra Booleana $\mathscr{B}$, como una estructura algebraica, digamos

$$\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^*, 0, 1 \rangle$$

que satisfaga $L_1 - L_5$. De aquí, que se utilice el término 'álgebra'. Si hubiésemos introducido las Álgebras Booleanas de este modo, habríamos definido la relación $\leq$ sobre B por $x \leq y$ si y sólo si $x \vee y = y$.

[2]Remarquemos que $0 \neq 1$ en cualquier Álgebra Booleana.

Teorema 1.1.7 *Supongamos que* $\mathscr{B} = \langle B, \vee, \wedge, ^*, 0, 1\rangle$ *es una estructura que satisface* $L_1 - L_5$ *y que* $\leq$ *está definida sobre* B *por* $x \leq y$ *si y sólo si* $x \vee y = y$. *Entonces* $\langle B, \leq\rangle$ *es una red complementada distributiva.*

Demostración. Si $\langle B, \leq\rangle$ fuese un orden parcial, sólo faltaría ver que para cualesquiera $x, y \in B$, $x \wedge y \in B$ y $x \vee y \in B$, pero dicha situación ocurre pues en la estructura algebraica las operaciones están bien definidas y son cerradas. Ahora, si $\langle B, \leq\rangle$ fuese una red, ésta sería complementada si para cada $x \in B$, también $x^* \in B$, cosa que también ocurre al ser * una operación de la estructura algebraica. En caso de que $\langle B, \leq\rangle$ fuera una red complementada, sería también distributiva si cumpiera L_5, pero es el caso que lo cumple. Entonces, para ver que $\langle B, \leq\rangle$ es una red complementada distributiva, basta con demostrar que $\langle B, \leq\rangle$ es un orden parcial.
Para la transitividad, tenemos que

$$\begin{array}{l} \text{si } \ x \leq y \ \text{ entonces } \ x \vee y = y, \\ \text{si } \ y \leq z \ \text{ entonces } \ y \vee z = z, \end{array}$$

de donde $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$.
Para la antisimetría

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow x \vee y = y \\ y \leq x \Rightarrow y \vee x = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

Y para la reflexividad tenemos por un lado que $1 = x \vee 1 = x \vee (x \vee x^*) = (x \vee x) \vee x^*$, así como $0 = 0 \vee 0 = (x \wedge x^*) \vee (x \wedge x^*) = (x \vee x) \wedge x^*$. Esto, aunado a la unicidad de los complementos, arroja que $x \vee x = x$ lo cual es suficiente para demostrar $x \leq x$. ■

Con este teorema queda clara la equivalencia entre definir a las Álgebras Booleanas como redes o mediante estructuras algebraicas.

1.2. Filtros

Definición 1.2.1 *Un filtro en una red* R *es un subconjunto no vacío* F *de* R *que satisface:*
(i) *para cada* $x, y \in F$, $x \wedge y \in F$.
(ii) *para cada* $x \in F$, $y \in R$, *si* $x \leq y$ *entonces* $y \in F$.
(iii) *si el mínimo de la red existe, entonces* $0 \notin F$.
Un ideal en una red R *es un subconjunto no vacío* I *de* R *que satisface:*
(i) *para cada* $x, y \in I$, $x \vee y \in I$.

(ii) para cada $x \in I$, $y \in R$, si $y \leq x$ entonces $y \in I$.
(iii) si el máximo de la red existe, entonces $1 \notin I$.

Es claro por la definición que si una red R tiene un elemento máximo 1, entonces cada filtro en R también lo tiene. Análogamente el mínimo de R, si existe, es un elemento de cada ideal de R. De hecho, trivialmente se observa que si 1 es el máximo de R y 0 el mínimo de R entonces $\{1\}$ es un filtro y $\{0\}$ es un ideal en R.

Otro ejemplo que vale la pena mencionar es el siguiente, para cada $x \in R$, el conjunto $\{y|x \leq y\}$ es un filtro, llamado el *filtro principal* generado por x. Análogamente $\{y|y \leq x\}$ es un ideal, el *ideal principal* generado por x. En las redes finitas cada filtro y cada ideal son principales, *i.e.* generados por algún elemento de la red.

Dualidad. Podemos observar que en $L_1 - L_5$, si intercambiamos $\wedge$ y $\vee$ y 0 y 1, la identidades se transforman en nuevas identidades que también se cumplen en las Álgebras Booleanas. Incluso, por la forma en que fueron elegidos $L_1 - L_5$, las dos identidades de cada par resultan simplemente intercambiadas bajo esta transformación. La afirmación obtenida al realizar esta transformación es llamada el *dual* de la afirmación original. Al cumplirse para $L_1 - L_5$ se sigue que el dual de cualquier afirmación verdadera acerca de Álgebras Booleanas expresada en términos de $\wedge, \vee, 0$ y 1 es también una afirmación verdadera acerca de Álgebras de Boole. Cuando la afirmación hace adicionalmente mención de ideales y filtros, obtenemos su dual al intercambiar 'ideal'y 'filtro', y '$\leq$' y '$\geq$'. Consideremos, para ejemplificar el concepto de dualidad, el siguiente lema.

Lema 1.2.2 *En una Álgebra Booleana, para cualesquiera elementos x, y del Álgebra se tiene que $x \wedge y^* = 0$ si y sólo si $x \leq y$.*

Demostración. Supongamos que $x \wedge y^* = 0$. Entonces $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^*) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y*) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y \leq y$.

Inversamente si $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x$ y por tanto $x \wedge y^* = (x \wedge y) \wedge y^* = x \wedge (y \wedge y^*) = x \wedge 0 = 0$. ■

Ahora, por el principio de dualidad, podemos deducir inmediatamente que en una *Álgebra Booleana* $x \vee y^* = 1$ si y sólo si $y \leq x$. Pero no sólo eso, tenemos incluso una demostración de dicha afirmación, pues únicamente tenemos que 'dualizar' la demotración que tenemos para la afirmación original. De aquí en adelante, cuando demostremos un teorema acerca de Álgebras de Boole, consideraremos también demostrado el dual.

Se dice que un conjunto A de elementos de una Álgebra Booleana tiene la *propiedad de intersección finita* (la cual abreviaremos 'pif') si el ínfimo de cualquier subconjunto finito de A es distinto de 0. La importancia de esta propiedad radica en que, son precisamente aquellos subconjuntos de una Álgebra Booleana que tienen la pif los que pueden ser extendidos a filtros.

Si A es un conjunto de elementos de una Álgebra Booleana B, llamaremos A^0 al conjunto de los elementos en B mayores o iguales que algún elemento de A. Es decir,

$$A^0 = \{x \in B | \, (\exists a \in A)(a \leq x)\}.$$

Y A^c será el conjunto de los ínfimos de todos los subconjuntos finitos de A

$$A^c = \{\inf(X) | X \in [A]^{<\aleph_0}\}^3.$$

Una *base* para un filtro F es un conjunto A tal que $A^0 = F$. Una $sub-base$ para un filtro es un conjunto A tal que A^c es una base para F, es decir, si A es sub-base de F, entonces $F = (A^c)^0$, y decimos que A *genera a* F. Observemos que $A \subseteq A^c \subseteq (A^c)^0$.

Lema 1.2.3 *Para cualquier subconjunto A de una Álgebra Booleana, el conjunto $(A^c)^0$ es un filtro si y sólo si A tiene la pif. Además, cualquier filtro que contenga a A, contiene también a $(A^c)^0$.*

Demostración. Notemos que $x \in (A^c)^0$ si y sólo si, para algún $X \in [A]^{<\aleph_0}$, $\inf(X) \leq x$.

Supongamos $x, y \in (A^c)^0$. Entonces, para algunos $X, Y \in [A]^{<\aleph_0}$, $\inf(X) \leq x$ e $\inf(Y) \leq y$. Al ser finitos X y Y, tenemos que $X \cup Y \in [A]^{<\aleph_0}$ y, además, $\inf(X \cup Y) = \inf(X) \wedge \inf(Y)$, pero $\inf(X) \wedge \inf(Y) \leq x \wedge y$, por lo que $x \wedge y \in (A^c)^0$. Trivialmente se puede verificar que si $x \in (A^c)^0$ y $x \leq y$ entonces $y \in (A^c)^0$. Falta únicamente demostrar que $0 \notin (A^c)^0$ y, es conveniente resaltar que es únicamente en esta parte de la demostración donde se utiliza que A tenga la pif.

Supongamos que $0 \in (A^c)^0$, ésto implica que para algún $X \in [A]^{<\aleph_0}$, $\inf(X) \leq 0$, así, $\inf(X) = 0$ y por lo tanto A no tiene la pif.

Finalmente, supongamos que F es un filtro y $A \subseteq F$. Sea $x \in (A^c)^0$, entonces, para algún $X \in [A]^{<\aleph_0}$, $\inf(X) \leq x$. Como $X \subseteq F$ y F es un filtro, $\inf(X) \in F$ y, utilizando nuevamente el hecho de que F es un filtro, $x \in F$. Por lo tanto, $(A^c)^0 \subseteq F$. ■

[3]Para cualquier conjunto A y para cualquier cardinal κ, $[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A \big| |X| < \kappa\}$

Se sigue de este lema que un subconjunto A de una Álgebra Booleana pude ser extendido a un filtro si y sólo si tiene la pif.

Los filtros en una Álgebra Booleana B son subconjuntos de B que cumplen ciertas propiedades y, como subconjuntos, pueden ser ordenados parcialmente mediante la contención. Los filtros que son maximales respecto a este orden son llamados *ultrafiltros*. Entonces, un ultrafiltro es un filtro F que no tiene una extensión propia que también sea un filtro. El siguiente lema nos da una caracterización para los ultrafiltros.

Lema 1.2.4 *Si F es un filtro en una Álgebra Booleana B, F es un ultrafiltro si y sólo si para cada $x \in B$, $x \in F$ o $x^* \in F$.*

Demostración. Supongamos que para cada $x \in B$, x o x^* está en F y sea G un filtro que contiene propiamente a F. Entonces, existe un x en $G - F$ y, como $x \notin F$, se tiene que $x^* \in F \subseteq G$, lo cual resulta en una contradicción, pues tendríamos que $x \wedge x^* = 0 \in G$. Por lo tanto no hay ningún filtro que contenga propiamente a F.

Inversamente, supongamos que F es un ultrafiltro y que $x \notin F$. Sea $G = ((F \cup \{x\})^c)^0$. Como F es un ultrafiltro, G no es un filtro, entonces $F \cup \{x\}$ no tiene la pif y para algún $X \in [F]^{<\aleph_0}$, $\inf(X) \wedge x = 0$. Tenemos entonces que $\inf(X) \leq x^*$ y, dado que $\inf(X) \in F$, $x^* \in F$. ■

A continuación utilizaremos el Axioma de Elección, en la forma del Lema de Zorn, para demostrar uno de los resultados más importantes referentes a ultrafiltros.

Teorema 1.2.5 (El Teorema del Ultrafiltro) *Cada filtro en una Álgebra Booleana puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Sea F un filtro en una Álgebra Booleana B. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los filtros en B que contienen a F. Como $F \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ es distinto del vacío.

$\mathscr{F}$ puede ser parcialmente ordenado por la contención. Verificaremos que respecto a este orden, las cadenas en $\mathscr{F}$ tienen cota superior.

Sea $\mathscr{D} = \{D_i | i \in I\}$ una cadena en $\mathscr{F}$, y sea $D = \bigcup_{i \in I} D_i$. Si $x, y \in D$, entonces para algunos $i, j \in I$, $x \in D_i$ y $y \in D_j$. Como $\mathscr{D}$ es una cadena, $D_i \subseteq D_j$ o $D_j \subseteq D_i$, supongamos sin pérdida de generalidad que $D_i \subseteq D_j$. Entonces $x, y \in D_j$ y, como D_j es un filtro, $x \wedge y \in D_j$. Si $z \in B$ y $x \leq z$, entonces $z \in D_j \subseteq D$. Como para cualquier $i \in I$, $0 \notin D_i$, se sigue que

$0 \notin D$. Tenemos, por estas observaciones, que D es un filtro tal que $F \subseteq D$, por lo que $D \in \mathscr{F}$. Así, D es una cota superior para $\mathscr{D}$ en $\mathscr{F}$.

Se tiene como consecuencia del Lema de Zorn que $\mathscr{F}$ contiene un elemento maximal G. G es un ultrafiltro que extiende a F. ■

Corolario 1.2.6 *Cada conjunto de elementos de una Álgebra Boolena con la pif puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostración. Es una consecuencia directa del lema 1.2.3 y el Teorema del Ultrafiltro. ■

Corolario 1.2.7 *Cada elemento distinto de cero de una álgebra Booleana pertenece a algún ultrafiltro.*

Demostración. Si $x \neq 0$, $\{x\}$ tiene la pif y puede ser extendido a un ultrafiltro. ■

Corolario 1.2.8 *Para cualesquiera dos elementos distintos de una Álgebra Booleana, existe un ultrafiltro que tiene a uno de ellos y no al otro.*

Demostración. Si $x \neq y$ entonces no sucede que $x \leq y$ o no sucede que $y \leq x$. Supongamos sin pérdida de generalidad que x no es menor o igual que y, entonces, por el lema 1.2.2, $x \wedge y^* \neq 0$, por lo que $\{x, y^*\}$ tiene la pif y puede ser extendido a un ultrafiltro F en B. Como $y^* \in F$, $y \notin F$. ■

El corolario 1.2.6 es de gran utilidad cuando queremos extender un subconjunto A de una Álgebra Booleana a un ultrafiltro, pues marca como condición suficiente para hacerlo que A tenga la pif. Para esto primero tenemos que demostrar que $0 \notin A$. En general no es suficiente demostrar que el ínfimo de cualesquiera dos (en lugar de cualquier número finito) elementos de A es distinto de 0. Pero, si podemos demostrar que el ínfimo de cualesquiera dos elementos de A pertenece a A, entonces habremos demostrado que A tiene la pif, pues de ahí se sigue inmediatamente que el ínfimo de cualquier número finito de elementos de A está en A y por tanto es distinto de 0. Este será el método que se seguirá usualmente al utilizar este corolario.

1.3. Algunas propiedades importantes de las álgebras de Boole

Si B es una Álgebra Booleana, una *subálgebra* de B es un subconjunto no vacío de B que es cerrado bajo las operaciones ínfimo, supremo y complemento. Supongamos que B' es una subálgebra de B, como B' es no vacío, existe $x \in B'$, y como es cerrado bajo complementos, $x^* \in B'$, lo que implica que $x \wedge x^* = 0 \in B'$ y $x \vee x^* = 1 \in B'$, pues B' es cerrado bajo ínfimos y supremos. Así, cualquier subálgebra B' de B tiene al 0 y al 1 y, de hecho, no es difícil demostrar que el subconjunto $\{0, 1\}$ de B es una subálgebra de B. Recordando que $\{0\}$ es un ideal y $\{1\}$ es un filtro, podemos generalizar esta observación con el siguiente teorema, el cual no demostraremos pues, aunque su demostración es sencilla partiendo de las definiciones, es algo larga.

Teorema 1.3.1 *Sea B una Álgebra de Boole y F un filtro en B. Si $I = \{x^* | x \in F\}$, entonces I es un ideal, $B' = F \cup I$ es una subálgebra de B y F es un ultrafiltro en B'.*

■

Si B_1, B_2 son dos Álgebras Booleanas un *homomorfismo* de B_1 en B_2 es una función f de B_1 en B_2 que preserva las operaciones algebraicas, *i.e.* tal que para cada $x, y \in B_1$:
(a) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$
(b) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
(c) $f(x^*) = f(x)^*$

El concepto de homomorfismo (o simplmente morfismo) aquí referido es el utilizado usualmente en álgebra. Debido a que la demostración del siguiente teorema es semejante a la que se da en todas las estructuras en las que se trabaja con morfismos, preferimos omitirla.

Teorema 1.3.2 *Si B_1 y B_2 son Álgebras de Boole, y f es un homomorfismo de B_1 en B_2 entonces*
(a) la imagen del máximo de B_1 bajo f es el máximo de B_2, y la imagen del mínimo de B_1 bajo f es el mínimo de B_2
(b) $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$, para cualesquiera $x, y \in B_1$
(c) $f[B_1]$ es una subálgebra de B_2

■

Si además de ser homomorfismo, f es inyectiva, diremos que f es un $isomorfismo$ entre B_1 y $f[B_1]$. Si además f es suprayectiva, entonces f es un isomorfismo entre B_1 y B_2. Si hay un isomorfismo entre B_1 y B_2 diremos que B_1 y B_2 son $isomorfas$ y lo denotamos por $B_1 \cong B_2$.

Sea F un filtro en una Álgebra Booleana B. Definimos la relación $\sim_F$ sobre B por

$$x \sim_F y \text{ si y sólo si para alguna } d \in F, x \wedge d = y \wedge d$$

Lema 1.3.3 *La relación $\sim_F$, antes definida, es una relación de equivalencia sobre B.*

Demostración. Se puede revisar en [3]. ■

Lema 1.3.4 *$\sim_F$ es una relación de congruencia sobre B. Es decir, si $x \sim_F x'$ y $y \sim_F y'$ entonces*

$$x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$$
$$x \vee y \sim_F x' \vee y'$$
$$x^* \sim_F x'^*$$

Demostración. Se puede revisar en [3]. ■

Sea $x \bigtriangledown y$ una abreviatura para $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y)$

Lema 1.3.5 *Sea B una Álgebra Booleana y F un filtro sobre B. Si $x, y \in B$ entonces*
(a) $x \sim_F y$ si y sólo si $x \bigtriangledown y \in F$
(b) $x \bigtriangledown y = 1$ si y sólo si $x = y$

Demostración. Para el inciso (a) no es complicado verificar que $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = (x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)$, entonces:
$y \wedge [(x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)] = [y \wedge (x^* \wedge y^*)] \vee [y \wedge (x \wedge y)] = y \wedge x$
$x \wedge [(x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)] = [x \wedge (x^* \wedge y^*)] \vee [x \wedge (x \wedge y)] = x \wedge y$
De donde se sigue que
$y \wedge [(x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)] = x \wedge [(x^* \wedge y^*) \vee (x \wedge y)]$
o bien
$y \wedge (x \bigtriangledown y) = x \wedge (x \bigtriangledown y)$.
Ahora, por este resultado $x \bigtriangledown y \in F$ implica directamente que $x \sim_F y$.

Para el inverso, tenemos quepara alguan $d \in F$, $d = 1 \wedge d = (y \vee y^*) \wedge d = (y \wedge d) \vee (y^* \wedge d) = (x \wedge d) \vee (y^* \wedge d) = (x \vee y^*) \wedge d$ lo cual implica que $d \leq (x \vee y^*)$ y por ser F filtro $x \vee y^* \in F$. Análogamente $x^* \vee y \in F$, y nuevamente por ser F filtro, $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) \in F$.

En el inciso (b), cuando $x = y$ trivialmente $x \bigtriangledown y = 1$. Para el caso inverso, si $(x \vee y^*) \wedge (x^* \vee y) = 1$ entonces, necesariamente $(x \vee y^*) = 1$ y $(x^* \vee y) = 1$. El resultado deseado se sigue de recordar que en las Álgebras Booleanas se cumplen las leyes de De Morgan y que el complemento de cada elemento es único. ■

Si $|x|$ es la clase de equivalencia, bajo la relación $\sim_F$, a la cual pertenece el elemento x de B, el lema 1.3.4 demuestra que el conjunto $B/F = \{|x| \big| x \in B\}$ puede ser dotado de una estructura de Álgebra Boolena si definimos, para cada $x, y \in B$

$$\begin{aligned} |x| \wedge |y| &= |x \wedge y| \\ |x| \vee |y| &= |x \vee y| \\ |x|^* &= |x^*| \end{aligned}$$

El conjunto B/F con esta estructura es llamada el *álgebra cociente de B módulo F*. La función $h : B \to B/F$ tal que $h(x) = |x|$ es claramente un homomorfismo, es llamada el *homomorfismo canónico* de B sobre B/F, y, como en cualquier álgebra cociente, se cumple el siguiente lema.

Lema 1.3.6 *Sea B una Álgebra Booleana y F un filtro sobre B. Si $x \in B$, $|x| = 1$ en B/F si y sólo si $x \in F$.*

Demostración. Basta notar que si $x \in F$ entonces $|x| = F$, y recordar el teorema 1.3.2 aunado al hecho de que $1 \in F$ para todo filtro F. ■

Lema 1.3.7 *Sea $f : B_1 \to B_2$ un homomorfismo entre dos Álgebras de Boole. El conjunto $F = \{x \in B_1 | f(x) = 1\}$ es un filtro y $f[B_1]$ es isomorfo a B_1/F.*

Demostración. Verificar que F es un filtro es rutinario, por lo que omitiremos la demostración. ■

Para demostrar la segunda parte notemos que, para cualesquiera $x, y \in B_1$

$$\begin{array}{llll} |x| = |y| & \text{si y sólo si} & x \sim_F y & \\ & \text{si y sólo si} & x \bigtriangledown y \in F & \text{por el lema 1.3.5} \\ & \text{si y sólo si} & f(x \bigtriangledown y) = 1 & \text{por la definición de F} \\ & \text{si y sólo si} & f(x) \bigtriangledown f(y) = 1 & \text{pues } f \text{ es un homomorfismo} \\ & \text{si y sólo si} & f(x) = f(y) & \text{por el lema 1.3.5} \end{array}$$

donde $|x|$ es la imagen de x bajo el homomorfismo canónico $h : B_1 \to B_1/F$.

Entonces, la función $g : B_1/F \to f[B_1]$ definida por $g(|x|) = f(x)$ está bien definida y es inyectiva. Es fácil comprobar que g es un homomorfismo de B_1/F en $f[B_1]$. Por lo tanto $B_1/F \cong f[B_1]$. ■

El filtro F del lema anterior es llamado la *coraza* del homomorfismo f. La noción dual de la coraza es la de *núcleo* (o *kernel*) del homomorfismo, mucho más conocida para los algebristas, y que está definida por $\{x|f(x) = 0\}$. Se puede demostrar que el núcleo de un homomorfismo es un ideal, y, de hecho, el lema 1.3.7 normalmente se enuncia en su forma dual, es decir, en términos de ideales.

El siguiente es un resultado típico del álgebra para homomorfismos.

Lema 1.3.8 *Un homomorfismo entre Álgebras de Boole es inyectivo si y solamente si su coraza es* $\{1\}$.

Demostración. Sea $f : B_1 \to B_2$ un homomorfismo entre dos Álgebras Booleanas con coraza $\{1\}$. Si $f(x) = f(y)$ entonces $f(x \vee y^*) = f(x) \vee f(y^*) = f(x) \vee f(y)^* = f(x) \vee f(x)^* = 1$. Análogamente $f(x^* \vee y) = 1$ y por tanto $f(x \bigtriangledown y) = 1$. Así, $x \bigtriangledown y = 1$ y por el lema 1.3.5, podemos concluir que $x = y$ y por tanto f es inyectiva. El inverso es trivial. ■

Diremos que un filtro en una Álgebra Booleana F es primo si cada vez que $x \vee y \in F$, entonces $x \in F$ o $y \in F$.

Teorema 1.3.9 *Sea F un filtro sobre una álgebra Booleana B. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $B/F \cong \mathbf{2}$

(b) F es un ultrafiltro

(c) F es primo

(d) para cualquier $x \in B$, x está en F o x^* está en F

Demostración. $(b) \Leftrightarrow (d)$. Es el lema 1.2.4.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea $|x|$ la imagen de x bajo el homomorfismo canónico de B sobre B/F y supongamos que $|x| \neq 1$. Se sigue del lema 1.3.6 que $x \notin F$, y utilizando la hipótesis obtenemos que $x^* \in F$. Entonces $|x^*| = |x|^* = 1$, por lo que $|x| = |x|^{**} = 0$, y así:

$$B/F = \{0, 1\} \cong \mathbf{2}.$$

$(a) \Rightarrow (d)$ Si $x \notin F$ entonces $|x| \neq 1$ y, por hipótesis, $|x| = 0$ por lo que $|x^*| = 1$ y $x^* \in F$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos $x \vee y \in F$ y $x \notin F$. Sea $G = ((F \cup \{x\})^c)^0$. Como por hipótesis F es maximal, G no es un filtro, entonces para algún $z \in F$, $z \wedge x = 0$. Como $z, x \vee y \in F$, $z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0 \vee (z \wedge y) = z \wedge y \in F$. Pero $z \wedge y \leq y$ y como F es un filtro, $y \in F$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Para cualquier $x \in B$, $x \vee x^* = 1 \in F$ y, por hipótesis, $x \in F$ o $x^* \in F$. ■

Sea $\{A_n | n < \omega\}$ una colección numerable de subconjuntos de una Álgebra Booleana, cada uno de los cuales tiene ínfimo. Digamos

$$\text{para } n \in \omega \qquad a_n = inf(A_n) \tag{[\Pi]}$$

Diremos que un ultrafiltro *preserva ínfimos* $[\Pi]$ si y sólo si

$$\text{para } n \in \omega \qquad h(a_n) = \inf\{h(a) | a \in A_n\}$$

donde h es el homomorfismo canónico de B sobre $B/F \cong \mathbf{2}$.

Teorema 1.3.10 (Lema de Tarski) *Sea B una Álgebra de Boole. Si x es un elemento de B distinto de cero y $\{A_n | n \in \omega\}$ es una familia de subconjuntos de B tal que para todo $n \in \omega$ el ínfimo de A_n pertenece a B, entonces hay un ultrafiltro en B que contiene a x y que preserva ínfimos* $[\Pi]$.

