UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGÍA Y ÁRBOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JUAN MIGUEL BAUTISTA GRANADOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL TAMARÍZ MASCARÚA

2006

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Juan Miguel Bautista Granados

FECHA: 16 - mayo - 2006
FIRMA: [firma]

Hoja de Datos del Jurado

Datos del alumno
Bautista
Granados
Juan Miguel
58770064
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera: Matemáticas

Datos del tutor.
Doctor
Angel
Tamaríz
Mascarúa

Datos del sinodal 1
Maestro en Ciencias
Roberto
Pichardo
Mendoza

Datos del sinodal 2.
Maestro en Ciencias
Carlos Gerardo
Paniagua
Ramírez

Datos del sinodal 3
Doctor
Fidel
Casarrubias
Segura

Datos del sinodal 4.
Maestro en Ciencias
Antonio
Peláez
Morales

Datos del trabajo escrito
Topología y Árboles
41
2006

Agradecimientos

Muchas personas han influido para que este trabajo haya sido posible, desde los comienzos de mi vida ha habido personas que me han ayudado en muchos aspectos de ella y quiero agradecer:

A mi familia; mis padres haberme apoyado siempre para seguir estudiando, a María que me ha impulsado para lograr terminar la tesis, mis hermanos que siempre han sido un motivo para superarme a lo largo de mi vida, gracias por el cariño mostrado hacia mi en todo este tiempo.

A mi tutor Angel Tamaríz Mascarúa por ayudarme a la realización de este trabajo, por el tiempo que me dedico y por todas sus enseñanzas mostradas en clases y por la gran persona que ha sido conmigo.

A mis sinodales Roberto Pichardo Mendoza y Fidel Casarrubias Segura por las enseñanzas recibidas de ellos en el salón de clases y ayudarme a crecer mucho en el ámbito académico.

A Antonio Peláez Morales por el tiempo que dedico a la lectura de la tesis y su apoyo en momentos difíciles.

A Carlos Gerardo Paniagua Ramírez, por el apoyo que recibí de él para la realización de la tesis.

A los amigos que he conocido durante mi estancia en la universidad, que me han dejado conocer muchos aspectos de su vida y haberme apoyado en muchos momentos ya sea con unas palabras, una sonrisa o con una palmada en la espalda expresando su apoyo:
De la facultad, Miguel Angel Chávez, Alejandro Suárez, Narciso Hernández, José Luis Cuacuamoxtla, Joe Rosas, Tonatihu Valdez, los hermanos Jorge y Eduardo Ramírez y Ana Rodrigo.

Los del museo Alejandro Arellano, Alejandro Irineo, Gamaliel, Xochil, Gaby, Toño, Lalo, Rosalinda, Marius, Zenet.

A los profesores Eduardo Arellano y Alberto Rosas que me han dado la oportunidad de compartir grandes experiencias de enseñanza.

A un gran profesor de preparatoria que me dio confianza en mi mismo, José Luis Sánchez Acenjo.
Gracias a todos ellos por ser parte importante tanto en mi vida académica como afectiva.

Índice General

Introducción

El propósito de la tesis es proporcionar un breve panorama acerca de los árboles, y dotar a éstos con una estructura topológica, usando de manera natural su orden. También en la tesis se abordan algunos problemas de árboles y su relación con los conjuntos línealmente ordenados.

Para lograr este propósito, en el capítulo uno se dan definiciones básicas tales como las de conjuntos línealmente ordenados, tipos de orden, ordinales y cardinales; en la sexta sección de este capítulo daremos la demostración del lema de Fodor, el cual es un resultado fundamental que nos ayudará a mostrar algunos teoremas de capítulos posteriores. En el segundo capítulo, daremos la definición de árbol, así como diversas definiciones relacionadas con él y se mostrarán algunos teoremas básicos importantes acerca de este concepto. El capítulo tres será breve y en él sólo se dará una definición de topología en un árbol. En el cuarto capítulo ingresaremos al estudio de conjuntos linealmente ordenados y este concepto lo relacionaremos con árboles de Aronszajn, árboles de Kurepa y árboles de Suslin, y así podremos definir qué es una línea de Aronszajn, una línea de Kurepa y una línea de Suslin y veremos cómo la suposición de la existencia de estas líneas implicará la existencia de los árboles y viceversa. En la sección dos del capítulo cuatro veremos la relación del Teorema de Ramsey con el Teorema de König demostrado en el capítulo 2.

Cabe mencionar que en el transcurso de la tesis estaremos utilizando diversos axiomas de la teoría de conjuntos. Cada vez que hagamos esto, anotaremos, junto a los teoremas, los axiomas que necesitamos para su demostración; así, AE significará axioma de elección, HC significará la suposición de la hipótesis del continuo.

El material que presentamos en la tesis ha sido trabajado a partir del artículo de S. Todorčević [To]. Las referencias [CPT], [HJ], [K] y [W] han servido de apoyo teórico.

CAPíTULO 1

Ordenes

1. Conjuntos Parcialmente Ordenados

DEFINICIÓN 1.1. Un conjunto R es una *relación binaria* si todos los elementos de R son pares ordenados; es decir, si para cualquier $z \in R$ existen x y y tal que $z = (x, y)$. Si $R \subset A \times B$, entonces decimos que R es una relación de A en B; y si $R \subset A \times A$, diremos que R es una relación en A.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $R \subseteq A \times B$. Decimos que R es una *relación transitiva* si se cumple que $(x, y), (y, w) \in R$, entonces $(x, w) \in R$.

DEFINICIÓN 1.3. Sea R una relación en A. Decimos que R es una *relación reflexiva* si $(x, x) \in R \; \forall x \in A$

EJEMPLO 1.1. Sea $\mathcal{R} = \{(m, n) : m, n \in \mathbf{N}$ y m/n. $\mathcal{R}$ así definido es una relación transitiva. En efecto, sean $(m, n)(n, k) \in \mathcal{R}$. m divide a n significa $n = j \cdot m$ y n divide a k significa $k = i \cdot n$ en donde $i, j \in \mathbf{N}$. Mostremos que $(m, k) \in \mathcal{R}$, esto es fácil ya que $k = i \cdot j \cdot m$. Además, también $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva ya que para todo entero positivo m, m divide a m, es decir $m = 1 \cdot m$.

DEFINICIÓN 1.4. (a) Un *orden parcial* es un par $(\mathbb{P}, \leq)$ tal que $\mathbb{P}$ es un conjunto distinto del vacío y $\leq$ es una relación en $\mathbb{P}$ la cual es transitiva y reflexiva $(\forall p \in \mathbb{P}(p \leq p))$. $p \leq q$ se lee "p extiende a q".
(b) $(\mathbb{P}, \leq)$ es un *orden parcial en el sentido estricto* si además satisface $\forall p, q(p \leq q$ y $q \leq p \rightarrow p = q)$. En este caso, definimos $p < q$ si y sólo si $p \leq q$ y $p \neq q$.

DEFINICIÓN 1.5. Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un orden parcial. Una *cadena* en $\mathbb{P}$ es un conjunto $C \subset \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q$ o $q \leq p)$. p y q son *compatibles* si $\exists r \in \mathbb{P}(r \leq p$ y $r \leq q)$; y se dice que son *incompatibles* $(p \perp q)$ si $\neg \exists r \in \mathbb{P}(r \leq p$ y $r \leq q)$. Una *anticadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $A \subset \mathbb{P}$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.

DEFINICIÓN 1.6. Un orden parcial $(\mathbb{P}, \leq)$ tiene la *condición de la cadena contable* (c.c.c) si y sólo si cualquier anticadena en $\mathbb{P}$ es contable.

EJEMPLO 1.2. Sea $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ con su orden usual. Cualquier subconjunto de $\mathbb{P}$ es una cadena (i.e., $\mathbb{P}$ es totalmente ordenado), pero cualquier anticadena tiene cardinaliad ≤ 1, así $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.

EJEMPLO 1.3. Sea A un conjunto definamos la relación $\leq_A$ en $\mathcal{P}(A) \setminus \emptyset$ como sigue: $x \leq_A y$ si y sólo si $x \subseteq y$ y $x, y \subseteq A$. Entonces $\subseteq_A$ es un orden parcial para el conjunto A, y cumple la c.c.c si y sólo si A es contable.

EJEMPLO 1.4. La relacion $|$ definida por: $n|m$ si y sólo si n divide a m es un orden parcial en el conjuto de los números enteros positivos. Como $\mathbb{N}$ es contable, entonces $(\mathbb{N}, |)$ cumple la c.c.c.

EJEMPLO 1.5. Sean X un espacio topologico y $\mathbb{P} = \{p \subset X : p$ es un abierto y $p \neq \emptyset\}$, con $p \leq q \leftrightarrow p \subset q$, así definido $(\mathbb{P}, \subset)$ está parcialmente ordenado. En este caso, que $\mathbb{P}$ tenga la *c.c.c* significa que cualquier colección de abiertos dos a dos ajenos, es contable.

DEFINICIÓN 1.7. Sea $\leq$ un orden parcial en $\mathbb{P}$, y sea $A \subseteq \mathbb{P}$.
(a) $a \in A$ es el *elemento mínimo* de A en el orden $\leq$ si $a \leq x$ para cualquier $x \in A$.
(b) $a \in A$ es un *elemento minimal* de A en el orden $\leq$ si no existe $x \in A$ tal que $x \leq a$ y $x \neq a$.
(a_1) Similarmente, $a \in A$ es un elemento más grande en A en el orden $\leq$ si, para cualquier $x \in A$, $x \leq a$.
(b_1) $b \in A$ es un *elemento maximal* de A en el orden $\leq$ si no existe $x \in A$ tal que $a \leq x$ y $x \neq b$.

EJEMPLO 1.6. No todos los conjuntos parcialmente ordenados tienen un mínimo; tal es el caso del orden parcial del ejemplo 1.3; en cambio, si tomamos $\mathcal{P}(A)$ y lo ordenamos parcialmente de la siguiente manera: $x \leq_A y$ si $x \supseteq y$, entonces en este caso el mínimo es el conjunto A. En cambio, con el orden definido en el ejemplo 1.3, el elemento máximo será A. En el ejemplo 1.4 el mínimo elemento de $\mathbb{N}$ es el 1.

2. Conjuntos linealmente ordenados

DEFINICIÓN 1.8. Sean $a, b \in A$ y $\leq$ un orden parcial de A. Diremos que a y b son *comparables* en el orden $\leq$ si $a \leq b$ o $b \leq a$. Diremos que a y b son *incomparables* si ellos no son comparables.

EJEMPLO 1.7. Con el ejemplo de 1.3 dos elementos $x, y \in \mathcal{P}(A)$ son comparables si y sólo si $x \subseteq y$ o $y \subseteq x$; y dos elementos $x, y \in \mathcal{P}(A)$ son incomparables si $x \cap y$ es diferente a x y a y.

Definición 1.9. Un orden parcial $\leq$ de un conjunto A es llamado *orden lineal* si cualesquiera dos elementos de A son comparables. En tal caso, el par $(A, \leq)$ es entonces llamado *conjunto linealmente ordenado*

Definición 1.10. (i) Sea L un conjunto linealmente ordenado, y $x \in L$. Decimos que $y \in L$ es *sucesor inmediato* de x si $x < y$ y $\{z \in L : x < z < y\} = \emptyset$.
(ii) Sea L un conjunto linealmente ordenado, y $y \in L$. Decimos que $x \in L$ es *antecesor inmediato* de y si $x < y$ y $\{z \in L : x < z < y\} = \emptyset$.

Observación: y es sucesor inmediato de x si y sólo si x es antecesor inmediato de y.

Ejemplo 1.8. Sea $\mathbb{R}$ con su orden usual. Con este orden $\mathbb{R}$ es lineal y ningun elemento de $r \in \mathbb{R}$ tiene sucesor inmediato, ni antecesor inmediato.

Definición 1.11. Sea $(L, \leq_L)$ un conjunto linealmente ordenado. Decimos que L es *densamente ordenado* si cualesquiera $l, m \in L$ con $l <_L m$ existe un $d \in L$ tal que $l <_L d <_L m$.

Proposición 1. *Sea L un conjunto linealmente ordenado tal que $|L| = \aleph_0$. Algún elemento de L tiene sucesor o antecesor inmediato si L no esta densamente ordenado.*

Demostración. Si L no es densamente ordenado existen l, m tales que no existe $d \in L$ tal que $l < d < m$, entonces l es antecesor inmediato de m y m es sucesor inmedito de l. □

Definición 1.12. El *segmento inicial* determinado por $l \in L$ es el conjunto $U_l = \{x \in L : x < l\}$.

