



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

OPCIONES REALES CON APLICACIONES  
A RIESGOS CATASTRÓFICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A N:

EDGAR LÓPEZ ALVARADO

CARLOS ALBERTO VELÁZQUEZ LÓPEZ



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

Tutor: Dr. PABLO PADILLA LONGORIA

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

1. López  
Alvarado  
Edgar  
56743006  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría
  
1. Velázquez  
López  
Carlos Alberto  
56008581  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría
  
2. Dr.  
Pablo  
Padilla  
Longoria
  
3. Dr.  
Vicente Ángel  
Soriano  
Ramírez
  
4. Act.  
Jaime  
Vázquez  
Alamilla
  
5. Act.  
José Luis  
Lobera  
Topete
  
6. M. en F.  
José de Jesús  
Echeverría  
De Eguiluz
  
7. Opciones Reales con Aplicaciones a Riesgos Catastróficos  
207  
2006

## **PENSAMIENTOS**

Considero más valiente al que conquista sus deseos que al que conquista a sus enemigos, ya que la victoria más dura es la victoria sobre uno mismo.

[Aristóteles](#) (384 AC-322 AC) *Filósofo griego.*

Lo importante no es lo que hicieron de nosotros, sino lo que nosotros hacemos con eso que hicieron de nosotros.

[Jean Paul Sartre](#) (1905-1980) *Filósofo, dramaturgo, novelista y periodista político francés.*

Que tu nota no queda desapercibida en la orquesta de la vida.

[Edgar López Alvarado](#) (1983-...)

El mejor homenaje a las personas que nos guiaron es el legado que podamos dejar nosotros a los demás.

[Carlos Alberto Velázquez López](#) (1984-...)

## AGRADECIMIENTOS

Sólo cuando el aire choca con nuestro rostro nos podemos dar cuenta del largo camino que hemos recorrido y que muchas veces por culpa de espejismos y visiones caemos en el abismo de la confusión, del miedo que aterra el alma, del espíritu que encierra al mundo...

Poco a poco, al ir despertando, los sueños se vuelven la realidad de un futuro nuevo y desconocido que se pierde en el tiempo y en lo efímero.

Sin pensarlo, el tiempo corrió rápido para nosotros y en un suspiro otra parte de nuestra vida llegó a su fin. Momentos tristes, felices, confusiones, miedos; pero eso es así, partes de nuestras vidas quedaron grabadas para siempre.

No podemos terminar un camino tan significativo sin recordar a quien lo merece, tantas y tantas personas que con su aliento, apoyo y entusiasmo, nos han ayudado a alcanzar este sueño, por supuesto, que en primer lugar están nuestros padres, pero también nuestros maestros y amigos; personas de quienes siempre hemos aprendido. Tampoco podemos dejar de reconocer que hemos llegado a un punto en el que más de uno no ha tenido la oportunidad de desarrollarse, como estudiar una carrera universitaria, por esto queremos agradecer a Dios, que nos ha dado todo lo necesario para lograr una meta más. A la Universidad Nacional Autónoma de México, de la que siempre tendremos dulces recuerdos en nuestra memoria, de ella nos llevamos momentos de alegría y enriquecimiento, momentos que nos han hecho más humanos, decisiones que nos han hecho de un carácter más recio y enseñanzas que nos brindaron más que conocimientos, sabiduría.

Por supuesto que no son suficientes las palabras para expresar el tan profundo agradecimiento que tenemos para con la vida. Queremos que todos aquellos que han participado para que realicemos este trabajo se sientan aludidos, todos llevan un lugar muy especial en nuestra memoria y en nuestro corazón. Ojalá que podamos seguir compartiendo el camino, la vida y muchas cosas más...

Esto va para todas las personas que alguna vez han formado parte de nuestras vidas. Éste es el resultado de un largo camino, aún falta mucho por recorrer, pero nos encontramos ante el fin de un ciclo que empezamos hace ya más de cuatro años.

Este trabajo pretende ser algo más que un trámite. En un momento en el tiempo en el que la comodidad parece ser uno de los bienes más preciados, elegimos afrontar un pequeño reto. Que las palabras aquí escritas tengan un verdadero sentido y muchos fines. Que sea un ejemplo del trabajo que podemos hacer

*...Cuando el Sol cayó, pude darme cuenta que la vida no terminaba aún y en mis viejos recuerdos pude sentir la vida impregnada de melancolía; pero más me llenaba de felicidad al recordar eso, mi historia...*

**Edgar López Alvarado y Carlos Alberto Velázquez López**

Mayo de 2006

## ÍNDICE

<b>B. INTRODUCCIÓN</b>	
<b>0.1. CATÁSTROFES NATURALES</b>	<b>1</b>
<b>0.2. ALGUNAS IDEAS</b>	<b>2</b>
<b>1. DERIVADOS</b>	
<b>1.1. CONCEPTOS BÁSICOS</b>	<b>6</b>
Derivados	6
Derivados Financieros	6
Activos Subyacentes	6
Ventajas de los Derivados Financieros	6
<b>1.2. ORIGEN Y DESARROLLO</b>	<b>7</b>
Futuros de Productos Agroindustriales ( <i>commodities</i> )	7
Futuros Financieros	8
Opciones	8
Expansión de los Derivados	9
<b>1.3. DETALLE DE LOS PRODUCTOS DERIVADOS</b>	<b>9</b>
Futuros	9
El Contrato de Futuros	10
La Operativa de las Garantías ( <i>Margins</i> )	10
Ajuste al Mercado ( <i>Marking- to-Market</i> )	11
El Proceso de Cámara de Compensación y los <i>Clearing Margins</i>	11
La Compra- Venta de Contratos	12
Valuación de Contratos de Futuros sobre Mercancías	13
Contratos a Plazo ( <i>Forward</i> )	14
Precio a Plazo ( <i>Forward Price</i> ) y Precio de Entrega	15
Beneficios Brutos	16
Beneficios Procedentes de los Contratos a Plazo y de Futuros	16
Valuación de Contratos a Plazo	17
Opciones	18
Opciones de Compra y Venta	18
Terminología	19
Opciones sobre Índices, sobre Tasas de Interés y sobre Futuros, de Paridad Cambiaria de Divisas y de Bienes Físicos	19
Warrants	20
Swaps	21

<b>Mecánica de los Swaps de Tipo de Interés</b>	<b>21</b>
<b>Valuación de Swaps</b>	<b>22</b>
<b>Mecánica de los Swaps sobre Divisas</b>	<b>23</b>
<b>1.4. PRIMEROS INTENTOS DE DESARROLLO EN MÉXICO</b>	<b>24</b>
<b>Futuros en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)</b>	<b>24</b>
<b>Instrumentos Híbridos</b>	<b>24</b>
<b>Forwards</b>	<b>25</b>
<b>Warrants</b>	<b>25</b>
<b>Derivados sobre Subyacentes Mexicanos</b>	<b>25</b>
<b>1.5. VISIÓN SOBRE EL MERCADO Mexicano DE DERIVADOS</b>	<b>26</b>
<b>Participantes del Mercado</b>	<b>27</b>
<b>Operadores de MexDer</b>	<b>27</b>
<b>Manejo de Riesgos</b>	<b>27</b>
<b>1.6. LOS PRODUCTOS DERIVADOS EN EL MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS</b>	<b>28</b>
<b>Instrumentos Listados y su Terminología</b>	<b>28</b>
<b>Clases y Series</b>	<b>29</b>
<b>Vigencia de los Contratos</b>	<b>29</b>
<b>Liquidación de un Contrato</b>	<b>29</b>
<b>Condiciones Generales de Contratación</b>	<b>29</b>
<b>Elementos de los Futuros dentro del MexDer</b>	<b>30</b>
<b>Subyacentes</b>	<b>30</b>
<b>Tamaño del Contrato</b>	<b>30</b>
<b>Fecha de Liquidación</b>	<b>30</b>
<b>Precio de Liquidación Diaria</b>	<b>31</b>
<b>Precio de Liquidación al Vencimiento</b>	<b>31</b>
<b>Posiciones Límite</b>	<b>31</b>
<b>Contrato Abierto</b>	<b>31</b>
<b>Operación de Cierre o Cancelación</b>	<b>31</b>
<b>Aportación Inicial Mínima</b>	<b>31</b>
<b>Excedente de Aportaciones</b>	<b>32</b>
<b>Posición Corta</b>	<b>32</b>
<b>Posición Larga</b>	<b>32</b>
<b>Esquema de Operación</b>	<b>32</b>
<b>Principios Básicos de Funcionamiento</b>	<b>33</b>
<b>Seguridad</b>	<b>33</b>
<b>Control de Riesgos</b>	<b>33</b>

Equidad	33
<b>2. ÁRBOLES BINOMIALES Y EL MODELO DE BLACK- SCHOLES</b>	
<b>2.1. INTRODUCCIÓN A LOS ÁRBOLES BINOMIALES</b>	<b>34</b>
Modelo Binomial de un Periodo	34
La Irrelevancia de las Probabilidades de Variación en el Precio de las Acciones	36
Valuación Neutral al Riesgo	36
Árboles Binomiales de Dos Periodos	38
El Paso n de los Árboles Binomiales	39
Opciones Americanas	41
Delta	41
El Uso de Árboles Binomiales en la Práctica	42
<b>2.2. VALUACIÓN DE OPCIONES POR: EL MODELO BLACK-SCHOLES</b>	<b>42</b>
Supuestos sobre la Evolución de los Precios de las Acciones	43
La Distribución Lognormal	43
Tasa de Rentabilidad Esperada	44
Volatilidad	46
Estimación de la Volatilidad Mediante Datos Históricos	46
Supuestos del Modelo Black-Scholes	48
El Análisis de Black-Scholes/Merton	49
<b>2.3. LAS FÓRMULAS DE VALUACIÓN</b>	<b>50</b>
Propiedades de las Fórmulas de Black-Scholes	51
La Función de Distribución Normal	51
La Valuación Neutral al Riesgo	52
Volatilidades Implícitas	53
Causas de la Volatilidad	54
Dividendos	55
Opciones Europeas	55
Opciones de Compra Americanas	56
Aproximación de Black	56
<b>2.4. CURVAS DE VOLATILIDAD</b>	<b>57</b>
Revisión de la Ecuación Fundamental de Paridad Put-Call	57
Curva de Volatilidad para Opciones sobre Acciones	58
La Razón para la Curva de Volatilidad en Opciones sobre Acciones	60

<b>3. OPCIONES REALES</b>	
<b>3.1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>61</b>
<b>3.2. OPCIONES REALES Y PROYECTOS DE INVERSIÓN</b>	<b>62</b>
<b>La Flexibilidad y sus Implicaciones</b>	<b>63</b>
<b>Valuación de las Opciones Reales.</b>	<b>64</b>
<b>Similitudes y Diferencias entre las Opciones Financieras y Reales.</b>	<b>64</b>
<b>3.3. LAS OPCIONES DE CRECIMIENTO</b>	<b>66</b>
<b>Valor de la Opción de Inversión</b>	<b>68</b>
<b>Características de la Opción de Crecimiento con Precio de Ejercicio Conocido y Constante.</b>	<b>69</b>
<b>Factores que Afectan el Valor de la Opción.</b>	<b>70</b>
<b>Valor y Costo de la Inversión Aleatorios</b>	<b>72</b>
<b>Factores Determinantes del Proceso Estocástico del Valor del Proyecto de Inversión.</b>	<b>73</b>
<b>Otros Modelos Alternativos sobre la Evolución Estocástica del Valor del Activo Subyacente.</b>	<b>74</b>
<b>El Proceso de Reversión a la Media.</b>	<b>75</b>
<b>El Proceso Poisson</b>	<b>76</b>
<b>3.4. LA OPCIÓN DE APLAZAMIENTO</b>	<b>78</b>
<b>3.5. LA OPCIÓN DE AMPLIACIÓN Y EL TAMAÑO ÓPTIMO DE LA INVERSIÓN</b>	<b>82</b>
<b>3.6. LA OPCIÓN DE ABANDONO</b>	<b>84</b>
<b>Los Derechos de Abandono</b>	<b>84</b>
<b>Valor de la Opción de Abandono</b>	<b>85</b>
<b>3.7. LA OPCIÓN DE INVERSIÓN, LA OPCIÓN DE ABANDONO E HISTÉRESIS</b>	<b>87</b>
<b>3.8. LA INVERSIÓN SECUENCIAL Y LA OPCIÓN DE ABANDONO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PROYECTO</b>	<b>90</b>
<b>3.9. LA FLEXIBILIDAD TECNOLÓGICA Y LAS OPCIONES OPERATIVAS.</b>	<b>92</b>
<b>Valor de Opción de Paralización y Reactivación de la Actividad del Proyecto</b>	<b>93</b>
<b>Los Costos de Reinicio y de Mantenimiento Asociados a la Opción de Paralización.</b>	<b>96</b>
<b>Otras Opciones Operativas: La Modificación del Ritmo de las Operaciones, Intercambio de Factores e Intercambio de Productos.</b>	<b>98</b>
<b>3.10. EL VALOR PRESENTE NETO EXTENDIDO</b>	<b>100</b>
<b>3.11. EJEMPLOS DE OPCIONES REALES</b>	<b>102</b>

<b>3.11.1. CÓMO LAS COMPAÑÍAS PETROLERAS UTILIZAN LA VALUACIÓN DE LAS OPCIONES REALES</b>	<b>102</b>
<b>3.11.2. RECUPERACIÓN DE UNA INVERSIÓN</b>	<b>103</b>
<b>4. CATÁSTROFES NATURALES</b>	
<b>4.1. RETROSPECTIVA – PERSPECTIVA</b>	<b>107</b>
Balance Siniestral	107
Terremotos, Tsunamis, Erupciones Volcánicas	108
Tormentas	108
Inundaciones	109
Perspectivas	110
<b>4.2. ESTADÍSTICA DE LAS CATÁSTROFES NATURALES AÑO 2004</b>	<b>110</b>
Eventos Siniestrales y Víctimas Mortales	110
<b>4.3. GRANDES CATÁSTROFES NATURALES 1950–2004</b>	<b>112</b>
Comparación entre Décadas 1950–2004	113
<b>4.4. CATÁSTROFE PROVOCADA POR UN TSUNAMI EN EL SUR DE ASIA</b>	<b>114</b>
El Origen del Terremoto	114
El Tsunami	115
El Terremoto	118
Dimensión Siniestral	118
Las Catástrofes más Grandes Ocasionadas por Tsunamis desde 1700	120
Conclusión	121
<b>4.5. SERIES DE HURACANES Y EVENTOS DE TORMENTAS INHABITUALES POR TODO EL GLOBO TERRÁQUEO</b>	<b>121</b>
Huracanes en el Atlántico	122
Huracán Iván: Récord en Duración e Intensidad	123
Nuevos Importes Siniestrales en el Caribe	123
Agravación de la Exposición a Huracanes Tropicales en el Atlántico	124
Conclusión	125
<b>4.6. CONCEPTOS BÁSICOS DE TERREMOTOS</b>	<b>125</b>
Definición de sismo	125
Placas	127
Fallas	128
Otras Causas de Terremotos	128
Hipocentro (o Foco)	128

<b>Epicentro</b>	<b>129</b>
<b>Registro de los sismos</b>	<b>129</b>
<b>Determinación de epicentros</b>	<b>130</b>
<b>Medición</b>	<b>131</b>
<b>Escalas de Intensidad</b>	<b>131</b>
<b>Escala de Magnitud</b>	<b>132</b>
<b>Escala Mercalli</b>	<b>132</b>
<b>Escala Richter</b>	<b>134</b>
<b>Un Poco de Historia</b>	<b>135</b>
<b>Sismicidad en México</b>	<b>136</b>
<b>Regiones Sísmicas en México</b>	<b>139</b>
<b>Zonificación del Valle de México</b>	<b>141</b>
<b>Grandes Sismos Sentidos en la Ciudad de México a través de su Historia</b>	<b>142</b>
<b>Características del Sismo del 19 de Septiembre de 1985</b>	<b>145</b>
<b>La brecha sísmica de Michoacán</b>	<b>145</b>
<b>Dimensión de la falla de los sismos del 19 y 20 de septiembre e 1985</b>	<b>147</b>
<b>Intensidades observadas durante el sismo del 19 de septiembre de 1985</b>	<b>149</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>150</b>
<b>5. UNA OPCIÓN REAL PARA TERREMOTO</b>	
<b>5.1. MOTIVACIÓN DE LA APLICACIÓN</b>	<b>152</b>
<b>5.2. FUENTES</b>	<b>152</b>
<b>5.3. PRIMER ACERCAMIENTO: UTILIZAR LOS DATOS CONJUNTOS 2002, 2003 Y 2004 PARA SU REGRESIÓN</b>	<b>153</b>
<b>5.4. SEGUNDO ACERCAMIENTO: DEPURACIÓN DE LOS DATOS</b>	<b>157</b>
<b>5.5. SIMULACIÓN DEL MONTO Y LA FRECUENCIA</b>	<b>159</b>
<b>5.5.1.MONTO</b>	<b>159</b>
<b>5.5.2.FRECUENCIA</b>	<b>161</b>
<b>5.6. CALIBRACIÓN AL MODELO DE ÁRBOLES BINOMIALES PARA LA VALUACIÓN DE LA OPCIÓN</b>	<b>161</b>
<b>5.7. AJUSTE AL MODELO MULTIPLICATIVO PARA RIESGOS CATASTRÓFICOS</b>	<b>163</b>
<b>Búsqueda de <math>W</math></b>	<b>164</b>
<b>5.8. PARÁMETROS DEL MODELO DE AJUSTE A EVENTOS CATASTRÓFICOS</b>	<b>166</b>

<b>5.9. COBERTURA DELTA</b>	<b>168</b>
<b>5.10. ALCANCE DE LA OPCIÓN REAL Y SU HORIZONTE</b>	<b>169</b>
<b>5.11. CONCLUSIONES Y PRÓXIMOS PASOS</b>	<b>170</b>
<b>A. MODELACIÓN ESTOCÁSTICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS</b>	
<b>A.1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>172</b>
<b>A.2. MODELACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS: UNA BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.</b>	<b>173</b>
<b>A.3. EL MOVIMIENTO BROWNIANO.</b>	<b>175</b>
<b>A.4. EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO</b>	<b>177</b>
<b>A.5. LIMITACIONES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO. ALTERNATIVAS Y NUEVAS CORRIENTES EN LA MODELACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS.</b>	<b>179</b>
<b>B. MODELOS DE ACTIVOS DINÁMICOS</b>	
<b>B.1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>183</b>
<b>B.2. EL MODELO ADITIVO</b>	<b>183</b>
<b>B.3. DISTRIBUCIÓN NORMAL DEL PRECIO.</b>	<b>184</b>
<b>B.4. EL MODELO MULTIPLICATIVO</b>	<b>185</b>
<b>B.5. PRECIOS LOGNORMALES</b>	<b>186</b>
<b>B.6. CAMINATAS ALEATORIAS Y PROCESOS DE WIENER</b>	<b>187</b>
<b>B.7. PROCESO DE WIENER GENERALIZADO Y EL PROCESO DE ITO</b>	<b>189</b>
<b>B.8. UN PROCESO PARA EL PRECIO DE UNA ACCIÓN</b>	<b>190</b>
<b>B.9. PRECIOS LOGNORMALES PARA UNA ACCIÓN</b>	<b>191</b>
<b>B.10. FORMA ESTÁNDAR DE ITO</b>	<b>192</b>
<b>C. OPCIONES ALTERNATIVAS</b>	
<b>C.1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>193</b>
<b>C.2. VALUACIÓN</b>	<b>194</b>
<b>D. PROGRAMA PARA CALCULAR EL PRECIO DE UNA OPCIÓN</b>	
<b>D.1. CÓDIGO FUENTE PARA UN ÁRBOL BINOMIAL</b>	<b>195</b>
<b>E. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>206</b>

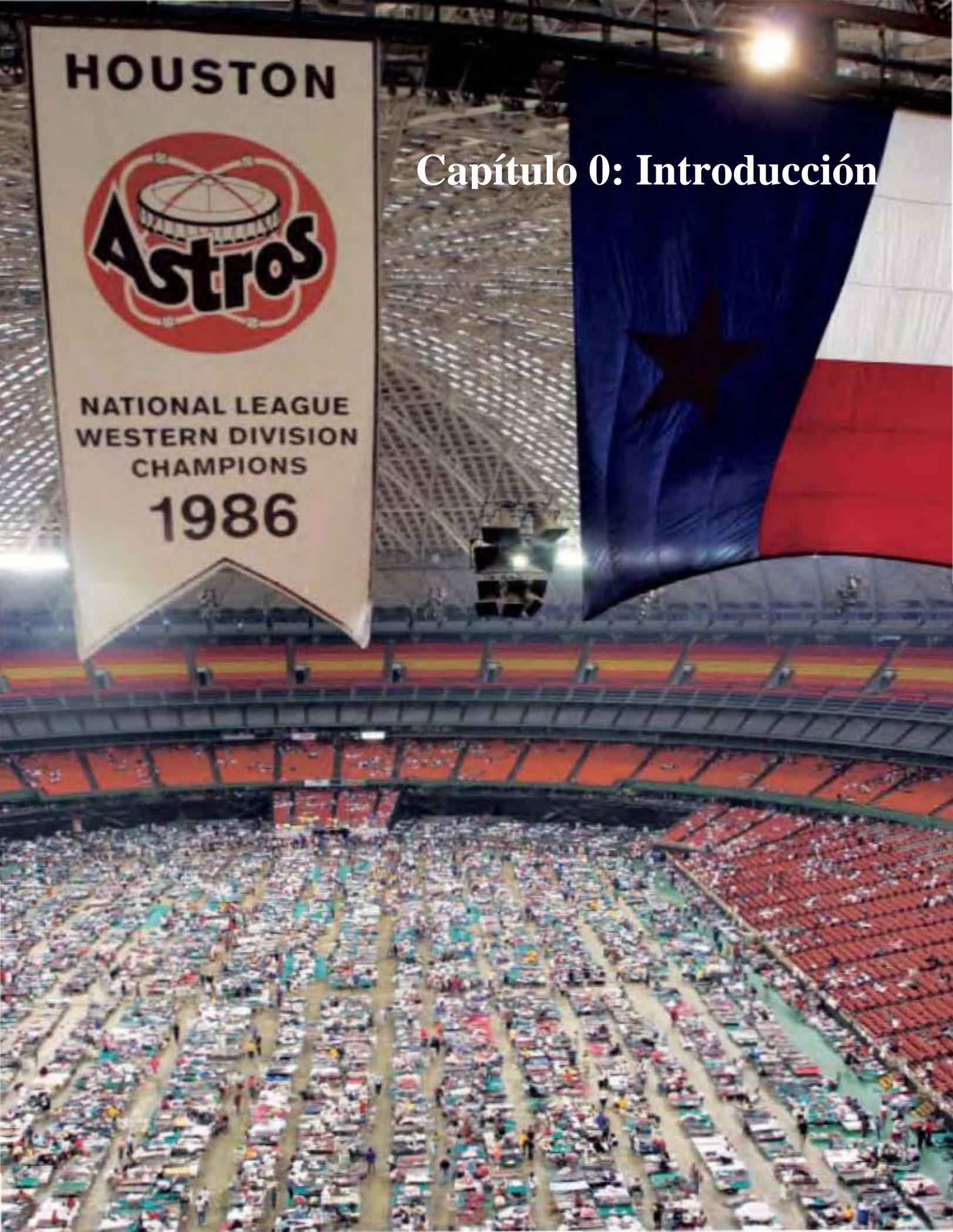
**HOUSTON**



**NATIONAL LEAGUE  
WESTERN DIVISION  
CHAMPIONS**

**1986**

# Capítulo 0: Introducción



## 0. INTRODUCCIÓN

### 0.1. CATÁSTROFES NATURALES

Año tras año se producen en todo nuestro planeta cientos de eventos siniestrales que son provocados por las fuerzas de la naturaleza. Para los gerentes de riesgos lo decisivo no solamente es contemplar por separado cada uno de los eventos siniestrales, sino tener en cuenta en particular el desarrollo futuro. Las tendencias a largo plazo se pueden derivar de las grandes catástrofes naturales dado que solamente éstas se pueden estudiar ya desde tiempos remotos. Los cuatro últimos años en la estadística a largo plazo no nos deben confundir ante el hecho de que en las décadas recientes se haya experimentado un incremento sustancial, tanto en lo que se refiere al número de eventos siniestrales como a los daños económicos ocasionados. Ello es especialmente evidente si realizamos una comparación entre las diversas décadas

El año 2005 estuvo marcado por catástrofes relacionadas a la naturaleza. Aproximadamente la mitad de todos los eventos que causaron pérdidas económicas fueron tormentas, con costos que exceden los US\$185 billones. La catástrofe que produjo más muertes fue producida por el terremoto de Octubre en el área fronteriza entre India y Pakistán, con un número de víctimas mortales de 88,000, uno de los cinco terremotos más destructivos en los últimos 100 años.

En total las pérdidas económicas excedieron los US\$210 billones, estableciendo un nuevo récord (el año con más pérdidas desde 1995 con US\$175 billones) aunque con 650 eventos siniestrales registrados, el número catástrofes naturales estuvo dentro del promedio de los últimos diez años. Más de cien mil personas murieron como resultado de una catástrofe natural el año pasado; un número tan grande de defunciones sólo se ha registrado dos veces en los últimos 25 años, el primero en 1991 debido a una tormenta en Bangladesh y el segundo en 2004 por el tsunami en el sur de Asia. En consecuencia, no es sorprendente que las pérdidas aseguradas también alcanzaron dimensiones sin precedentes. La pérdida total para la industria aseguradora fue US\$94 billones, doblando el récord anterior impuesto en 2004.

En el año pasado 70 terremotos destructivos y 13 erupciones volcánicas fueron registrados alrededor del mundo. La pérdida total alcanzó aproximadamente los US\$6 billones. En febrero, un terremoto en Irán, de magnitud 6.5 en escala de Richter, aunque la región afectada es poco poblada, más de 600 personas perdieron la vida. En marzo, un terremoto de magnitud 8.7 ocurrió en la costa

de Sumatra, destruyendo miles de casas en la Isla de Nias y matando 1,700 habitantes. En octubre, sucedió el terremoto en la frontera de India y Pakistán antes mencionado.

## 0.2. ALGUNAS IDEAS

Observamos que a pesar de catástrofes cada vez más numerosas y cuantiosas, se prueba la opinión de expertos en reaseguro, que siempre habrá mercados y capacidades dispuestos a ofrecer las coberturas requeridas, de forma tradicional o con nuevos instrumentos. Como ejemplo, cuando ocurrieron las crisis de capacidades catastróficas, de los ramos de responsabilidad civil y terrorismo, nacieron tanto nuevos mercados como nuevas capacidades conocidos como “capacidades de Bermuda”, así como nuevos instrumentos de coberturas como bonos catastróficos

Esta situación se replica en México. Analizando la cesión de primas del seguro de Daños, según la “Crónica de Dos Siglos del Seguro en México”, escrita por *Antonio Minzoni Consorti* y publicada por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) se observa que las catástrofes ocurridas en México y en el extranjero, no han reducido la capacidad del sector de ceder riesgos.

Un elemento que apoya la permanencia de la oferta de adquirir protección contra riesgos de catástrofes en México, es la dispersión geográfica que requieren los reaseguradores, para quienes el mercado mexicano de riesgos catastróficos es atractivo, ya que su tamaño es relativamente pequeño en comparación con las otras áreas expuestas a fenómenos de la naturaleza y que producen pérdidas catastróficas. El siguiente cuadro toma las catástrofes ocurridas en México y las compara con la menor, la mayor y el promedio de pérdidas de la experiencia mundial.

Evento	Monto	En porcentaje de mundiales hasta 1997		
		Mínimo	Máximo	Promedio
Terremoto de 1985 en la Ciudad de México	272	272%	2%	9%
Huracán Gilberto	115	115%	1%	4%
Huracanes Isidore y Kena <sup>1</sup>	600	600%	4%	20%
Huracanes Emily, Stan y Wilma	2,300	2300%	14%	77%

Daños en millones de US\$ (Valores originales)

Presentamos el monto mínimo como referencia, aunque es poco relevante porque las catástrofes vienen desde 1944, se presentan en monto nominal y la más antigua de las mexicanas de las que tenemos estimación de los daños es de 1985. Podemos observar que las pérdidas del

<sup>1</sup> Las cifras son estimación de AMIS.

mercado mexicano son mucho menores que las presentadas en otros mercados, debido principalmente al propio tamaño del mercado. Por otro lado, la reciente experiencia de 3 huracanes de alto impacto (Emily, Stan y Wilma) en 2005, donde la pérdida del mercado mexicano, aunque alta comparada con los eventos hasta 1977, es apenas del 5.7% al 4.2% del costo total de las pérdidas sólo por Katrina en los Estados Unidos.

Bajo estas ideas, hemos decidido incursionar en el mundo de los derivados como un modo de gestionar los riesgos relacionados a las catástrofes naturales. Cuando los contratos de derivados se usan para realizar una cobertura, tienen muchas de las mismas características que los contratos de seguros.

Tradicionalmente, la industria aseguradora ha cubierto su exposición frente a los riesgos catastróficos, como huracanes y terremotos, usando una práctica conocida como el reaseguro, como hemos apuntado antes.

Con esto, el estudio que podemos hacer para mitigar las pérdidas, al menos económicas, causadas por una catástrofe natural son un aliciente para desarrollar una aplicación revolucionaria dadas las condiciones por las que pasa actualmente nuestro mundo, con el objetivo crear una *opción real de barrera*, por ejemplo, que maneje un Fondo Nacional contra Desastres, de forma que ésta entre en funcionamiento una vez que acontezcan catástrofes de la magnitud de las que hemos vivido en fechas recientes en la temporada de huracanes.

El objetivo del tema es crear productos financieros que sirvan al país ante eventualidades catastróficas, tales como terremotos, huracanes, inundaciones y cualquier otro tipo de desastre natural. Para ello, presentamos el siguiente contenido:

### *CAPÍTULO I: Introducción a los Productos Derivados*

Definimos las clases de productos financieros derivados que existen actualmente, enunciamos algunas razones de su creación a través de la historia y mencionamos cómo valuarlos. Damos una explicación del funcionamiento de los mercados financieros actuales, en especial el MexDer, con todos sus componentes.

## *CAPÍTULO II: Árboles Binomiales y el Modelo de Black-Scholes*

Hacemos el análisis de la valuación de opciones financieras, para dar paso en el siguiente capítulo a las opciones reales, comenzando con los árboles binomiales. En un inicio, se hacen las consideraciones necesarias para dar las condiciones que llevan a las primeras ramificaciones hasta la extensión del paso  $n$ , en el árbol. En seguida, estudiamos los supuestos que llevaron a *Black-Scholes* a crear el modelo que lleva su nombre y vemos qué condiciones se tienen que verificar para que éste funcione adecuadamente. Por último, comentamos sobre algunos puntos que da *R. Merton* sobre el modelo Black-Scholes cuyas aplicaciones extienden el alcance de la valuación de opciones.

## *CAPÍTULO III: Las Opciones Reales y la extensión del Valor Presente Neto*

Enunciamos las diferentes clases de opciones reales, su funcionamiento, las condiciones para que existan y los supuestos en que se basan para dar lugar a un producto más poderoso que las opciones financieras. Extendemos y mencionamos las ventajas que traen las opciones reales al valor presente neto, sobre todo en el caso de las decisiones corporativas y la flexibilidad que les confiere actuar con ellas.

## *CAPÍTULO IV: 4. Catástrofes Naturales*

Se hace una retrospectiva de las catástrofes naturales más importantes que azotaron al planeta en 2004. Damos una evaluación de estos eventos a lo largo de cinco décadas y analizamos un poco de la perspectiva que nos presentan este tipo de situaciones. En la segunda parte, proporcionamos un sustento geológico de los terremotos y comentamos algunos hechos sobresalientes del terremoto en la Ciudad de México en 1985.

## *CAPÍTULO V (APLICACIÓN): Una Opción Real para Terremoto*

Proporcionamos los elementos necesarios para crear y valorar una opción real. Analizamos los datos registrados por la CNSF para el riesgo de terremoto, para después modelar la distribución que tendrá la siniestralidad causada por la catástrofe. Calibramos el modelo para ajustarlo a nuestras necesidades y finalmente, valuamos eventos catastróficos, mediante los árboles binomiales,

aplicamos este ejercicio al caso particular de la Cd. de México, para una eventualidad de un terremoto.

*APÉNDICE A: Modelación Estocástica en los Mercados Financieros*

Una breve incursión a la historia de la inmersión de los cálculos estocásticos al mundo financiero, comentamos la aportación de las ideas de *Bachelier* y describimos la evolución de los mercados financieros bajo estos conceptos.

*APÉNDICE B: Modelos de Activos Dinámicos*

Proporcionamos un análisis más técnico para la calibración del modelo binomial y el ajuste que se tiene que hacer a éste, cuando se trata de otras distribuciones que no son la lognormal.

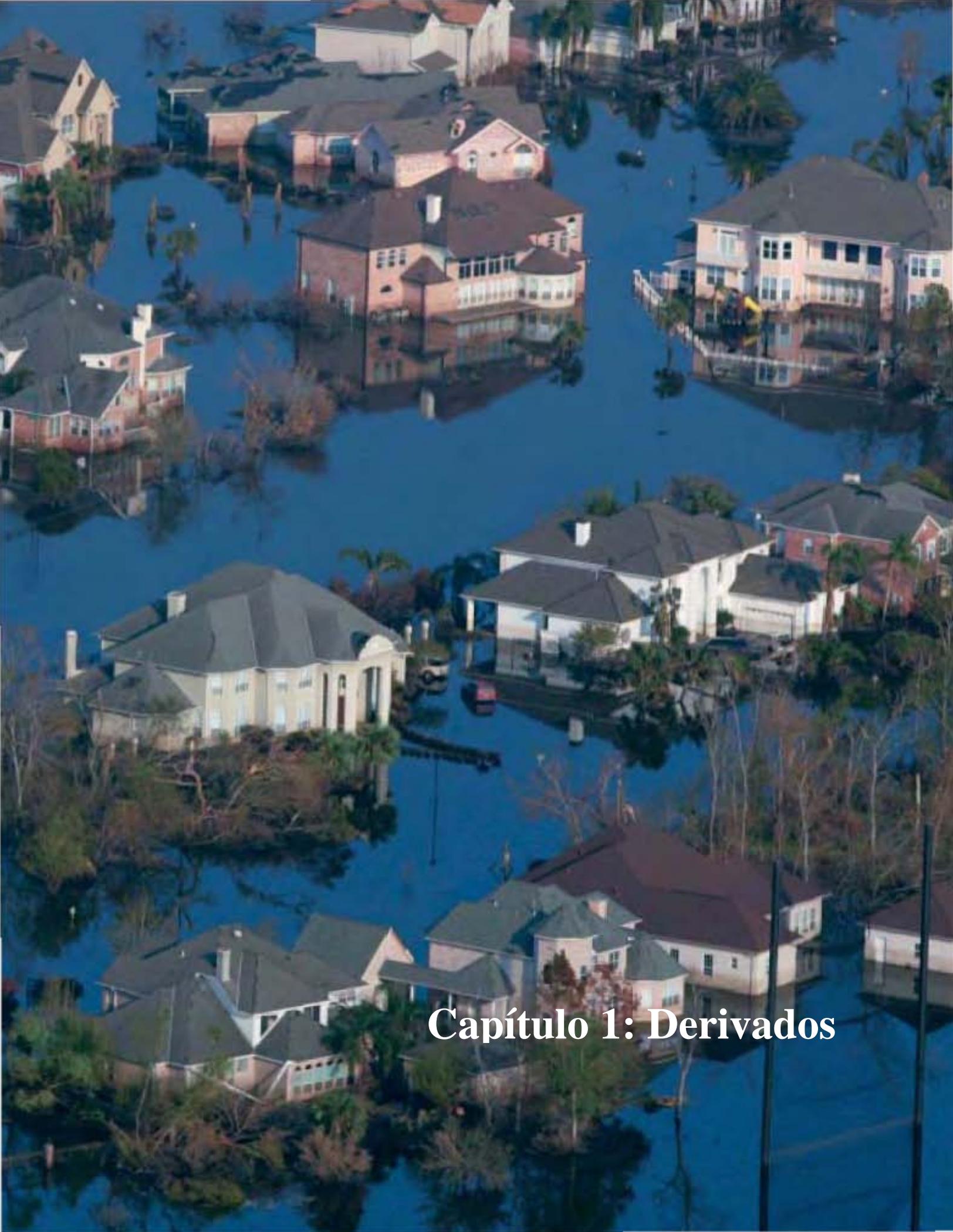
*APÉNDICE C: Opciones Alternativas*

Damos otras ideas para desarrollar la opción presentado en el capítulo 5, como la consideración de una opción barrera.

*APÉNDICE C: Programa para Calcular el Precio de una Opción*

Presentamos el código que desarrollamos para la Macro en Excel para poder valorar una opción.

Ésta es la estructura que hemos realizado para la tesis. En general, la única pretensión que tenemos es la de aportar nuevas ideas para enfrentar eventualidades que conllevan mayor riesgo, tanto en las pérdidas económicas como en las humanas.



# Capítulo 1: Derivados

# 1. DERIVADOS

En este capítulo hacemos una primera aproximación al mundo de los productos derivados, con definiciones básicas, su estructura y sus fórmulas de valuación. Damos una introducción histórica de los mercados en donde se negocian los productos derivados y la expansión que han tenido éstos. La tercera sección corresponde al detalle de los principales derivados como son: *futuros*, *forwards*, *opciones*, *warrants* y *swaps*. Cierra el capítulo una explicación del funcionamiento del Mercado Mexicano de Derivados.

## 1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

### Derivados

Se denominan *productos derivados* a una familia o conjunto de instrumentos financieros, cuya principal característica es que están vinculados a un valor subyacente o de referencia. Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio en productos agroindustriales (*commodities*), en condiciones de elevada volatilidad.

### Derivados Financieros

A partir de 1972 comenzaron a desarrollarse los instrumentos derivados financieros, cuyos activos de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. Los principales derivados financieros son: *futuros*, *opciones*, *warrants* y *swaps*.

### Activos Subyacentes

Es el activo financiero que es objeto de un contrato negociado en el Mercado de Derivados. Los más utilizados para la emisión de contratos de derivados financieros son: acciones individuales, canastas de acciones, índices accionarios, tasas de interés y divisas.

## Ventajas de los Derivados Financieros

La principal función de los derivados es servir de cobertura ante fluctuaciones de precio de los subyacentes, por lo que se aplican preferentemente a:

- Portafolios accionarios.
- Obligaciones contraídas a tasa variable.
- Pagos o cobranzas en moneda extranjera a un determinado plazo.
- Planeación de flujos de efectivo, entre otros.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros, generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Los beneficios de los productos derivados son especialmente aplicables en los casos de:

- Importadores que requieran dar cobertura a sus compromisos de pago en divisas.
- Tesoreros de empresas que busquen protegerse de fluctuaciones adversas en las tasas de interés.
- Inversionistas que requieran proteger sus portafolios de acciones contra los efectos de la volatilidad.
- Inversionistas experimentados que pretendan obtener rendimientos por la baja o alza de los activos subyacentes.
- Empresas no financieras que quieran apalancar utilidades.
- Deudores a tasa flotante que busquen protegerse de variaciones adversas en la tasa de interés, entre otros.

### 1.2. ORIGEN Y DESARROLLO

#### Futuros de Productos Agroindustriales (*commodities*)

Los contratos de futuros se pactaban, a principios del siglo XIX, entre agricultores y comerciantes de granos de Chicago. La producción de las granjas a orillas del lago Michigan estaba

expuesta a bruscas fluctuaciones de precios, por lo cual los productores y comerciantes comenzaron a celebrar acuerdos de entrega a fecha futura, a un precio predeterminado.

En 1848 se estableció el *Chicago Board of Trade* (CBOT), para estandarizar la cantidad y calidad del grano de referencia. En 1865 se negociaron en el CBOT los primeros Contratos de Futuro estandarizados.

Desde sus inicios, los participantes vieron la necesidad de crear una *Cámara de Compensación* (*Clearinghouse*), a fin de asegurar el cumplimiento de las contrapartes.

En 1874 se fundó el *Chicago Product Exchange* para la negociación a futuro de productos perecederos y en 1898 surgió el *Chicago Butter and Egg Board*. Ambas instituciones dieron origen al *Chicago Mercantile Exchange* (CME) que se constituyó como bolsa de futuros sobre diversos productos agroindustriales.

### **Futuros Financieros**

El mercado de futuros financieros surgió formalmente en 1972, cuando el CME creó el *International Monetary Market* (IMM), una división destinada a operar futuros sobre divisas. Otro avance importante se produjo en 1982, cuando se comenzaron a negociar contratos de futuro sobre el índice de Standard & Poor's y otros índices bursátiles, casi simultáneamente en Kansas City, Nueva York y Chicago.

### **Opciones**

El mercado de opciones tuvo inicio a principios del siglo pasado y tomó forma en la *Put and Call Brokers and Dealers Association*, aunque no logró desarrollar un mercado secundario ni contar con mecanismos que aseguraran el cumplimiento de las contrapartes. El mercado formal de opciones se originó en abril de 1973, cuando el CBOT creó una bolsa especializada en este tipo de operaciones, el *The Chicago Board Options Exchange* (CBOE). Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en *The American Stock Exchange* (AMEX) y en *The Philadelphia Stock Exchange* (PHLX). En 1976 se incorporó *The Pacific Stock Exchange* (PSE).

## **Expansión de los Derivados**

A mediados de la década de los años 80, el mercado de futuros, opciones, warrants y otros productos derivados tuvo un desarrollo considerable y, en la actualidad, los principales centros financieros del mundo negocian este tipo de instrumentos. A finales de esa década, el volumen de acciones de referencia en los contratos de opciones vendidos cada día, superaba al volumen de acciones negociadas en el *New York Stock Exchange* (NYSE).

En 1997 se operaban en el mundo 27 trillones de dólares en productos derivados, en tanto el valor de capitalización de las bolsas de valores alcanzaba los 17 trillones de dólares. Es decir, la negociación de derivados equivale a 1.6 veces el valor de los subyacentes listados en las bolsas del mundo. Las bolsas de derivados de Chicago manejaban, en 1997, un volumen de casi 480 millones de contratos.

### **1.3. DETALLE DE LOS PRODUCTOS DERIVADOS**

#### **Futuros**

En mercados financieros más desarrollados existen futuros de productos agrícolas, de metales, de productos como el petróleo, de tasas de interés, de opciones, de índices, de tipos de cambio.

La importancia de los mercados de futuros estriba en que, como resultado final de su operación, se ve disminuido el riesgo en la comercialización de los bienes involucrados. Antes de la existencia de los mercados de futuros, las prácticas comerciales de granos se llevaban a cabo de una manera desorganizada y los precios fluctuaban ampliamente de temporada a temporada. En tiempos de alta oferta de producto (al finalizar las cosechas) los precios bajaban drásticamente, mientras que en épocas de poca oferta se elevaban de manera considerable.

A lo largo del tiempo que ocupa la siembra, cosecha y envío de productos al mercado, pueden intervenir todo tipo de variables no controlables (clima, plagas, huelgas, etc.) que afectan tanto la oferta como la demanda. Durante muchos años los productos y los consumidores han estado sujetos a estas variables.

Los productores sembraban de acuerdo a su estimación de qué tanto y a qué precio podrían vender al finalizar la cosecha; sin embargo, cuando ésta llegaba, alguna disminución de la demanda o un incremento en la oferta, podría forzarlos a vender con pérdida. El remedio a esta situación de precios “imprevisibles” lo llegaron a constituir los contratos de futuros.

## **El Contrato de Futuros**

Un *contrato de futuros* es un acuerdo entre dos partes (un comprador y un vendedor) a través del cual se establece una promesa de llevar a cabo una compra- venta de un bien, en un futuro determinado, a un precio acordado, preestablecido.

El comprador de un contrato de futuros se dice que tiene una *posición larga* en el bien involucrado, mientras que el vendedor de dicho contrato tendrá una *posición corta*.

Cabe mencionar que para manejar futuros en Bolsas, es necesario que los contratos estén estandarizados en los siguientes aspectos:

- La fecha de entrega futura de la mercancía
- El precio a pagarse en dicha fecha
- La cantidad y calidad de la mercancía

Los contratos de futuros pueden considerarse como pólizas de seguros contra cambios de precios, dichos contratos rara vez se hacen efectivos, aproximadamente el 98% de los mismos se cierran con transacciones o contratos “opuestos” que cancelan la operación, esto es, cancelan la entrega de la mercancía.

## **La Operativa de las Garantías (*Margins*)**

Se crea un evidente riesgo si dos inversionistas se ponen directamente en contacto y llegan a un acuerdo de compra- venta futura de un activo a cierto precio. Uno de los inversionistas puede arrepentirse del acuerdo e intentar “echarse para atrás”. Por otro lado, podría ser que el comprador simplemente no dispusiera de recursos financieros para responder al contrato privado.

Uno de los papeles clave del mercado organizado es gestionar las transacciones de forma que los contratos incumplidos sean los mínimos posibles. Aquí es donde entran los *depósitos de garantía (margins)*.

### **Ajuste al Mercado (*Marking- to-Market*)**

El agente exige al inversionista un depósito de fondos en lo que se denomina *cuenta de garantía (margin account)*. La cantidad que debe ser depositada en el momento en que entra el contrato se denomina *garantía o depósito de garantía inicial*. Al finalizar cada día de negociación, la cuenta de garantía es ajustada para reflejar las ganancias o pérdidas del inversionista. A esto se le llama *ajuste al mercado*. La liquidación de pérdida y ganancias de un contrato se hace por primera vez al cierre del día en que se ha cerrado así como al cierre de los siguientes días.

La liquidación de pérdidas y ganancias no es resultado de un acuerdo entre agente y cliente. Cuando hay una baja en el precio del futuro de forma que la cuenta de garantía de un inversionista con una posición larga se reduce, el agente del inversionista debe pagar al mercado y el mercado traspasará la cantidad al agente del inversionista con una posición corta. De forma similar, cuando hay un incremento en el precio del futuro, los agentes de las partes contratantes en posición corta pagan dinero al mercado y los agentes de las partes en posición larga reciben dinero del mercado.

El inversionista tiene el derecho de retirar de su cuenta de garantía las cantidades que excedan al depósito o saldo inicial. Para asegurar que el saldo de la cuenta de garantía no se haga negativo se fija un *saldo de mantenimiento (maintenance margin)*, que es algo inferior al depósito inicial. Si el saldo en la cuenta de garantía cae por debajo del saldo de mantenimiento se le exige al inversionista un *depósito o garantía adicional (margin call)* y se espera que complete su saldo en la cuenta de garantía al nivel de la garantía inicial al día siguiente. A los fondos extra depositados se les denomina *garantía de variación (variation margin)*. Si el inversionista no provee la garantía de variación, el agente cerrará la posición vendiendo el contrato. Los niveles de las garantías se determinan teniendo en cuenta la volatilidad del activo subyacente.

### **El Proceso de Cámara de Compensación y los *Clearing Margins***

La Cámara de Compensación del mercado (*Exchange Clearinghouse*) es un departamento del mercado organizado que actúa como intermediario o mediador en transacciones de futuros,

garantizando la actuación de las partes en cada transacción. La Cámara de Compensación tiene un cierto número de miembros. Los agentes que no son miembros de la Cámara deben canalizar sus operaciones a través de un miembro de ésta. La función principal de la Cámara de Compensación es la de realizar un seguimiento de todas las transacciones que han tenido lugar durante el día, así se puede calcular la posición neta de cada uno de sus miembros.

Tan pronto como un inversionista esté obligado a mantener una cuenta de garantía con su agente, un miembro de la Cámara deberá mantenerla también con esta última. Es lo que se conoce como el *clearing margin*. Al finalizar cada día de mercado se realiza un ajuste de los beneficios y pérdidas, tanto en las cuentas de garantía de los miembros de la Cámara de Compensación como en las cuentas de los inversionistas. No obstante, en el caso de los miembros de la Cámara, hay una garantía inicial pero no una garantía de mantenimiento. Cada día debe mantenerse el equilibrio de la cuenta para cada contrato en una cantidad igual a la del margen inicial multiplicada por el número de contratos abiertos, por lo tanto, dependiendo de las transacciones realizadas durante el día y de los movimientos del precio, el miembro de la Cámara al final del día debe añadir o retirar fondos de la cuenta de garantía. Los agentes que no son miembros de la Cámara de Compensación deben mantener una cuenta de garantía con un miembro de la Cámara.

Al determinar los *clearing margins*, la Cámara de Compensación calcula el número de contratos pendientes basándose en el bruto y en el neto. Desde el punto de vista bruto (*gross basis*) simplemente se suma el total de todas las posiciones largas que afectan a los clientes al total de las posiciones cortas que afectan a los clientes. Mientras que el neto (*net basis*) permite que éstas sean compensadas en detrimento de las otras. La mayoría de los mercados utiliza la garantía neta.

El propósito del sistema de garantías es el de reducir la posibilidad de que los participantes en el mercado obtengan pérdidas debidas a impagos.

### **La Compra- Venta de Contratos**

Para comprar un contrato de futuros, habrá que dar las instrucciones de compra o de venta correspondientes, a un intermediario bursátil. La Bolsa de Futuros requerirá al intermediario que obtenga del potencial comprador o vendedor un depósito, el cual se realizará en la Cámara de Compensación. Este depósito se llama *margen inicial*.

Debe quedar claro que tanto el comprador como el vendedor deberán realizar dicho depósito o margen inicial, que normalmente varía entre 5% y 20% del valor total del contrato. Este margen inicial se puede efectuar en efectivo o en especie.

### Valuación de Contratos de Futuros sobre Mercancías

Supondremos que las siguientes afirmaciones son ciertas para algunos participantes en el mercado:

1. Los participantes en el mercado no están sujetos a costos de transacción cuando operan.
2. Los participantes en el mercado están sujetos al mismo tipo impositivo sobre todos los beneficios netos derivados del comercio.
3. Los participantes en el mercado pueden pedir prestado dinero al mismo tipo de interés libre de riesgo al que pueden hacer préstamos.
4. Los participantes en el mercado aprovechan las oportunidades de arbitraje cuando éstas se presentan.

Notemos que no requerimos que estos supuestos sean ciertos para todos los participantes en el mercado. Es la actividad comercial de estos participantes en el mercado y su avidez por aprovechar las oportunidades de arbitraje a medida que éstas se suceden, lo que determina la relación entre precios a plazo y precios *spot*.

Utilizaremos la siguiente notación:

$T$ : Tiempo hasta la fecha de entrega del contrato a plazo (en años)

$S_0$ : Precio del activo subyacente en el contrato a plazo hoy

$F_0$ : Precio a plazo hoy

$r$ : Tipo de interés libre de riesgo anual, con composición continua, para una inversión que vence en la fecha de entrega

El *tipo de interés libre de riesgo* es, en teoría, el tipo al cual se presta y toma prestado cuando no hay riesgo de crédito, cuando se tiene la certeza de que el préstamo se devolverá. Es el tipo pagado por un banco cuando pide un préstamo a otro banco.

Vamos a considerar ahora contratos de futuros sobre productos. En primer lugar consideraremos el impacto sobre el precio de futuros del almacenamiento de las mercancías que son activos de inversión, como el oro y la plata.

En ausencia de costos de almacenamiento, el precio a plazo de una mercancía, es decir, de un activo de inversión viene dado por:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

donde  $F_0$  es el precio del futuro,  $S_0$  es el precio del activo subyacente,  $r$  el tipo de interés libre de riesgo y  $T$  es el plazo de tiempo.

Los costos de almacenamiento podrían considerarse como ingresos negativos. Si  $U$  es el valor actual de todos los costos de almacenamiento previstos durante la vida del contrato de futuros, la ecuación anterior implica que:

$$F_0 = (S_0 + U) e^{rT}.$$

Si los costos de almacenamiento son en todo momento proporcionales al precio del producto, pueden ser considerados como una tasa de rendimiento negativa. En este caso la ecuación se convierte en:

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T}$$

donde  $u$  es la proporción sobre el precio al contado de los costos de almacenamiento anuales.

El valor de un contrato de futuros en el momento en que se acuerda es cero, en una etapa posterior puede ser positivo o negativo. Supongamos que  $f$  es el valor de un contrato de futuros que tiene precio de entrega  $F_0$  y  $S$  es el precio del activo subyacente en la fecha de valuación. Un resultado general, aplicable a los contratos de futuros es:

$$f = (S - F_0) e^{-r(T-t)} \quad t \in [0, T].$$

### Contratos a Plazo (*Forward*)

Los *contratos a plazo (forward)* son parecidos a los contratos de futuros en lo que se refiere a acuerdos de comprar o vender un activo en un momento determinado en el futuro a un precio determinado. No obstante, a diferencia de los contratos de futuros, son negociados *over-the-*

*counter*<sup>1</sup>. Son normalmente acuerdos privados ente dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos.

Una de las partes de un contrato a plazo (*forward*) toma una posición larga y acuerda comprar un activo en una fecha específica a un precio determinado, la otra parte toma una posición corta y acuerda vender el activo en la misma fecha por el mismo importe. Los contratos *forward* no tienen que ajustarse a los estándares de un determinado mercado. La fecha de entrega en el contrato puede ser convenida mutuamente por las dos partes, normalmente, se especifica una única fecha de entrega, mientras que en los futuros hay un rango de posibles fechas de entrega.

Los *forwards* no se ajustan al mercado diariamente como los contratos de futuros. Las dos partes contratantes acuerdan saldar cuentas en la fecha de entrega especificada. Mientras la mayoría de los contratos de futuros se cierran antes de la entrega, en la mayoría de los contratos a plazo se realiza la entrega del activo físico o la liquidación final en metálico. A continuación se mencionan las principales diferencias entre los *forward* y los futuros:

A plazo	Futuros
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contrato privado entre dos partes</li> <li>• No estandarizado</li> <li>• Normalmente una fecha de entrega</li> <li>• Ajustado al finalizar el contrato</li> <li>• Normalmente tiene lugar una entrega o pago final</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Negociados en mercados organizados</li> <li>• Estandarizados</li> <li>• Rango de fechas de entrega específica</li> <li>• Ajustado a diario</li> <li>• El contrato se suele cerrar antes del vencimiento</li> </ul>

### **Precio a Plazo (*Forward Price*) y Precio de Entrega**

El precio especificado en un *forward* se denomina *precio de entrega*, en el momento en que se firma el contrato se escoge éste, así que el valor del contrato para ambas partes es cero, esto significa que no cuesta nada tomar una posición larga o corta. Podemos pensar en el precio de entrega como en el que se determina a partir de las consideraciones de la oferta y la demanda. No obstante, para activos en los que se negocian contratos a plazo normalmente hay un modo de

<sup>1</sup> Mercado en donde los comerciantes negocian por teléfono. Los comerciantes usualmente son instituciones financieras, corporaciones y administradores de fondos.

calcular el precio de entrega “correcto” a partir del precio corriente de contado del activo, la fecha de entrega y otras variables observables.

El *precio a plazo actual* de un contrato es el precio de entrega que se aplicaría al vencimiento del contrato a plazo si el contrato se negociara hoy. El precio a plazo suele ser diferente del precio *spot* y cambia con el vencimiento del contrato a plazo.

### **Beneficios Brutos**

Los contratos a plazo se liquidan a su vencimiento. Supongamos que la fecha de vencimiento es  $T$  y definimos:

$S_T$ : Precio al contado (*spot*) del activo en la fecha  $T$

$K$ : Precio de entrega en el contrato a plazo

El valor al vencimiento o *valor terminal* de una posición larga en un contrato a plazo sobre una unidad de activo es  $S_T - K$  al vencimiento, dado que permite que un activo valorado en  $S_T$  sea adquirido por  $K$ . Llamaremos a  $S_T - K$  el *beneficio bruto (payoff)* o *valor terminal* del contrato. Una posición corta para vender una unidad de un activo vale  $K - S_T$  en el momento  $T$  porque permite que un activo valorado en  $S_T$  sea vendido por  $K$ . El beneficio bruto o valor terminal del contrato es  $K - S_T$ .

Los beneficios brutos de los contratos a plazo pueden ser positivos o negativos. Como no cuesta nada entrar en un contrato a plazo, el beneficio del contrato es igual al beneficio bruto.

### **Beneficios Procedentes de los Contratos a Plazo y de Futuros**

En el contrato *forward*, el beneficio o pérdida íntegra se obtienen al acabar la vida del contrato, en el contrato de futuros, el beneficio o pérdida se consigue día a día porque los procedimientos de liquidación son diarios.

## Valuación de Contratos a Plazo

El valor de un contrato *forward* en el momento en que se firma por primera vez es cero. En una fase posterior puede resultar con un valor positivo o negativo. Supongamos que  $F_0 = S_0 e^{rT}$  es el precio a plazo actual para un contrato que se negoció hace algún tiempo, la fecha de entrega es en  $T$  años y  $r$  es el tipo de interés libre de riesgo anual para  $T$  años. Definimos también  $f$  como el valor hoy del contrato a plazo.

Un resultado general aplicable a todos los contratos a plazo (tanto en los activos de inversión como en los de consumo) es

$$f = (F_0 - K) e^{-rT}.$$

Cuando el contrato se negocia por primera vez,  $K$  es igual a  $F_0$  y  $f = 0$ . A medida que el tiempo pasa, tanto el precio a plazo,  $F_0$ , como el valor del contrato,  $f$ , cambian.