Demostración. Sea $a_n = \inf(A_n)$. Definiremos por recursión una sucesión $\{b_n | n \in \omega\}$ tal que para cada $n \in \omega$, $b_n \in A_n$ y $\{x, a_0 \vee b_0^*, \ldots, a_n \vee b_n^*\}$ tenga la pif.

Cuando $m = 0$, supongamos que no existen elementos en A_0 que cumplan lo deseado, es decir, que para cada $b \in A_0$, $x \wedge (a_0 \vee b^*) = 0$. Como

$$x \wedge (a_0 \vee b^*) = (x \wedge a_0) \vee (x \wedge b^*),$$

tenemos que $x \wedge a_0 = 0$ y $x \wedge b^* = 0$ para cada $b \in A_0$, de donde $x \leq b$ para todo $b \in A_0$, y así, $x \leq a_0 = \inf(A_0)$. Entonces $x = x \wedge a_0 = 0$, contradiciendo nuestra hipótesis; como la contradicción surge de suponer que para toda $b \in A_0$, $x \wedge (a_0 \vee b) = 0$, debe de existir $b \in A_0$ tal que $x \wedge (a_0 \vee b)$ sea distinto de cero. Definimos a b_0 como dicha b.

Para el paso recursivo, consideramos $m \in \omega$, $0 < m$, tal que para toda $n \in m$ hemos encontrado una b_n que satisfaga las condiciones deseadas, para facilitar la exposición del argumento, definimos

$$y = x \wedge (a_0 \vee b_0^*) \wedge \cdots \wedge (a_{m-1} \vee b_{m-1}^*)$$

Así, $y \neq 0$.

Supongamos que para cada $b \in A_m$, $y \wedge (a_m \vee b^*) = 0$. Como

$$y \wedge (a_m \vee b^*) = (y \wedge a_m) \vee (y \wedge b^*),$$

se sigue que $y \wedge a_m = 0$ y $y \wedge b^* = 0$ para cada $b \in A_m$. Entonces $y \leq b$ para cada $b \in A_m$ y, por tanto, $y \leq a_m = \inf(A_m)$. Entonces $y = y \wedge a_m = 0$, lo cual resulta en una contradicción a nuestra hipótesis y existe entonces algún $b_m \in A_m$ con

$$y \wedge (a_m \vee b_m^*) \neq 0$$

Entonces, para $n \leq m$ podemos encontrar b_n que satisfaga las condiciones deseadas. Así, podemos encontrar una b_n así para toda $n \in \omega$, de lo cual podemos inferir que el conjunto

$$\{x, a_0 \vee b_0^*, \ldots, a_n \vee b_n^*, \ldots\}$$

tiene la pif y puede ser extendido a un ultrafiltro F en B. Para terminar demostraremos que F preserva la propiedad [Π].

Sea h el homomorfismo canónico de B sobre B/F. Como $a_n \vee b_n^* \in F$, $h(a_n) \vee h(b_n)^* = h(a_n \vee b_n^*) = 1$ por lo que $h(a_n) \geq h(b_n)$, y así

$$\inf\{h(b) | b \in A_n\} \leq h(a_n) \tag{1}$$

Como $a_n = \inf(A_n)$, $a_n \leq b$ para cada $b \in A_n$ y, entonces, $h(a_n) \leq h(b)$ para cada $b \in A_n$. Por lo que

$$h(a_n) \leq \inf\{h(b) | b \in A_n\} \tag{2}$$

De (1) y (2) podemos concluir que

$$h(a_n) = \inf\{h(b) | b \in A_n\}$$

Y por lo tanto, F preserva la propiedad [Π]. ■

Finalizamos esta sección con uno de los teoremas clásicos de las Álgebras Booleanas, que puede utilizarse para reducir el estudio de las Álgebras Booleanas en general, al estudio de las subálgebras de las álgebras potencia[4] en particular, a las cuales llamaremos *álgebras de conjuntos*.

[4]Definidas en la sección 1.1.

Teorema 1.3.11 (Teorema de representación de Stone) *Toda Álgebra de Boole es isomorfa a una álgebra de conjuntos.*

Demostración. Sea B una Álgebra Booleana y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los ultrafiltros en B. Como B tiene al menos dos elementos, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Definamos la función $h : B \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ por

$$h(b) = \{D \in \mathcal{A} | b \in D\}$$

Así, h asigna a cada elemento b de B el conjunto de todos los ultrafiltros que contienen a b. Observemos que h es inyectiva, pues si a y b son elementos distintos de B entonces hay $D \in \mathcal{A}$ tal que $a \in D$ y $b \notin D$. Así, $D \in h(a) - h(b)$, de modo que $h(a) \neq h(b)$. Además, h es un homomorfismo de B en $\mathcal{A}$, pues

$$\begin{array}{rl}
h(a^*) = \mathcal{A} - h(a) & \text{ya que } a^* \in D \text{ si y sólo si } a \notin D \\
h(a \vee b) = h(a) \cup h(b) & \text{ya que } a \vee b \in D \text{ si y sólo si } a \in D \text{ o } b \in D \\
h(a \wedge b) = h(a) \cap h(b) & \text{ya que } a \wedge b \in D \text{ si y sólo si } a \in D \text{ y } b \in D \\
h(0) = \emptyset \text{ y } h(1) = \mathcal{A} & \text{ya que } 0 \notin D \text{ y } 1 \in D \text{ para todo ultrafiltro } D
\end{array}$$

Así, h es una inmersión de B en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Sea $\mathcal{B}$ la imagen de h. $\mathcal{B}$ es el universo de una subálgebra de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y h es un isomorfismo entre B y $\mathcal{B}$. ∎

Capítulo 2

Álgebras de Lindenbaum

2.1. Sistemas formales

Sea S un conjunto no vacío. A los elementos de S les llamaremos símbolos de S. Diremos que, una sucesión finita de símbolos de S, forma una expresion de S. Al conjunto de expresiones de S lo denotaremos por $\mathbb{E}_S$.

Definición 2.1.1 *Sea S un conjunto de símbolos y $\Phi \subseteq \mathbb{E}_S$, no vacío. Por un Lenguaje Formal (L. F.),* L, *entederemos a la pareja ordenada*

$$\mathrm{L} = \langle S, \Phi \rangle.$$

A S de le llamará el alfabeto de L, *y a Φ el conjunto de fórmulas de* L.

Por lo general para construir Φ a partir de $\mathbb{E}_S$ se dan una serie de reglas, llamadas *reglas de formación de las fórmulas de* L, y que proporcionan un mecanismo efectivo para decidir si una expresión dada pertenece o no a Φ.

Definición 2.1.2 *Si L_1 y L_2 son dos lenguajes formales, decimos que L_1 es un* sublenguaje *de L_2, denotado por $\mathrm{L}_1 < \mathrm{L}_2$ si y sólo si:*
(i) El alfabeto de L_1 está contenido en el de L_2
(ii) El conjunto de fórmulas de L_1 está conformado por todas aquellas fórmulas de L_2 que sólo tienen símbolos de L_1.

Sea L$= \langle S, \Phi \rangle$ un L. F. Por una regla de inferencia R^n de aridad n en L, con $n \in \mathbb{N}$ y $2 \leq n$, entenderemos una relación n-aria sobre Φ, es decir, un subconjunto del producto cartesiano Φ^n, de tal suerte que para todo conjunto de $n-1$ fórmulas y cada fórmula φ, se pueda decidir efectivamente si las $n-1$ fórmulas junto con φ están en la relación R^n, y esto debe ocurrir si y sólo si cualquier permutación de las $n-1$ fórmulas, junto con φ están en R^n. En tal caso diremos que φ es *consecuencia directa* de las $n-1$ fórmulas en virtud de la regla R^n.

Definición 2.1.3 *Sea* $\mathrm{L} = \langle S, \Phi\rangle$ *un L. F. y sea* $\{R_i\}_{i\in I}$ *con* I *finito, un conjunto no vacío de reglas de inferencia en L. Por un Sistema Formal, con lenguaje formal* L*, entenderemos a la pareja ordenada*

$$SF_{\mathrm{L}} = \langle \mathrm{L}, \{R_i\}_{i\in I}\rangle.$$

En adelante, si no se especifica otra cosa, cuando hablemos del lenguaje L, entenderemos lenguaje formal $\mathrm{L}{=}\langle S, \Phi\rangle$, y cuando hablemos del sistema SF_{L}, entederemos sistema formal $SF_{\mathrm{L}} = \langle \mathrm{L}, \{R_i\}_{i\in I}\rangle$. Si hemos fijado un lenguaje, L, para trabajar, omitiremos el subíndice $_L$ y denotaremos al sistema únicamente por SF.

Definición 2.1.4 *Una restricción a la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas es una condición, especificada de modo preciso, que deben satisfacer la regla y las fórmulas, y que involucra a la derivación considerada en el contexto de la aplicación de la regla y que debe ser decidible*[1]*.*

Sean $\Delta \subseteq \Phi$ y $\varphi \in \Phi$ de L. Se dice que φ es *consecuencia* de Δ o *deducible a partir de* Δ en SF_{L} si y sólo si existe una sucesión finita $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ de fórmulas de L tal que:

(i) $\varphi_n = \varphi$.

(ii) Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, o φ_j es un elemento de Δ o φ_j es consecuencia directa de alguna o algunas de las fórmulas anteriores de la sucesión, en virtud de alguna de las reglas de inferencia de SF_{L}, las cuales pueden tener o no *restricciones*.

La notación usual es:

$$\Delta \vdash_{SF_L} \varphi$$

Si este es el caso, se dirá que la sucesión $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es *una deducción* de φ a partir de Δ en SF_{L} y a los elementos de Δ les llamaremos *hipótesis*.

Utilizando únicamente esta definición es posible enunciar un pequeño lema, válido para cualquier sistema formal.

[1] Es decir, si existe un procedimiento efectivo para decidir si una fórmula dada de L se deriva a partir de la aplicación de la regla con una restricción dada.

Un conjunto efectivamente decidible de objetos es un conjunto para el que existe un procedimiento mecánico que determina si un objeto pertenece o no pertenece al conjunto. Por un *procedimiento mecánico* nos referimos a un procedimiento que puede llevarse a cabo de manera automática, sin utilizar originalidad o ingenio; un procedimiento que una computadora pueda llevar a cabo.

Lema 2.1.5 (Lema de Finitud) *Si* L *es un lenguaje,* SF_{L} *un sistema formal, y* Δ *es un subconjunto de las fórmulas de* L*, entonces* $\Delta \vdash_{SF_{\mathrm{L}}} \varphi$ *si y sólo si existe un subconjunto finito* Γ *de* Δ *tal que* $\Gamma \vdash_{SF_{\mathrm{L}}} \varphi$*.*

Demostración. Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ una deducción de φ a partir de Δ. Sea Γ el conjunto de las fórmulas de Δ que aparecen en esta deducción. Γ es finito y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una deducción de φ a partir de Γ. ■

Si Δ es el conjunto unitario que contiene únicamente a la fórmula ψ, y $\Delta \vdash_{SF_{\mathrm{L}}} \varphi$, diremos que φ *se deduce a partir de* ψ, y lo denotaremos:

$$\psi \vdash_{SF_{\mathrm{L}}} \varphi.$$

También es útil diferenciar el caso en el que la fórmula φ *se deduce a partir de* ψ *módulo* Δ. Si Δ es un subconjunto de Φ, y se tiene que $\Delta \cup \{\psi\} \vdash \varphi$, lo denotaremos por:

$$\Delta; \psi \vdash_{SF_{\mathrm{L}}} \varphi.$$

Cuando hayamos fijado un lenguaje L y un sistema SF_{L}, podemos omitir el subíndice para el símbolo de deducción:

$$\Delta; \psi \vdash \varphi.$$

Finalmente, si Δ es el conjunto vacío, y tenemos que $\Delta \vdash \varphi$, podemos escribir únicamente:

$$\vdash \varphi.$$

Definición 2.1.6 *Considérese a* SF_{L}*. Sea* $\Gamma \subseteq \Phi$*,por la cerradura deductiva de* Γ*, denotada por* $\Gamma^{\vdash}$*, endenderemos al conjunto de todas las fórmulas que se deducen formalmente a partir de* Γ *en* SF_{L}*.*

$$\Gamma^{\vdash} = \{\varphi \in \Phi | \Gamma \vdash \varphi\}$$

Partiendo de este concepto, podemos dar las siguientes definiciones:

Definición 2.1.7 *Considérese* $SF_{\mathrm{L}} = \langle \mathrm{L}, \{R_i\}_{i \in I} \rangle$ *y sea* $\mathbf{T} \subseteq \Phi$*. Se dice que* $\mathbf{T}$ *es una teoría formal si y sólo si* $\mathbf{T}^{\vdash} = \mathbf{T}$*. A los elementos de* $\mathbf{T}$ *se les llamará teoremas formales de* $\mathbf{T}$*.*

Definición 2.1.8 *El lenguaje de la teoría* $\mathbf{T}$*,* $\mathrm{L}(\mathbf{T})$*, será el sublenguaje de* L *que tiene como conjunto de símbolos al conjunto de símbolos que intervienen en la teoría* $\mathbf{T}$*.*

Definición 2.1.9 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría formal, se dice que* $\mathbf{T}$ *es axiomatizable si y sólo si existe* $\Gamma \subseteq \mathbf{T}$*,* Γ *decidible*[2]*, tal que* $\Gamma^{\vdash} = \mathbf{T}$*. A* Γ *se le llamará conjunto de axiomas de* $\mathbf{T}$*, y a los elementos de* Γ *axiomas de* $\mathbf{T}$*.*

Si trabajamos únicamente con la definición de teoría formal tal cual se acaba de dar, nos encotraremos con un concepto demasiado general, que abarca a una gran cantidad de teorías; algunas que pueden deducir a cualquier fórmula del lenguaje, otras que no pueden deducir nada más allá de su propio conjunto de axiomas, y, aun cuando es cierto que todas ellas cumplen el ser conjuntos deductivamente cerrados, hay otras propiedades con las que podemos separar algunos tipos más específicos de teorías. Es común exigirle a las teorías ciertas propiedades adicionales, como es el caso de la consistencia, la correctud y la completud. Definamos pues estas propiedades.

Definición 2.1.10 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría formal. Se dice que* $\mathbf{T}$ *es una teoría no trivial si y sólo si existe* $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbf{T})$[3] *tal que* $\varphi \notin \mathbf{T}$*. En caso de que* $\mathrm{L}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$*, diremos que* $\mathbf{T}$ *es trivial.*

En caso de que $\mathbf{T}$ sea axiomatizable, la definición anterior es equivalente a pedir que exista $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbf{T})$ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$ con Γ conjunto de axiomas para $\mathbf{T}$.

En un sistema con símbolo de negación podemos enunciar una propiedad que, de cumplirse, tendrá como consecuencia directa la no trivialidad del sistema.

Definición 2.1.11 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría formal en un sistema con símbolo de negación, diremos que* $\mathbf{T}$ *es consistente si y sólo si no existe* $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbf{T})$ *tal que a partir de* $\mathbf{T}$ *se deduce* φ *y* $\neg\varphi$*.*

Es claro que la consistencia de una teoría implica su no trivialidad, pues siempre que una fórmula se deduzca a partir de la teoría, no podrá deducirse su noegación. El recíproco no es cierto en cualquier sistema formal que tenga símbolo de negación, sin embargo, si el sistema cumple ciertas condiciones adicionales, para las teorías formales de ese sistema será equivalente ser consistentes a ser no triviales.

Definición 2.1.12 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría formal. Se dice que* $\mathbf{T}$ *es correcta respecto a una propiedad* P *relativa a las fórmulas si y sólo si todo teorema de* $\mathbf{T}$ *tiene la propiedad* P*.*

[2] Es decir, si existe un procedimiento efectivo para decidir si una fórmula dada de L es un axioma.

[3] Donde $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbf{T})$ es un abuso de notación para decir que φ es una fórmula de $\mathrm{L}(\mathbf{T})$.

Definición 2.1.13 *Sea* $\mathbf{T}$ *una teoría formal. Se dice que* $\mathbf{T}$ *es completa respecto a una propiedad* P *de fórmulas si y sólo si toda fórmula de* $\mathrm{L}(\mathbf{T})$ *que tenga la propiedad* P*, es un teorema de* $\mathbf{T}$*.*

Si se está formalizando una teoría intuitiva, por lo general, la propiedad P respecto a la cual se pide correctud es la siguiente: una fórmula φ tiene la propiedad P si y sólo si "el enunciado cuya formalización es φ es verdadero en la teoría intuitiva". Esta misma propiedad también es usualmente utilizada para hablar de la completud de una teoría.

2.2. Álgebras de Lindenbaum

Con lo que hemos definido hasta el momento es suficiente para relacionar a las Álgebras Booleanas con la Lógica Matemática. Podemos dotar de una estructura de Álgebra Booleana al conjunto de fórmulas, Φ, de un lenguaje L, apoyados en un sistema SF_{L}. Inicialmente no le pedimos ningún requisito particular ni al lenguaje L, ni al sistema SF_{L}, pero inevitablemente surge la pregunta, ¿se le puede dar estructura de Álgebra Booleana al conjunto de fórmulas de cualquier lenguaje L, utilizando cualquier sistema SF_{L}? Sabemos que Φ es un conjunto, revisemos entonces qué le falta a éste para ser una Álgebra de Boole.

Fijemos un lenguaje L y un sistema SF_{L}. Necesitamos que el conjunto de fórmulas de L, Φ, sea una red, entonces, antes que nada, necesitamos que sea un conjunto parcialmente ordenado. ¿Y qué es un orden parcial? A fin de cuentas un orden parcial no es más que una relación binaria, reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Recordemos que se definió, para cualesquiera dos fórmulas φ y ψ, cuándo alguna de las dos se deduce a partir de la otra módulo un conjunto de hipótesis Δ, entonces la relación 'ser deducible a partir de, módulo Δ', '$\Delta;\vdash$', es una relación binaria. Al contar con una relación binaria, podemos ver qué características debe de cumplir para que ésta pueda ser el orden de una Álgebra Booleana.

Notemos que si la relación $\Delta;\vdash$ es un preorden[4] sobre Φ, y φ, ψ son fórmulas de L, $\Delta \subseteq \Phi$, podemos definir la relación $\sim_{\Delta;\vdash}$ dada por:

$$\psi \sim_{\Delta;\vdash} \varphi \text{ si y sólo si } \Delta;\psi \vdash \varphi \text{ y } \Delta;\varphi \vdash \psi,$$

la cual resulta ser una relación de equivalencia sobre Φ. Si consideramos a las clases de equivalencia de cada fórmula $\varphi \in \Phi$, $|\varphi| = \{\psi \in \Phi \big| \psi \sim_{\Delta;\vdash} \varphi\}$,

[4]Es decir, que para cualesquiera fórmulas de L, φ, ψ y χ, se tenga $\Delta;\varphi \vdash \varphi$ y, si $\Delta;\varphi \vdash \psi$ y $\Delta;\psi \vdash \chi$, entonces $\Delta;\varphi \vdash \chi$.

y al conjunto de todas las clases de equivalencia $\Phi/\sim_{\Delta;\vdash} = \{|\varphi| \,|\, \varphi \in \Phi\}$, al que denotaremos por $|\Phi|$, podemos definir un orden total reflexivo sobre él, $\leq_{\Delta;\vdash}$, dado por:

$$|\varphi| \leq_{\Delta;\vdash} |\psi| \text{ si y sólo si } \Delta;\varphi \vdash \psi.$$

Para obtener la estructura de orden parcial bastó con pedirle a la relación '$\Delta;\vdash$' que sea un preorden. El siguiente paso es revisar qué necesita esta estructura para ser una red. Consideremos las siguientes propiedades:

LA_1 Para cualesquiera dos fórmulas de L, φ y ψ existe una fórmula χ tal que $\Delta;\chi \vdash \varphi$, $\Delta;\chi \vdash \psi$ y además, si se tiene que para alguna fórmula ξ, $\Delta;\xi \vdash \varphi$ y $\Delta;\xi \vdash \psi$, entonces $\Delta;\xi \vdash \chi$.

LA_2 Para cualesquiera dos fórmulas de L, φ y ψ existe una fórmula χ tal que $\Delta;\varphi \vdash \chi$, $\Delta;\psi \vdash \chi$ y además, si se tiene que para alguna fórmula ξ, $\Delta;\varphi \vdash \xi$ y $\Delta;\psi \vdash \xi$, entonces $\Delta;\chi \vdash \xi$.

Observemos que, si la relación $\Delta;\vdash$ cumple LA_1, para cualesquiera dos fórmulas $\varphi, \psi \in \Phi$, el conjunto $\{|\varphi|, |\psi|\}$ tiene ínfimo con el orden $\leq_{\Delta;\vdash}$, y tendrá supremo si se cumple LA_2. Entonces bastará con que $\Delta;\vdash$ cumpla LA_1 y LA_2 para que el conjunto $|\Phi|$ sea una red.

Necesitamos ahora que nuestra red sea complementada, con elementos máximo y mínimo. Para estas condiciones podemos tomar las siguientes propiedades:

LA_3 Existe una fórmula de L, digamos *1*, tal que para cualquier fórmula $\varphi \in \Phi$, $\Delta;\varphi \vdash \mathit{1}$.

LA_4 Existe una fórmula de L, digamos *0*, tal que para cualquier fórmula $\varphi \in \Phi$, $\Delta;\mathit{0} \vdash \varphi$.

Las clases de equivalencia de las fórmulas *1* y *0* bajo la relación $\sim_{\Delta;\vdash}$ serán el máximo y el mínimo de la red, respectivamente. Apoyándonos en la existencia de estas dos fórmulas, podemos solicitar la existencia de complementos para cada elemento de $|\Phi|$, para lo cual bastará tomar las siguientes 2 condiciones:

LA_5 Para cada fórmula $\varphi \in \Phi$, existe una fórmula ψ tal que, si χ es la fórmula que existe para φ y ψ en virtud de la propiedad LA_1, $\Delta;\chi \vdash \mathit{0}$. Además, si ξ es la fórmula que existe para φ y ψ en virtud de la propiedad LA_2, entonces $\Delta;\mathit{1} \vdash \xi$.

Hasta el momento, un sistema cuya relación de deducibilidad cumpla las propiedades $LA_1 - LA_5$, podrá darle al conjunto de fórmulas de su lenguaje la estructura de red complementada. Nos faltan dos condiciones para obtener la estructura de Álgebra Booleana, la distributividad y la existencia de al menos dos elementos. La existencia de dos elementos distintos puede postularse solicitando la siguiente propiedad:

LA_6 Existen φ y ψ fórmulas de L tales que $\Delta; \varphi \nvdash \psi$ o $\Delta; \psi \nvdash \varphi$.

Con lo que aseguramos que la fórmula ψ no está en la clase de equivalencia de φ.

Finalmente tenemos que asegurar las distributividades, y, como ya vimos, basta con pedir sólo una de las dos desigualdades, justamente las que postularemos que necesita cumplir nuestro sistema. Para facilitar la enunciación de la propiedad, si φ y ψ son dos fórmulas de L, abusaremos del lenguaje y la notación para llamar *ínfimo* de φ y ψ, $\varphi \wedge \psi$, a la fórmula que existe para estas dos en virtud de la propiedad LA_1, y *supremo* de φ y ψ, $\varphi \vee \psi$ a la fórmula que existe para estas dos por la propiedad LA_2.

LA_7 Para cualesquiera φ, ψ y χ fórmulas de L, se cumplen:

$$\Delta; (\varphi \vee \psi) \wedge \chi \vdash (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$
$$\Delta; (\varphi \wedge \psi) \vee \chi \vdash (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

Si un sistema SF_L con su relación de deducibilidad módulo Δ, '$\Delta; \vdash$' cumple $LA_1 - LA_7$, entonces podemos afirmar que $\langle |\Phi|, \leq_{\Delta;\vdash} \rangle$, es una Álgebra Booleana, donde Φ es el conjunto de fórmulas de L, y $\leq_{\Delta;\vdash}$ es el orden parcial antes definido.

En este punto es conveniente hacer notar dos situaciones. Recalquemos que la notación utilizada para LA_7, *i.e.*, $\varphi \wedge \psi$ y $\varphi \vee \psi$ fue un abuso, pero observemos lo mucho que facilitó la manera de manejar los ínfimos y los supremos, de aquí que se nos ocurra la posibilidad de pedirle más condiciones o condiciones alternativas al sistema, en pos de un manejo mucho más cómodo de todas estas propiedades, claro, siempre con el riesgo de perder generalidad sobre los sistemas en los que podemos trabajar.

La primera idea que nos viene a la mente es la de definir conectivos, que fue lo que se utilizó como abuso de notación para relacionar dos fórmulas de nuestro lenguaje. Los conectivos son símbolos que relacionan a las fórmulas de nuestro lenguaje, por ejemplo, para representar a otras fórmulas, *v.g.*, podemos pedir al sistema que sea posible definir el conectivo '$\wedge$', que se utilizará de la siguiente manera: $\varphi \wedge \psi$ representará a la fórmula que existe para φ y ψ por la propiedad LA_1.

Dichos conectivos no necesariamente serán parte del lenguaje, pues como se mencionó anteriormente, lo único que necesitamos es que sea posible definirlos. Remitiéndonos nuevamente a nuestro ejemplo, lo que necesitamos para definir al conectivo '$\wedge$' es que **exista** la fórmula que va a representar $(\varphi \wedge \psi)$, y el símbolo '$\wedge$' no tiene por qué ser parte del alfabeto de L.

