



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA APROXIMACIÓN A LOS MODELOS DE VALUACIÓN DE
BONOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

MELISA HERRERA GOMAR



DIRECTORA DE TESIS: ACT. MARÍA AURORA VALDÉS MICHELL

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Herrera
Gomar
Melisa
56779788
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría

Actuaría
María Aurora
Valdés
Michell

Actuario
Jorge Luis
Silva
Haro

Actuario
Enrique
Rodríguez
Maturano

Actuario
Fernando Alonso
Pérez Tejada
López

Actuario
Miguel
Santa Rosa
Sierra

“Una Aproximación a los Modelos de Valuación de Bonos.”
99 paginas
2006

Agradecimientos

Agradezco a mis papas, por inculcarme valores, darme todo su cariño, paciencia, apoyo, confianza y simplemente darme todo lo que ahora soy.

Molly muchas gracias por el tiempo, esfuerzo, preocupaciones y por haberme brindado toda tu vida por mi bienestar, crecimiento, mi desarrollo y hacer de mi una mejor persona.

Daddy muchas gracias por todo el apoyo que me has brindado y la confianza que me has tenido.

También quiero agradecer a mis hermanos a Magali por siempre estar insistiendo para que termine este trabajo, a Miner por ser tan linda y tan cariñosa conmigo, al Inovi por cuidarme tanto y defenderme.

A mi directora la profesora Aurorita por apoyar la creatividad de todos sus estudiantes y ayudarme a concluir mi carrera.

A mis sinodales que han dedicado sus conocimientos y su tiempo en corregir y aportar ideas y conceptos en este trabajo.

Y por último quiero agradecer a mi prometido por ser mi motivación para concluir este trabajo.

ÍNDICE

Agradecimientos	3
Introducción	6
Definiciones	9
Capítulo I	17
Objetivo.....	17
1.1 Instrumentos de ingreso fijo en Mercado de Dinero	17
1.2 Tipos de emisores	17
1.3 Impuestos	18
1.4 Expectativas de liquidez del emisor	19
1.5 Plazo al vencimiento	19
1.6 Principales instrumentos del Mercado de Dinero.....	19
1.7 Instrumentos en USD.....	24
1.8 Fórmulas de valor	26
1.9 Clasificación de los tipos de bonos por su plazo en México	28
1.10 Características fundamentales de los Bonos	29
1.10.1 Ratings quality	30
1.10.2 Rendimiento (yield)	30
1.10.3 Factores para dar precio a un bono	31
1.10.4 Tasas gubernamentales contra tasas interbancarias.....	31
1.10.5 Fórmula del precio del bono.....	32
1.11 Naturaleza cualitativa de las curvas Precio-Rendimiento	32
Capítulo II	34
Objetivo.....	34
2.1 Las matemáticas de los movimientos del Precio-Bono.....	34
2.1.1 Conclusiones de los teoremas	39
2.2 Propiedades concernientes a la volatilidad en el precio de los bonos libres de opción.	40
2.3 Características de un bono que afectan su volatilidad en el precio	41
2.4 Medidas para cuantificar la volatilidad del precio de un bono.....	41
2.4.1 Medida de Rendimiento	41
2.4.2 Duración.....	41
2.4.2.1 Duración Macaulay	42
2.4.2.2 Duración y sensibilidad	43
2.4.2.3 Duración de un portafolio	44
2.4.3 Inmunización	44
2.4.4 Convexidad	45
2.5 Término estructura de la tasa de interés.....	46
2.5.1 Construcción de las tasas de interés de derivados	46
2.5.2 Precio de un bono en intervalos continuos	46
2.5.3 Teorías del término estructura	49
2.5.3.1 Teoría de la esperanza	49
2.5.3.2 Teoría de la segmentación del mercado	49
2.5.3.4 Teoría de la preferencia de liquidez	49

Capítulo III	50
Objetivo.....	50
3 Clasificación de los modelos para calcular los precios de Instrumentos	50
3.2 Modelos de interpolación	51
3.2.1 Modelo de Interpolación lineal	51
3.2.2 Método de la alambrada	52
3.1 Modelos estocásticos.....	53
3.3 Modelos de ajuste estadístico.....	55
3.3.1 Modelo Polinomial simple	55
3.3.2 Modelo polinomial exponencial	56
3.4 Modelos “spline”	57
3.4.1 Modelos “spline” polinomiales.....	58
3.4.2 Modelos “spline” exponenciales	60
3.5 Modelos “kernel”	61
3.6 Modelo Ho y Lee.....	62
3.7 Hull and White Model.....	63
3.8 Modelo Nelson Siegel.....	64
3.8.1 Justificación para el modelo Nelson Siegel.....	65
3.8.2 Expresión de la tasa forward en el modelo Nelson Siegel	65
3.8.3 Principales características del modelo Nelson Siegel.....	67
3.8.4 Propiedades del modelo Nelson Siegel	67
3.8.5 El rango de formas de $R(m)$	67
3.8.6 Análisis del Tau (T).....	68
3.8.7 La Extensión Svensson del Modelo Nelson	69
3.8.8 Ajuste del Largo Plazo (Expansión de Taylor)	71
3.8.9 Ajuste del cuarto coeficiente de la Ecuación.....	73
3.9 Valuación de los instrumentos a mercado	74
Capítulo IV	75
Objetivo	75
4.1 Aplicación para modelar los Bonos.....	75
4.2 Reportos Colateralizados.....	78
4.2.1 Circulares de Banco de México (01/2003, 28/2003, 01/2003BIS1 y 01/2003BIS2)	79
4.2.2 Administración y Valuación de operaciones de Reporto Colateralizado	82
Conclusiones	88
Apéndice	92
Glosario	96
Bibliografía	98

Introducción

Anteriormente el Mercado de Dinero consistía principalmente de bonos con estructuras muy simples como los *CETES*¹, cuyo precio se calcula a descuento, o como los *BPAS*² que tienen cupones regulares y referenciados a la tasa primaria de cetes con plazo 28 días igual al plazo de cupón.

Actualmente el mercado está integrado por estructuras de bonos mucho más complejas, tal es el caso de los *BREMS*³, instrumentos emitidos por el Gobierno Federal, cuya tasa de cupón se calcula con el *promedio geométrico* de la tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios, emitida por Banco de México diariamente. A diferencia del resto de los bonos gubernamentales, los BREMS llevan en curva la tasa de fondeo última conocida para estimar los flujos de los cupones futuros. Este tipo de bonos resultan más atractivos para los inversionistas en general, porque tienen un bajo riesgo al estar garantizados por el Gobierno Federal.

Los Bonos Corporativos son instrumentos emitidos por empresas, grupos o municipios. La captación de dinero mediante este tipo de emisiones resulta más rentable que buscar financiamiento bancario. Estos instrumentos tienen un riesgo de crédito⁴ implícito; para compensarlo el emisor ofrece rendimientos mucho más atractivos a los compradores por medio de

- Spreads o sobretasas,
- Amortizaciones parciales en cada *corte de cupón*,
- Cálculo de tasas con promedios geométricos o aritméticos,
- Revisiones en fechas y plazos diferentes a los cortes de cupón,
- Plazos de cupón irregulares,
- Liquidaciones de cupón 24, 48, 72, 96 horas después del corte de cupón.
- Así como combinaciones de algunas de estas características.

Algunos de los bonos más complejos son aquellos emitidos por Instituciones Financieras los cuales tienen opciones implícitas para el cálculo de la tasa de cupón (notas estructuradas de certificados de depósito) y otros como *UDITRAC* que sus rendimientos están referenciados al *NAFTRAC* es decir proporcional al comportamiento del *INPC*.

Las características de estas emisiones buscan satisfacer las necesidades del Mercado Mexicano, el cual se ve afectado por la poca liquidez y gran volatilidad de las variables económicas.

¹ Certificados de la Tesorería, emitidos por el Gobierno Federal y colocados por Banco de México

² Bonos de protección al Ahorro, emitidos por el Gobierno Federal y colocados por Banco de México

³ Bonos de Regulación Monetaria, emitidos por el Gobierno Federal y colocados por Banco de México

⁴ El nivel de riesgo de crédito de un emisor se mide con las calificaciones asignadas por agencias como Standard & Poor's

El Valor de Mercado de un instrumento constituye una referencia en la operación diaria, y es fundamental para determinar las utilidades o pérdidas por valuación contra el precio pactado. Es por esto que cada institución financiera debe contar con precios de mercado correctos y oportunos para la valuación de los diversos instrumentos que forman parte de su posición o la de sus clientes.

Estos precios deben reflejar con claridad y precisión los movimientos del mercado mexicano diariamente. El precio de mercado de cualquier instrumento es el valor presente de todos y cada uno de los flujos futuros en general inciertos. Esta incertidumbre en estos factores genera lo que se conoce como riesgos de mercado.

Una vez determinados los factores de riesgo se debe obtener el modelo estadístico que mejor explique el comportamiento de los datos.

En este trabajo se pretende desarrollar las herramientas básicas para el análisis de la información proveniente del mercado. Se estudiará el comportamiento de las curvas de referencia (o factores de riesgo) que afectan los diferentes instrumentos en circulación del Mercado de Dinero, plantearemos las metodologías genéricas para el ajuste de curvas, y los modelos de tasa de interés utilizados en el mercado mexicano.

Los modelos para la construcción de las curvas son:

- Método de interpolación
- Método de alambrada

Modelos estocásticos:

- Modelos de un solo factor
- Modelo Vasicek

Modelos de ajuste estadístico:

- Modelo Polinomial Simple
- Modelo Polinomial Exponencial
- Modelo "spline"
- Modelo "spline" Polinomiales
- Modelo "spline" Exponenciales
- Modelo "kernel" que es un modelo no paramétrico
- Modelo Ho y Lee
- Modelo Hull y White
- Modelo Nelson-Siegel

Se establecerán las ventajas y desventajas de cada modelo y se justificará porque el modelo Nelson Siegel es el que mejor describe el comportamiento de las tasas de corto plazo así como las de largo plazo, pues al aumentar otro parámetro al modelo podemos describir mejor la magnitud y dirección de la curva (Extensión Svensson) y al aplicar el ajuste de largo plazo por medio de la expansión de Taylor impedimos los coletazos o cambios bruscos en el largo plazo.

La parte mas gráfica de la tesis es mediante una aplicación desarrollada en Visual Basic. Se explicará la metodología Nelson Siegel y procesos de cálculo de los precios de cada uno de los instrumentos operados en México. Cada factor que interviene en el precio de un bono, es calculado mediante un procedimiento, teniendo como datos de entrada las principales características que se encuentran en el prospecto de colocación de cada instrumento. Esto quiere decir que existe un procedimiento para determinar las fechas de cupón, otro para calcular tasa de cupón, de mercado o de referencia, los flujos futuros, el cupón actual, y los intereses devengados entre otros.

Se explicará en un caso práctico la importancia de los precios de mercado en la operación diaria de cualquier banco o casa de bolsa ya que se detallarán las nuevas reglas emitidas por Banco de México de las operaciones de reporto es decir explicaremos los Reportos Colateralizados, veremos la importancia de la valuación a mercado tanto del subyacente como de las garantías recibidas o entregadas en el cálculo de las llamadas de margen para la constitución de garantías o recepción de garantías, ya que actualmente con el propósito de regular y controlar los riesgos a las alzas o bajas de las tasas de interés es decir de los cambios bruscos de los precios de mercado en las operaciones de reporto, Banco de México publicó en la circular 1/2003 una nueva mecánica operativa, es decir las reglas a las que deberán sujetarse las instituciones de crédito, casas de bolsa , sociedades de inversión y sociedades de inversión especializadas de fondos para el retiro, en sus operaciones en reporto con el fin de garantizar el reporto.

Explicaremos cómo se calculan las llamadas de margen por contraparte, y qué se debe hacer en caso de incurrir en ellas.

Definiciones

Antes de explicar cómo se determina el precio y el rendimiento de un bono, es muy importante entender el concepto del valor del dinero en el tiempo. Para esto, se comenzará con las definiciones básicas y un repaso de esto último.

Interés

El interés es frecuentemente llamado el valor en el tiempo del dinero. Si la tasa de interés es r , expresada como un decimal, entonces tu inversión inicial podría ser multiplicada por $(1+r)$ después de un año claro siendo r una tasa anualizada.

Interés simple.

Bajo una regla de interés simple, el dinero invertido para un periodo diferente de 1 año, acumula interés proporcional al tiempo total de la inversión. Por lo que después de 2 años, el total de interés debe ser $2r$ veces la inversión original, la inversión produce interés igual a r veces la inversión original cada año. Después de una fracción f de 1 año, el interés ganado es rf veces la inversión original.

Si un monto A es dejado en una cuenta a interés simple r , el valor después de n años es: $V=(1+rn)A$. La cuenta crece linealmente con el tiempo. El valor de la cuenta en cualquier tiempo es sólo la suma del monto original (principal) y el interés acumulado el cual es proporcional al tiempo.

Interés compuesto

Después de n años una cuenta calculada con interés compuesto crece $(1+r)^n$ veces su valor original, ésta es la expresión original de una cuenta que crece bajo interés compuesto. Se dice que la expresión exhibe un crecimiento geométrico.

Compuesto en varios intervalos

En lo anterior el interés fue calculado al final de cada año y pagado a la cuenta en ese momento. La mayoría de los bancos ahora calculan y paga intereses con mayor frecuencia en el año, trimestralmente, mensualmente, semestralmente o en algunos casos diariamente.

El efecto del interés compuesto en el crecimiento anual es novedoso por poseer una tasa de interés efectiva la cual es la tasa de interés equivalente que produce el mismo resultado después de un año sin estar compuesto. La tasa anual básica es llamada tasa nominal.

El método general es que un año es dividido dentro de un número fijo de periodos de espacio iguales, m periodos. La tasa de interés para cada uno de los m

periodos es entonces r/m donde r es la tasa nominal anual, la cuenta crece de la forma $1 + (\frac{r}{m})$ durante un periodo, después de k periodos el crecimiento es $(1 + (\frac{r}{m}))^k$. La tasa de interés efectiva es el número r' que satisface $1 + r' = (1 + (\frac{r}{m}))^m$.

Componente Continuo

Podemos determinar el componente continuo considerando el límite del componente ordinario cuando el número m de periodos tiende a infinito. Para determinar el efecto anual de este componente continuo usamos el hecho de que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [1 + (r/m)]^m = e^r$$

donde $e=2.71828\dots$ esta basado en el logaritmo natural. La tasa efectiva de interés r' es el valor que satisface $1+r' = e^r$

Con esto podremos calcular cómo una cuenta crecerá después de cualquier tamaño arbitrario de tiempo. Seleccionamos un tiempo t y dividimos el año dentro de un número m de pequeños periodos cada uno de tamaño $1/m$. Entonces $t = k/m$. Usando la fórmula general para el interés compuesto, sabemos que el factor de crecimiento para k periodos es:

$$[1 + (r/m)]^k = [1 + (r/m)]^{mt} = \left\{ [1 + (r/m)]^m \right\}^t \rightarrow e^{rt}$$

Sin embargo el componente continuo nos guía a la curva familiar de crecimiento exponencial.

Tasas de interés

Hemos hablado de interés como un valor dado y conocido, en la realidad hay diferentes tasas cada día. La mayoría de las tasas son establecidas por las fuerzas de la oferta y la demanda en todos los mercados en los cuales ellas aplican. Estas tasas son publicadas diario, semanalmente etc (cetes, TIIE⁵, TPFTB⁶ etc). No todas las tasas de interés son tasas de mercado desarrollado. Estas pueden ser tasas privadas negociadas entre dos partes privadas o en un contexto de una firma, tasas especiales pueden ser establecidas por transacciones internacionales o para el propósito de evaluar proyectos.

⁵ Tasa interbancaria y de equilibrio esta es publicada por Banco de México diariamente a plazo de 28 y 91 días

⁶ Tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios, esta tasa es publicada diariamente por Banco de México y se calcula en la tarde con el promedio de las tasas de fondeo con las que cerró el día cada banco

Valor Presente

El dinero invertido hoy nos lleva a incrementar su valor en el futuro como resultado del interés, ahora este grupo de conceptos y fórmulas puede ser reversible en el tiempo para calcular el valor que debe ser asignado hoy, en el presente, para el dinero que va ser recibido un tiempo después.

El proceso de evaluar obligaciones futuras como un valor presente equivalente es referido alternativamente como descontar. El valor presente de un monto de dinero futuro es menor que el valor nominal (face value) de ese monto, por lo que el valor futuro tiene que ser descontado para obtener el valor presente. El factor con el cual el valor futuro es descontado se llama factor de descuento y es $d_1 = \frac{1}{(1+r)}$ donde r es la tasa de interés anual.

$$d_k = \frac{1}{[1 + (r/m)]^k}$$

Banco Ideal

Banco Ideal es el que aplica la misma tasa de interés en ambos depósitos o préstamos y no tiene cargos por servicios o transacciones retribuidas.

Si un banco ideal tiene una tasa de interés que es independiente del tamaño del tiempo para el cuál este aplica y este interés está compuesto de acuerdo a las reglas normales se dice que es un banco ideal constante. Este tipo de banco es el punto de referencia usado para describir el mercado exterior financiero y el mercado público de dinero.

Valor Futuro

Bajo los términos de un banco ideal constante, el balance final en nuestra cuenta, puede ser encontrado combinando los resultados de los flujos individuales. Considerando la suma de los flujos de efectivo (x_0, x_1, \dots, x_n) . Al final de n periodos el flujo de efectivo inicial x_0 crecerá a $x_0(1+r)^n$ donde r es la tasa de interés por periodo. Los próximos flujos de efectivo, x_1 , recibidos después del primer periodo, habrá sido al final del tiempo $x_1(1+r)^{n-1}$, el último flujo no colectará ningún interés, por lo que será x_n . El valor total al final de n periodos será:

$$FV = x_0(1+r)^n + x_1(1+r)^{n-1} + \dots + x_n$$

Valor Presente

Considerando los flujos (x_0, x_1, \dots, x_n) . El valor presente del primer elemento x_0 es solo el valor sin descontar. El valor presente del flujo x_1 es $\frac{x_1}{1+r}$. Continuando con este camino encontramos que el valor presente del conjunto de flujos es:

$$PV = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}$$

Valor Presente de flujos .-Dado un conjunto de flujos (x_0, x_1, \dots, x_n) y una tasa de interés r por periodo , el valor presente de este conjunto de flujos es:

$$PV = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}$$

El valor presente del conjunto de flujos puede visto como el monto del pago presente que es equivalente al conjunto de flujos completos.

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

Frecuencia y componente continuo

Suponemos que r es la tasa de interés anual nominal y el interés está compuesto de m periodos de tiempo iguales por año. Suponemos que los flujos de efectivo ocurren inicialmente y al final de cada periodo para el total de n periodos, formando un conjunto de flujos (x_0, x_1, \dots, x_n) , tenemos:

$$PV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{[1 + (r/m)]^k}$$

Si suponemos que los flujos tienen componente continuo y los flujos futuros ocurren al tiempo (t_0, t_1, \dots, t_n) . Denotamos los flujos de efectivo al tiempo t_k por $x(t_k)e^{-rt_k}$. En este caso:

$$PV = \sum_{k=0}^n x(t_k)e^{-rt_k}$$

Teorema principal del valor presente

El conjunto de flujos de efectivo $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ son equivalentes para un banco constante ideal con tasa de interés r si y solo si los valores presentes de los dos conjuntos de flujos, evaluados con la tasa de interés del banco son iguales.

Demostración:

Sea v_x y v_y los valores presentes de los flujos x y y respectivamente entonces el flujo x es equivalente al flujo $(v_x, 0, 0, \dots, 0)$ y y es equivalente a $(v_y, 0, 0, \dots, 0)$. Es claro que estos dos flujos son equivalentes si y solo si $v_x = v_y$.

Este resultado es importante porque esto implica que el valor presente es el único número necesario para caracterizar un conjunto de flujos cuando un banco ideal esta disponible. Por lo que si alguien te ofrece un conjunto de flujos de efectivo, tú solo necesitas evaluar su valor presente correspondiente.

Tasa interna de retorno

La tasa interna de retorno, es otro concepto importante del análisis de flujos de efectivo. Esta pretende específicamente asociar al conjunto de flujos de efectivo con una sola inversión.

El flujo negativo, corresponde al pago que debe ser hecho, los flujos positivos son los pagos recibidos.

Dado un conjunto de flujos (x_0, x_1, \dots, x_n) asociados con una inversión, escribimos la fórmula de valor presente:

$$PV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1+r)^k}$$

Y entonces encontramos el valor de r que convierte este valor presente en cero este valor es llamado la tasa interna de retorno, porque esta es la tasa de interés implicada por la estructura interna del conjunto de flujos de efectivo.

Tasa Interna de retorno. Sea (x_0, x_1, \dots, x_n) conjunto de flujos de efectivo, entonces la tasa interna de retorno de estos flujos es el número r que satisface la ecuación:

$$0 = x_0 + \frac{x_1}{1+r} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{x_n}{(1+r)^n}$$

Equivalentemente, es el número r que satisface $\frac{1}{1+r} = c$ [esto es $r = (\frac{1}{c}) - 1$] donde c satisface la ecuación polinomial

$$0 = x_0 + x_1 c + x_2 c^2 + \dots + x_n c^n$$

Llamamos a esta ecuación una definición preliminar porque puede haber ambigüedad en la solución de la ecuación polinomial de grado n .

La tasa interna de retorno es definida sin referirse a la tasa de interés que prevalece. Esta se determina enteramente por los flujos de efectivo del conjunto. Es la tasa que un banco ideal debe aplicar a un conjunto de flujos de un balance inicial cero.

Teorema principal de la tasa de interés

Suponemos que el conjunto de flujos de efectivo (x_0, x_1, \dots, x_n) tiene $x_0 < 0$ y $x_k \geq 0$ para todo $k, k=1,2,\dots,n$, con un término mínimo siendo estrictamente positivo. Entonces hay una única raíz positiva a la ecuación

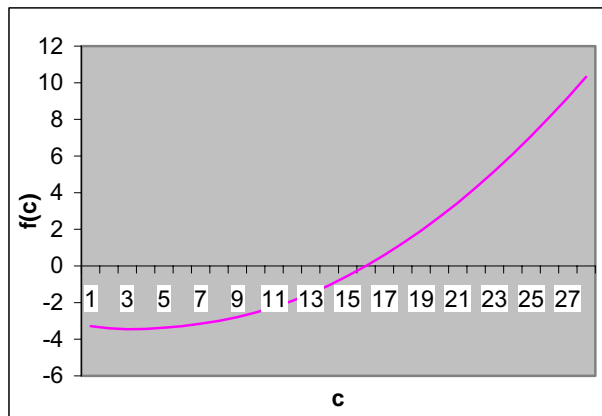
$$0 = x_0 + x_1c + x_2c^2 + \dots + x_nc^n$$

Si $\sum_{k=0}^n x_k > 0$ (significa que el total del monto recibido excede la inversión inicial)

entonces la tasa de retorno correspondiente $r=(1/c)-1$ es positiva

Demostración:

Graficando la función $f(c) = x_0 + x_1c + x_2c^2 + \dots + x_nc^n$,



Note que $f(0) < 0$. Sin embargo como c se incrementa, el valor de $f(c)$ también se incrementa, desde que el mínimo de los términos de flujos de efectivo es estrictamente positivo.

Realmente éste se incrementa sin límite como c se incrementa al infinito. Desde que la función es continua esta debe cruzar el eje en algún valor de c . Esta no puede cruzar el eje más de una vez, porque es estrictamente creciente. Por lo que hay un único valor real c_0 , el cual es positivo para la cual $f(c_0)=0$.

Si $\sum_{k=0}^n x_k > 0$, lo cual significa que hay una red positiva (no descuento) de flujos de efectivo, entonces $f(1) > 0$. Esto significa que la solución c_0 satisface $f(c_0)=0$ debe ser menor que 1. Entonces $r_0=(1/c)-1 > 0$, donde r es la tasa interna de retorno.

Criterios de Evaluación

Para seleccionar de un número de alternativas de conjuntos de flujos de efectivo deben ser evaluados de acuerdo a la lógica y a los criterios estándares, varios criterios son utilizados en la práctica pero los dos métodos más importantes son aquellos basados en el valor presente y en la tasa interna de retorno.

Valor de la red presente

Mientras más alto es el valor presente de todos los flujos asociados con la inversión, más deseable es la alternativa. La red de valor presente es el valor presente de los beneficios menos el valor presente de los costos.

El valor presente de los conjuntos de flujos de efectivo es igual a la suma de los valores presentes de los flujos de efectivo correspondientes.

Tasa interna de retorno

Mientras más alta la tasa interna de retorno más deseable es la inversión.

Discusiones de criterios

La tasa interna de retorno tiene la ventaja que esta depende solo de las propiedades del conjunto de flujos de efectivo y no de la tasa de interés que prevalece (la cual en la práctica no puede ser fácilmente definida).

Un evento significativo es la selección de la tasa interna de retorno que va ser utilizada en el cálculo. En el mercado financiero hay diferentes tasas de interés libres de riesgo. Sin embargo las tasas para el deudor son típicamente, ligeramente más altas que las tasas para el vendedor.

