UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Teorema Integral de Cauchy

y el Origen de la Integración Compleja

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ADRIANA VARGAS QUINTERO

Tutor: CARLOS ÁLVAREZ JIMÉNEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

Hoja de Datos del Jurado

1.
Vargas
Quintero
Adriana
15 09 03 58
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas

2.
Doctor
Carlos
Álvarez
Jiménez

3.
Doctora
Carmen
Martínez Adame
Isais

4.
Doctor
Antonio
Lascurain
Orive

5.
Maestro en Ciencias
José Antonio
Gómez
Ortega

6.
Maestro en Ciencias
Francisco
Struck
Chávez

A mi hermana Tania;
la mujer que ha iluminado mi existir desde el día que nació,
te amo para siempre.

A mi hermano Helios;
por ser mi sol, te amo.

A mis padres;
por darme la esencia de lo que soy,
mamá, eres todo.

Donde quiera que se encuentren
Mamá-Tere
Isaac
Pável
Alma
Gracias por darme fuerzas con sólo mirar al cielo;
siempre estaremos juntos.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de Tesis, Dr. Carlos Álvarez por su tiempo dedicado a este proyecto, a todos mis profesores por su ejemplo, a la Facultad de Ciencias por transformar mi ser.
A todos mis prim@s por tanto cariño, a mis tí@s de quienes sólo he recibido apoyo, en especial a mi abue Romanita y a Cuco, los adoro.
A seres tan extraordinarios como Hugo y Diego, Sr. Raúl Mtz. y Xóchitl, Anaclara, Arely, Abelardo, Víctor, Javier, Julio, Omar, Alvarito, Edgarito, J. Pablo, Alexei, Oscky, Jaime, Diego Hdz, Columba; sin su entrega y amistad no estaría aquí.
A Lourdes y Mario Gonzáles por amarme como una hija, son parte de mi.
A Melisa por su incomparable ternura; eres genial.
A Lulú Vega, por brindarme su mano para bajar al sótano.
Raúl, que maravilla conocerte.
Daniel, eres increíble.
Por supuesto a Chavita, Pepe y Franco, los quiero mucho.
A toda la banda sureña que me convirtió en una mejor persona y a quienes me brindaron un abrazo en el momento que lo necesité; esta tesis es para ustedes.

Índice general

Prefacio

Este trabajo es un acercamiento a los orígenes de la Teoría de Integración para funciones de variable compleja, el cual toma como punto de partida la obra del matemático francés Augustin-Louis Cauchy de principios del siglo XIX, considerado el padre del Análisis Complejo.

Una de las motivaciones para investigar sobre el origen del concepto de Integral Compleja fue la pregunta de porqué esta integral se define sobre una trayectoria y no sobre una superficie del plano complejo, es decir, qué objeto matemático representa en esencia la integral compleja de modo que su definición está expresada en términos de una integral de línea.

Veremos que la respuesta a este cuestionamiento propone una lectura del Teorema Integral de Cauchy como parte esencial en la definición de integral compleja.

Esto nos lleva a un análisis del papel que juegan los conceptos de función, función continua, serie convergente, función analítica, etc., dentro de la Teoría de Integración y resulta necesario comenzar este estudio con construcción de la integral para funciones de variable real.

El Capítulo 1 se basa en las Leçons sur le Calcul Intégral (Lecciones sobre el Cálculo Integral) las cuales se encuentran en el Résumé des Leçons données a l´École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitesimal; par M. Augustin-Louis Cauchy (Resumen de las Lecciones dadas en la Escuela Real Politécnica sobre el Cálculo Infinitesimal; por M. Augustin-Louis Cauchy) publicadas en París en el año 1824.

El Capítulo 2 está basado en la Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires (Memoria sobre las Integrales Definidas entre Límites Imaginarios) publicada en 1825, cabe destacar que esta memoria se compone de artículos presentados por Cauchy a la Academia de Ciencias de París.

Finalmente el tercer capítulo hace referencia a una serie de memorias publicadas por Cauchy en 1826: Sur un nouveau genre de Calcul analogue au Calcul Infinitésimal (Sobre un nuevo tipo de Cálculo análogo al Cálculo Infinitesimal); De l´influence que peut avoir, sur la valeur d´une Intégrale Double, l´ordre dans lequel on effectue les intégrations (La influencia que puede tener el orden de integración sobre el valor de una Integral Doble); Sur diverses relations qui existons entre les Résidus des Fonctions et les Intégrales Définies (Sobre diversas relaciones existentes entre los Residuos de las

Funciones y las Integrales Definidas); Sur quelques formules relatives á la détermination du Résidu Intégral d´une Fonction donnée (Sobre algunas fórmulas relativas a la determinación del Residuo Integral de una Función dada).

Algunos conceptos fueron retomados del Cours d'Analyse Algébrique (Curso de Análisis Algebraico) que Cauchy publicó en 1821. Los Teoremas del Cours d'Analyse Algébrique se denotaron como Teoremas C.A.

Las ediciones consultadas de todos los textos se encuentran publicadas en las Œuvres Completés D'Augustin Cauchy publicadas por Gauthiers-Villars, Paris 1882-1974.

Para lograr una mejor comprensión de la obra de Cauchy, parte de la notación se trasladó a un lenguaje moderno sin alterar las nociones originales. Las demostraciones que aparecen son fieles a las escritas por Cauchy, aunque aquellas donde consideramos necesario fueron extendidas; en su momento se aclara que de que demostraciones se trata.

Las figuras que se incluyen tienen el objetivo de auxiliarnos en la comprensión de la obra de Cauchy ya que en los textos originales no está presente ninguna gráfica.

Capítulo 1

Integral para Funciones de Variable Real

Introducción

Es posible decir que el descubrimiento de la relación inversa entre el método de las cuadraturas y el método de las tangentes constituye el acto de nacimiento del Cálculo infinitesimal. No es difícil detectar este acto tanto en los manuscritos del joven Newton entre 1666 y 1670 -en donde destaca el *Método de las Fluxiones y las Series Infinitas*- y los dos textos de Leibniz de 1684 y 1686; el *Nuevo Método de las Tangentes* y de la *Geometría Recóndita*.

Es por ello que no resulta extraño que un texto de Cálculo Infinitesimal escrito en el siglo XVIII tome esta relación inversa como punto de partida. De este modo, podemos señalar como Euler en el Capítulo 1 de su texto *Institutiones Calculi Integralis 1*[1] dice "$\int f(x)dx$ es por definición la antiderivada de $f(x)$", del mismo modo lo hace Lacroix

[1]EULER, Leonhard. *Institutiones Calculi Integralis 1.* Petropoli. Impenfis Academiae Imperialis Scientiarum, 1768. pag 1-2.

en su *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* [2], al mencionar "El Cálculo Integral es el inverso del Cálculo Diferencial...la característica de $\int y$ es que es la inversa de dy ". En estos textos a partir de tal relación, el estudio de la integración se reducía a la búsqueda de técnicas para resolver ecuaciones diferenciales o bien para encontrar el valor de un área.

Veremos en este primer Capítulo que la Teoría de Integración moderna surge en las *Leçons sur le Calcul Intégral*[3]; en donde Cauchy define la integral de una función como el límite de una serie convergente; de este modo resulta independiente del concepto de derivada y de la noción geométrica de área.

Cauchy revolucionó el concepto de integral, y la existencia de esta nueva concepción de integral lo conduce a tomar como punto de partida la condición de continuidad de la función y la relación inversa entre la derivada e integral será tratada como teorema y no como definición.

Haremos ver que la definición de integral de Cauchy deviene en un operador sobre el conjunto de funciones continuas. Esta construcción de la integral para funciones de variable real será el fundamento también de la integral para funciones de variable compleja, incluso, podríamos decir que la teoría de integración compleja seguirá un camino paralelo al de la teoría de integración real.

[2]LACROIX, François. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.* Tomo 2. París 1798. Capítulo 1. pags.1- 2.

[3]CAUCHY, Augustin-Louis. *Résume des Leçons données a L'école Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Œuvres Completés, Ser.II T.IV. 1824. Leçons 21-40.

Integral Definida

Antes de comenzar con el estudio de la integral de una función de variable real tal como lo hace Cauchy, es necesario presentar sus definiciones de *función* y *función continua,* pues a partir de tales conceptos construye su Teoría de Integración.

En su *Cours d'Analyse Algébrique*[4], acerca de una función Cauchy menciona:

Definición 1 *Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre si, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente estas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente; y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable.*[5]

Y sobre una función continua:

Definición 2 *La función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre éstos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, la función $f(x)$ permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos limites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función.*[6]

Si intentamos trasladar la Definición 2 a un lenguaje moderno, surge el dilema si es que Cauchy se refiere más bien al concepto de *continuidad uniforme* pues su definición de continuidad no es puntual y en cambio está definida para un intervalo, creemos que el problema radica en la ausencia de los conceptos de *intervalo cerrado* o *abierto*[7] y tal dificultad estará presente también en su teoría de integración.

---

[4]CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'Analyse Algébrique de L'école Róyale Polytechnique.* Œuvres Complètes Ser.II T.III. 1821. Capítulo 2, pág 43-45.

[5]*Ibid.* Capítulo 1, pag. 31.

[6]*Ibid.* Capítulo 2, pag. 43.

[7]Ya que para funciones continuas de variable real en un intervalo cerrado -continuidad y continuidad uniforme- son conceptos equivalentes.

Una vez introducidos estos conceptos, Cauchy comienza sus *Leçons sur le Calcul Intégral* [8] con la siguiente definición de *suma parcial,* ya que la integral definida será precisamente el límite de la sucesión de sumas parciales:

Definición 3 *Supongamos que, la función $y = f(x)$ es continua respecto a la variable x entre dos límites finitos $x = a$ y $x = b$, designemos por $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ los valores de x entre esos límites, los cuales siempre estarán ordenados de manera creciente o decreciente desde a hasta b, sea* [9]*:*

$$S_n = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \tag{1.1}$$

La continuidad de la función $f(x)$ forma parte de la Definición 3, sin embargo, la expresión (1.1) no requiere tal condición para existir; solo utiliza que $f(x)$ está definida entre a y b; esto supone implícitamente que la función $f(x)$ está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y que es *acotada* en ese intervalo.

Desde la Definición 3, Cauchy asume que toda función continua está acotada, hasta que defina las integrales singulares supondrá lo contrario; de este modo toma por hipótesis lo que actualmente es el teorema de que toda función continua $f(x)$ de variable real x en un intervalo cerrado $[a, b]$ está acotada.

La primera observación de Cauchy sobre la expresión (1.1) es que su valor depende de dos parámetros, además de la función $f(x)$:

1) el número n de intervalos $[x_{n-1}, x_n]$ y
2) la *Partición* $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$[10].

Cauchy hace hincapié en el hecho de que al cambiar la partición, el valor de S_n será distinto, aunque el número de elementos n no cambie.

---

[8] CAUCHY, Augustin-Louis. *Résume des Leçons données a L'école Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Œuvres Completés, Ser.II T.IV. 1824. Lección 21, pag122.

[9] *Ibid.* Lección 21, pag 122.

[10] Utilizaremos el término *Partición* para nombrar al conjunto $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$, pese a que Cauchy no lo llama asi.

Sin embargo, afirma que cuando n es suficientemente grande, el valor de S_n es independiente de la partición; a partir de esta afirmación demostrará la existencia del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{1.2}$$

Para demostrar su afirmación, Cauchy utilizará además de la continuidad de la función $f(x)$, dos resultados del *Cours d'Analyse Algébrique*, los cuales analizaremos detenidamente, pues como veremos, son los pilares de su Teoría de Integración:

1) El criterio para la convergencia de series que hoy conocemos como *Criterio de Cauchy.*

2) Un teorema al que llamaremos Teorema 1 C.A.

Primero veamos la definición de Cauchy de serie convergente:

Definición 4 *Sea $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$ el término general de una serie...Si para los valores de n siempre crecientes, la suma S_n se aproxima indefinidamente a un cierto límite S, la serie será convergente, y el límite en cuestión se llamará la suma S de la serie... en otras palabras, es necesario y suficiente que, para los valores infinitamente grandes del número n, las sumas S_n, S_{n+1}, S_{n+2},... difieran del límite S, y en consecuencia entre ellas; cantidades infinitamente pequeñas.*[11]

Actualmente sabemos que la afirmación hecha en la Definición 4 es válida sólo en *espacios completos*, sin embargo, en tanto que Cauchy carece de tal concepto, asume la *completitud* de la recta real, incluso en una Nota[12] del *Cours d'Analyse Algébrique* escribe un teorema donde usa que toda sucesión monótona acotada tiene ínfimo y supremo, es decir, toma de manera implícita lo que hoy llamamos *axioma del supremo.*

Veamos el Criterio de Cauchy para la convergencia de series, el cual merece especial atención en tanto que Cauchy lo ve como una condición necesaria y suficiente para la convergencia convirtiéndose en parte de la definición de límite.

[11]CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'Analyse Algébrique de l'École Róyale Polytechnique.* Œuvres Complètes Ser.II T.III. 1824. Capítulo 6. pag114-115.

[12]Véase CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'Analyse Algébrique de L'école Róyale Polytechnique.* Œuvres Complètes Ser.II T.III. 1821. Nota 3. pags 378 y sgtes.

Criterio 1 *...Para que la serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1}$$

sea convergente, es necesario primero que el término general u_n *decrezca indefinidamente, mientras que* n *aumenta; pero esta condición no basta, y será necesario además que, para los valores crecientes de* n*, las diferentes sumas*

$$u_n + u_{n+1}, u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3}$$

....

es decir, las sumas de las cantidades $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ...$*tomadas, a partir de la primera, en un número tan grande como se quiera, terminen por obtener de manera constante valores numéricos inferiores a todo límite asignable. Recíprocamente, cuando esas diversas condiciones se cumplen, la convergencia de la serie se asegura...*[13]

Observemos que el Criterio 1 no proporciona el valor del límite, sólo garantiza su existencia como número real, a diferencia de otros criterios también mencionados en el *Cours d'Analyse Algébrique* como el criterio del *cociente* o la *raíz*, los cuales además sólo son condiciones suficientes de convergencia.

La Teoría de Integración de Cauchy descanzará en la definición de convergencia a través de sucesiones, de ahí que el concepto de espacio completo y el concepto de compacidad resulten necesarios aunque Cauchy no los maneje de manera explícita**.**

Aunado al Criterio 1, otro resulatdo esencial en la teoría de integración de Cauchy, será el Teorema 1 C.A. que mencionamos a continuación.

Teorema 1 C.A. *Dadas* n *cantidades* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ *cualesquiera (ordenadas en forma creciente) y dadas otras* n *cantidades* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *del mismo signo, entonces* [14]

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)M(a_0, a_1, a_2, ..., a_n) \quad (1.3)$$

[13] *Ibid.* Capítulo 6, pag 116.
[14] *Ibid.* Capítulo 3, pag. 28.

donde $M(a_0, a_1, ..., a_n)$ *es un valor intermedio*[15] *entre las cantidades* $a_0, a_1, .., a_n$.

Demostración. [16] Si $(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) = 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para toda i, ya que α_i tiene el mismo signo para toda i.

Entonces $a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = 0$ y por lo tanto, se da la igualdad (1.3).

Si $(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \neq 0$, entonces $M(a_0, a_1, ..., a_n) = \frac{a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$ y lo único que resta probar es que $a_0 \leq M(a_0, a_1, ..., a_n) \leq a_n$.

Al ordenar de manera creciente las cantidades a_i se obtiene $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ y de este modo

$$a_0\alpha_0 + a_0\alpha_1 + a_0\alpha_2 + ... + a_0\alpha_n \leq a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$$

por lo que $a_0(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) \leq a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$ y así $a_0 \leq \frac{a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}$.

Por otro lado:

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq a_n\alpha_0 + a_n\alpha_1 + a_n\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n$$

lo cual es equivalente a que $a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq a_n(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$, entonces $\frac{a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \leq a_n$.