Podemos dar una nueva lista de propiedades que debe de cumplir un sistema para darle a su conjunto de fórmulas estructura de Álgebra Booleana y que involucren a los conectivos que propongamos. Consideraremos 3 conectivos, '$\wedge$', '$\vee$'y '$\neg$', de aridades $2, 2$ y 1, respectivamente. Así, un sistema SF_L podrá dotar de estructura de Álgebra Booleana a su conjunto de fórmulas si además de cumplir las propiedades LA_3, LA_4 y LA_6, cumple también:

LA'_1 Es posible definir el conectivo binario '$\wedge$' tal que para cualesquiera dos fórmulas de L, φ y ψ, $(\varphi \wedge \psi)$ representa a una fórmula de L que cumple $\Delta; (\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi$, $\Delta; (\varphi \wedge \psi) \vdash \psi$ y además, si se tiene que para alguna fórmula ξ, $\Delta; \xi \vdash \varphi$ y $\Delta; \xi \vdash \psi$, entonces $\Delta; \xi \vdash (\varphi \wedge \psi)$.

LA'_2 Es posible definir el conectivo binario '$\vee$' tal que para cualesquiera dos fórmulas de L, φ y ψ, $(\varphi \vee \psi)$ representa a una fórmula de L que cumple $\Delta; \varphi \vdash (\varphi \vee \psi)$, $\Delta; \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$ y además, si se tiene que para alguna fórmula ξ, $\Delta; \varphi \vdash \xi$ y $\Delta; \psi \vdash \xi$, entonces $(\varphi \vee \psi) \vdash \xi$.

LA'_5 Es posible definir el conectivo 1-ario '$\neg$' tal que para cada fórmula $\varphi \in \Phi$, $\neg\varphi$ representa a una fórmula de L que cumple $\Delta; (\varphi \wedge \neg\varphi) \vdash \mathit{0}$. Además, $\Delta; \mathit{1} \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$.

LA'_7 Para cualesquiera φ, ψ y χ fórmulas de L, los conectivos binarios definidos cumplen:

$$\Delta; (\varphi \vee \psi) \wedge \chi \vdash (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$$
$$\Delta; (\varphi \wedge \psi) \vee \chi \vdash (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$$

Tenemos ahora una lista alternativa de propiedades, que le podemos requerir a un sistema para dotar a su conjunto de fórmulas de la estructura deseada, sin embargo, no hay una diferencia sustancial entre las propiedades LA_i y las propiedades LA'_i. Además, en el fondo, lo que estamos pidiendo es que existan ciertos conjuntos de fórmulas, pero, aunque podemos representar esas fórmulas con los conectivos que definimos, todavía estamos utilizando directamente en cada una de las condiciones que enlistamos la noción de deducibilidad módulo Δ, representada por '$\Delta; \vdash$'.

Podemos definir al nuevo conectivo '$\to$', que fungirá como un representante de la relación 'ser deducible a partir de, módulo Δ' en el lenguaje del sistema. Sin embargo, a diferencia de los tres conectivos definidos anteriormente, necesitaremos que '$\to$' sea un símbolo del lenguaje. Esto porque, pediremos que exista un conectivo en el sistema tal que, si φ y ψ son fórmulas de L y $\Delta \subseteq \Phi$, se cumple que:

$$\Delta; \varphi \vdash \psi \text{ si y sólo si } \Delta \vdash \varphi \to \psi. \qquad [\star]$$

Donde $\varphi \to \psi$ es una fórmula del lenguaje, que representa la deducibilidad de ψ a partir de φ módulo Δ. Adicionalmente tenemos que, dados $[\star]$ y la definición de $\leq_{\Delta;\vdash}$ se cumple:

$$|\varphi| \leq_{\Delta;\vdash} |\psi| \text{ si y sólo si } \Delta \vdash \varphi \to \psi$$

Ahora, en vez de pedir que nuestra relación de deducibilidad de una fórmula a partir de otra módulo Δ cumpla ciertas propiedades, estas propiedades se podrán compensar pidiendo que Δ deduzca ciertas fórmulas, *e.g.*, la condición LA'_1 se expresaría de la siguiente manera:

LA_1 Es posible definir el conectivo binario '$\wedge$' tal que para cualesquiera dos fórmulas de L, φ y ψ, $(\varphi \wedge \psi)$ representa a una fórmula tal que $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ y $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ son deducibles a partir de Δ. Además, si se tiene que para alguna fórmula ξ, las fórmulas $\xi \to \varphi$ y $\xi \to \psi$ se deducen a partir de Δ, entonces $\Delta \vdash \xi \to (\varphi \wedge \psi)$, o bien, $\Delta \vdash (\xi \to \varphi) \to \Big((\xi \to \psi) \to (\xi \to [\varphi \wedge \psi])\Big)$.

Tampoco es perceptible una ganancia abrumadora en la simpleza de las condiciones, pero recordemos que todavía estamos trabajando con un sitema formal arbitrario, al que únicamente le estamos pidiendo que cumpla $LA'_1 - LA'_7$. El último paso que daremos será pedir que los conectivos formen efectivamente parte del lenguaje, así, en vez de pedir la capacidad de definir un conectivo que represente una fórmula, pediremos directamente la deducibilidad de ciertas fórmulas a partir del conjunto fijo de hipótesis Δ. Tal vez esto ya sea demasiado pedir, pues pasamos de trabajar con un sistema que cumplía 7 propiedades a trabajar en un sistema en cuyo lenguaje aparecen 4 símbolos que representan conectivos específicos, y tal que un conjunto fijo de hipótesis pueda deducir cierto tipo de fórmulas.

No es demasiado pedir, a fin de cuentas lo que estamos haciendo es fijar esquemas de axiomas que solicitaremos puedan deducirse a partir de Δ. Veamos como podemos hacer esto.

Sea SF_{L} un sistema con lenguaje L. Si Δ es un subconjunto de Φ, y $|\Phi| = \Phi/\sim_{\Delta;\vdash} = \{|\varphi| | \varphi \in \Phi\}$, entonces $\langle |\Phi|, \leq_{\Delta;\vdash} \rangle$ es una álgebra Booleana si L tiene al conectivo '$\rightarrow$', que cumple la propiedad $[\star]$, existen al menos dos fórmulas del lenguaje, φ y ψ tales que $\Delta; \varphi \nvdash \psi$ o $\Delta; \psi \nvdash \varphi$ y a partir de Δ se deduce cualquier fórmula de la forma:

AL_{1a} $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

AL_{1b} $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

AL_2 $(\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Big((\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])\Big)$

AL_{3a} $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

AL_{3b} $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

AL_4 $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \Big((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ([\varphi \vee \psi] \rightarrow \chi)\Big)$

AL_5 $\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \psi$

AL_6 $\psi \rightarrow \varphi \vee \neg\varphi$

AL_7 $(\varphi \vee \psi) \wedge \chi \rightarrow (\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$

AL_8 $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi \rightarrow (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$

AL_9 $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Big((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\Big)$

AL_{10} $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Elegimos estas propiedades justamente para que $\langle |\Phi|, \leq_{\Delta;\vdash} \rangle$ sea una Álgebra Booleana. El lector observador habrá notado que agregamos las propiedades AL_9 y AL_{10} sin haberlas desarrollado anteriormente, pero también debe haber notado que a SF_{L} no le pedimos otra cosa que la deducibilidad de las fórmulas antes mencionadas a partir de Δ, la existencia de las fórmulas que garanticen que habrá al menos dos elementos y que '$\rightarrow$' cumpliera $[\star]$, entonces, ¿dónde queda la petición a '$\Delta; \vdash$' de ser un preorden?. En efecto, añadimos AL_9 y AL_{10} para asegurar que '$\Delta; \vdash$' se comporte como preorden, AL_9 garantizará la transitividad y AL_{10} nos brindará la reflexividad (y un poco más).

Veamos como es que esto sucede: $\Delta \vdash (\varphi \to \psi) \to \big((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)\big)$ si y sólo si $\Delta; (\varphi \to \psi) \vdash \big((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)\big)$ si y sólo si $\Delta \cup \{(\varphi \to \psi), (\psi \to \chi)\} \vdash (\varphi \to \chi)$. Por la relación existente entre '$\to$' y $\leq_{\Delta;\vdash}$, tenemos que si $|\varphi| \leq_{\Delta;\vdash} |\psi|$ y $|\psi| \leq_{\Delta;\vdash} |\chi|$, entonces $\Delta \vdash (\varphi \to \psi)$ y $\Delta \vdash (\psi \to \chi)$ y como $\Delta \cup \{(\varphi \to \psi), (\psi \to \chi)\} \vdash (\varphi \to \chi)$, se tiene que $\Delta \vdash (\varphi \to \chi)$ y podemos concluir que $|\varphi| \leq_{\Delta;} |\chi|$.

Para la reflexividad tenemos que, $\Delta \vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$, lo que sucede si y sólo si $\Delta; \varphi \vdash (\varphi \to \varphi)$ y finalmente esto es equivalente a que $\Delta \cup \{\varphi, \varphi\} \vdash \varphi$ o lo que es lo mismo $\Delta; \varphi \vdash \varphi$, que por definición nos da $|\varphi| \leq_{\Delta;\vdash} |\varphi|$.

Análogamente a la forma en que se revisaron estas propiedades, $AL_1 - AL_6$ determinan las operaciones y elementos distinguidos de una álgebra Booleana de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\varphi| \wedge |\psi| &= |\varphi \wedge \psi| \\ |\varphi| \vee |\psi| &= |\varphi \vee \psi| \\ |\varphi|^* &= |\neg\varphi| \\ 0 &= |\varphi \wedge \neg\varphi| \\ 1 &= |\varphi \vee \neg\varphi| \end{aligned}$$

Y la distributividad de las operaciones se sigue de AL_7 y AL_8.

Observemos que en las expresiones del lado izquierdo, los símbolos '$\wedge$' y '$\vee$', son las operaciones ínfimo y supremo del Álgebra Booleana; mientras que en las expresiones de lado derecho son los conectivos del sistema. Como su utilización es muy clara gracias al contexto, continuaremos utilizándolos de esta forma un tanto ambigua.

Con esto es suficiente para brindar la siguiente definición:

Definición 2.2.1 *Sea SF_{L} un sistema con lenguaje L, tal que L tiene al conectivo '$\to$', que cumple la propiedad $[\star]$ y en el que existen dos fórmulas, φ y ψ tales que $\Delta; \varphi \nvdash \psi$ o $\Delta; \psi \nvdash \varphi$; y sea Δ un subconjunto de Φ del que se deduzca cualquier fórmula representada por alguno de los esquemas $AL_1 - AL_{10}$. El Álgebra de Lindenbaum de SF_{L} sobre Δ es $\langle |\Phi|, \leq_{\Delta;\vdash} \rangle$.*

Si Δ es el conjunto vacío, $\langle |\Phi|, \leq_{\Delta;\vdash} \rangle$ simplemente será llamada el Álgebra de Lindenbaum de SF_{L}. Llamaremos *Sistema Booleano* a un sistema formal que cumpla los requerimientos de la definición anterior para dotar a su conjunto de fórmulas de una estructura de Álgebra de Boole.

El siguiente resultado será utilizado una vez en el próximo capítulo, y tendrá una aplicación más extensiva en el último capítulo, por lo que será enunciado otra vez posteriormente. Recordemos que si $\varphi \in \Phi$, entonces $|\varphi|$ será la clase de equivalencia de la fórmula φ de acuerdo a dicha relación. Además, si $\Sigma \subseteq \Phi$ es un conjunto de fórmulas, tendremos que $|\Sigma| = \{|\varphi| | \varphi \in \Sigma\}$. De esta manera $|\Sigma|$ es un subconjunto de $\mathscr{A}$, y como Σ es consistente si y sólo si para toda $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ se cumple que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ no pertenece a la clase de equivalencia del cero, o bien, $|\varphi_1| \wedge \cdots \wedge |\varphi_n| \neq 0$, tenemos que:

Lema 2.2.2 *Un conjunto de fórmulas de* L, Σ, *es consistente si y sólo si* $|\Sigma|$ *tiene la pif en* $\mathscr{A}$.

Demostración. Es clara a partir de la observación anterior. ■

Dijimos que AL_{10} nos brindaría una propiedad adicional, la caracterización de las fórmulas que pertenecen a la clase de equivalencia de $\varphi \vee \neg\varphi$, es decir, el 1 del Álgebra Booleana. Para hacerlo de manera adecuada, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3 (Modus Ponens) *Si* SF_{L} *es un sistema con un conectivo '$\rightarrow$' que cumple* $[\star]$ *y* Δ *es un subconjunto de las fórmulas de* L, *entonces,* $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ *y* $\Delta \vdash \varphi$ *implican que* $\Delta \vdash \psi$.

Demostración. Como '$\rightarrow$' cumple $[\star]$, nuestras hipótesis se traducen a $\Delta; \varphi \vdash \psi$ y $\Delta \vdash \varphi$, de donde se sigue que $\Delta \vdash \psi$. ■

Sea ξ es una fórmula de L tal que $\Delta \vdash \xi$. Por AL_{10}, $\Delta \vdash \xi \rightarrow \Big((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \xi\Big)$, y haciendo uso de la proposición anterior, se tiene que $\Delta \vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \xi$. Ahora, por AL_6, $\Delta \vdash \xi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$. Por la forma en que se definió la relación $\sim_{\Delta;\vdash}$, ξ está en la clase de equivalencia de $\varphi \wedge \neg\varphi$. Así, el 1 del Álgebra de Lindenbaum de SF_{L} sobre Δ será la clase de equivalencia de todas las fórmulas que se pueden deducir a partir de Δ.

Realmente AL_{10} es un poco más de lo que necesitamos, pero vale la pena considerarla por esta caracterización que nos brinda. Podemos agregar un ultimo esquema de fórmulas a la lista, que tampoco necesitamos, pero nos dará una caracterización de las fórmulas que se encuentran en la clase de equivalencia de $\varphi \wedge \neg\varphi$, que, como se imaginarán, resultarán ser las fórmulas cuya negacion puede deducirse a partir de Δ. La última de la lista es:

AL_{11} $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Y la observación mencionada es análoga a la observación anterior.

En el siguiente capítulo mostraremos un ejemplo de una Álgebra de Lindenbaum de un sistema particular.

Capítulo 3

Lógica Proposicional y Lógica de Predicados

3.1. Lógica Proposicional

Comencemos esta sección definiendo un lenguaje proposicional.

Un lenguaje proposicional es un lenguaje formal cuyo alfabeto es el conjunto$\{P_i\}_{i\in I} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\} \cup \{(,)\}$, donde I es un conjunto, usualemente numerable, de índices. Los elementos del conjunto $P = \{P_i\}_{i\in I}$ se conocen bajo el nombre de *variables proposicionales*. El conjunto de fórmulas se define recursivamente de la siguiente manera:

(i) Una sucesión finita de símbolos que consiste en una única variable proposicional es una fórmula.

(ii) Si φ y ψ son fórmulas, también $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$ lo son.

(iii) Una sucesión finita de símbolos es una fórmula sólo si se obtiene de un número finito de aplicaciones de las reglas (i) y (ii).

El objetivo de esta sección es mostrar cómo un Sistema Booleano con un lenguaje proposicional es un sistema adecuado para la Lógica Proposicional, en el sentido de que, a partir de él se pueden demostrar los Teoremas de Correctud y Completud, que aseguran que toda fórmula deducible en el sistema es 'verdadera', de acuerdo a una noción de verdad que definiremos más adelante, y que toda fórmula verdadera puede ser deducida en el sistema. A un sistema adecuado para la Lógica Proposicional le llamaremos un Cálculo Proposicional.

Sea CE[1] un Sistema Booleano con un lenguaje proposicional L.

[1]Por Cálculo de Enunciados, aunque la notación usual es , por Sentence Calculus, el

Ya tenemos definido el lenguaje, las reglas de inferencia serán las del Sistema Booleano, pero sabemos que todo Sistema Booleano cumple Modus Ponens, el cual se toma generalmente como regla de inferencia para un Cálculo Proposicional. Usaremos entonces Modus Ponens cual si fuera una de nuestras reglas de inferencia.

Tendremos una interpretación de una fórmula cuando hayamos interpretado las variables proposicionales como proposiciones particulares, pero, dado que nuestro interés reside únicamente en el hecho de que una fórmula sea verdadera o falsa bajo cierta interpretación, lo que necesitamos saber es cuándo una proposición asignada a cierta variable proposicional es verdadera o falsa. Así, podemos considerar una interpretación como una asignación de los valores *verdadero* y *falso* a las variables proposicionales. Formalmente, es conveniente representar estos valores de verdad con los elementos 1 y 0 del álgebra Booleana **2**.

Una *asignación* o *valuación* de CE es una función de P, el conjunto de variables proposicionales de CE, en el Álgebra Booleana **2**. Dada una asignación f de CE, podemos extenderla a $\bar{f} : \Phi \to \mathbf{2}$, mediante la siguiente definición recursiva:

Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, si $\bar{f}(\varphi)$ y $\bar{f}(\psi)$ están definidas, entonces

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\varphi \wedge \psi) &= \bar{f}(\varphi) \wedge \bar{f}(\psi) \\
\bar{f}(\varphi \vee \psi) &= \bar{f}(\varphi) \vee \bar{f}(\psi) \\
\bar{f}(\neg\varphi) &= \bar{f}(\varphi)^* \\
\bar{f}(\varphi \to \psi) &= \bar{f}(\varphi)^* \vee \bar{f}(\psi)
\end{aligned}$$

Si la imagen de la fórmula φ bajo la asignación $\bar{f}$, extendida en la forma antes descrita, es el elemento 1, el máximo de **2**, diremos que f *satisface* φ y escribimos $f \vDash \varphi$. Entonces

$$f \vDash \varphi \iff \bar{f}(\varphi) = 1$$

Diremos que una fórmula es *satisfacible* si es satisfecha por alguna asignación. Una fórmula que es satisfecha por todas las valuaciones es llamada *tautología* o fórmula *válida.* Si φ es una tautología la denotaremos por $\models \varphi$. Diremos que un conjunto Σ de fórmulas es satisfacible si existe una asignación que satisfaga simultaneamente a todas las fórmulas de Σ.

Antes de proseguir a enunciar y demostrar los teoremas clásicos de la Lógica Proposicional, observemos que el sistema CE cumple todo aquello que cumple cualquier sistema formal, además, cumple todo lo que le pedimos

nombre usual que se le da al sistema para la Lógica Proposicional.

para ser un Sistema Booleano, en particular, tenemos como conjunto de axiomas a todas las fórmulas representadas por los esquemas $LA_1 - LA_{10}$. Formalmente, si llamamos $\mathbb{A}$ al conjunto de todas estas fórmulas, todo lo que deduzcamos en CE es una deducción módulo $\mathbb{A}$, pero como en este caso no hay ambigüedad respecto al conjunto de axiomas que estaremos utilizando, trabajaremos como si fuese la noción de deducción a secas, '$\vdash$', a menos que se indique lo contrario.

Teorema 3.1.1 (Teorema de la deducción para CE) *Si Σ es un conjunto de fórmulas, ψ y φ son fórmulas y $\Sigma, \psi \vdash \varphi$ entonces:*

$$\Sigma \vdash \psi \to \varphi.$$

En particular, si $\psi \vdash \varphi$ entonces

$$\vdash \psi \to \varphi.$$

Demostración. Es inmediata a partir de la propiedad [$\star$] que debe de cumplir el conectivo '$\to$'. ■

Sean *Taut* el conjunto de tautologías de CE y *Ded* el conjunto de fórmulas deducibles. Los siguientes teoremas nos servirán para conocer la relación que existe entre ambos conjuntos de fórmulas.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Correctud para CE) *Cada fórmula deducible de CE es una tauología.*

Demostración. Sea φ una fórmula deducible de L y sea $f : P \to \mathbf{2}$ una valuación. Sean $|\psi|$ y $|\chi|$ son dos elementos del Álgebra de Lindenbaum de CE, a la cual denotaremos por $\mathscr{A}$, entonces $\widetilde{\bar{f}} : \mathscr{A} \to \mathbf{2}$ definida por $\widetilde{\bar{f}}(|\psi|) = \bar{f}(\psi)$ es un morfismo. Así, $|\psi| = |\chi|$ implica que $\bar{f}(\psi) = \bar{f}(\chi)$. Si recordamos que la clase de equivalencia de las fórmulas deducibles es el 1 del Álgebra de Lindenbaum, y que los morfismos entre álgebras preservan el 1, tenemos que $|\varphi| = 1$ y de aquí que $\bar{f}(\varphi) = 1$. Como f fue una valuación arbitraria, tenemos que cualquier valuación satisface a φ, por lo que es una tautología.

Corolario 3.1.3 *No hay una fórmula φ tal que φ y $\neg\varphi$ sean ambas deducibles.*

Demostración. Una asignación satisface φ si y sólo si no satisface $\neg\varphi$. Por lo tanto φ y $\neg\varphi$ no pueden ambas ser tautologías. El resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

A continuación demostraremos que todas las tautologías son deducibles, que junto con el teorema 3.1.2, implica que *Taut*=*Ded*, y por consiguiente, CE funciona como queríamos que funcionara.

Lema 3.1.4 *Sea h un homomorfismo de la Álgebra de Lindenbaum en la Álgebra Booleana* **2**. *Si f está definida en P por $f(P_n) = h(|P_n|)$, entonces f es una asignación de CE tal que para cada fórmula φ de F, $\bar{f}(\varphi) = h(|\varphi|)$.*

Demostración. Por inducción sobre el número de conectivos lógicos en φ. Por hipótesis es verdadero para variables proposicionales. Supongámoslo cierto para las fórmulas φ y ψ. Como h es un homomorfismo,

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\varphi \wedge \psi) &= \bar{f}(\varphi) \wedge \bar{f}(\psi) = h(|\varphi|) \wedge h(|\psi|) = h(|\varphi| \wedge |\psi|) = h(|\varphi \wedge \psi|),\\
\bar{f}(\varphi \vee \psi) &= \bar{f}(\varphi) \vee \bar{f}(\psi) = h(|\varphi|) \vee h(|\psi|) = h(|\varphi| \vee |\psi|) = h(|\varphi \vee \psi|),\\
\bar{f}(\neg\varphi) &= \bar{f}(\varphi)^* = h(|\varphi|)^* = h(|\varphi|^*) = h(|\neg\varphi|),\\
\bar{f}(\varphi \rightarrow \psi) &= \bar{f}(\varphi)^* \vee \bar{f}(\psi) = h(|\varphi|^*) \vee h(|\psi|) = h(|\varphi|^* \vee |\psi|) = h(|\neg\varphi \vee \psi|).
\end{aligned}$$

Cabe resaltar que en el caso de '$\rightarrow$' no llegamos directamente a la clase de equivalentica de la fórmula $\varphi \rightarrow \psi$, pero dado que CE es un Sistema Booleano, el dual del lema 1.2.2 asegura que dicha clase de equivalencia es igual a la clase $|\neg\varphi \vee \psi|$. Por lo tanto el lema resulta verdadero para todas las fórmulas. La asignación f es llamada la asignación inducida por h. ■

Observemos que existe una correspondencia natural entre los ultrafiltros del álgebra Booleana $\mathscr{A}$ y las asignaciones de CE. Si U es un ultrafiltro en $\mathscr{A}$, entonces por el teorema 1.3.9, el álgebra cociente $\mathscr{A}/U$ es isomorfa al álgebra Booleana **2**. Entonces, correspondiendo a U obtenemos la asignación f_U de CE inducida por el homomorfismo canónico de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{A}/U$.

Por otro lado, si f es una asignación de CE, veremos que $U_f = \{|\varphi| \,|\, \bar{f}(\varphi) = 1\}$ es un ultrafiltro sobre $\mathscr{A}$. Sean entonces $|\varphi|, |\psi| \in U_f$, tenemos que $\bar{f}(\varphi \wedge \psi) = \bar{f}(\varphi) \wedge \bar{f}(\psi) = 1 \wedge 1 = 1$. Además, si $|\chi| \in \mathscr{A}$ tal que $|\varphi| \leq |\chi|$, por la definición del orden en $\mathscr{A}$, tenemos que $\varphi \rightarrow \chi$ es una tautología, por lo que $\bar{f}(\varphi \rightarrow \chi) = 1 \Rightarrow \bar{f}(\neg\varphi \vee \chi) = 1 \Rightarrow \bar{f}(\varphi)^* \vee \bar{f}(\chi) = 1 \Rightarrow 0 \vee \bar{f}(\chi) = 1 \Rightarrow \bar{f}(\chi) = 1$. Por último, si $|\varphi| \notin U_f \Rightarrow f(\varphi) \neq 1 \Rightarrow \bar{f}(\varphi) = 0 \Rightarrow \bar{f}(\varphi)^* = 1 \Rightarrow \bar{f}(\neg\varphi) = 1 \Rightarrow |\neg\varphi| \in U_f$. Con lo cual U_f resulta efectivamente ser un ultrafiltro sobre $\mathscr{A}$.

Teorema 3.1.5 (Teorema de Completud para CE) *Cada tautología de CE es deducible.*

Demostración. Supongamos que φ es una fórmula no deducible de CE. Entonces, en la Algebra de Lindenbaum $\mathscr{A}$, $|\varphi| \neq 1$ y por tanto $|\neg\varphi| \neq 0$. Entonces por el corolario 1.2.7, existe un ultrafiltro U en $\mathscr{A}$ al cual pertenece $|\neg\varphi|$. Por el teorema 1.3.9, la álgebra cociente $\mathscr{A}/U \cong \mathbf{2}$, entonces, correspondiente a U, obtenemos la valuación f de CE inducida por el homomorfismo canónico de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{A}/U$. Como $|\neg\varphi| \in U$, $h(|\neg\varphi|) = 1$, entonces $f(\neg\varphi) = 1$. Se sigue que $f(\varphi) = 0$ por lo que φ no es una tautología. $\blacksquare$

Un conjunto Σ de fórmulas es *consistente* si no hay fórmula φ tal que φ y $\neg\varphi$ sean ambas deducibles de las hipótesis Σ. El corolario 3.1.3 muestra que el conjunto vacío de fórmulas es consistente. Decimos que una fórmula φ es consistente si el conjunto $\{\varphi\}$ es consistente.

