UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPUESTA DE UN MODELO DE PROBABILIDAD DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA, COMO UNA APROXIMACIÓN A LA FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA DEL SEGURO DE VIDA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

FREDDY NOLASCO OCHOA

DIRECTOR DE TESIS: ACT. OSCAR ARANDA MARTÍNEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Propuesta de un modelo de probabilidad de variable aleatoria continua, como una aproximación a la función de probabilidad de variable aleatoria discreta del seguro de vida."

realizado por Freddy Nolasco Ochoa

con número de cuenta 09806357-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Act. Oscar Aranda Martínez

Propietario Act. Felipe Zamora Ramos

Propietario Act. José Guadalupe Vázquez Vázquez

Suplente Act. Jorge Luis Silva Haro

Suplente Act. Enrique Maturano Rodríguez

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradecimientos

A Oscar, quien me ha brindado su
apoyo y conocimiento.

A mis sinodales por su apreciable
ayuda.

A Carolina, por ser una persona admirable y un ejemplo a seguir, le
agradezco cada momento que ha pasado a mi lado.

A mi familia que siempre ha estado
conmigo en todo momento.

A mis invaluables amigos que
compartieron conmigo esta carrera.

Propuesta de un modelo de probabilidad de variable aleatoria continua, como una aproximación a la función de probabilidad de variable aleatoria discreta del seguro de vida

Índice

Capítulo 3 Nota Técnica

Conclusiones

Anexo 1 Funciones alternativas para aproximar a la función $F(x)$

Introducción

Actualmente el desarrollo, justificación y creación de tarifas para el sector asegurador en el ramo de vida, está basado y fundamentado en el estudio del comportamiento de la mortalidad mexicana, en donde se han hecho esfuerzos significativos en los últimos años. Como ejemplo está la recopilación de información del sector asegurador mexicano por parte de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) para la creación de tablas de mortalidad como CNSF 2000 I, que hoy en día son el parámetro de referencia que tienen las compañías aseguradoras para calcular la Reserva Matemática e identificar la solvencia o insolvencia que pueden tener, considerando el cobro que realizan por los productos que venden.

Cabe destacar el esfuerzo realizado en el gremio de la práctica actuarial, en la creación de estándares actuariales para el cálculo de tarifas y de la Reserva Matemática del seguro de vida, desarrollados por el Comité de Estándares de Práctica Actuarial de la Asociación Mexicana de Actuarios, A. C., el cual tiene como uno de sus propósitos "establecer los elementos y criterios que deben ser considerados en el proceso del cálculo actuarial de la prima de tarifa para los contratos de seguro de largo plazo..."[1].

Además de estos referentes, cada compañía utiliza la experiencia comercial que ha recopilado y la vierte en propuestas de tarificación y nuevos productos, lo cual enriquece cada vez más la teoría y procedimientos actuariales de los seguros de vida.

Ahora bien, es de considerarse que la teoría del seguro de vida está basada en la probabilidad, sus propiedades y aplicaciones acordes a la herramienta disponible, en este caso un modelo de mortalidad dado de forma discreta y por ende modelos probabilísticos de tarifas y cálculo de reservas de la misma índole, cuyo dominio es la edad alcanzada por las personas, lo cual hace la aparición de supuestos y ajustes al momento de realizar el cálculo de probabilidades para elaborar una tarifa o bien hacer el cálculo de la reserva matemática.

Por esto el presente trabajo es realizado con el objetivo de construir un modelo de probabilidad de variable aleatoria continua, que describa el comportamiento del riesgo de la mortalidad en el caso de la población mexicana y sirva de base para la elaboración de modelos de tarificación y cálculo de reservas de forma continua, lo cual nos permitirá conocer sin necesidad de aproximaciones, el monto de la obligación futura de una compañía aseguradora a determinada fecha de valuación, así como la tarifa a cobrar por la cobertura de un producto del seguro de vida, considerando que la indemnización que se realizará a los beneficiarios será de forma inmediata y no al final del año como comúnmente se supone.

Todo esto tomando en cuenta los estándares de práctica actuarial y la reglamentación actual que exige la CNSF, proponiendo así una Nota Técnica para un producto del seguro de vida como lo es, un plan temporal con vigencia de 15 años.

El presente trabajo esta estructurado de la siguiente forma:

Un primer capítulo en donde se desarrollan los fundamentos teóricos del seguro de vida para construir modelos de cobro y reserva de un plan de seguro temporal a n años, considerando recargos como margen de seguridad para solventar las posibles pérdidas por variabilidad del fenómeno de indemnización.

Un segundo capítulo en donde se da una propuesta de modelos probabilísticos continuos para la aproximación de los modelos teóricos vistos en el primer capítulo, estudiando el procedimiento para obtenerlos y su semejanza respecto a los obtenidos a partir de la tabla CNSF 2000 I.

Un último capítulo en donde se aplican nuestros resultados en una propuesta de Nota Técnica basada en el desarrollo de los primeros dos capítulos, haciendo un comparativo de la valuación de tarifas y reservas para nuestro plan de seguro, considerando los diferentes modelos planteados.

Además de esto, se anexa un comparativo de los modelos expuestos y damos otros modelos que de igual forma pueden ser utilizados para la aplicación del cálculo de tarifas y reservas técnicas del seguro de vida bajo la metodología expuesta en los primeros capítulos.

Capítulo 1

Modelo Actuarial basado en la variable aleatoria

del tiempo futuro de vida

1.1 Introducción

En este capítulo se desarrollarán los modelos de tarificación y cálculo de la reserva matemática para un seguro de vida cuya temporalidad es de n años, para el cual es necesario definir 2 variables aleatorias fundamentales: la primera es la edad al fallecimiento de un recién nacido y la segunda es el tiempo futuro de vida de una persona de edad x, de las cuales se desprenderán las probabilidades de mortalidad de los individuos y algunas otras variables más complejas como la anualidad contingente, el valor presente aleatorio, el pago nivelado, entre otras.

La combinación de estas variables aleatorias dará como resultado modelos probabilísticos continuos de cobro, reserva y recargos incluidos en los modelos para asegurar que con una determinada probabilidad α sea solventado el total de la obligación contraída por la compañía aseguradora con los Asegurados.

1.2 Función de Sobrevivencia y Tiempo Transcurrido hasta el Fallecimiento

Como parte inicial y fundamental para construir el modelo de cobro para nuestro seguro temporal a n años, se definirá en primera instancia a X como la variable aleatoria de tipo continuo que representa la edad al fallecimiento de una persona recién nacida, edad cero, y $F(x)$ como representación de la función de acumulación probabilística de dicha variable, es decir:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \quad \forall\ x \geq 0$$

que se interpreta como la probabilidad de que un recién nacido fallezca a la edad contenida en el intervalo $[0, x]$ o bien no alcance la edad x, haciendo la observación de que definiremos a $F(0)$ como cero por conveniencia ya que en la realidad el fenómeno de mortalidad en edades tempranas presenta una probabilidad de que un recién naciendo fallezca mayor a cero. Notemos además que el rango de esta variable aleatoria son los reales positivos unión el cero.

Definiremos además a su complemento como la Función de Sobrevivencia, denotándola como:

$$S(x) = 1 - \Pr(X \leq x) = 1 - F(x)$$

cuyo significado es la probabilidad de que un recién nacido no fallezca en el intervalo $[0, x]$ o bien, que alcance la edad x.

A partir de esta variable aleatoria podremos hacer cálculos e inferir sobre el momento en que es más probable que fallezca un recién nacido.

Por ejemplo, la probabilidad de que un recién nacido fallezca entre las edades t_0 y $t_0 + t_1$, con t_0 y t_1 números positivos, es:

$$\begin{aligned}
\Pr(t_0 \leq X \leq t_0 + t_1) &= F(t_0 + t_1) - F(t_0) \\
&= 1 - S(t_0 + t_1) - [1 - S(t_0)] \\
&= S(t_0) - S(t_0 + t_1)
\end{aligned}$$

O bien, si dado que ha llegado a cierta edad t_0 sobreviva un número de años más, hasta que alcance la edad t_1.

$$\begin{aligned}
\Pr(X \leq t_1 \mid X > t_0) &= \frac{\Pr(X \leq t_1, X > t_0)}{\Pr(X > t_0)} \\
&= \frac{\Pr(t_0 < X \leq t_1)}{S(t_0)} \\
&= \frac{F(t_1) - F(t_0)}{S(t_0)} \\
&= \frac{S(t_0) - S(t_1)}{S(t_0)} \\
&= 1 - \frac{S(t_1)}{S(t_0)}
\end{aligned}$$

con $t_1 > t_0 \geq 0$

De igual forma nos interesaría saber cuánto es el tiempo que le resta de vida a una persona de edad x, esto se puede formular definiendo la variable aleatoria positiva $T(x) = X - x$, como el tiempo futuro de vida de la persona de edad x, ocupando la siguiente notación para señalar:

$$\Pr(T(x) \le t) = {}_t q_x \quad \forall\, t \ge 0 \;\text{ y }\; 1 - \Pr(T(x) \le t) = {}_t P_x \quad \forall\, t \ge 0$$

Donde ${}_t q_x$ significa la probabilidad de que una persona de edad x muera entre las edades x y $x+t$ y ${}_t P_x$ significa la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+t$.

Notemos que si $x = 0$ entonces $T(x) = X$ de donde a ${}_t P_x$ podemos ponerla en términos de la función de sobrevivencia definida anteriormente, es decir:

$${}_x P_0 = S(x) \quad x \ge 0$$

En general, a partir de la definición de probabilidad condicional, se deduce que ${}_t P_x \quad \forall\, x \ge 0$ y $t \ge 0$ se puede obtener mediante $S(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
{}_t P_x &= \Pr(t < T(x)) \\
&= \Pr(t < X - x \mid X > x) \\
&= \Pr(x + t < X \mid X > x) \\
&= \frac{\Pr(x + t < X)}{\Pr(x < X)} \\
&= \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{S(x+t)}{S(x)}
\end{aligned}$$

o bien, si $t \in N$ mediante una manipulación algebraica podremos verlo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
{}_t P_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{S(x+1)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+2)}{S(x+1)} \cdot \frac{S(x+3)}{S(x+2)} \cdots \frac{S(x+(t-2))}{S(x+(t-3))} \cdot \frac{S(x+(t-1))}{S(x+(t-2))} \cdot \frac{S(x+t)}{S(x+(t-1))} \\
&= P_x \cdot P_{x+1} \cdot P_{x+2} \cdot \cdots \cdot P_{x+(t-3)} \cdot P_{x+(t-2)} \cdot P_{x+(t-1)}
\end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a edad $x+t$ la podemos calcular como el cociente entre las probabilidades de que una persona recién nacida llegue con vida a edad $x+t$ y la probabilidad de que llegue a edad x o bien, como el producto de las probabilidades de que la persona de edad x llegue con vida al siguiente año y posteriormente al siguiente hasta llegar a edad $x+t$, con la observación del uso de la notación de P_x para denotar la probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a edad $x+1$.

El objeto de utilizar a $S(x)$ o bien $F(x)$ como punto de referencia en el cálculo de probabilidades de muerte y sobrevivencia, es porque al deducir de la Tabla de Mortalidad CNSF 2000 I la función de Sobrevivencia, $S(x)$, y edad al fallecimiento de un recién nacido, $F(x)$, contenida implícitamente en ella, tendremos la herramienta necesaria para desarrollar cualquier tipo de probabilidades sobre el tiempo futuro de vida de las personas.

Otro elemento indispensable y que será muy útil definir, es la fuerza de mortalidad (tasa instantánea de mortalidad) que representa la rapidez de cambio en la mortalidad que recae sobre un individuo de edad x, es decir:

$$\Pr[x < X < x+\Delta x \mid X > x] = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \cong \frac{F'(x)\Delta x}{S(x)}$$

Así la función muestra para cada edad x, el valor de la función de densidad condicional de X de manera instantánea dada la sobrevivencia a dicha edad. La definiremos como μ_x, de modo que:

$$\mu_x = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

ya que

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(1-S(x)) = -\frac{d}{dx}S(x) = -S'(x)$$

A partir de lo anterior es posible encontrar una expresión para la función de densidad de $T(x)$, para lo cual definamos como $G(t)$ y $g(t)$ a las funciones de acumulación y de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria.

De este modo ocupando la relación que existe entre una función de acumulación y densidad probabilística, tendremos que:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{d}{dt} G(t) \\
&= \frac{d}{dt} {}_t q_x \\
&= \frac{d}{dt}\left[1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}\right] \\
&= \frac{-S'(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{S(x+t)}{S(x)} \cdot \left[\frac{-S'(x+t)}{S(x+t)}\right] \\
&= {}_t P_x \mu_{x+t}
\end{aligned}
$$

Esta expresión será fundamental para el cálculo de la tarifa del plan del seguro que se expone más adelante, por la manera en que se definirá el valor presente de un pago en el tiempo dentro de la vigencia del seguro, dada la muerte del Asegurado.

Además de esta herramienta, es conveniente definir la esperanza de vida de un individuo de edad x, la cual se definirá como el valor esperado de la variable aleatoria tiempo futuro de vida, $T(x)$, es decir:

$$
E[T(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} t \, {}_t P_x \mu_{x+t} \, dt
$$

denotándola como $\dot{e}_x$, nótese que la integral sólo esta definida para valores positivos de t de modo que se simplifica a:

$$
E[T(x)] = \int_{0}^{\infty} t \, {}_t P_x \mu_{x+t} \, dt
$$

Una vez definidos estos conceptos, se procederá a plantear un modelo de cobro para nuestro plan de seguro de vida temporal a n años.

1.3 Prima Neta Única de un seguro de vida temporal a n años

Este plan de seguro de vida ofrece como cobertura, el pago de una Suma Asegurada $(S.A.)$ constante en caso de fallecimiento del Asegurado durante los próximos n años a su contratación. De modo que tanto el monto a pagar por la compañía aseguradora y el lapso de tiempo de cobertura donde se pueda dar el fallecimiento del Asegurado son ciertos y predefinidos, dejando como fenómeno aleatorio tan solo el momento del pago de la $S.A.$, que dependerá de la fecha de muerte del Asegurado, es decir, la variable aleatoria $T(x)$ tiempo futuro de vida del Asegurado definida con anterioridad.

Bajo esta primicia definiremos una función de indemnización b_t, $S.A.$ contratada, y una función de descuento v_t, descuento del interés desde el momento de pago hasta el tiempo de expedición de la póliza donde se realizará la valuación del costo del seguro, donde el subíndice t es la amplitud del intervalo desde que se expide el seguro hasta el punto en el tiempo donde se da el fallecimiento del Asegurado, es decir, el tiempo futuro de vida $T(x)$, cabe mencionar que la tasa de interés involucrada en el modelo se toma como una variable cierta, constante y predefinida.

A partir de la función de indemnización y de descuento, definiremos a su producto como la función valor presente, $z_t = b_t v_t$, a la fecha de inicio de vigencia del seguro, que de igual modo dependerá de la variable $T(x)$, así:

$$z_{T(x)} = b_{T(x)} v_{T(x)}$$

donde $b_{T(x)}$ y $v_{T(x)}$ se definen de la siguiente manera:

$$b_{T(x)} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

$$v_{T(x)} = (1+i)^{-t} = V^t \quad t \geq 0$$

Con i Tasa de Interés técnico constante.

De este modo queda definido $z_{T(x)}$ como:

$$z_{T(x)} = \begin{cases} v_T & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

Con esto, la PNU del seguro temporal a n años con $S.A.$ igual a una unidad monetaria, estará dado por el valor esperado de la variable aleatoria $z_{T(x)}$ y definiremos el símbolo que lo representará como $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ de modo que:

$$\begin{aligned} \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= E[z_{T(x)}] \\ &= \int_0^\infty z_{T(x)}\ g(t)\ dt \\ &= \int_0^n V^t\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}\ dt \end{aligned}$$

Además de esto, el cálculo del segundo momento alrededor de cero será muy útil para calcular la varianza de $z_{T(x)}$ y por tanto, de la desviación estándar que esta definida como la raíz cuadrada de la varianza, lo que nos permitirá incluir un recargo a la PNU para contemplar la variabilidad que existe en el fenómeno aleatorio de indemnización $z_{T(x)}$, calculando la probabilidad de que con un nivel de confianza α el monto a cobrar por el seguro sea suficiente para poder solventar la obligación contraída con el Asegurado.

Así pues, por definición, el segundo momento es:

$$\begin{aligned} {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= E[z^2_{T(x)}] \\ &= \int_0^\infty z^2_{T(x)}\ g(t)\ dt \\ &= \int_0^n V^{2t}\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}\ dt \end{aligned}$$

y la Varianza y Desviación Estándar se determinan como:

$$\operatorname{Var}(z_{T(x)}) = {}^2\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} - (\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})^2$$

$$\sigma(z_{T(x)}) = \sqrt{\operatorname{Var}(z_{T(x)})}$$

Con estos elementos podemos encontrar la PNU de un seguro temporal a n años, donde la S.A. o función de indemnización es distinta a una unidad monetaria basándonos en las propiedades de la esperanza y varianza de una variable aleatoria, es decir, tal como definimos la cobertura de nuestro plan de seguros, la S.A. es una cantidad constante y positiva, de modo que la función de indemnización quedara definida como:

$$b_{T(x)} = \begin{cases} S.A. & \text{si } t \le n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Quedando la función de descuento definida de la misma manera, es decir:

$$v_{T(x)} = V^t \quad t \ge 0$$

de este modo queda definido $z_{T(x)}$ como:

$$z_{T(x)} = \begin{cases} S.A.\ v_T & t \le n \\ 0 & t > n \end{cases}$$

Con lo que su valor esperado sería equivalente a multiplicar la S.A. por un plan de seguro donde la S.A. es una unidad monetaria, es decir:

$$\begin{aligned} E[z_{T(x)}] &= \int_0^\infty z_{T(x)}\, g(t)\, dt \\ &= \int_0^n S.A.\, V^t\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= S.A. \int_0^n V^t\, {}_tP_x\, \mu_{x+t}\, dt \\ &= S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

de la misma forma, el segundo momento se puede calcular como:

$$
\begin{aligned}
E[z_{T(x)}^{2}] &= \int_{0}^{\infty} z_{T(x)}^{2}\ g(t)\ dt \\
&= \int_{0}^{n} S.A.^{2} V^{2t}\ {}_{t}P_{x}\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= S.A.^{2} \int_{0}^{n} V^{2t}\ {}_{t}P_{x}\ \mu_{x+t}\ dt \\
&= S.A.^{2} \cdot {}^{2}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1}
\end{aligned}
$$

De este modo, la varianza de este modelo quedaría expresada en términos de la varianza de un plan de seguros con una unidad monetaria como indemnización.

$$
\begin{aligned}
Var(z_{T(x)}) &= S.A.^{2} \cdot {}^{2}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} - (S.A. \cdot \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1})^{2} \\
&= S.A.^{2} ({}^{2}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1} - (\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{1})^{2})
\end{aligned}
$$

Ahora bien, ya podemos obtener el cálculo de cuánto costará este plan de seguros temporal a n años con una $S.A.$ dada, pero también necesitamos saber como es que pagará el Asegurado este seguro, para lo cual definiremos el concepto de anualidad contingente para amortizar el costo del seguro dentro de cierto período de tiempo definido por el Asegurado, considerando que al momento de su muerte dejará de pagar la obligación que le corresponde.

1.4 Anualidad contingente continua temporal a n años

Una anualidad contingente continua temporal a n años, representa el valor presente de un conjunto de pagos de monto M realizados dentro de un período de igual magnitud, bajo la condición de que la persona que recibe o da dicho pago, se encuentre con vida en ese momento.

En este caso, al igual que en el seguro temporal definido anteriormente, los pagos y el lapso de tiempo en donde se puede dar el fallecimiento o sobrevivencia son ciertos y tan solo la sobrevivencia de la persona permanece como fenómeno aleatorio a estudiar, por lo cual nuestra anualidad estará definida en términos de la variable aleatoria $T(x)$ de la siguiente manera:

$$\text{Sea } Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & 0 \le t < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & t \ge n \end{cases}$$

donde $\bar{a}_{\overline{t}|}$ es una anualidad cierta continua temporal t años, del pago de un monto de una unidad monetaria. De modo que la anualidad contingente temporal a n años estará definida como el valor esperado de la variable aleatoria Y, es decir:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\ &= \int_0^{\infty} Yg(t)dt \\ &= \int_0^{n} \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\int_n^{\infty}\ {}_tP_x\ \mu_{x+t} \\ &= \int_0^{n} \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ \Pr(T(x) > n)] \\ &= \int_0^{n} \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}dt + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_nP_x \end{aligned}$$

con $\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t V^t dt = \dfrac{1-V^t}{\delta}$ y δ igual a la tasa instantánea de interés [2].

Cabe decir, que en caso de que el monto a pagar sea distinto a una unidad monetaria, las propiedades de valor esperado son útiles para conseguir el resultado, ya que por ejemplo, si el monto es M la variable aleatoria se definiría como:

$$\breve{Y} = \begin{cases} M \cdot \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & 0 \le t < n \\ M \cdot \bar{a}_{\overline{n}|} & t \ge n \end{cases}$$

que es equivalente a decir que $\breve{Y} = MY$ con lo que el valor esperado sería:

$$E[\breve{Y}] = E[MY] = M \cdot E[Y] = M \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

Una vez definido este concepto de anualidad contingente, podemos señalar que el monto a pagar por el Asegurado sería la amortización de la PNU sobre algún intervalo de tiempo menor o igual a la vigencia del seguro, a lo que llamaremos: Prima Neta Nivelada.

1.5 Cálculo de la Prima Neta Nivelada (PNN)

Ésta se obtendrá de la consideración de amortizar la PNU del seguro temporal a n años durante m años, según fije el Asegurado, donde $m \in (0, n]$, es decir, se obtendrá de la igualdad que existe al inicio de vigencia del seguro donde la obligación de la compañía es igual a la obligación que tendrá el Asegurado.

$$\left\{\begin{matrix} \text{Obligacion} \\ \text{de la} \\ \text{Compañía} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{Obligacion} \\ \text{del} \\ \text{Asegurado} \end{matrix}\right\}$$

Primeramente, definamos la variable aleatoria $l(T(x))$ como el valor presente de la pérdida del asegurador si ocurre la muerte del Asegurado en el tiempo t, es decir:

$$l(T(x)) = z_{T(x)} - PNN \cdot Y$$

con

$$z_{T(x)} = \begin{cases} S.A.\ V^t & t \leq n \\ 0 & t > n \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & 0 \leq t < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} & t \geq m \end{cases} \qquad m \leq n$$

Y PNN como la Prima Neta Nivelada que pagará el Asegurado mientras esté con vida como requisito para hacerse acreedor a la cobertura del seguro contratado.

Ahora, como lo mencionamos al principio del apartado, la PNN se calcula bajo el principio de equivalencia que existe al inicio de la vigencia del seguro, donde la obligación de la compañía es igual a la obligación del Asegurado, es decir, al tiempo cero bajo el concepto de valor esperado de la variable aleatoria $l(T(x))$ tenemos que:

$$E[l(T(x))] = 0$$

Lo que implica la deducción de PNN como:

$$
\begin{aligned}
& 0 = E[z_{T(x)} - PNN \cdot Y] \\
\Leftrightarrow\ & 0 = E[z_{T(x)}] - E[PNN \cdot Y] \\
\Leftrightarrow\ & 0 = E[z_{T(x)}] - PNN \cdot E[Y] \\
\Leftrightarrow\ & PNN \cdot E[Y] = E[z_{T(x)}] \\
\Leftrightarrow\ & PNN = \frac{E[z_{T(x)}]}{E[Y]}
\end{aligned}
$$

con lo cual la PNN es:

$$PNN = \frac{S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} \text{ donde } m \in (0, n]$$

Recopilando los resultados, tenemos que la PNU es el costo en que incurre una compañía aseguradora por adoptar el riesgo de pagar una $S.A.$ en caso de la muerte de una persona que contrata un seguro temporal a n años y el cual lo pagará mediante la PNN durante un período determinado, m, siempre y cuando esté con vida.

1.6 Modelo actuarial para la determinación del Margen de Seguridad

Cabe señalar, que la PNU y PNN deben de ser suficientes para solventar las obligaciones de la compañía de seguros, garantizando en todo momento la solvencia de ésta, por lo cual, para tener una mayor certidumbre sobre el monto que debemos cobrar dado nuestro modelo, incluiremos un recargo a la obligación de la compañía para asegurar que con una determinada confianza tendremos la cantidad necesaria para hacer frente a las reclamaciones que tengamos.

A continuación se plantearán dos formas de recargar la PNU, de tal manera, que con una probabilidad de α aseguremos que lo cobrado será suficiente para cumplir con nuestra obligación.

La primera contempla una perspectiva individual del riesgo, es decir, el recargo está considerando la distribución de probabilidad del riesgo de un solo evento y la segunda, considera que existe toda una cartera de Asegurados y que el riesgo será absorbido por todos los integrantes de ésta.

1.6.1 Recargo considerando de forma individual el riesgo asumido

Para efecto de evaluar si la cantidad cobrada es suficiente para solventar la obligación contraída con el Asegurado, podemos utilizar la herramienta probabilística para encontrar cuánto es lo que deberíamos estar cobrando de más si quisiéramos que con una confianza $\alpha \in [0,1]$ alcancemos a cubrir nuestra obligación, es decir, buscamos una cantidad h tal que:

$$\mathbf{Pr}(Z_{T(x)} \leq S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + h) = \alpha$$

O bien, si observamos que la variable aleatoria que representa el valor presente de un pago en el tiempo está en función del tiempo futuro de la persona de edad x, $T(x)$, podemos calcular la probabilidad anterior como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}(Z_{T(x)} \leq S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + h) &= \mathbf{Pr}(S.A. \cdot V^{T(x)} \leq S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + h) \\
&= \mathbf{Pr}\left(V^{T(x)} \leq \frac{S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + h}{S.A.}\right) \\
&= \mathbf{Pr}\left(\mathbf{ln}\, V^{T(x)} \leq \mathbf{ln}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.}\right)\right) \\
&= \mathbf{Pr}\left(T(x)\, \mathbf{ln}\, V \leq \mathbf{ln}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.}\right)\right) \\
&= \mathbf{Pr}\left(T(x) \geq \frac{\mathbf{ln}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.}\right)}{\mathbf{ln}\, V}\right)
\end{aligned}$$

con $T(x) \in [0, n]$[3]

Que es equivalente a encontrar en términos de la función de acumulación de $T(x)$ la probabilidad que buscamos, es decir:

$$\mathbf{Pr}(T(x) \geq \frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V}) = 1 - \mathbf{Pr}(T(x) \leq \frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V})$$
$$= 1 - G(\frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V})$$

Lo cual reduce nuestro cálculo a buscar una cantidad $\phi(t)$ cuantil que acumula $1-\alpha$ de probabilidad de la función de acumulación probabilística de $T(x)$, es decir, sí:

$$\alpha = 1 - G(\frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V})$$
$$\Leftrightarrow G(\frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V}) = 1 - \alpha$$

tenemos que encontrar una cantidad tal que:

$$G(\phi(t)) = 1 - \alpha$$

o bien según lo definimos

$${}_{\phi(t)}q_x = 1 - \alpha$$

de este modo tendremos la igualdad siguiente:

$$\phi(t) = \frac{\mathbf{ln}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|} + \frac{h}{S.A.})}{\mathbf{ln}\,V}$$

de la cual despejaremos el monto h como sigue:

$$\phi(t) = \frac{\ln(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})}{\ln V}$$

$$\Leftrightarrow \phi(t) \cdot \ln V = \ln(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.})$$

$$\Leftrightarrow e^{\phi(t) \cdot \ln V} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{h}{S.A.}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln V^{\phi(t)}} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{h}{S.A.}$$

$$\Leftrightarrow (V^{\phi(t)} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \cdot S.A. = h$$

Por lo tanto, la cantidad extra con lo que debemos recargar nuestra PNU tal que con una confianza α podamos solventar nuestras obligaciones es:

$$h = (V^{\phi(t)} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \cdot S.A.$$

La cual podemos representarla en términos de desviaciones estándar de nuestro modelo haciendo la equivalencia:

$$h = c \cdot \sigma(z_{T(x)})$$

Con lo que tenemos que el número de veces, c, en términos de desviaciones estándar de nuestro modelo que debemos recargar la PNU es:

$$c = \frac{(V^{\phi(t)} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) \cdot S.A.}{\sigma(z_{T(x)})} = \frac{V^{\phi(t)} \cdot S.A. - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot S.A.}{\sigma(z_{T(x)})}$$

Lo cual resulta muy interesante, ya que c, está en términos de la PNU del Plan de Seguro, la Desviación Estándar del modelo y el Monto traído a valor presente $\phi(t)$ años.

Así al sumar la cantidad h (margen de seguridad) a la PNU el resultado conseguido es:

$$
\begin{aligned}
PNU^{Rec} &= PNU + h \\
&= \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot S.A. + V^{\phi(t)} \cdot S.A. - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} \cdot S.A. \\
&= V^{\phi(t)} \cdot S.A.
\end{aligned}
$$

Lo que indica que si queremos cobrar la cantidad suficiente para cubrir nuestra obligación, cobremos el valor presente de la $S.A.$ considerando que el individuo fallecerá en un tiempo $\phi(t)$, donde $\phi(t)$ representa el tiempo futuro que tendrá la persona de edad x con una confianza, o bien, probabilidad de α.

1.6.2 Recargo considerando la existencia de una cartera de Asegurados

Este tipo de recargo va más acorde con la realidad de una compañía aseguradora la cual vende en gran cantidad pólizas de planes de seguros que tienen las mismas coberturas, o bien, son similares en cuanto a riesgo se refiere, pero cada individuo de la cartera es distinto e independiente de los demás.

Para determinar este recargo, usaremos el *Teorema de Límite Central* el cual se enuncia a continuación:

Teorema de Límite Central

"Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots$ variables aleatorias independientes que están distribuidas idénticamente, es decir, todas tienen la misma función de probabilidad en el caso discreto o función de densidad en el caso continuo y tienen media μ y varianza σ^2 finitas.

Entonces si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - n_\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\,du$$

Es decir, la variables aleatorias $\frac{S_n - n_\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, que es la variable tipificada a S_n, es normal asintóticamente con media 0 y varianza 1, normal estándar.

El teorema también es verdadero bajo condiciones más generales. Por ejemplo, se cumple cuando $X_1, X_2, X_3, \ldots$ son variables aleatorias independientes con la misma media y la misma varianza pero no necesariamente distribuidas idénticamente” [4]

Supongamos que tenemos una cartera de n Asegurados donde cada uno es independiente de los demás y cumplen con tener la misma esperanza de vida y variación respecto a ésta.

Definamos a $z_{T(x_i)} = b_{T(x_i)} v^{T(x_i)}$ como la variable aleatoria que representa el valor presente de un pago en el tiempo determinado por la variable $T(x_i)$, tiempo futuro de vida de la persona de edad x_i, con $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, notemos que esta variable aleatoria denota el riesgo asumido por la compañía aseguradora por el Asegurado de edad x_i que pertenece a la cartera.

De este modo el riesgo total de la cartera esta definido como:

$$S_n = z_{T(x_1)} + z_{T(x_2)} + \cdots + z_{T(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

cuyo valor esperado es:

$$\begin{aligned} E[S_n] &= E[z_{T(x_1)} + z_{T(x_2)} + \cdots + z_{T(x_n)}] \\ &= E[z_{T(x_1)}] + E[z_{T(x_2)}] + \cdots + E[z_{T(x_n)}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[z_{T(x_i)}] \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{T(x_i)} \bar{A}^{1}_{x_i:\overline{n'}|} \end{aligned}$$

Es decir, ésta es la cantidad de dinero que la compañía aseguradora debe tener para solventar su obligación con esta cartera de clientes.

Además podemos ver que la varianza de la variable aleatoria de tipo continuo S_n esta dada por:

$$
\begin{aligned}
Var(S_n) &= Var(z_{T(x_1)} + z_{T(x_2)} + \cdots + z_{T(x_n)}) \\
&= V[z_{T(x_1)}] + V[z_{T(x_2)}] + \cdots + V[z_{T(x_n)}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} V[z_{T(x_i)}] \\
&= \sum_{i=1}^{n} b^2_{T(x_i)} [\,{}^2\bar{A}^1_{x_i:\overline{n'}|} - (\bar{A}^1_{x_i:\overline{n'}|})^2\,]
\end{aligned}
$$

Ahora bien, desearíamos tener una cantidad de recursos, M, tal que el valor de la variable aleatoria S_n, que es el riesgo total de la cartera, no lo sobrepase con una probabilidad de α, es decir, buscamos una un monto M tal que:

$$P(S_n \le M) = \alpha$$

Nótese que S_n es una suma de variables aleatorias y que no es sencillo de conseguir su función de probabilidad, por lo cual, haremos uso del Teorema del Límite Central, el cual nos permite calcular de forma aproximada este tipo de probabilidad.

Cabe decir, que tal como se plantea nuestro problema, cumplimos con las hipótesis que nos exige este teorema, es decir, el tiempo de vida de cada Asegurado es independiente del tiempo de vida de los demás, su distribución probabilística aunque puede ser distinta, cumple con tener la misma media y varianza y la variable definida como el riesgo total asumido por la compañía de seguros es una suma de variables aleatorias.

Con lo cual podemos encontrar este monto M como sigue:

$$P(S_n \le M) = P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \le \frac{M - E[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\mathbf{Z} \le \frac{M - E[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}}\right) \\
&= P(\mathbf{Z} \le \mathbf{Z}^{\alpha}) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{Z}$ es una variable aleatoria que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 según el Teorema del Límite Central y $\mathbf{Z}^{\alpha}$ es el cuantil que acumula α de probabilidad de la variable $\mathbf{Z}$.

Con esto podemos encontrar el valor de M como sigue.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}^{\alpha} &= \frac{\mathrm{M}-\mathrm{E}[\mathrm{S}_n]}{\sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}} \\
\Leftrightarrow \mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)} &= \mathrm{M}-\mathrm{E}[\mathrm{S}_n] \\
\Leftrightarrow \mathrm{M} &= \mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)} + \mathrm{E}[\mathrm{S}_n]
\end{aligned}
$$

Así el recargo al cobro que se debe hacer para que con una probabilidad α se solvente el total de las obligaciones de la cartera de Asegurados es:

$$
\mathrm{Recargo} = \mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}
$$

Por lo tanto sí repartimos de manera uniforme este recargo entre todos los Asegurados tendremos que a cada uno le corresponde un pago de:

$$
\mathrm{PNU}^{\mathbf{Rec}} = \mathrm{S.A.} \cdot \bar{\mathrm{A}}^{1}_{x:\overline{n}|} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}}{n}
$$

1.7 Prima de Tarifa ($\pi_{\bar{\mathrm{A}}^{1}_{x:\overline{n}|}}$)

Ahora bien, nótese que no se han considerado los gastos propios en que incurre la compañía aseguradora, o bien, una posible utilidad que haga lucrativa la operación de los productos que ofrece al mercado, y por lo cual es necesario definir el concepto de Prima de Tarifa que a continuación se desarrolla.

Ésta estará constituida por la PNN más un recargo por variabilidad del fenómeno de indemnización más los gastos de administración, adquisición y margen de utilidad de la compañía de seguros que se expresarán como un porcentaje en función de la Prima de Tarifa, es decir:

Sí:

Los Gastos de Administración son igual a δ

Los Gastos de Adquisición es igual a β

El Margen de Utilidad es igual a μ

Donde $\delta, \beta, \mu \in [0,1]$ y además se cumple que $\delta + \beta + \mu < 1$

Entonces la Prima de Tarifa se obtendrá de la siguiente igualdad:

$$\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} = \mathrm{PNN} + \mathrm{Recargo} + \delta\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \beta\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \mu\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}$$

Resolviendo tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} = \mathrm{PNN}^{\mathrm{Rec}} + \delta\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \beta\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \mu\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} \\
\Leftrightarrow\ &\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} - (\delta_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \beta\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} + \mu\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}) = \mathrm{PNN}^{\mathrm{Rec}} \\
\Leftrightarrow\ &\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} (1 - (\delta + \beta + \mu)) = \mathrm{PNN}^{\mathrm{Rec}} \\
\Leftrightarrow\ &\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\mathrm{PNN}^{\mathrm{Rec}}}{1 - (\delta + \beta + \mu)}
\end{aligned}$$

con lo que obtenemos que la prima de tarifa es:

$$\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\mathrm{PNN}^{\mathrm{Rec}}}{1 - (\delta + \beta + \mu)}$$

Cabe mencionar que en este caso, los gastos de adquisición, el margen de utilidad y gastos de administración fueron constantes durante todo el periodo de vigencia del seguro.

Una vez definido el proceso de tarificación, tenemos que señalar, que la compañía aseguradora tiene la obligación de constituir una reserva matemática por las obligaciones contraídas con los Asegurados, para lo cual se establece el siguiente modelo para hacer el cálculo correspondiente a una fecha determinada.