Para ver por qué la ecuación  $f = (F_0 - K) e^{-rT}$  es correcta, comparemos un contrato a plazo con precio de entrega  $F_0$  con otro contrato a plazo idéntico que tiene un precio de entrega  $K$ . La diferencia entre los dos es sólo la cantidad que se pagará por el activo subyacente en el momento  $T$ ; en el primer contrato esta cantidad es  $F_0$ , en el segundo contrato es  $K$ . Una diferencia de  $F_0 - K$  en el momento  $T$  se traduce en una diferencia de  $(F_0 - K) e^{-rT}$  hoy. El contrato con un precio de entrega  $F_0$  es, por lo tanto, menos valioso que el contrato con un precio de entrega  $K$  en una cantidad de  $(F_0 - K) e^{-rT}$ . El valor del contrato que tiene un precio de entrega  $F_0$  es por definición cero. Por tanto, el valor del contrato con un precio de entrega de  $K$  es  $(F_0 - K) e^{-rT}$ . Esto prueba la ecuación. De igual forma, el valor de una posición corta en un contrato a plazo con precio de entrega  $K$  es  $(K - F_0) e^{-rT}$ .

La ecuación  $f = (F_0 - K) e^{-rT}$  muestra que podemos valorar una posición larga en un contrato a plazo sobre un activo suponiendo que el precio del activo al vencimiento de éste sea igual al precio a plazo  $F_0$ . Para ver esto, notemos que cuando hacemos este supuesto, una posición larga

en un contrato a plazo implica un beneficio bruto en el momento  $T$  de  $F_0 - K$ . Esto tiene un valor actuar de  $(F_0 - K)e^{-rT}$ , que es el valor de  $f$ . De forma similar, podemos valorar una posición corta en un contrato a plazo sobre un activo, suponiendo que el precio actual a plazo del activo es liquidado.

## Opciones

Las *opciones* son contratos que confieren a su poseedor derechos para comprar (o vender) un bien. Esto es, una opción otorga a su poseedor el derecho de recibir (opción de compra) o de entregar (opción de venta) valores, bajo ciertas condiciones preestablecidas. Los objetos sobre los que se efectúa un contrato de opción se conocen como valores subyacentes.

Las opciones son establecidas por las bolsas y compradas y vendidas entre empresas e inversionistas. Las empresas sobre cuyas acciones son creadas determinadas opciones, no necesariamente tienen injerencia alguna en la creación, terminación o ejecución de las mismas.

## Opciones de Compra y Venta

Una *opción de compra (call option)* otorga a su poseedor el derecho de comprar cierto número de acciones a un precio predeterminado, cualquier día antes de la fecha de expiración especificada en la opción. Una *opción de venta (put option)* otorga a su poseedor el derecho de vender cierto número de acciones a un precio predeterminado, cualquier día previo de la fecha de expiración de la opción. Los inversionistas adquirirán una opción de compra si su expectativa es que el precio de la acción suba, dado que los precios de la opción de compra y de la acción se mueven en la misma dirección. Las opciones de compra permiten especular sobre alzas de precios en las acciones, sin tener que comprarlas.

Lo contrario ocurre con las opciones de venta, las cuales se adquirirán cuando las expectativas sean de una baja en el precio de las acciones, ya que los precios de las opciones de venta y de las acciones se mueven en forma inversa. Esto permite a los inversionistas especular con bajas en los precios de las acciones, sin tener que comprarlas.

## Terminología

1. *Subyacente*: Activo sobre el que se instrumenta la opción o futuro.
2. *Precio de Ejercicio*: Precio de venta (*put*) o de compra (*call*) garantizado por la opción.
3. *Fecha de Adquisición*: La fecha en que se compra la opción, ya sea de compra (*call*) o de venta (*put*).
4. *Fecha de Ejercicio*: La fecha en donde se ejerce la opción.
5. *Opción Americana*: La opción puede ser ejercida en cualquier momento antes del vencimiento.
6. *Opción Europea*: La opción únicamente puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.
7. *Prima*: La cantidad pagada por el comprador de la opción (*call* o *put*).
8. *Valor Intrínseco*: Precio actual del producto subyacente- Precio de Ejercicio.

Típicamente, las opciones están protegidas contra la capitalización y contra los *splits* de acciones. Si cualquiera de estos casos ocurre durante la vida de una opción, el precio de ejercicio y el número de acciones por contrato, son ajustados. Sin embargo, las opciones no prevén ningún ajuste por el pago de dividendos en efectivo, mismos que son recibidos por el poseedor de las acciones subyacentes.

## Opciones sobre Índices, sobre Tasas de Interés y sobre Futuros, de Paridad Cambiaria de Divisas y de Bienes Físicos

Tres de las últimas innovaciones son las opciones sobre índices de la Bolsa de Valores, las opciones sobre tasas de interés y las opciones sobre futuros (de paridad cambiaria de divisas y de bienes físicos).

Las opciones sobre índices permiten a los inversionistas especular con los movimientos del mercado de valores, en la misma forma que lo hacen con acciones.

Las opciones sobre tasas de interés permiten especular sobre tasas de certificados gubernamentales, sobre tasas de interés a corto plazo y sobre tasas de interés a largo plazo. Su mecánica operativa es similar a la de las opciones sobre índices.

Las opciones sobre futuros permiten especular sobre los precios futuros de mercancías preestablecidas.

## Warrants

A diferencia de las opciones, típicamente creadas por inversionistas, los *warrants* y los valores convertibles son creados por las empresas emisoras.

A nivel internacional, un *warrant* es similar a una opción de compra (*call option*). Esto es, un *warrant* otorga a su poseedor el derecho de comprar, dentro de un plazo determinado, un número definido de acciones, a un precio especificado en dicho contrato; no obstante, en México los *warrants* tienen muchas particularidades, entre las que se encuentran el permitirse emisores tanto de *warrants* de compra como de venta. Las principales diferencias entre un *warrant* y una opción de compra son:

- a) Los *warrants* son emitidos por casas de bolsa, instituciones financieras y empresas, mientras que las opciones son definidas por las bolsas y negociadas por inversionistas.
- b) Los *warrants* típicamente tienen plazos de vencimiento superiores a un año, mientras que los plazos de las opciones son de meses.
- c) Cada *warrant* es único, no existe estandarización de características.

En otros países, los *warrants* se emiten frecuentemente como parte integral de algún bono u obligación. Esto permite que la tasa de interés de dicho bono u obligación sea más baja que si fueran emitidos sin *warrants*. Normalmente los *warrants* pueden desprenderse de los bonos u obligaciones y venderse por separado. Esto resulta en una variación en el precio de dichos bonos, se puede tener un precio con *warrant* y un precio *ex-warrant*.

Los *warrants* pueden especificar una relación de conversión de uno a uno. Esto es, su poseedor podría comprar un número de acciones igual al número de *warrants* que posea. Sin embargo, no es poco frecuente el que la relación de conversión sea diferente de uno a uno, lo cual podría involucrar fracciones de acciones. Una emisión de *warrants* deberá especificar:

- La relación de conversión

- El precio al cual se deberá ejercer la acción

Tradicionalmente, el precio de ejercicio del *warrant* excede el precio de mercado de la acción involucrada, en el momento de la emisión del *warrant*.

## Swaps

Un *swap* es un acuerdo entre dos empresas para el intercambio de flujos de caja en el futuro. El acuerdo define las fechas en las cuales se deben pagar los flujos de efectivo y la manera de calcular dichos flujos. Normalmente, el cálculo de los flujos de efectivo incluye los valores futuros de una o más variables de mercado.

Mientras que un contrato a plazo permite intercambiar flujos de efectivo en una fecha del futuro, normalmente, los *swaps* llevan a intercambios de flujos de efectivo que tienen lugar en diferentes fechas futuras. El primer contrato de *swap* fue negociado a principios de los años ochenta. Desde entonces, el mercado ha crecido enormemente. Los principales tipos de *swaps* son:

- Los *swaps de tipo de interés plain vanilla*
- Los *swaps de divisas fixed-for-fixed*

### Mecánica de los *Swaps* de Tipo de Interés

En este *swap* una empresa acuerda pagar flujos de efectivo iguales a los intereses correspondientes a un tipo fijo predeterminado y un cierto nominal durante una serie de años. A cambio recibe intereses a un tipo variable en el mismo periodo de tiempo

El tipo variable en muchos acuerdos de *swap* de tipo de interés es el “*London Interbank Offer Rate*” (*LIBOR*). Éste es el tipo de interés ofrecido por los bancos en depósitos realizados por otros bancos en mercados de Euromonedas. El *LIBOR* mensual es tipo ofrecido a depósitos mensuales, el *LIBOR* trimestral es el ofrecido en depósitos trimestrales y así sucesivamente. Los tipos *LIBOR* se determinan mediante acuerdos entre bancos y cambian frecuentemente, de forma que la oferta de fondos en el mercado interbancario iguale la demanda de fondos en ese mercado. A menudo el *LIBOR* es el primer tipo de interés de referencia para los préstamos a tipo variable en el

mercado financiero doméstico y es un tipo de interés de referencia para préstamos en mercados financieros internacionales.

### Valuación de Swaps

Un *swap* puede caracterizarse como la diferencia entre dos bonos. El valor del *swap* es la diferencia entre los valores de dos bonos. Definimos:

$B_{fix}$ : Valor del bono a tipo fijo subyacente al *swap*

$B_{fl}$ : Valor del bono a tipo variable subyacente al *swap*

El valor del *swap* para una empresa que recibiese el tipo variable y pagase el tipo fijo es:

$$V_{swap} = B_{fl} - B_{fix}.$$

En su momento inicial, los *swaps* de tipo de interés tienen un valor nulo o cercano a cero. Después de estar en funcionamiento durante algún tiempo, su valor puede ser positivo o negativo. Para calcular este valor es posible tomar el *swap* como una posición larga en un bono combinado con una posición corta en otro bono o como una cartera de contratos a tipo *forward*.

Vemos que, para un *swap* donde se recibe un tipo variable y se paga un tipo fijo se obtiene la ecuación anterior.

Esta ecuación se usa para mostrar que  $B_{fix}$  iguala el capital nocional del *swap* al principio de éste. Ahora la usamos para valuar el *swap* algún tiempo después de su inicio. Para ver cómo se usa esta ecuación, definimos:

$t_i$ : Tiempo hasta que se intercambia el pago  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$L$ : Capital nocional en el acuerdo de *swap*

$R_i$ : Tipos LIBOR cupón cero correspondientes al vencimiento  $i$

$k$ : Pago fijo realizado en cada fecha de pago

El bono a tipo fijo,  $B_{fix}$  puede valuarse como sigue, los flujos de efectivo generados por el bono son  $k$  en el momento  $t_i$  y  $L$  en el momento  $t_n$  de forma que:

$$B_{fix} = \sum_{i=1}^n ke^{-rt_i} + Le^{-rt_n}.$$

Consideremos ahora el bono a tipo de interés variable. Justo después de una fecha de pago, este bono es exactamente igual a un bono a tipo de interés variable de nueva creación. Deducimos que  $B_{fl} = L$  inmediatamente después de una fecha de pago. Entre las fechas de pago podemos utilizar el hecho de que  $B_{fl}$  igualará  $L$  inmediatamente después de la siguiente fecha de pago y argumentar como sigue:

Poco antes de la siguiente fecha de pago  $B_{fl} = L + k^*$ , donde  $k^*$  es el pago al tipo de interés variable (ya conocido) que será realizado en la siguiente fecha de pago. Con esta notación, el tiempo hasta la siguiente fecha de pago es  $t_1$ . El valor del *swap* hoy es su valor exactamente antes de la siguiente fecha de pago descontado a la tasa  $r_1$  durante un tiempo  $t_1$ :

$$B_{fl} = (L + k^*)e^{-r_1t_1}.$$

En la situación en la que la empresa está recibiendo fijo y pagando variable,  $B_{fix}$  y  $B_{fl}$  se calculan de idéntica manera y se considera la ecuación:

$$V_{swap} = B_{fix} - B_{fl}.$$

### Mecánica de los *Swaps* sobre Divisas

En su forma más sencilla, los *swaps sobre divisas*, implican intercambios de liquidaciones de principal e intereses de tipo fijo en una divisa, por principal e intereses de tipo fijo, en otra divisa.

Un acuerdo *swap* sobre divisas requiere especificar el principal en ambas divisas. Los principales se suelen intercambiar al principio y al fin del *swap*. Normalmente, los principales se eligen para que sean aproximadamente equivalentes utilizando el tipo de cambio al inicio del *swap*.

## 1.4. PRIMEROS INTENTOS DE DESARROLLO EN MÉXICO

### Futuros en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)

A partir de 1978 se comenzaron a cotizar contratos a futuro sobre el tipo de cambio peso/dólar, los que se suspendieron a raíz del control de cambios decretado en 1982. En 1983 la BMV listó futuros sobre acciones individuales y *petrobonos*, los cuales registraron operaciones hasta 1986. Fue en 1987 que se suspendió esta negociación debido a problemas de índole prudencial.

### Instrumentos Híbridos

El Gobierno Federal ha emitido diversos instrumentos híbridos de deuda, que incorporan contratos *forwards* para la valuación de los cupones y principal, lo cual permite indexar estos valores nominales a distintas bases. Estos instrumentos han sido importantes para la constitución de carteras, aunque no han tenido liquidez en los mercados secundarios, excepto para reportos. Entre los principales destacan:

- Petrobonos (1977 a 1991), indexados al petróleo calidad Istmo.
- Pagarés (1986 a 1991), indexados al tipo de cambio controlado.
- Tesobonos (1989 a la fecha), indexados al tipo de cambio libre.
- En el sector privado, se han emitido obligaciones y pagarés indexados.

A principios de 1987 se reinició la operación de contratos diferidos sobre el tipo de cambio peso/dólar, por medio de *Contratos de Cobertura Cambiaria de Corto Plazo*, registrados ante Banco de México.

Los *Bonos Brady*, resultantes de la renegociación de la deuda externa del sector público, en 1989, incorporan una cláusula de recompra, que es una opción ligada al promedio de precio del petróleo Istmo.

## **Forwards**

En la década de los noventa se negociaron contratos *forward OTC (over the counter)* sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados en forma interinstitucional, sin un marco operativo formal y fueron suspendidos a mediados de 1992.

A fines de 1994 entraron en vigor las normas de Banco de México para la operación de contratos *forward* sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre el índice nacional de precios al consumidor (INPC), sujetos a registro ante el banco central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta, para garantizar el control administrativo y de riesgo.

## **Warrants**

A partir de octubre de 1992 se comenzaron a operar en la Bolsa Mexicana de Valores los *Títulos Opcionales (warrants)* sobre acciones individuales, canastas e índices accionarios.

Entre 1992 y 1994 se listaron en la Bolsa de Luxemburgo y la Bolsa de Londres, diversos *warrants* sobre acciones e índices accionarios mexicanos.

## **Derivados sobre Subyacentes Mexicanos**

A finales de 1992 se inició la negociación de opciones sobre ADR's de Telmex L en *The Chicago Board Options Exchange*. En 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, AMEX, *New York Options Exchange (NYOE)*, NYSE y PLHX, además de las bolsas de Londres y Luxemburgo. Simultáneamente, se celebraban contratos *forward* y *swaps* sobre tipo de cambio, tasas de interés y *commodities*, entre intermediarios extranjeros y entidades nacionales, sin reconocimiento ni protección jurídica.

El contrato de Telmex L resultó uno de los más exitosos de los últimos años. En 1993, en el CBOE, se operaron más de 30 mil millones de dólares en opciones sobre Telmex, importe cercano a 50% de la operación total en acciones en la BMV, durante ese año.

## 1.5. VISIÓN SOBRE EL MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS

Se conoce como *mercado de derivados* a las negociaciones que se formulan con base en productos o instrumentos ya existentes. Su origen está en función o se deriva de la existencia de títulos accionarios, índices, canastas accionarias, divisas.

La puesta en operaciones del **Mercado Mexicano de Derivados** constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del *Sistema Financiero Mexicano*. El esfuerzo constante de equipos multidisciplinarios integrados por profesionales de la *Bolsa Mexicana de Valores (BMV)*, la *Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB)* y la *S.D. Indeval*, permitió el desarrollo de la arquitectura operativa, legal y de sistemas necesaria para el cumplimiento de los requisitos jurídicos, operativos, tecnológicos y prudenciales, establecidos de manera conjunta por la *Secretaría de Hacienda y Crédito Público*, la *Comisión Nacional Bancaria y de Valores* y el *Banco de México* (las Autoridades Financieras).

La importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el *International Monetary Fund (IMF)* y la *International Finance Corporation (IFC)*, quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

La creación del Mercado de Derivados listados, inició en 1994 cuando la BMV y la S.D. Indeval asumieron el compromiso de crear este mercado. La BMV financió el proyecto de crear la bolsa de opciones y futuros que se denomina MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. Por su parte Indeval tomó la responsabilidad de promover la creación de la cámara de compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación, que es un fideicomiso de administración y pago, realizando las erogaciones correspondientes desde 1994 hasta las fechas de constitución de las empresas.

## Participantes del Mercado

### Operadores de MexDer

Los participantes en MexDer pueden ser:

- *Operadores*: Son personas morales facultadas para operar Contratos en el Sistema Electrónico de Negociación de MexDer, en calidad de comisionistas de uno o más Socios Liquidadores.
- *Socios Liquidadores*: Son fideicomisos que participan como accionistas de MexDer y aportan el patrimonio de Asigna; teniendo como finalidad liquidar y, en su caso, celebrar por cuenta de clientes, contratos de futuros y opciones operados en MexDer. Para lo cual requieren cubrir los requisitos financieros, crediticios y operativos que establece la normatividad aplicable al mercado de derivados. Tienen capitalización independiente, son especialistas en evaluación de riesgos contraparte, segmentan garantías y evitan conflictos de intereses al diferenciar las operaciones de cuenta propia y de terceros.
- *Formadores de Mercado*: Son Operadores que han obtenido la aprobación por parte de MexDer, para actuar con tal carácter y que deberán mantener en forma permanente y por cuenta propia, cotizaciones de compra o venta de Contratos de Futuros y Opciones, respecto de la Clase en que se encuentran registrados, con el fin de promover su negociación.

### Manejo de Riesgos

Los Socios Liquidadores y Operadores deben elaborar y aplicar mecanismos que permitan cumplir las siguientes normas de seguridad:

- Asegurar la independencia entre las áreas de operación y las de administración y control de riesgos.
- Definir la tolerancia máxima de riesgo de mercado, de crédito y otros riesgos considerados como aceptables por el propio intermediario.
- Establecer los parámetros de actuación de su personal y las consecuencias de cualquier violación a la normatividad.
- Administrar y controlar los riesgos relacionados con las operaciones celebradas en MexDer.

- Que el personal acreditado informe sobre los riesgos incurridos y el cumplimiento de los límites de riesgo y condiciones operativas.
- Contar con los modelos de administración de riesgos relacionados con las operaciones que ejecuten.
- Evaluar los límites a las posiciones de sus clientes, de acuerdo con el riesgo que puedan asumir.
- Analizar y valorar en tiempo real los contratos abiertos de sus clientes, mediante modelos que permitan simular riesgos máximos.
- Verificar si se cumplen los requisitos de capitalización.

## 1.6. LOS PRODUCTOS DERIVADOS EN EL MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS

### Instrumentos Listados y su Terminología

En el Mercado Mexicano de Derivados se encuentran listados contratos de futuros sobre los siguientes subyacentes financieros:

#### *DIVISAS*

Dólar de los Estados Unidos de América (DEUA)

#### *ÍNDICES*

Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC)

#### *DEUDA*

Cetes a 91 días (CE91), TIIIE a 28 días (TE28), Bono a 3 años (M3), Bono a 10 años (M10) y UDI.

#### *ACCIONES*

América Móvil L, Cemex CPO, Femsa UBD, GCarso A1, y Telmex L.

Adicionalmente, MexDer ofrece los siguientes contratos de Opción:

#### *ÍNDICES*

Índice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC)

#### *EFT's*

iShares S&P500 Index ®" (IVV), NASDAQ 100-Index Tracking StockSM (QQQ)

## ACCIONES

### América Móvil y Naftrac 02

#### **Clases y Series**

La *clase* está integrada por todos los Contratos de Futuros que están referidos a un mismo activo subyacente; la *serie* está integrada por todos aquellos Contratos de Futuros que pertenecen a la misma clase con diferente fecha de vencimiento.

#### **Vigencia de los Contratos**

Un contrato puede ser negociado a partir de la fecha de emisión o puesta en mercado, hasta la fecha de vencimiento, que es el último día definido por las Condiciones Generales de Contratación para su operación, antes de su fecha de liquidación final. En cuanto a la liquidación, MexDer aplica la modalidad americana, mediante la cual los participantes pueden ejercer el derecho a liquidar anticipadamente un contrato, dando aviso previo de su intención. También se puede extinguir la obligación implícita en un contrato, tomando una posición opuesta sobre la misma Clase y Serie.

#### **Liquidación de un Contrato**

La liquidación final de un contrato puede ser efectuada en especie (entrega del activo subyacente, como en el caso de acciones y divisas) o en efectivo; según se disponga en las Condiciones Generales de Contratación.

#### **Condiciones Generales de Contratación**

Las *Condiciones Generales de Contratación* son el medio en virtud del cual MexDer, establece los derechos y obligaciones, así como los términos y condiciones a los que se sujetarán los participantes que celebren, compensen y liquiden una Clase determinada de Contratos de Futuros.

Las Condiciones Generales de Contratación de cada Clase especificarán al menos los elementos siguientes:

- Activo subyacente y unidades que ampara un contrato.
- Ciclo de los contratos de futuro.
- Símbolo o clave en MexDer.
- Unidad de cotización y puja.
- Mecánicas y horario de negociación.
- Fecha de vencimiento.
- Fecha de inicio de negociación de las nuevas series de Contratos de Futuros y límites a las posiciones.
- Último día de negociación.
- Fecha de Liquidación.
- Forma de Liquidación.
- Límites a las posiciones.
- Parámetros de fluctuación.

## **Elementos de los Futuros dentro del MexDer**

### **Subyacentes**

Los activos utilizados como referencia en los Contratos de Futuros son activos reales que podrán ser traspasados en especie al vencimiento del contrato o indicadores que se expresan en dinero y cuyo equivalente será liquidado al vencimiento.

### **Tamaño del Contrato**

Especifica la cantidad de unidades del subyacente que debe ser liquidada por un contrato. El tamaño del contrato no debe ser muy grande para que tenga liquidez, ni muy pequeño para evitar un costo de negociación excesivo.

### **Fecha de Liquidación**

Es el día hábil en que son exigibles las obligaciones derivadas de un Contrato de Futuros conforme a las Condiciones Generales de Contratación.

### **Precio de Liquidación Diaria**

Es el precio de referencia por unidad de activo subyacente que MexDer da a conocer a la Cámara de Compensación (Asigna) para efectos del cálculo de aportaciones y la liquidación diaria de los Contratos de Futuros.

### **Precio de Liquidación al Vencimiento**

El precio de referencia que da a conocer MexDer y con base al cual Asigna realiza la liquidación de los Contratos de Futuros en la fecha de liquidación.

### **Posiciones Límite**

Es el número máximo de contratos abiertos de una misma clase que podrá tener un cliente. El propósito de este límite es prevenir que los especuladores no tengan una influencia indebida en el mercado o que asuman un riesgo imprudente.

### **Contrato Abierto**

Es aquella operación celebrada en MexDer por un cliente a través de un Socio Liquidador, que no haya sido cancelada por la celebración de una operación de naturaleza contraria.

### **Operación de Cierre o Cancelación**

Para efectos de registro, es aquella que reduce o cancela la posición abierta de un cliente en una serie de contratos a través de la celebración de una operación contraria.

### **Aportación Inicial Mínima**

Es el efectivo, valores o cualquier otro bien aprobado por las Autoridades Financieras que deberán entregar los Socios Liquidadores a la Cámara de Compensación (Asigna) por cada contrato abierto.

### **Excedente de Aportaciones**

Es la diferencia entre la aportación inicial solicitada al cliente por el Socio Liquidador y la aportación inicial mínima solicitada al Socio Liquidador por Asigna.

### **Posición Corta**

Es el número de contratos de cada una de las series, respecto de los cuales el cliente actúa como vendedor.

### **Posición Larga**

Es el número de contratos de cada una de las series respecto de los cuales el cliente actúa como comprador.

### **Esquema de Operación**

Actualmente la operación es electrónica, concentrándose en el Sistema Electrónico de Negociación, Registro y Asignación "SENTRA-Derivados". Los Formadores de Mercado cuentan con un sistema de atención telefónica que les permite ser asistidos por personal del área de Operaciones de MexDer.

Los Operadores ingresan sus posturas y el Sistema "encripta" el nombre del intermediario al no revelar su identidad. Esto hace que sea un mercado anónimo, lo que permite igualdad de oportunidad para todos los participantes

Una vez pactada la operación, MexDer envía a la Cámara de Compensación (Asigna) los datos de la misma, convirtiéndose en el comprador del vendedor y el vendedor del comprador, asumiendo el riesgo de crédito contraparte. Asigna cuenta con calificación AAAmex(Fitch Ratings).

## **Principios Básicos de Funcionamiento**

La negociación electrónica de contratos de futuros, a través de SENTRA DERIVADOS, se efectúa de acuerdo a los siguientes principios básicos:

### **Seguridad**

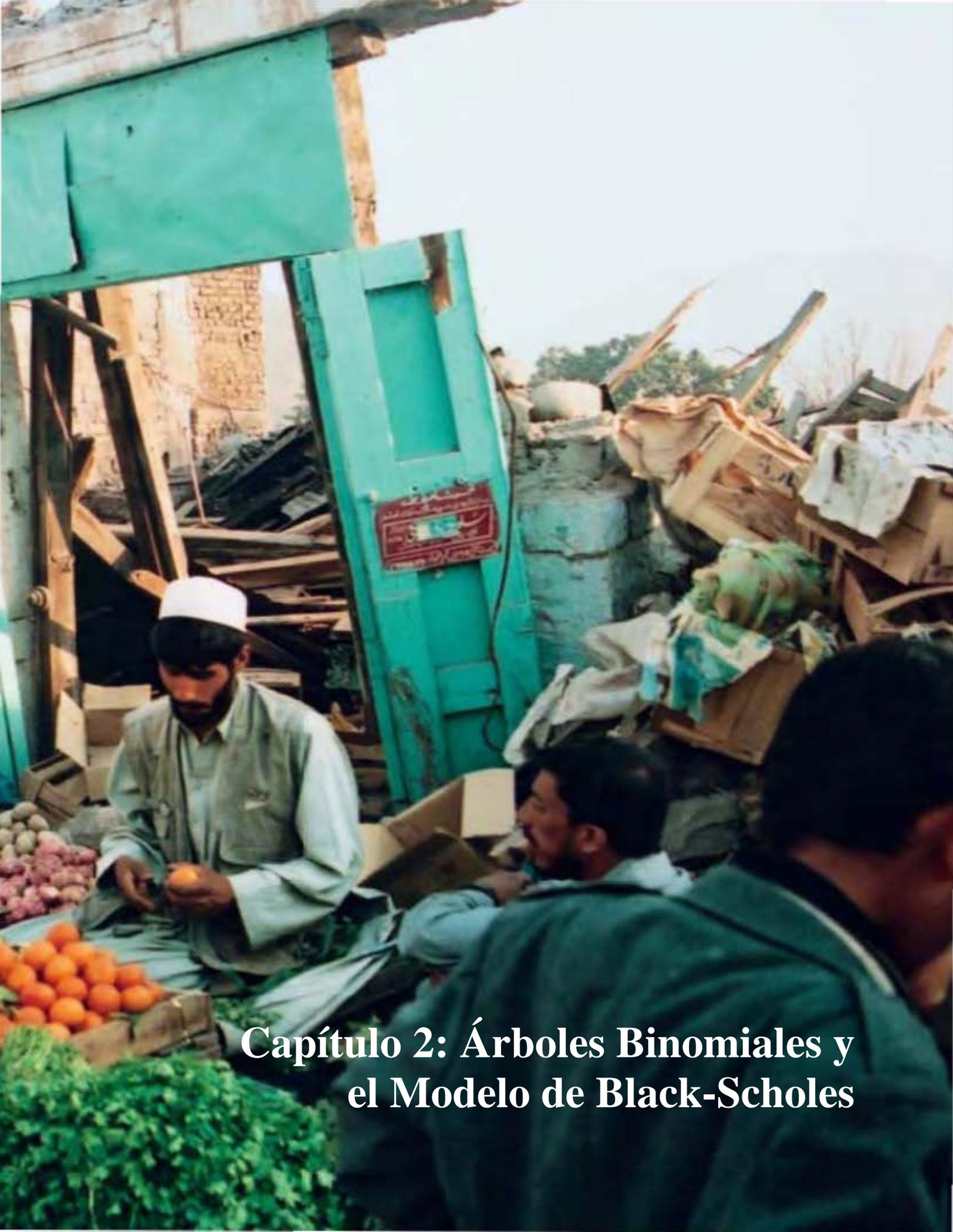
Las operaciones son efectuadas por los Operadores y Socios Liquidadores autorizados para cada Clase, a través del Servicio Telefónico y del sistema de "ruteo" y asignación de órdenes. Una vez efectuada y registrada la operación en el SENTRA DERIVADOS, la mesa de control del Intermediario puede confirmar o detectar errores, antes de proceder a la asignación y transmisión al sistema de compensación y liquidación.

### **Control de Riesgos**

Antes de enviar una orden al Control Operativo de MexDer, el Operador de Mesa verifica que el cliente cuente con la capacidad crediticia y tolerancia al riesgo correspondiente a la orden solicitada. Por otra parte, verifica que no rebase su posición límite. El Control Operativo, a su vez, comprueba que no existan instrucciones para limitar operaciones o cerrar posiciones abiertas. Una vez enviada la operación al sistema de compensación y liquidación, Asigna comprueba que la operación esté debidamente requisitada y dentro de los parámetros de aceptación en cuanto a administración de riesgo, tanto por parte del cliente como del Socio Liquidador o el Operador.

### **Equidad**

El sistema de ruteo y asignación de órdenes asegura el cumplimiento del principio "primero en tiempo, primero en derecho", ya que las órdenes enviadas por los Operadores se registran en estricto orden cronológico. Por otra parte, la separación de operaciones por cuenta propia y por cuenta de terceros evita que se presenten conflictos de interés.



**Capítulo 2: Árboles Binomiales y el Modelo de Black-Scholes**

## 2. ÁRBOLES BINOMIALES Y EL MODELO DE BLACK- SCHOLES

### 2.1. INTRODUCCIÓN A LOS ÁRBOLES BINOMIALES

Una técnica muy útil para valorar opciones se basa en construir lo que se conoce como *árbol binomial*. Éste es un esquema en árbol que representa las diferentes trayectorias posibles que puede seguir el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. En este capítulo haremos una primera aproximación a los árboles binomiales y explicaremos su relación con un principio importante conocido como de *valuación neutral al riesgo (risk-neutral valuation)*. El planteamiento general que tomaremos es similar al de *Cox, Ross y Rubinstein* en 1979.

#### Modelo Binomial de un Periodo

Consideremos una acción cuyo precio es  $S_0$  al tiempo  $t = 0$  y una opción sobre la misma cuyo precio actual es  $f_0$ . Supongamos que la opción durase un tiempo  $T$  y que durante su vida el precio de la acción pudiera estar tanto por encima de  $S_0$  hasta un nuevo nivel  $S_0u$ , o moverse hacia abajo hasta un nuevo nivel  $S_0d$  ( $u > 1, d < 1$ ). El incremento proporcional en el precio de las acciones cuando hay un movimiento hacia arriba es  $u - 1$ , el descenso proporcional en el precio de las acciones cuando hay un movimiento hacia abajo es  $1 - d$ . Si el precio de las acciones sube hasta  $S_0u$ , suponemos que el beneficio bruto (*payoff*) de la opción es  $f_u$ , si el precio baja hasta  $S_0d$ , suponemos que el beneficio bruto (*payoff*) de la opción es  $f_d$ . La situación está ilustrada en la Figura 2.1

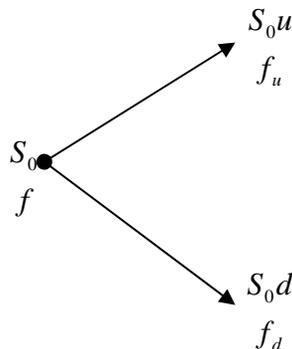


Figura 2.1

Imaginemos una cartera que consiste en una posición larga en  $\Delta$  acciones y una posición corta en una opción  $\Delta s - f$ . Calculamos el valor de  $\Delta$  que hace que la cartera sea libre de riesgo. Si hay un movimiento de subida en el precio de las acciones, el valor de la cartera al final de la vida de la opción será

$$S_0 u \Delta - f_u.$$

Si hay un movimiento de bajada en el precio de las acciones, éste es:

$$S_0 d \Delta - f_d.$$

Los dos valores de cartera son iguales cuando:

$$S_0 u \Delta - f_u = S_0 d \Delta - f_d$$

o

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \dots (2.1)$$

En este caso la cartera es libre de riesgo y debe ganar el tipo de interés libre de riesgo. La ecuación anterior muestra que  $\Delta$  es el ratio entre el incremento en el precio de la opción y la variación en el precio de las acciones cuando nos movemos entre nodos.

Denotando al tipo de interés libre de riesgo  $r$ , el valor actual de la cartera debe ser

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}.$$

El costo de establecimiento de la cartera será:

$$S_0 \Delta - f_0.$$

A ello sigue que

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

o

$$f_0 = S_0 \Delta - (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}.$$

Sustituyendo la ecuación (2.1) para  $\Delta$

$$\begin{aligned} f &= S_0 \left( \frac{f_u - f_d}{S_0(u-d)} \right) - \left[ S_0 u \left( \frac{f_u - f_d}{S_0(u-d)} \right) - f_u \right] \cdot e^{-rT} = \frac{f_u - f_d}{u-d} - \left[ \frac{u(f_u - f_d) - f_u(u-d)}{u-d} \right] e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{u-d} + \left[ \frac{uf_d - df_u}{u-d} \right] \cdot e^{-rT} = \left( \frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(u - e^{rT})}{u-d} \right) \cdot e^{-rT} \end{aligned}$$

Simplificando, esto se reduce a:

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1-p)f_d] \dots (2.2)$$

donde

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u-d} \dots (2.3)$$

Las ecuaciones (2.2) y (2.3) permiten valorar una opción utilizando un modelo binomial de un periodo.

### La Irrelevancia de las Probabilidades de Variación en el Precio de las Acciones

La fórmula de valuación de opciones en la ecuación (2.2) no incluye las probabilidades de movimiento de subida o bajada del precio de las acciones. Esto es sorprendente y parece contraintuitivo. Es natural pensar que, cuando aumenta la probabilidad de una subida en el precio de las acciones, el valor de la opción de compra sobre las acciones se incrementa y el valor de una opción de venta sobre las acciones disminuya. Éste no es el caso.

La razón clave para esto es que no estamos valuando la opción en términos absolutos. Estamos calculando su valor en relación al precio de las acciones subyacentes. Las probabilidades de futuros movimientos hacia arriba o hacia abajo ya están incorporadas en el precio de las acciones. Resulta, por tanto, que no necesitamos tomarlas en cuenta de nuevo cuando valuamos la opción en términos del precio de las acciones.

### Valuación Neutral al Riesgo

A pesar de que no necesitamos hacer ningún supuesto sobre las probabilidades de subida o bajada para obtener la ecuación (2.2), es natural interpretar la variable  $p$  en ella como la

probabilidad de subida en el precio de las acciones. La variable  $1-p$  es entonces la probabilidad de bajada y la expresión:

$$pf_u + (1-p)f_d$$

es el beneficio bruto esperado de la opción. A partir de esta interpretación de  $p$ , la ecuación (2.2) establece que el valor de la opción hoy es su valor futuro esperado descontado al tipo de interés libre de riesgo.

Ahora investigamos el rendimiento esperado de las acciones cuando suponemos que la probabilidad de subida es  $p$ . El precio esperado de las acciones en el momento  $t$ ,  $E(S_t)$ , para  $t \in [0, T]$  viene dado por

$$E(S_t) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

o

$$E(S_{tT}) = pS_0(u-d) + S_0d.$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3) por  $p$ , éste se reduce a:

$$E(S_t) = S_0e^{rt} \dots (2.4)$$

demostrando que el precio de las acciones crece en proporción al tipo de interés libre de riesgo. Establecer la probabilidad de subida igual a  $p$  es, por lo tanto, equivalente a suponer que el rendimiento de las acciones es igual al tipo de interés libre de riesgo.

Nos referimos a un mundo donde los particulares son neutrales al riesgo como un *mundo neutral al riesgo*. En este mundo los inversionistas no necesitan compensaciones por el riesgo y el rendimiento esperado sobre todos los activos es el tipo de interés libre de riesgo. La ecuación (2.4) muestra que estamos suponiendo un mundo neutral al riesgo cuando fijamos la probabilidad de movimiento al alza igual a  $p$ . La ecuación (2.2) muestra que el precio de la opción es su beneficio bruto esperado en un entorno neutral al riesgo descontado al tipo de interés libre de riesgo.

Esto resulta en un ejemplo de un principio general importante en la valuación de opciones conocido como *principio de valuación neutral al riesgo*. Éste establece que podemos suponer con que el mundo es neutral al riesgo cuando valuamos opciones. Los precios que conseguimos son correctos no sólo en un mundo neutral al riesgo, sino también en otros entornos.

## Árboles Binomiales de Dos Periodos

Podemos extender el análisis a un árbol binomial de dos periodos. El objetivo de nuestro análisis es calcular el precio de la opción en el nodo inicial del árbol. Esto puede hacerse aplicando repetidamente los principios establecidos al inicio de este capítulo. Los precios de las opciones en los nodos finales del árbol, pueden calcularse fácilmente, son los beneficios brutos (*payoffs*) de la opción.

Consideremos la siguiente situación, donde el precio de las acciones es  $S_0$ , durante cada periodo de tiempo este precio se mueve tanto hacia arriba  $u$  veces su valor inicial o hacia abajo  $d$  veces el valor inicial. La notación para el valor de la opción se ve en el árbol, por ejemplo, después de dos movimientos el valor de la opción es  $f_{uu}$ . Suponemos que el tipo de interés libre de riesgo es  $r$  y que la duración del periodo es  $\delta t$  años.

Aplicando repetidamente la ecuación (2.2) da:

$$f_u = e^{-r\delta t} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \dots (2.5)$$

$$f_d = e^{-r\delta t} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \dots (2.6)$$

$$f = e^{-r\delta t} [pf_u + (1-p)f_d] \dots (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.5) y (2.6) en la ecuación (2.7), obtenemos:

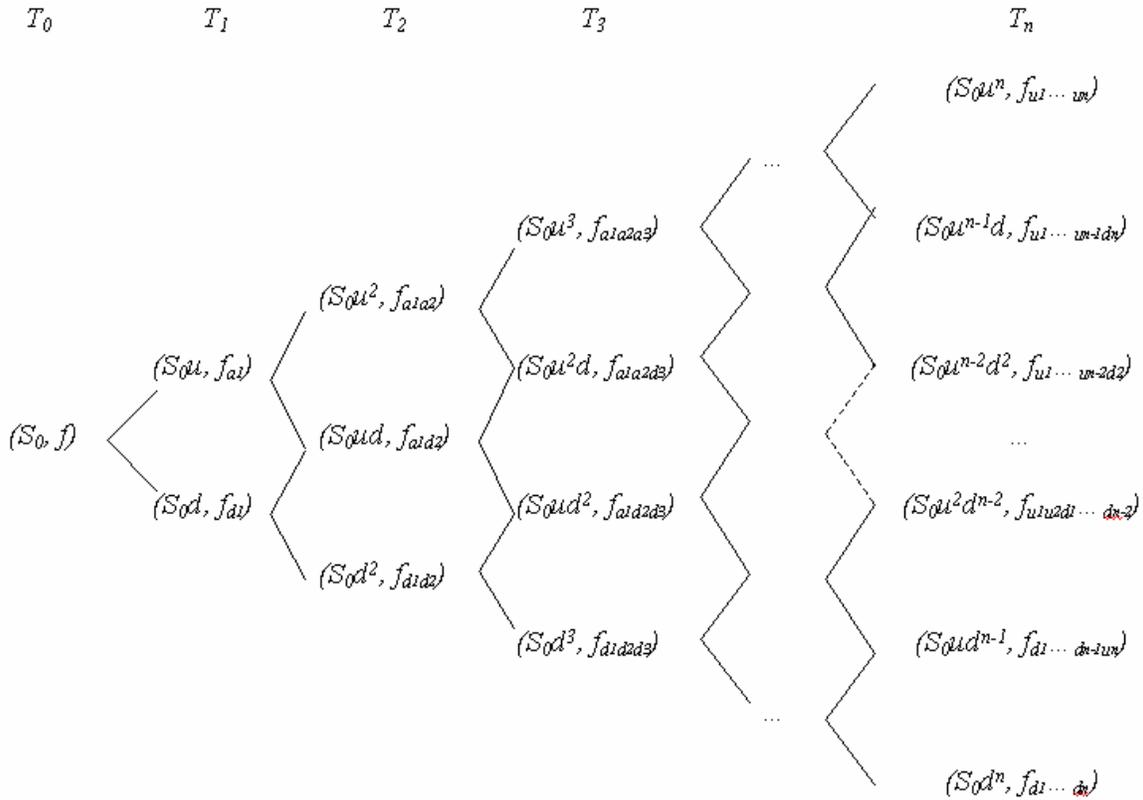
$$f = e^{-2r\delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \dots (2.8)$$

Esto es consistente con el principio de valuación neutral al riesgo mencionado anteriormente. Las variables  $p^2$ ,  $2p(1-p)$  y  $(1-p)^2$  son las probabilidades de obtener los nodos alto, medio y bajo finales. El precio de la opción es igual a su beneficio bruto esperado en un mundo neutral al riesgo descontado al tipo de interés libre de riesgo.

Si generalizamos el uso de árboles binomiales aún más extensamente añadiendo más periodos al árbol, encontraremos que el principio de valuación neutral al riesgo continúa siendo válido. El precio de la opción es siempre igual a su beneficio bruto esperado en un mundo neutral al riesgo, descontado al tipo de interés libre de riesgo.

### El Paso $n$ de los Árboles Binomiales

Completando dinámicamente el precio del activo subyacente y balanceando la opción en cada estado  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , se puede valorar la opción en los  $n + 1$  estados al finalizar el  $n$ -ésimo periodo y, mediante el principio de *Bellman*, conocer el precio de la opción en el periodo inicial.



**Figura 2.2 Reticulado de un árbol binomial**

Donde  $f_{u_1\dots u_k d_1\dots d_{n-k}}$  es el beneficio bruto (*payoff*) de la opción para  $k = 0, \dots, n$ . La Figura 2.2 representa el precio del activo subyacente y el valor de la opción en los estados al término de cada periodo como un proceso binomial multiplicativo.

Debido a que  $S_0u^k d^{n-k}$ , donde  $k = 0, \dots, n$ , son los  $n + 1$  precios que el activo subyacente puede tener en el mercado al término del periodo  $n$ , entonces:

$$P(S_n = S_0 u^k d^{n-k}) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases}$$

Bajo la hipótesis de valuación en el mundo neutral al riesgo, entonces existen dos métodos para valorar opciones.

1. Calcular de forma recursiva el valor de la opción al término de cada periodo.

$$f_{u^t d^{k-t}} \left[ f_{u^{t+1} d^{k-t}} p + f_{u^t d^{k+1-t}} (1-p) \right] \cdot e^{-r\delta T}$$

para  $t = 0, \dots, k$  y  $k = 0, \dots, n$ .

Donde:

$f_{u^t d^{k-t}}$  Valor del contrato en el periodo  $k-1$ , el cual depende de los estados hijos del periodo  $k$ .

$f_{u^{t+1} d^{k-t}}$  Valor del contrato cuando el precio del activo subyacente aumenta del periodo  $k-1$  al  $k$ .

$f_{u^t d^{k+1-t}}$  Valor del contrato cuando el precio del activo subyacente disminuye del periodo  $k-1$  al  $k$ .

Y al término del periodo  $n$  se tiene que:  $f_{u_1 \dots u_k d_1 \dots d_{n-k}}$  es el beneficio bruto (*payoff*) de la opción, para  $k = 0, \dots, n$ .

2. Calcular mediante la fórmula general el valor de la opción.

$$f = \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f_{u^k d^{n-k}} \right] \cdot e^{-rT}$$

Donde

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad u = e^{\sigma\sqrt{\delta T}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta T}} \quad p = \frac{e^{r\delta T} - d}{u - d} \quad \text{y} \quad 1-p = \frac{u - e^{r\delta T}}{u - d}$$

$$\text{Con } 0 \leq p \leq 1 \Rightarrow 0 \leq e^{r\delta T} - d \leq u - d \Rightarrow d \leq e^{r\delta T} u.$$

En el primer caso es necesario calcular el valor intrínseco de cada uno de los  $n+1$  estados al término de  $n$ -ésimo periodo. Cada par de estados tiene un estado padre, el cual es calculado mediante la fórmula hasta el primer periodo, el cual tiene dos estados, de los cuales se obtiene el valor de la opción en el periodo inicial.

Si el tiempo de vencimiento es dividido en 75 periodos, al término del periodo 75 se tienen 76 estados con los precios posibles del bien subyacente lo cual genera  $2^{75}$  trayectorias de los precios del activo subyacente

### Opciones Americanas

Hasta ahora todas las opciones que hemos considerado han sido Europeas. Ahora consideraremos cómo pueden valuarse las opciones americanas utilizando árboles binomiales, el procedimiento es el de trabajar hacia atrás en el árbol del valor de la opción, desde el final hasta el principio, estudiando en cada nodo si es óptimo el ejercicio antes del vencimiento. El valor de la opción en los nodos finales es el mismo que para la opción Europea. En todos los nodos iniciales el valor de la opción es el mayor entre:

1. El valor dado por la ecuación (2.2) y
2. El beneficio bruto (*payoff*) del ejercicio antes del vencimiento.

Los precios de las acciones y sus probabilidades no cambian. Los valores para la opción en los nodos finales tampoco cambian.

### Delta

En este momento es apropiado hablar de *delta*, un parámetro importante en la valuación y la cobertura con opciones.

La *delta de una opción* sobre acciones es el cociente entre la variación en el precio de la opción sobre acciones y la variación en el precio de las acciones subyacentes. Es el número de acciones que deberíamos mantener por cada opción emitida para crear una cobertura libre de riesgo. Es lo mismo que el  $\Delta$  introducido anteriormente en este capítulo. A veces, a la construcción de una cobertura libre de riesgo se le llama *cobertura delta (delta hedging)*. La delta de una opción de compra es positiva, mientras que la delta de una opción de venta es negativa. La delta varía con el

tiempo, esto significa que, en lugar de mantener una cobertura libre de riesgo utilizando una opción y las acciones subyacentes, necesitamos ajustar nuestras carteras de acciones periódicamente.

### El Uso de Árboles Binomiales en la Práctica

Cuando los árboles binomiales se utilizan en la práctica, la vida de la opción se suele dividir en 30 o más periodos. En cada periodo hay un movimiento binomial del precio de las acciones, con 30 periodos esto significa que se consideran 31 precios de finales de acciones y  $2^{30}$ , o cerca de un billón, trayectorias de los precios de las acciones.

Los valores de  $u$  y  $d$  vienen determinados a partir de la volatilidad del precio de las acciones,  $\sigma$ . El método de *Cox, Ross y Rubinstein* establece que:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

y

$$d = \frac{1}{u}.$$

La serie completa de ecuaciones que definen el árbol es entonces:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

## 2.2. VALUACIÓN DE OPCIONES POR: EL MODELO BLACK-SCHOLES

A principios de los años setenta, *Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton* hicieron una contribución fundamental en la valuación de las opciones sobre acciones. Esto ha supuesto el desarrollo de lo que se ha conocido como el modelo *Black-Scholes*. Este modelo ha tenido una enorme influencia en la forma en la que los operadores del mercado valúan y realizan coberturas con opciones. También ha sido una pieza clave en el crecimiento y éxito de la ingeniería financiera. Un reconocimiento a la importancia del modelo llegó en 1997 cuando *Myron Scholes y Robert Merton* fueron galardonados con el premio Nóbel de Economía. Lamentablemente, *Fischer Black* murió en 1995, de no haber sido así, indudablemente, también habría sido uno de los galardonados.

En esta parte del capítulo, presentaremos el modelo *Black-Scholes* para la valuación de opciones Europeas de compra y de venta sobre acciones que no pagan dividendos y comentamos los

supuestos sobre los que se basa. También hablaremos más extensamente del significado de volatilidad, explicaremos cómo puede ser estimada a partir de datos históricos u obtenida a partir de los precios de opciones.

### Supuestos sobre la Evolución de los Precios de las Acciones

Un modelo de valuación de opciones sobre acciones debe hacer varios supuestos sobre cómo evolucionan los precios de las acciones a lo largo del tiempo. El supuesto subyacente al modelo *Black-Scholes* es que (en ausencia de dividendos) el precio de las acciones sigue una *caminata aleatoria*. Esto significa que los cambios porcentuales en el precio de las acciones en un periodo corto de tiempo siguen una distribución normal. Definimos:

- $\mu$ : El rendimiento esperado de las acciones
- $\sigma$ : La volatilidad del precio de las acciones

El rendimiento promedio en el periodo  $\delta t$  es  $\mu\delta t$ . La desviación estándar del cambio porcentual es  $\sigma\sqrt{\delta t}$ . El supuesto subyacente al *Modelo Black-Scholes* es, por lo tanto

$$\frac{\partial S}{S} \sim \phi(\mu\delta t, \sigma\sqrt{\delta t}) \dots (2.9)$$

donde  $\partial S$  es el cambio en el precio de la acción  $S$ , en el periodo  $\delta t$  y  $\phi(m,s)$  denota una distribución normal con media  $m$  y desviación estándar  $s$ .

### La Distribución Lognormal

Puede demostrarse que el supuesto de caminata aleatoria implica que el precio de las acciones en cualquier momento del futuro sigue lo que se conoce como una *distribución lognormal*. Mientras que una variable con distribución normal puede tomar valores positivos o negativos, una variable distribuida lognormalmente sólo puede ser positiva. Una distribución normal es simétrica, una distribución lognormal no lo es, siendo la media, la mediana y la moda, todas ellas diferentes.

Una variable con una distribución lognormal tiene la propiedad de que su logaritmo neperiano está distribuido normalmente. El supuesto de *Black-Scholes* para los precios de las

acciones implica por tanto que  $\ln S_t$  es normal, donde  $S_t$  es el precio de las acciones en un tiempo  $t$  futuro. Puede demostrarse que la media y la desviación estándar de  $\ln S_t$  son:

$$\ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$$

y

$$\sigma \sqrt{t}$$

donde  $S_0$  es el precio actual de las acciones. Podemos expresar este resultado como:

$$\ln S_t \sim \phi \left( \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma \sqrt{t} \right) \dots (2.10)$$

El valor esperado o valor medio de  $S_t$ ,  $E(S_t)$ , viene dado por

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t} \dots (2.11)$$

Esto concuerda con la definición de  $\mu$  como la tasa de rendimiento esperado. Puede demostrarse que la varianza de  $S_t$ ,  $\text{var}(S_t)$ , viene dada por

$$\text{var}(S_t) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

A partir de la ecuación (2.9) puede demostrarse que:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma \sqrt{t} \right] \dots (2.12)$$

Cuando  $t = 1$ , la expresión  $\ln(S_t/S_0)$  es el rendimiento compuesto continuo proporcionado por las acciones en un año. La media y la desviación estándar del rendimiento compuesto continuo dentro de un año son  $\mu - \sigma^2/2$  y  $\sigma$ , respectivamente.

### Tasa de Rentabilidad Esperada

La *tasa de rentabilidad esperada*,  $\mu$ , que requiere un inversionista en acciones depende del riesgo de éstas. A mayor riesgo, mayor rendimiento. También depende del nivel de tipos de interés en la economía, a mayor tipo de interés libre de riesgo, mayor es la tasa de rentabilidad esperada que se pide en cualquier acción. Afortunadamente, no tenemos que preocuparnos de los

determinantes de  $\mu$ , esto es porque el valor de una opción sobre acciones, cuando se expresa en términos de las acciones subyacentes, no depende de  $\mu$ . Sin embargo, hay un aspecto del rendimiento esperado de unas acciones que frecuentemente causa confusión y vale la pena explicar.

La ecuación (2.9) muestra que  $\mu\delta t$  es el cambio porcentual esperado en el precio de las acciones en un periodo muy corto de tiempo  $\delta t$ . Esto quiere decir que  $\mu$  es el rendimiento esperado en un periodo muy corto de tiempo  $\delta t$  y, en el límite, cuando  $\delta t$  tiende a cero será el tipo compuesto continuo. Es natural suponer que  $\mu$  es también la rentabilidad esperada de la acción compuesta continuamente durante un periodo relativamente largo de tiempo. Sin embargo, éste no es el caso, la rentabilidad compuesta continuamente a lo largo de  $t$  años es

$$\frac{1}{t} \ln \frac{S_t}{S_0}$$

y la ecuación (2.12) establece que su valor esperado es  $\mu - \sigma^2/2$ .

La razón para la distinción entre  $\mu$  en la ecuación (2.9) y  $\mu - \sigma^2/2$  en la ecuación (2.12) es sutil, pero importante. Comenzamos con la ecuación (2.11)

$$E(S_t) = S_0 e^{\mu t}.$$

Tomando logaritmos obtenemos

$$\ln[E(S_t)] = \ln(S_0) + \mu t.$$

Ahora resultaría tentador fijar  $\ln[E(S_t)] = E[\ln(S_t)]$  de donde  $E[\ln(S_t)] - \ln(S_0) = \mu t$  o

$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \mu t$ . Sin embargo, no podemos hacer esto porque el logaritmo no es función lineal.

De hecho,  $\ln[E(S_t)] > E[\ln(S_t)]$  de forma que  $E[\ln(S_t/S_0)] < \mu t$ . Esto es consistente con la ecuación (2.12)

Supongamos que consideramos un gran número de periodos de tiempo muy cortos de duración  $\delta t$ . Definimos  $S_i$  como el precio de la acción al acabar el intervalo  $i$ -ésimo y  $\delta S_i$  como  $S_{i+1} - S_i$ . Bajo los supuestos que estamos haciendo sobre la evolución de los precios de las acciones, la media de las rentabilidades de las acciones en cada intervalo estará cerca de  $\mu$ . En otras palabras,  $\mu$  está cerca de la media aritmética de los  $\delta S_i/S_i$ . Sin embargo, el rendimiento

esperado sobre todo el periodo cubierto por los datos expresado como un periodo de composición de  $\delta t$ , está cerca de  $\mu - \sigma^2/2$ , no  $\mu$ <sup>1</sup>.

Los argumentos de esta sección muestran que el término *rendimiento esperado* es ambiguo. Puede referirse tanto a  $\mu$  como a  $\mu - \sigma^2/2$ . A menos que se indique lo contrario, a lo largo de este trabajo lo utilizaremos refiriéndonos a  $\mu$ .

## Volatilidad

La *volatilidad de unas acciones*,  $\sigma$ , es una medida de nuestra incertidumbre sobre los rendimientos proporcionados por las mismas.

La ecuación (2.12) sugiere que la volatilidad del precio de unas acciones puede ser definida como la desviación estándar del rendimiento proporcionado por las acciones en un año cuando el rendimiento se expresa utilizando la composición continua. A partir de la ecuación (2.10), sabemos que  $\sigma\sqrt{t}$  es la desviación estándar del  $\ln S_t$ .

Cuando  $t$  es pequeño, la ecuación (2.9) muestra que  $\sigma\sqrt{t}$  es aproximadamente igual a la desviación estándar de la variación porcentual en el precio de las acciones en el tiempo  $t$ . Esta ecuación también muestra que nuestra incertidumbre sobre los precios futuros de las acciones, medida por su desviación estándar, aumenta –al menos aproximadamente– con la raíz cuadrada de nuestro horizonte de predicción. Por ejemplo, la desviación estándar en el precio de las acciones en cuatro semanas es aproximadamente dos veces la desviación estándar de una semana.

## Estimación de la Volatilidad Mediante Datos Históricos

Para estimar la volatilidad se puede utilizar un registro de los movimientos del precio de las acciones. El precio de las acciones se suele observar en intervalos fijos de tiempo (por ejemplo, cada día, cada semana o cada mes). Definimos:

---

<sup>1</sup> Si definimos el *rendimiento bruto* (*gross return*) como 1 más el rendimiento, el rendimiento bruto sobre todo el periodo cubierto es la media geométrica de los rendimientos brutos en cada intervalo de tiempo de duración  $\delta t$ , no la media aritmética. La media geométrica de un conjunto de números siempre es inferior a la media aritmética excepto cuando los números son iguales.

$n + 1$ : Número de observaciones

$S_i$ : Precio de las acciones al final del intervalo  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ )

$\tau$ : Duración del intervalo del tiempo en años

y hagamos

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right).$$

Una estimación,  $s$ , de la desviación estándar de  $u_i$  viene dada por:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

o

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i\right)^2}$$

donde  $\bar{u}$  es la media de  $u_i$ .

A partir de la ecuación (2.12), la desviación estándar de  $u_i$  es  $\sigma\sqrt{\tau}$ . La variable,  $s$ , es por lo tanto una estimación de  $\sigma\sqrt{\tau}$ . A ello sigue que  $\sigma$  puede estimarse como  $\hat{\sigma}$ , donde

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}.$$

Puede demostrarse que el error estándar de esta estimación es, aproximadamente,  $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$ .

Escoger un valor apropiado para  $n$  no es fácil. Más datos generalmente nos llevan a mayor exactitud. No obstante,  $\sigma$  varía a lo largo del tiempo y los datos que son demasiado antiguos pueden no ser relevantes para predecir el futuro. Una posibilidad que parece funcionar razonablemente bien es el de utilizar precios de cierre de los datos diarios durante los 90 a 180 días anteriores. Una regla usada frecuentemente es hacer  $n$  igual al número de días al que se aplica la volatilidad. Por lo tanto, si la volatilidad va a usarse para valuar una opción a dos años, deberían utilizarse datos históricos correspondientes a dos años.

Hay una cuestión importante en lo que se refiere a si el tiempo debe medirse en días de calendario o en días de negociación cuando estimamos y utilizamos los parámetros de volatilidad.

