UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# "Un poco de color en problemas de flujo"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**ACTUARIA**

**P R E S E N T A:**

**CLAUDIA ORQUÍDEA LÓPEZ SOTO**

**TUTORA:**
**M. en I.O. MARÍA DEL CARMEN HERNÁNDEZ AYUSO**

**2006**

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

- Datos del alumno.

  López
  Soto
  Claudia Orquídea
  52 43 53 27
  Universidad Nacional Autónoma de México
  Facultad de Ciencias
  Actuaría

- Datos del Tutor

  Maestra en Investigación de Operaciones
  María del Carmen
  Hernández
  Ayuso

- Datos del Sinodal 1

  Doctora en Ingeniería
  Idalia
  Flores
  De la Mota

- Datos del Sinodal 2

  Matemático
  Adrian
  Girard
  Islas

- Datos del Sinodal 3

  Maestra en Ingeniería
  María de Luz
  Gasca
  Soto

- Datos del Sinodal 4

  Actuario
  Germán
  Valle
  Trujillo

- Datos del trabajo escrito

  Título: Un poco de color en problemas de flujo
  Número de páginas: 115
  Año 2006

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Un poco de color en problemas de flujo"

realizado por Claudia Orquídea López Soto

con número de cuenta 098516973 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | | |
|---|---|---|
| Director de Tesis Propietario | M. en I.O. María del Carmen Hernández Ayuso | Ma del Carmen Hdz Ayuso |
| Propietario | Dra. Idalia Flores De la Mota | |
| Propietario | Mat. Adrian Girard Islas | Adrián Girard |
| Suplente | M. en I. María de Luz Gasca Soto | Lucy Gasca |
| Suplente | Act. Germán Valle Trujillo | |

**Consejo Departamental de** Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

*A mis abuelos*
*Isabel y Raúl*

# Un poco de color en problemas de flujo

Claudia Orquídea López Soto

# Agradecimientos

Agradezco a mi familia y amigos por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, por impulsarme a seguir mis ideas y lograr mis metas.

Agradezco a mi tutora la M en I.O. María del Carmen Hernández Ayuso por su apoyo y dirección en la realización de este trabajo, por la amistad y cariño brindados a través de estos tres años que me ha permitido colaborar a su lado.

Agradezco a los miembros de mi honorable jurado:

Dra. Idalia Flores de la Mota
Mat. Adrian Girard Islas
M en I. Maria de Luz Gasca Soto
Act. Germán Valle Trujillo

por sus correcciones e imprescindibles observaciones.

Claudia Orquídea López Soto

# Índice General


**Agradecimientos** III

**Introducción.** VII

**1. Un poco de color** 1
- 1.1. Definiciones . . . 1
- 1.2. Coloración . . . 2
- 1.3. Cadenas y Cortes coloreados . . . 3
  - 1.3.1. Problema de la cadena coloreada . . . 3
  - 1.3.2. Problema del corte coloreado . . . 4
- 1.4. Algoritmo de la red coloreada . . . 5
- 1.5. Teorema de la Red Coloreada . . . 7
- 1.6. Aplicaciones . . . 13
  - 1.6.1. Aplicaciones del Lema de Minty . . . 13
  - 1.6.2. Conexidad . . . 14
  - 1.6.3. Algoritmo de la red coloreada y el conjunto $\boldsymbol{S}$ . . . 20
  - 1.6.4. Algoritmo de la red coloreada y el ajedrez . . . 20

**2. Factibilidad a color** 23
- 2.1. Flujo Factible . . . 23
  - 2.1.1. El Teorema de Distribución Factible y Diferentes Tipos de Intervalos . . . 34
- 2.2. Potenciales . . . 35
  - 2.2.1. Aplicaciones . . . 46
- 2.3. Igualdad en color, diferencia en significado . . . 52

**3. Flujo coloreado a Costo Mínimo** 53
- 3.1. Problema de Distribución Lineal Factible . . . 53
- 3.2. Algoritmo de Distribución Óptima . . . 55
- 3.3. Aplicaciones . . . 67

**4. Estructura del Programa Flucomi** **83**
4.1. Consideraciones Generales . . . . . . . . . . 83
4.2. Parámetros y Variables de cada programa . . . . . . . . . . 85
4.3. Descripción general de los programas . . . . . . . . . . 86

**5. Manual de Usuario** **95**
5.1. Consideraciones Generales . . . . . . . . . . 95
5.2. Algoritmo de Minty . . . . . . . . . . 99
5.3. Algoritmo de Rectificación de Flujo . . . . . . . . . . 102
5.4. Algoritmo de Rectificación de Tensión . . . . . . . . . . 106
5.5. Algoritmo de Distribución Óptima . . . . . . . . . . 109

**Conclusiones** **113**

**Bibliografía** **115**

# Introducción.

En nuestra vida diaria nos vemos rodeados por un gran número de sistemas de redes: eléctricas, de telefonía terrestre, satelital, sistemas de carreteras nacionales, el metro, el sistema de servicio de aerolíneas, redes de distribución y manufactura, etcétera. La característica que define a las situaciones que envuelven a este tipo de redes es que se desea mover el servicio o producto ofrecido (la electricidad, la comunicación, un mensaje, personas, etcétera) de un lugar a otro a través de la red de la manera más eficiente posible. En este trabajo veremos cómo este tipo de situaciones pueden ser modeladas matemáticamente teniendo una representación gráfica (la red), la cual tiene una función mucho más relevante como veremos más adelante. Estos modelos matemáticos son conocidos como problemas de flujo en redes y estudiaremos algunas formas (algoritmos) en la que éstos son resueltos.

El campo de estudio de la teoría de redes tiene sus bases en el trabajo de personas como Gustav Kirchhof quien junto con otros pioneros de la ingeniería eléctrica y mecánica se dedicaban al análisis de los circuitos eléctricos, de donde surgió la idea de establecer a las redes como entes matemáticos en la representación de sistemas físicos. Muchos problemas de optimización de redes en realidad son tipos especiales de problemas de programación lineal, así, se ha intentado unificar estas dos áreas a través de la teoría de coloraciones en gráficas que es justo lo que se estudiará a lo largo de este trabajo, respondiendo en cada capítulo respectivamente a interrogantes tales como: ¿Habrá un camino que lleve o permita transportar el servicio o producto que se ofrece desde un cierto punto $x$ a otro? ¿Qué cantidad es posible enviar? y por supuesto ¿podrá salir más barato?. Entonces, el objetivo de este trabajo es estudiar este último enfoque y proporcionar una herramienta de cómputo, principalmente didáctica. Así, es que la tesis está compuesta en la parte escrita por cinco capítulos y de un programa de computo, al cual dedicamos los dos últimos.

En el capítulo 1 empezamos con elementos básicos de la teoría de redes, después definimos una *coloración* una vez unificados los conceptos anteriores, llegamos a establecer condiciones que definen el problema de la cadena coloreada y el corte coloreado. Con base en el teorema de la red coloreada y el lema de Minty, que son equivalentes como veremos más adelante, es posible encontrar solución a dichos problemas a través del algoritmo de la red coloreada, el cual después de una pequeña modificación dará lugar a lo que llamaremos algoritmo de Minty y formará la principal subrutina en los algoritmos que se presentan en los siguientes capítulos. Es importante mencionar que los algoritmos de coloración son métodos sencillos que dan una idea clara e intuitiva para resolver problemas de optimización en redes. Finalmente veremos algunas aplicaciones.

En el capítulo 2 se analizan dos problemas de factibilidad; un flujo factible con respecto a las capacidades de los arcos de la red y con respecto a las ofertas de los nodos. Se describen ambos problemas estableciéndose las condiciones que garantizan la existencia de la solución basados en los teoremas de coloraciones.

El capítulo 3 aborda el tema central de la tesis que es el de flujo a costo mínimo, uno de los más importantes en la teoría de redes por su aplicación en situaciones cotidianas y los diversos métodos que se han desarrollado para encontrar una solución. Aquí se fusiona lo estudiado en los capítulos anteriores. Se plantea el problema de distribución lineal factible y mostramos el algoritmo que ofrece la solución a éste, dicho algoritmo usa los ya vistos en los capítulos anteriores; el algoritmo de rectificación de flujo, el algoritmo de rectificación de tensión, los cuales a su vez usan como subrutina el algoritmo de Minty. Por último, dentro de las aplicaciones de este método de solución es el problema de transporte y el problema de arborescencia de ruta más corta debido a que poseen la misma estructura.

Actualmente existen en el mercado paquetes de cómputo que dan solución a varios problemas de redes, sobre todo si éstos pueden ser expresados como problemas de programación lineal, sin embargo la intención de este proyecto es acercarnos a la manipulación de los resultados frente a un lenguaje de programación. Por ello en el capítulo 4 se presenta lo que es básicamente la estructura de los programas realizados que resuelven el problema de flujo a costo mínimo a través de una coloración, basados por supuesto en los algoritmos estudiados en los tres primeros capítulos. Como el algoritmo de distribución óptima es el que da solución a este problema y ya vimos que usa como subrutina a los algoritmos vistos en los primeros dos capítulos, se aprovecho esto y una vez que se tiene acceso es posible usar de manera individual cada algoritmo a través de un menú que aparecerá en la pantalla. Los algoritmos fueron programados en el paquete de computo llamado MATLAB por ser un sistema interactivo y un lenguaje de programación accesible.

Finalmente el capítulo 5 es un pequeño manual para el usuario, en el cual se muestran las indicaciones a seguir para el correcto funcionamiento del programa. Adicionalmente se muestran algunas corridas como ejemplo de las posibles soluciones.

# 1

# Un poco de color

En este primer capítulo hablaremos de un tema que sentará las bases en el desarrollo del presente trabajo y es el de coloración de arcos en gráficas. Comenzaremos por ver algunas definiciones, posteriormente daremos una idea general de lo que es una coloración, su definición y mostraremos algunos ejemplos en los que se puede aplicar. Posteriormente veremos el algoritmo de la Red Coloreada junto con algunos ejemplos de problemas que éste resuelve, así finalizaremos viendo el Teorema de la Red Coloreada y el Lema de Minty.

## 1.1. Definiciones

**Definición 1** (Gráfica)**.**

Una gráfica es una pareja de conjuntos $[X, A]$, donde $X$ es un conjunto no vacío de puntos llamados nodos o vértices y $A$ es un conjunto de líneas que unen todos o algunos de los vértices. Se denota con $G = [X, A]$.

A los elementos de $X$ los denotaremos como: $i_1, i_2, ..., i_n$.

A los elementos de $A$ los denotaremos como: $a_1, a_2, ..., a_m$

Si los elementos de $A$ tienen una dirección, representada con una flecha, se llaman *arcos* y se dice que la gráfica $G$ es dirigida u orientada. Si no tienen dirección se llaman *aristas* y $G$ es no dirigida.

**Definición 2** (cadena)**.**

Una *cadena* es una secuencia finita de arcos o aristas. Una *cadena simple* no repite aristas o arcos y una *cadena elemental* no repite vértices.

**Definición 3** (ciclo)**.**

Un *ciclo* es una cadena cuyo vértice final es igual a su vértice inicial.

**Definición 4** (camino).
Un *camino* es una secuencia de arcos en la cual el vértice final de uno es el vértice inicial del que le sigue en la secuencia.

**Definición 5** (camino simple).
Un *camino simple* es un camino $i_1$, $a_1$, $i_2$, $a_2$,...,$a_{q-1}$, $i_q$ tal que $i_j \neq i_k$ si $i \neq k$. Es un camino que no repite arcos.

**Definición 6** (camino elemental).
Un *camino elemental* es aquel que no repite nodos.

**Definición 7** (circuito).
Un *circuito* es un camino cuyo vértice inicial coincide con su vértice final.

**Definición 8** (función de incidencia).
Una gráfica puede ser representada numéricamente basándonos en la idea de la función de incidencia nodo-arco de $G$, la cual se define del siguiente modo:

$$e(i,j) = \begin{cases} 1 & si \;\; i \; es \; nodo \; inicial \; del \; arco \; j \\ -1 & si \;\; i \; es \; nodo \; final \; del \; arco \; j \\ 0 & en \; otro \; caso \end{cases}$$

**Definición 9** (Red).
Una red $R = [X, A, f]$ es una gráfica ponderada; es decir, es una gráfica $[X, A]$ con una función real $f$ definida sobre sus arcos o aristas o sobre sus vértices o ambos.

## 1.2. Coloración

¿Cómo llegar de un lugar a otro? A esta pregunta nos enfrentamos cuando deseamos encontrar un camino que nos lleve de un lugar específico a otro; por ejemplo, imaginemos que deseamos visitar las ciudades principales o las capitales de los estados de la república mexicana en auto y traemos un mapa de las carreteras que las comunican, de este modo nuestro problema se reduce a encontrar el camino que nos lleve por ejemplo de la ciudad de México a Monterrey. Este tipo de problemas tienen solución a través de algoritmos en el análisis de redes; en este capítulo veremos una herramienta específica para ello, en la cual se hace uso de colores. Comencemos por ver la definición de una coloración.

**Definición 10** (Coloración).
Decimos que una coloración es una función inyectiva que va del conjunto de arcos al conjunto de los colores, donde a cada arco de la red le asocia uno y sólo un color.

Es decir, una coloración es una partición sobre el conjunto de arcos en la red. Los colores que vamos a usar son: verde, blanco, negro y rojo. Hasta este momento ya sabemos que es una coloración, pero, ¿Cómo la aplicamos a la red? Para cada problema vamos a tener ciertas restricciones y son éstas las que van a definir el color que tomará cada arco. De este modo en una red hay cuatro tipos de arcos: los que pueden recorrerse en ambos sentidos a los cuales se les asigna el color verde; los que pueden recorrerse sólo en su sentido se les asigna el blanco; los que pueden recorrerse sólo en sentido contrario se les asocia el color negro; y los que no pueden recorrerse se les da el color rojo. Una vez asignados los colores en la red, según sus restricciones, aplicaremos el algoritmo de la red coloreada, el cual veremos más adelante, por el momento es necesario que sepamos que al dar solución al problema vamos a encontrar una y sólo una de las siguientes opciones: una cadena compatible con la coloración o un corte compatible con la coloración.

## 1.3. Cadenas y Cortes coloreados

¿Qué vamos a entender por *cadena compatible* con la coloración? Ya sabemos que una cadena es una secuencia finita de nodos y arcos, pero la cadena coloreada o compatible con la coloración nos mostrará los arcos por los que hay que pasar para llegar de un nodo o subconjunto de nodos específico en la red denotado como $N^+$ a otro nodo o subconjunto de nodos denotado como $N^-$. Una cadena de $N^+$ a $N^-$ se denota como $P : N^+ \rightarrow N^-$, en forma explicita ésta se escribe como: $P$: $i_0$, $a_0$, $i_1$, $a_1$,..., $a_{k-1}$, $i_k$ con $i_0 \in N^+$ e $i_k \in N^-$, donde $i \in N$ $a \in A$. Al construir una cadena se generan dos conjuntos $P^+$, el cual denota al conjunto de arcos de la cadena recorridos positivamente (en el sentido establecido por el arco) y $P^-$ es el conjunto de arcos recorridos negativamente (en sentido contrario al establecido por el arco). De acuerdo a la función de incidencia una cadena se escribe como:

$$e_P(j) = e(j, P) = \begin{cases} 1 & si\ j \in P^+ \\ -1 & si\ j \in P^- \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En términos de colores el problema se plantea del siguiente modo:

### 1.3.1. Problema de la cadena coloreada

En una red $R$, se definen dos conjuntos no vacíos de nodos $N^+$ y $N^-$ y una coloración de $A$ consistente de los colores verde, blanco, negro y rojo. El problema es determinar una cadena $P : N^+ \rightarrow N^-$ tal que todo arco en $P^+$ sea verde o blanco y todo arco de $P^-$ sea verde o negro.

Anteriormente mencionamos la existencia de cortes compatibles con la coloración, ahora bien, la idea de un corte en una red es encontrar un conjunto de arcos dentro de la red tales que debido a las restricciones que poseen (en este caso se trata de color) ya no permiten la existencia de una cadena (coloreada) de $N^+$ a $N^-$.

**Definición 11** (Corte)**.**
Formalmente definimos un corte como el conjunto de arcos $Q = [S, S']$, donde $S = \{i \in X | i \in P\}$ y $S' = \{i \in X | i \notin S\}$ con $S \subset X$. Se dice que el corte $Q$ separa $N^+$ de $N^-$ si es de la forma $[S, S']$, para algún $S \subset X$, tal que $N^+ \subset S$ y $N^- \cap S = \varnothing$. Se denotará $Q$ con $N^+ \downarrow N^-$. Un corte también se define a través de la función de incidencia como:

$$e_Q(j) = e(j, Q) = \begin{cases} 1 & si\ j \in Q^+ \\ -1 & si\ j \in Q^- \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

En términos de colores el problema es el siguiente:

### 1.3.2. Problema del corte coloreado

Sean $N^+$ y $N^- \subset X$ tales que $N^+ \cap N^- = \varnothing$. Definimos una coloración en la red $R$ con los colores verde, blanco, negro y rojo. Es importante mencionar que definir un corte en función de la unión de dos conjuntos de arcos y de la coloración que acabamos de establecer, queda del siguiente modo:

$$\begin{array}{rl} & Q = Q^+ \cup Q^- \\ \text{donde} & Q^+ = \{j \in Q | j \text{ es negro o rojo}\} \text{ y} \\ & Q^- = \{j \in Q | j \text{ es blanco o rojo}\} \end{array}$$

Así, el problema es determinar un corte $Q : N^+ \downarrow N^-$ tal que todo arco de $Q^+$ sea rojo o negro y todo arco de $Q^-$ sea rojo o blanco. El corte que cumple con estas restricciones se dice que es compatible con la coloración y si además separa $N^+$ de $N^-$ éste es la solución al problema del corte coloreado.

Es interesante ver la dualidad de los colores entre los dos problemas; por ejemplo un arco de color verde forma parte de caminos o cadenas y no de cortes; el color blanco permite que se avance en el sentido del arco y forma parte de caminos, mientras que si su nodo final se encuentra en $S$ entonces formará parte de un corte; un arco de color negro forma parte de una cadena siempre y cuando sea recorrido en sentido contrario y formará parte de un corte si su nodo inicial se encuentra $S$, finalmente un arco de color rojo bajo ninguna circunstancia forma parte de una cadena, mientras que bajo cualquier circunstancia siempre forma parte de un corte. Esto se muestran en la siguiente tabla:

| color | cadena | corte |
|---|---|---|
| verde | recorrido en ambos sentidos | no hay recorrido |
| blanco | recorrido hacia adelante | recorrido hacia atrás |
| negro | recorrido hacia atrás | recorrido hacia adelante |
| rojo | no hay recorrido | recorrido en ambos sentidos |

## 1.4. Algoritmo de la red coloreada

En esta sección veremos un procedimiento llamado *Algoritmo de la red coloreada*, el cual da solución de manera simultánea a los dos problemas que describimos arriba, pues una vez encontrada la cadena coloreada ya no es posible que exista el corte coloreado y viceversa.

La idea del algoritmo está asociada a la utilización de una función que llamaremos $\theta-$ enrutamiento denotada $\theta : S \setminus N^+ \to A$ y a la construcción de un conjunto de nodos $S$ que contiene a $N^+$. La función asocia cada nodo $i \in S \setminus N^+$ con un arco $j \in A$ y representa el camino que hasta ahora se ha construido para alcanzar los nodos de $S$ desde $N^+$ sin pasar fuera de $S$, donde $N^+$ será la base y debe de satisfacer:

- Para cada nodo $i \in N^+$, $\theta(i)$ es un arco que une a $i$ con algún nodo de $S$.

- Cuando se genera una secuencia $i_0$, $\theta(i_0)$, $i_1$, $\theta(i_1)$,..., $i_k$, $\theta(i_k)$,$i_{k+1}$, en donde $i_h$ es el otro extremo de $\theta(i_{h-1})(h = 1, ..., k + 1)$, eventualmente se alcanza un nodo de $N^+$. El reverso de esta secuencia es una cadena de $N^+$ a $i$.

  Es importante observar que el algoritmo va a generar cadenas compatibles con la coloración en caso de que existan, por lo que $\theta(i)$ debe ser verde o blanco si es extremo inicial y debe ser verde o negro si $i$ es extremo final.

**Algoritmo de la red coloreada**

*Objetivo:* Determinar una cadena de $N^+$ a $N^-$ compatible con la coloración.
*Descripción*

*Paso 1.* Sea $S = N^+$ y sea $\theta$ vacío.

*Paso 2.* Determínese el corte $Q = [S, S']$.

1. Si $j \in Q^+$ tal que $j$ es verde o blanco o si $\exists$ $j \in Q^-$ tal que $j$ es verde o negro ir al Paso 3.
2. Si no existe tal $j$ terminar. En este caso no existe solución al problema y $Q = [S, S']$ es un corte compatible con la coloración.

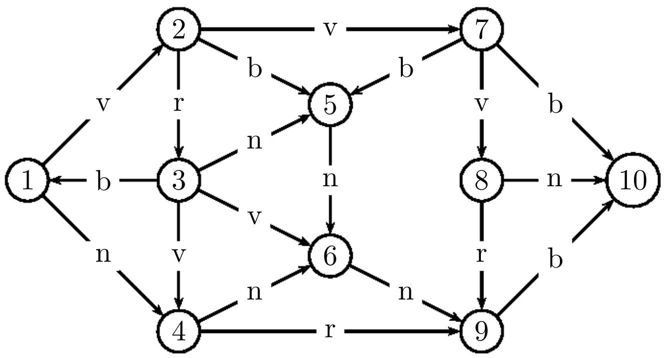
*Paso 3.* Sea $\theta(i) = j$, en donde $i \notin S$. Sea $S = S \cup \{i\}$. El enrutamiento es compatible con la coloración.

1. Si $i \in N^-$ terminar. Los arcos del $\theta-$ enrutamiento contienen una cadena $P$ de $N^+$ a $i \in N^-$ compatible con la coloración.
2. Si $i \notin N^-$ se tiene $S \cap N^- = \varnothing$. Ir al Paso 2.

## Justificación

En el *Paso 2.1* del algoritmo el revisar la existencia de tal arco nos permitirá ir construyendo en el *Paso 3* de cada iteración una cadena compatible con la coloración, es decir, el conjunto $S$ aumentará en una unidad si es que tal arco existe en el corte. La cadena será compatible con la coloración por construcción, de tal forma que todo arco que esté en la cadena será blanco o verde si $j \in P^+$ y será verde o negro si $j \in P^-$.
En el *Paso 2.2* al examinar y no encontrar un arco $j$ como se pide en el *Paso 2.1* nos garantiza la existencia de un corte compatible con la coloración ya que todo arco en dicho corte será rojo o negro si $j \in Q^+$ o rojo o blanco si $j \in Q^-$, en tal caso no existe solución al problema de la cadena coloreada, pero se da solución al problema del corte coloreado. Observemos que el algoritmo termina una vez que $S \cap N^- \neq \varnothing$.
El algoritmo termina en un número finito de pasos, puesto que hay un número finito de nodos y arcos. Para saber a lo más en cuantas iteraciones termina el algoritmo nos basta con saber el número de arcos involucrados. Así por ejemplo: el número de arcos que unen $n$ nodos en una cadena es $n-1$. Consideremos que del conjunto $N^+$ es suficiente con tomar un nodo y que de éste salga un arco, análogamente al conjunto $N^-$ debe llegar un arco hacia un nodo de éste, por lo tanto a lo más el número de nodos involucrados en la cadena será $|X| - |N^+ - 1| - |N^- - 1|$. Así el número máximo de arista en la cadena compatible y por lo tanto el número máximo de iteraciones para finalizar el algoritmo serán: $|X| - |N^+ - 1| - |N^- - 1| - 1$ realizando unas sencillas operaciones tenemos $|X| - |N^+| - |N^-| + 1$.

*Ejemplo* Determinar una cadena compatible con la coloración de $N^+$ a $N^-$ donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \{10\}$



***Iteración 1.***

*Paso 1.* Sea $S = N^+ = \{1\}$ y $\theta = \varnothing$

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1,2),(1,4)\}$ y $Q^- = \{(3,1)\}$ y además $j \backsim (1,2) \in Q^+$ es verde.

*Paso 3.* Definimos: $\theta(i_2) = (1,2)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2\}$. Como aún no hemos alcanzado el nodo 10, esto es, $S \cap N^- = \varnothing$ realizaremos otra iteración.

***Iteración 2.***

*Paso 2.* Ahora $S = \{1,2\}$ entonces el corte $Q = [S, S']$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1,4),(2,3),(2,5),(2,7)\}$; $Q^- = \{(3,1)\}$, además el arco $(2,7)$ es verde.

*Paso 3.* Definimos $\theta(i_7) = (2,7)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2,7\}$. Como aún no hemos alcanzado el nodo 10, es decir, $S \cap N^- = \varnothing$ realizaremos otra iteración.

***Iteración 3.***

*Paso 2.* Ahora $S = \{1,2,7\}$ entonces el corte $Q = [S, S']$ está dado por los subconjuntos $Q^+ = \{(1,4),(2,3),(2,5),(7,5),(7,8),(7,10)\}$; $Q^- = \{(3,1)\}$, además el arco $(7,10)$ es blanco.

*Paso 3.* Definimos $\theta(i_{10}) = (7,10)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2,7,\ 10\}$. Como ya alcanzamos el nodo 10 hemos terminado, es decir, hemos encontrado una cadena compatible con la coloración, FIN.

La secuencia de la cadena fue la siguiente: 10, $\theta(i_{10}) = (7,10)$, 7, $\theta(i_7) = (2,7)$, 2, $\theta(i_2) = (1,2)$, 1.

Por lo que la cadena compatible con la coloración resultante de la red es: $P : 1 \to 2 \to 7 \to 10$.

## 1.5. Teorema de la Red Coloreada

En esta sección veremos el Teorema de la red coloreada, su justificación y la relación que tiene con el Lema de Minty.

**Teorema 1** (Teorema de la red coloreada)**.**

*Sean $N^+$y $N^- \subset X$, tales que $N^+ \cap N^- = \varnothing$. Entonces, para cualquier coloración de la red $R$ con los colores verde, blanco, negro y rojo una y solo una de las siguientes afirmaciones es válida:*

1. *El problema de la cadena coloreada tiene una solución $P$.*

2. *El problema del corte coloreado tiene una solución $Q$.*

## Justificación

En la Sección 1.3 se describe el algoritmo de la red coloreada; el cual comienza con un subconjunto $N^+ \subset S$ y una función $\theta$ vacía. Como se vio, en cada iteración se construye un corte nuevo si es que fue posible añadir un nodo a $S$, esto hasta que algún nodo de $N^-$ forme parte de $S$, en tal caso el algoritmo termina y se dice que se ha encontrado una cadena coloreada. En caso de que ya no sea posible añadir elementos de $X$ en $S$ y ningún elemento de $N^-$ forme parte de $S$, el algoritmo termina y se dice que se ha encontrado un corte compatible con la coloración. Por las razones ya expuestas, el algoritmo de la red coloreada constituye una prueba constructiva para este teorema, garantizando así la existencia de una de las afirmaciones de éste.

Otro resultado que esta íntimamente ligado al teorema de la red coloreada es el Lema de Minty que veremos a continuación, pero antes veamos la definición de corte elemental:

**Definición 12** (Corte elemental)**.**
Decimos que un *corte es elemental* si al extraer los arcos que forman el corte de la red, las componentes conexas de ésta aumentan en una unidad.

**Lema de Minty**

Dada cualquier coloración en la red R con los colores verde, blanco, negro, rojo y cualquier arco $j^*$ que sea blanco o negro una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida:

1. Existe un ciclo elemental $P$ tal que $P$ usa el arco $j^*$ y éste es compatible con la coloración.

2. Existe un corte elemental $Q$ tal que $Q$ usa el arco $j^*$ y éste es compatible con la coloración.

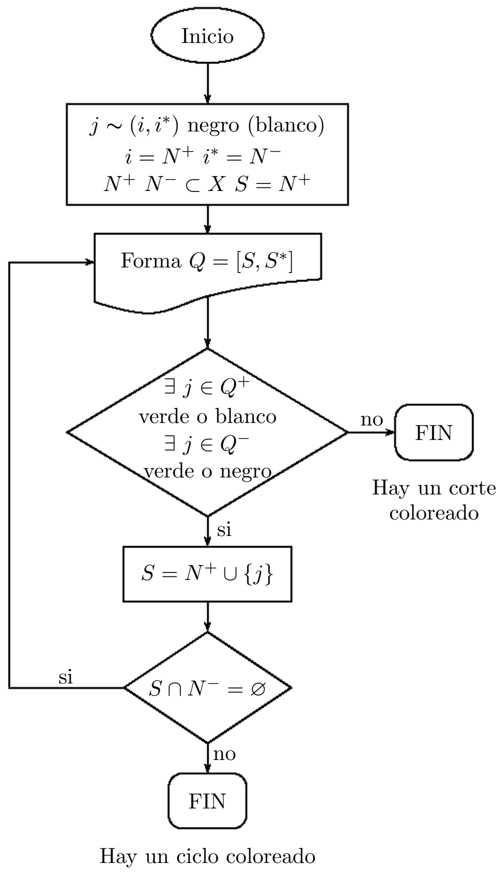
## Justificación

Sea $R = [X, A, f]$ una red y sea $j^* \backsim (i, i') \in A$ Si $j^*$ es blanco definimos $s = i'$ y $s' = i$, si es negro $s = i$ y $s' = i'$. Ahora aplicamos el algoritmo de la red coloreada a $j^*$ donde $N^+ = \{s\}$ y $N^- = \{s'\}$.

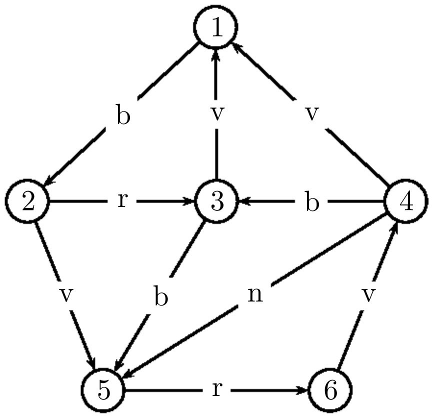
- Si al aplicar el algoritmo se determina una cadena $P : s \to s'$ ésta será compatible con la coloración, pero en esta cadena no se encuentra el arco $j^*$, por lo que la cadena $P \cup \{j^*\}$ constituyen una ciclo en la red, que cumple con ser un circuito elemental por ser compatible con la coloración, por lo tanto existe solución y el arco $j^*$ pertenece a un circuito elemental.

- Si al aplicar el algoritmo a $j^*$ encontramos un corte $Q = [S, S']$ tenemos que $j^* \in Q$ ya que $s \in S$ y $s' \notin S$, el corte es compatible con la coloración que separa $s$ de $s'$. Por lo tanto existe solución al problema del corte coloreado y el arco $j^*$ pertenece a un corte elemental.

Para el presente trabajo es de suma importancia mencionar que esta manera de proceder nos proporciona un algoritmo llamado: **el algoritmo de Minty**, el cual será usado como subrutina en los algoritmos que veremos en los siguientes capítulos. A través del siguiente diagrama de flujo podemos seguir la secuencia de éste para tener una idea más clara de cómo funciona.




*Ejemplo.* Sea $R = [X, A, f]$ la siguiente red y determínese cuál de las dos alternativas del Lema de Minty se cumple para el arco $j^* = (1, 2)$ blanco.




***Iteración 1.***

*Paso 1.* Por ser $j^*$ blanco tomamos $N^+ = \{2\}$ y $N^- = \{1\}$

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,3),(2,5)\}$ con $Q^- = \{(1,2)\}$, el arco $(2,5)$ es verde.

*Paso 3.* Sea $\theta(5) = (2,5)$ y $S = \{2,5\}$. Como $S \cup N^- = \varnothing$ realizamos otra iteración.

***Iteración 2.***

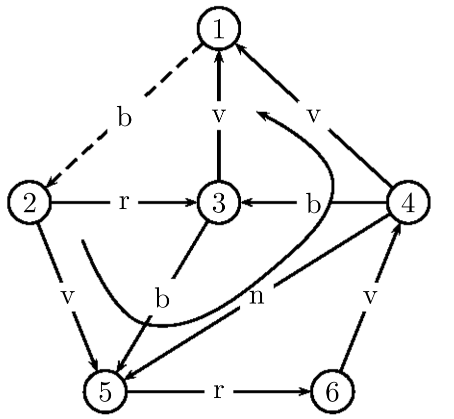
*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,3),(5,6)\}$ con $Q^- = \{(1,2),(3,5),(4,5)\}$, el arco $(4,5)$ es negro.

*Paso 3.* Sea $\theta(4) = (4,5)$ y $S = \{2,5,4\}$. Como $S \cup N^- = \varnothing$ realizamos otra iteración.

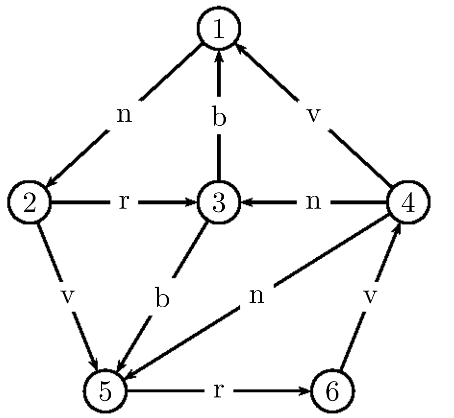
***Iteración 3.***

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,3),(4,3),(4,1),\ (5,6)\}$ con $Q^- = \{(1,2),(3,5),(6,4)\}$, el arco $(4,1)$ es verde.

*Paso 3.* Sea $\theta(1) = (4,1)$ y $S = \{2,5,4,1\}$. Como ya alcanzamos el nodo 1, FIN. $P : 2 \to 1$ es la cadena $P : 2, (2,5), 5, (5,4), 4, (4,1), 1$; así $P \cup \{(1,2)\}$ forman un ciclo elemental compatible con la coloración, el cual se puede apreciar en la siguiente figura. Por lo tanto se cumple la primera afirmación.




*Ejemplo.* Consideremos otro ejemplo en la aplicación del algoritmo de Minty: Sea $R = [X, A, f]$ la siguiente red y sea $j^* = (1, 2)$.




***Iteración 1.***

*Paso 1.* El arco $j^*$ es negro, tomamos $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \{2\}$.

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(1, 2)\}$ con $Q^- = \{(3, 1), (4, 1)\}$, el arco $(4, 1)$ es verde.

*Paso 3.* Sea $\theta(4) = (4, 1)$ y $S = \{1, 4\}$. Como $S \cap N^- = \varnothing$ realizamos otra iteración.

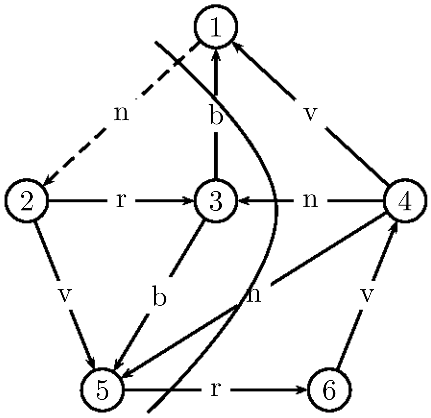
***Iteración 2.***

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(1, 2), (4, 3), (4, 5)\}$ con $Q^- = \{(3, 1), (6, 4)\}$, el arco $(6, 4)$ es verde.

*Paso 3.* Sea $\theta(6) = (6, 4)$ y $S = \{1, 4, 6\}$. Como $S \cap N^- = \varnothing$ realizamos otra iteración.

***Iteración 3.***

*Paso 2.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(1,2),(4,3),(4,5)\}$ con $Q^- = \{(3,1),(5,6)\}$, observemos que en $Q^+$ no hay arcos verdes no blancos, análogamente en $Q^-$ no hay arcos verdes ni negros por lo que ya no es posible encontrar una cadena compatible con la coloración de $N^+$ a $N^-$. Por lo tanto hemos encontrado un corte coloreado, que contiene el arco $j$ tal corte se observa en la siguiente gráfica.