1.8 Reserva Matemática

Para el cálculo de ésta, partiremos del principio de equivalencia que existe entre las obligaciones del Asegurado y las obligaciones de la compañía de seguros al momento de contratación del seguro, definiendo la variable aleatoria ${}_tL$ como la pérdida proyectada en el tiempo t de la siguiente forma:

$$ {}_tL = z_U - PNN \cdot Y $$

Donde sí $m > t$ se define a:

$$ z_U = \begin{cases} S.A.\,V^u & 0 \le u \le n-t \\ 0 & u > n-t \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{U|}} & 0 \le u < m-t \\ \bar{a}_{\overline{m|}} & u \ge m-t \end{cases} $$

y la PNN tal como se estableció con anterioridad.

y si $m \le t$

$$ {}_tL = z_U $$

$$ \text{con} \quad z_U = \begin{cases} S.A.\,V^u & 0 \le u \le n-t \\ 0 & u > n-t \end{cases} $$

Donde m es el período de pago elegido por el Asegurado.

Esta variable aleatoria ${}_tL$ depende de la variable aleatoria U que es el tiempo trascurrido hasta que sobreviene la muerte de la persona de edad $(x+t)$, que no es más que una variante de la variable aleatoria $T(x)$, por lo cual su función de densidad está dada por la expresión:

$$ {}_{u}P_{x+t}\mu_{x+t+u} \quad \text{con} \quad 0 \le u \le n-t $$

Ya que la distribución de U es la distribución probabilística de $T(x)-t$ dado que $T(x) > t$. De este modo, definiremos la reserva matemática del plan de seguros como el valor esperado de la variable aleatoria ${}_{t}L$, la pérdida proyectada en el tiempo t y la denotaremos como ${}_{t}\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$.

Así para el primer caso tenemos que:

$$ \begin{aligned} {}_{t}\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) &= E[z_U - PNN \cdot Y] \\ &= E[z_U] - PNN \cdot E[Y] \\ &= \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - PNN \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \end{aligned} $$

Y ${}_{t}\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) = E[z_U] = \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$ para el segundo.

Es decir, la reserva es igual al valor presente de la obligación futura que tiene la compañía aseguradora con el Asegurado a edad $x+t$ menos el valor presente de la obligación futura del Asegurado con la compañía de seguros a dicha edad.

Es importante señalar que esta reserva debe ser suficiente para cumplir con las obligaciones futuras contraídas con los Asegurados, por ello es que se considera un recargo a ésta a partir del realizado a la obligación de la compañía y a la tarifa que se cobra al Asegurado.

De modo que la reserva valuada a una determinada fecha será:

$$ {}_{t}\bar{V}^{\mathbf{Rec}}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n} - PNN^{\mathbf{Rec}} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

o bien

$$ {}_{t}\bar{V}^{\mathbf{Rec}}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n} $$

según corresponda.

1.9 Valores Garantizados

Estos constituyen un derecho de los Asegurados sobre la reserva matemática constituida por la compañía de seguros, de acuerdo con el artículo 51 y del 179 al 184 de la Ley Sobre el Contrato de Seguros, un plan de seguro con temporalidad mayor a 10 años y donde se han cubierto tres anualidades consecutivas genera una responsabilidad ante el Asegurado, el cual "tendrá derecho al reembolso inmediato de una parte de la reserva matemática, de acuerdo también con las normas técnicas establecidas para el caso, las cuales deberán figurar en la póliza.."[5] además de que el importe al que tiene derecho es de por lo menos un 75% de la reserva matemática.

En nuestro caso, la aplicación que realizamos es sobre un plan de seguro de vida temporal a 15 años, por lo cual a continuación plantearemos un modelo que determine el importe al que el Asegurado tendrá derecho en caso de cancelar el seguro contratado.

1.9.1 Valor de Rescate

Se devolverá al Asegurado el importe que corresponda de la reserva matemática una vez restados los gastos en que incurrió la compañía de seguros y que ya no percibirá por la cancelación de la póliza de seguro, a partir de esto el valor de rescate se calculará como:

$$
{}_{t}R_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \max\left\{75\% \cdot {}_{t}\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}), {}_{t}\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) - \text{Gastos}\right\} & \text{si } 3 \leq t < 15 \\ 0 \quad \text{e.o.c.} \end{cases}
$$

Donde t denota el momento de cancelación de la póliza de seguros y los gastos según definimos en la prima de tarifa corresponden a:

Los Gastos de Administración, δ

Los Gastos de Adquisición, β

El Margen de Utilidad, μ

Y que son pagados por el Asegurado de forma nivelada al igual que la PNN^{Rec}, es decir:

$$\pi_{\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}} = \frac{PNN^{Rec}}{1-(\delta+\beta+\mu)}$$

$$= PNN^{Rec} + \text{Gastos}$$

$$= PNN^{Rec} + \frac{(\delta+\beta+\mu)}{1-(\delta+\beta+\mu)} PNN^{Rec}$$

De modo que el importe de gastos que se deducirán a la reserva matemática al momento de cancelación será:

$$\frac{(\delta+\beta+\mu)}{1-(\delta+\beta+\mu)} PNN^{Rec} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

Ahora bien una vez que el Asegurado decide la cancelación del seguro y por ende la compañía se ve obligada a devolver el valor de rescate correspondiente, se pueden ofrecer las siguientes opciones como alternativa al valor de rescate.

1.9.2 Seguro Prorrogado

Se permuta el importe del valor de rescate por un seguro que tenga la misma S.A. pero por un tiempo de exposición menor, es decir la compañía ofrece asumir el mismo riesgo por un periodo de tiempo menor al que originalmente se pacto en el plan de seguros a cambio de la parte que le corresponde al Asegurado de la reserva matemática.

Para encontrar cuanto es el tiempo de cobertura de este nuevo seguro bastará resolver la siguiente ecuación:

$${}_{t}R_{x:\overline{n}|} = S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{P}|} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_{n'})}}{n'}$$

Donde $P < n - t$.

1.9.3 Seguro Saldado

Este consiste en permutar el valor de rescate por un seguro que cubra el lapso de tiempo que restaba, pero con una obligación para la compañía menor a la pactada originalmente.

Para encontrar esta nueva obligación basta con observar que el valor de rescate tiene que ser igual a:

$$ {}_tR_{x:\overline{n}|} = S.A.^{\mathbf{mod}} \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_{n'})}}{n'} $$

De donde se consigue que:

$$ S.A.^{\mathbf{mod}} = \frac{{}_tR_{x:\overline{n}|}}{\bar{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + \dfrac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_{n'})}}{n'}} $$

Capítulo 2

Aproximación continua de la función de sobrevivencia $S(x)$

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta una aproximación de variable aleatoria continua de la función $S(x)$, que es el elemento base sobre el cual descansan nuestros modelos presentados en el capítulo anterior, esta aproximación la obtendremos a partir de los valores presentados de forma puntual en la Tabla CNSF 2000 I, que actualmente es utilizada como referencia para el cálculo de la reserva matemática del ramo de vida por las compañías aseguradoras.

2.2 Obtención de $S(x)$ y $F(x)$ a partir de la tabla de mortalidad CNSF 2000 I

Primeramente hay que observar que la teoría planteada en el Capítulo 1 contempla una edad cero en donde $S(x)$ se define con el valor de uno, es decir, la probabilidad de que un recién nacido sobreviva a esa edad es uno, o equivalentemente $F(x)$ es igual a cero, sin embargo la tabla de mortalidad CNSF 2000 I presenta probabilidades de fallecimiento desde la edad 12, por lo cual, para efecto de completar las probabilidades de la tabla supondremos que q_x es constante para $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 10, 11\}$ y tendrá la misma probabilidad que q_{12}.

De este modo, mediante la siguiente expresión ${}_xP_0 = S(x)\ \forall\ x \geq 0$ y el desarrollo algebraico hecho en el Capítulo 1, podemos obtener la función de sobrevivencia, $S(x)$, asociada al fenómeno de mortalidad que describe esta tabla de forma puntual y por ende también obtendremos la función complementaria $F(x)$ que son funciones que nos interesará aproximar.

Cabe decir que completar la tabla de esta forma no afecta significativamente el comportamiento de $F(x)$, ya que en los valores iniciales, hasta alcanzar la edad 12 no son mayores a 0.4%, incluso si definiéramos q_x como 0 para $x \in [0,11]$ el valor máximo de $F(x)$ sería del orden del 0.1%, lo cual para efectos de aproximar una función probabilística a $F(x)$ es poco relevante.

A continuación se presenta la Tabla CNSF 2000 I la cual está estructurada de modo que a partir de la edad 12 se da la probabilidad de que una persona de dicha edad fallezca entre ésta y la consecutiva a la tabla, o bien que fallezca antes de cumplir un año más de vida.

Tabla 1
Mortalidad CNSF 2000 I

x	q_x
12	0.000396
13	0.000427
14	0.000460
15	0.000495
16	0.000533
17	0.000575
18	0.000619
19	0.000667
20	0.000718
21	0.000773
22	0.000833
23	0.000897
24	0.000966
25	0.001041
26	0.001121
27	0.001207
28	0.001300
29	0.001400
30	0.001508
31	0.001624
32	0.001749
33	0.001884
34	0.002029
35	0.002186
36	0.002354
37	0.002535
38	0.002730
39	0.002940
40	0.003166
41	0.003410
42	0.003672
43	0.003954
44	0.004258
45	0.004585
46	0.004938
47	0.005317
48	0.005725
49	0.006164
50	0.006637
51	0.007145
52	0.007693
53	0.008282
54	0.008915
55	0.009597

x	q_x
56	0.010330
57	0.011119
58	0.011967
59	0.012879
60	0.013860
61	0.014914
62	0.016048
63	0.017265
64	0.018574
65	0.019980
66	0.021490
67	0.023111
68	0.024851
69	0.026720
70	0.028724
71	0.030874
72	0.033180
73	0.035651
74	0.038300
75	0.041136
76	0.044174
77	0.047424
78	0.050902
79	0.054619
80	0.058592
81	0.062834
82	0.067632
83	0.072190
84	0.077337
85	0.082817
86	0.088649
87	0.094850
88	0.101436
89	0.108424
90	0.115832
91	0.123677
92	0.131973
93	0.140737
94	0.149983
95	0.159723
96	0.169970
97	0.180733
98	0.192020
99	0.203837
100	1.000000

Ahora bien en esta tabla solo se presenta q_x así que en primera instancia tendremos que calcular P_x lo cual conseguiremos ocupando la relación que existe entre estas dos probabilidades, es decir:

$$P_x = 1 - q_x$$

Una vez conseguido ésta utilizaremos la relación ${}_xP_0 = S(x) \ \forall \ x \geq 0$ para encontrar los valores puntuales de $S(x)$ y finalmente $F(x)$ como sigue:

$$F(x) = 1 - S(x)$$

Adicionalmente calcularemos la esperanza de vida definida como:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\omega-x-1} {}_tP_x$$

De este modo obtenemos los siguientes valores.

Tabla 2 Funciones Probabilísticas y Tasa de Mortalidad

x	$F(x)$	$S(x)$	P_x	q_x	$\dot{e}_x$
0	0.000000	1.000000	0.999604	0.000396	75
1	0.000396	0.999604	0.999604	0.000396	74
2	0.000792	0.999208	0.999604	0.000396	73
3	0.001188	0.998812	0.999604	0.000396	72
4	0.001583	0.998417	0.999604	0.000396	71
5	0.001978	0.998022	0.999604	0.000396	70
6	0.002374	0.997626	0.999604	0.000396	70
7	0.002769	0.997231	0.999604	0.000396	69
8	0.003164	0.996836	0.999604	0.000396	68
9	0.003558	0.996442	0.999604	0.000396	67
10	0.003953	0.996047	0.999604	0.000396	66
11	0.004347	0.995653	0.999604	0.000396	65
12	0.004742	0.995258	0.999604	0.000396	64
13	0.005136	0.994864	0.999573	0.000427	63
14	0.005561	0.994439	0.999540	0.000460	62
15	0.006018	0.993982	0.999505	0.000495	61
16	0.006510	0.993490	0.999467	0.000533	60
17	0.007040	0.992960	0.999425	0.000575	59
18	0.007611	0.992389	0.999381	0.000619	58
19	0.008225	0.991775	0.999333	0.000667	57
20	0.008886	0.991114	0.999282	0.000718	56

Tabla 2 Funciones Probabilísticas y Tasa de Mortalidad

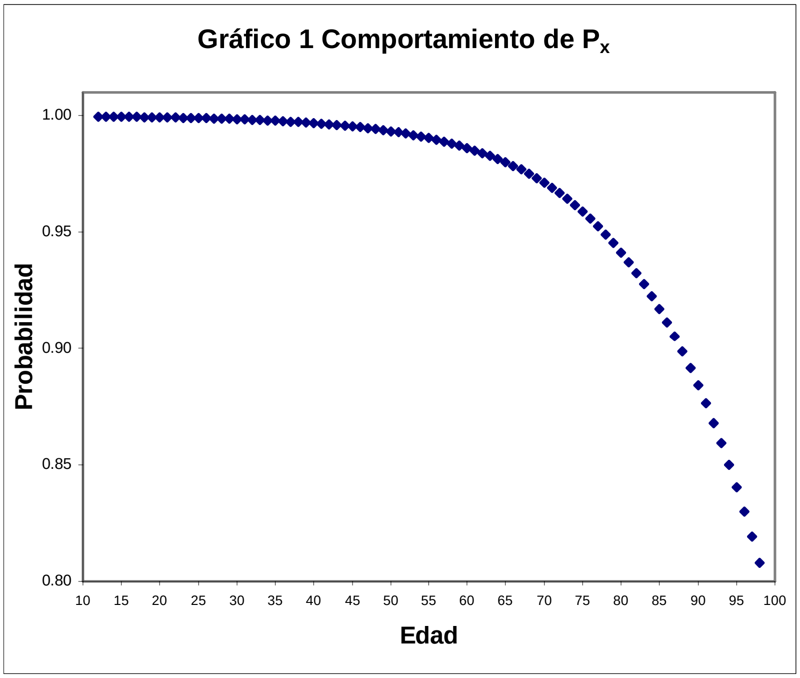
x	F(x)	S(x)	P_x	q_x	$\dot{e}_x$
21	0.009598	0.990402	0.999227	0.000773	55
22	0.010364	0.989636	0.999167	0.000833	54
23	0.011188	0.988812	0.999103	0.000897	53
24	0.012075	0.987925	0.999034	0.000966	52
25	0.013029	0.986971	0.998959	0.001041	51
26	0.014057	0.985943	0.998879	0.001121	50
27	0.015162	0.984838	0.998793	0.001207	49
28	0.016351	0.983649	0.998700	0.001300	48
29	0.017629	0.982371	0.998600	0.001400	47
30	0.019005	0.980995	0.998492	0.001508	46
31	0.020484	0.979516	0.998376	0.001624	46
32	0.022075	0.977925	0.998251	0.001749	45
33	0.023785	0.976215	0.998116	0.001884	44
34	0.025624	0.974376	0.997971	0.002029	43
35	0.027601	0.972399	0.997814	0.002186	42
36	0.029727	0.970273	0.997646	0.002354	41
37	0.032011	0.967989	0.997465	0.002535	40
38	0.034465	0.965535	0.997270	0.002730	39
39	0.037101	0.962899	0.997060	0.002940	38
40	0.039932	0.960068	0.996834	0.003166	37
41	0.042971	0.957029	0.996590	0.003410	36
42	0.046235	0.953765	0.996328	0.003672	36
43	0.049737	0.950263	0.996046	0.003954	35
44	0.053494	0.946506	0.995742	0.004258	34
45	0.057525	0.942475	0.995415	0.004585	33
46	0.061846	0.938154	0.995062	0.004938	32
47	0.066478	0.933522	0.994683	0.005317	31
48	0.071442	0.928558	0.994275	0.005725	30
49	0.076758	0.923242	0.993836	0.006164	30
50	0.082449	0.917551	0.993363	0.006637	29
51	0.088539	0.911461	0.992855	0.007145	28
52	0.095051	0.904949	0.992307	0.007693	27
53	0.102013	0.897987	0.991718	0.008282	26
54	0.109450	0.890550	0.991085	0.008915	26
55	0.117389	0.882611	0.990403	0.009597	25
56	0.125860	0.874140	0.989670	0.010330	24
57	0.134889	0.865111	0.988881	0.011119	23
58	0.144509	0.855491	0.988033	0.011967	23
59	0.154746	0.845254	0.987121	0.012879	22
60	0.165632	0.834368	0.986140	0.013860	21
61	0.177197	0.822803	0.985086	0.014914	20
62	0.189468	0.810532	0.983952	0.016048	20
63	0.202475	0.797525	0.982735	0.017265	19
64	0.216245	0.783755	0.981426	0.018574	18
65	0.230802	0.769198	0.980020	0.019980	18
66	0.246171	0.753829	0.978510	0.021490	17

Tabla 2 Funciones Probabilísticas y Tasa de Mortalidad					
x	F(x)	S(x)	P_x	q_x	$\dot{e}_x$
67	0.262370	0.737630	0.976889	0.023111	16
68	0.279418	0.720582	0.975149	0.024851	16
69	0.297325	0.702675	0.973280	0.026720	15
70	0.316100	0.683900	0.971276	0.028724	15
71	0.335745	0.664255	0.969126	0.030874	14
72	0.356253	0.643747	0.966820	0.033180	13
73	0.377613	0.622387	0.964349	0.035651	13
74	0.399801	0.600199	0.961700	0.038300	12
75	0.422789	0.577211	0.958864	0.041136	12
76	0.446533	0.553467	0.955826	0.044174	11
77	0.470982	0.529018	0.952576	0.047424	11
78	0.496070	0.503930	0.949098	0.050902	10
79	0.521721	0.478279	0.945381	0.054619	10
80	0.547844	0.452156	0.941408	0.058592	9
81	0.574337	0.425663	0.937166	0.062834	9
82	0.601083	0.398917	0.932368	0.067632	8
83	0.628063	0.371937	0.927810	0.072190	8
84	0.654913	0.345087	0.922663	0.077337	8
85	0.681601	0.318399	0.917183	0.082817	7
86	0.707970	0.292030	0.911351	0.088649	7
87	0.733858	0.266142	0.905150	0.094850	6
88	0.759101	0.240899	0.898564	0.101436	6
89	0.783537	0.216463	0.891576	0.108424	6
90	0.807007	0.192993	0.884168	0.115832	5
91	0.829362	0.170638	0.876323	0.123677	5
92	0.850466	0.149534	0.868027	0.131973	5
93	0.870200	0.129800	0.859263	0.140737	4
94	0.888468	0.111532	0.850017	0.149983	4
95	0.905196	0.094804	0.840277	0.159723	3
96	0.920338	0.079662	0.830030	0.169970	3
97	0.933878	0.066122	0.819267	0.180733	3
98	0.945829	0.054171	0.807980	0.192020	2
99	0.956231	0.043769	0.796163	0.203837	1
100	0.965152	0.034848	0.000000	1.000000	1
101	1.000000	0.000000	0.000000	1.000000	

Esta tabla muestra la función de sobrevivencia construida mediante la tabla CNSF 2000 I, al igual que la esperanza de vida de los individuos por edad, las tasa de sobrevivencia y muerte P_x y q_x.

2.2.1 Comportamiento del fenómeno de mortalidad

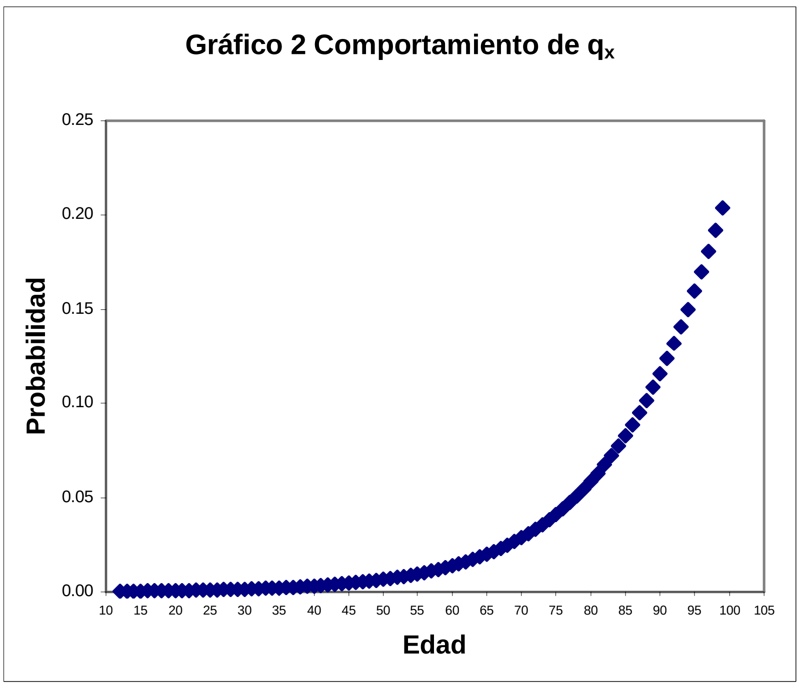
Para tener una mejor perspectiva del comportamiento de cada uno de los conceptos antes expuestos se presentan a continuación sus respectivos gráficos, notando que el rango del dominio está dado a partir de la edad 12 en donde originalmente empieza a tener valores la tabla CNSF 2000 I, esto con el fin de sensibilizar posteriormente nuestro ajuste a valores reales utilizables.



Comportamiento de la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a edad $x+1$.

Obtenido a partir de la tabla de mortalidad CNSF 2000 I mediante la relación:

$$P_x = 1 - q_x$$



Comportamiento de la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca entre las edades x y $x+1$, estos valores se obtuvieron directamente de la tabla de mortalidad CNSF 2000 I.

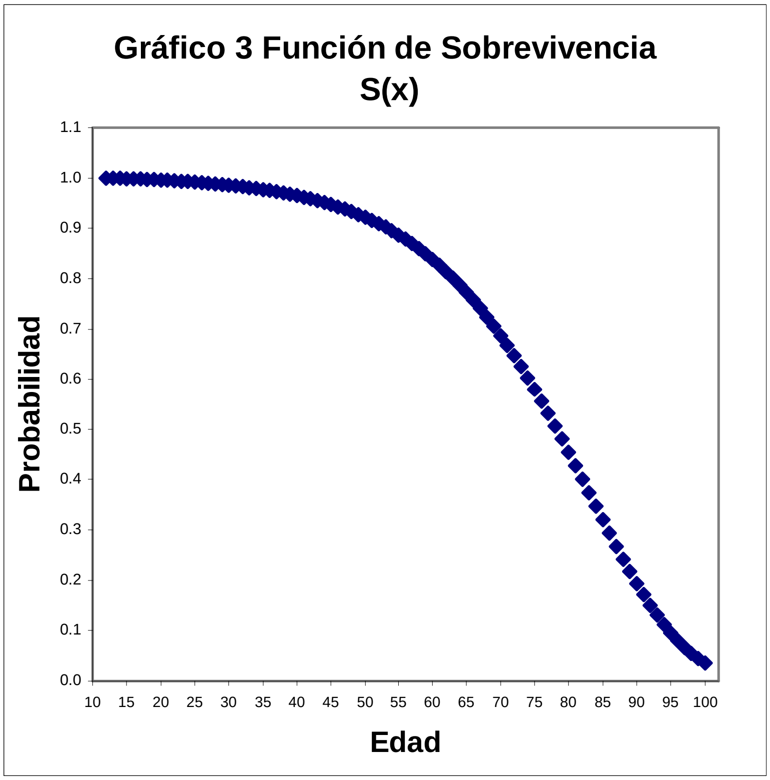


Gráfico de la función de sobrevivencia dado por la relación:

$$S(x) = {}_xP_0 \quad x \geq 0$$

Obtenido a partir de la tabla de mortalidad CNSF 2000 I.

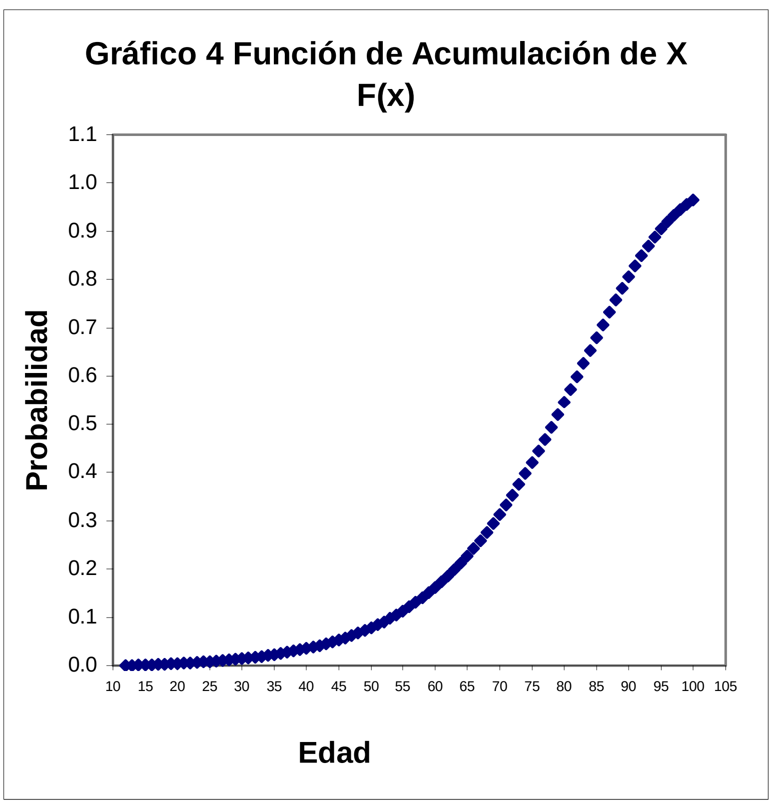
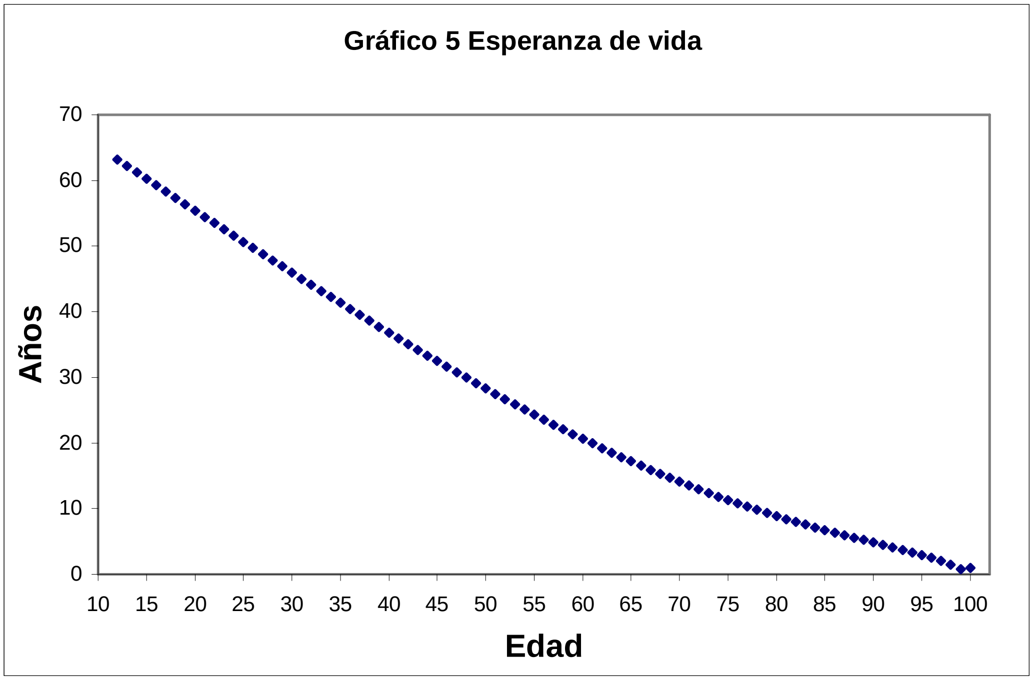


Gráfico de la función de Acumulación de X, edad al fallecimiento de un recién nacido dada por la relación:

$$F(x) = 1 - S(x) \quad x \geq 0$$



En este gráfico se representa el comportamiento de la esperanza de vida de un individuo de edad x, la cual se calcula como:

$$\dot{e}_x = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\omega - x - 1} {}_t P_x$$

Una vez obtenidos los valores de $F(x)$, función de acumulación probabilística de X, procederemos a su aproximación.

2.3 Aproximación polinómica a la función $F(x)$

2.3.1 Justificación

El hecho de utilizar una función polinómica para aproximar la función de acumulación de la variable aleatoria X, $F(x)$, es porque da una mayor flexibilidad que si utilizáramos una función exponencial, como comúnmente se propone en los libros de texto, ya que ésta carece de puntos de inflexión y dada la forma de $F(x)$ superando la edad 80, Gráfico 4, se tiene que para ésta función la aproximación no es muy satisfactoria, alcanzando diferencias máximas absolutas de un 30%, Anexo 1, contrario a lo que se obtiene con una función que tenga puntos de inflexión, como los polinomios de grado mayor a 2.

Cabe decir, que entre mayor sea el grado de la función polinómica el ajuste es mayor, es decir, diferencias absolutas pequeñas entre $F(x)$ y la función propuesta, pero se tiene el defecto de una expresión algebraica larga y compleja, es por ello que se realizaron aproximaciones a $F(x)$ mediante funciones polinómicas de grado mayor a uno hasta encontrar una función que proporcionará un ajuste con diferencias menores a 5%, estas aproximaciones son puestas a detalle en el Anexo 1 donde damos algunas otras propuestas de aproximación.

Este fue el caso de la función polinómica de grado 5 que alcanza una diferencia máxima de alrededor del 4%, para las últimas edades y diferencias de 2% para las demás como posteriormente se mostrará.

Ahora bien, cabe destacar que el procedimiento para el ajuste de esta función polinómica a $F(x)$ toma en cuenta las propiedades de una función de acumulación de probabilidad, que son:

1. $F(x)$ es creciente
2. $F(x) \geq 0$
3. $\mathrm{Lim}_{x \to \infty} F(x) = 1$
4. $\mathrm{Lim}_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Las cuales son fundamentales y se deben cumplir para tener no solo una buena aproximación como función, sino también probabilísticamente, ya que de esto depende la base teórica de los modelos utilizados para obtener tanto el cobro por nuestro plan de seguros como la cantidad que se debe reservar para hacer frente a las obligaciones contraídas.

2.3.2 Procedimiento

Como primer paso ajustamos un polinomio de quinto grado de la forma $y(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ donde a, b, c, d, e, f son constantes a estimar mediante el método de mínimos cuadrados, cuidando la propiedad 1, lo cual se puede hacer si hacemos variar al coeficiente f, valor de la función en $x = 0$, hasta encontrar un punto de inflexión en los valores del dominio positivos y cercanos a 0, cabe señalar que el dominio de interés para nuestra aproximación es el mismo de la tabla CNSF 2000 I, es decir a partir del valor 12.

El resultado de este ajuste es:

$$y(x) = -0.0139x^5 + 3.3471x^4 - 273.06x^3 + 10425x^2 - 176341x + 1000000 \; \forall \; x \geq 12$$

Donde

$$\hat{a} = -0.0139$$
$$\hat{b} = 3.3471$$
$$\hat{c} = 273.06$$
$$\hat{d} = 10425$$
$$\hat{e} = 17634$$
$$\hat{f} = 1000000$$

Una vez encontrado los estimadores de las constantes $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}, \hat{f}$, tenemos que comprobar el grado de asociación polinómica que tiene el modelo respecto a $F(x)$, r, como que tanta variabilidad es rescatada por este modelo propuesto, r^2, sean cercanos a 1.

En este caso r, r^2 fueron 0.9998 y 0.9999 respectivamente lo que indica que el modelo propuesto no solo tiene un buen rescate de la variabilidad que tiene el fenómeno, sino también la asociación polinómica que tiene es bastante buena.

Así pues, procederemos a forzar nuestra función ajustada a que cumpla con las características que tiene una función de acumulación probabilística como $F(x)$ en nuestro fenómeno, es decir que:

- $F(x) = 1 \quad \forall \; x \geq \omega$ propiedad 3, donde ω representa el último valor en la tabla de CNSF 2000 I.
- $F(x) = 0 \quad \forall \; x \leq 0$ propiedad 4.

Para lo cual tomamos la función ajustada $y(x)$ y sumamos el valor absoluto de $y(17)$ para que valuada en $x = 17$, $y(17) = 0$, posteriormente dividimos la función resultante entre $y(\omega)$, lo cual hará que la función alcance el valor 1 en ese punto.

Con esto obtendremos la siguiente función definida según el rango de la variable aleatoria X:

$$Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<17 \\ \dfrac{y(x)+|y(17)|}{y(\omega)} & \text{si } 17\le x<\omega \\ 1 & \text{si } \omega\le x \end{cases}$$

Que cumple con las propiedades 3 y 4 de una función de acumulación por la forma en que esta definida y cumple naturalmente con la propiedad 1 y 2 porque fue construida la estimación de mínimos cuadrados para una función positiva y creciente.

2.3.3 Función propuesta

De esta manera como función final proponemos el siguiente modelo como aproximación a $F(x)$.

$$Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<17 \\ -1.32\text{E-}9x^5+3.19\text{E-}7x^4-2.60\text{E-}05x^3+9.94\text{E-}4x^2-1.6\text{E-}2x+1.01\text{E-}2 & \text{si } 17\le x<101 \\ 1 & \text{si } 101\le x \end{cases}$$

Haciendo la observación de que debido a que el rango de la función $F(x)$ está entre cero y uno, a que sus valores son del orden de $1*10^{-3}$ en los primeros 17 años, al hecho de que nuestra propuesta es un polinomio de grado 5 y a la cantidad de operaciones aritméticas que se tienen que realizar para llegar a un valor numérico significativo, decidimos definir el dominio de la función $Y(x)$ a partir del valor 17 para evitar que tanto el error por operación y pérdida de cifras significativas se haga cada vez más grande cuando el resultado es una cantidad numérica pequeña, tal como en este caso.

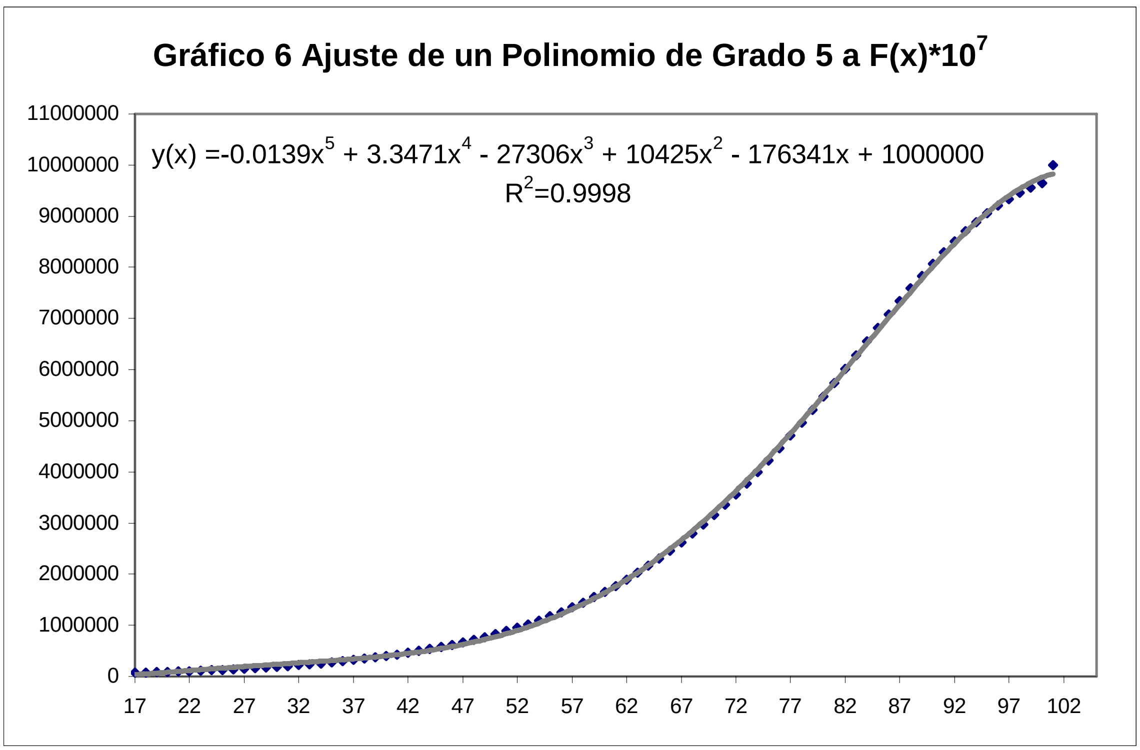
Además de que el dominio de interés es muy similar al de la tabla de mortalidad manejada, lo cual permite conservar el objeto de la aproximación.

Cabe señalar, que al igual que esta propuesta polinómica damos como alternativas en el Anexo 1 otro tipo de funciones que aún cuando la aproximación puede ser menor que la presentada anteriormente, la expresión algebraica es más simple y manejable, tal como las funciones exponenciales, potenciales y los polinomios de menor grado.