Definición 1.13. Sean $\leq$ un orden de L, y $A \subseteq L$.
(a) $l \in L$ es una *cota superior* de A en el conjunto ordenado $(L, \leq)$, si $x \leq l$ para todo $x \in A$.
(b) $l \in L$ se llama *supremo* de A en $(L, \leq)$, si l es el elemento mínimo del conjunto de todas las cotas superiores de A en $(L, \leq)$.

Definición 1.14. Sea L un conjunto linealmente ordenado. Una cortadura de Dedekind de L es un par (A, B) tal que $A, B \subset L$, $A \neq \emptyset \neq B$ y tal que $\forall x \in A$, $\forall y \in B$ $x < y$ y $A \cup B = L$.

Un conjunto linealmente ordenado L se dice que es completo si para cada cortadura (A, B) de L, el conjunto A tiene supremo a y el infimo de B es a. Si L es linealmente ordenado no es completo, la completación de Dedekind de L se obtiene agregando un supremo al conjunto A, para cada cortadura de Dedekind (A, B) tal que A no tiene supremo.

L es un continuo linealmente ordenado si L es densamente ordenado y completo.

Un subconjunto D de L es denso en L si para cualquier $l, m \in L$ con $l <_L m$, existe un $d \in D$ tal que $l <_L d <_L m$.

La cardinalidad mínima de un subconjunto densamente ordenado de L es llamada la densidad del orden de L y será denotado por $d(L, \leq)$.

EJEMPLO 1.9. $\mathbb{Q}$ está ordenado densamente en $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN 1.15. Sea X un conjunto parcialmente ordenado por la relación $\leq$. Para cada pareja a, b de puntos de X tales que $a < b$, definimos $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$, $[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\}$, $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$. Para cada $x \in X$, sea $N_x = \{(a, b) : a < x < b\}$ si x no es elemento mínimo ni elemento máximo de X; $N_x = \{[x, b) : x < b\}$ si x es el elemento mínimo de X; y $N_x = \{(a, x] : a < x\}$ si x es el elemento máximo de X.

DEFINICIÓN 1.16. Sea L un conjunto linealmente ordenado por la relación $\leq$. Tomamos como una sub-base para una topología sobre L a todos los conjuntos de la forma $\{x : x < a\}$ y $\{x : x > a\}$, donde $a \in L$. Esto nos define una topología sobre L llamada la *topología del orden* de L. Para cada $x \in L$, N_x es una base local de vecindades en esta topología.

PROPOSICIÓN 2. *(i) $d(L, \leq)$ es igual al peso de L como un espacio topologico con la topologia del orden.*
(ii) Si L es un conjunto densamente ordenado, entonces la densidad de orden y la densidad topologica de L coinciden.

Demostración. (i) Sea D un denso de L tal que $|D| = d(L, \leq)$. La colección $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in D\} \cup \{(a, b] : a, b \in D$ y b es sucesor de $a\} \cup \{[a, b) : a, b \in D$ y a es antecesor de $b\}$ es base de la topología del orden de L. Tenemos que $|\mathcal{B}| = |D|^2 + |D|^2 + |D|^2 = |D|$. Por lo tanto, $wL \leq d(L, \leq)$. Por otro lado, sean $a, b, c, d \in D$ tales que $a \neq b \neq c \neq d$, entonces $(a, b) \neq (c, d)$. Así $d(L, \leq) \leq wL$

(ii) Sea $\kappa = d(L, \leq)$, y $D \subseteq L$ tal que D es denso y $|D| = \kappa$. Sea $A \neq \emptyset$ un abierto de L. Sea $x \in A$. Por definición de topología de orden, existe un intervalo abierto I tal que $x \in I \subset A$. Primer caso: I es de la forma (a, b).. Como L es densamente ordenado ordenado, existen c_0 y c_1 tales que $a < c_0 < c_1 < b$, y como D es denso de orden en L, existe $d \in D$ tal que $c_0 \leq d \leq c_1$. Entonces $d \in A$. Como A es un abierto arbitrario, entonces $cl(D) = L$. Los otros dos casos que faltan son cuando $I = [x, b)$ e $I = (a, x]$. Para estos casos la demostración es análoga al primer caso. Por lo tanto D es denso topológico. Por otro lado tenemos que si (a, b) forman un abierto básico, entonces existe $d \in D$ tal que $a < d < b$, por lo tanto D es denso, así $|D| \leq d(L, \leq)$ □

DEFINICIÓN 1.17. Un orden lineal $\leq$ de un conjunto A es *bien ordenado* si cualquier subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo. El conjunto ordenado $(A, \leq)$ con esta propiedad es entonces llamado conjunto bien ordenado.

EJEMPLO 1.10. El conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ con su orden usual es linealmente ordenado y todo suconjunto de él tiene elemento mínimo, por tanto es bien ordenado.
El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su orden usual no es bien ordenado; el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ no tiene elemento mínimo.

3. Tipos de Orden

DEFINICIÓN 1.18. Un conjunto ordenado M el cual tiene una relacion de orden $<$ se dice que es *similar* a un conjunto ordenado N el cual tiene una relacion de orden $<'$, en símbolos: $M \simeq N$, si el conjunto M puede ser mapeado sobre el conjunto N de tal manera que si m_1 , $m_2 \in M$, y n_1, n_2 son sus correspondientes elementos de N, entonces $m_1 < m_2$ implica que $n_1 <' n_2$. Tal mapeo es llamado *mapeo de similitud*.

Resulta de la definición que
(i) $M \simeq M$; es decir, cualquier conjunto ordenado es similar a sí mismo.
(ii) $M \simeq N$ implica que $N \simeq M$.
Demostración. Si f es un mapeo tal que $f : M \to N$, resulta que $f^{-1} : N \to M$ es un mapeo de similitud entre N y M.

□

(iii) Si $M \simeq N$ y $N \simeq C$, entonces $M \simeq C$.

EJEMPLO 1.11. Sea M el intervalo $(0, 1)$ ordenado de acuerdo a la magnitud de sus elementos. Entonces la función $y = x^2$ es un mapeo de similitud del intervalo $(0, 1)$.

EJEMPLO 1.12. Un conjunto ordenado puede ser similar a un subconjunto propio. Como lo son $\{1, 2, 3, \ldots\}$ y $\{2, 3, 4, \ldots\}$.

DEFINICIÓN 1.19. Por un *tipo de orden* μ entenderemos una clase de equivalencia dada por la relacion de equivalencia que induce la definicion 1.18. Generalmente tomaremos un representante arbitrario M de la clase μ y denotaremos su tipo de orden como $tpM = \mu$

4. Ordinales

DEFINICIÓN 1.20. Un conjunto x es *transitivo* si cualquier elemento de x es un subconjunto de x.

EJEMPLO 1.13. Estos son algunos ejemplos de conjuntos transitivos: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, y $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}\}$.

DEFINICIÓN 1.21. x es un *ordinal* si x es transitivo y bien ordenado por $\in$, en donde $\in$ es la relación de pertenencia de un conjunto.

DEFINICIÓN 1.22. si (A, R) es un conjunto bien ordenado, el *tipo de orden* de (A, R) denotado por $tp(A, R)$ es el único ordinal C tal que $(A, R) \cong C$.

Muchas de las operaciones aritméticas sobre los números naturales pueden ser definidas en todos los ordinales y una de ellas es la operación sucesor.

DEFINICIÓN 1.23. Sea α un ordinal, la operacion ordinal esta definida como sigue
$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

DEFINICIÓN 1.24. α es un *ordinal sucesor* si $\exists \beta$ $(\alpha = S(\beta))$. α es un *ordinal limite* si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es un ordinal sucesor.

Si 0 es el conjunto vacío,

DEFINICIÓN 1.25. $1 = S(0)$, $2 = S(1)$, $3 = S(2)$, etc.

$1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, etc.

DEFINICIÓN 1.26. α es un *número natural* si $\forall\, \beta \leq \alpha$ $(\beta = 0 \vee \beta$ es un ordinal sucesor$)$.

DEFINICIÓN 1.27. ω es el conjunto de los números naturales.

DEFINICIÓN 1.28. Sea $n \in \omega$
(a) A^n es el conjunto de funciones de n en A.
(b) $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n : n \in \omega\}$.
(c) En general tenemos que si A es un conjunto y α es un ordinal, entonces $A^{<\alpha} = \bigcup\{A^\beta : \beta \in \alpha\}$.

5. Cardinales

DEFINICIÓN 1.29. Escribiremos:
(1) Sean A y B conjuntos: $A \preceq B$ si existe una función uno a uno de A en B.
(2) $A \approx B$ si existe una funcion uno a uno de A sobre B.
(3) $A \prec B$ si $A \preceq B$ y $B \not\preceq A$.

DEFINICIÓN 1.30. Si A es un conjunto bien ordenado, $|A|$ es el mínimo número ordinal α tal que $\alpha \approx A$.

DEFINICIÓN 1.31. Un número ordinal α es un *número cardinal* si $\alpha = |\alpha|$.

DEFINICIÓN 1.32. A es *finito* si $|A| < \omega$. A es contable si $|A| \leq \omega$.

DEFINICIÓN 1.33. α^+ es el mínimo cardinal $> \alpha$. κ es un cardinal sucesor si $\kappa = \alpha^+$ para algún α. κ es un cardinal límite si $\kappa \geq \omega$ y no es un cardinal sucesor.

DEFINICIÓN 1.34. Si $f : \alpha \to \beta$ Decimos que f mapea cofinalmente a α si y sólo si el rango de f es no acotado en β.

DEFINICIÓN 1.35. *La cofinalidad* de β $(cf(\beta))$ es el mínimo α tal que tal que existe un mapeo cofinal f de α en β.

DEFINICIÓN 1.36. Si β es un cardinal, Decimos que β es *regular* si y sólo si β es un ordinal límite y $cf(\beta) = \beta$

6. Lema de Fodor

LEMA 1.1. *(Con AE). Si $\kappa > \omega$ y $|X_\alpha| \leq \kappa$ para toda α, entonces $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Demostración. Para cada α, elegimos una función uno a uno f_α de X_α sobre κ. Usemos esto para definir un mapeo uno a uno de $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ sobre $\kappa \times \kappa$. La función $f : \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha \to \kappa \times \kappa$ definida por $f(x) = (f_\alpha(x), \alpha)$ si $x \in X_\alpha$, es uno a uno. Así $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| < |\kappa \times \kappa| = \kappa$ □

DEFINICIÓN 1.37. Dado $n \in \mathbb{N}$. Una *función n-aria* sobre A es una función
$f : A^n \to A$. Si $B \subsetneq A$, B es cerrado bajo la función f si y sólo si $f[B^n] \subset B$. Una *función finitaria* es una función n-aria para algún n. Si $\mathcal{L}$ es un conjunto de funciones finitarias y $B \subset A$, la cerrradura de B bajo $\mathcal{L}$ es el mínimo $C \subset A$ tal que $B \subset C$ y C es cerrado bajo todas la funciones de $\mathcal{L}$.

Observación. Notemos que siempre existe tal C. En efecto, el conjunto $C = \bigcap\{D : B \subset D \subset A \text{ y } D \text{ es cerrado bajo } \mathcal{L}\}$ es el mínimo.

EJEMPLO 1.14. Tomemos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y definamos $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida como $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1$. Con f así definida cualquier $B \subsetneq \mathbb{N}$ es cerrado.

TEOREMA 1.1. *(con AE). Sea κ un cardinal infinito. Supongamos que $B \subset A$, $|B| \leq \kappa$, y $\mathcal{L}$ es un conjunto de $\leq \kappa$ funciones finitarias sobre A. Entonces la cerrradura de B bajo $\mathcal{L}$ tiene cardinalidad $\leq \kappa$.*

Demostración. Dados $f \in \mathcal{L}$ y $D \subset A$, sea $f * D$ igual al conjunto $f[D^n] = \{f(x) : x \in D^n\}$ si $n > 0$, e igual a $\{f\}$ si $n = 0$. Notemos que $|D| \leq \kappa$ implica que $|f * D| \leq \kappa$. Sea $C_0 = B$ y $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathcal{L}\}$. Por el lema 1.1 y haciendo inducción sobre n, $|C_n| \leq \kappa$ para toda n. Mostremos ahora que C_ω la cerradura de B bajo $\mathcal{L}$. $B \subset C_\omega$ ya que $B = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_\omega$. Ahora mostremos que $f[C_\omega^n] \subset C_\omega$, si $x^n \in C_\omega^n$, entonces existe $k < \omega$ tal que $x^n \in C_k^n$, entonces $f(x^n) \in C_{k+1} \subset C_\omega$, y entonces tenemos que $x \in C_\omega$. Por el lema 1.1 tenemos que $|C_\omega| \leq \kappa$. □

DEFINICIÓN 1.38. Para un conjunto no vacío A, un *filtro* sobre A es un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ tal que:
(*a*) $A \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(*b*) $\forall X, Y \in \mathcal{F}$, $(X \cap Y \in \mathcal{F})$.
(*c*) $\forall X \in \mathcal{F}\ \forall Y \subset A(X \subset Y \to Y \in \mathcal{F})$.