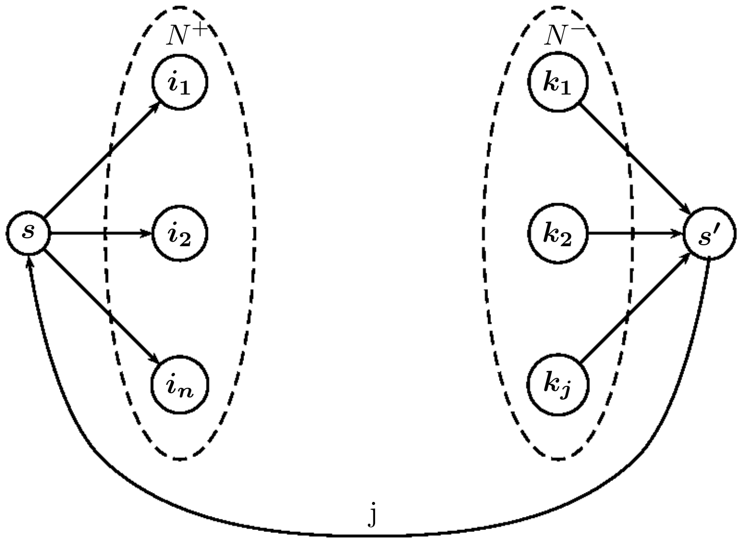

Es importante mencionar que el teorema de la red coloreada puede ser deducido a partir del Lema de Minty, veamos: Consideremos una red cualquiera, dos subconjuntos $N^+$ y $N^- \subset X$ no vacíos ajenos y una coloración definida en la red, entonces agregamos dos nuevos nodos $s$ y $s'$. El grado interior de $s$ es cero, es decir, $g^-(s) = 0$ y el grado exterior de $s$ es igual al número de nodos en $N^+$; de este modo, de $s$ saldrán arcos hacia todos los nodos de $N^+$; además, de $N^-$ saldrán arcos hacia $s'$ y también tendremos la presencia de un arco especial $j = (s', s)$, así a estos nuevos arcos los pintamos de blanco y aplicamos el Lema de Minty al arco $j = (s, s')$. Suceden una de dos cosas:

- Si $j$ pertenece a un corte compatible con la coloración, entonces no contiene a ninguno de los arcos nuevos, ya que éstos son blancos y no cumplirían con la restricción de color, lo cual nos garantiza que la red tiene un corte compatible que separa $N^+$ de $N^-$.

- Si $j$ pertenece a un ciclo compatible con la coloración se obtiene

$$P : s, (s,i), i, ..., k,\ (k,s'), s', j, s \text{ con } i \in N^+ \text{ y } k \in N^-$$

  esto quiere decir que existe una cadena compatible con la coloración de $i \in N^+$ a $k \in N^-$ $\ (P : i \to k)$, por lo tanto existe una cadena compatible que va de $N^+$ a $N^-$.




## 1.6. Aplicaciones

En esta sección veremos algunas aplicaciones tanto del lema de Minty como del teorema de la red coloreada.

### 1.6.1. Aplicaciones del Lema de Minty

#### Lema de Minty e istmo

Se dice que un arco es un istmo si por él mismo constituye un corte. Un arco es un istmo si y sólo si no hay un ciclo elemental que lo contenga. Además quitar un istmo siempre incrementa en exactamente uno el número de componentes en una red. ¿Cómo saber si un arco es un **istmo**aplicando el Lema de Minty? Consideremos una red con todos los arcos verdes, excepto uno que es de color negro (o blanco) y apliquemos el lema de Minty sobre el arco $j$ negro, entonces:

- Si el arco $j$ negro está en un corte compatible con la coloración entonces podemos afirmar que el corte está formado por un único arco, $j$; así $Q = \{j\}$ y por tanto dicho arco constituye un istmo, puesto que el resto de los arcos en la red son verdes y no pueden estar en un corte, pues violarían la restricción de color.

- Si el arco $j$ está en un ciclo compatible con la coloración, entonces podemos separar al ciclo en dos subconjuntos $C^+$ y $C^-$, donde:

$$C^+ = \{j \in C \mid j \text{ es recorrido positivamente}\} \text{ y}$$
$$C^- = \{j \in C \mid j \text{ es recorrido negativamente}\}$$

  de este modo, $j \in C^-$ pues es negro, lo cual quiere decir que $j$ no es un istmo.

#### Lema de Minty y redes acíclicas

Usando el Lema de Minty podemos verificar si una red es acíclica (no tiene circuitos) si y sólo si todo arco pertenece a algún corte. Sea $R = \{X, A, c\}$ una red con todos los arcos de color negro. Sea $j_k = (i_k, i_{k+1})$ un arco negro $\forall j_k \in A$ con $k = 1, ..., n$, apliquemos el Lema de Minty a cualquier arco $j_k$ en la red, entonces puede suceder que:

- El arco $j_k$ está en un corte compatible con la coloración para cualquier $j_k$ en la red. Esto significa que todo arco en la red pertenece a un corte y por lo tanto la red no contiene circuitos.

- Existe un $j_k$ en la red que pertenece a un ciclo compatible con la coloración. Es decir, todos los arcos que pertenecen al ciclo, por ser negros están en $C^-$, lo cual constituye un circuito recorrido en sentido contrario al establecidos por los arcos, por lo que podemos concluir que la red no es acíclica.

### 1.6.2. Conexidad

Una propiedad importante que deben cumplir las redes con las que trabajamos es la de conexidad; intuitivamente cuando escuchamos dicha palabra pensamos en cosas que están unidas o conectadas. Como nuestro interés se avoca en gráficas conexas, veamos su definición.

**Definición 13** (Gráfica conexa)**.**
*Se dice que una gráfica es* conexa *si para cualquier par de nodos existe una cadena que los une, esto es:* $\forall \; i_0$ *e* $i_k \in X$, $\exists$ *una cadena* $P : i_0,\, j_0,\, i_1,\, j_1, ...,\, j_{k-1},\, i_k$ *tal que los une.*

#### Algoritmo de la red coloreada y gráficas conexas

Esta propiedad es fácilmente verificable en cualquier gráfica aplicando el algoritmo de la red coloreada haciendo las modificaciones adecuadas. Si deseamos saber si una gráfica es conexa debemos seguir los pasos que a continuación se muestran:

1. Colorear todos los arcos de la red con color verde.

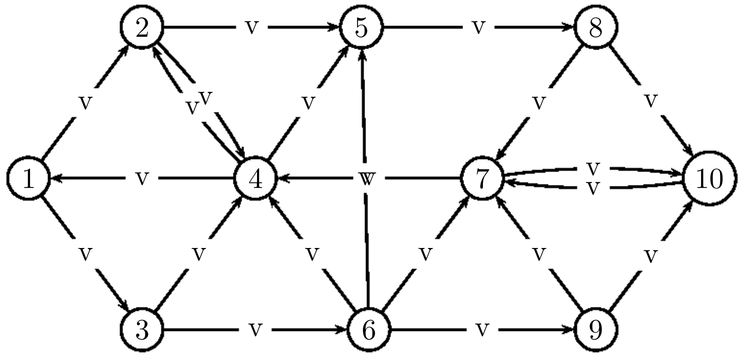
2. Seleccionar cualquier nodo $s$ de la red.

3. Aplicar el algoritmo de la red coloreada, donde $N^+ = s$, $N^- = \varnothing$.

    *a*) Si $S = X$, FIN. La gráfica $G$ es conexa.

    *b*) Si no, entonces los nodos en $S$ junto con los arcos incidentes en tal conjunto forman una componente conexa de $G$ que contiene a $s$. Escoger cualquier otro nodo $s' \in X \setminus S$ e ir a 3. De este modo encontraremos todas las componentes conexas de $G$.

*Ejemplo.* Aplicando los pasos anteriormente descritos veamos si la siguiente gráfica es conexa o no.



***Iteración 1.***

*Paso 1.* Coloreamos todos los nodos de la red de verde.

*Paso 2.* Sea $s = \{1\}$.

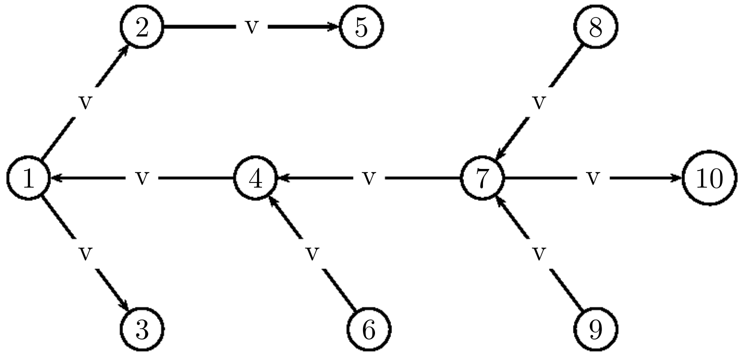
*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de la red coloreada donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \varnothing$. El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q = \{(1,2), (4,1), (1,3)\}$ donde $Q^+ = \{(1,2), (1,3)\}$ y $Q^- = \{(4,1)\}$ pero como todos los arcos son verdes, se define: $\theta(i_2) = (1,2)$, $\theta(i_3) = (1,3)$, $\theta(i_4) = (4,1)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2,3,4\}$. Como ningún elemento de $S$ pertenece a $N^-$ realizaremos otra iteración.

***Iteración 2.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,5), (4,5), (3,6)\}$ con $Q^- = \{(7,4), (6,4)\}$, todos los arcos son verdes, se define: $\theta(i_5) = (2,5)$ , $\theta(i_7) = (7,4)$ , $\theta(i_6) = (6,4)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Como ningún elemento de $S$ pertenece a $N^-$ realizaremos otra iteración.

***Iteración 3.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(7,10), (6,9)\}$ con $Q^- = \{(8,5), (8,7), (10,7), (9,7)\}$, todos los arcos son verdes, se define: $\theta(i_8) = (8,7)$ , $\theta(i_9) = (9,7)$ , $\theta(i_{10}) = (7,10)$ y actualizamos al conjunto $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Observemos que $S = X$ por lo tanto hemos terminado, podemos concluir que la gráfica es conexa y se muestra en la siguiente figura.




Las cadenas compatibles con la coloración son:

$$
\begin{aligned}
&P: 1 \leftarrow 4 \leftarrow 7 \leftarrow 8.\\
&P: 1 \leftarrow 4 \leftarrow 7 \rightarrow 10.\\
&P: 1 \leftarrow 4 \leftarrow 7 \leftarrow 9.\\
&P: 1 \leftarrow 4 \leftarrow 6.\\
&P: 1 \rightarrow 3.\\
&P: 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5.
\end{aligned}
$$

### Algoritmo de la red coloreada y gráficas fuertemente conexas

Otra propiedad importante para gráficas es la de *conexidad fuerte.*

**Definición 14** (Gráfica fuertemente conexa)**.**
*Decimos que una gráfica es fuertemente conexa si para cualquier par de nodos en ella, existe un camino que los une.*

¿Cómo saber si una gráfica es fuertemente conexa? El procedimiento a seguir es análogo a lo hecho con las gráficas conexas, es importante mencionar que el algoritmo que describiremos a continuación se divide en tres partes; en la primera se construye un camino desde el nodo arbitrariamente escogido $s$ a $N^-$; en la segunda parte se construye un camino cuyos arcos son recorridos en sentido contrario al establecido por los arcos, desde $s$ hasta $N^-$. Es por ello que en la primera parte los arcos son blancos y en la segunda son de color negro; finalmente en la tercera parte del algoritmo se detectan las componentes fuertemente conexas de la gráfica.

*Parte I: Construir un camino de $s$ a $N^-$.*

1. Colorear todos los arcos de la red blancos.

2. Seleccionar cualquier nodo de la red $s$.

3. Aplicar el algoritmo de la red coloreada, donde $N^+ = s$, $N^- = \varnothing$. Esto nos dará un $\theta - enrutamiento_w$ asociado a un conjunto de nodos $S_w$.

*Parte II: Construir un camino en sentido contrario desde s hasta $N^-$.*

1. Colorear todos los arcos de la red original negros.

2. Aplicar el algoritmo de la red coloreada, donde $N^+ = s$, $N^- = \varnothing$. Esto nos dará un $\theta - enrutamiento_b$ asociado a un conjunto de nodos $S_b$.

*Parte III: Determinar las componentes fuertemente conexas.*

1. Hacer $S = S_w \cap S_b$

2. Si $S = X$, entonces $G$ es fuertemente conexa.

3. Si no, $S$ nos da una componente fuertemente conexa de $G$ que contiene a $s$.

En esta tercera parte vemos que todos los nodos en $S_w$ son aquellos que pueden ser alcanzados por un camino positivo desde $s$, donde los nodos en $S_b$ son por los cuales $s$ puede ser alcanzado por un camino positivo. Así $S = S_w \cap S_b$ está comprendido de todos los nodos que están fuertemente conectados a $s$.

*Ejemplo.* Veamos la aplicación del algoritmo de la red coloreada considerando la gráfica del ejemplo anterior, para saber si ésta es fuertemente conexa o cuantas componentes fuertemente conexas hay en ella.
*Parte I*

***Iteración 1.***

*Paso 1.* Coloreamos todos los nodos de la red de blanco.

*Paso 2.* Sea $s = \{1\}$ .

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de la red coloreada donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \varnothing$. El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q = \{(1,2),(4,1),\ (1,3)\}$ donde $Q^+ = \{(1,2),(1,3)\}$ y $Q^- = \{(4,1)\}$; tomando los arcos blancos, se define: $\theta(i_2) = (1,2)$, $\theta(i_3) = (1,3)$ y actualizamos al conjunto $S_w = \{1,2,3\}$. Como $N^- = \varnothing$ quiere decir que hay que seguir iterando hasta que ya no podamos llegar a ningún nodo.

***Iteración 2.***

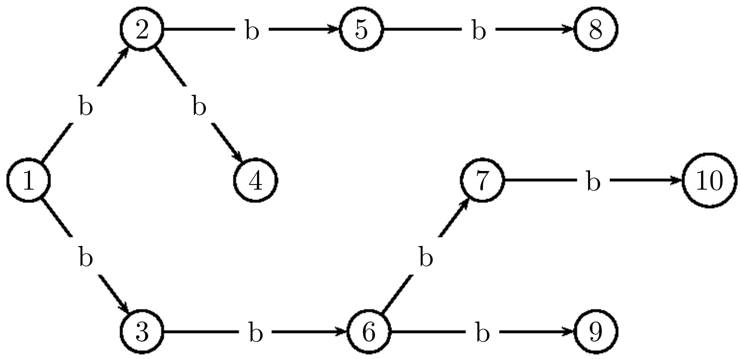
*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,5),(2,4),(3,4),\ (3,6)\}$ con $Q^- = \{(4,1),(4,2)\}$; tomando los arcos blancos, se define: $\theta(i_5) = (2,5)$ , $\theta(i_4) = (2,4)$ , $\theta(i_6) = (3,6)$, actualizamos al conjunto $S_w = \{1,2,3,4, 5,6\}$. Como aún podemos seguir hacemos otra iteración

***Iteración 3.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(5,8), (6,7), (6,9)\}$ con $Q^- = \{(7,4)\}$; tomando los arcos blancos, se define: $\theta(i_8) = (5,8)$ , $\theta(i_7) = (6,7)$, $\theta(i_9) = (6,9)$ actualizamos al conjunto $S_w = \{1,2,3,4,5,6,7,\ 8,9\}$. Como aún podemos seguir hacemos otra iteración

***Iteración 4.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(7,10), (8,10),\ (9,10)\}$ con $Q^- = \{(10,7)\}$; tomando los arcos blancos, se define: $\theta(i_{10}) = (7,10)$ actualizamos al conjunto $S_w = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\ 9,10\}$. Como ya no es posible llegar a otro nodo , hemos terminado con la Parte I, dando como resultado la siguiente gráfica.




*Parte II*

***Iteración 1.***

*Paso 1.* Coloreamos todos los nodos de la red de negro.

*Paso 2.* Sea $s = \{1\}$.

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de la red coloreada donde $N^+ = \{1\}$ y $N^- = \varnothing$. El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q = \{(1,2), (4,1),\ (1,3)\}$ donde $Q^+ = \{(1,2), (1,3)\}$ y $Q^- = \{(4,1)\}$; tomando los arcos negros, se define: $\theta(i_4) = (4,1)$ y actualizamos al conjunto $S_b = \{1,4\}$. Como $N^- = \varnothing$ quiere decir que hay que seguir iterando hasta que ya no podamos llegar a ningún nodo.

***Iteración 2.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(1,2),(1,3),(4,2),\ (4,5)\}$ con $Q^- = \{(2,4),(3,4),(6,4),(7,4)\}$; tomando los arcos negros, se define: $\theta(i_4) = (2,4)$ , $\theta(i_4) = (6,4)$ y actualizamos al conjunto $S_b = \{1,4,2,6\}$. Como aún podemos seguir hacemos otra iteración

***Iteración 3.***

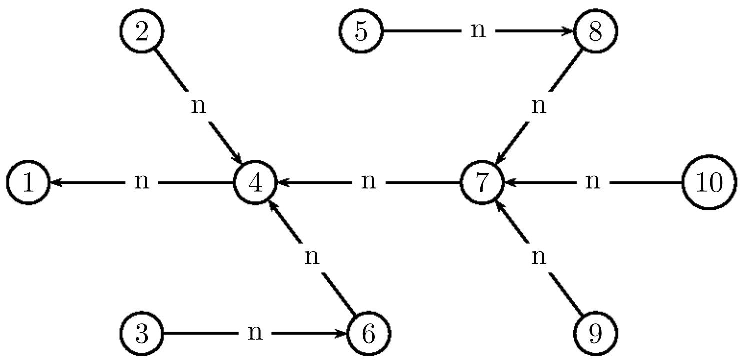
*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(1,3),(2,5),(4,5),(6,5),$ $(6,7),(6,9)\}$ con $Q^- = \{(3,4),(3,6),(7,4)\}$; tomando los arcos negros, se define: $\theta(i_6) = (3,6)$ , $\theta(i_4) = (7,4)$, actualizamos al conjunto $S_b = \{1,4,2,6,3,$ $7\}$. Aún podemos hacer otra iteración.

***Iteración 4.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,5),(4,5),(6,5),(6,9),$ $(7,10)\}$ con $Q^- = \{(8,7),(9,7),(10,7)\}$; tomando los arcos negros, se define: $\theta(i_7) = (10,7)$ , $\theta(i_7) = (8,7)$ , $\theta(i_7) = (9,7)$actualizamos al conjunto $S_b = \{1,2,3,4,6,7,8,9,10\}$. Aún podemos seguir, por lo tanto hacemos otra iteración

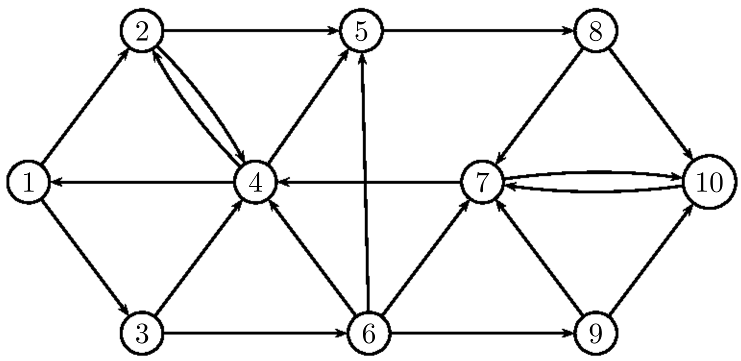
***Iteración 5.***

*Paso 3.* El corte $Q = [S, S']$ está formado por $Q^+ = \{(2,5),(4,5),(6,5)\}$ con $Q^- = \{(5,8)\}$; tomando los arcos negros, se define: $\theta(i_8) = (5,8)$, actualizamos al conjunto $S_b = \{1,2,3,4,6,7,8,9,10,5\}$. Como ya no es posible llegar a otro nodo hemos terminado la Parte II, dando como resultado la siguiente gráfica.



*Parte III*

Haciendo $S = S_b \cup S_w$ tenemos $S = X$ por lo tanto la gráfica es fuertemente conexa.




### 1.6.3. Algoritmo de la red coloreada y el conjunto $S$

Una manera de saber cuál es el conjunto $S$ en una red, es aplicando el algoritmo de la red coloreada como veremos a continuación, lo cual surgió de la siguiente proposición:

Sea $Q$ un corte no vacío y sea $R$ una red conexa. Pruebe que el conjunto $S$ tal que $[S, N \setminus S]$=$Q$ es único.

La siguiente prueba además de garantizar la unicidad de $S$ constituye una metodología para determinar $S$.

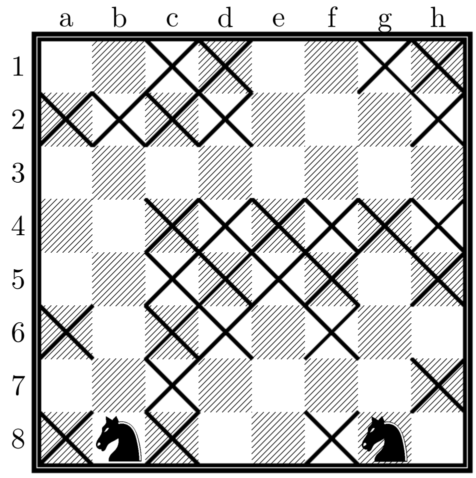
*Demostración.* Empecemos por colorear los arcos del corte $Q$ con rojo, todos los demás en la red de color verde y apliquemos el algoritmo de la red coloreada comenzando por algún arco que salga de $N^+$. Como la red es conexa y los arcos son verdes (excepto los del corte) al aplicar el algoritmo,en cada iteración vamos a ir añadiendo un nodo al conjunto $S$ hasta llegar a los arcos de $Q$, en ese momento vamos a encontrar al menos una cadena que une a todos los nodos de $N^+$ y algunos otros que se encontraban unidos a éstos a través de arcos verdes y que al mismo tiempo no pasan por $Q$. Así hemos construido el conjunto $S$.

Ahora veamos la justificación de que $S$ es único.

Supongamos que $S$ no es único, es decir, supongamos que existe un conjunto $S^*$ que difiere de $S$ en al menos un elemento,entonces en el conjunto de arcos de la forma $[S^*, N \setminus S^*]$ hay al menos un arco verde, contradicción, pues en un corte compatible con la coloración no puede haber arcos verdes, por lo tanto $S$ es único $\square$

### 1.6.4. Algoritmo de la red coloreada y el ajedrez

Recordemos la pregunta con la que iniciamos este capítulo: ¿Cómo pasar de un lugar a otro? Sin lugar a dudas hemos visto durante el desarrollo de éste que la respuesta a esta pregunta ha sido resuelta una vez que conocimos el algoritmo de la red coloreada, el cual da una cadena coloreada si es que la solución existe. Pues bien, imaginemos que tenemos un tablero de ajedrez, el cual contiene solo una pieza: el caballo, el cual se encuentra en la posición $8g$ y se desea saber cuál es el camino que debe seguir si quiere llegar a la posición $8b$ a través de una serie de movimientos, pero con ciertas restricciones sobre el tablero, es decir habrá casillas en las cuales no podrá posicionarse. Recordemos también que el caballo tiene una forma especial de avanzar, sus movimientos son en forma de L, es decir, dada la posición del caballo éste puede posicionarse en algún cuadrado que se encuentre a dos casillas a la derecha (izquierda) y una hacia arriba (abajo), o bien, una casilla a la derecha (izquierda) y dos hacia arriba (abajo), o bien, dos casillas hacia arriba (abajo) y una hacia la derecha (izquierda), o bien, una hacia arriba (abajo) y dos hacia la derecha (izquierda). Las restricciones se muestran sobre el siguiente tablero y las casillas marcadas con un tache son aquellas sobre las cuales no puede caer el caballo.



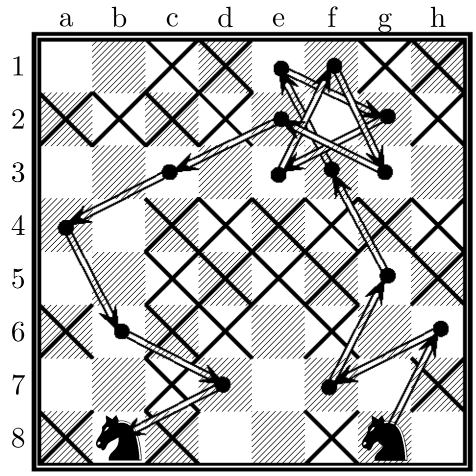

En términos de gráficas, consideremos que cada casilla del tablero representa un nodo sobre una red, los arcos de ésta estarán dados del siguiente modo: sean $x, y$ cualesquiera dos casillas del tablero, decimos que existe $j = (x, y)$ si dado un caballo en la posición $x$ puede avanzar a la posición $y$ y le será asignado el color verde, puesto que el caballo podrá moverse de $x$ a $y$, o bien de $y$ a $x$. Los nodos adyacentes a cada posición $x$ o $y$ serán rojos puesto que éstos movimientos no son posibles, para este ejemplo no consideraremos los arcos blancos ni negros, puesto que dada la naturaleza del movimiento del caballo, éste puede ser en ambos sentidos. Así en cada iteración iremos construyendo una cadena compatible con la coloración. La gráfica que acabamos de plantear no será dibujada puesto que sería exhaustivo y no grato a la vista. Pero entonces ¿cómo lo resolveremos? Muy sencillo usando el algoritmo de la red coloreada:

1. Definamos a $S = N^+$ como la casilla $8g$ y que $N^-$ sea igual a la casilla $8b$.

2. Existe un arco $j \in Q$ tal que sea verde. Por ejemplo, estando en la posición $8g$ el corte $Q$ está dado por $\{(8g, 8f), (8g, 7f), (8g, 7g), (8g, 7h), (8g, 8h), (8g, 6f), (8g, 7e), (8g, 6h)\}$ donde los seis primeros arcos son de color rojo; los cinco primero por ser adyacentes a la casilla $8g$ y el sexto por ser restricción del tablero, los últimos dos arcos son de color verde, de modo que tomamos cualquiera de éstos.

3. El cual es añadido a $S$ y lo etiquetamos como $\theta(6h) = (8g, 6h)$, así $S = N^+ \cup \{6h\}$, procediendo así hasta llegar a que $S \cap N^- = \varnothing$, sino entonces regresamos al Paso 2.

De este modo encontramos que la solución se encuentra en la siguiente gráfica, donde por supuesto todos los arcos son verdes.




Podemos observar que el camino a seguir desde la posición $8g$ hasta la $8b$ debe ser: $P : 8g \to 6h \to 7f \to 5g \to 3f \to 1e \to 2g \to 3e \to 1f \to 3g \to 2e \to 3c \to 4a \to 6b \to 7d \to 8b$, pero si quisiéramos empezar desde la posición $8b$ y llegar a $8g$ basta con recorrer el camino en sentido contrario a la flecha de cada arco.

# 2

# Factibilidad a color

El presente capítulo estará dedicado al estudio de la factibilidad de un flujo con respecto a dos restricciones: capacidad y oferta. Los teoremas de coloración en gráficas serán utilizados para determinar tal flujo factible. Ellos constituyen subrutinas del algoritmo de rectificación de flujo. Así mismo se introduce un nuevo concepto: el de diferencial. Se analizará también, de manera paralela a la de flujo, la factibilidad de este último con respecto a restricciones llamadas de generación. De nuevo, se utilizarán los teoremas de coloración y se verá un algoritmo de rectificación de tensión para construir un diferencial factible. Lo anterior sienta las bases para lo que veremos en el siguiente capítulo. Comencemos con algunas definiciones.

## 2.1. Flujo Factible

Hablar de flujo factible en una red es plantear problemas donde la red en cuestión puede representar un sistema de oleoductos, una carretera, un sistema férreo, etcétera, donde lo que pasa a través de dichos sistemas; petróleo, autos, personas, etcétera. es lo que llamaremos *flujo* y diremos que es *factible* si satisface ciertas restricciones; por ejemplo que la cantidad de petróleo que pasa por los ductos del sistema tenga una valor mínimo y un valor máximo.

**Definición 15.** (Flujo Factible).
Un flujo factible es una función definida sobre los arcos a los números reales, es decir; $f : A \rightarrow R$ y diremos que es factible si y sólo si:

1. $\Sigma_{j\in\Gamma^+(i)} f(i,j) - \Sigma_{k\in\Gamma^-(i)} f(k,i) = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s,t \\ -v & \text{si } i = t \end{cases}$

2. $0 \leq f(i,j) \leq q(i,j) \quad \forall (i,j) \in A$

donde al nodo $s$ le llamamos *origen* o *fuente* y el nodo $t$ será el nodo *destino* o *sumidero*, es decir, la cantidad de flujo que pasa a través de la red se origina en $s$ y debe llegar a $t$. Además cabe mencionar que $q : A \rightarrow R$ es una función que denota la máxima capacidad del arco (i,j). Las ecuaciones que acabamos de introducir son llamadas *ecuaciones de conservación de flujo.*

Hasta ahora hemos visto la definición de flujo factible pero más aún nos interesa saber cómo encontrar un flujo factible en una red, en caso de que exista. Imaginemos un ejemplo donde lo que se desea es transportar una cierta cantidad de petróleo a través de un sistema de oleoductos desde un punto origen a otro punto destino, dicho sistema es representado por una red, donde hay uno o varios orígenes que van a tener una cierta cantidad de petróleo a la cual denominaremos *oferta* y uno o varios nodos destino los cuales tienen *demanda.* Los ductos, que estarán representados por los arcos en la red tienen determinadas restricciones de capacidad; con esto establecemos la cantidad inferior y superior de petróleo (flujo) a través de cada arco, de modo que se satisfagan las restricciones de oferta y demanda. Nuestro dilema ahora consiste en determinar una cantidad de flujo inicial que no viole las restricciones del problema, lo cual nos conduce a formular el problema de flujo factible. Deseamos determinar un flujo $x$ tal que

$$\begin{array}{c} x(j) \in C(j) \quad \forall j \in A \\ y(i) \in C(i) \quad \forall i \in X \end{array}$$

donde:
$C(j)$ es el intervalo de capacidad para el arco $j$.
$C(i)$ es el intervalo de oferta para el nodo $i$.
Un caso especial es cuando $C(i)$ consta de un sólo punto al que denotaremos $b(i)$.
$b(S) = \Sigma_{i \in S} b(i)$ es la cantidad de oferta del subconjunto de vértices $S$, $S \subset X$.
La función $b$ recibe el nombre de función de oferta, entendiéndose como demanda una oferta negativa.

Aquí es importante mencionar otro concepto que usaremos con frecuencia, pero primero ampliemos nuestra visión acerca del flujo que pasa a través de los arcos suponiendo que también es posible encontrar en una red flujos negativos, donde una interpretación a ésto sería flujo que pasa en sentido contrario al establecido por la dirección del arco. Pero, ¿cómo saber que cantidad de flujo es la que ”sale”de un nodo? Pues bien, basta con sumar los flujos $x(j) > 0$ tales que $e_{(i,j)} = 1$ más la suma de los flujos $x(j) < 0$ tales que $e_{(i,j)} = -1$, donde $e_{(i,j)}$ es la entrada $(i,j)$ de la matriz de incidencia de la red, de manera análoga podemos decir que la cantidad de flujo que ”‘llega”’ a un nodo es la suma de los flujos $x(j) > 0$ tales que $e_{(i,j)} = -1$ más la suma de los flujos $x(j) < 0$ tales que $e_{(i,j)} = 1$, de aquí que la suma de todos los términos $e_{(i,j)}x(j)$ es la cantidad de flujo que se genera en el nodo $i$, lo cual recibe el nombre de *divergencia del flujo $x$ en el nodo $i$* denotándose por: $y(i)$, es decir:

$$y(i) = \Sigma_{j \in A} e_{i,j} x(j)$$

Al vector de componentes $y(i)$ con $i \in X$ se le denota $div(x)$ o simplemente $y$.

Anteriormente habíamos hablado del nodo *origen* o *fuente* y del nodo *destino* o *sumidero* en términos de oferta y demanda, pero en términos del concepto de divergencia podemos decir que un nodo es *origen* si $y(i) > 0$ y un nodo es *destino* si $y(i) < 0$. Diremos que el flujo se conserva en el nodo si sucede que $y(i) = 0$.
Es posible escribir las ecuaciones de conservación de flujo en términos de la divergencia:

$$\begin{aligned} y(s) &= v \text{ si } i = s \\ y(i) &= 0 \ \ \forall i \neq s, t \\ y(t) &= -v \text{ si } i = t \end{aligned}$$

Cabe resaltar que la cantidad de flujo que se genera en los orígenes es igual a la cantidad de flujo que hay en los destinos y a este principio se le conoce con el nombre de *Principio de Divergencia Total*, el cual enunciaremos a continuación:

**Principio de Divergencia Total**

En una red $R$ se cumple que:

$$\Sigma_{i \in X} y(i) = 0$$

donde $y = div(x)$

*Demostración.* $\Sigma_{i \in X} y(i) = \Sigma_{i \in X} \Sigma_{j \in A} e_{i,j} x(j) = \Sigma_{j \in A} x(j) \Sigma_{i \in X} e_{i,j} = 0$ □

Hablar del problema de flujo factible es equivalente a hablar del problema de distribución factible, el cual dice: Dados los intervalos de capacidad $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$ para todo arco $j$ y los valores de oferta $b(i)$ para todo nodo $i$ deseamos determinar un flujo $x$ tal que:

$$\begin{array}{ll} c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) & \forall j \in A \\ y(i) = b(i) & \forall i \in X \end{array}$$

donde: $(y = div(x))$

**Definición 16.** (circulación).
Un caso especial de flujo en una red es aquel que cumple: $div(x) = 0$, es decir, todos los nodos de la red son nodos intermedios. A tal flujo se le conoce como *circulación*.

Recordemos del capítulo uno que un *corte* $Q$ es un conjunto de arcos tales que si los quitamos de la red, ya no encontraremos una cadena que una al origen del destino. Ahora bien, en la búsqueda de solución al problema de flujo factible es posible que ésta no exista, en tal caso nos interesa saber cuál es el *flujo a través del corte*.

**Definición 17.** (flujo a través de un corte).

El flujo a través de un corte es aquel que cumple que para todo $j \in Q$ sucede: $x(j) = c^{-}(j)$ si $j \in Q^{-}$ y $x(j) = c^{+}(j)$ si $j \in Q^{+}$. De este modo:

$$c^{+}(Q)\text{=[flujo a través Q]} = \Sigma_{j\in Q^{+}} x(j) \text{ - } \Sigma_{j\in Q^{-}} x(j)$$

En líneas anteriores mencionamos que nos interesaba encontrar un flujo factible si es que éste existía, pues bien, el *Teorema de distribución factible* establece condiciones bajo las cuales se puede garantizar la existencia de tal flujo. Más aún, la demostración constructiva de éste proporciona un algoritmo para construir el flujo deseado.

**Teorema 2** (Teorema de Distribución Factible)**.**

*El problema de distribución factible tiene solución si y sólo si:*

$$b(X) = 0 \textit{ y } b(S) \leq c^{+}(Q) \textit{ para todos los cortes } Q = [S, X \diagdown S]$$

La demostración de este teorema es constructiva y la constituye el algoritmo que veremos más adelante.

### Algoritmo de rectificación de flujo

Recurriremos a este algoritmo cuando solamente se desee resolver el problema de un flujo factible en una red, donde se tienen restricciones de divergencia, es decir, hay que satisfacer las ofertas y demandas de cada nodo, las cuales por cierto deben ser iguales; así comenzamos a enviar un flujo que podrá o no ser factible con respecto a los intervalos de capacidad de cada arco, pero al menos ya cumple las restricciones de oferta, lo que corresponde ahora al algoritmo es dar la mejor distribución de dicho flujo a través de toda la red en cada iteración hasta encontrar el factible si es que éste existe.

*Objetivo:* Resolver el problema de distribución factible.
*Descripción*

*Paso 1.* Determinar un flujo $x$ factible con respecto a las restricciones de oferta, es decir, tal que $div(x) = b$

*Paso 2.* Sean

$$A^{+} = \{j \in A | x(j) > c^{+}(j)\} \; A^{-} = \{j \in A | x(j) < c^{-}(j)\}.$$

1. Si $A^{+} = A^{-} = \varnothing$ entonces $x$ es la solución deseada. FIN.
2. Si $\exists\, j^{*} \in A^{+}$ o $\exists\, j^{*} \in A^{-}$ colorear los arcos de la red de la siguiente manera:

| | | |
|---|---|---|
| verde | si | $c^{-}(j) < x(j) < c^{+}(j)$ |
| blanco | si | $x(j) \leq c^{-}(j), x(j) < c^{+}(j)$ |
| negro | si | $x(j) \geq c^{+}(j), x(j) > c^{-}(j)$ |
| rojo | si | $c^{-}(j) = x(j) = c^{+}(j)$ |

ir al Paso 3.