Además cabe señalar que se justifica el uso de este polinomio no solo señalando las diferencias poco significativas que se tiene respecto a $F(x)$ si no que también las funciones biométricas asociadas a nuestra función propuesta son muy similares, tal como se observará en los gráficos presentados más adelante**.**

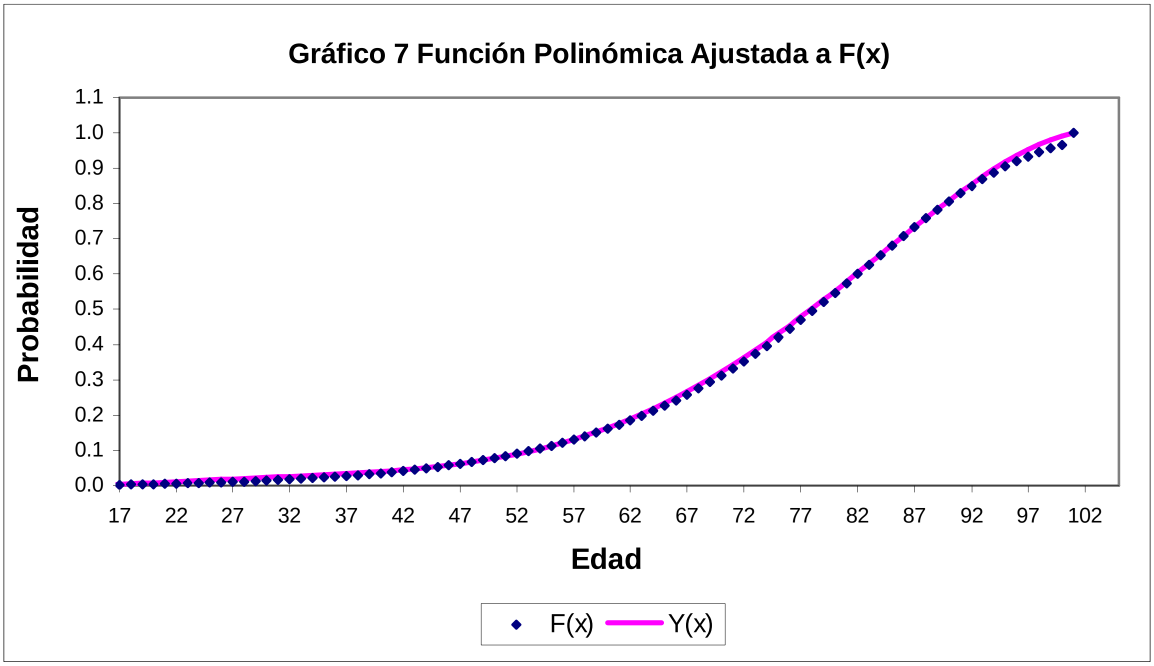
2.3.4 Gráficos del ajuste a la función $F(x)$

A continuación se presentan los gráficos realizados del proceso de ajuste a la función de acumulación probabilística de la variable aleatoria X.



Este gráfico nos muestra el comportamiento de la función de acumulación $F(x)$ obtenida de la tabla CNSF 2000 I y el ajuste mediante el método de mínimos cuadrados realizado, así como la expresión obtenida y el coeficiente de determinación que nos señala un 0.9998 de recuperación de la variabilidad del fenómeno por el modelo propuesto.

Cabe señalar que el ajuste no se hizo sobre los valores originales de $F(x)$ ya que el rango que tiene, de 0 a 1, y los valores tan pequeños que toma en los primeros años, del orden de $1{*}10^{-3}$, hace que la función ajustada no tenga los decimales suficientes para poder rescatar la estimación de los coeficientes, por ello se multiplicaron los valores de $F(x)$ por un factor de 10^{7} para obtener con mayor precisión los valores estimados de estos y poder reproducirlos sin problema.



Este gráfico presenta el comportamiento del ajuste final dado por $Y(x)$ a $F(x)$, según se definió, con un dominio de 17 a 101 años.

Como podemos observar la aproximación presenta diferencias muy pequeñas respecto a $F(x)$ salvo en las edades últimas, de 95 a 101 años de edad en donde notamos una separación más grande con respecto a las edades inferiores.

La función final de $Y(x)$ es la siguiente:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 17 \\ -1.32\text{E-}9x^{5} + 3.19\text{E-}7x^{4} - 2.60\text{E-}05x^{3} + 9.94\text{E-}4x^{2} - 1.6\text{E-}2x + 1.01\text{E-}1 & \text{si } 17 \leq x < 101 \\ 1 & \text{si } 101 \leq x \end{cases}$$

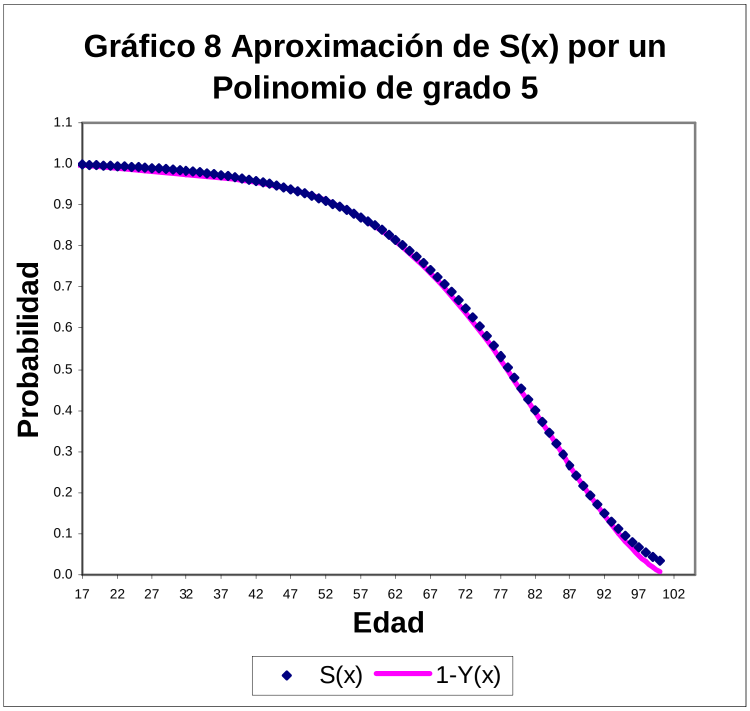
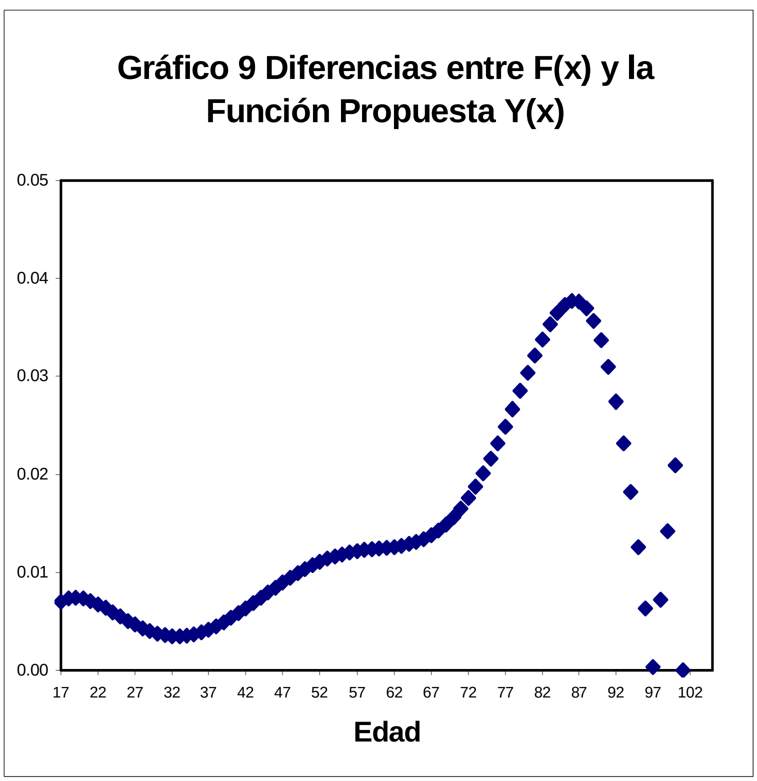


Gráfico de la función de sobrevivencia dado por la relación:

$$S(x) = 1 - F(x)$$

Y su aproximación polinómica establecida de forma análoga como $1 - Y(x)$.

De la misma manera que en el gráfico anterior la separación de las curvas son a partir de la edad 95.



Este gráfico nos muestra el comportamiento de las diferencias, en valor absoluto, que puntualmente se van teniendo entre $Y(x)$ y $F(x)$, notemos que en las primeras edades y hasta la edad 80 las diferencias son inferiores al 3% y en los últimos años van de 3% a casi 4%, lo cual es poco significativo si consideramos que utilizaremos esta aproximación para aplicarla en rangos de edad centrales según la temporalidad de los productos y la forma de pago de los mismos.

A continuación se muestran los valores puntuales graficados anteriormente así como las fórmulas utilizadas para su obtención.

Tabla 3 Valores de las Funciones $F(x)$ y $S(x)$ y sus Aproximaciones $Y(x)$ y $1-Y(x)$

	Tabla CNSF 2000 I		$y(x)$	$Y(x)$		$1-Y(x)$
Edad	$S(x)$	$F(x)$	**Polinomio Ajustado a** $F(x)10^7$	**Aproximación a** $F(x)$	**Diferencia** $\|F(x)-Y(x)\|$	**Aproximación de** $S(x)$
17	0.9930	0.0070	-66,699	0.0000	0.0070	1.0000
18	0.9924	0.0076	-63,824	0.0003	0.0073	0.9997
19	0.9918	0.0082	-58,193	0.0008	0.0074	0.9992
20	0.9911	0.0089	-50,244	0.0016	0.0073	0.9984
21	0.9904	0.0096	-40,366	0.0025	0.0071	0.9975
22	0.9896	0.0104	-28,902	0.0036	0.0068	0.9964
23	0.9888	0.0112	-16,148	0.0048	0.0064	0.9952
24	0.9879	0.0121	-2,358	0.0061	0.0059	0.9939
25	0.9870	0.0130	12,256	0.0075	0.0055	0.9925
26	0.9859	0.0141	27,525	0.0090	0.0051	0.9910
27	0.9848	0.0152	43,314	0.0105	0.0047	0.9895
28	0.9836	0.0164	59,530	0.0120	0.0043	0.9880
29	0.9824	0.0176	76,111	0.0136	0.0040	0.9864
30	0.9810	0.0190	93,031	0.0152	0.0038	0.9848
31	0.9795	0.0205	110,295	0.0169	0.0036	0.9831
32	0.9779	0.0221	127,940	0.0186	0.0035	0.9814
33	0.9762	0.0238	146,029	0.0203	0.0035	0.9797
34	0.9744	0.0256	164,654	0.0221	0.0035	0.9779
35	0.9724	0.0276	183,930	0.0239	0.0037	0.9761
36	0.9703	0.0297	204,000	0.0258	0.0039	0.9742
37	0.9680	0.0320	225,023	0.0278	0.0042	0.9722
38	0.9655	0.0345	247,184	0.0300	0.0045	0.9700
39	0.9629	0.0371	270,682	0.0322	0.0049	0.9678
40	0.9601	0.0399	295,736	0.0346	0.0053	0.9654
41	0.9570	0.0430	322,579	0.0372	0.0058	0.9628
42	0.9538	0.0462	351,458	0.0399	0.0063	0.9601
43	0.9503	0.0497	382,632	0.0429	0.0069	0.9571
44	0.9465	0.0535	416,370	0.0461	0.0074	0.9539
45	0.9425	0.0575	452,949	0.0496	0.0079	0.9504
46	0.9382	0.0618	492,653	0.0534	0.0085	0.9466
47	0.9335	0.0665	535,774	0.0575	0.0090	0.9425
48	0.9286	0.0714	582,605	0.0620	0.0095	0.9380
49	0.9232	0.0768	633,440	0.0668	0.0099	0.9332
50	0.9176	0.0824	688,575	0.0721	0.0104	0.9279
51	0.9115	0.0885	748,305	0.0778	0.0108	0.9222

Tabla 3 Valores de las Funciones $F(x)$ **y** $S(x)$ **y sus Aproximaciones** $Y(x)$ **y** $1-Y(x)$

	Tabla CNSF 2000 I		$y(x)$	$Y(x)$		$1-Y(x)$
Edad	$S(x)$	$F(x)$	**Polinomio Ajustado a** $F(x)10^7$	**Aproximación a** $F(x)$	**Diferencia** $\lvert F(x)-Y(x) \rvert$	**Aproximación de** $S(x)$
52	0.9049	0.0951	812,921	0.0840	0.0111	0.9160
53	0.8980	0.1020	882,710	0.0906	0.0114	0.9094
54	0.8906	0.1094	957,951	0.0978	0.0117	0.9022
55	0.8826	0.1174	1,038,917	0.1055	0.0119	0.8945
56	0.8741	0.1259	1,125,869	0.1138	0.0120	0.8862
57	0.8651	0.1349	1,219,059	0.1227	0.0122	0.8773
58	0.8555	0.1445	1,318,724	0.1322	0.0123	0.8678
59	0.8453	0.1547	1,425,088	0.1424	0.0124	0.8576
60	0.8344	0.1656	1,538,356	0.1532	0.0124	0.8468
61	0.8228	0.1772	1,658,718	0.1647	0.0125	0.8353
62	0.8105	0.1895	1,786,342	0.1769	0.0126	0.8231
63	0.7975	0.2025	1,921,376	0.1897	0.0127	0.8103
64	0.7838	0.2162	2,063,944	0.2033	0.0129	0.7967
65	0.7692	0.2308	2,214,145	0.2177	0.0131	0.7823
66	0.7538	0.2462	2,372,052	0.2328	0.0134	0.7672
67	0.7376	0.2624	2,537,711	0.2486	0.0138	0.7514
68	0.7206	0.2794	2,711,137	0.2651	0.0143	0.7349
69	0.7027	0.2973	2,892,313	0.2824	0.0149	0.7176
70	0.6839	0.3161	3,081,191	0.3004	0.0157	0.6996
71	0.6643	0.3357	3,277,686	0.3192	0.0166	0.6808
72	0.6437	0.3563	3,481,677	0.3387	0.0176	0.6613
73	0.6224	0.3776	3,693,007	0.3588	0.0188	0.6412
74	0.6002	0.3998	3,911,477	0.3797	0.0201	0.6203
75	0.5772	0.4228	4,136,847	0.4012	0.0216	0.5988
76	0.5535	0.4465	4,368,834	0.4233	0.0232	0.5767
77	0.5290	0.4710	4,607,111	0.4461	0.0249	0.5539
78	0.5039	0.4961	4,851,303	0.4694	0.0267	0.5306
79	0.4783	0.5217	5,100,989	0.4932	0.0285	0.5068
80	0.4522	0.5478	5,355,696	0.5175	0.0303	0.4825
81	0.4257	0.5743	5,614,901	0.5422	0.0321	0.4578
82	0.3989	0.6011	5,878,028	0.5674	0.0337	0.4326
83	0.3719	0.6281	6,144,445	0.5928	0.0353	0.4072
84	0.3451	0.6549	6,413,465	0.6185	0.0365	0.3815
85	0.3184	0.6816	6,684,341	0.6443	0.0373	0.3557
86	0.2920	0.7080	6,956,268	0.6703	0.0377	0.3297
87	0.2661	0.7339	7,228,380	0.6962	0.0376	0.3038
88	0.2409	0.7591	7,499,745	0.7221	0.0370	0.2779
89	0.2165	0.7835	7,769,369	0.7479	0.0357	0.2521
90	0.1930	0.8070	8,036,191	0.7733	0.0337	0.2267

Tabla 3 Valores de las Funciones $F(x)$ y $S(x)$ y sus Aproximaciones $Y(x)$ y $1-Y(x)$						
	Tabla CNSF 2000 I		$y(x)$	$Y(x)$		$1-Y(x)$
Edad	$S(x)$	$F(x)$	**Polinomio Ajustado a** $F(x)10^7$	**Aproximación a** $F(x)$	**Diferencia** $\lvert F(x)-Y(x)\rvert$	**Aproximación de** $S(x)$
91	0.1706	0.8294	8,299,081	0.7984	0.0309	0.2016
92	0.1495	0.8505	8,556,839	0.8230	0.0274	0.1770
93	0.1298	0.8702	8,808,195	0.8470	0.0232	0.1530
94	0.1115	0.8885	9,051,804	0.8703	0.0182	0.1297
95	0.0948	0.9052	9,286,249	0.8926	0.0126	0.1074
96	0.0797	0.9203	9,510,034	0.9140	0.0063	0.0860
97	0.0661	0.9339	9,721,585	0.9342	0.0003	0.0658
98	0.0542	0.9458	9,919,251	0.9531	0.0072	0.0469
99	0.0438	0.9562	10,101,295	0.9704	0.0142	0.0296
100	0.0348	0.9652	10,265,900	0.9861	0.0210	0.0139
101	0.0000	1.0000	10,411,164	1.0000	0.0000	0

En esta tabla se muestran los valores de $F(x)$ y $S(x)$ obtenidos de la Tabla CNSF 2000 I, el valor por edad del ajuste obtenido mediante mínimos cuadrados y los valores de las funciones finales obtenidas al igual que las respectivas ecuaciones utilizadas.

Fórmulas:

$$ {}_xP_0 = S(x) \quad x \geq 0 $$

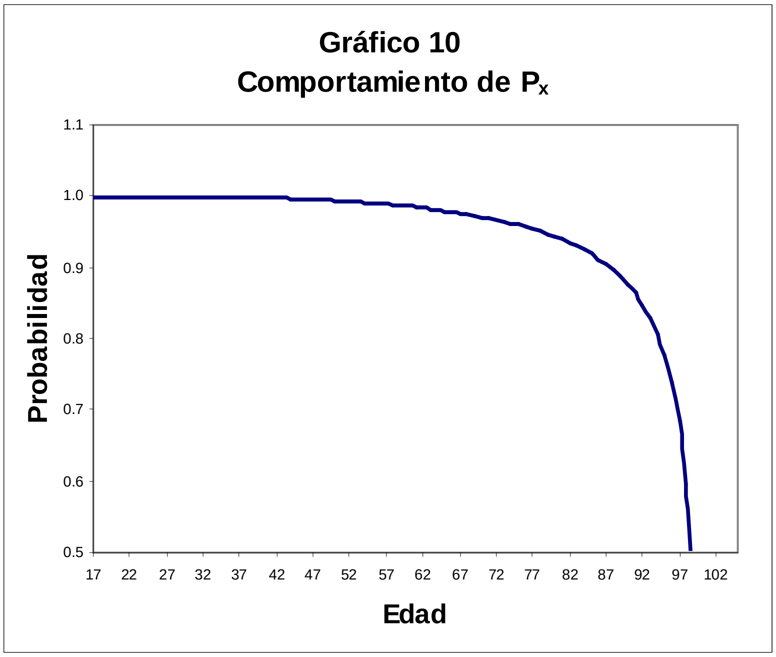
$$ F(x) = 1 - S(x) $$

$$ y(x) = -0.0139x^5 + 3.3471x^4 - 273.06x^3 + 10425x^2 - 176341x + 1000000 \ \forall\, x \geq 17 $$

$$ Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 17 \\ -1.32E-9x^5 + 3.19E-7x^4 - 2.60E-05x^3 + 9.94E-4x^2 - 1.6E-2x + 1.01E-1 & \text{si } 17 \leq x < 101 \\ 1 & \text{si } 101 \leq x \end{cases} $$

2.3.5 Comportamiento del fenómeno de mortalidad con la función $F(x)$ propuesta

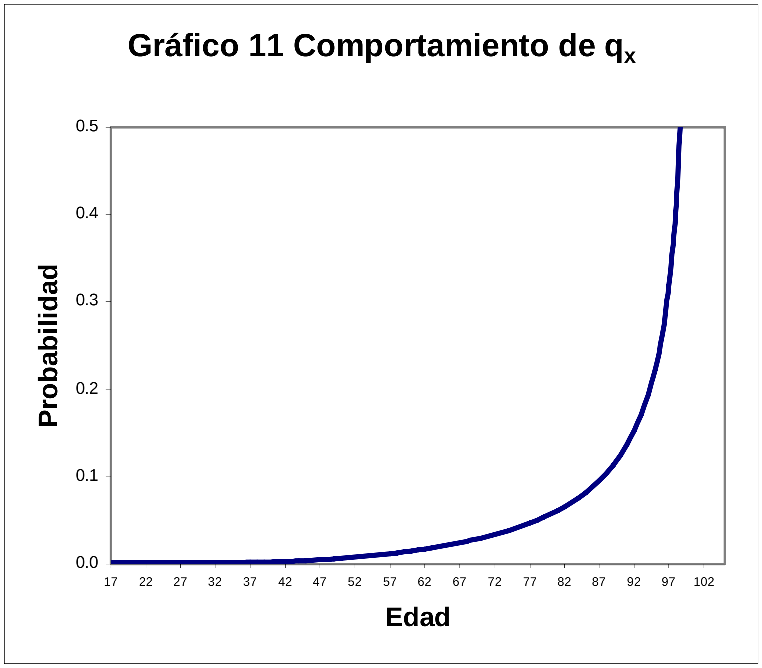
Ya obtenida nuestra aproximación de la función de sobrevivencia, $S(x)$, podemos empezar a desarrollar los conceptos definidos en el Capítulo 1 tal como P_X, q_X, μ_X y $\dot{e}_X$ y obtenerlos directamente de las relaciones que existen entre ellos y $S(x)$, a continuación presentaremos los resultados de las tendencias que siguen estos fenómenos utilizando nuestra aproximación polinómica de grado 5, haciendo una comparación entre estos y los que se obtuvieran considerando la Tabla que la CNSF a propuesto para la operación del ramo de vida de las compañías aseguradoras, CNSF 2000 I.



Este gráfico se obtuvo mediante la relación:

$$P_x = \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

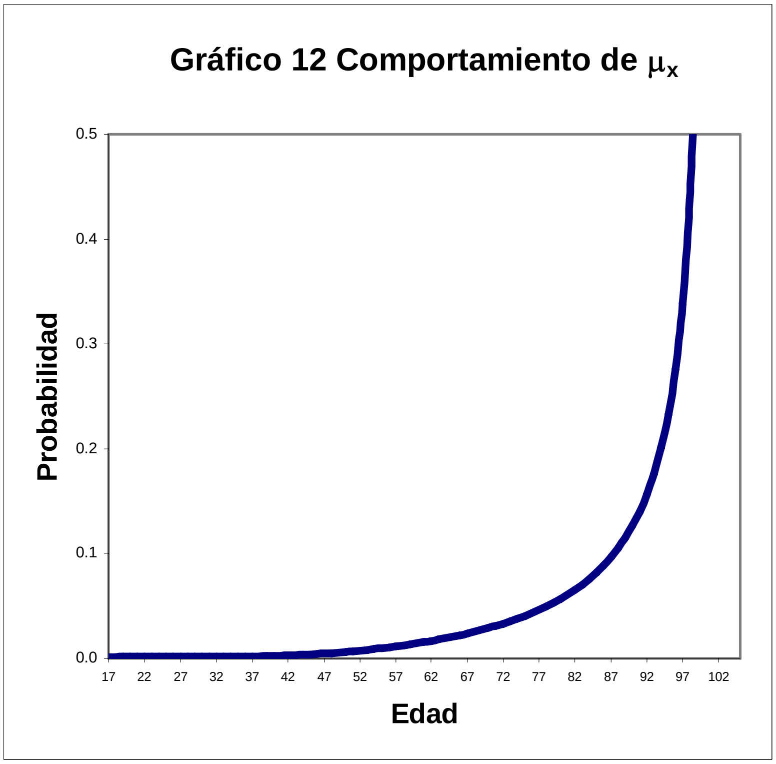
Y representa el comportamiento de la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva a edad $x+1$, notemos que por la definición de $Y(x)$ estas probabilidades son decrecientes obteniendo el valor de cero a partir de la edad 100.



Los valores de este gráfico se obtienen mediante complemento, es decir:

$$q_x = 1 - P_x$$

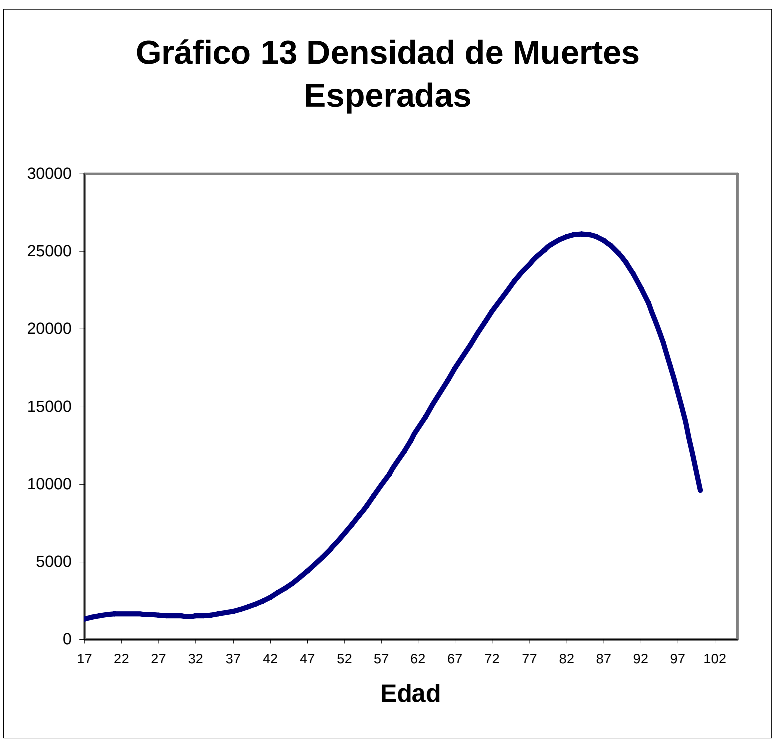
Y representan la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca entre las edades x y $x+1$.



μ_x está definido como la fuerza de mortalidad, es decir, la tasa instantánea de muerte que recae sobre un individuo de edad x, la cual obtenemos como:

$$\mu_x = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$

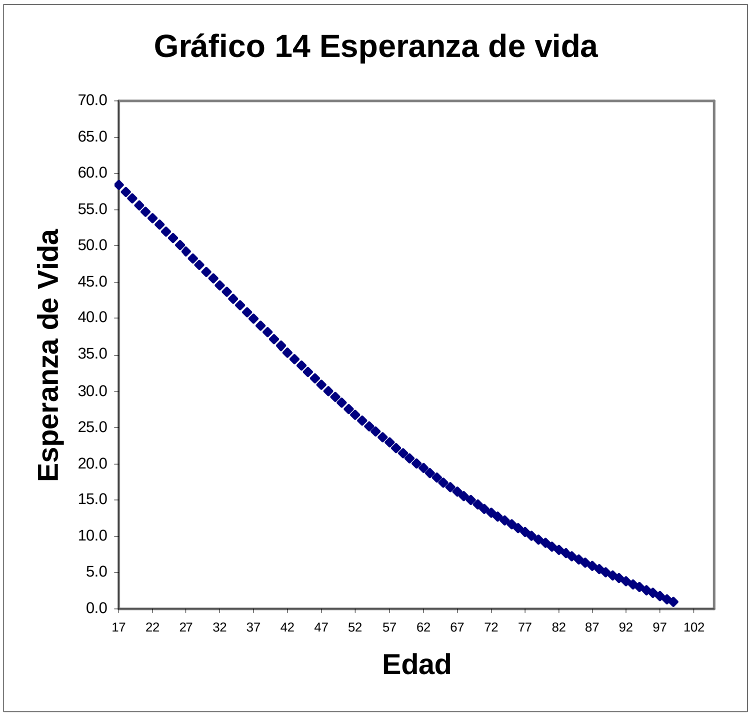
Notemos que es una función creciente lo cual es fácil de entender si consideramos que entre más sea la edad de un individuo mayor posibilidad es que se dé su muerte.



Este gráfico nos representa la densidad de muertes esperadas de individuos de edad x, que se obtiene mediante la siguiente relación:

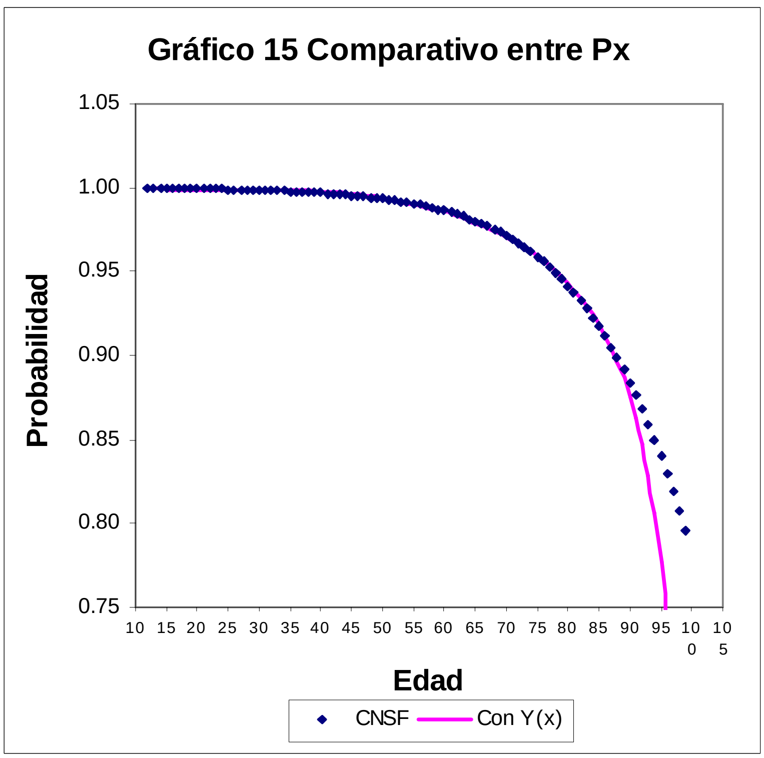
$$10^6 \cdot S(x) \cdot \mu_x$$

Donde 10^6 es nuestro radix.

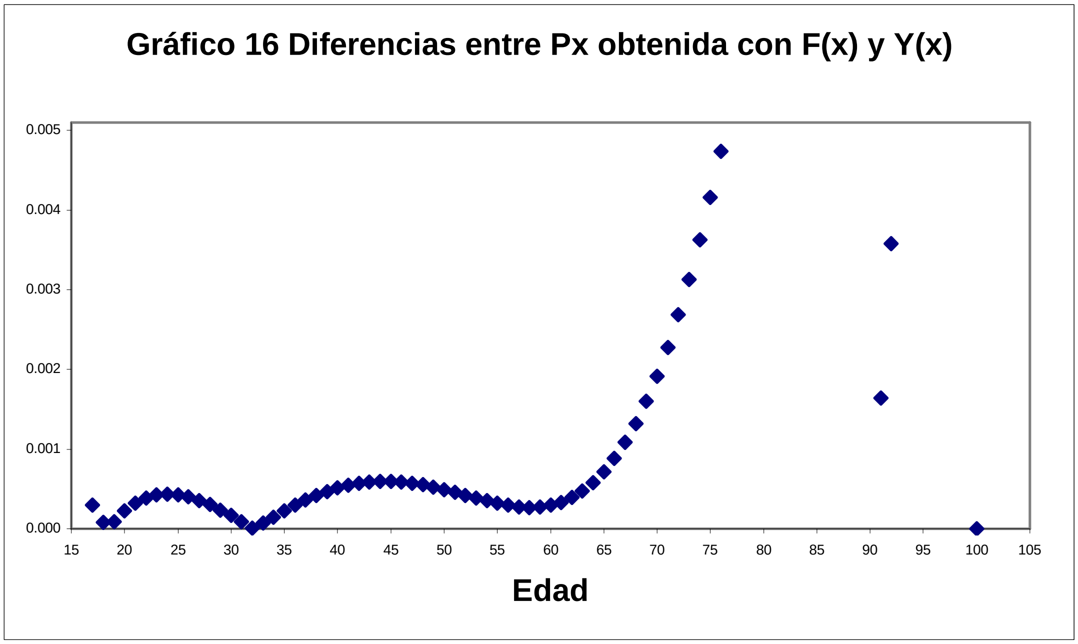


En este gráfico se representa el comportamiento de la esperanza de vida de un individuo de edad x, la cual se calcula como:

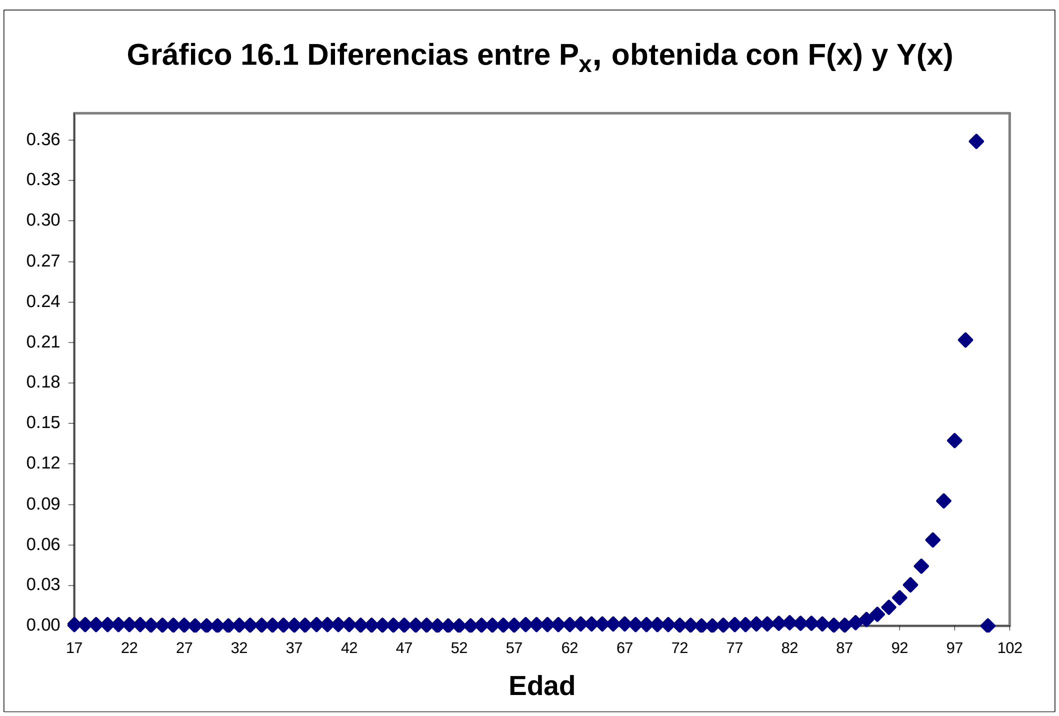
$$\mathring{e}_x = E[T(x)] = \int_0^{\infty} t \, {}_tP_x \mu_{x+t} \, dt$$

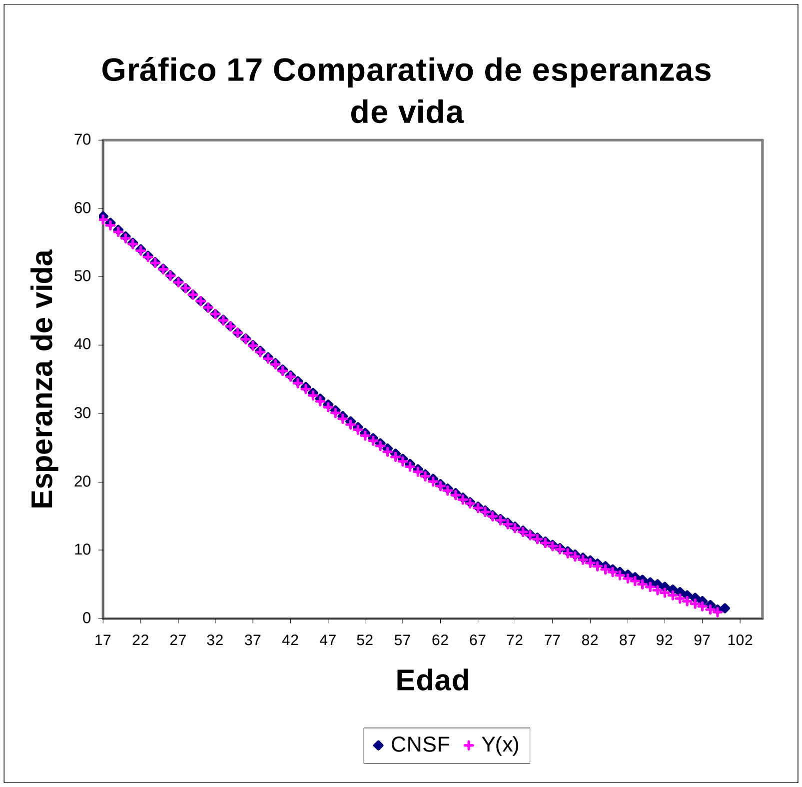


En este gráfico se comparan las probabilidades de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+1$, obtenidas a partir de la Tabla CNSF 2000 I y generadas de la función que hemos propuesto, como se observa las curvas se separan pasando la edad 90, por consecuencia de las diferencias que hay entre $Y(x)$ y $S(x)$ mostradas con anterioridad.