En decisiones de negocios es común usar la figura llamada el costo del capital como una tasa de línea base. Esta figura es la tasa de retorno que la compañía debe ofrecer a inversionistas potenciales en la compañía, es decir es el costo que la compañía debe pagar para conseguir fondos adicionales. Sin embargo algunas de las figuras costo de capital están derivadas del conjunto de flujos inciertos y que no hay realmente medidas apropiadas de una tasa de interés libre de riesgo. Para el cálculo de valor presente es mejor utilizar tasas que representen tasas de interés verdaderas, desde que asumimos que los flujos de efectivo son ciertos.

Red de flujos

Es esencial que la red de ingresos menos gastos sea usada como los flujos de efectivo de cada periodo, los impuestos con frecuencia introducen a la complejidad porque ciertos impuestos de costos y beneficios no son siempre iguales a las salidas o entradas de flujos de efectivo.

Problemas ciclo

Otro método para comparar alternativas con diferentes tamaños de ciclos es asumir que la alternativa será repetida indefinidamente. Entonces una simple ecuación puede ser escrita para el valor del conjunto entero de longitud infinita. En general la aproximación esta basada en la siguiente ecuación:

$$PV_{total} = PV_{ciclo} + \left(\frac{1}{1+i}\right)^k PV_{total}$$

donde k es el tamaño del ciclo base.

Inflación

La inflación está caracterizada por un incremento en los precios generales con el tiempo. Puede ser descrita cuantitativamente en términos de una tasa de inflación f . El componente de la inflación crece como el interés lo hace, por lo que después de k años de inflación a la tasa f , los precios serán $(1+f)^k$ veces sus valores originales. Podemos pensar en precios incrementados o alternativamente en el valor del dinero decreciendo.

Otra tasa de interés que se utiliza mucho es la tasa de interés real que es la tasa a la cual el peso real (eliminando la influencia de la inflación) se incrementa si se deja en un banco que paga una tasa nominal.

Cuando r es la tasa de interés nominal y f es la tasa de inflación, es fácil ver que:

$$1 + r_o = \frac{1 + r}{1 + f}$$

Donde r_o denota la tasa real de interés. Esta ecuación expresa el hecho de que el dinero en el banco se incrementa (nominalmente) por $1+r$, pero su poder de compra es desinflado por el factor $1/(1+f)$. Despejando r_o tenemos:

$$r_o = \frac{r - f}{1 + f}$$

Capítulo I

Objetivo

En este capítulo mostramos los factores que intervienen en el cálculo del precio de un bono, determinamos el precio de los bonos y describimos la relación entre el precio y el rendimiento. También describimos las características principales de los instrumentos que se operan en el Mercado de Dinero

1.1 Instrumentos de ingreso fijo en Mercado de Dinero

El Mercado de Dinero se refiere al mercado dedicado a la emisión de deuda sin importar si es de corto, mediano o largo plazo, es un mercado bien desarrollado diseñado para montos grandes de dinero.

Los valores de los instrumentos financieros están derivados de la promesa que representan. Si existe un mercado desarrollado para un instrumento, este puede ser tratado libremente y fácilmente, a estos instrumentos se les conoce como securities.

Los Securities de ingreso fijo, son instrumentos financieros que son tratados en mercados bien desarrollados que prometen un ingreso fijo al tenedor (holder) sobre un periodo de tiempo.

La idea general de la definición de instrumentos de ingresos fijos es que tienen un conjunto de flujos que es fijo excepto por variaciones tales como circunstancias contingentes bien definidas. Esto puede ser la inflación que se mide en base al INPC⁷ o a las UDIS⁸, si el instrumento tiene una tasa de cupón real. Para la mayoría de los bonos que revisan cada mes, 2, 3 o hasta 6 meses los flujos futuros no son conocidos con certeza por lo cual suponemos las tasas de cupón futuras iguales a la tasa de mercado corriente.

1.2 Tipos de emisores

El mercado de bonos esta caracterizado por el tipo de emisores, incluyendo el Gobierno Federal, Bancos o Casas de Bolsa, Gobiernos Municipales, Corporativos (nacionales y extranjeros) y Gobiernos Extranjeros.

⁷ INPC El Índice Nacional de Precios al Consumidor es un indicador que publica Banco de México quincenalmente para medir la inflación

⁸ UDIS Unidades de Inversión, otro indicador publicado por Banco de México diariamente, mide la inflación y permite calcularla en periodos más específicos de tiempo

En México, por su tipo de emisor, los bonos se dividen en tres grandes grupos:

- Gubernamentales
- Bancarios
- Corporativos

Estas clasificaciones se refieren a sectores del mercado. Diferentes sectores son generalmente percibidos para representar diferente riesgo y premio. Algunos sectores del mercado están subdivididos en categorías dependiendo de las características económicas comunes que reflejan. Por ejemplo con el sector del mercado corporativo, los emisores están clasificados de la siguiente manera:

- 1) Utilerías
- 2) Transportación
- 3) Industrias
- 4) Bancos y compañías financieras

Excluyendo el sector gubernamental, los otros sectores del mercado tienen un ancho rango de emisores cada uno con diferentes habilidades para satisfacer sus obligaciones contractuales. Sin embargo el factor clave de una obligación de deuda es la naturaleza del emisor.

La diferencia entre la tasa de interés ofrecida en dos sectores diferente en el mercado de bonos con el mismo vencimiento (maturity) es llamada sobretasa del sector inter-mercado. Por lo tanto el spread o sobretasa del sector inter-mercado entre los bonos emitidos por el gobierno federal y colocados con Banco de México contra los emitidos por corporaciones domésticas reflejarán el consenso del riesgo entre estos dos sectores. En cambio la diferencia entre dos sectores del mercado corporativo. Por ejemplo la diferencia entre un bono corporativo industrial de cinco años y un bono corporativo de utilería de cinco años con la misma calificación crediticia es una sobretasa intra-mercado corporativa.

1.3 Impuestos

Otro factor importante para valorar un bono o los intereses de un bono es la ley de Impuestos sobre la Renta, cada tipo de bono dependiendo de la naturaleza del inversionista es el impuesto sobre el cual va pagar su inversión existen 4 diferentes grupos de inversionistas por ejemplo:

- 1) Personas morales nacionales
- 2) Personas morales extranjeras
- 3) Personas físicas nacionales
- 4) Personas físicas extranjeras

En la última ley de impuesto sobre la renta a las personas morales o físicas nacionales se les cobra el .5% sobre el capital invertido.

1.4 Expectativas de liquidez del emisor

Los bonos son tratados con diferentes grados de liquidez. Mientras mayor sean las expectativas de liquidez del bono menores serán los rendimientos que el inversionista reciba.

1.5 Plazo al vencimiento

El precio de un bono fluctuará durante su vida como los rendimientos en el mercado cambien. La volatilidad del precio del bono depende de su vencimiento, mas específicamente, suponiendo todos los factores constantes, mientras más largo sea el vencimiento del bono más grande será la volatilidad en el precio, resultado de los cambios en los rendimientos del mercado. Generalmente los bonos están clasificados dentro de 3 sectores por su vencimiento:

- 1) Bonos con plazo de vencimiento entre 1 y 5 años son considerados *corto plazo*
- 2) Bonos con plazo de vencimiento entre 5 y 12 años son considerados *mediano plazo*
- 3) Bonos con plazo de vencimiento mayor a 12 años son considerados *largo plazo*

La diferencia entre cuales quiera de los sectores de vencimiento es llamada sobretasa de vencimiento (maturity spread). La relación entre el rendimiento por otro lado comparable con instrumentos con diferentes vencimientos es llamado *plazo estructural de las tasas de interés*

1.6 Principales instrumentos del Mercado de Dinero

Certificados de Depósitos

El instrumento más simple de ingreso fijo es el depósito, demanda o paga una tasa de interés que varía con las condiciones del mercado sobre un extenso periodo de tiempo. Un instrumento similar es un certificado de depósito el cual es emitido en denominaciones estándares como 100, 1,000 , 10,000 etc.

Aceptaciones bancarias

Son letras de cambio nominativas emitidas por personas morales, aceptadas por bancos. Si la compañía A vende bienes a la compañía B, la compañía B vende una promesa escrita a la compañía A de que pagará por los bienes dentro de un tiempo fijo. Algunos bancos aceptan pagar la cuenta en nombre de la compañía B. La compañía A puede entonces vender la aceptación bancaria a alguien más a descuento antes de que el tiempo haya expirado.

Principales características:

- Se documentan como letras de cambio, giradas por las empresas usuarias de créditos, a su propia orden, las cuales son aceptadas por los bancos. Es un instrumento a un plazo no mayor a 360 días
- Se manejan en múltiplos de 100 y algunos de valor nominal =1
- Funcionan mediante tasa a descuento igual que los CETES y el papel comercial
- El riesgo es menor al de instrumentos de los mercados crediticios, ya que este instrumento tiene el aval del banco emisor.

Pagarés

Son títulos de deuda a largo plazo, sus denominaciones son por lo general \$1, \$100, \$500, \$1000 o sus múltiplos, cantidad a la que se llama valor nominal. El VN representa el valor al vencimiento específico en la obligación. Por lo general éstas devengan una tasa de interés fija y vence en una fecha futura determinada.

Los pagarés se dividen a su vez en pagarés, pagaré empresarial y financiero, de estos últimos existen 2 tipos:

Pagarés financiero quirografarios y Pagarés financiero quirografarios vinculados al INPC.

Principales características:

- Valor nominal :\$100, \$1 o sus múltiplos
- Emisora: Arrendadoras financieras o empresas de factoraje
- Garantía/Seguridad/Riesgo: tienen garantía quirografaria.
- Su plazo no puede ser menor a 1 años ni mayor a 3
- Rendimiento: Aunque en teoría su rendimiento es fijo en realidad es variable
- Liquidación: 24hrs
- Liquidez : muy baja, ya que existen muy pocas emisiones

Pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento

Son títulos bancarios emitidos por un banco, en los cuales se consigna la obligación de éste de devolver al tenedor el importe del principal más los intereses a una fecha consignada.

Principales características:

- Pueden ser a plazos de 1,3,6,9 y 12 meses y adquirirlas personas físicas o morales
- La tasa que se les paga la establece la SHCP
- Pueden realizarse operaciones de reporto

Pagare de Indemnización Carretero PIC´FARAC o CBICS

Es un pagaré avalado por el Gobierno Federal por medio del Banco Nacional de Obras y Servicios con carácter de fiduciario.

Principales características:

- ② VN=100 udis
- ② Plazo: de 5 a 15 años
- ② Rendimiento: Dependerá del precio de adquisición , con pago de una tasa fija cada 182 días
- ② Garantía: Gobierno Federal

Algunos PIC'S fueron sustituidos por los CBIC'S solo que estos últimos tienen cupones segregables, es decir pueden negociarse los cupones por separado.

Bonos Bancarios de Desarrollo

Principales características:

- ② Son de renta fija , ya que otorgan a sus tenedores un rendimiento igual al de aplicar un factor porcentual a la tasa de interés que resulte mas alta de comparar la que ofrecen los cetes , a tres meses plazo, con la de los pagarés bancarios , con un rendimiento liquidable al vencimiento, el mencionado factor a aplicar lo determinará el banco emisor de los bonos.
- ② Los intereses serán pagaderos al inversionista de manera trimestral
- ② La vigencia de su emisión es de 3 años como mínimo, son amortizables; las amortizaciones del principal se realizarán por semestres iguales vencidos , con un año de gracia.
- ② Su colocación sucede de manera similar a los cetes, los emisores los colocarán mediante subasta, a la que únicamente podrán concurrir como postores de casas de bolsa y las instituciones de crédito quienes los comprarán (mercado primario) , para colocarlos después (mercado secundario) entre los inversionistas

Bonos de regulación Monetaria BREMS

Es el promedio geométrico de la tasa ponderada de fondeo desde el primer día de la emisión o del inicio de cupón hasta el día en que corta cupón o amortiza , esta tasa aparece diariamente en la página de Banco de México .En caso de día inhábil se utilizará la tasa que se dio a conocer el día hábil inmediato anterior.

Principales características:

- ② VN:\$100
- ② Garantía: Directa e incondicional de Banco de México
- ② Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando sean múltiplos de 28
- ② Rendimiento: Interés sobre saldos insolutos
- ② Emisor: Gobierno Federal

Bonos de protección al ahorro

Son pagarés en serie que representan obligaciones generales e incondicionales de pago a cargo del IPAB.

Principales características:

- ② VN:\$100
- ② Garantía: Por parte del IPAB
- ② 3 años
- ② Rendimiento: Máximo entre cetes a 28 y PRLV
- ② Pago de intereses sobre el valor nominal cada 28 días

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión

Son bonos de desarrollo de la Tesorería de la Federación denominados en UDIS a mediano y largo plazo. Su objetivo es proteger a la inversión de la inflación para mantener el poder adquisitivo del capital de la inversión original.

Principales características:

- ② VN:\$100
- ② Garantía: Gobierno Federal
- ② Al final del periodo amortiza el valor nominal de los títulos en udis es convertido a pesos y se realiza en 1 sola exhibición
- ② Plazo: de 2 a 5 años
- ② Rendimiento: Es real y fijo pagadero cada 182 días
- ② Emisor: Gobierno Federal

UMS

Deuda emitida en el extranjero por el gobierno federal, cuyas siglas en ingles significan: United Mexican Status, dichos títulos son nominados y liquidados en dólares estadounidenses.

Objetivos:

- ② Facilitar a inversionistas nacionales y extranjeros el acceso directo a títulos de deuda pública que le proporcionen cobertura al ser nominados y liquidados en dólares.
- ② Incrementar las alternativas de inversión
- ② Desarrollar un mercado de deuda a largo plazo

Bonos Bancarios emitidos por bancos privados

Existen 2 tipos:

1. Bonos bancarios para la vivienda
2. Bonos bancarios de infraestructura

Principales características:

- ② VN:\$100
- ② Los emiten bancos privados
- ② Poseen una garantía casi total, puesto que no existen casos de falta de pago de compromisos bancarios

- Ⓢ Teóricamente su rendimiento es fijo, pero en la práctica es variable por la manera a determinar la tasa a pagar
- Ⓢ Poseen buena liquidez ya que existe bastante movimiento en el mercado secundario

Certificados de la Tesorería de la Federación CETES

Los Cetes son títulos de crédito al portador emitidos por el gobierno federal que otorgan al inversionista una cantidad determinada de dinero a una fecha previamente establecida.

Principales características:

- Ⓢ VN:\$10
- Ⓢ Se cotizan como un bono debajo de su valor nominal es decir a descuento
- Ⓢ La emisión se realiza los jueves
- Ⓢ Rendimientos: se establece mediante la tasa de descuento. El rendimiento se obtiene de la diferencia entre el precio de compra y el de venta y es, por eso, una ganancia de capital y no un interés.
- Ⓢ Respaldados por el Gobierno Federal
- Ⓢ Liquidez

Certificados de Depósito

Son títulos de crédito nominativo emitidos por una sociedad de crédito, en los cuales se consigna la obligación de esta a devolver el importe al tenedor, no antes del plazo consignado en el título, a cambio de esto el depositante recibe un interés mensual.

Plazos

- Ⓢ De 30 a 89 días
- Ⓢ De 90 a 179 días
- Ⓢ De 180 a 269 días
- Ⓢ De 270 a 359 días
- Ⓢ De 360 a 539 días
- Ⓢ De 540 a 719 días

Certificados de participación inmobiliario

Son títulos de crédito nominativos a largo plazo que dan derecho a una parte alícuota de la titularidad de los bienes inmuebles dados en garantía.

Principales características:

- Ⓢ Tiene un rendimiento mínimo garantizado
- Ⓢ Pagadero trimestralmente
- Ⓢ Los rendimientos se calculan con la tasa más alta de la tasa vigente de los cetes o AB'S más una sobretasa

Certificados Bursátiles

Es un instrumento de deuda de mediano y largo plazo, la emisión puede ser en pesos o en udis .

Principales características:

- Ⓜ VN:100 pesos o udis
- Ⓜ Plazo de un año en adelante
- Ⓜ Rendimiento puede ser tasa revisable mensual, trimestral o semestral; fijo o tasa real
- Ⓜ Garantía quirografaria, avalada fiduciaria etc

Obligaciones

Son títulos de crédito nominativo que emite una sociedad anónima y por los cuales se comprometen a pagar intereses trimestrales o semestrales por el uso del capital, durante X periodo , a cuyo vencimiento regresará el capital a los tenedores de las obligaciones

Principales características:

- Ⓜ Pueden pagar tasa de interés fija creciente o variable
- Ⓜ Pueden o no tener una garantía específica
- Ⓜ Pueden pagarse en efectivo o ser canjeadas por acciones
- Ⓜ Colocación pública o privada

Ente los diversos tipos destacan:

- Ⓜ Hipotecarias
- Ⓜ Quirografaria la garantía radica única y exclusivamente en la firma de la propia empresa
- Ⓜ Convertibles pueden convertirse en acciones a su vencimiento mientras tanto el inversionista recibe los intereses periódicos pactados
- Ⓜ Subordinadas son aquellas que están condicionadas al cumplimiento de una obligación contractual antes de su amortización
- Ⓜ Con capitalización de intereses son aquellas que capitalizan el pago de intereses, incrementando el saldo insoluto de deuda
- Ⓜ Con garantía fiduciaria se garantiza mediante ciertos bienes afectados en un fideicomiso irrevocable de garantía
- Ⓜ Indizadas está denominadas en moneda extranjera, pero pagaderas en moneda nacional

1.7 Instrumentos en USD

Estos instrumentos son considerados para ser los de más alta calidad de créditos desde que están garantizados por el mismo gobierno de los Estados Unidos.

Treasury bill: Un bill puede ser redimido por el completo valor nominal a la fecha de vencimiento (maturity), estos son altamente líquidos desde que ellos pueden ser fácilmente vendidos antes de la fecha de vencimiento.

Treasury notes: Tienen vencimiento de 1 a 10 años y son vendidas en denominaciones tan pequeñas como \$1000. El propietario de tal nota recibe un pago de cupón cada 6 meses hasta la fecha de vencimiento. Este pago de cupón representa un pago de interés y su magnitud se fija a través de la vida de la nota. Al vencimiento el tenedor de la nota recibe el último pago de cupón y el valor nominal de la nota.

Treasury bonds: Son emitidos con vencimientos mayores a 10 años, ellos también hacen pagos de cupón, sin embargo algunos son callable es decir que en alguna fecha programada de pago de cupón pueden forzar al tenedor del bono a redimir el bono en esa fecha por su valor nominal (par).

Treasury strips: Emitido en forma de listado. Aquí cada cupón es emitido separadamente como es el principal. Cada uno de estos instrumentos generan un flujo de efectivo, con ningún pago de cupón intermedio a este se le llama bono de cupón zero.

Bonos municipales: Son emitidos por agencias de estado y gobiernos locales. Hay dos tipos principales: bonos de obligaciones generales los cuales son apoyados por un cuerpo del gobierno como el estado; y bonos de rentas públicas los cuales están apoyados tanto por las rentas generadas por el proyecto que fue inicialmente fundado por el emisor del bono o por la agencia responsable para el proyecto.

El ingreso de interés asociado con bonos municipales es exento del ingreso del impuesto federal y del estado e impuestos locales en el estado emisor. Estos factores quieren decir que inversionistas están dispuestos a aceptar tasa de interés bajas en estos bonos comparados con otros instrumentos de calidad similar.

Bonos corporativos: Son emitidos por corporaciones con el propósito de aumentar capital para operaciones y nuevos riesgos. Algunos bonos corporativos son tratados en un intercambio, pero la mayoría son tratados over-the-counter en una network de dealers de bonos. Estos bonos sobre el contador son menos líquidos en el sentido de que puede haber pocos traders por día de una particular emisión. Un bono carga con él un documento, el cual es un contrato de términos.

Algunos factores que pueden ser incluidos son:

Bonos callable Un bono es callable si el emisor tiene el derecho de recomprar el bono a un precio específico. Usualmente este precio cae con el tiempo y con frecuencia hay un inicio llamado periodo de protección donde el bono no puede ser callable.

Fondos de reserva o de amortización (sinking): El emisor puede establecer un fondo de reserva para extender esta obligación puesto sobre el tiempo. Bajo esto una colocación el emisor puede recomprar una cierta fracción del prominente bono cada año a un precio específico.

Subordinación de deuda: Para proteger a un tenedor de un bono, pueden ser agrupados límites de préstamos adicionales por el emisor. También los tenedores del bono pueden estar seguros que en el evento de banca rota, sus pagos tienen prioridad sobre los pagos de otra deuda, la otra deuda siendo subordinada.

Mortgages (hipotecas): Una mortgage parece como lo opuesto al bono. El futuro dueño de la casa con frecuencia venderá una hipoteca de casa para generar inmediatamente efectivo para pagar por un hogar, obligando a aquel o a él mismo a hacer pagos periódicos al tenedor de la hipoteca, igual que los bonos estos pagos pueden ser trimestrales, semestrales, etc, en contraste con los bonos, no tienen un pago final igual al valor nominal al vencimiento.

El conjunto de ingresos generados no es completamente fijo, desde que este puede ser determinado con un apropiado pago de precio global a discreción del dueño de la casa.

Puede haber pagos periódicos de tamaños modestos para varios pagos seguidos por un pago mayor que completa el contrato. Hipotecas de tasa ajustables, ajustan la tasa de interés periódicamente de acuerdo a una tasa de interés indexada, así que éstas no generan ingresos fijos en el sentido estricto.

Estos están escritos como contratos entre dos partes, y generalmente están empaquetados en paquetes grandes y tratados en montos de instituciones financieras.

Estos instrumentos respaldados por hipoteca son muy líquidos.

Anualidades: Una anualidad es un contrato que paga al tenedor dinero periódicamente, de acuerdo a un horario predeterminado o fórmula, sobre un periodo de tiempo; son consideradas oportunidades de inversión que son posibles en tasas estandarizadas.

1.8 Fórmulas de valor

Muchos instrumentos de ingresos fijos incluyen una obligación para pagar un conjunto de flujos de efectivo periódicos e iguales.

Anualidades perpetuas

Una anualidad perpetua o perpetuidad paga una suma fija periódicamente por siempre. El valor presente de una anualidad perpetua puede ser fácilmente derivado. Supongamos un monto A es pagado al final de cada periodo comenzando al final del primer periodo y supongamos que la tasa de interés por periodo es r .

Entonces el valor presente es:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} A/(1+r)^k$$

Los términos en la sumatoria representan una serie geométrica y esta serie puede ser sumada fácilmente usando una fórmula estándar o derivando

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} A/(1+r)^k = \frac{A}{1+r} + \sum_{k=1}^{\infty} A/(1+r)^k = \frac{A}{1+r} + \frac{P}{1+r}$$

Podemos resolver esta ecuación encontrando $P=A/r$. Entonces podemos encontrar el siguiente resultado básico.

Fórmula de la anualidad perpetua.- El valor presente P de una anualidad perpetua que paga un monto A cada periodo, empezando un periodo de el presente, es

$$P = \frac{A}{r}$$

donde r es la tasa de interés de un periodo.

Conjuntos de vida finita

El valor presente de un conjunto de flujos finitos relativo a la tasa de interés r por periodo es:

$$P = \sum_{k=1}^n A/(1+r)^k$$

El valor puede ser encontrado, considerando 2 anualidades perpetuas .Ambas pagan un monto A cada año pero una empieza en el tiempo A y la otra comienza en el tiempo n+1, substraemos la segunda de la primera, el resultado es el mismo que el conjunto original de vida finita.

El valor de la anualidad diferida es encontrada descontando la anualidad con el factor $(1+r)^{-n}$ porque esto es diferido en n periodos . Entonces podemos escribir:

$$P = \frac{A}{r} - \frac{A}{r(1+r)^n} = \frac{A}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

Fórmulas de anualidad

Consideramos una anualidad que comienza el pago un periodo del presente, pagando un monto A cada periodo para un total de n periodos. El valor presente P., el periodo uno de la anualidad de monto A, la tasa de interés r del periodo uno, y el numero de periodos n de la anualidad están relacionados por:

$$P = \frac{A}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

o, equivalentemente

$$A = \frac{r(1+r)^n P}{(1+r)^n - 1}$$

La fórmula de la anualidad es frecuentemente usada en dirección reversa, esto es A como función de P. Esto determina el pago periódico que es equivalente (bajo la tasa de interés supuesta) a un pago inicial de P. Este proceso de sustituir pagos periódicos por una obligación corriente es referido como amortización.

El APR es la tasa de interés que si aplica al monto de un préstamo sin mantenimientos y gastos , resultaría en un pago mensualmente de A, exactamente como antes.