*Paso 3.* Aplicar el algoritmo de Minty a la red coloreada.

1. Si se determina un ciclo elemental $P$ compatible con la coloración que contenga a $j^*$ calcular:

$$\alpha = Min \begin{cases} c^+(j) - x(j) & j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & j \in P^- \\ x(j^*) - c^-(j^*) & si\ j^* \in A^+ \\ c^+(j^*) - x(j^*) & si\ j^* \in A^- \end{cases}$$

   Hacer $x = x + \alpha e_p$ e ir al Paso 2.

2. Si se determina un corte $Q = [S, S*]$ compatible con la coloración que contenga a $j^*$ terminar ya que en este caso no existe solución al problema.

Si recordamos, en el capítulo uno, posterior a la definición de coloración, explicamos por qué el color de los arcos que constituyen una cadena coloreada es así, en el algoritmo de rectificación de flujo esta coloración se preserva con la intención de construir ciclos (cadenas coloreadas cuyo nodo inicial y final coincidan) que permitan distribuir el flujo. Los arcos que son pintados de verde tienen la posibilidad de ser recorridos en ambos sentidos lo cual quiere decir que el flujo que pase a través éstos se encuentra dentro de las restricciones de capacidad y por ello este último puede aumentar o disminuir. Los arcos blancos sólo se recorren en el sentido del arco, es decir, si un arco es pintado de blanco es porque sólo puede aumentar la cantidad de flujo que pase a través de éste. Análogamente, los arcos negros se recorren en sentido contrario al establecido por el arco y quiere decir que el flujo a través de éste sólo puede disminuir. Finalmente arcos rojos indican que sólo pasa exactamente la cantidad de flujo que es igual a la capacidad inferior y superior.

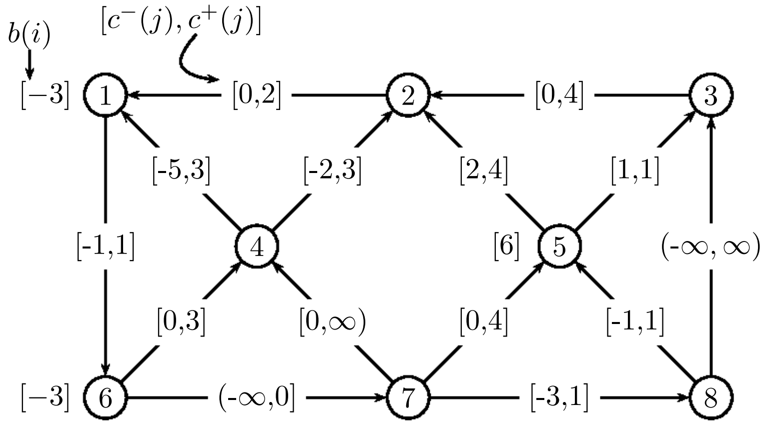
Observemos que los ciclos pueden estar formados por arcos de color verde, o blanco, o negro, o los tres, o sólo dos de ellos. En cambio, los cortes pueden estar formados por arcos de color blanco, o negro, o rojo, o los tres, o sólo dos de ellos.

### Justificación

Observemos que el algoritmo en el Paso 3 debe cumplir una de dos opciones para la red en cuestión: Si hay un ciclo $P$ compatible con la coloración, quiere decir que por los arcos que forman a $P$ es posible enviar más flujo o regresarlo, eso dependerá de si los arcos se encuentran en $P^+$ o en $P^-$, dicho de otro modo $c^+(j) - x(j) > 0$ para todo $j \in P^+$ y $x(j) - c^-(j) > 0$ para todo $j \in P^-$, además debemos saber como será el flujo para $j^*$, si éste se encuentra en $A^+$ quiere decir que el flujo que pasa a través de él es mayor a su cota superior y si se encuentra en $A^-$ es porque el flujo que pasa a través de él es menor a su cota inferior, por ésto y la manera de calcular $\alpha$ es posible afirmar que ésta es finita y además garantiza que para el nuevo flujo $x' = x + \alpha e_P$ , éste será menor a su cota superior para $j \in P^+$ y será mayor a su cota inferior si $j \in P^-$ mientras que el flujo para los arcos fuera de $P$ permanece igual. También es posible decir que en cada iteración un arco $j^* \in A^+ \cup A^-$ sale del conjunto, pero, en caso de que $A^+ \cup A^-$ sea el mismo que en la iteración anterior, la diferencia radica en que el flujo que pasa por el arco $j^* \in A^+ \cup A^-$ de la iteración anterior, se encuentra más cerca de sus cotas inferior o superior, según sea el caso, es decir, el flujo $x'$ viola menos las restricciones de capacidad que $x$. Además como $P$ es un ciclo se cumple que $div(e_P) = 0$ por ello $div(x') = div(x) + \alpha \cdot div(e_P) = div(x) = b$, es decir, el nuevo flujo $x'$ cumple con las restricciones de oferta. El algoritmo termina en número finito de iteraciones si $c^+$, $c^-$ y los valores iniciales de $x(j)$ son conmensurables, es decir, son múltiplos de una cierta cantidad $\beta > 0$, así como la generación de flujo está determinada por la oferta entonces $b(i)$ también es conmensurable, de este modo en cada iteración el flujo generado será un múltiplo de $\beta > 0$. Así también, las reducciones o aumentos (según sea el caso) de flujo para los arcos en $A^+ \cup A^-$ son de al menos $\beta$. Como sólo es posible una reducción finita y hay un número finito de arcos que violan las restricciones de capacidad entonces podemos concluir que el algoritmo termina en un número finito de iteraciones.

En caso de que en el Paso 3 lo que suceda es que encontremos un corte compatible con la coloración, querrá decir que el flujo para los arcos que salen del corte es mayor o igual a su capacidad, ($x(j) \geq c^+(j)$ para todo $j \in Q^+$) puesto que son de color negro o rojo, en caso de ser negros sólo es posible regresar flujo en caso de que sean rojos no es posible ni aumentar ni disminuir, los arcos que entran al corte son blancos o rojos, en caso de ser blancos quiere decir que el flujo a través de ellos debe aumentar, pues éste es menor o igual a su cota inferior,($x(j) \leq c^-(j)$ para todo $j \in Q^-$), para $j^* \in A^+ \cup A^-$ que forma parte del corte su flujo se encuentra por arriba o por abajo de sus restricciones de capacidad, por lo que el flujo a través del corte será mayor que la capacidad del corte, como la cantidad de flujo a través de la red es justo la oferta estaría sucediendo que la oferta sobrepasa la capacidad de la red y por lo tanto no habría solución al problema, es decir, $c^+(Q) < \Sigma_{j \in Q^+} x(j) - \Sigma_{j \in Q^-} x(j) =$ [flujo a través de $Q$]=[$div(x)$ desde S]=$b(S)$.

*Ejemplo.* Veamos cómo se utiliza el algoritmo anterior, encontrando una distribución factible en la siguiente red; en la cual los intervalos asociados a cada arco representan las restricciones de capacidad de flujo, el número a lado de cada nodo representa la oferta en caso de que éste sea positivo y será la demanda en caso contrario, si no hay dicho número se considera que es cero y además a esos nodos se les llama intermedios; todo el flujo que entra a ellos debe salir.

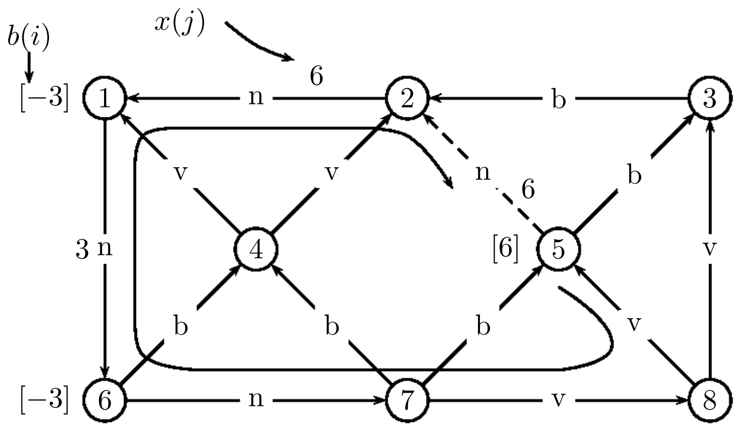



***Iteración 1.***

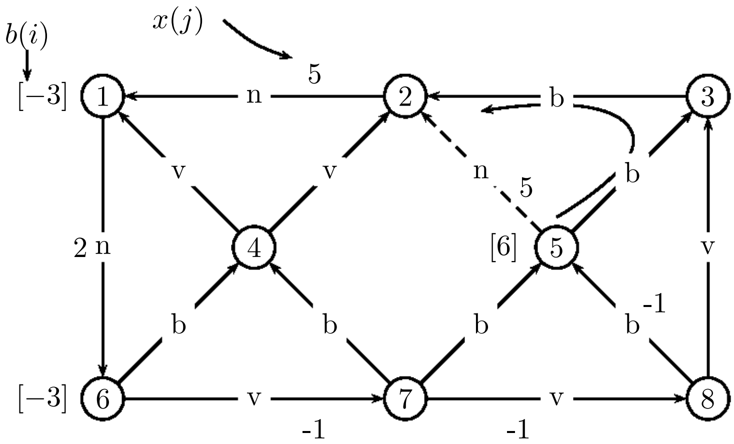
*Paso 1.* Determinamos un flujo factible con respecto a la oferta. Las seis unidades de flujo que ofrece el nodo 5, que además es el único nodo con oferta; las enviamos por los siguientes arcos: $(5,2),(2,1)$ de este modo al nodo 1 le llegan seis unidades de flujo, de las cuales sólo demanda tres, por lo que las otras tres unidades de flujo las enviamos por el arco $(1,6)$, así al nodo 6 le llega la demanda requerida. A través de los demás arcos el flujo permanece igual y éste se muestra en la siguiente figura.

*Paso 2.* $A^+ = \{(1,6),(2,1)(5,2)\}$ y $A^- = \{(5,3)\}$. Escogemos $j^* = (5,2)$. Coloreamos los arcos de la red según las restricciones.

*Paso 3.* En la siguiente red podemos ver que cada arco tiene asociado el color que toma de acuerdo a la restricción y la cantidad de flujo a través éste, si no hay un número asociado se considerará que el flujo es cero.



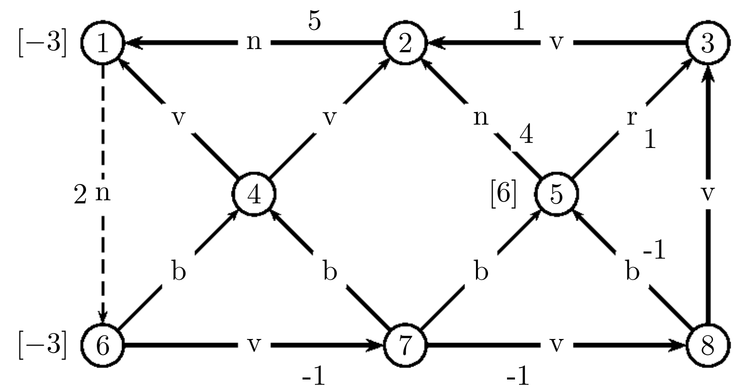
Al aplicar el algoritmo de Minty a $j^*$ encontramos que se encuentra en el ciclo $P$ : $5,(8,5),8,(7,8),7,(6,7),6,(1,6),1,(2,1),2,(5,2)$ por lo que es necesario calcular $\alpha = \text{mín}\{1,3,\infty,2,4,4\} = 1$ y actualizar el flujo por dichos arcos.




***Iteración 2.***

*Paso 2.* $A^+ = \{(1,6),(2,1)(5,2)\}$ y $A^- = \{(5,3)\}$ escogemos $j^* = (5,2)$ y coloreamos los arcos de la red según las restricciones.

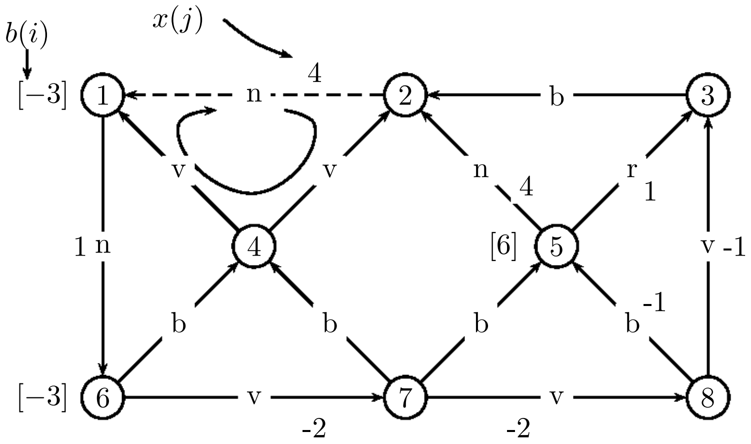
*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^* = (5,2)$ donde encontramos que éste se encuentra en el ciclo $P : 5,(5,3),3,(3,2),2$ el cual se muestra en la red anterior; se calcula $\alpha = \text{mín}\{1,4,3\} = 1$ y se actualiza el flujo a través de $j^*$ y de los arcos de $P$.




***Iteración 3.***

*Paso 2.* $A^+ = \{(1,6),(2,1)\}$ y $A^- = \varnothing$, escogemos $j^* = (1,6)$ y coloreamos la red de acuerdo a las restricciones.

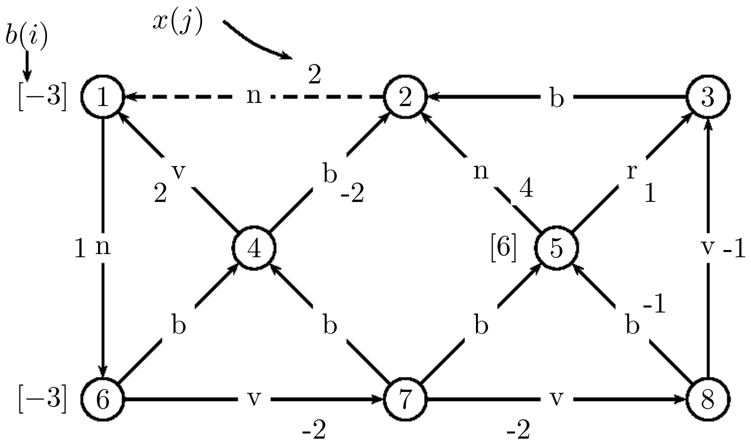
*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (1,6)$ y en la gráfica anterior podemos observar que se encuentra en el ciclo
$P : 1, (2,1), 2, (3,2), 3,\ (8,3), 8, (7,8), 7, (6,7), 6$; calculamos el valor de $\alpha = \text{mín}\{5, 1, \infty, 2,\ \infty, 3\}$ y actualizamos el flujo por los arcos de $P$ y $j^*$.




***Iteración 4.***

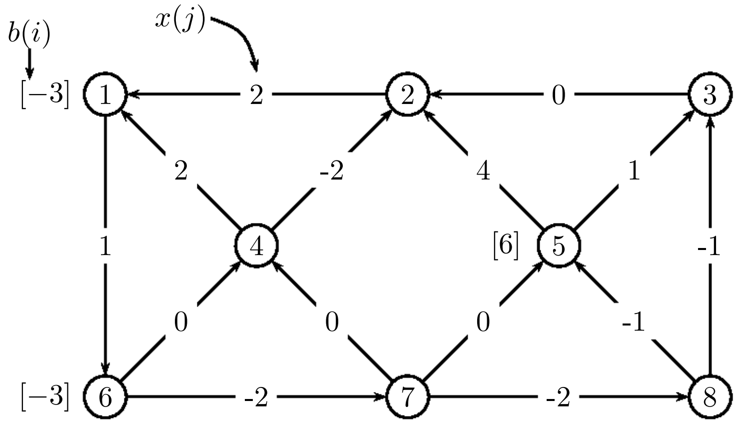
*Paso 2.* $A^+ = \{(2,1)\}$ $A^- = \varnothing$; tomamos al único arco que no cumple con las restricciones de capacidad y coloreamos la red según las restricciones.

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$ y en la gráfica anterior podemos observar que éste se encuentra en el ciclo $P : 2 \leftarrow 4 \rightarrow 1$, así calculamos $\alpha = \text{mín}\{4, 2, 3\} = 2$ y actualizamos el flujo por los arcos del ciclo y $j$.

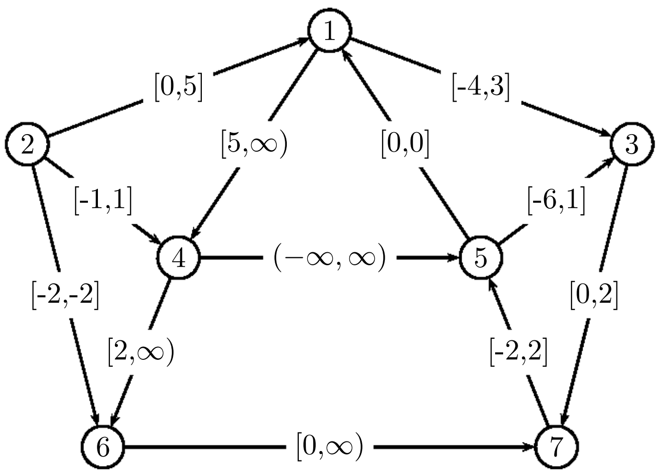


***Iteración 5.***

*Paso 2.* $A^+ = A^- = \varnothing$ Por lo tanto podemos decir que el flujo que pasa actualmente por la red es la solución del problema y se presenta en la siguiente gráfica.




*Ejemplo.* Consideremos la siguiente red donde no habrá solución al problema de distribución factible.

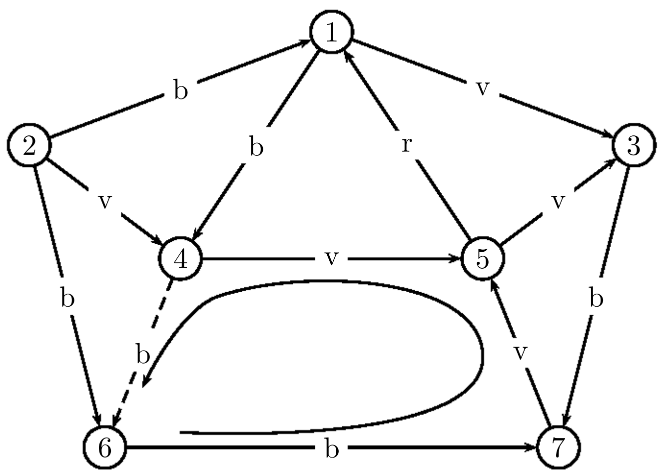



***Iteración 1.***

*Paso 1.* Como hay que determinar un flujo factible con respecto a las restricciones, comenzaremos con flujo igual a cero, el cual es factible con la oferta y la demanda puesto que es un problema de circulación.

*Paso 2.* Al comenzar con flujo igual a cero, vemos que los conjuntos $A^+ = \{(2,6)\}$ $A^-\{(1,4),(4,6)\}$ son no vacíos, por lo que procederemos a pintar los arcos de la red.

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de Minty a un arco del conjunto $A^-$, en este caso, escogimos el arco $j^* = (4,6)$. Observemos que nos encontramos en el paso 3.1 del algoritmo, donde se ha encontrado que el arco $j^* = (4,6)$ pertenece al ciclo $P = 6,(6,7),7,(7,5),5,\ (4,5),4,(4,6),6$ , por lo que calculamos $\alpha =$ min{$\infty$,2,$\infty$,$\infty$}=2.

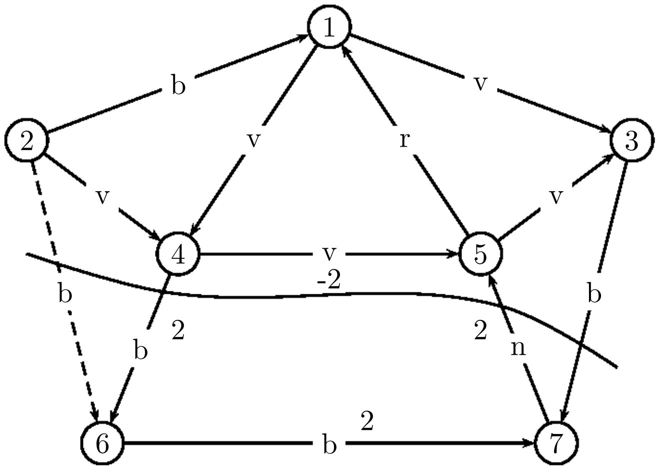



Así, actualizamos el flujo en la red, lo cual se ve en la siguiente figura, donde cada arco tiene asociada la cantidad de flujo que pasa por él.

***Iteración 2.***

*Paso 2.* Observemos que $A^+ = \{(2,6)\}$ y $A^- = \{(1,4)\}$ son no vacíos, así que escogimos al arco $j^* = (2,6)$ así que colorearemos la red de acuerdo a las restricciones.

*Paso 3.* Aplicamos el Algoritmo de Minty. En la gráfica anterior se muestra que el arco $j = (2,6)$ pertenece a un corte compatible con la coloración $Q = \{(2,6),(4,6),(7,5),(3,7)\}$ con $C^+(Q) = -(-2) - \infty + 2 - 2 = 2 - \infty = -\infty$ $< 0 = b(S)$. Por lo tanto podemos concluir que para esta red, no hay solución al problema de distribución factible.




### 2.1.1. El Teorema de Distribución Factible y Diferentes Tipos de Intervalos

Al mencionar diferentes tipos de intervalos, hemos querido referirnos a las restricciones de los arcos, los cuales representan las cotas inferior y superior del intervalo de capacidades del flujo, en este caso, que puede pasar a través de éstos. Ya hemos dicho en páginas anteriores que un flujo será factible si cumple que $x(j) \in C(j)$ con $C(j) = [c^-(j), c^+(j)]$, pero ¿cómo pueden ser $c^-(j)$ y $c^+(j)$? pues veamos algunos tipos de ellos:

1. $C(j) = [-c, c]$ con $0 \leq c < +\infty$; en este tipo de intervalos el flujo $x$ puede ir en ambas direcciones del arco siempre y cuando satisfaga que $|x(j)| \leq c$.

2. $C(j) = [0, c]$ con $0 \leq c < +\infty$; en este tipo de intervalos el flujo $x$ sólo puede ir en la dirección que marca el arco.

3. $C(j) = [0, \infty)$ este arco se usa sólo en sentido positivo y no hay restricción de capacidad superior sobre el flujo.

4. $C(j) = (-\infty, \infty)$ para este tipo de arcos no hay restricciones ni de cantidad ni sobre la dirección en que puedan ser recorridos.

5. $C(j) = [c, c]$ con $-\infty \leq c < +\infty$; arcos con este tipo de capacidades exigen que la cantidad de flujo que pase por ellos sea exactamente c, ni más, ni menos.

A continuación veremos de que forma es posible encontrar una solución al problema de Distribución Factible con cada uno de los diferentes tipos de intervalos. Recordemos que el teorema afirma que hay solución si y sólo si $b(X) = 0$ y $b(S) \leq c^+(Q)$

1. Sea $G$ una red con restricciones de capacidad en intervalos del tipo 1; $C(j) = [-c(j), c(j)]$ para todo $j \in A$. La solución se encontrará justo como lo pide el teorema, notemos que el flujo debe cumplir que $|x(j)| \leq c$ para que éste sea factible, también observemos que el flujo cero, siempre será factible para este tipo de intervalos.

2. Sea $G$ una red con restricciones de capacidad en intervalos del tipo 2; $C(j) = [0, c(j)]$ para todo $j \in A$. La solución se encontrará justo como lo pide el teorema, notemos que $C^+(Q)$ será igual a $\Sigma_{j \in Q^+} c^+(j)$ puesto que la capacidad inferior de cada intervalo es 0, así $\Sigma_{j \in Q^-} c^-(j) = 0$

3. Sea $G$ una red con restricciones de capacidad en intervalos del tipo 3; $C(j) = [0, \infty)$ para todo $j \in A$.Considerando que la oferta es una cantidad positiva podemos afirmar que para este tipo de intervalos en una red, siempre habrá solución, es decir, para cualquier conjunto de arcos que formen al menos un camino de $N^+$ a $N^-$ cumpliendo las restricciones de oferta y demanda en cada nodo y basta pedirle al teorema que $b(X) = 0$.

4. Sea $G$ una red con restricciones de capacidad en intervalos del tipo 4; $C(j) = (-\infty, \infty)$ para todo $j \in A$. Este caso es análogo al anterior, es más, podemos afirmar que $A^+ = A^- = \varnothing$ pues para cualquier cantidad de flujo que pase por los arcos, no puede ser mayor que $\infty$, ni menor que $-\infty$. Por lo tanto siempre hay una distribución de flujo factible, por lo que basta pedirle al teorema que $b(X) = 0$.

5. Sea $G$ una red con restricciones de capacidad en intervalos del tipo 5; $C(j) = [c(j), c(j)]$ para todo $j \in A$. Es muy difícil que exista solución para este tipo de redes, puesto que exige que para cada arco pase una cantidad exacta de $c$ unidades de flujo y tendríamos que pedirle al teorema que $b(X) = 0$ y además que $b(S) = C^+(Q)$, de lo contrario encontraríamos arcos cuya capacidad no es satisfecha o bien sobrepasa su capacidad, en ambos casos no hay solución al problema.

## 2.2. Potenciales

Esta sección nos interesa abordar el problema del diferencial factible, para ello daremos nuevos conceptos como:*potencial*, *diferencial* y veremos un algoritmo conocido como *algoritmo de rectificación de tensión* el cual nos ayudará a determinar un potencial en la red tal que la tensión asociada al arco satisfaga las restricciones de generación, esto nos permite establecer la optimalidad del problema del potencial sin perder la factibilidad en la tensión. Aquí es posible que el potencial factible no exista por lo que se dan algunas condiciones para tal hecho. Así que comencemos por ver las definiciones:

**Definición 18.** [Potencial]

Un potencial en una red $R$ es una función real $u$ asociada al conjunto de nodos $X$ de $R$. El valor $u(i)$ es llamado el *potencial* del nodo i, es decir: $u : X \to R$.

**Definición 19.** [Tensión]

Sea $R$ una red y sea $j = (i, i')$ cualquier arco de $R$,la *tensión* es una función definida sobre los arcos de una red donde a cada arco $j$ le asocia la diferencia de potenciales de los nodos $i$ e $i'$, es decir:

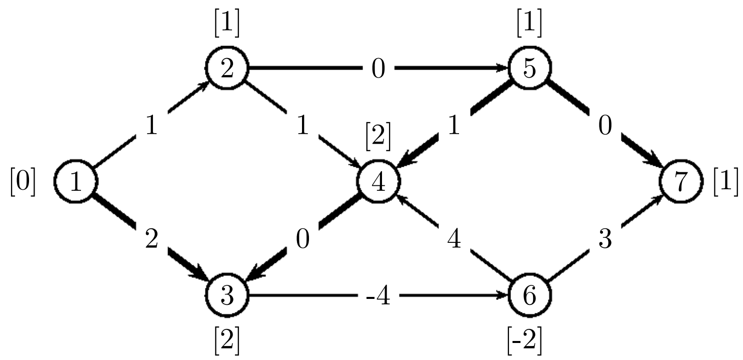
$$v(j) = u(i') - u(i) = -\Sigma_{i \in X} u(i)e(i,j)$$

**Definición 20.** [Despliegue]

El despliegue es un concepto asociado al diferencial por tanto diremos que el despliegue del diferencial $v$ relativo a la cadena $P$ es la suma de los términos $\pm v(j)$ asociados a los arcos de $P$. Si $P$ es una cadena simple tenemos:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = \Sigma_{j \in P^+} v(j) - \Sigma_{j \in P^-} v(j) = v \cdot e_p$$

Para tener una noción más clara de lo que es el despliegue veamos un ejemplo en la siguiente gráfica donde los números asociados a los arcos son el diferencial y las etiquetas a los lados de cada nodo representa el potencial de cada uno.




Una tensión $v$ es indicada en la gráfica anterior junto con un camino $P : 1 \to 7$ el despliegue relativo a $P$ es 2 - 0 - 1 + 0 = 1.
De la gráfica tomemos como $1 = i$ y $7 = i'$ donde se cumple que:[despliegue de $v$ relativo a $P$] $= u(i') - u(i) = 1 - 0 = 1$. Esta propiedad se cumple en general y se conoce con el nombre de *Principio de Integración*, el cual enunciaremos a continuación.

## Principio de Integración

Sea $v = \Delta u$ para algún diferencial $u$ definido en una red $R$ y sea $P : i \to i'$ una cadena. Entonces:

$$[\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] = u(i') - u(i).$$

*Demostración.*

Sea la cadena $P : i^{'}, j_1, i_2, j_2, ..., j_{k-1}, i_k = i^{'}$ donde

$$\begin{aligned} v(j_h) &= u(i_{h+1}) - u(i_h) \text{ si } e_p(j_h) = 1 \\ -v(j_h) &= u(i_{h+1}) - u(i_h) \text{ si } e_p(j_h) = -1 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} [\text{despliegue de } v \text{ relativo a } P] &= \Sigma_{j\in P^+} v(j) - \Sigma_{j\in P^-} v(j) \\ &= [u(i_2) - u(i_1)] + [u(i_3) - u(i_2)] + ...+ \\ &\quad [u(i_k) - u(i_{k-1})] \\ &= [u(i_k) - u(i_1)] = [u(i^{'}) - u(i)] \end{aligned}$$

□

Al inicio de esta sección indicamos lo que vamos a entender por tensión (diferencial), la cual está definida en términos de una diferencia de potenciales, lo que ahora nos preocupa es que dada una red $R$ ¿Cómo generamos un diferencial factible? Cuando decimos factible nos referimos a que cumpla las restricciones de los intervalos de generación que son asociados a cada arco, puesto que éste depende directamente del potencial asociado a cada nodo. Dicho de otro modo:

**Problema de Diferencial Factible**

Sea $R$ una red con intervalos de generación $d(j) = [d^-(j), d^+(j)]$, deseamos determinar un potencial $u$ tal que $v(j) = \Delta u(j) \in d(j)\ \forall\ j \in A$.

**Teorema 3** (Teorema de Diferencial Factible)**.**

*El problema de diferencial factible tiene solución si y sólo si* $d^+(P) \geq 0$ *para todo ciclo* $P$ *elemental.*

*Demostración.*

Sea $v$ un diferencial factible, sabemos que para cualquier $v$ factible se cumple que: $d^-(P)\leq$ [despliegue de v relativo a P]$\leq$ $d^+(P)$, donde $P$ es cualquier cadena, pero si consideramos que $P$ es un ciclo se cumple que su despliegue es cero, por lo que estaríamos diciendo que $d^-(P) \leq 0 \leq d^+(P)$ de este modo se cumple que $d^+(P) \geq 0$ además se cumple que $d^-(P) \leq 0$ pero esta condición no aparece en el teorema puesto que $d^-(P) = -d^+(P')$ donde $P'$ es el reverso de $P$. □

La suficiencia de esta demostración es constructiva y constituye un algoritmo que da solución al problema del diferencial factible, en caso de que exista, de otro modo detectará la existencia de un ciclo compatible con la coloración el cual cumple que $d^+(P) < 0$, con lo que podemos concluir la no existencia de solución. Dicho algoritmo es el que a continuación presentamos y es conocido como el *Algoritmo de Rectificación de Tensión*.

**Algoritmo de rectificación de tensión**

*Objetivo:* Determinar un potencial tal que $v(j) = \Delta u(j) \in d(j)\ \forall j \in A$.

*Descripción*

*Paso 1.* Sea $u$ cualquier potencial. Sea $v = \Delta u$.

*Paso 2.* Sean

$$A^{+} = \{j \in A | v(j) < d^{-}(j)\} \quad A^{-} = \{j \in A | v(j) > d^{+}(j)\}.$$

1. Si $A^{+} = \varnothing = A^{-}$ FIN. El potencial $u$ resuelve el problema.
2. En otro caso, seleccionar $j^{*} \in A^{+} \cup A^{-}$ e ir al Paso 3.

*Paso 3.* Colorear los arcos de la red de la siguiente manera:

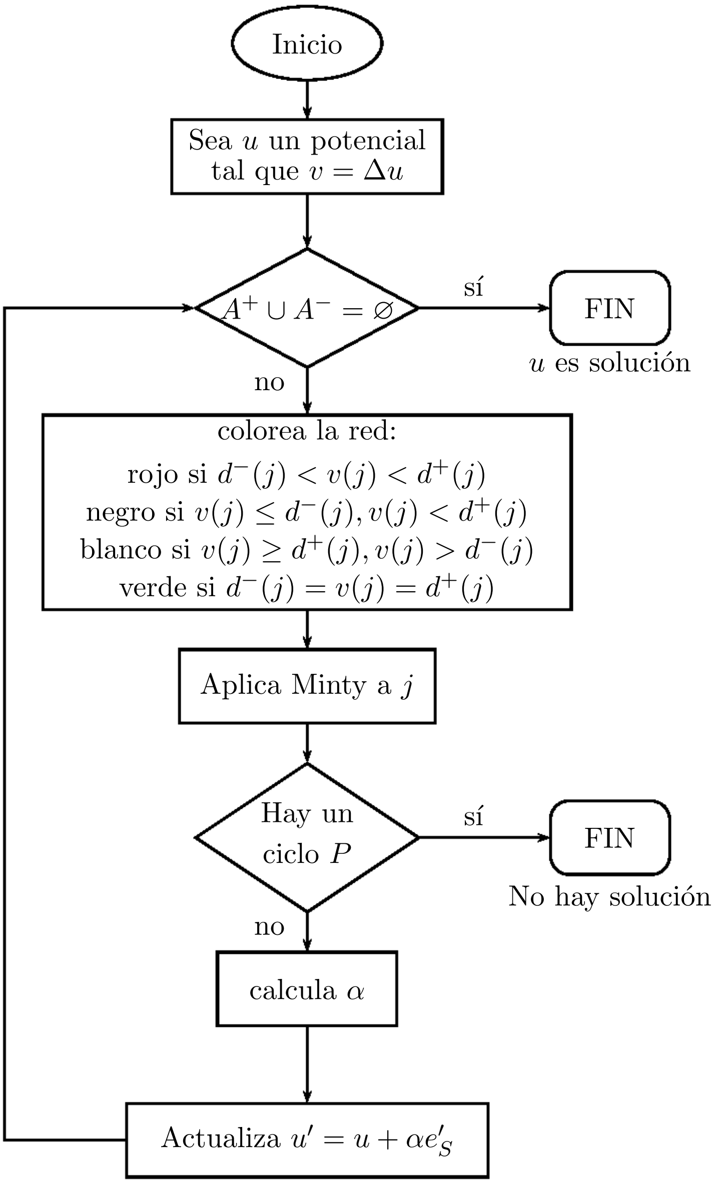
$$\begin{array}{lll} \text{rojo} & \text{si} & d^{-}(j) < v(j) < d^{+}(j) \\ \text{negro} & \text{si} & v(j) \leq d^{-}(j), v(j) < d^{+}(j) \\ \text{blanco} & \text{si} & v(j) \geq d^{+}(j), v(j) > d^{-}(j) \\ \text{verde} & \text{si} & d^{-}(j) = v(j) = d^{+}(j) \end{array}$$

Aplicar el Lema de Minty para $j^{*}$.

1. Si se determina un ciclo $P$ compatible que contenga a $j^{*}$ FIN. En este caso $d^{+}(P) < 0$ y por lo tanto no existe solución al problema.
2. Si se determina un corte $Q = [S, S']$ compatible que contenga a $j^{*}$ calcular:

$$\alpha = Min \begin{cases} d^{+}(j) - v(j) & j \in Q^{+} \\ v(j) - d^{-}(j) & j \in Q^{-} \\ d^{-}(j^{*}) - v(j^{*}) & si j^{*} \in A^{+} \\ v(j^{*}) - d^{+}(j^{*}) & si j^{*} \in A^{-} \end{cases}$$

Actualizar $u = u + \alpha e_{S'}$ e ir al Paso 2.