El análisis anterior considera que las acciones no pagan dividendos. Puede adaptarse para acomodarse a acciones que pagan dividendos. El rendimiento  $u_i$  durante un intervalo de tiempo que incluye un día ex-dividendo viene dado por

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

donde  $D$  es el valor de los dividendos. El rendimiento en otros intervalos de tiempo continúa siendo

$$u_i = \ln \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right).$$

Sin embargo, como los factores fiscales son importantes para determinar los rendimientos en las proximidades de una fecha ex-dividendo, es probable que lo mejor sea descartar el conjunto de fechas para intervalos que incluyan una fecha ex-dividendo cuando se usen datos diarios o semanales.

### Supuestos del Modelo Black-Scholes

Los supuestos hechos por *Black* y *Scholes* cuando derivaron su fórmula de valuación de opciones fueron los siguientes:

1. El comportamiento del precio de las acciones corresponde al modelo lognormal desarrollado anteriormente en este capítulo con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes.
2. No hay costos de transacción o impuestos. Todos los activos financieros son perfectamente divisibles.
3. No hay dividendos sobre las acciones durante la vida de la opción.
4. No hay oportunidades de arbitraje libres de riesgo.
5. La negociación de valores financieros es continua.
6. Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés libre de riesgo.
7. El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo,  $r$ , es constante.

Algunos de estos supuestos han sido modificados por otros investigadores. Por ejemplo, se pueden utilizar variaciones de la fórmula de *Black-Scholes* cuando  $r$  y  $\sigma$  son funciones del tiempo y la fórmula puede ajustarse para tener en cuenta los dividendos.

### **El Análisis de Black-Scholes/Merton**

El análisis es análogo al de no arbitraje para valorar opciones cuando los cambios en el precio de las acciones son binomiales. Se establece una cartera libre de riesgo consistente en una posición en la opción y una posición en las acciones subyacentes. En ausencia de oportunidades de arbitraje, el rendimiento de la cartera debe ser el tipo de interés libre de riesgo,  $r$ . Esto nos lleva a una ecuación diferencial que debe ser satisfecha por la opción.

La razón por la que puede establecerse una cartera libre de riesgo es que el precio de las acciones y el precio de la opción están afectados por la misma fuente de incertidumbre: *los movimientos del precio de las acciones*. En cualquier periodo de tiempo, el precio de una opción de compra está perfecta y positivamente correlacionado con el precio de las acciones subyacentes; el precio de una opción de venta está perfecta y negativamente correlacionado con el precio de las acciones subyacentes. En ambos casos, cuando se establece una cartera apropiada de las acciones y de la opción, el beneficio o pérdida de la posición de las acciones siempre compensa el beneficio o pérdida de la posición de la opción de modo que se conoce con seguridad el valor total de la cartera al final del periodo corto de tiempo.

Supongamos que en un momento determinado, la relación entre un cambio pequeño en el precio de las acciones,  $\delta S$ , y la pequeña variación resultante en el precio de la opción Europea de compra  $\delta c$ , viene dado por

$$\delta c = 0.4\delta S .$$

Esto significa que la pendiente de la línea que representa la relación entre  $c$  y  $S$  es 0.4. La cartera libre de riesgo consistiría en:

1. Una posición larga en 0.4 acciones
2. Una posición corta en 1 opción de compra

Hay una diferencia importante entre el análisis de *Black-Scholes/Merton* y el análisis que utiliza el modelo binomial. En el primero la posición que se establece es libre de riesgo sólo para un

periodo muy corto de tiempo (teóricamente, permanece libre de riesgo sólo por un instante). Para permanecer libre de riesgo debe ajustarse frecuentemente o *redefinirse*. Por ejemplo, la relación entre  $\delta c$  y  $\delta S$  puede cambiar de  $\delta c = 0.4\delta S$  hoy a  $\delta c = 0.5\delta S$  en dos semanas (si eso ocurre, deberían comprarse 0.1 acciones extra por cada opción vendida para mantener la cartera libre de riesgo). Es cierto, sin embargo, que el rendimiento de una cartera libre de riesgo en cualquier periodo corto de tiempo debe ser el tipo de interés libre de riesgo. Éste es el elemento clave en los argumentos de *Black-Scholes/Merton* y conduce a sus fórmulas de valuación

### 2.3. LAS FÓRMULAS DE VALUACIÓN

Las fórmulas de *Black-Scholes* para los precios de opciones Europeas de compra y de venta sobre acciones que no pagan dividendos son:

$$c = S_0 N(d_1) - X e^{-rt} N(d_2) \quad (2.13)$$

$$p = X e^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (2.14)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/X) + (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}.$$

La función  $N(x)$  es la función de distribución de probabilidad para una variable normal estandarizada. En otras palabras, es la probabilidad de que una variable aleatoria con una distribución normal estándar  $\phi(0,1)$ , sea menor que  $x$ . Las variables  $c$  y  $p$  son los precios de las opciones Europeas de compra y de venta,  $S_0$  es el precio de las acciones,  $X$  es el precio de ejercicio,  $r$  es el tipo de interés libre de riesgo,  $t$  es el tiempo hasta el vencimiento y  $\sigma$  es la volatilidad del precio de las acciones. Dado que el precio de una opción Americana de compra,  $C$ , es igual al precio de la opción Europea de compra,  $c$ , para unas acciones que no pagan dividendos, la ecuación (2.13) también da el precio de una opción Americana de compra. Desafortunadamente no se ha obtenido ninguna fórmula analítica exacta para el precio de una opción Americana de venta sobre acciones que no pagan dividendos.

En teoría, la fórmula de *Black-Scholes* sólo es correcta si el tipo de interés a corto plazo,  $r$ , es constante. En la práctica, normalmente, se utiliza con el tipo de interés  $r$ , igual al tipo de interés libre de riesgo sobre una inversión que dura un tiempo  $t$ .

### Propiedades de las Fórmulas de *Black-Scholes*

Demostramos que las fórmulas tienen propiedades generales correctas estudiando lo que sucede cuando algunos parámetros toman valores extremos.

Cuando el precio de las acciones  $S_0$ , es muy grande, es casi seguro que una opción de compra se ejercerá. Entonces es muy similar a un contrato a plazo con precio de entrega  $X$ . A partir de la ecuación  $f = S_0 - Ke^{-rt}$ , esperamos que el precio de la opción de compra sea

$$S_0 - Xe^{-rt}.$$

Éste es de hecho el precio de la opción de compra dado por la ecuación (2.13) pues, cuando  $S_0$  es muy grande, tanto  $d_1$  como  $d_2$  son muy grandes y  $N(d_1)$  y  $N(d_2)$  son cercanos a 1.

Cuando el precio de las acciones es muy grande, el precio de una opción Europea de venta,  $p$ , se acerca a cero. Este resultado es consistente con la ecuación (2.14), dado que  $N(-d_1)$  y  $N(-d_2)$  son ambos cercanos a cero cuando  $S_0$  es grande.

Cuando el precio de las acciones se hace muy pequeño, tanto  $d_1$  como  $d_2$  se hacen muy grandes y negativos.  $N(d_1)$  y  $N(d_2)$  son en ese caso muy cercanos a cero y la ecuación (2.13) da un precio cercano a cero para la opción de compra. Esto es como se esperaba. También  $N(-d_1)$  y  $N(-d_2)$  están muy cerca de 1, por lo tanto, el precio de la opción de venta dada por la ecuación (2.14) está cercano a  $Xe^{-rT}$ . Esto también es como se esperaba.

### La Función de Distribución Normal

El único problema al aplicar las ecuaciones (2.13) y (2.14) es el cálculo de la función de distribución normal,  $N$ . La función puede obtenerse utilizando una aproximación polinomial. Una de estas aproximaciones que dé un buen ajuste hasta el sexto decimal es

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5) & x \geq 0 \\ 1 - N(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{1 + \gamma x} \\ \gamma &= 0.2316419 \\ a_1 &= 0.31938153 \\ a_2 &= -0.356563782 \\ a_3 &= 1.781477937 \\ a_4 &= -1.821255978 \\ a_5 &= 1.330274429 \\ N'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

### La Valuación Neutral al Riesgo

Un resultado muy importante en la valuación de activos financieros derivados se conoce como la valuación neutral al riesgo. Este principio puede establecerse como:

*Cualquier activo financiero dependiente de otros activos financieros negociados puede valuarse bajo el supuesto de que los inversionistas son neutrales al riesgo.*

Notemos que la valuación neutral al riesgo no establece que los inversionistas sean neutrales al riesgo. Lo que establece es que los activos financieros derivados, como las opciones, pueden valuarse bajo el supuesto de que los inversionistas son neutrales al riesgo. Lo que significa es que las preferencias sobre el riesgo de los inversionistas no influyen sobre el precio de la opción sobre acciones cuando se expresa como función del precio de las acciones subyacentes. Esto explica por qué las ecuaciones (2.13) y (2.14) no incluyen el rendimiento esperado  $\mu$ .

La valuación neutral al riesgo es una herramienta poderosa porque, en un mundo neutral al riesgo, se mantienen dos resultados particularmente sencillos:

1. El rendimiento esperado de todos los activos financieros es el tipo de interés libre de riesgo.

2. El tipo de interés libre de riesgo es el tipo de descuento apropiado para aplicar a cualquier futuro flujo de caja esperado.

Pueden valuarse opciones y derivados que generan ingresos (payoffs) en un momento determinado utilizando la valuación neutral al riesgo. El procedimiento es:

1. Supongamos que el rendimiento esperado del activo subyacente es el tipo de interés libre de riesgo  $r$  (es decir, que  $\mu = r$ ).
2. Calcular el pago esperado de la opción en su vencimiento.
3. Descontar el pago esperado al tipo de interés libre de riesgo.

### Volatilidades Implícitas

El parámetro en las fórmulas de valuación de *Black-Scholes* que no puede observarse directamente es la volatilidad del precio de las acciones. Anteriormente, vimos cómo puede estimarse a partir de datos históricos, en este momento es apropiado mencionar un planteamiento alternativo que utiliza lo que se llama *volatilidad implícita*. Ésta es la volatilidad implícita en un precio de una opción observado en el mercado.

La *volatilidad implícita* es el valor de  $\sigma$  que, sustituido en la ecuación (2.13) genera  $c$ . No es posible invertir dicha ecuación con lo cual se expresaría como una función de  $S_0$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $T$  y  $c$ . Sin embargo, puede utilizarse un procedimiento de búsqueda iterativa para encontrar la  $\sigma$  implícita. Si  $c$  es una función creciente de  $\sigma$ , se necesitará un valor más alto de  $\sigma$ , respecto al inicio de la iteración. Procediendo de esta manera, el rango para  $\sigma$  puede partirse en cada iteración y el valor correcto de  $\sigma$  puede calcularse con la exactitud requerida.

Las volatilidades implícitas pueden utilizarse para controlar la opinión del mercado sobre la volatilidad de unas acciones determinadas. A menudo los analistas calculan volatilidades implícitas a partir de opciones negociadas frecuentemente sobre ciertas acciones y las utilizan para calcular los precios de opciones menos negociadas sobre las mismas acciones. Es importante notar que los precios de opciones *deep-in-the-money* y *deep-out-the money* son relativamente insensibles a la volatilidad. Las volatilidades implícitas calculadas a partir de estas opciones tienden a ser poco fiables.

## Causas de la Volatilidad

Algunos analistas han argumentado que la volatilidad del precio de las acciones se debe exclusivamente a la llegada aleatoria de nueva información sobre los rendimientos futuros de las acciones. Otros mantienen que la volatilidad está causada en gran medida por la negociación de acciones. Una pregunta interesante es, si se tiene la misma volatilidad con mercados abiertos o cerrados.

*Fama y French* han contrastado esta cuestión empíricamente. Recogieron precios de acciones al cierre de cada día de negociación durante un largo periodo de tiempo y, a partir de ahí, calcularon:

1. La varianza de los rendimientos del precio de las acciones entre el cierre de un día y el cierre del día siguiente cuando entre ellos no hay días de no negociación.
2. La varianza de los rendimientos del precio de las acciones al cierre de un viernes y al cierre del lunes siguiente.

Si los días de negociación y de no negociación son equivalentes, la varianza en la situación 2 debe ser tres veces la varianza en la situación 1, *Fama* encontró que era sólo un 22% mayor. Los resultados de *French* fueron similares, pues encontró que era un 19% mayor.

Estos resultados sugieren que la volatilidad es mucho mayor cuando el mercado está abierto que cuando está cerrado. Defensores de la visión tradicional, de que la volatilidad se debe sólo a la información nueva, pueden estar tentados a argumentar que la mayoría de la nueva información sobre las acciones llega durante las horas de negociación<sup>2</sup>. No obstante, los estudios del precio de futuros de los productos agrarios, que dependen en gran medida de la climatología, han mostrado el mismo comportamiento que los precios de las acciones; esto es, son mucho más volátiles durante las horas de negociación. Presumiblemente, las noticias sobre el tiempo tienen la misma probabilidad de surgir en cualquier día. La única conclusión razonable parece ser que la volatilidad está causada en gran medida por la propia negociación.

---

<sup>2</sup> De hecho, este argumento es cuestionable. Se hacen a menudo anuncios importantes (véase, por ejemplo, aquéllos relacionados con ventas y ganancias) cuando los mercados están cerrados.

¿Cuáles son las implicaciones de todo lo anterior para la medida de la volatilidad y el modelo *Black-Scholes*? Los resultados sugieren que debemos ignorar los días en que el mercado está cerrado cuando se calcula la volatilidad mediante datos históricos y cuando la volatilidad se utiliza para opciones. Por ejemplo, la volatilidad anual debe calcularse a partir de la volatilidad por día de negociación utilizando la fórmula:

$$\text{Volatilidad}_{\text{Anual}} = \text{Volatilidad por día de negociación} * \sqrt{\text{No. de días de negociación por año.}}$$
Suele considerarse que el número de días de negociación en un año es 252 para las acciones.

## Dividendos

Hasta ahora hemos considerado que las acciones sobre las que se emitió la opción no pagan dividendos. En la práctica, éste puede no ser el caso. Ahora extenderemos nuestros resultados considerando que los dividendos pagados sobre las acciones durante la vida de una opción pueden predecirse con exactitud. Como las opciones vencen en periodos cortos de tiempo (menos de un año), éste es un supuesto bastante razonable.

La fecha en la que se paga el dividendo debería asumirse como la fecha ex-dividendo. En esta fecha el precio de la acción baja en la cuantía del dividendo. El efecto será reducir el valor de las opciones de compra e incrementar el de las opciones de venta.

## Opciones Europeas

Las opciones Europeas pueden analizarse considerando que el precio de las acciones es la suma de dos componentes: un componente libre de riesgo que se utilizará para pagar los dividendos conocidos durante la vida de la opción y un componente con riesgo. El componente libre de riesgo en cualquier momento dado es el valor presente de todos los dividendos, durante la vida de la opción, descontados de las fechas ex-dividendo al presente al tipo de interés libre de riesgo. La fórmula de *Black-Scholes* es entonces correcta si  $S_0$  es igual que el componente arriesgado. Operacionalmente, esto significa que la fórmula puede utilizarse sabiendo que el precio de las acciones está reducido en el valor presente de todos los dividendos durante la vida de la opción, haciéndose el descuento a partir de las fechas ex-dividendo al tipo de interés libre de riesgo. Los dividendos se incluyen en los cálculos sólo si sus fechas ex-dividendo ocurren durante la vida de la opción.

Cuando utilizamos este procedimiento,  $\sigma$  en la fórmula de *Black-Scholes* debe ser la volatilidad del componente con riesgo del precio de las acciones –no la volatilidad del precio de las acciones en sí. En la práctica, las dos se consideran iguales. En teoría, la volatilidad del componente arriesgado es aproximadamente  $S_0/(S_0 - D)$  veces la volatilidad del precio de las acciones donde  $D$  es el valor actual de los dividendos y  $S_0$  es el precio de la acción.

### Opciones de Compra Americanas

Las opciones Americanas de compra nunca deben ejercerse antes del vencimiento cuando las acciones subyacentes no pagan dividendos. Cuando se pagan dividendos a veces es mejor ejercerlas antes del vencimiento. La razón de ello es fácil de entender, el dividendo hará que tanto las acciones como la opción de compra tengan menos valor; si los dividendos son suficientemente grandes y la opción de compra está suficientemente *in-the-money*, puede merecer la pena ejercerla para evitar los efectos negativos de los dividendos sobre el precio de las acciones.

En la práctica, es más probable que las opciones de compra se ejerzan antes del vencimiento de la última fecha ex-dividendo. Describiremos un procedimiento aproximado, sugerido por *Fischer Black*, para valorar opciones Americanas de compra sobre acciones que pagan dividendos:

### Aproximación de Black

Implica el calcular de los precios de dos opciones Europeas:

1. Una opción que vence en el mismo momento que la opción Americana.
2. Una opción que vence justo antes de la última fecha ex-dividendo durante la vida de la opción.

El precio de ejercicio, el precio inicial de las acciones, el tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad coinciden con los de la opción considerada. El precio de la opción Americana es igual al mayor de los precios de estas dos opciones Europeas.

## 2.4. CURVAS DE VOLATILIDAD

¿Son los precios teóricos de *Black-Scholes* cercanos a los precios del mercado? ¿Deben los operadores usar *Black-Scholes* en la práctica cuando determinan un precio para una opción? ¿Son las distribuciones de probabilidad de precios de los activos lognormales? ¿Qué investigación se ha realizado para probar la validez de las fórmulas *Black-Scholes*? En esta sección contestamos estas preguntas. Explicamos que los operadores usan el modelo *Black-Scholes*, pero no exactamente de la manera en que Black y Scholes proponían; la razón es que los operadores permiten que la volatilidad utilizada para valorar una opción dependa del precio de ejercicio y del tiempo para el vencimiento.

### Revisión de la Ecuación Fundamental de Paridad *Put-Call*

La ecuación fundamental, comúnmente llamada la ecuación de *paridad put-call* nos da un buen punto de partida para entender las curvas de volatilidad. Es una relación importante entre el precio,  $c$ , de una opción de compra europea y el precio,  $p$ , de una opción de venta europea:

$$p + S_0 e^{-qT} = c + X e^{-rT} \dots (2.15)$$

La opción de compra y la opción de venta tienen el mismo precio de ejercicio,  $X$ , y el mismo tiempo para el vencimiento,  $T$ . La variable,  $S_0$ , es el precio del activo subyacente hoy,  $r$  es el tipo de interés libre de riesgo para el vencimiento  $T$ , y  $q$  es el rendimiento del activo.

Un rasgo clave de la ecuación es que se basa en un argumento de arbitraje relativamente simple. No requiere ningún supuesto sobre la distribución de probabilidad del precio futuro del activo. Es cierta tanto si la distribución del precio del activo es lognormal como si no lo es.

Supongamos que, para un valor particular de la volatilidad,  $p_{bs}$  y  $c_{bs}$  son los precios de las opciones de compra y de venta europeas calculadas usando el modelo *Black-Scholes*. Supongamos además que  $p_{mkt}$  y  $c_{mkt}$  son los precios de mercado de estas opciones. Dado que la ecuación es cierta para el modelo *Black-Scholes*, se debe cumplir

$$p_{bs} + S_0 e^{-qT} = c_{bs} + X e^{-rT}$$

Dado que también se cumple para precios de mercado

$$p_{mkt} + S_0 e^{-qT} = c_{mkt} + X e^{-rT}$$

Resultando de estas dos ecuaciones

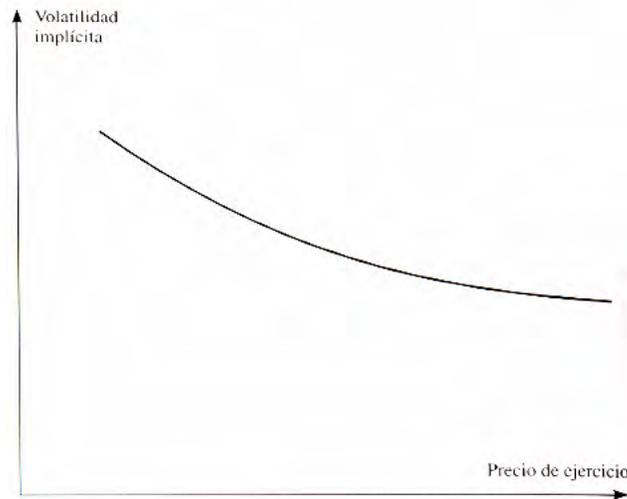
$$p_{bs} - p_{mkt} = c_{bs} - c_{mkt} \dots (2.16)$$

Esto muestra que el error del precio cuando se usa el modelo *Black-Scholes* para valuar una opción europea de venta debería ser exactamente el mismo que el error del precio cuando se usa para valuar una opción europea de compra con el mismo precio de ejercicio y el mismo tiempo para el vencimiento.

Supongamos que la volatilidad implícita de la opción de venta es de  $m$  por ciento. Esto significa que  $p_{bs} = p_{mkt}$  cuando una volatilidad del  $m$  por ciento se usa en el modelo *Black-Scholes*. De la ecuación (2.16), se deduce que  $c_{bs} = c_{mkt}$  cuando esta volatilidad es usada. La volatilidad implícita de la opción de compra es, entonces, también del  $m$  por ciento. Este argumento muestra que la volatilidad implícita de una opción de compra europea es siempre la misma que la volatilidad implícita de una opción de venta europea cuando las dos tienen el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de vencimiento. Dicho de otra manera, para un precio de ejercicio y un vencimiento dados, la volatilidad correcta para usar el modelo de *Black-Scholes* para la valuación de una opción de compra europea debería ser siempre igual que la usada para valuar una opción europea de venta. Esto también es relativamente cierto para opciones americanas. Deducimos que cuando los operadores se refieren a la relación entre volatilidad implícita y precio de ejercicio, o la relación entre volatilidad implícita y vencimiento, no necesitan decir si están hablando de opciones de compra o de venta. La relación es la misma para ambas.

### **Curva de Volatilidad para Opciones sobre Acciones**

La curva de volatilidad usada por los operadores para valuar opciones sobre acciones (tanto individual como sobre índices) suele presentar la siguiente forma



**Fig. 2.3 Curva de volatilidad para opciones sobre acciones**

A veces a esto se le denomina una *volatilidad asimétrica*. La volatilidad disminuye a medida que el precio aumenta, la volatilidad usada para valorar una opción con precio de ejercicio bajo (esto es, una opción de venta claramente fuera de dinero o una opción de compra muy en dinero) es significativamente más alta que la usada para valorar una opción con precio de ejercicio elevado (esto es, una opción de venta muy en dinero o una opción de compra fuera de dinero).

La curva de volatilidad para opciones sobre acciones se corresponde con la distribución de la probabilidad implícita dada por la línea continua en la Figura 2.2. La línea discontinua muestra una distribución lognormal con la misma media y desviación estándar que la distribución implícita. Se puede ver que la distribución implícita tiene una cola izquierda más pesada y una cola derecha más delgada que la distribución lognormal.

Para ver que ambas figuras son consistentes entre sí consideramos opciones que están claramente fuera de dinero.

De la Figura 2.2, una opción de compra fuera de dinero con un precio de ejercicio de  $X_2$  tendrá un precio inferior cuando se use la distribución implícita a cuando se use la distribución lognormal. Esto es porque la opción sólo genera beneficios brutos si el precio de la acción es superior a  $X_2$  y la probabilidad de que esto ocurra es inferior para la distribución de probabilidad implícita que para la distribución lognormal. Esperamos entonces que la distribución implícita nos dé un precio relativamente bajo. Un precio relativamente bajo conlleva una volatilidad implícita

relativamente baja (y esto es exactamente lo que observamos en la figura 2.1) para la opción. Consideremos ahora una opción de venta también fuera de dinero con un precio de ejercicio de  $X_1$ . Esta opción sólo genera beneficios brutos si el precio de la acción está por debajo de  $X_1$ . La Figura 2.1 muestra que la probabilidad de que esto ocurra es más elevada con la distribución de probabilidad implícita que con la distribución lognormal. Esperaremos pues que la distribución implícita genere para esta opción un precio relativamente elevado y una volatilidad implícita relativamente alta.

### **La Razón para la Curva de Volatilidad en Opciones sobre Acciones**

Una posible explicación para la curva de volatilidad en opciones sobre acciones se relaciona con el apalancamiento. A medida que las acciones de una empresa reducen su valor, su apalancamiento aumentó. Esto significa que las acciones resultan más arriesgadas y su volatilidad se incrementa. A medida que las acciones de la empresa aumentan en valor, el apalancamiento decrece. Entonces, las acciones resultan menos arriesgadas y su volatilidad disminuye. Este argumento muestra que podemos esperar que la volatilidad de las acciones sea una función decreciente del precio y esto es consistente con las Figuras 2.1 y 2.2.



### Capítulo 3: Opciones Reales

### 3. OPCIONES REALES

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo abordamos el estudio de los resultados no monetarios de las inversiones empresariales a partir de la analogía entre las opciones financieras y los derechos de decisión en los que se hace presente la flexibilidad administrativa, y que conforman el enfoque de opciones reales. Con tal fin (y teniendo presente las posibilidades de extensión de los modelos de valoración de opciones financieras al análisis de sus homónimas reales), son asumidos a lo largo del capítulo algunos de los supuestos clásicos en los modelos de opciones:

- Que existe un activo libre de riesgo cuya rentabilidad es constante en el tiempo e idéntica al tipo de interés del préstamo y endeudamiento.
- Que los mercados de capital son perfectos.
- Que no existen restricciones en la inversión a corto, que la empresa es tomadora de precios y maximizadora del valor.
- Que sus propietarios, que disponen de información completa sin costo, son aversos al riesgo.

El contenido del capítulo se inicia con algunos conceptos que nos serán de ayuda para alcanzar nuestro objetivo: flexibilidad, incertidumbre e irreversibilidad, para posteriormente empezar con el estudio de las opciones reales.

En las tres primeras secciones basaremos nuestro estudio en los resultados obtenidos en algunas obras acerca de las opciones. Empezaremos con las opciones de crecimiento o derechos de inversión futura. La opción americana de inversión definida sobre un posterior proyecto cuyo valor sigue el patrón de comportamiento estocástico habitualmente asignado a los subyacentes financieros y de precio de ejercicio predeterminado y constante es considerada en la sección primera. Aquí es evaluado el derecho de inversión de precio de ejercicio aleatorio y los supuestos alternativos más frecuentemente empleados en la modelación de la evolución aleatoria del valor del activo subyacente.

El estudio de la opción de abandono de los proyectos de inversión se revisa en la segunda sección. Son discutidos algunos de los resultados que ofrecen las simulaciones numéricas ofrecidas por diferentes trabajos dedicados al estudio del mencionado derecho.

En esta parte es abordado el análisis conjunto de la opción de inversión y de abandono. Cierra la segunda sección la consideración de la opción de abandono durante la construcción del proyecto, una alternativa a medio camino entre la opción de inversión y la de abandono.

La tercera parte de este capítulo es dedicada al análisis de la flexibilidad operativa de la inversión empresarial. Son examinadas en este apartado las principales características de la opción de paralización y reinicio de las operaciones, de la opción de modificación del ritmo productivo y de las opciones de intercambio de factores y de productos.

Más adelante iremos aún más allá de los modelos geométricos brownianos: ¿Existen eventos en los cuales no se cumplen los supuestos clásicos o la extensión de los modelos es insuficiente? Regresaremos a un punto donde la valuación de las opciones financieras no se basa completamente en dichos supuestos: los árboles binomiales. Son estudiadas las formas en las que se puede recurrir a la valuación de opciones por árboles binomiales, pues nos presenta un panorama más general, aunque en ocasiones menos preciso. Éste será el punto de partida del siguiente capítulo donde la distribución de los fenómenos que deseamos estudiar parece no dar muchas alternativas para su estudio: eventos catastróficos.

Cierra el capítulo la definición del VPN extendido de las inversiones empresariales como la suma del VPN estático más el valor actual de sus opciones reales.

### **3.2. OPCIONES REALES Y PROYECTOS DE INVERSIÓN**

“Cuando hablamos de opciones reales no podemos dejar de lado a los proyectos de inversión. El enfoque de las opciones reales parte de reconocer el importante papel que la gestión activa y continua de los proyectos de inversión juega en la determinación del valor de éstos y, por lo tanto, en el análisis de su aceptación o rechazo. Desde el punto de vista de las opciones reales, la decisión de inversión constituye la primera de una prolongada cadena de subsecuentes decisiones, elecciones y acciones que dirigen y moldean, en la medida de lo posible, los resultados del proyecto” (Kester, 1984, pág. 153).

A pesar de que los resultados de los proyectos de inversión son normalmente inciertos y dependen en parte del valor de factores parcial o totalmente externos al comportamiento de una empresa –(como el precio determinado de algún producto final, los costos de los factores productivos, la demanda del mercado, las acciones de la competencia o las decisiones de los gobiernos) también es cierto que sus directivos pueden influir significativamente sobre los resultados de la mayoría de los proyectos mediante determinadas acciones y decisiones, como la paralización de las actividades, el abandono de la inversión, la ampliación y reducción de los recursos asignados al proyecto, o la reasignación de sus activos, en respuesta a las variaciones del valor del referido grupo de variables.

### **La Flexibilidad y sus Implicaciones**

El método de opciones reales considera importante reconocer la “*flexibilidad*” en los proyectos de inversión, pues dado que los métodos tradicionales se han olvidado de ella, también han dejado de lado dos elementos muy importantes en un mundo tan cambiante como el nuestro: incertidumbre e irreversibilidad.

#### *Incertidumbre*

Ésta aparece cuando los directivos no cuentan con toda la información necesaria para tomar una decisión sin riesgo, tanto respecto a una acción en el momento actual, así como de todas las repercusiones que tendrá dicha acción en el futuro. Existe incertidumbre que proviene del exterior, como resultado de los movimientos en el entorno empresarial (las variables externas). Asimismo la empresa se enfrenta a incertidumbre que proviene de su interior: su desarrollo tecnológico, las carencias y fortalezas de la organización, el conocimiento de sus recursos humanos, así como el ambiente de trabajo. También cabe mencionar que existe incertidumbre que podemos medir o cuantificar (cuando se cuenta con una distribución de probabilidad), e incertidumbre que al no poder establecer parámetros para medir, es difícil de atacar desde una visión matemática.

#### *Irreversibilidad*

Se presenta en el momento en el que corregir una decisión implica una pérdida. Por ejemplo, a pesar de que un proyecto de inversión puede ser abandonado, el capital invertido no puede recuperarse del todo, por lo que la decisión de aceptar el proyecto no es reversible

del todo. Es por esto que la flexibilidad de los proyectos, permite a los altos mandos de la empresa maximizar las ganancias y reducir las pérdidas, provocando una asimetría de la distribución de resultados de las inversiones. De esta manera se puede establecer que “la diferencia entre el valor de los proyectos empresariales y el valor presente de las rentas esperadas responde a la gestión que sobre aquellos realizan los directivos de la empresa” (Kasanen y Trigeorgis, 1993, pág. 208).

La flexibilidad de las inversiones y la capacidad de la gestión para moldear los resultados de los proyectos se manifiestan en un conjunto de derechos de decisión, propios de la titularidad de las inversiones. La correcta valoración y selección de activos empresariales requiere en consecuencia, aparte del tradicional análisis de la rentabilidad y el riesgo, el estudio detallado de los sucesivos resultados y de la flexibilidad de cada uno de los proyectos, de su posible evolución futura y de las correspondientes respuestas de la dirección.

### **Valuación de las Opciones Reales.**

Se aplica el pensamiento que sirve de base a las opciones financieras para evaluar activos físicos o reales. Si bien las opciones reales tienen muchas semejanzas, la analogía no es exacta.

### **Similitudes y Diferencias entre las Opciones Financieras y Reales.**

Las variables utilizadas para valorar una opción financiera pueden ser comparadas con proyectos de inversión (generalmente el bien subyacente en las opciones reales):

- El VPN de un proyecto de inversión es similar al precio de las acciones subyacentes  $S_t$ , en una opción financiera.
- El VPN de la inversión necesaria para desarrollar el proyecto ( $I$ ) se puede asemejar al precio de ejercicio de una opción financiera  $X$ .
- El tiempo que permanece la posibilidad de llevar a cabo el proyecto de inversión es equivalente al plazo transcurrido hasta el vencimiento de una opción financiera,  $T$ .
- La tasa de retorno libre de riesgo,  $r_f$ , es idéntica para las opciones financieras y para los proyectos de inversión.

- La volatilidad de los flujos de fondos de un proyecto es análoga a la volatilidad de los precios de las acciones,  $\sigma$ .
- Las ganancias no percibidas a raíz de la postergación de la producción se asemejan a los dividendos no cobrados de la opción financiera,  $\delta$ . En la medida que la dirección de la empresa toma una opción no ejercida de inversión en un proyecto, renuncia al flujo de efectivo que habría existido si el proyecto hubiera generado ingresos.

Las analogías entre las opciones reales y las opciones financieras no son exactas. Si se obliga a las opciones reales a encuadrarse en un marco de opciones financieras convencionales, los resultados pueden ser engañosos. Una diferencia clave entre las dos clases de opciones es que el precio de ejercicio de una opción financiera normalmente es fijo. Para una opción real el precio está asociado con los costos de desarrollo, y puede ser volátil, fluctuando con las condiciones del mercado, los precios de las compañías de servicios y la disponibilidad de recursos por mencionar algunos factores. La determinación de la volatilidad en las opciones reales puede ser muy compleja.

Así de esta manera es posible recurrir a la valoración de opciones reales bajo supuestos que arrojen un comportamiento similar al de las opciones financieras. No obstante, dicha valoración puede ser extremadamente compleja, de modo que cualquier técnica que se adopte, sólo proporcionará un valor aproximado.

Con esto, nos encontramos con que la fórmula de *Black-Scholes* para valuar opciones tiene una aplicación bastante limitada en el caso de las opciones reales. La fórmula representa una solución cerrada de una expresión más general (la ecuación diferencial en derivadas parciales de Black-Scholes) para el caso de las opciones de compra y venta europeas, que sólo pueden ser ejercidas en su fecha de vencimiento. La mayoría de las opciones reales no son equivalentes a las opciones europeas. No obstante, la ecuación diferencial en derivadas parciales de Black-Scholes en sí tiene una aplicación mucho mayor. Con las condiciones de frontera adecuadas, esta ecuación diferencial en derivadas parciales puede ser resuelta (en general numéricamente) para evaluar diversos tipos de opciones, tales como las opciones americanas y las compuestas, por lo que podría resultar una mejor alternativa cuando los supuestos se cumplen.

### 3.3. LAS OPCIONES DE CRECIMIENTO

De realizar un análisis del precio de las acciones de las empresas que cotizan en los mercados, sería posible apreciar una diferencia notable entre dicho precio y el valor presente de los flujos de efectivo que los accionistas esperan recibir por su participación. Con frecuencia, el precio de las acciones supera con creces el valor actual de los flujos futuros esperados, aún cuando en el cálculo de este último valor sean contemplados los efectos de la inflación y las consecuencias del crecimiento esperado en las ventas actuales de la empresa.

*Myers* (1977, pág. 150) planteó una distinción entre la parte del precio de la empresa explicada por decisiones de inversión ya tomadas y llevadas a cabo, y la parte del precio afectada por decisiones futuras (aquí es en donde entra la flexibilidad). Si el precio de la empresa en los mercados de capital representa el acuerdo de los inversionistas sobre la aparente capacidad de la misma para generar riqueza de forma sostenida a lo largo del tiempo, parece razonable atribuir parte de la citada diferencia a las inversiones que el mercado espera que la dirección de la empresa tome en el futuro. Así, una fracción del valor de mercado de los títulos de la empresa vendría determinada por la corriente de flujos de efectivo que sus propietarios calculan obtener de las actuales inversiones de la empresa, mientras que otra parte sustancial reflejaría el rendimiento proveniente de posteriores empleos de recursos por parte de la empresa y que los inversores perciben como posibles y viables.

Esta separación permite agrupar el conjunto de activos empresariales en dos carteras particulares, una primera formada por las inversiones ya realizadas, y una segunda constituida por las oportunidades de crecimiento futuro. Las inversiones ejecutadas se materializan en un conjunto de activos, tangibles e intangibles, cuya administración suministra una renta continua de flujos de efectivo de las que los partícipes de la empresa son propietarios. La cartera de oportunidades de crecimiento viene determinada por la anterior y está integrada por una serie de derechos sobre sucesivas inversiones susceptibles de realización por parte de la empresa, en un futuro más o menos cercano, cuando el transcurrir de los acontecimientos así lo aconseje.

La importancia puesta a las oportunidades de crecimiento, como activos empresariales específicos que permiten a su titular realizar futuras inversiones, no se basa nada más en su contribución al precio total de la empresa. La anterior clasificación se pierde a través del análisis de los proyectos empresariales, resultando la distinción entre inversiones y oportunidades más de

grado que de tipo. Por un lado, los derechos de crecimiento se encuentran implícitos y dispersos en la propiedad de un elevado número de activos de la organización y afectan a una gran parte de las decisiones empresariales. Por otro, la mayoría de las inversiones de la empresa requieren de continuas y sucesivas decisiones y su valor de mercado puede ser parcialmente atribuido a dichas decisiones. Los flujos de efectivo de los actuales proyectos dependen de posteriores “inversiones particulares” (del ejercicio de derechos de inversión) que pueden consistir, por ejemplo, en el lanzamiento de campañas publicitarias, en el mantenimiento de los equipos productivos, o en la formación del personal de la empresa. Esta apreciación lleva a *Myers* al extremo de calificar a todos los gastos variables, e incluso la aceptación pasiva de los gastos fijos, de inversiones optativas, cuyo ejercicio dependerá del transcurrir de futuros acontecimientos.

Dada la dificultad de crear una clasificación adecuada nos conformaremos por dividir en dos a las opciones reales: opciones de inversión propiamente dichas (también llamadas estratégicas) y opciones de ampliación y mantenimiento. Aunque todas ellas representan derechos de inversión, unas y otras se diferencian por el tipo de proyecto al que se refieren. Mientras que las oportunidades estratégicas proporcionan el derecho a invertir en negocios o proyectos que son nuevos para la empresa, el ejercicio de las opciones de ampliación y mantenimiento repercute sobre inversiones previamente acometidas por la empresa.

Este tipo de consideraciones pone de manifiesto la relevancia de las relaciones intertemporales de los proyectos empresariales, no suficientemente reconocida hasta ahora por el pensamiento económico de muchas empresas. Mientras que la interdependencia entre los activos que en un momento determinado constituyen la estructura de inversión de la empresa ha sido bien aceptada y analizada por profesionales de la empresa, financieros y estrategas, la vinculación consecutiva de los proyectos de inversión no había tenido la misma atención. El hecho de que las decisiones empresariales en general no sean tomadas en un momento determinado en el tiempo y de una vez para siempre, sino adoptadas y revisadas de forma consecutiva y periódica, pone de manifiesto la influencia de la administración actual de las oportunidades de inversión sobre el futuro de la empresa. El empleo de los capitales que la dirección de la empresa realiza en determinado momento va a afectar (o incluso condicionar), de un modo u otro, al grupo de posibles decisiones futuras de inversión: “Cada uno de los proyectos que la empresa acomete no es más que un eslabón en una larga cadena de decisiones de inversión... El cómo y el cuándo se realice una inversión en el futuro dependerá del desarrollo de los acontecimientos, pero la disponibilidad de dicha oportunidad depende de las acciones y decisiones anteriores” (*Kester*, 1984).

El papel que cada uno de los proyectos pendientes juega en el futuro de la empresa aconseja dejar de lado la visión “aprobación - rechazo” resultado de un punto de vista estático y sustituirlo por un enfoque dinámico en el que sea planteada la sucesión en el tiempo de los futuros desembolsos y proyectos y sus posibles ampliaciones o reducciones; decisiones que dependen de la estructura inicial del conjunto de proyectos, de las futuras oportunidades, de las mutuas y respectivas interacciones y de la incierta evolución del conjunto de variables que influyen sobre su valor.

### **Valor de la Opción de Inversión.**

Una opción de inversión consiste en el derecho de llevar a cabo, antes de o en una fecha determinada, un nuevo proyecto en unas condiciones que pueden ser ciertas o aleatorias. Los dos elementos que mejor definen el comportamiento de las oportunidades de crecimiento son su carácter contingente y optativo. En cada momento el valor de las opciones de inversión depende, entre otros, del correspondiente de las variables que determinan los resultados de su ejercicio. Factores tales como los costos de producción, los tipos de interés, los gustos de los consumidores, el desarrollo tecnológico o las acciones de la competencia condicionan la conveniencia del ejercicio del derecho y por tanto también su valor. No obstante, el valor de la opción de inversión va a ser siempre positivo independientemente del contexto establecido por los factores críticos; la razón, su carácter optativo. Las oportunidades de inversión proporcionan el derecho, no la obligación, a adquirir otro activo en un determinado plazo, siempre y cuando, de dicho ejercicio se derive la maximización de la riqueza de los accionistas.

Los proyectos de investigación y desarrollo, la entrada en un nuevo mercado o la adquisición de otra entidad constituyen claros ejemplos de inversiones que abren las puertas a nuevas inversiones para la empresa. Se trata de compromisos y acciones que permiten la implementación de nuevos proyectos, convirtiéndose los primeros en requisito previo indispensable o al menos en fuente de claros privilegios para la ejecución de esas nuevas inversiones.

La analogía conceptual entre las oportunidades de inversión y las oportunidades financieras de compra inspira a *Myers* (1977) a proponer la utilización de la metodología de valoración en equilibrio de opciones financieras en la determinación del valor de las oportunidades de crecimiento de las empresas, desde luego con algunas limitaciones con respecto a los supuestos. Desde

entonces, académicos de las áreas de microeconomía y finanzas han ensayado distintas adaptaciones de aquellos conceptos y herramientas a la naturaleza de las oportunidades empresariales.

### **Características de la Opción de Crecimiento con Precio de Ejercicio Conocido y Constante.**

El derecho a invertir, en una fecha venidera, una cantidad conocida y constante, en la implementación de un proyecto futuro puede plantearse en términos de una opción de compra americana y con precio de ejercicio cierto y fijo. Sea  $C_t$  el precio de equilibrio en el instante actual  $t$  del derecho a destinar  $I$  unidades monetarias en un momento futuro  $t + T$  en la adquisición del conjunto de activos que forman una posterior inversión. En principio, parece lógico suponer que este valor depende, al menos, del precio actual del proyecto subyacente, de su evolución futura esperada y de la naturaleza del propio derecho.

El precio actual del activo subyacente, público y objetivo cuando es negociado en mercados mínimamente eficientes, no goza de los mismos privilegios cuando se refiere a proyectos empresariales, por lo general sujetos a mercados, si es que existen, estrechos e ineficientes. En este último caso, resulta obligado recurrir a la obtención de medidas aproximadas de su valor real. Cuando la adquisición de la propiedad del proyecto suministre únicamente el derecho de obtención de una renta cierta independientemente del comportamiento de la empresa, los modelos de equilibrio del mercado de capitales facilitan una buena estimación de su valor. En caso contrario, si los flujos futuros que proporciona el proyecto dependen de las posteriores decisiones que los administradores pudieran adoptar, la estimación de su valor requiere de técnicas de análisis contingente.

El valor del derecho a adquirir un activo por un determinado precio en una fecha futura depende además de la posibilidad de ejercer tal privilegio y por lo tanto del futuro desarrollo experimentado por el valor del subyacente. Como quiera que la volatilidad y la incertidumbre son dos de los valores futuros de activos y proyectos empresariales, la estimación de la correspondiente evolución futura se presenta como uno de los problemas de necesaria resolución previa al proceso mismo de valoración de una cierta estructura en los sucesivos movimientos estocásticos del precio del proyecto y solucionar de este modo dicha dificultad de estimación.

### **Factores que Afectan el Valor de la Opción.**

Algunos trabajos nos permiten analizar las relaciones entre el precio de equilibrio de la opción y los valores de los distintos factores que intervienen en aquella. Pindyck , Dixit y Quigg evalúan las relaciones entre los diferentes parámetros que intervienen en la valoración y el valor de la opción de inversión.

Entre algunas de las observaciones más notorias se encuentran las siguientes:

El *valor de la oportunidad de inversión* se encuentra positivamente relacionado con el precio actual del proyecto subyacente. Además el valor de la opción de inversión ( $C_t$ ) debe ser mayor que el VPN del proyecto ( $S_t - I$ ) para todos aquellos precios del subyacente inferiores al valor crítico  $S^*$ (valor del proyecto mínimo para participar en él), coincidiendo con el valor de la inversión en el resto de los casos. Esto implica, por una parte, que el valor de la oportunidad de invertir debe ser siempre mayor o igual que el del compromiso inmediato y, por otra, que el cálculo tradicional del VPN del proyecto normalmente subestima el verdadero valor de la oportunidad de inversión.

Con respecto a la volatilidad del valor del proyecto subyacente es posible establecer que mayor incertidumbre incrementa el valor de la opción de inversión. Este resultado se deriva de la propia naturaleza del derecho que, como tal, permite beneficiarse de los incrementos del precio del proyecto y eludir todo perjuicio proveniente de una depreciación. Mientras que el incremento del riesgo aumenta por igual el tamaño de las posibles ganancias y pérdidas del activo subyacente, el carácter optativo del derecho de inversión hace que sólo sus resultados positivos sean los que resultan ampliados. De la valoración se desprende también el incremento de la incertidumbre que afecta al proyecto subyacente eleva el valor crítico de ejercicio de la opción y aleja el correspondiente momento esperado de inversión.

Esta dependencia se torna, sin embargo, ambigua cuando es considerado de forma simultánea el efecto de la volatilidad del proyecto tanto sobre los posibles valores futuros del derecho como sobre la propia rentabilidad esperada del subyacente. Si, como la teoría financiera establece, la rentabilidad esperada de las inversiones se encuentra positivamente relacionada con su riesgo, entonces el incremento de este último provocaría la caída del precio actual del subyacente y por tanto también el del derecho, compensando así parte del efecto positivo antes comentado,

entonces las consecuencias de la mayor volatilidad del subyacente sobre el valor del derecho dependerán en parte de la correlación del proyecto de inversión con el mercado. En los casos en los que la rentabilidad del proyecto de inversión se halle correlacionada con el mercado, es decir, cuando el riesgo total sea completamente diversificable, las variaciones de su volatilidad tan sólo afectarían a los posibles resultados futuros del derecho, con lo que la relación entre riesgo y valor de la opción de inversión sería de signo positivo.

Cuando la rentabilidad del activo responda positivamente a cambios de la rentabilidad de la cartera de mercado, el efecto positivo del incremento de la volatilidad del proyecto sobre el valor del derecho será aminorado por el de signo contrario derivado del incremento de la rentabilidad esperada del subyacente. Por su parte, cuando la rentabilidad del proyecto se encuentre negativamente relacionada con el mercado, el incremento de su riesgo repercutirá positivamente sobre el valor del derecho tanto por la disminución de la rentabilidad esperada del subyacente como por el incremento de la dispersión de la distribución de probabilidad de los resultados del propio derecho.

De manera similar, la rentabilidad del activo libre de riesgo afecta simultáneamente al valor del proyecto subyacente, a través de su influencia positiva sobre su rentabilidad esperada, y al precio de la opción de inversión, por medio de su relación con el valor actual del precio de ejercicio. De manera conjunta, el tipo de interés ejerce una influencia positiva sobre el valor de la opción y sobre el valor crítico de ejercicio, pero siempre matizada por la sensibilidad del resto de parámetros con respecto a aquél.

En la valoración de este tipo de derechos resulta conveniente observar una proposición formulada por *Merton*. El precio de la opción europea definida sobre el mismo activo subyacente con idéntica fecha de vencimiento es siempre inferior que el valor de la correspondiente opción americana. Así el valor de este derivado, para el cual se dispone de fórmula analítica puede utilizarse como límite inferior en la acotación de la opción americana definida sobre un subyacente que reparte dividendos de manera continua y proporcional a su precio de mercado.

Diferentes simulaciones numéricas obtenidas en los trabajos de *Laughton, Jacoby, Siegel, Smith, Paddock* y *Titman* confirman la relación positiva del valor de los derechos de inversión con la volatilidad de la variable de estado y el plazo hasta la fecha de vencimiento. Además el efecto de las variaciones de estos parámetros se manifiesta más relevante cuanto menor es el valor intrínseco

de las opciones. El precio crítico de ejercicio de la opción de inversión nuevamente incrementa con la desviación estándar de la variable de estado y disminuye paulatinamente con el transcurso del plazo de vencimiento hasta justo antes de la fecha de expiración, momento en el cual la caída se acelera hasta alcanzar el valor crítico de la opción europea.

### **Valor y Costo de la Inversión Aleatorios**

Hasta aquí se venía considerando que el costo de la inversión era conocido de forma cierta con anticipación al ejercicio del derecho. Sin embargo, en no pocas ocasiones, tanto el valor del proyecto subyacente como el futuro desembolso requerido varían de forma aleatoria a lo largo del tiempo. En estos casos, la opción contiene simultáneamente un derecho de compra y otro de venta, el primero definido sobre el activo que es adquirido y el segundo sobre el gasto incierto que es entregado. La valoración de este tipo de opciones requiere consideraciones adicionales acerca del comportamiento estocástico conjunto definido por ambas variables.

*Merton* formula, a partir de la analogía con la opción de precio de ejercicio constante en un contexto de tipos de interés estocásticos, una expresión analítica que determina el valor de equilibrio de la opción de compra europea definida sobre una acción que no paga dividendos durante la vigencia del derivado. En la misma línea, *Margrave* y *Fischer* deducen una forma de valuación de la opción europea con precio de ejercicio incierto y definida sobre un activo que no reparte dividendos. Ambos trabajos sientan las bases del análisis de las opciones de compra con precio de ejercicio estocástico, motivando posteriores aplicaciones y extensiones del modelo.

Pero dicha estimación no resulta, sin embargo, apropiada para valorar aquellos derechos que puedan ejercerse en cualquier momento durante la vida de la opción. En este caso, la posibilidad de ejercicio prematura incrementa el valor del derecho frente a la opción europea equivalente. Sin embargo, hasta el momento no se halla una solución exacta para la opción americana.

En la solución de este problema de valuación *Carr* ofrece una interesante alternativa a los métodos tradicionales. Siguiendo a *Geske* y *Jonson*, *Carr* define la opción americana como el límite de una secuencia de opciones pseudo-americanas, derechos que pueden ser ejercitados sólo en determinados momentos discontinuos en el tiempo, cuando el número de fechas de ejercicio tiende a infinito. Debido a que la complejidad de la fórmula de valuación de la opción pseudo-americana

con  $n$  posibles fechas de ejercicio aumenta exponencialmente con  $n$ , *Carr* propone emplear la extrapolación de *Richardson* para aproximar el valor de la opción, esto es:

$$E_n \approx \frac{1}{2}E_1 - 4E_2 + \frac{9}{2}E_3 \dots (3.1)$$

donde  $E_n$  representa el valor de equilibrio de una opción con  $n$  fechas posibles de ejercicio.

En diversos trabajos *McDonald* y *Siegel* evalúan numéricamente la sensibilidad del valor de la opción frente a variaciones de los parámetros. Las relaciones coinciden con las observadas en el caso del precio de ejercicio cierto. A éstas hay que añadir además el efecto positivo de la variabilidad del precio de ejercicio y el efecto negativo de la correlación entre los precios de los dos activos implicados en el intercambio.

### **Factores Determinantes del Proceso Estocástico del Valor del Proyecto de Inversión.**

Los modelos hasta aquí descritos asumen que, tanto el valor actual del proyecto subyacente como la estructura del proceso estocástico seguido por sus futuros valores, son conocidos de antemano. Adivinar esta información puede constituir sin embargo aún mayor problema que la propia determinación del valor de la opción de inversión. El carácter aleatorio de la evolución del valor del proyecto subyacente es fruto de la volatilidad de múltiples variables (tales como el costo y productividad de los diferentes factores contratados, el precio de los productos y servicios finales, la demanda del mercado o los tipos de interés) que determinan la futura evolución de la corriente de flujos de efectivo. Como consecuencia, la estimación del proceso estocástico seguido por el valor del proyecto exige comprender el resultado de la múltiple interacción de todas las fuentes de incertidumbre.

La complejidad de esta tarea hace que la mayoría de los trabajos opten por elegir, entre todas las variables externas y aleatorias determinantes del valor de la inversión, la más relevante en razón a su influencia y volatilidad. El precio y la demanda del producto final se hallan entre las alternativas preferidas. Definida la principal generadora del riesgo del proyecto, ésta puede emplearse bien en la determinación del proceso estocástico del valor de la inversión, o bien, directamente en la formulación de los argumentos de réplica y arbitraje. Entre los trabajos que siguen el primero de los patrones son una buena muestra *McDonald* y *Siegel* quienes determinan el

proceso estocástico seguido por el valor de la inversión a partir de la estructura de comportamiento de la demanda.

Otros estudios de personas como *Brennan*, *Schwartz*, *Bjerksund* y *Ekern* optan por la alternativa más directa; utilizan las propias variables de estado o los correspondientes activos financieros de apoyo para replicar los futuros flujos de efectivo o resultados del proyecto. Este último método de valoración aventaja al primero en flexibilidad: los valores de la opción de inversión y del proyecto son secuencialmente obtenidos, permitiendo la posibilidad de considerar otro tipo de derechos también propios de la titularidad del proyecto. Además, cuando la dirección de la empresa disfrute de la posibilidad de modificar el volumen de recursos comprometidos, del derecho a paralizar y reiniciar las actividades, o de otro tipo de opciones operativas, la hipótesis del comportamiento geométrico browniano del valor del proyecto se vuelve bastante inverosímil (o al menos más improbable) que la misma sobre la evolución del precio del producto final, del costo de alguno o varios de los factores productivos o de otro tipo de variables externas.

#### **Otros Modelos Alternativos sobre la Evolución Estocástica del Valor del Activo Subyacente.**

La valoración hasta aquí presentada goza de la solidez que otorgan los fundamentos financieros en los que se apoyan y del procedimiento analítico-deductivo que muchos estudiosos han seguido. Sin embargo, la validez del modelo depende de forma crítica de la hipótesis acerca del proceso estocástico seguido por el precio del activo subyacente. En ese sentido *Cox* y *Ross* reconocen que en la medida en que los modelos de opciones deducen el valor de los derechos a partir de la combinación de otros activos que reproducen los resultados futuros inmediatos, las suposiciones sobre la evolución del precio del subyacente se convierten en factor determinante de la naturaleza de la equivalencia formulada.

La hipótesis de distribución lognormal del valor de proyecto o, en su caso, de la variable de estado es ampliamente aceptada para aquellos activos financieros que son negociados en los mercados de capital. Sin embargo, cuando el activo empresarial no cuenta con un mercado de negociación mínimamente eficiente (como es el caso que nos interesa) este tipo de evolución pierde buena parte de su poder explicativo.

*McDonald* y *Siegel* apelan al comportamiento estocástico de los precios de las acciones de una empresa no endeudada que es titular de un único proyecto de inversión no negociado en

mercados eficientes para justificar la hipótesis del movimiento geométrico browniano del precio del activo. Sin embargo, incluso en el citado caso, el supuesto sobre este comportamiento del valor del proyecto proviene de la cotización de las acciones de la empresa en un mercado diferente y su uso no es factible a periodos anteriores a la negociación o a activos de empresas no cotizadas. Por otra parte, aunque lo más razonable sea pensar en que los continuos movimientos aleatorios del precio de los activos es el producto del choque instantáneo y repetitivo de la oferta y la demanda en mercados de continua negociación, tampoco existen razones suficientes para descartar este tipo de comportamiento en el precio de otros activos negociados en contextos diferentes.

En general el perfil estocástico del valor de las inversiones empresariales varía ampliamente de unos proyectos a otros. En ocasiones, puede resultar razonable suponer una tendencia al alza en el valor de algunos negocios, sobre todo en las primeras etapas del ciclo de vida, difuminada a corto plazo en movimientos erráticos. En otras ocasiones, la existencia de un valor constante a largo plazo en torno al cual fluctúan los distintos precios puntuales a lo largo del tiempo, se revela como la hipótesis más sensata sobre el comportamiento del valor del proyecto.

Los dos modelos de comportamiento estocástico, alternativos al proceso geométrico browniano, mayormente empleados en la modelación del valor del proyecto o de la variable de estado del cual depende este último son el proceso de reversión a la media y el proceso *Poisson*.

### **El Proceso de Reversión a la Media.**

Permite modelar la evolución estocástica de una variable cuyas diferencias infinitesimales, al igual que en el caso geométrico browniano, se distribuyen normalmente, pero que, a diferencia de este último, hacen fluctuar la cuantía de aquélla alrededor de un valor determinado al que tiende la variable a largo plazo. Si  $S_t$  sigue un proceso de reversión a la media, entonces la variación infinitesimal en el intervalo temporal  $(t, t + dt)$  viene dada por la siguiente expresión:

$$dS_t = \alpha(\bar{S} - S_t)dt + \sigma dz_t \dots (3.2)$$

donde  $\bar{S}$  representa el valor al que tiende a largo plazo el precio del proyecto,  $\alpha(\bar{S} - S_t)dt$  y  $\sigma^2 dt$  simbolizan la media y la varianza del cambio infinitesimal en el valor de la inversión y  $dz_t$  es un proceso estocástico de Wiener definido en como:

$$dz_t = \varepsilon_t \sqrt{dt} \dots (3.3)$$

El parámetro  $\alpha$  determina el tamaño de las desviaciones estocásticas respecto al valor a largo plazo  $\bar{S}$  y por este motivo es conocido como la velocidad de reversión: cuanto mayor sea  $\alpha$  menores serán las fluctuaciones estocásticas y viceversa.

A partir del supuesto proceso de reversión a la media del precio del activo subyacente, *Dixit* y *Pindyck* obtienen la expresión analítica de valoración de la opción de inversión americana perpetua cuya resolución requiere la utilización del cálculo numérico. Los resultados obtenidos a partir de diversas simulaciones revelan la relación positiva y negativa del valor actual de la opción con la velocidad de reversión según el diferencial entre la media de la reversión y el precio de ejercicio del derecho presente un saldo mayor o menor que cero respectivamente. Destaca igualmente de las citadas simulaciones la concavidad inicial del valor de la opción con respecto al precio del subyacente para valores elevados de la media y de la velocidad de reversión.