Se concluye que $a_0 \leq M(a_0, a_1, ..., a_n) \leq a_n$, por lo tanto $M(a_0, a_1, ..., a_n)$ es un valor intermedio de a_0 y a_n. ∎

Los teoremas más importantes de las *Leçons sur le Calcul Intégral,* como el Teorema del Valor Medio para la Integral (TVMI) descanzarán en el Teorema 1 C.A., además, por medio del Teorema 1 C.A. Cauchy deja claro que su teoría de integración se basará en las propiedades aditivas de las series y no en la teoría de derivación.

Con los resultados anteriores, Cauchy llega a su objetivo que es demostrar la exis-

[15] Cauchy llama *valor intermedio* $M(a, b)$ de dos cantidades $a \leq b$, a todo aquel valor r que satisface la desigualdad $a \leq r \leq b$, incluso comenta que todos los reales positivos pueden expresarse como $M(0, \infty)$; los negativos como $M(-\infty, 0)$ y en general todos los reales r satisfacen que $r = M(-\infty, \infty)$.*Ibid.* pags. 29-30.

[16] Esta demostración no es desglosada por Cauchy en su *Cours d´Analyse Algébrique.*

tencia del límite de la serie (1.2), pues gracias al Teorema 1 C.A. obtiene que

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &= [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})]M(f(x_0), f(x_1), .., f(x_{n-1})) \quad (1.4) \\ &= (b - a)M(f(x_0), f(x_1), .., f(x_{n-1})) \quad (1.5) \end{aligned}$$

como la función $f(x)$ es continua desde $x = a$ hasta $x = b$, utiliza la propiedad del Valor Intermedio y obtiene:

$$M(f(x_0), f(x_1), .., f(x_{n-1})) = f(x_0 + \theta_n(b - a)) \quad (1.6)$$

con $0 \leq \theta_n \leq 1$. Esto lo lleva a que $f(x_0 + \theta_n(b - a)) = f(\zeta)$ para alguna $a \leq \zeta \leq b$[17].

Observemos que esta es la primera vez que usa una propiedad que es consecuencia de la continuidad de $f(x)$, en este caso, el Teorema del Valor Intermedio, ya que si $f(x)$ no fuera continua, el valor intermedio $M(f(x_0), f(x_1), ..., f(x_{n-1}))$ no tendría porque ser un valor de la función, simplemente se encontraría entre el *ínfimo* y el *supremo* de la misma, conceptos que por cierto, Cauchy no menciona de manera explícita.

Concluye que

$$S_n = (b - a)f(a + \theta_n(b - a)) \quad (1.7)$$

con $0 \leq \theta_n \leq 1$; cabe destacar que la igualdad (1.7) por el mometo sólo servirá para ejemplificar lo que hará a cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para obtener del mismo modo:

$$S_0 = (x_1 - x_0)f(\zeta_0) \text{ para algún } \zeta_0 \in [x_0, x_1]$$

$$S_1 = (x_2 - x_1)f(\zeta_1) \text{ para algún } \zeta_1 \in [x_1, x_2]$$

$$... \qquad ...$$

$$... \qquad ...$$

[17] Como $\theta_n \leq 1$, entonces $\theta_n(b - a) \leq b - a$ por tanto $a + \theta_n(b - a) \leq b$
Por otro lado $0 \leq \theta_n(b - a)$, entonces $a \leq a + \theta_n(b - a)$. Concluímos que $a \leq a + \theta_n(b - a) \leq b$.

$$S_{n-1} = (x_n - x_{n-1})f(\zeta_{n-1}) \text{ para algún } \zeta_{n-1} \in [x_{n-1}, x_n].$$

Sea

$$\begin{aligned} S_m &= S_0 + S_1 + S_2 + ... + S_{n-1} \quad (1.8) \\ &= (x_1 - x_0)f(\zeta_0) + (x_2 - x_1)f(\zeta_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(\zeta_{n-1}) \quad (1.9) \end{aligned}$$

Cauchy utiliza nuevamente la continuidad de la función $f(x)$, pues cada vez que la diferencia $(\zeta_i - x_i)$ es "infinitamente pequeña" entonces se da la igualdad

$$f(\zeta_i) = f(x_i) \pm \varepsilon_i$$

con ε_i infinitamente pequeña para toda $i = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Sustituye $f(\zeta_i) = f(x_i) \pm \varepsilon_i$ en la ecuación (1.9) y obtiene

$$S_m = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + ... + (x_n - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}] \quad (1.10)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} S_n - S_m &= [f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + ... + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})] \\ &\quad -[(x_1 - x_0)(f(x_0) \pm \varepsilon_0) + ... + (x_n - x_{n-1})(f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1})] \\ &= (x_1 - x_0)(\pm\varepsilon_0) + (x_2 - x_1)(\pm\varepsilon_1) + ... + (x_n - x_{n-1})(\pm\varepsilon_{n-1}) \\ &= (b - a)M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}) \end{aligned}$$

y finalmente

$$S_n - S_m = (b - a)M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$$

como ε_i son infinitamente pequeñas para toda $i = 0, 1, .., n-1$, entonces $M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ difiere muy poco de cero.

Cauchy concluye que $(S_n - S_m)$ tiende a cero para n, m suficientemente grandes y por lo tanto se satisfacen las condiciones del Criterio 1, esto implica que el límite de la serie (1.2) existe.

Al suponer que $M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ difiere muy poco de cero cada vez que la diferencia $(\zeta_i - x_i)$ es "infinitamente pequeña" Cauchy en realidad usa el concepto de *continuidad uniforme*, ya que $M(\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1})$ es independiente de los valores ζ_i , x_i en $[a, b]$, siempre que la diferencia $(\zeta_i - x_i)$ sea infinitamente pequeña.

En un lenguaje moderno esto equivale a que exista un módulo uniforme de continuidad $\delta(\varepsilon_i)$ tal que $f(\zeta_i) - f(x_i) = \varepsilon_i$ para cualesquiera valores ζ_i , x_i en $[a, b]$ tal que $\zeta_i - x_i < \delta(\varepsilon_i)$.

Sin embargo, si tomamos en cuenta que Cauchy trabaja con el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces tal módulo uniforme de continuidad $\delta(\varepsilon_i)$ existe y su demostración es válida.

Cauchy introduce su defición de integral después de demostrar la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ como veremos a continuación:

Definición 5 *...el valor de S_n tiende a un cierto límite que depende únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de los valores extremos a, b atribuidos a la variable x. Llamaremos a este límite integral definida de $f(x)$, como su valor depende de los valores extremos a, b es conveniente designar por la notación $\int_a^b f(x)dx$ a tal límite.*[18]

Prestemos especial atención a la Definición 5, ya que la integral para funciones de variable compleja se definirá de manerá similar, es decir, la integral compleja cobrará sentido después de garantizar que su existencia depende únicamente de la función y de los extremos.

Para Cauchy es claro que la continuidad sólo es una condición suficiente de integrabilidad pues más adelante demostrará que la integral definida también existe para funciones discontinuas en un número finito de puntos, sin embargo, en la Definición 5 pide que la función $f(x)$ sea continua para garantizar la existencia de la integral, además la condición de continuidad le permitirá más adelante probar la relación inversa entre la integral y la derivada de la función.

Como Cauchy ha encontrado condiciones suficientes de integrabilidad, su resultado en un lenguaje moderno representa el siguiente teorema:

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable (entiéndase por integrable que la serie (1.2) converge).

[18]CAUCHY, Augustin-Louis. *Résume des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Œuvres Completés, Ser.II T.IV. 1824. Lección 21, pags 125-126.

Teorema del Valor Medio

Cauchy definió integral como el número real que es el límite de una serie convergente, sin embargo, aún no conoce su valor. El siguiente paso será encontrar tal valor en términos de la función $f(x)$ y del intervalo $[a, b]$.

El Teorema del Valor Medio para la Integral (TVMI) proporcionará una fórmula para obtener el valor de la integral al margen del concepto de derivada, a diferencia por ejemplo de la fórmula del 2° Teorema Fundamental del Cálculo (2°TFC). Esto convierte al TVMI en el complemento de la Definición 5, veamos la manera como se introduce este teorema en las *Leçones sur le Calcul Intégral:*

Teorema 1 *(TVMI) Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a+\theta(b-a)) \tag{1.11}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$.[19]

Para demostrar la igualdad anterior, Cauchy menciona que es suficiente observar lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}(b-a)M(f(x_0), f(x_1), .., f(x_{n-1})) \\ &= (b-a)\lim_{n\to\infty} M(f(x_0), f(x_1), .., f(x_{n-1})) = (b-a)f(x_0+\theta(b-a)) \end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq 1$.

Como podemos ver, el Teorema 1 C.A. es fundamental en la construcción de la integral de Cauchy para funciones de variable real, sin embargo, en un texto contemporáneo de Cálculo Integral como el *Diferential and Integral Calculus* de Richard Courant[20], el

[19] *Ibid.* Lección 22. pag. 131.

[20] COURANT, Richard. Diferential and Integral Calculus. Vol I. 2° Edición 1937. Great Britain Ed. Blackie & Son, Ltd., Glasgow. pags 126-127.

Teorema 1 C.A. pareciera no estar presente en la construcción de la integral; surge la interrogante de porqué un resultado tan esencial para Cauchy, ni siquiera se menciona en un texto moderno de Cálculo Integral.

Analizar la demostración del TVMI que se encuentra en el texto de Courant nos permitirá ver porque el Teorema 1 C.A. fue reemplazado por otros resultados.

La demostración de TVMI de Courant es la siguiente:

> Si en el intervalo $a \leq x \leq b$ la función $f(x)$ continua es no negativa, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es también no negativa. La prueba de este teorema se sigue directamente de la definición de integral ...Sea M el máximo de la función $f(x)$ y m el mínimo de la misma en el intervalo $[a, b]$.
>
> Las funciones $M - f(x)$ y $f(x) - m$ son no nonegativas, por lo que:
>
> $$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx.$$
>
> Pero $\int_a^b mdx = m\int_a^b dx$ y $\int_a^b Mdx = M\int_a^b dx$, entonces
>
> $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{1.12}$$
>
> Bajo esta consideración, la integral puede representarse como el producto de $b - a$ y algún otro número μ entre m y M, es decir;
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$
>
> con $m \leq \mu \leq M$. Como $f(x)$ es continua, entonces $\mu = f(\zeta)$ para alguna ζ tal que $a \leq \zeta \leq b$, y se concluye que
>
> $$f(x)dx = f(\zeta)(b-a).$$

La piedra angular en la demostración de Courant es la desigualdad (1.12) que surge a partir de la desigualdad:

$$mín\{f(x)\} \leq f(x) \leq máx\{f(x)\} \qquad (1.13)$$

con $a \leq x \leq b$.

Aunque Cauchy no habla de ínfimos y supremos en su texto, la desigualdad usada en el Teorema 1 C.A:

$$a_0 \leq M(a_0, a_1 , ..., a_n) \leq a_n$$

juega el mismo papel que de la desigualdad (1.13) usada por Courant. Esto nos dice que en la construcción contemporánea de la integral, el Teorema 1 C.A. queda reemplazado por la desigualdad (1.13).

Otro aspecto muy interesante del TVMI es que caracteriza la integral para funciones de variable real, pues muestra que la longitud del intervalo a lo largo del cual se integra es un parámetro presente en el valor de la integral real[21].

Podemos concluir que el TVMI es consecuencia de la integración en un espacio donde es válido el Teorema del Valor Intermedio y no es una característica intrínseca al concepto de integral definida. Esta observación cobrará sentido al llegar a la integración compleja ya que en ésta, la longitud de la curva de integración no será un parámetro que actúe sobre el valor de la integral.

Propiedades de Linealidad

En las siguientes propiedades Cauchy resalta el aspecto analítico de la integral, el cual, en un lenguaje moderno nos llevaría a interpretar la integral real como un operador lineal:

(A) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ para f y g funciones integrables en $[a, b]$.

(B) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$ para α cualquier constante real.

[21] En el caso de las funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$; el área o el volumen del dominio de integración son un factor presente en el valor de las integrales de Riemann.

(C) $\int_a^b (f+\sqrt{-1}g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g(x)dx$ para f y g funciones integrables en $[a,b]$.

La propiedad (C) es de suma importancia pues le permite a Cauchy definir una integral para funciones complejas de variable real y por tanto, el problema de la integración compleja se reducirá a la definición de la integral cuando los límites de integración sean cantidades complejas.

Las siguientes propiedades de la integral definida formarán parte de la definición de integral impropia y de la demostración del 1°Teorema Fundamental del Cálculo.

(D) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(E) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ si c se encuentra entre a y b.

(F) $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$ si x_i están entre a y b.

Área bajo una curva

La definición de integral dada por Cauchy se enlazará a través del TVMI, con la interpretación geométrica de la integral como área bajo una curva. Lo importante del siguiente teorema es que la integral construida por Cauchy coincide con la que se identificaba como área pero precisamente es un teorema y no una definición.

Teorema 2 *Si $a < b$ y $f(x)$ es positiva desde $x = a$ hasta $x = b$ en coordenadas rectangulares entonces el Área* [22] *A de la superficie comprendida entre le eje x y la gráfica de la curva $y = f(x)$, será el valor de$\int_a^b f(x)dx$.*

Demostración. Lo primero que hace Cauchy es observar que el área A de la superficie comprendida entre le eje x y la gráfica de la curva $y = f(x)$ es de la forma $A = f(\zeta)(b-a)$ para $a \leq \zeta \leq b$, esto ocurre porque A está acotada superiormente por un rectángulo cuya base es la longitud $(b-a)$ y cuya altura es el máximo de la función en el intervalo

[22] Cauchy utiliza la definición intuitiva de área de una figura plana, como el número de cuadrados de un tamaño fijo (llamado unidad) que "caben" en la región.

$[a,b]$ y A está acotada inferiormente por un rectángulo con la misma base y altura el mínimo de la función en el intervalo $[a,b]$.

Podemos observar que nuevamente toma como hipótesis el teorema de que toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su máximo y su mínimo.

A continuación menciona que al dividir la base $(b-a)$ en $x_1-x_0, x_2-x_1, .., x_n-x_{n-1}$, entonces el área A es de la forma

$$A = (x_1 - x_0)f(\zeta_0) + (x_2 - x_1)f(\zeta_1) + ... + (x_n - x_{n-1})f(\zeta_{n-1})$$

con ζ_i en $[x_{i-1}, x_i]$.

Concluye que si los valores $(x_i - x_{i-1})$ se hacen infinitamente pequeños, entonces

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

■

Cauchy muestra que la integral puede definirse de manera independiente del concepto de área y desde su punto de vista, el área también es independiente de la integral. Actualmente sabemos que el concepto de área se sustenta en el concepto de integral, contrario a lo que se pensaba.

Al finalizar la Lección 22 de las *Leçons sur le Calcul Intégral* Cauchy enuncia el siguiente lema:

Lema 1 *Sea $f(x) = \varphi(x)\chi(x)$; en donde $\varphi(x)$ y $\chi(x)$ son dos funciones continuas desde $x = a$ hasta $x = b$. Si $\chi(x)$ conserva siempre el mismo signo entre esos límites, entonces* [23]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\chi(x)dx = \varphi(\zeta)\int_a^b \chi(x)dx$$

para alguna ζ entre los límites a y b.