## Justificación

- Supongamos que en el Paso 3, al aplicar el algoritmo de Minty obtenemos como resultado un ciclo compatible con la coloración y hacemos $d_0^+(j) = d^+(j) - v(j)$ y $d_o^-(j) = d^-(j) - v(j)$ para todo arco $j \in P$. Afirmamos que $d_0^+(P) < 0$ veamos porque:

  Sabemos que en un ciclo puede haber arcos verdes, blancos o negros.

- Si $j$ es verde entonces

$$d_0^+(j) = d^+(j) - v(j) = 0 \text{ y } d_o^-(j) = d^-(j) - v(j) = 0$$

puesto que la restricción de color dice que será verde si
$d^-(j) = v(j) = d^+(j)$, $\forall\ j \in P$.

- Si $j$ es blanco esto quiere decir que $j \in P^+$ puesto que los arcos blancos sólo pueden ser recorridos en el sentido del arco y por su restricción de color sabemos que cumplen que $v(j) \geq d^+(j)$ esto implica que $0 \geq d^+(j) - v(j) = d_0^+(j)$.
- Si $j$ es negro esto quiere decir que $j \in P^-$ puesto que los arcos negros sólo pueden ser recorridos en sentido contrario al definido por el arco y por su restricción de color sabemos que cumplen que $v(j) \leq d^-(j)$ esto implica que $0 \leq d^-(j) - v(j) = d_0^-(j)$.

Supongamos ahora que en $P$ hay al menos un arco $j^* \in A^+ \cup A^-$, podemos decir sin perdida de generalidad que $j^*$ es blanco y se cumple que $d_0^+(j^*) < 0$, todos los demás arcos en $P$ son verdes o negros en cualquier caso $d_0^-(j) \leq 0$. Así $\Sigma_{j\in P^+} d_0^+(j) < 0$ y $\Sigma_{j\in P^-} d_0^-(j) \geq 0$ y por definición tenemos que:

$$d_0^+(P) = \Sigma_{j\in P^+} d_0^+(j) - \Sigma_{j\in P^-} d_0^-(j);$$
$$d_0^+(P) < 0.$$

Sustituyendo $d_0^+(j)$ y $d_0^-(j)$ tenemos:

$$\begin{aligned} d_0^+(P) &= \Sigma_{j\in P^+} d^+(j) - v(j) - (\Sigma_{j\in P^-} d^-(j) - v(j)) \\ &= \Sigma_{j\in P^+} d^+(j) - v(j) - \Sigma_{j\in P^-} d^-(j) + v(j) \\ &= \Sigma_{j\in P^+} d^+(j) - \Sigma_{j\in P^-} d^-(j) \\ &= d^+(P) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d^+(P) < 0$ un ciclo negativo.

- Supongamos que en el Paso 3 al aplicar el algoritmo de Minty obtenemos un corte compatible con la coloración. Partimos del hecho de que $d^-(j)$ es finito por lo que $d^-(j) < \infty$ de aquí veamos que sucede en el cálculo de $\alpha$ que nos garantiza que se mejora el potencial:

  Analizaremos los arcos que están en $Q$ negros o blancos pero que no están en $A^+ \cup A^-$,(recordemos que $A^+ = \{j \in A | v(j) < d^-(j)\}$ y $A^- = \{j \in A | v(j) > d^+(j)\}$) los arcos rojos siempre están en un corte y su diferencial siempre están dentro del intervalo de generación, por lo que el cálculo de $\alpha$ para éstos siempre es positivo.

- Si $j \in Q^+$ entonces $\alpha = d^+(j) - v(j)$. Sea $j \in Q^+$ entonces podemos decir que $j$ es negro, pues si fuera verde o blanco no formaría parte del corte, de acuerdo a las restricciones de color $v(j) \leq d^-(j)$ pero como no está en $A^+ \cup A^-$, específicamente no está en $A^+$ esto quiere decir que $v(j) = d^-(j)$ por lo que $\alpha > 0$.
- Si $j \in Q^-$ entonces $\alpha = v(j) - d^-(j)$. Sea $j \in Q^-$ entonces podemos decir que $j$ es blanco, pues si fuera verde o negro no formaría parte del corte, de acuerdo a las restricciones de color $v(j) \geq d^+(j)$ pero como no está en $A^+ \cup A^-$, específicamente no está en $A^-$ esto quiere decir que $v(j) = d^+(j)$ por lo que $\alpha > 0$.

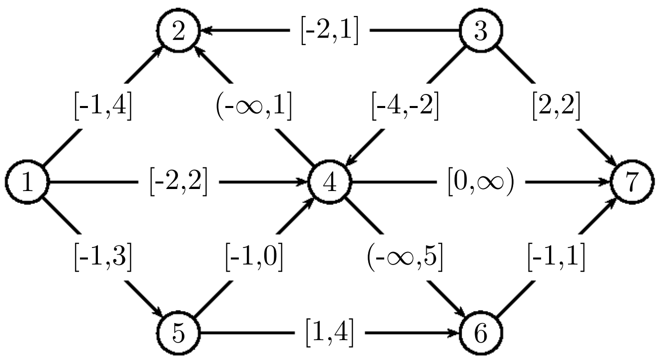
Ahora veamos que sucede para arcos en $A^+ \cup A^-$

- Si $j \in A^+$ entonces $\alpha = d^-(j) - v(j)$. Sea $j \in A^+$ entonces $v(j) < d^-(j)$ es decir $0 < d^-(j) - v(j)$ por lo tanto $\alpha > 0$.
- Si $j \in A^-$ entonces $\alpha = v(j) - d^+(j)$. Sea $j \in A^-$ entonces $v(j) > d^+(j)$ esto implica que la generación superior del arco es finita ($d^+(j) < \infty$) así $0 < v(j) - d^+(j)$ por lo tanto $\alpha > 0$.

De todo esto podemos concluir que al actualizar los potenciales de los nodos fuera del corte estamos haciendo que la tensión que pasa por los arcos de $Q$ se acerquen en $\alpha$ unidades más a sus respectivos intervalos de generación $[d^-(j), d^+(j)]$. Además si introducimos la condición de conmensurabilidad, terminaríamos en un número finito de pasos.

*Ejemplo.* Veamos la aplicación del algoritmo de rectificación de tensión.

Considere la siguiente gráfica y utilice el algoritmo de rectificación de tensión para construir un potencial factible con respecto a los intervalos de generación.

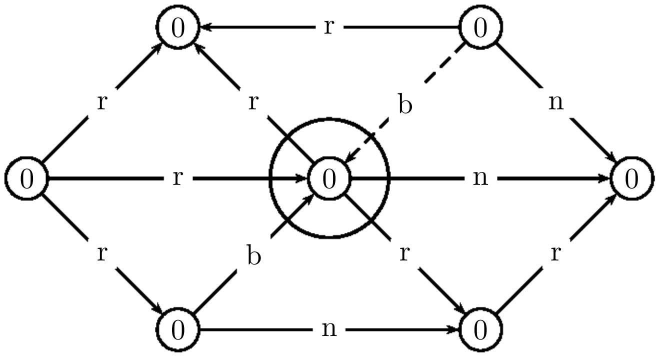


***Iteración 1.***

*Paso 1.* Comenzaremos con un potencial igual a cero en todos los nodos.

*Paso 2.* $A^+ = \{(3,7),(5,6)\}$ y $A^- = \{(3,4)\}$ son distintos del vacío, por lo que escogemos algún elemento de cualquiera de ellos.

*Paso 3.* Coloreamos la red y al arco escogido, en este caso el $j = (3,4)$ le aplicamos el algoritmo de Minty.

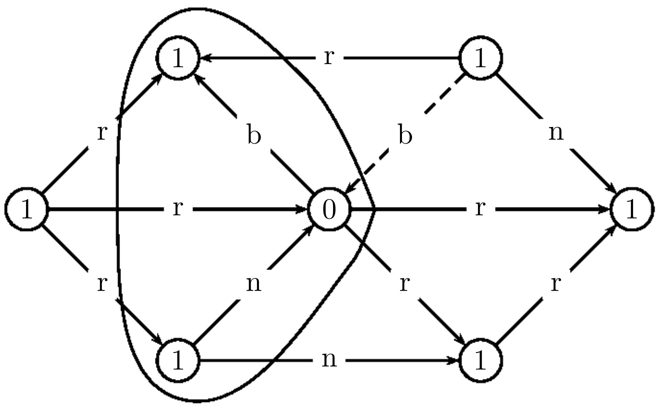



Hasta este punto nos encontramos en el Paso 3.2 donde el arco $j^* = (3,4)$ forma parte del corte $Q = \{(1,4),(3,4),(4,2),(4,6),(4,7),\ (5,4)\}$, donde $S = \{4\}$ y $S' = \{1,2,35,6,7\}$ por lo que es necesario rectificar el potencial de los nodos que se encuentran en $S'$; ahora su potencial será el que tenían mas una cantidad $\alpha$ que determinaremos a continuación: $\alpha = \text{mín}\{\infty, 5, 1, 2, 2, 1\} = 1$. En la siguiente gráfica se muestra ya el potencial actualizado.

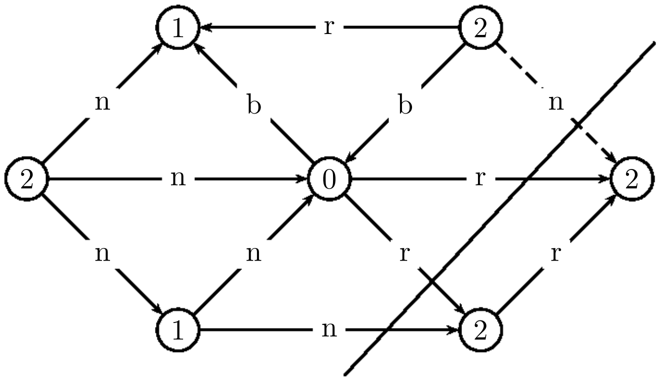
***Iteración 2.***

*Paso 2.* Encontramos que los conjuntos $A^+$ y $A^-$ no han cambiado por lo que volvemos a escoger al arco $j^* = (3,4)$.

*Paso 3.* Coloreamos la red y aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^* = (3,4)$.



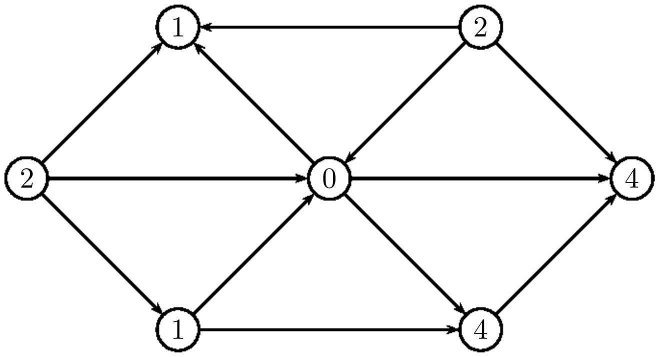
En la gráfica anterior se puede apreciar que nos encontramos en el Paso 3.2, pues el arco $j^* = (3,4)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,2),(1,4),\ (1,5),(3,2),(3,4),(4,6),(4,7),(5,6)\}$, donde $S = \{2,4,5\}$ y $S' = \{1,3,6,7\}$ por lo se actualiza el potencial de los nodos que se encuentran en $S'$, para ello calculamos $\alpha = \text{mín}\{1,\infty,\ 4,4,1,1,1,2\} = 1$. En la siguiente gráfica se muestra la actualización del potencial.




***Iteración 3.***

*Paso 2.* El conjunto $A^- = \varnothing$, pero $A^+ = \{(3,7)\}$.

*Paso 3.* Coloreamos los arcos de la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$. Nuevamente estamos en el Paso 3.2, el arco $j^* = (3,7)$ se encuentra en el corte $Q = \{(3,7),(4,6),(4,7),(5,6)\}$, donde $S = \{1,2,3,4,5\}$ y $S' = \{6,7\}$. Actualizamos el potencial en los nodos de $S'$ en la cantidad $\alpha = \text{mín}\{3,3,\infty,2\} = 2$ como se muestra en la siguiente gráfica.

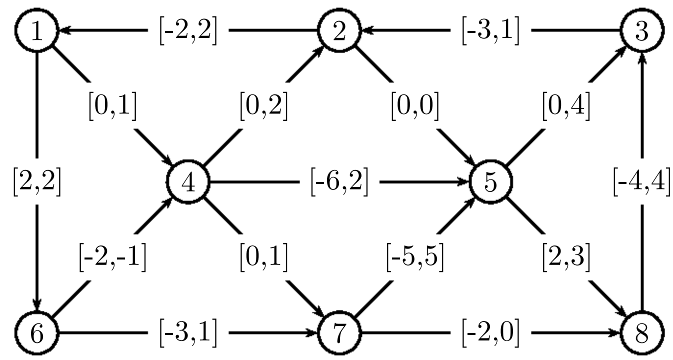



***Iteración 4.***

*Paso 2.* Estamos en el Paso 2.2, puesto que $A^+ = A^- = \varnothing$ Por lo tanto el potencial actual de la gráfica resuelve el problema.

*Ejemplo.*

Consideremos la siguiente red y veamos que sucede al aplicarle el algoritmo de rectificación de tensión.

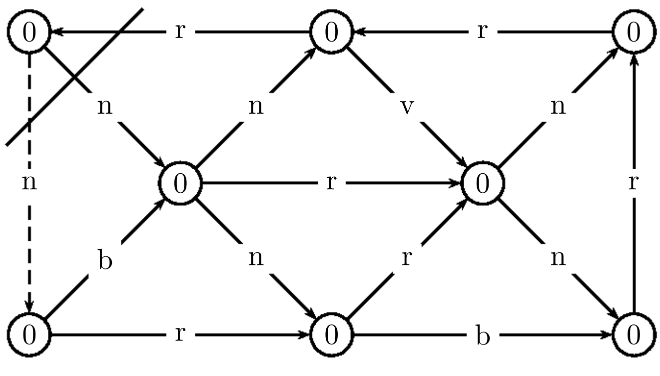



***Iteración 1.***

*Paso 1.* Comenzamos con un potencial igual a cero en todos los nodos.

*Paso 2.* $A^+ = \{(1,6),(5,8)\}$ y $A^- = \{(6,4)\}$, como al menos uno de los conjuntos es distinto del vacío, escogemos un elemento de cualquiera de ellos, en este caso $j^* = (1,6)$.

*Paso 3.* Coloreamos los arcos de acuerdo a las restricciones y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (1,6)$.

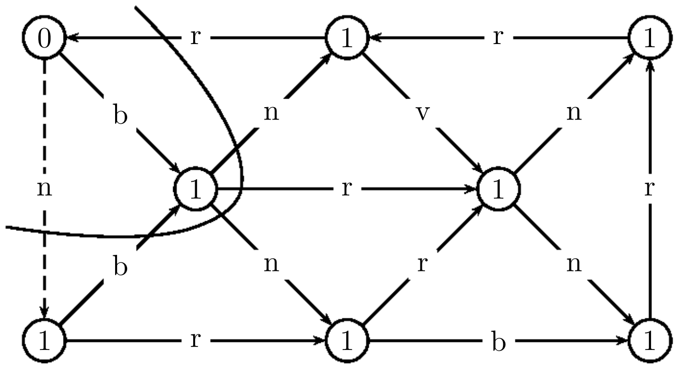



Gracias a la gráfica anterior podemos observar que $j^* = (1,6)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,4),(1,6),(2,1)\}$ donde $S = \{1\}$ y $S' = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, por lo que es necesario actualizar el potencial de los nodos de $S'$. Para ello calculamos $\alpha = \text{mín}\{2,1,2\} = 1$, esto se puede observar en la siguiente gráfica.

***Iteración 2.***

*Paso 2.* $A^+ = \{(1,6),(5,8)\}$ y $A^- = \{(6,4)\}$, escogemos $j^* = (1,6)$ nuevamente.

*Paso 3.* Coloreamos los arcos de la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$, encontrando el siguiente corte $Q = \{(1,6),(2,1),(4,2),\ (4,5),(4,7),(6,4)\}$ donde $S = \{1,4\}$ y $S' = \{2,3,5,6,7,8\}$.

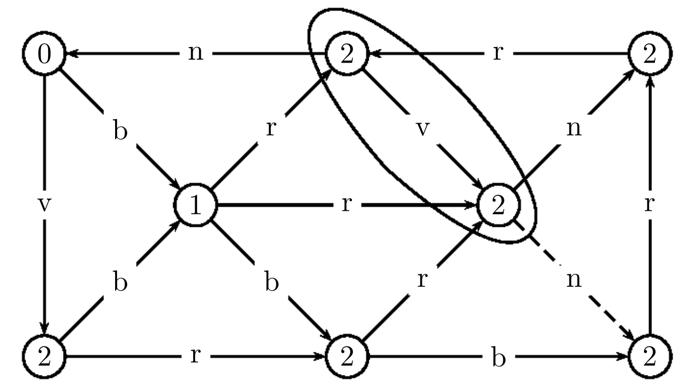



Actualizamos el potencial calculando $\alpha = \text{mín}\{1,2,2,1,2,1\} = 1$ como se muestra en la siguiente figura.

***Iteración 3.***

*Paso 2.* $A^+ = \{(5,8)\}$ y $A^- = \varnothing$, así que $j^* = (5,8)$

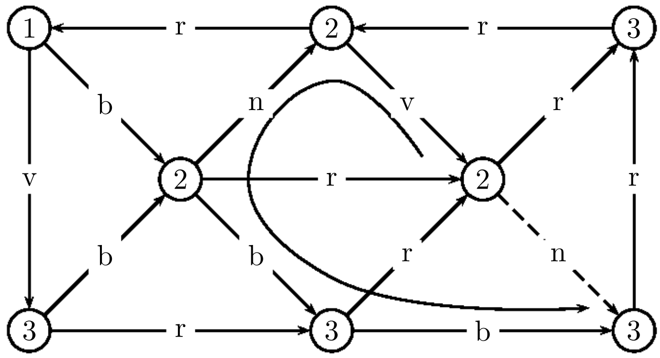
*Paso 3.* Coloreamos los arcos de la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (5,8)$. Encontrando el corte $Q = \{(2,1),(3,2),(4,2),\ (4,5),(5,3),(5,8),(7,5)\}$, donde $S = \{2,5\}$ y $S' = \{1,3,4,6,7,8\}$ por lo que actualizaremos el potencial en los nodos de $S'$, calculando $\alpha = \text{mín}\{3,4,2,5,7,1,4\} = 1$.



***Iteración 4.***

*Paso 2.* $A^+ = \{(5,8)\}$ y $A^- = \varnothing$, así que $j^* = (5,8)$

*Paso 3.* Coloreamos los arcos de la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (5,8)$.




Como podemos apreciar en la gráfica anterior, encontramos que el arco $j^* = (5,8)$ pertenece al ciclo $P = \{(2,5),(4,2),(4,7),(7,8)\}$ por lo que podemos concluir que no existe solución al problema de encontrar un potencial tal que $v(j) = \Delta u(j) \in d(j)$ para todo $j \in A$.

### 2.2.1. Aplicaciones

**Potenciales y la red PERT**

¿Qué es una red PERT? Pues bien, PERT quiere decir Program Evaluation and Review Technique y es un método de ordenamientos de actividades dentro de un proyecto, fue desarrollado en Estados Unidos por la Marina Norteamericana durante la década de los años 50's para la ejecución del proyecto Polaris, en el cual se involucraba la coordinación de empresas privadas y del gobierno. Al finalizar el proyecto mediante la implantación del método PERT se dieron cuenta que terminaron dos años antes de lo previsto, tal vez por esta razón sea el método de ordenamiento más conocido.

Ya sabemos que quiere decir PERT pero ¿cómo se construye una red PERT? Resulta que cuando se tiene un proyecto, sea cual sea, siempre hay actividades a realizar, algunas tienen prioridad sobre otras y también hay actividades que dependen de la finalización de otras. Por ejemplo; si emprendemos el proyecto de titulación, pues primero hay que terminar los créditos de licenciatura, luego buscar tema de tesis, al mismo tiempo un asesor que nos acepte, luego hay que leer, entender y escribir, sin perder de vista los trámites en ventanillas, finalmente viene el examen de titulación. Por supuesto que a todas estas actividades se les debe asociar un tiempo estimado de ejecución para la realización de una calendarización que nos permita tener un mejor control de éstas en el tiempo de su realización, por lo que normalmente tendremos dos fechas asociadas a cada actividad que serán; la fecha más próxima y la fecha más lejana. En la solución de este problema con certeza encontraremos lo que llamamos *ruta crítica*' que será una cadena $P : I \to F$ y las actividades dentro de esta cadena son las actividades que no deben retrasarse en el tiempo de su ejecución , pues retardarían la finalización del proyecto, del mismo modo habrá actividades que queden fuera de la ruta critica, éstas tienen asociada una cantidad de tiempo adicional para su realización, a esta cantidad se le conoce como *holgura*.

Su representación gráfica es a través de una red donde el conjunto de nodos $X$ representa la etapas del proyecto y el conjunto de arcos $A$ representa al conjunto de actividades del proyecto. De este modo $j = (i, l) \in A$ si y sólo si $j$ es una actividad con etapa inicial $i$ y etapa final $l$. La restricción de precedencia entre las actividades $k$ y $j$ ($j$ terminada antes de empezar $k$) se representa haciendo coincidir el extremo final de $j$ con el extremo inicial de $k$, como se muestra en la siguiente figura:

$$i \xrightarrow{\quad \text{j} \quad} l \xrightarrow{\quad \text{k} \quad} t$$

También debemos considerar que existen actividades que no requieren de ninguna otra para comenzar su ejecución, por lo que el extremo inicial de éstas coincidirá con $I$ (el nodo inicial), que representa la etapa inicial del proyecto, así mismo para las actividades que no son requeridas por ninguna otra tendrán como extremo final al nodo $F$ (nodo final) y representa la etapa final del proyecto. Por supuesto que el objetivo de este tipo de proyectos es que su realización se haga en el menor tiempo posible, lo cual quiere decir que la función objetivo será $\text{mín}\, z = a(F) - a(I)$, donde $a(m)$ representa la fecha más próxima de ejecución de la etapa $m$

El modelo de programación lineal asociado a este problema es:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = \quad & a(F) - a(I) \\ \text{s.a} \quad & \\ & -aE \geq d \end{aligned}$$

Donde:

E es la matriz de incidencia de la red PERT;

d es el vector de duraciones.

Hemos explicado brevemente como se construye una red PERT, pues bien, ahora veremos como encontrar una solución factible a una red PERT a través de una modificación al algoritmo de rectificación de tensión.

**Algoritmo de rectificación de tensión modificado para la determinación de una solución factible en una red PERT**

*Objetivo* Determinar un potencial $a$ con $a(I) = 0$ en una red PERT.
*Descripción*

*Paso 1.* Sea $a$ cualquier potencial de valores finitos con $a(I) = 0$. Sea $v = \Delta a$

*Paso 2.* Sea $A^+ = \{j \in A | v(j) < d(j)\}$.

1. Si $A^+ = \varnothing$ Fin. El potencial $a$ resuelve el problema.
2. Si $A^+ \neq \varnothing$ seleccionar $j^* \in A^+$ e ir al Paso 3.

*Paso 3.* Colorear los arcos de la red del siguiente modo

$$\text{rojo si } v(j) > d(j);$$
$$\text{negro si } v(j) \leq d(j).$$

*Paso 4.* Aplicar el algoritmo de Minty a $j^*$ y determinar el corte $Q$ compatible con la coloración que contiene a $j^*$.

*Paso 5.* Calcular

$$\alpha = Min \begin{cases} v(j) - d^-(j) & si\ j \in Q^- \\ d^-(j) - v(j) & si\ j = j^* \end{cases}$$

Actualizar $a = a + \alpha e_{[X/S]}$ e ir al Paso 2.

## Justificación

Observemos que las fechas más próximas $a(i)$ con $i \in X$ constituyen un potencial tal que su diferencial $v = \Delta a$ debe satisfacer ciertas restricciones de generación, justo las restricciones de precedencia. En efecto:

$$v(j) = \Delta a(j) = a(i') - a(i) \geq d(j),\ j \sim (i, i') \in A.$$

Es decir, dado que necesitamos que la tensión a través del arco $j$ sólo sea mayor a su duración entonces podemos decir que $v(j) \in [d(j), \infty)$.

El algoritmo de rectificación de tensión puede iniciarse con cualquier potencial tal que $a(I) = 0$ y $a(i) < \infty$ para todo $i \in X$; esto es válido para las fechas más próximas pues de lo contrario el proyecto no tendría duración finita.

Observemos que en el Paso 2 a diferencia del algoritmo de rectificación de tensión sólo definimos al conjunto $A^+ = \{j \in A | v(j) < d(j)\}$, puesto que $v(j) \geq d(j)$ y $v(j) \in [d(j), \infty)$, es decir, $d^+(j) = \infty$; por lo tanto no existe un diferencial que sea mayor estrictamente y mucho menos igual que $d^+(j)$.

El el Paso 3 sólo se definieron restricciones donde el color asociado es rojo o negro, puesto que los arcos cuando son coloreados de blanco es porque su diferencial es mayor a su generación superior ($v(j) > d^+(j)$), lo cual ya vimos que no es posible si $G$ es una red PERT. En cuanto a los arcos verdes se pide que $d^-(j) = v(j) = d^+(j)$, lo cual tampoco tenemos. Así que sólo tenemos arcos rojos y negros.

En el Paso 4 al aplicar el algoritmo de Minty determinamos un corte $Q$ ya que la siguiente proposición nos garantiza que nunca habrá circuitos en una red PERT.

*Proposición*

Si $G$ es una red PERT entonces $G$ no contiene circuitos .

*Demostración.*

Supongamos que en $G$ encontramos un circuito

$$P : i_1, a_1, i_2, a_2, ..., i_k, a_k, ..., i_q, a_q, i_1.$$

esto querría decir en términos de una red PERT que la actividad $a_2$, necesita que la $a_1$ esté terminada para que ésta pueda comenzar, del mismo modo sucede con $a_3$ y $a_2$, así hasta llegar a la actividad $a_1$, dado que todas actividades se encuentran en un circuito estaríamos diciendo que la actividad $a_1$ necesita que la actividad $a_1$ esté terminada para comenzar su realización. Lo cual constituye una contradicción. Más aún si existiese un circuito sucedería que $\Sigma_{(i,i')\in P} d_{i,i'} \leq \Sigma_{(i,i')\in P} a(i') - a(i)$, pero por ser $P$ un circuito $\Sigma_{(i,i')\in P} a(i') - a(i) = 0$, lo cual implica que $\Sigma_{(i,i')\in P} d_{i,i'} \leq 0$ lo cual quiere decir que no habría solución factible al problema y por lo tanto la duración de las actividades es cero ($d_{i,i'} = 0$ para todo $(i, i') \in P$) por lo tanto podemos concluir que en una red PERT no hay circuitos. $\square$

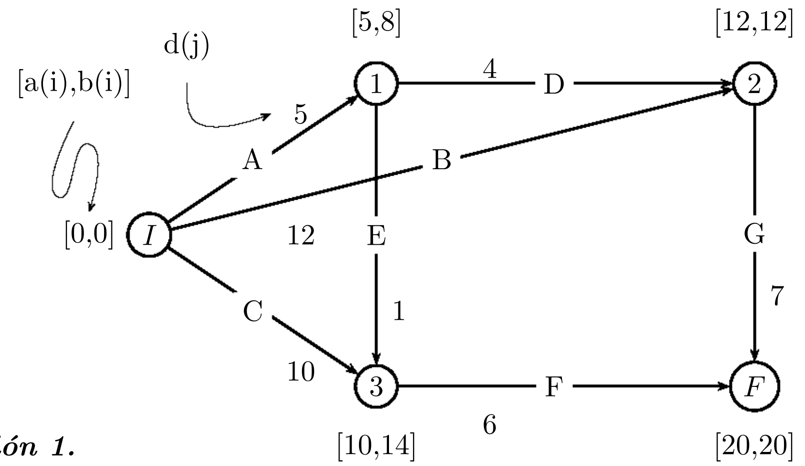
En el Paso 5 el cálculo de $\alpha$ es así, puesto que; como no hay circuitos en cada iteración al ir formando los cortes, lo que tenemos son arcos $j \in Q^-$ y $j^* \in A^+$ por lo que nos basta con tener los cálculos en la determinación del valor de $\alpha$ para este tipo de arcos. Ahora, dado que $j \in Q^-$, $j$ es rojo, pues sino lo fuera sería negro y no formaría parte del corte. Observemos que su diferencial de acuerdo a las restricciones es $v(j) > d(j)$ por lo que $v(j) - d(j) > 0$ por lo tanto $\alpha > 0$ para $j \in Q^-$.

Si $j = j^*$ entonces $v(j) < d(j)$ así $d(j) - v(j) > 0$ por lo que $\alpha > 0$. De esto podemos concluir que en cada iteración se mejora el potencial en $\alpha$ unidades. *Ejemplo.*

Consideremos el proyecto de establecer un café-librería, cuyas actividades y duración de cada una se muestra en la tabla de abajo.

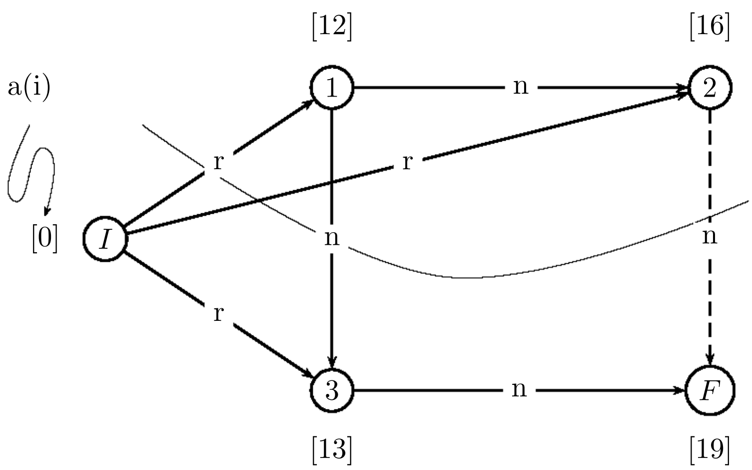
| | Actividad | Duración | Antecedentes |
|---|---|---|---|
| A | Compra de mobiliario y equipo | 5 | —— |
| B | Entrenamiento de personal | 12 | —— |
| C | Búsqueda de mercado de capital | 10 | —— |
| D | Instalación de mobiliario y equipo | 4 | A |
| E | Cálculo de presupuesto | 1 | A |
| F | Financiamiento de 5 años | 6 | C,E |
| G | Pruebas de equipo (PC) | 8 | B,D |

A continuación se muestra la red PERT la cual representa las actividades del proyecto, $a(i)$ para todo $i \in X$ representa la fecha más próxima, $b(i)$ para todo $i \in X$ representa la fecha más lejana y $d(j)$ para todo $j \in A$ representa la duración de la actividad.




***Iteración 1.***

*Paso 1.* Iniciamos con un potencial factible, el cual se muestra en la siguiente figura, donde $a(i)$ para todo $i \in X$ representa el potencial.

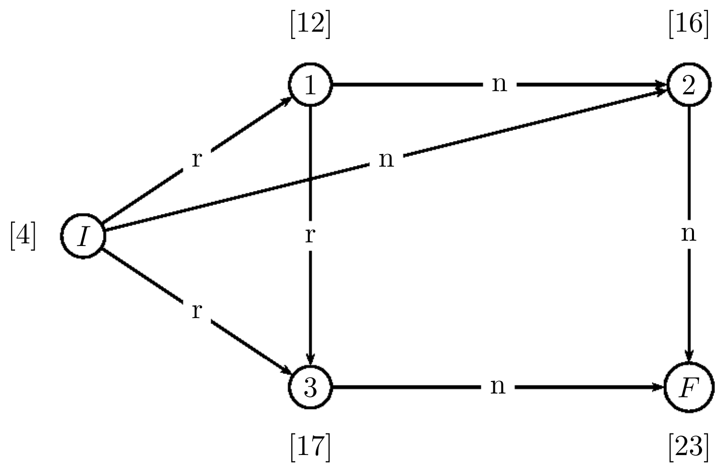


*Paso 2.* $A^+ = \{(2, F)\}$

*Paso 3.* Coloreamos la red como se ve en la gráfica anterior.

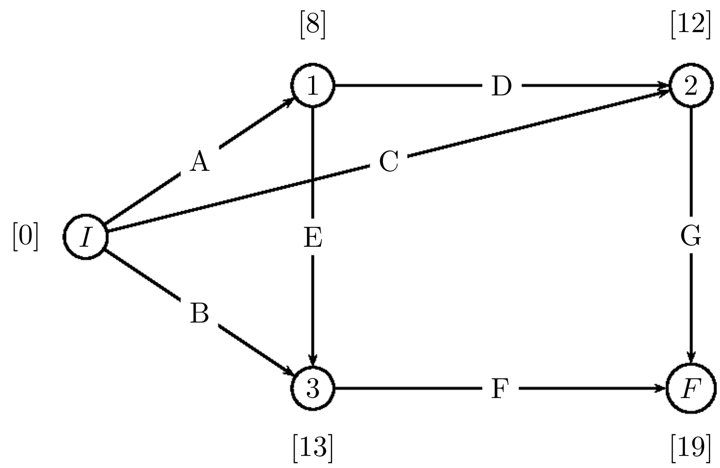
*Paso 4.* Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (2, F)$, el cual se encuentra en el corte $Q = \{(I, 1), (I, 2), (1, 3), (2, F)\}$, donde $S = \{1, 2\}$ y $S' = \{I, 3, F\}$.

*Paso 5.* Calculamos $\alpha = min\{5, 4, 7\} = 4$ y actualizamos el potencial en los nodos que se de $S'$, el cual se muestra en la siguiente gráfica




***Iteración 2.***

*Paso 2.* $A^+ = \varnothing$ Fin. El potencial actual sobre la red resuelve el problema. Es decir, hemos encontrado un potencial factible. Si deseamos que $a(I) = 0$ entonces debemos restar a todos los potenciales el valor actual de $a(I)$, que en este caso es igual a 4. Quedando la siguiente gráfica




Por lo tanto podemos concluir que hemos encontrado una duración factible para cada actividad:

| Actividad | Duración en unidades de tiempo | Duración |
|---|---|---|
| A | 0 - 8 | 8 |
| B | 0 - 12 | 12 |
| C | 0 - 13 | 13 |
| D | 8 - 12 | 4 |
| E | 8 - 13 | 5 |
| F | 13 - 19 | 6 |
| G | 12 -19 | 7 |

## 2.3. Igualdad en color, diferencia en significado

En esta sección veremos que dependiendo del problema a resolver y el color que cada arco posea tiene un significado distinto; cuando aplicamos el algoritmo de rectificación de flujo buscamos que haya ciclos, los cuales permiten distribuir el flujo por éste (si es que existe dicha solución), puesto que comenzamos con un flujo óptimo; en el sentido de que es la cantidad máxima de flujo que pasará por la red debido a las restricciones de oferta y demanda, mientras que durante el algoritmo lo que se busca es la factibilidad. De manera similar cuando aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión, buscamos que haya cortes puesto que éstos en cada iteración permiten encontrar un potencial factible (si es que existe) ya que comenzamos generalmente con un potencial de cero, que poco a poco va haciendo que el diferencial de cada arco se encuentre dentro de las cotas inferior y superior. Veamos a que nos referimos:

| Color | Flujos | Diferenciales |
|---|---|---|
| verde | aumenta o disminuye | se queda igual |
| blanco | puede aumentar | puede bajar |
| negro | puede disminuir | puede aumentar |
| rojo | se queda igual | puede aumentar o disminuir |

**Más semejanzas**

Aquí deseamos destacar ciertas semejanzas entre los dos problemas:

| Función | Flujos y Divergencias | Función | Potenciales y Tensión |
|---|---|---|---|
| flujo | $x : A \to R$ | tensión | $v : A \to R$ |
| divergencia | $y : X \to R$ | potencial | $u : X \to R$ |

donde $y = div(x)$. De aquí que es posible establecer la siguiente igualdad:

$$vx = -uy$$

3

# Flujo coloreado a Costo Mínimo

En este capítulo hablaremos de lo que constituye el tema central del presente trabajo : *El Flujo a Costo Mínimo.* Dicho problema como su nombre lo indica pretende enviar flujo factible a través de una red definida al menor costo posible. A diferencia de lo visto hasta ahora, aquí los arcos tendrán más de una restricción: de capacidad y de costo por unidad de flujo, para los nodos la restricción no cambia, siendo ésta sólo la de oferta. El aspecto relevante de este capítulo es que unifica lo ya aprendido en los dos primeros. Esto se logra debido al *algoritmo de distribución factible* y representa una demostración constructiva del *Teorema de Distribución Factible* el cual establece las condiciones bajo las cuales el problema del flujo a costo mínimo tiene solución. Además, cabe resaltar que dicho algoritmo hace uso de dos algoritmos principalmente: El *algoritmo de rectificación de flujo*, que como ya sabemos encuentra un flujo factible, y el *algoritmo de rectificación de tensión* que encuentra un diferencial factible. Estos a su vez utilizan como subrutina el *algoritmo de Minty* en la detección de ciclos o cortes coloreados. Comenzaremos hablando del Problema Lineal de Distribución Factible que será resuelto con el algoritmo de Distribución Factible y finalmente veremos algunas aplicaciones.