Frente al supuesto comportamiento estocástico de reversión a la media del precio del activo subyacente, *Laughton* y *Jacoby* estudian la valoración de una opción de inversión definida sobre un activo subyacente cuyo valor depende del precio del producto final que evoluciona en el tiempo de acuerdo con un modelo de reversión a la media. Se observa en este caso un doble efecto del proceso de reversión sobre el valor de la opción como consecuencia del menor riesgo que supone este tipo de modelación de la evolución de la variable de estado frente al típico proceso geométrico browniano: por un lado, un mayor valor actual del subyacente debido a un menor tanto de descuento adecuado para su valoración y, por tanto, un efecto positivo sobre el valor de la opción de inversión; por otro, una reducción de la volatilidad del valor del subyacente que conlleva a su vez un efecto negativo en el valor de los derivados y del riesgo del subyacente. El resultado final y la consiguiente sobrevaloración o infravaloración de la opción dependerán en última instancia del signo (negativo o positivo) del valor intrínseco de la opción en el momento de valoración.

### **El Proceso Poisson**

Un tercer patrón posible en la representación del comportamiento estocástico del valor de la subsiguiente inversión es el proceso mixto combinación del proceso de *Itô* y el de *Poisson*. Este tipo de modelos permite reproducir el cambio continuo que experimente el valor de algunos proyectos que varían de forma aleatoria con una determinada tendencia y varianza, pero al mismo tiempo,

sufren la amenaza de una brusca caída gobernada por una ley de probabilidad de *Poisson*. Las acciones de los competidores actuales de la empresa, la introducción de nuevos productos sustitutos, las innovaciones tecnológicas en los procesos de producción o simplemente repentinas alteraciones en los gustos de los consumidores pueden romper tendencias alcistas del valor de las inversiones empresariales y, en consecuencia, frustrar la deseada eficiencia de las decisiones de inversión. Además, frente a la clásica opción europea, de vencimiento fijo y conocido de antemano, la modelación del comportamiento estocástico del precio del proyecto subyacente mediante procesos *Poisson* facilita el análisis de un caso especial de opción de inversión con duración limitada e incierta, en el que el vencimiento aleatorio del derecho procede de la ruina del subyacente.

Finalmente el proceso *Poisson* puede también representar de manera más adecuada, que el clásico comportamiento geométrico browniano, la evolución experimentada por el valor de inversiones dependientes de la obtención discontinua de nuevos conocimientos con aplicación práctica en subsiguientes proyectos de fabricación y comercialización. El correcto análisis de las oportunidades de inversión sujetas a tales contingencias requiere la observación y modelación detallada de este tipo de amenazas y oportunidades, de su alcance, probabilidad y periodicidad.

Con el fin de incorporar en los métodos de valoración de opciones financieras los efectos de violentos movimientos discontinuos en el precio de las acciones, probablemente causados por la llegada de nueva información al mercado –como, por ejemplo, la potencial quiebra de la empresa-, *Cox, Ross y Merton* amplían los supuestos referentes al comportamiento estocástico del activo subyacente, sirviéndose para ello del proceso mixto *Itô-Poisson* y a partir del cual generalizan la metodología de *Black y Scholes*. Asimismo, *McDonald y Siegel* analizan el valor de la opción de inversión sobre un proyecto cuyo valor varía de forma continua según un proceso geométrico browniano y de forma discreta de acuerdo con una ley de probabilidad del tipo de *Poisson* mientras que *Willner* evalúa la opción de inversión definida sobre un proyecto cuyo valor incrementa en el tiempo de manera discontinua según un proceso puro de *Poisson*.

Si  $S_t$  sigue un proceso mixto de *Itô-Poisson*, entonces la variación infinitesimal del valor del proyecto en el intervalo infinitesimal  $(t, t + dt)$  viene dada por la siguiente expresión:

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dz + \gamma S dq \dots (3.4)$$

donde:

$$dq = \begin{cases} -1 & \text{con probabilidad } \lambda dt \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt \end{cases}$$

Los primeros dos sumandos del segundo miembro de la igualdad (3.4) recogen la variación infinitesimal de un proceso geométrico browniano, el último sumando modela un proceso *Poisson* que acontece en el intervalo  $(t, t + dt)$  con una probabilidad  $\lambda dt$ ,  $\gamma$  representa la amplitud del salto y  $\lambda$  es referido como la intensidad del proceso. La esperanza del movimiento aleatorio del valor del proyecto es:

$$\alpha Sdt - \lambda \gamma Sdt = (\alpha - \lambda \gamma) Sdt \dots (2.5)$$

Es decir, la tendencia continua  $\alpha Sdt$  del proceso de  $It\hat{o}$  es ajustada por el cambio discontinuo esperado,  $\gamma Sdt$ , en el valor de la inversión inducido por el acontecer de un suceso aislado de probabilidad  $\lambda dt$ .

Cuando el parámetro  $\gamma$  sea igual a la unidad, la ocurrencia del suceso de *Poisson* reduce a cero el precio del proyecto, valor en el que permanece dadas las propiedades del proceso geométrico browniano. Es precisamente este caso el empleado por *McDonald* y *Siegel* para analizar el precitado valor de la oportunidad de inversión con fecha de expiración a priori incierta, que es identificada con aquella en la que el subyacente pierde todo su valor.

Entre los resultados obtenidos por *McDonald* y *Rigel* destaca la influencia negativa que ejerce la posibilidad de ruina completa del activo subyacente sobre el valor de la opción. Dicho resultado viene no obstante condicionado por la supuesta dependencia del costo de capital del proyecto con respecto al riesgo de ruina del mismo. El supuesto contrario lleva no obstante a *Merton* a concluir el resultado opuesto: la posibilidad de ruina del activo subyacente hace la opción de inversión más valiosa.

Los modelos anteriores nos presentan una alternativa que se mantiene cerca del modelo clásico lognormal y lo que se busca son adecuaciones del mismo. Sin embargo, en muchas ocasiones se ve superado. Más adelante estudiaremos los árboles binomiales, una alternativa para valorar opciones en la que no estamos tan sujetos a alguna distribución de probabilidad del activo subyacente.

### 3.4. LA OPCIÓN DE APLAZAMIENTO

La posesión de la opción de inversión constituye la condición previa indispensable para la iniciación del proyecto subyacente. Sin embargo, en contadas ocasiones el no ejercer inmediatamente el derecho implica la pérdida del mismo. Por lo general, la opción de inversión trasciende del momento presente, variando su vigencia en función de la naturaleza del propio proyecto subyacente. Esta posibilidad de aplazar la inversión es conocida como *opción de aplazamiento u opción de esperar*. Oportunidad de inversión y opción de aplazamiento representan las dos caras de una misma moneda. Por una parte, el ejercicio de inversión implica la renuncia del derecho a invertir en un momento futuro. Por otra parte, el ejercicio de la opción de esperar supone la conservación de la oportunidad de invertir en fechas posteriores.

La elección entre esperar o invertir, requiere el examen de los costos y beneficios asociados a cada una de las alternativas. La razón que justifica el aplazamiento de una inversión reside en la existencia de otra fecha, más o menos cierta, en la que el ejercicio de la opción de inversión es óptima con respecto al resto de fechas posibles anteriores a la expiración del derecho. En este caso el costo de esperar (beneficio de invertir) coincide con el valor actual de los flujos de efectivo generados por el activo subyacente durante el aplazamiento y a los que se renuncia como consecuencia de no ejercer de inmediato la opción de inversión. Por su parte, el costo de invertir (beneficio de esperar) estriba en la diferencia entre el valor actual de la inversión futura óptima y el de su inmediata ejecución, que coincide con el valor de la opción de aplazamiento.

En determinados trabajos, el valor de la opción de aplazamiento es interpretado en términos de información e incertidumbre. *Cukierman, Bernanke, Demers, Timan y Thum* entre otros, entienden que el postergamiento de la inversión permite la llegada de nueva información a la empresa, la cual reduce el riesgo del proyecto y mejora el proceso de decisión de selección de inversiones. Este tipo de análisis considera que mientras la oportunidad de inversión subsista, la acumulación de información referente a precios, demanda potencial, costos o comportamiento de la competencia resuelve, al menos de forma parcial, la incertidumbre relativa al éxito de los proyectos.

Por el contrario, en la mayoría de los trabajos que analizan la opción de aplazamiento se considera como excepcional la tendencia decreciente de la incertidumbre de los proyectos aplazados. La información, que llega a la empresa de forma continua, no consigue eliminar la incertidumbre que afecta a los parámetros básicos de la inversión. En este contexto de continua

incertidumbre, la utilidad de esperar no se deriva tanto de la resolución automática de la incertidumbre como de la optimización del momento y de las condiciones de inversión, es decir, de la posibilidad de realizar la inversión más eficientemente en un momento posterior en el tiempo cuando las condiciones de ejercicio mejoran.

De hecho el análisis del aplazamiento de la inversión se aprecia relevante incluso cuando de la espera no se derive la obtención de información alguna adicional, siempre que los resultados de la misma sean inciertos y el compromiso irreversible, puesto que (cuando el aplazamiento resulta posible) mediante el retraso de la inversión la empresa elude el efecto de circunstancias desfavorables mientras que mantiene el derecho a invertir si, por el contrario, el valor del proyecto incrementa.

Una inversión se entiende que es irreversible cuando su abandono conlleva un costo elevado. Factores tales como la especificidad de los activos, restricciones legislativas, o imperfecciones informativas hacen la irreversibilidad algo tan común en la inversión empresarial como su propio carácter arriesgado. Si a la natural incertidumbre sobre los acontecimientos futuros unimos el hecho de que el compromiso de recursos suele ser más irreversible que la decisión de esperar, parece comprensible que el derecho a aplazar la inversión llegue a alcanzar varias veces el valor del capital empleado.

La irreversibilidad de los proyectos amplifica por tanto las consecuencias derivadas de la correcta elección de la fecha de inversión. Si los recursos comprometidos en los proyectos de inversión son recuperables sin merma alguna para la empresa, entonces el valor de la posibilidad de esperar es mínimo con independencia del nivel de incertidumbre. Por el contrario, cuanto mayor sea la irreversibilidad de un proyecto mayor es el costo de oportunidad de la inversión y también el valor de la opción de aplazamiento.

Con este razonamiento, el criterio de selección apropiado a las inversiones arriesgadas e irreversibles consistiría en aceptar aquellos proyectos cuyo valor actual supere el de los recursos necesarios en su realización: desembolsos presentes y futuros más el valor actual de la opción de aplazamiento. En ese sentido, una de las críticas que el criterio VPN recibe con mayor frecuencia alude a la inadvertencia de la posibilidad de posponer la inversión. Se acusa al VPN de conducir a políticas no óptimas de inversión argumentando que, por una parte, anima a olvidar proyectos que hoy se manifiestan poco rentables pero que puede que mejoren en el futuro, y por otra, incita la

inversión ineficiente en proyectos cuyo valor actual de la corriente de flujos supera al presente de los desembolsos, pero en cuantía inferior al valor del derecho a esperar que es sacrificado.

En realidad, el problema no radica tanto en la validez del criterio VPN, como en su aplicación estática y defectuosa. Todo proyecto compite consigo mismo retrasado en el tiempo en la adjudicación de los recursos limitados de la empresa. Es decir, la inversión presente y futura en un mismo proyecto de inversión constituyen alternativas mutuamente excluyentes. Cuando dos alternativas mutuamente excluyentes son comparadas, el criterio VPN establece que la única decisión que maximiza la riqueza de los accionistas consiste en la selección de aquel proyecto con valor actual neto positivo mayor. El criterio VPN adecuadamente aplicado extiende el análisis del actual compromiso de recursos a todos y cada uno de los posibles momentos futuros de inversión y conduce a replantear el clásico problema “aceptación-rechazo” de los proyectos de inversión en “ejecución inmediata-aplazamiento-rechazo”, o como afirma *Ross* a aplicar de modo efectivamente correcto el criterio del VPN, según el cual, la condición necesaria para que un proyecto sea aceptado es que su VPN domine el de cualquier otra oportunidad de inversión disponible, incluida la realización del mismo en futuro.

Para *Leña* uno de los principales objetivos de los primeros modelos de opciones reales consistió precisamente en mejorar los modelos convencionales de selección de inversiones en relación al análisis de la opción de aplazamiento. Irreversibilidad e incertidumbre obligan a los modelos de opciones reales a examinar los efectos de la inversión no sólo inmediata sino también futura. El valor actual neto positivo no es ni condición suficiente ni necesaria para que un proyecto adquiera la condición de rentable. Por un lado que el valor actual neto de sus flujos futuros sea negativo no implica que tenga que serlo también en el futuro. Cuando exista la más mínima posibilidad de recuperación, la opción de aplazamiento (opción de invertir) es valiosa en tanto en cuanto proporciona a su titular el derecho a beneficiarse de dicho cambio. Por otro, que el valor actual neto sea positivo no significa que el proyecto deba ejecutarse. Cuando la implantación futura proporcione mayor valor a la empresa que la inmediata, la decisión de esperar supera en valor a la de inversión y la propiedad del derecho de inversión proporciona a sus titulares mayor utilidad que su ejercicio.

Por tanto, lo que realmente interesa conocer en la evaluación de proyectos no es tanto el valor de la inmediata inversión como el valor de la oportunidad, es decir, el valor del proyecto implementado en el momento óptimo, momento en que el valor de la inversión es máximo y el de la

opción de aplazamiento mínimo. Los modelos de opciones reales proporcionan al valor de la opción de inversión en los activos subyacentes considerando que aquella es ejercitada de forma que se maximice la riqueza de su titular. Esta metodología de análisis permite determinar no sólo el precio de equilibrio de la opción, sino también el momento óptimo de inversión, y por diferencia el periodo óptimo de aplazamiento. Considerando los costos y beneficios del diferimiento y en función de la supuesta evolución aleatoria del valor del proyecto subyacente, el problema de aceptación-rechazo es transformado en el problema de ejercicio-conservación de las oportunidades de inversión.

### **3.5. LA OPCIÓN DE AMPLIACIÓN Y EL TAMAÑO ÓPTIMO DE LA INVERSIÓN**

Hasta aquí, el compromiso al que se refiere la opción de inversión ha sido considerada única e indivisible, de manera que el derecho de compra sólo podía ejercerse de una vez y suponía la adquisición total del correspondiente activo subyacente de tamaño pre-especificado. Sin embargo, muchas de las oportunidades de inversión que en la práctica se le presentan a la empresa, permiten decidir no sólo sobre su ejercicio o no ejercicio y, por tanto, sobre la aceptación inmediata, aplazamiento o rechazo- sino también sobre el tamaño mismo del proyecto.

Cuando los directivos de la empresa cuentan con la posibilidad de decidir el tamaño inicial del proyecto, al anterior problema de optimización del momento apropiado de inversión hay que incorporar una nueva variable de decisión que recoja las distintas alternativas de dimensión de la inversión y de cuyo análisis se derivará la evolución del tamaño óptimo del compromiso.

La introducción de la capacidad del decisor para determinar el tamaño inicial del proyecto, aunque permite aproximar los supuestos del problema teórico a las verdaderas propiedades del fenómeno real, dista todavía del contexto más habitual en que los directivos disponen de capacidad no sólo para determinar la dimensión del compromiso inicial, sino también para decidir la conveniencia de futuras modificaciones del tamaño del proyecto. De hecho, en un buen número de oportunidades de inversión, la propiedad de las mismas otorga además del derecho inicial de inversión-aplazamiento, el derecho de efectuar sucesivas ampliaciones del proyecto mediante la adquisición de capacidad adicional a la existente y que es conocido en la terminología de las opciones reales como opción de ampliación.

Las opciones de ampliación juegan un papel fundamental en la determinación del tamaño óptimo del compromiso inicial. En la sección anterior se argumentaba que debido a la irreversibilidad y a la incertidumbre, la dirección de la empresa debía plantearse no sólo si invertir o no en un determinado proyecto, sino también la conveniencia de aplazar esta decisión. De manera similar, en la elección de la dimensión inicial de la inversión, los directivos de la empresa han de considerar la conveniencia de los distintos tamaños posibles del compromiso en relación con las posibilidades de aplazar el análisis de dichas ampliaciones.

Como en ocasiones anteriores, la valuación de la opción de ampliación exige comparar el beneficio de invertir inmediatamente en capacidad adicional y, por tanto, de optar por una mayor dimensión inicial del proyecto, y el beneficio de aplazar dicho compromiso a un momento posterior en el tiempo, en este caso, el beneficio de seleccionar un menor tamaño pero manteniendo viva la opción de ampliación. Entre los beneficios del incremento de la capacidad inicial del proyecto se encuentran los rendimientos obtenidos de su rápida movilización, el posible ahorro de costos asociado a las economías de escala o a las curvas de aprendizaje ó incluso las opciones de intercambio derivadas de la posibilidad de repartir exceso de capacidad entre diferentes instalaciones. Por su parte, entre los beneficios del aplazamiento de la ampliación se hallan la posibilidad de ejercer la opción en mejores condiciones así como el ahorro del consiguiente costo de oportunidad asociado a la capacidad productiva ociosa.

*Pindyck* deduce un modelo analítico que permite determinar el tamaño óptimo de un determinado proyecto de inversión, caracterizado por las funciones de producción y demanda, en el que el beneficio de una unidad adicional de capacidad instalada es definido como el valor actual neto de la correspondiente corriente perpetua de flujos de efectivo; y el costo de invertir igual al desembolso requerido más el valor de la opción de ampliación consumida. Aparte de la resolución matemática del problema de optimización de la capacidad productiva en un contexto de incertidumbre e inversión irreversible, el modelo revela una lógica relación negativa entre el riesgo y la dimensión inicial del proyecto, de modo que cuanto mayor sea el grado de incertidumbre mayor es el valor de aplazar el compromiso de capital adicional en el proyecto (valor de las opciones de ampliación) y menor es el tamaño óptimo del proyecto.

### 3.6. LA OPCIÓN DE ABANDONO

#### Los Derechos de Abandono

La supuesta irreversibilidad de los compromisos empresariales en el modelo clásico implica admitir que las inversiones de la empresa permanecen en su cartera de activos, generando flujos de efectivo de manera continuada, hasta el final de la vida de los proyectos, momento en el cual tiene lugar el abandono o la reasignación de los activos. No se contempla, por tanto, la posibilidad de abandonar los proyectos empresariales antes o después del final de la vida inicialmente prevista. Este planteamiento equivale a suponer que, desde la fecha en la que es planteada la aceptación de las inversiones, la empresa asume un periodo concreto de duración de los proyectos que es respetado escrupulosa e independientemente del posterior desarrollo de los acontecimientos y de los resultados efectivos del proyecto.

Sin embargo, la realidad empresarial muestra un escenario muy diferente. Muchas inversiones son abandonadas antes de la conclusión de la duración inicialmente estimada e incluso antes del final de la vida del proyecto. Un estudio realizado sobre la diversificación de 33 grandes empresas norteamericanas durante el periodo 1950-1986, revela que “la mayoría de ellas abandonaron muchos más negocios de los que mantuvieron”. Por su parte, la lógica común revela como razonable el aceptar que los directivos de la empresa cuentan normalmente con la posibilidad, más o menos costosa, de decidir sobre el momento adecuado de abandono de las inversiones en funcionamiento y que, por tanto, los proyectos serán mantenidos en la cartera de la empresa en tanto en cuanto ésta implique un valor mayor para la empresa que la venta o la reasignación de los activos a aquellas asignados.

La posibilidad de abandono prematuro es valiosa en tanto que permite a sus titulares apropiarse del valor de mercado del proyecto en situaciones desfavorables, al tiempo que no exige ningún esfuerzo adicional en contextos favorables. Su mera existencia reduce el riesgo de la inversión e incrementa su rentabilidad esperada. Aún cuando las opciones de abandono no suelen constituir el motivo fundamental de las inversiones empresariales, no por ello han de ser excluidas en el análisis de proyectos. En algunos casos, y sobre todo cuando el riesgo de la inversión es elevado, el valor de la opción de abandono puede llegar a superar incluso el de la propia corriente de flujos de efectivo, en otras, el valor de la posibilidad de abandono constituye el principal elemento diferenciador entre las distintas alternativas de inversión.

Conscientes de su importancia, *Robichek y Van Horne* proponen un procedimiento de análisis de la opción de abandono en la valoración de inversiones, según el cual, un proyecto debería ser abandonado en el momento en el que su valor de abandono exceda el valor actual de los futuros flujos de efectivo. Sin embargo, esta forma de proceder desdeña el derecho a abandonar la inversión en un momento diferente.

Al igual que ocurriera con la opción de inversión, el abandono es irreversible mientras que el no abandono es normalmente rectificable. El abandono actual del proyecto cierra todas las posibilidades del abandono futuro, mientras que la continuidad del proyecto siempre permite su posterior liquidación. Por tanto, en lugar de formular el problema en términos de continuidad o abandono, éste debe plantearse en términos de abandono presente frente a abandono futuro, con lo que la regla de decisión queda transformada en la siguiente: un proyecto debe ser abandonado cuando el valor de su abandono inmediato exceda el valor presente de su abandono futuro.

Este valor del abandono futuro coincide con el valor actual del derecho a retirar la inversión en el momento óptimo más el valor presente de los flujos futuros de efectivo percibidos hasta aquella fecha. La determinación de este valor no está exenta de dificultades. La volatilidad característica de los flujos de efectivo de las inversiones empresariales y del valor residual del proyecto exige resolver un ejercicio de programación dinámica en contexto de riesgo.

La resolución de este problema puede, no obstante, plantearse de manera directa a partir de la evidente analogía conceptual entre el derecho de abandono y la opción de venta. De esta forma los modelos financieros de valoración de opciones proporcionan tanto el valor de la opción de abandono como las reglas de ejercicio óptimo en cada momento, en función de la particular situación presente y de la posible evolución futura del proyecto.

### **Valor de la Opción de Abandono**

La posibilidad de abandonar una inversión con anterioridad al final de la vida del proyecto representa una opción de venta americana definida sobre la corriente de flujos de efectivo que aquél proporciona. El proyecto objeto de retiro de inversión representa el activo subyacente de la opción, el valor presente de los flujos de efectivo futuros constituye el precio actual de dicho proyecto, el

valor de liquidación o reasignación coincide con el precio de ejercicio derivado y el final de la vida del proyecto marca la fecha de vencimiento del derecho.

Desafortunadamente no se ha encontrado una solución analítica exacta para la valoración de la opción de abandono por lo que la determinación del valor actual de equilibrio de ésta exige el empleo de aproximaciones analíticas o métodos numéricos. *Trigeorgis* y *Smith* optan por la aplicación del método binomial.

Entre las aproximaciones analíticas conocidas para el análisis cuantitativo de este tipo de derechos, destaca la propuesta de *Geske* y *Jonson*, ya comentada en el apartado Valor y Costo de la Inversión Aleatorios y la planteada en *Barone-Adesi* y *Whaley*. En este último trabajo se obtiene una aproximación analítica de valoración de la opción de venta americana definida sobre una acción que reparte dividendos de forma discreta durante el plazo finito de vida del derecho, mediante la interpolación de las fórmulas de *Balck-Scholes*, para opciones de venta europeas, y el modelo de *MacMillan*, de valoración de opciones de venta americanas definidas sobre acciones que no reparten dividendos.

El signo de las relaciones del valor de la opción con los parámetros relevantes es el que se deriva de la teoría de opciones. El valor de la *opción* se encuentra positivamente relacionado con la duración de vida del proyecto, con su volatilidad, con su valor de liquidación y con los flujos de efectivo repartidos durante la vigencia del derecho; y negativamente relacionado con el correspondiente valor de la inversión y con el tipo de interés libre de riesgo.

Como ya anticipábamos al referirnos a la opción de inversión con precio de ejercicio aleatorio, este derecho puede interpretarse indistintamente como una opción de compra o como una opción de venta según consideremos el activo que es entregado o recibido en su ejercicio. En consecuencia, un modelo propuesto por *McDonald* y *Siegel* es igualmente apropiado para la valoración de la opción de abandono americana y con precio de ejercicio aleatorio. Similar equivalencia permite aplicar la aproximación analítica descrita por *Carr* para la determinación del valor de la opción americana de intercambio.

### 3.7. LA OPCIÓN DE INVERSIÓN, LA OPCIÓN DE ABANDONO E HISTÉRESIS

El fenómeno *histéresis* es definido en física como el retraso del efecto sobre la causa que lo precede. En la actividad normal de las organizaciones económicas resulta común el hecho de que un determinado comportamiento se prolongue durante un tiempo tras desaparecer la causa que lo originó. *Dixit* califica a este incidente como uno de los elementos característicos de las decisiones empresariales de inversión y de abandono. Normalmente, la caída del valor de mercado de una inversión por debajo del valor crítico que en su día estimulara el compromiso no va acompañada del inmediato abandono. Análogamente, el incremento del valor de mercado de un negocio por encima del valor crítico que previamente motivara su abandono no suele conducir a la automática reinversión.

A primera vista pudiera parecer que semejante inercia es causa de la lentitud o ineficiencia de la respuesta de la empresa frente a cambios en el entorno. Un análisis más preciso ofrece sin embargo una explicación muy distinta. El desfase temporal entre las causas y sus efectos resulta lógico y óptimo cuando en las decisiones empresariales concurren las tres circunstancias siguientes:

1. Que la entrada o la salida de la empresa en el negocio puedan ser aplazadas
2. Que la inversión o el abandono conlleven costos no recuperables
3. Que la incertidumbre que rodea la evolución de los acontecimientos relevantes para la empresa no termine de resolverse nunca.

Los modelos neoclásicos de inversión ya proponen una primera justificación basada en la irreversibilidad de tales decisiones. Denotando por  $I$  y por  $R$  los costos irre recuperables asociados a la inversión y abandono respectivamente, por  $C$  el costo variable unitario y por  $r$  el costo de capital de la empresa en certeza, esta teoría establece que los precios críticos que respectivamente determinan la entrada y la salida de un proyecto,  $P_1^*$  y  $P_2^*$ , vienen definidos por los valores:

$$\begin{aligned} P_1^* &= C + rI \\ P_2^* &= C - rR \end{aligned} \dots(3.5)$$

es decir, la empresa no invierte hasta que el precio del producto final alcanza el costo total medio a largo plazo,  $P_1^*$ , y no desinvierte hasta que aquél cae por debajo de la parte del costo variable que excede el costo anualizado de abandono,  $P_2^*$ . Si después de invertir, el precio del producto final cae

por debajo del valor que motivó la entrada, la empresa mantendrá su compromiso en tanto en cuanto aquél supere  $P_2^*$ . Abandonado el proyecto, la empresa no volverá a invertir, aún cuando desaparezcan las causas que motivaron su salida, hasta que el precio rebase  $P_1^*$ . De aquí que la separación entre los precios críticos, y por tanto también la histéresis, se prevé mayor cuanto mayores sean los costos irreversibles.

Por su parte, los modelos de opciones reales propugnan valores críticos aún más distanciados. La razón estriba en la consideración conjunta de la incertidumbre y en la posibilidad de aplazar la decisión. Si la opción de inversión puede ejercerse en un momento posterior en el tiempo, la asimetría de sus futuros resultados lleva a que el compromiso sólo resulte óptimo cuando el precio del producto final supere a  $P_1^*$  en una cantidad suficiente como para compensar el valor de la opción que es sacrificada. De manera equivalente, si la opción de abandono no expira automáticamente, su carácter optativo implica que el retiro de inversión está justificado únicamente cuando el precio del producto final caiga suficientemente por debajo de  $P_2^*$  como para renunciar a su posible ejercicio futuro.

En consecuencia, el enfoque de opciones permite explicar no sólo el fenómeno de histéresis sino también el hecho de que la iniciativa privada se mantenga momentáneamente alejada de negocios cuya rentabilidad puntual se encuentra por encima de su costo de capital, así como el hecho de que las empresas permanezcan temporalmente en sectores aparentemente ruinosos soportando pérdidas sustanciales. Sin embargo, un análisis separado de ambas opciones, como el presentado en los párrafos anteriores no reconoce convenientemente la interdependencia entre los costos irreversibles de la decisión de inversión y la decisión de abandono. De un lado, el ejercicio de la opción de inversión supone la adquisición de la opción de abandono. De otro, el ejercicio de la opción de abandono implica la adquisición de una nueva opción de inversión.

Por una parte, para que la empresa invierta en un determinado proyecto, los cobros esperados deben superar a los pagos previstos en cantidad suficiente, no sólo para compensar el correspondiente riesgo soportado, sino también para resarcir la suma del valor actual de la opción de aplazamiento que es sacrificada por el compromiso inmediato, más el correspondiente costo a soportar en el futuro como consecuencia del abandono. Por otro, el abandono de un negocio no puede ser únicamente justificado por el beneficio inmediato, sino que además debe recoger el esfuerzo conjunto del derecho a abandonar el proyecto en cualquier otro momento posterior al que se renuncia y del nuevo costo requerido en caso de requerir su posterior rehabilitación.

La interdependencia entre ambas decisiones obliga a diferenciar las reglas de ejercicio de las opciones de inversión y de abandono de las que se despenden del análisis hasta aquí desarrollado. Con este propósito *Dixit* considera el caso de una empresa que se plantea la entrada en un determinado sector cuando el precio del producto final  $P$  sigue un proceso geométrico browniano. Tanto la oportunidad de inversión como la opción de abandono son consideradas del tipo americano y definidas sobre un proyecto que genera una unidad de producto por unidad de tiempo a un costo constante igual a  $C$ .

De este trabajo, *Dixit* extrae las siguientes conclusiones:

En primer lugar, los precios que marcan el ejercicio óptimo de las opciones de inversión y de abandono son siempre superiores e inferiores respectivamente, a los valores críticos sugeridos por el modelo neoclásico, esto es:

$$P_1^* > C + rI$$

$$P_2^* < C + rI$$

desigualdades que sólo se convierten en igualdad cuando la volatilidad del precio es nula, es decir,

$$si \quad \sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_1^* = C + rI \\ P_2^* = C - rR \end{cases}$$

En segundo lugar, cuando los costos no reversibles de inversión y abandono tienden simultáneamente a cero entonces ambos precios críticos convergen hacia el costo variable  $C$ . Dicha tendencia no se verifica cuando únicamente uno de los costos se aproxima a cero, en cuyo caso ambas desigualdades siguen cumpliéndose en sentido estricto. Es decir, basta con que una de las dos decisiones, la inversión o el abandono sea irreversible para hacer que los precios óptimos de ejercicio disten de los valores del modelo neoclásico. Se comprueba además que una insignificante magnitud de uno de los costos irreversibles de inversión o de abandono es suficiente para provocar una notable separación entre los precios críticos de entrada y salidas óptimas. Es más, el fenómeno histéresis es más sensible a los cambios de los valores de  $I$  y  $R$  cuando los costos son pequeños que cuando son mayores.

Por último *Dixit* demuestra, a partir de los resultados de un ejercicio de simulación, que el incremento del riesgo tiene un potente efecto sobre la histéresis, aunque de nuevo se trata de un fenómeno de incrementos decrecientes. Retomando la analogía con las opciones financieras, puede entenderse fácilmente que cuanto mayor sea la volatilidad de la variable de estado, mayor debe ser el valor de la opción de compra, es decir el valor de la oportunidad poseída por la empresa antes del compromiso, y también el precio de ejercicio crítico. Además, el incremento de la incertidumbre afecta también positivamente a la parte del valor de la inversión que corresponde a la opción de venta, cuyo precio crítico responde a la baja.

### **3.8. LA INVERSIÓN SECUENCIAL Y LA OPCIÓN DE ABANDONO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL PROYECTO**

En un principio pudiera parecer que la opción de abandono es propia de las etapas de madurez y declive. Sin embargo, la realidad empresarial revela que el mayor número de retiro de inversiones se produce en los primeros compases del ciclo de vida de los negocios. La explicación resulta obvia. Por una parte, las etapas de lanzamiento se caracterizan por la elevada incertidumbre sobre la futura respuesta del mercado, de la competencia y de los propios partícipes de la empresa. Por otro lado, el intervalo precedente a la madurez suele ser el que presenta un estado de mayor déficit en términos de fondos requeridos-generados.

En ocasiones, las posibilidades de abandono surgen incluso antes de que el proyecto empiece a generar flujos. Se trata de inversiones que requieren de un período de construcción previo al inicio de las operaciones y cuyos desembolsos suelen estar distribuidos a lo largo de este intervalo temporal y, por tanto, también las decisiones de continuar la construcción o abandonar el compromiso inicial. Las opciones de abandono o paralización de los procesos de inversión se manifiestan especialmente valiosas en la industria farmacéutica y aeronáutica, en la construcción de grandes proyectos, en la explotación de reservas minerales y, en general, en las inversiones de mayor riesgo y especificidad cuyos desembolsos pueden extenderse a lo largo de fases sucesivas.

En estos casos, cuando la construcción del proyecto requiera una sucesión de inversiones concatenadas, el primer compromiso concede a su titular la posibilidad, y no la obligación, de decidir sobre la continuación o paralización del proceso mediante la ejecución o el incumplimiento del pago siguiente. El proceso se repite tantas veces como desembolsos parciales existan hasta la obtención del proyecto completo, momento en el cual, éste comienza a generar flujos de efectivo. El

carácter optativo de los sucesivos compromisos aconseja plantear el primer desembolso como el costo de adquisición de una opción de compra compuesta cuyo ejercicio exige la ejecución del subsiguiente pago que proporciona a su titular una nueva opción de inversión compuesta, y así sucesivamente, hasta justo el último compromiso que, finalmente, proporciona la propiedad del proyecto completado.

Este planteamiento, aunque incluyente, comprensivo y sugerente, presenta problemas operativos importantes. El valor del proceso de inversión, que incluye la cadena de derechos de inversión y obtención final de un activo productivo, es igual al valor de la primera opción. Sin embargo, la determinación del valor de esta primera opción requiere el conocimiento del valor y posible evolución de su activo subyacente, que en este caso es una nueva opción. A su vez, los valores actuales y futuros de cada derecho dependen de los correspondientes de la siguiente opción. En consecuencia, el proceso de valoración exige determinar en primer lugar el valor de la última opción, cuyo ejercicio proporciona el valor estocástico del activo productivo. El valor de este último derecho y la estructura de su comportamiento aleatorio en el tiempo, que viene determinado por el correspondiente de su activo subyacente, sirve para determinar el precio de equilibrio de la última opción. Repitiendo el proceso anterior, es posible llegar a una expresión del valor del proceso de inversión que va a depender de una distribución de probabilidad multidimensional de complicado manejo.

Mediante el análisis de distintos ejemplos numéricos, *Majd* y *Pindyck* muestran la significación del error que se comete mediante el empleo de las técnicas tradicionales en la valoración de este tipo de inversiones, sesgo que incrementa con la flexibilidad del proceso. Del estudio destaca la relación entre el costo de oportunidad del aplazamiento y el valor crítico determinante de la inversión. Mientras que en el análisis de *McDonald* y *Siegel* un mayor costo de oportunidad estimulaba el ejercicio inmediato de la opción de inversión, cuando la construcción del proyecto exige de un tiempo mínimo de construcción, el efecto del costo de oportunidad depende de su propio nivel y del citado plazo mínimo. La razón radica en el doble efecto del incremento del costo de oportunidad, que directamente estimula la inversión inmediata, pero que indirectamente reduce el valor esperado del proyecto finalizado. Se verifica además que la volatilidad del valor del proyecto finalizado incentiva el aplazamiento de los compromisos pendientes, mientras que la duración mínima de construcción provoca el efecto contrario.

### 3.9. LA FLEXIBILIDAD TECNOLÓGICA Y LAS OPCIONES OPERATIVAS.

Las opciones de ampliación y de reducción del volumen de recursos comprometidos en un determinado negocio no son los únicos derechos de decisión inherentes a su propiedad. En muchas ocasiones, los titulares del proyecto también gozan de cierta capacidad, limitada por restricciones de tipo técnico, para decidir acerca del propio funcionamiento de su explotación. Se trata de opciones de paralización del ritmo de las operaciones de los proyectos de inversión, de opciones de aceleración y ralentización de la actividad de los mismos, de opciones de intercambio de los productos finales a producir o distribuir y de opciones de intercambio de los factores empleados en el proceso producido, que inciden sobre la flexibilidad de la inversiones empresariales y, por tanto, sobre su valor y que (al igual que las opciones hasta aquí consideradas) pueden ser analizadas a partir de los modelos de valoración de opciones con las adecuaciones necesarias.

En los últimos años, la flexibilidad se ha convertido en el caballo de batalla de un gran número de industrias que, empujadas por la globalización, los avances tecnológicos de la microinformática, las comunicaciones y la automática y la diversidad de complejos sistemas productivos sobre los que descansan sus ventajas competitivas. Flexibilidad significa capacidad de cambio rápido y económico. El cambio puede referirse a las materias primas utilizadas en el proceso productivo, a los productos finales elaborados o a las características de éstos, al ritmo de fabricación, o incluso a la localización de las actividades productivas.

No obstante, la adquisición del nivel eficiente de flexibilidad constituye una de las más complejas decisiones de inversión. A partir de la rápida evolución y difusión de las innovaciones tecnológicas, la empresa inversora ha de analizar el tamaño óptimo del proyecto así como el nivel de eficacia que le permite satisfacer las necesidades identificadas al tiempo que minimiza el costo de obsolescencia.

Frente a la tecnología de fabricación en masa, los sistemas flexibles de producción permiten a la empresa adaptar un único producto a la diversidad de necesidades de sus clientes, además de facilitar y economizar el reemplazo o la transición de los bienes y servicios ofrecidos por la empresa. Los sistemas de producción flexible proporcionan a la empresa la posibilidad (la opción) de elaborar simultáneamente un amplio abanico de modelos derivados de un mismo producto (*flexibilidad horizontal*) y reemplazar sucesivamente la oferta de la empresa por la de futuras generaciones sustitutivas (*flexibilidad vertical*) de manera más económica que las tradicionales

estructuras de producción en masa. La flexibilidad de la tecnología depende del alcance y costo del cambio. Cuanto mayor sea el abanico de productos susceptibles de fabricación y menor sea el costo de sustitución mayor será la flexibilidad del sistema y viceversa.

Entre las ventajas de la flexibilidad tecnológica y de la organización de la producción a ella asociada, y aparte del menor costo de sustitución de la salida se destaca la rapidez de adaptación de la empresa a cambios en la demanda objetivo; la reducción de los niveles, y por tanto también de los costos, inventarios y mano de obra directa; el incremento de los estándares de calidad y consiguiente ahorro en el control, garantía y reparación de defectos; y la mayor satisfacción de la demanda que dispone de una oferta más variada de productos cualitativamente mejores. Adicionalmente, todos estos factores favorecen la fidelidad de la clientela, reduciendo así la variabilidad de la renta generada por estas inversiones y como consecuencia también su correspondiente costo de financiamiento. Entre las desventajas, el elevado desembolso requerido por la instalación de este tipo de tecnología y sus mayores costos unitarios de producción en relación con sistemas menos flexibles, se manifiestan como las más relevantes.

Entre todas las alternativas de inversión disponibles para la empresa, e identificado el conjunto de derechos que cada una de ellas proporciona, el nivel óptimo de flexibilidad será el que corresponda al proyecto asociado a la cartera de derechos de mayor valor, el cual vendrá influido por la diversidad y evolución de las necesidades del mercado, por la magnitud de los distintos segmentos y por el contexto competitivo en el que la empresa desarrolla su actividad.

### **Valor de Opción de Paralización y Reactivación de la Actividad del Proyecto**

En el análisis hasta aquí presentado se suponía que, ejercida la opción de inversión, el proyecto generaba la corriente de flujos de efectivo que se desprende del completo aprovechamiento de su capacidad. Este supuesto desentona sin embargo con algunas prácticas empresariales (especialmente en sectores como el constructor, en la industria minera o en las explotaciones agrícolas, entre otros) que delatan la frecuente modificación del estado operativo de los proyectos de inversión. Contrasta asimismo con uno de los postulados elementales de la teoría macroeconómica, según el cual, las unidades productivas desarrollan la actividad transformadora de entradas en salidas que las caracteriza, mientras los ingresos operativos superan los gastos variables derivados de su funcionamiento, paralizando la producción en caso contrario, es decir, cuando los ingresos no lleguen a cubrir los gastos variables. Este enunciado, junto con la evidencia empírica

referida, son suficientes para invalidar los modelos clásicos de valoración de inversiones. La posibilidad de alterar el ritmo de producción para reducir las pérdidas eventuales e incrementar los beneficios potenciales constituye un nuevo derecho, que como los contemplados anteriormente, distorsiona la simetría de los resultados en la que aquéllos se basan.

A lo largo de la vida útil de la inversiones empresariales, los flujos de efectivo generados, y por tanto también su valor, dependen de la evolución de una serie de variables externas, tales como el precio del producto o servicio ofertado, los costos y productividades de los factores o la demanda del mercado, que escapan al control de la dirección de la empresa. Sin embargo, en cada momento y en función del estado de éstas, la dirección de la empresa puede modificar el ritmo de sus actividades con el fin de limitar los efectos derivados de aquellos valores y amplificar los efectos positivos que pudieran ser aprovechados.

Esta capacidad directiva se manifiesta en un conjunto de valiosos derechos, conocidos como opciones operativas, que facultan a los gestores de la empresa a intensificar, atenuar o paralizar las actividades del negocio según crean conveniente. Si los responsables de la gestión de la empresa responden de forma eficiente a la evolución de las variables determinantes de los flujos financieros generados por los distintos proyectos, entonces el valor de las inversiones puede ser estimado a partir del futuro comportamiento del estado de las variables clave y del conjunto de derechos asociados a la propiedad de los activos.

*McDonald y Siegel* deducen el valor de un proyecto empresarial que permite a sus propietarios decidir en cada instante temporal sobre la conveniencia de su explotación. La inversión es interpretada como una cartera de opciones de fabricación que vencen de forma sucesiva y continua durante la vida del proyecto, y el valor de la cartera es obtenido como la suma de cada uno de los valores presentes de las opciones secuenciales:

$$V_t = \int_0^T c_t(u) du$$

donde  $t \equiv$  momento actual,  $c_t(u) \equiv$  valor en  $t$  de la opción de producir en  $u$  y  $T \equiv$  final de la vida económica del proyecto

Suponiendo que la inversión permite producir una unidad de salida por unidad de tiempo  $u$ , y que el precio del producto final,  $S_u$ , sigue un proceso geométrico browniano de parámetros  $\alpha$  y

$\sigma$ s; la opción de producción es definida de forma análoga a una opción europea de compra cuyo resultado en el momento de vencimiento viene expresado por la siguiente igualdad:

$$c_u = \max[0, (S_u - I_u)] = \begin{cases} 0 & \text{si no produce} \\ (S_u - I_u) & \text{si decide producir} \end{cases}$$

siendo  $S_u \equiv$  precio de la salida en  $u$  y  $I_u \equiv$  costo variable que incorpora una unidad de unidad

La consideración de la opción de paralización, aparte de mejorar la estimación del valor del proyecto de inversión con respecto al obtenido a partir de mejorar la estimación de los cálculos convencionales, permite avanzar en la comprensión de las relaciones entre el proyecto y las variables externas determinantes. Los principales resultados que *McDonald* y *Siegel* deducen del estudio de la opción de paralización son los siguientes:

1. El valor de una inversión, que de forma continuada, permite decidir sobre la conveniencia de su explotación es superior al de la otra idéntica que carezca de la ventaja de eludir las posibles pérdidas futuras no produciendo.
2. En general, a medida que aumenta el plazo temporal hasta la fecha de ejercicio de la opción de producción disminuye su valor actual, aunque en los primeros compases de dicho crecimiento la relación puede ser inversa.
3. El efecto del incremento de la volatilidad del precio de la salida es mayor cuando este último precio se encuentre escasamente o negativamente correlacionado con el mercado y nulo, o incluso negativo, en caso contrario
4. Por último, cuando tanto el precio del producto como su costo operativo unitario evolucionan de forma estocástica en el tiempo, el incremento de la correlación entre ambos disminuye el valor actual de la correspondiente opción de producción.

En lugar de formular el funcionamiento de la empresa como una sucesión continua de decisiones sobre el ejercicio o no ejercicio de las opciones de producción, *Pindyck* interpreta el resultado de los proyectos de inversión como una corriente continuada de flujos de efectivo a la que da lugar la elección del estado operativo óptimo en cada momento y en función del precio del producto final.

De lo expresado antes puede decirse lo siguiente: el valor del proyecto va a ser positivo siempre y cuando el precio del activo subyacente sea mayor que cero y su varianza sea positiva, debido a que, aún cuando se encuentre paralizado, siempre existe la posibilidad de que el precio aumente por encima del costo variable y se reinicien las operaciones. Además, debido a que los futuros resultados de la inversión se hallan inferiormente acotados por cero, la volatilidad del precio del producto final afecta de manera positiva al valor del proyecto. Como en ocasiones anteriores, los límites de esta relación se encuentran definidos por el riesgo sistemático de la variable de estado.

De manera similar, aunque desde un contexto de indiferencia ante el riesgo, *Episcopos* determina el valor del proyecto de duración ilimitada cuya propiedad incorpora el derecho a paralizar su explotación sin ningún tipo de costos adicionales y suponiendo que el precio del producto final sigue un proceso estocástico de reversión a la media.

### **Los Costos de Reinicio y de Mantenimiento Asociados a la Opción de Paralización.**

El modelo arriba presentado suponía que los procesos productivos podían ser paralizados y reiniciados sin ningún tipo de costo o restricción. Normalmente sin embargo, este tipo de decisiones conlleva esfuerzos adicionales nada desdeñables cuya consideración mejora susceptiblemente la explicación del comportamiento empresarial. Entre los costos asociados con la paralización de las actividades es posible señalar los de desgaste de las instalaciones y maquinaria, las indemnizaciones laborales o las pérdidas de liquidación. Por su parte, los gastos de formación y entrenamiento del personal, de puesta a punto de maquinaria e instalaciones y la inversión necesaria en el restablecimiento de las relaciones comerciales, forman parte de los gastos exigidos por el reinicio de las operaciones. Obviamente, los costos de paralización y reinicio suelen ser menores que los de primer establecimiento y retiro de inversión, y su tamaño varía sustancialmente de unos sectores a otros.

En este contexto *Schwartz* analiza los derechos de decisión asociados a la explotación de una mina de cobre cuando los cambios en la política operativa no pueden efectuarse sin incurrir en una serie de costos. Los gestores de la instalación cuentan con la posibilidad de paralizar las operaciones, de reiniciarlas en el futuro o incluso de abandonar la inversión sin llegar a agotar la totalidad de las reservas. A partir de técnicas de control estocástico y de argumentos de arbitraje, *Brennan* y *Schwartz* plantean un modelo general de valoración del conjunto de derechos que se

hace depender del precio del cobre, del ritmo de extracción, del mineral remanente, del tiempo y del estado operativo de la mina. La maximización del valor de mercado del proyecto y las relaciones de equilibrio entre este último y el precio del mineral determinan el ritmo operativo óptimo que en cada momento ha de seguir la dirección de la empresa.

Suponiendo que el ritmo de extracción es constante, *Brennan* y *Schwartz* muestran que la serie de tiempo de precios críticos, que marcan el funcionamiento de la planta, dependen del costo de inicio de las operaciones, del costo de paralización, de los costos fijos de mantenimiento, del volumen de reservas remante y de la evolución estocástica del propio precio del recurso. La naturaleza estocástica del precio al contado del cobre hace que también lo sea el riesgo del proyecto y la rentabilidad exigida por los propietarios de la inversión. El estudio establece que cuanto mayor sea el volumen de las reservas susceptibles de extracción, menores resultan los precios críticos que determinan el funcionamiento de la planta mientras que cuanto mayor sea el precio al contado del recurso, menor es el riesgo del proyecto y también el valor de las opciones operativas a él asociadas. El valor de los derechos de control de las operaciones responde a la capacidad que otorgan a la dirección del proyecto para adaptar las actividades productivas a los futuros acontecimientos, valor que incrementa a medida que éstos se vuelven más impredecibles.

Con un ejemplo numérico *Brennan* y *Schwartz* advierten del alcance del derecho a paralizar el funcionamiento del proyecto. Los datos resultantes de la simulación presentada por los citados autores revelan que el valor de esta opción puede alcanzar más del 15 por ciento del valor del proyecto. Además, el valor de la flexibilidad operativa y por tanto, también del proyecto incrementan a medida que los costos de ajuste disminuyen.

Los *costos* de ajuste también influyen sobre los valores críticos de ejercicio. Cuanto mayor es la importancia de los primeros, más costoso es el ejercicio de las opciones y, por tanto, mayor la separación entre el valor crítico de paralización y de reinicio de las operaciones. Los costos asociados al ejercicio de las opciones operativas permiten explicar los procesos de histéresis observados en la realidad empresarial. Según *Pindyck*, el modelo de *Brennan* y *Schwartz* esclarece el hecho de que las minas de cobre que fueron abiertas en los años 70 permaneciesen activas en la década siguiente aún cuando los precios del metal rozaban niveles desconocidos desde la gran depresión. Esta explicación puede extenderse a la mayor parte de las industrias y a un buen número de compromisos y decisiones.

### **Otras Opciones Operativas: La Modificación del Ritmo de las Operaciones, Intercambio de Factores e Intercambio de Productos.**

Las opciones de paralización y de reactivación de la actividad del proyecto representan tan sólo dos manifestaciones específicas de la flexibilidad asociada a las inversiones empresariales. Otros ejemplos de flexibilidad vienen definidos por la posibilidad de incrementar o ralentizar el ritmo de las operaciones, la de modificar la combinación de factores empleados en la elaboración de un determinado producto o la de intercambiar los recursos utilizados o intercambiar la combinación de productos finales objeto de elaboración o distribución del proyecto.

*Kulatilaka* se plantea un modelo general de programación dinámica que permite el análisis de cualquier tipo de flexibilidad asociada a las oportunidades empresariales de inversión. La base del modelo viene definida por la propia caracterización de la inversión que es identificada con la corriente de beneficios que genera durante su vida económica y que depende de manera simultánea de la evolución de una serie de factores externos, cuyo comportamiento escapa al ámbito de control de la dirección de la empresa, y de las decisiones que con respecto al estado del proyecto adopte aquélla.

La evolución de los factores externos de influencia es asociado con la correspondiente de una variable de estado,  $\theta$ , de comportamiento estocástico, mientras que los resultados derivados del ejercicio de los derechos de decisión vinculados a la inversión son identificados con los “modos operativos” del proyecto, que van desde el aplazamiento hasta el abandono, pasando por la inversión en curso, la paralización de las actividades, su reanudación, el funcionamiento a partir de un conjunto específico u otro de factores o la fabricación de diferentes combinaciones de productos finales.

*Kulatilaka* aplica dicho modelo teórico en la valoración de la flexibilidad operativa derivada de dos opciones de intercambio de factores de orígenes diferentes. En el primero de los citados trabajos se analiza la flexibilidad asociada a una tecnología de producción que indistintamente puede alimentarse de petróleo o de gas natural; mientras que en el segundo, se evalúa la flexibilidad asociada a una red multinacional cuya simultánea localización de sus instalaciones en dos países diferentes posibilita la coordinación de sus actividades productivas. Se constata, tanto en un caso como en el otro, la significación del valor del derecho de elección. Además, y como era de esperar, la asimetría provocada por la capacidad del intercambio de factores hace que el incremento de la

volatilidad asociada a los costos de los factores eleve el valor medio de los resultados positivos mientras que permanecen constantes los negativos; y, en consecuencia, que el valor de la opción y el nivel de incertidumbre se manifiesten positivamente relacionados. El caso evaluado por *Kulatilaka* evidencia también que el valor de la flexibilidad disminuye con el aumento de los costos de ajuste así como que la banda de histéresis incrementa tanto con la volatilidad como con los costos de ajuste.

Los precitados trabajos ponen de manifiesto que la opción de intercambio de factores permite, no sólo elegir entre los precios de los distintos factores el de menor cuantía, sino también – y fundamentalmente- limitar la volatilidad de los costos productivos. Cada una de las aplicaciones representan además ejemplos paradigmáticos de diferentes opciones de intercambio de factores: una relativa al empleo de factores sustitutos y que suele proceder de características técnicas del sistema productivo; y la otra relacionada con la utilización de distintas fuentes de suministro y que tiene su origen en la amplitud del abanico de proveedores de un mismo factor disponibles en el mercado.

La utilidad final de las opciones de intercambio dependerá de la magnitud de los costos derivados del ajuste y de la rapidez de la sustitución; de modo que (al igual que lo referido con respecto al resto de opciones reales) existirá un rango de valores de la variable o variables de estado para los que el reemplazo no maximiza el valor total del proyecto aún cuando aquél pudiera parecer beneficioso a corto plazo. Esta banda de inercia o histéresis permite interpretar comportamientos empresariales en otro caso ininteligibles, como la aparentemente ineficiente lentitud de las empresas que intervienen en el comercio internacional en la sustitución de sus proveedores frente a modificaciones en los tipos de cambio, que es provocada por los elevados costos que acarrea el cambio o la elevada probabilidad de reversión.

El modelo valoración propuesto por *Kulatilaka* y los resultados obtenidos sobre la opción de intercambio de factores puede extenderse directamente al análisis de la correspondiente opción definida sobre los productos finales de la empresa. La significación del valor de la opción de intercambio de factores viene avalada por el creciente interés empresarial en sistemas de producción flexibles preparados para producir, a partir de mínimas adaptaciones, diferentes productos finales en función de cuál sea la evolución de la demanda y de los precios de los mismos.

*Triantis* y *Odre* proponen, por su parte, la aplicación de los modelos de valoración de opciones en el análisis de los sistemas de producción flexibles que permiten a la dirección de la

empresa controlar el tipo y la cantidad del producto elaborado. La definición del programa de funcionamiento de la inversión empresarial como una sucesión independiente de opciones europeas cuyo ejercicio determina la tasa de fabricación de cada uno de los posibles productos a elaborar, constituye la base sobre la que se asienta la valoración de aquélla como la suma de los correspondientes valores actuales del conjunto de opciones. La supuesta inexistencia de costos de ajuste y la concreción de la flexibilidad tecnológica en la posibilidad de repartir periódicamente la capacidad productiva total en la fabricación de dos productos finales diferentes de margen variable aleatorio, facilitan la formulación de la solución analítica que gobierna el valor de la citada inversión. La simulación numérica efectuada sobre el citado modelo coincide en sus resultados con los comentados en los trabajos citados anteriormente y añade a éstos la evidencia sobre la relación negativa existente entre el valor de la flexibilidad y el grado de correlación de los beneficios asociados a cada uno de los productos finales.

### 3.10. EL VALOR PRESENTE NETO EXTENDIDO

La consideración del conjunto de opciones reales analizadas a lo largo de este capítulo conduce a *Trigeorgis* (1986) a definir el VPN extendido (ampliado, expandido o estratégico) de los proyectos de inversión empresarial como la suma del valor presente neto de los flujos de efectivo directamente generados por el proyecto más la suma del valor presente del conjunto de opciones reales asociadas a la propiedad de aquélla.

$$VPN\ EXTENDIDO = VPN\ (flujos\ futuros\ de\ efectivo) + VP\ (opciones\ reales) \dots (3.6)$$

Dejando a un lado los problemas de interdependencia del valor de las opciones reales, la expresión (3.6) proporciona, más que una fórmula de valoración, un nuevo marco conceptual en el que el valor de la inversión viene determinado no sólo por los flujos de efectivo que se derivan de la decisión inicial de aceptación de la misma, sino también de los derechos de decisión futura que proporciona a la empresa.

El primero de los sumandos de la ecuación (3.6) coincide con el VPN convencional, también llamado VPN estático, del proyecto que representa el valor incremental que la incorporación de éste en el seno de la empresa provoca sobre el valor total de sus inversiones, siempre y cuando, el proyecto sea mantenido en estado idéntico al inicial hasta el momento de finalización de su duración esperada. El VPN convencional o estático asume, por tanto, que los

directivos y propietarios de la empresa, una vez adoptada la decisión de inversión, se conforman pasivamente con cualquier resultado, limitándose a observar las desviaciones con respecto a las previsiones iniciales. Obviamente, este supuesto resulta del todo irreal en lo que se refiere a la gestión de las inversiones empresariales. A medida que nueva información va llegando a la empresa, y aunque ésta nunca llegue a ser suficiente para resolver la continua incertidumbre que caracteriza cualquier actividad económica, los administradores de la empresa actuarán intentando potenciar los resultados positivos y atenuar los negativos de forma que el valor del proyecto en cada momento sea máximo.

El VPN extendido se diferencia, por tanto del VPN estático en la consideración de las posibilidades de actuación de la empresa sobre el estado inicial del proyecto a lo largo de su duración efectiva, que son concretadas en opciones reales y valoradas a partir de su aludido parentesco con los derivados financieros. El valor presente de las opciones reales, segundo sumando de la ecuación (3.6), recoge el valor adicional que las oportunidades de crecimiento y la flexibilidad del proyecto aportan a la empresa. Cuando la inversión carezca de toda flexibilidad e implicaciones estratégicas, es decir, cuando consista en una serie secuencial de flujos insensible a las decisiones adoptadas en la empresa, el valor de las opciones reales será nulo y el VPN extendido y estático coincidirán. Por el contrario, cuando la flexibilidad u opciones de inversión destaquen por su relevancia, el valor positivo de las opciones reales puede justificar la aceptación de proyectos con VPN estático negativo, que serían no obstante rechazadas por el análisis financiero tradicional.

El cálculo del VPN extendido permite conocer no sólo el valor de mercado de las inversiones a partir del conjunto de derechos a ellas asociados, sino también y al mismo tiempo el momento óptimo de ejercicio de éstos últimos. Esta fecha viene determinada por el valor crítico del activo subyacente que maximiza el valor incremental aportado por la inversión al precio de mercado de la empresa, es decir, el que maximiza el valor conjunto de la renta futura propiedad de la empresa y del resto de derechos a ella inherentes.