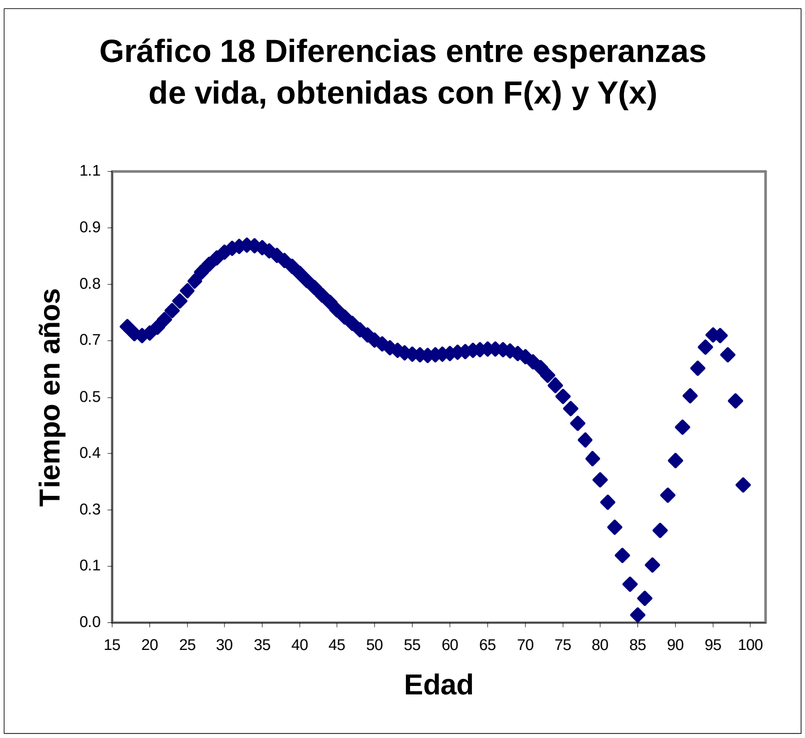


Como se observa en el primer gráfico (Gráfico 16) las diferencias son mínimas, del orden de 1%, hasta cerca de la edad 90, posteriormente van creciendo en los últimos años hasta alcanzar una diferencia máxima de 35% tal como se muestra en el gráfico siguiente, Gráfico 16.1.





En este gráfico se comparan las esperanzas de vida de los individuos a edad x generadas a partir de la Tabla CNSF 2000 I y la función propuesta $Y(x)$, como se observa los comportamientos de las curvas son muy parecidos lo que nos indica que se conserva el tiempo futuro de vida de la función original en la que nos basamos.



Observamos que las diferencias máximas no sobrepasan un año en la esperanza de vida de los individuos.

A continuación se muestran los valores puntuales graficados anteriormente, así como las fórmulas utilizadas para su obtención.

Tabla 4 Tasas de muerte, fuerza y densidad de mortalidad y esperanza de vida.

Edad	P_x	q_x	μ_x	$10^6 Y(x)\mu_x$	$\dot{e}_x$
17	0.999726	0.000274	0.000128	128	59
18	0.999462	0.000538	0.000413	413	58
19	0.999241	0.000759	0.000655	655	57
20	0.999056	0.000944	0.000858	857	56
21	0.998903	0.001097	0.001026	1,024	55
22	0.998778	0.001222	0.001164	1,160	54
23	0.998678	0.001322	0.001277	1,270	53
24	0.998597	0.001403	0.001367	1,359	52
25	0.998532	0.001468	0.001439	1,428	51
26	0.998479	0.001521	0.001497	1,484	51
27	0.998436	0.001564	0.001545	1,529	50
28	0.998398	0.001602	0.001585	1,566	49
29	0.998363	0.001637	0.001621	1,599	48
30	0.998327	0.001673	0.001656	1,631	47
31	0.998287	0.001713	0.001694	1,665	46
32	0.998241	0.001759	0.001736	1,704	45
33	0.998186	0.001814	0.001787	1,750	44
34	0.998119	0.001881	0.001847	1,807	43
35	0.998038	0.001962	0.001921	1,875	42
36	0.997940	0.002060	0.002010	1,958	41
37	0.997824	0.002176	0.002117	2,058	40
38	0.997688	0.002312	0.002243	2,176	39
39	0.997529	0.002471	0.002390	2,313	39
40	0.997346	0.002654	0.002561	2,473	38
41	0.997137	0.002863	0.002758	2,655	37
42	0.996901	0.003099	0.002980	2,862	36
43	0.996636	0.003364	0.003232	3,093	35
44	0.996340	0.003660	0.003513	3,351	34
45	0.996013	0.003987	0.003825	3,636	33
46	0.995652	0.004348	0.004170	3,948	32
47	0.995258	0.004742	0.004549	4,288	31
48	0.994828	0.005172	0.004963	4,656	31
49	0.994361	0.005639	0.005414	5,052	30
50	0.993857	0.006143	0.005902	5,477	29
51	0.993313	0.006687	0.006429	5,929	28
52	0.992729	0.007271	0.006997	6,409	27
53	0.992104	0.007896	0.007606	6,916	27
54	0.991435	0.008565	0.008257	7,450	26

Tabla 4 Tasas de muerte, fuerza y densidad de mortalidad y esperanza de vida.

Edad	P_x	q_x	μ_x	$10^6\,Y(x)\mu_x$	$\dot{e}_x$
55	0.990722	0.009278	0.008954	8,009	25
56	0.989964	0.010036	0.009696	8,593	24
57	0.989158	0.010842	0.010486	9,199	23
58	0.988302	0.011698	0.011326	9,828	23
59	0.987395	0.012605	0.012217	10,478	22
60	0.986435	0.013565	0.013162	11,146	21
61	0.985418	0.014582	0.014164	11,831	21
62	0.984344	0.015656	0.015224	12,532	20
63	0.983207	0.016793	0.016347	13,245	19
64	0.982006	0.017994	0.017535	13,970	19
65	0.980736	0.019264	0.018793	14,702	18
66	0.979393	0.020607	0.020124	15,440	17
67	0.977973	0.022027	0.021534	16,181	17
68	0.976471	0.023529	0.023027	16,922	16
69	0.974879	0.025121	0.024610	17,660	15
70	0.973193	0.026807	0.026290	18,392	15
71	0.971404	0.028596	0.028074	19,113	14
72	0.969503	0.030497	0.029972	19,822	14
73	0.967481	0.032519	0.031994	20,514	13
74	0.965326	0.034674	0.034150	21,184	12
75	0.963026	0.036974	0.036455	21,830	12
76	0.960565	0.039435	0.038924	22,447	11
77	0.957927	0.042073	0.041575	23,030	11
78	0.955091	0.044909	0.044428	23,575	10
79	0.952034	0.047966	0.047509	24,078	10
80	0.948728	0.051272	0.050846	24,533	9
81	0.945139	0.054861	0.054473	24,935	9
82	0.941229	0.058771	0.058433	25,280	8
83	0.936949	0.063051	0.062774	25,563	8
84	0.932242	0.067758	0.067559	25,776	7
85	0.927035	0.072965	0.072862	25,916	7
86	0.921239	0.078761	0.078779	25,976	6
87	0.914740	0.085260	0.085429	25,950	6
88	0.907391	0.092609	0.092968	25,832	5
89	0.899000	0.101000	0.101601	25,617	5
90	0.889308	0.110692	0.111603	25,296	4
91	0.877960	0.122040	0.123354	24,865	4
92	0.864449	0.135551	0.137397	24,316	4
93	0.848026	0.151974	0.154536	23,642	3
94	0.827533	0.172467	0.176020	22,836	3
95	0.801065	0.198935	0.203904	21,891	2
96	0.765238	0.234762	0.241853	20,800	2

Tabla 4 Tasas de muerte, fuerza y densidad de mortalidad y esperanza de vida.					
Edad	P_x	q_x	μ_x	$10^6 Y(x)\mu_x$	$\dot{e}_x$
97	0.713354	0.286646	0.297130	19,555	1
98	0.629927	0.370073	0.386561	18,148	1
99	0.468791	0.531209	0.560362	16,572	0
100	0.000000	1.000000	1.068835	14,818	0

En esta tabla se muestran los valores de las tasas de muerte, fuerza de mortalidad, comportamiento de la densidad de muertes y esperanza de vida construidas mediante las fórmulas que a continuación se presentan, las cuales parten de nuestra propuesta $Y(x)$.

Fórmulas:

$$P_X = \frac{1-(-1.3266E-09(X+1)^5 + 3.1944E-07(X+1)^4 - 2.6061-05(X+1)^3 + 9.9495E-04(X+1)^2 - 1.683E-02(X+1) + 1.018E-02)}{1-(-1.3266E-09(X)^5 + 3.1944E-07(X)^4 - 2.6061-05(X)^3 + 9.9495E-04(X)^2 - 1.683E-02(X) + 1.018E-02)}$$

$$\mu_X = \frac{(-6.633032E-09X^4 + 1.27778E-06ZX^3 - 7.818197E-05X^2 + 1.98991E-03X - 1.682986E-02)}{1-(-1.3266E-09(X)^5 + 3.1944E-07(X)^4 - 2.6061-05(X)^3 + 9.9495E-04(X)^2 - 1.683E-02(X) + 1.018E-02)}$$

$$\dot{e}_x = E[T(x)] = \int_0^{\infty} t\,{}_tP_x\,\mu_{x+t}\,dt$$

Capítulo 3

Nota Técnica

3.1 Introducción

En este Capítulo se desarrollará una Nota Técnica para un plan del seguro de vida, como lo es un seguro temporal a 15 años, tomando en cuenta la teoría desarrollada en el Capítulo 1 y 2, es decir modelos probabilísticos continuos y recargados para dar certidumbre en el cobro por nuestro producto, que están basados en la aproximación que realizamos de la función de sobrevivencia a partir de la Tabla de Mortalidad CNSF 2000 I.

3.2 Nota Técnica

3.2.1 Introducción.

La presente Nota Técnica está conformada por los elementos señalados en la CIRCULAR S-8.1, que señala a las instituciones y sociedades mutualistas de seguros la forma y términos para el registro de productos de seguros y realizada bajo un enfoque actuarial del seguro de vida probabilísticamente continuo que se justifica y desarrolla en los Capítulos 1, 2 con la aproximación continua de la función de sobrevivencia $S(x)$.

3.2.2 Descripción del Producto

Este es un Seguro de Vida Temporal con una vigencia de 15 años, con un período de pago m donde $m \in [0,15]$, cuya cobertura básica es el pago de una $S.A.$ (pactada al momento de la contratación del seguro) al fallecimiento del Asegurado siempre y cuando éste se haya presentado dentro de la vigencia del seguro.

3.2.3 Hipótesis Demográficas

Se utiliza la tabla de mortalidad CNSF 2000 I, como base para obtener una aproximación de una función de sobrevivencia de tipo continuo.

3.2.4 Hipótesis Financieras

Tasa de interés técnico supuesta $i = 5\%$ anual.

3.2.5 Cálculo de la Prima Neta Única (PNU)

Ésta se obtendrá como el valor esperado de la siguiente variable aleatoria de tipo continuo, que representa el valor presente de un pago en el tiempo:

$$z_{T(x)} = \begin{cases} S.A.\ v_T & 0 \le t \le 15 \\ 0 & t > 15 \end{cases}$$

$$\text{con } v_T = (1+i)^{-t} = V^t \quad t \ge 0$$

es decir:

$$E[z_{T(x)}] = \int_0^{\infty} z_{T(x)}\ g(t)\ dt = S.A. \cdot \int_0^{15} V^t\ {}_tP_x\ \mu_{x+t}\ dt$$

cuyo resultado lo denotaremos como $S.A. \cdot \bar{A}^1_{x:\overline{15}|}$

Donde se define a:

$z_{T(x)}$: Variable aleatoria que representa el valor presente de un pago en el tiempo que esta en función de la variable $T(x)$.

$T(x)$: Variable Aleatoria de tipo continuo que representa el tiempo futuro de vida de la persona de edad x.

$g(x)$: Representación de la función de densidad o probabilidad de la variable aleatoria $T(x)$.

${}_tP_x$: Probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+t$.

μ_{x+t}: Fuerza de mortalidad, tasa instantánea de muerte que presentará la rapidez de cambio en la mortalidad para un individuo de edad $x+t$.

v_t: Función de descuento, en este caso interés compuesto.

$S.A.$: Suma Asegurada.

$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$: Prima Neta Única del seguro temporal a n años con una $S.A.$ de una unidad monetaria

Ahora bien para efecto de asegurar que con una confianza del 97.5% la PNU es suficiente para solventar la obligación contraída con el Asegurado, consideramos un recargo igual a:

$$\mathrm{Recargo} = \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n}$$

donde:

$\mathbf{Z}^{97.5\%}$ es el cuantil que acumula 97.5% de probabilidad de la variable aleatoria $\mathbf{Z}$ que se distribuye como una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 1 según el Teorema del Límite Central, $\sqrt{V(S_n)}$ es la desviación estándar de la variable aleatoria S_n, riesgo total de la cartera de Asegurados de la compañía aseguradora y n es el número de Asegurados que integran la cartera de seguros.

Así la PNU es:

$$PNU^{\mathbf{Rec}} = S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{15|}} + \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n}$$

Cabe señalar que el porcentaje de confianza para el recargo puede asignarse según las necesidades del producto y la experiencia que se tenga del mercado asegurador, ya que este recargo no debe ser factor en la rentabilidad de los productos.

3.2.6 Cálculo de la Prima Neta Nivelada (PNN)

Ésta se obtendrá de la consideración de amortizar la PNU del seguro temporal a 15 años durante m años, según fije el Asegurado, donde $m \in (0,15]$, es decir, se obtendrá de igualar la obligación de la compañía a la obligación que tendrá el Asegurado en el período que él señale.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Obligacion} \\ \text{de la} \\ \text{Compañía} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Obligacion} \\ \text{del} \\ \text{Asegurado} \end{array} \right\}$$

Se define a la variable aleatoria continua $l(T(x))$ como el valor presente de la pérdida del asegurador si ocurre la muerte del Asegurado en el tiempo t, es decir:

$$l(T(x)) = z_{T(x)} - PNN \cdot Y$$

con

$$z_{T(x)} = \begin{cases} S.A.\ V^{t} & t \leq 15 \\ 0 & t > 15 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T(x)}|} & 0 \leq t < m \\ \bar{a}_{\overline{m}|} & t \geq m \end{cases}$$

y PNN como la Prima Neta Nivelada que pagara el Asegurado mientras esté con vida como requisito para hacerse acreedor a la cobertura del seguro contratado.

Ahora bien, la PNN se calcula bajo el principio de equivalencia que existe al inicio de la vigencia del seguro, donde la obligación de la compañía es igual a la obligación del Asegurado, es decir al tiempo cero bajo el concepto de valor esperado de la variable aleatoria $l(T(x))$ tenemos que:

$E[l(T(x))] = 0$ implica la deducción de PNN como:

$$\begin{aligned} & 0 = E[z_{T(x)} - PNN \cdot Y] \\ \Leftrightarrow\ & 0 = E[z_{T(x)}] - PNN \cdot E[Y] \\ \Leftrightarrow\ & PNN = \frac{E[z_{T(x)}]}{E[Y]} \end{aligned}$$

lo que significa que la PNN es:

$$PNN = \frac{S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}} \quad \text{donde } m \in (0,15]$$

y adicionando el recargo realizado a la PNU tendremos que:

$$PNN^{Rec} = \frac{S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|} + \dfrac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n}}{\bar{a}_{x:\overline{m}|}}$$

3.2.7 Prima de Tarifa ($\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}}$)

Estará constituida por la PNN recargada más los gastos de administración, adquisición y margen de utilidad de la compañía de seguros, y se expresarán en función de la misma Prima de Tarifa, es decir:

Si:

Los Gastos de Administración son igual a δ

Los Gastos de Operación es igual a β.

El Margen de Utilidad es igual a μ

Entonces la prima de Tarifa se obtendrá de la siguiente igualdad:

$$\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}} = PNN^{Rec} + \delta\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}} + \beta\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}} + \mu\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}}$$

que implica que ésta será:

$$\pi_{\bar{A}^1_{x:\overline{15}|}} = \frac{PNN^{Rec}}{1-(\delta+\beta+\mu)}$$

3.2.8 Reserva Matemática

Para el cálculo de ésta partiremos del principio de equivalencia que existe entre las obligaciones del Asegurado y las obligaciones de la compañía de seguros, al momento de contratación del seguro, definiendo la variable aleatoria ${}_tL$ como la pérdida proyectada en el tiempo t de la siguiente forma:

$${}_tL = z_U - PNN \cdot Y \text{ donde si } m > t$$

$$z_U = \begin{cases} S.A\ V^u & 0 \le u \le 15-t \\ 0 & u > 15-t \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{U}|} & 0 \le u < m-t \\ \bar{a}_{\overline{m}|} & u \ge m-t \end{cases}$$

y si $m \leq t$

$$ {}_tL = z_U \text{ con} $$

$$ z_U = \begin{cases} S.A.\, V^u & 0 \leq u \leq 15-t \\ 0 & u > 15-t \end{cases} $$

Donde m es el período de pago elegido por el Asegurado.

Ésta variable aleatoria ${}_tL$ depende de la variable aleatoria U que es el tiempo trascurrido hasta que sobreviene la muerte de la persona de edad $(x+t)$, cuya función de densidad está dada por la expresión:

$$ {}_uP_{x} \cdot {}_t\,\mu_{x+t+u} \quad \text{con} \quad 0 \leq u \leq 15-t $$

ya que la distribución de U es la distribución probabilística de $T(x)\text{-}t$ dado que $T(x) > t$. De este modo definiremos la reserva matemática del plan de seguros como el valor esperado de la variable aleatoria ${}_tL$, la pérdida proyectada en el tiempo t y la denotaremos como ${}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|})$.

$$ \begin{aligned} {}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) &= E[z_U - PNN \cdot Y] \\ &= S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} - PNN \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \end{aligned} $$

Para el primer caso y para el segundo.

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = E[z_U] = S.A. \cdot \bar{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} $$

Es decir, la reserva es igual al valor de la obligación futura que tiene la compañía aseguradora con el Asegurado a edad $x+t$ menos el valor de la obligación futura del Asegurado con la compañía de seguros a dicha edad.

Ahora bien para efecto de añadir un margen de seguridad al valor de la Reserva Matemática, consideraremos un recargo por la siniestralidad que pudiera tener la compañía aseguradora dada su cartera de clientes, de tal manera que el cálculo de la reserva matemática será.

Para el primer caso.

$$ {}_t\overline{V}^{\mathbf{Rec}}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = S.A. \cdot \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} + \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n} - PNN^{\mathbf{Rec}} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

Y para el segundo

$$ {}_t\overline{V}^{\mathbf{Rec}}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = S.A. \cdot \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} + \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n} $$

3.2.9 Valores Garantizados

3.2.9.1 Valor de Rescate

Se devolverá al Asegurado el importe que corresponda de la reserva matemática una vez restados los gastos en que incurrió la compañía de seguros y se definirá como:

$$ {}_tR_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} \max\left\{75\% \cdot {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}), {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}) - \text{Gastos}\right\} & \text{si } 3 \le t < 15 \\ 0 \quad \text{e.o.c.} \end{cases} $$

Donde t denota el momento de cancelación de la póliza de seguros y los gastos no devengados según definimos en la prima de tarifa corresponden a:

$$ \frac{(\delta + \beta + \mu)}{1 - (\delta + \beta + \mu)} PNN^{\text{Rec}} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} $$

3.2.9.2 Seguro Prorrogado

Se permuta el importe del valor de rescate por un seguro que tenga la misma $S.A.$ pero por un tiempo de exposición menor.

Para encontrar cuanto es el tiempo de cobertura de este nuevo seguro bastará resolver la siguiente ecuación.

$$
\begin{aligned}
{}_tR_{x:\overline{n|}} &= PNU^{\mathbf{Re}c} \\
&= S.A.\cdot \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{P|}} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha}\cdot\sqrt{V(S_{n'})}}{n'}
\end{aligned}
$$

Donde $P < n - t$.

3.2.9.3 Seguro Saldado

Este consiste en permutar el valor de rescate por un seguro que cubra el lapso de tiempo que restaba pero con una obligación para al compañía menor a la pactada originalmente.

Para encontrar esta nueva obligación basta con observar que el valor de rescate tiene que ser igual a:

$$
{}_tR_{x:\overline{n|}} = S.A.^{\mathbf{mod}}\cdot \overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \frac{\mathbf{Z}^{\alpha}\cdot\sqrt{V(S_{n'})}}{n'}
$$

De donde se consigue que:

$$
S.A.^{\mathbf{mod}} = \frac{{}_tR_{x:\overline{n|}}}{\overline{A}^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \dfrac{\mathbf{Z}^{\alpha}\cdot\sqrt{V(S_{n'})}}{n'}}
$$

3.3 Función de Sobrevivencia Propuesta

Según el planteamiento realizado en el Capítulo 1 para aproximar una función polinómica a la función probabilística $F(x)$, tenemos que la función de Sobrevivencia ajustada es:

$$\tilde{S}(x) = 1 - Y(x)$$

Donde $Y(x)$ es la aproximación dada en el Capítulo 2 para la probabilidad de que un recién nacido fallezca antes de llegar a la edad x y cuya expresión algebraica es:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 17 \\ -1.32E\text{-}9x^5 + 3.19E\text{-}7x^4 - 2.60E\text{-}05x^3 + 9.94E\text{-}4x^2 - 1.6E\text{-}2x + 1.01E\text{-}1 & \text{si } 17 \le x < 101 \\ 1 & \text{si } 101 \le x \end{cases}$$

Esta función es el resultado de la tendencia del fenómeno rescatado de la tabla CNSF 2000 I, la cual cumple con las características de una función de probabilidad por su construcción, además de tener una r, r^2 muy cercada a uno, lo que nos indica su buena asociación al fenómeno de muerte.

Por lo tanto como modelo final presentamos a $\tilde{S}(x)$ como:

$$\tilde{S}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 17 \\ 1 - (-1.32E\text{-}9x^5 + 3.19E\text{-}7x^4 - 2.60E\text{-}05x^3 + 9.94E\text{-}4x^2 - 1.6E\text{-}2x + 1.01E\text{-}1) & \text{si } 17 \le x < 101 \\ 0 & \text{si } 101 \le x \end{cases}$$

3.4 Valuación de la PNU, PNN, Anualidad Contingente Temporal y Reserva Matemática

A continuación presentamos un análisis comparativo entre las tarifas obtenidas de forma clásica y las obtenidas con nuestros modelos para nuestro plan de seguro de vida temporal a 15 años, del mismo modo se obtendrán y se comparará la Reserva Matemática que se obtiene bajo los diferentes esquemas propuestos analizando su comportamiento, estabilidad y que tan viable pueden ser respecto a la forma clásica de obtenerla basándonos en la tabla de mortalidad CNSF 2000 I.

3.4.1 Bajo el supuesto de Mortalidad Uniforme

Primeramente cabe señalar que nuestro enfoque es totalmente continuo, es decir, dado que partimos de una función de sobrevivencia continua, todos los modelos que se desprenden de esta también lo son, tal como la tarifa y reserva matemática, por lo cual para efecto de comparar modelos similares obtendremos una aproximación continua que comúnmente se realiza en la practica para el enfoque clásico suponiendo que la tasa de mortalidad se mantiene constante entre edades contiguas.

Es decir, desde el punto de vista del enfoque clásico la PNU de un seguro temporal a 15 años se calcula como:

$$A^{1}_{x:\overline{15|}} = \sum_{t=1}^{15} V^{t} \cdot {}_{t-1|}q_{x}$$

y una aproximación continúa bajo la hipótesis de que la tasa de mortalidad es uniforme entre cada edad x y $x+1$ es:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{15|}} = A^{1}_{x:\overline{15|}} \cdot \frac{i}{\delta}$$

Donde i es la tasa de Interés Técnico que establece el valor del dinero en el tiempo y δ es la fuerza de interés, tasa instantánea de interés. (Demostración en hoja de Citas y observaciones [6])

De igual forma y bajo el mismo supuesto de uniformidad en la tasa de muerte o equivalentemente en la de sobrevivencia, obtendremos una aproximación continua de una anualidad temporal a 15 años utilizando como aproximación la siguiente expresión que se consigue como resultado del limite cuando n tiende a ser muy grande de una anualidad anticipada temporal a 15 años pagadera m veces al año durante el periodo de vigencia del seguro [7].

$$\bar{a}_{x:\overline{15|}} = \ddot{a}_{x:\overline{15|}} - (1 - {}_{15}E_x) \cdot \tfrac{1}{2} \text{ con } \ddot{a}_{x:\overline{15|}} = \sum_{t=0}^{14} V^t \cdot {}_tP_x \text{ y } {}_tE_x = V^t\,{}_tP_x$$

A partir de estos elementos y utilizando las tablas CNSF 2000 I podemos obtener una aproximación del cálculo de la tarifa del plan de seguros temporal a 15 años de forma continua, el cual será punto de comparación de nuestros modelos.

A continuación presentamos los valores puntuales de la PNU Discreta, PNU Continua y la Anualidad Continua Temporal a 15 años según las aproximaciones presentadas anteriormente, bajo la hipótesis de una tasa de interés técnico del 5% y un valor de δ igual a 4.879%.

Tabla 1 PNU y Anualidad Continua Temporal a 15 años.
(Enfoque Clásico)

Edad	Factor de ajuste x Continuidad	Prima Neta Única Discreta	Aproximación de la Prima Neta Única Continua	Aproximación de la Anualidad Continua Temporal 15 años
12	102.48%	0.006779	0.006947	10.60
13	102.48%	0.007300	0.007481	10.60
14	102.48%	0.007859	0.008054	10.59
15	102.48%	0.008461	0.008671	10.59
16	102.48%	0.009110	0.009336	10.59
17	102.48%	0.009808	0.010051	10.58
18	102.48%	0.010558	0.010820	10.58
19	102.48%	0.011365	0.011647	10.57
20	102.48%	0.012233	0.012537	10.57
21	102.48%	0.013168	0.013495	10.56
22	102.48%	0.014174	0.014525	10.56
23	102.48%	0.015255	0.015633	10.55
24	102.48%	0.016418	0.016825	10.54
25	102.48%	0.017668	0.018106	10.54
26	102.48%	0.019012	0.019483	10.53
27	102.48%	0.020456	0.020964	10.52
28	102.48%	0.022009	0.022555	10.51
29	102.48%	0.023678	0.024265	10.50
30	102.48%	0.025471	0.026102	10.49
31	102.48%	0.027397	0.028076	10.48
32	102.48%	0.029465	0.030196	10.47

Tabla 1 PNU y Anualidad Continua Temporal a 15 años. (Enfoque Clásico)				
Edad	**Factor de ajuste x Continuidad**	**Prima Neta Única Discreta**	**Aproximación de la Prima Neta Única Continua**	**Aproximación de la Anualidad Continua Temporal 15 años**
33	102.48%	0.031686	0.032472	10.46
34	102.48%	0.034070	0.034915	10.44
35	102.48%	0.036628	0.037537	10.43
36	102.48%	0.039372	0.040349	10.41
37	102.48%	0.042315	0.043364	10.39
38	102.48%	0.045471	0.046598	10.37
39	102.48%	0.048853	0.050064	10.35
40	102.48%	0.052476	0.053777	10.33
41	102.48%	0.056356	0.057753	10.31
42	102.48%	0.060508	0.062009	10.29
43	102.48%	0.064951	0.066562	10.26
44	102.48%	0.069703	0.071431	10.23
45	102.48%	0.074781	0.076635	10.20
46	102.48%	0.080205	0.082194	10.17
47	102.48%	0.085993	0.088126	10.13
48	102.48%	0.092169	0.094454	10.10
49	102.48%	0.098750	0.101199	10.06
50	102.48%	0.105760	0.108383	10.01
51	102.48%	0.113219	0.116027	9.97
52	102.48%	0.121150	0.124154	9.92
53	102.48%	0.129573	0.132786	9.87
54	102.48%	0.138509	0.141943	9.81
55	102.48%	0.147980	0.151649	9.75
56	102.48%	0.158004	0.161922	9.69
57	102.48%	0.168601	0.172782	9.62
58	102.48%	0.179788	0.184246	9.55
59	102.48%	0.191579	0.196329	9.47
60	102.48%	0.203988	0.209046	9.39

En esta tabla se muestra la PNU discreta, el factor por aproximación a un modelo continuo, la aproximación a la PNU continua, además de la aproximación de una anualidad continua temporal a 15 años.

Una vez obtenidos estos resultados podemos obtener bajo un esquema nivelado la tarifa a cobrar por la compañía de seguros, sí el Asegurado planteara amortizar su pago durante toda la vigencia del seguro de vida, es decir durante 15 años, de esta manera la PNN de este plan de seguros temporal seria el resultado de dividir la PNU entre la anualidad continua temporal a 15 años como se muestra a continuación:

$$\mathrm{PNN} = \frac{1 \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}}{\bar{a}_{x:\overline{15}|}}$$

Es importante señalar que comúnmente la amortización del pago de un seguro de vida es de forma mensual o bien quincenal, en nuestro caso estamos suponiendo que es de forma continua, principalmente para tener un modelo en su totalidad continuo ya que para efectos de valuación y cálculo esto nos facilitaría la obtención numérica del valor de la tarifa, además pensando en el modelo de reserva matemática esto podría darnos un cálculo exacto a cualquier fecha de valuación, y no necesariamente haciendo un corte mensual sino incluso podría ser diario.

A continuación se presenta esta valuación de la PNN a partir de los valores de la tabla anterior.

Tabla 2 Aproximación de la PNN de un Seguro Continuo Temporal 15 años

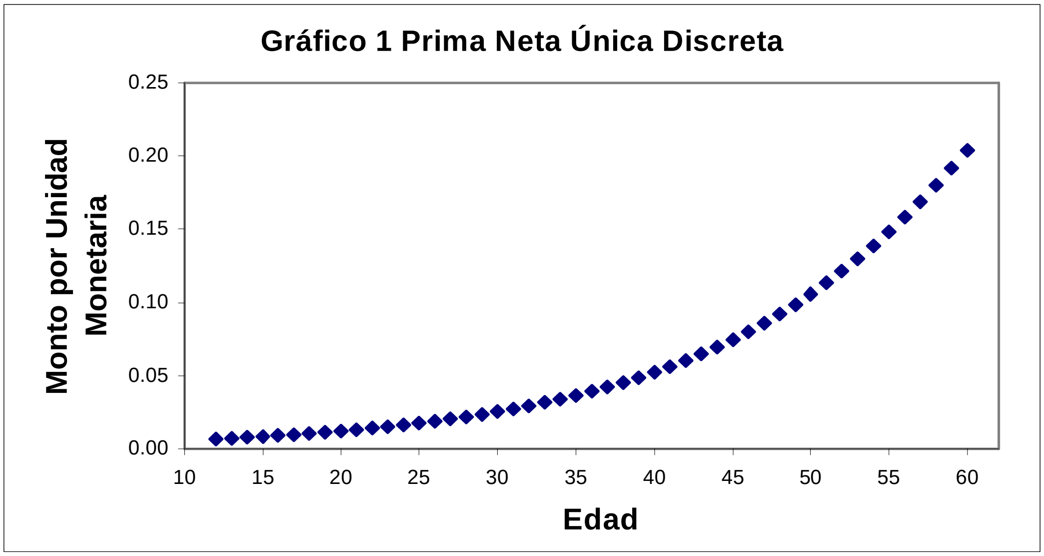
Edad	Prima Neta Nivelada Continua	Edad	Prima Neta Nivelada Continua	Edad	Prima Neta Nivelada Continua
12	0.000657	30	0.002488	48	0.009356
13	0.000706	31	0.002679	49	0.010064
14	0.000760	32	0.002885	50	0.010825
15	0.000819	33	0.003106	51	0.011641
16	0.000882	34	0.003344	52	0.012518
17	0.000950	35	0.003600	53	0.013459
18	0.001023	36	0.003876	54	0.014468
19	0.001102	37	0.004173	55	0.015551
20	0.001186	38	0.004492	56	0.016712
21	0.001278	39	0.004835	57	0.017958
22	0.001376	40	0.005205	58	0.019292
23	0.001482	41	0.005602	59	0.020721
24	0.001596	42	0.006029	60	0.022252
25	0.001718	43	0.006488		
26	0.001850	44	0.006982		
27	0.001993	45	0.007513		
28	0.002146	46	0.008084		
29	0.002311	47	0.008697		

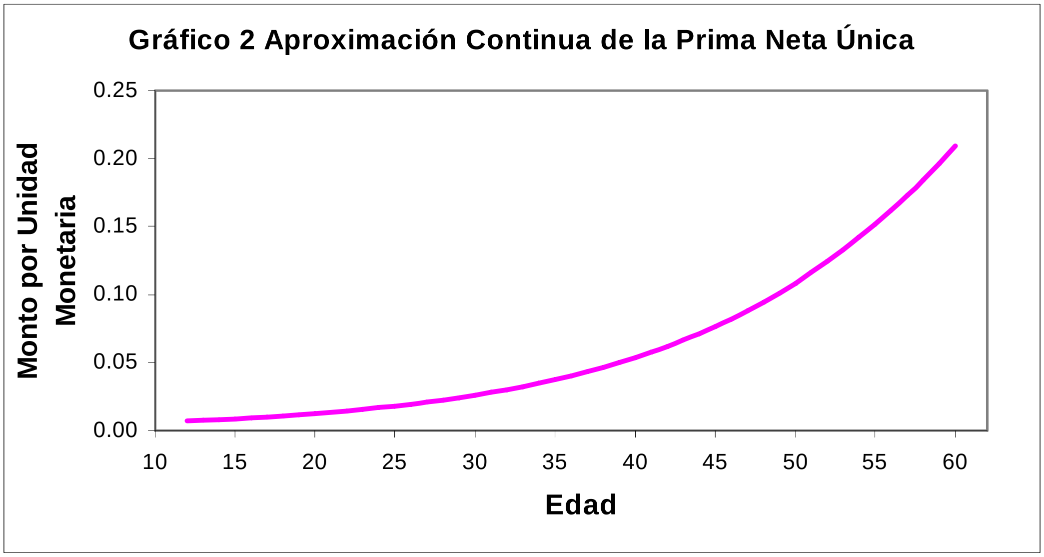
En esta tabla se muestra la valuación de la aproximación continua de la PNN por edad para un seguro de vida temporal a 15 años.

Como siguiente paso presentamos gráficos que muestran el comportamiento de la valuación de la PNU del enfoque discreto de la teoría del seguro de vida así como las aproximaciones continuas de la PNU, PNN y de la Anualidad Contingente Temporal a 15 años expuestas anteriormente.

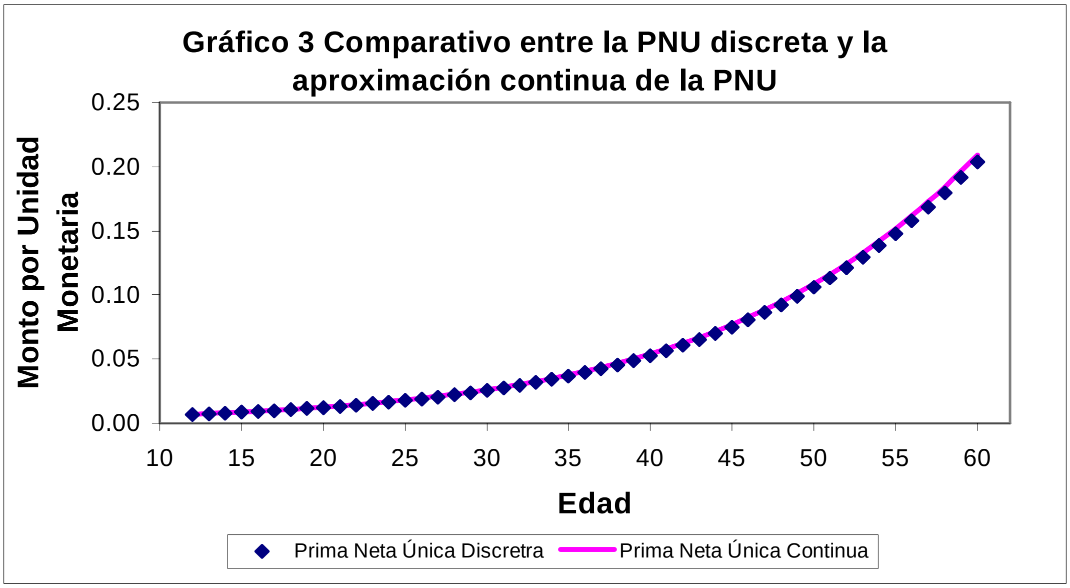
Además se muestra un gráfico comparativo entre la PNU discreta y la aproximación a la PNU continua con lo cual podremos ver el ajuste que se realiza al modelo discreto para hacerlo continuo.

Cabe señalar que los siguientes gráficos serán la base de comparación para mostrar que tan similares o distantes son las aproximación propuestas mediante modelos probabilísticos continuos, basados en familias de funciones que asemejan la tendencia del fenómeno de mortalidad descrito en la experiencia mexicana del sector asegurador y que se traduce en las tablas de mortalidad que ha dado a conocer la CNSF y que para este trabajo fueron utilizadas.