## 3.1. Problema de Distribución Lineal Factible

Supongamos que tenemos una gráfica $G$ conexa y cada arco $j$ en ella tiene asociado un intervalo de capacidades inferior y superior parar el flujo, las cuales se denotan del siguiente modo: $[c^-(j), c^+(j)]$ y cada nodo $i$ tiene una demanda $b(i)$, donde $b(X) = 0$, es decir, la suma de todas las ofertas (entendiendo a las demandas como ofertas negativas) son igual a cero, en otras palabras que las ofertas cubren las demandas para los respectivos nodos. Estos datos son los que caracterizan al problema de distribución factible, en el cual se desea determinar un flujo que respete las restricciones anteriores, como se vio en capítulos anteriores; pero ahora también nos ocuparemos de los costos asociados a los flujos. Supongamos que el costo asociado al flujo $x(j) \in [c^-(j), c^+(j)]$ está dado por la siguiente expresión $d(j)x(j)$, donde $d(j)$ es el costo por unidad de flujo asociado a cada arco $j$. Así el costo de una solución $x$ al problema de distribución factible es la suma de tal expresión, donde lo que se pretende es que el costo sea el más bajo posible. A continuación se formula el problema.

**Problema Lineal de Distribución Factible**

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \Sigma_{j\in A} d(j)x(j) = d \cdot x & \\ \text{s.a} & & \\ & c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) & \forall j \in A \\ & y(i) = b(i) & \forall i \in X \end{array}$$

donde: $(y = div(x))$

Una aplicación típica del problema de flujo a costo mínimo es pensar en los nodos como localidades: ciudades, almacenes o fábricas donde un cierto artículo es producido o consumido, de este modo podemos pensar que los arcos son las vías de transporte entre las localidades, cada una con un costo de transporte asociado $d(j)$ por unidad transportada. El problema consiste en trasladar el artículo de los puntos de producción a los puntos de consumo al menor costo sin violar las restricciones de capacidades de las vías de transporte.

Ya en el capítulo anterior veíamos lo que es un flujo factible, recordemos que es aquel que satisface las restricciones de capacidad y será una solución óptima si además minimiza el costo total. La idea básica que presenta el algoritmo de distribución factible consiste en tener una solución factible $x$ y ésta podrá ser mejorada distribuyendo el flujo a través de un ciclo $P$ que satisface:

$$0 > \sum_{j\in P^+} d(j) - \sum_{j\in P^-} d(j) = d \cdot e_P$$

Es decir, en cada iteración del algoritmo que se encuentre un ciclo, éste se construye de forma tal que la suma de los costos asociados a los arcos del ciclo (como se indica en la expresión anterior) establecen que el costo se verá disminuido; para los arcos que están en $P^+$ su costo aumenta, pues el flujo lo hace, análogamente; para los arcos en $P^-$ su costo disminuye ya que el flujo lo hace. De este modo al encontrar un flujo $t > 0$ suficientemente pequeño que circule por el ciclo, tendremos que al menos el flujo $x' = x + te_P$ seguirá satisfaciendo las restricciones de capacidad. Como $x$ es factible, lo anterior será cierto para $x'$ si y sólo si $x(j) + t \leq c^+(j)$ para toda $j \in P^+$ y $x(j) - t \geq c^-(j)$ para todo $j \in P^-$. Así la divergencia satisface que: $div(x') = div(x) = b$, puesto que $div(e_P) = 0$ por ser un ciclo. En otras palabras, $x'$ es otra solución factible y como $0 > d \cdot e_P$ podemos decir que:

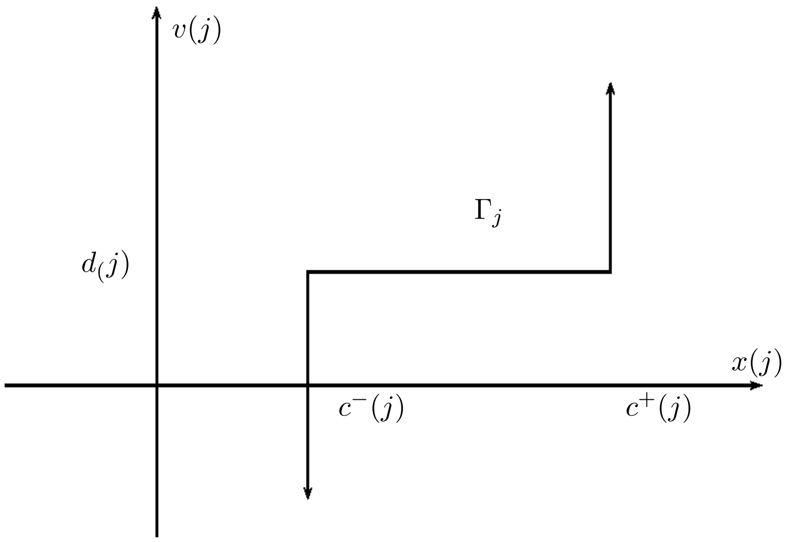
$$[\text{costo de } x'] = [\text{costo de } x] + td \cdot e_P < [\text{costo de } x]$$

Es importante observar que si $P$ es de capacidades no limitadas, es decir si $c^+(j) = \infty$ para todo $j \in P^+$ y $c^-(j) = -\infty$ para todo $j \in P^-$, entonces $t$ puede ser arbitrariamente grande y $x'$ seguirá siendo factible con un costo arbitrariamente cercano a $-\infty$. Esto quiere decir que el problema no tiene solución puesto que nunca alcanzamos el costo mínimo.

## 3.2. Algoritmo de Distribución Óptima

El método que a continuación será presentado se encuentra en términos de ciertas curvas $\Gamma_j$ asociadas con los arcos $j$ en un problema de distribución lineal óptima, definidas del siguiente modo:

$$\Gamma_j = \begin{cases} (x(j), v(j)) \in R^2 \ que\ satisfacen & \\ c^-(j) \leq x(j) \leq c^+(j) & teniendo \\ v(j) \leq d(j) & si\ x(j) < c^+(j)\ y \\ v(j) \geq d(j) & si\ x(j) > c^-(j) \end{cases}$$




En la figura anterior podemos observar la función $\Gamma_j$ en el caso donde $c^-(j)$ y $c^+(j)$ son ambos finitos. Pero si $c^+(j) = +\infty$ la línea vertical del lado derecho desaparece, análogamente si $c^-(j) = -\infty$, entonces es la línea vertical izquierda la que desaparece. Si ambos $c^+(j) = +\infty$ y $c^-(j) = -\infty$, $\Gamma_j$ se degenera siendo una sola línea horizontal y si $c^+(j) = c^-(j)$ se degenera en una línea vertical.

En el siguiente teorema se unifican las condiciones para la construcción de un flujo y un diferencial óptimo, con base en la definición de $\Gamma_j$ para todo $j \in A$.

**Teorema 4** (Teorema de Optimalidad Lineal para Flujos)**.**
*Un flujo $x$ es una solución óptima al problema de distribución lineal óptima si y sólo si $div(x) = b$ y hay un potencial $u$ cuyo diferencial $v$ satisface:*

$$(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \textit{ para todo } j \in A$$

*Demostración.*
Supongamos que $x$ y $u$ satisfacen la siguiente condición :

$$(x(j), v(j)) \in \Gamma_j \text{ para todo } j \in A$$

Sea $x$ es una solución factible. Sea $x'$ otra solución factible. Así, de acuerdo a la definición de $\Gamma_j$ tenemos:
Consideremos primero el caso en el que el flujo se encuentra dentro de los intervalos de capacidad: $c^-(j) < x(j) < c^+(j)$ entonces se cumple que $v(j) \leq d(j)$ y también que $v(j) \geq d(j)$ de aquí podemos decir que: $v(j) = d(j)$.
Ahora veamos que sucede en los extremos:

Si $x(j) = c^+(j)$ entonces el diferencial es igual o se encuentra por arriba del costo $v(j) \geq d(j)$ y además se cumple que $x'(j) \leq x(j)$ por ser ambos factibles y por que $x$ ya se encuentran en el extremo $c^+(j)$. Así $x'(j) - x(j) \leq 0$ por lo que si multiplicamos una cantidad negativa en ambos lados de la siguiente desigualdad: $v(j) \geq d(j)$ tenemos que

$$v(j)[x'(j) - x(j)] \leq d(j)[x'(j) - x(j)]$$

Análogamente si $x(j) = c^-(j)$ entonces el diferencial es igual o se encuentra por abajo del costo $v(j) \leq d(j)$ y además se cumple que $x'(j) \geq x(j)$ por ser ambos factibles y por que $x$ ya se encuentran en el extremo $c^-(j)$. Así $x'(j) - x(j) \geq 0$ si multiplicamos esta cantidad en ambos lados de la siguiente desigualdad tenemos $v(j)[x'(j) - x(j)] \leq d(j)[x'(j) - x(j)]$. De este modo

$$d(j)[x'(j) - x(j)] \geq v(j)[x'(j) - x(j)]$$

en todos los casos. Haciendo esto mismo sobre todos los arcos de la red tenemos:

$$d \cdot [x' - x] \geq v \cdot [x' - x]$$

tomando el lado derecho de la desigualdad tenemos

$$v \cdot [x' - x] = -u \cdot div[x' - x] = -u \cdot [b - b] = 0.$$

de aquí que $d \cdot [x' - x] \geq 0$; por lo tanto $d \cdot x' \geq d \cdot x$ es decir como $x$ satisface las condiciones de $\Gamma$ entonces el flujo es óptimo. $\square$

El siguiente algoritmo es una prueba constructiva del teorema anterior y muestra que al aplicarlo a una solución factible genera un potencial $u$ que satisface la condición del teorema o bien si es posible encuentra una solución $x'$ de menor costo que $x$.

Una manera de ver el problema es pensando en $x$ como un flujo de bienes y $u(i)$ como el precio por unidad del nodo $i$, entonces $v(j)$ es el precio por incremento (posiblemente negativo) en transportar bienes a través de $j$ y $[d(j) - v(j)]x(j)$ es el costo neto en transportar $x(j)$ unidades. Las relaciones $(x(j), v(j)) \in \Gamma_j$ significan que esta cantidad es minimizada en cada arco $j$; si $d(j) - v(j) > 0$ se envía tan poco como sea posible $[x(j) = c^-(j)]$ donde si $d(j) - v(j) < 0$ se envía tanto como sea posible $[x(j) = c^+(j)]$. A continuación se presenta el algoritmo que da solución al problema.

**Algoritmo de Distribución Factible**

*Objetivo.* Encontrar un flujo factible al menor costo posible.

*Descripción*

*Paso 1.* Dar una solución factible $x$ al problema de distribución lineal óptima. (Aplicar el Algoritmo de Rectificación de Flujo).

*Paso 2.* Definir un intervalo de generación de la siguiente manera:

$$[d_x^-(j), d_x^+(j)] = \begin{cases} [d(j), d(j)] & si\ c^-(j) < x(j) < c^+(j) \\ (-\infty, d(j)] & si\ c^-(j) = x(j) < c^+(j) \\ [d(j), \infty) & si\ c^-(j) < x(j) = c^+(j) \\ (-\infty, \infty) & si\ c^-(j) = x(j) = c^+(j) \end{cases}$$

*Paso 3.* Aplicar el algoritmo de rectificación de tensión.

1. Si se obtiene un diferencial factible para estos intervalos, esto es, un potencial $u$ tal que $v = \Delta u$ satisface:

$$d_x^-(j) \leq v(j) \leq d_x^+(j) \text{ para todo } j \in A$$

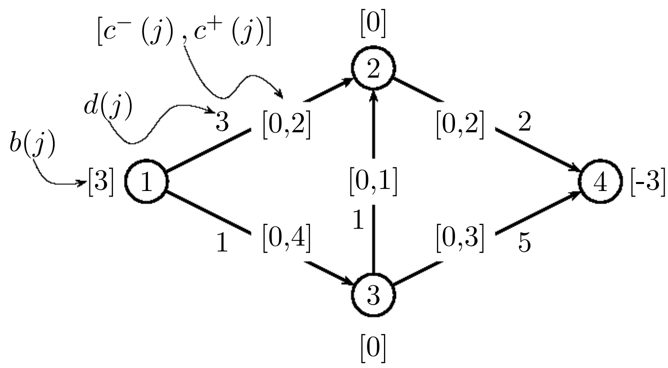
   Fin. $x$ es una solución óptima.
2. Si no ir al Paso 4.

*Paso 4.* Si se determinó un ciclo $P$ con $d_x^+(P) < 0$ entonces calcular:

$$\alpha = \text{mín} \begin{cases} c^+(j) - x(j) & para\ j \in P^+ \\ x(j) - c^-(j) & para\ j \in P^- \end{cases}$$

1. Si $\alpha = \infty$ Fin, P es un ciclo tal que los arcos que lo forman cumplen que $c^+ = \infty$ y $c^- = -\infty$ por lo que el ínfimo en el problema es $-\infty$.
2. Si $\alpha > 0$ entonces: Sea $x' = x + \alpha e_P$. Así $x'$ es otra solución factible y $d \cdot x' = d \cdot x + \alpha d \cdot e_p < d \cdot x$. De este modo $x'$ es más barato que $x$. Ahora vamos al Paso 2 con $x'$.

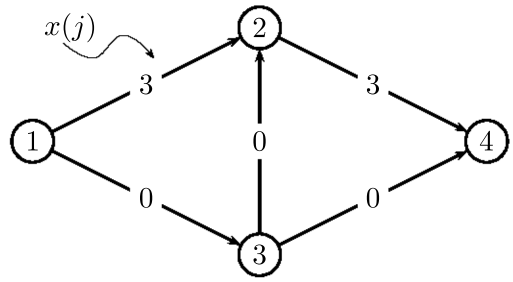
*Ejemplo.* Veamos la aplicación del algoritmo sobre la siguiente red.




***Iteración 1.***

*Paso 1.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de flujo el cual comienza con un flujo factible con respecto a las restricciones de oferta, es decir, en este momento no importa que no cumpla con las restricciones de capacidad de los arcos.

1. Decidimos pasar todo el flujo por los arcos $(1,2)$ y $(2,4)$ como se muestra en la siguiente figura.

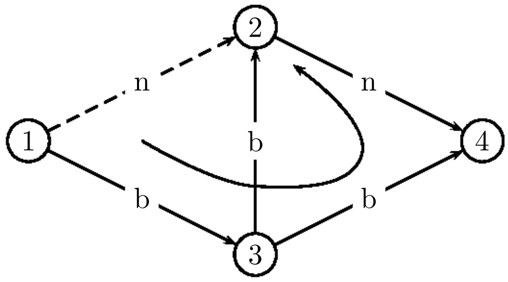



2. Como no se cumplen las restricciones de capacidad de los arcos aplicaremos el algoritmo de rectificación de flujo.

*a*) El flujo factible respecto a las restricciones de oferta es 3.

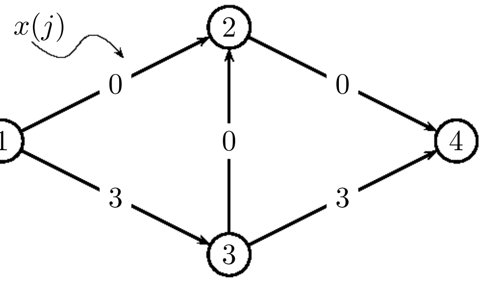
*b*) $A^+ = \{(1,2),(2,4)\}$, escogemos $j^* = (1,2)$ y coloreamos los arcos de la red de acuerdo a las restricciones.

*c*) Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (1,2)$, quedando la siguiente gráfica.



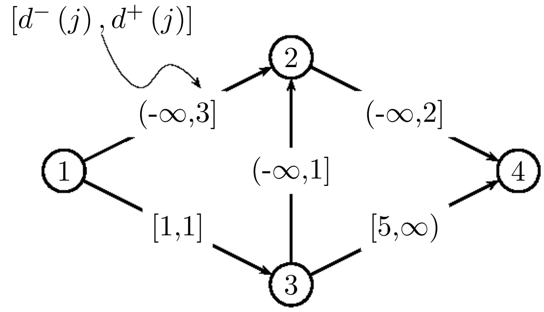

*d*) El arco $j^* = (1,2)$ se encuentra en un ciclo, por lo que debemos distribuir el flujo a través de los arcos que se encuentran en el ciclo, para saber que cantidad de flujo enviaremos, calculamos $\alpha = \text{mín}\{3,3,4,3\} = 3$

*e*) Actualizamos el flujo por los arcos del ciclo como se muestra en la siguiente gráfica.



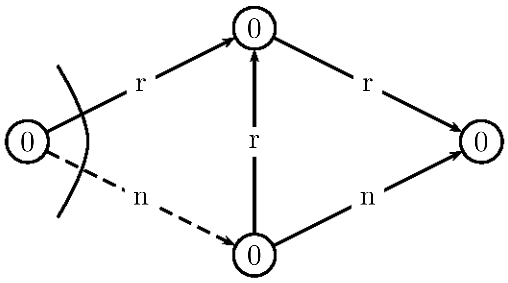

*f*) Vamos al Paso 2 del algoritmo de rectificación de tensión, donde vemos que $A^+ = A^- = \varnothing$. Por lo tanto, podemos concluir que hemos encontrado una solución factible del problema lineal de distribución óptima.

*Paso 2.* Ahora definimos los intervalos de generación:

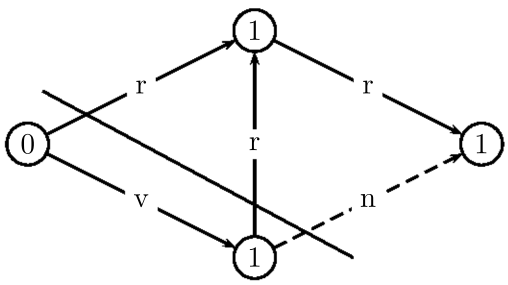



*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión a la gráfica anterior.

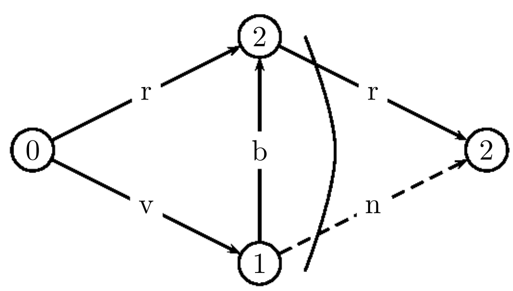
1. Comenzamos con un potencial igual a cero en todos los nodos.
2. $A^+ = \{(1,3),(3,4)\}$, escogemos el arco $j^* = (1,3)$.
3. Coloreamos los arcos de acuerdo a las restricciones, aplicamos el algoritmo de Minty.
4. El arco $j^* = (1,3)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,2),(1,3)\}$ donde $S = \{1\}$ y $S' = \{2,3,4\}$, por lo que hay que actualizar el potencial en los nodos de $S'$.



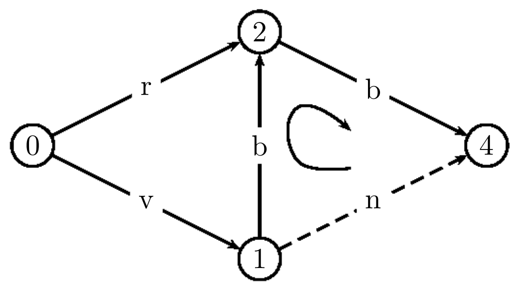

5. $\alpha = \text{mín}\{1,3\} = 1$, el potencial actualizado se encuentra en la siguiente gráfica.



1. $A^+ = \{(3,4)\}$
2. Coloreamos la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (3,4)$.
3. El cual resulta estar en el corte $Q = \{(1,2),(3,2),(3,4)\}$ donde $S = \{1,3\}$ y $S' = \{2,4\}$.
4. $\alpha = \text{mín}\{5,1,2\} = 1$.
5. Actualizamos el potencial en una unidad a los nodos de $S'$ en la siguiente red:



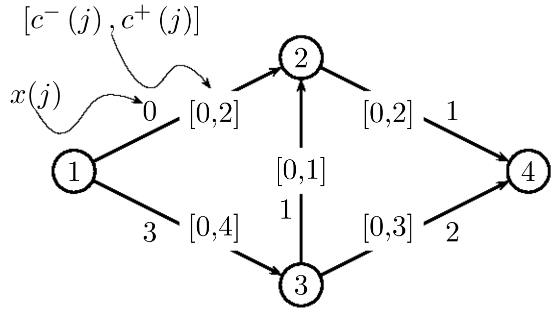

1. $A^+ = \{(3,4)\}$.
2. Coloreamos la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (3,4)$.
3. El cual resulta estar en el corte $Q = \{(2,4),(3,4)\}$, donde $S = \{1,2,3\}$ y $S' = \{4\}$.
4. $\alpha = \text{mín}\{4,2\} = 2$.
5. Actualizamos el potencial en una unidad en los nodos de $S'$ en la siguiente red:




1. $A^+ = \{(3,4)\}$
2. Coloreamos la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (3,4)$
3. El cual resulta estar en el ciclo $P = \{(3,2),(2,4),(3,4)\}$ nótese que $d \cdot e_P = -1 < 0$.

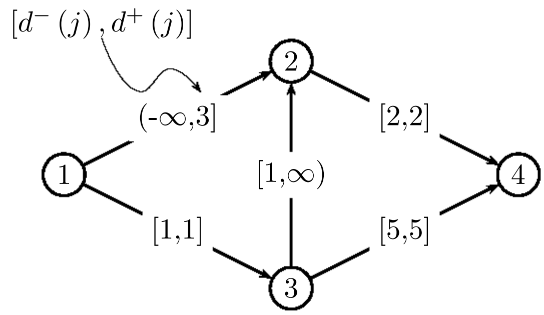
*Paso 4.* Encontramos un ciclo lo cual significa que hay que distribuir el flujo a través de los arcos del ciclo, lo cual mejorará en términos del costo la solución que buscamos.

1. $\alpha = \text{mín}\{1, 2, 2\} = 1$.
2. Actualizamos el flujo en una unidad en los arcos que forman el ciclo $P$ en la siguiente red:



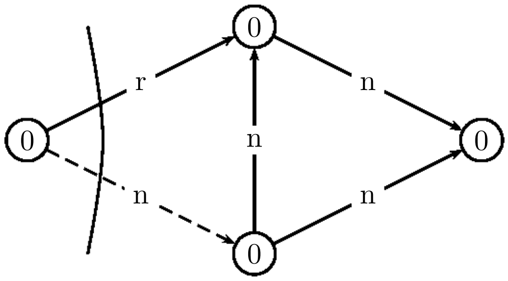

***Iteración 2.***

*Paso 2.* Construimos los intervalos de generación:

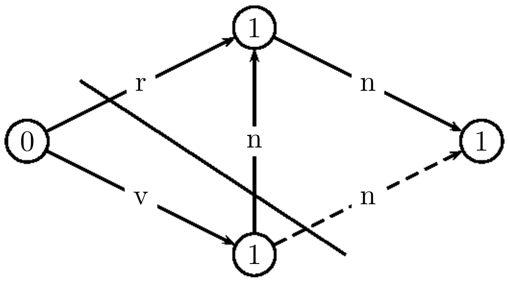



*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión:

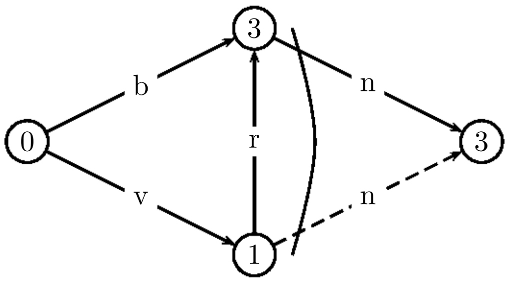
1. Comenzamos con un potencial igual a cero en todos los nodos.
2. $A^+ = \{(1, 3), (2, 4)(3, 2), (3, 4)\}$, escogemos $j^* = (1, 3)$.




3. En la gráfica anterior podemos ver que el arco $j^* = (1, 3)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1, 2), (1, 3)\}$, donde $S = \{1\}$ y $S' = \{2, 3, 4\}$.
4. Actualizamos el potencial en los nodos de $S'$, $\alpha = \text{mín}\{1, 3\}$. Los potenciales actualizados se encuentran en la siguiente red:

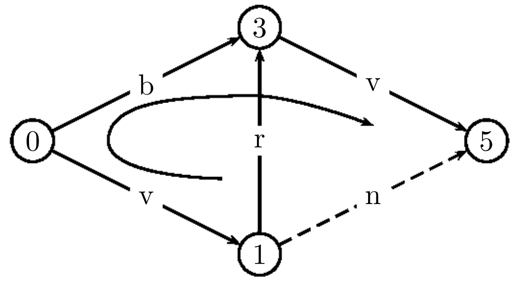



1. $A^+ = \{(3, 2), (3, 4), (2, 4)\}$, escogemos el arco $j^* = (3, 4)$.
2. Coloreamos la red, aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^* = (3, 4)$.
3. El arco $j^* = (3, 4)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4)\}$.
4. Calculamos $\alpha = min\{5, \infty, 2\} = 2$ y actualizamos el potencial sobre la red:



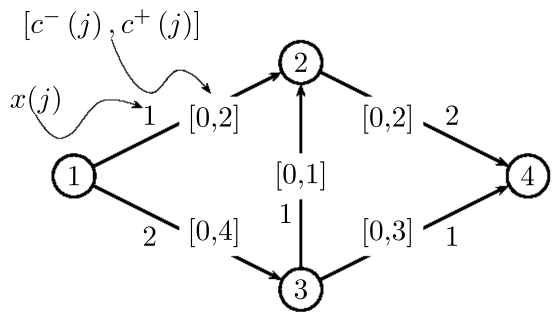

1. $A^+ = \{(3, 4), (2, 4)\}$, escogemos el arco $j^* = (3, 4)$.

2. Coloreamos la red, aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^* = (3, 4)$.
3. El arco $j^* = (3, 4)$ se encuentra en el corte $Q = \{(2, 4), (3, 4)\}$.
4. Calculamos $\alpha = \text{mín}\{3, 2\} = 2$ y actualizamos el potencial sobre la red:



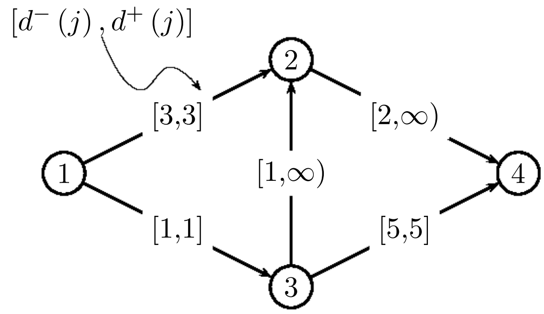

1. $A^+ = \{(3, 4)\}$, escogemos el arco $j^* = (3, 4)$.
2. Coloreamos la red, aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (3, 4)$.
3. El arco $j^* = (3, 4)$ se encuentra en el ciclo $P = 3 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.

*Paso 4.* Como el arco $j^* = (3, 4)$ se encontró en un ciclo $P$, debemos distribuir el flujo a través de los arcos que forman a $P$. Calculamos $\alpha = \text{mín}\{3, 2, 1, 2\} = 1$ y actualizamos el flujo sobre la red:



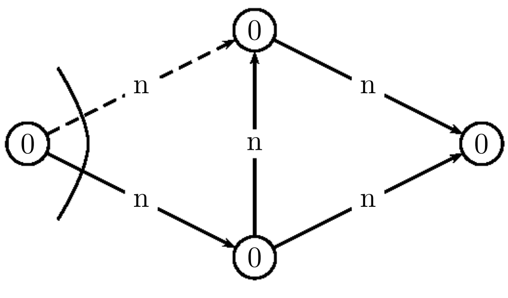

***Iteración 3.***

*Paso 2.* Dado que ya tenemos un flujo factible proseguimos a determinar los intervalos de generación para cada arco y obtenemos los mostrados en la siguiente gráfica.

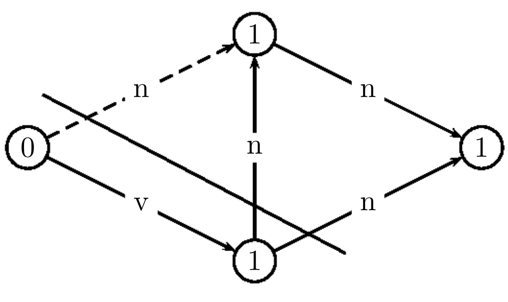



*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión comenzando con un potencial igual a cero en todo los nodos. *Observemos que:*

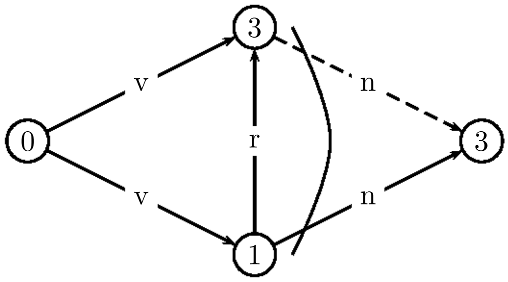
1. $A^+ = \{(1,2),(2,4),(3,2),(1,3),(3,4)\}$, escogemos $j^* = (1,2)$.
2. Colorear los arcos de la red de acuerdo a las restricciones.
3. $j^* = (1,2)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,2),(1,3)\}$, donde $S = \{1\}$ y $S' = \{2,3,4\}$ por lo que hay que actualizar el potencial de los nodos de $S'$.



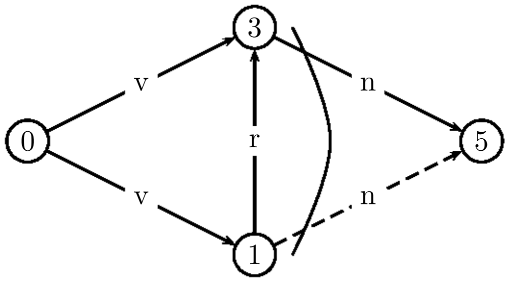

4. $\alpha = \text{mín}\{3,1\} = 1$. Veamos el potencial actualizado en la siguiente red.



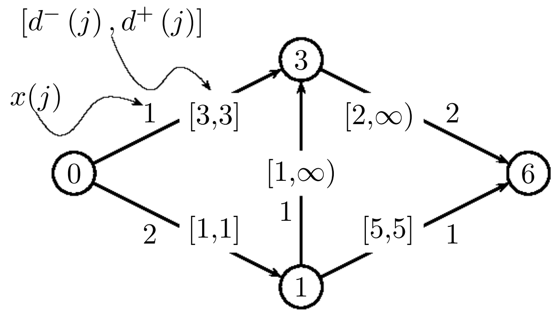
1. $A^+ = \{(1,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$, escogemos $j^* = (1,2)$.
2. Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (1,2)$, vemos que éste se encuentra en un corte $Q = \{(1,2),(3,2),(3,4)\}$.
3. Actualizamos el potencial usando $\alpha = \text{mín}\{2,\infty,5\} = 2$, el cual se muestra en la siguiente gráfica




1. $A^+ = \{(2,4),(3,4)\}$, escogemos $j^* = (2,4)$.
2. Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (2,4)$, vemos que éste se encuentra en el corte $Q = \{(2,4),(3,4)\}$.
3. Actualizamos el potencial usando $\alpha = \text{mín}\{2,3\} = 2$, el cual se muestra en la siguiente gráfica.




1. $A^+ = \{(3,4)\}$, escogemos $j^* = (3,4)$.
2. Aplicamos el algoritmo de Minty a $j^* = (3,4)$, vemos que éste se encuentra en un corte $Q = \{(2,4),(3,4)\}$.
3. Actualizamos el potencial usando $\alpha = \text{mín}\{1,\infty\} = 1$, el cual se muestra en la siguiente gráfica.




***Iteración 4.***

> *Paso 2.* $A^+ = A^- = \varnothing$. Por lo tanto podemos concluir que el potencial actual satisface que $v(j) = \Delta u(j) \in d(j)\ \forall\ j \in A$ además, el valor del flujo factible que pasa a través de la red es 3 cuyo costo es de $3(1) + 1(1) + 2(2) + 1(2) + 5(1) = 15$ unidades monetarias.

## 3.3. Aplicaciones

En esta sección se presentan algunas de las aplicaciones que tiene el algoritmo de Distribución Factible, el cual además de resolver el problema de distribución óptima resuelve problemas tales como; el problema de transporte y el problema de encontrar la ruta más cortas de un nodo raíz a todos los demás nodos de la red. En cada caso comenzaremos por plantear el problema, daremos un ejemplo haciendo las observaciones pertinentes que nos permiten resolverlo a través del algoritmo de Distribución Factible.

**Problema de transporte y algoritmo de Distribución Factible**

*Planteamiento del Problema*

Cuando se hace referencia a problemas de transporte debemos tener en mente que estos se ocupan de la distribución desde cualquier grupo de centros de suministro, llamados orígenes, a cualquier grupo de centros de recepción, llamados destinos, de modo que se minimice el costo total de la distribución. Cada origen tiene ciertos recursos para distribuir a los destinos y cada destino tiene cierta demanda que deberá ser cubierta por los orígenes. Supongamos que se tienen $n$ fábricas de computadoras ubicadas en distintos lugares, con una cierta oferta $o_i$ con $i = 1, ..., n$; $m$ centros de venta cada uno con cierta demanda $d_j$ con $j = 1, ..., m$. Además, transportar la mercancía de las fábricas al centro de venta tiene un costo asociado $c_{ij}$ con $1 \leq i \geq n$, $1 \leq j \geq m$; esta puede interpretarse como el gasto en gasolina y depreciación de los vehículos de transporte, o bien puede considerarse como el tiempo que se tarda en llegar, o la distancia que hay entre éstos. Lo que nos interesa es minimizar dicho costo, sujeto a las restricciones de oferta y demanda. Para poder proceder a su solución es necesario que se cumpla la condición de que la cantidad de oferta total sea igual a la demanda total. Dicho de otro modo lo que deseamos es:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín}\, z & \Sigma_{i=1}^{n}\ \Sigma_{j=1}^{m}\ c_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a} & & \\
 & \Sigma_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i & i = 1, ..., n \\
 & \Sigma_{i=1}^{m} x_{ij} = d_i & j = 1, ..., m \\
 & x_{ij} \geq 0 & i = 1, ..., n \ \ j = 1, ..., m
\end{array}
$$

Recordemos que los problemas de flujo a costo mínimo se caracterizan por tener cinco elementos esenciales que los define como tal y son:

$x_{ij}$ = número de unidades de flujo que pasan del nodo $i$ al nodo $j$.
$b_i$ = oferta neta del nodo $i$.
$d_{ij}$ = costo por unidad de flujo que pasa del nodo $i$ al nodo $j$.
$c_{ij}^{-}$ = capacidad inferior del arco $(i, j)$.
$c_{ij}^{+}$ = capacidad superior del arco $(i, j)$.