Demostración. Sea

$$S_n = (x_1 - x_0)\varphi(x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})\varphi(x_{n-1})\chi(x_{n-1})$$

[23] CAUCHY, Augustin-Louis. *Résume des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Œuvres Completés, Ser.II T.IV. 1824. Lección 23, pag 138.

por el Teorema 1 C.A.

$$S_n = [(x_1 - x_0)\chi(x_0) + ... + (x_n - x_{n-1})\chi(x_{n-1})]M[\varphi(x_0), \varphi(x_1), ..., \varphi(x_{n-1})]$$

al tomar el límite cuando n tiende a infinito, obtiene por un lado

$$\lim_{n\to\infty}((x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + ... + (x_n - x_{n-1})\chi(x_{n-1})) = \int_a^b \chi(x)dx.$$

Por otro lado, $\lim\limits_{n\to\infty} M[\varphi(x_0), \varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_{n-1})]$ existe y además es un valor de la función $\varphi(x)$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} M[\varphi(x_0), \varphi(x_1), ..., \varphi(x_{n-1})] = \varphi(\zeta)$ para alguna ζ entre los límites a y b.

Se concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \varphi(x)\chi(x)dx = \varphi(\zeta)\int_a^b \chi(x)dx$ con ζ entre a y b. ■

Cauchy menciona las siguientes igualdades como aplicaciones del Lema 1, sin embargo, tales ejemplos van más allá de la integral real, en el sentido que aparece el producto $(\zeta - a_0)f(\zeta)$, el cual dará origen a la *Teoría de Residuos* [24].

$$\int_a^b f(x)dx = f(\zeta)(b-a) \tag{1.14}$$

Sea $f(x) = \varphi(x)\chi(x)$ con $\chi(x) = 1$, el Lema 4 implica que $\int_a^b f(x)dx = \varphi(\zeta)\int_a^b 1dx = f(\zeta)(b-a)$ con ζ entre los límites a y b.

$$\int_a^b f(x)dx = \zeta f(\zeta)\ln\frac{b}{a} \tag{1.15}$$

Sea $\varphi(x) = xf(x)$ y $\chi(x) = \frac{1}{x}$, de modo que $\varphi(x)\chi(x) = xf(x)(\frac{1}{x}) = f(x)$, y gracias al Lema 1 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\chi(x)dx = \varphi(\zeta)\int_a^b \chi(x)dx = \zeta f(\zeta)\int_a^b \frac{dx}{x} = \zeta f(\zeta)\ln\frac{b}{a}$.

$$\int_a^b f(x)dx = (\zeta - a_0)f(\zeta)\ln\frac{b-a_0}{a-a_0} \tag{1.16}$$

Sea $\varphi(x) = (x-a_0)f(x)$ y $\chi(x) = \frac{1}{x-a_0}$, de modo que $\varphi(x)\chi(x) = (x-a_0)f(x)(\frac{1}{x-a_0}) = f(x)$, por lo tanto $\int_a^b f(x)dx = (\zeta - a_0)f(\zeta)\int_a^b \frac{dx}{x-a_0} = (\zeta - a_0)f(\zeta)\ln\frac{b-a_0}{a-a_0}$.

[24] Este es tema principal del Capítulo 3.

Para obtener la ecuación (1.16) Cauchy expresa a la función $f(x)$ como producto de dos funciones $\varphi(x)$ y $\chi(x)$ donde el dominio de $\varphi(x)$ es el mismo que el de $f(x)$; el dominio de $\chi(x)$ es el de $f(x)$ menos a_0, este argumento será aprovechado por Cauchy para generalizar que cualquier función que excluya al punto a_0 de su dominio, se puede expresar como producto de dos funciones, en las cuales una de ellas lo incluirá. Esta es la idea clave con la cual Cauchy intentará solucionar el problema de integrar una función $f(x)$ que tiende a infinito para el valor $x = a_0$.

Integrales Singulares

Cauchy construyó la integral definida para funciones *continuas* y *finitas* entre los límites a y b, en las cuales esos límites eran cantidades finitas. Ahora definirá la integral cuando alguna de las condiciones anteriores no se cumple pero siempre partirá de que el número de discontinuidades de la función es finito, y comienza la Lección 24 de las *Leçons sur le Calcul Intégral* con el siguiente comentario:

> Cuando los límites a y b son cantidades *finitas* y la función $f(x)$ es *finita* y continua en esos límites. Al designar por $x_1, x_2, ..., x_n$ los valores de x entre a y b, se tiene[25]:
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (1.17)$$
>
> además
>
> $$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi_{i-1}\to x_{i-1} \\ \xi_i \to x_i}} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx \qquad (1.18)$$

Demostración. Para argumentar la validez de la ecuación (1.18) divide la integral en tres integrales:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{\xi_{i-1}} f(x)dx + \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx$$

[25] *Ibid.* Lección 24. pág 140.

para valores ξ_{i-1} muy cercanos a x_{i-1} y ξ_i muy cercanos a x_i.

Gracias al TVMI se tiene que $\int_{x_{i-1}}^{\xi_{i-1}} f(x)dx = (\xi_{i-1} - x_{i-1})f(\zeta_{i-1})$ para alguna ζ_{i-1} en $[x_{i-1}, \xi_{i-1}]$ y $\int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx = (x_i - \xi_i)f(\zeta_i)$ para alguna ζ_i en $[\xi_i, x_i]$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx &= \int_{x_{i-1}}^{\xi_{i-1}} f(x)dx + \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + \int_{\xi_i}^{x_i} f(x)dx \\ &= (\xi_{i-1} - x_{i-1})f(\zeta_{i-1}) + \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + (x_i - \xi_i)f(\zeta_i) \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{\substack{\xi_{i-1}\to x_{i-1}\\ \xi_i \to x_i}} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi_{i-1}\to x_{i-1}\\ \xi_i \to x_i}} \left((\xi_{i-1} - x_{i-1})f(\zeta_{i-1}) + \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx + (x_i - \xi_i)f(\zeta_i) \right)$$

el primer y último sumando del lado derecho se hacen cero y finalmente se obtiene

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \lim_{\substack{\xi_{i-1}\to x_{i-1}\\ \xi_i \to x_i}} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(x)dx$$

■

Cauchy hará ver que gracias a la ecuación (1.18) el concepto de integral tendrá sentido en funciones con un número finito de discontinuidades ya que la integral puede extenderse a través de dicho límite.

De este modo, la integral para funciones discontinuas se podrá calcular en la medida que se conozca la integral de la misma función en intervalos donde ésta sea continua, en otro caso, advierte:

> Cuando los valores extremos a, b devienen infinitos o cuando la función $f(x)$ no resulta finita y continua desde $x = a$ hasta $x = b$ no podemos afirmar que la cantidad designada por S_n en las lecciones precedentes tenga un límite fijo, por ende la notación $\int_a^b f(x)dx$ no representa el límite de S_n. Para quitar toda incertidumbre en torno a la notación $\int_a^b f(x)dx$, y ésta tenga en todos los casos, un significado claro y preciso, es suficiente extender por analogía las ecuaciones (1.17) y (1.18) aunque en estos casos

no podremos hacer rigurosas demostraciones.[26]

Con este comentario Cauchy advierte que no siempre se podrá garantizar la existencia de la integral cuando la función $f(x)$ tiende a infinito.

En el siguiente ejemplo señala cómo utilizará las ecuaciones (1.17) y (1.18) para calcular la integral de una función $f(x)$ definida sobre el intervalo $[-1,1]$ que tiende a infinito cuando $x \to 0$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x} &= \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}+\int_{0}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{\varepsilon\mu}\frac{dx}{x}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\nu}^{+1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{\varepsilon\mu}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon\nu}^{+1}\frac{dx}{x}\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\varepsilon\mu-\ln\varepsilon\nu\right)=\ln\frac{\mu}{\nu}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Cauchy agrega "$\ln\frac{\mu}{\nu}$ es un valor completamente *indeterminado* debido a que no es independiente de la constante arbitraria $\frac{\mu}{\nu}$" [27].

La afirmación de Cauchy resuelve un problema clásico entre sus contemporáneos, pues se sabía que la igualdad

$$\int_{a}^{b}\frac{1}{x}dx=\ln(b)-\ln(a) \tag{1.20}$$

era falsa cuando se integra sobre un intervalo que incluya al origen, Gauss observó: "puesto que $y=f(x)$ se vuelve infinita, y en consecuencia operaciones analíticas aplicadas a inapreciables por la trampa del cálculo, llevan absurdos"[28] y Legendre creía que se trataba de un truco de infinitesimales.

Cauchy no sólo señala que el problema de la ecuación (1.20) se debe a que la función $f(x)$ pierde la continuidad en el intervalo de integración; además aclara que los supuestos absurdos eran consecuencia de la definición que se tenía de integral, por tanto era necesario concebir la integral de una manera distinta.

[26] *Ibid.* Lección 24. pag. 141.
[27] *Ibid.* Lección 24. pag. 143.
[28] BOTTAZZINI, Umberto. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokio, 1986. Capítulo 4. pag 131.

De este modo, la discusión que generó la validez de la ecuación (1.20) motivaron un replanteamiento del concepto de integral, incluso el historiador de las matemáticas Umberto Bottazzini menciona "Las aplicaciones al cálculo de integrales impropias representan el primer objetivo de Cauchy y la primer parte del trabajo que no hizo Legendre"[29].

Con los ejemplos siguientes, Cauchy hace ver que cuando la función o los límites de integración resulten cantidades infinitas tampoco se podrá garantizar la existencia de la integral definida:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^0 - e^a\right) = e^0 - e^{-\infty} = 1$$

$$\int_{0}^{\infty} e^x dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^x dx = \lim_{b\to\infty}\left(e^b - e^0\right) = e^{\infty} - e^{0} = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b e^x dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left(e^b - e^a\right) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty$$

las ambigüedades de las ecuaciones anteriores lo obligan a introducir las siguientes definiciones.

Definición 6 *Concibamos que la función $f(x)$ deviene infinita entre los límites a y b (finitos) para los valores particulares de x representados por $x_1, x_2, ..., x_n$. Si designamos por ε un número infinitamente pequeño, y por $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, ..., \mu_m, \nu_m$ constantes positivas, pero arbitrarias, en virtud de las ecuaciones (1.17) y (1.18) se obtiene* [30]*:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \tag{1.21}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon\nu_{n-1}}^{x_n} f(x)dx\right]. \tag{1.22}$$

Finalmente, cuando alguno (o ambos) de los límites de integración a y b resultan cantidades infinitas, tomará la siguiente definición:

[29] *Ibid.* Capítulo 4. pag 134.

[30] Resumen del Curso de Cálculo Infinitésimal de L'école Royale Polytechnique, par Augustin-Louis Cauchy. Œuvres Completés, Ser.II T.IV Lección 24. pag 143.

Definición 7 *Concibamos que la función $f(x)$ deviene infinita entre los límites a y b para los valores particulares de x representados por $x_1, x_2, ..., x_n$., pero ahora los límites a y b son $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente, entonces* [31]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon\nu_{n-1}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)dx \right] \tag{1.23}$$

Cauchy menciona: *"Si en las fórmulas anteriores, reducimos las constantes arbitrarias $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, ..., \mu_m, \nu_m$ a la unidad, obtenemos*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n} f(x)dx \right] \tag{1.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx \right] \tag{1.25}$$

en cuyo caso llamaremos a estas integrales valor principal."[32]

Cauchy intentará resolver el problema de garantizar cuando existe la integral de una función no acotada o bien si los límites de integración son cantidades infinitas y hace la siguiente afirmación:

> Si una función $f(x)$ permanece finita y continua en una vecindad de $x = a$, entonces, en virtud del TVMI, la integral será casi nula, pero podría obtener un valor finito distinto de cero o un valor infinito, si se tiene $a = \pm\infty$ o bien $f(a) = \pm\infty$.
>
> En el último caso, la integral en cuestión la llamaremos una *integral definida singular.* Será fácil de calcular su valor de acuedo a las fórmulas (1.22) y (1.23).[33]

[31] *Ibid.* Lección 24. pag. 143.

[32] *Ibid.* Lección 24. pag.144.

[33] *Ibid.* Lección 25. pag 145.

Y agrega: "Para que el valor de la integral (1.22) y (1.23) resulte finito y determinado, es necesario y suficiente que el límite L sea cero" [34], veamos quién es el límite L.

Si $f(x)$ es una función que deviene infinita entre los límites a y b (finitos) para los valores particulares de x representados por $x_1, x_2, ..., x_n$ y si designamos por ε un número infinitamente pequeño y por $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, ..., \mu_m, \nu_m$ constantes positivas, llamemos

$$E = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon\nu_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$F = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n} f(x)dx$$

sea

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\varepsilon\to 0}(E-F) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)dx + + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)dx ... + \int_{x_{n-1}+\varepsilon\nu_{n-1}}^{x_n+\varepsilon} f(x)dx\right] \end{aligned}$$

Con esta última afirmación, Cauchy deja claro que la continuidad de la función $f(x)$ no es necesaria para la existencia de la integral definida, lo que sí resulta necesario es la existencia del límite L. Sin embargo, Cauchy sólo concibe funciones cuyo número de discontinuidades es finito en un intervalo acotado y por ende resultan continuas en vecindades.

Actualmente el estudio de las discontinuidades de una función real implica el estudio de la distribución del conjunto de puntos de discontinuidad en el dominio de la función, pero hasta los trabajos de Cantor sobre su teoría de los conjuntos de puntos se comienza a ver con claridad tal problema.

Por lo anterior es que en la obra de Cauchy no está presente el problema de como está distribuido el conjunto de puntos de discontinuidad en el dominio de la función y simplemente asume que las discontinuidades de la función son un conjunto finio en el intervalo y por ende discreto, esto lo lleva a ver la continuidad en vecindades como una propiedad intrínseca al concepto de función[35].

[34] *Ibid.* Lección 25. pag. 145.

[35] La visión de Cauchy es muy natural si tomamos en cuenta que las funciones con las que trabajaban eran lo que hoy conocemos como funciones racionales, trascendentes y trigonométricas; tales funciones

Más aún, para Cauchy la continuidad en vecindades es lo que caracteriza a una función y por ello, tal propiedad permite el estudio de las funciones sin recurrir al Cálculo Diferencial e Integral.

La obra de Cauchy representa un parteaguas en el estudio de las funciones reales, pues antes de él, una función era definida únicamente a partir de su expresión algebraica; es decir, una función era aplicarle a una variable operaciones elementales o trascendentes, y lo interesante en el concepto de continuidad de Cauchy, es que no depende de su expresión algebraica, sino de la relación de cambio entre las variables del dominio con respecto a las de la imagen.

Integral Indefinida

Una vez presentada la integral definida como un objeto matemático independiente del concepto de derivada y desarrolladas las condiciones necesarias y suficientes para su existencia, Cauchy introduce el concepto de integral indefinida a través de la siguiente definición:

Definición 8 *Concibamos que la función $f(x)$ es continua respecto a x entre los límites $x = a$ y $x = b$, cuando a es fija, se puede definir una nueva función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para cada x entre a y b. Tal función recibirá el nombre de intergral indefinida de $f(x)$ desde a hasta b.*

Observemos que en la integral $\int_a^x f(t)dt$ un extremo de integración está fijo y el otro es la variable x; al evaluar tal integral en $x = x_0$, la expresión $\int_a^{x_0} f(t)dt$ se convierte en una integral definida, de modo que sin integral definida no tendría sentido la Definición 8.

El trabajo de Cauchy hasta la Definición 8, puede ser expresedo en un lenguaje moderno sin alterar su razonamiento, del siguiente modo:

Sea $\mathcal{C}_{[a,b]}$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{C}_{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

son efectivamente continuas en vecindades.

con este lenguaje, la integral definida de Cauchy es un *funcional* $\mathcal{I}(f)$ que va de $\mathcal{C}_{[a,b]}$ al conjunto de números reales, es decir:

$$\mathcal{I} : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$$

definido de la siguiente manera

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx = r. \tag{1.26}$$

A partir de lo anterior, se puede extender $\mathcal{I}(f)$ a un operador $\mathcal{J}(f)$ como sigue: sea $\mathcal{L}_{[a,b]}$ el siguiente conjunto de funciones

$$\mathcal{L}_{[a,b]} = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$$

entonces la integral indefinida de $f(x)$ que Cauchy introdujo en la Definición 8 puede verse como un operador $\mathcal{J}(f)$ que va del conjunto $\mathcal{C}_{[a,b]}$ al conjunto de funciones $\mathcal{L}_{[a,b]}$, es decir;

$$\mathcal{J} : \mathcal{C}_{[a,b]} \to \mathcal{L}_{[a,b]}$$

tal que

$$\mathcal{J}(f) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{1.27}$$

Para que la integral indefinida sea una función de variable x, es necesario que la integral

$\int_a^x f(t)dt$ exista[36]; si x es real, la continuidad de la función $f(x)$ garantiza tal existencia.