Lema 3.1.6 *Si Σ es un conjunto de fórmulas y φ es cualquier fórmula entonces $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente si y sólo si no sucede que $\Sigma \vdash \neg\varphi$.*

Demostración. Si $\Sigma \vdash \neg\varphi$, por tratarse de una lógica monótona, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, pero claramente $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ y por tanto $\Sigma \cup \{\varphi\}$ no es consistente. Supongamos ahora que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ no es consistente, digamos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ y $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$. Entonces, por el Teorema de la Deducción, $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ y $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\psi$. Como $(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$ es una tautología, y es deducible por el Teorema de Completud. Así, aplicando MP dos veces, $\Sigma \vdash \neg\varphi$. $\blacksquare$

Con ayuda de este lema podemos probar el siguiente teorema de caracterización para los Teoremas de Completud y Correctud del cálculo proposicional:

Teorema 3.1.7 *Son equivalentes:*

(a) Teorema de Completud-Correctud de CE.

(b) Para cualquier fórmula φ de L, $\neg\varphi$ no es deducible si y sólo si φ es satisfacible.

(c) Para cualquier fórmula φ de L, φ es consistente si y sólo si φ es satisfacible.

(d) *Un conjunto finito de fórmulas de L es consistente si y sólo si es satisfacible.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Si $\neg\varphi$ no es deducible, entonces $\neg\varphi$ no es tautología y existe una asignación f de CE tal que $\bar{f}(\neg\varphi) \neq 1$, por lo que $\bar{f}(\neg\varphi) = 0$ y $\bar{f}(\varphi) = 1$, así, φ es satisfacible. Por otro lado, si φ es satisfacible se tiene que existe una asignación f de CE tal que $\bar{f}(\varphi) = 1$, entonces $\bar{f}(\varphi)^* = 0$ y $\bar{f}(\neg\varphi) = 0$, finalmente $\neg\varphi$ no es una tautología, por lo que $\neg\varphi$ no es deducible.

Para los siguientes dos casos utilizamos respectivamente que $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ y un resultado que se desprende directamente del lema 3.1.6.

$(b) \Rightarrow (a)$. φ no es deducible $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ es satisfacible $\Leftrightarrow$ φ no es tautología.

$(b) \Leftrightarrow (c)$. φ es consistente $\Leftrightarrow$ $\neg\varphi$ no es deducible $\Leftrightarrow$ φ es satisfacible.

$(d) \Rightarrow (c)$. Se sigue trivialmente de la definición de consistencia de φ.

$(c) \Rightarrow (d)$. Observemos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es satisfacible si y sólo si $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ es satisfacible, pues la misma asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, hace verdadera a $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$, ya que $f(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) = f(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge f(\varphi_n)$, y viceversa. Así, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es satisfacible $\Leftrightarrow$ $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ es satisfacible $\Leftrightarrow$ $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ es consistente $\Leftrightarrow$ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es consistente. Este último paso se justifica debido a que si $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ no es consistente entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ no es consistente, pues $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$, ya que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el resultado se obtiene de sucesivas aplicaciones de los axiomas (AL_2) y (AL_{10}). Además $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ no es consistente implica que $(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$ no es consistente, pues con sucesivas aplicaciones del axioma (AL_1a) obtenemos $\{(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)\} \vdash \varphi_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, y podemos deducir cualquier cosa que se hubiera deducido desde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

Teorema 3.1.8 *Un conjunto Σ de fórmulas es consistente si y sólo si cada subconjunto finito de Σ es consistente.*

Demostración. Supongamos que Σ tiene un subconjunto finito inconsistente Σ_0. Cualquier fórmula deducible de las hipótesis Σ_0 es tambien deducible suponiendo Σ y por tanto Σ es inconsistente.

Supongamos ahora que Σ no es consistente, entonces, para alguna fórmula φ, $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Por el Lema de Finitud existen subconjuntos finitos de Σ, Σ_1 y Σ_2 tales que $\Sigma_1 \vdash \varphi$ y $\Sigma_2 \vdash \neg\varphi$. Entonces $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ es un subconjunto finito inconsistente de Σ, ya que φ y $\neg\varphi$ son deducibles suponiendo Σ_0. ■

Teorema 3.1.9 (Teorema de Compacidad para CE) *Sea Σ un conjunto de fórmulas de CE. Entonces Σ es satisfacible si y solamente si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.*

Demostración. Si Σ es satisfacible, entonces existe una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas que pertenecen a Σ, así, todas las fórmulas de cualquier subconjunto finito de Σ serán satisfechas por esa misma asignación.

Para el regreso, supongamos que Σ es finitamente satisfacible. Entonces, por los teoremas 2.2.2, 3.1.7[2] y 3.1.8, $|\Sigma| = \{|\sigma| | \sigma \in \Sigma\}$ es un subconjunto de $\mathscr{A}$ con la pif. Sea U el ultrafiltro en $\mathscr{A}$ que extiende a $|\Sigma|$. Nuevamente tenemos que $\mathscr{A}/U \cong \mathbf{2}$, y podemos considerar f_U, la asignación inducida por el homomorfismo canónico de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{A}/U$. Por el lema 1.3.6, f_U es una asignación que satisface a Σ. ■

Teorema 3.1.10 (Teorema de Completud generalizado para CE) *Sea Σ cualquier conjunto de fórmulas de L, Σ es un conjunto consistente si y sólo si Σ es satisfacible.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.8, Σ es consistente si y sólo si cada subconjunto finito de Σ lo es, y por el Teorema de la Completud esto pasa si y sólo si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible. El Teorema de Compacidad dice que esto es cierto si y sólo si Σ es satisfacible. ■

3.1.1. Dos aplicaciones del Teorema de Compacidad

Concluímos la sección de Lógica Proposicional con un par de aplicaciones del teorema de compacidad, que, aunque se salen un poco de la idea de esta tesis, consideramos adecuados para ilustrar la enorme capacidad que tiene un teorema de la Lógica Proposicional sobre una rama de las matemáticas con la que la Lógica no tiene una relación muy estrecha, como es el caso de la Teoría de Gráficas, o incluso para demostrar un resultado que no tiene una relación directa con las matemáticas. También es un buen momento para observar lo fácil que resultó la demostración de un teorema tan útil como el de Compacidad haciendo uso de la herramienta Booleana; una demostración alternativa puede encontrarse en el apéndice al final de esta tesis.

Teorema 3.1.11 *Sea B un conjunto infinito de muchachos, cada uno de los cuales tiene a lo más un número finito de novias. Si por cada entero k,*

[2]Notemos que utilizamos una caracterización del teorema de Completud.

cualesquiera k de los muchachos tienen entre ellos al menos k novias, es entonces posible que cada muchacho se case con una de sus novias sin que alguien cometa bigamia.

Demostración. Necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.1.12 *Si C es un conjunto de m muchachos y para cada $k \leq m$, cualesquiera k de los muchachos tienen al menos k novias entre ellos, es entonces posible para cada muchacho casarse con una de sus novias sin que nadie cometa bigamia.*

Demostración. Por inducción sobre m

Para el caso en que $m = 1$ se tiene que hay un muchacho, con al menos una novia, así que es posible que se case con una de sus novias sin que se esté cometiendo bigamia.

Supongamos que se cumple si $m < n$ y hay n muchachos en C, tenemos que demostrar que se cumple para n. Hay dos casos:

(i) Cualesquiera k muchachos tienen al menos $k+1$ novias entre ellos para cualquier $k < n$.

(ii) Para algún $k < n$ hay un conjunto S de k muchachos que tienen exactamente k novias entre ellos.

Para el caso (i) consideramos a los n muchachos, y, podemos casar a un muchacho con cualquiera de sus novias lo cual nos dejaría con un conjunto de $n - 1$ muchachos, los cuales tendrían $(n - 1) + 1 = n$ novias entre ellos, situación en la cual es posible aplicar la hipótesis inductiva para casar a estos $n - 1$ muchachos restantes con alguna de sus novias sin que nadie cometa bigamia.

Para el caso (ii) utilizamos la hipótesis de inducción para casar a cada muchacho en S con alguna de sus novias de tal manera que no se cometa bigamia. Afirmamos que para $l \leq n - k$, cualesquiera l de los muchachos en $C - S$ tienen al menos l novias entre ellos, y que estas novias se encuentran entre las que no se han casado con algún muchacho en S, pues, si T fuera un conjunto de l muchachos de $C - S$ con menos de l novias de las que aun no se han casado, entonces $S \cup T$ sería un conjunto de $k + l$ muchachos con menos de $k + l$ novias en conjunto, contradiciendo la hipótesis del lema. Podemos entonces aplicar la hipótesis de inducción a los muchachos de $C - S$. ■

Ahora, para probar el teorema, sea $B = \{b_i | i \in I\}$ y sea $G = \{g_j | j \in J\}$ la colección de todas las novias de los muchachos en B.

Sea $\mathbf{L}$ el lenguaje proposicional cuyas variables proposicionales son los elementos del conjunto $\{P_{ij} | i \in I, j \in J\}$, y sea Σ el conjunto de fórmulas de $\mathbf{L}$ que consiste en:

(1) Para cada $i \in I$, la fórmula $P_{ij_0} \vee \cdots \vee P_{ij_k}$, donde $g_{j_0}, \ldots, g_{j_k}$ son todas las novias de b_i

(2) Para cada $i \in I$ y cada par j, j' de elementos distintos de J, la fórmula $\neg(P_{ij} \wedge P_{ij'})$

(3) Para cada $j \in J$ y cada par i, i' de elementos distintos de I, la fórmula $\neg(P_{ij} \wedge P_{i'j})$

Sea Σ_0 un subconjunto finito de Σ, demostraremos que Σ_0 es satisfacible. Sea C el conjunto de todos los muchachos, b_i, tales que para alguna $j \in J$, la variable proposicional P_{ij} ocurre en alguna fórmula de Σ_0. C es un conjunto finito de m muchachos para el cual la hipótesis del lema se cumple, así, cada muchacho se pude casar con una de sus novias sin que se cometa bigamia. Asignamos a P_{ij} el valor 1 si b_i se casa con g_j por este medio y 0 en otro caso. Esta valuación satisface a Σ_0.

Podemos concluir, gracias al Teorema de Compacidad, que existe una valuación f, que satisface a Σ, y podemos entonces casar a b_i con g_j si y sólo si $f(p_{ij}) = 1$. Como Σ contiene las fórmulas (1), cada muchacho se casa con al menos una de sus novias, y no se comete bigamia dado que Σ contiene las fórmulas (2) y (3). ■

El Teorema de los 4 colores para mapas planos finitos fue un problema abierto por más de 100 años, se conjeturó en 1852 y su primera demostración aceptada, en la que interviene una verificación por computadora de la coloración de alrededor de 1500 configuraciones de mapas, data de 1976. Grandes matemáticos, de la talla de Augustus DeMorgan y Arthur Cayley, lo atacaron sin hallar una solución. A continuación se da una demostración del Teorema de los 4 colores para mapas planos infinitos, que, contrario a lo que uno pensaría, es bastante simple suponiendo el caso finito.

Teorema 3.1.13 (Teorema de los 4 colores para mapas planos infinitos) *Para todo mapa plano infinito existe una coloración de tal manera que países adyacentes no tengan el mismo color.*

Demostración. Sean $Q = \{q_i | i \in I\}$ el conjunto de países y $C = \{c_0, c_1, c_2, c_3\} = \{c_j | j \in 4\}$ el conjunto de colores.

Sea **L** el lenguaje proposicional cuyas variables proposicionales son los elementos del conjunto $\{P_{ij} | i \in I, j \in 4\}$, y sea Σ el conjunto de fórmulas de **L** que consiste en:

(1) Para cada $i \in I$, la fórmula $(P_{i0} \vee \cdots \vee P_{i3})$

(2) Para cada $i \in I$ y cada par j, j' de elementos distintos de 4, la fórmula $\neg(P_{ij} \wedge P_{ij'})$

(3) Para cada $j \in 4$ la fórmula $\neg(P_{ij} \wedge P_{i'j})$ si el país q_i es adyacente al país $q_{i'}$

Sea Σ_0 un subconjunto finito de Σ, demostraremos que Σ_0 es satisfacible. Sea D el conjunto de paises, q_i, tales que para alguna $j \in 4$ la variable P_{ij} aparece en alguna fórmula de Σ_0. El conjunto finito D de países induce un mapa plano finito, el cual, por el Teorema de 4 colores para mapas planos finitos, puede ser coloreado de tal manera que países adyacentes no tengan el mismo color. Asignamos a P_{ij} el valor 1 si el país q_i está coloreado con el color j, y 0 en cualquier otro caso. Esta valuación satisface a Σ_0.

Podemos concluir, gracias al Teorema de Compacidad, que existe una valuación f que satisface a Σ, y podemos entonces colorear a q_i con el color c_j si y sólo si $f(p_{ij}) = 1$. Como Σ contiene las fórmulas de tipo (1) y (2) cada país está coloreado de un único color, y países adyacentes no comparten color dado que Σ contiene las fórmulas de tipo (3). ■

3.2. Lógica de Predicados

A continuación haremos un breve desarrollo de la Lógica de Prédicados, y el sistema que ésta utiliza, un Cálculo de Predicados, al que nos referiremos como CP. La Lógica de Predicados es una extensión de la Lógica de Proposiciones, resaltando como principal diferencia la introduccion de cuantificadores y variables individuales al lenguaje que utiliza, los cuales nos permitiran hablar de propiedades que cumplen los elementos de nuestro universo. Utilizaremos un lenguaje de predicados, que describiremos a continuación, y como se puede notar es semejante a un lenguaje proposicional. A dicho lenguaje también lo llamaremos L, esperando no causar confusiones.

Para ver cómo debe de ser el sistema CP podemos volver a empezar sobre un Sistema Booleano y considerar ahora un lenguaje de predicados, procediendo de la misma manera que con CE para construir la herramienta necesaria y demostrar los teoremas de Correctud, Completud y Compacidad. Sin embargo, creemos conveniente hacer este desarrollo en la manera usual, que es proponer al sistema CP y demostrar que es un Sistema Booleano. Este mismo método podrá aplicarse a un Cálculo Proposicional para obtener una Álgebra de Lindenbaum.

Empecemos describiendo el lenguaje.

Los *símbolos* de L caen dentro de las siguientes seis categorías[3]:

(a) *Variables individuales.* Son los elementos del conjunto numerable

$$\{v_n | n \in \omega\}$$

llamados usualmente *variables*, a secas.

(b) *Letras Predicativas.* Son los elementos del conjunto numerable

$$\{P_n | n \in \omega\}$$

Asociada a cada letra predicativa, P_n, hay un entero no negativo $\delta(n)$ llamado el grado de P_n.

(c) *Símbolo de igualdad.* L tiene el símbolo de igualdad

$$=,$$

también llamado el símbolo de *identidad.*

(d) *Conectivos Lógicos.* Los conectivos lógicos de L son

$$\neg \text{ ('no')} \qquad \text{y} \qquad \wedge \text{ ('y')}$$

(e) *Símbolo cuantificador.* L tiene un solo símbolo cuantificador

$$\exists \text{ ('existe')}$$

tambien llamado únicamente *cuantificador (existencial).*

(f) *Símbolos de puntuación.* Los símbolos de puntuación de L son

$$(\quad) \quad ,$$

Por un *símbolo lógico* entenderemos un conectivo lógico o un cuantificador. Para este sistema tomaremos únicamente dos conectivos, los demás podrán definirse como abreviaturas de expresiones que involucren a los dos

[3]Es usual considerar un lenguaje con *símbolos de constantes* y *letras funcionales*, sin embargo, para fines prácticos en este nivel, los dos tratamientos son casi equivalentes. En el apéndice se puede encontrar una idea general de la forma de tratar los leguajes con estos símbolos adicionales.

que tenemos. Como hicimos con CE, hemos de definir el conjunto de las *fórmulas* de L, y nuevamente lo haremos definiéndolas por recursión. Para tal motivo damos primero la definición de *fórmula atómica*, que son las sucesiones finitas de símbolos de la forma

$$x = y$$

donde x y y son dos variables, no necesariamente distintas, o de la forma

$$P_n(x_1, \ldots, x_{\delta(n)})$$

donde $x_1, \ldots, x_{\delta(n)}$ son cualesquiera $\delta(n)$ variables de L. Esto es suficiente para dar la definición recursiva de *fórmula*

(1) Una fórmula atómica es una fórmula

(2) Si φ, ψ son fórmulas y x es una variable, entonces $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi)$ y $(\exists x)\varphi$ también son fórmulas.

(3) Una sucesión finita de símbolos es una fórmula sólo si se obtiene de un número finito de aplicaciones de las reglas (1) y (2).

Introducimos los conectivos $\vee, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$, que funcionarán como abreviatura para las siguientes expresiones:

$$(\varphi \vee \psi) \text{ para } \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),$$
$$(\varphi \rightarrow \psi) \text{ para } \neg(\varphi \wedge \neg\psi),$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ para } ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

También introducimos una abreviatura para un nuevo símbolo cuantificador, '$\forall$', que se utiliza de la siguiente manera:

$$(\forall x)\varphi \quad \text{abrevia} \quad \neg(\exists x)\neg\varphi.$$

Así, si φ y ψ son fórmulas y x es una variable entonces $(\varphi\vee\psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$ y $(\forall x)\varphi$ abrevian fórmulas.

En este punto omitiremos la explicación de varias nociones básicas de lógica relacionadas con las variables y los cuantificadores, por ejemplo, el alcance de un cuantificador, las presencias libres y acotadas de las variables, y conceptos relacionados, suponiendo que el lector está familiarizado con dichos conceptos[4].

Recordemos que para la lógica de proposiciones interpretábamos las fórmulas únicamente asignando los valores de verdad *verdadero* o *falso* a las variables proposicionales que aparecieran en ellas. Para la lógica de predicados las interpretaciones son un poco más complicadas, pues, recordemos,

[4]Éstos pueden revisarse, por ejemplo, en [8] de la bibliografía.

contamos ahora con variables individuales, las cuales pueden tomar valores sobre cualquier conjunto. Entonces, para interpretar una fórmula de L, lo primero que necesitamos es especificar sobre qué conjunto de objetos están tomando valor nuestras variables, y después, cómo han de ser interpretadas las letras predicativas.

A una interpretación que cumpla estas dos cosas la llamaremos *estructura relacional*, y a fin de cuentas no será más que el par ordenado

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R_n | n \in \omega\}\rangle$$

donde A, el dominio de $\mathfrak{A}$, es un conjunto no vacío y, para $n \in \omega$, R_n es una relación $\lambda(n)$-aria sobre A. Utilizaremos letras góticas mayúsculas para denotar estructuras relacionales y la respectiva letra románica, con los subíndices necesarios, para denotar al dominio de la estructura relacional dada. La estructura relacional $\mathfrak{A}$ será una interpretación del lenguaje L si los grados de las relaciones R_n corresponden con los grados de las letras predicativas P_n, *i.e.* si para $n \in \omega$, $\delta(n) = \lambda(n)$. En este caso diremos que la estructura relacional $\mathfrak{A}$ es una *realización* o simplemente una *intepretación* del lenguaje L, y diremos que L es el *lenguaje apropiado* para la estructura $\mathfrak{A}$. Llamamos a la relación R_n el *valor* de P_n en la realización $\mathfrak{A}$.

Si alguien nos preguntara si la fórmula

$$x < 22$$

es verdadera en la aritmética, una respuesta natural podría ser: 'depende del valor de x'. Este pequeño ejemplo nos muestra que si $\varphi(v)$ es una fórmula con una aparición libre de la variable v, entonces, antes de poder decir si la fórmula es o no 'verdadera' en la realización $\mathfrak{A}$, tenemos que interpretar a v como un elemento específico de A. Una manera conveniente de hacer esto es dar una interpretación simultanea de todas las variables de L mediante una sucesión

$$x = \langle x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\rangle$$

de elementos de A. La sucesión x es una *valuación* de las variables de L. La valuación x nos dice como interpretar las apariciones libres de la variable v_n, mediante el elemento x_n de A. Si x es una valuación y $a \in A$, $x(n/a)$ es la valuación que asigna los mismos valores que x a las variables, excepto que asigna el valor a a la variable v_n:

$$x(n/a) = \langle x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, a, x_{n+1}, \dots\rangle.$$

Observemos que el valor asignado a v_n por $x(n/a)$ es independiente del valor asignado a v_n por x.

Podemos definir cuando una fórmula es verdadera en una realización dada de L bajo una valuación de las variables. Definimos la relación x *satisface* a φ en $\mathfrak{A}$, que denotamos $\mathfrak{A} \models_x \varphi$, recursivamente de la siguiente manera:

(a). $\mathfrak{A} \models_x v_m = v_n$ si y sólo si x_m es el mismo elemento que x_n.

(b). $\mathfrak{A} \models_x P_n(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{\delta(n)}})$ si y sólo si $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{\delta(n)}} \rangle \in R_n$.

(c). $\mathfrak{A} \models_x \neg\varphi$ si y sólo si no sucede que $\mathfrak{A} \models_x \varphi$.

(d). $\mathfrak{A} \models_x \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_x \varphi$ y $\mathfrak{A} \models_x \psi$.

(e). $\mathfrak{A} \models_x (\exists v_n)\varphi$ si y sólo si, para alguna $a \in A$, $\mathfrak{A} \models_{(x/a)} \varphi$.

Observemos que si φ es una fórmula de L, $\mathfrak{A}$ una realización de L, y x, y valuaciones tales que, cada vez que v_n aparece libre en φ, $x_n = y_n$, entonces $\mathfrak{A} \models_x \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models_y \varphi$. Apoyándonos en esta observación, podemos agregar a nuestra notación, $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_n]$ en lugar de $\mathfrak{A} \models_x \varphi$, cuando las variables libres de φ aparezcan entre $v_0, \ldots, v_n$. Así, podemos escribir $\mathfrak{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_n]$ cada vez que una valuación que asigne a v_i el valor x_i, para $i \leq n$, satisfaga a φ en $\mathfrak{A}$. En particular, si σ es un *enunciado*, es decir, una fórmula sin variables libres que requieran interpretación, entonces, si $\mathfrak{A} \models_x \sigma$ para *alguna* valuación x, se tiene que $\mathfrak{A} \models_x \sigma$ para *toda* valuación x. En dicho caso escribimos $\mathfrak{A} \models \sigma$ y decimos que σ es *verdadera* o *válida* en $\mathfrak{A}$ y que $\mathfrak{A}$ es *modelo* de σ. Si Σ es un conjunto de enunciados de L, diremos que una realización $\mathfrak{A}$ es un *modelo* de Σ si $\mathfrak{A}$ es modelo de cada enunciado en Σ. En este caso escribimos $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Se dice que un enunciado, σ, en el lenguaje L es *universalmente válido* si es válido en todas las realizaciones de L.

A continuación, describiremos el sistema axiomático del sistema CP con igualdad. Los axiomas de CP pueden dividirse en 3 grupos. Por una *instancia de sustitución de una tautología proposicional* nos referiremos a una fórmula de L que puede ser obtenida de una tautología de la lógica proposicional al sustituir fórmulas de L por las variables proposicionales. Claramente todas las instancias de sustitución de tautologías proposicionales son universalmente válidas. Para asegurar que sean deducibles en CP, tomaremos como primer grupo de axiomas a todas las instancias de los esquemas correspondientes a los esquemas axiomáticos de un Cálculo Proposicional[5]:

CP1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

CP2. $[\varphi \to (\psi \to \chi)] \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)]$

[5]El desarrollo de un Cálculo Proposicional con este sistema axiomático puede ser revisado en [3].

CP3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
CP4a. $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
CP4b. $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
CP5. $[\chi \to \varphi] \to [(\chi \to \psi) \to (\chi \to [\varphi \wedge \psi])]$
CP6a. $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
CP6b. $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
CP7. $[\varphi \to \chi] \to [(\psi \to \chi) \to ([\varphi \vee \psi] \to \chi)]$

donde φ, ψ y χ son fórmulas cualesquiera de L.

Adicionalmente, necesitaremos algunos axiomas que involucren el comportamiento de los cuantificadores de L. Tomaremos a las instancias de los siguientes dos esquemas:

CP8. $(\forall x)\varphi(x) \to \varphi(y)$
CP9. $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$

donde x, y son variables arbitrarias de L, ψ es cualquier fórmula de L y, en CP8, φ es cualquier fórmula de L en la cual y es libre para x[6] y en CP9 φ es cualquier fórmula de L que no contiene presencias libres de la variable x.

Finalmente, necesitamos axiomas para el símbolo de igualdad. Tomaremos las instancias de los esquemas

CP10. $(\forall x)(x = x)$
CP11. $(\forall x)(\forall y)(x = y \to [\varphi \to \varphi'])$

donde x es cualquier variable, φ es una fórmula de L en la cual la variable y es libre para x, y φ' se obtiene de reemplazar algunas, pero no necesariamente todas las presencias de x en φ por y.

El sistema CP tiene dos reglas de inferencia.

Modus Ponens: ψ es una *consecuencia directa* de φ y de $(\varphi \to \psi)$, donde φ y ψ son fórmulas de L.

Generalización: $(\forall x)\varphi$ es una *consecuencia directa* de φ, donde φ es cualquier fórmula y x es cualquier variable de L.

Como los esquemas axiomáticos que utilizamos para CE eran tautologías, todos ellos se desprenden a partir de los primeros 7 axiomas que proponemos aquí (de hecho hay varios que coinciden), lo único que falta es que el conectivo '$\to$' tenga la propiedad [$\star$]; tenemos la mitad de la propiedad al tener como regla de inferencia a Modus Ponens, la otra mitad estará lista cuando demostremos el Teorema de la Deducción para CP.