Para el caso del problema de transporte la variable $x_{ij}$ no cambia, el vector de ofertas queda como $b_i = (o_1, ..., o_n, d_1, ..., d_m)$, el costo $d_{ij} = c_{ij}$, en cuanto a las capacidades tenemos que $c_{ij}^{-} = 0$ y $c_{ij}^{+} = \infty$ para todo $(i, j) \in A$. Así el problema de transporte es un excelente candidato para resolverse a través del algoritmo de distribución factible, ya que consiste en pasar una cierta cantidad de flujo a costo mínimo y ambos tienen la misma estructura.

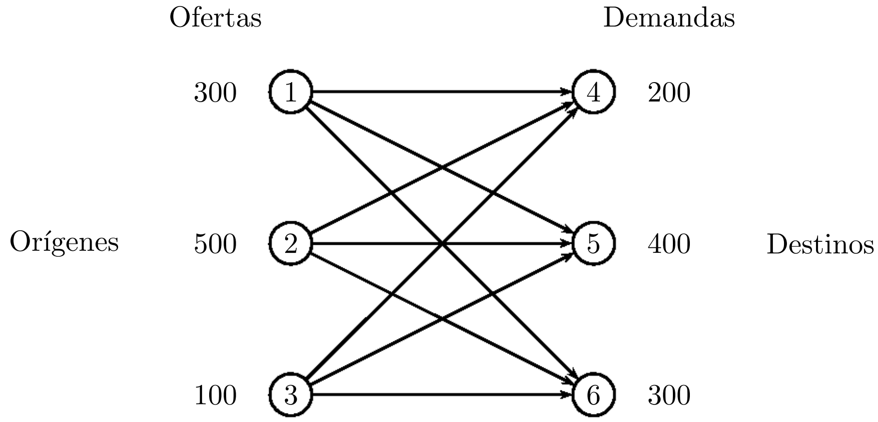
*Ejemplo.*

Consideremos el siguiente problema de transporte; se tienen tres fábricas de discos en diferentes puntos de la ciudad y hay tres centros de venta. Las fábricas tienen una oferta de: $300, 500$ y $100$ unidades (en miles de discos) respectivamente, los centros de venta consideran una demanda de: $200, 400$ y $300$ unidades (en miles de discos). Los costos de transporte por unidad de producto desde las fábricas hasta los centros de venta se muestran en la siguiente tabla.

Costos de Transporte

| | Centro de Venta 1 | Centro de Venta 2 | Centro de Venta 3 |
|---|---|---|---|
| Fábrica 1 | 20 | 16 | 24 |
| Fábrica 2 | 10 | 10 | 8 |
| Fábrica 3 | 12 | 18 | 10 |

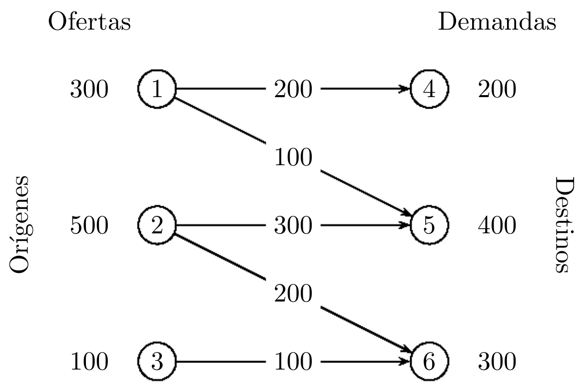
Dada esta información lo que se desea es minimizar el costo total de transporte. donde $X = \{$fábricas $i = \{1, 2, 3\}$ y centros de venta$j = \{4, 5, 6\}\}$, $A = \{(i, j)|i = \{1, 2, 3\}; j = \{4, 5, 6\}\}$; $b(i) = (300, 500, 100)$ y $b(j) = (200, 400, 300)$; $f : A \to R$ es la función de costo y se muestra en la tabla anterior. Gráficamente el problema es el siguiente:




***Iteración 1.***

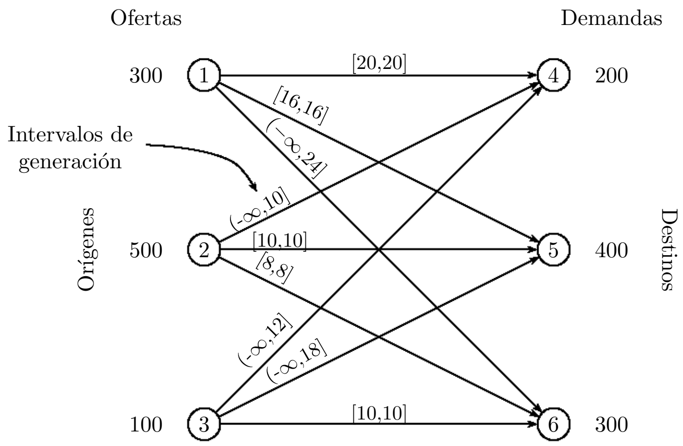
*Paso 1.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de flujo.

- Determinar los arcos por los cuales pasará el flujo, el cual debe ser factible con respecto a las restricciones de oferta, es decir, en este momento no importa que no cumpla con las restricciones de capacidad. Decidimos pasar el flujo por los arcos $(1, 4), (1, 5), (2, 5), (2, 6)$, $(3, 6)$ como se muestra en la siguiente figura.



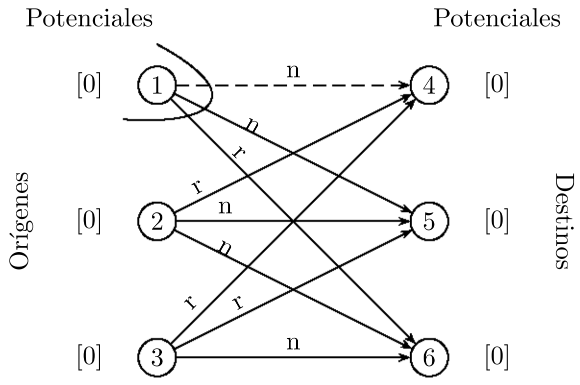
- El conjunto $A^+ \cup A^- = \varnothing$. Fin, el flujo actual sobre la red es factible.

*Paso 2.* Definimos los intervalos de generación y los podemos observar en la siguiente gráfica:



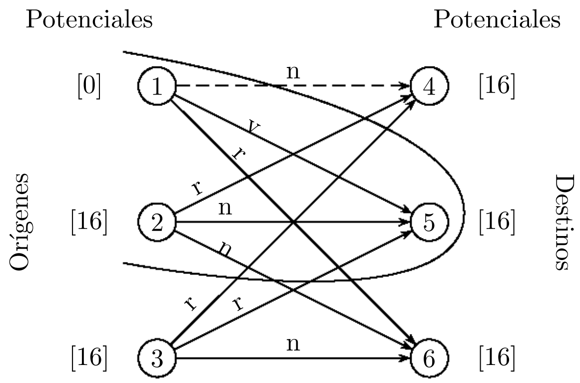

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión.

1. Comenzamos con un potencial igual a cero.
2. $A^+ = \{(1,4),(1,5),(2,5),(2,6),(3,6)\}$. Sea $j^* = (1,4)$.
3. Coloreamos los arcos de la red, quedando ésta del siguiente modo:



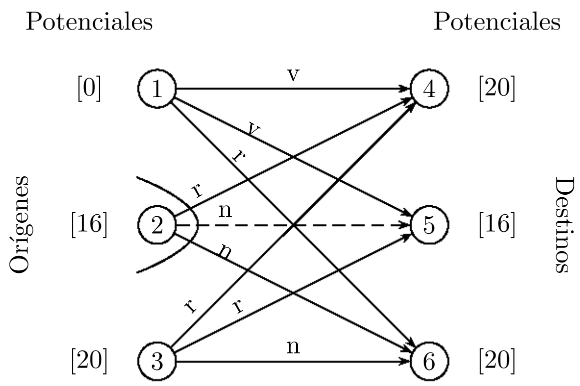

Como $j^* = (1,4)$ forma parte del corte $Q = \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$, calculamos el valor de $\alpha = \text{mín}\{16, 24, 20\}$. Actualizamos el potencial en la siguiente red.

1. $A^+ = \{(1,4),(2,5),(2,6),(3,6)\}$. Sea $j^* = (1,4)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^*$.



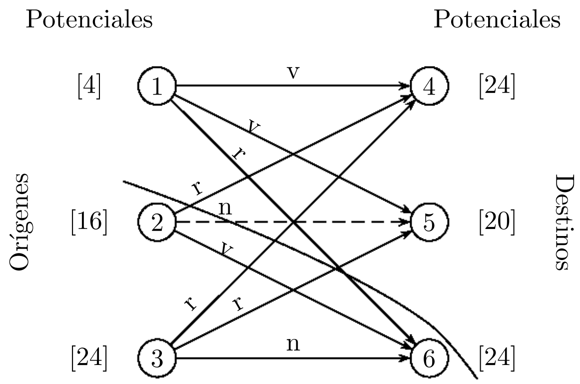

Como el arco $j^* = (1,4)$ se encuentra en el corte coloreado $Q = \{(1,4), (2,4), (2,6), (3,5), (1,6)\}$, calculamos $\alpha = \text{mín}\{4, 10, 8,\ 8, \infty\}$ que es la cantidad en la cual aumenta el potencial en los nodos fuera del corte. Actualizamos el potencial en la siguiente gráfica

1. $A^+ = \{(2,5), (2,6), (3,6)\}$. Sea $j^* = (2,5)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^*$.



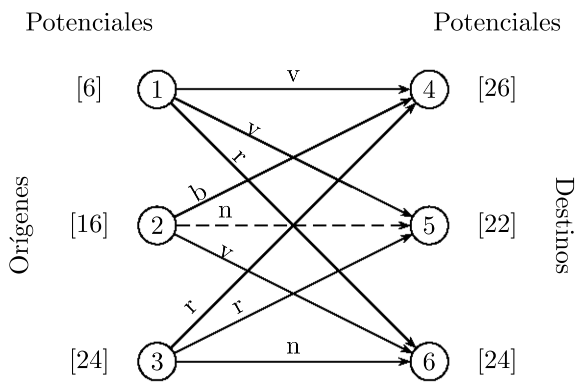

Como el arco $j^* = (2,5)$ se encuentra en el corte coloreado $Q = \{(2,4), (2,5), (2,6)\}$ donde $S = \{2\}$ y $S' = \{1,3,4,5,6\}$, calculamos $\alpha = \text{mín}\{6, 4, 10\}$ que es la cantidad en la cual aumenta el potencial en los nodos de $S'$. Actualizamos el potencial en la siguiente gráfica

1. $A^+ = \{(2,5), (3,6)\}$ Sea $j^* = (2,5)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.




Como el arco $j^* = (2,5)$ se encuentra en el corte coloreado $Q = \{(2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (1,6)\}$ donde $S = \{2,3,6\}$ y $S' = \{1,4,5\}$, calculamos $\alpha = min\{2, 12,\ 22, \infty,\ 6\}$ que es la cantidad en la cual aumenta el potencial en los nodos de $S'$. Actualizamos el potencial en la siguiente gráfica

1. $A^+ = \{(2,5), (3,6)\}$. Sea $j^* = (2,5)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.

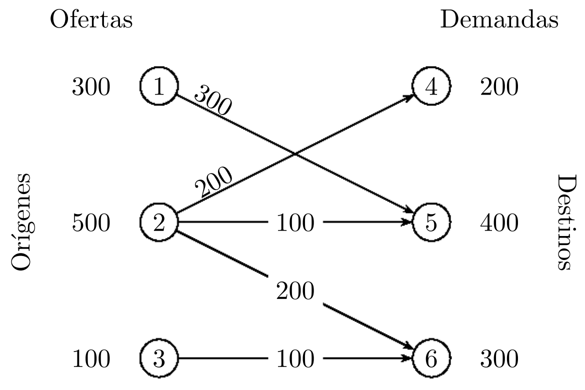



El arco $j^* = (2,5)$ se encuentra en el ciclo coloreado

$$P : 2 \to 4 \leftarrow 1 \to 4 \leftarrow 2$$

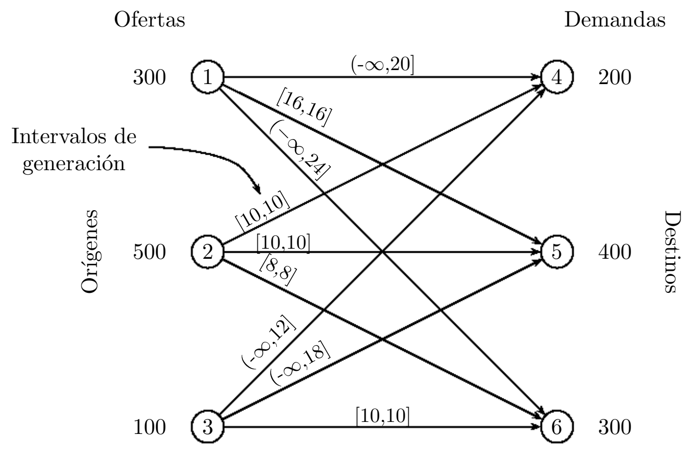
que podemos ver en la gráfica anterior.

*Paso 4.* Actualizamos el flujo a través del ciclo $P$ en $\alpha$ unidades, donde $\alpha = \text{mín}\{\infty, 200, \infty, 300\}$ como se muestra en la siguiente gráfica.



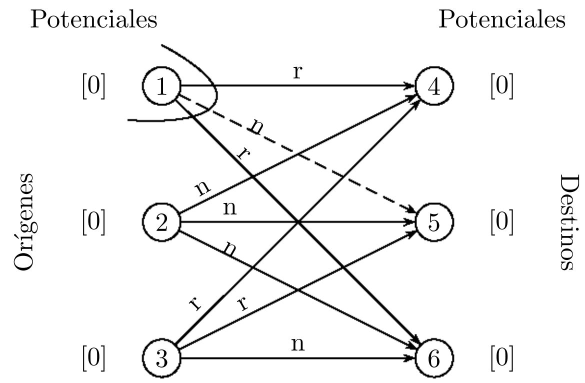

***Iteración 2.***

*Paso 2.* Construimos los nuevos intervalos de generación y se muestran en la siguiente gráfica



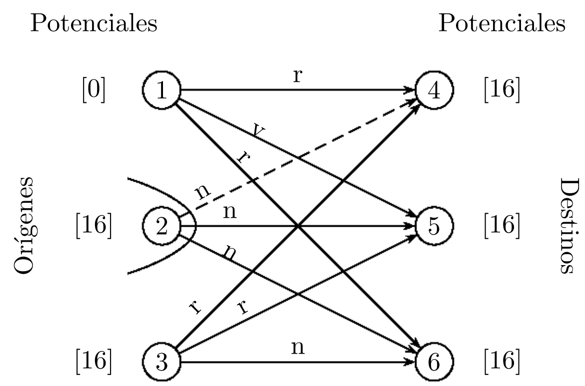

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión.

1. Comenzamos con un potencial factible igual a cero.
2. $A = \{(1,5),(2,4),(2,5),(2,6),(3,6)\}$.
3. Coloreamos la red como se muestra a continuación:



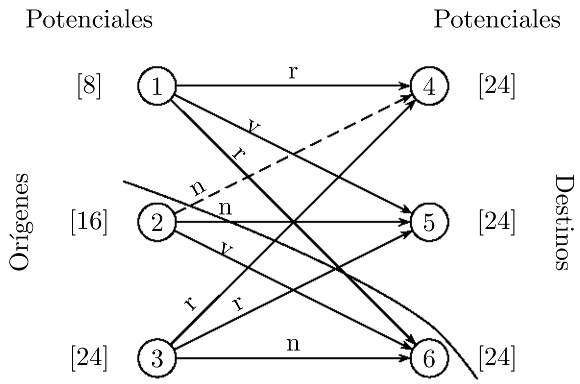

Como $j^* = (1,5)$ se encuentra en el corte coloreado
$Q = \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$ de la gráfica anterior; calculamos
$\alpha = \text{mín}\{20, 24, 16\}$ y actualizamos los potenciales en la siguiente red.

1. $A = \{(2,4),(2,5),(2,6),(3,6)\}$ Sea $j^* = (2,4)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty al arco $j^*$.



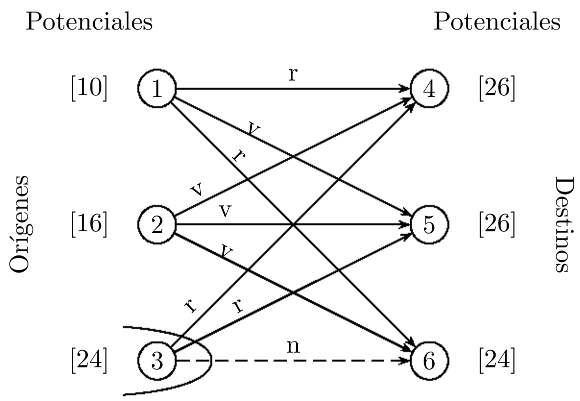

Como $j^* = (2,4)$ se encuentra en el corte coloreado
$Q = \{(2,4),(2,5)(2,6)\}$, calculamos $\alpha = \text{mín}\{10, 8, 10\}$ y actualizamos el potencial en la siguiente red.

1. $A^+ = \{(2,4),(2,5),(3,6)\}$. Sea $j^* = (2,4)$.
2. Coloreamos los arcos de la red y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.



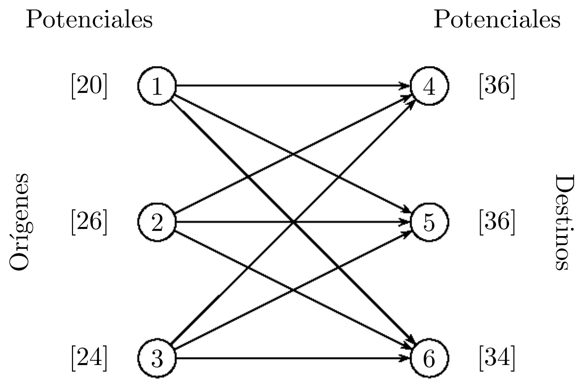

Como el arco $j^*$ se encuentra en el corte $Q = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(1,6)\}$, calculamos $\alpha = \text{mín}\{2, 12, 2, 18, \infty\}$

1. $A^+ = \{(3,6)\}$ Sea $j^* = (3,6)$.
2. Se colorean los arcos del siguiente modo y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.




El arco $j^* = (3,6)$ se encuentra en el corte coloreado $Q = \{(3,4),(3,5),(3,6)\}$, calculamos $\alpha = \text{mín}\{10, 16, 10\}$ y actualizamos los potenciales.

1. $A^+ = \varnothing$. Por lo tanto ya acabamos, los potenciales actualizados los vemos en la siguiente red.




La distribución de flujo óptimo es $x_{15} = 300$, $x_{24} = 200$, $x_{25} = 100$, $x_{26} = 200$, $x_{36} = 100$, que es justo el flujo con el cual comenzamos esta iteración, con un costo de \$10, 400. Por lo anterior deben enviarse 300 unidades de la fábrica 1 al centro de venta 5, con respecto a la fábrica 2 se enviarán: 200 unidades al centro de venta 4, 100 unidades al centro de venta 5 y 200 unidades al centro de venta 6, la fábrica 3 enviará 100 unidades al centro de venta 6.

### Arborescencia de rutas más cortas y algoritmo de distribución factible

*Planteamiento del Problema*

En el capítulo uno vimos que es posible encontrar una cadena que nos muestra cómo llegar de un lugar a otro, ahora lo que deseamos encontrar es una cadena cuya característica es que la suma de los pesos asociados a los arcos sea la más pequeña, eso es lo que denominaremos "'ruta más corta de un nodo a otro"'. Así las cosas, lo que buscamos es la ruta más corta de un nodo a todos los demás en la red. Para que sea posible la solución de este problema a través del algoritmo de distribución factible, es necesario que se cumplan ciertas condiciones: Primero que exista al menos una cadena positiva del nodo de inicio (raíz) a todos los demás en la red y segundo que no existan circuitos negativos pues en tal caso no habría solución. Comencemos por ver algunas definiciones.

**Definición 21.** [Árbol]
Sea $G = [X, A]$ una gráfica donde $X$ es el conjunto de nodos, $A$ es el conjunto de arcos. $G$ es un árbol si y sólo si $G$ es conexa y acíclica.

**Definición 22.** [Raíz]
Sea $G = [X, A]$ una gráfica dirigida y sea $x^* \in X$, $x^*$ es raíz de $G$ si existe una cadena positiva de $x^*$ a $x$ para todo $x \in X$

**Definición 23.** [Arborescencia]

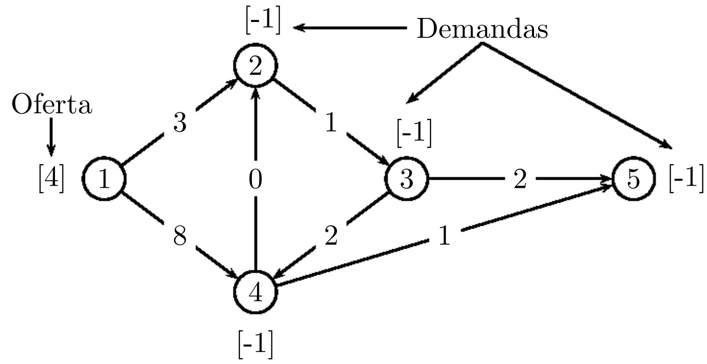
Sea $G = [X, A]$ una gráfica dirigida, sea $x^* \in X$ raíz de $G$. Sea $F = [X, A^*]$ una gráfica parcial de $G$; decimos que $F$ es una arborescencia de $G$ si $F$ es un árbol con raíz.

Diremos que la arborescencia $G = [X, A, f]$ es de rutas más cortas si el camino de $x^*$ a $x$ es el más corto, para todo $x \in X$. Para ser resuelto este problema como uno de flujo a costo mínimo es necesario hacer algunas modificaciones, por ejemplo:

$x_{ij} \neq 0$ significa que el arco $(i, j)$ parte de la arborescencia.
$b_i$ = oferta neta del nodo $i$, ésta será igual a $n - 1$, donde $n = |X|$ para el $x^*$ raíz y será igual a $-1$ para todo $x \in X$ con $x \neq x^*$.
$d_{ij}$ = costo de utilizar el arco que va del nodo $i$ al nodo $j$.
$c_{ij}^- = 0$ y es la capacidad inferior del arco $(i, j)$.
$c_{ij}^+ = \infty$ y es la capacidad superior del arco $(i, j)$.

Obteniendo así la misma estructura que un problema de flujo a costo mínimo.
*Ejemplo.*

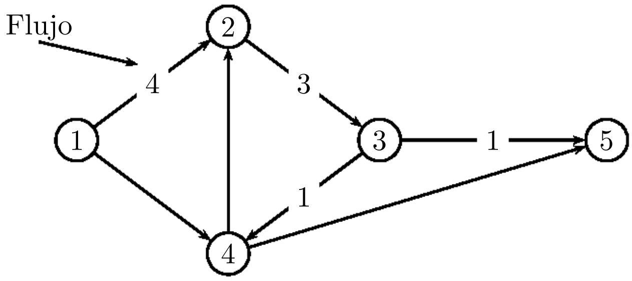
Encontrar la arborescencia de rutas más cortas de raíz 1 de la siguiente gráfica, observe que el número asociado al arco $j = (i, i')$ representa la distancia (el costo, el tiempo) que hay del nodo $i$ al nodo $i'$ para todo $i \in X$. Para formularlo como un problema de flujo a costo mínimo, es necesario determinar las ofertas en cada nodo. Así la oferta del nodo raíz en este caso 1, es 4 y la de los nodos restantes es $-1$. Es importante mencionar que las capacidades de todos los arcos serán de $[0, \infty)$.




***Iteración 1.***

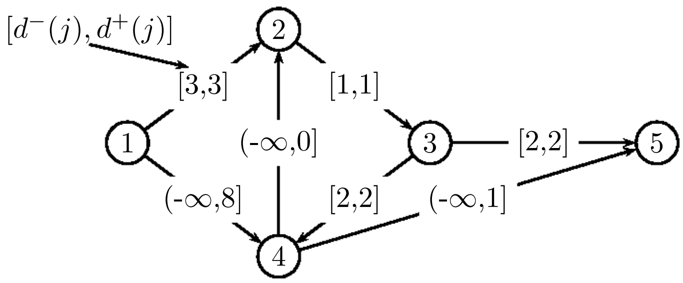
*Paso 1.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de flujo.

- Comenzamos con un flujo factible de acuerdo a las restricciones de oferta, por lo que el flujo sobre la red se muestra a continuación:



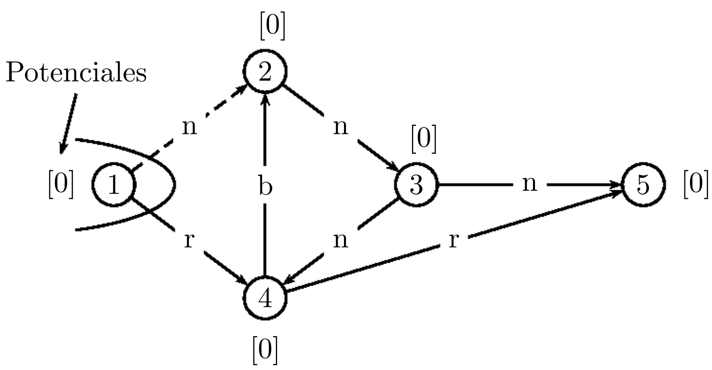

- $A^+ = A^- = \varnothing$ por lo tanto el flujo es factible.

*Paso 2.* Construimos los intervalos de generación.



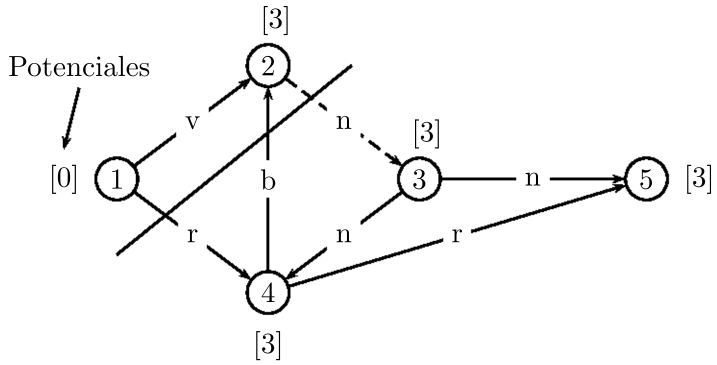

*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión.

1. Comenzamos con un potencial igual a cero en todos los nodos;
2. $A^+ = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5)\}$. Sea $j^* = (1,2)$;
3. Coloreamos los arcos de la red quedando ésta como se muestra a continuación y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$



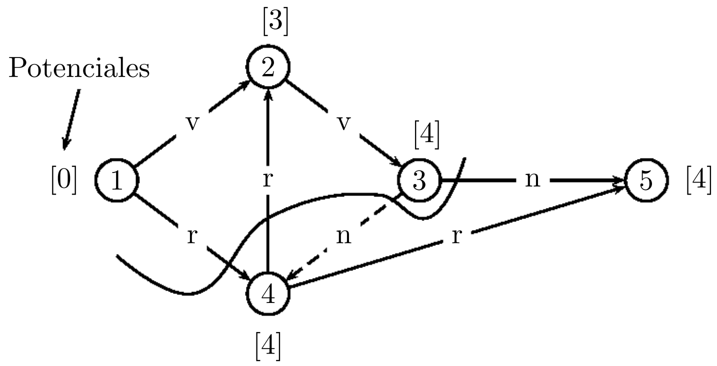

Como el arco $j^* = (1,2)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,2),\ (1,4)\}$ calculamos $\alpha = \text{mín}\{8,3\}$ y actualizamos los potenciales en la siguiente red.

1. $A^+ = \{(2,3),(3,4),(3,5)\}$. Sea $j^* = (2,3)$;
2. Coloreamos los arcos de la red quedando ésta como se muestra a continuación



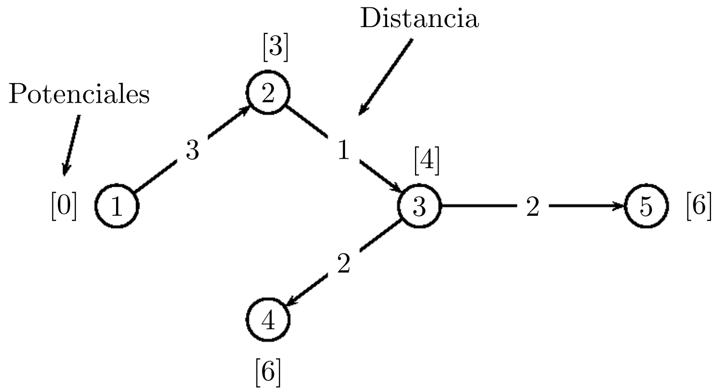

Como el arco $j^* = (2,3)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,4),(2,3),(4,2)\}$ calculamos $\alpha = \text{mín}\{5,\infty,1\}$ y actualizamos los potenciales en la siguiente red.

1. $A^+ = \{(3,4),(3,5)\}$. Sea $j^* = (3,4)$.
2. Coloreamos los arcos de la red quedando ésta como se muestra a continuación y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.




Como el arco $j^* = (3,4)$ se encuentra en el corte $Q = \{(1,4),(3,4),(3,5),(4,2)\}$ calculamos $\alpha = \text{mín}\{4,\infty,2,2\}$ y actualizamos los potenciales en la siguiente red.

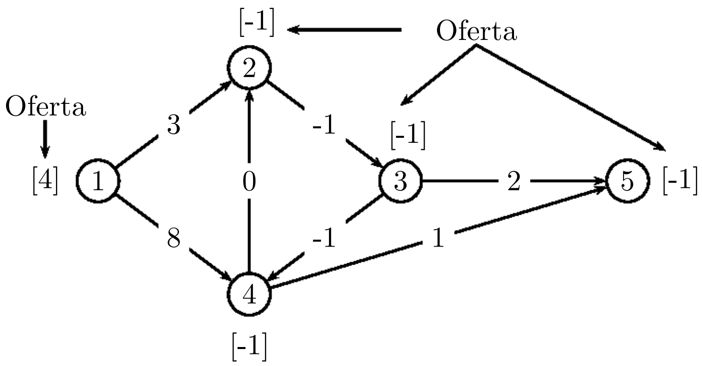
1. $A^+ = \varnothing$ por lo tanto fin, el potencial actual que se muestra en la siguiente gráfica es factible. Además el flujo con el que empezamos esta iteración es el de costo mínimo, es decir, los arcos que tienen asociado un flujo son los arcos que forman la arborescencia de rutas más cortas.




Observemos que en este tipo de problemas el potencial asociado a cada nodo representa la distancia recorrida desde el nodo raíz $x^*$ hasta $x$, para todo $x \in X$.

*Ejemplo.*

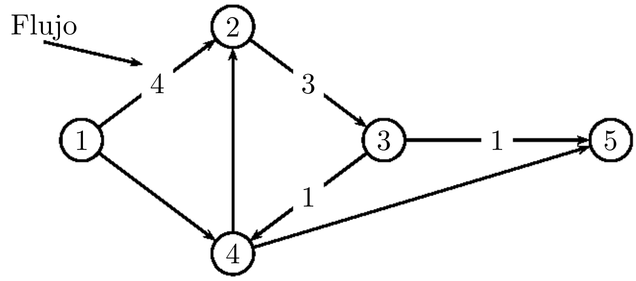
Encontrar la arborescencia de rutas más cortas de raíz 1 de la siguiente gráfica con el algoritmo de distribución factible. Notemos que ésta difiere de la gráfica anterior sólo en las distancias (costos, tiempos) de dos arcos. $d_{(2,3)} = -1$ y $d_{(3,4)} = -1$.




***Iteración 1.***

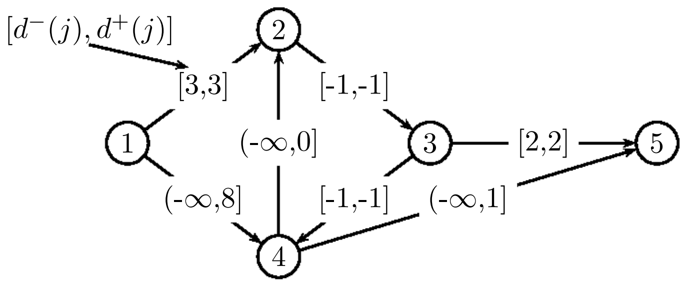
*Paso 1.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de flujo

- Comenzamos con un flujo factible de acuerdo a las restricciones de oferta, por lo que el flujo sobre la red se muestra a continuación:



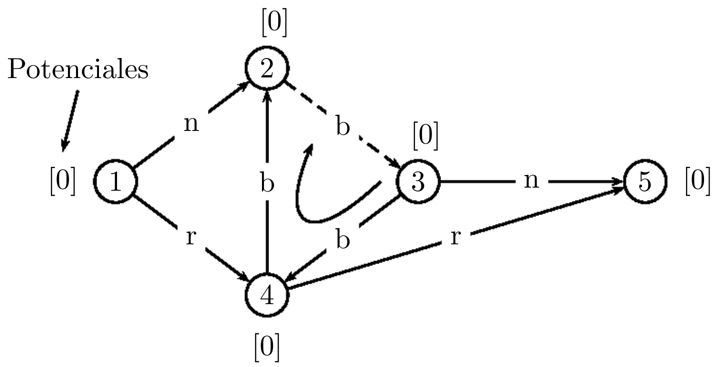

- $A^+ = A^- = \varnothing$ por lo tanto el flujo es factible.

*Paso 2.* Construimos los intervalos de generación




*Paso 3.* Aplicamos el algoritmo de rectificación de tensión

1. Comenzamos con un potencial igual a cero en todos los nodos;
2. $A^+ = \{(1,2),(3,5)\}$ $A^- = \{(2,3),(3,4)\}$. Sea $j^* = (2,3)$.
3. Coloreamos los arcos de la red quedando ésta como se muestra a continuación y aplicamos el algoritmo de Minty a $j^*$.




*Paso 4.* El arco $j^* = (2,3)$ se encuentra en el ciclo $P : 3 \to 4 \to 2 \to 3$; calculamos $\alpha = \text{mín}\{\infty, \infty, \infty\}$, como $\alpha = \infty$ no hay solución al problema.

Observemos que los potenciales asociados a todos los nodos es igual a cero, lo cual quiere decir que la distancia más corta desde el nodo raíz hacia todos los demás nodos, no existe.

# 4

# Estructura del Programa Flucomi

El presente capítulo está enfocado en la estructura del programa que hemos llamado Flucomi, el cual resuelve el problema de "'flujo a costo mínimo a través de colores"'. Un primer acercamiento lo haremos a través de diagramas de flujo de cada uno de los algoritmos utilizados en el programa Flucomi, así como la unificación de éstos en un solo diagrama. Este programa fue implementado en MATLAB. La elección de éste fue porque es un paquete que trabaja con arreglos matriciales, recordemos que toda red tiene una representación matricial, así que ésto nos facilita la programación de los algoritmos.

## 4.1. Consideraciones Generales

Es importante mencionar que en todos los algoritmos programados al recibir la matriz de datos de la red, la cual reconoce con la variable $A$, ésta la descompone en tantas matrices como tipos de datos entren, veamos que por ejemplo para el algoritmo de Minty la matriz de entrada puede ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

la descompone en:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Es decir el renglón $i$ representa al nodo inicial, así el arco $(1,2)$ es el elemento $L_{11}$, el arco $(1,3)$ es el elemento $L_{12}$, etcétera. Elementos igual a cero en $L$ significa que no existe arco. De igual forma se guarda el color asociado a cada arco en otra matriz llamada $L_c$ la cual se forma del mismo modo. Veamos:

$$L_c = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aquí vemos que el arco $(1,2)$ tiene asociado el color blanco (2) cuya posición es $L_{c_{11}}$, Los colores asociados a los arcos son:

| | |
|---|---|
| verde | 1 |
| blanco | 2 |
| negro | 3 |
| rojo | 4 |

Para algoritmos como el de rectificación de flujo y rectificación de tensión la matriz que será introducida es como la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La cual se descompone en:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La siguiente representa la matriz de capacidades inferiores de la red, por ejemplo el arco (1,2) tiene capacidad inferior 1 y se localiza en $Cmenos_{11}$.

$$Cmenos = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente la matriz que a continuación se presenta es la de capacidades superiores de la red, de tal manera que la capacidad superior del arco (1,2) se localiza en $Cmas_{11}$.

$$Cmas = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso del algoritmo de rectificación de tensión en lugar de tener matrices $Cmenos$ y $Cmas$ tendremos $Dmenos$ y $Dmas$ las cuales representan la generación inferior y superior de la red respectivamente. Y cuando estemos trabajando con el algoritmo de distribución factible la matriz de entrada tendrá cinco columnas las primeras cuatro serán como la descrita anteriormente y la columna adicional representa el costo asociado a cada arco. Esta información será guardada en una matriz nombrada $Co$. De este modo se facilita la localización de la información dentro de cada programa.