Observemos que la integral $\int_a^x f(t)dt$ existe si y sólo si $\mathcal{I}(f)$ es un funcional, esta observación cobrará sentido en el Capítulo 2, ya que en funciones de variable compleja no será posible ver la integral definida como un funcional sin el Teorema Integral de Cauchy.

[36] Recordemos la Definición 1 de Cauchy acerca de una función.

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Antes de enunciar lo que actualmente conocemos como Primer Teorema Fundamental del Cálculo (1°TFC)[37].

Cauchy menciona algunas características de la función $F(x)$:

> Si la función $f(x)$ es finita y continua en una vecindad de un valor particular de la variable x, la nueva función $F(x) = \int_a^x f(x)$ entre a y x, será no solamente finita, más aún, será continua en la vecindad de dicho valor, puesto que un incremento infinitamente pequeño de x corresponderá a un incremento infinitamente pequeño de $F(x)$. Por consiguiente, si la función $f(x)$ resulta finita y continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, ocurrirá lo mismo con la función $F(x)$[38].

La definición de la función $F(x)$ representa la pieza clave para el enlace que hará Cauchy con la teoría de derivación; ya que $F(x)$ será una función real cuyo dominio coincide con el de la función $f(x)$.

El 1°TFC que a continuación enunciamos, establece el primer contacto entre la derivada y la integral de Cauchy, es decir; la relación entre la integral de una función $f(x)$ y su antiderivada se presenta como teorema y no como definición.

Teorema 3 *(1° TFC) Sea $f(x)$ continua desde $x = a$ hasta $x = b$; defínase por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para toda x desde a hasta b. Entonces $F(x)$ es derivable en c y además $F'(c) = f(c)$ para toda c desde $x = a$ hasta $x = b$.*

Demostración. Por propiedades de la integral se tiene que

$$\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+\alpha} f(t)dt = \int_x^{x+\alpha} f(t)dt$$

[37] Aunque Cauchy no los nombra así, nosotros los conocemos como el Primero y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

[38] *Ibid.* Lección 26. pags. 151-152.

como $\int_x^a f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt$, y gracias al TVMI ocurre que

$$\int_x^{x+\alpha} f(t)dt = ([x+\alpha]-[x])f(x+\theta\alpha)$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. Por lo tanto

$$-\int_a^x f(t)dt + \int_a^{x+\alpha} f(t)dt = \int_a^{x+\alpha} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+\alpha} f(t)dt = \alpha f(x+\theta\alpha)$$

lo cual implica

$$F(x+\alpha) - F(x) = \alpha f(x+\theta\alpha)$$

y esto equivale a

$$\frac{F(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} = f(x+\theta\alpha).$$

Cuando $\alpha \to 0$ se concluye que $F'(x) = f(x)$. ∎

Una lectura del 1°TFC en un lenguaje moderno, es que la imagen del operador $\mathcal{J}(f)$ es el conjunto de funciones derivables, sin embargo, es necesario enfatizar el papel central que juega el concepto de continuidad en las *Leçons sur le Calcul Intégral,* ya que:

1) Ggarantiza la existencia de la integral definida

2) Es el puente que une la Teoría de Integración de Cauchy con la Teoría de Derivación

3) La continuidad de la función $f(x)$ hace posible que el valor de la integral definida dependa sólo de los extremos, este último resultado es conocido como 2° Teorema Fundamental del Cálculo (2°TFC) y lo analizaremos a continuación.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Con el 2°TFC cerramos este primer Capítulo, en el cual analizamos la construcción que Cauchy hizo de la integral para funciones de variable real y vimos que el concepto de integral al que llegó es al de integral como un operador que va del conjunto de funciones continuas al conjunto de números reales; esta idea es la que tratará de extender para llegar a una definición de integral compleja.

Los años de publicación de sus trabajos confirman que Cauchy trabajó de manera simultánea sus ideas sobre la integral de variable real y la integral de variable compleja, en el siguiente capítulo se verá con claridad el paralelismo entre ambas construcciones, incluso el 2°TFC que a continuación enunciamos será un caso particular del Teorema Integral de Cauchy.

Los siguientes son dos lemas previos que Cauchy utilizará en su demostración del 2°TFC.

Lema 2 *Sea $w(x)$ una función derivable en $[a, b]$ tal que $w'(x) = 0$, para toda x en $[a, b]$, entonces $w(x)$ es una función constante.*

Demostración. Como la función $w(x)$ es derivable para toda x en $[a, b]$, el Teorema del Valor Medio para la Derivada implica que

$$\frac{w(x) - w(x_0)}{x - x_0} = w'[x_0 + \theta(x - x_0)] = 0$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. Por lo que $w(x) - w(x_0) = 0$, entonces $w(x) = w(x_0)$, es decir $w(x) = c$. ■

Lema 3 *Sean $F(x)$ y $g(x)$ dos funciones cuyas derivadas son iguales para toda x en $[a, b]$, es decir; $F'(x) = g'(x)$ entonces $F(x) = g(x) + k$.*

Demostración. $F'(x) = g'(x)$ implica que $F'(x) - g'(x) = 0$, por lo que $(F - g)'(x) = 0$ y gracias Lema 2 $(F - g)(x) = k$, por lo tanto $F(x) - g(x) = k$. Se concluye que $F(x) = g(x) + k$. ■

Cauchy enuncia el 2°TFC del siguiente modo:

Teorema 4 *(2° TFC) Sea $f(x)$ continua desde $x = a$ hasta $x = b$, y si designamos por $g(x)$ una función que satisface la ecuación $g'(x) = f(x)$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)..$$

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f(x)dx$, gracias al 1^o TFC se tiene que $F'(x) = g'(x)$. Por lo tanto

$$F(x) = g(x) + w(x) \tag{1.28}$$

con $w'(x) = 0$ es decir; $F(x)$ en realidad representa una *familia* de funciones que difieren unas de otras por constantes, es decir; $F(x) = g(x) + w(x)$ por lo tanto $w(x) = F(x) - g(x)$ y al evaluar la función $w(x)$ en $x = a$ se obtiene

$$w(a) = F(a) - g(a) = 0 - g(a) = -g(a).$$

Como $w(x) = k$ es una función constante, basta evaluarla en un punto para saber su valor en cualquier x, por lo que $w(x) = w(a) = -g(a)$.

Ahora simplemente se sustituye $w(x) = -g(a)$ y $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ en la ecuación (1.28) y obtiene

$$\int_a^x f(t)dt = g(x) + w(x) = g(x) - g(a).$$

Se concluye que

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

■

El 2°TFC tiene dos lecturas, una lectura como fórmula que ofrece el valor de la integral definida en términos de la función primitiva y otra lectura como caso particular del Teorema Integral de Cauchy para funciones de variable compleja, en el sentido de que muestra que el valor de la integral definida bajo ciertas condiciones puede depender únicamente de los extremos de integración, es decir; el valor de la integral no depende de la "trayectoria" que une los extremos de integración.

Sin embargo, en variable compleja la condición de continuidad de la función no será suficiente para garantizar que la integral depende sólo de los extremos. Esto se analizará con detalle en el Capítulo 2.

Capítulo 2

Integral para Funciones de Variable Compleja

Introducción

Una vez presentada la teoría de integración para funciones de variable real, un año después; en 1825 Cauchy publica la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* (Memoria sobre las Integrales Definidas entre Límites Imaginarios), en la cual intenta construir una integral para funciones de variable compleja utilizando los resultados obtenidos en las *Leçons sur le Calcul Intégral*.

La *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* comienza con el siguiente comentario:

> ...hice ver como se puede establecer, en todos los casos posibles, el sentido que tendrá la notación $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ destinada a representar una integral definida comprendida entre los límites reales, donde la función puede ser real o imaginaria. Probé que una integral de esta especie, cuando la función deviene infinita entre los límites de integración, resulta generalmente inde-

> terminada... Hoy me he propuesto aplicar los principios que me han guiado en esa investigación a las integrales comprendidas entre límites imaginarios [1]....no he establecido el número de valores que éstas pueden admitir. Esta cuestión será el objetivo de nuestra investigación. Veremos que la solución depende del cálculo de variaciones y de la teoría de integrales singulares, las cuales producen inmediatamente un gran número de formulas propias para la evaluación de integrales definidas[2].

Con este comentario queda claro que la motivación para construir una integral compleja son los límites de integración imaginarios y no las funciones complejas, de este modo cobra sentido que en las *Leçons sur le Calcul Intégral* Cauchy mostró que si se tiene una función compleja de variable real, entonces la linealidad de la integral le permite definir la integral de $f(x)$ como la suma de dos integrales reales, es decir, si $f(x) = u(x) + v(x)\sqrt{-1}$, con x real, entonces

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} (u(x) + v(x)\sqrt{-1})dx = \int_{x_0}^{X} u(x)dx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{X} v(x)dx.$$

Entonces sus esfuerzos se centrarán en encontrar una definición de integral para funciones de variable compleja que le permita interpretarla como un operador, tal como lo hizo con la integral de variable real. En este sentido, el objetivo de este Capítulo 2 es mostrar que el Teorema Integral de Cauchy más allá de ser un resultado importante en la teoría de integración compleja; será parte de la definición de integral para funciones de variable compleja.

[1] Cauchy llama cantidades imaginarias a lo que hoy llamamos números complejos.

[2] CAUCHY, Augustin-Louis. *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires.* Œuvres Complètes Ser.I T.XII. pág 41-42.

Integral Definida

En el *Cours d'Analyse Algébrique* Cauchy asume que los números complejos son objetos bien definidos formados por una cantidad real y otra imaginaria cuyas operaciones elementales como suma y producto se remiten a las operaciones elementales entre reales, del mismo modo define una función compleja en términos de dos funciones reales, y no resulta extraño que su intención sea definir la integral para funciones de variable compleja en términos de dos funciones de variable real.

Retomaremos algunas definiciones que aparecen en el *Cours d'Analyse Algébrique* porque en ellas se basará la construcción de la integral compleja, por ejemplo, Cauchy define la continuidad para funciones complejas del siguiente modo:

Definición 9 *La función $w(x) = \varphi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$ de variable real x será continua si las funciones $\varphi(x)$ y $\chi(x)$ son continuas como funciones reales de x. Del mismo modo, si $w(x,y) = \varphi(x,y) + \chi(x,y)\sqrt{-1}$ es una función de variables reales (x,y) entonces $w(x,y)$ será continua si las funciones reales $\varphi(x,y)$ y $\chi(x,y)$ son continuas* [3] *(como funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$).*

La definición que adopta de continuidad para funciones reales de dos variables es la siguiente:

Definición 10 *$\varphi(x,y)$ será continua si la diferencia $\varphi(x+\alpha, y+\beta) - \varphi(x,y)$ decrece indefinidamente con α y β. En otras palabras, la función $\varphi(x,y)$ permanecerá continua respecto de (x,y) en una vecindad del punto, si un incremento infinitamente pequeño de α y β, produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función φ* [4].

Aunque Cauchy en ningún momento habla acerca de interpretar los complejos como vectores en un plano[5], la Definición 10 muestra que para Cauchy el equivalente al

[3] CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'Analyse Algébrique de l'École Róyale Polytechnique.* Œuvres Complètes Ser.II T.III. 1821. Capítulo VIII, pag. 250-251.

[4] *Ibid.* pag. 251-252.

[5] El historiador de las matemáticas Umberto BOTTAZZINI menciona "...la interpretación geométrica de números complejos había sido un tema de discusión viva entre los matemáticos Parisienses durante estos años...En los años siguientes escritores diferentes tomaron distintas posiciones frente a la idea de Argand, quien proponía que números complejos se interpretaran como vectores en un plano, hasta que Argand finalmente publico un trabajo definitivo en el que explicó su idea con detalle y como un ejemplo de su utilidad; dió una demostración del Teorema Fundamental de Álgebra..."

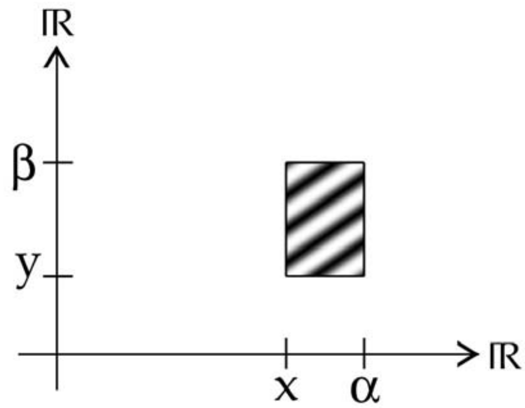

Figura 1

concepto de vecindad en $\mathbb{R}^2$ estaría representado por rectángulos en lugar de discos (Figura 1), ya que toma incrementos alrededor del punto en la variable real y en la variable imaginaria por separado y no incrementos en la "norma".

Esto anticipa su interpretación de las series complejas como dos series reales y por lo tanto, la integral compleja como dos integrales reales.Cauchy también habla acerca de una norma en los complejos (evidentemente no usa esta terminología) ya que define lo siguiente:

Definición 11 *Una función compleja* $w(z) = \varphi(z) + \chi(z)\sqrt{-1}$ *de variable compleja* z *será finita si* $\sqrt{(\varphi(z))^2 + (\chi(z))^2}$ *es una cantidad finita para toda* z*.*

En un lenguaje moderno podríamos decir que Cauchy para Cauchy, los números complejos son un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y completo, o bien un espacio de Banach, sin embargo, nunca habla de una métrica en él, pues no menciona la distancia entre dos complejos, salvo cuando éstos se encuentran en los ejes[6].

Podríamos decir que Cauchy sabe que puede hablar de distancia entre complejos, sin embargo, omite una definición de métrica porque pareciera que le basta con una norma para su Teoría de Integración.

[6]Cauchy tampoco habla de ejes coordenados, pero usaremos este lenguaje para referirnos a los valores que pueden tomar los complejos cuando son reales o imaginarios puros.

A partir de las definiciones anteriores, Cauchy comienza su *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires*[7] haciendo explícito su deseo de extender el concepto de integral en el sentido analítico, es decir, presenta la integral definida para funciones de variable compleja como un número complejo cuyo valor será nuevamente el límite de una serie, pues menciona:

> ...Para elegir la misma definición de las integrales entre los límites reales y las integrales entre los límites imaginarios es conveniente representar por la notación
>
> $$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$
>
> al límite hacia el cual converge la serie
>
> $$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1}) \left((x_i + y_i\sqrt{-1}) - (x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\right) \tag{2.1}$$
>
> cuando cada una de las sucesiones $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, X\}$ y $\{y_0, y_1, ..., y_{n-1}, Y\}$ están compuestas por términos ordenados de manera creciente o decreciente desde el primero hasta el último, esos mismos términos se aproximan indefinidamente los unos a los otros cada vez que la cantidad n aumente [8].

De este modo una primer definición que presenta Cauchy de integral con límites de integración complejos es la siguiente:

Definición 12 *Si la función $f(z)$ está definida desde $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$, entonces*

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1}) \left((x_i + y_i\sqrt{-1}) - (x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\right). \tag{2.2}$$

---

[7] CAUCHY, Augustin-Louis. *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires.* 1825. Œuvres Complètes Ser.I T.XII.

[8] *Ibid.* págs 42-43.

La serie (2.2) se presenta como la esencia del concepto de integral compleja [9], que será un número complejo y nuevamente la integral vista como operación inversa a la derivación no es el punto de partida.