Una *deducción de la fórmula φ a partir de un conjunto de fórmulas Σ* es una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tal que $\varphi = \varphi_n$ y para cada $i \leq n$, φ_i es, o un axioma, o una fórmula de Σ (hipótesis), o para algunas $j, k < i$

[6] y es libre para x en φ si y sólo si x no aparece en φ dentro del alcance de un cuantificador $\forall y$ o $\exists y$.

es una consecuencia directa de MP a partir de φ_j y φ_k, o es consecuencia directa de acuerdo con generalización a partir de φ_j para alguna $j < i$ con la *restricción* de que la variable generalizada no aparezca libre en hipótesis de las cuales depende la fórmula a generalizar[7]. Se dice que una fórmula es *deducible de* Σ si existe una deducción de ella a partir de Σ, en cuyo caso escribiremos $\Sigma \vdash \varphi$.

Definición 3.2.1 *Un enunciado* φ *se llama* **deducible** *si es deducible a partir de* $\emptyset$. *Se denota* $\vdash \varphi$.

Lema 3.2.2 *Si* φ *es una instancia de sustitución de una tautología proposicional, entonces* $\vdash \varphi$.

Demostración. Directa de observar que CP1-CP7 son axiomas de CP y tenemos modus ponens como regla de inferencia.

Sea $\mathscr{B}$ una fórmula en un conjunto Γ de fórmulas y supongamos que tenemos una deducción $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ desde Γ y conocemos la justificación de cada paso de ésta. Diremos que $\mathscr{D}_i$ depende de $\mathscr{B}$ en esta deducción si y sólo si:

1. $\mathscr{D}_i$ es $\mathscr{B}$ y la justificación para $\mathscr{D}_i$ es que pertenece a Γ
2. $\mathscr{D}_i$ está justificada como una consecuencia directa por MP o Gen de fórmulas anteriores en la sucesión, donde al menos una de esas fórmulas anteriores depende de $\mathscr{B}$

Proposición 3.2.3 *Si* $\mathscr{C}$ *no depende de* $\mathscr{B}$ *en una deducción* $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$, *entonces* $\Gamma \vdash \mathscr{C}$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre la longitud de la deducción. Sea $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ una deducción de $\mathscr{C}$ a partir de Γ y $\mathscr{B}$, en la cual $\mathscr{C}$ no dependa de $\mathscr{B}$ (recordemos que en la deducción $\mathscr{D}_n = \mathscr{C}$). Como hipótesis inductiva supongamos que la proposición es cierta para todas las deducciones de longitud menor a n. Si $\mathscr{C}$ pertenece a Γ o es un axioma, entonces $\Gamma \vdash \mathscr{C}$. Si $\mathscr{C}$ es una consecuencia directa de una o dos fórmulas anteriores por Gen o MP, entonces, como $\mathscr{C}$ no depende de $\mathscr{B}$, tampoco dichas fórmulas dependen de $\mathscr{B}$. Por la hipótesis inductiva estas fórmulas se deducen desde Γ y, consecuentemente, también $\mathscr{C}$. ■

[7] Para la definición de *restricciones* sobre la aplicación de las reglas de inferencia en la definición de deducción formal, revisar [1].

Teorema 3.2.4 (Teorema de la Deducción) *Supongamos que* $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$. *Entonces* $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{C}$

Demostración. Sea $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_n$ una deducción de $\mathscr{C}$ desde Γ y $\mathscr{B}$. Demostraremos por inducción que $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_i$ para cada $i \leq n$. Si $\mathscr{D}_i$ es un axioma o pertenece a Γ, como $\mathscr{D}_i \to (\mathscr{B} \to \mathscr{D}_i)$ es el axioma (A1), aplicando MP se obtiene $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_i$. Si $\mathscr{D}_i$ se obtuvo por MP, entonces existen j y k menores que i tales que $\mathscr{D}_k$ es $\mathscr{D}_j \to \mathscr{D}_i$, entonces, por hipótesis de inducción, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_j$ y $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to (\mathscr{D}_j \to \mathscr{D}_i)$. Ahora, por (A2), $\Gamma \vdash \Big(\mathscr{B} \to (\mathscr{D}_j \to \mathscr{D}_i)\Big) \to \Big((\mathscr{B} \to \mathscr{D}_j) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{D}_i)\Big)$, entonces, aplicando MP dos veces, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_i$. Finalmente, supongamos que existe $j < i$ tal que $\mathscr{D}_i$ es $(\forall x_k)\mathscr{D}_j$, por la hipótesis inductiva $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_j$. Observemos que, $\mathscr{D}_j$ depende de $\mathscr{B}$ o no depende de $\mathscr{B}$ en la deducción original. Si no depende de $\mathscr{B}$, por la proposición anterior obtenemos $\Gamma \vdash \mathscr{D}_j$, y, consecuentemente, ya que x_k no aparece libre en hipótesis de las que depende $\mathscr{D}$, por Gen se deduce $\Gamma \vdash (\forall x_k)\mathscr{D}_j$, entonces $\Gamma \vdash \mathscr{D}_i$, y por (A1) $\Gamma \vdash \mathscr{D}_i \to (\mathscr{B} \to \mathscr{D}_i)$, aplicando MP, $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_i$. Si $\mathscr{D}_j$ depende de $\mathscr{B}$, entonces x_k no aparece libre en $\mathscr{B}$ ni en hipótesis de las que dependa $\mathscr{D}_j$ (pues $\forall x_k \mathscr{D}_j$ es un paso en la deducción dada) y como $\mathscr{B}$ no es hipótesis en la nueva deducción, podemos aplicar Gen a $(\mathscr{B} \to \mathscr{D}_j)$ para obtener $\Gamma \vdash (\forall x_k)(\mathscr{B} \to \mathscr{D}_j)$; el axioma (A9) $\Gamma \vdash (\forall x_k)(\mathscr{B} \to \mathscr{D}_j) \to (\mathscr{B} \to (\forall x_k)\mathscr{D}_j)$ está justificado pues x_k no ocurre libre en $\mathscr{B}$; esto y una aplicación de MP derivan $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to (\forall x_k)\mathscr{D}_j$, lo cual es $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{D}_i$. Esto completa la inducción y el teorema es el caso $i = n$. ■

De la demostración de este teorema podemos concluir adicionalmente que la deducción obtenida de $\Gamma \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ (o $\Gamma \vdash \mathscr{C}$ en la proposición anterior), tendrá una aplicación de Gen a una fórmula que dependa de una fórmula $\mathscr{E}$ de Γ si y sólo si hay una aplicación de Gen en la prueba dada de $\Gamma, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$ con la misma variable cuantificada y sobre una fórmula que dependa de $\mathscr{E}$. Podemos además observar que $\mathscr{D}_j$ depende de una premisa $\mathscr{E}$ de Γ en la deducción original si y solamente si $\mathscr{B} \to \mathscr{D}_j$ depende de $\mathscr{E}$ en la nueva demostración.

Esta conclusión será útil cuando queramos aplicar en repetidas ocasiones el Teorema de la Deducción sobre cierta deducción, por ejemplo, para obtener $\Gamma \vdash \mathscr{D} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ de $\Gamma, \mathscr{D}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$.

Consideremos ahora a *Val* y *Ded* los conjuntos de todos los enunciados universalmente válidos y de todos los enunciados deducibles de L respectivamente. Los siguientes resultados buscarán analizar las relaciones entre estos dos conjuntos.

Teorema 3.2.5 *Cada enunciado deducible es universalmente válido. Es decir $Ded \subseteq Val$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre la longitud de las deducciones. Claro que, no todas las fórmulas que aparezcan en la deducción de un enunciado serán necesariamente enunciados, así que, lo que de hecho se demuestra es que la cerradura de cada fórmula que aparece en una deducción es universalmente válida. Para demostrar esto basta con ver que la cerradura de cualquier axioma es universalmente válida y que las reglas de inferencia generan fórmulas cuyas cerraduras son universalmente válidas a partir de universalmente válidas. Esta demostración es rutinaria y larga, por lo que será omitida, pero puede consultarse en [8] o en [3]. ■

Corolario 3.2.6 (La consistencia del Cálculo de Predicados) *Si φ es una fórmula en el lenguaje del Cálculo de Predicados* L*, entonces no es posible que φ y $\neg\varphi$ sean ambas deducibles.*

Demostración. Por el teorema anterior, si φ y $\neg\varphi$ son deducibles sin hipótesis, entonces φ y $\neg\varphi$ son universalmente válidos, lo cual es imposible. Otra forma de enunciar estes resultado es: El conjunto vacío de fórmulas es consistente.■

3.2.1. La Álgebra de Lindenbaum de CP

Construiremos ahora la Álgebra de Lindenbaum de CP, esta misma construcción puede llevarse a cabo sobre un Calculo Proposicional llegando también a una Álgebra de Lindenbaum. Llamemos Φ al conjunto de fórmulas de L. Aparentemente, lo más natural es definir una relación $\preceq$ sobre Φ dada por

$$\varphi \preceq \psi \text{ si y sólo si } \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

Pero aún cuando $\preceq$ es transitiva y reflexiva, al no cumplir la propiedad de antisimetría no es un orden parcial. Tomemos por ejemplo a φ, ψ dos fórmulas distintas de Φ

$$\varphi \wedge \psi \preceq \psi \wedge \varphi \quad \text{y} \quad \psi \wedge \varphi \preceq \varphi \wedge \psi$$

y aun cuando sabemos que $\varphi \wedge \psi$ y $\psi \wedge \varphi$ son fórmulas equivalentes, éstas son distinas, sin embargo podemos librar esta dificultad definiendo la relación $\equiv$ sobre Φ dada por

$$\varphi \equiv \psi \text{ si y sólo si } \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{y} \quad \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

Como $\varphi \to \varphi$ es una tautología, la relación $\equiv$ es reflexiva. Es claramente simétrica por la forma en la que se definió y que $(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$ sea una tautología tiene como consecuencia directa que la relación sea transitiva. Por tanto, $\equiv$ es una relación de equivalencia sobre Φ.

Lema 3.2.7 *Sean φ y ψ fórmulas de* CE. *Si $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, entonces $\vdash \varphi \to \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi' \to \psi'$*

Demostración. Demostremos $\vdash \varphi' \to \psi'$ tomando como hipótesis $\vdash \varphi \to \psi$, el otro caso es análogo. Consideremos la siguiente sucesión de fórmulas:

1. $\vdash (\psi \to \psi') \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi')]$	es una tautología
2. $\vdash \psi \to \psi'$	hipótesis
3. $\vdash \varphi \to \psi$	hipótesis
4. $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi')$	MP 1,2
5. $\vdash \varphi \to \psi'$	MP 3,4
6. $\vdash (\varphi \to \psi') \to [(\varphi' \to \varphi) \to (\varphi' \to \psi')]$	es una tautología
7. $\vdash \varphi' \to \varphi$	hipótesis
8. $\vdash (\varphi' \to \varphi) \to (\varphi' \to \psi')$	MP 5,6
9. $\vdash \varphi' \to \psi'$	MP 7,8

■

Si φ es una fórmula en Φ, definamos a $|\varphi|$ como la clase de equivalencia a la cual pertenece φ. Entonces

$$|\varphi| = \{\psi \in \Phi \big| \varphi \equiv \psi\}$$

Sea

$$\Phi/\equiv\ = \{|\varphi| \big| \varphi \in \Phi\}$$

Podemos entonces definir la relación $\leq$ sobre $\Phi/\equiv$ dada por

$$|\varphi| \leq |\psi| \text{ si y sólo si } \vdash \varphi \to \psi$$

El lema 3.2.7 demuestra que esta es una relación bien definida, y nos deja en posición de enunciar el siguiente teorema, ya salvada la pequeña dificultad enfrentada para definir la relación sobre Φ y poder dotarla de una estructura de álgebra Booleana.

Teorema 3.2.8 *$\mathscr{A} = \langle \Phi/\equiv, \leq \rangle$ es una red complementada y distributiva, o bien, una álgebra Booleana. Además, en esta álgebra Booleana*

$$|\varphi| = 1 \textit{ si y sólo si} \vdash \varphi \quad y \quad |\varphi| = 0 \textit{ si y sólo si} \vdash \neg\varphi$$

Demostración. Como $\varphi \to \varphi$ es una tautología, $\leq$ es una relación reflexiva, por definición resulta ser antisimétrica y al ser $(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\chi \to \psi)]$ una tautología, es una relación transitiva, así, resulta ser un orden parcial para $\Phi/\equiv$.

Sea $\{|\varphi|, |\psi|\}$ un subconjunto cualquiera con dos elementos de $\Phi/\equiv$. Debemos demostrar que $|\varphi \wedge \psi|$ es su ínfimo. Por PC4a y PC4b

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi \quad \text{y} \quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$$

por lo que $|\varphi \wedge \psi| \leq |\varphi|$ y $|\varphi \wedge \psi| \leq |\psi|$. Así, $|\varphi \wedge \psi|$ es una cota inferior para $\{|\varphi|, |\psi|\}$. Supongamos que $|\chi|$ es una cota inferior para $\{|\varphi|, |\psi|\}$, entonces $\vdash \chi \to \varphi$ y $\vdash \chi \to \psi$. Por PC5 y dos aplicaciones de Modus Ponens, $\vdash \chi \to (\varphi \wedge \psi)$, con lo cual queda demostrado que $|\varphi \wedge \psi|$ es la máxima cota inferior, o bien, el ínfimo de $\{|\varphi|, |\psi|\}$. Análogamente se demuestra que $|\varphi \vee \psi|$ es el supremo de $\{|\varphi|, |\psi|\}$. Con esto es suficiente para ver que $\mathscr{A}$ es una red.

Como $[(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)] \to [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi]$ y $[(\varphi \vee \psi) \wedge \chi] \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]$ son tautologías, para cualesquiera fórmulas de L φ, ψ, χ, se tiene que

$$|(\varphi \vee \psi) \wedge \chi| = |(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)|$$

y por el resultado anterior, esto arroja que

$$(|\varphi| \vee |\psi|) \wedge |\chi| = (|\varphi| \wedge |\chi|) \vee (|\psi| \wedge |\chi|)$$

con lo cual se tiene que $\mathscr{A}$ es una red distributiva.

Por PC1, tenemos que, si $\vdash \varphi$, entonces para cualquier fórmula ψ, $\vdash \psi \to \varphi$, lo que implica que $|\psi| \leq |\varphi|$, y, así, $|\varphi| = 1$ es el elemento máximo de $\mathscr{A}$. Utilizando la tautología $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$, si $\vdash \neg\varphi$, entonces para cualquier fórmula ψ se tiene que $\varphi \to \psi$, por lo que $|\varphi| \leq |\psi|$ y por tanto $|\varphi| = 0$. Inversamente, si $|\varphi| = 1$, entonces para cualquier fórmula ψ, $|\psi| \leq |\varphi|$ y, así, $\vdash \psi \to \varphi$; eligiendo una ψ tal que $\vdash \psi$, aplicando modus ponens $\vdash \varphi$. Análogamente, si $|\varphi| = 0$ entonces $\vdash \neg\varphi$.

Finalmente, como para cualquier fórmula φ

$$\vdash \varphi \vee \neg\varphi \quad \text{y} \quad \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

por ser tautologías. Se sigue que

$$|\varphi| \vee |\neg\varphi| = 1 \quad \text{y} \quad |\varphi| \wedge |\neg\varphi| = 0.$$

Esto demuestra que $\mathscr{A}$ es una red complementada distributiva, *i.e.* una álgebra Boolena, lo cual termina la demostración. ■

Por el corolario 3.1.3 no es cierto que cada fórmula de Φ es deducible, $\mathscr{A}$ contiene al menos dos elementos. Llamamos a $\mathscr{A}$ el *Álgebra de Lindenbaum* de CP.

Para cada fórmula φ en Φ, $\varphi(v_{k_1}/v_{p_1}, \ldots, v_{k_n}/v_{p_n})$ será la fórmula obtenida a partir de φ por reemplazar todas las presencias acotadas de v_{p_i} por v_{j+i}, donde j es el menor número que excede a $p_1, \ldots, p_n$ y a los subíndices de todas las variables que ocurren en φ y, después, reemplazar todas las presencias libres de v_{k_i} por v_{p_i} para $1 \leq i \leq n$.

Lema 3.2.9 *Para cada fórmula* φ *de* L

$$|(\forall v_k)\varphi| = inf\{|\varphi(v_k/v_p)|\big|p \in \omega\}.$$

Demostración. Por CP8,

$$\vdash (\forall v_k)\varphi \rightarrow \varphi(v_k/v_p)$$

y por tanto, para cualquier $p \in \omega$,

$$|(\forall v_k)\varphi| \leq |\varphi(v_k/v_p)|,$$

por lo que

$$|(\forall v_k)\varphi| \leq \inf\{|\varphi(v_k/v_p)\big|p \in \omega\}.$$

Supongamos ahora que ψ es una fórmula tal que $|\psi|$ es una cota inferior para el conjunto $\{|\varphi(v_k/v_p)|\big|p \in \omega\}$. Entonces, en particular, escogiendo una q tal que v_q no ocurra en φ o en ψ,

$$\vdash \psi \rightarrow \varphi(v_k/v_q)$$

lo cual, con generalización, CP9 y MP

$$\vdash \psi \rightarrow (\forall v_q)\varphi(v_k/v_p).$$

Por CP8

$$\vdash (\forall v_q)\varphi(v_k/v_q) \rightarrow \varphi$$

nuevamente, utilizando generalización, CP9 y MP

$$\vdash (\forall v_q)\varphi(v_k/v_q) \rightarrow (\forall v_k)\varphi.$$

Finalmente, se sigue que

$$\vdash \psi \to (\forall v_k)\varphi$$

y, así, $|(\forall v_k)\varphi|$ es la máxima cota inferior, *i.e.* el ínfimo, del conjunto $\{|\varphi(v_k/v_p)|\big|p \in \omega\}$. ■

Proposición 3.2.10 *Sea D un ultrafiltro en la Álgebra de Lindenbaum $\mathscr{A}$. Para cualesquiera fórmulas φ, ψ de* L*:*
(i) $|\neg\varphi| \in D \iff |\varphi| \notin D$
(ii) $|\varphi \wedge \psi| \in D \iff |\varphi| \in D$ *y* $|\psi| \in D$
(iii) si $|\varphi|, |\varphi \to \psi| \in D$ *entonces* $|\psi| \in D$

Demostración. Para (i) supongamos que $|\neg\varphi| \in D$. Como D es un filtro, no puede suceder que $|\neg\varphi|^* \in D$, pero $|\neg\varphi|^* = |\neg\neg\varphi| = |\varphi|$, por lo que $|\varphi| \notin D$. Inversamente, supongamos que $|\varphi| \notin D$, como D es un ultrafiltro, entonces $|\varphi|^* \in D$, pero $|\varphi|^* = |\neg\varphi|$, y, así, $|\neg\varphi| \in D$.

Para (ii) supongamos primero que $|\varphi\wedge\psi| \in D$. Sabemos que $|\varphi\wedge\psi| \leq |\varphi|$ y $|\varphi\wedge\psi| \leq |\psi|$, pero como D es un filtro, esto implica que $|\varphi| \in D$ y $|\psi| \in D$. Inversamente, basta recordar que $|\varphi \wedge \psi|$ es el ínfimo del conjunto $\{|\varphi|, |\psi|\}$ y que D es un filtro.

Para (iii) supongamos que $|\varphi|, |\varphi \to \psi| \in D$. Recordemos que $|\varphi \to \psi| = |\neg(\varphi \wedge \neg\psi)|$, lo que, por el inciso (i) implica que $|\varphi \wedge \neg\psi| \notin D$, pero por el inciso (ii), esto sucede sólo sí $|\varphi| \notin D$ o $|\neg\psi| \notin D$, y ya que $|\varphi| \in D$ por hipótesis, $|\neg\psi| \notin D$ y nuevamente por el inciso (i), tenemos que $|\psi| \in D$. ■

Teorema 3.2.11 (Teorema de Completud para el Cálculo de Predicados) *Cada enunciado universalmente válido es deducible.*

Demostración. Sea σ un enunciado no deducible de L. Demostraremos que hay una estructura relacional donde σ no es verdadera, lo cual es suficiente para demostrar que σ no es universalmente válida.

Como no sucede que $\vdash \sigma$, entonces $|\sigma| \neq 1$ en la Álgebra de Lindenbaum $\mathscr{A}$, y por tanto $|\neg\sigma| \neq 0$ en esta álgebra. Por el lema 3.2.9, para cada fórmula φ de L, se tiene que

$$|\forall v_k\varphi| = \inf\{|\varphi(v_k/v_p)|\big|p \in \omega\} \qquad [\Pi]$$

Y por el Lema de Tarski (Teorema 1.3.10), dado que hay un número contable de fórmulas en L, hay un ultrafiltro D en $\mathscr{A}$ que contiene a $|\neg\sigma|$

y *preserva ínfimos* [Π][8], lo cual implica que $|\forall v_k \varphi| \in D$ si y sólo si para cada $p \in \omega$, $|\varphi(v_k/v_p)| \in D$, pues estamos considerando el homomorfismo canónico $h : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/U$.

Definamos la siguiente interpretación de $\mathfrak{A}$. Sea V el conjunto de variables de L. Definimos la relación de equivalencia $\sim$ sobre V por:

$v_i \sim v_j$ si y sólo si $|v_i = v_j| \in D$

Para $v \in V$ sea $v^{\sim} = \{v' \in V | v' \sim v\}$ y $V^{\sim} = \{v^{\sim} | v \in V\}$. Sea entonces $V^{\sim}$ el dominio de $\mathfrak{A}$. $V^{\sim}$ es no vacío y su cardinal es a lo más numerable. Para cada $n \in \omega$ definimos la relación R_n en $V^{\sim}$ por

$\langle w_1^{\sim}, \ldots, w_{\delta(n)}^{\sim} \rangle \in R_n$ si y sólo si $|P_n(w_1, \ldots, w_{\delta(n)})| \in D$

Esta es una buena definición para la relación, *i.e.*, si para $1 \leq i \leq \delta(n)$ $u_i \sim w_i$, entonces $|P(u_1, \ldots, u_{\delta(n)})| \in D$ si y sólo sí $|P(w_1, \ldots, w_{\delta(n)})| \in D$. Así, $\mathfrak{A} = \langle V^{\sim}, \{R_n | n \in \omega\} \rangle$. Si $x \in V^{\omega}$, digamos $x = \langle x_0, \ldots, x_n, \ldots \rangle$, entonces $x^{\sim} \in (V^{\sim})^{\omega}$ será la sucesión $\langle x_0^{\sim}, \ldots, x_n^{\sim}, \ldots \rangle$ de elementos de $V^{\sim}$.

Demostraremos ahora que para cada fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ de L, cuyas variables libres estén entre $v_0, \ldots v_n$ y para cada $x \in V^{\omega}$,

$$\mathfrak{A} \models_{x^{\sim}} \varphi \text{ si y sólo si } |\varphi(v_0/x_0, \ldots, v_n/x_n)| \in D. \qquad [*]$$

La demostración de [*] será por inducción sobre el número de símbolos lógicos en φ. Empecemos por las fórmulas atómicas:

Si φ es una fórmula atómica de la forma $v_i = v_j$, entonces se sigue de la definición de $V^{\sim}$ que se cumple [*], mientras que si φ es de la forma $P_n(w_1, \ldots, w_{\delta(n)})$, esto se sigue de la definición de la relación R_n.

Supongamos ahora que [*] se cumple para todas las fórmulas con menos de μ símbolos lógicos y que φ es una fórmula con exactamente μ símbolos lógicos. Hay 3 casos: φ puede ser de las formas $\neg\psi$, $(\psi \wedge \chi)$ o $\exists v_n \psi$, donde ψ y χ son fórmulas con menos de μ símbolos, por lo que, por hipótesis, son fórmulas para las cuales se cumple [*]. Si φ es de la forma $\neg\psi$ o $(\psi \wedge \chi)$, se sigue de la proposición 3.2.10 que [*] también se cumple para φ. Supongamos ahora que φ es $\exists v_n \psi$, donde ψ es una fórmula cuyas variables libres están entre $v_0, \ldots, v_n$. Así,

$\mathfrak{A} \models_{x^{\sim}} \varphi \iff$ para algún $v^{\sim} \in V$, $\mathfrak{A} \models_{x^{\sim}(n/v^{\sim})} \psi$

$\iff$ para alguna $p \in \omega$, $\mathfrak{A} \models_{x^{\sim}(n/v_p^{\sim})} \psi$

$\iff$ existe $p \in \omega$ $|\psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n/v_p)| \in D$ (por H. de I.)

$\iff$ no sucede que para cada $p \in \omega$, $|\neg\psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n)| \in D$

$\iff$ no $|\forall v_n \neg\psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n)| \in D$

[8] Recordemos la demostración del Lema de Tarski donde se utiliza el homomorfismo canónico de B sobre B/F.

$\iff |\neg\forall v_n \neg\psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n)| \in D$

Entonces, como $|\exists v_n \psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n)| = |\neg\forall v_n \neg\psi(v_0/x_0, \ldots, v_{n-1}/x_{n-1}, v_n)|$, queda demostrado que $[*]$ también se cumple para φ. Así $[*]$ se cumple para todas las fórmulas y, en particular, como $|\neg\sigma| \in D$, $\mathfrak{A}$ es un modelo para $\neg\sigma$, concluímos que σ no es universalmente válida. El teorema queda demostrado por contrapositiva. ■

Se dice que un enunciado σ es refutable si $\neg\sigma$ es deducible, e irrefutable si $\neg\sigma$ no es deducible. Una estructura relacional es de cardinal α si su dominio tiene cardinalidad α, así, se dice que es contable si su dominio es contable.