1.9 Clasificación de los tipos de bonos por su plazo en México

Los Bonos por su plazo en México se clasifican de la siguiente forma:

Clasificación de Instrumentos del Mercado de Deuda según su plazo		
Mercado de deuda a corto plazo		
Emisor	Instrumento	Plazo
Gobierno Federal	CETESI	28,91,180,360 DÍAS
Bancos	AB's	360 días máximo
Bancos	PRLV	1,3,6 Y 12
Almacenes Generales de Depósito	Bonos prendarios	180 días máximo
Sociedades Mercantiles	Papel Comercial, pagaré empresarial bursátil	1 a 360 días
Mercado de deuda a mediano plazo		
Emisor	Instrumento	Plazo
Arrendadoras financieras o empresas de factoraje	Pagaré financiero	1 a 3 años
Organismos descentralizados	Petropagaré	360 días máximo
Bancos	DBBD's	3 años máximo
	CPI'S	3 años máximo
	Pagaré a mediano plazo	3 años
Gobierno Federal	BREMS	Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días.Hata la fecha solo se han emitidos de 1 a 3 años de plazo
IPAB	Bonos BPA's	3 años
	BPAT	3 años múltiplos de 91
Sociedades mercantiles	Pagaré a mediano plazo	1 a 3 años
Mercado de deuda a largo plazo		
Emisor	Instrumento	Plazo
Gobierno Federal	UDIBONOS	Pueden emitirse a cualquier plazo, siempre y cuando este sea múltiplo de 182 días, Hata la fecha se han emitidos en plazos de 3,5,7, 10 y 20 años
Gobierno Federal	BONDES	Entre 1 y 2 años
	BONDEST	Entre 1 y 2 años
Sociedades mercantiles	Obligaciones	3 a 7 años
	Obligaciones Telmex	15 a 20 años
Gobierno Federal por medio de Banobras	Pagaré de Indemnización Carretero	
	PIC-FARAC	3 A 15 AÑOS
	CBIC'S	3 A 15 AÑOS

1.10 Características fundamentales de los Bonos

Los Bonos representan el más grande valor monetario de los instrumentos de ingresos fijos y son los más líquidos de estos instrumentos.

Un bono es una obligación por el emisor del bono de pagar dinero al tenedor del bono de acuerdo a reglas especificadas al momento en el que el bono es emitido. Generalmente un bono paga un monto específico, su valor nominal o su valor par a la fecha de madurez o al vencimiento. En adición muchos bonos pagan pagos de cupón periódicos.

El tenedor del bono informara éstos al agente del emisor (usualmente un banco) en un tiempo, en fechas específicas y los pagos de cupón apropiados serían informados de regreso . La fecha del último cupón corresponde a la fecha de madurez por lo que el último pago es igual al valor nominal más el valor del cupón .El pago del cupón es descrito como un porcentaje del valor nominal.

El emisor del bono inicialmente vende los bonos para alcanzar el capital inmediatamente y entonces es obligado a hacer los pagos preescritos. Usualmente los bonos son emitidos con tasas de cupón cercanas a la tasa de interés general prevalente por lo que ellos venderán cerca de su valor nominal. El precio está entonces determinado por un mercado y puede variar minuto por minuto.

Los precios están cotizados como un porcentaje del valor nominal. El precio postura(bid) es el precio que los dealers están dispuestos a pagar por el bono es decir, el precio al cual el bono puede ser vendido inmediatamente; por otra parte el precio (ask) es el precio al que los dealers están dispuestos a vender el bono es decir el precio al cual este puede ser comprado inmediatamente.

Las cotizaciones de bonos ignoran el interés acumulado, el cual debe ser agregado al precio cotizado en orden de obtener el monto actual que debe ser pagado para el bono. Si tú compras el bono a la mitad del camino del periodo de cupón , recibirás tu primer pago de cupón igual al que en teoría recibiría el primer propietario. Por lo que tú debes pagar la primera parte del cupón al primer propietario. Este pago de interés esta hecho al momento de la oferta por lo que este extrapago actúa como una adición al precio.

El interés acumulado que debe ser pagado al primer propietario esta determinado por una interpolación lineal basada en días. Específicamente el interés acumulado (AI) es:

$$AI = \frac{dt}{pcup} * montocupon$$

donde dt = numero de días transcurridos desde el último cupón; $pcup$ = número de días efectivos del periodo de cupón corriente; vn =valor nominal actualizado del bono

1.10.1 Ratings quality

Aunque los bonos ofrecen supuestamente un conjunto de ingresos fijos , ellos están sujetos a faltar si el emisor tiene dificultades financieras o cae en bancarrota. Para caracterizar la naturaleza de este riesgo, los bonos son caracterizados por organizaciones calificadoras: Moody's y Standard & Poor's. Instrumentos emitidos por el gobierno (U.S. Treasury securities) no son clasificados, desde que estos son considerados libres de riesgo default.

Calificaciones Ratings	Moody's	Standard & Poor's
Calificación alta	Aaa	AAA
	Aa	AA
Calificación media	A	A
	Baa	BBB
Calificación especulativa	Ba	BB
	B	B
Falta peligrosa	Caa	CCC
	Ca	CC
	C	C D

Los ratings reflejan un criterio de la probabilidad los pagos de bonos se habrán hecho con horario. Bonos con calificaciones bajas usualmente se venden a precios más bajos que los bonos comparados con ratings altos.

Los bonos que tienen calificaciones tanto altas como medias son considerados para ser calificados para invertir, bonos que están en o debajo de la categoría especulativa son con frecuencia nombrados bonos (junk) chatarra.

1.10.2 Rendimiento (yield)

Un rendimiento de bono es la tasa de interés implícita por la estructura de pago. Es la tasa de interés a la cual el valor presente del conjunto de pagos (consiste en los pagos de cupón y el pago de amortización final, valor nominal) es exactamente igual al precio corriente. Este valor es llamado rendimiento al vencimiento (YTM). Los rendimientos están siempre cotizados sobre una base anual.

Es claro ver que el rendimiento al vencimiento es una tasa interna de retorno del bono al precio corriente.

Supongamos que un bono con valor nominal F hace m pagos de cupón de C/m cada año y hay n periodos . La suma de los pagos de cupón es C en un año. Suponemos también que el precio corriente de el bono es P , entonces el rendimiento al vencimiento es el valor de λ por lo que:

$$P = \frac{F}{[1 + (\lambda / M)]^n} + \sum_{k=1}^n \frac{C / m}{[1 + (\lambda / m)]^k}$$

Este valor de λ , el rendimiento al vencimiento, es la tasa de interés implícita por el bono cuando el interés es compuesto m veces por año . El primer término es el valor presente del pago del valor nominal, El término k de la sumatoria , es el valor presente de el pago de cupón k C/m . La suma de los valores presentes basada en una tasa de interés nominal de λ ,es igual al precio del bono.

1.10.3 Factores para dar precio a un bono

Cuando un bono es emitido el inversionista (investor) es esencialmente el que presta dinero al emisor en intercambio por los pagos de interés y la promesa del repago del principal a una fecha futura. La mayoría de los bonos son tratados en el mercado secundario.

Las principales consideraciones que entran para dar precio a un bono son:

- Principal o valor nominal
- Madurez
- Pagos de interés
- Provisiones call y otros factores como conversión de intereses, etc.
- Calidad de crédito del emisor

Los tres primeros puntos definen la estructura de los flujos de efectivo que el inversionista espera recibir si el bono estuviera mantenido hasta el vencimiento.

Provisiones call: el emisor tiene la opción de call o retirar el bono después de cierto periodo de tiempo estipulado en el acuerdo del bono.

1.10.4 Tasas gubernamentales contra tasas interbancarias

Hay diferentes tipos de tasas de interés:

- Tasas gubernamentales son deducidas por bonos emitidos por el gobierno (CETES 28,91,182,360).
- Tasas interbancarias son tasas a las cuales depósitos son intercambiados entre bancos y a las cuales transacciones de swaps ocurren.
- Tasas cupón cero pueden ser “stripped” separadas tanto de los bonos en el sector gubernamental de el mercado como de productos en el sector interbancario de mercado, resultando en 2 curvas diferentes.

- La tasa interbancaria más importante usualmente considerada como una diferencia para contratos es la tasa LIBOR (London Interbank Offered Rate), fijada diariamente en Londres. Sin embargo existen otras tasas interbancarias fijadas en otros mercados (EURIBOR, fijada en Brussels etc) TIEE, TPFTB.

1.10.5 Fórmula del precio del bono

El precio de un bono que tiene exactamente n periodos de cupón restantes al vencimiento y un rendimiento al vencimiento de λ , satisface:

$$P = \frac{F}{[1 + (\lambda/m)^n]} + \frac{C}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (\lambda/m)^n]} \right\}$$

donde F es el valor nominal del bono, C es el pago de cupón anual y m es el numero de pagos de cupón por año.

1.11 Naturaleza cualitativa de las curvas Precio-Rendimiento

Aunque la ecuación del bono está completa, es fácil de obtener un entendimiento cualitativo de la relación entre precio, rendimiento, cupón y tiempo al vencimiento. Esto ayuda a motivar las ideas subrayadas en la construcción de un portafolio de bonos y también permite entender las propiedades del riesgo de la tasa de interés de bonos.

El rendimiento de varios bonos rastrea uno a otro y la tasa de interés que prevalece de otros instrumentos de renta fija son muy cercanas.

La única manera de que el rendimiento de un bono pueda cambiar es que el precio del bono cambie. El cambio en el precio requiere un cambio en el rendimiento que varía con la estructura del bono (su tasa de cupón y su vencimiento). Los rendimientos de varios bonos se mueven más o menos en armonía, sus precios se mueven por montos diferentes. La curva precio-rendimiento muestra cómo están relacionados el precio y el rendimiento.

El primer factor obvio de la curva, es que tiene una inclinación negativa, es decir el precio y el rendimiento tienen una relación inversa. Si el rendimiento sube el precio baja. Cuando la gente dice "El mercado de bonos va a la baja" quiere decir que las tasas de interés están subiendo.

Cuando el rendimiento es exactamente igual a la tasa de cupón, decimos que el bono se llama bono par. Otra cosa que podemos decir es que cuando el precio del bono tiende a cero como el rendimiento se incrementa, grandes rendimientos implican descuentos pesados. La forma de la curva es convexa desde que esta se

en curva hacia el origen y sale hacia el eje horizontal. Dados solo 2 puntos y el comportamiento áspero de la forma es posible diseñar una razonable aproximación de la verdadera curva.

También vemos que con un vencimiento fijo, la curva precio-vencimiento aumenta como la tasa de cupón se incrementa. La pendiente incrementada es un indicador de que vencimientos más largos indican mayor sensibilidad del precio al rendimiento.

La curva precio- rendimiento es importante porque esta describe el riesgo de la tasa de interés asociada con un bono. Si los rendimientos decrecen, tu ganarías montos similares.

Los tenedores de bonos son sujetos al riesgo del rendimiento en el sentido descrito: si los rendimientos cambian, los precios de bonos cambian también. Esto es un riesgo inmediato, afectando el valor término-cercano del bono. Tu puedes continuar manteniendo el bono y con esto continuar recibiendo la promesa de los pagos de cupón y del valor nominal al vencimiento. Este conjunto de flujos de efectivo no están afectando a la tasa de interés. Pero si tu planeas vender el bono antes del vencimiento, el precio será gobernado por la curva precio rendimiento.

Capítulo II

Objetivo

Par emplear efectivamente estrategias en el portafolio de bonos es necesario entender la volatilidad del precio de los bonos como resultado de los cambios en la tasa de interés. Explicaremos las características de volatilidad en el precio de un bono y presentaremos varias medidas para cuantificar la volatilidad del precio. Comenzaremos describiendo la relación entre el precio y el rendimiento viendo al precio del bono como una función continua y explicando el comportamiento de esta función con respecto al plazo de vencimiento, a cambios en la tasa, en el plazo esto será explicado con derivadas con respecto a las variables que examinaremos.

2.1 Las matemáticas de los movimientos del Precio-Bono

La relación vencimiento-rendimiento puede ser más convincentemente descrita y más claramente percibida cuando es dado un reconocimiento explícito de los precios de los bonos. La teoría tradicional será reformulada en términos consistentes con las prácticas de inversionistas de bonos y traders.

Los economistas típicamente formulan teorías de la estructura de las tasas de interés en términos de los rendimientos del bono en lugar de los precios del bono. Los Bonos son tratados en términos del precio, no del rendimiento. Ellos son comprados y vendidos por especuladores, inversionistas a largo plazo, e instituciones financieras, todos agudamente concientes de los movimientos del precio. Examinaré rigurosamente que los nexos entre los cambios en el rendimiento de los bonos y los cambios en los precios de mercado pueden ser enormemente serviciales en el entendimiento de las fluctuaciones actuales de los rendimientos en los mercados de bonos.

Por ellos mismos, los teoremas matemáticos concernientes a las respuestas de los precios de bonos a hipotéticos cambios en la tasa de interés, no nos dicen nada acerca del término estructura. Sin embargo ellos nos permitirán mas tarde derivar mas completamente las implicaciones de algunos simples supuestos en la naturaleza de esperanzas.

Es decir una rígida conexión entre un grupo de rendimientos esperados y los precios de bonos con diferentes vencimientos, en lo siguiente con excepción del teorema 5, podemos proceder de dos simples supuestos:

- 1) todos los instrumentos a los que nos referimos tienen el mismo cupón y,
- 2) la tasa presente de corto plazo y todas las tasa de corto plazo futuras de el análisis tradicional, son idénticas, es decir, la curva de rendimiento es siempre perfectamente igual (flat)

Por lo cual si la tasa de interés de corto plazo presente aumenta por una cierta cantidad, se asume que las tasas de corto plazo futuras esperadas aumentarán exactamente por la misma cantidad. Por supuesto esto no es lo que sucede en la práctica, las curvas de rendimiento no son horizontales, como hemos visto y el rendimiento no cambia igual para todos los vencimientos. Sin embargo es importante estudiar este caso especial como un punto de referencia. De hecho una de las principales funciones de este caso no realista es ayudarnos a ver porque la curva de rendimiento toma la forma que toma.

Practicantes de mercado consideran que el valor de un bono se determina por cuatro factores:

- Ⓜ El valor nominal de el bono, es decir el monto principal que será pagado al vencimiento que denotaremos como F
- Ⓜ El cupón o interés pagado periódicamente al tenedor del bono denotado por C
- Ⓜ La tasa interna de retorno i , esta es referida como la tasa de regreso por periodo que hace que la suma del valor presente de los flujos sea cero o el componente asumido anualmente, el rendimiento anual al vencimiento y
- Ⓜ N , el numero de años al vencimiento

El rendimiento al vencimiento i es simplemente la tasa de descuento la cual hace que la suma de los valores presentes de todos los cupones que serán recibidos así como intereses y el monto del principal que será pagado al vencimiento sea igual al precio de compra.

$$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C}{(1+i)^N} + \frac{F}{(1+i)^N} \quad (1)$$

Sumando la progresión geométrica (ver anexo) y simplificando obtenemos:

$$P = \frac{C}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^N} \right] + \frac{F}{(1+i)^N} \quad (2)$$

Cuando N se aproxima a infinito la expresión se aproxima al limite C/i . Así, un bono perpetuo paga \$1.00 por año, el valor de mercado llega a ser simplemente el reciproco de la tasa de mercado de interés.

Re escribimos la ecuación de la siguiente forma:

$$P = \frac{C}{i} + \frac{(F - C/i)}{(1+i)^N} \quad (3)$$

y definimos el nominal o la tasa rendimiento inicial (i_0) como $i_0 = C/F$

(4)

Podemos observar que cuando el rendimiento al vencimiento de mercado i es igual al rendimiento nominal entonces

$C/i = F$ y $P = F$;
el bono se vende a la par. Cuando $i > i_0$, entonces

(4a)

$C/i < F$ y $P < F$;
el bono se vende con un descuento. Cuando $i < i_0$, entonces

(4b)

$C/i > F$ y $P > F$;
el bono se vende con un premio.

(4c)

Ahora procedemos a examinar la relación entre los cambios en el rendimiento y los movimientos del precio-bono. El primer resultado es muy obvio pero es necesario para próximos cálculos.

Teorema 1: Los precios de bono se mueve inversamente a los rendimientos del bono

Dem: Derivando o diferenciando (1) con respecto a i obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial i} = -\frac{C}{(1+i)^2} - \frac{2C}{(1+i)^3} - \dots - \frac{NC}{(1+i)^{N+1}} - \frac{NF}{(1+i)^{N+1}} < 0 \quad (5)$$

Teorema 2: Para un cambio dado en el rendimiento del rendimiento nominal, mientras más largo es el plazo al vencimiento, mayores serán los cambios en los precios de bonos.

Dem: Deseamos evaluar $\partial[P(i) - P(i_0)]/\partial N$ pero la $\partial[P(i_0)]/\partial N = 0$ desde que $i = i_0, P = F$, es decir una constante por (4a). Por lo tanto es suficiente con evaluar la parte de $\partial[P(i)]/\partial N$. Rescribiendo (2) tenemos:

$$P = \frac{C}{i} - (1+i)^{-N} \left[\frac{C}{i} - F \right]$$

Diferenciando con respecto a N obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \left[\frac{C}{i} - F \right] (1+i)^{-N} [\ln(1+i)] \quad (6)$$

Cuando $i < i_0$, el bono se vende con un premio

$$\left[\frac{C}{i} - F \right] > 0 \quad (6a)$$

De (4c) y por lo tanto $\partial P / \partial N > 0$. Por lo tanto, si el rendimiento de mercado, está por debajo del rendimiento nominal, i_0 , el precio del bono P será mas alto mientras mas largo sea el tiempo al vencimiento

Cuando $i < i_0$, el bono se vende a descuento

$$\left[\frac{C}{i} - F \right] < 0 \quad (6b)$$

De (4b) y por lo tanto $\partial P / \partial N < 0$. Por lo tanto, si el rendimiento de mercado, está por arriba del rendimiento nominal, i_0 , el precio del bono P será mas bajo cuando el tamaño del tiempo al vencimiento se incremente. Desde que el valor absoluto del cambio porcentual en el precio del bono esta medido por la diferencia entre la derivada de P y la constante F ($F=100$), encontramos que los movimientos en el precio-bono son amplificados cuando el tiempo al vencimiento se incrementa. Así el efecto de un cambio en el rendimiento de un rendimiento nominal será mayor, mientras más grande sea el plazo al vencimiento.

Este teorema no es generalmente cierto cuando los cambios en el rendimiento son medidos en una base diferente al rendimiento nominal. En particular cuando los bonos son vendidos a descuento (es decir el rendimiento al vencimiento inicial será mayor que el rendimiento nominal) es posible encontrar casos donde instrumentos con plazo mayor son realmente menos sensibles a los cambios en las tasas de mercado que las emisiones más cortas.

Teorema 3: Los cambios porcentuales en el precio descritos en el teorema 2 se incrementan con una tasa decreciente cuando N se incrementa.

Dem:

Diferenciando la ecuación 6 con respecto a N obtenemos:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial N^2} = - \left[\frac{C}{i} - F \right] [\ln(1+i)]^2 [(1+i)^{-N}] \quad (7)$$

Repitiendo el mismo argumento que arriba, tenemos para la i de abajo la tasa nominal, i_0 , $\partial^2 P / \partial N^2 < 0$. El precio porcentual aumenta a la par cuando N se

incrementa, pero a una tasa decreciente. Igualmente, para i de arriba i_0 , $\partial^2 P / \partial N^2 > 0$. El precio porcentual declina de un incremento par con N en una tasa decreciente.

Teorema 4: Los movimientos en el precio resultan de una igualdad absoluta (lo que es lo mismo de una igualdad proporcional) cuando incrementos y decrementos en el rendimiento son asimétricos es decir un decremento en rendimientos aumenta el precio de los bonos mientras que el mismo decremento en rendimientos disminuye los precios.

Dem:

Vemos que para probar asimetría es suficiente mostrar que $\partial^2 P / \partial i^2 > 0$. Para derivar la desigualdad diferenciamos la ecuación 5 con respecto a i y obtenemos:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial i^2} = \frac{2C}{(1+i)^3} + \frac{2.3C}{(1+i)^4} + \dots + \frac{N(N+1)C}{(1+i)^{N+2}} + \frac{N(N+1)F}{(1+i)^{N+2}} > 0 \quad (8)$$

Así la pendiente de la función $P = f(i)$ llega a ser menos negativa como i se incrementa. Consecuentemente, para cualquier i' , la pendiente promedio de la función sobre el rango entre i' y $(i' - \Delta i)$ es más alto que sobre el rango entre i' y $(i' + \Delta i)$. Por lo tanto, podemos decir que un incremento 10% en el rendimiento resultará un valor absoluto más pequeño y una baja en el precio porcentual, que un decremento 10% en el rendimiento aumentará los precios de los bonos.

Teorema 5: Mientras mas alto sea el cupón cargado i por el bono, más pequeño será el porcentaje de fluctuación del precio para un cambio en el porcentaje dado en el rendimiento excepto para instrumentos con plazos de un año y consolidados

Dem:

Deseamos probar que $\partial \left[\frac{\partial P}{\partial i} \cdot \frac{i}{P} \right] / \partial C > 0$ para toda $N \geq 2$ (Recordamos que $\partial P / \partial i < 0$). Diferenciando (2) con respecto a i obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial i} = \frac{-C(1+i)^{N+1} + C(1+i + Ni) - FNi^2}{i^2(1+i)^{N+1}}$$

Multiplicando por i/P (donde usamos la expresión (2) para P) y simplificando obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial i} \cdot \frac{i}{P} = \frac{-C(1+i)^{N+1} + C(1+i + Ni) - FNi^2}{C(1+i)^{N+1} - C(1+i) + Fi(1+i)} \quad (9)$$

Escribiendo $\Delta(N) = (1+i)[C(1+i)^N - C + Fi]^2$ por lo que

$$\frac{Fi}{(1+i)[C(1+i)^N - C + Fi]^2} = \frac{Fi}{\Delta(N)} > 0 \text{ para cualquier } N \text{ finita} \quad (10)$$

Diferenciando (9) con respecto a C obtenemos:

$$\partial \left[\frac{\partial P}{\partial i} \cdot \frac{i}{P} \right] / \partial C = \frac{Fi}{\Delta N} [1+i + (1+i)^N (Ni-1-i)] \quad (11)$$

Cuando $N=1, (11)=0$, (11) es positiva para toda N finita ≥ 2 como será ahora mostrado por inducción escribimos:

$$\Phi(N) = 1+i + (1+i)^N (Ni-1-i)$$

Primero notamos que para $N=2$, $\Phi(N) = (i^2 + i^3) > 0$ para todo $i > 0$. Ahora probamos que $\Phi(N)$ es una función decreciente de N , por lo que desde que $\Phi(N) > 0$ para $N=2$, $\Phi(N) > 0$ para $N > 0$

$$\Phi(N+1) = 1+i + (1+i)^N (1+i)(Ni-1),$$

por lo que:

$$\Phi(N+1) = \Phi(N) + Ni^2(1+i)^N$$

$$\Phi(N+1) = \Phi(N),$$

para toda $N > 0, i < 0$,

Por lo que concluimos

$$\Phi(N) > 0 \quad \forall N \geq 2$$

Así por (11) podemos escribir $Fi/\Delta(N) \cdot \Phi(N)$, y concluimos por (10) y (12) que

$$\partial \left[\frac{\partial P}{\partial i} \cdot \frac{i}{P} \right] / \partial C > 0$$

Pero notamos que cuando $N \rightarrow \infty, Fi/\Delta(N) \rightarrow 0$ y $(11) \rightarrow 0$

2.1.1 Conclusiones de los teoremas

Notamos que para un cambio dado en el rendimiento, las fluctuaciones potenciales en el precio para bonos de largo plazo son aproximadamente similares sobre un vasto rango de vencimientos. Las curvas de precio tienden a ponerse horizontales (aplanarse) cuando el plazo al vencimiento incrementa. Los bonos de largo vencimiento, los cuales son matemáticamente equivalentes a portafolios en términos de precio poco sensibles a los cambios en el nivel de tasas de interés, pueden verosíblemente ser esperados como cercanos substitutos cuyos rendimientos podrían consecuentemente ser muy similares. Inversamente en el

corto plazo o rango intermedio de vencimiento espectro, la extensión del vencimiento aunque por pocos años, implica considerables diferencias en el riesgo del precio y oportunidades para ganar capital. Es razonable esperar que en estas áreas de la curva de rendimiento, los bonos de diferentes plazos al vencimiento pudieran ser más parecidos que diferentes en valores como respuestas a cambios esperados en el nivel de tasas de interés⁹.

Las matemáticas de los movimientos en los precios pueden ayudarnos a explicar las pendientes o inclinaciones características de la curva de rendimiento.

La relación precio-vencimiento puede ayudarnos a explicar la limitada volatilidad de tasas de largo plazo.

2.2 Propiedades concernientes a la volatilidad en el precio de los bonos libres de opción.

Un principio fundamental de un bono libre de opción (es decir que no tiene una opción implícita) es que el precio del bono cambia en dirección opuesta al cambio en el rendimiento requerido para el bono. Este principio viene del hecho de que el precio de un bono es igual al valor presente de los flujos de efectivo esperados. Un incremento (o decremento) en el rendimiento, disminuye (o incrementa) el valor presente de los flujos de efectivo esperados y por lo tanto un decremento (o incremento) en el precio del bono.