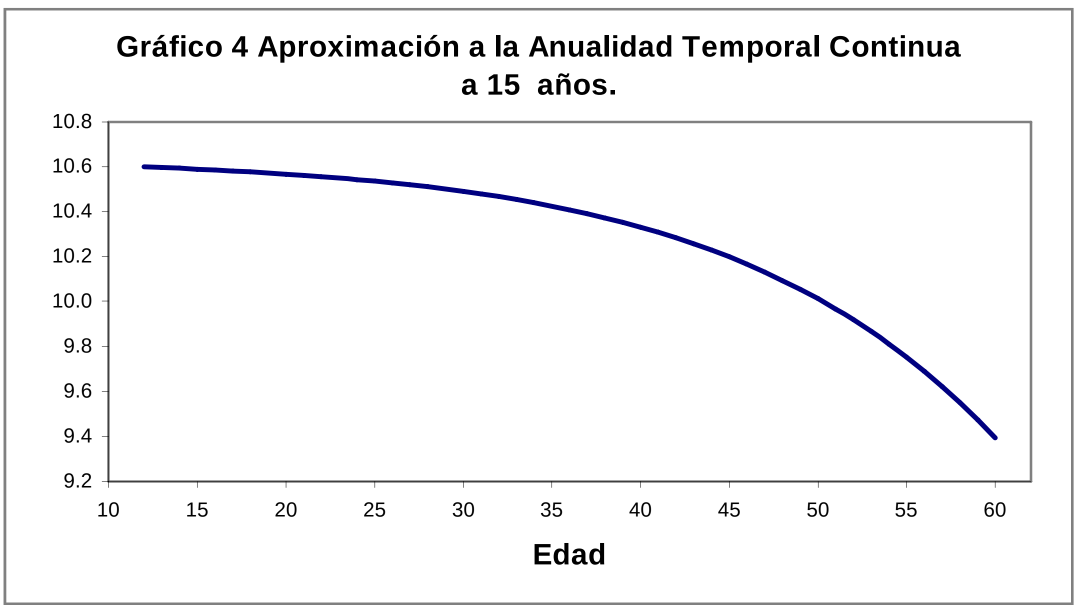




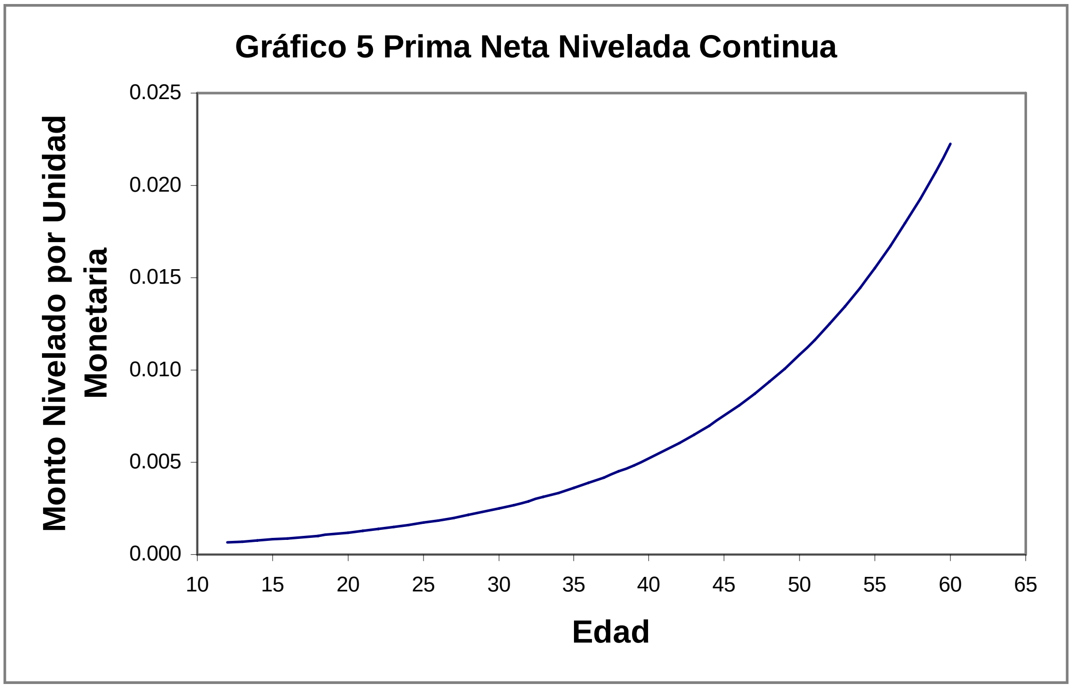
Tal como se muestra en el gráfico 1 y 2 el comportamiento del fenómeno aleatorio del cobro por un plan de seguro continuo o discreto temporal a 15 años es creciente en el tiempo para cada edad, ya que a mayor edad mayor es el riego de muerte para una persona.



En este gráfico podemos apreciar que el comportamiento entre la tendencia descrita por la PNU discreta y la PNU continua son idénticas, tan solo existe la variación constante del recargo que fue hecho a la PNU discreta para aproximarse a la PNU continua, el cual es $\frac{i}{\delta}-1$ y equivale a un valor constante de 2.48% como se muestre en la Tabla número 1.



En este gráfico se muestra el comportamiento de la aproximación continua de la anualidad temporal a 15 años, el cual es decreciente ya que entre mayor edad del individuo menor probabilidad de sobrevivencia de este.



Como se observa en este gráfico la PNN tiene la misma tendencia que la PNU ya que el factor de amortización por el cual se divide es muy estable, estando cerca al valor de 10 años.

3.4.2 Bajo el supuesto de una función de probabilidad F(x) polinómica

Ahora bien, bajo nuestro modelo probabilístico propuesto en el Capítulo 2 y la metodología del enfoque moderno expuesto en el Capítulo 1 se ha realizado el cálculo de la PNU, PNN y anualidad temporal a 15 años de nuestro plan de seguros, cabe señalar que nuestro modelo probabilístico continuo propuesto de $F(x)$ tiene una diferencia máxima de 3.7% respecto a la obtenida de la tabla CNSF 2000 I la cual se alcanza durante las últimas décadas de vida y en la parte baja de edades diferencias por debajo del 2% lo cual hace de estas diferencias poco significativas y permite recatar de buena manera el fenómeno de sobrevivencia y muerte de un individuo recién nacido.

A continuación presentamos la valuación de la PNU, PNN y anualidad temporal a 15 años utilizando nuestro modelo de función de sobrevivencia basado en una aproximación mediante una función polinómica de quinto grado la cual se expuso en el Capítulo 2 y presentamos a continuación.

$$\tilde{S}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 17 \\ 1 - (-1.32E\text{-}9x^5 + 3.19E\text{-}7x^4 - 2.60E\text{-}05x^3 + 9.94E\text{-}4x^2 - 1.6E\text{-}2x + 1.01E\text{-}1) & \text{si } 17 \le x < 101 \\ 0 & \text{si } 101 \le x \end{cases}$$

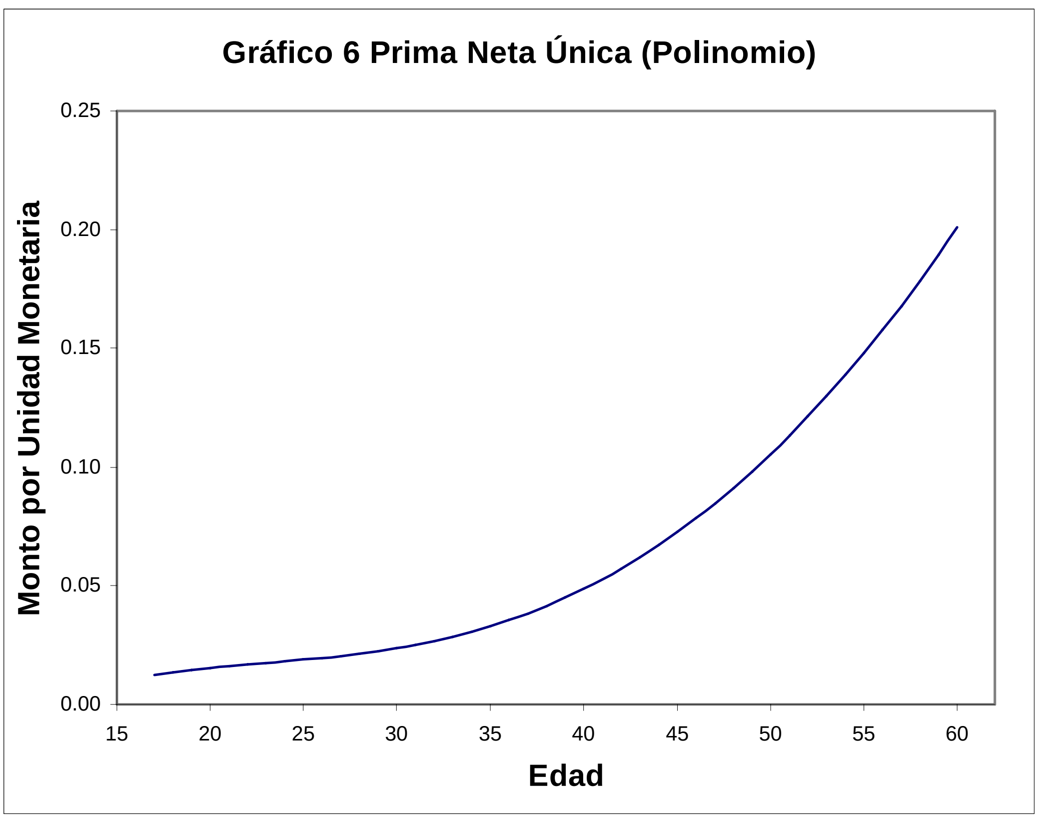
Tabla 3 Valuación de la PNU, PNN y Anualidad Temporal a 15 años Continua, bajo un modelo de función de Sobrevivencia Polinomico.

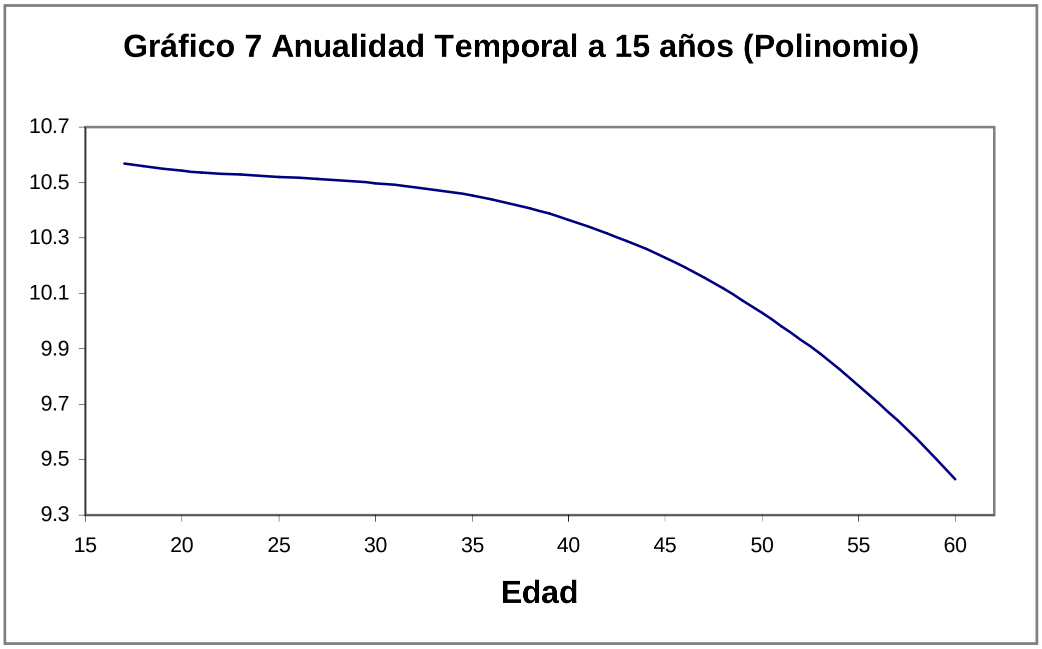
Edad	Prima Neta Única	Anualidad Temporal	Prima Neta Nivelada
17	0.012266	10.57	0.001161
18	0.013454	10.56	0.001274
19	0.014461	10.55	0.001371
20	0.015325	10.54	0.001454
21	0.016085	10.54	0.001526
22	0.016776	10.53	0.001593
23	0.017431	10.53	0.001656
24	0.018082	10.52	0.001718
25	0.018760	10.52	0.001783
26	0.019494	10.52	0.001853
27	0.020312	10.51	0.001932
28	0.021240	10.51	0.002021
29	0.022303	10.50	0.002123
30	0.023523	10.50	0.002241
31	0.024922	10.49	0.002375
32	0.026521	10.48	0.002530
33	0.028339	10.48	0.002705
34	0.030392	10.47	0.002904
35	0.032697	10.45	0.003128
36	0.035269	10.44	0.003378
37	0.038120	10.42	0.003657
38	0.041263	10.41	0.003965
39	0.044709	10.39	0.004304
40	0.048468	10.37	0.004675
41	0.052548	10.35	0.005080
42	0.056958	10.32	0.005519
43	0.061705	10.29	0.005995
44	0.066795	10.26	0.006508
45	0.072235	10.23	0.007060
46	0.078030	10.20	0.007652
47	0.084185	10.16	0.008286
48	0.090705	10.12	0.008962
49	0.097595	10.08	0.009683
50	0.104860	10.03	0.010450
51	0.112505	9.99	0.011264
52	0.120535	9.94	0.012128
53	0.128956	9.89	0.013045
54	0.137773	9.83	0.014015
55	0.146993	9.77	0.015041
56	0.156624	9.71	0.016127

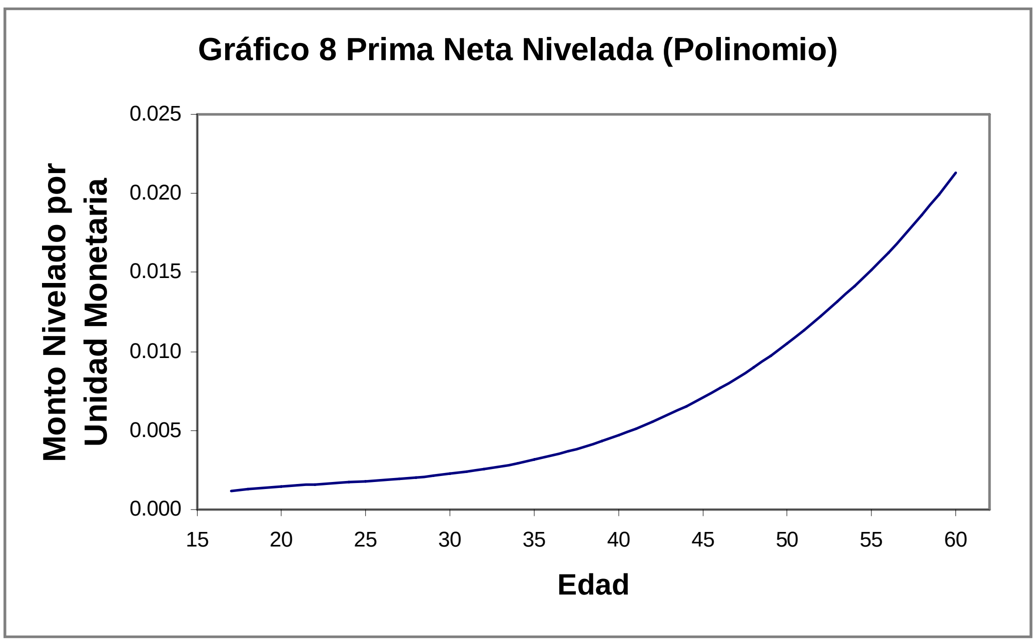
Tabla 3 Valuación de la PNU, PNN y Anualidad Temporal a 15 años Continua, bajo un modelo de función de Sobrevivencia Polinomico.			
Edad	**Prima Neta Única**	**Anualidad Temporal**	**Prima Neta Nivelada**
57	0.166674	9.65	0.017276
58	0.177152	9.58	0.018491
59	0.188067	9.51	0.019775
60	0.199431	9.44	0.021133

En esta tabla se establecen los resultados obtenidos de la PNU, PNN y Anualidad continua temporal a 15 años bajo un modelo de función de sobrevivencia Polinomico para un rango de edad que va desde la edad 17 hasta la edad 60.

En los siguientes 3 gráficos mostramos el comportamiento de la PNU, PNN y anualidad temporal a 15 años, éstos muestran similitud con los expuestos con anterioridad teniendo como diferencias tan solo la inherente al ajuste realizado, cabe señalar que estos valores graficados que se exponen en al tabla anterior ponen en practica las funciones obtenidas a partir de una función de sobrevivencia polinómica de grado 5, que se muestran en el resumen de funciones de Anexo 1.







3.4.3 Bajo el supuesto de una función de probabilidad $F(x)$ potencial

Es importante destacar que además de partir de una propuesta de función de sobrevivencia polinómica, hemos dado otras propuestas como modelos alternativos que puedan ser utilizados para el cálculo y valuación de la PNU, PNN y anualidades basándonos tanto en polinomios de grado menor como en otro tipo de familias de funciones, tal es el caso de la familia exponencial y la potencial.

Por ejemplo, a continuación presentamos la valuación de los conceptos antes mencionados pero ahora bajo una propuesta de función de sobrevivencia de la familia potencial, aX^b, que tiene una diferencia máxima de 12.6% respecto a la función $F(x)$ obtenida con la tabla CNSF 2000 I.

Cabe destacar que esta diferencia es alcanzada en las edades ultimas y que la diferencia máxima alcanzada en edades centrales es de alrededor del 1%, lo cual al combinarse con el hecho de ser una expresión algebraica corta y fácil de manejar en las expresiones de las funciones que ocupamos para evaluar tanto las tarifas como la reserva matemática, hace de esta una propuesta atractiva para ser utilizada.

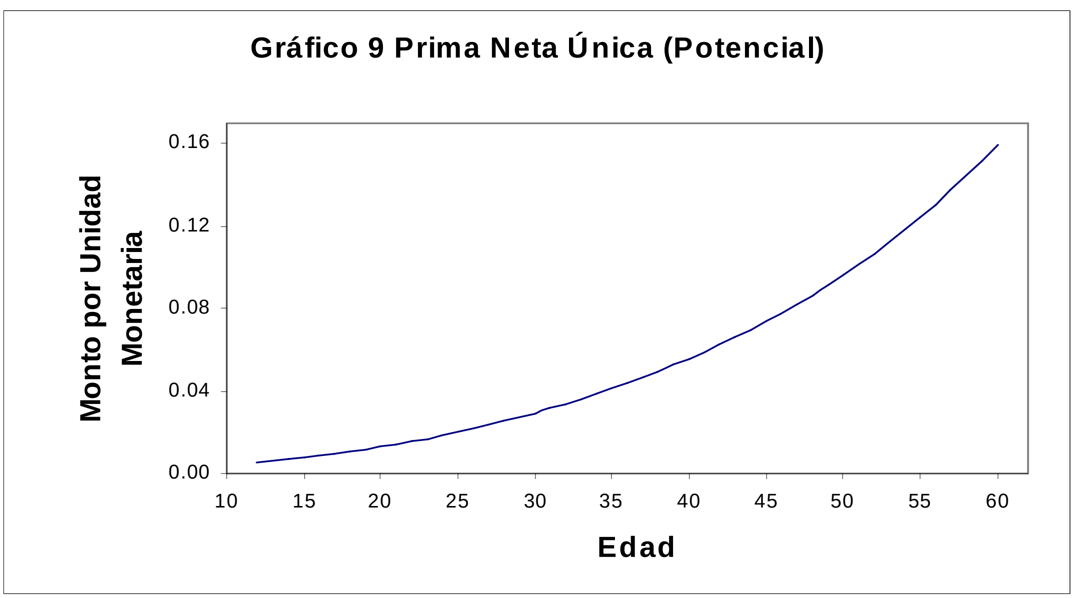
Tabla 4. Valuación de la PNU, PNN y Anualidad Temporal a 15 Continua, bajo un modelo de función de Sobrevivencia Potencial.

Edad	Prima Neta Única	Anualidad Temporal	Prima Neta Nivelada
12	0.005378	10.61	0.000507
13	0.006101	10.61	0.000575
14	0.006885	10.60	0.000649
15	0.007731	10.60	0.000730
16	0.008641	10.59	0.000816
17	0.009617	10.59	0.000908
18	0.010661	10.58	0.001008
19	0.011776	10.57	0.001114
20	0.012962	10.57	0.001227
21	0.014223	10.56	0.001347
22	0.015560	10.55	0.001475
23	0.016976	10.54	0.001610
24	0.018473	10.54	0.001753
25	0.020052	10.53	0.001905
26	0.021717	10.52	0.002065
27	0.023470	10.51	0.002234
28	0.025313	10.49	0.002412
29	0.027249	10.48	0.002599
30	0.029281	10.47	0.002797
31	0.031412	10.46	0.003004
32	0.033645	10.44	0.003222
33	0.035984	10.43	0.003450
34	0.038430	10.41	0.003690
35	0.040989	10.40	0.003942
36	0.043664	10.38	0.004205
37	0.046459	10.37	0.004482
38	0.049379	10.35	0.004772
39	0.052427	10.33	0.005076
40	0.055610	10.31	0.005394
41	0.058932	10.29	0.005727
42	0.062399	10.27	0.006077

Tabla 4. Valuación de la PNU, PNN y Anualidad Temporal a 15 Continua, bajo un modelo de función de Sobrevivencia Potencial.			
Edad	**Prima Neta Única**	**Anualidad Temporal**	**Prima Neta Nivelada**
43	0.066018	10.25	0.006443
44	0.069794	10.22	0.006827
45	0.073734	10.20	0.007230
46	0.077847	10.17	0.007653
47	0.082141	10.15	0.008096
48	0.086624	10.12	0.008561
49	0.091305	10.09	0.009050
50	0.096196	10.06	0.009563
51	0.101307	10.03	0.010103
52	0.106650	9.99	0.010671
53	0.112240	9.96	0.011270
54	0.118089	9.92	0.011901
55	0.124215	9.88	0.012566
56	0.130633	9.84	0.013269
57	0.137364	9.80	0.014013
58	0.144427	9.76	0.014800
59	0.151846	9.71	0.015634
60	0.159646	9.66	0.016520

En esta tabla se establecen los resultados obtenidos de la PNU, PNN y Anualidad continua temporal a 15 años bajo un modelo de función de sobrevivencia Potencial en un rango que va desde la edad 12 hasta la edad 60.

A continuación se presentan los gráficos de la PNU, PNN y anualidad temporal a 15 años que se obtienen con los datos de la tabla anterior, como se puede ver en los tres casos el comportamiento es el mismo que con los modelos anteriores y tan solo existe variación en la magnitud de la valuación.



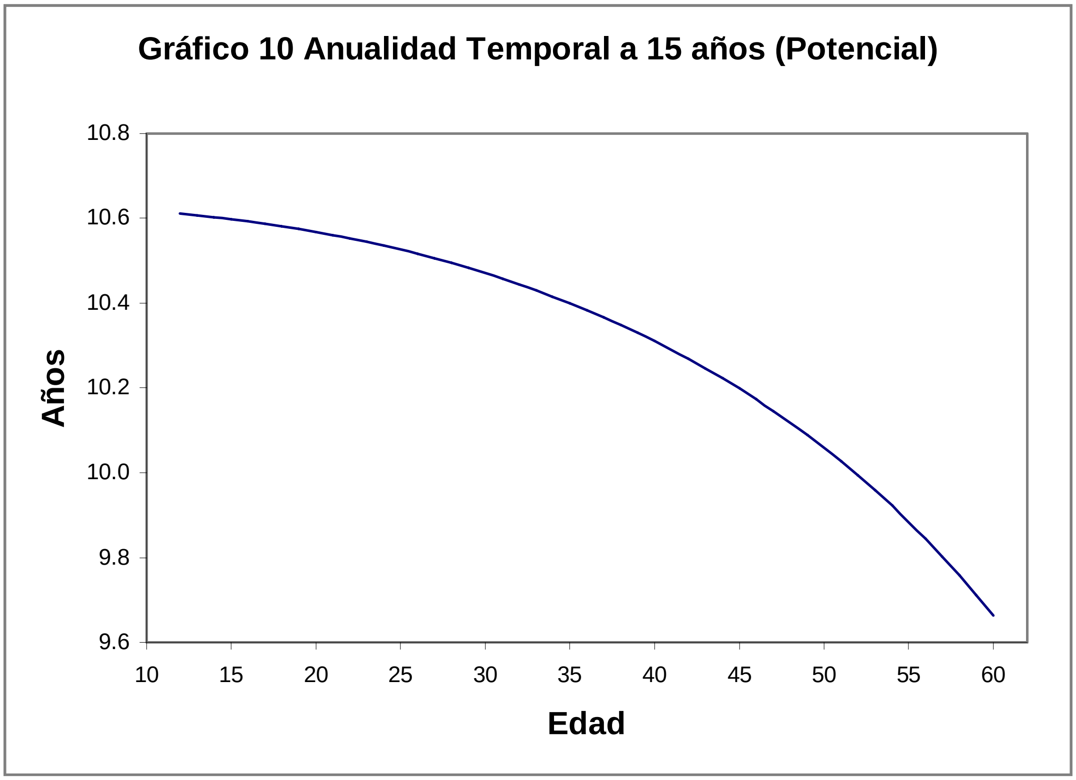


Gráfico 10 Anualidad Temporal a 15 años (Potencial)
Años
10.8
10.6
10.4
10.2
10.0
9.8
9.6
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
Edad

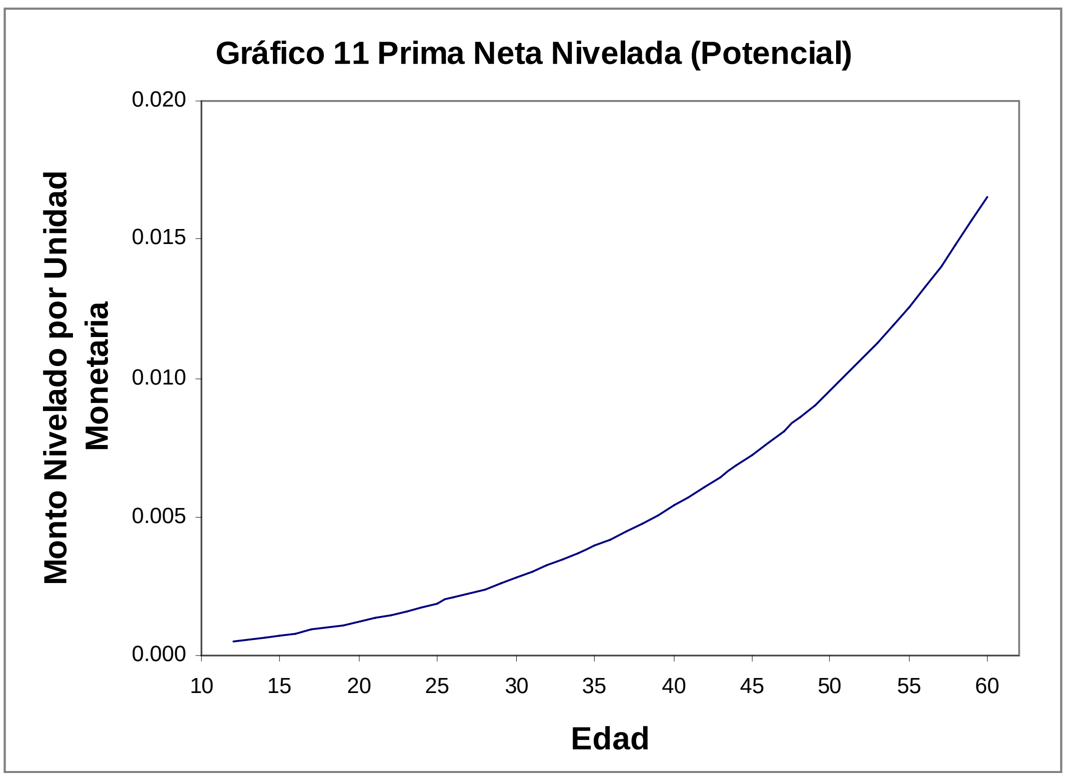


Gráfico 11 Prima Neta Nivelada (Potencial)
Monto Nivelado por Unidad Monetaria
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
Edad

3.5 Margen de Seguridad

Ahora bien, cada uno de nuestros modelos considera que existe una variación en el fenómeno de indemnización, $z_{T(x)}$, que podría provocar que la compañía de seguros no pueda cumplir con sus obligaciones y caer en insolvencia por la siniestralidad de su cartera de Asegurados, por esto cada uno de ellos lleva consigo un recargo que da un margen de seguridad a las primas cobradas, este recargo se expuso en el Capítulo 1 y esta basado en el Teorema del Límite Central ya que esta forma de recargar la tarifa es mas apegada a la realidad de una compañía aseguradora.

A continuación presentamos los valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo para el modelo de función de sobrevivencia polinómico.

$$PNU^{rec} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|} + \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{1{,}000 \cdot 1{,}000{,}000^{2} \cdot V(Z_{T(x)})}}{1{,}000}$$

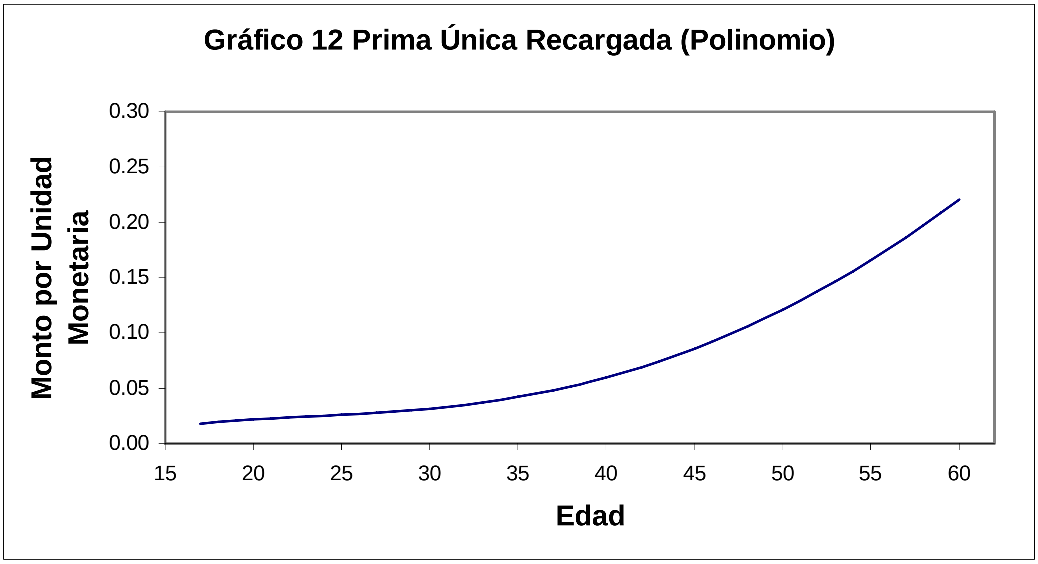
Tabla 5 Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo (Modelo Polinómico).

Edad	Prima Única Recargada	Prima Neta Nivelada Recargada
17	0.017895	0.001693
18	0.019404	0.001838
19	0.020667	0.001959
20	0.021740	0.002062
21	0.022672	0.002152
22	0.023511	0.002232
23	0.024297	0.002308
24	0.025071	0.002382
25	0.025869	0.002459
26	0.026727	0.002541
27	0.027678	0.002633
28	0.028751	0.002736
29	0.029975	0.002854
30	0.031377	0.002989
31	0.032980	0.003143
32	0.034805	0.003320
33	0.036873	0.003520
34	0.039201	0.003746
35	0.041805	0.003999
36	0.044699	0.004282
37	0.047894	0.004594

Tabla 5 Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo (Modelo Polinómico).		
Edad	**Prima Única Recargada**	**Prima Neta Nivelada Recargada**
38	0.051402	0.004939
39	0.055231	0.005316
40	0.059391	0.005728
41	0.063887	0.006176
42	0.068726	0.006660
43	0.073913	0.007181
44	0.079454	0.007742
45	0.085351	0.008342
46	0.091610	0.008984
47	0.098232	0.009668
48	0.105222	0.010397
49	0.112583	0.011170
50	0.120318	0.011990
51	0.128431	0.012859
52	0.136925	0.013778
53	0.145805	0.014749
54	0.155074	0.015775
55	0.164739	0.016857
56	0.174806	0.018000
57	0.185281	0.019205
58	0.196172	0.020476
59	0.207487	0.021817
60	0.219236	0.023232

Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo, bajo la base de un modelo polinómico.

A continuación se presentan las tendencias descritas por los valores obtenidos de la PNU y PNN recarga.



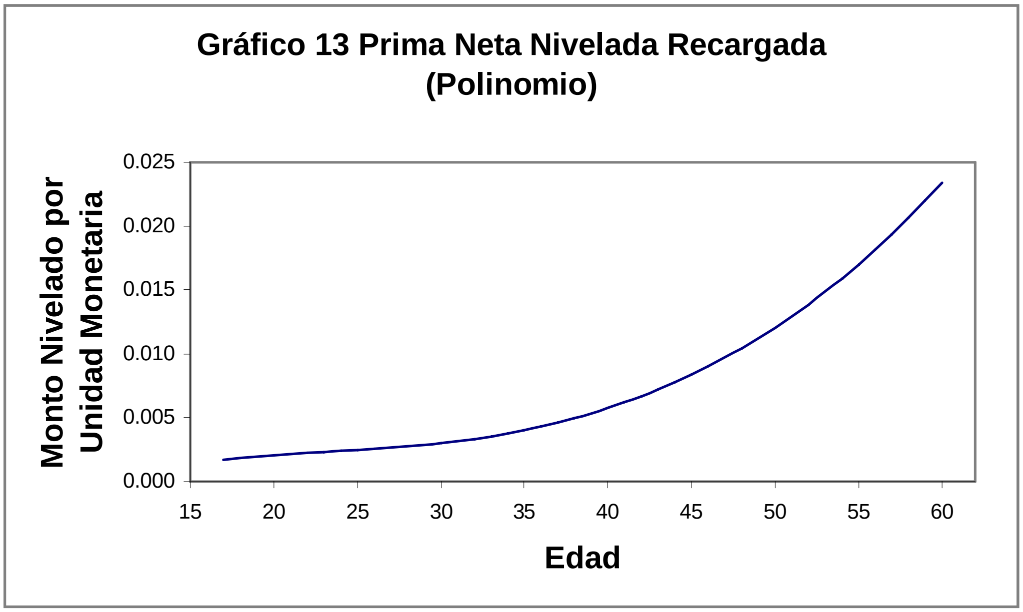


Gráfico 13 Prima Neta Nivelada Recargada (Polinomio)

Como se puede observar las tendencias descritas tienen la misma forma que el modelo teórico construido a partir de la tabla CNSF 2000 I, solo variando la magnitud del monto nivelado en el gráfico para cada valor.

A continuación presentamos los valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo para el modelo de función de sobrevivencia potencial.