Corolario 3.2.12 *Un enunciado de L es irrefutable si y sólo si tiene un modelo contable.*

Demostración. Si σ es refutable, entonces $\neg\sigma$ es universalmente válida y σ no tiene modelo alguno.

Si σ es irrefutable entonces $\neg\sigma$ no es deducible, entonces $|\neg\sigma| \neq 1$ y por tanto $|\sigma| \neq 0$, por lo que podemos construir un modelo para σ como en la demostración del teorema anterior. Como V es contable, también lo es $V^\sim$, así, el modelo $\mathfrak{A}$ que construímos para σ es contable. ■

Corolario 3.2.13 *Un conjunto finito de enunciados de L es consistente si y sólo si tiene un modelo contable.*

Demostración. Si $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ es un conjunto finito de enunciados de L, tenemos que Σ es consistente si $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n$ es irrefutable. El resultado es consecuencia inmediata del corolario previo. ■

Capítulo 4

Teoría de Modelos

4.1. Nociones básicas

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_\xi | \xi < \alpha\}\rangle$ una estructura relacional y $\mu \in {}^\alpha\omega$ una función definida en α con valores en los naturales. Decimos que $\mathfrak{A}$ es de tipo μ si para cada $\xi < \alpha$, R_ξ es una relación $\mu(\xi)$-aria en A, *i.e.* $R_\xi \subseteq A^{\mu(\xi)}$.

Dada una estructura relacional $\mathfrak{A}$, de tipo μ, un lenguaje apropiado para hablar de lo que pasa en $\mathfrak{A}$ es el lenguaje de predicados con el conjunto $\{P_\xi | \xi < \alpha\}$ de letras predicativas, donde para cada $\xi < \alpha$, $\delta(\xi)$, el grado (o aridad) de P_ξ, es igual a $\mu(\xi)$. Este lenguaje nos servirá para hablar de cualquier estructura relacional de tipo μ. Se asume que cuando utilizamos el lenguaje para hacer afirmaciones acerca de una estructura relacional, el lenguaje es el apropiado para la estructura relacional en cuestión. En adelante consideraremos a todas las estructuras relacionales con tipo μ fijo, a menos que se indique lo contrario.

Sean $\mathfrak{A} = \langle A, \{R_\xi | \xi < \alpha\}\rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B, \{S_\xi | \xi < \alpha\}\rangle$ dos estructuras relacionales de tipo μ. Decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ (o una subinterpretación de $\mathfrak{B}$) y que $\mathfrak{B}$ es una extensión de $\mathfrak{A}$ si $A \subseteq B$ y cada relación en $\mathfrak{A}$ es la restricción de la relación correspondiente de $\mathfrak{B}$ a A, *i.e.* para cada $\xi < \alpha$, $R_\xi = S_\xi \cap A^{\mu(\xi)}$.

Si $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ lo denotaremos $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, en particular, a cada subconjunto no vacío X de B, le corresponde la subestructura $\langle X, \{S_\xi \cap X^{\mu(\xi)} | \xi < \alpha\}\rangle$ de $\mathfrak{B}$; llamamos a esta subestructura la restricción de $\mathfrak{B}$ a X y la denotamos $\mathfrak{B} \restriction_X$.

Sea $h : A \to B$. Decimos que h es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si para cada $\xi < \alpha$ y cualesquiera $a_1, \ldots, a_{\mu(\xi)} \in A$,

$\langle a_1, \ldots, a_{\mu(\xi)}\rangle \in R_\xi$ si y sólo si $\langle h(a_1), \ldots, h(a_{\mu(\xi)})\rangle \in S_\xi$.

Entonces $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ si y sólo si $A \subseteq B$ y la función $i : A \to B$ definida por $i(a) = a$ es un homomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$; i es llamada la función de inyección (o inclusión) de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Un homomorfismo inyectivo (monomorfismo) h, de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es llamado un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \restriction_{h(A)}$. Un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B} \restriction_{h(A)}$ también es llamado una inmersión, o un encaje de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$. En particular, si h es suprayectiva, h es un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$. Si existe un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, decimos que $\mathfrak{A}$ es isomorfa a $\mathfrak{B}$ y lo denotamos $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. La relación $\cong$ es de equivalencia entre estructuras relacionales, si $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son esencialmente la misma estructura relacional.

El isomorfismo es una relación entre estructuras algebraicas y a veces no abarca de manera precisa el tipo de comparación que nos interesa cuando trabajamos con ciertas esctructuras, este es el caso de las estructuras relacionales. Puede suceder que, aunque dos estructuras no sean isomorfas, no exista un enunciado en el lenguaje L que las distinga, en ese caso, diremos que son elementalmente equivalentes, así, diremos que $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$ si cada enunciado verdadero de $\mathfrak{A}$ es también verdadero en $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$ lo denotaremos $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. El siguiente lema implica que $\equiv$ es una relación de equivalencia en estructuras relacionales.

Lema 4.1.1 *Si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, entonces para cada enunciado σ de L, $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \sigma$.*

Demostración. La implicación a la derecha se obtiene por definición. Para la otra implicación, si $\mathfrak{A} \not\models \sigma$ entonces $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$. Se sigue que $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$ y por lo tanto $\mathfrak{B} \not\models \sigma$.

El siguiente teorema y sus corolarios nos dan una condición suficiente para encontrar la equivalencia elemental entre dos estructuras relacionales:

Teorema 4.1.2 *Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ dos estructuras relacionales isomorfas. Entonces $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un isomorfismo, $s \in {}^{\omega}A$ y $\varphi \in FORM_{\mathrm{L}}$. Demostraremos por inducción sobre la formación de fórmulas que si $\varphi \in FORM_L$ es tal que $\mathfrak{A} \models_s \varphi$ entonces $\mathfrak{B} \models_{f\circ s} \varphi$.

Para las fórmulas atómicas, si φ es de la forma $v_i = v_j$ tenemos que

$\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{A} \models_s v_i = v_j \iff s(v_i) = s(v_j) \iff f(s(v_i)) = f(s(v_j)) \iff f \circ s(v_i) = f \circ s(v_j) \iff \mathfrak{B} \models_{f\circ s} v_i = v_j \iff \mathfrak{B} \models_{f\circ s} \varphi$.

Si φ es de la forma $P_i(v_1, \ldots, v_n)$, entonces:

$\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{A} \models_s P_i(v_1, \ldots, v_n) \iff (s(v_1), \ldots, s(v_n)) \in R_i \iff (f(s(v_1)), \ldots, f(s(v_n))) \in S_i$ (por el isomorfismo) $\iff (f \circ s(v_1), \ldots, f \circ s(v_n)) \in S_i \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} P_i(v_1, \ldots, v_n) \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi$.

Supongamos que para ψ, χ se tiene que $\mathfrak{A} \models_s \psi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \psi$ y $\mathfrak{A} \models_s \chi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \chi$.

Entonces, si φ es de la forma $\psi \vee \chi$,

$\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{A} \models_s \psi \vee \chi \iff \mathfrak{A} \models_s \psi$ o $\mathfrak{A} \models_s \chi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \psi$ o $\mathfrak{B} \models_{f \circ s} \chi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \psi \vee \chi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi$.

Si φ es de la forma $\neg\psi$,

$\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{A} \models_s \neg\psi \iff \mathfrak{A} \not\models_s \psi \iff \mathfrak{B} \not\models_{f \circ s} \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \neg\psi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi$.

Si φ es de la forma $\exists v_n \psi$,

$\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{A} \models_s \exists v_n \psi \iff$ existe $c \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models_{s(n/c)} \psi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s(n/f(c))} \psi \implies \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \exists v_n \psi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi$.

$\mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \exists v_n \psi \iff$ existe $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models_{f \circ s(n/b)} \psi$, sea entonces $c = f^{-1}(b)$, la cual existe por ser f biyección, entonces $\mathfrak{A} \models_{s(n/c)} \psi \iff \mathfrak{A} \models_s \exists v_n \psi \iff \mathfrak{A} \models_s \varphi$.

Así, tenemos que cuando f es un isomorfismo, $\mathfrak{A} \models_s \varphi \iff \mathfrak{B} \models_{f \circ s} \varphi$ para toda fórmula φ. En particular, si φ es un enunciado tendremos que $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$, de donde $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. ■

Definición 4.1.3 *Diremos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$, o que $\mathfrak{B}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$, denotado por $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ y para cualquier fórmula φ de* L *y cualquier $x \in A^{\omega}$,*

$$\mathfrak{A} \models_x \varphi \textit{ si y sólo si } \mathfrak{B} \models_x \varphi.$$

Lema 4.1.4 (Criterio de Tarski-Vaught) *Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ si y sólo si para cada φ fórmula de L y $s \in {}^{\omega}A$ sucesión de elementos de A tal que $\mathfrak{B} \models_s \exists v_n \varphi$ existe algún elemento $c \in A$, tal que $\mathfrak{B} \models_{s(n/c)} \varphi$.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B} \models_s \exists v_n \varphi$. Entonces $\mathfrak{A} \models_s \exists v_n \varphi$ y por tanto, $\mathfrak{A} \models_{s(n/c)} \varphi$ para alguna $c \in A$. $s(n/c) \in {}^{\omega}A$ y así, $\mathfrak{B} \models_{s(n/c)} \varphi$.

Inversamente, supongamos que para cualquier fórmula φ de L y cualquier $s \in A^{\omega}$, $\mathfrak{B} \models_s \exists v_n \varphi$ implica que existe algún $c \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models_{s(n/c)} \varphi$. Demostraremos entonces que $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, es decir, demostraremos que:

Para cualquier fórmula φ de L y cualquier $s \in {}^{\omega}A$, $\mathfrak{A} \models_s \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models_s \varphi$.

Por inducción sobre el número de símbolos lógicos en φ. Es fácil comprobar que es cierto cuando φ es una fórmula atómica, ya que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Y, claramente, si se cumple para las fórmulas ψ y χ, se cumple también para $\neg\psi$ y para $\psi \vee \chi$.

Supongamos que se cumple para la fórmula ψ. Demostraremos que se cumple también para $\exists v_n \psi$. Si $\mathfrak{A} \models_s \exists v_n \psi$, existe entonces $c \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models_{s(n/c)} \psi$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $\mathfrak{B} \models_{s(n/c)} \psi$, y por tanto $\mathfrak{B} \models_s \exists v_n \psi$. Si $\mathfrak{B} \models_s \exists v_n \psi$, por la hipótesis del lema, hay algún $c \in A$, tal que $\mathfrak{B} \models_{s(n/c)} \psi$. Por la hipótesis de inducción, $\mathfrak{A} \models_{s(n/c)} \psi$ y por lo tanto $\mathfrak{A} \models_s \exists v_n \psi$. ■

Corolario 4.1.5 *Si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ si y sólo si cada vez que $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ es una fórmula de L con variables libres entre $v_0, \ldots, v_n$ y $a_0, \ldots, a_{n-1}$ son elementos de A, tales que para algún $b \in B$, $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, b]$, entonces hay algún $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$.*

Demostración. Es solamente una distinta enunciación del lema. ■

Para la siguiente sección necesitaremos un resultado que involucra a una estructura relacional a la que le añadiremos un conjunto de elementos distinguidos de su universo. Si $\mathfrak{A}$ es una estructura relacional con universo A, y $\bar{a} = \langle a_k \rangle_{k<\beta}$ es una sucesión de elementos de A, mediante $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$ representamos a la estructura que consiste en añadir al sistema $\mathfrak{A}$, como elementos distinguidos, todos los que integran a $\bar{a}$. Un lenguaje adecuado para dicha estructura, $\mathrm{L}(\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle)$, será aquel que resulte de añadir una constante individual para cada elemento de $\bar{a}$ a un lenguaje adecuado para $\mathfrak{A}$. Por una *enumeración* de A entenderemos una sucesión donde aparecen todos los elementos de A.

Teorema 4.1.6 *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras del mismo tipo,* L *un lenguaje adecuado para estas estructuras y $f : A \to B$. La función f es una inmersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si y sólo si*

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle \text{ en el lenguaje } \mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}.$$

Siendo $\bar{a} = \langle a_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración de A y $\bar{b}$ la sucesión de las imágenes de los elementos de $\bar{a}$.

Demostración. Puede consultarse en [7]. ■

4.2. Teoremas de Löwenheim-Skolem

Teorema 4.2.1 *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura relacional infinita de cardinal α y β un cardinal tal que $\rho \leq \beta \leq \alpha$, donde ρ es el cardinal del lenguaje* L[1]*, entonces $\mathfrak{A}$ tiene una subestructura elemental $\mathfrak{B}$ de cardinal β.*

Demostración. Sea $<$ un buen orden para A. Definimos una sucesión $\langle B_n | n \in \omega \rangle$ de subconjuntos de A de la siguiente forma:

B_0 es cualquier subconjunto de A de cardinal β y B_{n+1} es el conjunto de todos los $a \in A$ tales que para alguna fórmula $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ de L, y $a_0, \ldots, a_{n-1} \in B_n$, a es el $<$-mínimo $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$.

Para cada $a_0 \in B_n$, a_0 es el $<$-mínimo (y además el único) elemento $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models v_0 = v_1[a_0, a]$. Entonces $a_0 \in B_{n+1}$ y por tanto $B_n \subseteq B_{n+1}$.

Como sólo hay ρ fórmulas distintas de L y $\rho \leq \beta$, cada conjunto B_n es de cardinal β. Así, $B = \bigcup_{n \in \omega} B_n$ es de cardinal β. Si $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \restriction_B$, tenemos que $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, nos falta únicamente ver que $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$.

Sean entonces $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ una fórmula de L, $a_0, \ldots a_{n-1} \in B$ y $a \in A$ tales que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots, a_{n-1}, a]$. Para $0 \leq i < n$, $a_i \in B$, así, hay algún $n_i \in \omega$ con $a_i \in B_{n_i}$. Sea m el máximo del conjunto $\{n_i | 0 \leq i < n\}$, entonces $a_0, \ldots, a_{n-1} \in B_m$. Por hipótesis el conjunto $\{a \in A | \mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{n-1}, a]\}$ es no vacío y tiene un $<$-mínimo, digamos b. Por construcción $b \in B_{m+1} \subseteq B$ y así, hay algún $b \in B$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0, \ldots a_{n-1}, b]$, por el criterio de Tarski-Vaught tenemos entonces que $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$. ∎

Corolario 4.2.2 (Teorema de Löwenheim-Skolem descendente L-S$\downharpoonleft$) *Sea Σ un conjunto de enunciados del lenguaje* L *de cardinal α con un modelo infinito de cardinal $\beta \geq \alpha$. Entonces Σ tiene un modelo de cualquier cardinal infinito γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.*

Demostración. Sea $\delta = max\{\aleph_0, \alpha\}$. A lo más ocurren δ letras predicativas en Σ y por tanto podemos considerar a Σ como un conjunto de enunciados de un lenguaje L$'$ de cardinal δ. Sea $\mathfrak{A}$ el modelo de Σ de cardinal $\beta \geq \alpha$ que existe por hipótesis. Al quitar todas las relaciones correspondientes a las letras predicativas que no ocurren en L$'$, obtenemos una interpretación $\mathfrak{A}'$ de cardinal β que es modelo de Σ. Si γ es un cardinal infinito tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, entonces $\delta \leq \gamma, \beta$ y por el teorema previo, $\mathfrak{A}'$ tiene una subestructura elemental $\mathfrak{B}'$ de cardinal γ. Observemos que para este punto hemos obtenido ya un modelo de Σ de cardinal γ, sin embargo, aunque nuestro modelo es

[1]El cardinal de un lenguaje se definirá como el máximo entre el cardinal del conjunto de símbolos del lenguaje y $\aleph_0$.

una interpretación de L$'$, esto no representa ningún problema, pues podemos añadir relaciones arbitrarias a $\mathfrak{B}'$ para las letras predicativas que no aparecen en Σ, obteniendo así una interpretación $\mathfrak{B}$ de L (nuestro lenguaje original) de cardinal γ y que es modelo de Σ. ■

Teorema 4.2.3 *Sea $\mathfrak{A}$ una interpretación infinita del lenguaje* L *de cardinal α. $\mathfrak{A}$ tiene una extensión elemental de cualquier cardinal $\beta \geq \alpha, \rho$, donde ρ es el cardinal del lenguaje* L.

Demostración. Sean $\beta \geq \alpha, \rho$ y $a \in A^\alpha$ una enumeración de A. Sea L_α el lenguaje obtenido de L al añadir la sucesión de constantes $\langle c_\xi | \xi < \alpha \rangle$ y sea $\mathrm{L}_{\alpha+\beta}$ el lenguaje obtenido de L_α al añadir las constantes $\langle d_\xi | \xi < \beta \rangle$.

Sea Δ el conjunto de todos los enunciados de L_α que son ciertos en $\langle \mathfrak{A}, a \rangle$ y sea $\Gamma = \{\neg(d_\xi = d_\zeta) | \xi < \zeta < \beta\}$. Para poder utilizar el Teorema de Compacidad, demostraremos que cualquier subconjunto finito de $\Delta \cup \Gamma$ tiene modelo. Para esto basta demostrar que si Γ_0 es un subconjunto finito de Γ, entonces $\Delta \cup \Gamma_0$ tiene modelo. Supongamos entonces que Γ_0 es un subconjunto finito de Γ. Sean $d_{\xi_1}, \ldots, d_{\xi_n}$ las constantes que ocurren en Γ_0 y $a'_1, \ldots, a'_n$ cualesquiera n elementos distintos de A (efectivamente existen, pues A es infinito). Definimos la siguiente sucesión a'' en $A^{\alpha+\beta}$:

$a''_\xi = a_\xi$ para $\xi < \alpha$
$a''_\xi = a'_i$ si $\xi = \alpha + \xi_i$, con $1 \leq i \leq n$
a''_ξ arbitraria en cualquier otro caso

Como los a'_i son distintos, $\langle \mathfrak{A}, a'' \rangle$ es modelo de $\Delta \cup \Gamma_0$, donde los d_ξ se interpretan como a''_ξ, así, cada subconjunto finito de $\Delta \cup \Gamma$ tiene modelo. Podemos entonces concluir, gracias al Teorema de Compacidad, que $\Delta \cup \Gamma$ tiene modelo. Como las constantes d_ξ tienen valores distintos en cualquier modelo de $\Delta \cup \Gamma$, este modelo ha de tener cardinal $\geq \beta$. Entonces, por L-S$\downharpoonleft$, $\Delta \cup \Gamma$ tiene un modelo, digamos $\langle \mathfrak{B}, b \rangle$ de cardinal β. Como Δ es el conjunto de todos los enunciados de L_α verdaderos en $\langle \mathfrak{A}, a \rangle$, se sigue que $\langle \mathfrak{A}, a \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, b' \rangle$, donde $b' = b \restriction_\alpha$, i. e. b' es la sucesión de los primeros α términos de la sucesión b. Como a es una enumeración de A, $\mathfrak{A}$ es elementalmente sumergible en $\mathfrak{B}$, entonces, salvo isomorfismo, $\mathfrak{B}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$ de cardinal β.

Corolario 4.2.4 (Teorema de Löwenheim-Skolem ascendente L-S$\upharpoonleft$) *Sea Σ un conjunto de enunciados de cardinal α. Si Σ tiene un modelo de cardinal $\beta \geq \aleph_0$, entonces Σ tiene un modelo de cualquier cardinal $\geq \alpha, \beta$.* ■

Demostración. Se sigue directamente del teorema anterior. ■

Teorema 4.2.5 (Teorema de Löwenheim-Skolem L-S) *Sea Σ un conjunto de enunciados con un modelo infinito. Si Σ es finito, Σ tiene un modelo de cualquier cardinal infinito. Si Σ es infinito de cardinal α entonces Σ tiene modelo de cualquier cardinal $\geq \alpha$.*

Demostración. Es una consecuancia directa de L-S$\downharpoonright$ y L-S$\upharpoonright$. ■

Observación. En los Corolarios 4.2.2 (L-S$\downharpoonright$) y 4.2.4 (L-S$\upharpoonright$), así como en el Teorema 4.2.5 (L-S), es conveniente notar que, por la forma en que los resultados fueron demostrados, el modelo que se encuentra del cardinal deseado, es, además, una subestructura elemental, o una extensión elemental, del modelo original que se tiene por hipótesis.

4.3. Ultraproductos

Para facilitar la exposición, consideraremos estructuras relacionales conformadas por un conjunto no vacío y una única relación binaria sobre el conjunto. El lenguaje apropiado para dichas estructuras será L, que consiste en una letra predicativa de grado 2, digamos P_0; por tanto, el tipo para dichas estructuras será $\mu_0 = \{(0, 2)\}$. La forma en que se lleva a cabo la construcción ilustra la manera en que una construcción equivalente se puede realizar para estructuras relacionales con un número arbitrario de relaciones de cualquier aridad, donde la notación sería bastante complicada.

Sea I un conjunto de índices arbritrario pero fijo. Un ultrafiltro en I es un ultrafiltro en la Álgebra Booleana potencia de I, $\langle \mathcal{P}(I), \subseteq \rangle$.

Para cada $i \in I$, $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, R_i \rangle$ será una estructura relacional de tipo μ_0. Sea $\prod_{i \in I} A_i = A$ el producto cartesiano de los conjuntos A_i. Dado que el conjunto de índices es fijo, en adelante se omitirá la notación $i \in I$, *i.e.* $\prod_{i \in I} A_i = \prod A_i$. Denotaremos a los elementos de $\prod A_i$ por f, g, f', g' y, para $f \in A$, la i-ésima coordenada será $f(i)$ o f_i.

Si F es una colección de subconjuntos de I, definiremos la relación $\sim_F$ sobre A por:

$f \sim_F g$ si y sólo si $\{i \in I | f_i = g_i\} \in F$

Lema 4.3.1 *i) Si F es un filtro en I, entonces $\sim_F$ es una relación de equivalencia en A.*

ii) Si $\sim_F$ es una relación de equivalencia en A y $|A_i| \geq 3$ para cada A_i, entonces F es un filtro en I.

Demostración. $i)$ Si F es un filtro en I, $I \in F$ y por tanto $\sim_F$ es reflexiva, además $\sim_F$ es claramente simétrica por definición.

Para ver que es transitiva, supongamos $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$, entonces:
$X = \{i \in I | f_i = g_i\} \in F$
$Y = \{i \in I | g_i = h_i\} \in F$
Así, tenemos que $X \cap Y \in F$ por ser filtro y, además, $X \cap Y \subseteq Z = \{i \in I | f_i = h_i\}$ y por ser F filtro, $Z \in F$ con lo que $f \sim_F h$ y por tanto $\sim_F$ es transitiva.

ii) Sean $a_i, b_i, c_i \in A_i$ tales que $a_i \neq b_i$, $b_i \neq c_i$, $c_i \neq a_i$ y consideremos $N, M \in F$, demostraremos que $N \cap M \in F$.

Consideremos a $f, g, h \in A$ tales que:

$$f_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in N \\ b_i & \text{si } i \in M - N \\ c_i & \text{si } i \in I - (M \cup N) \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in N \\ b_i & \text{si } i \in I - (M \cup N) \\ c_i & \text{si } i \in M - N \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in I - (M \triangle N) \\ b_i & \text{si } i \in N - M \\ c_i & \text{si } i \in M - N \end{cases}$$

Como $N \in F$ y $\{i \in I | f_i = g_i\} = N$, $M \in F$ y $\{i \in I | g_i = h_i\} = M$, tenemos que $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$. Como la relación $\sim_F$ es de equivalencia, en particular es transitiva, por lo tanto $f \sim_F h$, lo cual implica que $\{i \in I | f_i = h_i\} \in F$, pero $\{i \in I | f_i = h_i\} = M \cap N$, por lo que $M \cap N \in F$.

Consideremos ahora un conjunto $M \in F$ tal que $M \subseteq D$ para algún $D \subseteq I$. Demostraremos que $D \in F$, lo cual será suficiente para verificar que F es un filtro.

Consideremos a $f, g, h \in A$ tales que:

$$f_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in M \\ c_i & \text{si } i \in I - M \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in M \cup (I - D) \\ b_i & \text{si } i \in D - M \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in M \\ b_i & \text{si } i \in I - D \\ c_i & \text{si } i \in D - M \end{cases}$$

Así, $M = \{i \in I | f_i = g_i\} = \{i \in I | g_i = h_i\}$ lo cual, dado que $M \in F$, implica que $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$, y nuevamente haciendo uso de la transitividad de $\sim_F$ podemos conluir que $\{i \in I | f_i = h_i\} = D \in F$. Y por lo tanto F es un filtro. ■

En adelante consideraremos que F es un filtro en I. Por la forma en que se definen los filtros, en particular la propiedad de ser cerrados por superconjuntos, podemos pensar a un filtro como los subconjuntos "grandes" de I, así, podemos pensar que $f \sim_F g$ cuando f y g son iguales en "casi todas" sus coordenadas. Extendiendo esta idea podemos definir la relación S en A para los casos en que R_i se cumpla para "casi todas" las coordenadas. De manera más precisa, diremos:

$\langle f, g\rangle \in S$ si y sólo si $\{i \in I | \langle f_i, g_i\rangle \in R_i\} \in F$

Notemos que la definición de $\sim_F$ es el caso especial donde R_i es la identidad en A_i. El siguiente lema muestra que los elementos de A que son equivalentes bajo la relación $\sim_F$ son indistinguibles bajo la relación S.

Lema 4.3.2 *La relación $\sim_F$ es de congruencia respecto a S, i.e., si $f \sim_F f'$ y $g \sim_F g'$, entonces $\langle f, g\rangle \in S$ implica que $\langle f', g'\rangle \in S$*

Demostración. Sean $f, f', g, g' \in A$ tales que $f \sim_F f'$ y $g \sim_F g'$, y sean $X = \{i \in I | f_i = f'_i\}$ y $Y = \{i \in I | g_i = g'_i\}$, entonces $X, Y \in F$.