En seguida Cauchy introduce par de funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$ que le permitirán trasladar los límites de integración imaginarios en cantidades reales y menciona:

> Para obtener las sucesiones $\{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, X\}$ y $\{y_0, y_1, ..., y_{n-1}, Y\}$ es suficiente suponer que
>
> $$x = \varphi(t), y = \chi(t)$$
>
> son dos funciones continuas de variable real t, cuyos incremetos se encuentran desde $t = t_0$ hasta $t = T$ y satisfacen las condiciones[10]
>
> $$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= x_0;\ \varphi(T) = X \\ \chi(t_0) &= y_0;\ \chi(T) = Y \end{aligned}$$
>
> en general
>
> $$\varphi(t_i) = x_i;\ \chi(t_i) = y_i$$

Cauchy pide que la partición $\{t_0, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, T\}$ sea creciente o decreciente, para garantizar que cuando éstos elementos se aproximen entre sí; también lo hagan los elementos $z_0 = x_0 + y_0\sqrt{-1}, z_1 = x_1 + y_1\sqrt{-1}, ..., z_{n-1} = x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{-1}, Z = X + Y\sqrt{-1}$.

El conjunto $\{z_0, z_1, .., z_{n-1}, Z\}$ representa una partición de lo que hoy conocemos como *trayectoria* $z(t)$, sin embargo, Cauchy no menciona este concepto porque trabaja con particiones en el eje real e imaginario por separado.Una partición de la trayectoria $z(t)$ se ilustra en la Figura 2, mientras que Cauchy tiene ante sí la Figura 3. Así que llamaremos trayectoria a la función $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$ sólo para facilitar el lenguaje, teniendo claro que nos referimos a las particiones $\{x_0, x_1, .., x_{n-1}, X\}$ y $\{y_0, y_1, .., y_{n-1}, Y\}$ en cada eje respectivamente.

[9] En adelante a la expresión (2,2) la llamaremos integral compleja.
[10] *Ibid.* pags. 42-43.

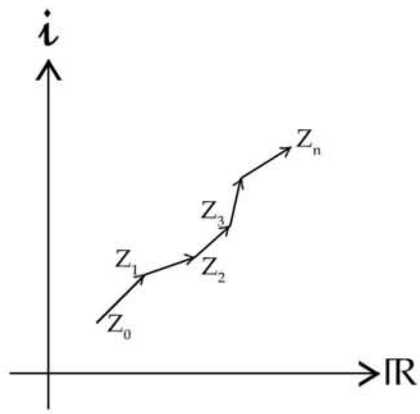

Figura 2

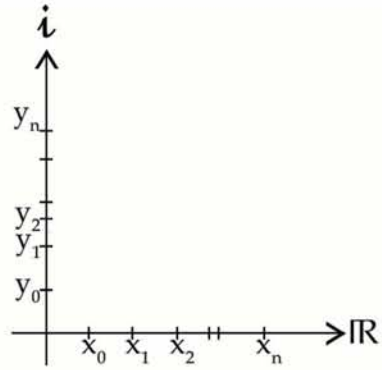

Figura 3

Observemos que la suma parcial (2.1) no ha requerido la condición de continuidad de la función $f(z)$ para estar bien definida (análogo al caso de la integral real), no obstante, ahora depende de tres parámetros además de la función[11]:

1) los límites de integración z_0, Z.
2) la trayectoria $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$.
3) la partición de la misma $z(t)$.

Cauchy seguirá el mismo esquema de las *Leçons sur le Calcul Intégral*, en sentido de que dará carácter de existencia a la integral una vez demostrada la convergencia de la serie (2.2) independientemente de los parámetros (2) y (3). Esta observación coloca al Teorema Integral de Cauchy como parte de la definición de integral de variable compleja.

En otras palabras, si el límite de la serie (2.2) depende de la trayectoria $z(t)$, entonces la función $f(z)$ no será integrable de acuerdo a la definición de Cauchy, esto nos permite afirmar que la integral a lo largo de una trayectoria no es el principal objetivo de Cauchy.

Las funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$ dan origen al concepto moderno de Integral de Línea, o bien, Integral de Trayectoria, concepto que en Cauchy no está presente, ya que la definición de integral compleja que intenta construir es precisamente aquella donde la función $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$ no sea un parámetro en la determinación se su valor, es decir, que su valor sólo dependa de la función $f(z)$ y de los límites de integración z_0, Z.

El Teorema Integral de Cauchy le permitirá interpretar la integral compleja como un funcional, ya que si denotamos por $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ al conjunto de funciones complejas de variable compleja, entonces el funcional

$$\mathcal{I} : \mathcal{F}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$$

podría definirse de la siguiente manera

$$\mathcal{I}(f) = \int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz = A + B\sqrt{-1}. \tag{2.3}$$

Para llegar a la ecuación (2.3) la estrategia de Cauchy es la siguiente:

Primero probará que el límite de la serie (2.2) es independiente de la partición de la trayectoria $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$, posteriormente exhibirá dicho límite en términos de una integral con extremos de integración reales y finalmente mostrará que tal valor

[11] Recordemos que en las funciones reales, la suma S_n sólo dependía de dos parámetros además de la función: los límites de integración y la partición del intervalo, pues únicamente existía una trayectoria de integración, la cual era el intervalo $[a, b]$.

es independiente de la trayctoria $z(t)$.

Dividimos en tres pasos su demostración para ver de manera más clara la lógica de su argumentación:

1) Si la función compleja $f(z) = G(z) + H(z)\sqrt{-1}$ es finita y contiua, entonces el límite de la serie (2.2) existe y lo llama $A + B\sqrt{-1}$, es decir;

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{Z} f(z)dz &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\left((x_i + y_i\sqrt{-1}) - (x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\right) \quad (2.4)\\ &= A + B\sqrt{-1}. \quad (2.5)\end{aligned}$$

Demostración. Como $f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1}) = g(t_{i-1}) + h(t_{i-1})\sqrt{-1}$[12] entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\left((x_i + y_i\sqrt{-1}) - (x_{i-1} + y_{i-1}\sqrt{-1})\right)\\ =& \sum_{i=1}^{n} \left(g(t_{i-1}) + \sqrt{-1}h(t_{i-1})\right)\left((x_i - x_{i-1}) + (y_i - y_{i-1})\sqrt{-1}\right)\\ =& \sum_{i=1}^{n} [g(t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - h(t_{i-1})(y_i - y_{i-1})] + \sqrt{-1}[g(t_{i-1})(y_i - y_{i-1}) + h(t_{i-1})(x_i - x_{i-1})]\end{aligned}$$

y sería suficiente demostrar que los límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(t_{i-1})(x(t_i) - x(t_{i-1})) - h(t_{i-1})(y(t_i) - y(t_{i-1}))]$$

[12] Una función compleja $f(z) = G(z)+H(z)\sqrt{-1}$; finita y continua de variable compleja $z(t) = \varphi(t)+\chi(t)\sqrt{-1}$ puede ser parametrizada como la suma de dos funciones reales de variable real $f(t) = g(t) + h(t)\sqrt{-1}$ donde $g(t)$ y $h(t)$ son continuas y finitas. Para ver esto observemos la siguiente composición

$$t \longrightarrow z(t) \longrightarrow H(z(t)) = C$$

$$t \longrightarrow z(t) \longrightarrow G(z(t)) = D$$

por lo que

$$g(t) = (H \circ z)(t) \text{ y } h(t) = (G \circ z)(t).$$

Si $g(t)$ y $h(t)$ no fueran finitas y continuas, entonces $f(z(t)) = g(t) + h(t)\sqrt{-1}$ tampoco lo sería.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(t_{i-1})(y(t_i)-y(t_{i-1}))+h(t_{i-1})(x(t_i)-x(t_{i-1}))]$$

existen.

Gracias a que las funciones $g(t)$ y $h(t)$ son continuas y finitas Cauchy concluye que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(t_{i-1})(x(t_i)-x(t_{i-1}))-h(t_{i-1})(y(t_i)-y(t_{i-1}))]=A$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(t_{i-1})(y(t_i)-y(t_{i-1}))+h(t_{i-1})(x(t_i)-x(t_{i-1}))]=B$$

■

2) Forma la siguiente suma parcial con las funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$ derivables[13]:

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)[\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1}) \tag{2.6}$$

y demuestra que el límite de esta serie también es la cantidad $A+B\sqrt{-1}$.

Demostración. Cauchy aplica el Teorema del Valor Medio para la Derivada a las funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$, pues recurre a las siguientes igualdades

$$\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}=\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_0)}{t_1-t_o}\approx\varphi'(t_0),...,\frac{x_n-x_{n-1}}{T-t_{n-1}}\approx\varphi'(t_{n-1})$$

y concluye que

$$x_n-x_{n-1}\approx(T-t_{n-1})\varphi'(t_{n-1})$$

análogamente

$$y_n-y_{n-1}\approx(T-t_{n-1})\chi'(t_{n-1})$$

para n suficientemente grande.

Las ecuaciones anteriores serán la piedra angular de su demostración, pues le permitirán convertir la integral de la Definición 12 en dos integrales reales, pero sobre todo, con límites de integración reales.

[13] En un lenguaje contemporáneo, Cauchy habla de que las curvas $\varphi(t)$ y $\chi(t)$ son suaves.

Como $f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)=g(t_{i-1})+\sqrt{-1}h(t_{i-1})$ con $g(t)$ y $h(t)$ continuas y finitas, entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)[\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(g(t_{i-1})+\sqrt{-1}h(t_{i-1})\right)[\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[\varphi'(t_{i-1})g(t_{i-1})-\chi'(t_{i-1})h(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\\
&-\sqrt{-1}[\chi'(t_{i-1})g(t_{i-1})+\varphi'(t_{i-1})h(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})
\end{aligned}$$

pero $[\varphi'(t_{i-1})g(t_{i-1})-\chi'(t_{i-1})h(t_{i-1})]$ y $[\chi'(t_{i-1})g(t_{i-1})+\varphi'(t_{i-1})h(t_{i-1})]$ son sumas de funciones reales finitas y continuas, por lo tanto, sus integrales definidas existen de t_0 a T, es decir;

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[\varphi'(t_{i-1})g(t_{i-1})-\chi'(t_{i-1})h(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})=\int_{t_0}^{T}[\varphi'(t)g(t)-\chi'(t)h(t)]dt$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[\chi'(t_{i-1})g(t_{i-1})+\varphi'(t_{i-1})h(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})=\int_{t_0}^{T}[\chi'(t)g(t)+\varphi'(t)h(t)]dt$$

concluye que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)[\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\\
=\ &\int_{t_0}^{T}\left\{[\varphi'(t)g(t)-\chi'(t)h(t)]-\sqrt{-1}[\chi'(t)g(t)+\varphi'(t)h(t)]\right\}dt.
\end{aligned}$$

Y para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)[\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})=A+B\sqrt{-1}$$

probará que la diferencia

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)\left((x_i-x_{i-1})+(y_i-y_{i-1})\sqrt{-1}\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)\left([\varphi'(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi'(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\right)$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito.

La diferencia anterior es

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)$$
$$\left\{[(x_i-x_{i-1})-\varphi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})]+\sqrt{-1}[(y_i-y_{i-1})-\chi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})]\right\}$$

y recordemos que para n suficientemente grande:

$$|(x_i-x_{i-1})-\varphi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})|<\frac{\varepsilon}{n}$$

$$|(y_i-y_{i-1})-\chi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})|<\frac{\varepsilon}{n}$$

lo cual implica

$$\left|[(x_i-x_{i-1})-\varphi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})]+\sqrt{-1}[(y_i-y_{i-1})-\chi'(t_{i-1}))(t_i-t_{i-1})]\right|<\frac{\varepsilon}{n}+\frac{\varepsilon}{n}\sqrt{-1}$$

y como $f(z)$ es una función finita, tiene una cota M:

$$f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)\leq M.$$

Por lo tanto la expresión

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi(t_{i-1})+\sqrt{-1}\chi(t_{i-1})\right)$$
$$\left\{[(x_i-x_{i-1})-\varphi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})]+\sqrt{-1}[(y_i-y_{i-1})-\chi'(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})]\right\}$$

es menor que $M(\varepsilon+\sqrt{-1}\varepsilon)=\varepsilon(Cte)$.

Como ε tiende a 0 cuando n tiende a infinito, entonces la expresión anterior tiende a cero. ■

Gracias a las ecuaciones (2.5) y (2.6), Cauchy llega a que

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{t_0}^{T} f(\varphi + \sqrt{-1}\chi)(\varphi' + \sqrt{-1}\chi')dt = A + B\sqrt{-1} \tag{2.7}$$

Observemos que la expresión dz en la ecuación (2.7) no representa la longitud de la curva de integración, como en el caso de la integral real dz representaba la longitud de los intervalos de la partición del intervalo de integración, dz representa la diferencial de la función $z(t)$ y este hecho es la esencia del concepto de Integral Compleja.

Con la ecuación (2.7) Cauchy establece que la integral compleja vista como el límite de una serie cobrará sentido hasta que se transforme en una integral con límites de integración reales y así como en las *Leçons sur le Calcul Intégral*, el TVMI era parte de la definición de integral para funciones de variable real, ahora la ecuación (2.7) forma parte de la definición de integral compleja, ya que proporciona el valor de la integral en términos de la función $f(z)$ y los extremos de integración.

La conclusión de las afirmaciones (1) y (2) es que el límite de la serie (2.2) es independiente de la *partición* de $z(t)$ siempre que se integre sobre una trayectoria diferenciable y la función $f(z)$ sea continua y finita, sin embargo, tal límite aún depende de $z(t)$, por lo tanto, el siguiente paso será demostrar que si la función $f(z)$ es *analítica* [14], entonces el límite de la serie (2.2) es independiente de $z(t)$.

Teorema Integral de Cauchy

Una vez definida la integral compleja como una integral cuya existencia es independiente de la partición dentro de la trayectoria $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$, Cauchy demostrará que tal integral tampoco depende de la trayectoria $z(t)$ si la función $f(z)$ resulta analítica, es decir, que la integral sobre dos trayectorias distintas $z(t)$ y $k(t)$

[14] Pocos autores contemporáneos hacen la distinción entre función analítica y función diferenciable, en este trabajo, el término función analítica se refiere únicamente a funciones que pueden expresarse como polinomios de Taylor.

será la misma. Este resultado hoy lo conocemos como Teorema Integral de Cauchy y veremos que para él, más que un teorema; es lo que da sentido a la Definición 12.

Cauchy usa la *variación* de una función como pieza clave en la demostración de su teorema, por lo tanto mencionamos a continuación la definición de tal concepto que aparece en *Mémoire sur le Calcul des Variations* [15]:

Definición 13 *La variación de una variable cualquiera $\frac{\delta y}{\delta t}$ no será otra cosa que el límite del cociente entre los incrementos infinitamente pequeños $\triangle y$ de esta variable y de la variable primitiva t, es decir* [16]*:*

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle t}.$$

Enunciaremos a continuación el Teorema de Cauchy tal como aparece en la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* y posteriormente analizaremos la demostración de Cauchy.

Teorema 5 *(TIC) Concibamos que la función $f(x + y\sqrt{-1})$ es finita y continua para todas las x comprendidas entre los límites x_0, X, y para toda y entre los límites y_0, Y. Entonces en este caso particular, probaremos fácilmente que el valor de la integral $\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$ equivalente a la expresión imaginaria $A + B\sqrt{-1}$ es independiente de la naturaleza de las funciones $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$.*

Esta manera de enunciarlo reafirma la tesis de que Cauchy no tiene ante sí el concepto geométrico de trayectoria. También observemos que en las hipótesis del TIC, Cauchy no menciona que la función $f(x + y\sqrt{-1})$ sea analítica pese a que usará tal hecho en la demostración.