A continuación mencionamos varias propiedades concernientes a la volatilidad del precio de los bonos:

- Aunque el precio de todos los bonos libres de opción se mueve en dirección opuesta al cambio requerido en el rendimiento, el cambio porcentual en el precio no es el mismo para todos.
- Para cambios muy pequeños en el rendimiento requerido, el cambio porcentual en el precio del bono es regularmente igual, aunque el rendimiento se incremente o disminuya
- Para largos cambios en el rendimiento requerido, el cambio porcentual en el precio de un bono no es el mismo para un incremento en el rendimiento como lo es para una disminución en el rendimiento
- Para un cambio en los puntos base, el incremento porcentual en el precio es mayor que el decremento porcentual del precio.

La implicación de la propiedad 4 es que si a un inversionista le pertenece un bono, la apreciación del precio que será realizada si el rendimiento requerido disminuye es mayor que la pérdida de capital que sería realizada si el rendimiento requerido aumenta por el mismo número de puntos base. Para un inversionista que está "corto" en un bono es al revés: la pérdida potencial del capital es mayor

⁹ Todos estos argumentos están basados en el supuesto de que cambios anticipados en el rendimiento son iguales para todos los vencimientos. Es interesante comparar la explicación de arriba con la que ofrece Lutz. Formar un "hombro" se esperará que cambiarán en un futuro cercano y entonces alcanzarán un cierto nivel donde serán constantes

que la ganancia potencial del capital si el rendimiento requerido cambia por un número dado de puntos base.

2.3 Características de un bono que afectan su volatilidad en el precio

- 1) Para un plazo al vencimiento dado y un rendimiento inicial, la volatilidad en el precio de un bono es mayor mientras mas baja sea la tasa de cupón.
- 2) Para una tasa de cupón dada y un rendimiento inicial mientras mayor sea el plazo al vencimiento mayor será la volatilidad en el precio.

2.4 Medidas para cuantificar la volatilidad del precio de un bono

Manejadores de dinero, arbitrajes y traders necesitan una manera de medir la volatilidad en el precio del bono para incrementar hedging y estrategias de inversión. Las principales medidas que son comúnmente empleadas son las siguientes:

2.4.1 Medida de Rendimiento

Una medida importante del rendimiento es el rendimiento actual (CY) y se define:

$$CY = \frac{\text{Pagodecupón anual}}{\text{Pr eciodelbono}} * 100$$

El rendimiento actual da una medida del retorno anual del bono. Otra medida usada es llamada (YTC), la cual esta definida como la tasa interna de retorno calculada asumiendo que el bono esta en realidad llamado en la fecha mas cercana posible.

2.4.2 Duración

Los bonos con vencimientos largos tienen curvas de precio/rendimiento más abruptas que bonos con vencimientos cortos. Es decir bonos de largo plazo son más sensibles a los cambios en la tasa de interés que bonos de cortos plazo. La madurez por si misma no da una medida cuantitativa completa de la sensibilidad de la tasa de interés.

Otra medida del tamaño del tiempo se llama duración la cuál nos da una medida directa de la sensibilidad de la tasa de interés.

La duración de instrumentos de ingresos fijos es un promedio del peso del tiempo en el que los pagos son hechos. Los coeficientes aumentados son el valor presente de los flujos de efectivo individuales.

Supongamos que los flujos de efectivo son recibidos en los tiempos t_0, t_1, \dots, t_n . Entonces la duración del conjunto es:

$$D = \frac{PV(t_0)t_0 + PV(t_1)t_1 + PV(t_2)t_2 + \dots + PV(t_n)t_n}{PV}$$

La expresión $PV(t_k)$ denota el valor presente de el flujo de efectivo que ocurre en el tiempo t_k . El término PV en el denominador es el valor presente total es decir la suma de los valores presentes individuales $PV(t_k)$.

D es un promedio del peso de los tiempos de los flujos de efectivo, D tiene unidades de tiempo. Cuando los flujos son no negativos es claro que $t_0 \leq D \leq t_n$.

Duración es un tiempo intermedio entre el primero y el último flujo de efectivo.

En los bonos cupón cero los cuales hacen un único pago al vencimiento, tienen una duración igual a su fecha de vencimiento. Bonos con cupones no cero tienen duración estrictamente menor que sus fechas de vencimiento. La duración puede ser vista como una medida de vencimiento generalizada.

2.4.2.1 Duración Macaulay

Un indefinido fragmento acerca de cómo es calculado el valor presente; es decir la tasa de interés que debo usar. Para un bono es natural basarlo en los cálculos del rendimiento del bono. Si verdaderamente el rendimiento es usado, la fórmula de duración general llega a ser la duración Macaulay.

Supongamos que un instrumento financiero hace pagos m veces por año con el pago en periodo k comienza c_k , y hay n periodos remanentes.

La fórmula es:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^n (k/m)c_k [1 + (\lambda/m)^k]}{PV}$$

Donde λ es el rendimiento al vencimiento y

$$PV = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{[1 + (\lambda/m)^k]}$$

El factor k/m en el numerador es tiempo medido en años.

Formula duración Macaulay

La duración Macaulay para un bono con una tasa de cupón “ c ” por periodo, rendimiento “ y ” por periodo, “ m ” periodos por año, y exactamente “ n ” periodos restantes.

$$D = \frac{1+y}{my} - \frac{1+y+n(c-y)}{mc[(1+y)^n - 1] + my}$$

Propiedades cualitativas de duración

La duración de un bono revisable es siempre menor que su madurez. Como el tiempo se incrementa a infinito, la duración no se incrementa a infinito, pero en vez, tiende a un límite finito que es independiente de la tasa de cupón. Otro factor es que la duración no varía rápidamente con respecto a la tasa de cupón. El hecho de que el rendimiento esta mantenido constante tiende a cancelar fuera la influencia de los cupones.

Una conclusión general es que duraciones largas son alcanzadas solo por bonos que tienen ambos largos vencimientos y tasas de cupón muy bajas.

2.4.2.2 Duración y sensibilidad

La duración es usada porque mide directamente la sensibilidad del precio a cambios en el rendimiento. Esto sigue de derivar la expresión de valor presente. Tenemos:

$$PV_k = \frac{c_k}{[1 + (\lambda/m)]^k}$$

la derivada con respecto a λ es:

$$\frac{dPV_k}{d\lambda} = \frac{-(k/m)c_k}{[1 + (\lambda/m)]^{k-1}} = -\frac{k/m}{1 + (\lambda/m)} PV_k$$

ahora apliquemos esta expresión para el precio

$$P = \sum_{k=1}^n PV_k$$

Aquí hemos usado el hecho de que el precio es igual al total de valor presente en el rendimiento (por definición de rendimiento) . Encontramos que:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_{k=1}^n \frac{dPV_k}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^n \frac{(k/m)PV_k}{1 + (\lambda/m)} = -\frac{1}{1 + (\lambda/m)} DP \equiv -D_M P$$

El valor D_M es llamada *duración modificada*.

Fórmula de la sensibilidad del precio

La derivada del precio P con respecto al rendimiento λ de un instrumento de ingreso fijo es:

$$\frac{dP}{d\lambda} = -D_M P$$

donde $D_M = D/[1+(\lambda/m)]$ es la *duración modificada* es entonces más relevante escribir

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{d\lambda} = -D_M P$$

donde $D_M = D/[1+(\lambda/m)]$ es la duración modificada.

Es más relevante escribir:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{d\lambda} = -D_M$$

El lado izquierdo es entonces el cambio relativo en el precio (o el cambio fraccional). Así D_M mide el cambio relativo en el precio del bono directamente como λ cambia.

Usando la aproximación $dP/d\lambda \approx \Delta P/\Delta\lambda$, puede ser usada para estimar el cambio en el precio así a un cambio pequeño en el rendimiento (o viceversa). Específicamente podríamos escribir $\Delta P \approx -D_M P \Delta\lambda$

Esto da valores explícitos para el impacto de variaciones en el rendimiento.

2.4.2.3 Duración de un portafolio

Supongamos que hay m instrumentos de ingreso fijo con precios y duraciones de P_i y D_i respectivamente $i=1,2,\dots,m$, todos computados en un rendimiento común. El portafolio consiste de que la suma de estos instrumentos tiene precio P y duración D dada por:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$D = w_1 D_1 + w_2 D_2 + \dots + w_m D_m$$

donde $w_i = P_i/P$, $i=1,2,\dots,m$.

La duración de un portafolio mide la sensibilidad de la tasa de interés del portafolio, tal como la duración normal lo mide para un solo bono. Así que si el rendimiento cambia por un monto pequeño, el valor total del portafolio cambiará aproximadamente por el monto predicho por la ecuación que relaciona precios con duración.

2.4.3 Inmunización

Al procedimiento de estructurar un portafolio de bono contra el riesgo de tasa de interés se le conoce como inmunización, porque inmuniza el valor del portafolio contra los cambios en la tasa de interés, igual duraciones tanto como valores presentes, si la duración del portafolio se iguala a la del flujo de la obligación ,

entonces el valor efectivo del portafolio y el valor presente del flujo de la obligación responderá idénticamente a un cambio en el rendimiento. Específicamente si rendimientos se incrementan, el valor presente del portafolio activo decrecerá, pero el valor presente de la obligación decrecerá por aproximadamente el mismo monto, por lo que el valor de el portafolio será adecuado todavía para cubrir la obligación. Sin embargo mientras el rendimiento hace cambio, el nuevo portafolio no estará inmunizado a la nueva tasa , por lo que es recomendable re balancear o re inmunizar el portafolio tiempo a tiempo.

La inmunización es una buena idea pero sufre algunos inconvenientes. El método asume que todos los rendimientos son iguales cuando en la realidad esto no sucede, además es no realista pensar que ambas duraciones largas y cortas de bonos son idénticas y a cambios en el rendimiento no necesariamente los bonos cambian por el mismo monto; aquí el rebalanceo resultaría difícil.

2.4.4 Convexidad

La duración modificada mide la inclinación relativa de la curva precio-rendimiento en un punto dado. Esto guía a una aproximación en línea recta a la curva precio-rendimiento, que es usada como una manera de fijar el riesgo y como un procedimiento para controlarlo. Una mejor aproximación puede ser obtenida incluyendo un segundo orden (segunda derivada), la convexidad es el valor de C definido como:

$$C = \frac{1d^2P}{Pd\lambda^2}$$

la cuál puede ser expresada en términos de flujo de efectivo de la siguiente forma:

$$C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n \frac{d^2PV_k}{d\lambda^2}$$

Asumiendo m cupones (y m periodos compuestos) por año, tenemos:

$$C = \frac{1}{P[1+(\lambda/m)]^2} \sum \frac{k(k+1)c_k}{m^2[1+(\lambda/m)]^k}$$

Si un $\Delta\lambda$ es un cambio pequeño en λ y el ΔP es el correspondiente cambio en P, tenemos:

$$\Delta P \approx -D_M P \Delta\lambda + \frac{PC}{2} (\Delta\lambda)^2$$

La convexidad puede ser utilizada para mejorar la inmunización en el sentido de que, comparado con la inmunización ordinaria , una igualdad más cercana del valor del portafolio activo y el valor de la obligación es mantenido cuando el rendimiento varia

2.5 Término estructura de la tasa de interés.

El término estructura es usualmente representado como una curva que despliega el valor de un índice (rendimiento de un bono, tasa swap, tasa forward) como una función del tiempo al vencimiento.

Los procedimientos para la construcción de la curva de tasas forward instantánea son muy importantes en la implementación práctica de modelos del término estructura.

2.5.1 Construcción de las tasas de interés de derivados

En la construcción de modelos de valuación para estos instrumentos es crucial incorporar el movimiento estocástico de tasas de interés en consideración. La modelación correcta de los comportamientos estocásticos de la tasa de interés o más específicamente. El término estructura de la tasa de interés a través del tiempo es importante para la construcción de modelos realistas y confiables para derivados de tasa de interés. La idea esencial es modelar el precio de los instrumentos tasa de interés como funciones de una o varias variables de estado, es decir tasas de interés spots, tasas de interés de largo plazo (long-term), tasa spot forward.

Los modelos de tasas de interés no arbitraje o volatilidad de tasas de interés están teniendo fuerza.

Los exámenes empíricos en la aplicabilidad de algunos modelos de tasa de interés para dar precio a derivados, son poco prometedores ya que caemos en el dilema de que modelos simples, no pueden capturar la esencia del movimiento del término estructura mientras, que los modelos más sofisticados son muy pesados, engorrosos para ser aplicados en procedimientos actuales para dar precio.

Estos modelos de no arbitraje contienen parámetros, los cuales son funciones del tiempo y estas funciones de parámetros son determinados de los datos del mercado común. Algunos de estos modelos tienen una buena táctica analítica como el Modelo extendido Vasicek), mientras otros pueden ser de naturaleza no-Markoviano (como Heath-Jarrow-Martón) la implementación de un modelo no-Markoviano puede llegar a ser muy complejo por lo cuál limita su uso práctico.

2.5.2 Precio de un bono en intervalos continuos

Como vimos en el capítulo anterior, bono es un instrumento financiero común usado por firmas o el gobierno con el fin de aumentar su capital donde el premio pagado por el tenedor del bono puede ser considerado como un préstamo al emisor. El **valor nominal** es usualmente llamado valor par. La **fecha de vencimiento** (maturity) es una fecha específica en la que el valor par de un bono

debe ser repagado. El monto del premio que debe ser pagado al inicio del contrato es el **valor del bono** de otra manera el valor del bono es el valor presente de los flujos de efectivo que el tenedor del bono espera realizar a través de la vida del bono.

Después de que el bono ha sido emitido, el valor del bono cambia a través del tiempo hasta su vencimiento debido a los cambios en su larga vida, fluctuaciones en las tasas de interés y otros factores como pagos de cupón pendientes. Primero asumimos que la tasa de interés sea una función conocida del tiempo y derivamos la fórmula correspondiente del precio.

Precio del bono con una tasa de interés determinística

Sea $r(t)$ la función del riesgo de la tasa de interés definida para $t \in [0, T]$ donde t es una variable del tiempo y T es la fecha de vencimiento del bono. Normalmente el precio del bono es una función de la tasa de interés y del precio del bono. Asumimos que la tasa de interés no es una variable de estado independiente, pero ella misma es una función conocida del tiempo, así podemos suponer que el precio del bono es una función del tiempo solamente. Sea $B(t)$ y $k(t)$ el precio del bono y la tasa de cupón conocida respectivamente. La última condición esta dada por $B(T)=F$ donde F es el valor par. La ecuación $B(t) \ t < T$ es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. En el incremento del tiempo dt del tiempo corriente t el cambio en el valor del bono es $\frac{dB}{dt} dt$ y el cupón recibido es $k(t)dt$. Por el principio de no arbitraje, la suma de arriba debe ser igual a la tasa de retorno libre de riesgo $r(t)B(t)dt$ en el intervalo de tiempo dt , así:

$$\frac{dB}{dt} + k(t) = r(t)B, t < T \quad (1)$$

Junto con la condición final $B(T)=F$ la ec. 1 puede ser resuelta:

$$B(t) = e^{\int_t^T r(s) ds} \left[F + \int_t^T k(\tau) e^{\int_t^{\tau} r(s) ds} d\tau \right] \quad (2)$$

Interpretando con un lenguaje financiero el primero y el segundo término de la ecuación anterior dan el valor presente del valor par y del flujo de cupones, respectivamente.

Dependiendo de la magnitud relativa de $r(t)B$ y $k(t)$, la función del precio del bono puede ser una función creciente o decreciente del tiempo. El valor de mercado de un bono se aproximará siempre a su valor par cuando su madurez o vencimiento se aproxime, es fenómeno se conoce como pull-to-par.

Término estructura de tasas de interés

La tasa de interés de mercado es donde el precio del capital creciente se fija o se coloca. El precio del bono depende de las fluctuaciones variables de la tasa de interés de mercado.

La evolución del precio del bono como una función del tiempo t puede ser considerada como un proceso estocástico con grados de libertad infinitos correspondiente al número infinito de posibles fechas de vencimiento. El valor de mercado $B(t,T)$ indica la esperanza del mercado de la tasa de interés a futuras fechas.

El rendimiento al vencimiento (yield to maturity) $R(t,T)$ esta definida por:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln B(t,T)$$

la cuál da la tasa interna de retorno al tiempo t en el bono. La curva de rendimiento es la gráfica de $R(t,T)$ contra T y la dependencia de la curva de rendimiento en el tiempo al vencimiento $T-t$ es llamado el término estructura de la tasa de interés.

Ahora consideremos el precio de un contrato forward en el tiempo t donde el tenedor acuerda comprar en un tiempo posterior T_1 un bono cupón cero con fecha de vencimiento T_2 . El precio forward es simplemente $B(t,T_2)/B(t,T_1)$, la cual es obtenida tomando $B(t,T_2)$ como S y $1/B(t,T_1)$ como e^r . Naturalmente, la tasa forward $f(t,T_1,T_2)$ como se ve en el tiempo t para el periodo entre T_1 y $T_2(>T_1)$ esta relacionado al precio del bono cupón cero con las fechas de vencimiento T_1 y T_2 por

$$f(t,T_1,T_2) = -\frac{1}{T_2-T_1} \ln \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$$

La tasa forward instantánea como visto en el tiempo t para un bono con vencimiento al tiempo T está dado por:

$$F(t,T) = \frac{\lim_{\Delta T \rightarrow 0}}{\Delta T} \frac{\ln B(t,T) - \ln B(t,T + \Delta T)}{\Delta T} = -\frac{1}{B(t,T)} \frac{\partial B}{\partial T}(t,T)$$

Integrando con respecto a T , el precio del bono $B(t,T)$ puede ser expresado en términos de la tasa forward como sigue:

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T F(t,u) du\right)$$

Combinando las ecuaciones de $R(t,T)$ y $F(t,T)$, $F(t,T)$ puede ser expresada como:

$$F(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} [R(t,T)(T-t)] = R(t,T) + (T-t) \frac{\partial R}{\partial T}(t,T)$$

O equivalentemente:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T F(t, u) du$$

La tasa spot o tasa de interés corta $r(t)$ es simplemente:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = R(t, t) = F(t, t)$$

Bonos con vencimientos más largos siempre tienen precios más bajos. Las curvas de rendimiento dan más información visual comparada con las curvas del precio del bono.

2.5.3 Teorías del término estructura

2.5.3.1 Teoría de la esperanza

Tasas de interés de termino-largo reflejan las tasas de interés futuras esperadas de términos-cortos $E_t(r(s))$ denota el valor esperado en el tiempo t de la tasa spot al tiempo s . El rendimiento al vencimiento para la teoría de la esperanza puede ser expresada como:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T E_t(r(s)) ds$$

2.5.3.2 Teoría de la segmentación del mercado

Cada préstamo o cobro tiene un vencimiento preferente por lo que la inclinación de la curva de rendimiento dependerá de las condiciones de la oferta y demanda para fondos en el término largo de mercado relativo al termino-corto de mercado.

2.5.3.4 Teoría de la preferencia de liquidez

Conjetura que los prestamistas prefieren prestamos corto plazo, que préstamos de largo plazo desde que la liquidez del capital es en general preferida. Bonos de término largo normalmente tienen mayor rendimiento que corto plazo.

La forma de la ecuación es la siguiente:

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \left[\int_t^T E_t(r(s)) ds + \int_t^T L(s, T) ds \right]$$

Donde $L(s, T)$ es el término instantáneo del premio en el tiempo s de un bono con vencimiento al tiempo T .

Capítulo III

Objetivo

Seleccionar un modelo que sea suficientemente flexible para definir con gran exactitud o precisión el término estructura de las tasas de interés en México. Lo más importante, necesitamos un modelo que dependa de las suposiciones que son aceptables para los mercados de dinero mexicanos.

Para esto primeramente explicaremos de forma rápida y sencilla los modelos existentes daremos sus ventajas y sus desventajas y justificaremos ampliamente el modelo seleccionado.

3 Clasificación de los modelos para calcular los precios de Instrumentos

Los modelos de valoración se agrupan en dos familias: los modelos simples basados en aproximaciones utilizando Black-Scholes y los modelos complejos que intentan capturar explícitamente la complejidad del problema, de estos últimos a su vez podemos extraer dos grandes familias.

- La primera y más antigua es la de modelos de equilibrio (Vasicek entre otros), que pretende aplicar argumentos económicos para calcular el precio del dinero como función del plazo en un mercado de equilibrio, y valorar así los instrumentos derivados sobre tasas de interés, estos describen la evolución de la curva de tasas en términos de la evolución de un único factor estocástico, pero la mayor parte de los modelos usan más de uno para capturar todo el problema. Existen también modelos de dos factores que intentan explicar la forma de la curva de tasas típicamente usando un factor para el nivel general de las tasas y un segundo factor estocástico para definir la forma general de la curva de tasas.
- La segunda gran escuela no intenta encajar el mercado en un equilibrio forzado sino que se limita a proponer modelos que son totalmente consistentes con los precios observables hoy en el mercado sin permitir arbitrajes. El modelo se convierte entonces en un instrumento de interpolación para calcular precios de instrumentos que no son observables en el mercado y permite cubrir sus riesgos en términos de instrumentos existentes (Hull y White) .En particular explicaremos el modelo polinomial, el modelo Ho y Lee, el modelo Hull and White y el modelo Nelson Siegel. Mencionaremos los pros y los contras de estos modelos. Haremos énfasis en las razones por las cuales se eligió el modelo de metodología Nelson Siegel.

3.2 Modelos de interpolación

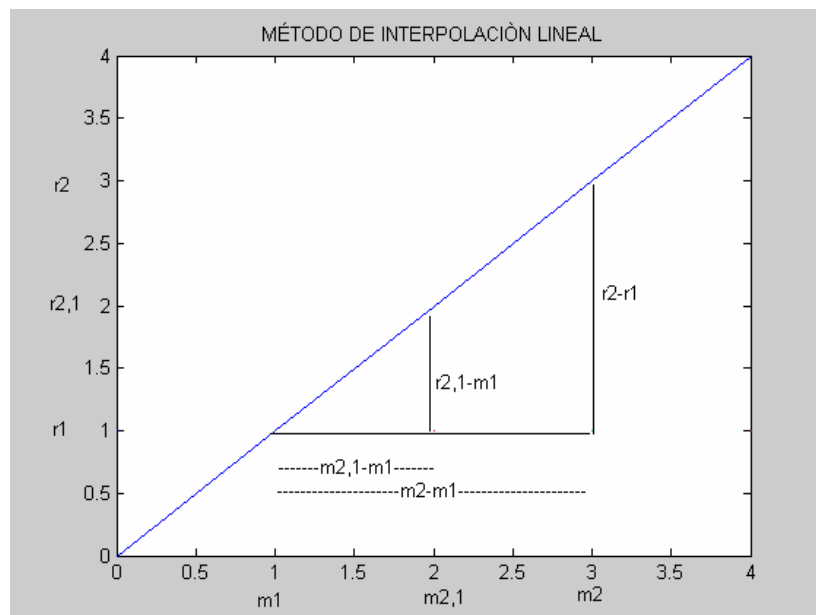
La interpolación es un procedimiento que estima los datos no observados, simplemente al encadenar los datos observados a través de una función matemática. El mercado mexicano utiliza dos modelos para interpolar tasas de interés a los plazos no negociados, el modelo de interpolación lineal y el modelo que se conoce como “alambrada”.

3.2.1 Modelo de Interpolación lineal

El propósito de este modelo consiste en estimar las tasas de interés a los plazos no negociados, a partir de la ecuación de una recta, es decir:

$$r(m_{2,1}) = r(m_1) + (r(m_2) - r(m_1)) * \frac{(m_{2,1}) - (m_1)}{(m_2) - (m_1)}$$

donde $r(m_{2,1})$ es la diferencia, en número de días entre, m_1 y m_2 , y $r(m_2,1)$ es la tasa de interés “spot” a ese plazo.



Este método tiene diversos inconvenientes:

- ⊗ No se fundamenta en ningún modelo de tasas de interés. Esto significa que no garantiza la condición de no arbitraje.
- ⊗ Cuando el número de tasas de interés observadas es reducido, el modelo tiene limitaciones adicionales.
 - No puede capturar la convexidad de la curva de rendimiento.

- Las tasas de interés forwards pueden ser muy inestables e incluso negativas; sobre todo cuando la curva de rendimiento muestra “crestas y valles”.
- Ⓢ En ausencia de valores de referencia, el método no cuenta con elementos para extrapolar las tasas de interés a largo plazo.