Si $\langle f, g\rangle \in S$, $Z = \{i \in I | \langle f_i, g_i\rangle \in R_i\} \in F$, y, como F es filtro, tenemos que $X \cap Y \cap Z \in F$. Pero $X \cap Y \cap Z \subseteq W = \{i \in I | \langle f'_i, g'_i\rangle \in R_i\}$, lo cual implica $W \in F$ y por lo tanto $\langle f', g'\rangle \in S$. ■

Definimos, para cada $f \in A$, a f/F como la clase de equivalencia a la que pertenece f bajo la relación $\sim_F$, y a A/F como el conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de A, *i.e.*, $A/F = \{f/F | f \in A\}$.

La relación S en A induce la relación R_F en A/F definida por:

$\langle f/F, g/F\rangle \in R_F$ si y sólo si $\langle f, g\rangle \in S$

Sabemos por el lema 4.3.2 que esta relación no depende de representantes, por lo que está bien definida.

Definimos entonces a $\prod \mathfrak{A}_i/F$ como la estructura relacional $\langle \prod A_i/F, R_F\rangle = \langle A/F, R_F\rangle$. $\prod \mathfrak{A}_i/F$ es llamado el producto reducido de la familia $\{\mathfrak{A}_i | i \in I\}$ sobre el filtro F. Si F es un ultrafiltro, $\prod \mathfrak{A}_i/F$ es llamado el *ultraproducto*. Si para cada $i \in I$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$, el producto reducido se denota por $\mathfrak{A}^I/F$ y es llamado la potencia reducida de $\mathfrak{A}$ sobre F. Si F es un ultrafiltro, $\mathfrak{A}^I/F$ es la *ultrapotencia* de $\mathfrak{A}$.

Si $\{\mathfrak{A}_i | i \in I\}$ es una colección de estructuras relacionales del mismo tipo, y F un ultrafiltro en I, es claro a partir de la construcción antes descrita que el ultraproducto $\prod \mathfrak{A}_i/F$ es del mismo tipo que cada $\mathfrak{A}_i$, así, podemos utilizar el mismo lenguaje L para hacer afirmaciones sobre $\prod \mathfrak{A}_i/F$ que aquel que utilizamos para hablar de lo que pasa en las estructuras del cual surge. La pregunta natural es: ¿Qué propiedades elementales existen relacionando al ultraproducto con sus factores? Para responder a esta pregunta recurriremos al Teorema de Łoš, no sin antes aclarar un par de aspectos notacionales.

Si $f = \langle f_1, \dots, f_n, \dots \rangle$ es una sucesión de elementos de $\prod A_i$, *i.e*, $f \in A^\omega$, f/F será la sucesión $f/F = \langle f_1/F, \dots, f_n/F, \dots \rangle$ de elementos de A/F, así, $f/F \in (A/F)^\omega$. La sucesión $\langle f_1(i), \dots, f_n(i), \dots \rangle$ de elementos de A_i será la sucesión f_i.

Teorema 4.3.3 (Teorema de Łoš) *Si F es un ultrafiltro sobre I, para cualquier fórmula φ de L y cualquier sucesión $f/F \in (A/F)^\omega$ se tiene que:*

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \varphi \textit{ si y sólo si } \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \varphi\} \in F$$

Demostración. Por inducción sobre el número de símbolos lógicos en φ.

Si φ es una fórmula atómica de la forma $v_m = v_n$, entonces:

Se tiene que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} v_m = v_n$ si y sólo si $f_m/F = f_n/F$ si y sólo si $f_m \sim_F f_n$ si y sólo si $\{i \in I | f_m(i) = f_n(i)\} \in F$ si y sólo si $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} v_m = v_n\} \in F$, esto pude observarse únicamente utilizando la definición de satisfacibilidad para fórmulas.

Por la forma en que está definida la relación binaria con la que cuenta nuestra estructura, el caso en el que φ es de la forma $P_0(v_m, v_n)$ se puede verificar también de manera directa, análogamente al caso de la identidad.

Supongamos entonces que el resultado es verdadero para todas las fórmulas con menos de r símbolos lógicos y que φ es una fórmula con r símbolos lógicos. Hay 3 casos:

i) φ es de la forma $\psi \wedge \chi$. Sean: $D_\psi = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \psi\}$, $D_\chi = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \chi\}$. Entonces $D_\psi \cap D_\chi = \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \psi \wedge \chi\}$

Ahora, $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \psi \wedge \chi \Leftrightarrow \prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \psi$ y $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \chi \Leftrightarrow D_\psi, D_\chi \in F \Leftrightarrow D_\psi \cap D_\chi \in F$. Lo anterior se obtiene utilizando la hipótesis de inducción sobre ψ y χ, ya que son fórmulas con estrictamente menos de r símbolos lógicos, y el hecho de que F es un filtro. Por lo tanto, el teorema es verdadero para las fórmulas de la forma $\psi \wedge \chi$.

ii) φ es de la forma $\neg\psi$. Entonces:

Tenemos que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \neg\psi$ si y sólo si no sucede que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \psi$ si y sólo si $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \psi\} \notin F$ si y sólo si $I - \{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \psi\} \in F$ si y sólo si $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \not\models_{f_i} \psi\} \in F$ si y sólo si $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \neg\psi\} \in F$. Cabe señalar que éste es el único momento en el que se utiliza el hecho de que F sea ultrafiltro, para poder pasar de que el conjunto $\{i \in I | \mathfrak{A}_i \models_{f_i} \psi\}$ no esté en F a que esté su complemento.

iii) φ es de la forma $\exists v_n\psi$. Sea $D = \{i \in I|\mathfrak{A}_i \models_{f_i} \exists v_n\psi\}$, demostraremos que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \exists v_n\psi$ si y sólo si $D \in F$.

Supongamos que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \exists v_n\psi$. Entonces hay un $b \in A$ tal que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f(n/b)/F} \psi$. Sea $E = \{i \in I|\mathfrak{A}_i \models_{f(n/b)(i)} \psi\}$. Tenemos, por la hipótesis de inducción, que $E \in F$. Observemos además que $f(n/b)(i) = f(i)(n/b_i)$ y por lo tanto $E \subseteq D$, y ya que F es un filtro, tenemos que $D \in F$.

Inversamente supongamos que $D \in F$. Si $i \in D$, $\mathfrak{A}_i \models_{f_i} \exists v_n\psi$ y por tanto hay algún b_i en A_i tal que $\mathfrak{A}_i \models_{f(i)(n/b_i)} \psi$. Por el Axioma de Elección, en su versión multiplicativa, tenemos que hay un $c \in \prod A_i$ tal que $c_i = b_i$ para cada $i \in D$ y es un elemento de A_i. Entonces $D \subseteq \{i \in I|\mathfrak{A}_i \models_{f(n/c)(i)} \psi\} = C$ y, así, $C \in F$, y por la hipótesis de inducción, $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f(n/c)/F} \psi$, lo cual implica que $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \exists v_n\psi$, o lo que es lo mismo, $\prod \mathfrak{A}_i/F \models_{f/F} \varphi$.

Así, el teorema se cumple para cada fórmula de nuestro lenguaje.

■

Corolario 4.3.4 *Si σ es un enunciado de L, entonces*

$$\prod \mathfrak{A}_i/F \models \sigma \iff \{i \in I|\mathfrak{A}_i \models \sigma\} \in F$$

■

Teorema 4.3.5 (El Teorema de Compacidad para la Lógica de Predicados) *Un conjunto Σ de enunciados de L tiene modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene modelo*

Demostración. Si Σ tiene un modelo, entonces cada subconjunto finito de Σ tiene al menos un modelo, a saber, aquel que existe para Σ.

Supongamos ahora que cada subconjunto finito de Σ tiene modelo. Construiremos un ultraproducto de los modelos de los subconjuntos finitos de Σ eligiendo un ultrafiltro de manera tal que el ultraproducto construido sea un modelo de Σ.

Sea $I = [\Sigma]^{<\omega}$ (el conjunto de todos los subconjuntos finitos de Σ). Por hipótesis, cada $\Delta \in I$ tiene un modelo $\mathfrak{A}_\Delta$.

Para cada $\Delta \in I$, sea $\Delta^* = \{\Delta' \in I|\Delta \subseteq \Delta'\}$. Como $\Delta \in \Delta^*$, cada colección Δ^* es no vacía. Además, para cualquier subconjunto finito, digamos $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ de I, $\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \cdots \cap \Delta_n^*$ y por tando la colección $\{\Delta^*|\Delta \in I\}$ tiene la pif, así, esta colección puede extenderse a un ultrafiltro F en I.

Demostraremos entonces que el ultraproducto $\prod_{\Delta \in I} \mathfrak{A}_{\Delta}/F$ es un modelo de Σ.

Supongamos que $\sigma \in \Sigma$, entonces $\{\sigma\} \in I$, digamos $\{\sigma\} = \Delta_0$. Ahora, $\mathfrak{A}_{\Delta_0} \models \sigma$ y claramente $\mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma$ si $\Delta_0 \subseteq \Delta'$. Entonces:

$\Delta_0^* = \{\Delta' \in I | \Delta_0 \subseteq \Delta'\} \subseteq \{\Delta' \in I | \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\}$. Como $\Delta_0^* \in F$, $\{\Delta' \in I | \mathfrak{A}_{\Delta'} \models \sigma\} \in F$ y por el teorema de Łoš, $\prod \mathfrak{A}_{\Delta}/F \models \sigma$. ■

Teorema 4.3.6 (Teorema de completud de Gödel-Henkin) *Un conjunto Σ de enunciados tiene modelo si y sólo si es consistente.*

Demostración. Por el teorema de finitud para la lógica de predicados, Σ es consistente si y sólo si cada subconjunto finito de Σ es consistente, lo cual, como consecuencia del corolario 3.2.13, sucede si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene modelo. Por el teorema de compacidad esto pasa si y sólo si Σ tiene modelo. ■

Capítulo 5

Filtros y Teorías

5.1. Filtros como Teorías Formales y Teorías Formales como Filtros

En el capítulo 2 nos dedicamos a definir a los sistemas formales y a caracterizar a aquellos que se puede dotar al conjunto de fórmulas de su lenguaje de una estructura de Álgebra Booleana, los Sistemas Booleanos. Por la forma en que se desarrollaron el Cálculo Proposicional y el Cálculo de Predicados podemos ver que los conjuntos $Taut$ y Val, son teorías formales bajo la definición dada[1]. Podemos preguntarnos por las propiedades que cumplen estas teorías formales, ¿son completas?, ¿correctas?, ¿axiomatizables?, ¿finitamente axiomatizables?. En el capítulo 3 contestamos a varias de estas preguntas en los casos particulares de los sistemas SC y PC, pero queda la pregunta abierta en general, ¿las propiedades de una teoría formal se reflejarán sobre el Álgebra de Lindenbaum de su sistema?. Para averiguarlo, trabajemos con un Sistema Booleano arbitrario y revisemos que propiedades pueden 'saltar' de una teoría formal a alguna estructura algebraica en el Álgebra de Lindenbaum.

Sea SF_{L} un Sistema Booleano con lenguaje L. Denotaremos por Φ al conjunto de fórmulas de L y por $\mathscr{A}$ al Álgebra de Lindenbaum sobre SF_{L}. Se puede considerar, aunque en este caso no lo haremos, un conjunto de hipótesis Δ y los resultados no cambiarán, más que en la noción de deducibilidad, que será la deducibilidad módulo Δ.

A continuación recordaremos algunas de las propiedades básicas de las teorías en los sistemas formales y haremos un recuento de las equivalencias entre estas propiedades y las propiedades de los filtros en el álgebra de

[1] La de ser conjuntos deductivamente cerrados

Lindenbaum.

Consideremos al álgebra de Lindenbaum $\mathscr{A}$, y un subconjunto $A \subseteq \mathscr{A}$, donde esto es un abuso de notación, pues realmente deberíamos de escribir $A \subseteq \Phi / \sim_{\vdash}$.

Entonces, al considerar a $(A^c)^0$, sabemos que este es un conjunto que cumple las dos primeras propiedades de los filtros, pero que no necesariamente cumple que $\emptyset \notin (A^c)^0$. Veamos qué implica esto:

Sea $|\varphi| \in (A^c)^0$, entonces, para toda ψ tal que $\varphi \to \psi$, tenemos que $|\psi| \in (A^c)^0$. Lo cual basta para que $(A^c)^0$ sea una teoría formal. Entonces, cualquier filtro en $\mathscr{A}$ es equivalente a alguna teoría formal $\mathbf{T}$, en el sistema formal SF, sobre el cual se haya definido $\mathscr{A}$, y de hecho, podemos decir exactamente a qué teoría nos referimos. Si F es un filtro sobre $\mathscr{A}$, tenemos que $\mathbf{T}$ es una teoría formal en SF, donde

$$\mathbf{T} = \{\varphi \big| |\varphi| \in F\}.$$

Sin embargo, sabemos que $(A^c)^0$ no necesariamente es un filtro, así que no necesitamos pedir tanto en el álgebra de Lindenbaum para tener teorías formales en SF, ¿qué podemos decir más en general acerca de los filtros en las álgebras de Lindenbaum?. Es natural pensar que si estamos pidiendo propiedades adicionales para asegurar que $(A^c)^0$ sea un filtro F, dichas propiedades se pueden traducir como propiedades sobre la teoría formal a la que corresponde F.

Recordemos que si $\varphi \in \Phi$, entonces $|\varphi|$ será la clase de equivalencia de la fórmula φ de acuerdo a dicha relación. Además, si $\Sigma \subseteq \Phi$ es un conjunto de fórmulas, tendremos que $|\Sigma| = \{|\varphi| \big| \varphi \in \Sigma\}$. De esta manera $|\Sigma|$ es un subconjunto de $\mathscr{A}$, y como Σ es consistente si y sólo si para toda $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ se cumple que $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ no pertenece a la clase de equivalencia del cero, o bien, $|\varphi_1| \wedge \cdots \wedge |\varphi_n| \neq 0$, tenemos que:

Lema 5.1.1 *Un conjunto de fórmulas de* L, Σ, *es consistente si y sólo si* $|\Sigma|$ *tiene la pif en* $\mathscr{A}$.

Lema 5.1.2 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría consistente en SF, entonces* $|\mathbf{T}|$ *es un filtro en* $\mathscr{A}$.

Demostración. Si $\mathbf{T}$ es una teoría consistente, por el lema anterior sabemos que $|\mathbf{T}|$ tiene la pif, y por tanto, basta verificar que si $\varphi, \psi \in \mathbf{T}$, entonces $\varphi \wedge \psi \in \mathbf{T}$ y que si $\varphi, \varphi \to \psi \in \mathbf{T}$ entonces $\psi \in \mathbf{T}$, las cuales se cumplen al ser $\mathbf{T}$ teoría. ■

El lema anterior nos dice cómo son las teorías vistas dentro del álgebra de Lindenbaum, se podría decir que el siguiente completa la caracterización, cerrando el círculo al observar cómo son las teorías correspondientes a un filtro en $\mathscr{A}$.

Lema 5.1.3 *Si F es un filtro en $\mathscr{A}$ y $\mathbf{T} = \{\varphi \big| |\varphi| \in F\}$, entonces $\mathbf{T}$ es una teoría consistente y $F = |\mathbf{T}|$.*

Demostración. Por definición, es claro que $F = |\mathbf{T}|$. Para que $\mathbf{T}$ sea una teoría consistente debemos verificar que $|\mathbf{T}| = F$ tiene la pif, pero es inmediato pues F es un filtro. Falta nada más ver que si $\mathbf{T} \vdash \varphi$, entonces $\varphi \in \mathbf{T}$, pero si $\mathbf{T} \vdash \varphi$ se tiene que existe $\Delta \subseteq \mathbf{T}$ tal que $\Delta = \{\delta_1, \dots \delta_n\}$ y $\Delta \vdash \varphi$. Como F es un filtro, $|\delta_1| \wedge \cdots \wedge |\delta_n| \in F$, y como $\Delta \vdash \varphi$, $|\delta_1| \wedge \cdots \wedge |\delta_n| \leq \varphi$. Así, $|\varphi| \in F$, y por lo tanto $\varphi \in \mathbf{T}$. Por lo tanto $\mathbf{T}$ es una teoría consistente. ■

Tenemos entonces que, si $\mathbf{T}$ es una teoría consistente y completa, por el lema 5.1.2, $|\mathbf{T}|$ es un filtro tal que, para cada $\varphi \in \Phi$, $|\varphi| \in |\mathbf{T}|$ o $|\varphi|^* = |\neg\varphi| \in |\mathbf{T}|$, de modo que $|\mathbf{T}|$ es un ultrafiltro en $\mathscr{A}$. Inversamente, si $|\mathbf{T}|$ es un ultrafiltro en $\mathscr{A}$, por el lema 5.1.3, $\mathbf{T}$ es una teoría tal que, para cada $\varphi \in \Phi$, $\varphi \in \mathbf{T}$ o $\neg\varphi \in \mathbf{T}$, *i.e.* $\mathbf{T}$ es una teoría consistente y completa. Así:

Teorema 5.1.4 *$\mathbf{T}$ es una teoría consistente y completa si y sólo si $|\mathbf{T}|$ es un ultrafiltro en $\mathscr{A}$.*

Demostración. Es la observación anterior. ■

Por otro lado, podemos analizar qué sucede con las teorías axiomatizables. Digamos que $\mathbf{T}$ es una teoría consistente axiomatizable con conjunto de axiomas Γ. Si Γ es finito, decimos que $\mathbf{T}$ es finitamente axiomatizable. Por otro lado, decimos que un filtro en una álgebra de Boole B está finitamente generado si está generado por un conjunto finito de elementos, además, tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.1.5 *En toda álgebra de Boole, todo filtro finitamente generado está generado por un único elemento.*

Demostración. Supongamos que F es un filtro generado por el conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Sea $a = \bigwedge_{i=1}^n x_i$, entonces $F = \{b \in B | a \leq b\}$. ■

De lo anterior, es claro que:

Lema 5.1.6 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría consistente finitamente axiomatizable con* Γ *como conjunto de axiomas, entonces* $|\mathbf{T}|$ *es un filtro finitamente generado por* $|\Gamma|$ *en* $\mathscr{A}$.

Si F *es un filtro finitamente generado por el conjunto* A *en* $\mathscr{A}$*, entonces* $\mathbf{T} = \{\varphi | |\varphi| \in F\}$ *es una teoría consistente finitamente axiomatizable, con* $\Gamma = f[A]$ *como conjunto de axiomas, donde* f *es una función de elección para* A.

Demostración. Basta ver que $|\mathbf{T}|$ está generado por $|\Gamma|$, pero esto es claro a partir de que $\mathbf{T}$ es una teoría, pues si $|\varphi| \in |\mathbf{T}|$ entonces $\varphi \in \mathbf{T}$, lo que implica que $\Gamma \vdash \varphi$, de donde $|\bigwedge_{\psi\in\Gamma} \psi| \leq |\varphi|$.

Para la segunda parte sólo tenemos que verificar que Γ es un conjunto de axiomas para $|\mathbf{T}|$, lo cual se sigue de observar que, si $\varphi \in \mathbf{T}$ entonces $\inf(A) = a \leq |\varphi|$ donde a es la clase de equivalancia de una conjunción finita de fórmulas. Así, $\vdash a \rightarrow \varphi$ y claramente $\Gamma \vdash \varphi$. Adicionalmente, podemos observar que, trivialmente, si una teoría es finitamente axiomatizable, puede elegirse un único axioma para la teoría, que es la conjunción del número finito de axiomas.

Adicionalmente al teorema de representación de Stone, tenemos otro teorema que nos permite trabajar a todas las álgebras Boolenas como algún tipo especial de álgebra Boolena, en este caso, el teorema va más acorde al trabajo realizado en esta tesis, relacionándolas con la lógica proposicional. Para dicho fin, utilizaremos un Sistema Booleano con un lenguaje proposicional, tal como hicimos con SC.

Teorema 5.1.7 *Toda álgebra de Boole es isomorfa a una álgebra de Lindenbaum.*

Demostración. Sea B una álgebra Booleana. Sea SF_{L} un Sistema Booleano con un lenguaje proposicional L, cuyo conjunto de variables proposicionales es $\{P_b | b \in B\} = P$. Si el conjunto Δ de fórmulas de L está conformado por las siguientes:

$P_b \longleftrightarrow P_c \wedge P_d$ con $b, c, d \in B$ y $b = c \wedge d$
$P_b \longleftrightarrow P_c \vee P_d$ con $b, c, d \in B$ y $b = c \vee d$
$P_b \longleftrightarrow \neg P_c$ con $b, c, \in B$ y $b = c^*$
P_1
$\neg P_0$

Podemos considerar a $\mathscr{A}(\Delta)$, el Álgebra de Lindenbaum de SF sobre Δ. Si D es un ultrafiltro en B y v es la asignación asociada a D, es decir si

$$v(P_b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \notin D \\ 1 & \text{si } b \in D \end{cases}$$

entonces v satisface Δ.

(i) Si $b \neq c$, entonces $\Delta \nvdash P_b \longleftrightarrow P_c$, pues si $b \neq c$ hay un ultrafiltro que tiene a uno de ellos pero no al otro, y al utilizar la asignación asociada a dicho ultrafiltro, ésta satisface $\Delta \cup \{\neg(P_b \longleftrightarrow P_c)\}$.

(ii) Además, para toda fórmula φ hay $b \in B$ tal que

$$\Delta \vdash (\varphi \longleftrightarrow P_b)$$

Definiendo $h : B \to \mathscr{A}(\Delta)$ por

$$h(b) = |P_b|$$

Por (i), h es inyectiva, y por (ii), es suprayectiva. Finalmente, las fórmulas en Σ "dicen" que h es un homomorfismo (*e.g.*, h respeta $\wedge$ si y sólo si para cualesquiera $b, c, d \in B$, si $b = c \wedge d$, entonces $h(b) = h(c) \wedge h(d)$, es decir, $|P_b| = |P_c| \wedge |P_d|$, o bien $\Sigma \vdash (P_b \longleftrightarrow P_c \wedge P_d)$. Pero $P_b \longleftrightarrow P_c \wedge P_d$ está en Σ).

Así, $B \cong \mathscr{A}(\Delta)$. ■

Retomando la noción de filtro principal, que fue introducida en la sección 2 del capítulo 1, podemos hacer un análisis de este tipo particular de filtros. Según el lema 5.1.5 los filtros finitamente generados son principales, y por el lema 5.1.6, podemos identificar a los filtros finitamente generados con teorías consistentes finitamente axiomatizables. A continuación introduciremos una definición que facilitará el manejo de los filtros principales y procederemos a enunciar una serie de lemas en álgebras Booleanas, que no demostraremos[2], pero traduciremos en lemas que hablan sobre teorías consistentes.

Definición 5.1.8 *Si B es una álgebra Booleana, a un elemento $x \in B$ se le llamará un átomo si $x \neq 0$ y para cualquier y con $y \leq x$ se tiene que $y = 0$ o $y = x$.*

Es decir, x es un átomo si no hay elementos de B entre 0 y x, o bien, x es un elemento mínimo distinto de cero de B. Entonces, prosigamos a enunciar los siguientes lemas.

Lema 5.1.9 *Sea B una álgebra Booleana, Si F es un filtro principal en B, F es un ultrafiltro si y solo si el generador de F es un átomo.*

[2] Pueden ser consultados en [3].

Demostración. Sea F un filtro principal generado por a. Si a es un átomo, consideremos a un $b \in B$, tal que $a \nleq b$ lo que implica que $0 \neq (a \wedge b^*)$, entonces $a \leq b^*$, pues como $(a \wedge b^*) \leq a$ y a es un átomo, se tiene que $a \wedge b^* = a$.

Si F es un ultrafiltro y existe $b \in B$ tal que $0 < b < a$, entonces $b \notin F$ y el filtro generado por b es un filtro que contiene propiamente a F, contradiciendo la maximalidad de F. Por lo tanto no existe ningún $b \in B$ con $0 < b < a$, con lo que a resulta ser un átomo. ■

Si este filtro está sobre una álgebra de Lindenbaum, digamos $\mathscr{A}$, al observar nuevamente que la clase de equivalencia de las contradicciones es el 0 del álgebra, y recordando cómo se definió el orden para $\mathscr{A}$, podemos enunciar los siguientes lemas, como consecuencias directas del anterior.

Lema 5.1.10 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría en SF finitamente axiomatizable, entonces* $\mathbf{T}$ *es una teoría completa si y sólo si hay una fórmula* φ *en* $\mathbf{T}$ *tal que para cada formula* ψ*, si* $\psi \rightarrow \varphi$*, entonces* $|\psi| = 0$ *o* $\vdash \varphi \rightarrow \psi$.

■

Lema 5.1.11 *Si* $\mathbf{T}$ *es una teoría consistente en SF, entonces:*

(i) $\mathbf{T}$ *es finitamente axiomatizable si y sólo si* $|\mathbf{T}|$ *es un filtro principal sobre* $\mathscr{A}$.

(ii) $\mathbf{T}$ *es completa y finitamente axiomatizable si y sólo si* $|\mathbf{T}|$ *es un ultrafiltro principal sobre* $\mathscr{A}$.

■

Finalizamos este breve recuento con una propiedad más, referente también a los ultrafiltros principales.

Lema 5.1.12 *Si* A *es un conjunto infinito, hay algún ultrafiltro no principal sobre* A.

■

El análisis de este resultado es un poco más enredado, pues involucra el teorema de representación de Stone y el isomorfismo que éste nos brinda.

Lema 5.1.13 *Si* $\mathscr{A}$ *es una Álgebra Booleana de* SF_{L}*, tal que el conjunto* $\Phi/\sim_{\vdash}$ *de las clases de equivalencia de fórmulas de* L *bajo la relación* $\sim_{\vdash}$ *es infinito, entonces existe una teoría consistente y completa no finitamente axiomatizable en* SF_{L}.