Adicionalmente, el contexto dinámico de análisis que se deriva de la consideración de las opciones reales ofrece una explicación lógica a varios de los aspectos relacionados con el comportamiento inversor de las empresas en la práctica, incomprensibles desde una perspectiva estática. El hecho de que las empresas no inviertan inmediatamente en aquellas oportunidades con valor presente neto positivo, y tampoco abandonen otras inversiones ruinosas, parecía responder a conductas ineficientes que la economía industrial justificaba en base a la estructura del sector: las

barreras a la movilidad que rodean a los distintos negocios empresariales dificultan la entrada y salida fluida de empresas y son la causa de los patentes retrasos en la adopción de tales decisiones. El enfoque de opciones interpreta dicho fenómeno como la respuesta racional de aquellas empresas que reconocen la vigencia de los derechos de inversión y abandono que poseen y la volatilidad e impredecibilidad de los acontecimientos futuros.

### **3.11. EJEMPLOS DE OPCIONES REALES**

A continuación presentamos algunos ejemplos que ilustran la utilidad de las opciones reales:

#### **3.11.1. CÓMO LAS COMPAÑÍAS PETROLERAS UTILIZAN LA VALUACIÓN DE LAS OPCIONES REALES**

A mediados de los años noventa, en la Dirección Ejecutiva de Chevron Texaco las opiniones estaban divididas acerca de qué hacer con una importante concesión situada en un país en desarrollo. La concesión contenía numerosos descubrimientos de petróleo existentes y muchos otros descubrimientos importantes sin desarrollar. Se encontraba en una etapa de exploración inicial. Parte de la dirección de la compañía quería vender el activo, usando el producto de la venta para proyectos más eficaces respecto del capital invertido, mientras que otros integrantes consideraban que este activo podía conducir a otras oportunidades de operaciones destinadas a aumentar la rentabilidad y al desarrollo de relaciones valiosas en la región. La dirección utilizó la técnica de opciones reales para decidir qué acción sería mejor para la empresa. Los resultados de la técnica empleada fundamentaron parcialmente ambos puntos de vista. Después de incluir los valores de opciones clave, las opciones reales indicaban que el activo era mucho menos valioso que lo sugerido por el método del Valor Presente (VP). No obstante, había suficiente valor como para convencer a Texaco de que conservara el activo hasta resolver algunas de las incertidumbres presentes, pero que estuviera preparada para venderlo si el precio era bueno. Por otra parte, la técnica de opciones reales posibilitó una reestructuración importante del plan base. Texaco creía que con esta técnica ayudaría a sus directivos a lograr un mejor conocimiento estratégico de la unidad de explotación.

Un análisis reciente de una transacción que tuvo lugar a principios de la década de los noventa, y que contó con Amoco (ahora BP) y la compañía independiente de petróleo y gas Apache

Corporation como protagonistas, demostró cómo el análisis de las opciones reales puede revelar valores que no se ponen de manifiesto cuando se utiliza el análisis convencional del Valor Presente. En 1991, luego de una revisión estratégica, Amoco decidió deshacerse de algunas propiedades marginales de petróleo y gas ubicada en EE. UU. Formó una compañía nueva con el nombre de MW Petroleum Co. como titular de sus participaciones en 9,500 pozos distribuidos a través de más de 300 campos petroleros. Apache manifestó su interés en la obtención de las propiedades, pero la invasión de Kuwait por parte de Irak en la primavera de ese año había llevado los precios del petróleo a niveles históricos, aumentando al mismo tiempo la incertidumbre asociada con los mismos.

Amoco y Apache coincidían respecto de la mayor parte de las disposiciones pertinentes a la transacción de MW Petroleum, pero no en lo referente a las proyecciones del precio del petróleo. La discrepancia era de aproximadamente un 10%. Las dos compañías llegaron a un punto de convergencia al acordar compartir el riesgo representado por los futuros movimientos del precio del petróleo. Amoco garantizó a Apache que si los precios del petróleo caían por debajo de un nivel de precios previamente acordado, durante los dos primeros años posteriores a la venta, le pagaría una compensación. Por su parte, Apache le pagaría a Amoco si los precios del petróleo o del gas superaban un nivel de precios compartidos estipulado. La cartera de MW Petroleum incluía 19.2 millones de m<sup>3</sup> de petróleo crudo equivalente (MMm<sup>3</sup>pce)[121MMbpce] de reservas comprobadas de petróleo y gas, más 22.7 MMm<sup>3</sup>pce [143MMbpce] de reservas probables y posibles.

Esta transacción fue reexaminada por analistas independientes en 2002. Los analistas compararon una valuación de VP determinística de los activos de MW Petroleum con una valuación de las opciones reales. El valor obtenido a través del VP fue de US\$359.7 millones siendo US\$80 millones menos que el resultado obtenido a través de opciones reales de US\$440.4 millones, lo que indica un valor adicional en los activos no incluido en el análisis del VP. En comparación, el precio de compra acordado por Amoco y Apache fue de US\$515 millones además de 2 millones de acciones de la compañía. Ambos métodos arrojaron valores inferiores al precio real, pero la valuación de opciones reales se aproximó mucho más que la valuación del VP.

### **3.11.2. RECUPERACIÓN DE UNA INVERSIÓN**

Oberon, operador del campo Charon, tiene dudas con respecto a la futura viabilidad económica del campo petrolero. Para protegerse frente a un resultado negativo, la compañía ha

entablado negociaciones con Thalassa Energy, compañía empeñada en agregar los activos del Mar de Sargasso a su cartera. Thalassa ofrece a Oberon, por una prima inicial de US\$45 millones, una garantía para adquirir el campo Charon y reintegrar a Oberon todos los costos de desarrollo incurridos hasta la fecha de ejercicio de la opción, si Oberon opta por ejercer la opción. Oberon realiza una valuación de las opciones reales (OR) para determinar si la flexibilidad para resarcirse de los gastos de desarrollo vale el precio pedido por Thalassa.

La técnica de las OR consiste en cuatro incrementos de tiempo: identificación del activo subyacente, determinación de su volatilidad, construcción de los reticulados e interpretación del valor de la opción.

Oberon identifica el activo subyacente como el Valor Presente Neto (VPN) del proyecto de Charon. Este VPN exhibe una distribución de probabilidad lognormal, de manera que la volatilidad del activo subyacente se basa en el logaritmo de los flujos de fondos futuros. La simulación de Monte Carlo efectuada sobre el modelo de VPN indica que la volatilidad anual implícita es del 66.41%, incluyendo las incertidumbres tanto privadas como públicas.

Los ingenieros construyen un reticulado del activo subyacente con un incremento de tiempo de 0.6 años utilizando un reticulado binomial de cinco periodos. El valor del activo,  $S$ , o el VPN de Oberon para el proyecto sin ninguna flexibilidad de parte del potencial de recuperación asciende a US\$236.3 millones. La tasa libre de riesgo para el período de 3 años en consideración es del 5% anual. Los reticulados de valuación y de decisión son idénticos, en lo que respecta forma, al reticulado del activo subyacente.

Estos reticulados permiten a Oberon interpretar el valor de la opción. La flexibilidad adicional, provista por el contrato de Thalassa, incrementa el VPN de Cahron a US\$285.5 millones. Éste es el valor que un mercado libre racional, sin fricciones, asignaría al proyecto, dada la misma información. Son US\$49.3 millones más que el VPN sin flexibilidad; simplemente gracias a la presencia de la opción de rescate.

La dirección de Oberon debería aceptar una oferta para proporcionar esta flexibilidad por US\$45 millones ya que aparentemente Thalassa subvaluó la opción en US\$4.3 millones; es decir, la diferencia entre el valor de la opción y el precio de la prima. Esta subvaloración aparente indica que Thalassa tiene una percepción del riesgo y de la incertidumbre diferente a la de Oberon.

Opción real para recuperación. El reticulado del activo subyacente comienza con el valor presente neto del proyecto en el nodo izquierdo y los valores potenciales futuros de los proyectos a la derecha. Los parámetros de multiplicación  $u$  y  $d$ , se calculan a partir de los datos de entrada de la volatilidad,  $\sigma$ , y de la magnitud del incremento de tiempo,  $\Delta t$ . El valor de rescate se basa en la inversión hasta la fecha. El reticulado de valuación y de decisión tiene la misma forma que el reticulado del subyacente pero se construye de derecha a izquierda. La última columna del reticulado de valuación se construye comparando el nodo equivalente del reticulado del subyacente con el valor de rescate del incremento de tiempo final. Si el valor de rescate es mayor, se ingresa esa cantidad y se registra la decisión de rescate. De lo contrario, el valor del nodo del reticulado del subyacente se utiliza para el nodo del reticulado de valuación y la decisión consiste en conservar la propiedad. El valor del nodo de la siguiente columna a la izquierda proviene de la regresión inversa a partir de los dos nodos adyacentes, como lo indica la figura. Ese valor implica la probabilidad neutral al riesgo,  $p$ , la tasa de interés libre de riesgo,  $r_f$  y la magnitud del incremento de tiempo,  $\Delta t$ .

Parámetros de Entrada	
$\sigma$	66.41%
$\Delta t$	0.6
$u$	1.67265076
$r$	0.05
$d$	0.59785343
$p$	0.40249551
$1-p$	0.59750449

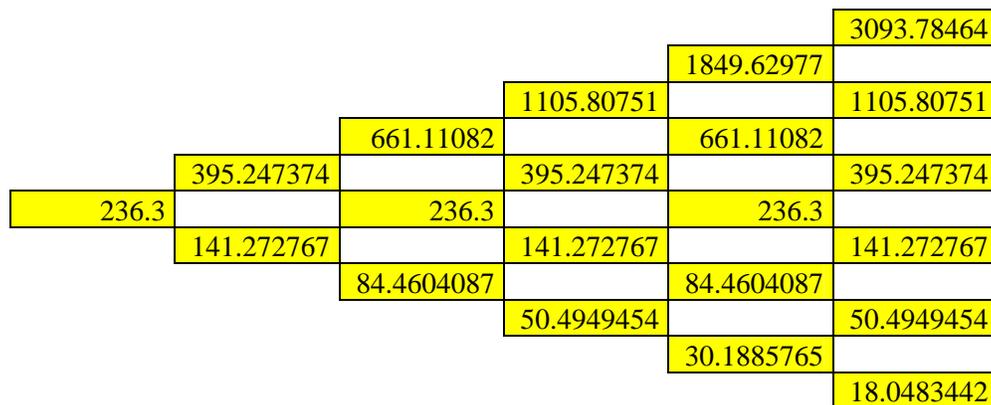


Fig 3.1. Reticulado del Activo Subyacente

Valor de rescate		
Periodo	Años	Valor millones de US\$
1	0.6	50
2	1.2	75
3	1.8	107.5
4	2.4	150
5	3	177.5

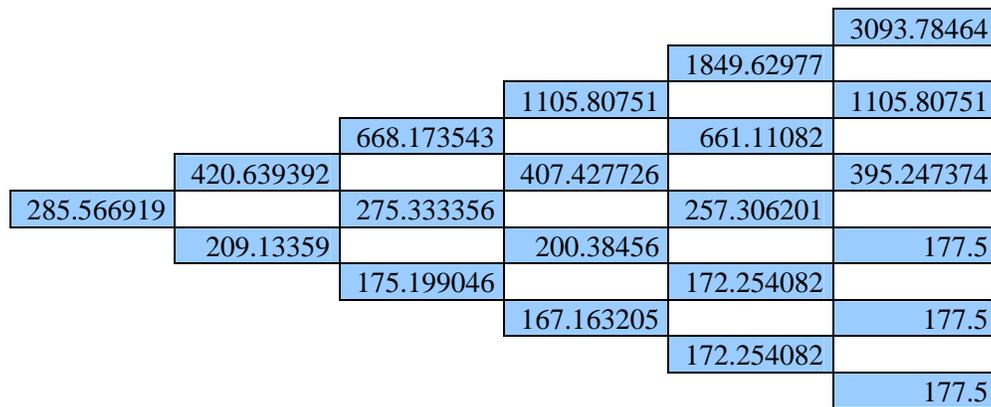
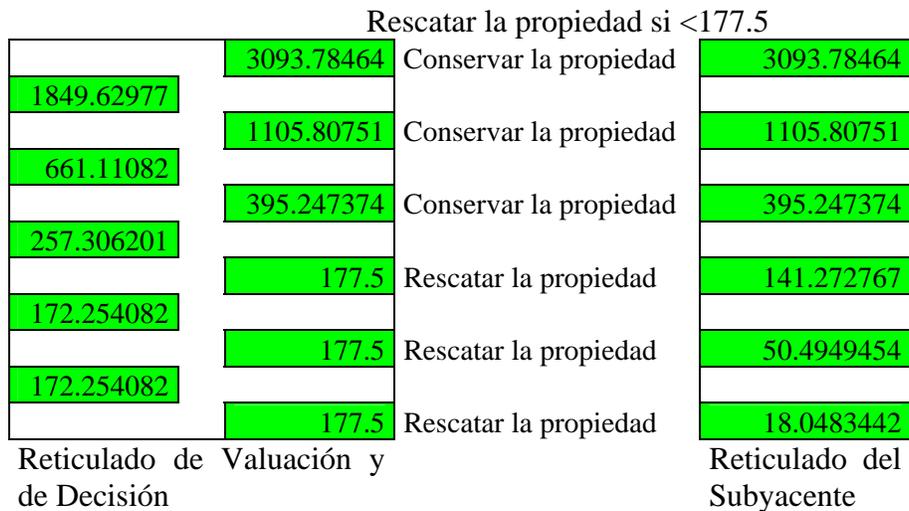


Fig 3.2. Reticulado de Valuación y de Decisión





## Capítulo 4: Catástrofes Naturales

## 4. CATÁSTROFES NATURALES

### 4.1. RETROSPECTIVA – PERSPECTIVA

Poco antes del fin de año de 2004 se produjo en el sur de Asia la más devastadora catástrofe natural de las últimas décadas. En el Océano Índico, delante de la costa oeste de Sumatra, un fuerte terremoto provocó olas sísmicas (tsunami) que destrozaron zonas costeras situadas a mucha distancia. Esta tragedia humana con más de 170.000 víctimas mortales ha afectado al mundo entero y lo ha sumido en una profunda consternación, impotencia y tristeza. Nos ha mostrado claramente y de forma dramática lo fuerte e imprevisible que es la naturaleza y lo urgentes que son las medidas de precaución a nivel mundial.

En 2004 predominaron, sin embargo, los eventos extremos atmosféricos o catástrofes meteorológicas, tanto por lo que al número de eventos como también a los daños económicos se refiere. El calentamiento global no solamente ocasiona que los eventos meteorológicos extraordinarios se acumulen e intensifiquen sino que surjan nuevos tipos de riesgos meteorológicos y, además, potenciales de siniestros mayores.

- Delante de la costa brasileña se formó por primera vez desde el comienzo de las observaciones un huracán – esta zona se consideraba hasta la fecha libre de huracanes.
- El huracán Alex se intensificó aproximadamente en el grado 40 de latitud norte, es decir, inusualmente fuera de los trópicos, llegando a ser un ciclón de categoría 3 en la escala de Saffir-Simpson. Normalmente, los ciclones tropicales se debilitan mucho en estas latitudes al norte e incluso se disuelven del todo.
- En el lapso de unas pocas semanas Florida se vio afectada por cuatro huracanes.
- Japón sufrió 10 tormentas tropicales, una cifra record que no se había alcanzado durante todo el siglo pasado.

### **Balance Siniestral**

En 2004, mucho más de 180,000 personas perdieron la vida en catástrofes naturales; se calcula que 170,000 personas eron víctimas de la catástrofe por el tsunami en el sur de Asia y se teme que los muertos superen la cifra de 250,000.

650 eventos con daños por fuerzas de la naturaleza es la cifra de las catástrofes naturales analizadas y documentadas, lo que corresponde a la media de los 10 últimos años. Los daños macroeconómicos se elevan a US\$145,000 millones (2003: US\$60,000 millones). Destacan sobre todo los devastadores huracanes en el Caribe y los EE. UU., así como el terremoto de Niigata, del 23 de octubre en Japón. Los siniestros asegurados se elevaron a US\$44,000 millones (año anterior: US\$15,000 millones).

### **Terremotos, Tsunamis, Erupciones Volcánicas**

De los 650 eventos analizados y registrados, 85 van a cuenta de los peligros geológicos (75 terremotos que produjeron daños; 10 erupciones volcánicas). Los daños macroeconómicos se elevan a US\$40,000 millones, los siniestros asegurados suponen US\$1,500 millones.

- El 23 de octubre de 2004 la prefectura de Niigata de la isla japonesa de Honshu se vio sacudida por un terremoto de la magnitud 6.6. El seísmo provocó más de mil corrimientos de tierra que arrasaron carreteras, vías de ferrocarril y puentes e incluso hicieron que descarrilase un tren de alta velocidad. Los daños macroeconómicos totales (particularmente los daños a instalaciones de infraestructura no aseguradas) ascendieron a casi US\$30,000 millones, los siniestros asegurados se cifran en aproximadamente US\$500 millones.
- Un seísmo de fuerza 9,0 en la escala de Richter (el tercero más fuerte de los últimos cien años) tuvo lugar el 26 de diciembre en el Océano Índico delante del litoral oeste de Sumatra. La corteza terrestre se desplazó hasta unos 20 metros a lo largo de aproximadamente mil kilómetros y provocó así un tsunami. Éste devastó las zonas costeras con una alta densidad de población de Sumatra, Tailandia, India del Sur y las Maldivas. Somalia, Kenia y Tanzania, en África oriental, también se vieron afectados

### **Tormentas**

Casi la mitad de los 650 eventos registrados se debe a tormentas. Los ciclones tropicales de mayor gravedad se originaron en el Atlántico y en el Pacífico Oeste.

- Los huracanes Charley, Frances, Iván y Jeanne que, uno tras otro, azotaron en unas pocas semanas el Caribe y alcanzaron Florida, batieron el récord de daños. La suma de los daños

macroeconómicos totalizó más de US\$60,000 millones. La industria aseguradora tuvo que asumir unos US\$30,000 millones. Iván fue uno de los huracanes más fuertes y devastadores desde que se realizan registros meteorológicos. Arrasó Grenada y las islas Caimán y, en su posterior trayectoria, causó graves destrozos en las plataformas petrolíferas del Golfo de México. Después llegó a Florida con velocidades de viento de 220 Km/h. Su balance: US\$11,500 millones de siniestros asegurados. El huracán Jeanne ocasionó precipitaciones de lluvia sin par, especialmente en Haití y la República Dominicana; 2,000 personas perecieron en las riadas y masas de lodo.

- Entre junio y octubre, 10 ciclones tropicales afectaron a Japón. Ya sólo los tifones Chaba, Songda y Tokage causaron un total de US\$14,000 millones de daños macroeconómicos; unos US\$7,000 millones de es la parte que asume el Seguro.
- En los últimos días de noviembre, casi cuando estaba finalizando la época de los tifones, la tormenta tropical Winnie azotó con lluvias torrenciales las Filipinas. Más de 750 personas perdieron la vida a causa de las riadas y las masas de lodo.
- Europa no se vio afectada por grandes tormentas de invierno y temporales. Sin embargo, algunos pequeños tornados en Alemania, Francia, Italia y Gran Bretaña pusieron a esta zona en alerta aunque causaron solo pocos daños.
- Los tornados que suelen causar grandes daños en los EE. UU., también tuvieron lugar este año. En mayo se produjo un frente de temporales con fuerte pedrisco y 85 tornados en el oeste de los EE. UU. El daño macroeconómico se eleva a más de US\$1,000 millones y los siniestros asegurados superan los US\$800 millones.

## **Inundaciones**

En 2004, casi una cuarta parte (150) de todos los daños r fuerzas de la naturaleza se debieron a inundaciones y riadas.

- Brasil padeció desde enero hasta mediados de febrero una de las catástrofes por inundaciones más graves de los últimos 15 años. En el norte y este del país, las fuertes precipitaciones de lluvia originaron graves inundaciones que destrozaron importantes instalaciones de infraestructura y causaron la muerte a más de 160 personas.
- En mayo, las precipitaciones record en Haití y la República Dominicana produjeron destrozos en grandes extensiones. 2,000 personas perdieron la vida en riadas y aludes de lodo.

- Bangladesh, India y Nepal sufrieron inundaciones monzónicas extremas entre junio y agosto. Amplias zonas quedaron sumergidas bajo el agua, en Bangladesh casi dos tercios del país. Más de 2,200 personas se ahogaron en las riadas y millones perdieron sus hogares. Se estima que el daño macroeconómico se eleva a más de US\$5,000 millones.
- Las fuertes lluvias de junio a septiembre hicieron que se desbordasen grandes ríos en China. Cientos de miles de casas quedaron destruidas, 1,000 personas se ahogaron; el daño macroeconómico ascendió a casi US\$8,000 millones.

### **Perspectivas**

2004 fue el cuarto año más cálido desde que existen registros sobre las temperaturas (después de 1998, 2002 y 2003). Nueve de los últimos diez años (excepción: 1996) se sitúan entre los diez más cálidos desde 1861. El cambio del clima global es una realidad. Todos recordamos el extraordinario verano canicular de 2003 en Europa, pero no será ninguna excepción: Los eventos meteorológicos extremos se podrían convertir en normalidad.

Aunque las negociaciones de la 10a Cumbre del Clima que tuvo lugar en diciembre de 2004 en Buenos Aires transcurrieron de forma lenta, el Protocolo de Kioto es ahora ya derecho internacional vigente. Fue muy positivo el hecho de que India y China se comprometieran a utilizar en mayor medida energías renovables. Esto significa que la protección del clima avanza, aunque sea solamente paso a paso.

## **4.2. ESTADÍSTICA DE LAS CATÁSTROFES NATURALES AÑO 2004**

### **Eventos Siniestros y Víctimas Mortales**

650 eventos con daños por fuerzas de la naturaleza es la cifra de las catástrofes naturales analizadas y documentadas, lo que corresponde a la media de los 10 últimos años. En total predominaron las catástrofes del clima, sin embargo la catástrofe más devastadora en 2004 la desencadenó un terremoto en el Océano Índico. Un tsunami, cuyas olas destruyeron las zonas costeras que se encontraban incluso a larga distancia, se cobró la vida de más de 170.000 personas, más de 100.000 se consideran como desaparecidas.

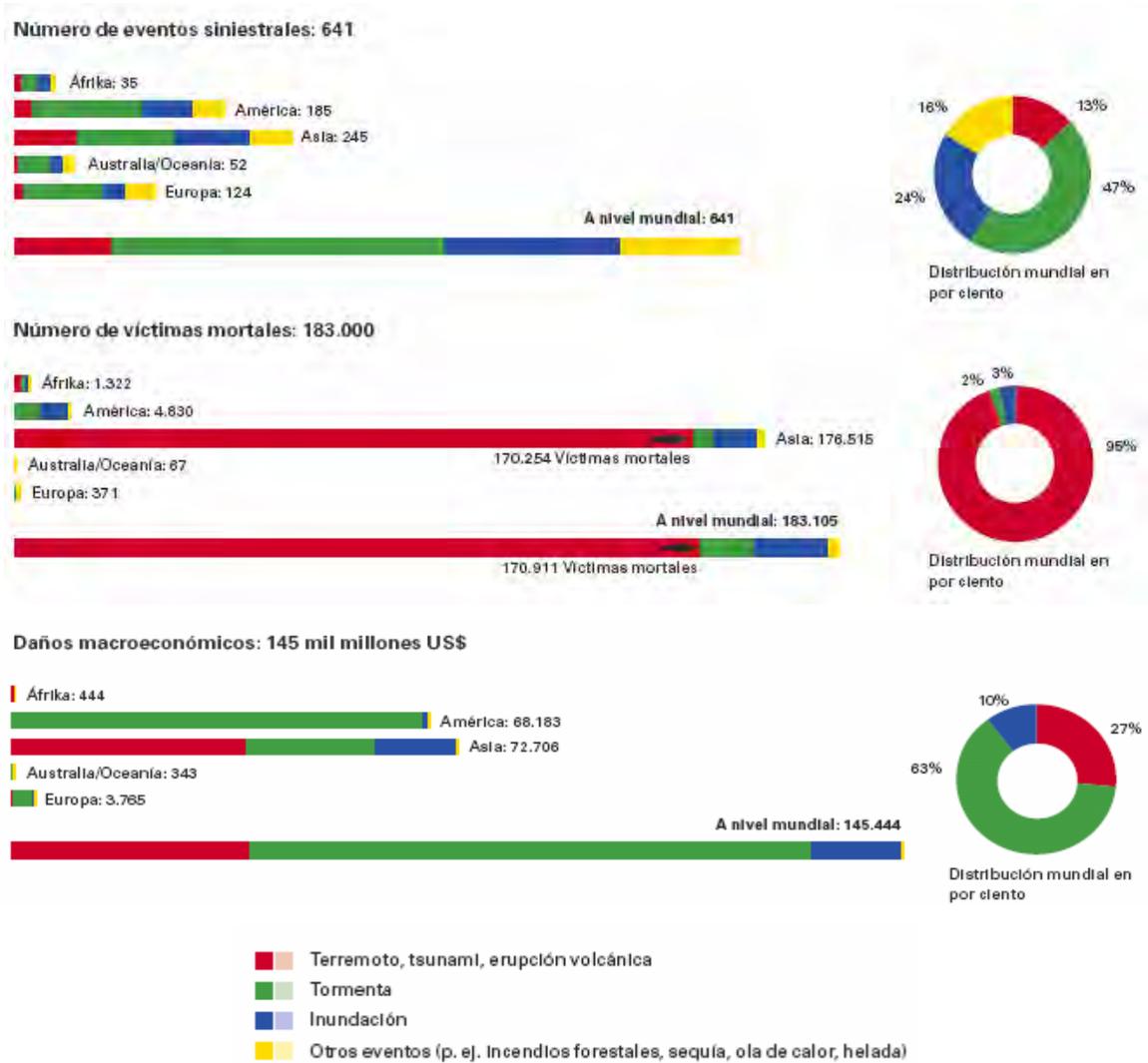


Fig 4.1. a) Cuantificación de los siniestros de 2004

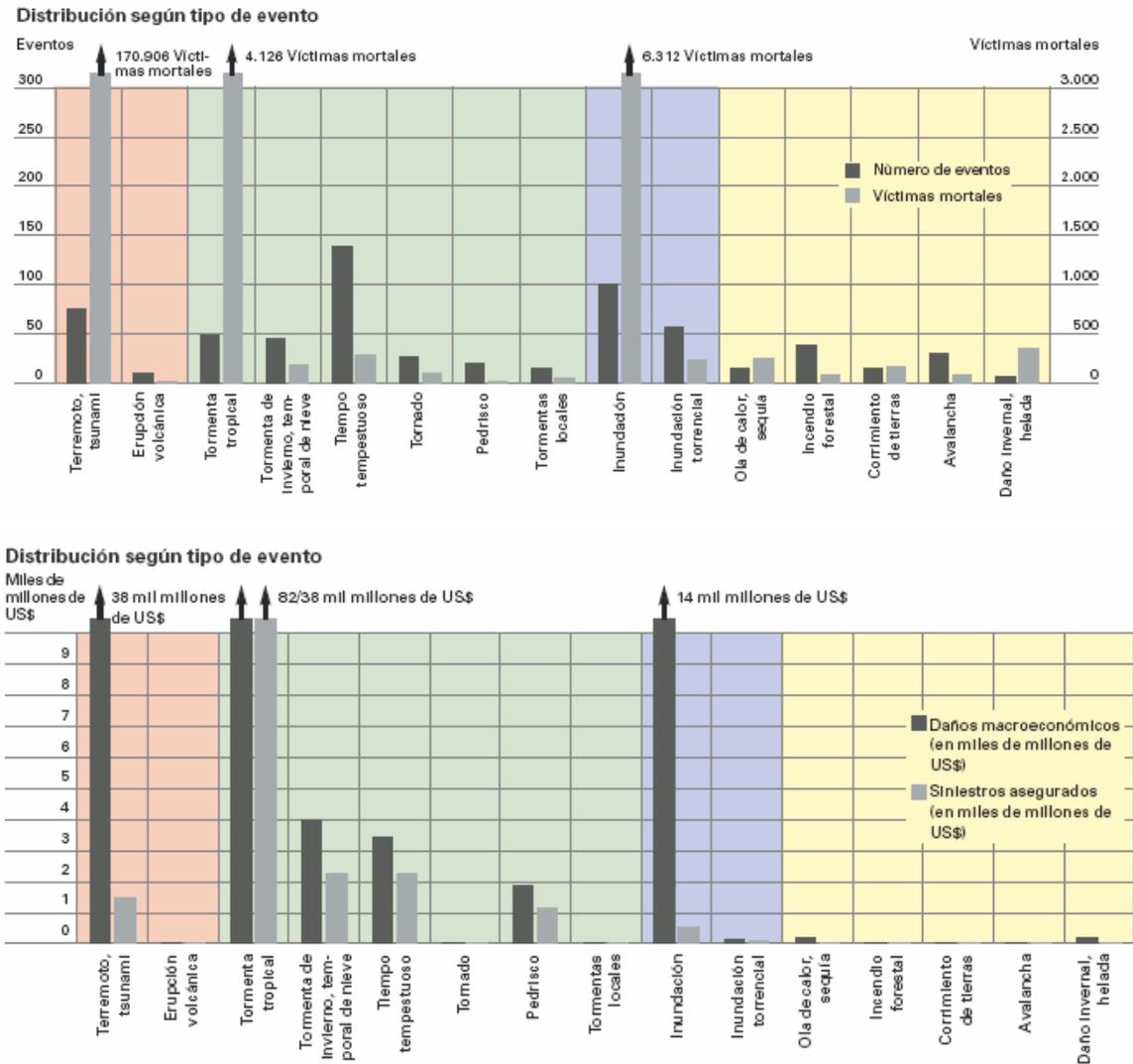


Fig 4.1 b) Distribución de los siniestros de 2004

### 4.3. GRANDES CATÁSTROFES NATURALES 1950–2004

En el año 2004 quedó plenamente reflejada la tendencia alcista de los desastres naturales que se viene observando desde hace muchos años

Año tras año, las fuerzas de la naturaleza provocan cientos de eventos siniestros en todas las partes del mundo. En 2004, el número de eventos siniestros analizados y documentados fue de aproximadamente 650, lo cual correspondió a la media registrada en los últimos 10 años. Sin embargo, desde el punto de vista de los efectos monetarios y humanitarios, el año 2004 estuvo marcado por eventos siniestros extraordinarios y dramáticos.

**Definición:** (*Grandes catástrofes naturales*)

Basándose en las definiciones de las Naciones Unidas, las catástrofes naturales reciben el calificativo de “grande” siempre que excedan considerablemente la capacidad de autoayuda de las regiones afectadas, requiriendo ayuda a nivel suprarregional o internacional. Ello suele ser el caso, por lo regular, cuando el número de víctimas mortales asciende a miles y el número de personas sin hogar a cientos de miles, o –según las condiciones económicas del país afectado– si los daños asegurados alcanzan dimensiones extraordinarias.

En el año 2004 hubo nueve eventos siniestrales causados por las fuerzas de la naturaleza que correspondieron a la definición de “Grandes Catástrofes Naturales”.

- Inundaciones, Haití y República Dominicana (mayo)
- Inundaciones, Bangladesh, la India y Nepal (junio–agosto)
- Huracán Charley, Caribe y EE UU (agosto)
- Huracán Frances, Caribe y EE UU (septiembre)
- Tifón Songda, Japón (septiembre)
- Huracán Iván, Caribe y EE UU (septiembre)
- Huracán Jeanne, Caribe y EE UU (septiembre)
- Terremoto, Niigata, Japón (octubre)
- Terremoto/ tsunami, sur de Asia, costa oriental de África (diciembre)

**Comparación entre Décadas 1950–2004**

En las tablas figuran las cifras sumadas de las últimas décadas que han sido puestas en relación. Al comparar las cifras de los últimos diez años con las de los años 60, se pone de manifiesto el incremento de las catástrofes naturales, tanto en lo que se refiere al número de eventos como también a la dimensión siniestral.

Década	1950-1959	1960-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1999	últimos 10 años	últimos 10: años 60
Número de eventos	20	27	47	63	91	63	2,3
Daños económicos	44,9	80,5	147,6	228,0	703,6	566,8	7,0
Siniestros asegurados	-	6,5	13,7	28,8	132,2	101,7	15,6

La comparación entre los últimos 10 años y los años 60 revela un incremento dramático.

Daños en miles de millones de US\$ (en valores de 2004)

**Tabla 4.1 Daños y siniestros asegurados desde 1950**

#### 4.4. CATÁSTROFE PROVOCADA POR UN TSUNAMI EN EL SUR DE ASIA

Por la mañana del día 26 de diciembre de 2004 se produjo un terremoto en el Océano Índico al oeste de Sumatra, en una región en la que la fuerte actividad sísmica es un fenómeno prácticamente habitual; sin embargo, esta vez las sacudidas sísmicas fueron más intensas de lo esperado. Se trató del terremoto más grande de los últimos 40 años. Lo que confirmó a este terremoto una dimensión inesperada y apenas concebible fue la gigantesca ola sísmica que le siguió y desencadenó la peor catástrofe humanitaria de origen natural desde el terremoto de Tangshan (China) en 1976. En cuanto al número de víctimas mortales, este tsunami pasó a la historia documentada como el más poderoso de todo el mundo.

A mediados de febrero de 2005, la ONU contó al menos con 170,000 víctimas mortales y con más de 1,000,000 de personas sin hogar.

La región afectada es inmensa y se extiende a varios miles de kilómetros, de Tailandia y Malasia en el este, continuando por Sri Lanka, India y las Maldivas hasta Kenia y Somalia en el oeste; allí, a 5,000 Km del epicentro, perdieron la vida aproximadamente 300 personas. Pero, a pesar de ello, las víctimas y los daños están localmente concentrados: en una franja litoral que a lo ancho mide de uno a dos kilómetros, es decir, en un área muy estrecha que estaba expuesta a una potencia extremadamente destructora.

#### El Origen del Terremoto

A lo largo del arco de Sonda, la placa indoaustraliana se va deslizando bajo la placa euroasiática en dirección noreste (NE) y a una velocidad de 5 a 6 cm por año. En esta zona de subducción es frecuente la actividad sísmica y no es raro que sucedan temblores de gran magnitud:

los últimos que se registraron fueron el 4 de junio de 2000 ( $M = 7.9$ ; 58 muertes) y el 2 de noviembre de 2002 ( $M = 7.4$ ; 30 muertos). También el 25 de julio de 2004 hubo un temblor de una magnitud de 7.3. Ninguno de estos eventos fue gran noticia en la prensa mundial.

Asimismo tenemos constancia que en los últimos siglos hubo temblores aún más fuertes. Según sabemos hasta ahora, éstos originaron tsunamis que, en cambio, sólo afectaron costas más cercanas. Posiblemente haya una excepción: el temblor ocurrido en 1833 frente a la zona central de Sumatra que alcanzó una magnitud comparable a la del 26 de diciembre de 2004. Para este terremoto también se puede realizar la modelación de un tsunami que abarca todo el Océano, aunque su propagación más bien se dirija hacia el sur dada la ubicación del foco sísmico.

El hipocentro del terremoto del 26 de diciembre de 2004 estaba localizado en  $3.3^{\circ}\text{N}$ ,  $95.8^{\circ}\text{E}$ , a 10 km de profundidad y alrededor de 250 Km al sur de la ciudad Banda Aceh en la punta norte de Sumatra. Con una magnitud de 9.0, fue el tercer terremoto más fuerte a nivel mundial desde que se inició el registro instrumental a finales del siglo XIX. Su superficie de ruptura se hallaba al norte de la del temblor de 1861. La ruptura se extendió de 1,200 a 1,300 Km partiendo del sur. A lo largo de la falla se originó un desplazamiento medio que se supone fue de 10 a 15 m y, en algunos puntos, de hasta 20 m, por lo que el fondo marino se movió de 3 a 4 m en sentido vertical. Islas enteras, que durante décadas fueron deslizándose centímetro por centímetro, emergieron abruptamente en pocos segundos.

### **El Tsunami**

El desplazamiento vertical del fondo marino a lo largo de mil kilómetros originó el llamado tsunami, una ola de marea de origen sísmica. El movimiento brusco del fondo oceánico hacia la superficie empujó la columna de agua que se encontraba por encima, generando así una ola que se propagó en dirección oeste y este. La dimensión de un tsunami depende de la magnitud del terremoto, la altura de la columna de agua sobre el epicentro, así como de la velocidad y la dirección con que se produce la ruptura de la corteza terrestre. Se supone que, en este caso, las olas del tsunami tenían una longitud de unos 200 Km. Sus tres a cuatro picos apenas eran más altos de un metro en alta mar.

La ola de un tsunami tiene características completamente distintas a las demás olas oceánicas, pues su longitud es mucho más extensa y abarca toda la columna de agua. Asimismo se

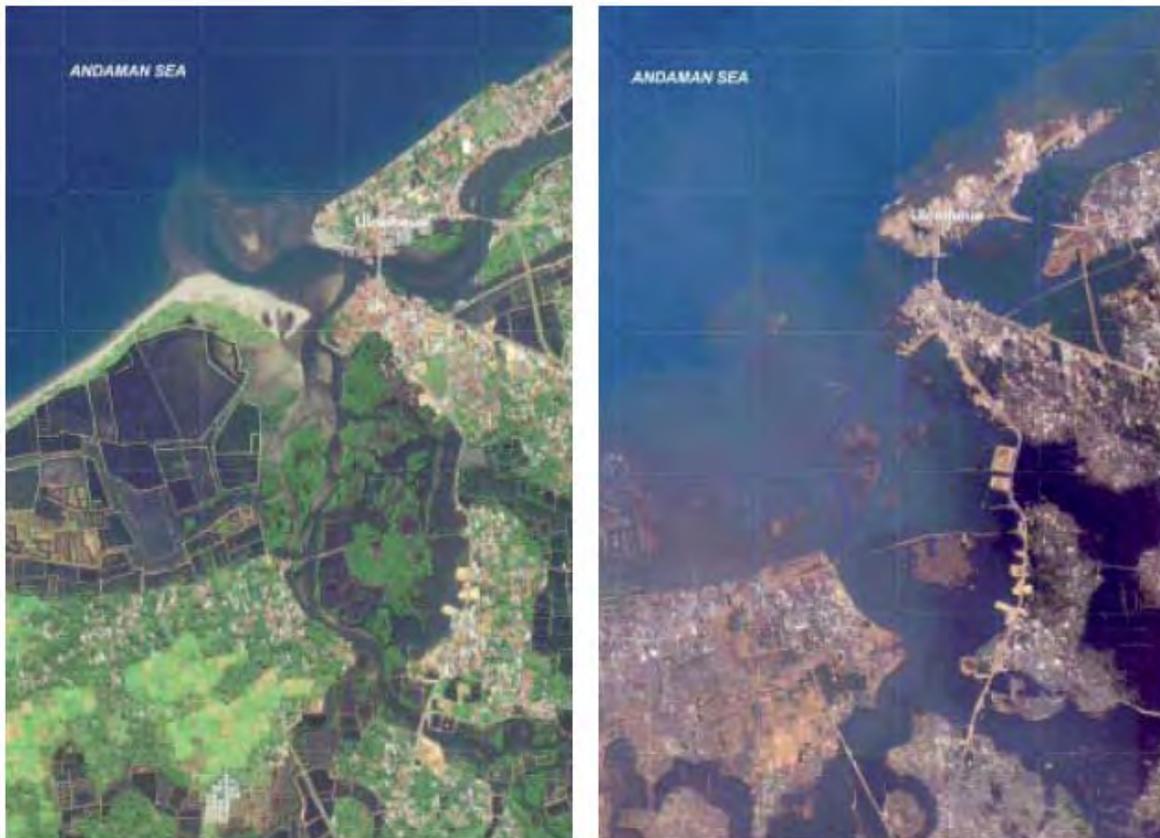
mueve a gran velocidad sin perder mucha energía; dependiendo de las profundidades del agua en todo el Océano, la velocidad de la ola puede alcanzar más de 800 km/h. En alta mar, el tsunami pasa casi desapercibido y su peligrosidad se manifiesta tan sólo a partir del momento en el que es frenado por aguas de poca profundidad. La ola “se rompe”, se hace más corta y lenta –su velocidad es de 35 km/h en aguas poco profundas de 10 m–, si bien también aumenta su altura de la forma correspondiente. De repente se alza un frente de ola vertical de 5 a 10 m que, en casos extremos, puede ser aún más alto. Sobre todo resulta insidioso el hecho de que el mar a menudo se retira antes de que llegue a la costa la primera ola. Este fenómeno insólito ejerce cierta atracción sobre las personas y, por ello, siempre vuelve a cobrarse un gran número de víctimas.

En definitiva, el efecto que pueda tener una ola depende fundamentalmente de la topografía local, ya sea en la misma costa o en la zona frente a ella. Una resistencia vertical le quita a la ola gran parte de su enorme energía, a la vez que no deja espacio lo suficientemente amplio para que se forme una ola alta. Un arrecife con tales propiedades se vería, por consiguiente, inundado por una ola relativamente baja y lenta (esto es lo que sucedió en el caso de las Maldivas cuando se produjo el evento actual). Sin embargo, una playa de superficie llana e inclinación uniforme hace que las olas suban corriendo, por así decirlo, la pendiente a gran velocidad. Los niveles de agua máximos alcanzados superan en un múltiplo la altura que efectivamente tiene la ola (el llamado efecto run-up).

A diferencia de las olas provocadas por vientos huracanados, la altura de la ola original no es tan importante para que ésta desarrolle su fuerza destructora, sino la velocidad del flujo, la topografía de la costa así como la posible dirección de la ola y su trayectoria.

Otro efecto de un tsunami es su refracción en una capa límite. Este fenómeno conocido de la óptica queda claro con el siguiente ejemplo: uno de los lugares más afectados en Sri Lanka es Galle, a pesar de que no es un lugar por donde pasó directamente el tsunami. Debido a la acusada topografía del fondo oceánico, el tsunami fue frenado al sur de Sri Lanka en el punto donde topó con la plataforma continental, de modo que la parte de la ola al sur de la misma se desvió hacia el norte y dio con un lugar completamente inesperado de la isla. La ola estuvo dando prácticamente vueltas alrededor de la isla. Este fenómeno, sin embargo, sólo se observa en la zona alejada (*far field*) de la fuente sísmica, es decir, del lugar donde se forma el tsunami.

Sin embargo, por regla general, los tsunamis desarrollan gran parte de su potencial destructor cerca del lugar donde se formaron. Según la media plurianual, también en el caso de los grandes tsunamis más del 90% de los daños y víctimas se produjo en la zona cercana al epicentro. Allí se forman olas muchísimo más altas con velocidades de flujo bastante más elevadas. Esto es un hecho que queda corroborado en las imágenes tomadas de Meulaboh, una ciudad en Sumatra cercana al epicentro. La fuerza con la que las aguas invadieron la ciudad no es comparable a la de las otras regiones. En muchas partes de la costa noroeste de Sumatra ni siquiera los árboles fueron capaces de resistir la embestida de las aguas.



**Fig 4.2** Imágenes del satélite IKONOS que fueron tomadas de la región Banda Aceh antes (a la izquierda el 10 de enero de 2003) y después del tsunami (a la derecha el 29 de diciembre de 2004).

## **El Terremoto**

Por mucha atención que prestemos al efecto consecencial del tsunami (que muy probablemente es responsable del 95% del siniestro total causado), tampoco debemos olvidarnos del propio evento sísmico, porque también son dignos de mención aquellos daños que no se llegaron a producir: se habría esperado que un terremoto de tal envergadura hubiera causado al menos daños aislados, sobre todo, en los edificios altos que se encuentran en las metrópolis más alejadas como Kuala Lumpur (500 Km) o Singapur (900 Km). Sin embargo, las sacudidas en esas metrópolis fueron inferiores a las que se sintieron en los temblores bastante más débiles de los últimos años. Ahora hay que estudiar muy en detalle cuáles son los efectos responsables de este fenómeno y cómo se pueden transferir estos conocimientos a otros escenarios de terremoto como, por ejemplo, al temblor en la costa central de Sumatra en 1833.

## **Dimensión Siniestral**

Daños económicos: según estimaciones provisionales (febrero de 2005), los daños materiales ocasionados por la catástrofe se elevan a aproximadamente US\$10 mil millones, a los que también hay que añadir los daños consecuenciales indirectos extraordinarios, causados sobre todo en los centros turísticos de Tailandia, Sri Lanka y las Maldivas. De ello se puede deducir que los efectos puramente económicos se sitúan, en términos absolutos, a un nivel bastante más bajo que los del terremoto de Niigata (Japón) el 23 de octubre de 2004.

Han sido pocas las ocasiones en las que un desastre natural nos ha demostrado de forma tan dramática la divergencia abismal que puede haber tras una catástrofe entre las consecuencias humanitarias y las económicas, incluso en las economías nacionales de los países afectados. Así, por ejemplo, la economía de Indonesia apenas se vio afectada, a pesar de que hay que contar con más de 100, 000 de muertos y también con más de 100, 000 personas desaparecidas; posiblemente el PIB de Tailandia crezca un 0.5% menos de lo que se había esperado antes del seísmo. Sin embargo, económicamente parece ser que la catástrofe sólo tiene consecuencias gravísimas para las economías nacionales de las Maldivas y Sri Lanka, dado que estos países dependen en alto grado del ramo turístico. No obstante, incluso en Sri Lanka se estima que los daños ocasionados tan sólo supondrán el 2% del PIB.

Siniestros asegurados: desde el punto de vista técnico del seguro, la lección esencial que ha enseñado el tsunami en Sumatra es que se trató de un evento de dimensiones realmente globales. Al contrario que en el caso de otros eventos, no fueron solamente empresas de seguro locales y grupos de compañías que suscriben a nivel mundial los que se vieron afectados, sino también –a través del ramo de turismo– compañías nacionales en países que se encuentran muy lejos de la región siniestrada. Por lo tanto, el aspecto global no surgió por medio del reaseguro internacional, como en el caso de otras catástrofes, sino ya a partir del seguro directo. Ello lleva asociado el aspecto de los multirramos. Los más diversos ramos se vieron involucrados, en una combinación, que más bien puede considerarse atípica para una catástrofe natural. A principios del año 2005, solamente se pudo indicar de forma insuficiente y con escasa exactitud la suma a que se elevan los siniestros asegurados. Si se tienen en consideración las inseguridades, no se puede descartar una magnitud de hasta US\$2 mil millones. Sin embargo, en comparación con la dimensión de la catástrofe humanitaria y en vista del grado de destrucción en tramos costeros, los siniestros asegurados parecen inferiores, debido a las siguientes razones:

- Las regiones más afectadas se encuentran mayoritariamente en países en vías de desarrollo, en los que ya una cobertura de incendio corriente no se considera estándar en absoluto. Además, el riesgo de terremoto (que en la mayoría de los casos también incluye el tsunami) solamente se puede cubrir a través de un seguro complementario de Incendio.
- En estos países tampoco son habituales los seguros de Vida

Por ello, es de esperar que los casos de seguro se producirán principalmente en dos ramos:

- Inversiones en objetos turísticos, sobre todo en instalaciones hoteleras, y en una infraestructura asociada. Éstas a menudo (pero no siempre) están cubiertas por una “póliza a todo riesgo” que también puede incluir la pérdida de beneficios por interrupción operativa.
- Seguros de Vida, Accidentes y de Asistencia en viajes de los turistas.

Asimismo se cuenta con daños de casco de automóviles, si bien su volumen apenas tiene importancia; en un caso se vio afectado el ramo de transporte debido a un depósito de automóviles en un puerto.

Actualmente no se sabe hasta qué punto se registraron siniestros en los llamados programas de microseguros, que ya están relativamente difundidos en India e Indonesia y cuyo objetivo consiste en asegurar la existencia de personas privadas y pequeñas empresas en países en vías de desarrollo.

**Las Catástrofes más Grandes Ocasionadas por Tsunamis desde 1700**

Fecha	Tsunami originado por	Terremoto/ magnitud	Regiones afectadas	Víctimas mortales
27.1.1700	Terremoto	9,0	EE. UU.-Japón	
1.11.1755	Terremoto	8,7	Portugal-Marruecos	>30,000
May-Jul 1815	Erupción volcánica		Indonesia	>10,000
24/25.11.1833	Terremoto	9,2	Indonesia, Sumatra, India, Sri Lanka	Sin datos
26/27.8.1883	Erupción volcánica		Indonesia (Krakatau)	36,400
15.6.1896	Terremoto	7,6	Japón-Sanriku	27,000
31.1.1906	Terremoto	8,2	Ecuador-Colombia	500
27.11.1945	Terremoto	8,3	Pakistán-India	4,000
1.4.1946	Terremoto	8,6	EE. UU. Hawaii	150
4.11.1952	Terremoto	8,2	Rusia-Kamtchatka	1,300
9.3.1957	Terremoto	8,3	EE. UU. Hawaii	0
22.5.1960	Terremoto	9,5	Chile, Hawaii, Japón	3,000
28.3.1964	Terremoto	9,2	EE. UU. Alaska, Hawaii, Japón, Chile	3,000
26.12.2004	Terremoto	9,0	Indonesia, Sumatra, India, Sri Lanka, Tailandia, Maldivas, África oriental	>170,000

**Tabla 4.2 Catástrofes más grandes ocasionadas por tsunamis**

## Conclusión

A pesar de que los siniestros asegurados eran relativamente inferiores, el análisis demuestra que es necesario tomar medidas de actuación, ya sea a nivel científico, político y de cobertura. Los siguientes objetivos se consideran primordiales:

- Entender mejor cómo se forman los tsunamis y su peligrosidad en la costas en función de su topografía terrestre y submarina.
- Mejorar la concienciación de riesgos en la población potencialmente afectada y en los responsables, ofreciendo cursos y seminarios y, en caso dado, ensayos regulares para la protección civil.
- Definir e implantar un sistema de alerta temprana global.
- Crear estructuras de comunicación que garanticen una reacción eficiente ante situaciones de alerta.
- Regular la utilización de tierras, especialmente en las franjas litorales altamente expuestas.
- Consideraciones para el cálculo de una prima acorde al riesgo.

### **4.5. SERIES DE HURACANES Y EVENTOS DE TORMENTAS INHABITUALES POR TODO EL GLOBO TERRÁQUEO**

En 2004 se vieron afectadas por “fenómenos extraordinarios” regiones cuya exposición respecto a huracanes tropicales era (aparentemente) bien conocida gracias a series históricas en el tiempo que datan de hasta más de 150 años. La particularidad de 2004 fue que se observaron frecuencias regionales y (en el caso del huracán Iván) intensidades de huracanes tropicales que eran nuevas respecto al periodo de tiempo para el que existen registros de datos meteorológicos. Ya no es posible explicar estos fenómenos, sin más, desde el punto de vista de la variabilidad natural de la actividad de las tormentas.

Por este motivo, cada vez se ve más confrontada cualquier clase de cobertura con la cuestión del riesgo de cambio de los eventos climáticos extremos como posible consecuencia del calentamiento global del clima. Esto también significa que hay que revisar de forma crítica los modelos de riesgo de los huracanes y tifones, cuyo núcleo para la simulación radica en una situación de riesgo estacionaria.

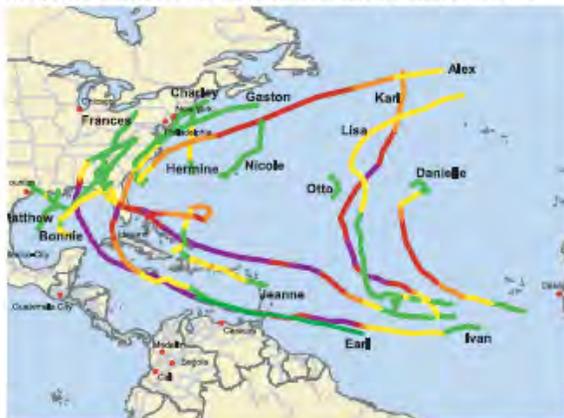
### Huracanes en el Atlántico

En 2004 se formaron en el Atlántico un total de 15 tormentas tropicales, 9 de ellas alcanzaron la fuerza de un huracán. Solamente los huracanes Charley, Frances, Iván y Jeanne destrozaron valores asegurados por US\$30,000 millones, hasta la fecha es para la industria aseguradora una pérdida récord.

Hasta la fecha, el año siniestral más caro de esta región había sido 1992 con US\$17,000 millones por el huracán Andrew. Si se aplicasen los valores actuales en Florida y Louisiana, este evento costaría, según los cálculos de la Münchener Rück casi US\$30,000 millones. Por lo tanto, no se puede decir que la suma de cada uno de los siniestros individuales ocasionados por los cuatro huracanes en 2004 sea realmente “extraordinaria”.

Los cuatro huracanes más graves Charley, Frances, Iván y Jeanne causaron los mayores daños en Florida. En el periodo de tiempo comprendido entre 1850–2004 solamente hubo una única vez una acumulación similar de cuatro huracanes, concretamente en el estado federal de Texas en 1886. En Florida el valor máximo para este lapso de tiempo es de tres eventos siniestros: 1886, 1896 y 1964.

**Gráfico 1** Las trayectorias de los cuatro huracanes con mayores daños en los EE UU en la temporada de 2004 .



En 2004 se formaron en el Atlántico 15 tormentas huracanadas tropicales, 9 de las cuales alcanzaron con velocidades de viento superiores a los 118 km/h la intensidad de un huracán.

- < 100 km/h
- 100–150 km/h
- 150–200 km/h
- 200–250 km/h
- > 250 km/h

**Gráfico 2** Cuatro grandes eventos siniestros por huracanes en seis semanas



Las trayectorias de los cuatro huracanes con mayores daños en los EE UU durante la temporada 2004. Las cuatro tormentas tropicales causaron el mayor siniestro en Florida. Cabe destacar la trayectoria de Iván que tuvo dos entradas en tierra en el Golfo de México.

- < 100 km/h
- 100–150 km/h
- 150–200 km/h
- 200–250 km/h
- > 250 km/h

**Fig 4.3** Trayectorias de los huracanes de 2004

### **Huracán Iván: Récord en Duración e Intensidad**

El huracán Iván se formó el 2 de septiembre de 2004 en la zona que se extiende entre los 10 grados de latitud norte y los 30 grados de longitud oeste como un área tropical de bajas presiones. El 3 de septiembre Iván alcanzó la intensidad de una tormenta y el 5 de septiembre la de un huracán (velocidades de viento > 118 Km/h). En el transcurso de las próximas 18 horas se fortaleció el sistema tormentoso de la categoría 1 hasta la 4 de la escala *Saffir-Simpson* que tiene 5 (escala SS) y alcanzó velocidades de 210 hasta 250 km/h. Iván mantuvo esta intensidad aproximadamente durante 12 horas y posteriormente se debilitó hasta la categoría SS2. Esto fue simplemente el precalentamiento para batir el récord: El 8 de septiembre Iván se convirtió de nuevo en un huracán SS4 y no bajó de este nivel de intensidad hasta entrar en tierra en Alabama el 16 de septiembre, es decir, durante un total de aproximadamente 200 horas. Durante este periodo de tiempo, Iván cobró tres veces una mayor intensidad, alcanzando la clase SS5 durante varias horas. El 12 de septiembre alcanzó su velocidad de viento máxima con 330 km/h (ráfagas).

Una magnitud de medida para el valor punta respecto a duración e intensidad es el potencial de siniestralidad de huracanes (*Hurricane Destruction Potential*, HDP), un índice que acumula el cuadrado de la velocidad de viento máxima por cada intervalo de tiempo de 6 horas a lo largo de la duración total de la tormenta. El valor HDP del huracán Iván asciende a 71,250. A título comparativo: La media interanual (1950–1999) de todos los huracanes de una época completa en el Atlántico se situó en 70,600.

### **Nuevos Importes Siniestrales en el Caribe**

Un valor récord HDP significa en base a la duración de la tormenta incluida en este parámetro, también una probabilidad elevada de que se vean afectadas también zonas de tierra. Por lo tanto, no fue una sorpresa el que el huracán Iván con su trayectoria por el Caribe desde Grenada hasta Alabama y Florida, pasando por el Archipiélago Caimán supusiese para el Seguro una carga aproximada de US\$11.500 millones y con ello fuese el segundo huracán más caro después de Andrew en 1992.

*Grenada:* El 7 de septiembre de 2004 Iván, con una intensidad de SS3, alcanzó la isla del Caribe Grenada que no estaba preparada en absoluto para una tormenta de semejante índole. Desde hacía por lo menos 50 años que en esta región no se observaba una velocidad de viento semejante.

39 personas perdieron la vida y el 90% de los edificios se vieron dañados o fueron totalmente destrozados. El daño macroeconómico en Grenada (número de habitantes: 100.000) se estima en unos US\$900 millones, el daño asegurado es bajo debido a que sólo unos pocos edificios estaban asegurados. Durante los días siguientes, el huracán se cobró la vida de otras 15 personas en las islas de Trinidad, Barbados e Hispaniola.

*Jamaica:* El 11 de septiembre el centro de Iván se ubicó a unas pocas decenas de kilómetros al sur de Jamaica. Prácticamente todos los pronósticos publicados hasta ese momento sobre la trayectoria preveían que Jamaica se viese afectada de pleno en las próximas horas con una intensidad de SS4. Sin embargo, Iván cambió su rumbo y tocó solamente con sus estribaciones la parte sur y oeste de la isla. Por ello, el balance siniestral fue relativamente moderado. Murieron 17 personas, los daños económicos ascendieron a US\$575 millones, de los cuales US\$100 millones son la parte que tuvo que asumir la industria aseguradora.