DEFINICIÓN 1.39. Para cualquier conjunto A no vacío, un *ideal* sobre A es un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(A)$ tal que:
(*a*) $\emptyset \in \mathcal{I}$ y $A \notin \mathcal{I}$.
(*b*) $\forall X, Y \in \mathcal{I}$, $(X \cup Y) \in \mathcal{I}$.
(*c*) $\forall X \in \mathcal{I}\ \forall Y \subset A$, $(Y \subset X \to Y \in \mathcal{I})$.

DEFINICIÓN 1.40. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre A, el *filtro dual*, $\mathcal{I}^*$, es

$$\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{I}\}.$$

Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre A, *el ideal dual*, $\mathcal{F}^*$, es $\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{F}\}$.

EJEMPLO 1.15. Para cualquier conjunto infinito A, $\{X \subset A : |X| < \omega\}$ es un ideal sobre A.

DEFINICIÓN 1.41. Un ideal $\mathcal{I}$ es $\kappa -$ *completo* si

$$\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{I}(|\mathcal{A}| < \kappa \to \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I}).$$

Un filtro $\mathcal{F}$ es $\kappa -$ *completo* si

$$\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{F}(|\mathcal{A}| < \kappa \to \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{F}).$$

DEFINICIÓN 1.42. Para cualquier ordinal limite μ, un conjunto $C \subset \mu$ es *cerrado* si para todo limite $\delta < \mu$, $sup(C \cap \delta) \in C$; y decimos que C es no acotado si $supC = \mu$. C es cerrado y no acotado (c.u.b) si y sólo si C es cerrado y no acotado en μ.

Observaciones: Equivalentemente tenemos que
$i)$ Para cualquier ordinal límite μ. Si cualquier sucesión de elementos $\{a_i\}_{i\in\delta}$ tal que δ es un ordinal límite, y $sup\{a_i\}_{i\in\delta} \in C$. Entonces $C \subset \mu$ es cerrado.

Demostración.
$C \cap \delta$ es una sucesión de elementos de C, así $sup(C \cap \delta) \in C$.

$\square$

$ii)$ Decimos que $C \subset \mu$ es no acotado en μ si y sólo si para toda $\lambda < \mu$ existe $\delta \in C$ y $\delta < \mu$ tal que $\lambda < \delta$.

Demostración.
$\Rightarrow)$ Sea $\lambda < \mu$ como $sup(C) = \mu$, entonces existe $\delta \in C$ tal que $\lambda < \delta$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $\lambda = sup(C) < \mu$, entonces por hipotesis existe δ tal que $\delta \in C$ y $\lambda < \delta$ por lo tanto $sup(C) = \mu$

$\square$

De la observación (i), vemos claramente que ser cerrado lo es también en el sentido topológico.

Ejemplo 1.16. $C = \{\alpha < \omega_1 : \alpha \text{ es limite}\}$ es c.u.b en ω_1. Primero mostremos que C es no acotado. Supongamos que C es acotado, es decir existe $\beta < \omega_1$ tal que $\alpha < \beta$ para todo $\alpha \in C$ y β es un ordinal sucesor, tenemos que $\beta < \beta + \omega$ y $\beta + \omega$ es un ordinal limite, lo cual es una contradicción, así C es no acotado. Ahora probemos que C es cerrado, sea $\{\alpha_n : n < \omega\}$ una sucesión de elementos de C tal que $\alpha_n < \alpha_m$ si $n < m$ probemos que $\gamma = sup\{\alpha_n : n < \omega\} \in C$, γ es un ordinal limite ya que $\{\alpha_n : n < \omega\}$ es una suceción de cardinalidad ω que converge a γ. Por lo tanto C es cerrado y no acotado.

Definición 1.43. Si $cf(\mu) > \omega$, definimos $Cub(\mu)$, como la colección

$$\{X \subset \mu : \exists C \subset X(C \text{ es c.u.b en } \mu)\}.$$

Lema 1.2. *Si $cf(\mu) > \omega$, entonces:*
(a) Si $\lambda < cf(\mu)$ y $\forall\alpha < \lambda$ $C_\alpha$esunc.u.b, entonces $\bigcap C_\alpha$ es un c.u.b
(b) $Cub(\mu)$ es un filtro $cf(\mu)$-completo.

Demostración. Para (a), sea C_α un c.u.b. en μ para cada $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < cf(\mu)$, y sea $C = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Vemos C que es una intersección de cerrados, por lo tanto C es cerrado. Para demostrar que C es no acotado, primero tomemos el mínimo elemento de C_α más grande que ξ, $f_\alpha(\xi)$, para cada $\alpha < \lambda$. Así $f_\alpha : \mu \to \mu$ es una función. Sea

$g(\xi) = sup\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \lambda\}$; entonces $\xi < g(\xi) < \mu$ dado que $cf(\mu) > \lambda$. Sea $g^0(\xi) = \xi$, $g^{n+1}(\xi) = g(g^n(\xi))$ y $g^\omega(\xi) = sup\{g^n(\xi) : n < \omega\}$; entonces $\xi < g^\omega(\xi) < \mu$ dado que $cf(\mu) > \omega$. Para cada α, C_α es no acotado en $g^\omega(\xi)$, así $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$; por lo tanto $g^\omega(\xi) \in \bigcap_\alpha C_\alpha$. Esto es, para cada ξ, $g^\omega(\xi)$ es un elemento de C más grande que ξ.

Para probar (b), primero mostremos que $Cub(\mu)$ es un filtro.

i) $\emptyset \notin Cub(\mu)$ ya que $sup(\emptyset) \neq \mu$, claramente $\mu \in Cub(\mu)$

ii) Sean X, $Y \in Cub(\mu)$, entonces existen C_1 y C_2, cerrados y no acotados tales que $C_1 \subset X$ y $C_2 \subset Y$ y por el inciso anterios $C_1 \cap C_2$ es cerrado y no acotado y además $C_1 \cap C_2 \subset X \cap Y$ por lo tando esta en $Cub(\mu)$

iii) Sea $X \in Cub(\mu)$, entonces existe C *c.u.b* tal que $C \subset X$. Si $Y \subset \mu$ y $X \subset Y$, entonces $C \subset Y$, así $Y \in Cub(\mu)$. Así $Cub(\mu)$ es un filtro

Ahora mostremos que es $cf(\mu) - completo$, sea $X_\alpha \in Cub(\mu)$ para $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < cf(\mu)$. Elegimos $C_\alpha \subset X_\alpha$ c.u.b.; entonces $\bigcap_\alpha C_\alpha \subset \bigcap_\alpha X_\alpha$, así $\bigcap_\alpha X_\alpha \in Cub(\mu)$ por (a).

□

DEFINICIÓN 1.44. Si $cf(\mu) > \omega$, decimos que X es *estacionario* si y sólo si $X \notin Cub^*(\mu)$, y X es *no estacionario* si y sólo si $X \in Cub^*(\mu)$.

Observación: Equivalentemente tenemos que, X es estacionario si y sólo si $X \cap C \neq \emptyset$ para todo *c.u.b* C.

LEMA 1.3. *Sea $\kappa > \omega$ regular y sea $\mathcal{A}$ un conjunto de funciones finitarias sobre κ tal que $|\mathcal{A}| < \kappa$, entonces*

$$C = \{\gamma < \kappa : \gamma \text{ es cerrado bajo } \mathcal{A}\}$$

es c.u.b en κ.

Demostración. Mostremos que C es cerrado, sean $D = \{\gamma_\xi\}_{\xi<\delta}$ una sucesión de elementos de C y δ un ordinal limite, mostremos que $\lambda = sup(D) \in C$. Sea $\gamma^n \in \lambda^n$, entonces existe $\gamma_{\xi_1} \in D$ tal que $\gamma^n \in \gamma^n_{\xi_1}$, y como $f(\gamma^n_{\xi_1}) \subset \gamma_{\xi_1} \subset \lambda$, entonces $f(\gamma^n) \in \lambda$ para toda $f \in \mathcal{A}$, por lo tanto C es cerrado. Para ver que C es no acotado, primero tomamos la cerradura $G(\xi)$ de ξ bajo $\mathcal{A}$; entonces $\xi \subset G(\xi) \subset \kappa$, y $|G(\xi)| < \kappa$. Dado que κ es regular, nosotros podemos elegir $g(\xi)$ tal que $\xi < g(\xi) < \kappa$ y $G(\xi) \subset g(\xi)$ como en el lema 1.2. Sea g^n la n-ésima iteracion de g y $g^\omega(\xi) = sup_n g^n(\xi)$; entonces $g^\omega(\xi)$ es un elemento de C más grande que ξ. □

LEMA 1.4. *Sea $\kappa > \omega$ regular, y sea C_α un cerrado no acotado en κ para toda $\alpha < \kappa$. Entonces $D = \{\gamma : \forall\alpha < \gamma(\gamma \in C_\alpha)\}$ es cerrado y no acotado en κ*

Demostración. Fácilmente se ve que D es cerrado. Para ver que D es no acotado, sea $g(\xi)$ un elemento de $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\alpha$ que sea más grande que ξ (notemos que $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\alpha$ es no acotado, por el lema 1.2), entonces $g^\omega(\xi)$ (definido como en el lema 1.3) es un elemento de D más grande que ξ. □

LEMA 1.5. *(Lema de Fodor). Sea $\kappa > \omega$ regular, S un subconjunto estacionario de κ, y $f : S \to \kappa$ tal que $\forall\gamma \in S(f)(\gamma) < \gamma$; entonces para algún $\alpha < \kappa$, $f^{-1}\{\alpha\}$ es estacionario en κ.*

Demostración. Si $f^{-1}(\{\alpha\})$ no es estacionario en κ, entonces para cada α tomamos un cerrado y no acotado C_α con $C_\alpha \cap f^{-1}\{\alpha\} = \emptyset$. Sea $D = \{\gamma : \forall\alpha < \gamma(\gamma \in C_\alpha)\}$. D es un cerrado y no acotado (por el lema 1.4). Pero también $D \cap S = \emptyset$, dado que si $\gamma \in D \cap S$, $f(\gamma) \neq \alpha$ para todo $\alpha < \gamma$, contradiciendo que $f(\gamma) < \gamma$. Así, S no puede ser un estacionario en κ. □

CAPíTULO 2

Árboles

Definición 2.1. Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq_T)$ tal que para cualquier $t \in T$ el conjunto $(\cdot, t)_T = \{s \in T : s <_T t\}$ es bien ordenado. La *altura* de t en $(T, \leq_T)$, $ht_T(t)$, es el tipo de orden de $(\cdot, t)_T$. Para un número ordinal α el α-esimo nivel de T es el conjunto $R_\alpha T = \{t \in T : ht_T(t) = \alpha\}$. La *altura* de T, $htT = min\{\alpha : R_\alpha T = \emptyset\}$.

Definición 2.2. U es una *parte inicial* de T si $(\cdot, t)_T \subseteq U$ para cualquier $t \in U$.

Definición 2.3. Si T es un árbol y $t \in T$, definimos T^t como el conjunto $\{s \in T : t \leq_T s\}$.

Definición 2.4. Cualquier subconjunto de T lo consideraremos como un *subárbol* de T.

Notemos que para cualquier subárbol U de T tenemos que si $t \in U$, $ht_U(t) \leq ht_T(t)$, es decir un subárbol U de T no necesariamente cumple que $R_\alpha U \subseteq R_\alpha T$.

Ejemplo 2.1. Sea T un árbol. Consideremos un conjunto A de ordinales. Sea $T|_A = \bigcup\{R_\alpha T : \alpha \in A\}$, este conjunto es un subárbol de T.
También T^t es otro ejemplo de un subárbol de T.

Definición 2.5. Una *rama* de un árbol T es una cadena maximal de T.

Definición 2.6. Un *camino* de T es cualquier cadena de T la cual es también una parte inicial de T.

Definición 2.7. Una *α-cadena* en un árbol T es una cadena de tipo de orden α.

Ejemplo 2.2. Un ejemplo de un árbol es cualquier ordinal δ con su orden usual. Si $\alpha < \delta$ tenemos que $ht_\delta(\alpha) = \alpha$, y $ht(\delta) = \delta$.

Así, se puede ver a los árboles como una generalización muy natural de los ordinales.