3.2.2 Método de la alambrada

Este método es el que más se utiliza en el mercado mexicano, principalmente por los traders y las áreas de control. Este es un método interactivo que consiste en las siguientes fases:

- Ⓢ Con base en las tasas spot a m_1 y m_2 días, se estima la tasa de interés forward a plazo de $m_{2,1}$ días, esperada para dentro de m_1 , mediante la fórmula de lo que se conoce como la tasa de salida.

$$r(m_{2,1}) = \left[\frac{1 + r(m_2) * \left(\frac{m_2}{360}\right)}{1 + (m_1) * \left(\frac{m_1}{360}\right)} - 1 \right] * \frac{360}{m_{2,1}}$$

- Ⓢ La salida a $m_{2,1}$ días se lleva en curva a plazo de $m_d - m_1$ días se componen, de tal manera que se obtiene la tasa al plazo deseado $r(m_d)$. Estos pasos se pueden simplificar en la siguiente fórmula:

$$r(m_d) = \left\{ \left[\left(1 + r(m_2) * \frac{m_2}{360} \right)^{\frac{m_d - m_1}{360}} * \left(1 + r(m_1) * \frac{m_1}{360} \right)^{\frac{m_2 - m_d}{360}} \right]^{\frac{360}{m_2 - m_1}} - 1 \right\} * \frac{360}{m_d}$$

El método de alambrada tiene varios inconvenientes, destaca:

- Ⓢ Debido a que la interpolación se realiza a partir de los nodos extremos, y no a partir de todos los nodos de la curva de rendimiento, no garantiza que se cumpla el principio de no arbitraje. Es decir este método ignora la forma completa de la curva.
- Ⓢ Al igual que el modelo de interpolación lineal, el modelo no tiene la capacidad para realizar la extrapolarción de las tasas de interés a largo plazo, ya que el modelo requiere de información de las tasas de interés de referencia para poder realizar la interpolación.
- Ⓢ Cuando las tasa que se desea estimar está a un plazo muy alejado de los plazos disponibles, la estimación puede estar muy sesgada. Para evitar este sesgo sería necesario contar con un gran número de datos.

- ⊗ Cuando se compone la tasa de interés entre el plazo de referencia inicial y el plazo deseado, se supone que la curva de rendimiento es plana, supuesto que rara vez se cumple en el mercado mexicano
- ⊗ Tanto con el método de interpolación lineal como en el de alambrada no es posible estimar el error; sin embargo, es claro que este error crece en relación directa con el plazo promedio de la tasa de interés que se desea interpolar; y debería ser mayor, mientras mayor es la diferencia entre los plazos que se utilizan como referencia.

3.1 Modelos estocásticos

Modelos de un solo factor

Estos modelos describen la evolución de la curva de tasas en términos de la evolución de una tasa a corto plazo r , y suelen tener la forma siguiente:

$$dr = f(r) + \sigma(r)dz$$

donde $f(r)$ es una función de r independiente del tiempo t que determina la dirección media de la evolución de las tasas, y $\sigma(r)$ es una función análoga que describe la volatilidad de las tasas.

Suponemos que una tasa spot $r(t)$ sigue un proceso estocástico Markoviano, descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr = u(r,t)dt + w(r,t)dZ$$

Donde dZ es el proceso de Wiener estándar $u(r,t)$ y $w(r,t)^2$ el drift instantáneo y la varianza de el proceso para $r(t)$. También hay otros factores que afectan el precio del bono como el efecto de impuestos, el riesgo por default, comercialidad, antigüedad y otros factores asociados con el instrumento bono. Note que este modelo para dar precio al valor de un bono corresponde a un factor desde que el movimiento de la tasa de interés como asume la ecuación anterior depende de una sola variable estocástica $r(t)$ únicamente.

Si escribimos el precio del bono como $B(r,t)$ entonces el lema de Ito da la dinámica de el precio del bono como:

$$dB = \left(\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) dt + w \frac{\partial B}{\partial r} dZ$$

Si escribimos

$$\frac{dB}{B} = \mu_B(r,t)dt + \sigma_B(r,t)dZ$$

entonces

$$\mu_B(r,t) = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \quad \text{y} \quad \sigma_B(r,t) = \frac{1}{B} w \frac{\partial B}{\partial r}$$

Aquí, $\mu_B(r,t)$ y $\sigma_B(r,t)^2$ son respectivamente tasa drift y tasa varianza de el proceso estocástico de $B(r,t)$. La tasa de interés no es un instrumento a negociar, más bien tratamos de hedge (técnica financiera para balancear el riesgo de pérdida de las fluctuaciones del precio en el mercado) bonos de vencimientos diferente.

Modelo de Vasicek

Suponemos que $a, m > 0$ y $\gamma = 0$. Esto es, sumimos que:

$$dr = a(m - r)dt + \sigma dz, t \geq 0$$

Este modelo fue el primero considerado por Vasicek (1977) y ha sido probado con mucha utilidad en aplicaciones financieras. La ecuación anterior es lineal y puede ser resuelta de forma cerrada, sin embargo, la probabilidad es con frecuencia insignificante, y el mérito de esta práctica analítica hace que el modelo tenga un interés práctico.

Tiene el siguiente proceso estocástico:

$$dr = \lambda(\bar{r} - r)dt + \sigma dz$$

El término $\lambda(\bar{r} - r)dt$ actúa como una "tendencia central" que atrae a las tasas de interés hacia un nivel medio \bar{r} , ya que cuanto más se alejen las tasas de su nivel medio, mayor es el empuje que los atrae hacia el equilibrio.

A partir de este modelo Vasicek obtiene una fórmula para el precio $P(t,T)$ al tiempo t de un bono de cupón cero que paga una unidad dentro de T años:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$

donde

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}$$

$$A(t,T) = \exp \left[\frac{B(t,T) - T + t \left(\lambda^2 \bar{r} - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\lambda^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\lambda} \right]$$

3.3 Modelos de ajuste estadístico

En la literatura se encuentra otro tipo de modelos cuyo pronóstico consiste en desarrollar un marco metodológico que logre la consistencia entre las teorías de la estructura inter-temporal de tasas de interés y el ajuste estadístico de los datos de mercado. Es decir, a diferencia de los modelos de interpolación que se describieron en la sección anterior, los modelos estadísticos suponen que la estimación de los datos se realiza con un grado de error.

Para instrumentar este tipo de modelos es necesario definir una forma matemática funcional que permita ajustar los datos con las tasas de interés disponibles y elegir un modelo econométrico para realizar el ajuste. Con base en la forma funcional, los modelos se pueden clasificar en los siguientes tipos:

3.3.1 Modelo Polinomial simple

Descripción del modelo

La metodología polinomial es la metodología actualmente utilizada para generar la curva de Cetes en el “Boletín Bursátil” publicado por la Bolsa Mexicana de Valores. Este modelo está basado en la aproximación del polinomio de 4° grado. El modelo esta basado en la siguiente ecuación para fijar el precio de los instrumentos Cetes.

$$PPE_j = 10 [1 - (\beta_0 + \beta_1 t_j + \beta_2 t_j^2 + \beta_3 t_j^3) t_j]$$

Donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ son encontradas minimizando el mas pequeño error cuadrático con el comercio de mercado actual.

En dicho modelo se consideran las siguientes restricciones:

- ⊗ En la fecha de vencimiento cada bono debe ser igual a su valor nominal.
- ⊗ El valor de la constante de la regresión es igual a la tasa promedio ponderada de los primeros cinco plazos negociados.

El modelo a estimar mediante métodos de regresión se define en términos generales como:

$$r(m_i) = \sum \beta_l m_i^{l-1} + \varepsilon_i \quad (1)$$

β_l = coeficiente de regresión

l = Orden del polinomio

ε = Término de error que captura: arbitrajes imperfectos, costosos de transacción y una especificación inadecuada de la forma funcional.

Limitaciones del modelo polinomial.

- ⊗ La primera y más importante limitación de el modelo polinomial es que no está basada en ninguna teoría de tasa de interés.
- ⊗ Para ajustar correctamente las tasas de interés a corto y largo plazo se requiere que el orden del polinomio sea elevado. No obstante, cuando eso sucede se corre el riesgo de que la función a descuento (precio de los bonos cupón cero a los diferentes plazos) no sea decreciente con respecto del tiempo.
- ⊗ Las tasas de interés extrapoladas pueden ser negativas o tender al infinito.
- ⊗ Las tasas de interés “forwards” implícitas son inestables o negativas.

Aplicando un polinomio esperando encontrar un modelo que pruebe mejor los datos actuales sin dar ninguna justificación para el término estructura de interés es como pensar en la descripción del proceso de difusión. La mayoría de las teorías de tasa interés actualmente disponibles (Ho y Lee, Vasicek, Nelson Siegel, Hull-White) están basadas en un proceso de difusión, algunas estimaciones de cómo las tasas forward son esperadas para evolucionarse a través del tiempo. Sin embargo, debido a su deficiencia teórica el uso de un algoritmo polinomial es improbable en resultados significativos en un ambiente de poca liquidez y donde la mayoría de los instrumentos emitidos por el gobierno venzan en menos de un año. En particular un estudio conducido por SHEA (1982,1985) ha mostrado que el término estructura estimado por polinomios tiende a inclinarse bruscamente hacia el final del rango de madurez esto parecería ser poco realista y sugiere que los polinomios son de uso limitado para estimar tasas de interés en rangos largos del término estructura de tasas de interés. También, la mayor parte de polinomios incluyen un término lineal más pequeño que obliga a las tasas de largo plazo a ser limitadamente largas. Esto entiende el ejemplo extrapolación muy difícilmente. Esta es la mayor limitación para dar precio a los instrumentos que pagan cupones y principalmente con fecha de valuación mayor a un año. Finalmente el sistema de ecuaciones clavado (empotrado) en la metodología puede ser sobre parametrizado resultando en moverse (mas de 1 máximo). En general, es preferible el termino estructura monótono desde que este representan mejor el riesgo y regresan (trade-off) clavando en el término estructura.

3.3.2 Modelo polinomial exponencial

Este modelo lo desarrollaron Chambers, Carleton y Walkman (1984). Estos autores parten de la ecuación (1), pero en vez de ajustar la función de las tasas de interés “spot “, consideran la función de descuento o de precios. Es decir:

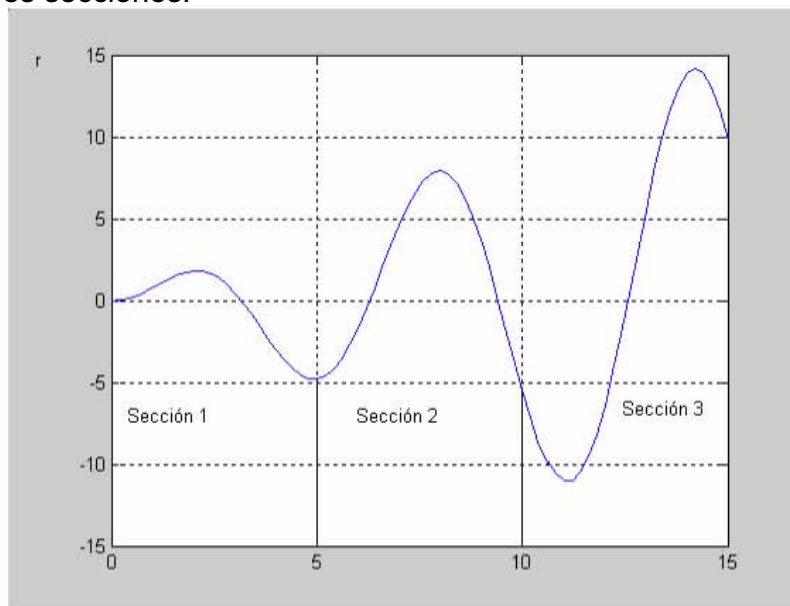
$$P(m_i) = \exp\left(-\sum \beta_l m_i^{l-1}\right) + \varepsilon_i$$

Las desventajas del modelo, que destacan los mismos autores son:

- ④ Los resultados de la estimación son muy sensibles a la elección del orden del polinomio
- ④ El modelo acentúa la heterocedasticidad de los residuales con respecto del plazo del vencimiento.
- ④ En los plazos cortos el signo de los residuales es positivo y sistemático.
- ④ Especialmente en los plazos largos el valor de los residuales, medidos en términos absolutos, es excesivamente grande.
- ④ No obstante que la estimación se realiza mediante modelos de regresión no lineales, se mantienen las desventajas del modelo polinomial simple mencionados.
- ④ Para mejorar la calidad de las estimaciones, se proponen métodos de estimación de máxima verosimilitud; sin embargo los costos computacionales y la complejidad de la estimación son excesivos, y los requerimientos de información no se pueden cumplir en un mercado poco líquido como el mexicano.

3.4 Modelos “spline”

El propósito de estos modelos consiste en estimar, mediante la forma funcional elegida, las tasas de interés “spot” o en otros casos las tasas de interés forward o los precios de diferentes segmentos de la curva de rendimiento, en vez de hacerlo sobre la curva completa. Por ejemplo, en la siguiente curva de rendimiento se distinguen tres secciones:



Estos modelos son los que mayor atención han recibido en el ambiente académico. Destacan los modelos “spline polinomiales” y los “spline exponenciales.

3.4.1 Modelos “spline” polinomiales

Este modelo supone que las funciones simples se pueden juntar para preservar la continuidad de los “nudos” o plazos donde se divide la curva de rendimiento. La esencia de estos modelos consiste en aplicar un polinomio a cada intervalo entre dos puntos de datos consecutivos. Los modelos más conocidos son el de Mc Culloch (1971), quién utiliza un “spline” cuadrático, el de Fisher, Nychke y Zervos(1995) que estiman una función “spline” cúbica que se denomina B-spline y el de Shea (1984) que a continuación se describen con detalle. La solución que plantean estos modelos es similar.

En lo que se refiere al modelo de Shea (1984), supone que $k-1$ es el número de puntos en que se divide el total de plazos y por ende, $k-2$ el número de intervalos en que se divide la curva de rendimiento. Al plazo cero, el menor plazo posible, corresponde el primer “nodo” (m_1); en tanto que al mayor plazo observado en la negociación de los bonos en el mercado le corresponde el “nodo” m_{k-1} .

Para cada uno de los $k-2$ sub-intervalos en que se divide el rango de plazos observados, se define la siguiente función cúbica:

$$\left(\frac{P}{VN} - 1 \right)_{ij} = b_{1j} + b_{2j}m_{ij} + b_{3j}m_{ij}^2 + b_{4j}m_{ij}^3 \quad (2)$$

donde:

$j=1,2,\dots,k-2$

b_{ij} = parámetros a estimar para cada uno de los intervalos en que se divide el rango total de plazos observados.

VN= Valor Nominal del bono

El modelo incluye tres restricciones, que la función original y su primera y segunda derivada sean iguales en los $k-1$ puntos de división. Estas restricciones se presentan por las siguientes ecuaciones:

En términos de la función ordinaria:

$$b_{1j} + b_{2j}m_{j+1} + b_{3j}m_{j+1}^2 + b_{4j}m_{j+1}^3 = b_{1,j+1} + b_{2,j+1}m_{j+1} + b_{3,j+1}m_{j+1}^2 + b_{4,j+1}m_{j+1}^3$$

En términos de la primera derivada:

$$b_{2j} + 2b_{3j}m_{j+1} + 3b_{4j}m_{j+1}^2 = b_{2,j+1} + 2b_{3,j+1}m_{j+1} + 3b_{4,j+1}m_{j+1}^2$$

En términos de la segunda derivada:

$$2b_{3j} + 6b_{4j}m_{j+1} = 2b_{3,j+1} + 6b_{4,j+1}m_{j+1} \text{ para } j = 1, \dots, k-3$$

Para estimar la ecuación (2) dadas las restricciones anteriores, se requiere estimar $4(k-2)$ parámetros con $3(k-3)$ restricciones, más la restricción de que $b_{11}=0$, que es equivalente a pensar que el precio del bono es igual a su valor nominal al vencimiento.

El modelo de regresión Shea propone para ajustar la curva de rendimiento, consiste en las siguientes ecuaciones, expresadas en términos vectoriales:

$$\begin{aligned} \left(\frac{P}{VN} - 1 \right) &= M\bar{B} + \bar{E} \\ \bar{g} &= \Theta\bar{B} \end{aligned}$$

donde :

$\left(\frac{P}{VN} - 1 \right)$ = Precio como fracción del valor nominal menos uno para bonos cuyos plazos al vencimiento están en el intervalo (m_j, m_{j+1}) . Para $j=1, 2, \dots, k-2$.

$\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{k-2})$ = Vector de parámetros estimados sin imponer la restricción de continuidad en los puntos de división ("nudos") $b_j = (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, b_{4j})'$ es un vector de 4×1

\bar{g} = Vector de ceros con una dimensión de $(3k-8) \times 1$

Θ = Matriz de restricciones igual a $(\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)'$. Para $i=0, 1, 2$ se deduce la siguiente matriz:

$$\Theta = \begin{matrix} -\bar{e}_{2i} & \bar{e}_{2i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\bar{e}_{3i} & \bar{e}_{3i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{k-2,i} & \bar{e}_{k-2,i} \end{matrix}$$

donde a su vez:

$$e_{j0} = (1, m_j, m_j^2, m_j^3)$$

$$e_{j1} = (0, 1, 2m_j, 3m_j^2)$$

$$e_{j2} = (0, 1, 2, 6m_j)$$

$\forall j = 2, \dots, k-2$

\bar{E} = Vector de los errores, $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{k-2})'$ donde $\epsilon_{ij} (j=1, 2, \dots, k-2)$ es el error para las observaciones de precios de bonos que están en el intervalo (m_j, m_{j+1})

Los parámetros de la regresión se estiman con base en la siguiente fórmula:

$$\hat{B}_R = \hat{B} + (M'M)^{-1} \Theta' [\Theta(M'M)^{-1} \Theta]^{-1} (\bar{g} - \Theta\hat{B})$$

donde:

\hat{B} = Estimador Mínimo cuadrado de B

M=Matriz Diagonal de bloques, es decir, $\text{Diag}(M_1, \dots, M_{k-2})$. M_j es una matriz de $(n_j \times 4)$ plazos al vencimiento.

\hat{B}_R = Vector restringido de los parámetros de la regresión.

El propósito principal de los modelos “spline” polinomial es reducir los problemas de heterocedasticidad de manera parsimoniosa, es decir, ajustar la curva de rendimiento con pocos parámetros.

Si embargo, como Vasicek y Fong (1982) mencionan, los “spline” polinomiales tienen importantes limitaciones, destacan las siguientes:

- ⊗ Las tasas de interés estimadas son inestables, ya que los polinomios “spline” tienden a moverse mucho alrededor de una curva exponencial.
- ⊗ Las funciones polinomiales tienen propiedades asintóticas no deseables, es decir, no ajustan bien para los títulos de plazos largos. Como resultado, las tasas implícitas pueden ser muy volátiles o incluso ser negativas en plazos largos.

Como una solución a los problemas anteriores, Vasicek y Fong (1982) plantean el modelo siguiente:

3.4.2 Modelos “spline” exponenciales

Vasicek y Fong (1982) utilizan una transformación del argumento de la función de descuento. Donde la transformación es:

$$m = -\frac{1}{b} \log(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

que es equivalente a la función exponencial $x = 1 - \exp(-bt)$

Con base a esta transformación se obtiene:

$$D(m) = d \left[-\frac{1}{b} \log(1-x) \right] = F(x)$$

Donde F es la función de descuento y, por ende, es decreciente en “x” en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Para estimar el modelo los autores proponen el método de mínimos cuadrados generalizados. Los parámetros de la regresión se estiman con base en la siguiente ecuación:

$$B = (Z' \Omega^{-1} Z)^{-1} Z' \Omega^{-1} Y$$

donde:

Y= Vectores de las funciones de descuento de los k bonos.

Z= Vector de variables que capturan la transformación exponencial de los plazos.

Ω^{-1} =Inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de los errores que se usa como instrumento para corregir la presencia de heterocedasticidad de la función

de precios. Concretamente, la varianza de los errores de la estimación de la función de precios está dado por $E(\varepsilon_k^2) = \sigma^2 \omega_k \quad \forall k=1,2,\dots,n$ donde ω_k es igual a

$$\left[\frac{\partial P}{\partial r} \right]_k^2$$

Es decir, la derivada del precio de cada bono con respecto de la tasa de interés, se utiliza para corregir la heterocedasticidad.

A pesar de la complicada estimación de la función de descuento de este modelo en relación con el modelo spline polinomial, Shea (1985) demuestra que:

- Las tasas de interés forward son inestables, tanto como las estimadas con los “spline” polinomiales.
- A menos que se incluyan restricciones adicionales, las tasas de interés pueden llegar a ser negativas o a crecer de manera no limitada.
- Los resultados de las estimaciones son muy sensibles a la forma de la curva de rendimiento.

3.5 Modelos “kernel”

El Banco de México utiliza un modelo no paramétrico para estimar el valor esperado de las tasas de rendimiento de los Cetes, que diariamente publica en su hoja Web. Para ajustar la curva de rendimiento Banxico considera:

- Una función de kernel “Gaussiana” cuya desviación estándar está en función del plazo, y que equivale a:

$$k(m_j - m) = \sqrt{2\pi} * e^{-(m_j - m)^2}$$

- Un ancho de banda que se define como:

$$h_d = 50 * (1 - e^{-0.05*d})$$

donde:

$k(m_j - m)$ = Función kernel

d = Plazo al vencimiento de los cetes

h_d = Ancho de banda

Es decir, la tasa de rendimiento que se estima está en función del promedio ponderado de todas las tasas observadas en el mercado, donde las ponderaciones dependen de qué tan distintas, en el plazo, están las observaciones del mercado con respecto del plazo para el que se desea realizar la estimación.

Los modelos que se basan en las funciones de densidad kernel tienen diversos inconvenientes que hacen que la estimación no sea satisfactoria. Destacan:

- ② El problema fundamental de estos modelos es lograr la estimación conjunta de la función kernel del ancho de banda, sobre todo en ausencia de información sobre cuál es la forma de la función de densidad.
- ② Hay diferentes métodos para estimar de manera automática la “amplitud de la banda”. Por ejemplo, el método “plug-in”, la “función de penalización” y el modelo de “validación cruzada”, principalmente. No obstante, ninguno de estos métodos es generalmente aceptado.
- ② Por ejemplo Racine(1997) o Marrion (1988) muestran algunas alternativas para estimar los modelos kernel de manera consistente. No obstante, aún esos modelos que sí consideran todos los criterios estadísticos, tienen desventajas.
 - Para elegir el ancho de banda es necesario minimizar el error cuadrado medio integrando la función kernel. En esos casos, la fórmula que resulta de estimar el ancho de banda depende de la forma funcional del kernel y del proceso de generación de datos, que no es conocida. En otras palabras, el kernel y el ancho de banda son dependientes entre sí con los datos
 - Utilizar transformaciones de Fourier. Pero previamente se debe evaluar la función kernel en determinada amplitud y, para cada uno de estos anchos de banda, se deben realizar repetidas evaluaciones de la función kernel. El inconveniente de esta aproximación es su falta de precisión.
 - En el caso concreto de la estimación de Banxico, la elección de la función kernel y del ancho de la banda son arbitrarios. Asimismo, el Banco de México no muestra resultados de los criterios de validación en la función de densidad ni de la justificación de la fórmula con la que se mide el ancho de la banda.
 - El modelo no cuenta con restricciones que garanticen el cumplimiento de las propiedades de no arbitraje de la curva de rendimiento. Adicionalmente, ante la ausencia de información, el modelo no cuenta con elementos para realizar ejercicios de extrapolación de la curva, tanto a cortos como largos plazos.

3.6 Modelo Ho y Lee

Este modelo está basado en el siguiente proceso de difusión:

$$dr = \theta(t)\delta t + \sigma\delta z$$

donde,

σ = la desviación estándar instantánea de la tasa corta, ésta se asume constante a través del tiempo.

$\theta(t)$ es una función del tiempo escogida para asegurar que el modelo sienta bien el término estructura.

También,
El modelo

$$P(t,T) = A(t,T) e^{-r(t)(T-t)}$$

Donde,
 $r(t)$ = término tasa corto de interés.

$$\ln A(t,T) = \frac{\ln P(0,T)}{\ln P(0,t)} - (T-t) \frac{\partial}{\partial t} \ln P(0,T) - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T-t)^2$$

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

Limitaciones de el modelo Ho y Lee

La crítica más común de el modelo Ho y Lee es que da al usuario muy poca flexibilidad en escoger la estructura volatilidad. Toda tasa spot y forward se supone tiene la misma desviación estándar, σ . También el proceso de difusión no tiene media contraria (al revés). Pero lo más importante el usuario tiene que hacer una suposición acerca del nivel de las tasas forward de futuros, lo cual es más difícil de hacer que predecir el término estructura corriente de tasas de interés.

3.7 Hull and White Model

Descripción de los modelos Hull and White

Es una extensión del modelo de Vasicek. Este está basado en el siguiente proceso de difusión:

$$\begin{aligned} dr &= (\theta(t) - \alpha r) dt + \sigma dz \quad (\text{extensión del modelo Ho y Lee}) \\ dr &= \alpha[\theta(t)/\alpha - r] dt + \sigma dz \quad (\text{extensión del modelo Vasicek}) \end{aligned}$$

Donde α y σ son constantes. El modelo Hull y White puede ser visto como el modelo Ho y Lee con una media contraria a la tasa α . Este puede ser visto como el modelo Vasicek desde que este modelo es básicamente el modelo Vasicek con un tiempo dependiente nivel contrario igual a $\theta(t)/\alpha$ en tasa α (ver segunda ecuación). Esto muestra que la tasa de interés r en promedio aproximadamente sigue la pendiente de la curva de tasa forward instantánea inicial. Cuando ésta se desvía de la curva, ésta vuelve atrás a una tasa α .