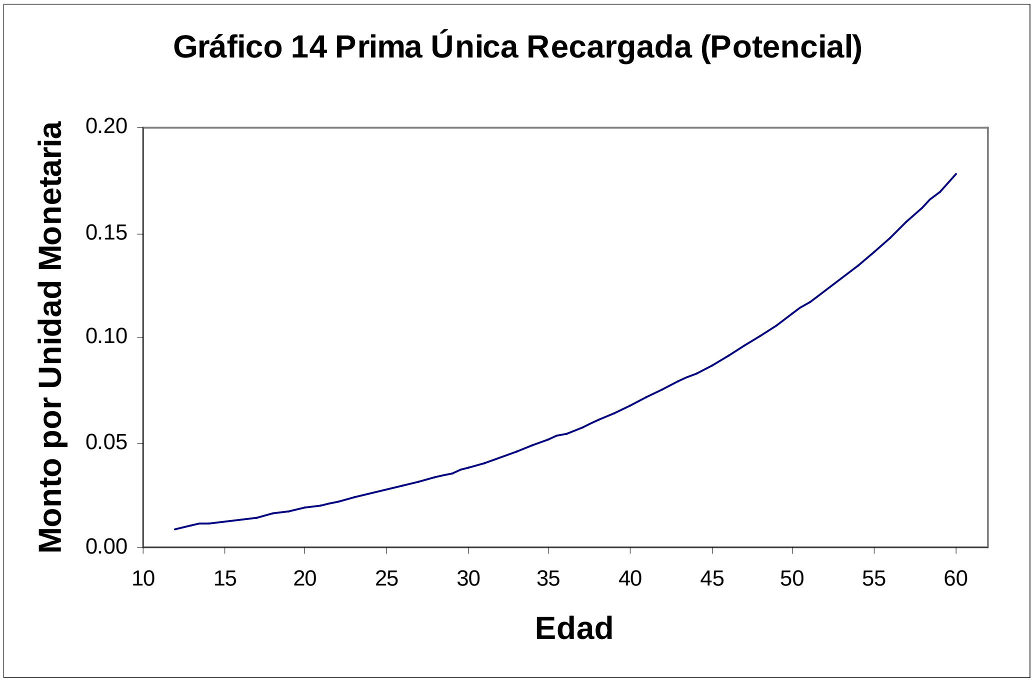
$$PNU^{rec} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|} + \frac{\mathbf{Z}^{97.5\%} \cdot \sqrt{1{,}000 \cdot 1{,}000{,}000^{2} \cdot V(Z_{T(x)})}}{1{,}000}$$

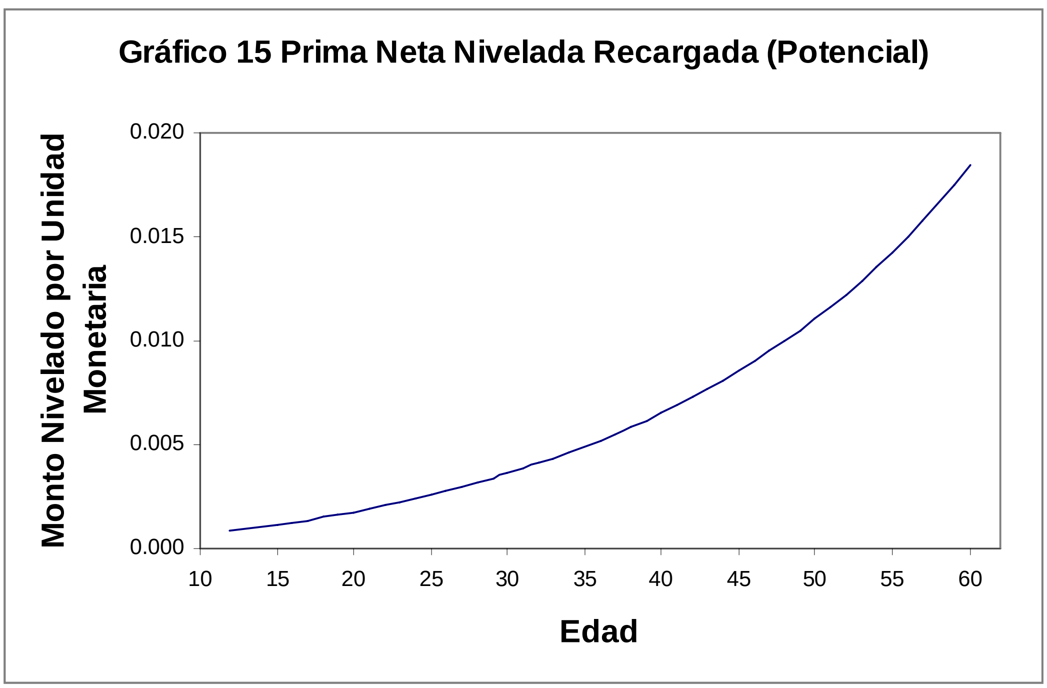
Tabla 6 Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo (Modelo Potencial).

Edad	Prima Única Recargada	Prima Neta Nivelada Recargada
12	0.009045	0.000852
13	0.010017	0.000944
14	0.011053	0.001043
15	0.012156	0.001147
16	0.013326	0.001258
17	0.014566	0.001376
18	0.015878	0.001501
19	0.017264	0.001633
20	0.018724	0.001772
21	0.020263	0.001919
22	0.021880	0.002073
23	0.023579	0.002236

Tabla 6 Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo (Modelo Potencial).		
Edad	**Prima Única Recargada**	**Prima Neta Nivelada Recargada**
24	0.025361	0.002407
25	0.027229	0.002587
26	0.029186	0.002775
27	0.031232	0.002973
28	0.033371	0.003180
29	0.035606	0.003397
30	0.037939	0.003623
31	0.040373	0.003861
32	0.042911	0.004109
33	0.045556	0.004368
34	0.048312	0.004639
35	0.051183	0.004922
36	0.054171	0.005217
37	0.057281	0.005526
38	0.060518	0.005848
39	0.063885	0.006185
40	0.067389	0.006536
41	0.071033	0.006904
42	0.074825	0.007287
43	0.078769	0.007688
44	0.082873	0.008107
45	0.087143	0.008545
46	0.091586	0.009003
47	0.096212	0.009483
48	0.101028	0.009985
49	0.106045	0.010511
50	0.111272	0.011062
51	0.116720	0.011640
52	0.122401	0.012247
53	0.128330	0.012885
54	0.134519	0.013556
55	0.140985	0.014263
56	0.147743	0.015007
57	0.154814	0.015793
58	0.162217	0.016623
59	0.169974	0.017501
60	0.178111	0.018431

Valores obtenidos de la valuación de la PNU y PNN con recargo, bajo la base de un modelo potencial.





Observemos que el comportamiento descrito en los dos gráficos anteriores tiene la misma forma que en los modelos antes expuestos, lo que indica que tan solo ajustamos nuestra tarifa a un mejor nivel de confianza.

Ahora bien este recargo añadido a la PNU en el modelo de la función polinómica o bien potencial esta conformado por tres elementos que a continuación se describen:

$$\text{Recargo} = \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(S_n)}}{n} = \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{n \cdot V(Z_{T(x)})}}{n} = \frac{\mathbf{Z}^{\alpha} \cdot \sqrt{V(Z_{T(x)})}}{\sqrt{n}}$$

1. Z^{α} es el cuantil que acumula α de probabilidad de una función normal con media 0 y varianza 1, en este caso α es igual a un 97.5% probabilidad y el valor que toma Z^{α} es de 1.9599.

2. $\sqrt{V(S_n)}$ es la desviación estándar del riesgo asumido por la compañía aseguradora por toda una cartera de Asegurados. Para valuar esta desviación estándar del modelo de indemnización total por conjunto de Asegurados, tenemos como hipótesis que existe una cartera de Asegurados que son independientes uno del otro, que tienen la misma esperanza de vida y la misma variación respecto a esta, lo cual se consigue agrupando por edad cada cartera supuesta de tamaño fijo igual a n.

3. n es el número de Asegurados por edad, en este caso el valor supuesto es de 1000 Asegurados por cada edad.

Cabe recordar que este recargo, tal como se expreso en el Capítulo 1, está basado y fundamentado en el Teorema del Límite Central que exige para su aplicación las siguientes hipótesis:

1 Variables Aleatorias independientes.

Bajo nuestra aplicación estamos suponiendo 1,000 Asegurados de la misma edad x que no tienen relación alguna.

2 Variables Aleatorias idénticamente distribuidas.

Cada Asegurado de edad x representa para la compañía de seguros una obligación monetaria basada en el tiempo futuro de vida del Asegurado, $T(x)$, es decir bajo el mismo modelo de indemnización $z_{T(x)} = b_{T(x)} v^{T(x)}$ con lo cual su distribución probabilista es idéntica.

3 Variables Aleatorias que cumplan con tener la misma media μ y varianza σ^2 además de ser estas finitas.

Al tener la misma edad los Asegurados y el modelo ser el mismo para cada uno de ellos, se tendrá por consecuencia que la media y varianza son la misma, ahora bien nuestro fenómeno aleatorio en el que se basa nuestra teoría de indemnización es el tiempo restante de vida de una persona de edad x, $T(x)$, el cual irremediablemente tiene un rango finito, por ende la media y varianza forzosamente también lo son.

Por lo tanto este recargo que proponemos cumple con las hipótesis planteadas con anterioridad y permitirá tener un margen de seguridad para cubrir posibles desviaciones en los modelos utilizados para el cobro por nuestro plan de seguro de vida, cabe señalar que entre mas grande sea la cantidad de Asegurados este recargo será menor.

A continuación presentamos la Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad de nuestros Asegurados, para cada uno de los modelos planteados (los basados en una función polinómica y potencial).

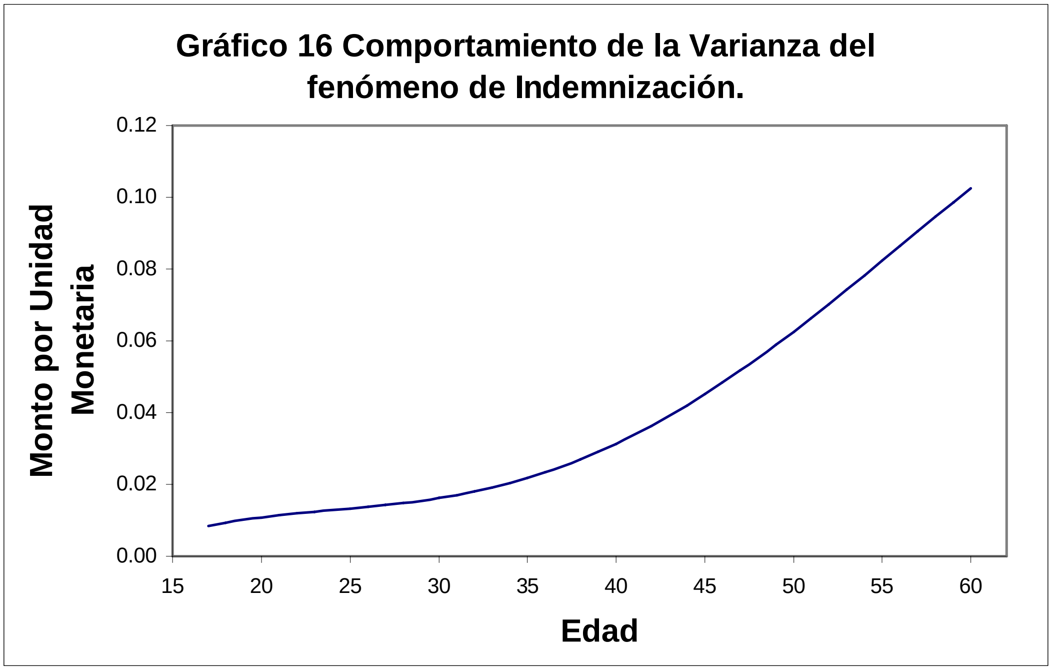
Tabla 7 Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad del Asegurado (modelo polinómico)

Edad	Varianza Polinomio	Desviación Estándar F. Polinómica	Recargo F. Polinómica
17	0.008250	0.090830	0.005630
18	0.009217	0.096005	0.005950
19	0.010027	0.100135	0.006206
20	0.010710	0.103491	0.006414
21	0.011295	0.106278	0.006587
22	0.011807	0.108662	0.006735
23	0.012273	0.110783	0.006866
24	0.012715	0.112762	0.006989
25	0.013157	0.114703	0.007109
26	0.013619	0.116701	0.007233
27	0.014122	0.118837	0.007365
28	0.014685	0.121181	0.007511
29	0.015325	0.123793	0.007673
30	0.016058	0.126720	0.007854
31	0.016900	0.129998	0.008057
32	0.017863	0.133651	0.008284
33	0.018960	0.137694	0.008534
34	0.020200	0.142128	0.008809

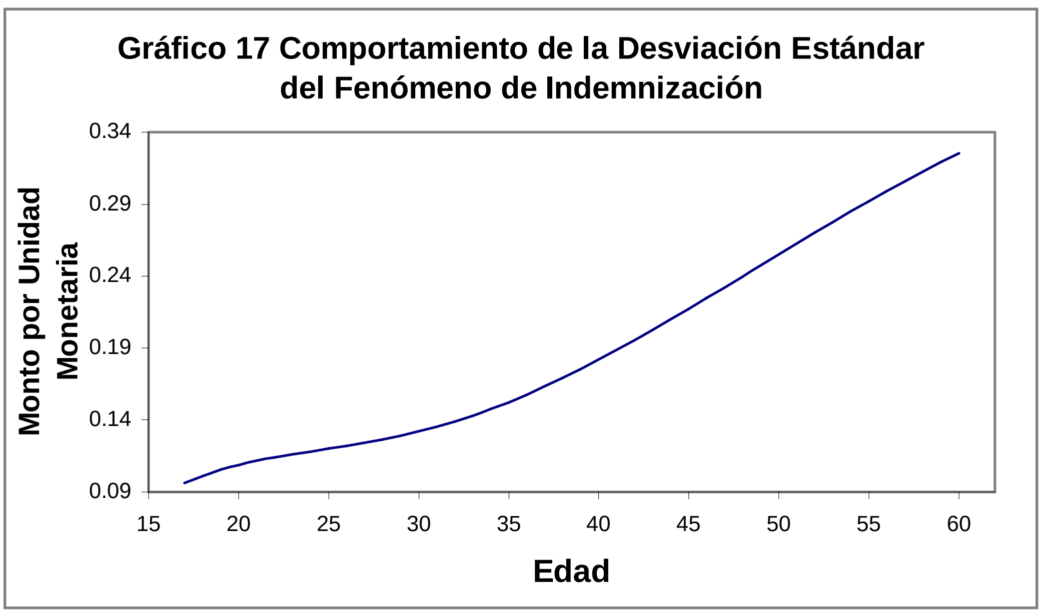
Tabla 7 Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad del Asegurado (modelo polinómico)			
Edad	**Varianza Polinomio**	**Desviación Estándar**	**Recargo**
35	0.021594	0.146950	0.009108
36	0.023148	0.152145	0.009430
37	0.024868	0.157697	0.009774
38	0.026759	0.163580	0.010139
39	0.028822	0.169769	0.010522
40	0.031059	0.176234	0.010923
41	0.033469	0.182945	0.011339
42	0.036051	0.189870	0.011768
43	0.038801	0.196979	0.012209
44	0.041714	0.204241	0.012659
45	0.044785	0.211625	0.013116
46	0.048006	0.219103	0.013580
47	0.051369	0.226647	0.014047
48	0.054863	0.234229	0.014517
49	0.058479	0.241824	0.014988
50	0.062204	0.249407	0.015458
51	0.066025	0.256954	0.015926
52	0.069929	0.264441	0.016390
53	0.073900	0.271845	0.016849
54	0.077923	0.279147	0.017301
55	0.081980	0.286322	0.017746
56	0.086054	0.293349	0.018182
57	0.090124	0.300206	0.018607
58	0.094171	0.306873	0.019020
59	0.098173	0.313325	0.019420
60	0.102106	0.319541	0.019805

Varianza, Desviación Estándar y Recargo obtenido por cada edad del Asegurado bajo las hipótesis del Teorema del Límite Central para el modelo Polinomico.

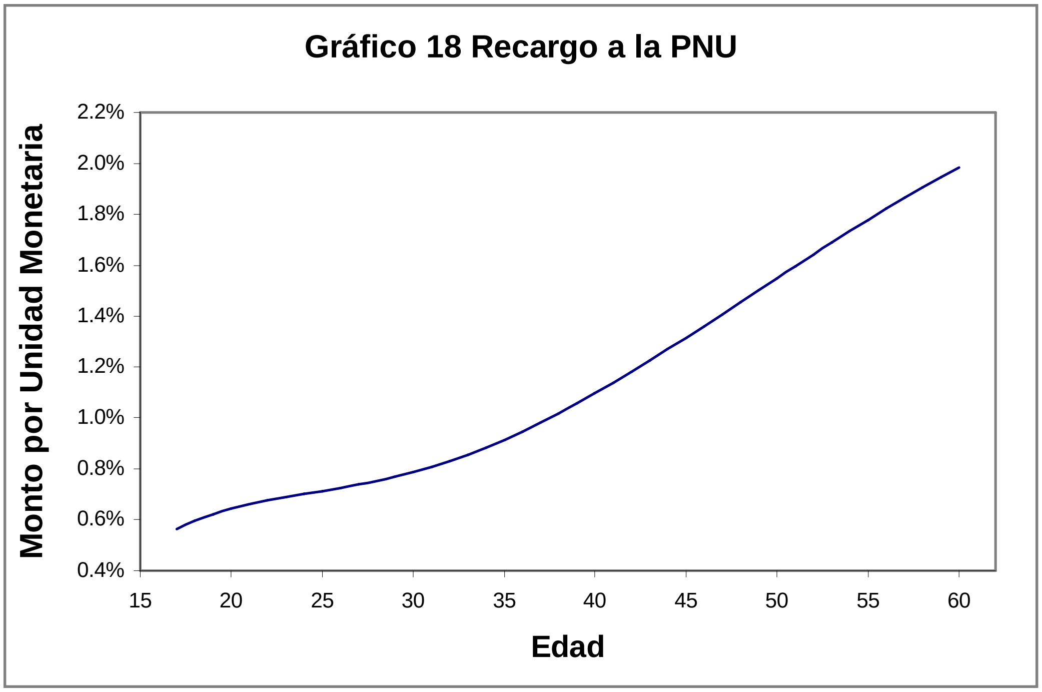
En los siguientes gráficos se puede ver el comportamiento de la varianza y desviación estándar del fenómeno aleatorio de indemnización $z_{T(x)}$ que depende de la variable $T(x)$ y finalmente el recargo obtenido con los elementos señalados con anterioridad.



Como se observa en el gráfico el comportamiento de la varianza es creciente, alcanzando un mínimo de 0.82% y un máximo de 10.25% en la edad 60.



En este gráfico se presenta el comportamiento de la desviación estándar del fenómeno de indemnización, como se observa esta función es creciente en todos sus puntos teniendo un mínimo de 9.62% y un máximo de 32.02%.



En este gráfico se modela el comportamiento del recargo que se adicionará a la PNU, como se puede observar es la misma tendencia que el de la desviación estándar, ya que es el elemento variable de este, el recargo alcanza un mínimo de 0.56% y un máximo de 1.98%.

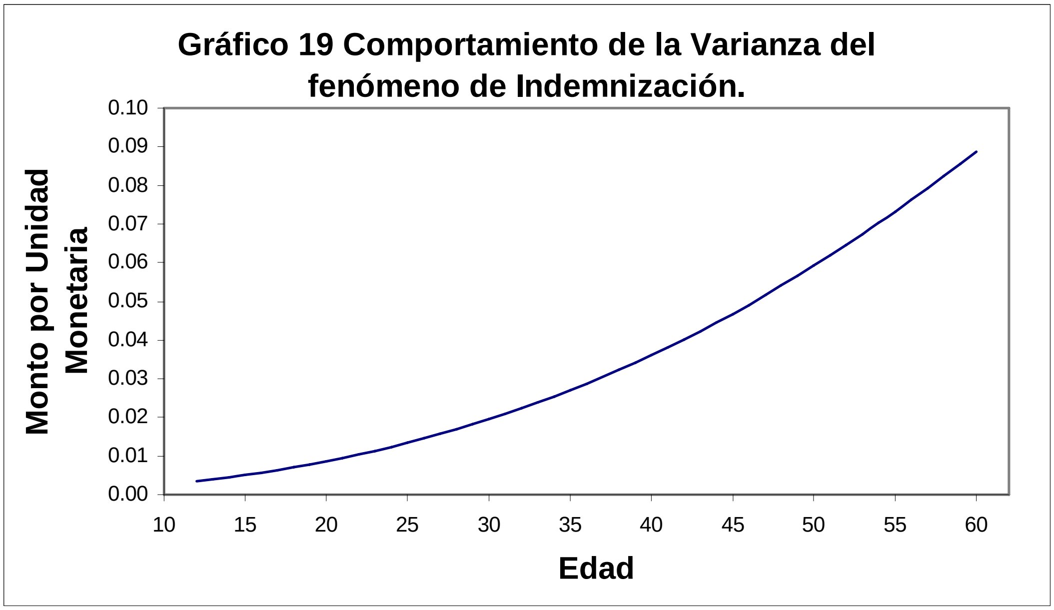
Tabla 8 Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad del Asegurado (modelo potencial)

Edad	Varianza Potencial	Desviación Estándar F. Potencial	Recargo F. Potencial
12	0.003502	0.059178	0.003668
13	0.003992	0.063180	0.003916
14	0.004523	0.067251	0.004168
15	0.005096	0.071389	0.004425
16	0.005714	0.075590	0.004685
17	0.006376	0.079851	0.004949
18	0.007084	0.084169	0.005217
19	0.007840	0.088541	0.005488
20	0.008643	0.092966	0.005762
21	0.009495	0.097441	0.006039
22	0.010397	0.101964	0.006320
23	0.011349	0.106533	0.006603
24	0.012354	0.111147	0.006889

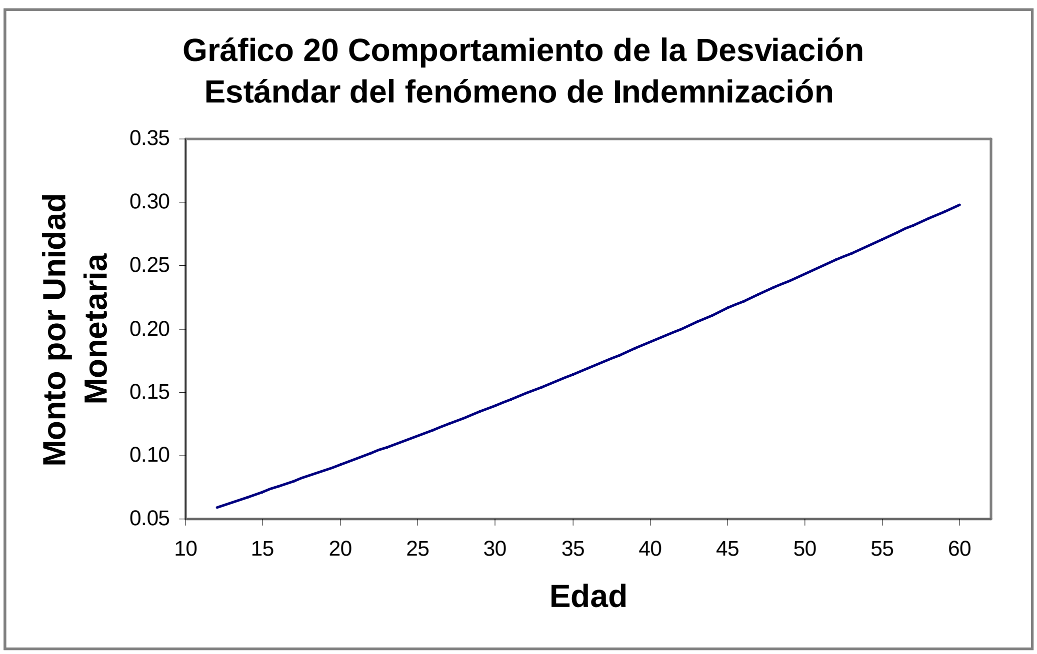
Tabla 8 Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad del Asegurado (modelo potencial)			
Edad	**Varianza Potencial**	**Desviación Estándar F. Potencial**	**Recargo F. Potencial**
25	0.013411	0.115804	0.007177
26	0.014521	0.120502	0.007469
27	0.015685	0.125241	0.007762
28	0.016905	0.130018	0.008058
29	0.018180	0.134834	0.008357
30	0.019512	0.139686	0.008658
31	0.020902	0.144574	0.008961
32	0.022349	0.149496	0.009266
33	0.023856	0.154454	0.009573
34	0.025422	0.159443	0.009882
35	0.027049	0.164466	0.010194
36	0.028737	0.169520	0.010507
37	0.030487	0.174606	0.010822
38	0.032300	0.179722	0.011139
39	0.034176	0.184868	0.011458
40	0.036116	0.190043	0.011779
41	0.038121	0.195247	0.012101
42	0.040192	0.200478	0.012426
43	0.042328	0.205738	0.012752
44	0.044531	0.211023	0.013079
45	0.046801	0.216334	0.013408
46	0.049138	0.221670	0.013739
47	0.051543	0.227031	0.014071
48	0.054016	0.232413	0.014405
49	0.056557	0.237817	0.014740
50	0.059166	0.243240	0.015076
51	0.061843	0.248682	0.015413
52	0.064587	0.254139	0.015751
53	0.067397	0.259609	0.016090
54	0.070272	0.265089	0.016430
55	0.073211	0.270576	0.016770
56	0.076212	0.276065	0.017110
57	0.079270	0.281550	0.017450
58	0.082385	0.287028	0.017790
59	0.085549	0.292487	0.018128
60	0.088758	0.297923	0.018465

Varianza, Desviación Estándar y el Recargo obtenido por cada edad del Asegurado bajo las hipótesis del Teorema del Limite Central para el modelo Potencial.

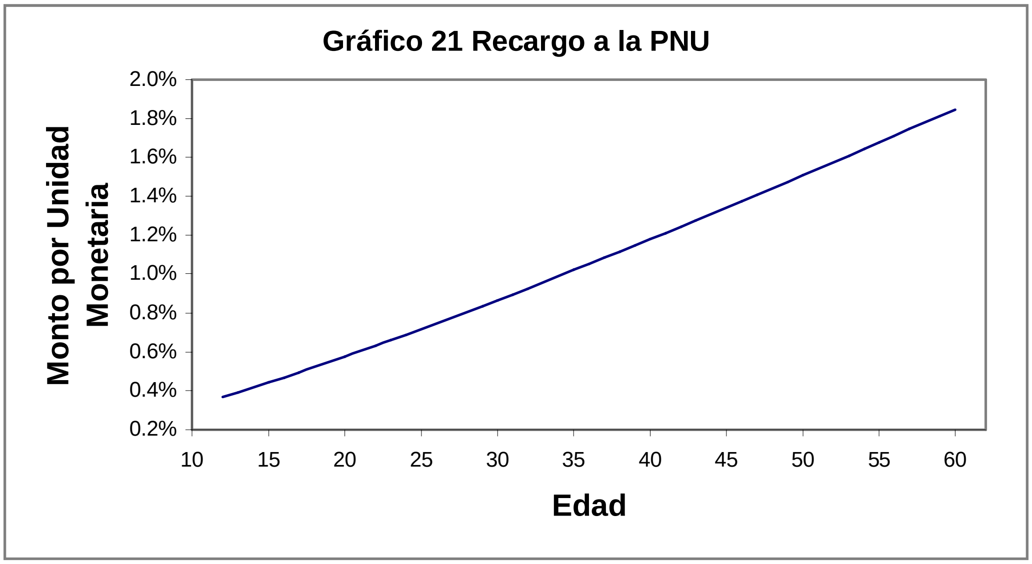
A continuación presentamos el comportamiento de los valores que se muestran en la tabla anterior para el modelo Potencial.



Igual que con el modelo anterior el gráfico del comportamiento de la varianza es creciente en todos los puntos de su dominio, alcanzando un mínimo de 0.35% y un máximo de 8.8% en la edad 60.



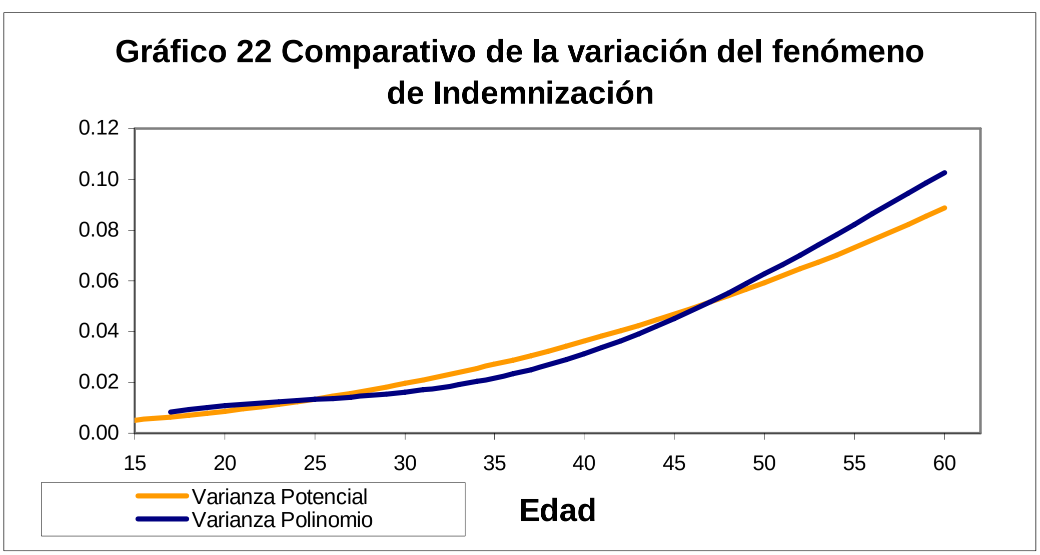
En este gráfico se presenta el comportamiento de la desviación estándar del fenómeno de indemnización, como se observa esta función es creciente en todos sus puntos y a diferencia del modelo polinómico esta es una función lineal alcanzando un mínimo de 5.9% y un máximo de 29.79%.



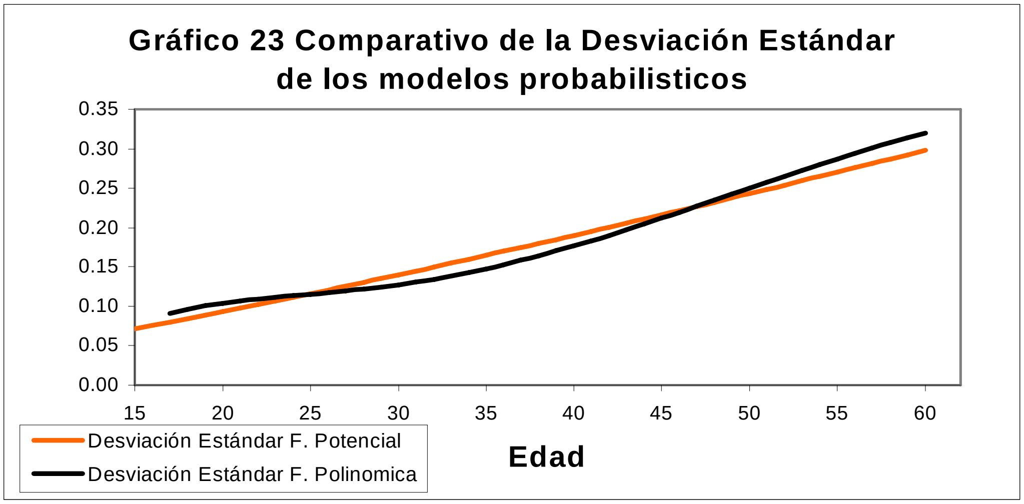
Como se observa en el gráfico el comportamiento del recargo a la PNU tiene la misma tendencia que el de la desviación estándar, ya que este elemento es la parte variable de que se compone el recargo, este alcanza un valor mínimo de 0.36% en la edad 12 y un máximo de 1.8% en la edad 60.

3.6 Análisis comparativo entre PNU, PNN y PNU^{Rec}, PNN^{Rec}

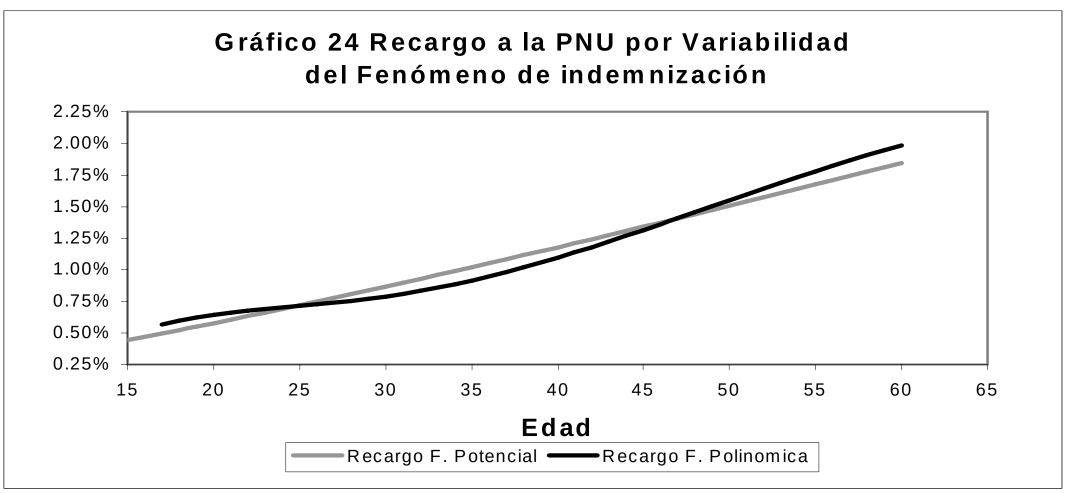
En los siguientes tres gráficos presentamos un comparativo de la variabilidad que tienen los modelos, su desviación estándar y finalmente el recargo que se integrará a la PNU y por ende a la PNN de los modelos que estamos proponiendo, es decir el Potencial y el Polinomico.



Como se puede observar la varianza del modelo potencial es más estable y tiene un crecimiento más lento pero constante alcanzando un valor máximo en el rango de edades del orden del 9%, en cambio la varianza del modelo polinómico es pequeña dentro de las primeras décadas y crece más rápido ya en las edades ultimas alcanzando un máximo cercano al 10%.

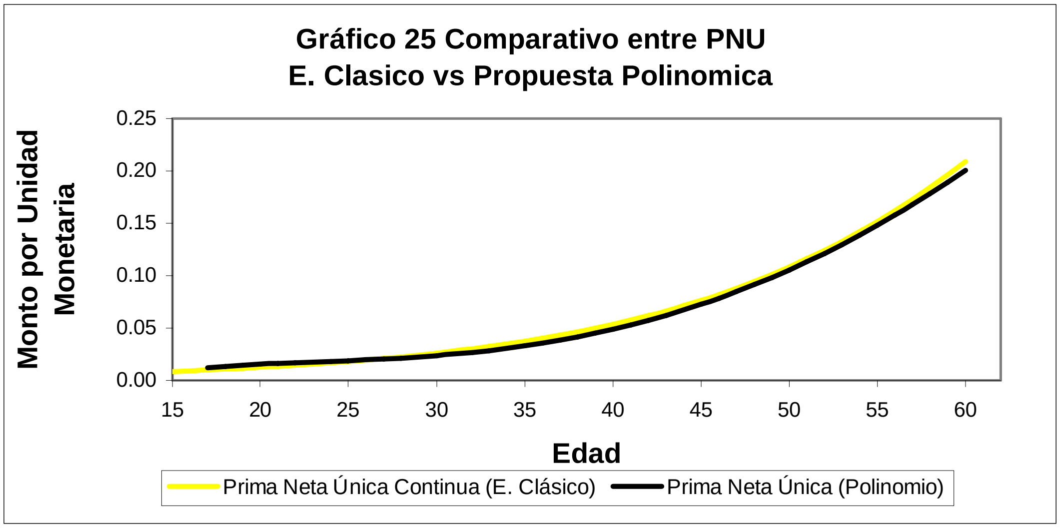


De igual modo se comportan las tendencias de la desviación estándar para ambos modelos, alcanzando un máximo de 30% para el modelo potencial y un 32% para el polinómico.

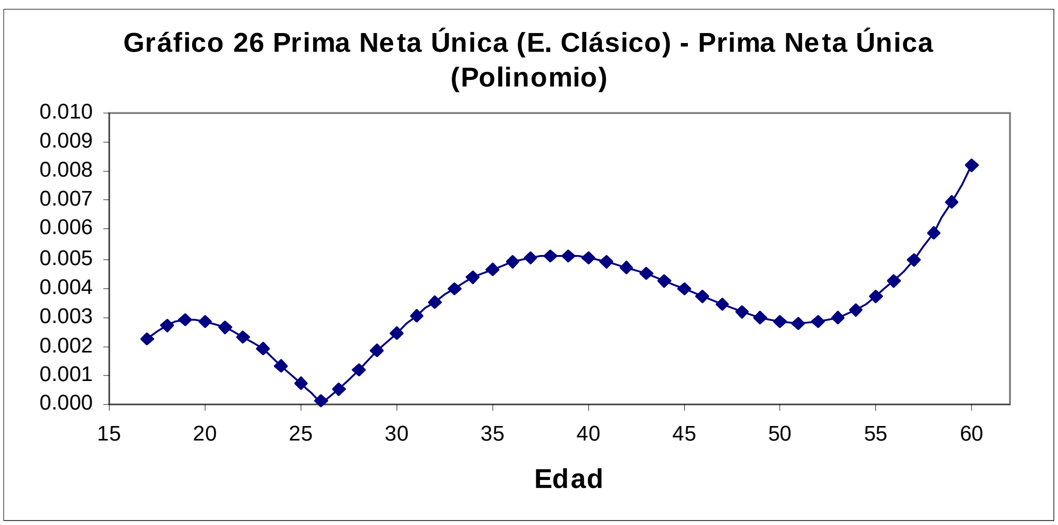


Dado que el recargo está en términos de la desviación estándar el comportamiento de este bajo los modelos polinómico y potencial es similar, cambiando tan solo el valor alcanzado, que es cercano al 2% y 1.8% respectivamente.

Como se puede observar el recargo bajo el modelo de función polinómica es mayor que el modelo de función potencial, esto recaerá en el valor de la PNU que será incrementado con dicho valor, por ejemplo a continuación presentamos un comparativo entre la PNU del enfoque clásico y la PNU bajo nuestra propuesta polinómica sin recargo.