EJEMPLO 2.3. Otro ejemplo de un árbol es ${}^{<\delta}I = \bigcup\{{}^{\alpha}I : \alpha < \delta\}$, el árbol $I - ario$ de altura δ, donde I es un conjunto linealmente ordenado. Se puede pensar a los elementos de ${}^{\alpha}I$ como las sucesiones de elementos de I de longitud α. En ${}^{<\delta}I$, se define $s \leq t$ si y sólo si $s \subset t$, si y sólo si la sucesion t extiene a s. Si $\alpha < \delta$, entonces $R_{\alpha}({}^{<\delta}I) = {}^{\alpha}I$, y $ht({}^{<\delta}I) = \delta$. Cuando $I = 2$ y $\delta = \omega$ tenemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.4. Un ejemplo natural de un árbol infinito es el conjunto S de todas las sucesiones finitas de 0 y 1 ordenada por $\subseteq$, es decir $S=\bigcup\{{}^{n}2 : n < \omega\}$. Claramente tenemos que si $s \in S$, $ht_S(s) = |s|$, de aquí $R_nS = {}^{n}2$ para cualquier $n < \omega$ y $htS = \omega$. Cualquier rama de S tiene la forma $\{f|_n : n < \omega\}$ donde $f \in {}^{\omega}2$. De aquí resulta que el conjunto de todas las ramas de S tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$ y puede ser identificado con el conjunto de Cantor.
Este árbol es interesante dado que tiene altura ω y todos los niveles son finitos, pero tiene $2^{\aleph_0}$ $\omega-$ramas

PROPOSICIÓN 3. *Si U es una parte inicial de T, entonces para cualquier $\alpha \leq htU$ se tiene que $R_{\alpha}U = R_{\alpha}T \cap U$.*

Demostración. $\subseteq$) Sea $u \in R_{\alpha}U$. Por demostrar que $u \in R_{\alpha}T \cap U$. Tenemos que $(\cdot, u)_U = (\cdot, U)_T \cap U$. Como U es parte inicial de T, $(\cdot, u)_T \subset U$. Por lo tanto $(\cdot, u)_U = (\cdot, u)_T$. Así que $tp(\cdot, u)_U = tp(\cdot, u)_T = \alpha$. Concluimos que $u \in R_{\alpha}T$.
$\supseteq$) Sea $t \in R_{\alpha}T \cap U$, tenemos que $tp(\cdot, t)_T = \alpha$, pero $(\cdot, t)_U = (\cdot, t)_T \cap U = (\cdot, t)_T$, por lo tanto $tp(\cdot, t)_U = \alpha$ □

DEFINICIÓN 2.8. Si E es un subconjunto de ${}^{\omega}2$, entonces definimos $S_E = S \cup E$ ordenado por $\subseteq$. Si E no es contable, entonces S_E es llamado *árbol de Cantor*, donde $S=\bigcup\{{}^{n}2 : n < \omega\}$.

DEFINICIÓN 2.9. Si T es un árbol y si $s, t \in T$, entonces definimos $\rho(s, t) = (\cdot, s)_T \cap (\cdot, t)_T$.

LEMA 2.1. *Si $s, t, u \in T$, entonces $R_{s,t,u} = \{\rho(s, t), \rho(t, u), \rho(s, u)\}$ tiene a lo más dos elementos, y $p, q \in R_{s,t,u}$ implica $p \subseteq q$ o $q \subseteq p$*

Demostración. Primero mostremos que si $p, q \in R_{s,t,u}$, entonces $p \subseteq q$ ó $q \subseteq p$. Sea $p = \rho(s, t)$ y $q = \rho(t, u)$. Supongamos que $p \nsubseteq q$ ni $q \nsubseteq p$, entonces existe $t_1 \in \rho(s, t)$ y $t_1 \notin \rho(t, u)$. Por otro lado, también existe $t_2 \in \rho(t, u)$ y $t_2 \notin \rho(s, t)$.

Observación : Se debe cumplir que $t_1 \nleq_T t_2$ y $t_2 \nleq_T t_1$. Si sucediera que $t_1 \leq_T t_2$, se implicaría que $t \in \rho(t, u)$, contradiciendo lo anterior. Análogamente, si sucediera que $t_2 \leq_T t_1$.
Tomemos $t_3 \in (\cdot, t)$ tal que $t_1 \leq_T t_3$ y $t_2 \leq_T t_3$, así $t_1 \in (\cdot, t_3)$ y

$t_2 \in (\cdot, t_3)$ esto no es posible ya que $(\cdot, t_3)$ es un buen orden, por lo tanto debe de suceder que $p \subseteq q$ ó $q \subseteq p$, análogamente si tomamos cualesquiera dos elementos de $\{\rho(s,t), \rho(t,u), \rho(s,u)\}$.
Ahora mostremos que $|R_{s,t,u}| \leq 2$, si suponemos que $|R_{s,t,u}| = 3$, por la demostración anterior tendríamos que $r \subset q \subset p$, donde $p = \rho(s,t) = (\cdot, s) \cap (\cdot, t)$, $q = \rho(t,u) = (\cdot, t) \cap (\cdot, u)$, $r = \rho(s,u) = (\cdot, s) \cap (\cdot, u)$, veamos que $r \subset q \subset p$ no puede suceder. Sea $A = (\cdot, s)$, $B = (\cdot, t)$ y $C = (\cdot, u)$, si pasara que $A \cap C \subset B \cap C \subset A \cap B$, tendríamos que existe $t \in B \cap C$ y $t \notin A \cap C$, entonces $t \in B$ y $t \in C$, además $t \notin A$ ya que $t \in C$, de aquí tenemos que $t \notin A$ y $t \in B$ por lo tanto $t \notin A \cap B$; esto es una contradicción ya que $B \cap C \subset A \cap B$; por lo tanto, no puede suceder que $r \subset q \subset p$. Es análogo para los demás casos, por lo tanto $|R_{s,t,u} \leq 2|$. □

DEFINICIÓN 2.10. Un *nodo* de un árbol T es cualquier clase de equivalencia de la relación $\sim$ definida sobre T por $s \sim t$ si y sólo si $(\cdot, s)_T = (\cdot, t)_T$.

Así cualquier nodo N de T es un subconjunto de algún nivel $R_\alpha T$. En este caso α es la altura de N en T.

DEFINICIÓN 2.11. Si p es un camino acotado de T, entonces el conjunto $N_p = R_0\{t \in T : s <_T t$ para toda $s \in p\}$ de todos los sucesores inmediatos de p en T forman un nodo de T. Conversamente, si N es un nodo de T, entonces $\rho(N) = \{s \in T : s \leq_T t$ para todo $t \in N\}$ es el camino de todos los predecesores de N. Es claro que $N_{\rho(N)} = N$ para cualquier nodo N de T.

DEFINICIÓN 2.12. Si N es un nodo de T , y si $t \in \cup\{T^s : s \in N\}$, entonces por t_N se denota al único elemento de $\{s \in T : s \leq_T t\} \cap N$.

DEFINICIÓN 2.13. Sea T un árbol, y sea $\mathcal{N}(T)$ el conjunto de todos los nodos de T. Para cualquier $N \in \mathcal{N}(T)$ se fija un orden lineal $\leq_N$ *deN*. Entonces el orden lexicográfico $\preceq$ de T inducido por $\{\leq_N : N \in \mathcal{N}(T)\}$ es definido por $s \preceq t$ si
(i) $s \leq_T t$
(ii) $s \not\leq_T t$, $t \not\leq_T s$ y $s_N \leq_N t_N$, donde $N = N_{\rho(s,t)}$.

LEMA 2.2. *$\preceq$ es un orden lineal en T el cual extiende a $\leq_T$ (i.e para todo $a, b \in T$ si $a \leq_T b$, entonces $a \preceq b$).*

Demostración. Se demuestra que (i) $\preceq$ es transitiva: Sea $s \preceq t$ y $t \preceq u$. Por el lema anterior se cumple que $\rho(s,t) = \rho(s,u)$, o bien $\rho(s,t) = \rho(t,u)$ o $\rho(s,u) = \rho(t,u)$ se cumple. Se considerará el caso $\rho(s,t) = \rho(s,u)$ pues en los otro casos la demostración es similar. Notemos que $s >_T u$ contradice $s \preceq t$ y $t \preceq u$. De esto se puede suponer

que s y u son incomparables dado que $s \leq_T u$ implica que $s \preceq u$. Sea $N = N_{\rho(s,t)} = N_{\rho(s,u)}$. Si $t_N = u_N$, entonces s y T son incomparables, de aquí $s_N \leq t_N = u_N$ y así $s \preceq u$. Si $t_N \neq u_N$, entonces t y u son incomparables, $\rho(s,t) = \rho(s,u) = \rho(t,u)$, y $t_N \leq_N u_N$ y dado que $s_N \leq_N t_N$ y dado que $\leq_N$ es transitiva, se tiene que $s_N \leq_N u_N$. De aquí resulta que $s \preceq u$.
(ii) Demostraremos que $\preceq$ es reflexiva. Esto pasa ya que $\leq_T$ es reflexiva y así tenemos que para cada $t \in T$ $t \leq_T t$, entonces $t \preceq t$.
(iii) Demostraremos que para todo $s, t \in T$ se cumple que $s \preceq t$ o $t \preceq s$.
Caso 1. $s \leq_T t$ $(t \leq_T s)$, entonces $s \preceq t$ $(t \preceq s)$.
Caso 2. $s \not\leq_T t$ y $t \not\leq_T$, como cada nodo tiene un orden lineal tenemos que se cumple que $s_N \leq_N t_N$ o $t_N \leq s_N$, entonces $s \preceq t$ o $t \preceq s$. □

LEMA 2.3. *Para cualquier $t \in T$, T^t es un conjunto convexo en $(T, \preceq)$.*

Demostración. Demostraremos que si $a, b \in T^t$ y $a \prec b$ y si $a \prec d \prec b$, entonces $d \in T^t$. Sea d tal que $a \prec d \prec b$. De aquí se desprenden 4 casos:
(i) $a <_T d <_T b$. Como $t <_T a <_T d$, entonces $t <_T d$, por lo tanto $d \in T^t$.
(ii) $a <_T d$, $d <_N b$ donde N es un nodo de T. Este caso se muestra de manera similar al caso (i).
(iii) $a_N <_N d_N$, $d_{N_1} <_{N_1} b_{N_1}$. Supongamos que $d \notin T^t$. Esto quiere decir que $t_N \leq_N d_N$ ó $d <_T t$; si $t_N \leq_N d_N$ (obs: $t_N = a_N = b_N$) tendríamos que $a_N = b_N = t_N <_N d_N$, contradiciendo que $a \prec d \prec b$. Si $d <_T t$, entonces $d <_T a$, entonces $d \prec a$, contradiciendo que $a \prec d \prec b$. Por lo tanto $d \in T^t$.
(iv) $a_N <_N d_N$, $d <_T b$. Este caso se muestra de manera similar al caso (iii). □

DEFINICIÓN 2.14. Para $N \in \mathcal{N}(T)$ sea $\leq_T^*$ el orden lexicográfico de T inducido por $\{\leq_N^*: N \in \mathcal{N}(T)\}$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Supongamos que $(N, \leq_T)$, con $N \in \mathcal{N}(T)$, no contiene un orden real no contable. Entonces $(T, \preceq)$ contiene un orden real no contable si y sólo si $(T, \leq_T)$ contiene un subárbol de Cantor.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathbb{R} \subset T$ tal que $(\mathbb{R}, \preceq)$ es un orden real no contable, como $\mathbb{R}$ es un orden real no contable existe $D \subset \mathbb{R}$ denso tal que $|D| = \aleph_0$.
Probaremos que si $a \in \mathbb{R}$, existen t_0 y $t_1 \in D$ tales que $a \preceq t_0 \preceq t_1$, y además $a \leq_T t_0, a \leq_T t_1$ y $t_{0_N} \leq_N t_{1_N}$ (i.e $t_0 \not\leq_T t_1$). Si no pasara lo anterior tendríamos dos casos:

caso 1) $a \leq_T t$ para toda $t \in D$.
caso 2) $t_0 \not\leq t_1$ para todo $t_o, t_1 \in D$.
Mostraremos que no es posible que se den estos casos.

caso 1) Si $a \leq_T t$ para toda $t \in D$, tendríamos que para todo $r \in \mathbb{R}$, $a \leq r$ y esto no puede ser ya que este no seria un buen orden y T no sería un árbol.
Si tuvieramos que existe $r \in \mathbb{R} \setminus D$ tal que $a \leq_T$ y $t \not\leq r$ para toda $t \in D$, no existiría $d \in D$ tal que $a \preceq d \preceq r$ y D no sería denso.

caso2)
subcaso 1) Si existiera una cantidad no contable de $r \in \mathbb{R} \setminus D$ tal que $t_N \leq_N r$ ó $r_N \leq_N t_N$ para $t \in D$, entonces el conjunto de sucesores de a formarían un nodo con un orden real no contable y esto no es posible por hipotesis.
subcaso 2) para que el subcaso no se cumpla debe de pasar que para todo $r \in \mathbb{R} \setminus D$ (exepto quiza para una cantidad contable), $t \leq r$ para $t \in D$, tomemos $t \leq_T r_1 \leq_T r_2$, entonces para r_1 y r_2 no existe $d \in D$ tal que $r_1 \preceq d \preceq r_2$.