## 4.2. Parámetros y Variables de cada programa

**Programa Algoritmo de Minty**

Comencemos viendo como es la estructura del programa del algoritmo de Minty llamado: *Algoritmo de Minty.* Este programa necesita recibir como entrada los siguientes datos:
$A$: la representación matricial de la red, en forma de listas de adyacencia, será una matriz de $m \times 3$, donde $m$ es el número de arcos en la red. Y cada renglón estará formado por el nodo inicial, el nodo final y el color asociado a éste.
$a$: arco del cual se desea la información, el cual es un vector de $1x3$
$n$: guarda el número de nodos en la red.
Dentro del programa se definen variables como:
$Qmas$: Matriz donde cada uno de sus renglones representa un arco en $Q^+$, análogamente
$Qmenos$: Matriz donde cada uno de sus renglones representa un arco en $Q^-$.
$Nmas$: Nodo del cual inicia el algoritmo
$Nmenos$: Nodo al cual se llega si es que se encuentra un ciclo.

**Programa Algoritmo de Rectificación de Flujo**

Para el algoritmo de rectificación de flujo se hizo un programa llamado *Algoritmo de Rectificación de Flujo.* Este programa necesita recibir como entrada los siguientes datos:
$A$: la representación matricial de la red, en forma de listas de adyacencia, será una matriz de $m \times 4$, donde $m$ es el número de arcos en la red. La primera columna representa

a los nodos iniciales, la columna dos: nodos finales, la columna tres: capacidad inferior del arco, la columna cuatro: capacidad superior del arco.

$b$: vector de $n \times 1$, donde $n$ es el número de nodos en la red.

#### Programa Algoritmo de Rectificación de Tensión

Se hizo un programa llamado *Algoritmo de Rectificación de Tensión*. Este programa necesita recibir como entrada los siguientes datos:

$A$: la representación matricial de la red, en forma de listas de adyacencia, será una matriz de $m \times 4$, donde $m$ es el número de arcos en la red. La primera columna representa a los nodos iniciales, la columna dos: nodos finales, la columna tres: generación inferior del arco, la columna cuatro: generación superior del arco.

$b$: vector de $n \times 1$, donde $n$ es el número de nodos en la red.

#### Programa Algoritmo de Distribución Factible

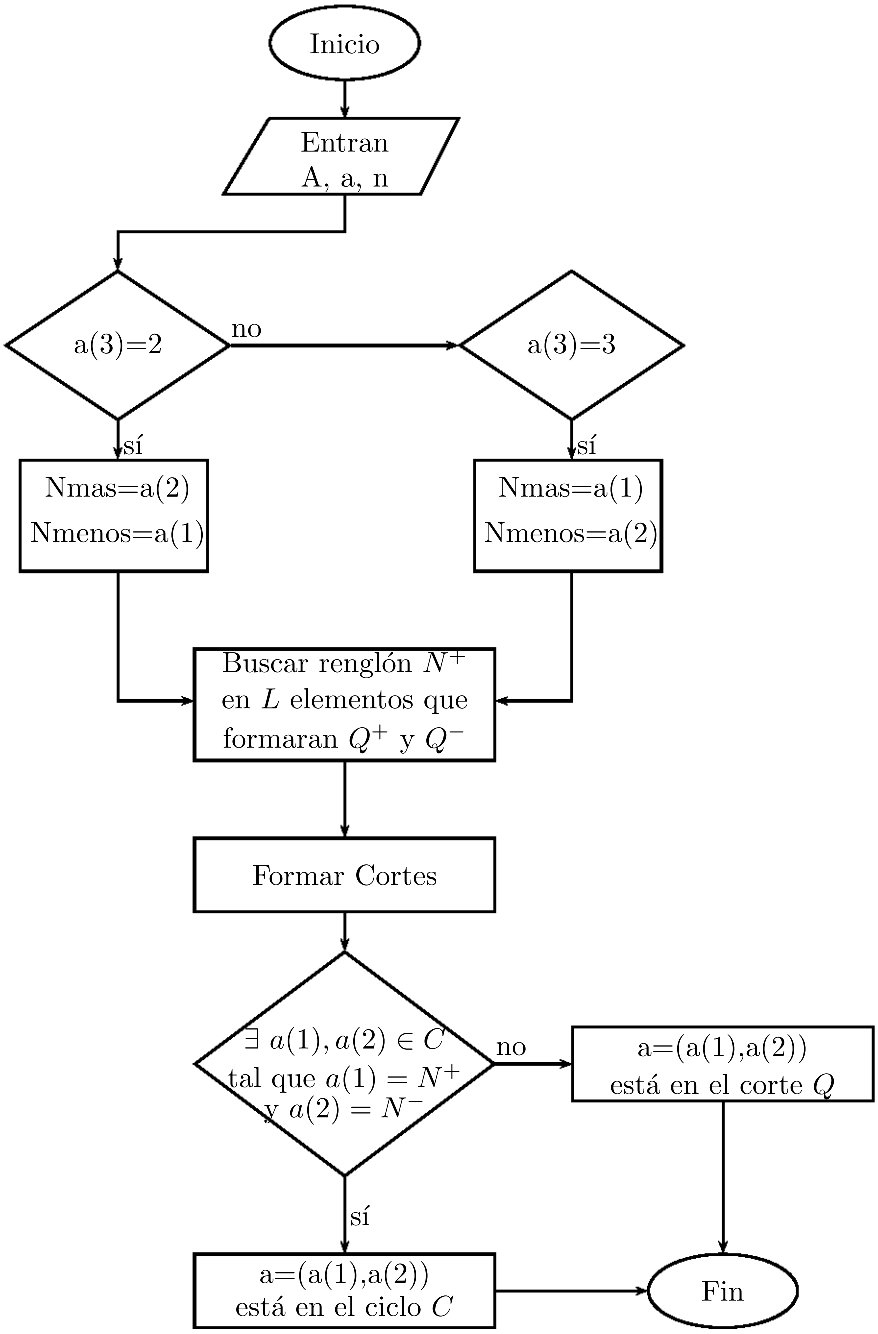
Se realizó un programa llamado *Algoritmo de Distribución Factible*. Este programa necesita recibir como entrada los siguientes datos:

$A$: la representación matricial de la red, en forma de listas de adyacencia, será una matriz de $m \times 5$, donde $m$ es el número de arcos en la red. La primera columna representa a los nodos iniciales, la columna dos: nodos finales, la columna tres: capacidad inferior del arco, la columna cuatro: capacidad superior del arco, la columna cinco: el costo por unidad de flujo que pase por el arco.

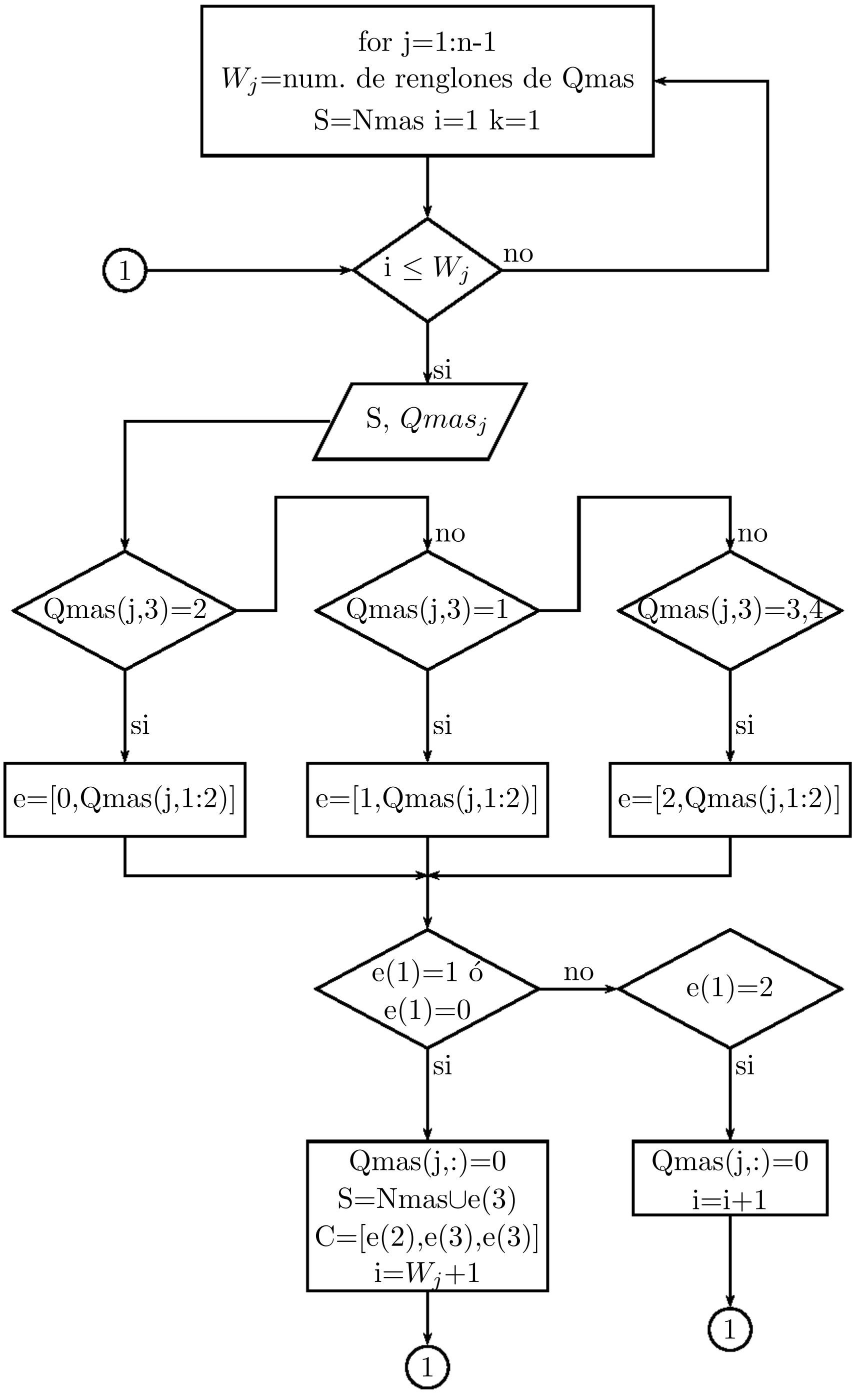
$b$: vector de $n \times 1$, donde $n$ es el número de nodos en la red.

## 4.3. Descripción general de los programas

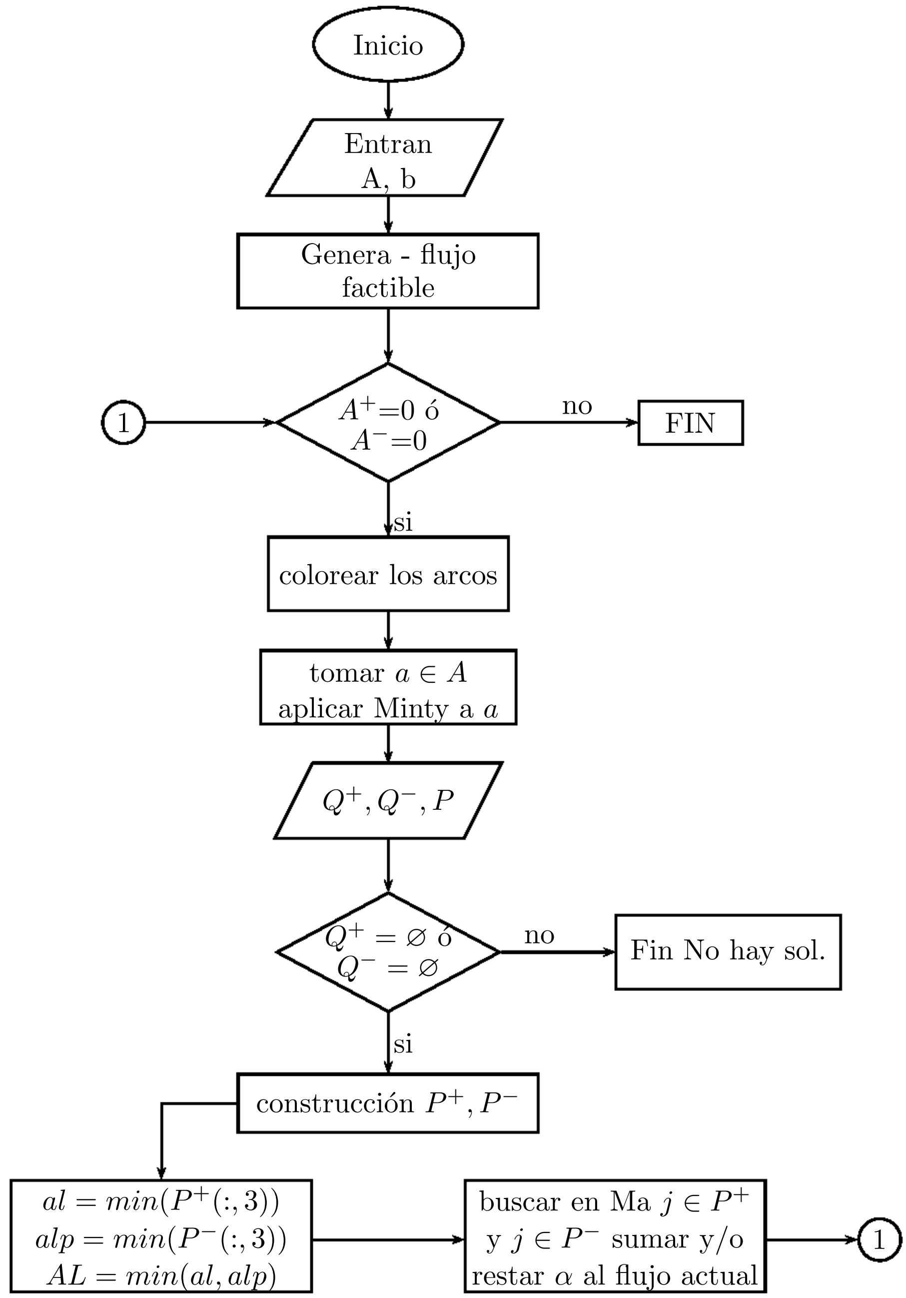
En esta sección se da una descripción general de los programas teniendo una representación de éstos a través de diagramas de flujo.



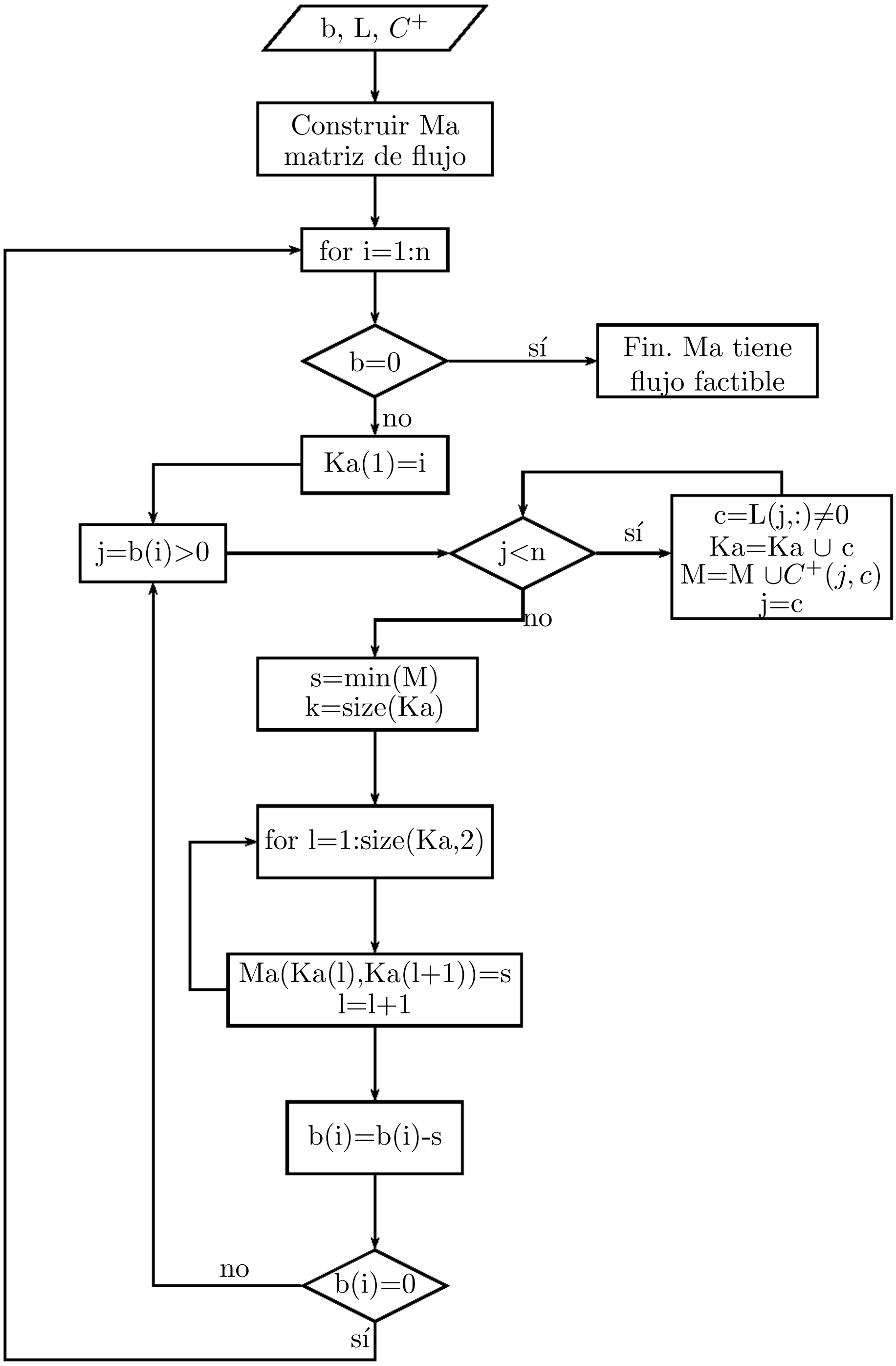

**Algoritmo de Minty**



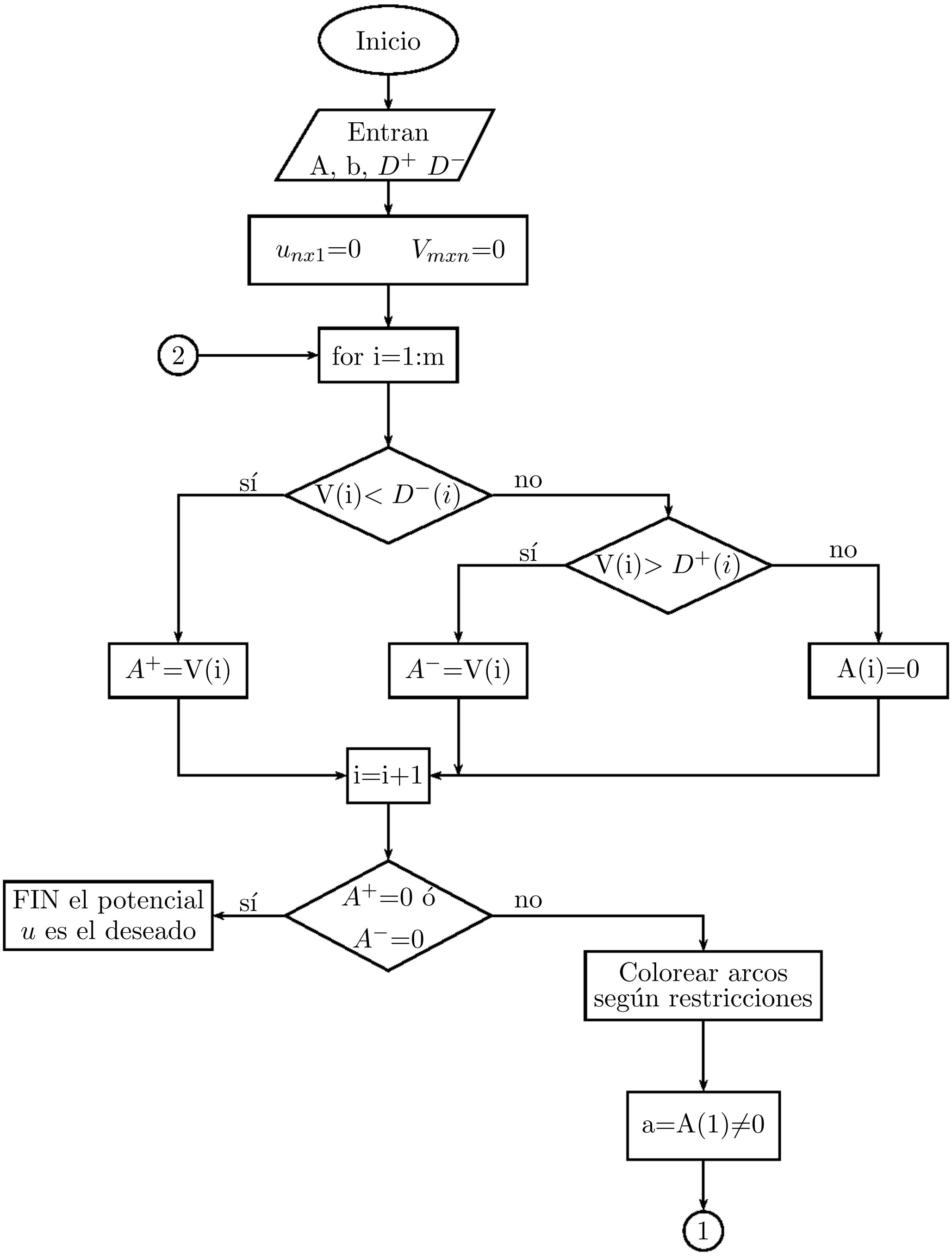

**Proceso Formar Cortes, Algoritmo de Minty**



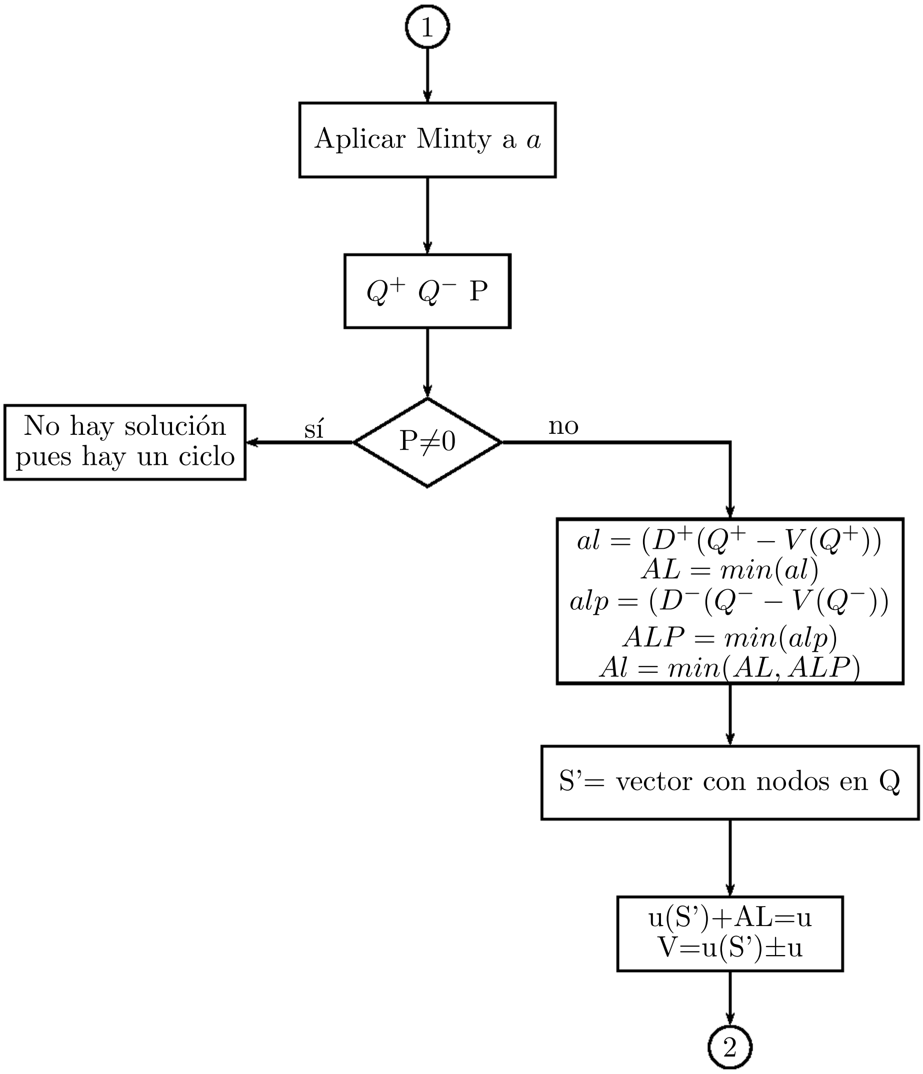

**Algoritmo de Rectificación de Flujo**



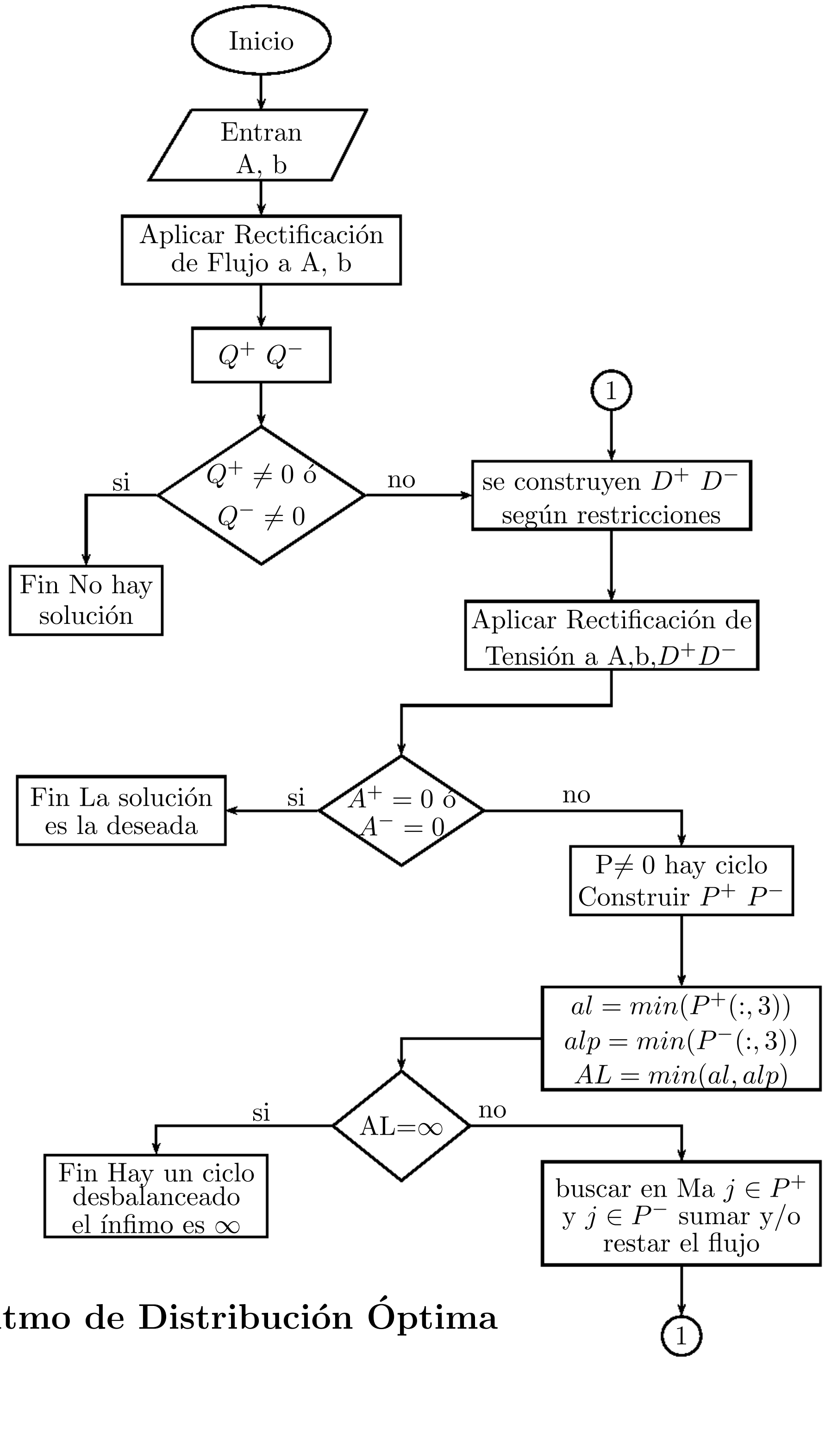

**Proceso Generar-flujo-factible. A.R.F.**




**Algoritmo de Rectificación de Tensión**




**Proceso Algoritmo de Rectificación de Tensión**




## Algoritmo de Distribución Óptima

# 5

# Manual de Usuario

Este capítulo pretende dar una descripción de los programas utilizados en la solución del problema inicial: *Flujo a Costo Mínimo* el cual se resuelve a través del *Algoritmo de Distribución Óptima* el cual como ya vimos en el Capitulo 3 usa como subrutinas el algoritmo de Minty, el de rectificación de flujo y el de rectificación de tensión.

## 5.1. Consideraciones Generales

Para tener acceso a cualquiera de éstos es necesario tener instalado en una PC la versión 5.3 de MATLAB e instalar todos los archivos de la carpeta *Flujo a Costo Mínimo* en la carpeta llamada *work* de MATLAB.

Antes de comenzar a ver cómo es que uno interactuará con el(los) programa(s) es necesario saber cómo es que se deben introducir los datos que necesitaremos como son: matrices y vectores en MATLAB. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

debe ser escrita estrictamente entre corchetes del modo siguiente:

$$[a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n}\ ;\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n}\ ;\ a_{31}\ a_{32}\ \dots\ a_{3n}]$$

Cabe resaltar el hecho de no olvidar escribir el punto y coma, pues ésto, MATLAB lo entiende como el inicio de un nuevo renglón de la matriz que se está escribiendo. Otra forma de escribir la matriz anterior es:

$$\begin{array}{c}[a_{11}\ ,\ a_{12}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{1n} \hookleftarrow \\ a_{21}\ ,\ a_{22}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{2n} \hookleftarrow \\ a_{31}\ ,\ a_{32}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{3n}]\end{array}$$

El manejo de los vectores es análoga, el vector:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

éste debe ser escrito de la siguiente manera:

$$[b_1\ ;\ b_2\ ;\ \ldots\ ;\ b_n] \hookleftarrow$$

otra manera de escribirlo es:

$$\begin{array}{c}[b_1 \hookleftarrow \\ b_2 \hookleftarrow \\ \vdots \hookleftarrow \\ b_n]\end{array}$$

Con esta información es suficiente para poder introducir los datos en los programas. Para la utilización de cualquiera de ellos basta con mandar llamar desde la ventana de comando de MATLAB el programa *Flucomi* apareciendo así una ventana que desplegará un menú de opciones mostrado en la siguiente imagen:

Dar click en la opción deseada; para cualquiera de las tres opciones aparecerá un menú distinto. Por ejemplo si se eligió la opción `Aprendiendo a introducir los datos`: aparecerá un menú con las opciones mostradas en la siguiente imagen:


Si la opción elegida fue `¿Deseas ver las matrices que se tienen guardadas?`, entonces aparecerá otro menú donde se pregunta que datos se desean ver. La siguiente imagen muestra el menú presentado en esta opción.


En cambio, si la opción seleccionada fue `Ir directamente a los programas`, se desplegará un menú cuyas opciones serán la elección de los algoritmos. La siguiente imagen muestra el menú presentado en ésta:

Se da un click sobre la opción deseada e inmediatamente en la pantalla de comandos aparecerá las indicaciones necesarias para el funcionamiento del algoritmo respectivo. Veamos que hacer en cada caso:

## 5.2. Algoritmo de Minty

Este programa puede ser utilizado cuando solamente se desee saber si un arco blanco o negro en una red se encuentra en un ciclo o en un corte coloreado. Para ello es necesario mandarlo llamar desde el menú y dar click en la opción **Algoritmo de Minty;** automáticamente sobre la ventana de comandos de MATLAB se despliega el siguiente mensaje:

```
¿Desea usar una matriz previamente definida?
```

Si la respuesta es afirmativa, inmediatamente aparecerán las matrices que se tienen guardadas para el algoritmo de Minty. Enseguida vienen las preguntas:

```
Dé el nombre de la matriz
Dé el nombre del vector que representa al arco que desea analizar
¿Cuántos nodos tiene la red?
```

Si la respuesta no es afirmativa entonces las instrucciones son:

```
Introduzca la matriz
Introduzca el arco que desea analizar
¿Cuántos nodos tiene la red?
```

La matriz debe ser introducida del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{pmatrix} \hookleftarrow$$

Una vez que se tiene la matriz, ésta será guardada en la variable $A$, que MATLAB reconoce como una matriz de $m \times 3$, donde $m$ es el número de arcos en la red. De este modo el elemento $a_{11}$ es el nodo inicial, el elemento $a_{12}$ es el nodo final y el elemento $a_{13}$ es el color asociado al arco $(a_{11}, a_{12})$. El color de cada arco será asignado del siguiente modo:

| color | asignación |
|---|---|
| verde | 1 |
| blanco | 2 |
| negro | 3 |
| rojo | 4 |

De manera análoga, el arco debe introducirse dentro de corchetes el nodo inicial del arco $a_{11}$, el nodo final $a_{12}$ y el color que tiene asociado $a_{13}$

$$[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}] \hookleftarrow$$

En cuanto a la última pregunta, solamente debe teclear el número que corresponda a la cantidad de nodos que constituyen la red y teclear $\hookleftarrow$ para obtener la solución del problema: ya sea que el arco que se introdujo se encuentre en un ciclo o en un corte. En caso de que se encuentre en un ciclo en la pantalla principal de MATLAB aparecerá el siguiente mensaje:

```
El arco j se encuentra en el siguiente ciclo
```
$P$

$P$ será una matriz de $k \times 2$, donde $k$ es el número de arcos en el ciclo y constará sólo de dos columnas:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} \end{pmatrix}$$

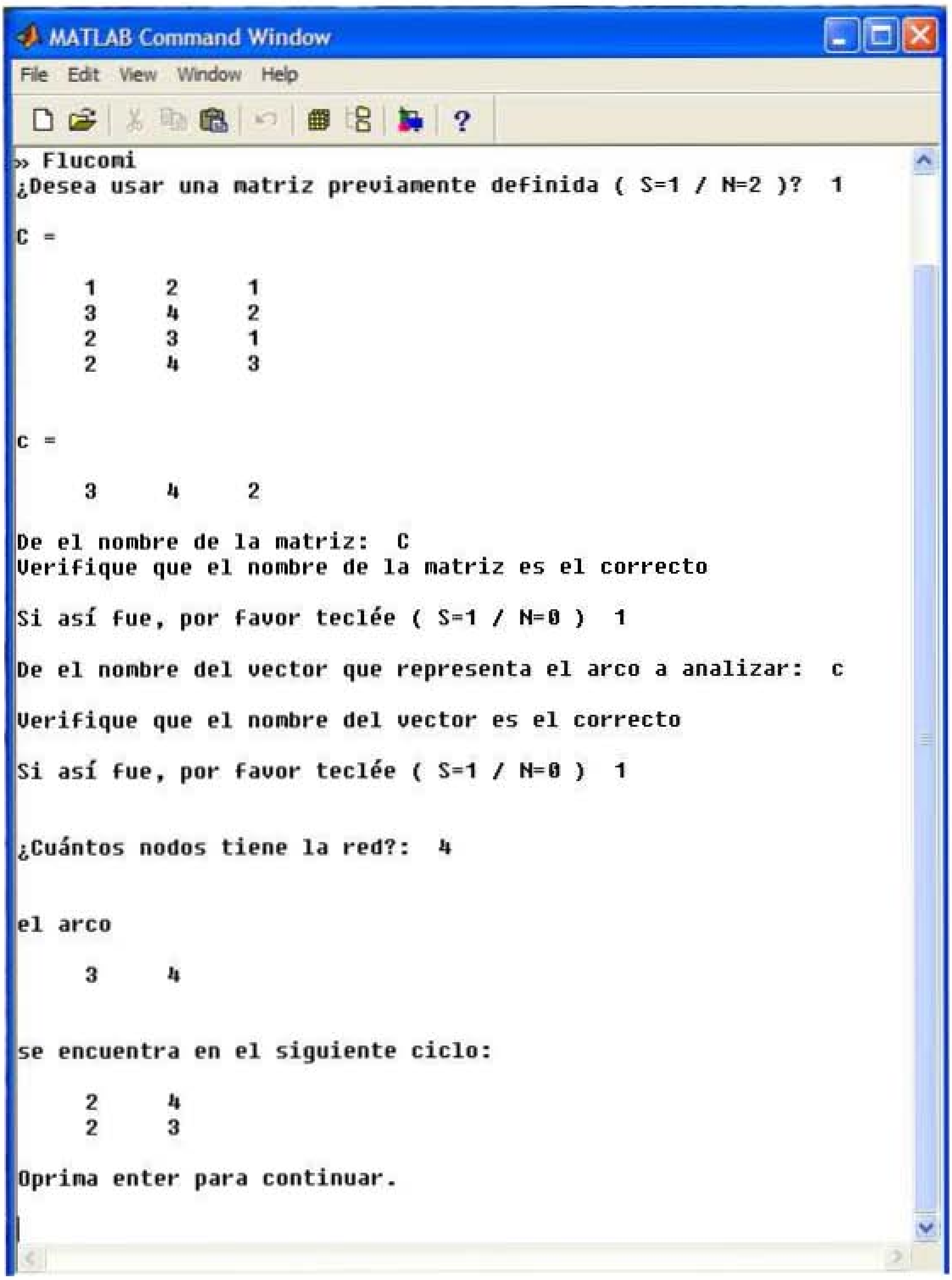
Así $p_{11}$ es el nodo inicial y $p_{12}$ es el nodo final del arco $(p_{11}, p_{12})$.