Cauchy demostrará que la variación de la integral (2.7) es nula al variar las funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$. O bien, en el lenguaje de Cálculo de Variaciones demostrará que una variación de primer orden de la variable t produce una variación nula en la función

[15] CAUCHY, Augustin-Louis. *Mémoire sur le Calcul des Variations.* Œuvres Complètes Serie II Tomo 13. pág 59-70.

[16] *Ibid.* pag 64

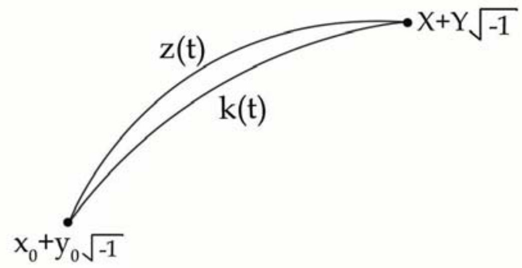

Figura 5

integral. Para ello, define una trayectoria $k(t)$ muy cercana a $z(t) = x(t) + y(t)\sqrt{-1}$, de la siguiente forma

$$k(t) = [x(t) + \varepsilon u(t)] + [y(t) + \varepsilon v(t)]\sqrt{-1}$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones arbitrarias de variable real t que satisfacen

$$u(t_0) = 0 = u(T)$$

$$v(t_0) = 0 = v(T)$$

y ε es una cantidad infinitamente pequeña.

Para Cauchy la función $k(t)$ tiene esa forma porque ve las funciones $\varphi(t)$ y $\chi(t)$ por separado, y toma incrementos $\varepsilon u(t)$ y $\varepsilon v(t)$ también por separado.

Cauchy menciona la frase " trayectorias suficientemente cercanas", sin embargo, en su demostración no importará que tan "lejos" esten $k(t)$ y $z(t)$, siempre y cuando ε tienda a 0, lo cual se garantiza si la expresión $[u(t) + v(t)\sqrt{-1}]$ está acotada, esto ocurre si no existe t en $[t_0, T]$ tal que $u(t) = \infty$ o $v(t) = \infty$.

Por lo anterior concluimos que la frase "dos trayectorias suficientemente cercanas" para Cauchy significa "no hay puntos donde la función se vuelva infinita entre ellas", condición que más allá de depender de la distancia, depende de la posición de las variables, como se muestra en las figuras 5 y 6.

En un lenguaje contemporáneo, diríamos que Cauchy se refiere a que la "curva

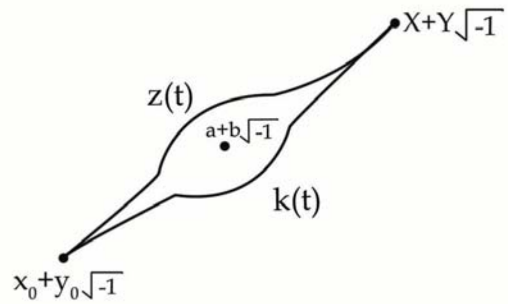

Figura 6

cerrada" formada por $z(t)$ y $k(t)$ no encierre una singularidad.

En seguida desarrolla el polinomio de Taylor alrededor del complejo $z = x + y\sqrt{-1}$, para k cercano a z; como Cauchy no habla acerca del radio de convergencia de tal polinomio, es suficiente considerar puntos cercanos al eje x y al eje y por separado:

$$f(k) \approx f(z) + f'(z)(k-z) + \frac{f''(z)}{2}(k-z)^2 + \frac{f'''(z)}{3!}(k-z)^3 + ... \qquad (2.8)$$

Cabe señalar que en la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires*, Cauchy no hace referencia acerca de la validez del Teorema de Taylor para funciones de variable compleja y simplemente toma como hipótesis que existen las primeras n derivadas de la función $f(z)$ y que una función compleja finita y continua puede expresarse en serie de Taylor.

La observación anterior es de suma importancia porque la integral para funciones reales no requirió tal condición para probar su existencia en un intervalo.

Lo siguiente que hace Cauchy es sustituir el valor

$$k - z = \left((x+\varepsilon u) + (y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right) - \left(x + y\sqrt{-1}\right) = \varepsilon(u + v\sqrt{-1})$$

en la ecuación (2.8) y obtiene

$$f(k) \approx f(x+y\sqrt{-1}) + f'(x+y\sqrt{-1})\varepsilon(u+v\sqrt{-1}) + \frac{f''(x+y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u+v\sqrt{-1})^2 + ...$$

La siguiente resta de integrales representa la variación de la integral y la denotaremos

$$
\begin{aligned}
\triangle \int &= \int_{z_0}^{Z} f(k)dk - \int_{z_0}^{Z} f(z)dz \\
&= \int_{t_0}^{T} \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) f\left((x+\varepsilon u) + (y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right) dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{T} (x' + y'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1}) dt \\
&= \int_{t_0}^{T} \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) f\left((x+\varepsilon u) + (y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right) \\
&\quad -(x' + y'\sqrt{-1}) f(x + y\sqrt{-1}) dt
\end{aligned}
$$

y sustituye

$$
\begin{aligned}
f(k) &= f\left((x+\varepsilon u) + (y+\varepsilon v)\sqrt{-1}\right) \\
&\approx f(x+y\sqrt{-1}) + f'(x+y\sqrt{-1})\varepsilon(u+v\sqrt{-1}) + \frac{f''(x+y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u+v\sqrt{-1})^2 + ...
\end{aligned}
$$

en $\triangle \int$ y obtiene

$$
\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{T} \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) \\
& \left(f(x + y\sqrt{-1}) + f'(x + y\sqrt{-1})\varepsilon(u + v\sqrt{-1}) + \frac{f''(x + y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u + v\sqrt{-1})^2 + ... \right) \\
& -(x' + y'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1})dt \\
= \; & \int_{t_0}^{T} \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) f(x + y\sqrt{-1}) \\
& + \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) f'(x + y\sqrt{-1})\varepsilon(u + v\sqrt{-1}) \\
& + \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) \left[\frac{f''(x + y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u + v\sqrt{-1})^2 + ...\right] \\
& -(x' + y'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1})dt \\
= \; & \int_{t_0}^{T} \left(x' + y'\sqrt{-1}\right) f(x + y\sqrt{-1}) + \left(\varepsilon u' + \varepsilon v'\sqrt{-1}\right) f(x + y\sqrt{-1}) \\
& + \left(x' + y'\sqrt{-1}\right) f'(x + y\sqrt{-1})\varepsilon(u + v\sqrt{-1}) \\
& + \left(\varepsilon u' + \varepsilon v'\sqrt{-1}\right) f'(x + y\sqrt{-1})\varepsilon(u + v\sqrt{-1}) \\
& + \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) \left[\frac{f''(x + y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u + v\sqrt{-1})^2 + ...\right] \\
& -(x' + y'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1})dt \\
= \; & \int_{t_0}^{T} \varepsilon(u' + v'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1}) + \varepsilon(x' + y'\sqrt{-1})f'(x + y\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1}) \\
& +\varepsilon^2(u' + v'\sqrt{-1})f'(x + y\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1}) \\
& + \left((x' + \varepsilon u') + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}\right) \left[\frac{f''(x + y\sqrt{-1})}{2}\varepsilon^2(u + v\sqrt{-1})^2 + ...\right] dt \\
= \; & \varepsilon \int_{t_0}^{T} (u' + v'\sqrt{-1})f(x + y\sqrt{-1}) + (x' + y'\sqrt{-1})f'(x + y\sqrt{-1})(u + v\sqrt{-1}) + \\
& \varepsilon^2 \int_{t_0}^{T} ...dt + \varepsilon^3 \int_{t_0}^{T} ...dt + ...
\end{aligned}
$$

Cauchy llega a una expresión en potencias crecientes de ε, y la integral correspondiente a la potencia de grado 1 es la antiderivada de la función $[u(t)+v(t)\sqrt{-1}]f(x(t)+y(t)\sqrt{-1})$, es decir;

$$
\begin{aligned}
& \frac{d\left([u(t)+v(t)\sqrt{-1}]f(x(t)+y(t)\sqrt{-1})\right)}{dt} \\
= \quad & \frac{d[u(t)+v(t)\sqrt{-1}]}{dt}\left(f(x(t)+y(t)\sqrt{-1}\right)+\frac{df(x(t)+y(t)\sqrt{-1})}{dt}\left(u(t)+v(t)\sqrt{-1}\right) \\
= \quad & (u'+v'\sqrt{-1})f(x+y\sqrt{-1})+(x'+y'\sqrt{-1})f'(x+y\sqrt{-1})(u+v\sqrt{-1})
\end{aligned}
$$

gracias al 2°TFC obtiene

$$
\int_{t_0}^{T}\frac{d\left([u(t)+v(t)\sqrt{-1}]f(x(t)+y(t)\sqrt{-1})\right)}{dt}=[(u(t)+v(t)\sqrt{-1}]f(x(t)+y(t)\sqrt{-1})|_{t_0}^{T}=0
$$

ya que

$$u(t_0)=0=u(T)$$

$$v(t_0)=0=v(T)$$

por tanto

$$
\begin{aligned}
& \varepsilon\int_{t_0}^{T}\frac{d\left([(u(t)+v(t)\sqrt{-1}]f(x(t)+y(t)\sqrt{-1}\right)}{dt}dt+\varepsilon^2\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon^3\int_{t_0}^{T}...dt+... \\
= \quad & 0+\varepsilon^2\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon^3\int_{t_0}^{T}...dt+...
\end{aligned}
$$

A partir de la segunda integral de la ecuación anterior, las potencias de ε son mayores o iguales a dos y las integrales definidas de t_0 a T no son *singulares,* entonces la variación de la integral $\triangle\int$ es

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta y}{\delta t} \quad = \quad & \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle\int}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\int_{z_0}^{Z}f(k)dk-\int_{z_0}^{Z}f(z)dz}{(k-z)} \\
= \quad & \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\varepsilon^2\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon^3\int_{t_0}^{T}...dt+...}{\varepsilon(u+v\sqrt{-1})}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\varepsilon^2\left(\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon\int_{t_0}^{T}...dt+...\right)}{\varepsilon(u+v\sqrt{-1})}.
\end{aligned}
$$

Como la función $f(z)$ es continua y finita y la expresión $(u+v\sqrt{-1})$ está acotada, entonces $\frac{\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon\int_{t_0}^{T}...dt+...}{u+v\sqrt{-1}}$ también está acotada, por lo tanto

$$\lim_{\triangle t\to 0}\varepsilon\left(\frac{\int_{t_0}^{T}...dt+\varepsilon\int_{t_0}^{T}...dt+...}{u+v\sqrt{-1}}\right)=0$$

Cauchy concluye que la variación de la integral $\triangle\int$ es nula al variar las funciones $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$.

Recapitulemos los argumentos utilizados en la demostración de Cauchy:

1) Cálculo de Variaciones

2) El Teorema de Taylor para Funciones de Variable Compleja

3) El 2° TFC para Funciones de Variable Real.

Si hacemos nuevamente el ejercicio de comparar la demostración original del Teorema Integral de Cauchy con otras demostraciones contemporáneas del mismo teorema que aparecen en un texto moderno de Análisis Complejo, como el *Complex Analysis* de Lars V. Ahlfors[17], veremos el papel que juegan los conceptos usados por Cauchy y de que manera han evolucionado. Por ejemplo, la demostración de Ahlfors no recurre al Cálculo de Variaciones, pero es muy geométrica ya que divide la demostración del teorema en casos; para trayectorias partículares como cuadrados, triángulos o círculos.

> Ahlfors dice[18]:
>
> Consideremos, específicamnete , un rectángulo R definido por las inecuaciones $a\leq x\leq b$, $c\leq y\leq d$. Su perímetro puede ser considerado como una curva simple cerrada que conste de cuatro segmentos de línea cuya dirección la escogemos tal que caiga a la derecha de los segmentos dirigidos. El orden de los vértices es entonces $(a,c),(b,c),(b,d),(a,d)$. Nos referiremos a esta curva cerrada como la curva acotada o contorno de R, y la denotaremos por $\Gamma(R)$.
>
> Enfaticemos que R es un conjunto cerrado de puntos y, por tanto no es una región[19]. En el teorema siguiente consideramos una función analítica

[17] Ahlfors, Lars V. Complex Analysis.U.S.A. 1953. McGraw-Hill Book Company.

[18] *Ibid.* pags 88-90.

[19] Un conjunto no vacío simplemente conexo del plano se llama región.

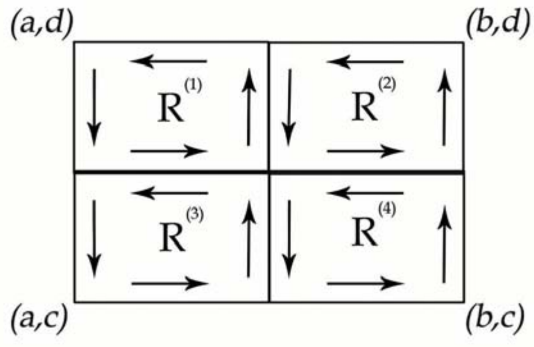

Figura 7

en el rectángulo R. Recalquemos al lector que tal función es por definición definida y analítica en una región que contiene a R.

Teorema 6 *(Teorema de Cauchy para un Rectángulo) Si la función $f(z)$ es analítica*[20] *en R, entonces*

$$\int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 0$$

Demostración. La prueba se basa en el método de bisección. Introduzcamos la notación

(A) $\eta(R) = \int_{\Gamma(R)} f(z)dz$

la cual también usaremos para cualquier rectángulo contenido en el rectángulo dado. Si R es dividido en cuatro rectángulos congruentes $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}, R^{(4)}$, encontramos que

(B) $\eta(R) = \eta(R^{(1)}) + \eta(R^{(2)}) + \eta(R^{(3)}) + \eta(R^{(4)})$

integrales sobre lados en común se cancelan entre sí. Es importante notar que este hecho puede verificarse explícitamente ya que no estamos usando la intuición geométrica ilícitamente. Sin embargo, una referencia a la figura (7) nos ayuda.

[20] Ahlfors utiliza el término función analítica para referirse a una función compleja diferenciable.

Se sigue de (B) que al menos uno de los rectángulos $R^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, debe satisfacer la condición

$$|\eta(R^{(k)})| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|$$

Denotemos este rectángulo por R_1; si varios $R^{(k)}$ tienen esta propiedad, la elección se hará de acuerdo a alguna regla definida.

Este proceso puede repetirse indefinidamente, y obtenemos una sucesión de rectángulos anidados

$R \supset R \supset R \supset ... \supset R \supset ...$ con la propiedad $|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R_{n-1})|$ y por tanto

(C) $|\eta(R_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\eta(R)|$

El rectángulo R_n converge a un punto $z^* \in R$ en el sentido de que R_n estará contenido el la vecindad dada por $|z - z^*| < \delta$ para n suficientemente grande. Primero, escojamos δ tan pequeña que $f(z)$ esté definida y sea analítica en $|z - z^*| < \delta$. Segundo, si $\varepsilon > 0$ está dado, podemos escoger δ tal que

$$|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)| < \varepsilon$$

(D) $|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon|z - z^*|$

para $|z - z^*| < \delta$. Asumimos que δ satisface ambas condiciones y que R_n está contenido en $|z - z^*| < \delta$.

Observemos que

$$\int_{\Gamma(R_n)} dz = 0$$

$$\int_{\Gamma(R_n)} zdz = 0.$$

Este trivial caso especial de nuestro teorema ya ha sido probado anteriormente. Remarquemos que la prueba depende del hecho de que 1 y z son las derivadas de z y $\frac{z^2}{2}$ respectivamente.