*Islas Caimán:* Al día siguiente, los habitantes de las islas Caimán tuvieron menos suerte, al sufrir su impacto con toda fuerza. En la primera fase del huracán que se acercaba desde el sur se registraba en la isla principal de Gran Caimán un viento de dirección este que ejercía presión sobre el agua desde el North Sound, una laguna de poca profundidad en el noroeste de la isla, hasta Seven Mile Beach. La marea huracanada alcanzaba en algunas áreas una altura de 1.5 metros. Mientras que el centro de Iván pasó tan sólo a unos 30 km al suroeste de la isla, el viento giró hacia el sur y la tormenta arrasó con toda su fuerza y una segunda marea huracanada la zona sur de Gran Caimán.

El cuadro siniestral marcó un nuevo récord en la historia más reciente de las Islas Caimán. De los casi US\$5,000 millones de valores asegurados, casi US\$1,500 millones fueron destruidos. Esto corresponde a un porcentaje de daños (relación entre daños y suma asegurada) de aproximadamente 25 a 30%.

### **Agravación de la Exposición a Huracanes Tropicales en el Atlántico**

Ninguna de las “particularidades meteorológicas” mencionadas o de los récords en daños en las Islas Caimán permiten de por sí sacar conclusiones sobre los cambios de la exposición de tormentas en los últimos años y décadas en esta región. Pero sí que aportan argumentos para que se investiguen detalladamente los datos meteorológicos en vista de tendencias o periodicidades.

Al observar con mayor exactitud el desarrollo en el tiempo del número de tormentas y huracanes tropicales anuales sobre el Atlántico se pone de manifiesto que la secuencia en el periodo de tiempo de observación tiene dos características diferentes:

1. *Componente cíclico*: De forma paralela a la recurrencia periódica de las fases calientes y frías del Atlántico, la frecuencia de tormentas aumenta o disminuye
2. *Tendencia al aumento*: En general se puede reconocer que en los últimos 150 años se ha incrementado el número de tormentas tropicales y huracanes. El mayor cambio relativo a la frecuencia se registra en los graves huracanes (*major hurricanes*) de categoría SS3–SS5 en la escala Saffir-Simpson. El número medio anual se ha triplicado. Los científicos no pueden determinar en qué medida esta tendencia al aumento está influenciada por la falta de datos completos en el periodo anterior a 1944.

## Conclusión

Los resultados de los modelos de simulación climática apuntan a que a largo plazo aumentará la exposición a ciclones tropicales en el Atlántico. Es probable que en el futuro se produzcan más ciclones y que, por ello, los puntos cíclicos bajos y altos correspondientes a las fases frías y calientes del Atlántico se sitúen en un nivel superior.

## 4.6. CONCEPTOS BÁSICOS DE TERREMOTOS

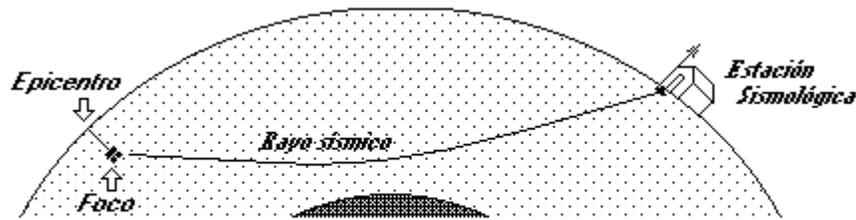
### Definición de sismo

Los *sismos* son perturbaciones súbitas en el interior de la tierra que dan origen a vibraciones o movimientos del suelo; la causa principal y responsable de la mayoría de los sismos (grandes y pequeños) es la ruptura y fracturamiento de las rocas en las capas más exteriores de la tierra. Como resultado de un proceso gradual de acumulación de energía debido a los fenómenos geológicos que deforman la superficie de la tierra, dando lugar a las grandes cadenas montañosas.

En términos más sencillos, un terremoto es el movimiento violento de la Tierra, causado por la brusca liberación de energía acumulada durante un largo tiempo. En general, se asocia el término terremoto con los movimientos sísmicos de dimensión considerable, aunque estrictamente su

etimología significa "movimiento de la Tierra". El estudio de los terremotos se denomina **Sismología** y es una ciencia relativamente reciente.

En el interior de la tierra ocurre un fracturamiento súbito cuando la energía acumulada excede la resistencia de las rocas. Al ocurrir la ruptura, se propagan (en el interior de la tierra) una serie de ondas sísmicas que al llegar a la superficie sentimos como un temblor. Generalmente, los sismos ocurren en zonas de debilidad de la corteza terrestre que llamamos *fallas geológicas*. Existen también sismos menos frecuentes causados por la actividad volcánica en el interior de la tierra, y temblores artificiales ocasionados por la detonación de explosivos.



**Fig 4.4 Elementos de un sismo**

Las ondas sísmicas se alejan del foco propagándose por el interior de la tierra, produciendo vibraciones en la superficie. Por ejemplo, el sismo del 19 de septiembre de 1985, cuyo epicentro se ubicó en la costa de Michoacán, fue sentido a distancia de hasta 1,000 Km del epicentro.

En el caso de la tierra existen fundamentalmente dos tipos de ondas sísmicas internas, es decir, vibraciones que se propagan en el interior de la tierra: *ondas compresionales o longitudinales* y *ondas de corte o cizallamiento*. Las ondas compresionales, llamadas **P** en la terminología sismológica, comprimen y dilatan el medio donde se propagan en una dirección de propagación del frente de ondas (Fig 4.5 a). El segundo tipo de ondas que se propagan en sólidos son las ondas de corte., llamadas ondas **S**. En este caso la deformación que sufre el sólido es en dirección perpendicular a la trayectoria del frente de ondas (Figura 4.5 b). La propagación de estas ondas produce un esfuerzo cortante en el medio y de ahí el nombre de ondas de corte o cizallamiento.

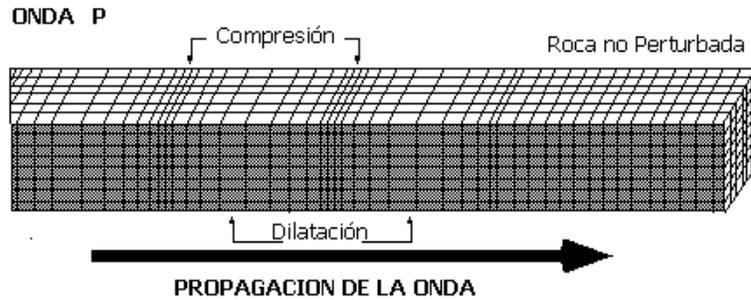


Fig 4.5 a)



Fig 4.5 b)

La velocidad de propagación de las ondas en el interior de la tierra varía, dependiendo de la densidad y de las propiedades elásticas de las rocas. En rocas típicas de la corteza terrestre las ondas **P** se propagan a velocidades promedio de entre 4.5 y 6.5 Km/s, mientras que en el núcleo de la tierra, a profundidades de 6 000 Km, la velocidad de las ondas **P** alcanzan los 15 Km/s. Las ondas **S** viajan a una velocidad más lenta que las ondas **P**; la relación aproximada entre ambas velocidades es  $V_p = 1.73V_s$ . Como viajan más rápidamente, las ondas **P** son registradas antes que las ondas **S**; es por ello que en sismología a las ondas compresionales se les llama ondas primarias (**P**) y a las ondas de corte, que arriban más tarde, ondas secundarias (**S**).

Además de las ondas internas **P** y **S** existe otro tipo de ondas que se propagan sobre la superficie de la tierra a velocidades menores que las de las ondas **P** y **S**. A esta clase de onda elástica se les llama *ondas superficiales*.

### Placas

La corteza de la Tierra está conformada por una docena de placas de aproximadamente 70km de grosor, cada una con diferentes características físicas y químicas. Estas placas ("tectónicas") se están acomodando en un proceso que lleva millones de años y han ido dando la

forma que hoy conocemos a la superficie de nuestro planeta, originando los continentes y los relieves geográficos en un proceso que está lejos de completarse. Habitualmente estos movimientos son lentos e imperceptibles, pero en algunos casos estas placas chocan entre sí como gigantescos témpanos de tierra sobre un océano de magma presente en las profundidades de la Tierra, impidiendo su desplazamiento. Entonces una placa comienza a desplazarse sobre o bajo la otra originando lentos cambios en la topografía; pero si el desplazamiento es dificultado, comienza a acumularse una energía de tensión que en algún momento se liberará y una de las placas se moverá bruscamente contra la otra rompiéndola y liberándose entonces una cantidad variable de energía que origina el Terremoto.

### **Fallas**

Las zonas en que las placas ejercen esta fuerza entre ellas se denominan fallas y son los puntos en donde, con más probabilidad, se originen fenómenos sísmicos. Sólo el 10% de los terremotos ocurren alejados de los límites de estas placas.

### **Otras Causas de Terremotos**

Otros factores que pueden contribuir a la formación de terremotos son:

- La actividad subterránea originada por un volcán en proceso de erupción puede originar un fenómeno similar.
- También se ha estimado que una fuerza externa, provocada por el hombre, podría desencadenar un terremoto, probablemente en un lugar donde ya había una falla geológica. Es así como se ha supuesto que experimentos nucleares, o la fuerza de millones de toneladas de agua acumulada en represas o lagos artificiales podría producir tal fenómeno.

### **Hipocentro (o Foco)**

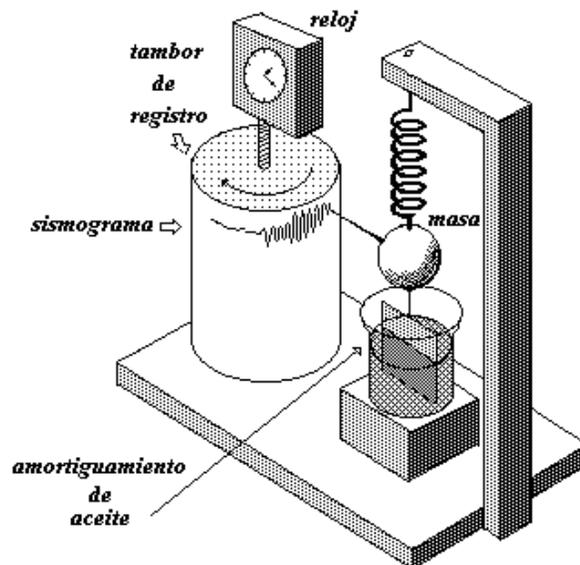
Es el punto en la profundidad de la Tierra desde donde se libera la energía en un terremoto. Cuando ocurre en la corteza de ella (hasta 70km. de profundidad) se denomina *superficial*. Si ocurre entre los 70 y los 300km. se denomina *intermedio* y si es de mayor sima, *profundo* (el centro de la Tierra se ubica a unos 6,370km de profundidad).

## Epicentro

Es el punto de la superficie de la Tierra directamente sobre el hipocentro. Es, generalmente, la localización de la superficie terrestre donde la intensidad del terremoto es mayor. Las características de la falla, sin embargo, pueden hacer que el punto de mayor intensidad esté alejado del epicentro

## Registro de los sismos

La vibración de la tierra debida a la ocurrencia de un temblor se observa experimentalmente con el auxilio de *sismógrafos*, instrumentos sumamente sensibles a los movimientos de la superficie de la tierra. El principio básico de operación de un sismógrafo es: una masa suspendida de un resorte sostenido por un soporte empotrado en el suelo. Cuando el suelo se mueve por el paso de las ondas sísmicas, también se mueve el soporte; sin embargo, la inercia de la masa hace que ésta permanezca "estable" en su sitio, permitiendo medir así el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo (Fig 4.6).



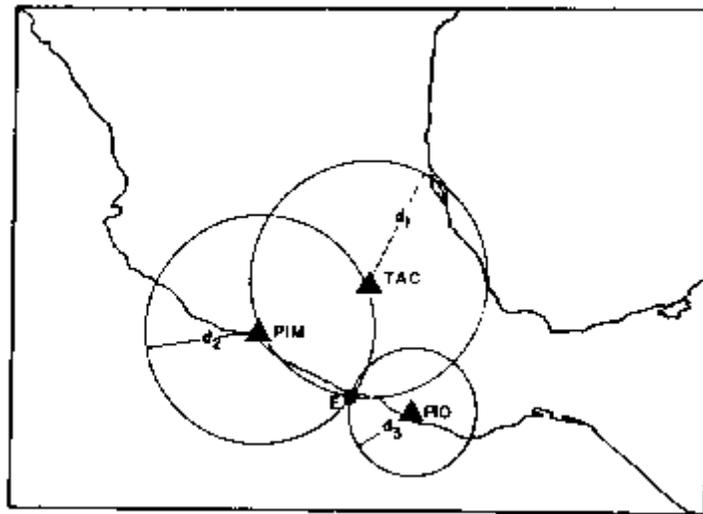
**Fig 4.6 Principio básico de operación y registro de un sismógrafo que mide el desplazamiento vertical del terreno.**

Normalmente, el desplazamiento relativo de la masa con respecto al suelo es tan pequeño que es necesario amplificarlo para poder medirlo. Una vez amplificado el movimiento del suelo,

éste se registra en papel o en una cinta magnética. El registro obtenido en esta forma se llama *sismograma*. Además, los sismógrafos cuentan con un preciso control de tiempo que se inscribe directamente sobre los sismogramas para identificar exactamente el tiempo de llegada de las diferentes ondas sísmicas que arriban a una estación sismológica.

### Determinación de epicentros

Como las ondas sísmicas viajan a diferentes velocidades, las diferencias de tiempo de arribo entre las ondas **P** y **S** registradas en una estación sismológica están en función directa de su distancia al sitio donde ha ocurrido el temblor. Por ejemplo, para distancias regionales la diferencia en segundos entre el tiempo de arribo de las ondas **P** ( $t_p$ ) y las ondas **S** ( $t_s$ ) multiplicada por ocho, nos da la distancia aproximada al epicentro en kilómetros,  $distanacia \approx 8 \cdot (t_p - t_s)$ . Sin embargo, los datos de una sola estación no bastan para determinar el epicentro del sismo, puesto que la diferencia ( $t_p - t_s$ ) nos da la distancia, pero no la dirección; es necesario contar con un mínimo de tres estaciones sismológicas que registren el temblor para poder estimar la ubicación del epicentro.



**Fig 4.7** Conociendo la distancia ( $d$ ) de una estación sismológica al epicentro, ésta puede representarse como un círculo de radio  $d$  con centro en dicha estación. Si contamos con observaciones al menos en tres estaciones, el punto de intersección ( $E$ ) de los círculos corresponde al epicentro. En la figura se representa el ejemplo de un sismo en las costas de Guerrero, localizado mediante registros de las estaciones: Tacubaya, D.F. (TAC); Presa Infernillo, Mich. (PIM); y Pinoterpa Nacional, Oax. (PIO).

En términos generales, la localización es relativamente simple: basta ubicar las estaciones sismológicas en un mapa y trazar para, para cada una de ellas, un círculo cuyo radio sea igual a la distancia de la estación al epicentro que se ha calculado con base en las diferencias de llegada de las ondas **P** y **S**. El punto o región donde se intersectan los círculos trazados es el epicentro (Fig 4.7). En la práctica, el procedimiento para localizar epicentros en los observatorios sismológicos es más complicado, pues debe tomarse en consideración la estructura interna y la esfericidad de la tierra. Las localizaciones epicentrales se hacen rutinariamente por medio de una computadora, aunque el principio general es el mismo ya descrito.

### Medición

Para medir un sismo se utilizan dos escalas: *Richter* y *Mercalli*

Escala	Mide
Richter	Magnitud: Causa
Mercalli	Intensidad: Efecto

**Tabla 4.3 Escalas para medir sismos**

### Escalas de Intensidad

Los primeros intentos que se hicieron para catalogar y cuantificar los temblores se basaron en su poder destructivo, haciendo estudios descriptivos de los daños ocasionados por ellos. A finales del siglo XIX, el sismólogo italiano de-Rossi y el suizo *Forel* propusieron la escala de intensidad de diez grados conocida como *Rossi-Forel*, para catalogar los daños producidos por los sismos. Posteriormente, el sismólogo italiano *Giuseppe Mercalli* propuso en 1902 una escala de doce grados.

Actualmente existen varias escalas de intensidad usadas en el mundo. En México, la más frecuentemente utilizada es la Escala de Intensidades de *Mercalli Modificada* (MM), que fue abreviada por *Charles Richter* en 1956, tomando como base la escala original de *Mercalli*. Para indicar la intensidad se ha convenido el uso de números romanos.

Las *escalas de intensidad* representan únicamente una medida del poder destructivo de un temblor o de los efectos que éste tuvo sobre seres humanos y edificaciones en un lugar determinado. Para un sismo es claro que la intensidad puede variar notablemente de un sitio a otro, dependiendo de la distancia al epicentro y de las condiciones geológicas locales. La intensidad es una medida relativa que nos da una idea de la severidad con que manifestaron los sismos en diversos sitios, pero

no cuantifica la energía liberada de la fuente; con éste último fin se desarrolló la escala de magnitud.

### **Escala de Magnitud**

Muy pronto se hizo evidente que la intensidad, si bien es útil para describir los efectos de un terremoto, no es un parámetro apropiado para describir la cuantía o magnitud de un sismo al ocurrir un fracturamiento en el interior de la tierra.

Fue hasta 1931 cuando el sismólogo japonés *Wadati* observó, al comparar los sismogramas de diferentes temblores, que la amplitud máxima de las ondas sísmicas registradas parecía proporcional a la dimensión del sismo. Este concepto fue posteriormente desarrollado en 1935 por *Charles Richter* quien, estableciendo analogías con la medida de brillantez de las estrellas en astronomía, empleó por primera vez el término magnitud para catalogar los temblores. La escala original de *Richter* tomaba las amplitudes máximas de ondas superficiales de sismos ocurridos a distancia cortas para calcular lo que él denominó magnitud local o magnitud  $M_L$ .

Posteriormente, el uso de la escala original de magnitudes de *Richter* se extendió para calcular magnitudes a grandes distancias, utilizando las amplitudes máxima de ondas  $\mathbf{P}$  ( $m_b$ ) o de ondas superficiales ( $M_S$ ). El sismo del 19 de septiembre por ejemplo, tuvo un valor de magnitud de 8.1 en la escala  $M_S$ .

### **Escala Mercalli**

La Escala de *Mercalli* mide la violencia con que se siente un sismo en diversos puntos de la zona afectada. La medición se realiza de acuerdo a la sensibilidad del movimiento en el caso de sismos menores y en el caso de sismos mayores, observando los efectos o daños producidos en las construcciones, objetos, terrenos y el impacto que provoca en las personas. El valor de la intensidad de un sismo en un cierto lugar, se determina de acuerdo a una escala previamente establecida. La escala modificada de *Mercalli* va desde el grado I hasta el XII.

A un mismo sismo, con un único grado *Richter*, se le pueden otorgar distintos grados en la escala de *Mercalli*, de acuerdo a la percepción o efectos de ese movimiento en cada punto donde se ha percibido.

Por lo tanto, el uso de la Escala de *Mercalli* requiere:

- Tener en cuenta los efectos que distorsionan la percepción de la intensidad (percepción personal), que depende del lugar en que uno se encuentra: altura, tipo de edificación, tipo de suelo, modalidad de construcción, entre otros factores.
- De igual forma, al momento de precisar la Intensidad, se sugiere consultar a otras personas con qué intensidad percibieron el sismo. De preferencia no deben encontrarse en el mismo lugar.

En la siguiente tabla mostramos la sensibilidad de los efectos bajo la escala *Mercalli*:

Escala	Percepción
Grado I	Sacudida sentida por muy pocas personas en condiciones especialmente favorables.
Grado II	Sacudida sentida sólo por pocas personas en reposo, especialmente en los pisos altos de los edificios. Los objetos suspendidos pueden oscilar.
Grado III	Sacudida sentida claramente en los interiores, especialmente en los pisos altos de los edificios, muchas personas no lo asocian con un temblor. Los vehículos de motor estacionados pueden moverse ligeramente. Vibración como la originada por el paso de un carro pesado. Duración estimable.
Grado IV	Sacudida sentida durante el día por muchas personas en los interiores, por pocas en el exterior. Por la noche algunas despiertan. Vibración de vajillas, vidrios de ventanas y puertas; los muros crujen. Los vehículos de motor estacionados se balancean claramente.
Grado V	Sacudida sentida casi por todas las personas; muchos despiertan. Algunas piezas de vajilla, vidrios de ventanas, etc., se rompen; pocos casos de agrietamiento de aplanados; caen objetos inestables. Se observan perturbaciones en los árboles, postes y otros objetos altos. Se detienen de relojes de péndulo.
Grado VI	Sacudida sentida por todas las personas; muchas atemorizadas, huyen hacia afuera. Algunos muebles pesados cambian de sitio; pocos ejemplos de caída de aplanados o daño en chimeneas. Daños ligeros.
Grado VII	Advertido por todos. La gente huye al exterior. Daños sin importancia en edificios de buen diseño y construcción. Daños ligeros en estructuras ordinarias bien construidas; daños considerables en las débiles o mal planeadas; rotura de algunas chimeneas. Estimado por las personas conduciendo vehículos en movimiento.
Grado VIII	Daños ligeros en estructuras de diseño especialmente bueno, considerable en edificios ordinarios con derrumbe parcial, grande en estructuras débilmente construidas. Los muros salen de sus armaduras. Caída de chimeneas, pilas de productos en los almacenes de las fábricas, columnas, monumentos y muros. Los muebles pesados se vuelcan. Arena y lodo proyectados en pequeñas cantidades. Cambio en el nivel del agua de los pozos. Pérdida de control en las personas que guían vehículos motorizados.

Grado IX	Daño considerable en las estructuras de diseño bueno; las armaduras de las estructuras bien planeadas se desploman; grandes daños en los edificios sólidos, con derrumbe parcial. Los edificios salen de sus cimientos. El terreno se agrieta notablemente. Las tuberías subterráneas se rompen.
Grado X	Destrucción de algunas estructuras de madera bien construidas; la mayor parte de las estructuras de mampostería y armaduras se destruyen con todo y cimientos; agrietamiento considerable del terreno. Las vías del ferrocarril se tuercen. Considerables deslizamientos en las márgenes de los ríos y pendientes fuertes. Invasión del agua de los ríos sobre sus márgenes.
Grado XI	Casi ninguna estructura de mampostería queda en pie. Puentes destruidos. Anchas grietas en el terreno. Las tuberías subterráneas quedan fuera de servicio. Hundimientos y derrumbes en terreno suave. Gran torsión de vías férreas.
Grado XII	Destrucción total. Ondas visibles sobre el terreno. Perturbaciones de las cotas de nivel (ríos, lagos y mares). Objetos lanzados en el aire hacia arriba.

**Tabla 4.4 Escala de Mercalli**

### Escala Richter

La Escala de *Richter* mide la magnitud de un sismo. A través de ella se puede conocer la energía liberada en el hipocentro o foco, la que se propaga mediante ondas sísmicas. Es una escala logarítmica, no existiendo límites inferior ni superior. De acuerdo a esta escala, un sismo tiene un único valor o grado *Richter*.

El sismo más grande, registrado instrumentalmente en el mundo, alcanzó una magnitud de 9,5 *Richter* el 22 de mayo de 1960 en Chile.

A continuación presentamos una tabla con los efectos típicos de los terremotos en diversos rangos de magnitud:

Magnitud en escala <i>Richter</i>	Efectos del terremoto
Menos de 3.5	Generalmente no se siente, pero es registrado
3.5-5.4	A menudo se siente, pero sólo causa daños menores
5.5-6.0	Ocasiona daños ligeros a edificios
6.1-6.9	Puede ocasionar daños severos en áreas donde vive mucha gente
7.0-7.9	Terremoto mayor. Causa graves daños
8 o mayor	Gran terremoto. Destrucción total a comunidades cercanas

**Tabla 4.5 Escala de Richter**

### Un Poco de Historia

Hasta el siglo XVIII los registros objetivos de terremotos son escasos y no había una real comprensión del fenómeno. De las explicaciones relacionadas con castigos divinos o respuestas de la Tierra al mal comportamiento humano, se pasó a explicaciones pseudo-científicas como que eran originados por liberación de aire desde cavernas presentes en las profundidades del planeta.

El primer terremoto del que se tenga referencia ocurrió en China en el año 1,177 A de C. Existe un *Catálogo Chino de Terremotos* que menciona unas docenas más de tales fenómenos en los siglos siguientes.

En la Historia de Europa el primer terremoto aparece mencionado en el año 580 A de C, pero el primero claramente descrito data de mediados del siglo XVI.

Los terremotos más antiguos de los que exista documentación histórica tales como fotos o narraciones precisas en América ocurrieron en México, a fines del siglo XIV, en Chile en 1570, en Quito, Perú (hoy Ecuador) en 1587, en Chile, Mayo de 1647, Jamaica, 1692, en Massachussets, EE UU, 1744 y 1755 y en Perú en 1746, aunque no se tiene una clara descripción de sus efectos.

Desde el siglo XVII comienzan a aparecer numerosos relatos sobre terremotos, pero parece ser que la mayoría fueron distorsionados o exagerados.

Observando la actividad sísmica mundial se puede estimar el número de temblores de cierta magnitud que ocurren en un año; se ha observado que ocurren dos grandes terremotos en promedio anualmente. Por otra parte ocurren constantemente varios cientos de miles de temblores de magnitud inferior a 3, que pasan desapercibidos o son percibidos muy localmente.

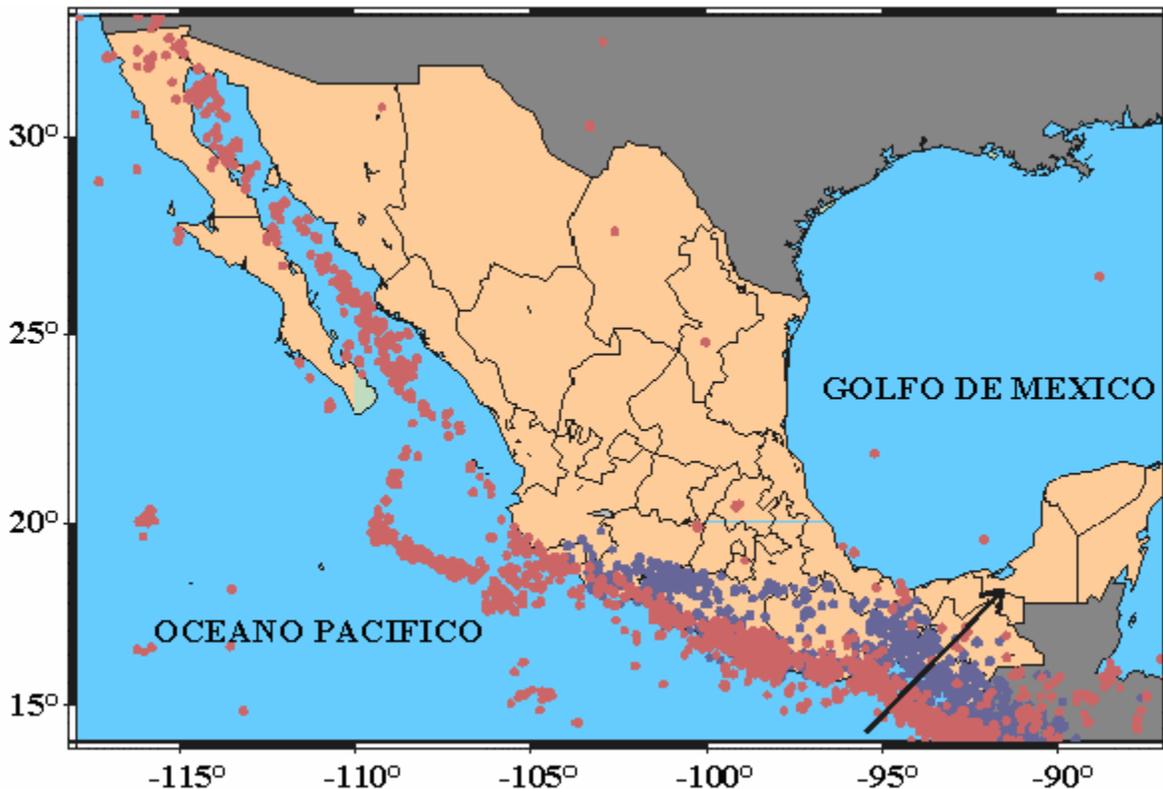
Magnitud	Número promedio
8	2
7	20
6	100
5	3000
4	15000
3	150000

**Tabla 4.6 Promedio anual de temblores**

## Sismicidad en México

El territorio mexicano se encuentra dividido entre cinco placas tectónicas. El movimiento relativo entre estas placas ocasiona uno de los peligros sísmicos y volcánicos más altos del mundo. Esta peligrosidad sísmica llevó al gobierno de Porfirio Díaz a fundar el Servicio Sismológico Nacional (SSN), el 5 de Septiembre de 1910

En la Fig 4.8 se muestran los sismos con magnitudes mayores o iguales a 4.5 localizados en la República Mexicana entre 1964 y 1995. Los puntos rojos representan sismos superficiales (profundidades menores a 50 Km), mientras que los azules representan sismos con profundidades mayores a 50 Km.



**Fig 4.8 Sismicidad de México entre 1964 y 1995, con Magnitud > 4.5**

La mayoría de los sismos localizados se concentran a lo largo de las fronteras entre las placas tectónicas, sin embargo, pueden notarse unos pocos sismos al interior del continente, en regiones alejadas de estas fronteras tectónicas, principalmente a lo largo de la faja volcánica, donde se concentra la mayor población de México.

La Fig 4.9 muestra una gráfica de la distribución de sismos con la magnitud para un catálogo compilado entre 1964 y 1995. Esta gráfica nos permite encontrar valores promedio de la sismicidad en la República durante este período. Por ejemplo, se obtiene un valor de 100 sismos al año con magnitudes mayores o iguales a 4.5, 3 sismos al año con magnitudes iguales o mayores a 6.0 y un sismo de magnitud igual o mayor a 7.5 cada 5 años. Aunque estos son solo valores promedio para todo el país, permite estimar el peligro sísmico asociado.

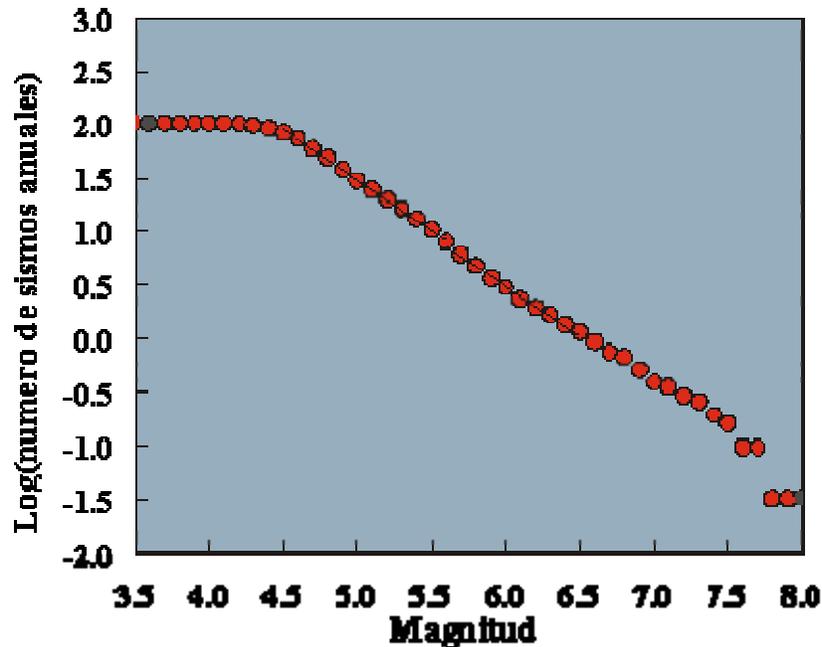


Fig 4.9 Logaritmo del número de sismos anuales vs. magnitud.

El mayor peligro lo presentan los sismos que ocurren a lo largo de las costas del Pacífico, entre las ciudades de Puerto Vallarta y Tapachula. No sólo se producen sismos con mayor frecuencia, sino también los mayores sismos registrados en México tienen su ocurrencia entre estas dos poblaciones (Fig 4.10). Estos sismos, que por su cercanía a las costas representan un grave peligro a las poblaciones costeras, también afectan al Valle de México, como se ha constatado durante los grandes sismos de 1911, 1957, 1979 y 1985. Esta influencia de los sismos costeros sobre la ciudad de México, que se encuentra a más de 200 Km de la costa, se debe a las condiciones del suelo sobre el que se desarrolló la ciudad.

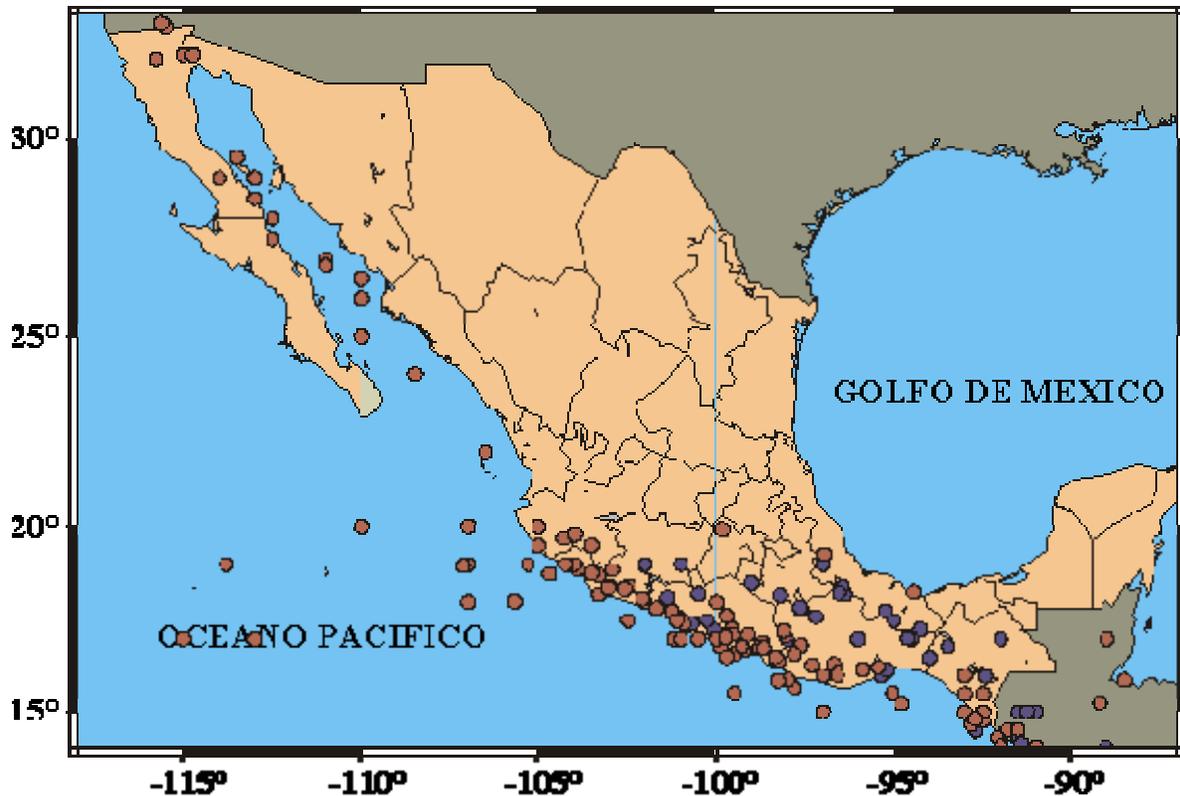
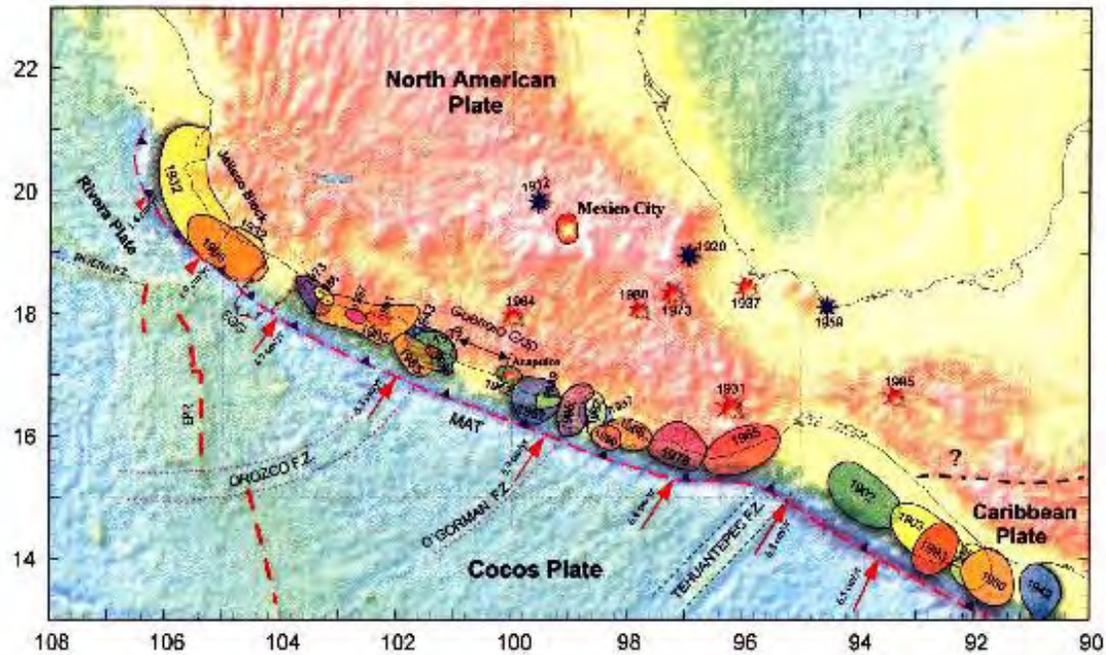


Fig 4.10. Los grandes sismos del siglo ( $M > 6.5$ ).

En la Fig 4.11 se muestran las zonas de ruptura de algunos de los sismos más significativos que han ocurrido durante el presente siglo. Éstos se localizan frente a las costas del Océano Pacífico y son producto de la subducción de la placa oceánica bajo la placa continental. Los eventos ocurren a lo largo de la falla o interface entre dichas placas denominada Fosa Mesoamericana. La falla se extiende desde Puerto Vallarta en Jalisco, hasta el sur de Costa Rica en Centroamérica. Las zonas de ruptura de los grandes sismos llegan a alcanzar hasta 200 Km, como en el caso del mayor sismo registrado por instrumentos durante el siglo pasado, el sismo de 1932 frente a las costas de Jalisco. La mayor parte de esta zona de falla se ha roto por un gran sismo. Se notan varias brechas en la figura, dos pequeños segmentos, uno frente a las costas de Colima-Michoacán, y otro frente al istmo de Tehuantepec, de los cuales no se tiene información histórica de la ocurrencia de un gran sismo en el pasado. Es posible que estas zonas sean asísmicas, esto es, la energía elástica acumulada no se libera a través de grandes sismos. El otro segmento importante que se enfatiza en la figura es la brecha de Guerrero. En este segmento sí tenemos conocimiento de sismos ocurridos en el pasado, entre 1909 y 1911 se produjeron varios sismos con magnitudes mayores a 7.5, que pudieron haber fracturado este segmento de la falla, sin embargo la escasa información con que se cuenta no permite definir las zonas de ruptura de este segmento.



**Fig 4.11 Zonas de ruptura de los grandes sismos del siglo XX.**

Este tipo de estudios permite definir las zonas liberadas de energía elástica, las regiones de mayor peligro sísmico, y la ubicación de los sismos que con mayor probabilidad ocurrirán en un futuro.

Otro peligro para las grandes ciudades asentadas a lo largo de la faja volcánica son los sismos que ocurren a profundidades mayores a 50 Km. Estos sismos se localizan dentro de las placas oceánicas que subducen bajo el continente

En la Fig 4.11 se muestran los sismos importantes que han ocurrido durante este siglo, dentro del continente y a profundidades someras (estrellas azules). La magnitud de estos sismos rara vez llega a sobrepasar la magnitud 7.0, y su ocurrencia es mucho más esporádica que los sismos de la costa. Sin embargo, debido a lo superficial de la fuente y la cercanía de las grandes poblaciones, estos sismos representan uno de los mayores peligros de México.

### **Regiones Sísmicas en México**

La República Mexicana se encuentra dividida en cuatro zonas sísmicas, esto se realizó con fines de diseño antisísmico. Para realizar esta división (Fig 4.12) se utilizaron los catálogos de sismos de la República Mexicana desde inicios de siglo, grandes sismos que aparecen en los

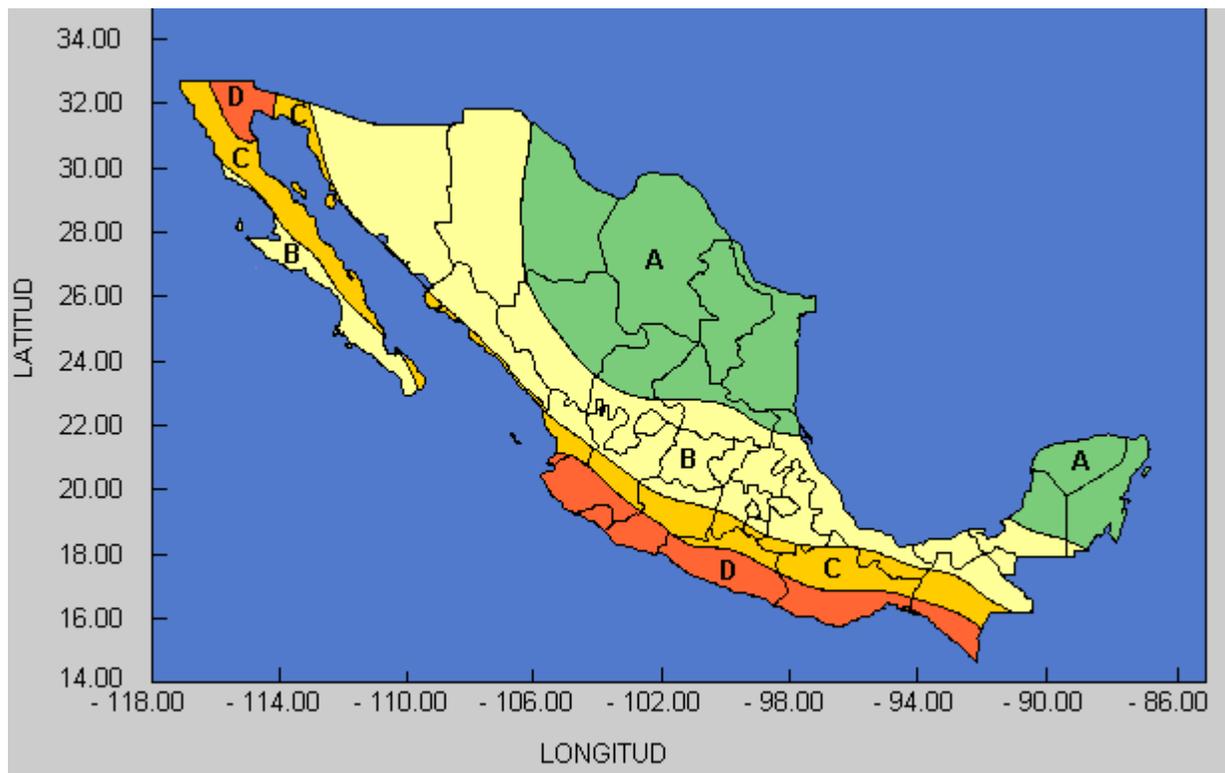
registros históricos y los registros de aceleración del suelo de algunos de los grandes temblores ocurridos en el siglo XX. Estas zonas son un reflejo de qué tan frecuentes son los sismos en las diversas regiones y la máxima aceleración del suelo a esperar durante un siglo.

*Zona A:* No se tienen registros históricos de sismos, no se han reportado sismos en los últimos 80 años y no se esperan aceleraciones del suelo mayores a un 10% de la aceleración de la gravedad a causa de temblores.

*Zonas B y C:* Son zonas intermedias, donde se registran sismos no tan frecuentemente o son zonas afectadas por altas aceleraciones pero que no sobrepasan el 70% de la aceleración del suelo.

*Zona D:* Se han reportado grandes sismos históricos, la ocurrencia de sismos es muy frecuente y las aceleraciones del suelo pueden sobrepasar el 70% de la aceleración de la gravedad.

Aunque la Ciudad de México se encuentra ubicada en la zona B, debido a las condiciones del subsuelo del valle de México, pueden esperarse altas aceleraciones.



**Fig 4.12 Regiones Sísmicas en México**

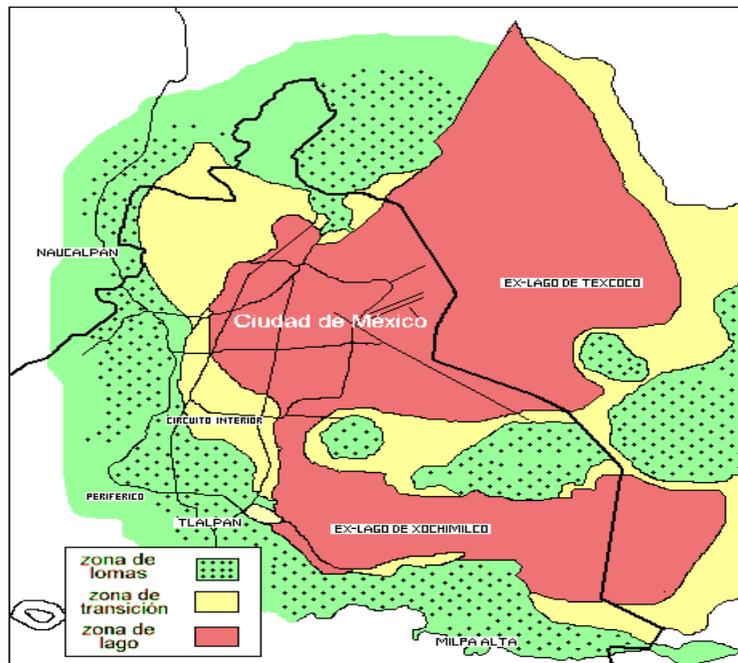
### Zonificación del Valle de México

En la zonificación de la Ciudad de México se distinguen tres zonas de acuerdo al tipo de suelo:

*Zona I: Firme o de lomas:* localizada en las partes más altas de la cuenca del valle, está formada por suelos de alta resistencia y poco compresibles.

*Zona II (De transición):* Presenta características intermedias entre la Zonas I y III.

*Zona III (De Lago):* Localizada en las regiones donde antiguamente se encontraban lagos (Lago de Texcoco, Lago de Xochimilco). El tipo de suelo consiste en depósitos lacustres muy blandos y compresibles con altos contenidos de agua, lo que favorece la amplificación de las ondas sísmicas.



**Fig 4.13 Zonificación del Valle de México**

### Grandes Sismos Sentidos en la Ciudad de México a través de su Historia

La mayor parte de los sismos que son sentidos con gran intensidad en la ciudad de México se originan en la zona de subducción del Pacífico mexicano. Estos terremotos relativamente lejanos, son sentidos en la ciudad como un movimiento oscilatorio horizontal de período largo. Si consideramos que sólo en el siglo pasado ocurrieron en la costa de México treinta y cuatro temblores de magnitud mayor a siete ( $M_s 7.0$ ), nos damos una idea de la cantidad de grandes sismos históricos que han azotado a la ciudad.

Los reportes históricos de los grandes terremotos sentidos en la ciudad de México mencionan, invariablemente, que las oscilaciones duran de tres a cuatro minutos. Los daños reportados en la ciudad de México como resultado de un gran terremoto incluyen con frecuencia referencias a grietas y zanjas poco profundas que se abren en las calles y la destrucción de viviendas de pobre calidad. Hay algunos casos; sin embargo, en que se reportan daños graves en edificios coloniales y en las cúpulas y torres de las iglesias.

Una de las observaciones que salta a la vista al leer los reportes de sismos históricos es que los mayores daños y las más altas intensidades en la capital son siempre observados en las inmediaciones del centro de la ciudad, en la zona que ocupaba el antiguo lago del Valle de México; las entonces poblaciones vecinas de Coyoacán, Tlalpan e Iztapalapa, por ejemplo, rara vez muestran intensidades mayores de V o VI. De entre la gran cantidad de sismos registrados en la historia de la ciudad de México, mostramos una compilación de los sismos históricos que han sido más fuertemente sentidos aquí desde la época precolombina. Para cada uno de ellos ofrecemos un comentario que describe alguna peculiaridad importante del sismo, así como los daños más graves que fueron reportados. En muchos casos, siguiendo la costumbre observada hasta el siglo XIX, nos referimos a los terremotos con el nombre del santoral correspondiente a la fecha en que ocurrían.

Fecha	Efectos en el D.F.	Observaciones
1475 (9 caña)	Durante el reinado de Axayacatl hubo fortísimos temblores que arruinaron casi todas las casas y edificios del Valle de México. Montes y cerros del valle sufrieron derrumbes; también se formaron grietas en la tierra.	Parece ser un fuerte sismo dentro o muy cerca de la ciudad de México.

1589 11 a 26 de abril	Se cayeron paredes y algunos edificios quedaron dañados. En Coyoacán se cayó el convento de los dominicos.	
1611 agosto	Temblor que arruinó algunos edificios. Se cayó parte del convento de San Francisco. La iglesia de Xochimilco quedó dañada.	
1665 20 de enero	Sismo en Morelos, sentido en la Ciudad de México. No produjo daños.	Causado por la explosión del Popocatepetl.
1711 15 de agosto	Largo temblor que arruinó muchos edificios y tiró muchas casas.	Causó daños también en Puebla y Tlaxcala. Tal vez se trate de un sismo profundo en el interior de la placa de Cocos.
1754 1 de septiembre	Daños leves en algunas iglesias. Las cercas de varios templos sufrieron daños menores.	Sismo en Acapulco, que causó graves daños en el puerto. Se dañaron la muralla y el castillo. Un maremoto dejó a un navío varado en el puerto.
1768 4 de abril	Alzate reporta que no hay edificio grande o pequeño que no muestre daños. Los puentes sobre las acequias y el Palacio fueron dañados. Se vaciaron las fuentes. Con reloj en mano, Velázquez de León observó una duración de seis minutos.	Daños en Atlixco, Jamiltepec y San Cristóbal Ecatepec.
1776 21 de abril	Derrumbó la cárcel de la Acordada. Dañó la Casa de Moneda, la Catedral, el Palacio Real, el Palacio del Arzobispo y otros edificios más. Se reporta una duración de 4 minutos.	El terremoto destruyó la fortaleza de Acapulco.
1787 28 de marzo	Daños en el Palacio, el Cañon de la Diputación; dañó muchos edificios mas. Duración entre 5 y 6 minutos.	Se reporta una secuencia de grandes sismos los días 28, 29, 30 de marzo y 3 de abril. Daños en Oaxaca y Tehuantepec. Se informa de un enorme maremoto

		en la Barra de Alotengo, Oaxaca y Acapulco.
1818 31 de mayo	Arcos rotos en los acueductos de Santa Fe y Belem. Daños en puentes, cuarteles y edificios. Daños en los conventos de la Merced, San Francisco y San Diego; en los hospicios de Terceros, la Santísima y San Hipólito; en la sacristía de la Catedral; las Iglesias de Santa Veracruz, Santa Catalina y del Campo Florido.	Ruina casi total en la ciudad de Colima. Graves daños en Guadalajara: las torres y cúpula de la catedral se vinieron abajo. Daño además otras iglesias y edificios en Guadalajara.
1845 7 de abril	Derribó la cúpula de la iglesia del Señor de Santa Teresa. Derrumbó el Hospital de San Lázaro. Daños en el Palacio Nacional, la Cámara de Senadores, la Universidad y varios edificios más. Se reporta gran destrucción en Xochimilco y daños en Tlalpan.	Fuerte sismo en la costa de Guerrero.
1858 19 de junio	Padecieron casi todas las casas y edificios de la ciudad. Daños en Palacio, Casa de Ayuntamiento, Teatro Principal, Santo Domingo, Sagrario, San Francisco, Jesús Nazareno, etc. Se abrieron grietas en las calles y se levantaron las banquetas. Gran destrucción en Texcoco. Duración de 3 minutos aproximadamente.	Causó daños en Pátzcuaro, Morelia, Charo, Indaparapeo y otras poblaciones de Michoacán.
1907 14 de abril	Derribó el colegio Salesiano, rompió cañerías y produjo grietas en las calles.	Sismo en la costa de Guerrero, cerca de Acapulco. Magnitud 7.9
1911 7 de junio	Derrumbó el cuartel de San Cosme, el altar de la iglesia de San Pablo y tiró muros en varias partes de la ciudad. Flexionó rieles de tranvía y produjo grietas en las calles. Destruyó 119 casas en el Distrito Federal.	Sismo en la costa de Michoacán. Magnitud 7.8
1928 17 de junio	Grietas en el pavimento y daños numerosos.	Sismo en las costas de Oaxaca. Magnitud 8.0
1928 4 de agosto	Derrumbó el Palacio Municipal de Chalco.	Sismo en las costas de Oaxaca. Magnitud 7.4

1932 3 de junio	Numerosas grietas y casas derrumbadas. Gran cantidad de cañerías reventadas. Derrumbó varias casas y tiró muchas bardas	Sismo en las costas de Jalisco. El sismo más grande que se haya registrado este siglo en México. Magnitud 8.4
1941 15 de abril	Dañó la cúpula del cine Insurgentes. Cuarteó edificios y produjo grietas en las calles.	Sismo en las costas de Colima. Magnitud 7.9
1957 28 de julio	Destruyó varias casas y edificios en la ciudad de México. Derribó el Ángel de la Independencia. Se levantó el pavimento en varios sitios.	Sismo cerca de Acapulco. Magnitud 7.7
1979 14 de marzo	Daños en la colonia roma. Destruyó la Universidad Iberoamericana en la colonia Campestre Churubusco.	Sismo en Petatlán. Magnitud 7.6
1985 19 y 20 de septiembre	Gran destrucción en el centro de la ciudad y en las colonias Doctores, Guerrero, Tepito; Morelos, Roma, Juárez, Merced, Tlatelolco, etc. Destruyó casi 2,000 edificios, levantó el pavimento y rompió las redes de tuberías en varias partes de la ciudad.	Sismo en las costas de Michoacán. Derrumbó muchas casas en Ciudad Guzmán y causó daños a edificios en Ixtapa, Zihuatanejo y Lázaro Cárdenas. Magnitud 8.1

**Tabla 4.7 Grandes sismos en la Ciudad de México**

### **Características del Sismo del 19 de Septiembre de 1985**

#### **La brecha sísmica de Michoacán**

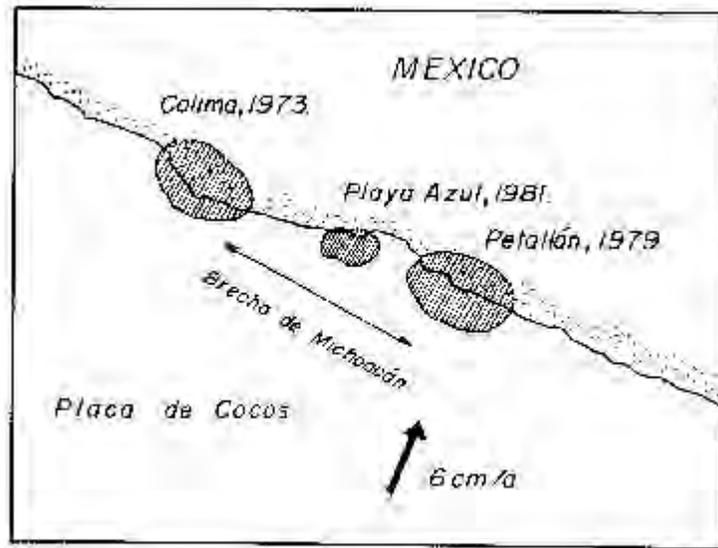
En el caso de México, el ambiente tectónico de mayor interés, desde el punto de vista de potencial sísmico, es la zona de subducción que existe a lo largo del Pacífico. El proceso de subducción de la placa de Cocos genera una gran falla geológica que es la fuente de los más grandes y frecuentes sismos de México. La expresión fisiográfica de la falla de subducción es la fosa o trinchera que corre a lo largo de la costa de México y que alcanza localmente profundidades de hasta 5 000 m.

El sismo de Michoacán del 19 de septiembre de 1985 es un de estos frecuentes sismos de subducción que tienen lugar en la costa de México. El sismo se originó en lo que se conocía como la *brecha de Michoacán*. Una *brecha o vacancia sísmica* es un segmento de una falla activa que

durante un largo lapso de tiempo no ha sido objeto de un deslizamiento, y por ende, cuna de un gran sismo. La ausencia de grandes sismos en dicho segmento de una falla, durante mucho tiempo, indica que debe existir una acumulación importante de energía elástica que crece día a día y tendrá que liberarse irremisiblemente.

En el caso de Michoacán, el último gran sismo del que tenemos noticia es un temblor de magnitud 7.9 en el año de 1911, que curiosamente ocurrió el mismo día en que Madero entraba triunfalmente a la ciudad de México. Desde entonces, sólo había tenido lugar en esta zona otro sismo de tamaño moderado cerca de Playa Azul en 1981. Sin embargo, la magnitud del sismo de Playa azul ( $M_s = 7.3$ ) no fue lo suficientemente grande para liberar la energía acumulada en la brecha de Michoacán desde 1911. El sismo de Playa Azul deslizó un segmento de la falla de subducción de sólo 440 Km de largo, mientras que la longitud de la brecha de Michoacán era de casi 200 Km de longitud. Resultaba evidente que para liberar la energía sísmica acumulada en la brecha de Michoacán desde 1911, haría falta un sismo mucho más grande que el temblor de Playa Azul.