De acuerdo al modelo Hull y White, los precios de bonos están definidos por:

$$P(t,T) = A(t,T) \exp^{-B(t,T)r(t)}$$

donde,

$$B(t, T) = \frac{1 - \exp^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}$$

y

$$\ln A(t, T) = \frac{\ln P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{\sigma^2 (e^{-\alpha T})}{4\alpha^3}$$

Limitaciones del modelo Hull y White

Note que :

$$\frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} \approx \frac{\ln P(0, t + \varepsilon) - \ln P(0, t - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

Esto ya que la definición de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

y si f(x) es diferenciable entonces

$$f'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\Delta}$$

La última expresión da una aproximación de la pendiente de el término estructura de la tasa de interés o de la curva de la tasa forward instantánea inicial.

En otras palabras, el usuario tiene que hacer una suposición de que la tasa forward instantánea inicial será con el fin de resolver el término estructura de la tasa de interés. Consecuentemente, un error se asumirá propiamente de que tasas forwards futuras serán y afectarán considerablemente la forma del término estructura generado por dicho modelo.

En mi opinión, el modelo Hull and White es muy aplicable para un punto de vista teórico pero sus errores definen claramente una expresión de cómo las tasas forward evolucionan a través del tiempo reduciendo la aplicabilidad del modelo.

3.8 Modelo Nelson Siegel

El modelo Nelson Siegel es una extensión del modelo Hull and White en el hecho de que se basa en el proceso de difusión con una función de reversión de la media, sin embargo contrario a este modelo, N-S define un factor de evolución de

la tasa forward instantánea. Este modelo ha sido utilizado con éxito en otros mercados financieros del mundo como Estados Unidos y Canadá.

3.8.1 Justificación para el modelo Nelson Siegel

El primer documento de N-S fue publicado por la revista Journal of Business de 1987. En este artículo explicaron la necesidad de contar con un modelo parsimonioso que no incluyera un término lineal en su algoritmo, por medio del cual se dieran mejores estimaciones de extrapolación para el largo plazo de la estructura de la tasa de interés. Esta metodología se creó con el propósito de eliminar la linealidad que con frecuencia se presenta en los modelos polinomiales pues la linealidad conduce a tendencias “explosivas” al final del rango de vencimiento ajustado. El modelo N-S es un subconjunto del modelo de la estructura de plazo presentada previamente es decir el modelo Hull and White. La ventaja principal es que explícitamente propone una función que describe cómo se deben comportar las tasas forward con el paso del tiempo, situación que los modelos Hull-White y Ho-Lee no pudieron resolver.

3.8.2 Expresión de la tasa forward en el modelo Nelson Siegel

El modelo N-S se basa en la premisa de que existe un conjunto de ecuaciones diferenciales que generan las formas típicas de la curva de rendimiento encontradas en los mercados (esencialmente monotónicas, encorvadas y ocasionalmente de forma S).

Supone que dichas ecuaciones diferenciales son de segundo grado. Suponiendo la teoría de esperanza sostenida, podemos asumir que las tasas forwards, al ser pronosticadas, serían la solución a dichas ecuaciones. En otras palabras la pendiente del término estructura de las tasas de interés en diferentes puntos en el tiempo da la tasa forward instantánea implícita en el modelo. La principal diferencia con los otros modelos es que propone un conjunto de ecuaciones a resolver. Principalmente los autores proponen una ecuación diferencial de segundo grado con raíces iguales y reales para representar la tasa forward instantánea r al vencimiento de m .

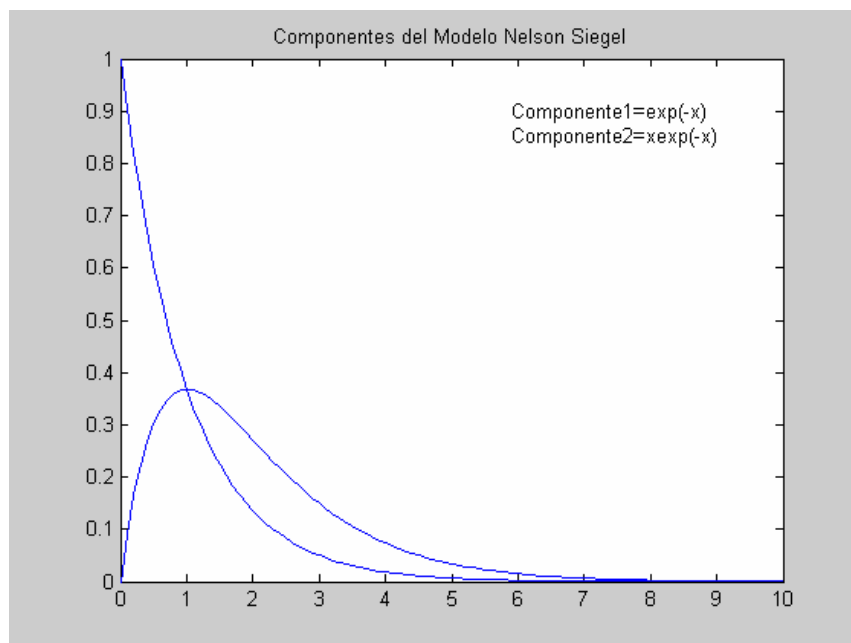
$$r(m) = \beta_0 + \beta_1 * \exp\left(\frac{-m}{T}\right) + \beta_2 * \left(\frac{m}{T}\right) * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Este modelo también se puede ver como una constante más una función Laguerre que sugiere un método para la generalización de grados más altos. Las funciones Laguerre consisten de un polinomio en el tiempo con un decaimiento exponencial y son un tipo matemático de funciones de aproximación.

El primer componente de la ecuación forward puede verse como la contribución del largo plazo. Los otros componentes convergerán a cero cuando el vencimiento aumente, ya que se multiplicarán por el término de decaimiento exponencial.

El segundo componente puede verse como la contribución del corto plazo. Este componente es muy importante en el vencimiento cercano al plazo, sin embargo converge rápidamente a cero cuando se incrementa el plazo. Tiene el decaimiento más rápido de todas las funciones.

El tercer componente, esta función también tiene el término de decaimiento exponencial pero multiplicado por m/T , que se incrementa con el plazo a vencimiento. Por lo tanto esta función empieza en cero (cuando m es igual a 0) y se incrementa hasta un máximo antes de converger otra vez a cero.



El modelo Nelson Siegel

Para obtener un rendimiento de los bonos de cupón cero como una función del plazo a vencimiento para raíces iguales, simplemente se integra $r(m)$ desde cero a m y se divide entre m

$$R(m) = \frac{1}{m} * \int_0^m r(x) dx$$

La función resultante es:

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) * \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{T}\right) \right] * \frac{T}{m} - \beta_2 * \left(\frac{m}{T}\right) * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Por lo tanto, la tasa spot actual se define a partir del comportamiento futuro de las tasas forward, determinada por cuatro parámetros, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, T$. De esta forma β_0 a la tasa a largo plazo de la tasa de interés (tasa de convergencia cuando el vencimiento incrementa) y $\beta_0 + \beta_1$ está asociada a la tasa de corto plazo instantánea, es importante mencionar que generalmente β_1 es negativa cuando las tasas de interés se incrementan a través del espectro del rendimiento.

3.8.3 Principales características del modelo Nelson Siegel

- ⊗ Tasas forward (suaves) monotónicas.
- ⊗ Apoya la curvas de rendimiento de forma “S” encorvada y sigmoidea
- ⊗ Evita movimientos bruscos (polinomial)
- ⊗ Comportamiento de reversión a la media (modelo Hull-White)
- ⊗ Tasas largas asintóticas favorables (sin curvas puntiagudas)
- ⊗ Buena predicción (extrapolación de tasas largas)
- ⊗ Ayuda a detectar tendencias sistemáticas en los datos
- ⊗ Modela las tasas forward en el tiempo reglamentario, no los precios. El modelo ajusta rendimientos no precios

3.8.4 Propiedades del modelo Nelson Siegel

Valores límite:

$$R(m) \rightarrow \beta_0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty$$

Esto implica que β_0 es la tasa de interés a largo plazo. $R(m)$ converge en el valor a largo plazo cuando m crece.

$$\beta_0 = R(m) \rightarrow \beta_0 + \beta_1 \text{ cuando } m \rightarrow 0$$

Esto implica que $\beta_0 + \beta_1$ es la tasa de interés a corto plazo. $R(m)$ converge en el valor a corto plazo cuando m se reduce. También implica que si $\beta_1 < 0$ entonces la tasa de interés a largo plazo son más altas que las tasas de interés a corto plazo.

3.8.5 El rango de formas de $R(m)$

El objetivo de esta sección es demostrar la flexibilidad del modelo Nelson-Siegel. Un modelo se considera flexible cuando puede dar cuenta de muchas de las formas de la estructura del plazo del interés. Lo cuál es particularmente importante en México cuando las estructuras del plazo con frecuencia son invertidas y encorvadas.

$$T=1$$

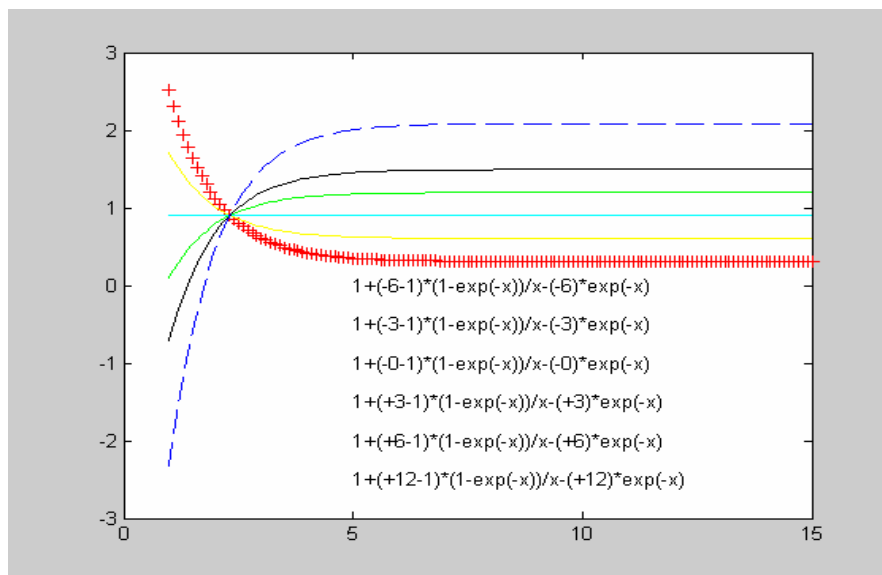
$$R(m)=1 \text{ (cuando } m \text{ tiende a infinito; } \beta_0=1)$$

$R(m)=0$ (cuando m tiende a cero: $B_0+B_1=0; B_1=-1$)

Entonces podemos describir el modelo Nelson Siegel de la siguiente manera:

$$R(m) = 1 + (\beta_2 - 1) * [1 - \exp(-m)] * \frac{1}{m} - \beta_2 * \exp(-m)$$

En la siguiente gráfica se presenta la función para diferentes niveles de B_2 . Aquí se especifican alternativas B_2 de -6,-3,0,3,6,9,12. Es importante notar que los valores positivos de B_2 tales como 3,6,9,12 dan como resultado una curva encorvada, y los valores negativos de B_2 dan como resultado una curva en forma de "S". Finalmente, un valor de $B_2=0$ da como resultado un curva monotónica.



3.8.6 Análisis del Tau (T)

El Tau define la velocidad con la cual B_1 y B_2 se acercan a cero. $1/\text{Tau}$ corresponde a la tasa de reversión a la medida en el modelo Hull-White. Cuando T disminuye, la reversión a la medida en las tasas de interés. En general existe una compensación entre el ajuste de la curvatura en el corto plazo de la estructura y el ajuste de la curvatura en el largo plazo de la estructura. Los valores pequeños de Tau corresponden a una rápida desintegración y, por lo tanto, conducirá a una curvatura que se ajusta mejor a la curvatura en los rangos de menor plazo. A la inversa, los valores de Tau grandes producen una desintegración baja en las variables independientes y conducen a una curvatura que se ajusta mejor a la curvatura en los rangos de vencimiento más largos. $1/\text{Tau}$ representa la velocidad a la cual las tasas de interés se reinvierten a la tasa forward implícita durante el proceso de difusión. Una vez que Tau se haya seleccionado, se resuelven las

betas al aplicar una regresión lineal menos cuadrada usando una descomposición de valor singular.

3.8.7 La Extensión Svensson del Modelo Nelson

La extensión Svensson es un modelo paramétrico que especifica una forma funcional para la Tasa Forward Instantánea (TTM), la cuál es una función del plazo de vencimiento (TTM). Esta forma funcional es la siguiente¹⁰:

$$f(TTM)_t = \beta_0 + \beta_1 \left(e^{-\frac{(TTM)}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{TTM}{\tau_1} \left(e^{-\frac{(TTM)}{\tau_1}} \right) \right) + \beta_3 \left(\frac{TTM}{\tau_2} \left(e^{-\frac{(TTM)}{\tau_2}} \right) \right)$$

La motivación original para modelar este método fue el deseo de crear un modelo parsimonioso de la Curva de Interés Forward que pudiera capturar el rango de formas que generalmente son vistas en las curvas de rendimiento: formas corvadas, monótonas y formas de "S".

El modelo tiene seis parámetros que deben ser estimados : $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2$. Estos parámetros identifican cuatro curvas diferentes, un valor asintótico, la curva general y dos curvas o formas "U", las cuales son combinadas para producir la Curva Forward Instantánea de Svensson dado un periodo de tiempo.

El impacto de estos parámetros en la forma dentro de la curva forward pueden ser descritos de la siguiente manera:

β_0 = Este parámetro, el cual debe ser positivo, es el valor asintótico de $f(TTM)_t$. La curva tenderá hacia este valor asintótico mientras TTM tienda a infinito.

β_1 = Este parámetro determina el valor inicial (el término a corto plazo) de la curva en términos de desviación a la asíntota. Éste también define la velocidad básica con la cual la curva tiende hacia su largo plazo. La curva tendrá una pendiente negativa cuando este parámetro es positivo y viceversa. La suma de β_0 y β_1 es la intersección vertical.

β_2 = Este parámetro determina la magnitud y la dirección de la curva. Si β_2 es positiva una curva ocurrirá en τ_1 mientras que si β_2 es negativa, una curva con forma de "U" ocurrirá en este mismo valor.

β_3 = Este parámetro al igual que β_2 , determina la magnitud y dirección de la segunda curva.

τ_1 = Este parámetro que deberá ser positivo, especifica la posición de la primera curva o curva con forma de "U".

¹⁰ $f(TTM)_t$ es el equivalente funcional de $f(t, \tau - T)_{INST}$ con $(\tau - t) \rightarrow (T - t) = TTM$

τ_2 = Este parámetro que deberá ser positivo, especifica la posición de la segunda curva o curva con forma de “U”.

Teniendo especificada la forma funcional de la Tasa Forward Instantánea, la función de la Tasa Cupón Cero se obtiene integrando la anterior. El resultado de esta integración es el siguiente:

$$z(TTM)_t = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-\frac{(TTM)}{t_1}}}{\frac{TTM}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\frac{(TTM)}{t_1}}}{\frac{TTM}{\tau_1}} - e^{-\frac{(TTM)}{t_1}} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\frac{(TTM)}{t_2}}}{\frac{TTM}{\tau_2}} - e^{-\frac{(TTM)}{t_2}} \right)$$

Es entonces relativamente fácil determinar la función de Descuento a partir de la función de Cupón Cero.

$$disc(TTM)_t = e^{-\left(\frac{z(TTM)_t(TTM)}{100}\right)}$$

Una vez con la fórmula específica para la Tasa Forward , permite la determinación de la función del Cupón Cero y por consecuencia la de descuento.

La curva de Valor de Mercado se presenta en tasas simples por lo que se realiza un ajuste utilizando la expansión de Taylor cúbica con la finalidad de describir mejor los movimientos de tasas de interés de largo plazo.

Utilizando la Expansión de Taylor tenemos:

$$e^{\frac{r_s t}{360}} \approx 1 + \frac{r_s t}{360} + \frac{1}{2!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^3$$

$$r_c \approx \frac{360}{t} \ln \left(1 + \frac{r_s t}{360} + \frac{1}{2!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^3 \right)$$

$$r_s = \frac{360}{t} \left[\frac{\left[3e^{\frac{r_c t}{360}} - 1 + \left(9e^{\frac{2r_c t}{360}} - 6e^{\frac{r_c t}{360}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} - \left[3e^{\frac{r_c t}{360}} - 1 + \left(9e^{\frac{2r_c t}{360}} - 6e^{\frac{r_c t}{360}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} - 1}{\left[3e^{\frac{r_c t}{360}} - 1 + \left(9e^{\frac{2r_c t}{360}} - 6e^{\frac{r_c t}{360}} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}}$$

donde,

r_s = tasa simple

r_c = tasa continua obtenida del modelo N-S-S

t = plazo para vencimiento, en días

3.8.8 Ajuste del Largo Plazo (Expansión de Taylor)

La curva de Valor a Mercado se presenta en tasas simples, por lo que se realiza un ajuste utilizando la expansión de Taylor cúbica con la finalidad de describir mejor los movimientos de tasas de interés de largo plazo.

La curva de Cetes (Svensson SMP), al largo plazo muestra un incremento exponencial, llamado "coletazo". Este efecto se produce debido a que antes de ajustar la curva Nelson Siegel Svensson es necesario convertir los nodos de tasas simples a compuestas. Después de ajustar la curva NSS a las tasas continuas compuestas se realiza la transformación a tasas simples. Dicha transformación se lleva a cabo despejando r_s de la siguiente igualdad:

$$1) e^{\frac{r_c t}{360}} = 1 + \frac{r_s t}{360}$$

$$2) r_s = \frac{360}{t} \left(e^{\frac{r_c t}{360}} - 1 \right)$$

del mismo modo,

$$3) r_c = \frac{360}{t} \ln \left(1 + \frac{r_s t}{360} \right)$$

donde,

r_s = tasa simple

r_c = tasa continua obtenida del modelo N-S-S

t = plazo para vencimiento, en días

El problema radica en dos factores del Mercado Mexicano: la falta de liquidez a largo plazo y las altas tasas de interés. La falta de bursatilidad a largo plazo, evita que cualquier modelo financiero de obtención de la tasa de interés se realice correctamente puesto que estos modelos fueron realizados para mercados de alta bursatilidad.

En palabras más simples el no existir el suficiente número de nodos a largo plazo trae como consecuencia que no podamos estabilizar la curva hacia abajo sino hasta el valor del último nodo con que se cuente. Por otro lado las altas tasas de interés conjugado con plazos largos traen consigo un problema matemático que nos hace afirmar que la conversión de tasas de interés simple a compuestas y viceversa mostrada en las ecuaciones 1,2 y 3 no estén completamente correctas.

La explicación es la siguiente: Haciendo una expansión de Taylor de la fórmula de interés compuesto, obtenemos:

$$e^{\frac{r_s t}{360}} \approx 1 + \frac{r_s t}{360} + \frac{1}{2!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{r_s t}{360} \right)^4 + \dots,$$

Como es sabido la multiplicación por un número muy pequeño y menor que 1, resulta un número más pequeño es decir, si

$$\left(\frac{r_s t}{360} \right) \rightarrow 0$$

Entonces

$$\left(\frac{r_s t}{360} \right)^2 \approx 0, \left(\frac{r_s t}{360} \right)^3 \approx 0, \left(\frac{r_s t}{360} \right)^4 \approx 0, \dots, \left(\frac{r_s t}{360} \right)^n \approx 0$$

Cuando se eleva esta expresión a cualquier potencia mayor que dos se va más rápido a cero y podemos eliminar de la ecuación número 4 todos los factores.

$$\Rightarrow e^{\frac{r_s t}{360}} \approx 1 + \frac{r_s t}{360}$$

En el caso mexicano no se puede realizar esta eliminación de factores pues las tasas de interés son muy altas.

Ejemplo

En México la tasa era de 20%, mientras que en Estados Unidos era de 4%. Se observa entonces esta transformación a 8 años.

Factores de la Serie Taylor		
n	México	USA
1	1.6	0.32
2	1.28	0.0512
3	0.682667	0.005461
4	0.273067	0.000437
5	0.087381	0.000028

Como se puede observar en el caso de Estados Unidos los factores con exponente mayor a 1 tienen un valor insignificante por lo cual en este caso esta transformación es suficiente para describir sus tasas. Sin embargo para el caso Mexicano los factores no tienden a cero tan rápido por lo cual esta transformación no es suficiente.

Para mejorar esta situación, se realiza las transformaciones de tasa simple a compuesta y viceversa, mediante la expansión de Taylor hasta el 4 término. Gracias a esta transformación se ha podido proporcionar una mejor descripción del Mercado Mexicano y reducir la volatilidad de los datos.

3.8.9 Ajuste del cuarto coeficiente de la Ecuación

Para obtener un buen ajuste a los nodos del mercado, la metodología NSS, debe escoger entre tomar en cuenta la tasa de 1 día, con lo cual se estiman débilmente las tasas a un plazo de un mes, o bien ignorar el nodo de 1 día, con la finalidad de obtener un ajuste en este plazo. La solución a este dilema se resuelve de la siguiente forma:

Es necesario aumentar el número de términos de la ecuación NSS de cuatro a cinco términos, es decir si antes se contaba con 2 taus y 3 betas, ahora se contará con 3 taus y 4 betas.

La fórmula anteriormente empleada es:

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) + \beta_2 \left(\left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) + \beta_3 \left(\left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_2}} \right) - e^{-\frac{m}{t_2}} \right)$$

El modelo esta definido de la siguiente forma:

$$R(m) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) + \beta_2 \left(\left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) - e^{-\frac{m}{t_1}} \right) + \beta_3 \left(\left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_2}} \right) - e^{-\frac{m}{t_2}} \right) + \beta_4 \left(\left(\frac{\tau_3}{m} \right) \left(1 - e^{-\frac{m}{t_3}} \right) - e^{-\frac{m}{t_3}} \right)$$

La justificación de β_4 , está dada a la necesidad de introducir un punto de inflexión que reúna la tendencia de las tasas a corto plazo con el nodo de 1 día. En esta ecuación los puntos de inflexión están dados por las taus, y en el caso específico del término con β_4 , esta inflexión esta dada por τ_3 , debe tener un valor pequeño; de hecho τ_3 es la menos de las taus. Matemáticamente esto es demostrable al derivar la función con respecto al plazo m e igualando está derivada a cero. Posteriormente será necesario realizar una segunda derivada para obtener la concavidad de la función.

Podemos ver que en la gráfica con 3 taus (Svensson Cúbica 3 taus), la curvatura inicial ocurre ajustando el corto plazo mientras que en la gráfica que anteriormente se utilizaba (Cetes anterior) este comportamiento no se da.

El beneficio que se obtiene mediante este ajuste es la reducción de la volatilidad en el corto plazo.

3.9 Valuación de los instrumentos a mercado

Como vimos en los capítulos anteriores para valuar cualquier instrumento gubernamental en México por convención la última tasa de Cetes conocida o a la tasa que este referenciada el instrumentos es la tasa que será considerada para los cupones futuros, es decir una tasa fija para los cupones futuros.

En la valuación teórica a mercado esto no sucede, se propone una metodología en la cual cada flujo de efectivo en el futuro es estimado y se descuenta utilizando la curva apropiada para cada tipo de instrumento. Este proceso se divide en dos pasos:

- ② El proceso de la generación de los cupones
- ② El proceso de valuación donde los flujos de efectivo han sido descontados en su valor presente.

Serán descontados utilizando la curva libre de riesgos, estos instrumentos emitidos por el gobierno federal tiene protección contra la inflación es decir pagan cupón con la tasa más alta entre los cetes al plazo del cupón correspondiente y la inflación calculada en ese período, por lo cual traen una sobretasa (spread) implícita sobre la tasa nominal libre de riesgo. Por lo cual esta debe ser estimada. En general estos spread son asignados según del vencimiento del instrumento (maturity). A los Bonos que les queda un cupón por vencer deben tener un spread igual a cero ya que de antemano sabemos cual será el valor del cupón que será pagado. También los spread tienden a incrementarse a través del término estructura (tiempo al vencimiento).

Capítulo IV

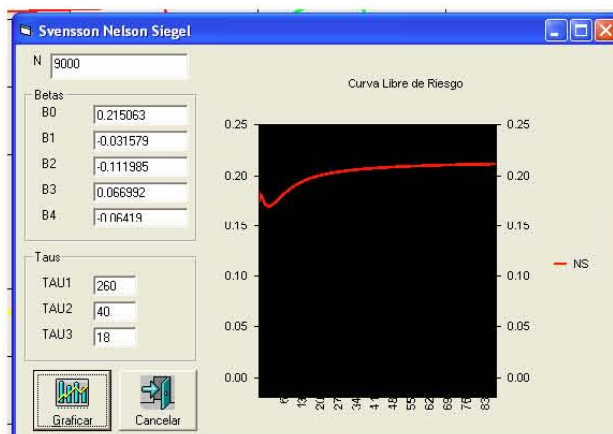
Objetivo

En este capítulo expondré 2 casos prácticos:

- Expondré una aplicación que permite explicar de forma gráfica el modelo Nelson Siegel, permite calcular el precio de cualquier instrumento de Mercado de Dinero con solo parametrizar las características fundamentales de los instrumentos y actualizar los parámetros que intervienen en su calculo.
- Hablaré sobre la nueva mecánica implementada por Banco de México para garantizar los reportos con plazo mayor o igual a 4 días, todo esto con el propósito de exaltar la importancia de los proveedores de precios de mercado en la operación diaria de una Banco, Casa de Bolsa etc.