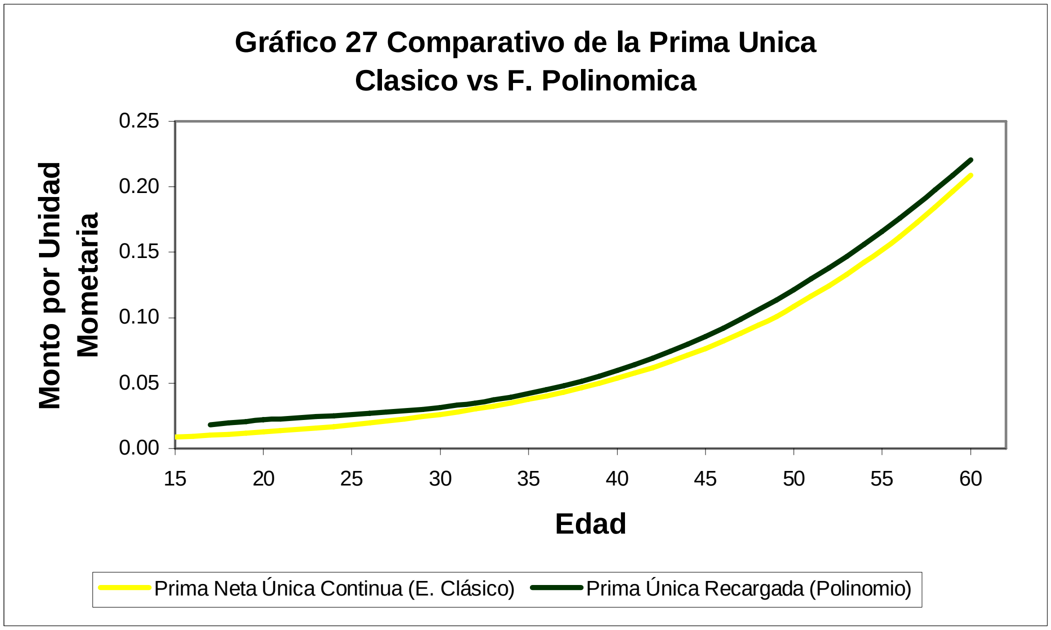


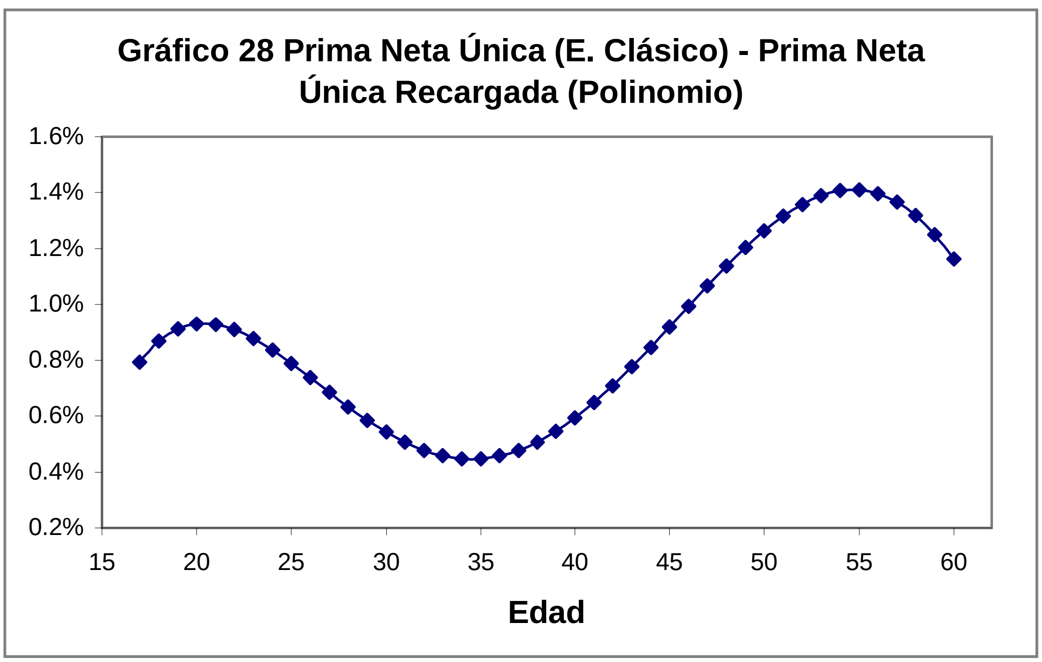
Comos se puede observar la diferencia que existe entre ambos métodos es mínima siendo mayor la PNU (polinomio) para edades menores a 26 años.



Como se puede apreciar el comportamiento de la PNU es muy similar, alcanzando una diferencia máxima de 0.009 lo cual hace a la propuesta polinómica una muy buena aproximación.

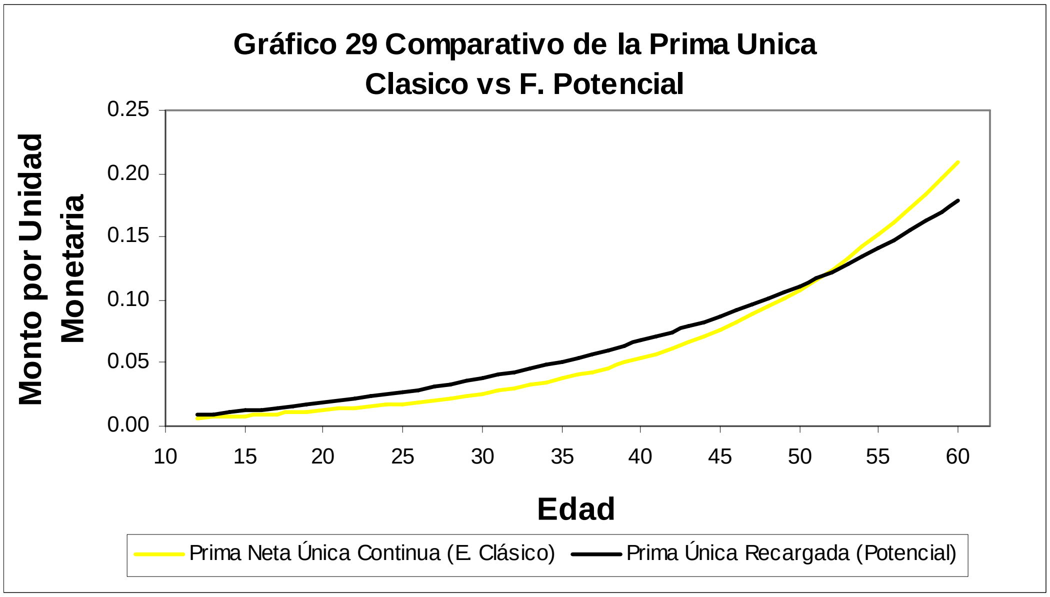
Ahora bien en el siguiente gráfico podemos ver como los valores de la PNU del enfoque clásico se ven superados por los valores de la PNU del modelo polinómico al aumentarle el recargo al 97.5% de confianza.

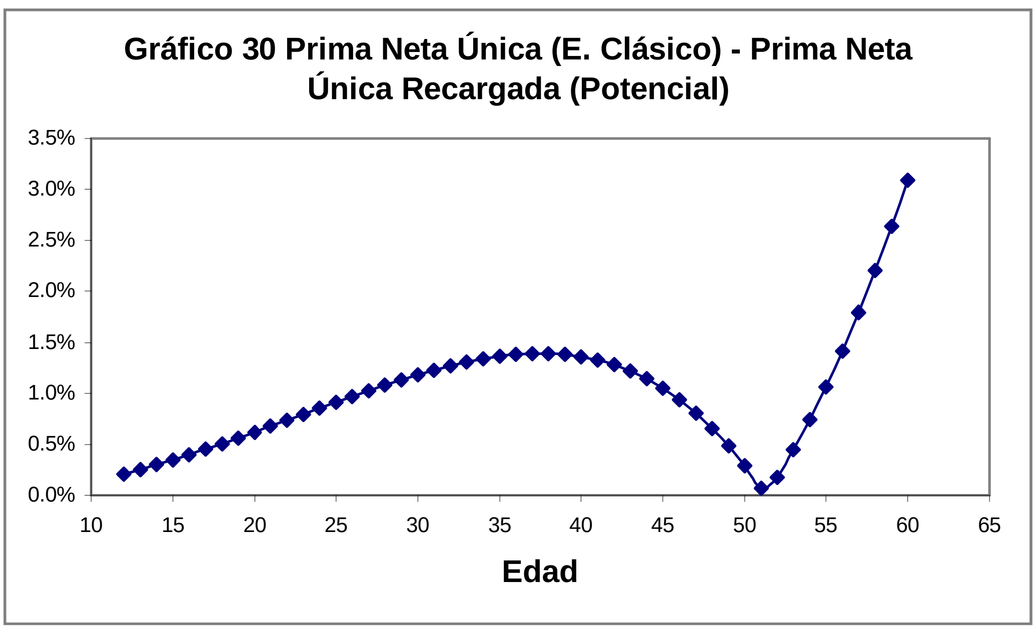




Cabe señalar que la PNU del modelo Polinomico es mayor en todos sus puntos al a PNU del enfoque clásico, tal comos se observa en los gráficos anteriores.

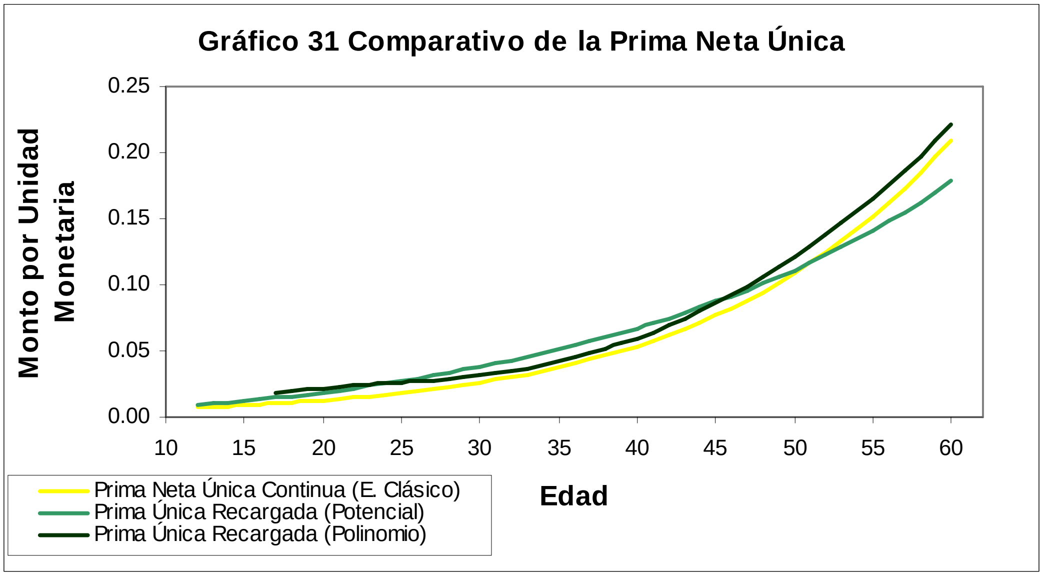
Este comportamiento es distinto al que tenemos con el otro modelo, como se observa en el gráfico siguiente la PNU del modelo Potencial es menor a la del clásico pasando la edad 51.



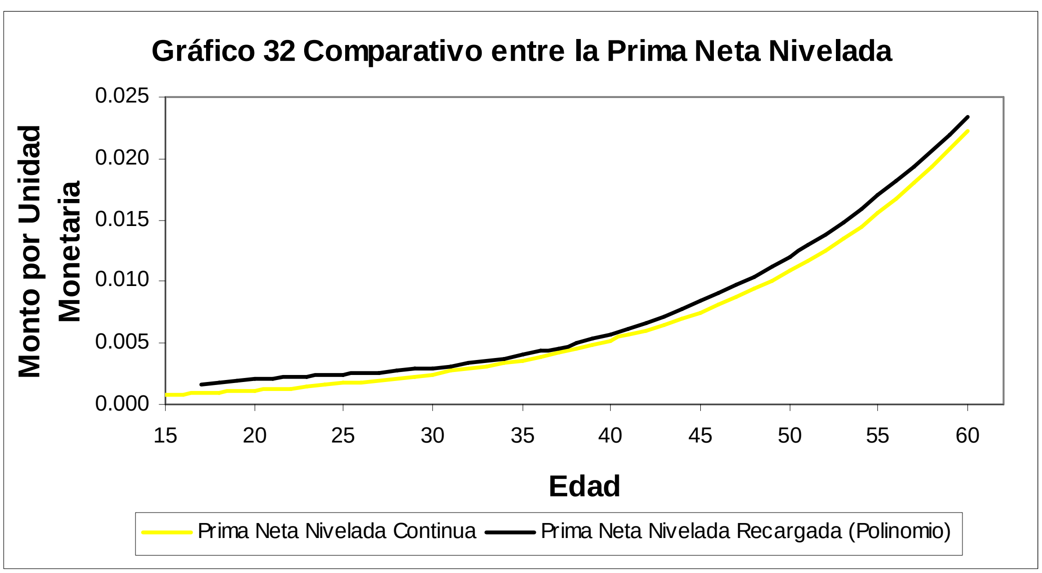


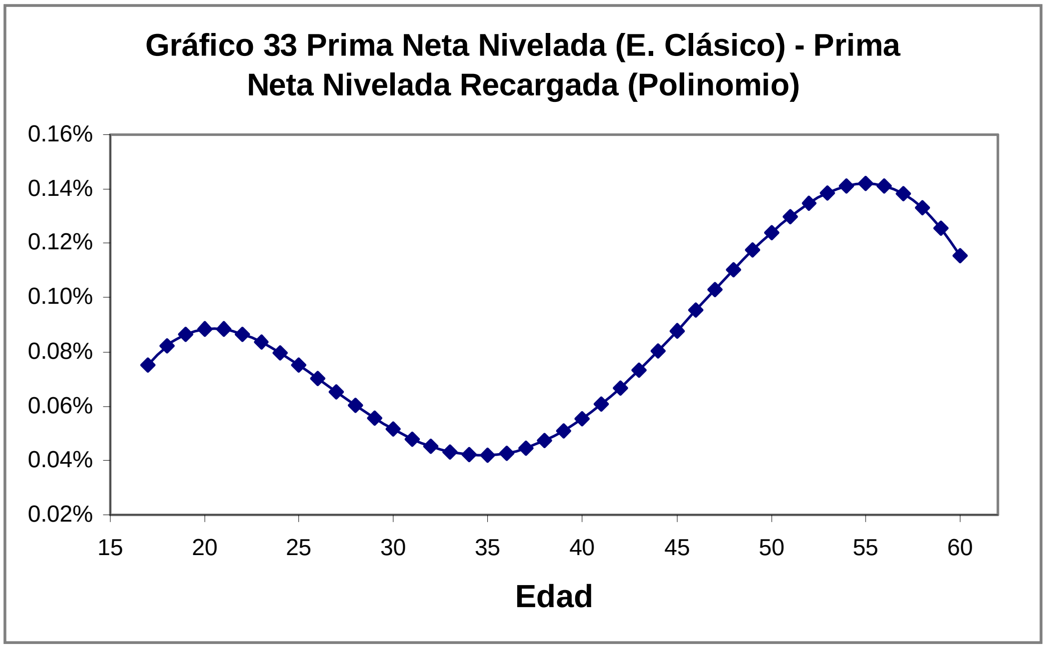
En este caso las diferencias son mayores, hasta los 55 años las diferencias se mantienen por debajo del 1.5% y posteriormente crecen hasta llegar a casi un 3.5%.

En el gráfico siguiente presentamos el comportamiento de las tarifas propuestas con nuestros modelos respecto a la PNU del enfoque clásico que tomamos como base de comparación, como se menciono anteriormente la PNU del modelo polinómico es mayor punto por punto a la PNU del enfoque clásico pero no lo es así para la propuesta potencial.



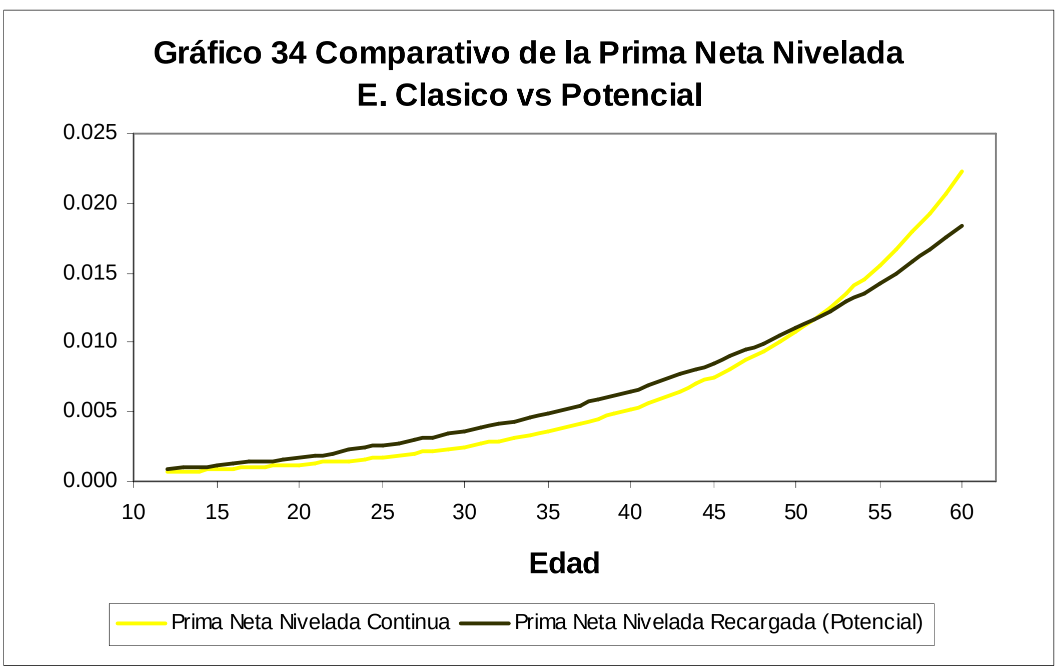
Ahora bien, como consecuencia del comportamiento de la PNU está el comportamiento de la PNN, la cual se presenta a continuación en los siguientes comparativos, por ejemplo en este gráfico se presenta el comportamiento de la PNN tanto del enfoque clásico como el de nuestra propuesta polinómica recargada.

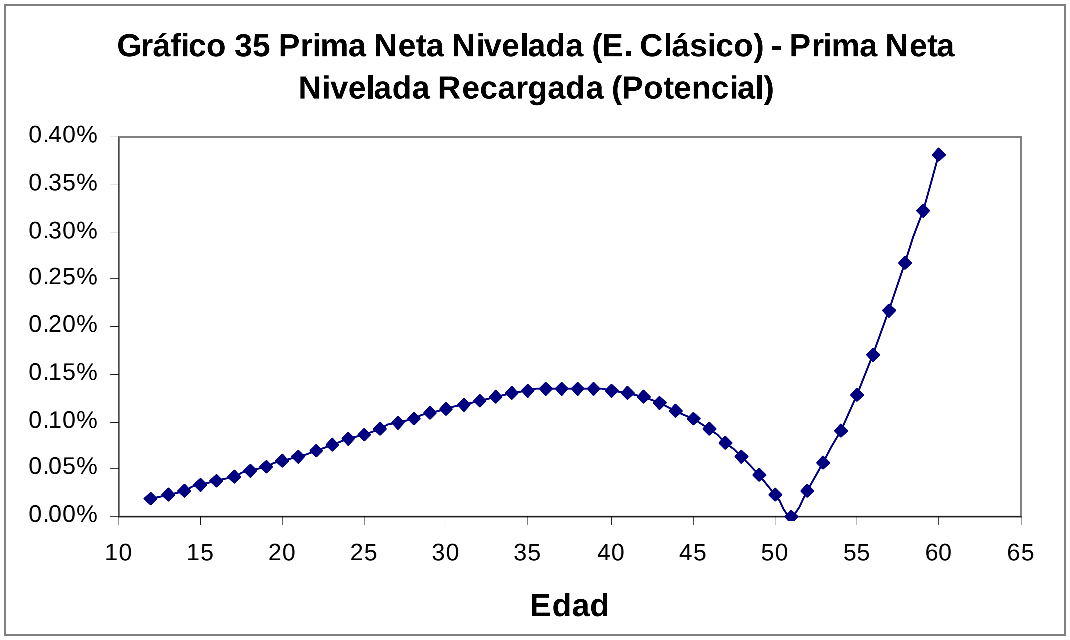




Como se puede observar las diferencias que tienen oscilan entre un mínimo de un 0.4% hasta un 0.14% siendo mayor siempre la PNN de nuestra propuesta polinómica.

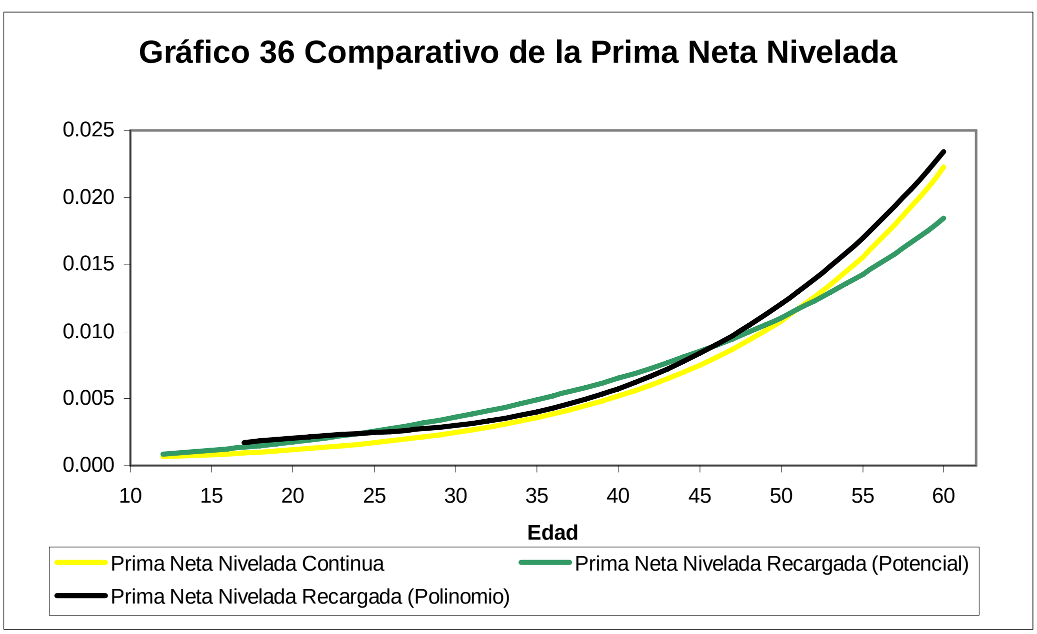
De igual forma se presenta a continuación los siguientes comparativos de la PNN del enfoque clásico contra nuestra propuesta potencial recargada.





En este caso las diferencias que se tienen entre ambos modelos oscilan entre un mínimo de un 0% (punto en la edad 51) hasta un 0.4% siendo mayor la PNN de nuestra propuesta potencial solo para planes de seguro de hasta 51 años.

Por ultimo presentamos el comportamiento de las tarifas propuestas con nuestros modelos respecto a la PNN del enfoque clásico que tomamos como base de comparación.



Como podemos observar se preserva la tendencia de la PNU teniendo los modelos propuestos partes del rango donde superan a las dos tarifas niveladas restantes, como ya lo habíamos hecho observar la propuesta polinómica nos da en todo el dominio una tarifa mayor y nuestra propuesta potencial tan solo hasta la edad 51.

3.7 Valuación de la Reserva Matemática

Hasta aquí hemos evaluado lo viable que pueden ser nuestros modelos recargados respecto a la aproximación continua que conseguimos suponiendo uniformidad en la tasa de mortalidad, pero además de esto debe evaluarse el impacto de la reserva matemática, ya que ésta puede ser el pasivo contingente mas grande para una compañía de seguros y en determinado momento puede ser la utilidad del ejercicio.

Por ello partiendo de la primicia de que una reserva suficiente es consecuencia de una tarifa suficiente, a continuación presentamos la valuación de la reserva matemática, la cual se define como el valor presente de las obligaciones futuras de la compañía de seguros menos el valor presente de las obligaciones futuras del Asegurado, donde será recargado este modelo añadiendo a la siniestralidad de la compañía un margen de seguridad de igual forma que con los modelos de primas expuestos anteriormente.

Esta valuación será obtenida con los modelos planteados en el Capítulo 2, basándonos en la teoría del Capítulo 1 y los modelos de la teoría clásica en conjunto con la tabla de mortalidad CNSF 2000 I, que serán el punto de comparación de los resultados propuestos vía una función de sobrevivencia potencial o bien polinómica.

Como hipótesis para la valuación supondremos que la S.A. pactada es de $1,000,000 de pesos, que el recargo a la PNU es un margen de seguridad al 97.5% y nos basaremos en una cartera de 1,000 Asegurados por cada edad a valuar.

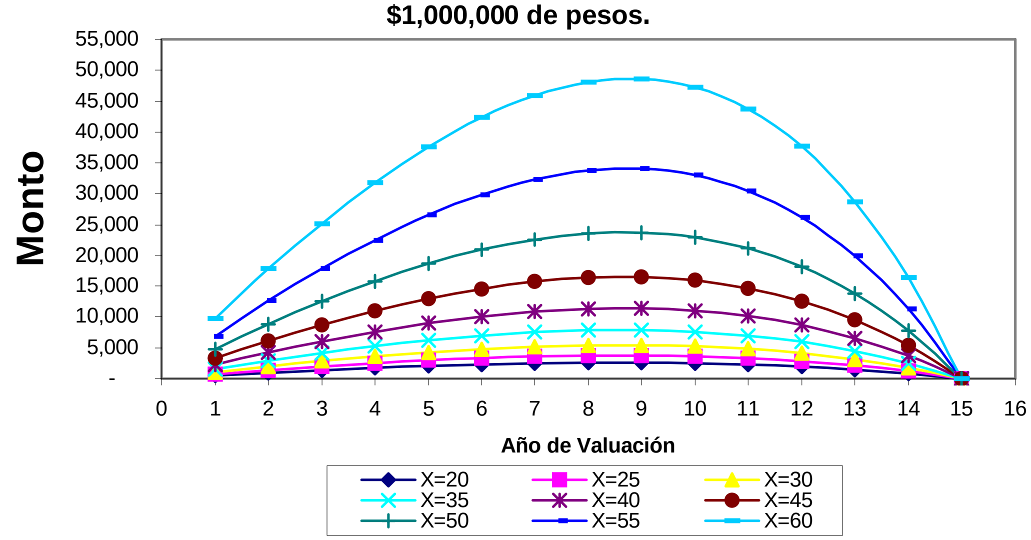
Como primer paso presentamos para algunas edades la valuación de la reserva matemática para cada año de vigencia del seguro temporal a 15 años obtenida a partir del método prospectivo de la teoría clásica y utilizando la información contenida en la tabla de mortalidad CNSF 2000 I.

Tabla 9 Valuación de la Reserva Matemática de un plan de seguros Temporal a 15 años basado en la tabla de mortalidad CNSF 2000 I

$$ {}_tV(A^{1}_{x:\overline{15}|}) = A^{1}_{x+t:\overline{15-t}|} - PNN \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{15-t}|} $$

	Edad del Asegurado								
Reserva al año	**X=20**	**X=25**	**X=30**	**X=35**	**X=40**	**X=45**	**X=50**	**X=55**	**X=60**
1	324	468	677	979	1,412	2,033	2,916	4,161	5,897
2	626	905	1,309	1,892	2,729	3,930	5,639	8,051	11,417
3	901	1,304	1,886	2,728	3,935	5,668	8,134	11,620	16,489
4	1,147	1,660	2,401	3,473	5,011	7,218	10,363	14,812	21,035
5	1,357	1,964	2,842	4,111	5,933	8,550	12,280	17,564	24,967
6	1,526	2,210	3,199	4,626	6,680	9,629	13,836	19,805	28,183
7	1,649	2,388	3,458	5,001	7,223	10,416	14,978	21,457	30,571
8	1,719	2,489	3,605	5,214	7,534	10,870	15,641	22,430	32,002
9	1,728	2,502	3,625	5,245	7,582	10,944	15,759	22,625	32,332
10	1,669	2,417	3,502	5,067	7,329	10,584	15,255	21,930	31,395
11	1,531	2,219	3,215	4,655	6,736	9,733	14,043	20,217	29,002
12	1,307	1,894	2,746	3,977	5,757	8,327	12,027	17,342	24,935
13	985	1,428	2,071	3,000	4,346	6,291	9,098	13,142	18,945
14	554	803	1,165	1,688	2,447	3,545	5,135	7,432	10,746
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Gráfico 36 Comportamiento de la Reserva Matemática de un Seguro Temporal a 15 años con una Suma Asegurada de $1,000,000 de pesos.



Como se puede observar el comportamiento de la reserva matemática de un plan temporal obtenida con el método prospectivo es como una parábola cóncava hacia abajo que conforme la edad es mas grande esta es mayor alcanzando un máximo cerca del noveno año de valuación para todos los casos.

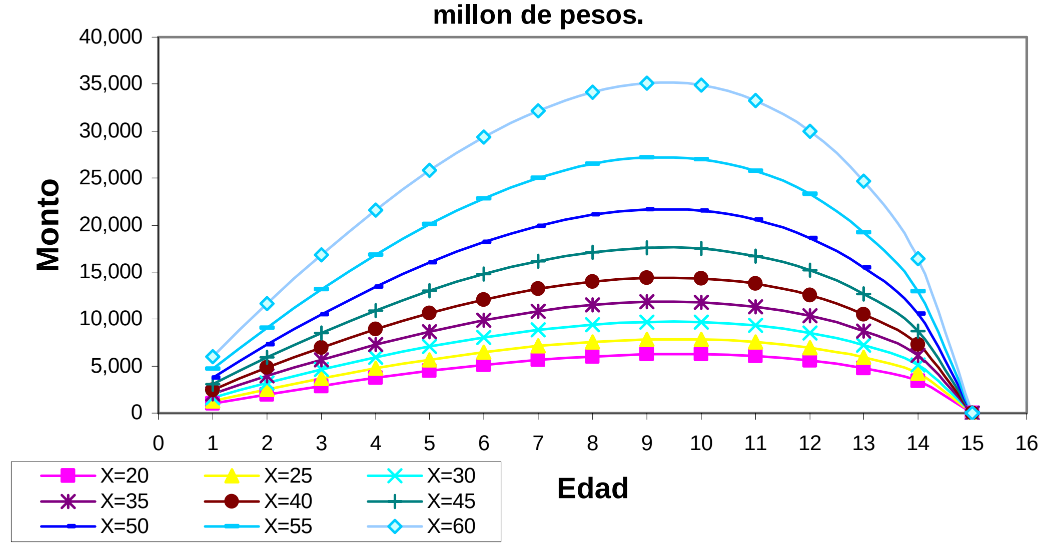
A continuación presentamos la valuación de la reserva matemática a partir de nuestros modelos probabilísticos, basados en una función de sobrevivencia de la familia potencial.

Tabla 10 Valuación de la Reserva Matemática de un plan de seguros Temporal a 15 años basado en una función de sobrevivencia Potencial con un recargo a un nivel de confianza del 97.5%

$$_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = \bar{A}^{1\;Rec}_{x+t:\overline{15-t}|} - PNN^{Rec}\cdot \bar{a}_{x+t:\overline{15-t}|}$$

	Edad del Asegurado								
Reserva al año	**X=20**	**X=25**	**X=30**	**X=35**	**X=40**	**X=45**	**X=50**	**X=55**	**X=60**
1	1,018	1,309	1,641	2,028	2,486	3,045	3,753	4,688	5,984
2	1,984	2,545	3,186	3,930	4,815	5,897	7,270	9,088	11,619
3	2,889	3,695	4,617	5,689	6,964	8,528	10,516	13,155	16,844
4	3,720	4,745	5,918	7,283	8,908	10,905	13,450	16,840	21,595
5	4,464	5,679	7,069	8,687	10,618	12,994	16,030	20,085	25,796
6	5,106	6,478	8,048	9,877	12,062	14,755	18,204	22,824	29,358
7	5,630	7,121	8,829	10,821	13,202	16,142	19,915	24,983	32,181
8	6,014	7,586	9,386	11,485	13,997	17,102	21,095	26,474	34,143
9	6,238	7,844	9,682	11,827	14,395	17,573	21,666	27,193	35,104
10	6,272	7,861	9,679	11,799	14,337	17,480	21,531	27,015	34,891
11	6,081	7,594	9,323	11,336	13,745	16,727	20,572	25,782	33,288
12	5,615	6,982	8,541	10,352	12,515	15,186	18,626	23,288	30,012
13	4,792	5,928	7,216	87,07	10,479	12,657	15,449	19,220	24,651
14	3,437	4,220	5,099	6,107	7,291	8,729	10,550	12,980	16,443
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Gráfico 38 Comportamiento de la Reserva Matematica de un Seguro Temporal a 15 años con una Suma Asegurada de un millon de pesos.



Bajo este modelo el comportamiento de la reserva es similar, tan solo cambiando el monto a constituir como reserva matemática por año de valuación.

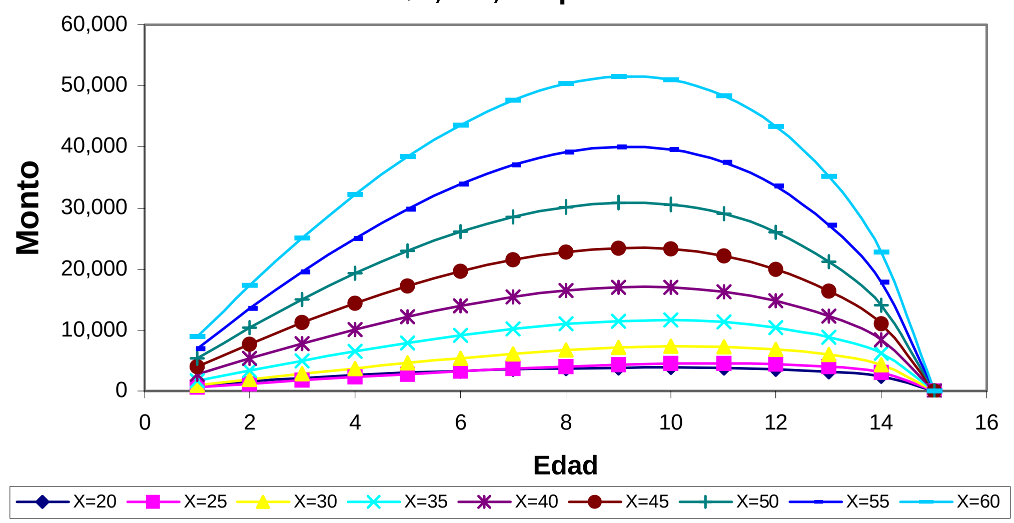
A continuación presentamos la valuación de la reserva matemática a partir de nuestros modelos probabilísticos basados en una función de sobrevivencia de la familia polinómica.