Ahora procedamos a construir el subárbol de T el cual es de Cantor. Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $ht_T(t) = min\{ht_T(t') : t' \in \mathbb{R}\}$. Por lo arriba mostrado, existen t_o y $t_1 \in D$ tales que $t \leq_T t_0$, $t \leq_T t_1$ y $t_o \not\leq_T t_1$

$\Leftarrow$) Sea $T = \{2^n : n \leq \omega\}$ Demostraremos que el conjunto $D = \{2^n : n < \omega\}$ es denso en T. Observemos que $|T| = \omega_1$.
Tomemos $a \preceq b$. Mostraremos que existe $d \in D$ tal que $a \preceq d \preceq b$.
Caso 1) $a \preceq b$ si $a \leq_T b$, entonces $ht_T(a) < ht_T(b)$. Tenemos que la altura de b es a lo más ω, así $ht_T(a) < \omega$. Elijamos $d = a$. Por lo tanto $a \preceq d \preceq b$ y $d \in D$.
Caso 2) $a \preceq b$ si y sólo si $a_N \leq b_N$. Esto implica que $ht_T(a_N)$, $ht_T(b_N) < \omega$, así si hacemos $d = a_N$ tenemos que $d \in D$.
Como $|T| = \omega_1$ y D es un conjunto denso contable de T, entonces $(T, \preceq)$ es un orden real no contable. $\square$

Una familia fija $\{\leq_N : N \in \mathcal{N}(T)\}$ de ordenes lineales de los nodos de un árbol también introduce un orden lexicográfico $\preceq$ sobre el conjunto B_T de todas las ramas de T definido por $l \preceq m$ si y sólo si $l_N \leq_N m_N$ donde $N = N_{l \cap m}$ $\{l_N\} = l \cap N$ y $\{m_N\} = m \cap N$.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si $(N, \leq_N)$ es un orden lineal completo para cada $N \in \mathcal{N}(T)$, entonces $(B_T, \preceq)$ es también completo.*

Demostración. Sea A un segmento inicial de $(B_T, \preceq)$. Se demostrará que A tiene un supremo en $(B_T, \preceq)$. sea m el conjunto de todas las $t \in T$ tal que $B_t \cap A \neq \emptyset$ mientras $\{l \in B_T : B_t < l\} \cap A = \emptyset$. Entonces, utilizando la completez de $(N, \leq_N)$ para $N \in \mathcal{N}(T)$, se debe demostrar que m es una rama de T, y que m es el supremo de A. □

1. κ-Árboles

DEFINICIÓN 2.15. Para cualquier cardinal regular κ, un *κ-árbol* es un árbol T tal que $htT = \kappa$ y $|R_\alpha T| < \kappa$.

DEFINICIÓN 2.16. Para cualquier cardinal infinito κ, un *$\kappa-$árbol de Suslin* es un árbol T tal que $|T| = \kappa$ y cualquier cadena y anticadena de T tiene cardinalidad $< \kappa$.

TEOREMA 2.1. *(Kõnig).*
Cualquier $\aleph_0-$árbol tiene una rama cofinal.

Demostración. Sea T un $\aleph_0$-árbol. Por inducción sobre $n < \omega$, se elige $t_n \in R_n T$ tal que T^{t_n} no es finito y $t_n <_T t_{n+1}$. Entonces $\{t_n : n < \omega\}$ es una rama cofinal de T □

TEOREMA 2.2. *(Kurepa)*
Sea κ un cardinal regular y sea T un árbol de altura κ tal que para algún $\lambda < \kappa$, $|R_\alpha T| < \lambda$ para toda $\alpha < \kappa$. Entonces T tiene una rama cofinal.

Demostración. Se puede suponer que λ es también un cardinal regular. Para cada $\delta < \kappa$ con $cf\delta = \lambda$ se toma un $s_\delta <_T t_\delta$ con la propiedad $T^{s_\delta} \cap R_\delta T = \{t_\delta\}$. Tal S_δ existe, en otro caso se tendría que $|R_\delta T| \geq \lambda$ lo cual es una contradicción. Por el Lema de Fodor, se puede encontrar un conjunto estacionario $A \subseteq \{\delta < \kappa : cf\delta = \lambda\}$ y $\gamma < \kappa$ tal que $ht_T(s_\delta) = \gamma$ para toda $\delta \in A$. Ahora resulta que $\{t_\delta : \delta \in A\}$ es una κ – *cadena* de T □

DEFINICIÓN 2.17. Se dice que un árbol T es *normal* si y sólo si
$N(i)$ $|R_0 T| = 1$;
$N(ii)$ si $s, t \in T$ y si $ht_T(s) = ht_T(t)$ es un ordinal límite, y si $(\cdot, s)_T = (\cdot, t)_T$, entonces $s = t$;
$N(iii)$ si $\alpha < \beta < htT$, y si $t \in R_\alpha T$, entonces $|T^t \cap R_\beta T| \geq 2$

DEFINICIÓN 2.18. ${}^{\underline{\alpha}}\lambda = \bigcup\{{}^\kappa\lambda : \kappa < \alpha\}$

EJEMPLO 2.5. Un ejemplo típico de un árbol normal es el árbol binario de altura α, $({}^{\underline{\alpha}}2, \subseteq)$.

DEFINICIÓN 2.19. Se dice que un árbol T es λ – *ario* si $|N| = \lambda$ para cada nodo N *de* T de altura ordínal sucesor.

EJEMPLO 2.6. Un árbol λ-ario, esta dado por $({}^{\underline{\omega}}\lambda, \subseteq)$. Para este árbol cada nodo de altura sucesor tiene cardinalidad λ.

PROPOSICIÓN 4. *Si T es un árbol, se puede hacer que T cumpla $N(i)$ y $N(ii)$ sin incrementar la cardinalidad de T.*

Demostración. Agregemos un punto entre $\rho(N)$ y N, para cada nodo N de T con altura limite o cero. $\square$

DEFINICIÓN 2.20. Sean T y U dos árboles dados de la misma altura κ. Entonces decimos que T y U son *cub-isomorfos* si existe un c.u.b $C \subset \kappa$ tal que $T|_C$ y $U|_C$ son isomorfos. T es *cub-incrustable* en U si T es cub-isomorfo para alguna parte inicial de U.

PROPOSICIÓN 5. *Se puede encajar T sobre una parte inicial de ${}^{\underline{\alpha}}\lambda$, donde $\alpha = htT$ y $\lambda = n(T) = sup\{|N| : N \in \mathcal{N}(T)\}$.*

Esta proposición muestra que $|T| \leq \sum\{n(T)^{|\beta|} : \beta < htT\}$, y también demuestra que cualquier árbol normal T pueda ser identificado con una parte inicial de ${}^{\underline{\alpha}}\lambda$ donde $\alpha = htT$ y $\lambda = n(T)$

2. Árboles de Aronszajn

DEFINICIÓN 2.21. Para cualquier cardinal regular κ, un *κ-árbol de Aronszajn* es un κ-árbol tal que culaquier cadena en el árbol T es de cardinalidad $< \kappa$. A los ω_1-árboles de Aronszajn les llamaramos simplemente árboles de Aronszajn.

DEFINICIÓN 2.22. Si P es un conjunto parcialmente ordenado, denotamos por σP al conjunto de todos los subconjuntos de P que son acotados y bien ordenados.

TEOREMA 2.3. *(Aronszajn). Existe un árbol de Aronszajn.*

Demostración.
Sea $\sigma'\mathbb{Q} = \{t \in \sigma\mathbb{Q} : t$ tiene un elemento maximal $\}$. Nuestro árbol de Aronszajn T sera un subárbol de $\sigma'\mathbb{Q}$. Construiremos T por inducción sobre los niveles T_α, $\alpha < \omega_1$. La α-ésima hipótesis de inducción es:
$(*)_\alpha$ para cada $\gamma < \beta < \alpha$, cada $t \in T_\gamma$ y cada $\mathbb{Q} \ni x > max(t)$, existe un $s \in T_\beta$ tal que $t <' s$ y $x > max(s)$.
Caso $\alpha = \beta + 1$. Sea $T_\alpha = \{t \cup \{x\} : t \in T_\beta,\ x \in \mathbb{Q}$ y $x > maxt\}$. Entonces $|T_\alpha| \leq \aleph_0$, y así $(*)_\alpha$ se cumple.
Caso α es limite. Sea $(\alpha_n)_{n<\omega}$ una sucesión creciente de ordinales cofinales en α. Fijemos $t \in T|_\alpha$ y $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > max(t)$. Sea $m = min\{n : \alpha_n \geq ht(t)\}$. Usando $(*)_\alpha$, construyamos inductivamente una sucesión creciente $(t_k)_{k<\omega}$ de elementos de $T|_\alpha$ tal que $t_0 = t$, $t_k \in T_{\alpha_{m+k}}$ y $max(t_k) < x$. Más aún, podemos suponer que

$sup\{max(t_k) : k < \omega\} = x$. Sea $s_{t,k} = (\cup\{t_k : k < \omega\}) \cup \{x\}$. Entonces $|T_\alpha| \leq \aleph_0$ y $(*)_{\alpha+1}$ se cumple.
Sea $T = \cup\{T_\alpha : \alpha < \omega\}$. Entonces T es un árbol de Aronszajn. □

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $2 \leq \lambda \leq \aleph_0$. Supongamos que existe un árbol de Aronszajn. Entonces existe un árbol el cual es normal y $\lambda -$ ario.*

Demostración. Sea T cualquier árbol de Aronszajn, es decir un $\aleph_1$-árbol cuyas cadenas son a lo más contables. Agregemos un nuevo punto entre $\rho(N)$ y N para cada nodo de altura un ordinal limite o cero. Así se puede suponer que T satistace $N(i)$ y $N(ii)$ de la definicion de árboles normales . Para cada $t \in T$, se elige un ordinal $\alpha = \alpha(t) < \omega_1$ con la propiedas que $T^t \cap R_\alpha T$ es vacío o infinito. Como T es un árbol de Aronszajn, tal $\alpha(T)$ existe.
Sea $C = \{\delta < \omega_1 : lim(\delta) \text{ } y \text{ } \alpha(t) < \delta \text{ } para \text{ } toda \text{ } t \in T|_\delta\}$.
Entonces C es un conjunto cerrado y no acotado de ω_1 y $T|_C$ es un árbol de Aronszajn $\aleph_0 - ario$.
Supongamos ahora que $2 \leq \lambda < \aleph_0$. Sea T un árbol de Aronszajn $\lambda - ario$. Por inducción sobre los niveles de T se puede incrustar T en un segmento inicial T^1 de $\cup\{{}^\alpha\lambda : lim(\alpha)\}$ tal que

$$T^* = \{s \in {}^{\omega_1}\lambda : s \subseteq t \text{ } para \text{ } algún \text{ } t \in T^1\}.$$

T^* es un árbol de Aronszajn $\lambda - ario$. □

CAPíTULO 3

Topología en Árboles

También, dado un árbol T se le puede considerar como un espacio topológico con la topología generada por los intervalos de la forma $(s,t]_T$, donde $s,t \in T \cup \{-\infty\}$. Se puede mostrar que T con la topología de los intervalos no es necesariamente Hausdorff, y esto pasa si T satisface $N(ii)$ de la definicion de árboles normales (ver definición 2.17). Ahora supondremos que T siempre va a satisfacer $N(ii)$.

DEFINICIÓN 3.1. Si T y U son árboles entonces por $T \bigotimes U$ se denota el conjunto $\{(t,u) : t \in T, u \in U \ y \ ht_T(t) = ht_U(u)\}$ ordenado parcialmente por $(t,u) \leq (t_1,u_1)$ si y sólo si $t \leq_T t_1$ y $u \leq_U u_1$.