4.1 Aplicación para modelar los Bonos

En esta pantalla nos permite graficar la curva libre de riesgo utilizando el modelo Nelson Siegel con la extensión Svensson dando los parámetros que Betas y Taus y diciendo el tamaño de la partición.



Valuación de los Bonos.

En los catálogos de la aplicación es necesario primero dar de alta todos los parámetros importantes de cada emisión, para esto tenemos que leer cuidadosamente el prospecto de colocación y parametrizar las características tales como:

- la tasa de referencia,
- plazo de referencia,
- plazo de cupón,
- día del mes en los que corta cupón,

- día de la semana si es el caso en el que corta cupón,
- plazo de revisión de la tasa ya que muchas veces no es el mismo que el plazo de cupón,
- tipo de cálculo con la tasa este campo puede ser la mas alta de 2 o mas tasas, promedio geométrico o aritmético, fija, real;
- divisa de operación,
- puntos de sobretasa o spread para le cupón

Emisiones Corporativas

Es necesario dar de alta características más específicas en las emisiones corporativas (en caso de más de 1 plazo de referencia llenar los campos 1,2 y 3)

Serie	Emision	Plazo	Tasa Referencia	Tipo Tasa	Divis	Plazo Referencia	Plazo eq	sobretas	Plazo
02-2	IUSA	28	TIIE	MAS ALTA	AXP	28	91	2.0%	2557
04-2	GDFCB	28	TIIE	MAS ALTA	AXP	28	28	0.32%	1820
04-2	GMAC	28	TIIE	MAS ALTA	AXP	28	28	0.55%	1237
04-Feb	GMAC	28	TIIE	MAS ALTA	AXP	28	28	0.55%	1232
80405	JNAFTIIE	28	TIIE	PROM. ARIT	AXP	28	1	-0.4%	2498
03	KOF	28	TIIE	MAS ALTA	AXP	28	28	0.55%	1456
07	BANXICO	28	TPFTB	PROM. GEO	AXP	1	1	0.0%	3444
03	BANXICO	28	TPFTB	PROM. GEO	AXP	1	1	0.0%	3640
04	AMEX	28	TPFTB	PROM. GEO	AXP	1	1	0.7%	1092
03	METROCB	91	TPFTB	PROM. GEO	AXP	1	91	0.48%	1827

CERRAR

Existen certificados bursátiles cuyos cupones son irregulares o con amortizaciones parciales de su valor nominal durante la vida del bono, por lo que se creo una tabla que nos permite capturar las fechas de los cupones y los valores nominales actualizados en cada corte de cupón. Ya que para el caso de instrumentos con amortizaciones parciales tenemos que traer a valor presente cada flujo por separado, ya que el valor nominal varía en cada corte de cupón.

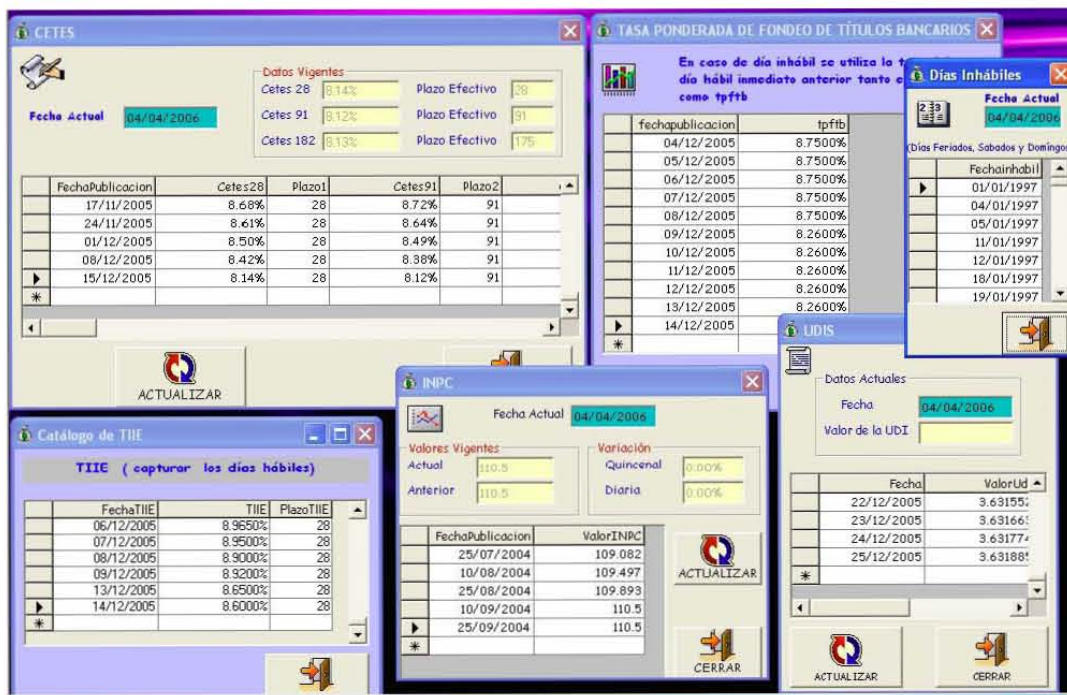
Tabla de cupones para instrumentos corporativos y bancarios

Emisora : ATM
Serie : 00U

No	Emisora	Serie	finicup	Plazocup	VN	Fraam	Tasamercado
1	ATM	00U	01/04/2001	153	100	1.2	0
2	ATM	00U	01/10/2001	183	98.8	1.31	0
3	ATM	00U	01/04/2002	182	97.49	1.34	0
4	ATM	00U	01/10/2002	183	96.15	1.35	0
5	ATM	00U	01/04/2003	182	94.8	1.4	0
6	ATM	00U	01/10/2003	183	93.4	3.2	0
7	ATM	00U	01/04/2004	183	90.2	3.4	0
8	ATM	00U	01/10/2004	183	86.8	3.6	0
9	ATM	00U	01/04/2005	182	83.2	3.8	0

SALIR

Otros catálogos que son fundamentales, para los cálculos de las tasas, plazos y en caso de instrumentos reales para convertirlos a pesos, son las tasas primarias, la inflación y las fechas inhábiles para calcular los plazos de cupón.



Todas estas variables nos permiten calcular los factores que determinan el precio de un bono.

Para hacer la calculadora se desarrollaron procedimientos para:

- Tasa de cupón
- Tasa de mercado
- Plazo efectivo del cupón
- Días por vencer del cupón
- Días por vencer de la emisora
- Valor nominal actual
- Flujos futuros
- Valor presente de los flujos futuros
- Intereses devengados
- Precio de sucio y limpio del bono que solo es la suma de los valores presentes de los flujos el primero y menos los intereses devengados el segundo.

Por lo tanto tenemos:

Datos	
Nombre	Certificados Bursátiles en UDI
Fecha	04/04/2005
Valor Nominal	282.5014 UDI
Tasa de Cupón	9.0000%
Tasa de Mercado	9.0000%
Tipo de instr	CORPORATIVO
Emisora	ATM
Serie	00U
Sobretasa	
Tasa Real	9.0000%

Emisión		Cupón Actual	
Plazo	4353	Plazo	182
Fecha Emisión	30/10/2000	Plazo Efectivo	183
Fecha Vencimiento	30/09/2012	Fecha Inicio	01/04/2005
DXV	2736	Fecha Vencimiento	01/10/2005
Días Transc.	1617	DXV	180
		Días Transc.	3

Cupones	
Cupones Transcurridos	8
Cupones X Cortar	16

Resultados	
Valor Nominal Ajust.	282.5014652
Intereses Devengados de Cupón	0.21187610115
Intereses del Cupón Anterior	
Precio Sin Intereses	282.49014430729
Precio Con Intereses	282.70202040844

Procesos	
PRECIO	
SOBRETASA	
BORRAR	

El precio sin intereses es mejor conocido como precio limpio, es decir a este se le descuenta los intereses transcurridos desde la fecha de emisión o último corte hasta la fecha a la que se está valuando el bono.

El precio con intereses o precio sucio es el precio más los intereses transcurridos a la fecha de valuación.

4.2 Reportos Colateralizados

En el mercado de dinero se operan instrumentos de corto plazo con características específicas de liquidez, rendimiento, plazo y riesgo. Por lo tanto se han desarrollado modalidades de operación de corto plazo que optimizan estas características a oferentes y demandantes de dinero. Una de estas modalidades es el reporto.

El reporto es una operación de compra-venta de un instrumento en el mercado de dinero. En esta operación una institución financiera acuerda con un inversionista venderle en el presente un instrumento (Cetes, Bpas, Bpat, etc.) por un monto determinado, pactando al mismo tiempo su recompra a un plazo determinado (plazo del reporto) y garantizando un rendimiento o premio durante el plazo convenido.

El reporto se entiende también como una operación de préstamo: el inversionista que compra en reporto un bono, en realidad está prestando dinero al vendedor teniendo como garantía el propio bono y al término del plazo del reporto, le

regresarán su dinero en efectivo más un premio, a cambio de devolver la garantía o colateral (el bono).

Con los propósitos de dar seguridad jurídica a las operaciones de reporto en México y disminuir el riesgo de crédito¹¹ al garantizar las posibles fluctuaciones del mercado, manteniendo valuaciones diarias tanto de los títulos objeto del reporto como de las garantías, Banco de México emitió la circular 1/2003 que a continuación explicaremos.

4.2.1 Circulares de Banco de México (01/2003, 28/2003, 01/2003BIS1 y 01/2003BIS2)

El 6 de agosto del 2003 Banco de México emitió la circular 1/2003 con el objeto de uniformar el régimen aplicable a las operaciones en reporto que pueden realizar las diferentes entidades financieras así como actualizar dicho régimen y facilitar su consulta a través de un solo cuerpo normativo en el que se mantengan todas las disposiciones en materia de reportos emitidas por el propio Banco Central.

Mencionaremos las reglas principales a las que deberán sujetarse las instituciones de crédito; casas de bolsa; sociedades de inversión, sociedades de inversión especializadas en fondos para el retiro pero antes de eso daremos algunas definiciones que son necesarias para comprender esta nueva mecánica de operación.

Operaciones y contrapartes autorizadas

Las instituciones de crédito y las Casas de Bolsa podrán actuar como Reportadas con cualquier persona como reportadoras exclusivamente con el Banco de México, Instituciones de Crédito, Casas de Bolsa y Entidades Financieras del Exterior.

Las operaciones de Reporto con Valores que realicen las instituciones de crédito, podrán efectuarse sin la intermediación de Casas de Bolsa.

Valores objeto de reporto

Las Instituciones de Crédito podrán celebrar operaciones de Reporto sobre Valores, excepto sobre títulos para Operaciones de Arbitraje Internacional.

Las Casas de Bolsa podrá celebrar operaciones de Reporto Sobre Valores y Las Sociedades de Inversión y las Siefores podrán efectuar operaciones en reporto con los Valores que les permita su ley.

¹¹ El riesgo de crédito se define como la pérdida potencial que se registra con motivo del incumplimiento de una contraparte en una transacción financiera (o en alguno de los términos y condiciones de la transacción). También se concibe como un deterioro en la calidad crediticia de la contraparte o en la garantía o colateral pactado originalmente.

Plazo

El plazo de los reportos deberá vencer a más tardar el día hábil anterior a la fecha de vencimiento de los Valores objeto de la operación de que se trate. Tratándose de reportos celebrados con Títulos para operaciones de Arbitraje Internacionales, el plazo de dicho reporto no podrá ser superior a 4 días hábiles.

Liquidación de las operaciones

En las operaciones de Reporto, la transferencia de los Valores y de los fondos respectivos deben efectuarse en la misma fecha valor, la cuál no podrá ser posterior al cuarto día hábil inmediato siguiente al de la concertación correspondiente. La liquidación anticipada podrá realizarse en los términos del contrato marco.

Precio y premio

El precio y el premio de los Reportos deberán denominarse en la misma moneda que los Valores objeto de la operación de que se trate, con excepción de operaciones celebradas con Valores en UDIS, en cuyo caso el precio y el premio deberán denominarse en moneda nacional.

En las operaciones de Reporto todos los cálculos se harán con la fórmula de año comercial de trescientos sesenta días y número de días efectivamente transcurridos.

Intereses de los Valores

Los intereses, que en su caso devenguen los Valores deberán pagarse a las personas que aparezcan como titulares de los mismos en los registros del Depositario de Valores, al cierre de las operaciones del día hábil bancario inmediato anterior al del vencimiento de cada periodo de interés.

Salvo pacto contrario, el Reportador deberá entregar al Reportado los intereses pagados por el emisor correspondientes a los valores objeto de reporto, el mismo día en que los reciba.

Instrumentación

Las operaciones de Reporto entre Entidades y con Inversionistas Institucionales, deberán realizarse al amparo del contrato marco único que para tales operaciones aprueben conjuntamente la Asociación de Banqueros de México, A.C., la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles, A.C. y la Asociación de Instituciones Financieras Internacionales, A.C.

En dicho contrato deberá pactarse la obligación de las partes de garantizar las operaciones de Reporto que celebren a plazos mayores a tres días hábiles bancarios contados a partir de la fecha de concertación, incluyendo sus prórrogas, cuando se presente fluctuaciones en el valor de de los títulos objetos de tales operaciones, que causen un incremento en la "exposición neta" que rebase el

monto máximo convenido por las propias partes. Las citadas garantías podrán constituirse por caución bursátil, prenda, fideicomiso de garantías o la constitución de un depósito bancario de dinero. Al efecto las entidades podrán dar en garantía títulos o valores de su cartera, derechos de crédito a su favor o efectivo según corresponda.

En todos los casos, las partes deberán celebrar los contratos marco mencionados por escrito, previo a la concertación de cualquier operación en reporto.

En la confirmación de la operación (un comprobante mediante algún medio que deje constancia documental, incluso medios electrónicos) deberá establecerse el Reportado, el Reportador, el precio premio y plazo del reporto, así como las características específicas de los Valores materia del mismo como son: emisor; clave de la emisión; valor nominal; tipo de valor y en su caso avalista, aceptante o garante de los Valores.

Prohibiciones

- Ⓜ Las Instituciones de Crédito no podrán actuar como Reportadas o Reportadoras sobre los títulos bancarios que ellas mismas emitan, acepten avalen o garanticen.
- Ⓜ Las Instituciones de Crédito y Casas de Bolsa no podrán celebrar operaciones de Reporto sobre títulos salvo que lo hagan con: i) Entidades Financieras del Exterior; ii) entidades financieras nacionales que puedan operar dichos títulos en Reporto conforme a las disposiciones que resulten aplicables e iii) Inversionistas Institucionales e Inversionistas Calificados.
- Ⓜ Las Entidades deberán abstenerse a efectuar operaciones de Reporto en condiciones y términos contrarios a sus políticas y a las sanas prácticas del mercado.
- Ⓜ Las Instituciones de Crédito y Casas de Bolsa que no cuenten con autorización para celebrar operaciones a Futuro, o de Opción o de Swap, sobre tasas de interés reales o nominales.

Información

Las Entidades deberán proporcionar a las Autoridades en términos de disposiciones aplicables información sobre las operaciones de Reporto que realicen, en la forma y plazos que éstas les requieran.

Sanciones

- Ⓜ Las Instituciones de Crédito y Casas de Bolsa que incumplan las disposiciones contenidas en las Presentes Reglas serán sancionadas por Banco de México en términos de las leyes que resulten aplicables.
- Ⓜ Las Siefores que incumplan serán sancionadas por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro conforme a la ley de los Sistemas de Ahorro para el retiro.

- Las Sociedades de Inversión que incumplan serán sancionadas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores conforme a la ley de Sociedades de Inversión.

Transitorios

Se suponía que iban a entrar en vigor el 3 de agosto del 2004 pero se prorrogó y entraron en vigor el 3 de Noviembre del 2004.

4.2.2 Administración y Valuación de operaciones de Reporto Colateralizado

Definiciones y flujo de operación

Con la finalidad de entender el manejo operativo de esta nueva forma de operar los reportos en México necesitamos dar algunas definiciones para llegar a explicar cómo calcular la llamada de margen que es simplemente el monto total por contraparte que debemos constituir como garantías.

Criterio de Selección de Operaciones

Como lo menciona en la parte de instrumentación de la circular de Banco de México explicada anteriormente todas las operaciones de reporto registradas con un plazo mayor a 3 días hábiles, incluyendo las operaciones fecha valor en las que el plazo de liquidación más el del reporto sean mayores al parámetro mencionado.

Nivel de Mantenimiento (NM)

Monto de la línea de Crédito u operación que le otorga cada participante a cada una de sus contrapartes. El registro y asignación de estas líneas de crédito se hará por cuenta propia, si un participante mantiene sus portafolios en out-sourcing con algún custodio (cuenta de terceros), él mismo será el responsable de la asignación y el seguimiento de dicha línea.

Monto mínimo de transferencia

Monto mínimo acordado entre las partes a transferir como garantía en cada llamada de margen.

Precio de Recompra (PR)

Significa la cantidad equivalente al Precio más el Premio que el Participante que actúe como reportado entregará al Participante que actúe como reportador, en la fecha de vencimiento o el Premio devengado hasta la Fecha de Valuación de que se trate, según sea el caso.

Capital Negociado + Intereses devengados a la fecha de la valuación calculados con la tasa original del reporto en línea recta.

Premio

Significa la cantidad adicional al Precio que, salvo pacto en contrario, el Participante que actúe como reportado deberá pagar al Participante que actúe como reportador en la fecha de vencimiento expresada como un porcentaje o tasa de interés sobre el Precio aplicada durante el plazo del reporto. El Premio podrá pactarse como una tasa fija o variable. Dichas tasas se multiplicarán por el Precio utilizando la fórmula del número de días efectivamente transcurridos divididos entre trescientos sesenta (360).

Factor de Aforo (FA)

Significa cada uno de los factores de cobertura expresados como porcentajes, aprobados por las Asociaciones, para cada valor objeto de una Operación de Reporto.

Factor de cobertura por tipo de valor o grupo.

Tabla de Componentes para Estimar Aforos

Plazos Colateral				Por tipo de Emisión				Por Riesgo Emisor Diferente a Gobierno Federal ^e				
Rangos	Rangos de Días	Emitidos Por el Gobierno Federal ^c						Ciertas Entidades Gubernamentales ^d	Banca		Corporativos	
		Tasa Fija		Revisables		Moneda			AAA a AA+	AA a AA-	AAA a AA+	AA a AA-
		Pesos	en Pesos ^b	Utilizados	Extranjera	(E)	(F)		(G)	(H)	(I)	
Ref	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)	(I)			
< 1	Meses	5 ^a	29 ^b	0.10%	-	0.10%	0.25%	0.05%	0.10%	0.15%	0.15%	0.20%
> 1-3	Meses	30	92	0.20%	0.03%	0.20%	0.25%	0.08%	0.15%	0.20%	0.20%	0.25%
> 3- 6	Meses	93	183	0.35%	0.05%	0.35%	0.25%	0.10%	0.20%	0.25%	0.25%	0.30%
>6-9	Meses	183	270	0.50%	0.07%	0.50%	0.25%	0.13%	0.25%	0.30%	0.30%	0.35%
>9-12	Meses	271	364	0.65%	0.10%	0.65%	0.25%	0.15%	0.30%	0.35%	0.35%	0.40%
>1-2	Años	365	728	1.10%	0.15%	0.75%	0.50%	0.20%	0.40%	0.50%	0.45%	0.55%
>2-3	Años	729	1092	1.50%	0.20%	1.00%	0.75%	0.25%	0.50%	0.65%	0.55%	0.70%
>3-4	Años	1092	1456	1.80%	0.25%	1.25%	1.00%	0.33%	0.65%	0.85%	0.75%	0.95%
>4-5	Años	1457	1820	2.15%	0.30%	1.50%	1.50%	0.38%	0.75%	1.00%	0.85%	1.10%
>5-7	Años	1821	2548	3.00%	0.40%	2.00%	2.00%	0.50%	1.00%	1.50%	1.10%	1.60%
>7-10	Años	2549	3640	4.00%		3.00%	3.00%	0.75%	1.50%	2.50%	1.60%	2.60%
>10	Años	3641	y +	5.00%		4.00%	4.00%	1.25%	2.50%	3.50%	2.60%	3.60%

Notas:

^a No se aplican Aforos a instrumentos (o a tasas de referencia que revisan) con plazos menores a 5 días pues este es el plazo de retención implícito en el cálculo de los Aforos.

^b A los Aforos aplicables a instrumentos que todavía tienen cupones por revisar **hay que agregarles el componente que corresponde a la tasa de referencia que se utiliza para determinar sus cupones, de acuerdo con la tabla que a continuación se presenta:**

Plazo en Días	CETES	TIIE
Referencia	(J)	(K)
28	0.10%	0.20%
91	0.20%	
182	0.35%	

El Aforo aplicable a instrumentos revisables que estén devengando su último cupón es igual al que le corresponde a instrumentos de tasa fija equivalentes (en términos de riesgo emisor y días por vencer)

^c Además de aquellos emitidos por la Tesorería de la Federación, esta categoría incluye a los instrumentos emitidos por el IPAB y Banco de México, así como los PICS y CBICS.

^d Esta columna incluye aforos recomendados para valores emitidos por las siguientes entidades gubernamentales: Banobras (excepto PICS y CBICS), Bancomext, CFE, Nafin, Pemex y SHF.

Se recomienda asignar, según sea el caso, el Aforo correspondiente a Bancos o Corporaciones de igual calificación crediticia a entidades gubernamentales no incluidas en esta lista.

^e El aforo de los instrumentos con riesgo emisor distinto al que se define como Gobierno Federal incluye el componente de sobre tasa correspondiente a su riesgo crediticio y el Aforo que se le asignaría a un instrumento del mismo tipo (en términos de moneda, período de revisión, y días por vencer) emitido por el Gobierno Federal.

La calificación que se usará para determinar el Aforo aplicable será la menor de las asignadas por las Agencias Calificadoras reconocidas, en el entendido que por lo menos dos de ellas deben calificar un papel susceptible de ser reportado

Este proceso no es recomendable para calcular aforos de instrumentos bancarios y corporativos emitidos en moneda extranjera.

Ejemplos de Estimación de aforos aplicables a emisiones representativas:

Instrumento	Emisor	Días x Vencer	Por Tipo de Emisión	Ref	Por Tasa de Referencia	Ref	Por Riesgo Emisor	Ref	Aforo Aplicable
Cetes	Gobierno Federal	175	0.35%	(A)	0		0		0.35%
Bonde LS	Gobierno Federal	175	0.35%	(A)	0		0		0.35%
Bonde LS	Gobierno Federal	1080	0.20%	(B)	0.35%	(J)	0		0.55%
Bono M	Gobierno Federal	2728	4.00%	(A)	0		0		4.00%
Udibono	Gobierno Federal	3000	3.00%	(C)	0		0		3.00%
UMS en USD	Gobierno Federal	5000	4.00%	(D)	0		0		4.00%
Brem	Banco de México	1200	0.25%	(B)	0		0		0.25%
BPAT	IPAB	1550	0.30%	(B)	0.20%	(J)	0		0.50%
CBIC	Fideicomiso. ...	7500	4.00%	(C)	0		0		4.00%
Udizado	SHF	5000	4.00%	(B)	0		1.25%	(E)	5.25%
Revisable a TIIE28	Banco AAA	720	0.15%	(B)	0.20%	(K)	0.40%	(F)	0.75%
Tasa Fija pesos	Corporativo AA	1950	3.00%	(A)	0		1.60%	(I)	4.60%

Proporción del Margen (PM)

1 + Factor de Aforo

Valuación a mercado del subyacente (VS)

de Títulos x Precio Vector MD

Valuación a mercado de las garantías (VG)

$$\frac{(\# \text{ de títulos recibidos en garantía } \times \text{ Precio del vector MD})}{(1 + \text{FA})}$$

Aforo Inicial (MI)

Significa en cada Fecha de Valuación la cantidad resultante de multiplicar el Precio de las Operaciones de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la Fecha de Concertación por el Factor de Aforo correspondiente, en la Fecha de Concertación respectiva.

PR X FA

Margen Inicial Neto (MIN)

Suma de los márgenes iniciales a cargo – Suma de los márgenes iniciales a favor de un participante en relación con una contraparte.

Margen Inicial de un día (MI'1)

Al X Monto negociado en las operaciones con plazo por vencer de un día.

Monto de liquidación (ML)

Monto de la operación + intereses devengados del premio pactado calculados en línea recta con tasa original del reporto – Valuación a mercado del subyacente con el precio vector MD.