En caso de que el arco en cuestión se encuentre en un corte coloreado, en la pantalla aparecerá el siguiente mensaje:

```
El arco j se encuentra en el siguiente corte
Q
```

$Q$ será una matriz de $r \times 2$ donde $r$ es igual al número de arcos que constituyen el corte en la red.

*Ejemplo.* El siguiente es un ejemplo en el cual podemos ver como es que se piden los datos y cual fue el resultado obtenido.


MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
>> Flucomi
¿Desea usar una matriz previamente definida ( S=1 / N=2 )? 1
C =
1 2 1
3 4 2
2 3 1
2 4 3
c =
3 4 2
De el nombre de la matriz: C
Verifique que el nombre de la matriz es el correcto
Si así fue, por favor teclée ( S=1 / N=0 ) 1
De el nombre del vector que representa el arco a analizar: c
Verifique que el nombre del vector es el correcto
Si así fue, por favor teclée ( S=1 / N=0 ) 1
¿Cuántos nodos tiene la red?: 4
el arco
3 4
se encuentra en el siguiente ciclo:
2 4
2 3
Oprima enter para continuar.

## 5.3. Algoritmo de Rectificación de Flujo

El programa **Algoritmo de Rectificación de Flujo** comienza cuando damos click en la opción **Algoritmo de Rectificación de Flujo** luego en la ventana de comandos de MATLAB aparecerá la siguiente sentencia:

`¿Desea usar una matriz previamente definida?`

Si la respuesta es afirmativa, inmediatamente aparecerán las matrices que se tienen guardadas para el algoritmo de Rectificación de Flujo. Enseguida vienen las preguntas:

```
De el nombre de la matriz
De el nombre del vector de ofertas y demandas
```

Si la respuesta no es afirmativa entonces las instrucciones son:

```
Introduzca la matriz
Introduzca el vector de ofertas y demandas
```

Esta información debe ser introducida del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} \end{pmatrix}$$

donde:
$a_{i1}$ es el nodo inicial del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i2}$ es el nodo final del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i3} = c^-(a_{i1}, a_{i2})$ es la capacidad inferior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i4} = c^+(a_{i1}, a_{i2})$ es la capacidad superior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$.

El vector es necesario escribirlo del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde:
$b_i$ es la oferta o demanda del nodo $i$, aquí es necesario mencionar que este vector debe constar de tantos renglones como nodos en la red; por ejemplo, consideremos una red que consta de tres nodos; el nodo 1 ofrece cierta cantidad $b$, el nodo 2 no ofrece ni

demanda, pero es un nodo intermedio, por lo que se debe cumplir que todo lo que entra a él, debe salir y finalmente el nodo 3 demanda la cantidad $b$. Recordemos que una de las condiciones para que haya solución a éste problema es que la oferta sea igual a la demanda. Así el vector de ofertas y demandas de esta red se ve de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}$$

Enseguida tecleamos *enter* y podremos ver las solución encontrada por el programa.

En caso de que exista la solución en la pantalla aparecerá:

`La cantidad de flujo que pasa por la siguiente red es la deseada:`

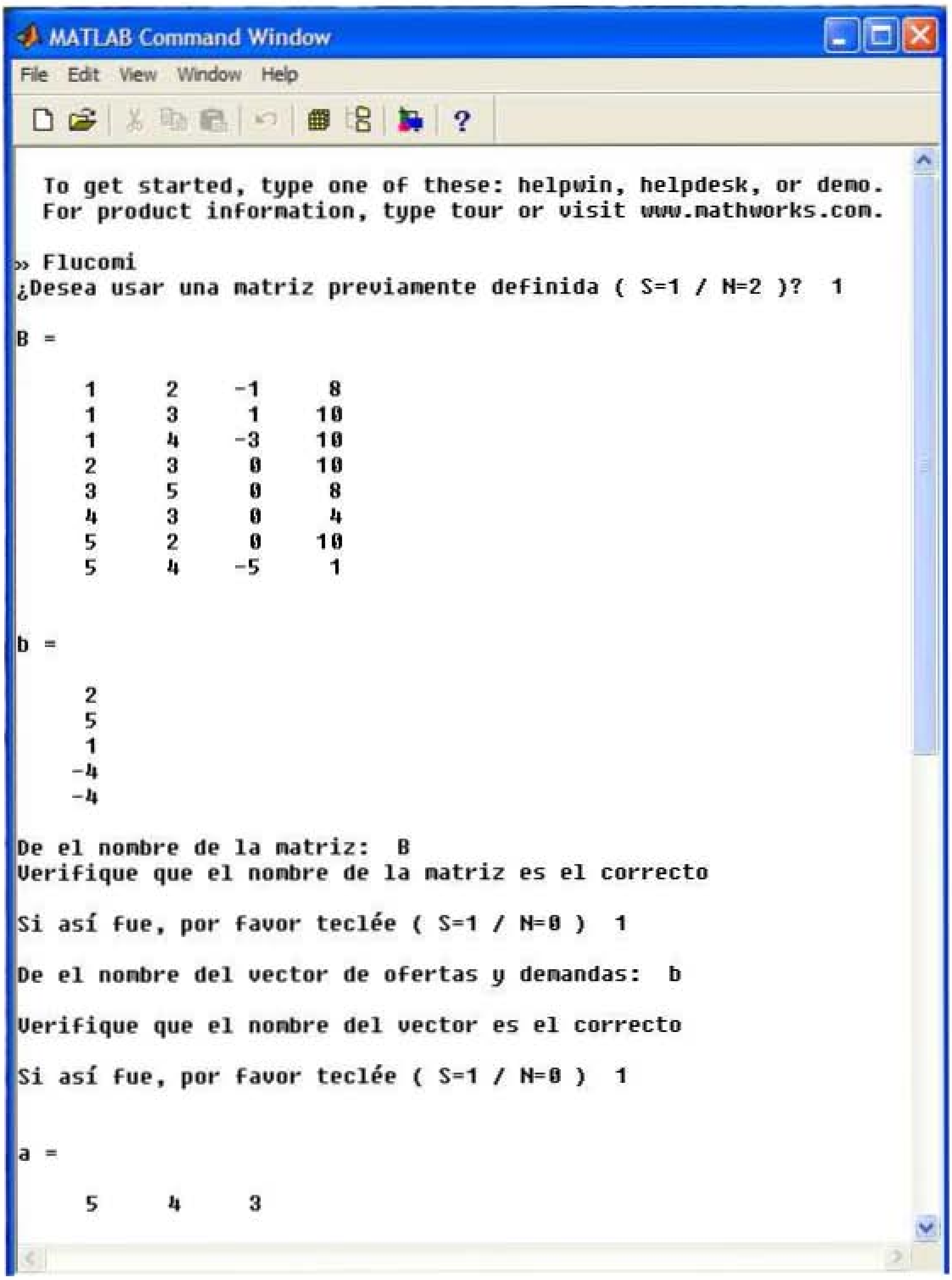
`La matriz que aparece corresponde a los arcos de la red y al flujo que pasa a través de éstos.`

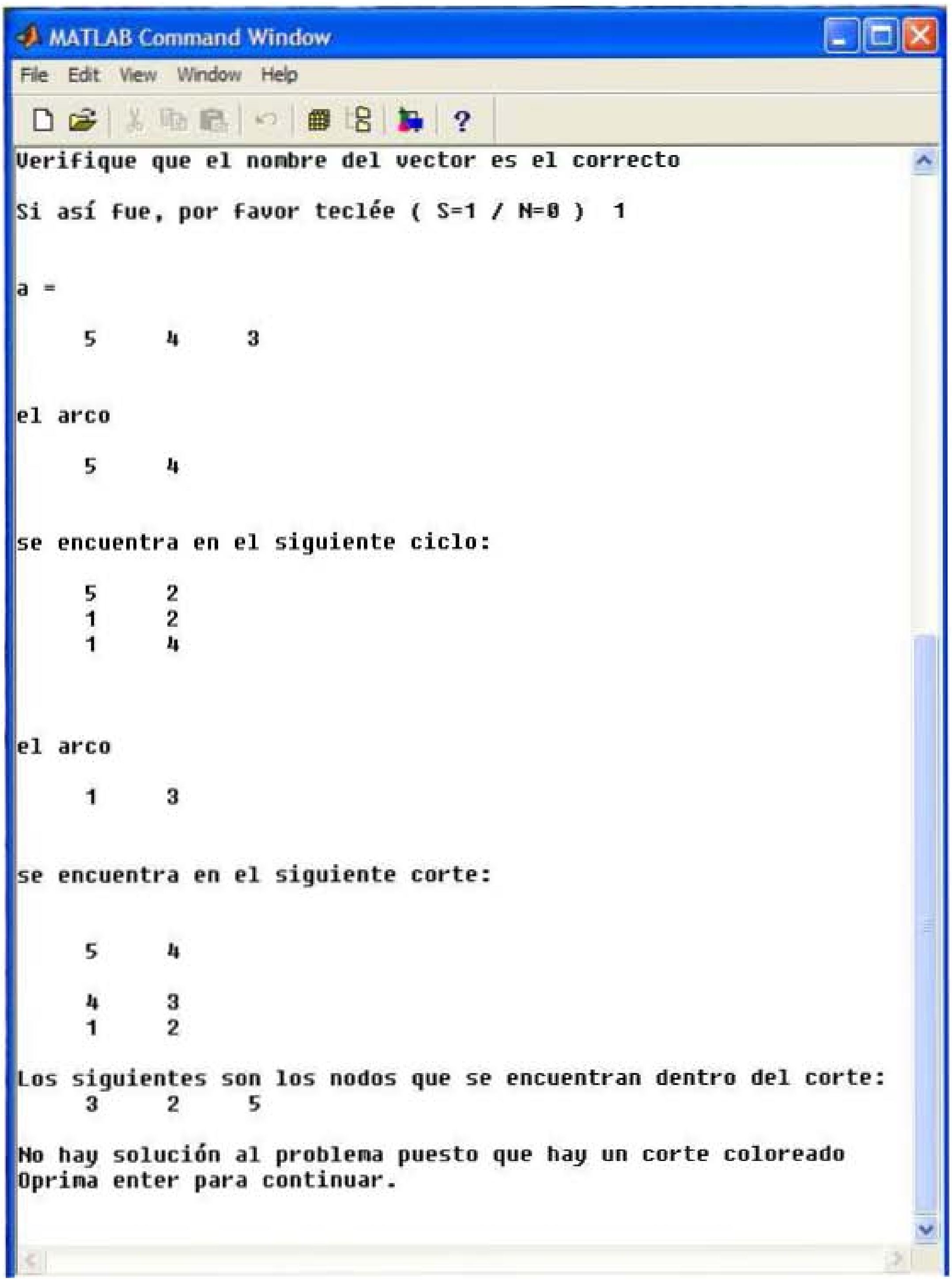
En caso de que la solución no exista veremos lo siguiente en la pantalla:

`No hay solución al problema puesto que hay un corte coloreado`

`Q`

Veamos un ejemplo:


MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
To get started, type one of these: helpwin, helpdesk, or demo.
For product information, type tour or visit www.mathworks.com.
>> Flucomi
¿Desea usar una matriz previamente definida ( S=1 / N=2 )? 1
B =
1 2 -1 8
1 3 1 10
1 4 -3 10
2 3 0 10
3 5 0 8
4 3 0 4
5 2 0 10
5 4 -5 1
b =
2
5
1
-4
-4
De el nombre de la matriz: B
Verifique que el nombre de la matriz es el correcto
Si así fue, por favor teclée ( S=1 / N=0 ) 1
De el nombre del vector de ofertas y demandas: b
Verifique que el nombre del vector es el correcto
Si así fue, por favor teclée ( S=1 / N=0 ) 1
a =
5 4 3


MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
Verifique que el nombre del vector es el correcto
Si así fue, por favor tecleé ( S=1 / N=0 ) 1
a =
5 4 3
el arco
5 4
se encuentra en el siguiente ciclo:
5 2
1 2
1 4
el arco
1 3
se encuentra en el siguiente corte:
5 4
4 3
1 2
Los siguientes son los nodos que se encuentran dentro del corte:
3 2 5
No hay solución al problema puesto que hay un corte coloreado
Oprima enter para continuar.

## 5.4. Algoritmo de Rectificación de Tensión

El programa **Algoritmo de Rectificación de Tensión** comienza una vez que damos click en la opción **Algoritmo de Rectificación de Tensión** e inmediatamente en la ventana de comandos de MATLAB aparecerá la siguiente sentencia:

`¿Desea usar una matriz previamente definida?` Si la respuesta es afirmativa, inmediatamente aparecerán las matrices que se tienen guardadas para el algoritmo de Rectificación de Tensión. Enseguida vienen las preguntas:

```
De el nombre de la matriz
De el nombre del vector de ofertas y demandas
```

Si la respuesta no es afirmativa entonces las instrucciones son:

```
Introduzca la matriz
Introduzca el vector de ofertas y demandas
```

La información debe ser introducida del mismo modo que para el algoritmo de Rectificación de Flujo, con una pequeña diferencia sobre la interpretación de la columna tres y cuatro de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} \end{pmatrix}$$

donde:
$a_{i1}$ es el nodo inicial del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i2}$ es el nodo final del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i3} = c^-(a_{i1}, a_{i2})$ es la generación inferior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i4} = c^+(a_{i1}, a_{i2})$ es la generación superior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$.

En cuanto al vector de ofertas y demandas no hay ningún cambio, se define igual que en el algoritmo antes descrito. Enseguida tecleamos *enter* y podremos ver las solución encontrada por el programa.

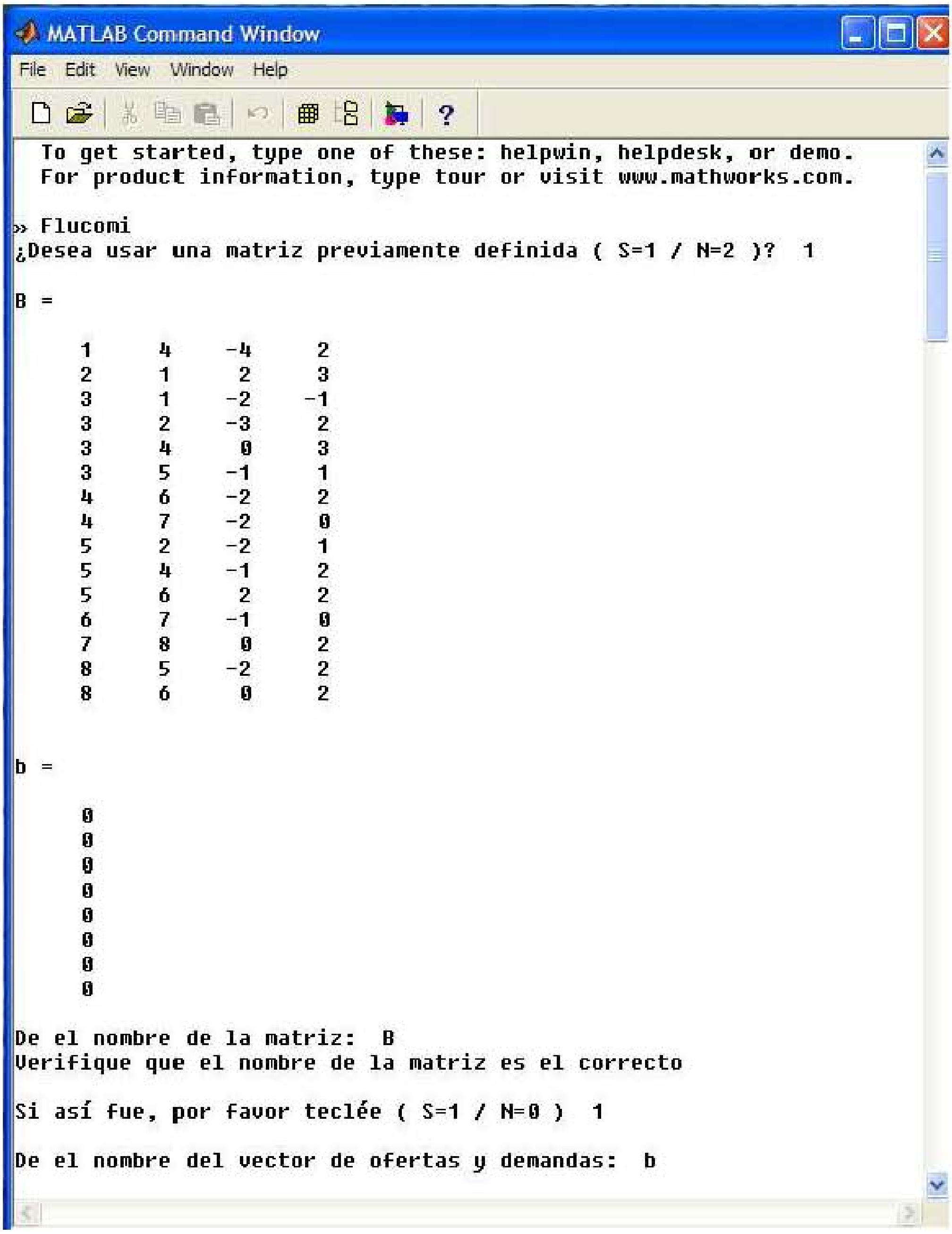
En caso de que exista la solución en la pantalla aparecerá:

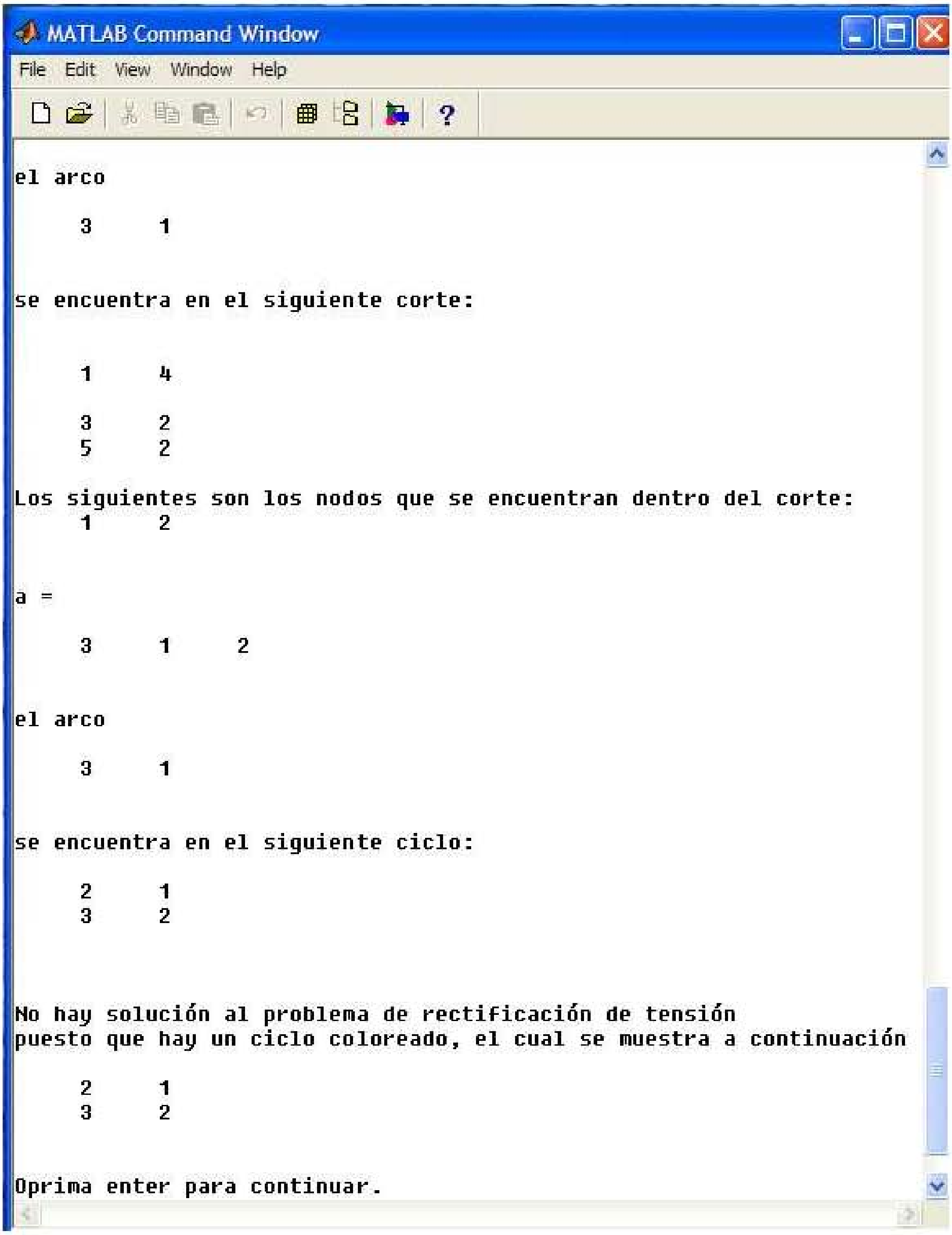
```
El potencial u es el deseado:
Recuerde que las primeras dos columnas representas arcos
Y la tercer columna es el diferencial que pasa a través de dicho arco.
El vector representa el potencial asociado a cada nodo
```

En caso de que la solución no exista veremos lo siguiente en la pantalla:

```
No hay solución al problema puesto que hay un ciclo coloreado
                              P
```

Veamos un ejemplo:




MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
el arco
3 1
se encuentra en el siguiente corte:
1 4
3 2
5 2
Los siguientes son los nodos que se encuentran dentro del corte:
1 2
a =
3 1 2
el arco
3 1
se encuentra en el siguiente ciclo:
2 1
3 2
No hay solución al problema de rectificación de tensión
puesto que hay un ciclo coloreado, el cual se muestra a continuación
2 1
3 2
Oprima enter para continuar.

## 5.5. Algoritmo de Distribución Óptima

El programa **Algoritmo de Distribución Óptima** comienza una vez que damos click en la opción **Algoritmo de Distribución Óptima** e inmediatamente en la ventana de comandos de MATLAB aparecerá la siguiente sentencia:

```
¿Desea usar una matriz previamente definida?
```

Si la respuesta es afirmativa, inmediatamente aparecerán las matrices que se tienen guardadas para el algoritmo de Rectificación de Tensión. Enseguida vienen las preguntas:

```
De el nombre de la matriz
De el nombre del vector de ofertas y demandas
```

Si la respuesta no es afirmativa entonces las instrucciones son:

```
Introduzca la matriz
Introduzca el vector de ofertas y demandas
```

La información debe ser introducida del mismo modo que para el algoritmo de Rectificación de Flujo, a diferencia de éste, la matriz debe tener cinco columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & a_(i5) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & a_{m5} \end{pmatrix}$$

donde:
$a_{i1}$ es el nodo inicial del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i2}$ es el nodo final del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i3} = c^-(a_{i1}, a_{i2})$ es la capacidad inferior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i4} = c^+(a_{i1}, a_{i2})$ es la capacidad superior del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$;
$a_{i5} = d(a_{i1}, a_{i2})$ es el costo del arco $i = (a_{i1}, a_{i2})$.

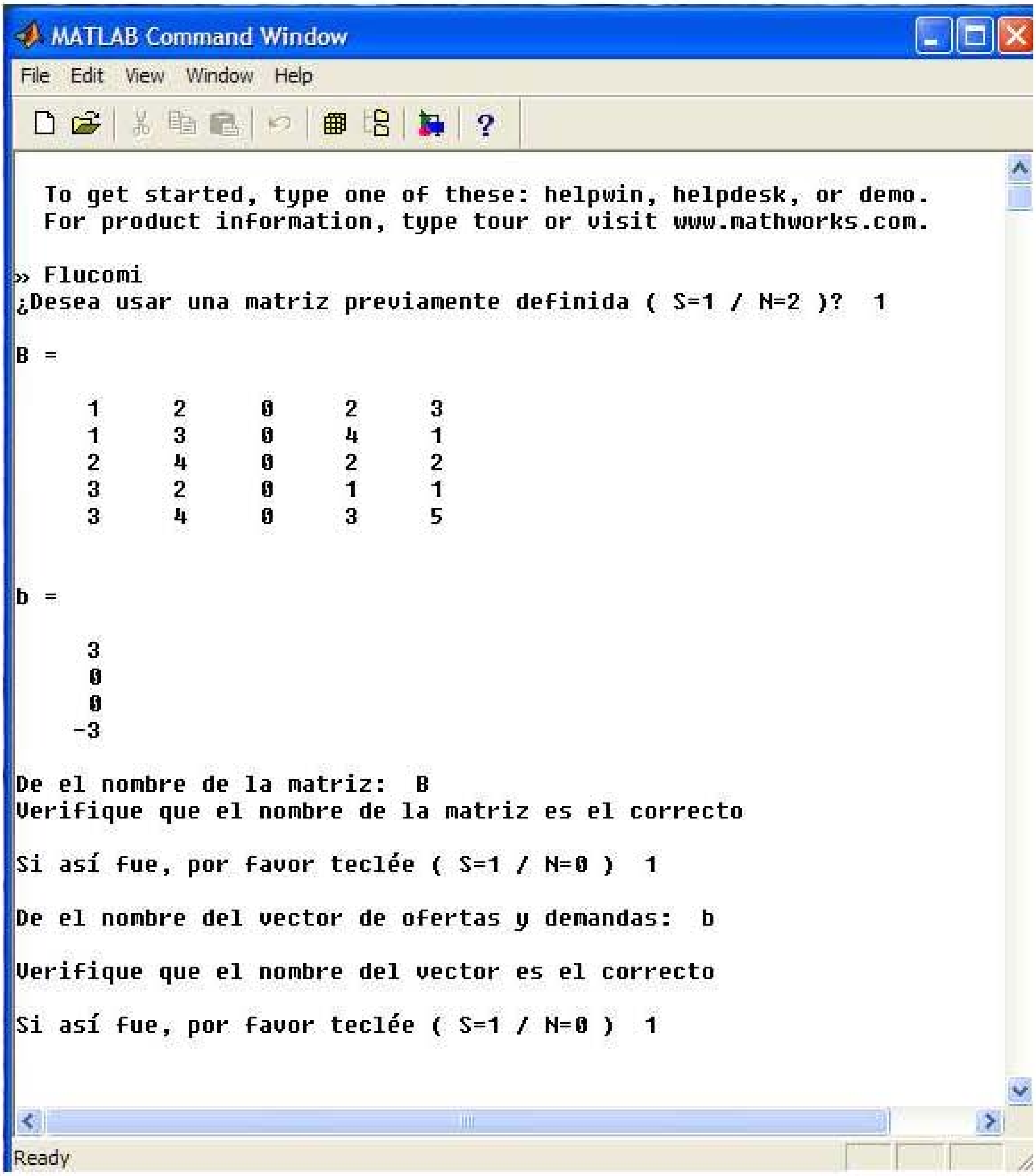
En cuanto al vector de ofertas y demandas no hay ningún cambio, se define igual que en el algoritmo de Rectificación de Flujo. Enseguida tecleamos *enter* y podremos ver las solución encontrada por el programa.

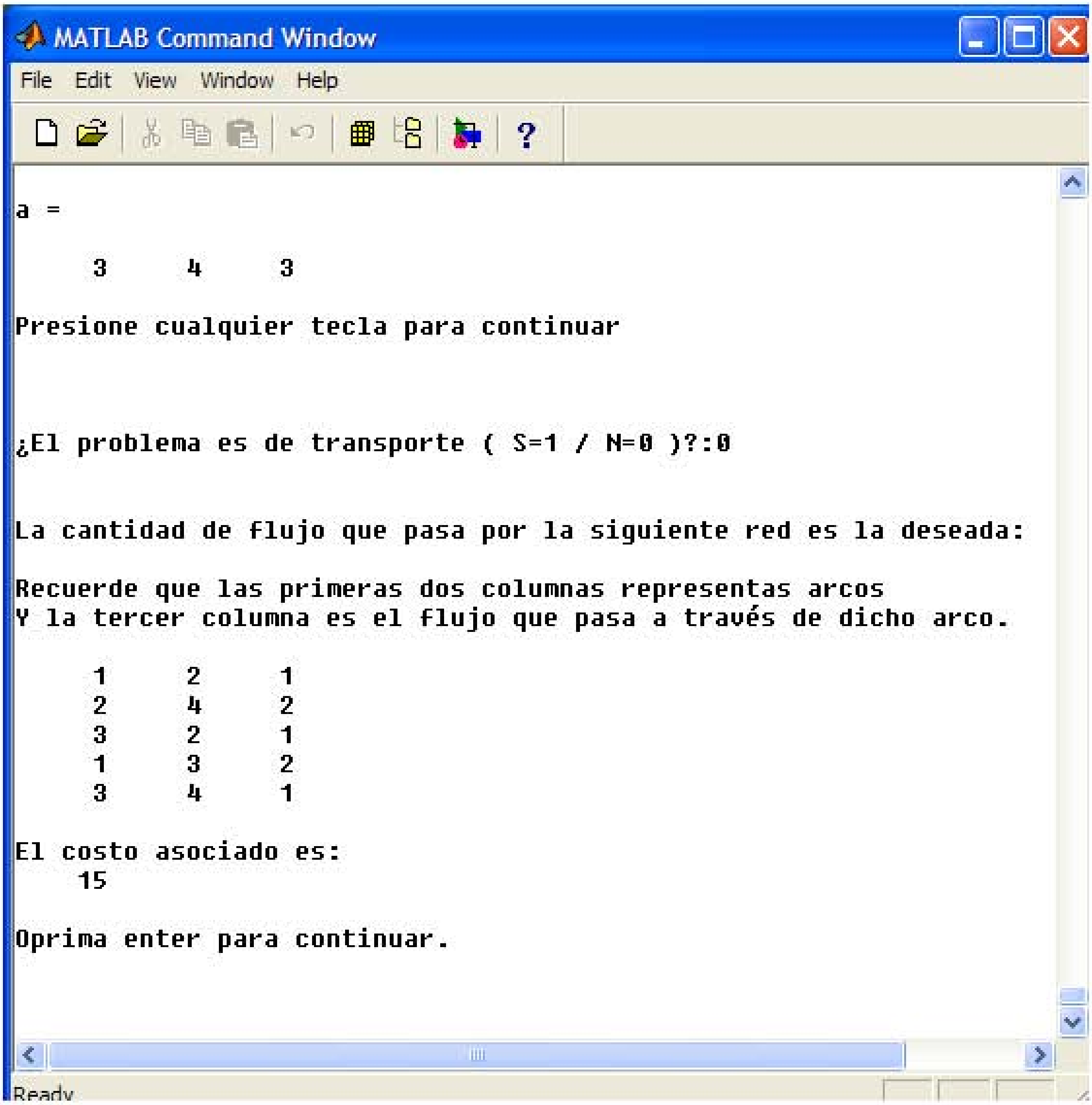
En caso de que exista la solución en la pantalla aparecerá:

```
La cantidad de flujo que pasa por la siguiente red es la deseada
Recuerde que las primeras dos columnas representas arcos
Y la tercer columna es el flujo que pasa a través de dicho arco
El costo asociado es
```

En caso de que no haya solución:

```
Hay un circuito desbalanceado, el ínfimo del problema es -inf
```




MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
a =
3 4 3
Presione cualquier tecla para continuar
¿El problema es de transporte ( S=1 / N=0 )?:0
La cantidad de flujo que pasa por la siguiente red es la deseada:
Recuerde que las primeras dos columnas representas arcos
Y la tercer columna es el flujo que pasa a través de dicho arco.
1 2 1
2 4 2
3 2 1
1 3 2
3 4 1
El costo asociado es:
15
Oprima enter para continuar.
Ready

# Conclusiones

El problema de flujo a costo mínimo es un programa lineal que en la década de los cincuentas llamó la atención de varios investigadores por la importancia que la aplicación de estos modelos tienen en la vida real, es por ello que se puede resolver de varias formas. Casos particulares son problemas como: ruta más corta, flujo máximo, asignación, etcétera. Entre los métodos utilizados para dar solución al problema de flujo a costo mínimo podemos mencionar los algoritmos simplex especializado en redes, de eliminación de circuitos negativos, basado en rutas más cortas, etcétera. Todos estos abordan el problema desde el punto de vista de la programación lineal.

Es importante mencionar que el enfoque de colores para resolver el problema de flujo a costo mínimo no hace uso de la programación lineal, basándose únicamente en la teoría de gráficas, especialmente en teoremas de coloración.

El desarrollo paralelo de los problemas de flujo y diferencial factible son una consecuencia importante de la naturaleza dual del problema, pues al resolver el problema de flujo o el de potenciales automáticamente se resuelve el otro.

El problema de distribución óptima presentado y resuelto a través del algoritmo de distribución óptima en el capítulo tres del presente trabajo, estudia sólo el caso en el que la función de costo asociada a los arcos es de tipo lineal, teniendo el supuesto que los datos son enteros siempre la solución obtenida es de este tipo. La ventaja de este modelo es que puede ser aprovechado para el caso general en el que la función de costo ya no es de tipo lineal sino convexo. Más aún, este paralelismo deriva en generalizaciones a problemas de optimización que no necesariamente tengan representación gráfica.

Los algoritmos aquí presentados fueron programados y son una herramienta muy sencilla para el usuario; así constituyen material didáctico para los cursos del área de Investigación de Operaciones.

# Bibliografía


[1] Ahuja, R., Magnanti, T., and Orlin, J. *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, 1993.

[2] Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., and Sherali, H. D. *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, 1990.

[3] Christofides, N. *Graph Theory: An algorithmic approach*. Academic Press, 1962.

[4] Hernández Ayuso, M. C. *Introducción a la Teoría de Redes*. Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[5] Hillier, F., and Lieberman, G. *Introduction to Operations Research*. Holden Day, Inc, 1980.

[6] Rockafellar, R. T. *Network Flows and Monotropic Optimization*. Athena Scientific, 1998.

[7] Winston, W. L. *Operations Research Applications and Algorithms*. Duxbury Press, 1994.