PROPOSICIÓN 6. *Si T y U son árboles, entonces $T \bigotimes U$ también es un árbol.*

Demostración. 1) Primero mostraremos que $(T \bigotimes U, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
(i) $(T \bigotimes U, \leq)$ es reflexiva. Sea $(t,u) \in T \bigotimes U$; tenemos que $t \leq_T t$ y $u \leq_U u$ pues T y U son árboles. Por lo tanto $(t,u) \leq (t,u)$.
(ii) $(T \bigotimes U, \leq)$ es transitiva. Sean $(t_1,u_1) \leq (t_2,u_2)$ y $(t_2,u_2) \leq (t_3,u_3)$; esto implica que $t_1 \leq_T t_2$ y $u_1 \leq_U u_2$ además $t_2 \leq_T t_3$ y $u_2 \leq_U u_3$, así $t_1 \leq_T t_3$ y $u_1 \leq_U u_3$ por lo tanto $(t_1,u_1) \leq (t_3,u_3)$.
2) Ahora mostraremos que $(\cdot,(t_i,u_1))_{T \bigotimes U} = \{(t,s) \in T \bigotimes U : (t,s) < (t_1,u_1)\}$ es bien ordenado. Sabemos que $\alpha = ht_T(t_1) = ht_U(u_1)$, y $(\cdot,t_1)$ y $(\cdot,u_1)$ son conjuntos bien ordenados; así, $(\cdot,(t_1,u_1))$ es isomorfo al ordinal α, por lo tanto es un conjunto bien ordenado. Así $(T \bigotimes U, \leq)$ es un árbol. $\square$

DEFINICIÓN 3.2. Si $1 \leq n < \omega$, entonces por $T^{(n)}$ se denota el producto $T \bigotimes T \bigotimes \cdots \bigotimes T$, (n veces)

PROPOSICIÓN 7. *Si T y U son $\aleph_1-$árboles y uno de ellos es Aronszajn, entonces $T \bigotimes U$ es también un árbol de Aronszajn*

Demostración. Sea T un árbol de Aronszajn. Supongamos que $T \bigotimes U$ no es un árbol de Aronszajn. Entonces existe una cadena C tal que $|C|$ es ω_1. Tomemos el conjunto $C_1 = \{t \in T : \exists u \in U$ y $(t,u) \in C\}$. Tenemos que $|C_1| = \omega_1$ y C_1 es una cadena del árbol T; esto es una contradicción pues T es un árbol de Aronszajn. $\square$

Sin embargo $\bigotimes$ no preserva la propiedad de ser Suslin. La siguiente proposición muestra este hecho.

PROPOSICIÓN 3.1. *Si* $|T| > \omega$, *entonces* $T \bigotimes T$ *tiene una cadena o anticadena no contable*

Demostración. Sea $\langle t_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una sucesión de elementos de T tal que cualquier t_α tiene dos sucesores incomparables s_α^0 y s_α^1 tal que $ht_T(s_\alpha^0) = ht_T(s_\alpha^1) < ht_T(t_\beta)$ para cualquier $\alpha < \beta < \omega_1$. Ahora sólo hay que verificar que $\{\langle s_\alpha^0, s_\alpha^1 \rangle : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena de $T \bigotimes T$. □

DEFINICIÓN 3.3. Un conjunto D es *denso* en T si para cualquier $s \in T$, existe $t \in D$ tal que $s \leq_T t$.

EJEMPLO 3.1. Si tomamos $T = \mathcal{P}(\omega)$ ordenado por $\supseteq$, un conjunto denso en T, es el conjunto formado por los conjuntos cuya cardinalidad es 1, es decir $D = \{\{n\} : n \in \omega\}$ es denso en $\mathcal{P}(\omega)$.

CAPíTULO 4

Conjuntos Linealmente Ordenados y Árboles

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $(L, \leq_L)$ un conjunto linealmente ordenado. Entonces $d(L, \leq_L) = min\{\kappa : (L, \leq_L)$ es incrustable en $(\mathcal{P}(\kappa), \subseteq)\}$.*

Demostración. Sea $\kappa = d(L, \leq_L)$ y sea D un subconjunto denso de L de cardinalidad κ. Entonces $l \to (\cdot, l]_L \cap D$ es un mapeo estrictamente creciente de $(L, \leq_L)$ sobre $(\mathcal{P}(D), \subseteq)$. Conversamente, podemos suponer que L es una cadena en $\mathcal{P}(\kappa)$. Para cada $\alpha \in \kappa$, sea $d_\alpha = \bigcap\{l : \alpha \in l \in L\}$. Entonces, claramente, se ve que $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto denso de $(D \cup L, \subseteq)$. De aquí resulta que $d(L, \subseteq) \leq d(D \cup L, \subseteq) \leq \kappa$ □

COROLARIO 4.1. *$d(L, \leq_L) \leq \aleph_0$ si y sólo si $(L, \leq)$ es isomorfo a un conjunto de números reales.*

Demostración. Sea $\preceq$ el orden lexicográfico de $\mathcal{P}(\omega)$. Entonces $A \subset B$ implica $A \preceq B$ y $(\mathcal{P}(\omega), \preceq)$ es isomorfo al conjunto de Cantor. □

DEFINICIÓN 4.1. Por $tp(L, \leq_L)$ se denota el tipo de orden de $(L, \leq_L)$. Este es la clase de todos los conjuntos linealmente ordenados isomorfos a $(L, \leq_L)$. Si $\varphi = tp(L, \leq_L)$,definimos $|\varphi| = |L|, d(\varphi) = d(L, \leq_L)$ y $\varphi^* = tp(L, \geq_L)$.

DEFINICIÓN 4.2. Si $\varphi = tp(L, \leq_L)$ y $\psi = tp(K, \leq_K)$, entonces $\psi \leq \varphi$ significa que existe un mapeo estrictamente creciente de K sobre L.

DEFINICIÓN 4.3. Por L^2 se denota el conjunto $\{\langle l, m\rangle : l, m \in L\}$ ordenado parcialmente por $\langle l, m\rangle \leq \langle l^1, m^1\rangle$ si y sólo si $l \leq l^1$ y $m \leq m^1$.

Ahora se define la operacion fundamental que relaciona los árboles con los conjuntos linealmente ordenados

DEFINICIÓN 4.4. *(Proceso de atomización)* Este es un proceso inductivo de construcción de familias T_α, $\alpha \in On$, de subconjuntos convexos no vacíos de L tal que :
(i) si $\alpha = 0$, entonces $T_\alpha = \{T\}$.
(ii) si $\alpha = \beta + 1$, entonces para cada I no trivial tal que $I \in T_\beta$ existen

I_0, $I_1 \in T_\alpha$ tales que $I = I_0 \cup I_1$, y $T_\alpha = \cup\{\{I_0, I_1\} : I \in T_\beta$ y $|I| \geq 2\}$.
(iii) Si α es un ordinal limite, entonces
$T_\alpha = \{\cap b : b \subseteq \bigcup\{T_\beta : \beta < \alpha\}, b \cap T_\beta \neq \emptyset$ para toda $\beta < \alpha, y \cap b \neq \emptyset\}$.
Es claro que para algún α, $T_\alpha = \emptyset$. De aquí se puede definir
$htT = min\{\alpha : T_\alpha = \emptyset\}$ y $T = \bigcup\{T_\alpha : \alpha < htT\}$.

Entonces $(T, \supseteq)$ es un árbol y $R_\alpha T = T_\alpha$ para toda $\alpha < htT$.

DEFINICIÓN 4.5. Cualquier árbol que es resultado de una proceso de atomización de L es llamado un *árbol de partición* de L.

Consideraremos únicamente procesos de atomización binarios.

DEFINICIÓN 4.6. Sea L un conjunto linealmente ordenado y sea T un árbol de partición de L. Si N es un nodo de T , y si $I_0, I_1 \in N$, entonces $I_0 <_N I_1$ si y sólo si $l <_L m$ para cualquier $l \in I_0$ y $m \in I_1$.

PROPOSICIÓN 8. *Sea $\preceq$ el orden lexicográfico de T inducido por $\{\leq_N$: $N \in \mathcal{N}(T)\}$ el conjunto de nodos de T. Entonces el mapeo $l \to \{l\}$ es un encaje isomorfo de $(L, \leq_L)$ sobre $(T, \preceq)$.*

Demostración. Para esto supongamos que $l <_L m$, y sea $I = \bigcap\{J \in T : \{l, m\} \subseteq J\}$. Entonces $I \in T$. Sea I_0 e I_1 los sucesores inmediatos de I en T, y supongamos que $I_0 <_N I_1$, donde N es el nodo $\{I_0, I_1\}$ de T. Entonces se tiene que $l \in I_0$ y $m \in I_1$, de aquí $\{l\} \prec \{m\}$. □

PROPOSICIÓN 4.2. *Supongamos que φ y ψ son tipos de orden tales que $\psi \leq \varphi$. Entonces, cualquier árbol de partición de φ contiene un subárbol isomorfo a un árbol de partición de ψ.*

Demostración.
Sea L un conjunto linealmente ordenado, sea K subconjunto de L, y sea T un árbol de partición de L. Sea $T_K = \{I \cap K : I \in T$ e $I \cap K \neq \emptyset\}$. Entonces claramente se puede verificar que T_K es un árbol de partición de K. Para $J \in T_K$ sea $h(J)$ el elemento $\supseteq$ $-$minimal de T tal que $J = h(J) \cap K$. Entonces h es un encaje isomorfo de $(T_K, \supseteq)$ sobre $(T, \supseteq)$. □

DEFINICIÓN 4.7. Sea $wo(L) = sup\{|A| : A$ es un subconjunto bien ordenado o inversamente bien ordenado de $L\}$.

TEOREMA 4.2. *(Hausdorff-Urysohn)*
Sea L un conjunto linealmente ordenado. Entonces $|L| \leq 2^{wo(L)}$.

Demostración. Sea T un árbol de partición de L. Entonces $|L| \leq |T|$, dado que $\{l\} \in T$ para cualquier $l \in L$. Puesto que T se encaja en una parte inicial de ${}^{htT}2$, es suficiente con demostrar que $htT \leq wo(L)^+$. Pero se demostrará un resultado aún más fuerte, es decir, que cualquier cadena de T tiene cardinalidad $\leq wo(L)$. Sea c una cadena de T y sea $\{I_\beta : \beta < \alpha\}$ la $\supseteq$ – enumeracion creciente de c. Para cada $\beta < \alpha - 1$, se elige $l_\beta \in I_\beta - I_{\beta+1}$ y formamos $A_0 = \{l_\beta : L_\beta <_L I_{\beta+1}\}$ y $A_1 = \{l_\beta : I_{\beta+1} <_L l_\beta\}$. Entonces A_0 y A_1 son subconjuntos bien ordenados y bien ordenados inversamente de L, respectivamente, y $|c| = |A_0| + |A_1| + 1 \leq wo(L)$. □

DEFINICIÓN 4.8. Un tipo de orden $\varphi = tp(L, \leq_L)$ es llamado un *tipo real no contable* si y sólo si $(L, \leq_L)$ es isomorfo a un conjunto no contable de números reales

Claramente cualquier tipo real no contable φ satisface que $\omega_1, \omega_1^* \not\leq \varphi$. De aquí uno se puede preguntar si cualquier tipo no contable ψ tal que $\omega_1, \omega_1^* \not\leq \psi$ contiene un tipo real no contable. La respuesta a esta pregunta es negativa y un contraejemplo puede ser construido sin suponer nada más que los axiomas usuales de la teoría de conjuntos. Tal tipo es llamado el tipo de Aronszajn es decir un tipo de orden φ con las siguientes propiedades:
(i) $|\varphi| > \aleph_0$;
(ii) $\omega_1, \omega_1^* \not\leq \varphi$;
(iii) φ no contiene tipo real no contable.
Se demostrará que cualquier tipo de Aronszajn tiene cardinalidad $\aleph_1$. De esto se desprenderá la siguente proposición

PROPOSICIÓN 9. *φ no contiene tipo real no contable si y sólo si $d(\psi) = |\psi|$ para cualquier $\psi \leq \varphi$.*

Demostración. φ contiene un tipo real no contable si y sólo si $d(\varphi) = \omega$ y $|\varphi| = \omega_1$. Pero tenemos que para todo $\psi \leq \varphi$, $d(\psi) = |\psi|$. Por lo tanto, si $d(\psi) = \omega$ entonces $|\psi| = \omega$; es decir, todos los subconjuntos de φ que tienen densidad ω son contables. □

DEFINICIÓN 4.9. Un conjunto linealmente ordenado L es llamado una *línea de Aronszajn* si $tp(L, \leq_L)$ es un tipo de Aronszajn.

DEFINICIÓN 4.10. un conjunto continuo linealmente ordenado $\mathbb{K}$ es llamado *continuo de Aronszajn*si
(i) $\mathbb{K}$ no es separable,
(ii) $\mathbb{K}$ es primero contable,
(iii)si $M \subseteq \mathbb{K}$ es contable entonces $\overline{M}$ es segundo contable.

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea $\mathbb{K}$ un continuo linealmente ordenado. Entonces $\mathbb{K}$ es un continuo de Aronszajn si y sólo si $\mathbb{K}$ es la completación de Dedekind de una línea de Aronszajn densamente ordenada.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que $\mathbb{K}$ es Aronszajn. Sea T un árbol de particion de $\mathbb{K}$. Sea T_1 el conjunto de todos los intervalos no triviales de T , y sea L el conjunto de todos los puntos finales de los intervalos de T_1. Entonces, L es denso en $\mathbb{K}$ y L es una línea de Aronszajn. L es no contable porque $\mathbb{K}$ no es separable, $\omega_1, \omega_1^* \not\leq tpL$ porque $\mathbb{K}$ es primero contable, y tpL no contiene un tipo real no contable, dado que para cualquier M contable tal que $M \subseteq \mathbb{K}$, $\overline{M}$ es segundo contable.