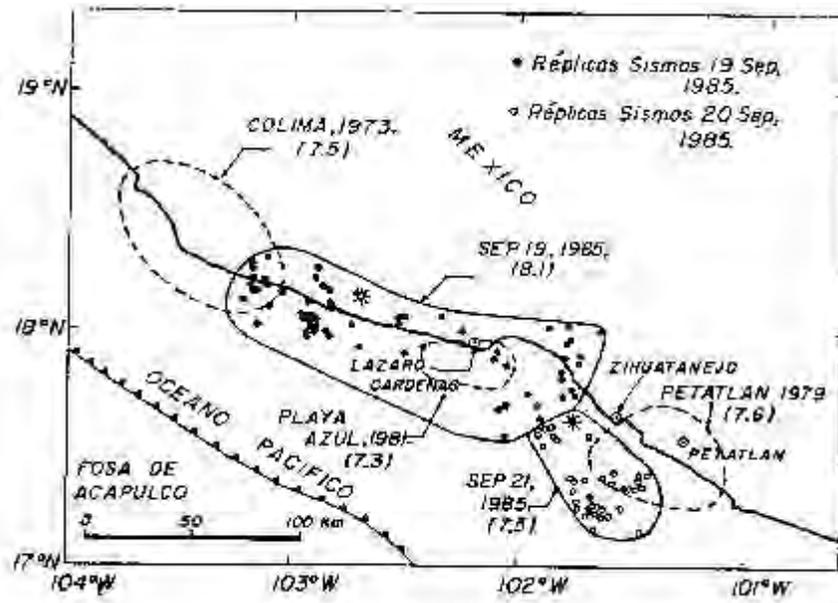
La brecha de Michoacán quedaba claramente delineada por las áreas de ruptura de falla de los sismos de Colima de 1973 y de Petatlán en 1979 (Fig 4.14). Este último causó daños moderados en la ciudad de México, siendo la destrucción de la Universidad Iberoamericana el ejemplo más importante. Cabe apuntar que los segmentos de la falla que se deslizan para producir un sismo importante son cartografiados indirectamente por medio de la localización de las réplicas. Las *réplicas*, por definición, son sismos de magnitud menor que el sismo al cual prosiguen y que ocurren sobre el segmento de la falla geológica recién deslizada; las réplicas de un sismo de gran magnitud son más grandes y duran más tiempo que las de un sismo más pequeño. Podemos pensar que las réplicas son sismos menores que liberan parte de la energía que no fue totalmente relajada por el deslizamiento principal, y que tienden a ocurrir en áreas donde la superficie de la falla tiene rugosidades o heterogeneidades.



**Fig 4.14** Hasta el 19 de septiembre de 1986 no habían ocurrido sismos en la costa de Michoacán suficientemente grandes para liberar la energía sísmica acumulada desde 1911, fecha en que ocurrió el último gran temblor en la zona.

#### **Dimensión de la falla de los sismos del 19 y 20 de septiembre e 1985**

Doce horas después de ocurrido el sismo de Michoacán, la Universidad Nacional Autónoma de México había comenzado ya la instalación de sismógrafos portátiles que sirvieron para registrar las réplicas producidas por el temblor principal. La Fig 4.15 muestra la localización de las estaciones portátiles, la localización epicentral de los sismos del 19 y 20 de septiembre y los epicentros de las réplicas localizadas en un lapso de dos semanas aproximadamente.



**Fig 4.15** Después de un sismo se sucede una serie de temblores (réplicas) de menor magnitud, que ocurren en el área de ruptura del temblor principal. Las réplicas se utilizan para cartografiar indirectamente el área de la falla que se deslizó produciendo el sismo.

La ruptura del sismo de Michoacán se inició cerca del poblado Caleta de campo, al noroeste de Lázaro Cárdenas, Mich. La distribución de las réplicas muestra claramente que el sismo se produjo por el deslizamiento del segmento de la falla que estaba bordeada por los sismos de Colima y Petatlán. Las réplicas cubren completamente la brecha de Michoacán e incluyen parte de las áreas de ruptura de los sismos de Colima y Petatlán. Notemos que el sismo del 20 de septiembre tuvo lugar en el extremo sur del sismo del día anterior. Aparentemente, la energía elástica acumulada en la falla no se liberó totalmente el 19 de septiembre y un segmento de la falla, aún no relajada, produjo el segundo terremoto al día siguiente, que fue sentido también muy fuertemente en la ciudad de México.

En el caso de Michoacán, la longitud de la falla es del orden de 200 Km y en el ancho es de aproximadamente 80 Km. Esto da una idea de las enormes dimensiones de las fallas que producen sismos de esta magnitud. El área o longitud de una falla es otra forma de cuantificar el tamaño de un evento.

La magnitud del sismo de Michoacán fue de 8.1 y representa uno de los terremotos más grandes que haya sufrido México en las últimas décadas. El único sismo más grande que el del 19 de septiembre registrado en México durante este siglo, es el sismo de Jalisco de 1932 ( $M_s = 8.4$ ).

Después del terremoto del septiembre de 1985 se podría pensar que la mayor parte de la energía acumulada en esa antigua brecha ha sido ya liberada. Por tanto, no consideramos que la costa de Michoacán represente una zona de alto potencial sísmico en el futuro próximo. Hay otras dos regiones en el país; sin embargo, que tienen actualmente características similares a las que tenía la costa de Michoacán hasta antes del 19 de septiembre de 1985: Guerrero y Chiapas.

La brecha de Guerrero, en la Costa Grande de ese estado, es una zona situada inmediatamente al sur del área de ruptura del sismo de Petatlán. Aquí no ha habido ningún sismo importante desde los temblores de 1907 y 1908; se piensa que en los últimos cien años debe haberse acumulado suficiente energía elástica capaz de causar un sismo con consecuencias graves. La longitud de la brecha sísmica de Guerrero es aproximadamente del mismo tamaño que la antigua brecha de Michoacán y, de romperse en un solo sismo, éste podría ser de magnitud similar al terremoto del 19 de septiembre. Podemos, por tanto, adjudicarle un alto potencial sísmico, más no podemos, desgraciadamente, precisar cuándo ocurriría tal sismo.

En la costa de Chiapas la situación es más incierta. Sabemos con certeza que por lo menos desde mediados del siglo pasado no han ocurrido grandes terremotos en esa zona. A diferencia de otras regiones del país, no tenemos en Chiapas evidencias históricas de ningún otro terremoto que haya tenido lugar ahí. Cabe la posibilidad de que en Chiapas la zona de subducción haya estado inmóvil durante más de 200 a 300 años, preparándose para un evento de grandes dimensiones. En contraste con esto, podría argumentarse que en Chiapas, el deslizamiento relativo entre las placas de Cocos y Norteamérica se lleva a cabo en forma continua, mediante un comportamiento plástico de la falla. Si esto fuese cierto, no habría energía elástica acumulada y no sería necesaria la existencia de enormes deslizamientos para liberarla, como sucede en las demás zonas de subducción. Este mismo argumento se utilizó con respecto a la brecha de Michoacán.

### **Intensidades observadas durante el sismo del 19 de septiembre de 1985**

El sismo de Michoacán del 19 de septiembre fue sentido prácticamente en todo el centro y sur del país. Existen inclusive algunos observadores que reportan haberlo sentido en ciudades fronterizas de los Estados Unidos. Las intensidades en la zona epicentral a lo largo de la costa de Michoacán llegaron localmente a alcanzar el grado IX. Hay que hacer notar que, como resultado de la atenuación que sufren las ondas sísmicas al viajar por el interior de la tierra, las intensidades disminuyen en forma sistemática en función de la distancia al epicentro.

Como sucede comúnmente en los sismos de la costa de México, las isosistas del terremoto del 19 de septiembre forman una serie de elipses aproximadamente concéntricas, cuyo centro común está en el epicentro. Los epicentros aproximados de muchos sismos históricos importantes que ocurrieron antes de que existieran sismógrafos para realizar las localizaciones, fueron ubicados con base en la distribución de intensidades.

En la disminución gradual de intensidades existieron zonas anómalas y aisladas, cuya intensidad es mucho mayor que la de las regiones circundantes. Estas anomalías en la distribución de intensidades reflejan las condiciones locales del suelo y sus efectos sobre las ondas sísmicas. Las ondas sísmicas son amplificadas notablemente en suelos blandos por ser más fácilmente deformables que la roca firme. El caso más notorio de amplificación local de las vibraciones sísmicas debido a las condiciones del subsuelo es sin duda el de la ciudad de México, que está construida sobre arcillas que fueron arrastradas de las partes altas del valle y depositadas en el lecho del antiguo lago. La destrucción de numerosos edificios y las altas intensidades reportadas en el centro de la ciudad refleja claramente este fenómeno de amplificación local de la energía sísmica.

La amplificación de ondas sísmicas se observa también en muchos otros valles del centro del país que están rellenos de sedimentos recientes. Sin embargo, los sedimentos están más consolidados y contienen proporcionalmente menos agua que los suelos de la ciudad de México, dando como resultado intensidades mucho menores.

## **Conclusiones**

De la discusión anterior es evidente que la ciudad de México ha estado sujeta a lo largo de su historia a los riesgos geológicos que la rodean. El riesgo volcánico es menos frecuente y debemos esperar que se presente a más largo plazo. Además, la actividad volcánica va frecuentemente precedida por fenómenos premonitorios.

La actividad sísmica, por otro lado, no sólo nos acecha en forma más sorpresiva e impredecible, sino que es también más frecuente. A juzgar por el rico registro histórico de sismos sentidos en la ciudad de México, debemos esperar que ésta seguirá siendo azotada en el futuro por grandes temblores. El movimiento de placas tectónicas que los origina ha existido durante millones de años y seguramente continuará irremisiblemente en el futuro. Por otro lado, el desarrollo científico actual está aún lejos de poder efectuar predicciones inminentes con un alto grado de

confiabilidad, existen además serias dudas sobre la utilidad práctica de una predicción que tenga un margen de error de varios días en una urbe de las dimensiones de la ciudad de México.

Los daños sufridos en la capital a raíz de los sismos del 19 y 20 de septiembre de 1985 muestran que durante su incontrolable crecimiento, la ciudad se ha hecho más vulnerable a los fenómenos sísmicos, debido al número y tipo de edificaciones construidas en los últimos treinta años. A mediano plazo, las opciones que parecen viables para mitigar el peligro sísmico en la ciudad de México son uno proceso de descentralización que inhiba un mayor crecimiento de la ciudad, un estricto y escrupulosamente implementado código de normas y procedimientos de construcción, la reglamentación del uso y mantenimiento de los inmuebles y la formulación de un adecuado sistema metropolitano de protección y defensa en caso de catástrofes naturales.



**Capítulo 5: Una Opción Real para  
Terremoto**

## 5. UNA OPCIÓN REAL PARA TERREMOTO

### 5.1. MOTIVACIÓN DE LA APLICACIÓN

El año 2005 estuvo marcado por catástrofes relacionadas a la naturaleza. Aproximadamente, la mitad de todos los eventos registrados que causaron pérdidas fueron tormentas, con un costo calculado por los economistas mundiales superior a los US\$185 billones. La catástrofe más severa en cuanto a pérdidas humanas fue el terremoto que ocurrió en octubre, en el área fronteriza entre Pakistán e India y, con la muerte de 88,000 personas, fue uno de los cinco terremotos más destructivos de los últimos 100 años.

Bajo estas circunstancias, en las que cada vez se ven y oyen más eventos destructivos, decidimos crear una *Opción Real que permitiera cubrirse en cierta medida contra los efectos de un terremoto*. La idea principal es proporcionar un producto financiero a toda la población de forma que, ante la eventualidad de un sismo y la pérdida de su patrimonio, pudiera resarcir el daño material causado. La comercialización de este producto estaría a cargo del gobierno, quien lo ofrecería a los particulares en pagos diferidos.

### 5.2. FUENTES

Para cuantificar los daños que se han registrado, hemos recurrido a la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, quien anualmente reporta los montos por siniestros a través de la SESA (Sistema Estadístico del Sector Asegurador). Para nuestros fines, los campos utilizados son los que abajo se presentan.

Cabe mencionar que sólo pudimos obtener información de los años 2002 a 2004, sabemos que en dicho periodo la siniestralidad debida a fenómenos sísmicos no es muy alta; sin embargo, los datos relativos a años como 1985 no se encuentran publicados.

Entidad	2002		2003		2004	
	Número de Siniestros	Monto de Siniestros	Número de Siniestros	Monto de Siniestros	Número de Siniestros	Monto de Siniestros
Aguascalientes	1	220,068	242	4,218,741	13	3,377,150
Baja California	3	79,192	1	98,649	0	
Baja California Sur	1	109,887	0		0	
Campeche	5	8,436,775	0		1	129,136
Chiapas	1	5,000	4	8,350,126	0	
Chihuahua	0		0		2	69,759
Coahuila	1	81,103	6	4,082,927	0	
Colima	1	27,715	31	8,993,503	2	94,693,715
Distrito Federal	43	18,306,820	63	160,064,257	51	55,934,280
Durango	0		1	330,000	2	25,077
Guanajuato	0		0		0	
Guerrero	11	553,507	3	90,214	0	
Hidalgo	1	72,000	0		0	
Jalisco	3	3,444,644	92	19,503,634	7	1,159,820
México	6	1,991,605	4	6,364,863	8	805,080
Michoacán	7	113,249	3	125,762	0	
Morelos	0		0		0	
Nayarit	91	7,390,686	0		0	
Nuevo León	1	186,446	24	3,762,892	0	26,324
Oaxaca	3	132,238	0		0	
Puebla	1	285,638	0		9	524,409
Querétaro	2	349,309	0		0	
Quintana Roo	2	1,549,259	0		2	86,410
San Luis Potosí	1	50,000	1	173,706	1	108,000
Sinaloa	3	4,219,516	0		0	
Sonora	1	122,111	0		2	368,735
Tabasco	0		0		0	
Tamaulipas	1	120,986	2	125,675	1	63,000
Tlaxcala	0		0		0	
Veracruz	2	153,117	2	2,322,390	0	
Yucatán	3	9,195,236	0		0	
Zacatecas	3	1,854,970	0		0	
<b>Total General</b>	<b>198</b>	<b>59,151,077</b>	<b>479</b>	<b>298,807,339</b>	<b>101</b>	<b>167,370,895</b>

**5.3. PRIMER ACERCAMIENTO: UTILIZAR LOS DATOS CONJUNTOS 2002, 2003 Y 2004 PARA SU REGRESIÓN**

Con los datos obtenidos de las SESAs queremos encontrar una distribución que ajuste a una ley de potencias, de forma que podamos modelar eventos raros y de colas pesadas, es decir, que los terremotos que causen daños catastróficos sean de frecuencia muy pequeña.

Para lo anterior utilizamos el programa MATLAB, considerando al monto promedio de los daños reportados como las abscisas, excepto aquellas entidades que reportaban 0, y la frecuencia de siniestros que tenía cada uno como las ordenadas.

Intentamos ajustar la función de potencia dada por  $g(x) = \beta x^\alpha$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes no determinados. Para determinar los coeficientes, primero obtenemos el logaritmo de la ecuación anterior  $\ln(g) = \alpha \ln(x) + \ln(\beta)$ .

Con las definiciones  $G = \ln(g)$ ,  $c_1 = \alpha$ ,  $c_2 = \ln(\beta)$  y  $X = \ln(x)$ , la ecuación  $\ln(g) = \alpha \ln(x) + \ln(\beta)$  se convierte en  $G = c_1 X + c_2$ . Entonces, el problema se reduce a una regresión lineal, esta ecuación se ajusta al conjunto de datos  $(\ln(x_i), \ln(y_i))$ .

Ahora, describimos los pasos de la regresión lineal, considerando la ecuación  $G = c_1 X + c_2$ . Ajustar una curva implica ajustar una función  $h(x)$  a un conjunto de datos dado,  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, L$ . La función  $h(x)$  puede ser un polinomio, una función no lineal o una combinación lineal de funciones conocidas. La función  $h(x)$  elegida para ajustar una curva debe tener cierto número de coeficientes no determinados. En general, el número de puntos de datos por ajustar,  $L$ , es mucho mayor que el número de coeficientes no determinados,  $k$ ; por tanto, el método para determinar los coeficientes se basa en la minimización de la discrepancias entre la función determinada y los puntos de datos, y recibe el nombre de *método de mínimos cuadrados*. Puesto que el número de puntos de datos es mayor que 2, la línea no puede ajustarse a todos los puntos, pero se determina minimizando las discrepancias entre línea y datos. La desviación de la línea respecto de los puntos está definida por:

$$r_i = y_i - h(x_i) = y_i - (c_1 x_i + c_2), \quad i = 1, 2, \dots, L$$

donde  $L$  es el número total de puntos de datos y  $c_1$  y  $c_2$  son las constantes por determinar.

La suma de las desviaciones elevadas al cuadrado es:

$$R = \sum_{i=0}^L r_i^2 = \sum_{i=0}^L (y_i - c_1 x_i - c_2)^2.$$

El mínimo de  $R$  ocurre cuando las derivadas parciales de  $R$  respecto de  $c_1$  y  $c_2$  son cero:

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -2 \sum_{i=1}^L x_i (y_i - c_1 x_i - c_2) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_2} = -2 \sum_{i=1}^L (y_i - c_1 x_i - c_2) = 0$$

Lo anterior puede describirse así:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

donde  $a_{1,1} = \sum_{i=1}^L x_i^2$ ,  $a_{1,2} = a_{2,1} = \sum_{i=1}^L x_i$ ,  $a_{2,2} = \sum_{i=1}^L 1 = L$  y  $z_1 = \sum_{i=1}^L x_i y_i$ ,  $z_2 = \sum_{i=1}^L y_i$ . La solución

de este sistema de ecuaciones es:

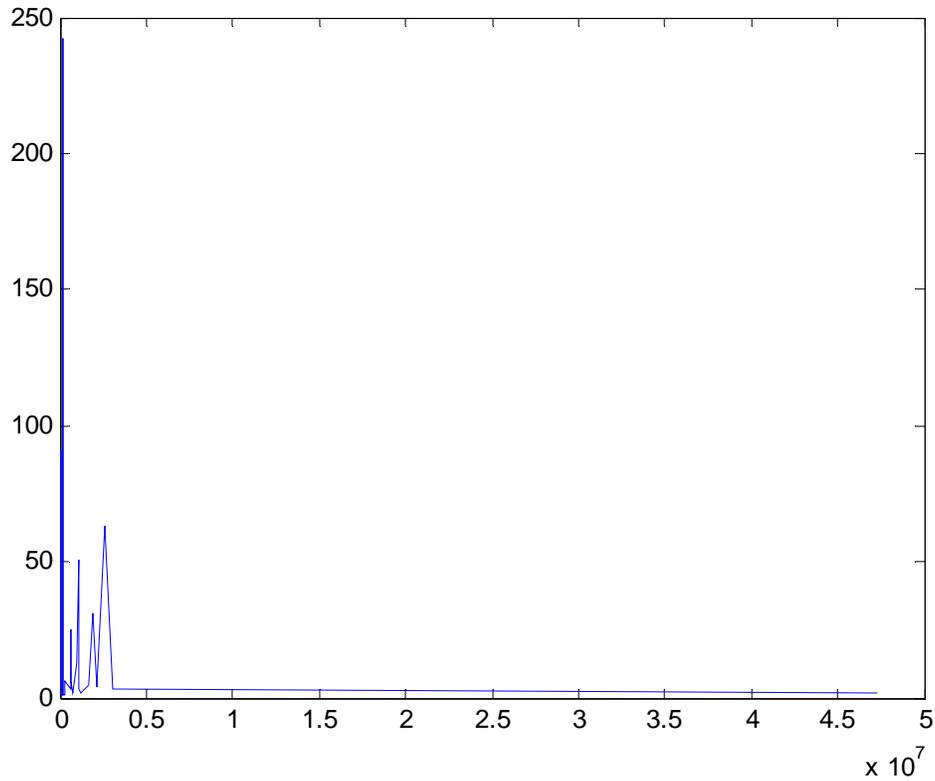
$$c_1 = (a_{2,2} z_1 - a_{1,2} z_2) / (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1})$$

$$c_2 = (a_{1,1} z_2 - a_{2,1} z_1) / (a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1})$$

A continuación mostramos el algoritmo introducido en MATLAB para obtener la recta de regresión:

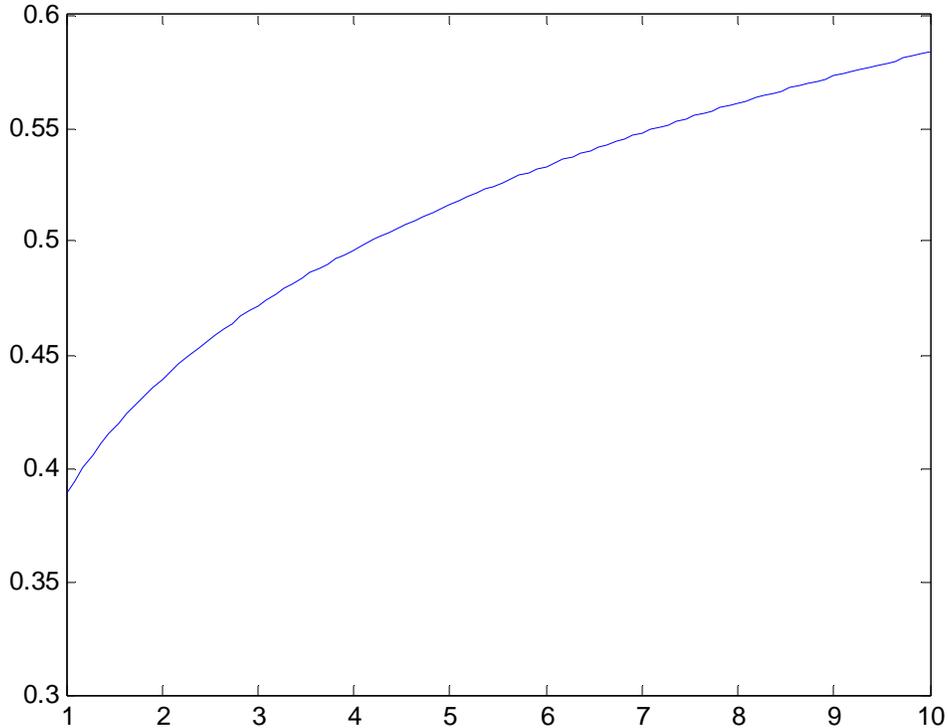
Programa	Resultado
'ABSCISA MONTO SIN CONJ, ORDENADA FRECUENCIA SIN CONJ; function terrfinal x=textread('MONTOCONJ.txt'); y=textread('FRECCONJ.txt'); c=polyfit(log(x),log(y),1) figure(1) plot(x,y);	c = α 0.1765 β -0.9449

La gráfica de los montos debidos a los daños registrados durante 2002 a 2004 es:



**Fig 5.1: Gráfica de los datos de las SESAs 2002-2004**

La recta de la regresión que se obtuvo fue  $\log(y) = 0.1765 \log(x) - 0.9449$  la cual corresponde a los logaritmos, la gráfica, para la ley de potencias que resulta  $y = \exp(-0.9449)x^{0.1765}$ , se presenta a continuación:



**Fig 5.2: Gráfica de la ley de potencias con  $y = \exp(-0.9449)x^{0.1765}$**

Esta gráfica tiene tendencia positiva, lo que a primera vista es sorprendente, ya que lo que se espera es una tendencia de pendiente negativa. Este hecho es la conocida *Ley de Richter*, que establece que la intensidad y la frecuencia de los sismos son inversamente proporcionales. El resultado de la gráfica se explica por la gran cantidad de datos (156) que tenemos en montos menores a 115,852, éstos representan 20% de las observaciones, en parte es explicado por el objeto del reporte de la información de la SESA de Terremoto, en ésta no sólo se dan a conocer los siniestros relativos a Terremoto, sino también los que se refieren a Erupción Volcánica y Hundimientos; esto en primera instancia sesga nuestros datos.

#### 5.4. SEGUNDO ACERCAMIENTO: DEPURACIÓN DE LOS DATOS

Para conseguir una ley de potencias utilizamos únicamente 3 datos, nos basamos en los extremos de la muestra y tomamos el promedio del resto de los datos que pertenecen a una zona sísmica, con esto queda:

Información de los Estados	No. de Siniestros	Monto de Siniestros	Monto Promedio	Log (No. de Siniestros)	Log (Monto Promedio)
Estados con monto inferior a \$150,000	381	44,139,718	115,852	5.942799375	11.66007119
Datos Promedio	20	22,032,692	1,081,359	3.014308659	13.89372926
Colima	2	94,693,715	47,346,858	0.693147181	17.67301101

El programa que introducimos ahora en MATLAB es:

Programa	Resultado
<pre>'ABSCISA MONTO SIN CONJ, ORDENADA FRECUENCIA SIN CONJ; function aplicacion x=[115852.2782,1081359.132,47346858]; y=[381,20,2]; c=polyfit(log(x),log(y),1) x1=linspace(1,10,100); y1=exp(15.3898)*x1.^(-0.8453); figure(1) plot(x1,y1);</pre>	$c = \alpha -0.8453 \beta 15.3898$

Bajo esta ecuación  $y = \exp(15.3898)x^{-0.8453}$  tenemos la siguiente gráfica:

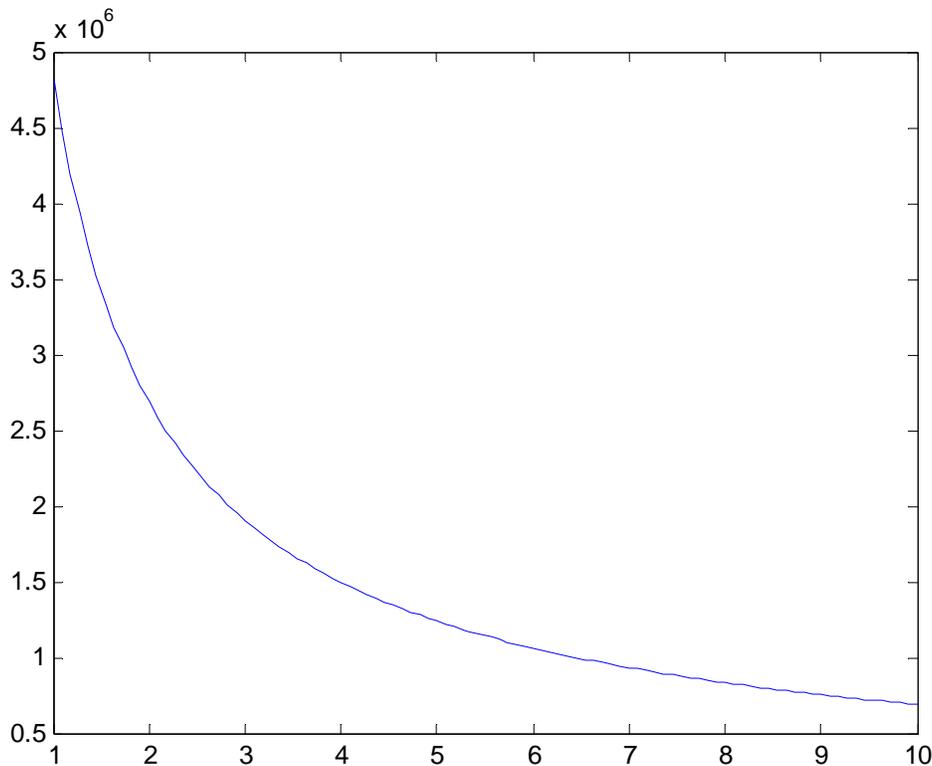


Fig 5.3: Gráfica de la ley de potencias con  $y = \exp(15.3898)x^{-0.8453}$

## 5.5. SIMULACIÓN DEL MONTO Y LA FRECUENCIA

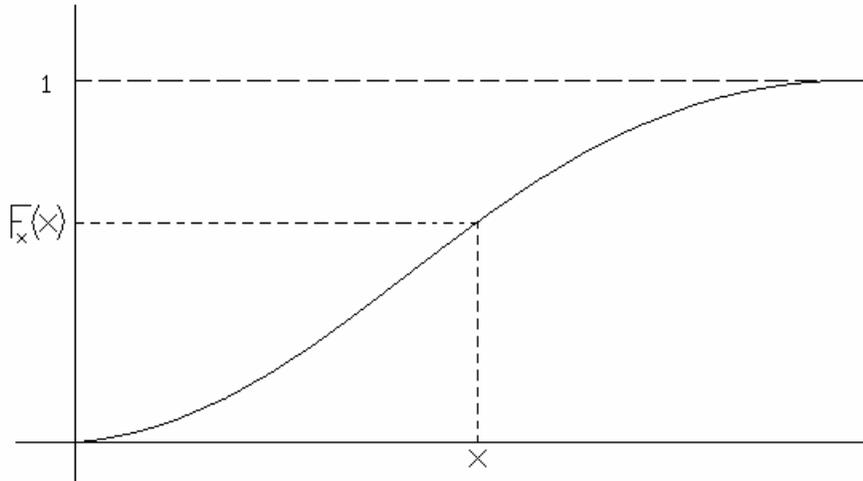
### 5.5.1. MONTO

Después de obtener la distribución de los daños e inmediatamente calcular la f.d.p., nos interesa crear una simulación de los mismos para reconocer el comportamiento de la función.

Para realizar la simulación es necesario generar números aleatorios cuya distribución de probabilidad esté dada por  $F_x$ .

Existen varios métodos para generar una variable aleatoria. En nuestro caso particular, decidimos emplear la función inversa de  $F_x$  por ser uno de los más sencillos y de fácil desarrollo.

Sabemos que  $F_x(x): \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$  y la gráfica de  $F_x$  es la siguiente.



**Fig 5.4: Función de distribución de una variable aleatoria**

Entonces, a partir de lo anterior tenemos que  $F_x^{-1}(x): [0,1] \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Como  $F_x(y) \in [0,1]$  podemos empezar por generar números aleatorios en el intervalo  $[0, 1]$ , a través de una variable aleatoria *Uniforme*  $[0, 1]$  ( $U_{(0,1)}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ). Si suponemos que dichos números aleatorios son las imágenes de  $F_x$  y usando el hecho de que si  $F_x^{-1}$  existe entonces:

$$F_x^{-1}[F_x(y)] = y.$$

Podemos generar números aleatorios ( $y$ ) cuya distribución sea  $F_x$ . La deducción es la siguiente:

Para obtener  $F_x(x)$  es necesario encontrar  $c$  de tal manera que  $\int_a^b \frac{x^{-\alpha}}{c} = 1$ , por lo que

tenemos que:

$$c = \int_a^b x^{-\alpha} = \frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Entonces  $F_x(y) = \int_a^y \frac{x^{-\alpha}}{c}$  con  $y \in [a, b]$ . Realizando los cálculos pertinentes

$$\int_a^y \frac{x^{-\alpha}}{c} = \frac{x^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)} \Big|_a^y = \frac{y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}.$$

Sea  $k = \frac{y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$ ,  $k \in [0, 1]$ . Despejando y tenemos que

$$y^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} = k \cdot c(1-\alpha)$$

$$y^{1-\alpha} = k \cdot c(1-\alpha) + a^{1-\alpha}$$

$$y = \left[ k \cdot c(1-\alpha) + a^{1-\alpha} \right]^{\left( \frac{1}{1-\alpha} \right)}$$

Poniendo el resultado anterior en términos de las cantidades que obtuvimos basándonos en nuestra simulación, obtenemos lo siguiente:

Si los daños están dados por  $\ell(x) = \frac{\exp(15.3898)}{x^{0.8453}}$ , la función de distribución

correspondiente es  $F_x(y) = \int_a^y \frac{x^{-0.8453}}{132.3}$  y su inversa

$$F_x^{-1}(k) = \left[ k \cdot 132.3 \cdot (1 - 0.8453) + 115852^{(1-0.8453)} \right]^{\left( \frac{1}{(1-0.8453)} \right)}.$$

Los límites de la integral son, respectivamente, 1,600,642,570 (el valor de la Torre Mayor en el

D.F.) y 115,852 y  $c = \frac{b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 132.3$ .

Los resultados de la simulación completa los resumimos en el siguiente cuadro:

Medida	Resultado Simulación
Máximo	1,600,296,592.84
Mínimo	116,232.64
Promedio	281,803,228.39
Desviación Estándar	403,489,171.16

### 5.5.2. FRECUENCIA

Dado el número de siniestros reportados en las SESAs 2002-2004, para la Ciudad de México, se calculó el promedio de éstos.

Distrito Federal	
Año	No. De Siniestros
2002	43
2003	63
2004	51
Promedio	52.33

La distribución propuesta para modelar el comportamiento del número de siniestros causados por sismos fue una *Poisson*  $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ . Sabemos que el mejor estimador para el

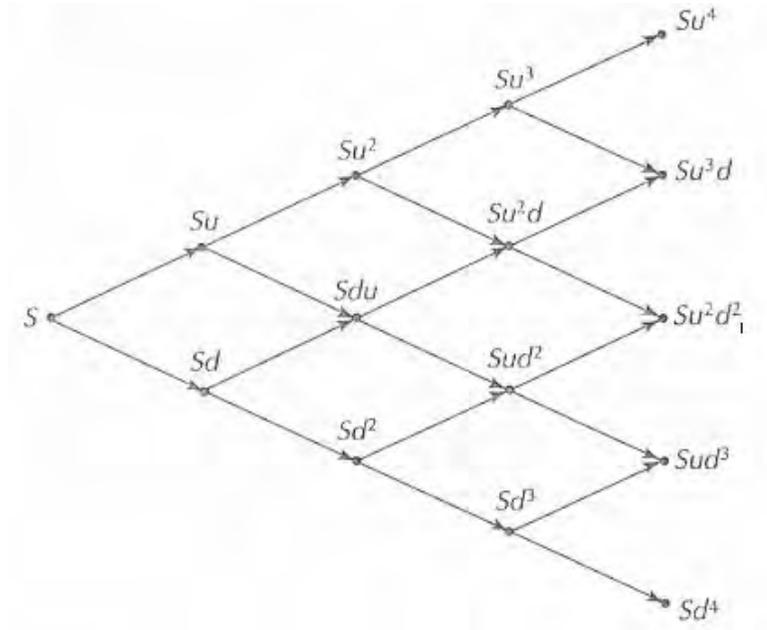
parámetro  $\lambda$  es  $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

De los datos registrados, resulta que el parámetro es  $\hat{\lambda} = 52.33$ , después de realizar diversas simulaciones, los resultados son:

Medida	Resultado Simulación
Máximo	70
Mínimo	37
Promedio	50.28
Desviación Estándar	7.35

### 5.6. CALIBRACIÓN AL MODELO DE ÁRBOLES BINOMIALES PARA LA VALUACIÓN DE LA OPCIÓN

Consideremos el modelo de árbol binomial mostrado en la Figura 5.5. El modelo es análogo al modelo multiplicativo ya que en cada paso el precio es multiplicado por una variable aleatoria.



**Fig. 5.1 Reticulado del Modelo Binomial**

En este caso, la variable aleatoria toma dos posibles valores  $u$  y  $d$ . Podemos encontrar valores adecuados para  $u$ ,  $d$  y  $p$  haciendo corresponder el modelo multiplicativo tan cercanamente como sea posible. Esto se logra relacionando el valor esperado del logaritmo de un cambio de precio y la variable del logaritmo del cambio de precio.

Para obtener la relación, sólo es necesario asegurarnos que la variable aleatoria  $S_1$ , que es el precio después del primer periodo, tenga las propiedades correctas ya que el proceso es idéntico en lo sucesivo. Tomando  $S(0) = 1$ , podemos calcular directamente

$$E(\ln S_1) = p \ln u + (1 - p) \ln d$$

$$\text{var}(\ln S_1) = p(\ln u)^2 + (1 - p)(\ln d)^2 - [p \ln u + (1 - p) \ln d]^2$$

$$= p(1 - p)(\ln u - \ln d)^2.$$

Con esto, los parámetros apropiados que relacionan las ecuaciones son

$$pU + (1 - p)D = v\Delta t \dots (5.1)$$

$$p(1 - p)(U - D)^2 = \sigma^2 \Delta t \dots (5.2)$$

donde  $U = \ln u$  y  $D = \ln d$ .

Notemos que existen tres parámetros a escoger y solamente hay dos que son requeridos; entonces, sólo hay un grado de libertad. Una forma para usar este grado de libertad es haciendo  $D = -U$  (lo cual es equivalente a  $d = 1/u$ ). En este caso, las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\begin{aligned}(2p - 1)U &= v\Delta t \\ 4p(1 - p)U^2 &= \sigma^2 \Delta t.\end{aligned}$$

Si elevamos al cuadrado la primera ecuación y la sumamos a la segunda, se obtiene:

$$U^2 = \sigma^2 \Delta t + (v\Delta t)^2.$$

Despejando  $U$ , tenemos:

$$\begin{aligned}\ln u &= \sqrt{\sigma^2 \Delta t + (v\Delta t)^2} \\ \ln d &= -\sqrt{\sigma^2 \Delta t + (v\Delta t)^2}.\end{aligned}$$

para  $\Delta t$  muy pequeña, las dos ecuaciones anteriores implican que:

$$\begin{aligned}u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.\end{aligned}$$

### 5.7. AJUSTE AL MODELO MULTIPLICATIVO PARA RIESGOS CATASTRÓFICOS

En el caso de los mercados financieros, la valuación de opciones se basa en el supuesto de que el precio del activo subyacente sigue un comportamiento lognormal. Pero en el caso de los riesgos catastróficos ¿qué comportamiento siguen estos riesgos? O en todo caso ¿cómo afectan el comportamiento del precio de un bien inmueble?

Nosotros proponemos el siguiente modelo:

$$S(k + 1) = S(k) \cdot U(k)$$

donde  $S(k + 1)$  es el precio de un bien inmueble en el instante  $k + 1$ ,  $S(k)$  es el precio del bien inmueble en el momento  $k$  y  $U(k)$  es una variable con las siguientes características:

$$U(k) = V(k) \cdot W(k)$$

donde

- $V(k)$  es una variable aleatoria con distribución uniforme  $U(0.8, 1.2)$ , que involucra al conjunto de factores que no corresponden a los riesgos debidos a terremoto, que pudieran afectar el valor de un bien inmueble (deterioro, mantenimiento, hundimiento, etc.).
- $W(k)$  es una variable aleatoria relacionada con el valor de la estructura tras la valuación de ésta, después de un terremoto. Para obtener dicha relación es necesario analizar la distribución de los daños con respecto a un bien inmueble.

Consideremos un inmueble cuyo valor es  $S_0$ , en este caso los daños que podemos tener por un desastre varían en el intervalo  $[0, S_0]$ . Dado este hecho, el valor del inmueble en tras la ocurrencia de un terremoto sería del orden de  $S_0$  menos los daños sufridos en la estructura debido a la catástrofe. Tomando en consideración el rango de los daños y el valor del inmueble después del siniestro, veamos lo siguiente:

$W(k)$  pertenece al intervalo  $[0, 1]$  ya que después de un terremoto, el valor de los daños no puede superar al valor de la estructura completa, para esto no tomamos en cuenta los contenidos del edificio ni pérdidas consecuenciales. Notemos que el índice  $k$  es el momento en el que se presenta  $W(k)$ . Las variables aleatorias  $W(i)$  para  $i = 0, \dots, k$  son idénticamente distribuidas.

### Búsqueda de $W$

Definimos  $Z$  como el valor de los daños. Según los datos con los que trabajamos,  $Z$  se distribuye de la siguiente manera:

$$f_z(z) = \beta \cdot z^{-\alpha} \quad z \in [a, b] \quad \text{con} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Observemos que las unidades de  $Z$  están en pesos. Como la distribución que necesitamos debe estar en el rango  $[0, 1]$ , debido a que la variable es proporcional al valor del inmueble, consideremos lo siguiente:

$$N = Z/C$$

donde  $C$  es la máxima pérdida probable.

Recordemos que si  $X$  es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad (f.d.p.)  $f_X$  y  $Y = g(X)$ , entonces la f.d.p. de  $Y$  está dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) \right| & \text{si } y = g(x) \text{ p.a. } x \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

De modo que, con esta transformación, obtenemos la distribución del porcentaje de los daños sufridos por una estructura debida a los sismos presentados en un periodo de tiempo fijo y determinado.

La función de densidad de  $N$  es, entonces:

$$C^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot n^{1-\alpha}$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son los mismos parámetros de la variable  $Z$ , y  $C$  es como describimos anteriormente; con esto  $N$  está en  $[0,1]$

El valor de la estructura después de ocurrido un terremoto es

$$S_0 - S_0 N = S_0(1 - N)$$

Si definimos a  $M = 1 - N$ ,  $M$  en  $[0,1]$ , la función de densidad de  $M$  es

$$C^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot (1 - m)^{1-\alpha}$$

con los mismos parámetros que en el caso de  $N$ .

Con esto, hemos hallado a  $W$  que tiene la siguiente forma:

$$f_W(w) = C^{1-\alpha} \cdot \beta \cdot (1 - w)^{1-\alpha}$$

A partir de este momento, conocemos en esencia la forma de la variable aleatoria  $U$ . Bajo estos argumentos, podemos aplicar el modelo multiplicativo y encontrar los parámetros de éste.

### 5.8. PARÁMETROS DEL MODELO DE AJUSTE A EVENTOS CATASTRÓFICOS

Los valores sucesivos de las estructuras bajo este modelo multiplicativo pueden ser encontrados como sigue:

$$S(k) = U(k-1) \cdot U(k-2) \cdots U(0) \cdot S(0)$$

Calculando el logaritmo natural de esta ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln S(k) &= \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \ln U(i) \\ &= \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \ln V(i) + \sum_{i=0}^{k-1} \ln W(i) \\ &= \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} V'(i) + \sum_{i=0}^{k-1} W'(i) \end{aligned}$$

donde  $V'(i) = \ln V(i)$  y  $W'(i) = \ln W(i)$ .

Las funciones de densidad correspondientes son:

$$\begin{aligned} f_{V'}(v') &= 2.5 \cdot e^{v'} \quad v' \in [\ln 0.8, \ln 1.2] \\ f_{W'}(w') &= 0.2006 \cdot (1 - e^{w'})^{-0.8453} \cdot e^{w'} \quad w' \in [-\infty, 0] \end{aligned}$$

Si cada  $V'(i)$  tiene esperanza  $\bar{V}'(i) = \nu$  y varianza  $\sigma_{V'}^2$ , y cada  $W'(i)$  tiene esperanza  $\bar{W}'(i) = \mu$  y varianza  $\sigma_{W'}^2$ , y ya que todas son mutuamente independientes, tenemos que:

$$\begin{aligned} E[\ln S(k)] &= E[\ln S(0)] + E[\ln U(k)] \\ E[\ln S(k)] &= \ln S(0) + E[\ln V(k)] + E[\ln W(k)] \\ E[\ln S(k)] &= \ln S(0) + E[V'(k)] + E[W'(k)] \\ E[\ln S(k)] &= \ln S(0) + k\nu + k\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\ln S(k)] &= \text{Var}[\ln S(0)] + \text{Var}[\ln U(k)] \\ \text{Var}[\ln S(k)] &= \text{Var}[\ln V(k)] + \text{Var}[\ln W(k)] \\ \text{Var}[\ln S(k)] &= \text{Var}[V'(k)] + \text{Var}[W'(k)] \\ \text{Var}[\ln S(k)] &= k\sigma_{V'}^2 + k\sigma_{W'}^2 \end{aligned}$$

Tomemos a  $S(0) = 1$ . Después de realizar los cálculos necesarios los resultados que obtuvimos fueron los siguientes:

En el caso de  $\sum_{i=0}^{k-1} V'(i)$  es posible obtener ambos parámetros directamente

$$\begin{aligned} E[\ln V(k)] &= E[V'(k)] = -0.006748227 \cdot k \\ \text{Var}[\ln V(k)] &= \text{Var}[V'(k)] = 0.013588276 \cdot k \end{aligned}$$

No ocurre lo mismo en el caso de  $\sum_{i=0}^{k-1} W'(i)$ , pues para obtener ambos parámetros es necesario recurrir a métodos numéricos con lo que obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} E[\ln W(k)] &= E[W'(k)] = -0.29710054 \cdot k \\ \text{Var}[\ln W(k)] &= \text{Var}[W'(k)] = 0.37807337 \cdot k \end{aligned}$$

Y a partir de las últimas líneas tenemos que:

$$\begin{aligned} E[V'(k)] + E[W'(k)] &= -0.30384877 \cdot k \\ \text{Var}[V'(k)] + \text{Var}[W'(k)] &= 0.391661646 \cdot k \end{aligned}$$

Y en este momento sólo resta calcular el valor de la opción de venta con base en los datos que obtuvimos.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.625828767\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{-0.625828767\sqrt{\Delta t}}$$

Finalmente resolvamos un ejemplo.

Imaginemos que tenemos un inmueble por un valor de \$1'000,000. Y quisiéramos tener la certeza de poder resarcirlo en al menos \$800,000 pasado un año aún en el caso de que ocurriera un sismo y la estructura sufriera cuantiosos daños, de modo que el valor del inmueble se redujera. Esto lo podemos ver como una *opción americana de venta*. El tiempo es de 1 año. Dividamos el tiempo en 5 periodos (es decir  $\Delta t = 0.2$ ). Supongamos que la tasa de interés libre de riesgo en estos momentos es del 5% anual. A continuación los reticulados binomiales nos muestran cómo se comportaría el precio de nuestro bien

inmueble y el valor de la opción, respectivamente. Los cálculos fueron hechos a través de la Macro que creamos en Excel y cuyo código fuente aparece en el apéndice.

					4,052,750.01
				3,063,372.8	
			2,315,527.21		2,315,527.21
		1,750,249.36		1,750,249.36	
	1,322,969.9		1,322,969.9		1,322,969.9
1,000,000		1,000,000		1,000,000	
	755,875.096		755,875.096		755,875.096
		571,347.161		571,347.161	
			431,867.09		431,867.09
				326,437.578	
					246,746.036

Fig 5.6 Reticulado del bien inmueble

					0
				0	
			0		0
		7,194.27087		0	
	46,857.6026		13,168.9894		0
118,150.337		79,928.3527		24,105.6091	
	178,211.176		135,610.713		44,124.9039
		261,289.158		228,652.839	
			368,132.91		368,132.91
				473,562.422	
					553,253.964

Fig 5.6 Reticulado de la opción

5.9. COBERTURA DELTA

Imaginemos una cartera (un conjunto) que consiste en una posición larga en  $\Delta$  inmuebles y una posición corta en una opción  $\Delta s - f$ . Calculamos el valor de  $\Delta$  que hace que la cartera sea libre de riesgo. Si hay un movimiento de subida en el valor de los inmuebles, el valor de la cartera al final de la vida de la opción será

$$S_o u \Delta - f_u.$$

Si hay un movimiento de bajada en el valor de los inmuebles, éste es:

$$S_o d \Delta - f_d.$$

Los dos valores de cartera son iguales cuando:

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

o

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}$$

En este caso, la cartera es libre de riesgo y debe ganar el tipo de interés libre de riesgo. La ecuación anterior muestra que  $\Delta$  es el ratio entre el incremento en el precio de la opción y la variación en el valor de los inmuebles cuando nos movemos entre nodos.

Es posible apreciar que no hay diferencia alguna en la delta con respecto a la obtenida en el cálculo del precio de una opción financiera. Esto se debe a que en esencia no hay un cambio significativo en la obtención del precio de la opción. Por lo que en nuestro caso la cobertura delta se calcula de la misma manera.

#### 5.10. ALCANCE DE LA OPCIÓN REAL Y SU HORIZONTE

A continuación discutimos la aplicabilidad y limitaciones de nuestro modelo. Uno de los primeros obstáculos que tuvimos que enfrentar fue la falta de datos (en cantidad y en calidad). Los datos que tenemos nos proporcionan solamente el número de siniestros y el monto por el total de esos siniestros, en un estado particular, en el periodo 2002 a 2004. A partir de ello, trabajamos con el monto promedio anual de los siniestros por estado. Debido a esto tuvimos que hacerle frente a diferentes cuestiones:

- Se trabajó como si el tipo de suelo en la franja sísmica del pacífico fuera el mismo, es decir, como si no hubiera diferencias en la conformación del subsuelo.
- No tenemos una clasificación de los daños de acuerdo al tipo de estructura, altura, medidas contra sismos, etc.
- Los años que se involucran en el estudio no son de mucha actividad sísmica, por lo que se podría decir que el modelo obtenido es para años de baja sismicidad.
- Además, si unimos lo anterior con el hecho de que la mayoría de las estructuras en la región de estudio han sido diseñadas para resistir sismos de magnitud considerable y

- Sólo un porcentaje de la población tiene asegurados sus bienes inmuebles, resulta por demás obvio que los resultados pueden mejorarse para épocas de mayor actividad sísmica.

A pesar de todo lo anterior, la depuración de los datos con los que contábamos fue basada en argumentos geológicos.

### **5.11. CONCLUSIONES Y PRÓXIMOS PASOS**

Hay muchas áreas de oportunidad donde se puede profundizar en un mayor grado, para trabajos como el presente

Es necesario un esfuerzo conjunto de gobierno, instituciones, empresas y la sociedad en general para poder generar la información necesaria. Tal como se hace con los censos de población debería de crearse una base de datos de las características de los inmuebles a lo largo del país (antigüedad, número de pisos, medidas de seguridad contra sismos, características del suelo donde se asienta, tiempo y medidas de mantenimiento, localización geográfica).

Posteriormente, al lado de un equipo de profesionales de distintas áreas se podría realizar un análisis técnico, estructural, topográfico, económico y financiero más completo. Esto con el fin de crear una gran variedad de modelos que nos permitieran una mejor estimación del comportamiento de las estructuras y las consecuencias de un sismo sobre ellas. Entre los diferentes profesionales podríamos considerar: estadísticos, ingenieros, geólogos, economistas, demógrafos. Por ejemplo, sería conveniente tener una simulación de diversas estructuras bajo los efectos de los sismos y del paso del tiempo, para así evaluar las posibles consecuencias ante la presencia de un siniestro. También sería de mucha ayuda tener datos históricos de los efectos causados sobre las estructuras ya existentes por los diferentes sismos que han ocurrido en un periodo de 30 años al menos, según el tipo de construcción, el tipo de suelo, la zona geográfica, etc.

Con todo lo anterior podría proponerse un modelo que nos permitiera estimar las consecuencias en caso de presentarse un sismo según el tipo de suelo, tipo y características de la construcción, para de esta manera buscar financiar un fondo suficiente y poder minimizar los efectos negativos para una región determinada. Asimismo, con el paso del tiempo, se tendrían datos que permitieran construir edificaciones más seguras, infraestructura más resistente, en lugares más apropiados e incluso medidas de prevención más eficientes, pues es mucho mejor invertir en

previsión que en restauración. En ningún momento se ha buscado un producto que compita con los seguros, sino más bien algo que los complemente, pensando en los espacios que las aseguradoras no pueden abarcar.

Los resultados de la presente investigación pueden ayudar a conocer mejor diversos factores que giran en torno a un sismo, a construir mejor las nuevas estructuras, a crear legislaciones referentes tanto a las especificaciones de una construcción, como al lugar de nuevos asentamientos (algo muy evidente en edificios ubicados muy cercanos a las barrancas). La Ciudad de México seguirá creciendo, pero es necesario que se regule dicho crecimiento, pues algunas inmobiliarias y muchas personas no tienen una visión a futuro de lo que puede representar colocar una casa en tal o cual lugar. Los problemas que aquejan al Distrito Federal en términos de vivienda y espacio deben ser tratados con la importancia que nos merecen.



**Apéndices**

## A. MODELACIÓN ESTOCÁSTICA EN LOS MERCADOS FINANCIEROS

### A.1. INTRODUCCIÓN

La modelación de la realidad económica no ha sido ajena a la incursión de técnicas matemáticas y estadísticas, pudiéndonos remontar a las lejanas fechas de mediados del siglo XVII, en donde los trabajos de *Sir William Petty*, en especial su *Aritmética Política*, fueron pioneros en introducir de forma estructurada los métodos cuantitativos, en general, y la estadística, en particular, en el estudio de la economía. Desde entonces esta tendencia, lejos de ser ocasional, ha arraigado en el núcleo de la teoría económica, dando lugar a toda una rama de la economía conocida como economía matemática.

Esta presencia de las matemáticas en la teoría económica actual, es mucho más patente en el campo de la economía financiera. Aunque la estadística y los mercados financieros, si tenemos en cuenta las manifestaciones de *Andrew W. Lo*<sup>1</sup>, han estado unidos de manera indisoluble desde la publicación, en 1565, de *Liber de Ludo Aleae* por *Cardano*, nosotros preferimos remontarnos a una fecha mucho más reciente como la de 1900.

En dicho año, *Louis Bachelier* introduce la generalización en tiempo continuo de la caminata aleatoria, lo que hoy se conoce como *movimiento browniano*. Este hecho ha demostrado tener una gran influencia en la modelación de las series financieras. *Bachelier* en su tesis doctoral, en 1900, establece que las variaciones de los precios especulativos se distribuyen de manera *gaussiana*.

El movimiento browniano y sus transformaciones y generalizaciones, para lo cual es necesaria la herramienta matemática del cálculo estocástico, es la piedra angular de la modelación estocástica de los mercados financieros hoy en día. El objetivo de este apéndice es exponer las características básicas del movimiento browniano y resaltar el carácter complejo del mismo, ya que a partir de generalizaciones en tiempo continuo de modelos lineales obtenemos como resultado una serie de procesos estocásticos cuyas propiedades son aptas para la modelación del mercado financiero; pero lo destacable de este hecho, es que a partir de modelos lineales en tiempo continuo obtenemos procesos con una complejidad geométrica, como se demuestra con el hecho de que poseen una dimensión fractal, y dichos procesos son aptos para explicar el funcionamiento de los mercados financieros.

---

<sup>1</sup>Lo, A.W. (2000) *Finance: A selective survey*. JASA, vol 95, No. 450, p. 629.

## A.2. MODELACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS: UNA BREVE INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

*M. Davis*<sup>2</sup> establece el inicio de la *Matemática Financiera* en 1900, junto exposición de la Tesis Doctoral de *Louis Bachelier Théorie de la Speculation*.

La tesis de *Bachelier* puede considerarse como visionaria en su época. En dicha obra se encuentra la génesis del análisis moderno de los mercados financieros. *Bachelier* fue el primero en plantear la hipótesis de que las variaciones de los precios financieros son independientes y se distribuyen de manera Gaussiana, lo que es equivalente, en nuestra terminología, a decir que los precios financieros en un instante  $t$  están gobernados por un proceso estocástico de incrementos independientes y que se distribuyen de acuerdo a un modelo Gaussiano o Normal.

A pesar de la excelente teoría sobre el movimiento browniano desarrollada por *Bachelier*, (donde se exponen conceptos sobre procesos estocásticos que hoy día se reconocen bajo denominaciones de martingala, ecuación de *Chapman-Kolmogorov*, o ecuación del calor) las ideas y métodos que contenía su tesis permanecieron en un segundo plano, debido quizás a la enorme influencia que las ideas de *Albert Einstein* han tenido durante todo el siglo pasado en los campos del conocimiento.

Pero este olvido también cayó sobre los aspectos económicos desarrollados en la tesis de *Bachelier*. Esto se puede explicar por un cúmulo de razones. Por un lado, la hipótesis de paseo aleatorio entraba en contradicción con las ideas prevalecientes en la época, en parte por la escasa formación matemática y estadística de los economistas de la época que suponían que la variación de los precios financieros era un reflejo de las variaciones de la economía real y, por tanto, debían presentar tendencias y ciclos de mayor y menor frecuencia solapados, por lo que la estimación de estos componentes individualmente posibilitaría la predicción de dichas variaciones. Por otro lado, la inercia del mundo financiero, encerrado en las prácticas de las llamadas matemáticas mercantiles, y ajeno, por tanto, al desarrollo de nuevos y complejos métodos. El resultado de todas estas prácticas queda reflejado en que, como *Cowles* muestra en sus artículos publicados<sup>3</sup> en *Econometrica* en 1933 y 1944, los resultados globales conseguidos por los más reputados profesionales dedicados al análisis de los mercados financieros no son mejores que los que se hubiesen obtenido por una inversión al azar.

---

<sup>2</sup> Davis, M. (2001) *Mathematics of Financial Markets* en *Mathematics Unlimited 2001 and Beyond* (Engquist, B. y Schmid, W. Ed.), Springer-Verlag.

<sup>3</sup> Cowles, A. (1933) *Can Stock Market forecasters forecast?* *Econometrica*, vol. 1, p. 309-324 y Cowles, A. (1944) *Stock Market Forecasting*. *Econometrica*, vol. 11 p. 206-214

Hasta mediada la década de los sesenta, con la introducción por *Paul Samuelson*<sup>4</sup> del movimiento browniano geométrico, comienza el periodo más importante de la Matemática Financiera.

El estudio de unos mercados financieros, cada vez más desarrollados y con productos cada vez más complejos, exige el desarrollo de una metodología para la determinación de los precios de los activos correspondientes y para el análisis de los mismos. El modelo de *Bachelier* dista mucho de ser definitivo, ya que contenía ideas cuya maduración y consolidación teórica tuvieron que esperar a los trabajos fundamentales de matemáticos como *Norbert Wiener*, *Paul Levý*, *Andrey Nikolaevich Kolmogorov*, *Joseph Leo Doob*, *Kiyosi Itô* y *Paul-André Meyer*, en un periodo que va desde los años veinte hasta los años sesenta del pasado siglo, trabajos de una elevada dificultad matemática lo que también ha contribuido a su difusión retardada entre los economistas.

Esta difusión podemos considerar que tiene su origen a partir de la década de los 50, sobre todo a raíz de la publicación de unas conferencias impartidas en 1953 por *M. Kendall* en la *Royal Statistical Society* con nombre *The Analysis of Economic Time-Series*, en donde dicho autor al analizar las series financieras concluye que los datos financieros parecían elaborados como si “el demonio del azar eligiera un número aleatoriamente...y lo añadiera al precio actual para determinar el siguiente...precio”<sup>5</sup>. El interés por un mayor estudio de la dinámica de las series financieras y por la elaboración de diversos modelos probabilísticos para la explicación de las variaciones de los mismos ha crecido significativamente desde la publicación del artículo de *Kendall*. Un hito en esta corriente son los trabajos realizados por *Black*, *Scholes* y *Merton*, entre otros.