En virtud de esas ecuaciones es posible escribir

(E) $|\eta(R_n)| \leq \varepsilon \int_{\Gamma(R_n)} |z - z^*|\ |dz|$

En la última integral $|z - z^*|$ es a lo más igual a la diagonal d_n de R_n . Si L_n denota la longitud del perímetro de R_n, la integral es entonces $\leq d_n L_n$. Pero si d y L son las cantidades correspondientes para el rectángulo original R, es claro que $d_n = \frac{d}{2^n}$ y $L_n = \frac{L}{2^n}$. Por (E) tenemos entonces

$$|\eta(R_n)| \leq \frac{dL}{4^n}\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, tenemos $\eta(R) = 0$, y el teorema está probado. ■

La demostración de Ahlfors se basa en:

1) El método de bisección

2) La desigualdad $|\int f(z)dz| \leq \int |f(z)dz|$

3) El Teorema de la primitiva para funciones de variable compleja.

La conclusión a la que llegamos es que el método de bisección y la desigualdad $|\int f(z)dz| \leq \int |f(z)dz|$ reemplazan el Cálculo de Variaciones utilizado en la demostración de Cauchy, sin embargo esta sustitución hace que la demostración se divida en casos y se vuelva geométrica.

Después de la observación anterior cobra sentido la necesidad de Cauchy por utilizar el Cálculo de Variaciones como herramienta en su demostración, en tanto que hace una demostración completamente analítica e independiente de la geometría.

Teorema del Residuo

Nuevamente Cauchy seguirá el mismo esquema que en la integral para funciones de variable real y una vez demostrada la existencia de la integral compleja para funciones analíticas, muestra que si $f(z)$ alcanza un valor *infinito* en una vecindad de k y z, entonces la diferencia de las integrales

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz - \int_{z_0}^{Z} f(k)dk \tag{2.9}$$

no será tan pequeña como se quiera. En otras palabras, si en la trayectoria $k(t) = [x(t) + \varepsilon u(t)] + [y(t) + \varepsilon v(t)]\sqrt{-1}$ el valor de ε no puede hacerse infinitamente pequeño, entonces las integrales sobre $k(t)$ y $z(t)$ tendrán valores distintos.

Sin embargo, mostrará que la diferencia (2.9) será un valor constante, este resultado se conoce como Teorema del Residuo y Cauchy lo prueba de la siguiente manera:

Si la cantidad compleja a satisface que $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, entonces define

$$F = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

por lo tanto

$$f(z) = \frac{F}{z-a} + \varpi(z)$$

en donde

$$\varpi(z) = \frac{(z-a)f(z) - F}{z-a}$$

Observemos que $\varpi(z)$ tiene la propiedad de que $\varpi(a) = 0$ pues

$$\varpi(a+\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon f(a+\varepsilon) - \varepsilon f(a+\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

para ε infinitamente pequeño.

Cauchy llega a que

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{z_0}^{Z}\left(\frac{F}{z-a} + \varpi(z)\right)dz = \int_{z_0}^{Z}\frac{F}{z-a}dz + \int_{z_0}^{Z}\varpi(z)dz$$

Sea $k(t)$ una trayectoria cercana a $z(t) = \varphi(t) + \chi(t)\sqrt{-1}$ en una vecindad de a, es decir;

$$k(t) = [x(t) + \varepsilon u(t)] + [y(t) + \varepsilon v(t)]\sqrt{-1}$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ son dos funciones arbitrarias de variable real t que satisfacen

$$u(t_0) = 0 = u(T)$$

$$v(t_0) = 0 = v(T)$$

Por lo tanto

$$\int_{z_0}^{Z} f(k)dk = \int_{z_0}^{Z} \left(\frac{F}{k-a} + \varpi(k) \right) dk = \int_{z_0}^{Z} \frac{F}{k-a} dk + \int_{z_0}^{Z} \varpi(k)dk$$

esto implica que

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{Z} f(z)dz - \int_{z_0}^{Z} f(k)dk &= \left[\int_{z_0}^{Z} \frac{F}{z-a} dz + \int_{z_0}^{Z} \varpi(z)dz \right] - \left[\int_{z_0}^{Z} \frac{F}{k-a} dk + \int_{z_0}^{Z} \varpi(k)dk \right] \\ &= \left[\int_{z_0}^{Z} \frac{F}{k-a} dk - \int_{z_0}^{Z} \frac{F}{z-a} dk \right] + \left[\int_{z_0}^{Z} \varpi(z)dz - \int_{z_0}^{Z} \omega(k)dk \right] \end{aligned}$$

pero $\varpi(k)$ y $\varpi(z)$ en una vecindad de a son finitas y continuas y gracias al Teorema Integral de Cauchy; la diferencia $\int_{z_0}^{Z} \varpi(k)dk - \int_{z_0}^{Z} \omega(k)dk$ es nula.

Sólo resta calcular el valor de

$$F \left(\int_{z_0}^{Z} \frac{dk}{k-a} - \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z-a} \right)$$

el cual es igual a

$$F \int_{t_0}^{T} \left(\frac{x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}]}{\left(x - a + \varepsilon u + (y - b + \varepsilon v)\sqrt{-1}\right)} - \frac{x` + y'\sqrt{-1}}{x - a + (y - b)\sqrt{-1}} \right) dt$$

Cauchy separa la expresión anterior en dos integrales reales para usar el 2° T.F.C.

$$\begin{aligned}
&= F\int_{t_0}^{T}\left(\tfrac{(x'+\varepsilon u')(x-a+\varepsilon u)+(y'+\varepsilon v')(y-b+\varepsilon v)}{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2} + \sqrt{-1}\tfrac{(y'+\varepsilon v')(x-a+\varepsilon u)-(x'+\varepsilon u')(y-b+\varepsilon v)}{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2} \right)dt\\
&\quad -F\int_{t_0}^{T}\left(\tfrac{x'(x-a)+y'(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} + \sqrt{-1}\tfrac{y'(x-a)-x'(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2} \right)dt\\
&= F\int_{t_0}^{T} \tfrac{(x'+\varepsilon u')(x-a+\varepsilon u)+(y'+\varepsilon v')(y-b+\varepsilon v)}{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2}dt \;-F\int_{t_0}^{T} \tfrac{x'(x-a)+y'(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}dt\\
&\quad +F\sqrt{-1}\left(\int_{t_0}^{T} \tfrac{(y'+\varepsilon v')(x-a+\varepsilon u)-(x'+\varepsilon u')(y-b+\varepsilon v)}{(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2}\; dt - \int_{t_0}^{T} \tfrac{y'(x-a)-x'(y-b)}{(x-a)^2+(y-b)^2}dt \right)\\
&= F\frac{1}{2}\ln\left[\left[(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2\right] - \ln[(x-a)^2+(y-b)^2]\right]_{t_0}^{T}\\
&\quad +F\sqrt{-1}\left[\arctan\left(\frac{y-b+\varepsilon v}{x-a+\varepsilon u}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right)\right]_{t_0}^{T}
\end{aligned}$$

como

$$u(t_0) = 0 = u(T)$$

$$v(t_0) = 0 = v(T)$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln\left[(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2\right] - \frac{1}{2}\ln[(x-a)^2+(y-b)^2]_{t_0}^{T}\\
= \;&\frac{1}{2}\ln\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} = \frac{1}{2}\ln(1) = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sqrt{-1}\left[\arctan\left(\frac{y-b+\varepsilon v}{x-a+\varepsilon u}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right)\right]_{t_0}^{T} = \pm\sqrt{-1}\pi.$$

La conclusión de Cauchy es la siguiente: si las trayectorias $z(t)$ y $k(t)$ “encierran” una cantidad a tal que $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, entonces

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz - \int_{z_0}^{Z} f(k)dk = \pm F\pi\sqrt{-1}$$

A continuación Cauchy analizará que ocurre si la cantidad compleja a es tal que

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ y además $\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{f^1(a)} = \frac{1}{f^2(a)} = ... = \frac{1}{f^m(a)} = 0$; de modo que a sea una "raíz" de multiplicidad m de la ecuación $\frac{1}{f(z)} = 0$.

Aunque $f(z)$ no necesariamente es un polinomio, Cauchy habla de sus raíces en términos de las m-ésimas derivadas de la función y define

$$F(z) = (z-a)^m f(z).$$

Como $F(z)$ es una función finita y continua alrededor de a, entonces por el Teorema de Taylor para z en una vecindad de a ocurre que

$$F(z) \approx F(a) + F'(a)(z-a) + \frac{F''(a)}{2}(z-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(z-a)^3 + ... + \varpi(z)(z-a)^m$$

donde $\varpi(z) = \frac{(z-a)^m f(z) - F}{(z-a)^m}$.

Toma dos trayectorias $k_1(t)$ y $k_2(t)$ tal que

$k_1(t) = x - \varepsilon u + (y - \varepsilon v)\sqrt{-1}$ por lo que $dk_1 = x' - \varepsilon u + (y' - \varepsilon v')\sqrt{-1}$

$k_2(t) = x + \varepsilon u + (y + \varepsilon v)\sqrt{-1}$ por lo que $dk_2 = x' + \varepsilon u' + (y' + \varepsilon v')\sqrt{-1}$

La diferencia de las integrales respectivas es

$$\begin{aligned} & \int_{z_0}^{Z} f(k_2)dk_2 - \int_{z_0}^{Z} f(k_1)dk_1 \\ = & \int_{t_0}^{T} \left(\frac{F(k_2)}{(k_2-a)^m} dk_2 \right) dt - \int_{t_0}^{T} \left(\frac{F(k_1)}{(k_1-a)^m} dk_1 \right) dt. \end{aligned}$$

Al desarrollar $F(k_1)$ en serie de Taylor alrededor de a[21] obtiene:

$$F(k_1) \approx F(a) + F^1(a)(k_1 - z) + \frac{F^2(a)}{2}(k_1-a)^2 + \frac{F^3(a)}{3!}(k_1-a)^3 + ... + (k_1-a)^m w(k_1)$$

análogamente desarrolla $F(k_2)$ en serie de Taylor alrededor de a y llega a que

$$\frac{F(k_1)}{(k_1-a)^m} \approx \frac{F(a)}{(k_1-a)^m} + \frac{F^1(a)}{(k_1-a)^{m-1}} + \frac{F^2(a)}{2!(k_1-a)^{m-2}} + ... + \frac{F^{m-1}(a)}{(m-1)!(k_1-a)} + \frac{w(k_1)}{(k_1-a)^m}$$

[21] Observemos que esto es posible pues $F(a)$ es una cantidad finita.

$$\frac{F(k_2)}{(k_2-a)^m} \approx \frac{F(a)}{(k_2-a)^m}+\frac{F^1(a)}{(k_2-a)^{m-1}}+\frac{F^2(a)}{2!(k_2-a)^{m-2}}+...+\frac{F^{m-1}(a)}{(m-1)!(k_2-a)}+\frac{w(k_2)}{(k_2-a)^m}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T}\left(\frac{F(k_2)}{(k_2-a)^m}dk_2\right)dt-\int_{t_0}^{T}\left(\frac{F(k_1)}{(k_1-a)^m}dk_1\right)dt \\ = \quad & S_0F(a)+S_1F^1(a)+S_2\frac{F^2(a)}{2!}+...+S_{m-1}\frac{F^{m-1}(a)}{(m-1)!}+... \end{aligned}$$

en donde

$$S_0=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{dk_2}{(k_2-a)^{m-0}}-\frac{dk_1}{(k_1-a)^{m-0}}\right)dt$$

$$S_1=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{dk_2}{(k_2-a)^{m-1}}-\frac{dk_1}{(k_1-a)^{m-1}}\right)dt$$

$$....$$

$$S_n=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{dk_2}{(k_2-a)^{m-n}}-\frac{dk_1}{(k_1-a)^{m-n}}\right)dt$$

Cada una de las integrales anteriores son cero de acuerdo al Teorema Integral de Cauchy, salvo para $n=m-1$, es decir, la integral

$$S_{m-1}=\int_{t_0}^{T}\left(\frac{dk_2}{(k_2-a)}-\frac{dk_1}{(k_1-a)}\right)dt=\pm 2\sqrt{-1}\pi$$

debido al Teorema del Residuo.

El resultado anterior queda expresado en el siguiente teorema:

Teorema 7 *Si la cantidad compleja a satisface que $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ y además a es una raíz de multiplicidad m de la ecuación $\frac{1}{f(a)}$, entonces la diferencia de las integrales sobre las trayectorias $k_1(t)$ y $k_2(t)$ es la siguiente*

$\int_{z_0}^{Z} f(k_2)dk_2-\int_{z_0}^{Z} f(k_1)dk_1=S_{m-1}\frac{F^{m-1}(a)}{(m-1)!}=\pm 2\pi\frac{F^{m-1}(a)}{(m-1)!}\sqrt{-1}$

Capítulo 3

Un nuevo tipo de Cálculo

Introducción

Cauchy continúa con la tradición de los cursos y lecciones impartidas en la École Royale Polytechnique de París y en 1826; a un año de la publicación de su *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires,* publica una serie de memorias en las cuales pretende llevar más lejos el uso de la expresión

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) \tag{3.1}$$

que apareció desde las *Leçons sur le Calcul Intégral*, y que definió propiamente en la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires.*

La primer Memoria donde Cauchy aborda la expresión (3.1) de manera independiente de la integral se titula *Sur un nouveau genre de Calcul analogue au Calcul Infinitésimal*[1] (Sobre un nuevo tipo de Cálculo análogo al Cálculo Infinitesimal), en esta Memoria propone la creación de un tercer tipo de Cálculo cuyo principal objeto de

[1] CAUCHY, Augustin-Louis. *Sur un nouveau genre Calcul analogue au Calcul Infinitésimal.* Œuvres Complètes Ser.II T.VI.1826 pág 23-37.

estudio sea el límite (3.1), este nuevo Cálculo será llamado *Cálculo de Residuos* y su operador central es el *residuo de una función*, tal y como para el Cálculo Diferencial es el operador diferencial y para el Cálculo Integral es la integral de una función, es decir;

El Cálculo Diferencial se basa en el límite del cociente $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

El Cálculo Integral se sutenta en el límite de la suma $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.

El Cálculo de Residuos se basará en el límite $\lim\limits_{z \to a}(z-a)f(z)$.

El operador residuo tendrá la propiedad de transformar las funciones no acotadas en funciones acotadas y aunque en la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* el residuo de una función era sólo un artificio para calcular integrales singulares, ahora esta expresión tendrá sentido por si misma.

En palabras del propio Cauchy:

> ...este cálculo es de un fácil uso y se aplica a un gran número de problemas diversos y de nuevas fórmulas que ameritan la atención de los geómetras. Además, por ejemplo, se deduce inmediatamente del cálculo de residuos la fórmula de interpolación de Lagrange; la descomposición de fracciones racionales en el caso de raíces iguales o distintas; fórmulas generales para determinar los valores de integrales definidas; la suma de una multitud de series y particularmente de series periódicas; la integración de ecuaciones lineales...[2]

Posteriormente Cauchy vinculará el Cálculo de Residuos con el Cálculo Integral y mostrará las realciones entre uno y otro como Teoremas no como definiciones; precisamente uno de los resultados más importante de esta vinculación es la Fórmula Integral de Cauchy, con la cual finalizaremos este tercer Capítulo.

[2]CAUCHY, Augustin-Louis. *Sur un nouveau genre de Calcul analogue au Calcul Infinitésimal.* Œuvres Complètes Ser.II T.VI. 1826. pág. 24.

Cálculo de Residuos

Cauchy define propiamente el residuo de una función en la memoria *Sobre un nuevo tipo de Cálculo análogo al Cálculo Infinitesimal* prácticamente después de haber demostrado bajo que condiciones el valor de una integral compleja depende únicamente de los extremos, en esta memoria Cauchy comienza por definir una nueva función en términos de una función $f(z)$ dada.

Definición 14 *Dada una función $f(z)$ cuya variable puede ser real o compleja, si z_0 es una raíz simple de la ecuación*

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \tag{3.2}$$

es decir, z_0 es un valor para el cual la función $f(z)$ tiende a infinito, entonces

$$F(z) = (z - z_0)f(z). \tag{3.3}$$

Para $z = z_0$, la función $F(z)$ no está bien definida, entonces Cauchy define $F(z_0)$ a través del siguiente límite

$$F(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z)$$

el cual se llamará *residuo de la función $f(z)$ relativo al valor z_0*, y se denotarará $Res[f; z_0]$.