$\Leftarrow$] Sea L una línea de Aroszajn densamente ordenada, y sea $\mathbb{K}$ la completación de Dedekind de L. Entonces $\mathbb{K}$ no es separable porque L no es separable. $\mathbb{K}$ es primero contable dado que $\omega_1, \omega_1^* \not\leq tpL$.
Suponga ahora que $M \subseteq \mathbb{K}$ es contable, pero $w(\overline{M}) > \aleph_0$. Esto significa que el número de componentes convexas de $\mathbb{K} - \overline{M}$ es no contable. Dado que L es denso en $\mathbb{K}$, de cada componente convexa se puede tomar un elemento de L y formar un subconjunto no contable L^1 de L. Entonces, claramente se ve que M es un conjunto ordenado denso en $L^1 \cup M$. De aquí, $tp(L^1 \cup M)$ es un tipo real no contable, y así tambien lo es L^1, una contradicción. $\square$

DEFINICIÓN 4.11. Un tipo de orden φ es llamado un *tipo de Kurepa* si
(i) $|\varphi| > \aleph_1$,
(ii) $d(\varphi) = \aleph_1$, y
(iii) φ no contiene un tipo real no contable.

Nótese que (iii) es equivalente a decir que $d(\psi) = |\psi|$ para cualquier $\psi \leq \varphi$ con $|\psi| \leq \aleph_1$.

DEFINICIÓN 4.12. Si se toma la completación de Dedekind de una línea de Kurepa densamente ordenada, el resultado es un continuo $\mathbb{K}$ que tiene las siguientes propiedades:
(i) $\mathbb{K}$ tiene $\aleph_1$ puntos de caracter contable;
(ii) $w(\mathbb{K}) = \aleph_1$;
(iii) si $M \subseteq \mathbb{K}$ es contable entonces $\overline{M}$ es segundo contable.
Cualquier continuo linealmente ordenado $\mathbb{K}$ con las propiedades
$(i) - (iii)$ es llamado *continuo de Kurepa*.

DEFINICIÓN 4.13. Se dice que un conjunto linealmente ordenado L tiene la *propiedad de Suslin* (o satisface la condicion de la cadena contable(ccc)) si cualquier familia de intervalos abiertos disjunta por pares en L es contable.

Problema de Suslin:
Sea $\mathbb{K}$ un linealmente ordenado continuo que no tiene una familia no contable de intervalos abiertos disjunta por pares. Es $\mathbb{K}$ isomorfa al

intervalo unitario $[0,1]$?
La hipotesis de Suslin (SH) es la suposición que la respuesta al problema de Suslin es positiva.

DEFINICIÓN 4.14. Un conjunto linealmente ordenado L es llamado una *línea de Suslin* si L tiene la propiedad de Suslin pero no es (topologicamente) separable.

Sea L una línea de Suslin. Para $l, m \in L$, decimos que $l \sim m$ si y sólo si $[l,m]_L$ es separable. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia sobre L, cada clase de equivalencia es un conjunto convexo y un subconjunto séparable de L (dado que $\omega_1, \omega_1^* \not\leq tpL$). De esto, $L/\sim$ es una línea de Suslin densamente ordenada y séparable. Sea $\mathbb{K}$ la completación de Dedekind de $L/\sim$. Entonces, fácilmente se verifica que $\mathbb{K}$ es un continuo de Suslin. De esto se desprende la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.4. *Existe un continuo de Suslin si y sólo si existe una línea de Suslin.*

PROPOSICIÓN 4.5. *Cualquier línea de Suslin L contiene una línea de Aronszajn K la cual es topologicamente densa en L.*

Demostración. Sea T un árbol de partición de L, y sea T^1 el conjunto de todos los elementos de T con interiores no vacíos. Para cada $I \in T^1$ se elige $l(I) \in I$ arbitrario, y sea $K = \{l(I) : I \in T^1\}$. Entonces fácilmente se ve que K es (topologicamente) denso en L. De aquí, Kes no contable. Sea M un subconjunto no contable de K y sea $D \in M$ tal que D es contable. Dado que $\omega_1, \omega_1 \not\leq tpL$ y dado que cada nivel de T^1 es contable, se puede encontrar un $\alpha < \omega_1$ tal que $D \cap (\cup R_\alpha T^1) = \emptyset$. Dado que $M - \cup R_\alpha T^1$ es contable, se puede encontrar un $I \in R_\alpha T^1$ tal que $I \cap M$ es un subconjunto convexo no contable de M disjunto de D. De aquí resulta que D no está ordenado densamente en M. Esto demuestra que tpK no contiene un tipo real no contable, de aquí resulta que K es una línea de Aronszajn. □

TEOREMA 4.3. (*i*) *Cualquier orden lexicográfico de un árbol de Aronszajn es una línea de Aronszajn.*
(*ii*) *Cualquier árbol de partición de una línea de Aronszajn es un árbol de Aronszajn*

Demostración. (*i*) Sea T un árbol de Aronszajn y sea $\prec$ un orden lexicografico de T. Sea $\varphi = tp(T, \prec)$. Tenemos que probar que $\varphi \not\geq \omega_1$, ω_1^* y φ no contiene un tipo real no contable. Primero probaremos que $\varphi \not\geq \omega_1$. Supongamos lo contrario, i.e supongamos que existe un $B \subseteq T$ tal que $tp(B, \geq) = \omega_1$. Dado que cada nivel de T es contable, para cada $\alpha < \omega_1$, podemos encontrar un $t_\alpha \in T_\alpha$ tal que $\{s \in B : t_\alpha \leq_T s\}$ es no contable. Dado que $tp(B, \geq) = \omega_1$, tendríamos que $t_\alpha < t_\beta$ para $\alpha < \beta < \omega_1$, i.e $\{t_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una $\omega_1 - rama$ de T, una contradicción.

(ii) Sea $(L, <)$ una línea de Aronszajn y sea $(T, \supseteq)$ un árbol de partición de L. $tp(L) \not\geq \omega_1, \omega_1^*$ (ya que T no tiene cadenas no contables). Para probar que T es Aronsajn, es suficiente con probar que cada nivel de T es contable. Supongamos lo contrario y definamos $\alpha = min\{\beta : T_\beta$ es no contable$\}$. Dado que T es un árbol binario, α es un ordinal limite contable. Para cada $J \in T|_\alpha$, elegimos un conjunto contable $A(J) \subseteq J$ cofinal y coinicial con J y definamos $D = \bigcup\{A(J) : J \in T|_\alpha\}$. Para cada $I \in T_\alpha$, elegimos $x(I) \in I$ y definimos $K = D \cup \{x(I) : I \in T_\alpha\}$. Entonces D es un subconjunto denso de orden contable de K. Esto demuestra que $tp(K, <)$ es un subtipo real no contable de $tp(L, <)$, una contradicción. □

LEMA 4.1. *Cualquier árbol de partición de una línea de Suslin contiene un subárbol de Suslin.*

Demostración. Sea L una línea de Suslin. Por las proposiciones 4.2 y 4.5 podemos suponer que L es una línea de Aronszajn. Sea T el árbol de partición de L. Por teorema 4.3(ii), tenemos que T es un árbol de Aronszajn. Sea $T' = \{I \in T : |I| \geq 3\}$. Entonces T' es también un árbol de Aroszajn. Sea $A \subseteq T'$ una anticadena de $(T', \subseteq)$. Por la definición de T', cada $I \in A$ contiene un intervalo abierto no vacío (l_I, m_I). Dado que T es un árbol de partición de L, A es una familia de subconjuntos convexos de L; de aquí $\{(l_I, m_I) : I \in A\}$ es una familia de intervalos abiertos no vacíos de L. Por lo tanto A es contable. Esto demuestra que T' es un árbol de Suslin. □

LEMA 4.2. *Cualquier orden lexicográfico de un árbol de Suslin contiene una línea de Suslin.*

Demostración. Sea T un árbol de Suslin y sea $\prec$ un orden lexicográfico de T. Sea L un subconjunto maximal de T con la propiedad de que $\{u \in T : s \prec u \prec t\}$ es no contable para cualquier $s \prec t$ en L. Por teorema 4.3(i), es suficiente con demostrar que L tiene la propiedad de Suslin. En otro caso, sea $\{(s_\alpha, t_\alpha)_L : \alpha < \omega_1\}$ una familia de intervalos abiertos disjuntos de L. Por inducción sobre α, elegimos $u_\alpha \in (s_\alpha, t_\alpha)_L$ tal que $ht(u_\alpha) > ht(s_\alpha)$, $ht(t_\alpha)$ y $ht(u_\alpha) > ht(u_\beta)$ para toda $\beta < \alpha$. Estos $u'_\alpha s$ existen y forman una anticadena de T, una contradicción. □

TEOREMA 4.4. *La hipotesis de Suslin es verdadera si y sólo si cualquier árbol no contable tiene una cadena o anticadena no contable.*

Demostración.

Por la proposición 4.4, existe un continuo de Suslin si y sólo si existe una línea de Suslin por los lemas 4.1 y 4.2 existe una línea de Línea de Suslin si y sólo si existe un árbol de Suslin. □

LEMA 4.3. (*i*) *Cualquier orden lexicográfico del conjunto de todas las ω_1-ramas de un árbol de Kurepa es una línea de Kurepa.*
(*ii*) *Cualquier línea de Kurepa tiene un árbol de partición de altura $\omega_1 + 1$. Los primeros ω_1 niveles de él forman un árbol de Kurepa.*

Demostración. (*i*) Sea T un árbol de Kurepa y sea L el conjunto de todas las ω_1-ramas de T ordenadas lexicográficamente por $\prec$. Para cada $t \in T$ elegimos $l_t \in L$ como sigue. Si $B_t = \{l \in L : t \in l\}$ es vacío, sea l_t cualquier elemento de L. Si $B_t \neq \emptyset$ y si B_t tiene un $\prec$-mínimo, dfinimos $l_t = minB_t$. Si $B_t \neq \emptyset$ y $minB_t$ no existe, elegimos cualquier elemento l_t de B_t. Sea $D = \{l_t : t \in T\}$. Entonces D es un subconjunto denso de orden de L; de aquí, $d(L, \preceq) \leq \aleph_1$. Ahora, sea M cualquier subconjunto no contable de L y sea $N \subseteq M$ contable. Dado que N es contable, para cada $l \in M$ elegimos $t_l \in l$ tal que $t_l \notin m$ pra todo $m \in N$, $m \neq l$. Dado que M es no contable, podemos encontrar $t \in T$ tal que $ht(t) > sup\{ht(t_l) : l \in N\}$ y $|B_t \cap M| \leq \aleph_1$. Este $B_t \cap M$ es un subconjunto convexo no contable de M el cual tiene al menos un punto en común con N. De aquí resulta que N no es denso de orden en M. Esto muestra que tpL no contiene un subtipo real no contable. Por lo tanto, L es una línea de Kurepa.
(*ii*) Sea L una línea de Kurepa y sea $\{l_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ la enumeración de un subconjunto denso de L. Por inducción sobre los niveles de T_α, $\alpha \leq \omega_1$, definamos un árbol de partición T de L como sigue. Supongamos que T_β está definido y es contable para toda $\beta < \alpha$.
Caso $\alpha = \beta + 1$. Fijemos $I \in T_\beta$ tal que $|I| \geq 2$. Si $l_\beta \in I$, entonces l_β divide a I en dos conjuntos distintos del vacío I_0 e I_1 que son convexos y disjuntos tal que $I_0 \leq l_\beta \leq I_1$. Si $l_\beta \notin I$, nosotros dividimos I en dos subconjuntos convexos disjuntos no vacíos I_0 e I_1, arbitrarios. Sea $T_\alpha = \bigcup\{\{I_0, I_1\} : I \in T_\beta \text{ y } |I| \geq 2\}$.

Caso α es límite. Sea $T_\alpha = \{\cap b : b \text{ es una } \alpha\text{−rama de } T|_\alpha$ tal que $\cap b \neq \emptyset\}$. Entonces T_α es contable si $\alpha > \omega_1$. Esto se demuestra utilizando un argumento análogo al del teorema 5(ii). Dado que tpL no contiene un subtipo real no contable.
Finalmente, sea $T = \bigcup\{T_\alpha : \alpha \leq \omega_1\}$. Así T es un árbol de partición de L. Dado que $|T|_{\omega_1}| \leq \aleph_1$ y como $|L| \geq \aleph_1$, tenemos que $\{l\} \in T_{\omega_1}$ para más que $\aleph_1$ elementos $l \in L$. De aquí $T|_{\omega_1}$ es un árbol de Kurepa. □

TEOREMA 4.5. *Existe una línea de Kurepa si y sólo si existe un árbol de Kurepa*

Demostración.