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una Álgebra de Lindenbaum, cuyo conjunto subyacente, $\Phi/\sim_{\vdash}$ es infinito. Por el teorema de representación de Stone sabemos que $\mathscr{A}$ es isomorfa a $\mathscr{C}$, una álgebra de conjuntos, la cual a su vez es subálgebra de una álgebra potencia, digamos $\langle\mathcal{P}(I),\subseteq\rangle$. Como $\mathscr{C}$ es infinita, se tiene que $\mathcal{P}(I)$ es infinito, y para que esto suceda, necesariamente I ha de ser un conjunto infinito; por el lema anterior, debe de haber un ultrafiltro no principal sobre I. Sea U dicho ultrafiltro no principal, entonces, en caso de que la intersección de U con $\mathscr{C}$ resulte no vacía, será un ultrafiltro no principal sobre $\mathscr{C}$. Dado que existe un isomorfismo entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{C}$, tendríamos que $\mathscr{A}$ tiene un ultrafiltro no principal, el cual corresponde a una teoría consistente y completa no finitamente axiomatizable en SF_{L}.

Como $\mathscr{C}$ es infinita al menos existe $c\in\mathscr{C}$, $c\neq\emptyset$. Si $c\in U$, tenemos que la intersección es no vacía, en caso de no ser así, como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo complementos, $c^*\in\mathscr{C}$, y como U es un ultrafiltro, $c^*\in U$, por lo que $\mathscr{C}$ intersecta no vacuamente a U. ■

Terminamos esta sección intentando interpretar un resultado referente a ultrafiltros, para ejemplificar que tampoco las cosas siempre son lo que parecen.

Teorema 5.1.14 *Si B es una álgebra de Boole , A una subálgebra de B y h un homomorfismo de A en $\{0,1\}$, entonces h es extensible a un homomorfismo de B en $\{0,1\}$.*

Demostración. Sea $X=\{a\in A|h(a)=1\}$. X es un ultrafiltro en A y, en consecuencia, posee la pif en A, y por tanto, en B. Así, hay, por el teorema del ultrafiltro, un ultrafiltro D en B tal que $X\subseteq D$. Sea g el homomorfismo de B en $\{0,1\}$ determinado por D; es decir, para cada $b\in B$,

$$g(b)=\begin{cases} 0 & \text{si } b\notin D \\ 1 & \text{si } b\in D \end{cases}$$

Dado que $X\subseteq D$ y que $(A-X)\cap D=\emptyset$ (pues si $a\in A-X, a^*\in X$), g es una extensión de h.

El homomorfismo entre A y $\{0,1\}$ en el álgebra de Lindenbaum puede entenderse como una valuación de una lógica proposicional, o como antes mencionábamos, es posible incluso verla como una herramienta para encontrar una realización de un conjunto de enunciados de una lógica de predicados. Visto de esta forma, podemos enunciar el siguiente:

Teorema 5.1.15 *Sea SF_{L} un sistema con un lenguaje proposicional L. Si* L' *es un sublenguaje de* L*, con P' como conjunto de variables proposicionales,* *y tal que f' es una valuación para $SF_{\mathrm{L}'}$ entonces f' es extensible a una valuación f para SF_{L}.*

Este teorema es una consecuencia del teorema anterior, sin embargo, este último pierde algo de fuerza pues no necesariamente las subálgebras de $\mathscr{A}$ serán conjuntos de fórmulas de un sublenguaje de L. La utilidad de este teorema es notoria al considerar a los filtros en la subálgebra, pues estos "son" teorías que, si son consistentes, podrán ser extendidas a teorías consistentes en toda el álgebra, para las cuales la valuación coincidirá con las valuaciones de las teorías en la subálgebra.

Sin embargo, la verdadera fuerza del teorema 5.1.14 se hará notoria con el siguiente teorema, el cual fue demostrado en el capítulo 1 (Teorema 1.2.5) utilizando el Axioma de Elección, y al considerar la siguiente sección del capítulo.

Teorema 5.1.16 (Teorema del Ultrafiltro) *Si F es un filtro en el álgebra Booleana B, F puede ser extendido a un ultrafiltro.*

Demostracion. Sea A la subálgebra de B generada por F. $A = F \cup I$, donde I es el ideal dual de F y F es un ultrafiltro en A. Sea h el homomorfismo de A en $\{0, 1\}$ determinado por F y sea g la extensión de h a un homomorfismo de B en $\{0, 1\}$, la cual existe por el teorema 5.1.14. Entonces $D = \{b \in B | h(b) = 1\}$ es un ultrafiltro en B que extiende a F. ■

Notemos que en la demostración de este teorema no utilizamos el Axioma de Elección, pero utilizamos el teorema 5.1.14, y para demostrar dicho teorema utilizamos el teorema del ultrafiltro, así, tenemos que el teorema 5.1.14 es una equivalencia del teorema del ultrafiltro, que nos dice, al aplicarlo a una álgebra de Lindenbaum, que un conjunto consistente de fórmulas puede ser extendido a una teoría consistente y completa (O bien, como se mencionó más arriba, podríamos encontrar una realización para un conjunto consistente de enunciados en la lógica de predicados). ¿Cómo? No podemos saberlo, pues esta extensión se logra mediante el axioma de elección, el cual, como suele suceder, asegura la existencia de un ente matemático, pero no nos da un método constructivo para encontrar el ente en cuestión. ¿Es esto lo mejor que podemos decir acerca del teorema del ultrafiltro en las álgebras de Lindenbaum?.

5.2. Una equivalencia del Teorema de Compacidad en Lógica de Predicados

Teorema 5.2.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Cada álgebra Booleana contiene un ultrafiltro.*

2. *Cada filtro en una álgebra Booleana puede ser extendido a un ultrafiltro.*

3. *Cada conjunto consistente de enunciados de un lenguaje de predicados de primer orden tiene modelo.*

4. *Si Σ es un conjunto de enunciados de primer orden y cada subconjunto finito de Σ tiene modelo, entonces Σ tiene modelo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea F un filtro en una álgebra Booleana B. Entonces el álgebra cociente B/F es una álgebra Boolena que, por (1), contiene un ultrafiltro U. Sea h el homomorfismo canónico de B en B/F. Veamos que $h^{-1}[U]$ es un ultrafiltro en B que extiende a F.

Sean $a, b \in h^{-1}[U] \Rightarrow h(a), h(b) \in U \Rightarrow h(a) \wedge h(b) \in U$ por ser U filtro, pero como h es morfismo se tiene que $h(a \wedge b) \in U \therefore a \wedge b \in h^{-1}[U]$.

Si $a \in h^{-1}[U]$, $c \in B$ tales que $a \leq c \Rightarrow h(a) \leq h(c)$ por ser h morfismo, por lo tanto $h(c) \in U$ por ser U filtro, y así, $c \in h^{-1}[U]$.

Si $a \in B$ y $a \notin h^{-1}[U]$, entonces $h(a) \notin U$ y $h(a)^* \in U$ por ser U ultrafiltro, y por ser h morfismo tenemos que $h(a^*) \in U \therefore a^* \in h^{-1}[U]$.

Finalmente consideremos un $a \in F$, $h(a) = |1|$ y por tanto $h(a) \in U$, así $a \in h^{-1}[U] \therefore F \subseteq h^{-1}[U]$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea Σ un conjunto consistente de enunciados en un lenguaje de predicados L. Vamos a construir un lenguaje L^* añadiendo al lenguaje L una constante por cada fórmula que tenga exactamente una variable libre. Si llamamos F^1 al conjunto de fórmulas de L con una variable libre y abusando de la notación diremos que $\mathrm{L}^* = \mathrm{L} \cup \{c_\varphi | \varphi \in F^1\}$.

Definamos, para cada $\varphi \in F$, la fórmula $\varphi^* := (\exists x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi)$. Entonces podemos definir también al conjunto $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\varphi^* | \varphi \in F\}$.

Puede demostrarse, sin utilizar A. E. que si Σ es consistente en L entonces Σ^* es consistente en L^*.[3]

Sea B el álgebra de Lindenbaum de L^*. Para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{L}^*$, $|\varphi|$ será la clase de equivalencia de φ, *i.e.* $|\varphi| = \{\psi | \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi\}$. Como Σ es

[3] Véase el apéndice

consistente, Σ^* también lo es y por tanto el conjunto $|\Sigma^*| = \{|\varphi^*| : \varphi^* \in \Sigma^*\}$ tiene la pif[4] . Así, $|\Sigma^*|$ puede ser extendido a un filtro en B y por (2) a un ultrafiltro F en B. Usaremos ese ultrafiltro para definir una interpretación $\mathfrak{A}$ de L^* de la siguiente manera:

El universo de $\mathfrak{A}$ es el conjunto de todos los términos de L^*, cada constante es su propia interpretación. Para cada letra predicativa $n-$aria diremos que $P[\tau_1, \ldots \tau_n]$ se satisface en $\mathfrak{A}$ si y sólo si $|P(\tau_1, \ldots, \tau_n)| \in F$ (para propósitos de este argumento consideramos el símbolo de igualdad "=" como una letra predicativa no lógica, así que no será necesariamente interpretada como la identidad en $\mathfrak{A}$). Así, puede mostrarse por inducción que cualquier fórmula de Σ^* es válida en $\mathfrak{A}$. Por la manera en que Σ^* fue obtenida a partir de Σ, cada elemento de Σ también es válido en $\mathfrak{A}$.[5] Así, $\mathfrak{A}$ será un modelo de Σ en la relación de equivalencia correspondiente a cuando el símbolo de igualdad sea la relación de identidad. En general esto no es necesario, si no fuera el caso, siempre podemos "contraer" $\mathfrak{A}$ a un modelo $\mathfrak{A}'$ que satisfaga esta condición en la forma estándar[6]. $\mathfrak{A}'$ es un modelo de Σ.

(3) $\Rightarrow$ (4) Consideremos a Σ, un conjunto de enunciados de primer orden para el cual cada subconjunto finito tiene modelo. Entonces cada subconjunto finito de Σ es consistente y Σ mismo es consistente, por lo tanto tiene modelo.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathfrak{B}$ una álgebra Booleana. Sea L el lenguaje apropiado para las álgebras Booleanas y $L(\mathfrak{B})$ el lenguaje obtenido de L al agregar una constante por cada elemento de $\mathfrak{B}$. Sea Σ_1 el conjunto de todos los enunciados de $L(\mathfrak{B})$ que son verdaderos en $\mathfrak{B}$ cuando las constantes son interpretadas como los elementos correspondientes de $\mathfrak{B}$, y sea Σ_2 el conjunto de axiomas de las álgebras Booleanas. Sea L^+ el lenguaje obtenido de $L(\mathfrak{B})$ al agregar U, una nueva letra predicativa de aridad 1, y sea Σ_3 el conjunto de enunciados que dicen que los elementos que cumplen U forman un ultrafiltro[7]. Mostraremos

---

[4]Supongamos que $|\Sigma^*|$ no tiene la pif, entonces existe un subconjunto finito $|\Gamma| \subseteq |\Sigma^*|$ tal que $\inf(|\Gamma|) = 0$ o bien $\bigwedge_{|\psi| \in |\Gamma|} |\psi| = 0$, lo cual resulta en una contradicción, pues $0 = |\varphi \wedge \neg\varphi|$ y partimos de que $|\Sigma^*|$ es consistente

[5]Vease el apéndice

[6]Puede revisarse en [8].

[7]A saber, si P_1^3 representa a la operación del ínfimo, P_1^2 al complemento y P_1^1 al elemento distinguido 0, los enunciados son:

$$\forall x \forall y \forall z \Big(U(x) \wedge U(y) \wedge P_1^3(x,y,z) \to U(z) \Big)$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall w \Big(U(x) \wedge P_1^2(y,z) \wedge P_1^1(w) \wedge P_1^3(x,z,w) \to U(y) \Big)$$

$$\forall x \forall y \Big(P_1^2(x,y) \to U(x) \vee U(y) \Big)$$

que cada subconjunto finito de $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ tiene modelo. Sea Σ_0 un subconjunto finito de Σ. Sea A_0 el conjunto de aquellos elementos en $\mathfrak{B}$ que corresponden a las constantes que ocurren en Σ_0, y sea $\mathfrak{A}$ la subálgebra finita de $\mathfrak{B}$ generada por A_0. Como $\mathfrak{A}$ es finita sabemos, sin hacer uso del A. E., que $\mathfrak{A}$ contiene un ultrafiltro, digamos F. Entonces, si a es una enumeración de A_0 , $(\mathfrak{A}, F, a)$ es un modelo de Σ_0. Así, por (4), Σ tiene un modelo $\mathfrak{B}'$ en el cual el valor $U^{\mathfrak{B}'}$ de U es un ultrafiltro. Como $\mathfrak{B}'$ es modelo de Σ_1, es, salvo isomorfismo, una extensión de $\mathfrak{B}$. $\therefore U^{\mathfrak{B}'} \cap \mathfrak{B}$ es un ultrafiltro en $\mathfrak{B}$. ■

$\forall x \Big(P_1^1(x) \to \neg U(x) \Big)$

Apéndice A

Apéndice

A.1. Teorema de Compacidad para SC.

Sea Σ un conjunto de fórmulas de SC. Entonces Σ es satisfacible si y solamente si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Demostración. Si Σ es satisfacible, entonces existe una asignación que hace verdaderas a todas las fórmulas que pertenecen a Σ, así, todas las fórmulas de cualquier subconjunto finito de Σ serán satisfechas por esa misma asignación.

Supongamos ahora que cada subconjunto finito de Σ es satisfacible. Sea $n < \omega$ y $f_n : \{p_i|i < n\} \to 2$. Diremos que f_n cumple la propiedad $(*)$ si para cada subconjunto finito Σ_0 de Σ existe una valuación que satisface Σ_0 y es compatible con f_n en el conjunto $\{p_i|i < n\}$, observemos que para el caso $n = 0$ simplemente tenemos que cada subconjunto finito de Σ es satisfacible. Mostraremos por recursión sobre n que f_n puede extenderse al conjunto $\{p_i|i \leq n\}$ de tal manera que esta propiedad se siga cumpliendo, esto con la finalidad de definir una valuación de SC que satisfaga a Σ.

Sea

$$f_0 = \emptyset$$

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n \cup \{(p_n, 0)\} & \text{si } f_n \cup \{(p_n, 0)\} \text{ cumple la propiedad } (*) \\ f_n \cup \{(p_n, 1)\} & \text{si no} \end{cases}$$

Supongamos que la propiedad $(*)$ no se cumple si $f_{n+1}(p_n) = 0$. Debe entonces existir un subconjunto finito Σ_0 de Σ que no es satisfecho por ninguna valuación compatible con f_{n+1} en $\{p_i|i < n\}$ para la cual p_n tome el valor 0. Sea Σ_1 un subconjunto finito de Σ, entonces $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ es un subconjunto finito de Σ y, por hipótesis, es satisfecho por una valuación compatible con f_n en $\{p_i|i < n\}$. Por la forma en que se eligió Σ_0, en esta valuación la imagen de p_n debe ser el 1. Entonces Σ_1 es satisfecha por una valuación compatible con f_n en $\{p_i|i < n\}$ y en la cual p_n toma el valor 1. Dado que Σ_1 fue elegido arbitrariamente, esto se cumple para todo subconjunto finito de Σ. De esta manera probamos que, si $f_n \cup \{(p_n, 0)\}$ no cumple la propiedad $(*)$ entonces $f_n \cup \{(p_n, 1)\}$ la cumple, y efectivamente podemos extender a f_n al conjunto $\{p_i|i \leq n\}$ conservando la propiedad $(*)$.

Consideremos ahora $F = \bigcup \{f_n|n \in \omega\}$. Afirmo que F es una valuación que satisface a Σ, ya que, si $\varphi \in \Sigma$, podemos elegir n suficientemente grande de tal manera que todas las variables proposicionales de φ ocurran en $\{p_i|i < n\}$. $\{\varphi\}$ es un subconjunto finito de Σ, por lo tanto $\{\varphi\}$ es satisfacible por una valuación compatible con F en $\{p_i|i < n\}$, y como todas las variables proposicionales de φ ocurren en $\{p_i|i < n\}$, entonces F satisface a φ. ■

A.2. Símbolos de Constantes y Letras Funcionales en el lenguaje L.

Como mencionábamos con anterioridad, en este nivel no hay una diferencia sustancial entre trabajar únicamente con letras predicativas y agregar constantes y letras funcionales. En este trabajo se eligió la modalidad de trabajar sólo con letras predicativas pues facilita las demostraciones por inducción, sin embargo, como se habrá notado en un par de demostraciones, a veces dificulta la escritura de las fórmulas. Presentamos en esta sección una idea de la forma de extender nuestro lenguaje L a un lenguaje L* con símbolos de constantes y letras funcionales.

A veces es útil distinguir ciertos elementos en una estructura relacional. Basta con añadir a nuestro lenguaje L la sucesión

$$\langle c_\xi, \xi < \beta \rangle$$

de *símbolos de constante* o *constantes.*

Otra forma de extender nuestro lenguaje es añadiendo un conjunto de letras funcionales

$$\{f_n|n \in \omega\}.$$

Semejante a las letras predicativas, con cada letra funcional, f_n, tenemos asociado un entero positivo, $\gamma(n)$, el orden de f_n.

Las reglas de formación de L* son las usuales añadiendo el concepto de término y la noción de satisfacción se extiende de la manera usual.

Para este nuevo lenguaje, una realización será una cuarteta $\langle A, \{R_n|n \in \omega\}, \{F_n|n \in \omega\}, \{a_\xi|\xi \in \beta\}\rangle$, donde $\langle A, \{R_n|n \in \omega\}\rangle$ es una realización de L; para toda $n \in \omega$, F_n es una función $\gamma(n)-$aria definida en A; $a = \{a_\xi|\xi \in \beta\}$ es una sucesión de β elementos de A, *i.e.* $a \in A^\beta$.

Lo interesante es notar que, para propósitos interpretativos, tanto las constantes como las letras funcionales pueden ser reemplazadas por letras predicativas, las primeras por letras predicativas de aridad 1, y las segundas, por letras predicativas de aridad $n+1$, donde n es el orden de la letra funcional correspondiente. L$^+$ será el lenguaje obtenido de agregar a L las letras predicativas 1-arias $\{C_\xi|\xi \in \beta\}$, y el conjunto de letras predicativas $\{D_n|n \in \omega\}$ para las cuales tendremos asociado, a cada D_n, un entero positivo $\eta(n) = \gamma(n) + 1$, igual al orden de la función respectiva más uno.

Entonces, si $\langle A, \{R_n|n \in \omega\}, \{F_n|n \in \omega\}, a\rangle$ es una realización de L*, se sigue que $\langle A, \{R_n|n \in \omega\}, \{S_n|n \in \omega\}, \{T_\xi|\xi \in \beta\}\rangle$ será una realización de L$^+$ definida por $S_n = \{(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)}, F_n(a_1, \ldots, a_{\gamma(n)}))|a_1, \ldots, a_{\gamma(n)} \in A\}$, $T_\xi = \{a_\xi\}$ para todo $\xi < \beta$. Con la restricción de que, dicha realización ha de hacer verdaderas las fórmulas $\exists! x T_\xi(x)$ para todo $\xi < \beta$ y $(\forall x_1)\ldots(\forall x_{\gamma(n)})(\exists! z)S_n(x_1, \ldots, x_{\gamma(n)}, z)$ para todo $n \in \omega$.

Daremos una idea de cómo pude se pueden hacer corresponder las fórmulas de L* con las de L$^+$, con un ejemplo que puede ser extendido a cualquier número de funciones y constantes, pero que presentamos únicamente con una de cada una por motivos de claridad en la exposición. A cada fórmula $\varphi(f(t_1, \ldots, t_n), c, w)$ de L* le asociaremos la fórmula φ^+ dada por

$$\varphi^+ = (\forall x)(\forall y)\Big(P_f(t_1, \ldots, t_n, x) \wedge P_c(y) \rightarrow \varphi(x, y, w)\Big)$$

donde P_f y P_c son las letras predicativas correspondientes a la función f y a la constante c respectivamente, $t_1, \ldots, t_n$ son términos en el sentido usual de la definición[1], y x, y, w son variables.

Cabe señalar que φ^+ no necesariamente es una fórmula de L$^+$, pues los términos a los que está aplicada la función f no necesariamente son variables,

[1]La definición usual de término está dada por:
1)Todas las variables y todas las constantes son términos.
2)Si f es símbolo de función de n argumentos y $\tau_1, \ldots \tau_n$ son términos, entonces f$(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es un término.
3) Una sucesión de símbolos es un término si y sólo si está caracterizada por 1) y 2).

pero, por la definición recursiva de término y de fórmula para la formación de fórmulas de L^*, es claro que, al tomar una fórmula φ cualquiera de L^*, con un número finito de veces que apliquemos este procedimiento para eliminar funciones y constantes, llegaremos finalmente a una fórmula de L^+.

A.2.1. Cerradura bajo chivos expiatorios.

Sea Σ un conjunto consistente de enunciados en un lenguaje de predicados L y sea $L^* = L \cup \{c_\varphi | \varphi \in F^1\}$.

Definamos, para cada $\varphi \in F$, la fórmula $\varphi^* := (\exists x)\varphi(x) \to \varphi(c_\varphi)$. Entonces podemos definir también al conjunto $\Sigma^* = \Sigma \cup \{\varphi^* | \varphi \in F\}$.

Lema A.2.1 *Si Σ es un conjunto consistente de enunciados en un lenguaje de predicados L, entonces $\Sigma^* = \{\varphi^* | \varphi \in \Sigma\}$ es consistente en L^*.*

Demostración. Basta demostrar que $\Sigma \cup A$ es consistente para todo $A \subseteq \{\varphi^* | \varphi \in F\}$ finito. Procederemos por inducción sobre $|A|$.

Para $|A|= 0$, $A = \emptyset$, y por hipótesis Σ es consistente.

Sea $\Sigma' = \Sigma \cup \{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_{n-1}^*\}$ consistente. Tenemos que demostrar que $\Sigma \cup \{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ es consistente, supongamos que no lo es, entonces $\Sigma' \cup \{\varphi_n^*\}$ es incosistente y por lo tanto se tiene que $\Sigma' \vdash \neg\varphi_n^*$, y, usando la definición de φ_n^*, $\Sigma' \vdash \neg((\exists x)\varphi_n(x) \to \varphi_n(c_{\varphi_n}))$, de donde se sigue que $\Sigma' \vdash ((\exists x)\varphi_n(x) \wedge \neg\varphi_n(c_{\varphi_n}))$ y que $\Sigma' \vdash \neg\varphi_n(c_{\varphi_n})$.

De acuerdo a lo anterior, debe de existir una deducción de $\neg\varphi_n(c_{\varphi_n})$ a partir de Σ', en la cual podemos intercambiar cada aparición de c_{φ_n} por x para obtener una deducción de $\neg\varphi_n(x)$ a partir de Σ'. Veamos que esto es posible por inducción sobre las fórmulas que aparecen en la hipótesis. Sea $\psi_0, \ldots, \psi_k$ una deducción de $\neg\varphi_n(c_{\varphi_n})$ a partir de Σ'. Si $i \in \{0, \ldots, k\}$, y se tiene que $\psi_i(c_{\varphi_n})$ es un axioma, también $\psi_i(x)$ lo es. No puede suceder que $\psi_i(c_{\varphi_n})$ sea una hipótesis, pues la constante c_{φ_n} no aparece en ninguna fórmula de Σ'.

Supongamos que tenemos $h, i, j \in \{0, \ldots, k\}$ con $j, h \leq i$, de tal forma que ψ_i se obtiene a partir de ψ_j y ψ_h aplicando Modus Ponens, entonces, si ψ_i' es la fórmula que se obtiene de intercambiar en ψ_i todas las apariciones de c_{φ_n} por x, y de manera análoga para ψ_j' y ψ_h', entonces es claro que ψ_i' se obtiene aplicando Modus Ponens a ψ_j' y ψ_h'. De manera análoga este procedimiento es válido para Generalización.

Obtenemos así una deducción de $\neg\varphi_n(x)$ a partir de Σ y, observando que la variable x siempre puede ser elegida de tal manera que no aparezca en ninguna fórmula de Σ' ni en ninguna fórmula de la deducción de $\psi_i(c_{\varphi_n})$, podemos agregar un paso a esta deducción en para aplicar Gen a $\neg\varphi_n(x)$ y obtener $(\forall x)\neg\varphi_n(x)$.

Finalmente llegamos a que $\Sigma' \vdash (\forall x)\neg\varphi_n(x) \wedge (\exists x)\varphi_n(x)$, que implica la inconsistencia de Σ', contrario a nuestras hipótesis. Por lo tanto $\Sigma \cup \{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_n^*\}$ es consistente. ■

Bibliografía

[1] Amor, J. A. “Un refinamiento del concepto de sistema axiomático” en *Signos Filosóficos*, vol. VI, núm, 11, enero-junio 2004, pp. 121-140

[2] Amor, J. A. *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completud*, Las prensas de Ciencias, 1999.

[3] Bell, J. L. y Slomson, A. B. *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North Holland Publishing Company, 1974.

[4] Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*, Harcourt Academic Press, Second Edition, 2001.

[5] Enderton, H. B. *Una introducción Matemática a la Lógica*, IIF-UNAM, 2005.

[6] Jané, I. *Álgebras de Boole y Lógica*, Universitat de Barcelona Publicacions, 1989.

[7] Manzano, M.*Teoría de modelos*, Alianza Universidad Textos, 1989.

[8] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, Fourth Edition, Chapman & Hall/CRC, 1997.