Observemos que la función $F(z)$ es finita para valores de z donde $f(z)$ es infinita.

Si z_0 es una raíz de multiplicidad m de la ecuación (3.2) entonces define

$$\begin{aligned} F(z) &= (z - z_0)^m f(z) \\ F(z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z). \end{aligned}$$

Nuevamente al hablar de raíces de multiplicidad m, Cauchy parte de que la función $f(z)$ es diferenciable m veces y que puede expresarse en serie de Taylor. De este modo el papel que jugará la analiticidad de la función $f(z)$ será indispensable pues más allá de ser una hipótesis que le exige a la función, para Cauchy el polonomio de Taylor de $f(z)$ representará a la función misma, aunque tal condición de analiticidad no la haga explícita.

El Cálculo Diferencial llama *derivar* a la operación de calcular el $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, Cauchy llama extracción de residuos a la operación de calcular los residuos de una función relativos a las diferentes raíces de la ecuación (3.2); a la suma de tales raíces la llama *residuo integral* de la función $f(z)$ y la denota con el símbolo $\sum Res[f(z)]$, es decir;

$$F(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = Res[f(z)].$$

Para fijar ideas; supongamos que la ecuación $\frac{1}{f(z)} = 0$ tiene tres raíces z_0, z_1, z_2; z_0 de multiplicidad 2; z_1 y z_2 raíces simples, entonces:

$$\sum Res[f(z)] = F(z_0)+F(z_1)+F(z_2) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 f(z)+\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)+\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z).$$

De la ecuación (3.3) obtiene que

$$f(z) = \frac{F(z)}{z-z_0}.$$

Si z_0 es una raíz simple, entonces

$$F(z_0) = Res[f(z)] = Res[\frac{F(z)}{z-z_0}]. \tag{3.4}$$

Si z_0 es una raíz de multiplicida m, entonces

$$\frac{F^{m-1}(z_0)}{(m-1)!} = Res[\frac{F(z)}{(z-z_0)^m}]. \tag{3.5}$$

La importancia de las ecuaciones (3.4) y (3.5) es que ambas están únicamente en términos de la función $F(z)$ cuya principal característica es que resulta finita para todo z en el dominio de $f(z)$.

Como la función $F(z)$ es finita y continua, se puede expresar como polinomio de Taylor alrededor del punto $z = z_0$ y obtiene para el caso de una raíz simple

$$F(z) \approx F(z_0)+F'(z_0)(z-z_0)+\frac{F''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+...+\frac{F^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1}+\frac{F^m(z_0)}{m!}(z-z_0)^m$$

por lo tanto

$$\frac{F(z)}{(z-z_0)^m} \approx \frac{F(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{F'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{F''(z_0)}{2!(z-z_0)^{m-2}} + ... + \frac{F^{m-1}(z_0)}{(m-1)!(z-z_0)} + \frac{F^m(z_0)}{m!}$$

pero recordemos que si z_0 es una raíz de multiplicidad m entonces $f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_0)^m}$, en cuyo caso Cauchy concluye que

$$f(z) \approx \frac{F(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{F'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{F''(z_0)}{2!(z-z_0)^{m-2}} + ... + \frac{F^{m-1}(z_0)}{(m-1)!(z-z_0)} + \frac{F^m(z_0)}{m!}$$

Cauchy no habla acerca del radio de convergencia de la serie anterior ya que en un proceso de límite, las aproximaciones se vuelven igualdades.

Finalmente la función $f(z)$ se puede expresar en serie de potencias no negativas cuyos coeficientes son precisamente los residuos de la misma función.

$$\begin{aligned} f(z) \quad &\approx \quad \frac{1}{(z-z_0)^m} Res[\frac{F(z)}{(z-z_0)}] + \frac{1}{(z-z_0)^{m-1}} Res[\frac{F(z)}{(z-z_0)^2}] + ... \\ &+ \frac{1}{z-z_0} Res[\frac{F(z)}{(z-z_0)^m}] + Res[\frac{F(z)}{(z-z_0)^{m+1}}] \end{aligned}$$

La ecuación anterior sustentará la demostración de la Fórmula Integral de Cauchy, sin embargo, antes de llegar a tal resultado, Cauchy escribe una memoria publicada también en 1826 tiulada *De l´influence que peut avoir, sur la valeur d´une Intégrale Double, l´ordre dans lequel on effectue les intégrations* (La influencia que puede tener el orden de integración sobre el valor de una Integral Doble), en esta memoria utiliza que la integral compleja definida en su *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* no depende de la trayectoria e integra sobre trayectorias paralelas a los ejes real e imaginario.

La influencia que tiene el orden de integración sobre el valor de una Integral Doble

En la memoria tiulada *De l´influence que peut avoir, sur la valeur d´une Intégrale Double, l´ordre dans lequel on effectue les intégrations*[3] Cauchy mostrará que el Teorema del Residuo puede reecribirse en términos de integrales sobre trayectorias paralelas a los ejes real e imaginario.

Cauchy comienza esta memoria al tomar dos funciones $\varphi(x,y)$ y $\chi(x,y)$ de variables reales x, y desde x_0, X hasta y_0, Y respectivamente, que satisfacen la ecuación

$$-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x}. \tag{3.6}$$

Esta es la primera vez que Cauchy menciona explícitamente las ecuaciones que actualmente llamamos ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Y asume que si la función $F(x,y) = -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x}$ resulta finita y continua con respecto a las variables x y y entre los límites $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$, entonces el orden de integración no tendrá influencia en el valor de la integral doble, es decir;

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} F(x,y)dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} F(x,y)dxdy$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x}dxdy$$

de modo que

$$-\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y) - \varphi(x,y_0)]dx = \int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y) - \chi(x_0,y)]dy. \tag{3.7}$$

Si al contrario, la función $F(x,y)$ deviene infinita o indeterminada para valores de

[3] CAUCHY, Augustin-Louis. *De l´influence que peut avoir, sur la valeur d´une Intégrale Double, l´ordre dans lequel on effectue les intégrations.* Œuvres Complètes Ser.II T.VI. 1826. pag 113-123.

las variables x y y entre los límites $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$, entonces

$$-\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x}dxdy - \Delta$$

donde Δ representa la suma de varias integrales singulares.

Del mismo modo, la ecuación (3.7) se convertirá en

$$-\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y) - \varphi(x,y_0)]dx = \int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y) - \chi(x_0,y)]dy - \Delta \tag{3.8}$$

En el siguiente teorema Cauchy vincula la ecuación (3.8) con la integral compleja.

Teorema 8 *Si z es una función real o compleja de variables x, y. Supongamos en particular que $z = x + y\sqrt{-1}$; $z_0 = a + b\sqrt{-1}$ y sea $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)}$, definamos*

$$\varphi(x,y) = f(z)$$

$$\chi(x,y) = \sqrt{-1}f(z)$$

de modo que $\varphi(x,y)$ y $\chi(x,y)$ satisfacen la ecuación (3.8), ya que

$$-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = -f'(z)\frac{\partial(z)}{\partial x} = -f'(z)$$

y

$$\frac{\partial\chi(x,y)}{\partial x} = f'(z)\frac{\partial(z)}{\partial y} = -f'(z)$$

en virtud de la ecuación (3.8) se tiene que

$$\begin{aligned}\Delta &= \textstyle\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y) - \varphi(x,y_0)]dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y) - \chi(x_0,y)]dy \\ &= \textstyle\int_{x_0}^{X}\left(\frac{dx}{(x-a)+(Y-b)\sqrt{-1}} - \frac{dx}{(x-a)+(y_0-b)\sqrt{-1}}\right) + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left(\frac{dy}{(X-a)+(y-b)\sqrt{-1}} - \frac{dy}{(x_0-a)+(y-b)\sqrt{-1}}\right)\end{aligned}$$

si la cantidad a se sitúa fuera de los límites x_0, X o la cantidad b está fuera de los límites y_0, Y, entonces $\Delta = 0$.

Al contrario, si a o b se encuentran en $[x_0, X]$ o $[y_0, Y]$ respectivamente, entonces $\Delta = 2\pi\sqrt{-1}$.

La demostración del Teorema 8 es completamente análoga a la del Teorema del Residuo del Capítulo 2.

Fórmula Integral de Cauchy

También en 1826 Cauchy publica las memorias *Sur diverses relations qui existons entre les Résidus des Fonctions et les Intégrales Définies* (Sobre diversas relaciones existentes entre los Residuos de las Funciones y las Integrales Definidas) y *Sur quelques formules relatives á la détermination du Résidu Intégral d´une fonction donnée* (Sobre algunas fórmulas relativas a la determinación del Residuo Integral de una función dada). El objetivo de estas memorias es reencontrar el Cálculo de Residuos con la Teoría de Integración Compleja, a través de lo que hoy conocemos como Fórmula Integral de Cauchy.

Comienza por retomar la ecuación definida en la *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires* de 1825:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} Res[f(z)] + \varpi(z)$$

con z_0 una raíz simple de la ecuación $\frac{1}{f(z)} = 0$, por lo tanto

$$\varpi(z) = f(z) - \frac{1}{z - z_0} Res[f(z)]$$

donde $\varpi(z) = \frac{(z-z_0)f(z)-Res[f(z)]}{z-z_0}$ conserva un valor finito para todos los valores de la variable z.

La ecuación $f(z) = \frac{1}{z-z_0} Res[f(z)] + \varpi(z)$ no se contrapone con la ecuación $f(z) = \frac{F(z)}{z-z_0}$, ya que ambas funciones coinciden en $z \neq z_0$ y para $z = z_0$ ambas ecuaciones tienden a infinito.

Observemos nuevamente que $\varpi(z)$ tiene la propiedad de que $\varpi(z_0) = 0$ pues

$$\varpi(z_0 + \varepsilon) \approx \frac{\varepsilon f(z_0 + \varepsilon) - \varepsilon f(z_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} = 0$$

para ε un real infinitamente pequeño.

Por lo tanto, entre los límites $x = x_0$, $x = X$; $y = y_0$, $y = Y$, la función $\varpi(x+y\sqrt{-1})$ es finita y continua, esto implica que

$$\frac{\partial\varpi(x+y\sqrt{-1})}{\partial y} = \sqrt{-1}\frac{\partial\varpi(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}$$

en consecuencia

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial\varpi(x+y\sqrt{-1})}{\partial y} = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\sqrt{-1}\frac{\partial\varpi(x+y\sqrt{-1})}{\partial x}dydx$$

y de acuerdo al Teorema 8

$$\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[\varpi(X+y\sqrt{-1})-\varpi(x_0+y\sqrt{-1})]dy-\int_{x_0}^{X}[\varpi(x+Y\sqrt{-1})-\varpi(x+y_0\sqrt{-1})]dx = 0$$

pero $\varpi(z) = f(z) - \frac{1}{z-z_0}Res[f(z)]$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})]dy - \int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})]dx \\ = \; & Res[f(z)]\left(\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left(\tfrac{1}{X-z+y\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{x_0-z+y\sqrt{-1}}\right)dy - \int_{x_0}^{X}\left(\tfrac{1}{x-z+Y\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{x-z+y_0\sqrt{-1}}\right)dx \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left(\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[\tfrac{1}{X-z+y\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{x_0-z+y\sqrt{-1}}]dy - \int_{x_0}^{X}[\tfrac{1}{x-z+Y\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{x-z+y_0\sqrt{-1}}]dx \right) = 2\pi\sqrt{-1}$$

Cauchy concluye que

Fórmula Integral de Cauchy

$$\begin{aligned} & \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})]dy - \int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})]dx \\ = \; & 2\pi\sqrt{-1}Res[f(z)]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

La ecuación anterior es la primer versión que Cauchy presenta de la Fórmula Integral que hoy lleva su nombre y difiere de la versión actual en tanto que Cauchy calcula la integral sobre trayectorias paralelas a los ejes.

Cauchy propone la fórmula (3.9) como método general para calcular integrales singulares; y resolver así, el principal problema de la Teoría de Integración. También en 1826, Cauchy publica una serie de memorias que describen las aplicaciones del Cálculo de Residuos en la solución de ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, el Cálculo de Residuos no logra convertirse en un tercer tipo de Cálculo independiente del Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral ya que la matemática moderna colocó al Cálculo de Residuos como parte de la Teoría de Integración Compleja.

La razón por la cual el Cálculo de Residuos no es un Cálculo independiente tiene que ver precisamente con la evolución en la interpretación del Teorema Integral de Cauchy; el cual se convirtió en un resultado posterior a la definición de integral compleja y dejó de ser parte de la misma.

Decidimos concluir este trabajo con la Fórmula Integral de Cauchy ya que esta fórmula vincula el Cálculo de Residuos y el Cálculo Integral; dos de los principales trabajos de Cauchy que dieron origen a la Teoría de Integración Compleja.

Conclusiones

Para Cauchy una función integrable es aquella donde exista el límite de la sucesión de sumas parciales independiente de la trayectoria de integración y de la partición de la misma, por esta razón el Teorema Integral de Cauchy es parte de la definición de integral compleja pues garantiza que su valor sólo depende de la función y de los extremos de integración.

Es así como el trabajo de Cauchy revolucionó el concepto de integral y su definición se independizó de la derivada o de la noción geométrica de área. Esto permitió interpretar la integral definida como un operador que a cada función compleja le asocia una cantidad compleja.

Para demostrar que el valor de la integral no depende de la trayectoria que une los extremos Cauchy necesitó que la función fuera analítica, esto explica porque tal condición también forma parte de su definición de integral.

Podemos concluir que en el contexto de la obra de Cauchy, la integral compleja no fue definida propiamente como una integral de línea, pues desde la integral para funciones de variable real, el valor de la integral no dependia de la trayectoria que une los extremos y la generalización hacia una integral compleja lleva consigo esta propuesta, de ahí que actualmente nos resulta independiente hablar del Teorema Integral de Cauchy que hablar de la integral compleja, pues tenemos ante nosotros el concepto de integral de línea, pero en el contexto de su surgimiento esta independencia no existía.

Bibliografía

[1821] CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'Analyse Algébrique de l'École Róyale Polytechnique*. Œuvres Complètes Ser.II T.III.

[1824] CAUCHY, Augustin-Louis. *Résume des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*. Œuvres Completés, Ser.II T.IV.

[1825] CAUCHY, Augustin-Louis. *Mémoire sur les Intégrales Définies, prises entre des Limites Imaginaires.* Œuvres Complètes Ser.I T.XII.

[1826] CAUCHY, Augustin-Louis. *Sur un nouveau genre de Calcul analogue au Calcul Infinitésimal; De l´influence que peut avoir, sur la valeur d´une Intégrale Double, l´ordre dans lequel on effectue les intégrations; Sur diverses relations qui existons entre les Résidus des fonctions et les Intégrales Définies; Sur quelques formules relatives á la détermination du Résidu Intégral d´une fonction donnée.* Œuvres Complètes Ser.II T.VI.

[1844] CAUCHY, Augustin-Louis. *Mémoire sur le Calcul des Variations*. Œuvres Complètes Ser. II T.XIII.

[1] AHLFORS, Lars V. Complex Analysis. U.S.A. 1953. McGraw-Hill Book Company.

[2] BOTTAZZINI, Umberto. The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokio, 1986.

[3] COURANT, Richard. Diferential and Integral Calculus Vol I. Great Britain. 2° Edición 1937. Blackie & Son, Ltd., Glasgow.

[4] EULER, Leonhard. *Institutiones Calculi Integralis 1.* Petropoli. Impenfis Academiae Imperialis Scientiarum, 1768.

[5] LACROIX, François. *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*. Tomo 2. París 1798.

[6] MARKUSHÉVICH, Alexei I. Teoría de las Funciones Analíticas (Curso breve). España 1977. Urmo, S.A. de Ediciones.