Si existe una línea de Kurepa, por el inciso *ii*) del lema 4.3, entonces existe un árbol de partición de altura $\omega_1 + 1$, del cual los primeros ω_1 niveles forman un árbol de Kurepa.
En la dirección contraría: si existe un árbol de Kurepa, por el inciso *i*) del lema 4.3, el conjunto de las ω_1-ramas del árbol bajo el orden lexicográfico forma una línea de Kurepa.

□

TEOREMA 4.6. *Jones. Sea T un $\aleph_1-$árbol. Entonces T es una árbol especial de Aronszajn si y sólo si T es un espacio de Moore.*

Demostración.

Supongamos que $T = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$, donde cada A_n es una anticadena de T. Para $n < \omega$ y $t \in T$, sea $G_n(t) = \{s \leq_T t : [s,t) \cap (\cup\{A_i : i \leq n\}) = \emptyset\}$. Sea $\mathcal{G}_n = \{G_n(t) : t \in T\}$. Entonces $\{\mathcal{G}_n : n \leq \omega\}$ es un desarrollo de T.
En el sentido inverso, Sea $\mathcal{H}_n : n < \omega$ un desarrollo de T. Para $t \in T$, sea $h(t)$ el mínimo $n < \omega$ tal que $\bigcup\{H \in \mathcal{H}_n : t \in H\} \subseteq (\cdot, t]$. Ahora, para $n < \omega$, sea $E_n = \{t \in T : h(t) = n\}$. Entonces E_n así definido no contiene una cadena de tipo $\omega + 1$; por lo cual cada E_n es un subárbol especial de T.

□

TEOREMA 4.7. *(Fleissner). Supongamos que se cumple $MA_{\aleph_1}$. Entonces cualquier árbol de Aronszajn es un espacio topologico normal.*

Demostración.

Sea T un árbol de Aronszajn y sean F y H subconjuntos cerrados de T tales que $F \cap H = \emptyset$. Sea $f : T \to \omega$ un mapeo especial. Para $t \in T$ y $n < \omega$, sea $B_n(t) = \bigcup\{[s,t] : s \leq_T t \text{ y } [s,t) \cap f^{-1}(n) = \emptyset\}$. Entonces $\{B_n(t)\}$ es una base de vecindades de t en T.

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de todas las funciones finitas de $F \cup H$ sobre ω tal que $(F \cup \bigcup\{B_{p(t)} : t \in dom(p) \cap F\}) \cap (H \cup \bigcup\{B_{p(t)}(t) : t \in dom(p) \cap H\}) = \emptyset$. El orden de $\mathbb{P}$ es $\supset$. un Δ-sistema muestra que $\mathbb{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado con la condición de la cadena contable. Para $t \in F \cup H$, sea $D_t = \{p \in \mathbb{P} : t \in dom(p)\}$. Entonces D_t es un subconjunto abierto y denso de $\mathbb{P}$.

Sea G un subconjunto $\{D_t : t \in F \cup H\}$-genérico de $\mathbb{P}$ y sea $h = \bigcup\{p : p \in G\}$. Entonces $\bigcup\{B_{h(t)}(t) : t \in H\}$ son dos conjuntos abiertos y disjuntos los cuales separan a F y H. Por lo tanto T es normal.

□

TEOREMA 4.8. *(Devlin-Shelah). Suponga que* $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. *Sea* T *un árbol especial de Aronszajn. Entonces* T *no es un espacio topologico normal*

Demostración.

Sea $\mathcal{I}$ el ideal de los pequeños conjuntos. Por la suposición que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, tenemos que $\omega_1 \notin \mathcal{I}$. Sea T un árbol especial de Aronszajn el cual identificamos con ω_1. Así tenemos que $\alpha <_T \beta$ implica que $\alpha < \beta$, y $ht(t)(\alpha) = \alpha$ si α es un ordinal límite. Sean A_n las anticadenas disjuntas de T con $T = \bigcup\{A_n : n < \omega\}$. Dado que $\mathcal{I}$ es σ-completo, existe un n_0 tal que $A_{n_0} \notin \mathcal{I}$. Sea $E = A_{n_o} \cap \Lambda$.

Definimos $F : {}^{\omega_1}2 \to 2$ como sigue. Dada $f \in {}^{\alpha}2$, $F(f) = 0$ si y sólo si existe una $\gamma < \alpha$ tal que $f(\beta) = 0$ para toda $\beta, \gamma <_T \beta <_T \alpha$; y sea $F(f) = 1$ en otro caso. Dado que $E \in \mathcal{I}$, existe un $g \in {}^{\omega_1}2$ tal que para toda $f \in {}^{\omega_1}2$, el conjunto $\{\alpha \in E : F(f|_\alpha) = g(\alpha)\}$ es estacionario. Sea $J = \{\alpha \in E : g(\alpha) = 0\}$, $K = \{\alpha \in E : g(\alpha) = 1\}$. Dado que E es una anticadena de T, J y K son subconjuntos cerrados de T. Ahora mostraremos que J y K no pueden ser separados por subconjuntos abiertos de T. Supongamos lo contrario, que existen U y $W \subseteq T$ con $J \subseteq U$ y $K \subseteq W$. Definamos $f \in {}^{\omega_1}2$ donde $f(\alpha) = 1$ si y sólo si $\alpha \notin W$. Entonces, por la definición g, el conjunto $E' = \{\alpha \in E : F(f|_\alpha) = g(\alpha)\}$ es estacionario. Fijemos $\alpha \in E'$. Supongamos que $g(\alpha) = 0$. Entonces $F(f|_\alpha) = 0$. De aquí, para algún $\gamma <_T \alpha$, $f(\beta) = 0$ para toda $\gamma <_T \beta <_T \alpha$. Por como se definió f, $(\gamma, \alpha)_T \subseteq W$, una contradicción, dado que $g(\alpha) = 0$ significaría que $\alpha \in J$. Si $g(\alpha) = 1$, llegaríamos a una contradicción análoga a la anterior.

□

1. Teorema de Ramsey y Árboles

DEFINICIÓN 4.15. Sea S un conjunto. Para $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$, $[S]^r = \{X \subseteq S : |X| = r\}$ es la colección de todos los subconjuntos de S con r elementos. Sea $\{A\}_{i=1}^{s-1}$ una partición de $[S]^r$ en s clases ($s \in \mathbb{N} - \{0\}$); es decir, $[S]^r = \cup_{i=0}^{s-1} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Diremos que $H \subseteq S$ es *homogéneo* para la partición si $[H]^r \subseteq A_i$ para algún i; es decir, si todos los subconjuntos de r, elementos de H, pertenecen a la misma clase A_i de la partición.

Sean κ, λ números cardinales. Escribiremos $\kappa \to (\lambda)^r_s$ como una forma corta para decir la oración: "para cualquier conjunto S tal que $|S| = \kappa$ y cualquier partición de $[S]^r$ en s clases, existe un conjunto homogéneo H tal que $|H| \geq \lambda$". La negación de esta oración es denotada como $\kappa \not\to (\lambda)^r_s$.
Más generalmente $\kappa \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^r_s$ significa: para cualquier conjunto S con $|S| = \kappa$ y cualquier partición $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ de $[S]^r$ en s clases, existe algún i y un conjunto $H \subseteq S$ con $[H]^r \subseteq A_i$ y $|H_i| \geq \lambda_i$.

TEOREMA 4.9. $\aleph_0 \to (\aleph_0)^r_s$ *se cumple para todo* $r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Demostración.
Consideremos $S = \mathbb{N}$, hagamos inducción sobre r.

$r = 1$: si $[\mathbb{N}]^1 = \mathbb{N} = \cup_{i=1}^{s-1} A_i$, tenemos que algún conjunto A_i es infinito, tomemos H como el conjunto A_i.

Veamos que pasa para $r = 2$ y después vamos al caso general. Sea $[\mathbb{N}]^2 = \cup_{i=0}^{s-1} A_i$. Construiremos sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(i_n)_{n=0}^{\infty}$, y $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ por recursión, el conjunto $a_o = 0$ y $B_i^0 = \{b \in \mathbb{N} : b \neq a_0 \text{ y } \{a_0, b\} \in A_i\}$. Entonces $\{B_i^0\}_{i=0}^{s-1}$ es una partición de $\mathbb{N} - \{a_0\}$. Tomemos i_0 el primer subíndice i para el cual B_i^0 es infinito, y sea $H_0 = B_{i_0}^0$. Todos los subsecuentes términos de la sucesión los tomaremos de H_0, esto garantizará que $\{a_o, a_n\} \in A_{i_0}$, para todo $n > 0$. Seleccionaremos como a_1 el primer elemento de H_0 y $B_i^1 = \{b \in H_0 : b \neq a_1 \text{ y } \{a_0, b\} \in A_i\}$. Nuevamente $\{B_i^1\}_{i=0}^{s-1}$ es una partición del conjunto infinito $H_0 - \{a_1\}$. Tomamos ahora i_1 el primer i para el cual B_i^1 es infinito, y $H_1 = B_{i_1}^1$. Procediendo de esta manera encontraremos la sucesión adecuada.
Tenemos que la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente y $\{a_n, a_m\} \in A_{i_n}$ para toda $m < n$. La sucesión $(i_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene valores del conjunto infinito $\{0, \ldots, s-1\}$, de aquí que exista un j y un conjunto infinito M tal que $i_n = j$ para todo $n \in M$. De esto se sigue que $H = \{a_n : n \in M\}$ es infinito y $[H]^2 \subseteq A_j$, por que $\{a_n, a_m\} \in A_n = A_j$ para toda $n, m \in M$, $n < m$.

El caso general es similar. Supondremos que el teorema es verdad para r y lo probaremos para $r + 1$. Así supongamos que $[\mathbb{N}]^{r+1} = \cup_{i=0}^{s-1} A_i$. Consideremos un elemento arbitrarío $a \in \mathbb{N}$ y un subconjunto arbitrarío infinito $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que $a \notin S$. Definimos una partición $\{B_i\}_{i=0}^{s-1}$ de $[S]^r$ como sigue: para $X \in [S]^r$, $X \in B_i$ si y sólo si $\{a\} \cup X \in A_i$. Por hipotesis de inducción, existe un conjunto infinito $H \subseteq S$ tal que $[H]^r \subseteq B_i$ para algún i. Seleccionamos un i tal que $i = i(a, S)$ y $H = H(a, S)$. Notemos que todos los conjuntos de la forma $\{a\} \cup X$

donde $X \in [H]^r$ pertenece a A_i.
Construyamos sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(i_n)_{n=0}^{\infty}$, y $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ por recursión, donde $a_0 = 0$, $i_0 = i(0, \mathbb{N} - \{0\})$, $H_0 = H(0, \mathbb{N} - \{0\})$. Habiendo construido a_n, i_n, y H_n, sea a_{n+1} el mínimo elemento de H_n, e $i_{n+1} = i(a_{n+1}, H_n - a_{n+1})$, $H_{n+1} = H(a_{n+1}, H_n - a_{n+1})$. El punto es para garantizar que todos los conjuntos de la forma $\{a_n, a_{k_1}, \dots a_{k_r}\}$ donde $n < k_1, \dots, n < k_r$, pertenecen a A_{i_0}.
Existe $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ tal que $M = \{m \in \mathbb{N} : i_m = j\}$ es infinito. $H = \{a_m : m \in M\}$ y notemos que H es infinito y $[H]^{r+1} \subseteq A_j$.

□

COROLARIO 4.10. *Cualquier conjunto ordenado infinito $(P, \leq)$ contiene un subconjunto infinito S tal que cualesquiera dos elementos distintos de S son comparables o cualesquiera dos elementos distintos de S son incomparables.*

Demostración.
Apliquemos el teorema de Ramsey a la partición $\{A_0, A_1\}$ de $[P]^2$ donde

$$A_0 = \{\{x, y\} \in [P]^2 : \ x \text{ e } y \text{ son comparables}\}$$
$$A_1 = \{\{x, y\} \in [P]^2 : \ x \text{ e } y \text{ son incomparables}\}$$

.

□

TEOREMA 4.11. *4.9 implica el teorema 2.1*

Demostración. El teorema de Köning le pide al árbol no tener anticadenas contables; así que, por el corolario anterior, necesariamente el árbol tiene una cadena contable. □

Bibliografía

[CPT] F. Casarrubias, R. Pichardo y A. Tamaríz, *Elementos de Topología General*, manuscrito.

[HJ] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, 1999.

[K] K. Kunen, *Set Theory, An Introducción to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[To] S. Todorčević, *Trees and linearly ordered sets*; en "Handbook of set-theoretic topology", editado por K. Kunen y J.E. Vaughan. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[W] S. Willard *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.