Exposición Neta.- Quiere decir que en cada Fecha de Valuación, para cada una de los Participantes, el resultado de:

- a) La cantidad que se obtenga de sumar los montos que resulten de multiplicar: (i) el Precio de Recompra (con signo positivo en caso de que se actúe como reportador y Signo negativo cuando se actúe como reportado) de cada Operación de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la fecha de concertación, celebradas con anterioridad a la Fecha de Valuación por (ii) el Factor de Aforo correspondiente a los valores objeto de la Operación de Reporto más uno, más
- b) El valor de mercado de los valores objeto de las Operaciones de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la fecha de concertación, celebradas con anterioridad a la

Fecha de Valuación en las Operaciones de Reporto en las que dicho Participante actúe como reportado, menos

- c) El valor de mercado de los valores objeto de las Operaciones de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la fecha de concertación, celebradas con anterioridad a la Fecha de Valuación en las Operaciones en las que dicha Participante actúe como reportador, más
- d) El valor de mercado ajustado de las garantías otorgadas por el Participante de que se trate hasta ese momento, menos
- e) El valor de mercado ajustado de las garantías recibidas por el Participante de que se trate hasta ese momento, más
- f) El Aforo Inicial de las Operaciones de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la fecha de concertación, celebradas en la Fecha de Valuación, a ser recibido por dicho Participante como reportador, menos
- g) El Aforo Inicial de las Operaciones de Reporto con un plazo mayor a tres días hábiles bancarios, contados a partir de la fecha de concertación, celebrados en la Fecha de Valuación, a ser entregado por dicho participante como reportado, más
- h) El regreso de Aforo Inicial entregado por dicho Participante respecto de las Operaciones de Reporto cuya fecha de vencimiento sea el día hábil bancario siguiente a la Fecha de Valuación de que se trate, menos
- i) El regreso de Aforo Inicial recibido por dicho Participante respecto de las Operaciones de Reporto cuya fecha de vencimiento sea el día hábil bancario siguiente a la Fecha de Valuación de que se trate.

Llamada de margen

Significa para cada Fecha de Valuación la cantidad en efectivo o su equivalente en valores que sea igual a la Exposición Neta del Participante acreedor de la garantía, la cual existirá sólo en el caso de que la Exposición neta del Participante acreedor de la garantía sea mayor al Nivel de Mantenimiento más al Monto Mínimo de Transferencia aplicable al Participante deudor de la garantía.

Es decir el requerimiento de constitución de garantías para la cobertura de la exposición de riesgo de una o varias operaciones de reporto entre dos participantes incluyendo las que vencen al día siguiente de la valuación, la fórmula para calcularla es la siguiente:

$$|\sum CICxFA - CIVxFA + (\sum VSV - \sum VSC) + (\sum VGO - \sum VGR) + (\sum MIC - \sum MIV) + (\sum MI'1C - MI'1V)| > \mathbf{NM+MMT}$$

donde :

CIC= Capital + Intereses de Compras

FA= Factor de aforo

CIV= Capital + Intereses de Ventas

VSV= Valuación del subyacente de las ventas

VSC= Valuación del subyacente de las compras

VGO= Valuación de las Garantías Otorgadas

VGR= Valuación de las Garantías Recibidas

MIC= Aforo inicial de las Compras de hoy

MIV= Aforo inicial de las Ventas de hoy

MI'1C=Aforo inicial de las compras a las que les queda un día por vencer

MI'1V=Aforo inicial de las ventas a las que les queda un día por vencer

NM= Nivel de mantenimiento

MMT=Monto mínimo de transferencia

Una vez calculada la parte izquierda de la ecuación si esta es mayor a la suma del nivel de mantenimiento y el monto mínimo de transferencia, la parte de la izquierda de la ecuación es el monto que deberá constituirse en garantías para saber si serán recibidas o entregadas basta quitar el valor absoluto de la ecuación cuando sean negativas constituimos garantías y cuando es positivo nos constituyen.

Proveedor de Precios (PP).- Significa cualquier entidad que esté autorizada por la Comisión, para fungir como Proveedor de Precios, designado por los Participantes y con la que deberá tener contratados sus servicios, a efecto de recibir la información necesaria para realizar los cálculos de las cantidades o prestaciones debidas de las Operaciones de Reporto de que se trate, conforme a la selección que hayan realizado los Participantes.

Como podemos observar la figura del precio de mercado es de suma importancia para valuar tanto las garantías como el subyacente de cualquier instrumento del mercado de dinero por lo que debe reflejar exactamente lo que sucede en el mercado.

Conclusiones

Primero vimos que el valor del dinero en el tiempo es expresado concretamente con una tasa de interés, el valor presente del conjunto de los flujos futuros es la suma de las magnitudes descontadas de los flujos de efectivo individuales del conjunto. Un banco ideal puede transformar un conjunto de flujos de efectivo a cualquier otro con el mismo valor presente.

Otro concepto importante que vimos es la tasa interna de retorno de un conjunto de flujos de efectivo que es una tasa de interés que, si es usada para evaluar el valor presente del conjunto de flujos, causaría que el valor presente sea cero. El valor presente y la tasa interna de retorno, son los dos principales métodos usados para evaluar proyectos propuestos de inversión.

Analizando el uso de estos métodos encontramos que no siempre son exactos. En particular, si consideramos varios tamaños de ciclos, impuestos e inflación cada uno requiere atención cuidadosa.

Los bonos se clasifican por dos aspectos principalmente por el tipo de tasa, y por el emisor.

Tipo de tasa tenemos:

- A descuento, o también llamados Bonos Cupón cero porque pagan al vencimiento su valor nominal y se negocian bajo par es decir no tienen cupones.
- Tasa fija que pagan cupones pero la tasa es fija para todos y se conoce desde la emisión del bono
- Revisables son aquellos que la tasa de cupón esta referenciada a una tasa primaria ya sea puntual o promedio geométrico, aritmético, la mas alta de varias tasas, revisable determinados plazos diferente a la fecha del corte de cupón, mas o menos un spread, con liquidaciones caprichosas es decir diferentes al corte de cupón etc.
- Tasa real estos son bonos cuyos cupones pagan una tasa real es decir una tasa nominal menos la inflación, por lo que su valor nominal esta dado en udis.

Emisor:

- Gubernamentales estos por su riesgo tienen calificaciones muy altas es decir son muy confiables ya que están garantizados por el gobierno federal, los principales bonos que se manejan en este rubro son IP, IT, LT, LS, IS, M, M3, M5, M7, M0, XA, L, S, S0, y 2U
- Bancarios estos son emitidos por Bancos o Casas de Bolsa los principales ejemplos son los certificados de depósito, aceptaciones bancarias, pagares etc.

- Corporativos estos son emitidos por grupos corporativos, empresas, municipios, gobiernos de estados etc.

Para calcular su precio debemos hacer la suma del valor presente de los flujos y el valor nominal, descontando la parte del cupón devengado. La tasa de rendimiento o (yield to maturity), es la tasa con la cual traemos a valor presente todos los flujos. Para los instrumentos a descuento o cupón cero solo debemos traer a valor presente el valor nominal.

La relación precio rendimiento en un bono es inversa ya que si la tasa de rendimiento aumenta el precio baja y viceversa. Para poder examinar la relación entre cambios en el rendimiento y movimientos en el precio de los bonos entender esta relación fue necesario demostramos 5 teoremas en los cuales a excepción del último supusimos que:

- 1) los portafolios que estamos viendo tienen la misma tasa de cupón
- 2) la tasa de cupón actual y las futuras son iguales

Y demostramos que para un cambio dado en el rendimiento, las fluctuaciones potenciales en el precio para bonos de largo plazo son aproximadamente similares sobre un vasto rango de vencimientos. Las curvas de precio tienden convertirse horizontales (aplanarse) cuando el plazo al vencimiento incrementa. Los bonos de largo vencimiento, los cuales son poco sensibles a los cambios en el nivel de tasas de interés, podrían consecuentemente ser muy similares. Inversamente en el corto plazo o rango intermedio de vencimiento, la extensión del vencimiento aunque por pocos años, implica considerables diferencias en el riesgo del precio y oportunidades para ganar capital. Es razonable esperar que en estas áreas de la curva de rendimiento, los bonos de diferentes plazos al vencimiento podrían ser mas parecidos que diferentes en valores como respuestas a cambios esperados en el nivel de tasas de interés¹².

Las matemáticas de los movimientos en los precios pueden ayudarnos a explicar las pendientes o inclinaciones características de la curva rendimiento mientras que la relación precio-vencimiento puede ayudarnos a explicar la limitada volatilidad de tasas de largo plazo.

Para valuar cualquier instrumento en México por convención la última tasa de cetes conocida o a la tasa que este referenciada el instrumentos es la tasa que será considerada para los cupones futuros (tasa flat). Esto quiere decir que por lo menos en México el supuesto 2) es un supuesto que actualmente se utiliza en las practicas de mercado actuales.

¹² Todos estos argumentos están basados en el supuesto de que cambios anticipados en el rendimiento son iguales para todos los vencimientos. Es interesante comparar la explicación de arriba con la que ofrece Lutz. Formar un “hombro” se esperará que cambiaran en un futuro cercano y entonces alanzaran un cierto nivel donde serían constantes

En la valuación teórica a mercado esto no sucede, se propone una metodología en la cual cada flujo de efectivo en el futuro es estimado y se descuenta utilizando la curva apropiada para cada tipo de instrumento. Este proceso se divide en dos pasos:

- ② El proceso de la generación de los cupones
- ② El proceso de valuación donde los flujos de efectivo han sido descontados en su valor presente.

Serán descontados utilizando la curva libre de riesgos, estos instrumentos emitidos por el gobierno federal tiene protección contra la inflación es decir pagan cupón con la tasa más alta entre los Cetes al plazo del cupón correspondiente y la inflación calculada en ese período, por lo cual traen una sobretasa (spread) implícita sobre la tasa nominal libre de riesgo. Por lo cual esta debe ser estimada. En general estos spread son asignados según del vencimiento del instrumento (maturity). A los Bonos que les queda un cupón por vencer deben tener un spread igual a cero ya que de antemano sabemos cual será el valor del cupón que será pagado. También los spread tienden a incrementarse a través del término estructura (tiempo al vencimiento).

Para el cálculo del precio a mercado intervienen muchos factores de riesgo, ya identificados solo nos hace falta aplicarles un modelos que permiten construir la curva.

Para estimar esta tasa encontramos varias metodologías basadas en interpolaciones, polinomios, modelos estocásticos, modelos estadísticos dentro de estos el método que considero que describe mejor el Mercado Mexicano es el Nelson Siegel está metodología se creo con la finalidad de eliminar lo que con frecuencia se presenta en los modelos polinomiales pues la linealidad conduce a tendencias “explosivas” al final del rango de vencimiento ajustado. Este modelo es un subconjunto del modelo Hull and White la ventaja principal es que explícitamente propone una función que describe como de deben comportar las tasas forward con el paso del tiempo. Es una ecuación diferencial de segundo grado con raíces iguales y reales para representar la tasa forward instantánea al vencimiento. Consta de 4 parámetros que cada uno es un estimador para las tasas de largo, mediano y corto plazo también consta de taus este parámetro mide la velocidad con la cual los estimadores de tasas β_1 y β_2 se acercan a cero. Una vez que se haya seleccionado la tau se resuelven las betas al aplicar una regresión lineal.

La ecuación del modelo es la siguiente:

$$R(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) * \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{T}\right) \right] * \frac{T}{m} - \beta_2 * \left(\frac{m}{T}\right) * \exp\left(\frac{-m}{T}\right)$$

Para el proveedor de precios Valmer es necesario hacer un ajuste al largo plazo con una expansión de Taylor para evitar los coletazos en la curva libre de riesgo para largo plazo, pero antes de esto hay que aplicar un modelo complementario que pueda captar el rango de formas que generalmente son vistas en las curvas de rendimiento, formas encorvada, monótonas y formas de "S" por lo que utilizan un modelo parsimonioso de la Curva de Interés Forward este modelo se llama la Extensión Svensson del Modelo Nelson Siegel, aumenta 2 parámetros que deben ser estimados β_3 y τ_2

También nos pudimos dar cuenta de todos los factores que intervienen en el cálculo de un precio a Mercado así como los diferentes modelos existentes para medir todos estos parámetros y reflejarlos en el cálculo de la tasa, para cada modelo hay diversos supuestos y los modelos no se restringen a solo esos, es un campo de estudio muy amplio en el que se continúa estudiando y proponiendo modelos cada vez más complejos pero más precisos que pueden describir con mayor precisión los movimientos del mercado.

La nueva práctica operativa de los reportos colateralizados es una nueva forma de tener garantizados los reportos para proteger a la parte reportada como al reportador, con esto nos dimos cuenta como en una manera operativa sencilla los proveedores de precios forman una parte esencial en el cálculo de la llamada de margen es decir de las garantías a recibir y a entregar.

Podemos identificar que la Actuaría es una carrera que es necesaria en el sector financiero ya que para poder comprender los modelos y crear nuevos; es necesario tener bases sólidas en matemáticas, finanzas, estadística, probabilidad, procesos estocásticos, cálculo estocástico, cálculo diferencial e integral, análisis numérico y algún lenguaje de computación para diseñar procesos que faciliten, eficienten y automaticen las cosas.

También vemos que el papel del actuario es fundamental en el análisis de mercado, simplemente para valorar cualquier instrumento ya que con la formación que tenemos solo necesitamos leer las definiciones, crear nuevas políticas; tener mucha creatividad y ser previsores de los riesgos a que estamos adversos, sobre todo a los riesgos financieros (mercado y crédito).

Otra función fundamental del actuario es asesorar en la toma de decisiones al comité que decide en donde invertir, la ventaja de esta carrera sobre las otras es que aparte de la matemáticas, tenemos nociones de la programación por lo que podemos automatizar cualquier proceso y hacer eficiente tanto el tiempo como el dinero.

Apéndice

Suma de una serie geométrica

Sea i un número real, tal que $|i| < 1$ y sea N cualquier número entero tal que $m \geq 1$

$$\sum_{m=0}^N \frac{C}{(1+i)^m} = \frac{C}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^N} \right]$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

Consideremos el límite de la secuencia $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = 1, 2, \dots$$

Notamos que la secuencia $\{a_n\}$ es estrictamente creciente¹³ en n .

Asociada con la secuencia $\{a_n\}$ esta la secuencia $\{b_n\}$ definida por:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

Es claro mostrar que la secuencia $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente¹⁴ en n y $a_n < b_n$ para toda n desde que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Concluimos que las dos secuencias $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ convergen al mismo límite.

El límite es usualmente llamado la base del logaritmo natural y denotado por e . Esto es:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

El valor es un número irracional ($e=2.718281828459\dots$) es decir no puede ser representado por una fracción de dos enteros.

De las observaciones arriba mencionadas tenemos que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n = 1, 2, \dots$$

Lo cuál nos da una aproximación para e . Sin embargo, la convergencia de las secuencias a e son muy lentas.

Para cualquier número positivo $x > 0$, consideremos el límite de la secuencia:

¹³ Sea f una función, decimos que f estrictamente creciente si $\forall x_1, x_2 \in D_f$ tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$

¹⁴ Sea f una función, decimos que f estrictamente decreciente si $\forall x_1, x_2 \in D_f$ tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, n = 1, 2, \dots$$

Sea $N=n/x$, entonces:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N \right]^x$$

como la función $g(x)=y^x$ es continua en y para cada x , se tiene que

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \geq 0$$

donde $e^0=1$ por definición. La función e^x es llamada la función exponencial y juega un papel esencial en la teoría financiera continua.

De forma más general, la función exponencial esta definida por:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in \mathfrak{R}$$

El logaritmo $\log_a x$ es la función inversa de $y=a^x$. Así la función logarítmica $y=\log_a x$ es el espejo de la imagen de la función $y=a^x$ a través de la línea $y=x$. El numero positivo a es llamado la base del logaritmo. En particular cuando $a=e$, la función inversa de $y=e^x$ es llamada el logaritmo natural y se denota por $\log x$ o $\ln x$.

Modelos para dar precio a bonos de un factor.

Adjunto se explica como resolver una ecuación ordinaria de primer grado.

$$\text{Sea } \mu(t) = -e^{-\int_0^t r(s) ds}$$

$$\mu(t) \left[\frac{dB}{dt} - r(t)B \right] = -\mu(t)k(t)$$

La parte de la izquierda de la ecuación es la derivada de un producto de funciones, integrando por ambos lados y sustituyendo valores nos queda que:

$$-\int e^{-\int_0^t r(s) ds} \left[\frac{dB}{dt} - r(t)B \right] dt = -\int e^{-\int_0^t r(s) ds} k(t) dt$$

$$-e^{-\int_0^t r(s) ds} B(t) = -\int e^{-\int_0^t r(s) ds} k(t) dt + F$$

Despejando tenemos que:

$$B(t) = \frac{-F - \int_0^t e^{\int_0^s r(s) ds} k(t)}{-e^{\int_0^t r(s) ds}}$$

$$B(t) = \frac{F + \int_0^t e^{\int_0^s r(s) ds} k(t)}{e^{\int_0^t r(s) ds}}$$

Cuenta de Banco

Definimos a $B(t)$ a ser el valor de una cuenta de banco al tiempo $t > 0$. Asumimos que $B(0)=1$ y que envuelve de acuerdo a la siguiente ecuación diferencial:

$$dB(t) = r_t B(t) dt, B(0) = 1$$

donde r_t es una función positiva del tiempo. Como consecuencia,

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

La definición nos dice que invertir un monto unitario al tiempo 0 reditúa al tiempo t el valor de la ecuación y r_t es la tasa instantánea a la cual la cuenta de banco crece, esta tasa también es conocida como tasa spot instantánea un primer incremento ordenado en Δt da :

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t) \Delta t)$$

En cualquier intervalo pequeño, arbitrario de tiempo $[t, t + \Delta t)$

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} = r(t) \Delta t$$

Es claro ver que una cuenta de banco crece cada instante de tiempo t a una tasa $r(t)$.

Suponemos que el proceso r de la tasa de interés y B son determinísticas.

Sugerimos exactamente 1 unidad al tiempo T escribimos:

$$AB(T) = 1$$

La inversión inicial debe ser:

$$AB(t) = 1/B(T)$$

El valor a un tiempo t de el monto A invertido al momento inicial es:

$$AB(t) = B(t)/B(T)$$

Factor de descuento estocástico

El factor de descuento (estocástico) $D(t,T)$ entre dos instantes de tiempo t y T es el monto en el tiempo t que es "equivalente" a una unidad de pago actualizado en el tiempo T , y esta dada por:

$$D(t,T) = \frac{B(t)}{B(T)} = e\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

La naturaleza probabilística de r_t es importante desde que esta afecta la naturaleza del activo básico de nuestra discusión, la cuenta de banco numerario B . Suponemos que r es una función determinística del tiempo, por lo tanto ambos la cuenta de banco y los factores de descuento en cualquier fecha futura son funciones determinísticas del tiempo. Este factor es muy utilizado al querer valuar derivados aplicando el modelo Black and Scholes, tratando con productos derivados de tasas de interés, la principal variable son las tasas de interés por si mismas por eso es necesario contar con una parte determinística y comenzar a modelar la evolución de r a través de un proceso estocástico.

Glosario

Mercado de Valores

Es el sitio, no físico necesariamente, donde oferentes y demandantes de títulos valor, realizan transacciones de compra y venta con el objeto de obtener las mayores ganancias posibles.

Para ello, tanto los intermediarios entre los oferentes y demandantes de recursos, así como de los títulos valor deberán estar inscritos de acuerdo con el artículo 3 de la Ley del Mercado de Valores en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios (RNVI).

Mercados primario y secundarios

La operación mediante la cuál la entidad financiera deficitaria coloca por vez primera sus títulos con objeto de obtener capital se conoce como mercado primario. Una vez que dichos títulos han quedado en el mercado primario y son susceptibles de compra y venta entre los inversionistas surge el mercado secundario, cuyo objetivo es proporcionar liquidez a los tenedores de los títulos. Para que se lleven a cabo dichas operaciones, invariablemente, es necesario realizarlas por medio de una institución financiera (intermediación).

Valores

Las actividades de financiamiento se formalizan mediante documentos denominados títulos valor y son emitidos por entidades económicas que se conocen como emisoras, las cuales pueden ser públicas o privadas.

Emisores

Son entidades o empresas que buscan allegarse fondos para destinarlos a proyectos de desarrollo y expansión. Para tal efecto ofrecen al público inversionista, en el ámbito de la BMV y por medio de los intermediarios bursátiles, valores como acciones, obligaciones y títulos de deuda.

Inversionistas

Son personas físicas o morales nacionales y extranjeras, que mediante una casa de bolsa colocan sus recursos a cambio de valores, para obtener rendimientos o diversificar sus inversiones. En los mercados bursátiles del mundo destaca la participación de los llamados inversionistas institucionales, representados por sociedades de inversión, fondos de pensiones y otras entidades con alta capacidad de inversión y amplio conocimiento del mercado y sus implicaciones.

Reporto: Operación en virtud de la cual, el reportador adquiere por una suma de dinero la propiedad de títulos de crédito, quien se obliga a transferir al reportado la propiedad de otros tantos títulos con la misma clave de emisión en el plazo convenido y contra el reembolso del mismo precio más un premio, que queda en beneficio del reportador, salvo pacto en contrario.

Títulos: cualquier valor de deuda con mercado secundario excepto obligaciones subordinadas y títulos estructurados.

Títulos bancarios: valores de deuda con mercado secundario inscritos en el RNV emitidos, aceptados, avalados o garantizados por Instituciones de Crédito, excepto: obligaciones u otros títulos subordinados y títulos estructurados.

Títulos estructurados: Títulos que no sean valores gubernamentales y cuyo rendimiento se determina en función a las variaciones observadas en los precios de activos financieros o de operaciones financieras conocidas como derivadas sobre activos financieros.

Títulos para operaciones de Arbitraje Internacional: Títulos inscritos en el RNV que, conforme a las disposiciones que emita la CNBV, sean objeto de operaciones conocidas como de arbitraje internacional.

Valores extranjeros: a los valores de deuda con mercado secundario excepto obligaciones subordinadas, otros títulos subordinados y títulos estructurados denominados en divisas que sean emitidos, aceptados, avalados o garantizados por organismos financieros internacionales, Bancos Centrales de los países de referencia distintos a México, gobiernos de dichos países y entidades financieras del exterior, tales títulos deberán estar calificados por al menos dos agencias calificadoras de reconocido prestigio internacional y estar inscritos, autorizados o regulados para su venta al público en general, por las Comisiones de Valores u organismos equivalentes de los países de referencia.

Valores gubernamentales: a los valores inscritos en el RNV emitidos o avalados por el Gobierno Federal de los Estados Unidos Mexicanos, excepto: i) los Certificados de la Tesorería de la Federación emitidos a amparo de programas de reestructuración de créditos en unidades de inversión (cetes especiales), ii) los instrumentos de pago emitidos por el Fondo Bancario de Protección al Ahorro derivados del denominado "Programa de Capitalización y Compra de Cartera", iii) los suscritos por el Instituto de Protección al Ahorro Bancario que, en su caso, sustituyan a los valores mencionados en el inciso ii) anterior, así como iv) cualquier otro que no sea negociable o no tenga mercado secundario.

Arbitraje: Obtener beneficio de una operación, de compra venta por lo general, sin invertir nada.

Hedging: Técnica para reducir el riesgo financiero que afecta tanto al curso de operaciones de negocio normales como a aquellas asociadas con inversiones.

Bibliografía

Bond Markets, Analysis and Strategies

Frank J. Fabozzi

1996 Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, NY 07458

Investment Science

David G. Luenberger

1998 Stanford University, Oxford University Press

Stochastic Processes with Applications to finance

Masaaki Kijima

Chapman & Hall /CRC

Mathematical Models of Financial Derivatives

Y.K. Kwork

1998 Springer Finance, Springer – Verlag Singapore Pte. Ltd

Interest Rate Models

Theory and Practice

Damiano Brigo, Fabio Mercurio

2001 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Printed in Germany

The mathematics of Financial Derivatives

A student Introduction

Paul Wilmott, Sam Howison, Jeff Dewynne

Cambridge University Press

First published 1995

Stochastic Calculus and Financial Applications

J Michael Steele

2001 Springer-Verlag New York ,Inc

Introducción al análisis de productos financieros derivados

Futuros, opciones, forwards, swaps

J. Rodríguez de Castro

Editorial: Limusa

The term structure of interest rates

Expectations and behavior Patterns

Borton Gorden Malkiel

Princeton University Pres

Princeton New Jersey, 1966

Finance in Continuous Time, A Primer
David C Shimko
University of Southern California
Kolb Publishing Company 1992

Pricing Derivatives Securities
An Interactive Dynamic Environment with Maple V and Matlab
Prisman

Investment
Zvi Bodie
Alex Kane
Alen J Marcus
Irwin
Mc Graw Hill

Modeling Financial Derivatives with Mathematics
William Shaw
Cambridge University Press

Derivatives
The theory and practice of financial engineering
Paul Wilmott
John Wiley & Sons
Printed April 1999

Mathematics of Financial Markets
Robert J. Elliott and P. Ekkehard Kopp
1999 Springer-Verlag New York ,Inc

Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance
Damien Lambertson and B Lapeyre
Chapman Hall/CRC

Modern Investment Theory
Robert A. Haugen
Prentice Hall, Upper
Saddle River N.Y. 07458

Bolsa de Valores y mercados Financieros
Carlos Eduardo Herrera Avendaño
Gasca SICCO 2003