*Black* y *Scholes*, con la ayuda de *Merton*, obtuvieron a principios de los años 70 una fórmula para la determinación de los precios de las opciones. Mediante un procedimiento se construye una hipotética cartera de valores en la que los riesgos de los activos que forman dicha cartera, acciones y opciones, en este caso, se neutralizan. El rendimiento de dicha cartera, exenta de riesgo, se puede igualar a la de un activo libre de riesgo. A partir de dicho procedimiento se deriva la fórmula, fundamental para la valuación de algunos tipos de opciones.

---

<sup>4</sup> Samuelson, P. (1965) *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. Industrial Management Review 6, p. 41-50

<sup>5</sup> En Shiryaev, A.N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, theory, models*. p. 38

En palabras de *Stix*<sup>6</sup>: “Las matemáticas implícitas en la ecuación de *Black-Scholes* consisten en cálculos estocásticos descendientes de la obra de *Bachelier* y *Einstein*. Estas ecuaciones no constituían en absoluto el proceder habitual de los programas de administración de empresas. Físicos, informáticos y economistas desempeñan ahora un importante papel en los colosos financieros de *Wall Street*”

Superado este obstáculo, el gran avance de las matemáticas en la teoría económica, ha posibilitado que, hoy día, el estudio de los mercados financieros se haya consolidado con el instrumental derivado del cálculo estocástico, como muestra el reconocimiento mundial y social del mismo por la prestigiosa *Fundación Nóbel*.

### A.3. EL MOVIMIENTO BROWNIANO.

En 1827 *R. Brown* observó que el movimiento de una partícula coloidal sumergida en el agua, consecuencia de la difusión termal de las moléculas de agua que se movían incesantemente y bombardeaban la partícula, era en un zig-zag aleatorio. El que las grandes partículas sumergidas en agua no se movieran, fue explicado en 1904 por *H. Poincaré* como consecuencia de la ley de los grandes números, ya que las moléculas del medio que le rodean actúan contra ella golpeándola en todas direcciones anulándose las unas con las otras.

La explicación de este movimiento fue dada por *Einstein* en 1905, y constituyó la prueba irrefutable de la teoría molecular además de establecer el carácter gaussiano de las variables implicadas, y *Smoluchowski* en 1916 de manera independiente. Sin embargo una formulación matemática rigurosa del mismo no fue dada hasta una década más tarde por *N. Wiener*. En consecuencia este proceso estocástico es conocido por el nombre de proceso de *Wiener* o *Movimiento Browniano*.

*Bachelier* en 1900 introdujo dicho movimiento, al que denotaremos como  $B(t)$ , como la contrapartida en tiempo continuo de la caminata aleatoria. Para justificar este hecho es necesario notar que aunque las trayectorias muestrales del movimiento browniano son continuas, no son diferenciables en ningún punto; no obstante, bajo un marco conceptual distinto<sup>7</sup> se puede demostrar que se puede construir la derivada de un movimiento browniano como un proceso estocástico generalizado, dicho proceso sería un proceso gaussiano con esperanza nula y varianza infinita e independiente con respecto a sí mismo en diferentes instantes del tiempo, lo que se conoce con el

<sup>6</sup> Stix, G. (1998) *Un cálculo del riesgo*, p.27

<sup>7</sup> Véase Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and applications*, p. 50-56.

nombre de “*ruido blanco*”. Una caminata aleatoria es un proceso estocástico del tipo de un ruido blanco pero con varianza constante y finita, que es el proceso habitual para representar las perturbaciones aleatorias utilizadas en la modelación en tiempo discreto.

Las propiedades de los movimientos brownianos son bastante sutiles. La no diferenciabilidad en ningún punto a pesar de ser continua muestra el carácter sumamente irregular que presenta una trayectoria típicamente browniana. No obstante, estas propiedades básicas del movimiento browniano, no son suficientes para definirlos de manera precisa, es necesario añadir la independencia de sus incrementos, es decir, la variación de un movimiento browniano es independiente de las variaciones del movimiento en instantes pasados, además dichos incrementos se distribuyen de manera Gaussiana. Otras propiedades interesantes del movimiento browniano son la ausencia de agrupamientos en el tiempo de los periodos de grandes variaciones y la ausencia de comportamiento cíclico aparente, aunque una trayectoria infinita de un movimiento browniano pasará infinitas veces por todos los valores del eje de ordenadas.

Más relevantes son para nuestros propósitos las propiedades de invarianza del mismo. Así un movimiento browniano es *estacionario estadísticamente*, es decir la distribución no se ve afectada por traslaciones temporales. La distribución del movimiento browniano en intervalos de igual longitud es idéntica, la distribución sólo depende del lapso de tiempo. La distribución del movimiento browniano también es invariante, salvo constantes de proporcionalidad, ante cambios de escala en el tiempo, es decir si en un lapso entre dos instantes de tiempo existe una razón de proporcionalidad, la distribución del intervalo mayor se puede obtener como la distribución del intervalo menor multiplicándola por la razón de proporcionalidad. Son estas propiedades de invarianza la que le proporcionan el carácter fractal al movimiento browniano. De hecho, puede considerarse que una trayectoria browniana en un intervalo es la réplica, en términos probabilísticos, de la trayectoria en un intervalo más pequeño. Es lo que *Mandelbrot*<sup>8</sup> reconoce como un proceso auto-afín.

No es complicado demostrar que las trayectorias de un movimiento browniano en cualquier intervalo finito son no rectificables y de variación no acotada, por tanto la longitud de cualquier arco finito de un movimiento browniano es infinita. De hecho, el movimiento browniano unidimensional tiene dimensión<sup>9</sup> de recuento de cajas igual a 1.5. Por tanto las trayectorias muestrales que describe un movimiento browniano son fractales. Este hecho, toma toda su

---

<sup>8</sup> Mandelbrot, B. (1997) *A multifractal model of asset returns*, p. 7

<sup>9</sup> Mandelbrot, B. (2001) *Gaussian Self-Affinity and Fractals*, p. 124

relevancia si tenemos en cuenta que el movimiento browniano es el proceso clave para el desarrollo del cálculo estocástico y en consecuencia de la modelación estocástica en tiempo continuo de los mercados financieros.

#### A.4. EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

El *cálculo estocástico* se basa en el concepto de integral estocástica, es decir, la construcción de una integral en la que el término con respecto al que integramos es un proceso estocástico. En lo que se refiere a nuestros propósitos el papel de integrador es jugado por un movimiento browniano estándar<sup>10</sup>.

El campo financiero es un campo en que estos modelos tienen muchísimas y muy variadas aplicaciones. En la modelación de las magnitudes financieras<sup>11</sup>, se suelen establecer como hipótesis que las magnitudes se comportan como determinados procesos estocásticos y, para la obtención de las distribuciones de magnitudes relacionadas con este proceso, es necesario plantear y resolver integrales estocásticas. Es necesario por tanto definir en cierto sentido integrales del tipo

$$\int_0^t f(s, \omega) dB(\omega)$$

de manera que dicha integral exista y sea coherente. El hecho de que el movimiento browniano es de variación no acotada, nos lleva a que no podamos interpretar dicha integral en el sentido usual de una integral de *Riemann-Stieltjes*.

Históricamente, el concepto de integral para el caso en que el integrador es un movimiento browniano cuando el integrando es un conjunto de funciones aleatorias con determinadas propiedades, fue desarrollado por *K. Itô* en 1944 en un artículo titulado *Stochastic Integral* publicado en los *Proceedings* de la Academia Imperial de Tokio, aunque como *Shiryayev*<sup>12</sup> constata y el propio Itô reconoce<sup>13</sup>, el primero en definir la integral estocástica fue *N. Wiener* en 1934 para integrandos no aleatorios suaves y de cuadrado integrable. La manera de definir la *integral*

<sup>10</sup> El hecho de que sea habitualmente el movimiento browniano el integrador en las integrales estocásticas reside en aspectos muy técnicos. En particular se debe a las propiedades del mismo, particularmente al hecho de que sea una martingala de cuadrado integrable. El cálculo estocástico se ha venido desarrollando continuamente a lo largo de este siglo, sustituyendo el movimiento browniano por otros procesos estocásticos más generales. No obstante, no conocemos aplicaciones financieras de dicho tipo de integrales más generales.

<sup>11</sup> Actualmente existe una vastísima literatura sobre el tema, a modo de ejemplo se pueden consultar los libros de Shiryayev, A.N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. World Scientific, Merton, R.C. (1992) *Continuous-Time Finance*. Blackwell, o Bisière, C. (1997) *La structure par terme des taux d'intérêt*. Presses Universitaire de France.

<sup>12</sup> Shiryayev, A.N. (1999) *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*, p.251

<sup>13</sup> Itô, K. (1951) *On Stochastic Differential Equations*, p.2

*estocástica*, en palabras de Mandelbrot<sup>14</sup>...si [el integrador] estuviera reducido a un número de saltos, tal integral sería simplemente una suma de variables aleatorias. De otra manera, [la integral estocástica] se construye con la ayuda de sumas aleatorias auxiliares de la misma manera que una integral ordinaria se construye con la ayuda de sumas auxiliares”. Por tanto una integral estocástica se define como el límite, en cierto sentido, de una suma de variables aleatorias. La integral estocástica una vez definida, es una integral que básicamente conserva las propiedades de una integral ordinaria. De hecho es un operador lineal, es decir la integral estocástica de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales de estocástica de las funciones. Queremos, por último, resaltar que los resultados de una integral estocástica son procesos estocásticos.

Íntimamente relacionado con esta idea está el concepto de *ecuación diferencial estocástica*<sup>15</sup>. Básicamente una ecuación diferencial estocástica es una generalización del concepto de ecuación diferencial ordinaria, es un modelo en el que la variación en tiempo continuo, o diferencial, del proceso solución o variable dependiente de la ecuación diferencial estocástica, se descompone en la parte de variación debida a la variación del tiempo, lo que correspondería a una ecuación diferencial ordinaria y, por otro lado, a la parte debida a la variación en tiempo continuo de un movimiento browniano, lo que le confiere el calificativo de estocástico a la ecuación diferencial.

Esto se expresa compactamente como

$$dX_t = \alpha(t, X)dt + \delta(t, X)dB_t$$

La solución a dicha ecuación diferencial es un proceso estocástico,  $X_t$ , para lo cual se deben hacer uso de todas las herramientas de cálculo estocástico desarrolladas a lo largo del siglo XX.

Este tipo de modelos planteados como ecuación diferencial estocástica, no son más que la generalización en tiempo continuo de un modelo lineal típico en el que tiempo es la variable explicativa más una perturbación aleatoria gaussiana; el papel que es jugado en tiempo discreto por la caminata aleatoria, en tiempo continuo es jugado por la diferencial del movimiento browniano.

<sup>14</sup> Mandelbrot, B.B. (1997) *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, p.317

<sup>15</sup> Para un estudio más detallado de este tema existen abundantes libros en la literatura. Es un tema muy técnico y formalizado desde el punto de vista matemático. Para un lector que sólo quiera introducirse a un nivel introductorio tanto Durrett, R. (1996): *Stochastic Calculus: A practical introduction* como Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory* son monografías dedicadas al tema.

Esto, sumamente resumido, es el tipo básico de modelos con los que se ha venido modelando en los últimos 20 ó 30 años el mercado financiero. Los procesos resultados de las ecuaciones diferenciales estocásticas de este tipo, suelen expresarse como una transformación funcional del movimiento browniano y por tanto las características del mismo, sobre todo su carácter fractal, se transmiten en mayor o menor medida a los procesos resultantes.

Podemos citar, a modo enumerativo como ejemplos, el proceso conocido como puente browniano, que se obtiene rápidamente mediante la resolución de una ecuación diferencial estocástica<sup>16</sup> y que se puede expresar como una transformación lineal del movimiento browniano unidimensional; dicho proceso es utilizado por *Ball y Torous*<sup>17</sup> para la obtención de una fórmula de valuación de opciones europeas sobre un tipo especial de bonos que no devengan intereses durante la vida de los mismos. El proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, estudiado por dichos autores en 1930<sup>18</sup>. Dicho proceso, que es la suma de un movimiento browniano estándar más la integral estocástica de una función exponencial, es utilizado por *Vasicek*<sup>19</sup> como una caracterización de la estructura temporal de los tipos de interés instantáneos para la obtención de la estructura temporal de los precios de los bonos cupón cero en equilibrio. Por último, también el movimiento browniano geométrico, la exponencial de un movimiento browniano modificado, que es básico en la obtención de la fórmula de valuación de opciones europeas de compra obtenida por *Black y Scholes*<sup>20</sup>.

#### **A.5. LIMITACIONES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO. ALTERNATIVAS Y NUEVAS CORRIENTES EN LA MODELACIÓN DE LOS MERCADOS FINANCIEROS.**

Desgraciadamente el movimiento browniano, a pesar de que ha propiciado el desarrollo de muchos instrumentos y teorías que son de suma utilidad en los mercados financieros, representa una vaga descripción de las características de la realidad financiera. Básicamente se pueden señalar cinco características de los datos financieros que no están de acuerdo con las características del movimiento browniano:

- *No-estacionariedad aparente de los datos financieros*: Las variaciones de los precios de los productos financieros parecen tener una distribución no estacionaria, es decir, se ven periodos de mucha variación seguido de periodos muchos más tranquilos. El movimiento browniano no

<sup>16</sup> Véase Shiryaev, A.N. (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory*, p. 238

<sup>17</sup> Véase Sandmann, K. & Sondermann, D. (1993) *A term structure model and the pricing of interest rate derivative*. The Review of Future Markets, vol. 12/2 p. 391

<sup>18</sup> Véase Todorovic, P. (1992) *An introduction to stochastic processes and their applications*, p. 81

<sup>19</sup> Vasicek, O. (1977): An Equilibrium Characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, p.177-188.

<sup>20</sup> Shiryaev, A.N (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory*, p.739-742.

presenta esta propiedad, ya que la variación de los precios en intervalos de duración constante está equidistribuida.

- *Concentración de la variabilidad:* La variabilidad no sólo no es constante, sino que además se concentran los periodos de alta variabilidad, es decir, los periodos en los que la variación de los precios es elevada no se encuentran aislados, sino concentrados temporalmente.
- *Dependencia a largo plazo.* La anterior característica de los precios financieros está muy relacionada con esta otra de que parece que las variaciones de los precios financieros presentan cierta dependencia que no desaparece sino muy lentamente. Sin embargo el movimiento browniano tiene incrementos independientes y, por tanto, la variación de un periodo no está relacionada con la variación del periodo anterior.
- *Colas pesadas:* Las distribuciones de la variación de los precios financieros suelen ser *leptocúrticas*, es decir, se aprecia empíricamente que variaciones grandes de los precios aparecen con más frecuencia de lo que normalmente sería de esperar. Por tanto, esto conduce a que es necesario utilizar modelos con mayor variabilidad de los precios que la que proporciona la distribución gaussiana que define el movimiento browniano.
- *Discontinuidad en los comportamientos:* Las trayectorias del movimiento browniano son continuas, esto no permite introducir discontinuidades de salto en los modelos en que aparece el movimiento browniano. Sin embargo, esta discontinuidad en el comportamiento es algo que es justificable en la realidad, la sensibilidad de los mercados financieros a todo tipo de información, los hace sumamente volátiles y por ejemplo cualquier variación en la política económica, información acerca de la evolución de las magnitudes macroeconómicas o nuevos datos acerca de la evolución de cualquier empresa hace que se produzca un cambio brusco en la situación del mercado que realmente se puede interpretar como una discontinuidad de cambio.

Estas características de los datos financieros han hecho que hayan surgido nuevas corrientes para la modelación de los mercados financieros.

Una tendencia muy importante en este aspecto es la de modelación de los precios financieros vía los modelos *ARCH/GARCH*, introducidos por *Engle* en 1982 y *Bollerslev* en 1986, y sus posteriores extensiones. Básicamente, son modelos no lineales gaussianos que surgen para dar cabida al fenómeno de las colas pesadas y de la concentración de la variabilidad, esto lo hacen admitiendo cambios en la variabilidad en las perturbaciones, ya que éstas varían

(*heterocedasticidad*) en el tiempo. *Nelson* en 1991 introduce una variación de estos modelos, una característica de los datos financieros conocida como efecto “*apalancamiento*”, que se traduce que aunque los datos financieros son muy volátiles ante cualquier tipo de información nueva que aparece en el mercado, sin embargo, sorpresas negativas afectan mucho más a la variabilidad que sorpresas positivas. Esta asimetría en la respuesta a la información se recoge en el modelo de *Nelson*.

En definitiva, estos modelos se han ido actualizando para adecuarse cada vez de mejor manera a las características de las series financieras así tenemos toda una familia de modelos denominados *ARCH*, *GARCH*, *EGARCH*, *FGARCH*, *FIGARCH*, *FIEGARCH*, *FIFGARCH*. Básicamente todos estos modelos son no lineales por lo tanto no hace sino ahondar en la penetración en la utilización de los modelos complejos en los mercados financieros. El estudio de estos modelos a la luz de su relación con la teoría de la complejidad es una senda futura de investigación que puede ser interesante y productiva.

No obstante, este tipo de modelos no están exentos de problemas. De acuerdo con las palabras de *Mandelbrot*<sup>21</sup> la familia de modelos *GARCH* quiebra en la consistencia de los resultados ofrecidos por lo mismo conforme cambiamos la escala temporal en que los medimos, esto añade una restricción más al investigador que debe decidir cuál es la escala temporal adecuada para el modelo en cuestión. Además estos modelos no representan bien el proceso de dependencia a largo plazo de los mismos, algo que *Mandelbrot* denomina como *memoria a largo plazo*. Para ello *Mandelbrot* introduce un modelo que él denomina *multifractal*, basado en el movimiento browniano fraccional y los procesos estocásticos multifractales. El movimiento browniano fraccionario es un proceso gaussiano obtenido mediante una transformación a través de una integral estocástica del movimiento browniano unidimensional. Fue considerado<sup>22</sup> por primera vez por *Kolmogorov* en 1940 y por *Mandelbrot* en 1965 y analizado en profundidad por *Mandelbrot* y *Van Ness* en 1968<sup>23</sup>.

Las principales características de este movimiento son que posee una variabilidad cíclica no periódica en todas las escalas temporales y presenta dependencia estadística a largo plazo de manera que los incrementos del mismo en dos intervalos temporales no solapados están siempre correlacionados, salvo en el caso que el movimiento browniano fraccional se convierta en un movimiento browniano estándar (que puede interpretarse como un caso particular del anterior). Es

<sup>21</sup> Mandelbrot, B. (1997) *A multifractal model of asset returns*, p. 1-5

<sup>22</sup> Shiryaev, A.N (1999): *Essentials of Stochastic Finance: Facts, models, theory*, p. 229

<sup>23</sup> Mandelbrot, B. & Van Ness, J.W. (1968) *Fractional Brownian Motions, fractional Brownian noises and applications*. SIAM Review 10, n. 4, p. 422-437

un proceso que presenta múltiples coexistentes dimensiones fractales<sup>24</sup>. Los procesos multifractales son una generalización de los procesos auto-afines, lo que confiere al modelo una mayor variabilidad de comportamientos. Este nuevo modelo en palabras de *Mandelbrot*<sup>25</sup> incorpora las regularidades observadas en las series financieras que no recogían los modelos *GARCH*.

---

24[28] Mandelbrot, B.B. (1997) *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, p. 161

25[29] Mandelbrot, B. (1997) *A multifractal model of asset returns*, p. 24

## **B. MODELOS DE ACTIVOS DINÁMICOS**

### **B.1. INTRODUCCIÓN**

Las verdaderas inversiones multiperiódicas fluctúan en su valor, distribuyen dividendos aleatorios, existen en un ambiente de tasas de interés variable y están sujetas a una continua variedad de otros factores inciertos. Este apéndice inicia con el estudio de tales inversiones a través de modelos que presentan fluctuaciones en los precios realista y convenientemente.

Existen dos tipos de modelos básicos para representar activos dinámicos: árboles binomiales y procesos de  $\hat{I}t$ . Los árboles binomiales son analíticamente más simples que los procesos de  $\hat{I}t$ . Todos los conceptos importantes de inversiones pueden ser expresados en términos de estos modelos y muchos problemas de inversión reales pueden ser formulados y resueltos usando el marco de los árboles binomiales.

Los procesos de  $\hat{I}t$  son más realistas que los árboles binomiales en el sentido de que tienen una serie continua de los posibles precios de las acciones en cada periodo, no sólo dos. Estos modelos nos dan los fundamentos para construir modelos de árboles binomiales de una manera clara y consistente. Por estas razones los modelos basados en procesos de  $\hat{I}t$  son fundamentales en los problemas dinámicos. Para un completo entendimiento de los principios de inversión, es importante entender estos modelos.

La organización de este apéndice esta basada en los puntos de vista precedentes en lo que se refiere a los roles de los diferentes modelos. La primera sección presenta el modelo de árbol binomial directamente. Las secciones restantes consideran modelos que tienen una serie continua de valores de precios. Estos modelos son desarrollados progresivamente de modelos de tiempo discreto a modelos de tiempo continuo basados en los procesos de  $\hat{I}t$ .

### **B.2. EL MODELO ADITIVO**

Primero debemos considerar los modelos de tiempo discretos, empezando con el modelo aditivo de esta sección, y después debemos considerar modelos de tiempo continuo definidos por los procesos de  $\hat{I}t$ .

Centremos nuestra atención en  $N + 1$  periodos en el tiempo, indexados por  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  y en un activo que es caracterizado por un precio en cada momento en el tiempo. El precio en el momento  $k$  es denotado por  $S(k)$ . Nuestro modelo reconocerá que el precio en algún momento del tiempo depende de alguna manera del precio anterior.

El modelo más simple es el modelo aditivo,

$$S(k + 1) = aS(k) + u(k) \dots B.1$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ . En esta ecuación  $a$  es una constante (usualmente  $a > 1$ ) y los valores  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , son variables aleatorias. Las  $u(k)$  pueden ser pensadas como perturbaciones que causan que el precio varíe. Para operar este modelo, un precio inicial  $S(0)$  es especificado; una vez que la variable aleatoria  $u(0)$  está dada,  $S(1)$  puede ser determinado. El proceso se repite entonces progresivamente determinando  $S(2), S(3), \dots, S(N)$ .

El ingrediente clave de este modelo es la sucesión de variables aleatorias  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Asumimos que entre ellas son mutuamente independientes.

Notemos que el precio en cualquier momento depende solamente del precio en el instante anterior y la perturbación aleatoria, no depende explícitamente de otros precios anteriores.

### B.3. DISTRIBUCIÓN NORMAL DEL PRECIO.

Resolviendo explícitamente para algunos precios de B.1, tenemos:

$$\begin{aligned} S(1) &= aS(0) + u(0) \\ S(2) &= aS(1) + u(1) \\ &= a^2S(0) + au(0) + u(1) \end{aligned}$$

Por simple inducción es posible ver que para una  $k$  cualquiera,

$$S(k) = a^k S(0) + a^{k-1}u(0) + a^{k-2}u(1) + \dots + u(k - 1) \dots B.2$$

De aquí que  $S(k)$  es  $a^k S(0)$  más la suma de  $k$  variables aleatorias.

Asumimos que las variables  $u(k)$  son variables aleatorias normales independientes con una varianza común  $\sigma^2$ . Entonces, dado que una combinación lineal de variables aleatorias normales es también normal, tenemos que  $S(k)$  en B.2 es en sí misma una variable aleatoria normal.

Si el valor esperado de todas las  $u(k)$  es cero, entonces el valor esperado de  $S(k)$  es

$$E[S(k)] = a^k S(0).$$

Cuando  $a > 1$ , este modelo tiene la propiedad de que el valor esperado de el precio se incrementa geoméricamente (esto es, de acuerdo a  $a^k$ ). De hecho, la constante  $a$  es el factor de la tasa de crecimiento del modelo.

El modelo aditivo es estructuralmente simple y fácil de trabajar. El valor esperado del precio crece geoméricamente y todos los precios son variables aleatorias normales. Sin embargo, el modelo es seriamente defectuoso porque no se apega a la realidad. Las variables aleatorias normales pueden basarse en valores negativos, lo cual significa que los precios en este modelo podrían ser también negativos; pero los precios reales de las acciones nunca lo son. Más aún, si una acción empezó en un precio de, digamos, \$1 con una  $\sigma$  de \$0.50 y entonces una tendencia ascendente llevara al precio a \$100, parecería muy inverosímil que la  $\sigma$  permaneciera en \$0.50. Es más probable que la desviación estándar fuera proporcional al precio. Por estas razones el modelo aditivo no es buen modelo general de activos dinámicos. El modelo es útil para análisis localizados sobre periodos cortos de tiempo (quizás hasta unos pocos meses para acciones comunes), y esto es de ayuda al construir otros modelos, pero no es usado por sí sólo como un modelo de salida representativo de fluctuaciones en plazos largos o medios. Por esta razón debemos considerar una mejor alternativa, la cual es el modelo multiplicativo.

#### B.4. EL MODELO MULTIPLICATIVO

El modelo multiplicativo tiene la siguiente forma:

$$S(k+1) = u(k)S(k) \dots B.3$$

para  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . De nuevo los valores  $u(k)$  son variables aleatorias mutuamente independientes. La variable  $u(k)$  define el cambio relativo en el precio entre los momentos  $k$  y

$k + 1$ . Este cambio relativo es  $S(k + 1)/S(k)$ , que es independiente sobre todos los valores de  $S(k)$ , también es independiente de las unidades del precio.

El modelo multiplicativo toma una forma familiar si calculamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación:

$$\ln S(k + 1) = \ln S(k) + \ln u(k) \dots B.4$$

para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . En esta forma el modelo de tipo aditivo con respecto al logaritmo del precio, más que con respecto al precio en sí.

Es natural especificar las perturbaciones aleatorias directamente en términos del  $\ln u(k)$ , en particular, llamemos  $w(k) = \ln u(k)$  para  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  y consideramos que estas  $w(k)$  son variables aleatorias normales, independientes y que cada una tiene un valor esperado  $\bar{w}(k) = \nu$  y varianza  $\sigma^2$ .

Podemos expresar las perturbaciones multiplicativas originales como

$$u(k) = e^{w(k)} \dots B.5$$

Cada una de las variables  $u(k)$  se distribuye lognormal, dado que su logaritmo es una variable aleatoria normal.

Notemos que ahora no hay problema con los valores negativos, aunque la variable normal  $w(k)$  puede ser negativa, la correspondiente  $u(k)$  dada en A.5 siempre es positiva. Como el factor aleatorio por el cual se multiplica al precio es  $u(k)$ , se sigue que los precios se mantienen positivos en este modelo.

### B.5. PRECIOS LOGNORMALES

Los precios sucesivos del modelo multiplicativo pueden ser encontrados fácilmente como sigue:

$$S(k) = u(k - 1)u(k - 2) \dots u(0)S(0).$$

Calculando el logaritmo natural de esta ecuación obtenemos

$$\ln S(k) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \ln u(i) = \ln S(0) + \sum_{i=0}^{k-1} w(i).$$

El término  $\ln S(0)$  es una constante y las  $w(i)$  son variables aleatorias normales. Dado que la suma de variables aleatorias normales es otra variable aleatoria normal, se sigue que  $\ln S(k)$  es normal. En otras palabras, todos los precios son lognormales bajo el modelo multiplicativo.

Si cada  $w(i)$  tiene esperanza  $\bar{w}(i) = \nu$  y varianza  $\sigma^2$  y todas son mutuamente independientes, tenemos que:

$$E[\ln S(k)] = \ln S(0) + \nu k$$

$$\text{var}[\ln S(k)] = k\sigma^2$$

tanto el valor esperado como la varianza se incrementan linealmente con  $k$ .

### B.6. CAMINATAS ALEATORIAS Y PROCESOS DE WIENER

Supongamos que tenemos  $N$  periodos de longitud  $\Delta t$ , definimos el *proceso aditivo*  $z$  como

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + \epsilon(t_k)\sqrt{\Delta t} \quad \dots B.6$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad \dots B.7$$

para  $k = 0, 1, \dots, N$ . Este proceso es llamado *caminata aleatoria*. En estas ecuaciones  $\epsilon(t_k)$  es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1, las variables  $\epsilon(t_k)$  son mutuamente no correlacionadas, es decir,  $E[\epsilon(t_j)\epsilon(t_k)] = 0$  para  $j \neq k$ . Este proceso empieza definiendo  $z(t_0) = 0$ .

Son de especial interés las diferencias de las variables aleatorias  $z(t_k) - z(t_j)$  para  $j < k$ , podemos escribir tales diferencias como:

$$z(t_k) - z(t_j) = \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t}.$$

Ésta es una variable aleatoria normal ya que es la suma de variables aleatorias normales. Inmediatamente, se sigue que:

$$E[z(t_k) - z(t_j)] = 0.$$

También, usando la independencia de las  $\epsilon(t_k)$ , encontramos:

$$\begin{aligned}\text{var}[z(t_k) - z(t_j)] &= E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon(t_i) \sqrt{\Delta t} \right]^2 \\ &= E \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon(t_i)^2 \Delta t \right] . \\ &= (k - j) \Delta t = t_k - t_j\end{aligned}$$

De aquí que la varianza de  $z(t_k) - z(t_j)$  es exactamente igual a la diferencia del tiempo  $t_k - t_j$  entre los puntos. Este cálculo también muestra por qué  $\sqrt{\Delta t}$  fue usado en la definición de la caminata aleatoria de forma que  $\Delta t$  apareciera en la varianza.

Se sigue que las variables diferenciadas asociadas con dos diferentes intervalos de tiempo son no correlacionadas, si los intervalos de tiempo no se traslapan. Esto es, si  $t_{k_1} < t_{k_2} \leq t_{k_3} < t_{k_4}$ , entonces  $z(t_{k_2}) - z(t_{k_1})$  no está correlacionada con  $z(t_{k_4}) - z(t_{k_3})$  ya que cada una de estas diferencias está formada por diferentes  $\epsilon$ , las cuales son en sí no correlacionadas.

Un *proceso de Wiener* es obtenido al tomar el límite de la caminata aleatoria B.6 cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Las ecuaciones del proceso de Wiener son:

$$dz = \epsilon(t) \sqrt{dt} \dots B.8$$

donde cada  $\epsilon(t)$  es una variable aleatoria normal estándar. Las variables  $\epsilon(t')$  y  $\epsilon(t'')$  son no correlacionadas si  $t' \neq t''$ .

Esta descripción del proceso de Wiener no es muy rigurosa ya que no tenemos garantía que las operaciones en el límite estén definidas, pero proporciona una buena descripción intuitiva. Una definición alternativa del proceso de Wiener se puede hacer simplemente listando las propiedades requeridas. Bajo este enfoque decimos que un proceso  $z(t)$  es un *proceso de Wiener* (o alternativamente, *movimiento Browniano*) si satisface lo siguiente:

1. Para cualquier  $s < t$ ,  $z(t) - z(s)$  es una variable aleatoria normal con media cero y varianza  $t - s$ .

2. Para cualquier  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ , las variables aleatorias  $z(t_2) - z(t_1)$  y  $z(t_4) - z(t_3)$  son no correlacionadas.
3.  $z(t_0) = 0$  con probabilidad 1.

Estas propiedades son semejantes a las anteriores de la caminata aleatoria. Recordemos que dado  $z(t)$  al tiempo  $t$ , el valor de  $z(s)$ , al tiempo  $s > t$  es, en promedio, el mismo que en  $z(t)$ ; pero variará de acuerdo a la desviación estándar  $\sqrt{s-t}$ .

El proceso de Wiener es no diferenciable con respecto al tiempo. Podemos verificar esto notando que para  $t < s$

$$E \left[ \frac{z(s) - z(t)}{s - t} \right]^2 = \frac{s - t}{(s - t)^2} = \frac{1}{s - t} \rightarrow \infty$$

cuando  $s \rightarrow t$ .

Sin embargo, es útil tener un concepto para el término  $dz/dt$  dado que esta expresión aparece en muchos procesos estocásticos. Una idea usada comúnmente es *ruido blanco*.

### B.7. PROCESO DE WIENER GENERALIZADO Y EL PROCESO DE ITO

El proceso de Wiener (o movimiento Browniano) es fundamental en la construcción de procesos estocásticos más generales. Estas generalizaciones son obtenidas por la inserción del ruido blanco en una ecuación diferencial ordinaria.

La más simple extensión de este tipo es el *proceso de Wiener generalizado*, que tiene la siguiente forma:

$$dx(t) = a dt + b dz \dots B.9$$

donde  $x(t)$  es una variable aleatoria para cada  $t$ ,  $z$  es un proceso de Wiener y  $a$  y  $b$  son constantes.

Un proceso de Wiener tiene especial importancia, ya que tiene una solución analítica (que se obtiene por integrando ambos lados de la ecuación). Específicamente:

$$x(t) = x(0) + at + bz(t) \dots B.10$$

Un *proceso de Ito* es un poco más general aún. Tal proceso es descrito por una ecuación de la forma

$$dx(t) = a(x, t)dt + b(x, t)dz \dots B.11.$$

Como antes,  $z$  denota un proceso de Wiener. Ahora, no obstante, los coeficientes  $a(x, t)$  y  $b(x, t)$  pueden depender de  $x$  y de  $t$ , y generalmente una solución general no puede ser escrita en una forma analítica. Una forma especial del proceso de Ito es usada frecuentemente para describir el comportamiento de los activos financieros.

### B.8. UN PROCESO PARA EL PRECIO DE UNA ACCIÓN

Ahora tenemos las herramientas necesarias para extender el modelo multiplicativo de los precios de las acciones a un modelo de tiempo continuo. Recordamos que el modelo multiplicativo es:

$$\ln S(k+1) - \ln S(k) = w(k) \dots B.12$$

donde las  $w(k)$  son variables aleatorias no correlacionadas. La versión en tiempo continuo de esta ecuación es:

$$d \ln S(t) = \nu dt + \sigma dz \dots B.13$$

donde  $\nu$  y  $\sigma \geq 0$  son constantes y  $z$  es un proceso de Wiener estándar. El lado derecho de la ecuación puede considerarse que toma el papel de la variable aleatoria  $w(k)$  del modelo en tiempo discreto. Este lado puede ser pensado como una constante más una variable aleatoria con media cero. El término  $\nu dt$  es el valor medio del lado derecho de la ecuación. Este valor es proporcional a  $dt$ , consistente con el hecho de que en la versión logarítmica del modelo multiplicativo el valor medio del cambio en el  $\ln S$  es proporcional a la longitud de un periodo. La desviación estándar del lado derecho es  $\sigma$  veces la desviación estándar de  $dz$ . Entonces, esto es de un orden de magnitud  $\sigma\sqrt{dt}$ , que es consistente con el hecho de que en la versión logarítmica del modelo multiplicativo la desviación estándar del cambio en  $\ln S$  es proporcional a la raíz cuadrada de la longitud de un periodo.

Dado que la ecuación B.13 está expresada en términos de  $\ln S(t)$  es en realidad una generalización del proceso de Wiener. Podemos resolverla explícitamente usando B.10 como:

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \nu t + \sigma z(t) \dots B.14$$

Esto muestra que  $E[\ln S(t)] = E[\ln S(0)] + \nu t$  y  $E[\ln S(t)]$  aumenta linealmente con  $t$ . Ya que el logaritmo esperado de este proceso se incrementa linealmente conforme a  $t$ , este proceso es conocido como *movimiento geométrico Browniano*.

### B.9. PRECIOS LOGNORMALES PARA UNA ACCIÓN

Como el modelo multiplicativo en tiempo discreto, el movimiento Browniano descrito en B.13 es un proceso lognormal. Esto puede verse de la solución B.14. El lado derecho de la ecuación es una variable aleatoria normal con media  $\ln S(0) + \nu t$  y desviación estándar  $\sigma\sqrt{t}$ .

Concluimos que el precio  $S(t)$  tiene una distribución lognormal. Podemos expresar esto formalmente con  $\ln S(t) \approx N(\ln S(0) + \nu t, \sigma^2 t)$ , donde  $N(m, \sigma^2)$  denota una variable aleatoria normal con media  $m$  y desviación estándar  $\sigma^2$ .

Aunque podemos escribir  $S(t) = \exp[\ln S(t)] = S(0)\exp[\nu t + \sigma z(t)]$ , esto no implica que el valor esperado de  $S(t)$  es  $S(0)e^{\nu t}$ . La media debe ser determinada por la ecuación  $\bar{u} = e^{\bar{w} + \frac{1}{2}\sigma^2}$ , la fórmula general que se aplica a las variables lognormales. De aquí,

$$E[S(t)] = S(0)e^{\left(\nu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}.$$

Si definimos que  $\mu = \nu + \frac{1}{2}\sigma^2$ , tenemos:

$$E[S(t)] = S(0)e^{\mu t}.$$

La desviación estándar de  $S(t)$  también está dada por una relación general para variables lognormales. En este caso, los cálculos requeridos son un poco más complejos. La fórmula es:

$$\sqrt{\text{var}[S(t)]} = S(0)e^{\mu t} \left( e^{\sigma^2 t} - 1 \right)^{1/2}.$$

**B.10. FORMA ESTÁNDAR DE ITO**

Hemos definido el proceso aleatorio para  $S(t)$  en términos de  $\ln S(t)$  mejor que en términos de  $S(t)$ , para expresarlo así consideremos lo siguiente.

Recordamos que

$$d \ln S(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}.$$

Esto implica que podemos intentar sustituir  $dS(t)/S(t)$  por  $d \ln S(t)$  en la ecuación B.13, obteniendo  $dS(t)/S(t) = \nu dt + \sigma dz$ . Esto sería casi correcto, pero hay una modificación que debe ser aplicada para variables de cambio en el proceso de Ito. El proceso de Ito apropiado en términos de  $S(t)$  es:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left( \nu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \dots B.15$$

Notemos que el término correctivo  $\frac{1}{2} \sigma^2$  es exactamente el mismo que se necesitó en la expresión del valor esperado de la variable aleatoria lognormal. Haciendo  $\mu = \nu + \frac{1}{2} \sigma^2$ , podemos escribir la ecuación en la forma estándar de Ito para precios dinámicos:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dz \dots B.16$$

El término  $dS(t)/S(t)$  puede ser pensado como el rendimiento diferencial de la acción.

El término correctivo que se requiere al transformar la ecuación de  $\ln S(t)$  a  $S(t)$  es un ejemplo especial de la ecuación de transformación general definida por el lema de Ito, que se aplica a variables definidas por el proceso de Ito.

El término  $dS/S$  puede ser interpretado como la tasa instantánea de rendimiento de una acción.

## C. OPCIONES ALTERNATIVAS

### C.1. INTRODUCCIÓN

Para encontrar una cobertura adecuada y que sea viable, podemos considerar varios métodos alternativos al presentado en el capítulo 5. Entre éstas están las opciones barrera, que son más baratas que las opciones regulares. A continuación una pequeña reseña de las *opciones barrera*.

Las *opciones barrera* son opciones donde el *payoff* depende de que el precio del bien subyacente alcance cierto nivel durante un periodo de tiempo determinado.

Existen diferentes tipos de opciones barrera regularmente negociadas en el mercado *over-the-counter*. Son atractivas para algunos participantes de mercado debido a que son más baratas que las correspondientes opciones regulares. Estas opciones barreras pueden ser clasificadas como opciones *knock-out* y opciones *knock-in*.

Una opción *knock-out* deja de existir cuando el precio del bien subyacente alcanza una cierta barrera; una opción *knock-in* llega a existir sólo cuando el precio del bien subyacente alcanza una cierta barrera.

Un *call down-and-out* es un tipo de opción *knock-out*. Es una opción *call* regular pero que deja de existir si el precio del bien alcanza un nivel determinado (digamos  $H$ ), el nivel de la barrera está abajo del precio *stock* inicial. La opción *knock-in* correspondiente es un *call down-and-in*. Éste es un *call* regular que sólo existe si el precio del bien alcanza el nivel de la barrera.

Es posible establecer que el valor de un *call* regular es igual al valor de un *call down-and-in* más el valor de un *call down-and-out*, por lo que el valor de un *call down-and-out* está dado por:

$$C_{do} = C - C_{di}$$

En principio, una opción barrera puede ser valuada usando árboles binomiales. Consideremos una opción americana *down-and-out*. Podemos valuarla del mismo modo que una opción americana regular con la excepción de que, cuando nos encontramos en un nodo por debajo de la barrera, tenemos que el valor de la opción es igual a cero.

Desafortunadamente, la convergencia es muy lenta cuando este método es usado. Es requerido un gran número de pasos en el tiempo para obtener un resultado razonablemente preciso. La razón para esto es que la barrera asumida es diferente a la verdadera barrera con lo que el valor obtenido es sólo una aproximación.

## C.2. VALUACIÓN

Definamos la barrera interior como la barrera formada por los nodos justo adentro de la barrera real (es decir, los nodos más cercanos al centro del árbol) y la barrera exterior como la barrera formada por los nodos que se encuentran justo afuera de la barrera real (es decir, los más lejanos al centro del árbol). Los cálculos usuales asumen implícitamente que la barrera exterior es la correcta debido a que, en las condiciones de barrera, son usados primero los nodos sobre esta barrera. Cuando el tiempo entre periodos es  $\Delta t$ , el espaciamiento vertical es del orden de  $\sqrt{\Delta t}$ . Esto significa que los errores creados por la diferencia entre la barrera real y la barrera exterior tienden a ser del orden de  $\sqrt{\Delta t}$ .

Un procedimiento alternativo para duplicar el precio de una opción barrera es no hacer cambios al árbol y ajustar el procedimiento antes mencionado.

Primero hay que calcular una barrera interior una exterior. Entonces volvemos a través del árbol, calculando dos valores del derivado en los nodos que forman la barrera interior. El primero de estos valores es obtenido asumiendo que la barrera interior es correcta; después es obtenido un segundo valor asumiendo que la barrera exterior es correcta. Una estimación final para el valor del derivado sobre la barrera interior es obtenida interpolando los dos valores anteriores. Una vez obtenido el valor para el derivado en todos los nodos sobre la barrera interior, podemos regresar en el árbol para obtener el valor inicial del derivado de la manera usual.

## D. PROGRAMA PARA CALCULAR EL PRECIO DE UNA OPCIÓN

### D.1. CÓDIGO FUENTE PARA UN ÁRBOL BINOMIAL

A continuación aparece el código fuente de las macros creadas para valuar opciones. Cuenta con la posibilidad de valuar opciones de compra y de venta tanto europeas como americanas.

```
Public t As Integer, i As Integer, k As Integer, n As Integer
```

```
Public Sigma As Double, p As Double, u As Double, d As Double
```

```
Public Delta As Double, r As Double, q As Double, Tiempo As Double
```

```
Public cont1 As Double, cont2 As Double, cont3 As Double, cont4 As Double, cont5 As Double
```

```
Public temp1 As Double, temp2 As Double, temp3 As Double, temp4 As Double, temp5 As Double
```

```
Sub Compra_Europea()
```

```
'Macro creada el 08/03/2006 por:
```

```
'Edgar López Alvarado y
```

```
'Carlos Alberto Velázquez López
```

```
Sigma = (Worksheets("Aplicacion").Cells(1, 2).Value)
```

```
Tiempo = Worksheets("Aplicacion").Cells(2, 2).Value
```

```
n = Worksheets("Aplicacion").Cells(3, 2).Value
```

```
Delta = Worksheets("Aplicacion").Cells(4, 2).Value
```

```
u = Worksheets("Aplicacion").Cells(5, 2).Value
```

```
d = Worksheets("Aplicacion").Cells(6, 2).Value
```

```
r = (Worksheets("Aplicacion").Cells(7, 2).Value)
```

```
p = Worksheets("Aplicacion").Cells(8, 2).Value
```

```
q = Worksheets("Aplicacion").Cells(9, 2).Value
```

```
S = Worksheets("Aplicacion").Cells(12, 2).Value
```

```
X = Worksheets("Aplicacion").Cells(13, 2).Value
```

```
For i = 1 To n + 2
```

```
    For k = 1 To 4 * (n + 1) + 5
```

```

Worksheets("Compra_E").Cells(k, i).Select
Selection.ClearContents
Selection.Interior.ColorIndex = xlNone
Next k
Next i

Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1, 1).Value = S
Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1, 1).Select
With Selection.Interior
    .ColorIndex = 6
    .Pattern = xlSolid
End With
For i = 1 To n
    Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1 - i, i + 1).Value = Worksheets("Compra_E").Cells(n + 2 -
i, i).Value * u
    Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1 - i, i + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 6
        .Pattern = xlSolid
    End With
    For k = 1 To i
        Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Value =
Worksheets("Compra_E").Cells(n - i + 2 * k, i).Value * d
        Worksheets("Compra_E").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Select
        With Selection.Interior
            .ColorIndex = 6
            .Pattern = xlSolid
        End With
    Next k
Next i

For i = 0 To n

```

```

If Worksheets("Compra_E").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value - X > 0 Then
    Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value =
Worksheets("Compra_E").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value - X
Else
    Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = 0
End If
Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Select
With Selection.Interior
    .ColorIndex = 4
    .Pattern = xlSolid
End With

Next i

For i = 1 To n + 1
    k = n + 1 - i
    For t = 1 To k
        Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value =
(Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i - 1, k + 1).Value * p +
Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i + 1, k + 1).Value * q) * Exp(-r * Delta)
        Worksheets("Compra_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Select
        With Selection.Interior
            .ColorIndex = 4
            .Pattern = xlSolid
        End With
    Next t
Next i
Worksheets("Compra_E").Cells(1, 1).Select
End Sub

Sub Compra_Americana()

'Macro creada el 08/03/2006 por:
'Edgar López Alvarado y

```

'Carlos Alberto Velázquez López

Sigma = (Worksheets("Aplicacion").Cells(1, 2).Value)

Tiempo = Worksheets("Aplicacion").Cells(2, 2).Value

n = Worksheets("Aplicacion").Cells(3, 2).Value

Delta = Worksheets("Aplicacion").Cells(4, 2).Value

u = Worksheets("Aplicacion").Cells(5, 2).Value

d = Worksheets("Aplicacion").Cells(6, 2).Value

r = (Worksheets("Aplicacion").Cells(7, 2).Value)

p = Worksheets("Aplicacion").Cells(8, 2).Value

q = Worksheets("Aplicacion").Cells(9, 2).Value

S = Worksheets("Aplicacion").Cells(12, 2).Value

X = Worksheets("Aplicacion").Cells(13, 2).Value

For i = 1 To n + 2

For k = 1 To 4 \* (n + 1) + 5

Worksheets("Compra\_A").Cells(k, i).Select

Selection.ClearContents

Selection.Interior.ColorIndex = xlNone

Next k

Next i

Worksheets("Compra\_A").Cells(n + 1, 1).Value = S

Worksheets("Compra\_A").Cells(n + 1, 1).Select

With Selection.Interior

.ColorIndex = 6

.Pattern = xlSolid

End With

For i = 1 To n

Worksheets("Compra\_A").Cells(n + 1 - i, i + 1).Value = Worksheets("Compra\_A").Cells(n + 2 - i, i).Value \* u

Worksheets("Compra\_A").Cells(n + 1 - i, i + 1).Select

With Selection.Interior

```

        .ColorIndex = 6
        .Pattern = xlSolid
    End With
    For k = 1 To i
        Worksheets("Compra_A").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Value =
Worksheets("Compra_A").Cells(n - i + 2 * k, i).Value * d
        Worksheets("Compra_A").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 6
        .Pattern = xlSolid
    End With

    Next k
Next i

For i = 0 To n
    If Worksheets("Compra_A").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value - X > 0 Then
        Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value =
Worksheets("Compra_A").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value - X
    Else
        Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = 0
    End If
    Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 33
        .Pattern = xlSolid
    End With
Next i

For i = 1 To n + 1
    k = n + 1 - i
    For t = 1 To k

```

```

temp1 = (Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i - 1, k + 1).Value * p +
Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i + 1, k + 1).Value * q) * Exp(-r * Delta)
If Worksheets("Compra_A").Cells(2 * t + i - 1, k).Value - X > temp1 Then
    Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value =
Worksheets("Compra_A").Cells(2 * t + i - 1, k).Value - X
Else
    Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value = temp1
End If
Worksheets("Compra_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Select
With Selection.Interior
    .ColorIndex = 33
    .Pattern = xlSolid
End With
Next t
Next i
Worksheets("Compra_A").Cells(1, 1).Select
End Sub

```

Sub Venta\_Europea()

'Macro creada el 08/03/2006 por:

'Edgar López Alvarado y

'Carlos Alberto Velázquez López

Sigma = (Worksheets("Aplicacion").Cells(1, 2).Value)

Tiempo = Worksheets("Aplicacion").Cells(2, 2).Value

n = Worksheets("Aplicacion").Cells(3, 2).Value

Delta = Worksheets("Aplicacion").Cells(4, 2).Value

u = Worksheets("Aplicacion").Cells(5, 2).Value

d = Worksheets("Aplicacion").Cells(6, 2).Value

r = (Worksheets("Aplicacion").Cells(7, 2).Value)

p = Worksheets("Aplicacion").Cells(8, 2).Value

q = Worksheets("Aplicacion").Cells(9, 2).Value

```
S = Worksheets("Aplicacion").Cells(12, 2).Value
X = Worksheets("Aplicacion").Cells(13, 2).Value
```

```
For i = 1 To n + 2
```

```
    For k = 1 To 4 * (n + 1) + 5
```

```
        Worksheets("Venta_E").Cells(k, i).Select
```

```
        Selection.ClearContents
```

```
        Selection.Interior.ColorIndex = xlNone
```

```
    Next k
```

```
Next i
```

```
Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1, 1).Value = S
```

```
Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1, 1).Select
```

```
With Selection.Interior
```

```
    .ColorIndex = 6
```

```
    .Pattern = xlSolid
```

```
End With
```

```
For i = 1 To n
```

```
    Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1 - i, i + 1).Value = Worksheets("Venta_E").Cells(n + 2 - i,
i).Value * u
```

```
    Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1 - i, i + 1).Select
```

```
With Selection.Interior
```

```
    .ColorIndex = 6
```

```
    .Pattern = xlSolid
```

```
End With
```

```
For k = 1 To i
```

```
    Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Value = Worksheets("Venta_E").Cells(n - i
+ 2 * k, i).Value * d
```

```
    Worksheets("Venta_E").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Select
```

```
With Selection.Interior
```

```
    .ColorIndex = 6
```

```
    .Pattern = xlSolid
```

```
End With
```

```

Next k
Next i

For i = 0 To n
    If X - Worksheets("Venta_E").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value > 0 Then
        Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = X -
Worksheets("Venta_E").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value
    Else
        Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = 0
    End If
    Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 4
        .Pattern = xlSolid
    End With
Next i

For i = 1 To n + 1
    k = n + 1 - i
    For t = 1 To k
        Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value =
(Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i - 1, k + 1).Value * p +
Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i + 1, k + 1).Value * q) * Exp(-r * Delta)
        Worksheets("Venta_E").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Select
        With Selection.Interior
            .ColorIndex = 4
            .Pattern = xlSolid
        End With
    Next t
Next i
Worksheets("Venta_E").Cells(1, 1).Select
End Sub

```

Sub Venta\_Americana()

'Macro creada el 08/03/2006 por:

'Edgar López Alvarado y

'Carlos Alberto Velázquez López

Sigma = (Worksheets("Aplicacion").Cells(1, 2).Value)

Tiempo = Worksheets("Aplicacion").Cells(2, 2).Value

n = Worksheets("Aplicacion").Cells(3, 2).Value

Delta = Worksheets("Aplicacion").Cells(4, 2).Value

u = Worksheets("Aplicacion").Cells(5, 2).Value

d = Worksheets("Aplicacion").Cells(6, 2).Value

r = (Worksheets("Aplicacion").Cells(7, 2).Value)

p = Worksheets("Aplicacion").Cells(8, 2).Value

q = Worksheets("Aplicacion").Cells(9, 2).Value

S = Worksheets("Aplicacion").Cells(12, 2).Value

X = Worksheets("Aplicacion").Cells(13, 2).Value

For i = 1 To n + 2

For k = 1 To 4 \* (n + 1) + 5

Worksheets("Venta\_A").Cells(k, i).Select

Selection.ClearContents

Selection.Interior.ColorIndex = xlNone

Next k

Next i

Worksheets("Venta\_A").Cells(n + 1, 1).Value = S

Worksheets("Venta\_A").Cells(n + 1, 1).Select

With Selection.Interior

.ColorIndex = 6

.Pattern = xlSolid

End With

```

For i = 1 To n
    Worksheets("Venta_A").Cells(n + 1 - i, i + 1).Value = Worksheets("Venta_A").Cells(n + 2 - i,
i).Value * u
    Worksheets("Venta_A").Cells(n + 1 - i, i + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 6
        .Pattern = xlSolid
    End With
    For k = 1 To i
        Worksheets("Venta_A").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Value = Worksheets("Venta_A").Cells(n - i
+ 2 * k, i).Value * d
        Worksheets("Venta_A").Cells(n + 1 - i + 2 * k, i + 1).Select
        With Selection.Interior
            .ColorIndex = 6
            .Pattern = xlSolid
        End With
    Next k
Next i

For i = 0 To n
    If X - Worksheets("Venta_A").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value > 0 Then
        Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = X -
Worksheets("Venta_A").Cells(2 * i + 1, n + 1).Value
    Else
        Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Value = 0
    End If
    Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * i + 5, n + 1).Select
    With Selection.Interior
        .ColorIndex = 33
        .Pattern = xlSolid
    End With
Next i

```

```

For i = 1 To n + 1
k = n + 1 - i
  For t = 1 To k

      temp1 = (Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i - 1, k + 1).Value * p +
Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i + 1, k + 1).Value * q) * Exp(-r * Delta)
      If X - Worksheets("Venta_A").Cells(2 * t + i - 1, k).Value > temp1 Then
          Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value = X -
Worksheets("Venta_A").Cells(2 * t + i - 1, k).Value
      Else
          Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Value = temp1
      End If
      Worksheets("Venta_A").Cells(2 * n + 2 * t + 3 + i, k).Select
      With Selection.Interior
          .ColorIndex = 33
          .Pattern = xlSolid
      End With
  Next t
Next i
Worksheets("Venta_A").Cells(1, 1).Select

End Sub

```

## E. BIBLIOGRAFÍA

### Textos

Jhon C. Hull. Options, futures and other derivatives. 4ª Edición 2000.

Joseph Stampfli, Victor Goodman. The mathematics of finance: Modelling and hedging. 1ª Edición 2000.

David G. Luenberger. Investment science. 1ª Edición 1998.

Gabriel de la Fuente Harrero. Las opciones reales en la decisión de inversión. Propuesta y aplicación de un modelo de valoración al caso de una multinacional española. Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía y Administración de Empresas. 1999, págs. 68-141\*

José Antonio Hernández Climent. Sistema de información electrónica para valuación de opciones. Universidad Nacional Autónoma de México, División de Estudios de Postgrado Facultad de Ingeniería. 2004, págs. 37-97.

William Bailey, Benoît Couët, Ashish Bhandari, Soussan Faiz, Sundaram Srinivasan, Helen Weeds. Valoración de las opciones reales. Oilfield Review. Primavera de 2004, págs. 4-19

Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros, A.C. Sistema Estadístico del Sector Asegurador (SESA) Terremoto 1 Anual 2002. Concentrado General del Sector.

Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros, A.C. Sistema Estadístico del Sector Asegurador (SESA) Terremoto 1 anual 2003. Concentrado General del Sector.

Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros, A.C. Sistema Estadístico del Sector Asegurador (SESA) Terremoto 1 anual 2004. Concentrado General del Sector.

Paul Embrechts. Extreme value theory: potential and limitations as an integrated risk management tool. Department of Mathematics, eth Zürich\*

Jose Pablo Dapena Fernández. Flexibilidad, activos estratégicos, y valuación por opciones reales. Universidad del Cema. Abril de 2001

Neus Orgaz Guerrero. Opción de responsabilidad limitada y opción de abandonar: una integración para el análisis del coste de capital. Departamento de Economía de la Empresa. Universidad autónoma de Barcelona

Chand Sooran. Principal victory risk management consulting, Inc. News Capacitación. Noticias del mundo de los derivados. Opciones exóticas. 07-jun-2005 N° 361

Ricardo A. Fornero. Proyectos de inversión e incertidumbre: perspectivas en la valuación de las opciones reales Universidad Nacional de Cuyo.

Barry R. Cobb, John M. Charnes. Simulation and optimization for real options valuation. School of business the University of Kansas, 2003.

Mark Gaynor, Scott Bradner. The real options approach to standardization, 2001.

Roland Berger Strategy Consultants. Real options – Introduction, Amsterdam, 2002.

Neus Orgaz Guerrero. Responsabilidad limitada, rentabilidad exigida y valor de la empresa: análisis mediante opciones de barrera. Universidad Autónoma de Barcelona. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Departamento de Economía de la Empresa. 1999\*

Aswath Damodaran. The promise and peril of real options. Stern school of business

Tao Wang. Real options "in" projects and systems design - identification of options and solution for path dependency. 2005

Eva g. De Arriluceal. Valoración de un proyecto de edificación mediante opciones reales. Universidad del país vasco. España

Guillermo López Dumrauf. Valuación de opciones combinadas. 2004

Retrospectiva de las Catástrofes Naturales 2004. Munich Re.

Retrospectiva de las Catástrofes Naturales 2005. Munich Re.

### **Presentaciones:**

Alejandro Bustamante. Opciones reales. Ucema - Itba

Ana María Mora Luna, Carla Susana Agudelo Assuad, Isaac Dynner. Modelo para la valoración de inversiones. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Minas.

Miguel Pérez Somalo. Las nuevas alternativas de inversión: los productos estructurados

Jaime H. Sierra G. Opciones reales para las decisiones de inversión: aspectos introductorios

Remedios Varo. Valuación de proyectos de inversión a través de opciones reales

### **Páginas web:**

[www.futuros.com](http://www.futuros.com)

[www.ucm.es](http://www.ucm.es)

[www.ssn.unam.mx](http://www.ssn.unam.mx)

[www.onemi.cl](http://www.onemi.cl)