Tabla 11 Valuación de la Reserva Matemática de un plan de seguros Temporal a 15 años basado en una función de sobrevivencia Polinómica con un recargo a un nivel de confianza del 97.5%

$$ {}_t\bar{V}(\bar{A}^{1}_{x:\overline{15}|}) = \bar{A}^{1\ \mathrm{Rec}}_{x+t:\overline{15-t}|} - PNN^{\mathrm{Rec}} \cdot \bar{a}_{x+t:\overline{15-t}|} $$

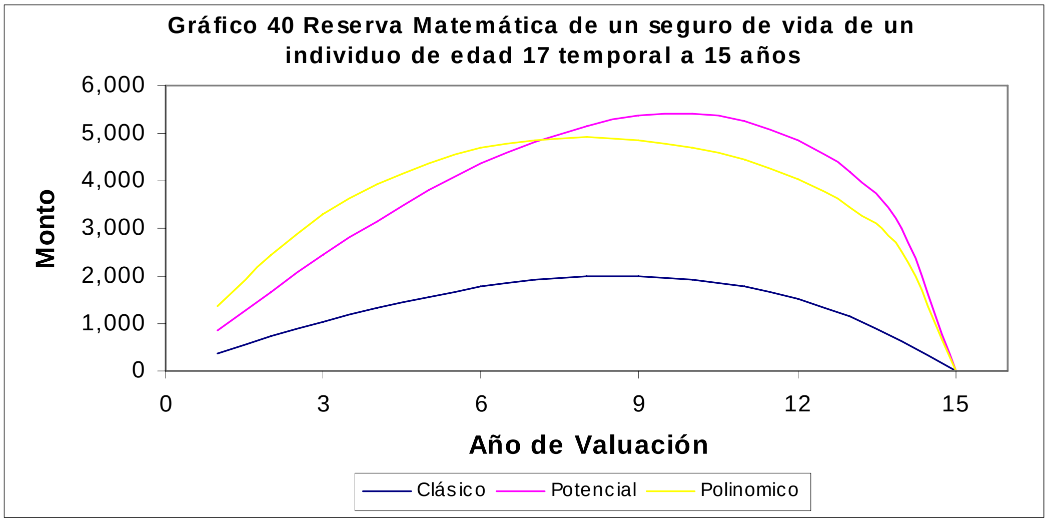
	Edad del Asegurado								
Reserva al año	**X=20**	**X=25**	**X=30**	**X=35**	**X=40**	**X=45**	**X=50**	**X=55**	**X=60**
1	481	619	945	1,691	2,721	3,949	5,353	6,979	8,952
2	932	1,199	1,887	3,353	5,340	7,697	10,394	13,527	17,353
3	1,359	1,748	2,818	4,959	7,819	11,196	15,061	19,571	25,114
4	1,765	2,270	3,724	6,483	10,116	14,390	19,288	25,031	32,136
5	2,151	2,766	4,589	7,889	12,184	17,220	23,004	29,817	38,306
6	2,513	3,231	5,389	9,141	13,971	19,621	26,125	33,827	43,494
7	2,843	3,656	6,098	10,196	15,418	21,519	28,560	36,945	47,549
8	3,706	4,026	6,683	11,003	16,461	22,830	30,204	39,038	50,295
9	3,810	4,320	7,105	11,506	17,023	23,460	30,937	39,949	51,524
10	3,837	4,510	7,316	11,636	17,018	23,295	30,616	39,493	50,983
11	3,770	4,556	7,253	11,311	16,337	22,202	29,067	37,440	48,361
12	3,574	4,401	6,837	10,424	14,842	20,001	26,062	33,493	43,250
13	3,186	3,955	5,944	8,813	12,329	16,436	21,274	27,227	35,079
14	2,454	3,027	4,328	6,166	8,405	11,016	14,089	17,865	22,834
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Gráfico 39 Comportamiento de la Reserva Matematica de un Seguro Temporal a 15 años con una Suma Asegurada de $1,000,000 pesos

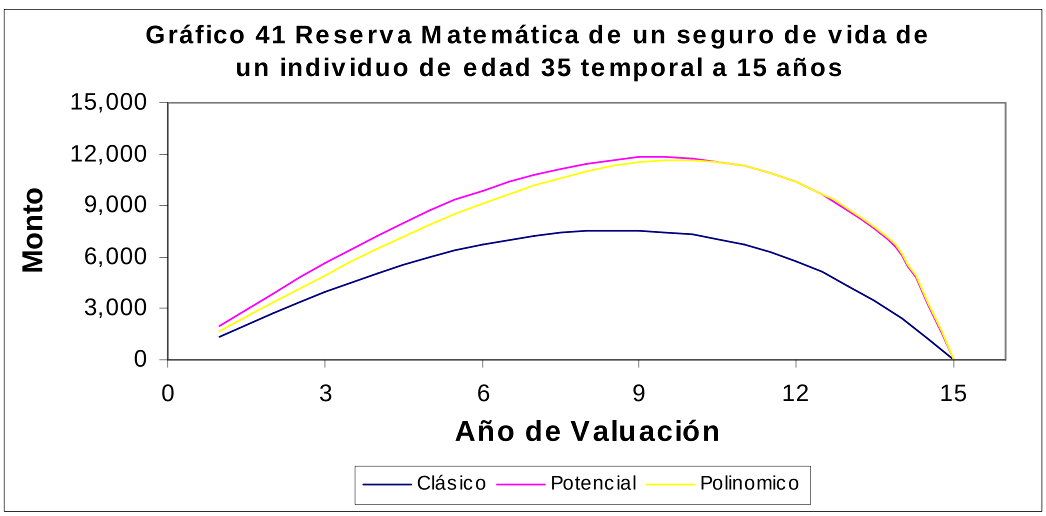


Como podemos observar el comportamiento de la reserva matemática para el plan de seguros temporal a 15 años se preserva, destacando que esta es mayor a la conseguida con las Tablas de la CNSF 2000 I, debido al margen de seguridad que hemos dado las tarifas.

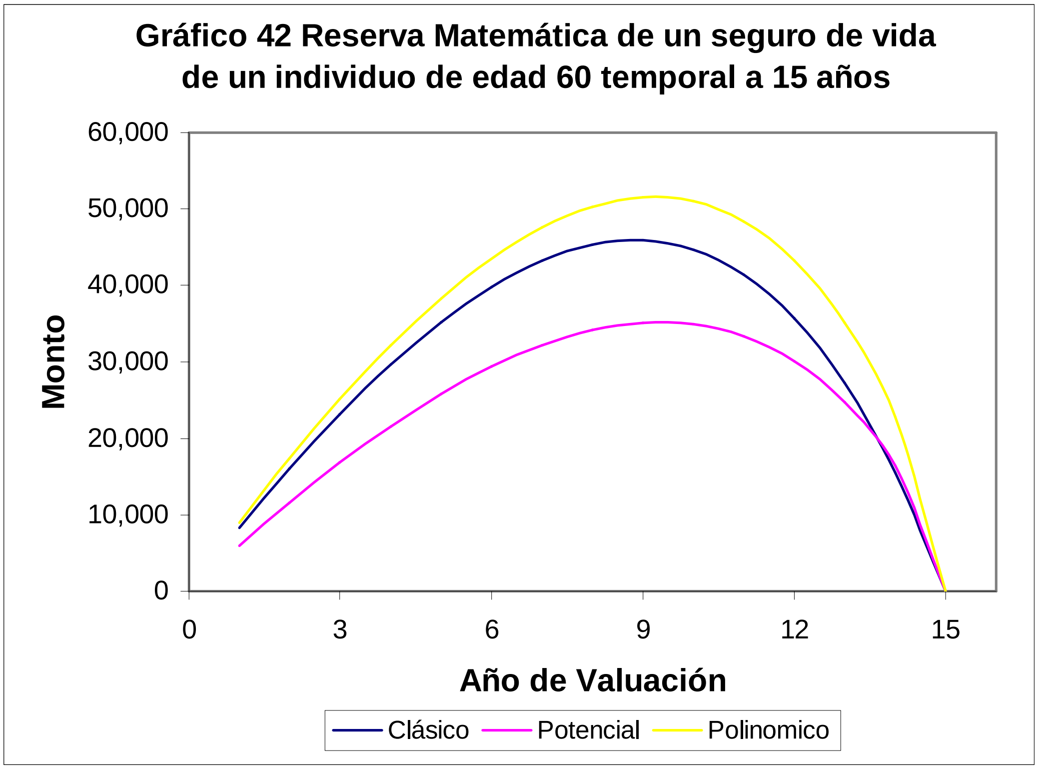
A continuación presentamos un comparativo del cálculo de la reserva bajo los tres esquemas expuestos con anterioridad para algunas edades.



En este caso tanto el monto de reserva con el modelo polinómico y el potencial es mayor al cálculo obtenido con el método prospectivo.



En este caso tenemos que los modelos propuestos son muy semejantes y mayores al cálculo con el método prospectivo sin recargos, aunque la distancia es menor que con el cálculo presentado anteriormente.



En este caso la reserva bajo el modelo potencial es menor que con los otros dos métodos y la valuación con el método prospectivo utilizando las tablas de la comisión es mas cercano, aunque inferior, al cálculo bajo el modelo polinómico.

Por ultimo presentaremos una valuación del valor de rescate para los distintos años en los que éste podría operar dada la cancelación del seguro.

3.8 Valuación del Valor de Rescate

Dado que el Asegurado decide ya no continuar con el seguro de vida contratado, la aseguradora tiene que devolver un valor de recate (como mínimo un 75% de la reserva matemática al momento de cancelación de la póliza), de modo que la compañía aseguradora solo puede disponer de hasta un 25% de la reserva constituida para hacer frente al pago de los gastos en que incurrió al expedir la póliza de seguros.

Esta situación podría ser una perdida para la compañía de seguros si sus gastos de operación son muy altos, por ejemplo a continuación mostramos cual seria el valor de rescate de una póliza de seguro para un plan temporal a 15 años de una persona de edad 35, suponiendo que la cancelación se diera al final de cada año de vigencia del seguro.

Para efectos de mostrar la importancia que tienen los gastos de la compañía de seguros se realizará esta valuación con un porcentaje de gastos del 10%, 15%, 20% y 25% respectivamente.

Primeramente obtendremos la reserva matemática para cada año de posible cancelación para este seguro temporal de un individuo de edad 35 la cual es:

Tabla 12 Valuación de la Reserva Matemática para un individuo de 35 años a partir de nuestra propuesta polinómica (recargo a un nivel de confianza del 97.5%)

Año de Cancelación	**Reserva Matemática**	Piso V.R. $= 75\% \cdot {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$	$25\% \cdot {}_t\overline{V}(\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|})$
3	4,959	3,720	1,240
4	6,483	4,862	1,621
5	7,889	5,917	1,972
6	9,141	6,856	2,285
7	10,196	7,647	2,549
8	11,003	8,252	2,751
9	11,506	8,629	2,876
10	11,636	8,727	2,909
11	11,311	8,484	2,828
12	10,424	7,818	2,606
13	8,813	6,610	2,203
14	6,166	4,624	1,541
15	0	0	0

En la tabla anterior la tercera columna tiene el nombre de **Piso V. R.** que denota el mínimo importe que se le puede dar al Asegurado por concepto de valor de rescate y el cual no es más que el 75% de la reserva matemática.

Ahora bien, a continuación mostramos a cuanto ascenderían los gastos no resarcidos a la compañía aseguradora por el Asegurado, los cuales parten del momento de cancelación del seguro hasta el último día de vigencia de este.

Tabla 13 Importe por gastos no percibidos				
$$\frac{(\delta+\beta+\mu)}{1-(\delta+\beta+\mu)}PNN^{Rec}\cdot\bar{a}_{x+t:\overline{15-t}\rvert}$$				
Fecha de Cancelación	**Gastos del 25%**	**Gastos del 20%**	**Gastos del 15%**	**Gastos del 10%**
3	11,911	8,933	6,306	3,970
4	11,168	8,376	5,913	3,723
5	10,388	7,791	5,499	3,463
6	9,568	7,176	5,065	3,189
7	8,707	6,530	4,610	2,902
8	7,803	5,852	4,131	2,601
9	6,852	5,139	3,628	2,284
10	5,852	4,389	3,098	1,951
11	4,801	3,600	2,541	1,600
12	3,693	2,770	1,955	1,231
13	2,527	1,895	1,338	842
14	1,297	973	687	432
15	0	0	0	0

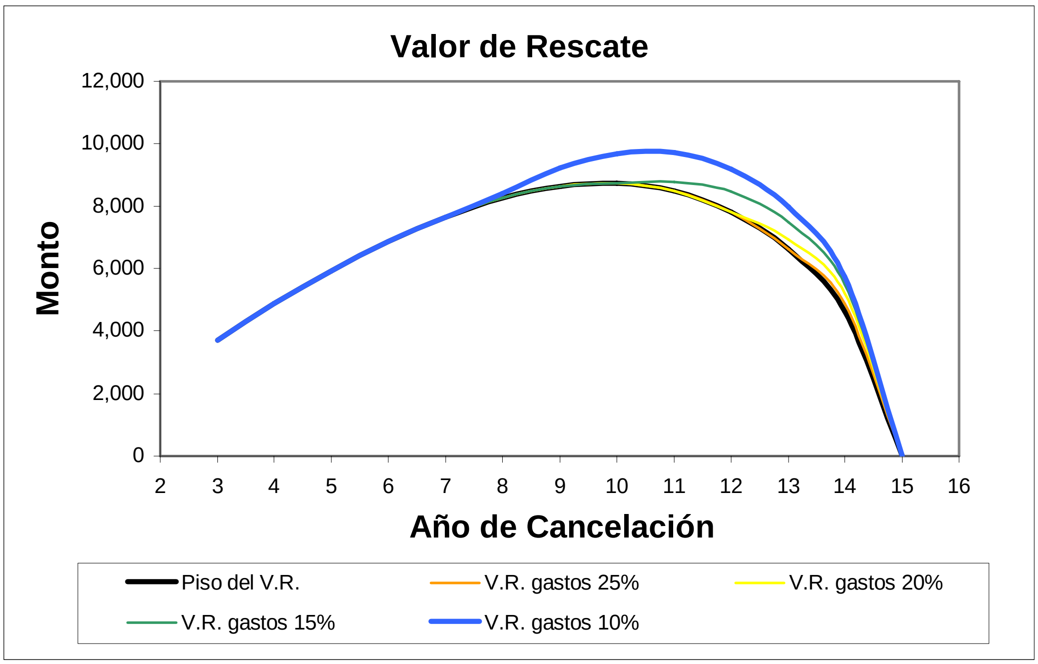
Como puede verse en la tabla anterior los gastos en la mayoría de los casos superan al 25% de la reserva matemática, que es la cantidad que podrían retenerle al Asegurado, esto implica una perdida para la aseguradora de la diferencia entre los gastos reales y el 25% de la reserva matemática.

A partir de esto podemos deducir que en la mayoría de los casos se devolverá al Asegurado el 75% de la reserva matemática como valor de rescate, como a continuación se indica.

Tabla 14 Monto al que asciende el Valor de Rescate según la fecha de cancelación				
Fecha de Cancelación	**V.R. gastos 25%**	**V.R. gastos 20%**	**V.R. gastos 15%**	**V.R. gastos 10%**
3	3,720	3,720	3,720	3,720
4	4,862	4,862	4,862	4,862
5	5,917	5,917	5,917	5,917
6	6,856	6,856	6,856	6,856
7	7,647	7,647	7,647	7,647
8	8,252	8,252	8,252	8,402
9	8,629	8,629	8,629	9,222
10	8,727	8,727	8,727	9,685
11	8,484	8,484	8,770	9,711
12	7,818	7,818	8,468	9,193
13	6,610	6,918	7,475	7,970
14	4,868	5,192	5,479	5,733
15	0	0	0	0

Notemos que entre mayor sean los gastos, en caso de cancelación del seguro la compañía tendrá una perdida, como podemos ver en la tabla la parte sombreada son los casos en que los gastos de la compañía son menores al 25% de la reserva matemática y son estos casos en donde la compañía puede recuperar el costo que implico el seguro vendido.

A continuación presentamos un grafico en donde se muestra el comportamiento del valor de rescate con el supuesto de distintos gastos de la compañía de seguros, tomando como base de comparación el 75% de la reserva matemática.



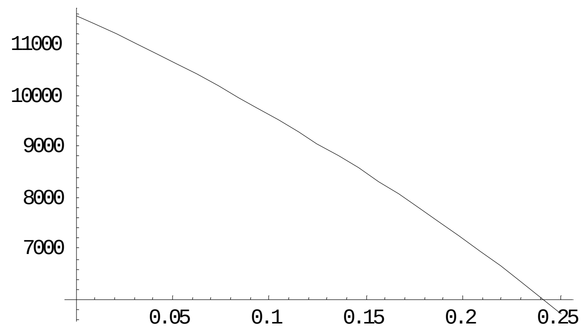
Como se observa en el gráfico hasta el año 7 el valor de rescate es el mismo, lo que indica que los gastos de la compañía aseguradora eran mayores aun. A partir de esta fecha de valuación según el porcentaje de gastos el valor de rescate empieza a supera el mínimo que es el 75% de la reserva matemática constituida.

Por ejemplo, la línea que describe el comportamiento del valor de rescate con unos gastos del 10%, es mayor a partir del séptimo año de valuación al 75% de la reserva, de forma análoga podemos decir que entre mas sean los gastos mayor tendría que ser la fecha de cancelación para poder rescatar el costo del producto.

De este modo podemos preguntarnos por el nivel de gastos que tendría que tener la compañía de seguros para estar en un rango no muy lejano del mínimo permitido como valor de rescate.

Para poder obtener esto tomemos un año de cancelación del seguro, en particular tomemos el año donde se alcanza el máximo monto de reserva matemática, tal como se puede observa en la tabla 12 es el año 10, ahora bien valuemos el valor de rescate haciendo variar el porcentaje de gastos desde un 0% en adelante, tal como se muestra en el siguiente gráfico.

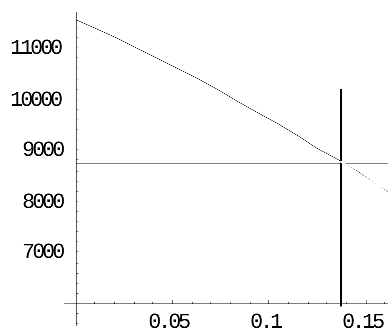
Valor de Rescate



Porcentaje de Gastos

Notemos que si los gastos son cero el valor de rescate es de $11,636, es decir el 100% de la reserva matemática y conforme estos van aumentado éste decrece pero no por debajo del 75% de la reserva ($8,727) como a continuación se muestra:

Valor de Rescate



Porcentaje de Gastos

Como se observa en el gráfico anterior, alrededor de un porcentaje de gastos del 14% se alcanza el mínimo de valor de rescate, con lo cual concluiríamos que si tenemos como gastos un porcentaje superior a este estaríamos teniendo una perdida por la cancelación del seguro.

Conclusiones

La creación de un modelo de variable aleatoria continua que describa el comportamiento de la mortalidad mexicana, nos permite utilizar todas las herramientas probabilísticas continuas para conseguir modelos que den una mayor certidumbre sobre el importe necesario a cobrar por contraer una obligación y el monto requerido a través del tiempo para hacer frente a un conjunto de obligaciones.

Por ello es importante destacar la relevancia que ha tenido la teoría basada en las propiedades de la probabilidad en todos los ámbitos de la teoría del seguro de vida, donde es indispensable la construcción de expresiones probabilísticas que conjuntamente con el avance tecnológico permita tener modelos que simulen nuestros fenómenos de interés con una alta confianza, para proponerlos como modelos de solvencia en las instituciones y como formas de permutar un riesgo por el pago de una prima.

Es importante destacar que el beneficio de tener un modelo totalmente continuo, es que la valuación de la reserva matemática se puede realizar en cualquier punto del tiempo de la vigencia del seguro y que la tarifa de un plan de seguro puede considerar la indemnización inmediata por el fallecimiento del Asegurado y la pérdida por concepto de primas no cobradas.

De todas las familias de funciones estudiadas y expuestas en este trabajo (exponencial, potencial, polinómica) la función polinómica de quinto grado resultó ser el mejor modelo para rescatar el comportamiento de la mortalidad mexicana basada en la tabla CNSF 2000 I, ya que el modelo polinómico propuesto cuenta con la cualidad de tener un grado de asociación y un rescate de la variabilidad del fenómeno muy buenos (0.9998 y 0.9999 respectivamente), además de tener diferencias de alrededor de 2% en un 95% del rango de interés respecto a la función de sobrevivencia obtenida de la tabla CNSF 2000 I, lo cual permite preservar las diversas tendencias obtenidas al estudiar la mortalidad tales como: tasas de muerte, esperanza de vida, fuerza de mortalidad, etc., ya que cumple con ser una función de probabilidad por la forma en que se construyó.

Los otros modelos de funciones probabilísticas continuas que se proponen como modelos alternativos, tienen cualidades que en determinado momento podrían ser necesarias, por ejemplo el modelo de función potencial tiene una expresión algebraica corta, manejable y que proporciona diferencias en las edades centrales de vida (entre 12 y 55 años de edad) de alrededor de 1% respecto a la función de sobrevivencia que se obtuvo de la tabla CNSF 2000 I. Por supuesto todos los modelos preservan los comportamientos de la información que les dio origen y son funciones que cumplen con las propiedades de funciones de probabilidad.

Para la construcción de los modelos de tarificación y reserva matemática se parte de la primicia, de que una prima suficiente da como consecuencia una reserva suficiente y es que una compañía de seguros difícilmente puede darse el lujo de financiar este pasivo contingente por no estar cobrando lo necesario para solventar su riesgo y por supuesto sus gastos. Por esto los modelos presentados tienen un margen de seguridad que se obtiene de recargar la siniestralidad que pudiera tener la compañía aseguradora según la variabilidad del fenómeno de indemnización.

Este margen de seguridad fue obtenido como una aplicación del Teorema del Límite Central, ya que sus hipótesis son fácilmente cumplidas por un modelo de cobro para un plan de seguro de vida según la función de indemnización, considerando que es parte inherente a la operación de un seguro la mutualidad, la dispersión del riesgo sobre toda la cartera de Asegurados, la independencia de individuos y la similitud en la exposición al riesgo.

Cabe señalar que se propone un modelo de recargo basado en la función de probabilidad de $\mathrm{T(x)}$, tiempo futuro de vida, considerando de forma individual el riesgo asumido por la compañía de seguros, pero esta forma de recargar es demasiado estricta y aun cuando el nivel de confianza que utilicemos sea pequeño, el monto cobrado por el plan de seguro es muy grande, (por arriba de $400,000) lo cual comercialmente hablando sería inoperable, por esto se dio preferencia al margen de seguridad donde el recargo es asumido por cada uno de los Asegurados que ingresen a la cartera de riesgo.

Dentro de los resultados obtenidos con el modelo propuesto se tiene que la valuación de la PNU, PNN y Reserva Matemática es mayor a la conseguida mediante la tabla CNSF 2000 I con la teoría clásica en todos los puntos, teniendo un excedente de cobro para el Asegurado de entre 0.42% hasta un 1.31% por unidad de $\mathrm{S.A.}$ según la edad de éste. Este excedente proviene del margen de seguridad que se aplica a la PNU, PNN y Reserva Matemática por la variación en la siniestralidad de la compañía aseguradora el cual va de entre 0.56% hasta un 1.98% por unidad de $\mathrm{S.A.}$.

En comparación con el modelo de una función potencial la valuación de la PNU, PNN y Reserva matemática es mayor a la conseguida mediante la tabla CNSF 2000 I con la teoría clásica solo hasta la edad 51 y tiene un excedente de cobro para el Asegurado que va desde un 0.069% hasta un 3.093% por unidad de S.A., teniendo un margen de seguridad por variación que va de entre 0.495% hasta un 1.847% por unidad de S.A..

Otro punto importante es el impacto que puede tener para la compañía aseguradora la cancelación del seguro, ya que según el comportamiento observado en la valuación del valor de rescate, sí la compañía aseguradora no tiene gastos por debajo de un 10% de la prima de tarifa cobrada al Asegurado, la cancelación del seguro le traerá como consecuencia una pérdida, ya que no podrá recuperar el importe total de los gastos proyectados con tan solo el 25% de la Reserva Matemática valuada a la fecha de cancelación, ya que según la Ley Sobre el Contrato de Seguro la compañía aseguradora tiene la obligación de devolver al Asegurado un valor de rescate que no puede ser inferior al 75% de la Reserva Matemática.

Por último cabe decir que cada uno de los modelos planteados para la obtención de funciones de sobrevivencia, tarifas, reservas, recargos, valores garantizados, etc. tienen el soporte técnico algebraico que permite hacer variar los niveles de confianza probabilística, la temporalidad y los rangos de definición de los planes de seguro, de tal forma que hace posible una adaptación de estos modelos para cualquier otro problema que se requiera abordar de acuerdo a las necesidades comerciales de los diversos planes existentes.

Anexo 1

Funciones alternativas para aproximar a la función $F(x)$

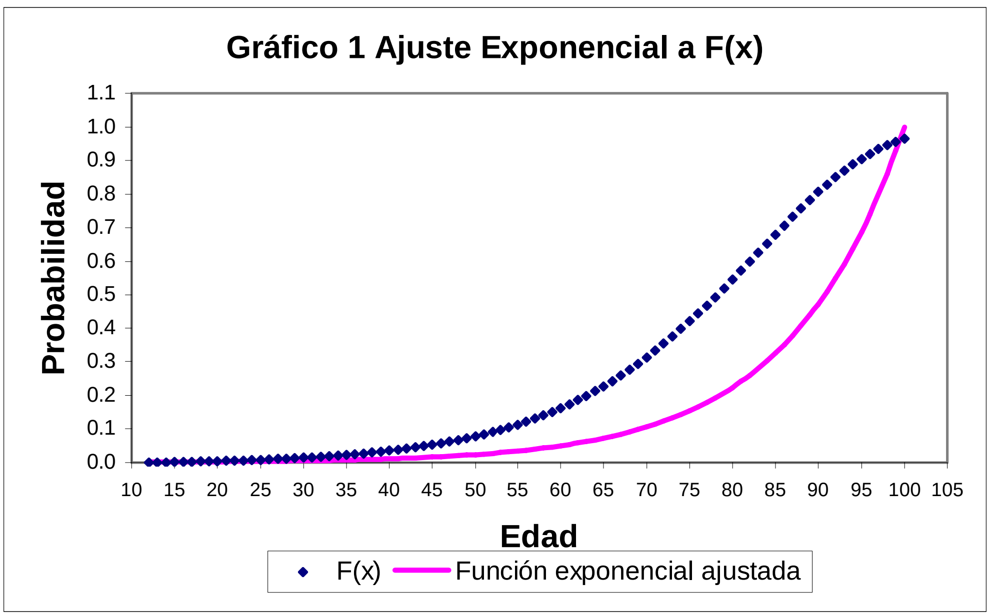
1.1 Introducción

Siguiendo un proceso similar al presentado en el Capítulo 2 para el ajuste de una función polinómica de grado 5 a $F(x)$, tenemos las siguientes aproximaciones dadas por tres tipos de familias de funciones: la familia exponencial, la familia potencial y la familia polinómica, cada cual nos proporciona un ajuste cuyos resultados se presentan a continuación.

1.2 Propuesta Exponencial (ae^{bx})

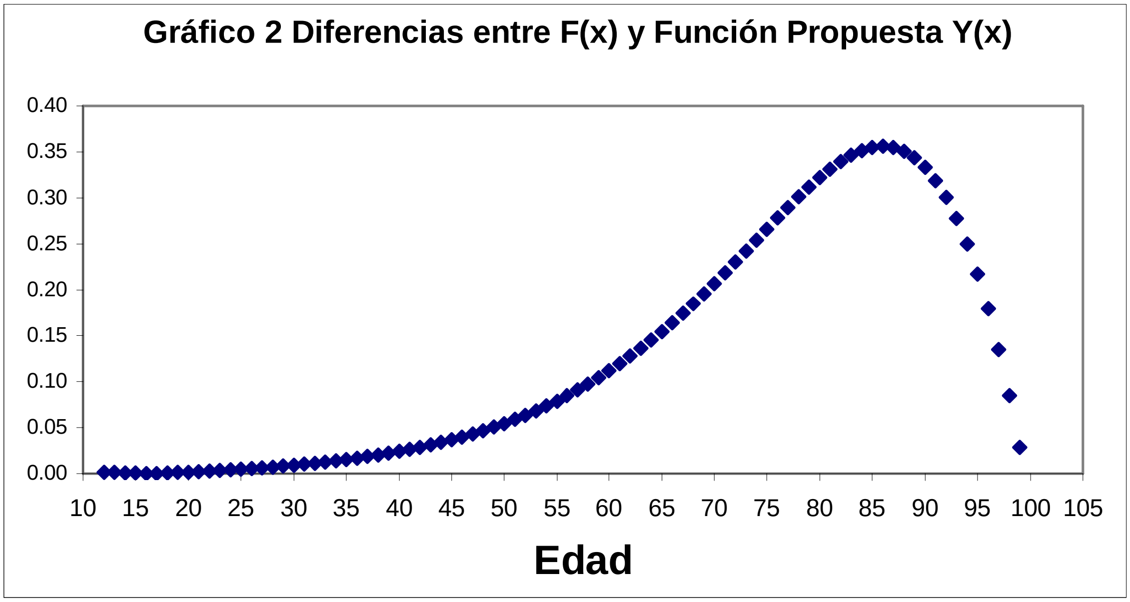
Función asociada a la aproximación de $F(x)$:

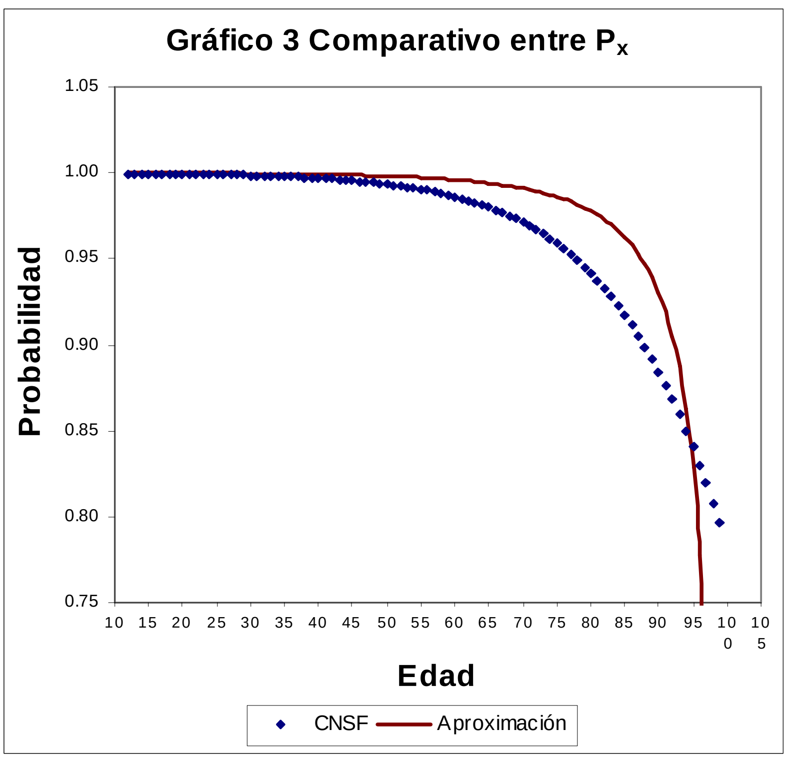
$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5.586425E - 04\, e^{0.0749x} & \text{si } 0 < x < 100 \\ 1 & \text{si } 100 \leq x \end{cases}$$



Este gráfico presenta el comportamiento del ajuste final dado por $Y(x)$ a $F(x)$, con un dominio de 12 a 101 años de edad, como podemos ver la aproximación presenta diferencias grandes respecto a $F(x)$ salvo en las primeras edades, es decir, de 12 a 45 años de edad a partir de la cual notamos una separación más pronunciada y constante.

Este ajuste presenta una diferencia máxima entre $F(x)$ y $Y(x)$ de 35.62% como se presenta en el siguiente gráfico, nótese además que en las primeras edades las diferencias son poco significativas.

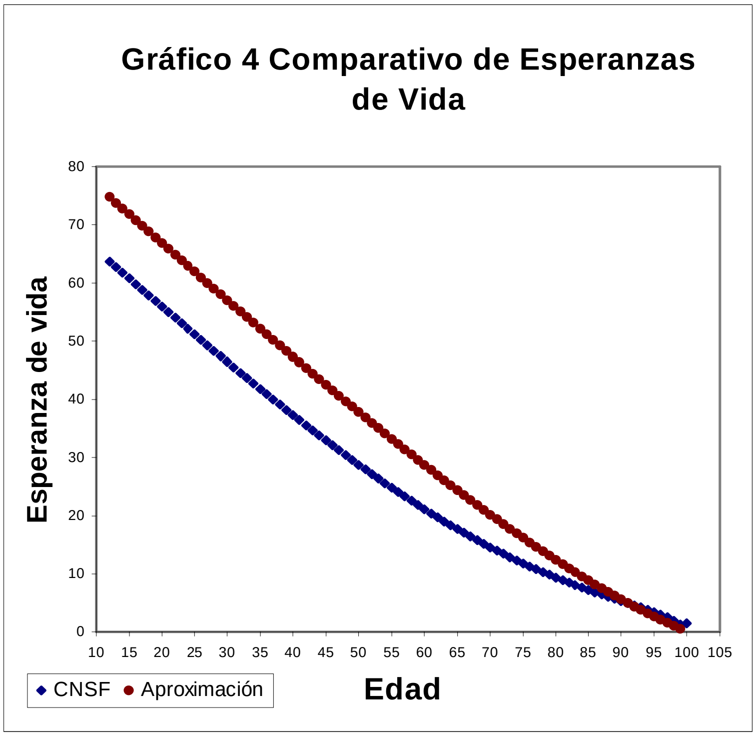




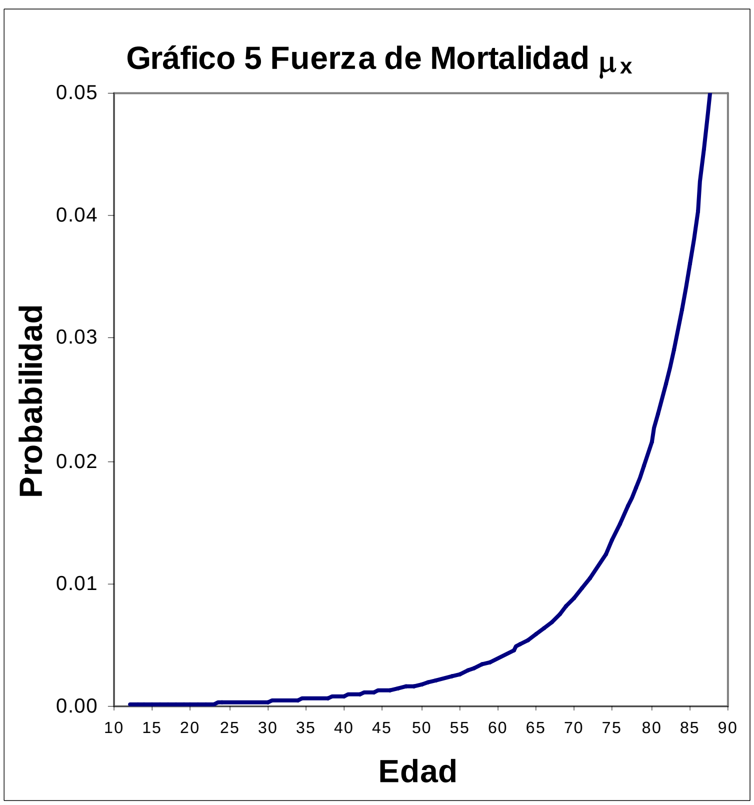
Notemos que las curvas se empiezan a separar a partir de la edad 50, siendo mayor nuestra aproximación, es decir la probabilidad de que una persona sobreviva de edad x a $x+1$ es mayor con nuestra estimación que con la tabla base que tenemos.

La función asociada a la aproximación dada es:

$$P_X = \frac{1 - 5.586425E - 04\, e^{0.0749(X+1)}}{1 - 5.586425E - 04\, e^{0.0749X}}$$



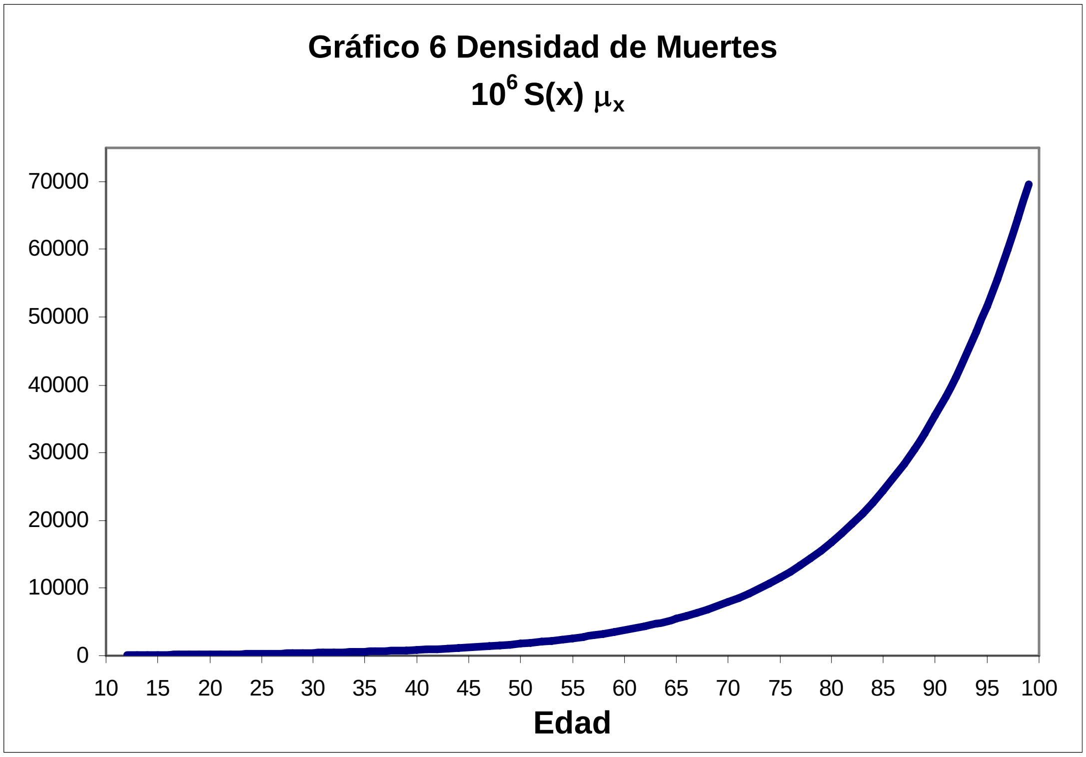
Como consecuencia del grafico anterior, al ser mayor la probabilidad de sobrevivencia año con año también es mayor la esperanza de vida que alcanzan los individuos, tal y como se observa en este gráfico.



Comportamiento de la fuerza de mortalidad bajo una aproximación de $F(x)$ exponencial.

Función asociada:

$$\mu_x = \frac{4.184233E-05\, e^{0.0749X}}{1-5.586425E-04\, e^{0.0749X}}$$



Comportamiento de la densidad de muertes por edad bajo una aproximación de la función $F(x)$ exponencial.

Observemos que en comparación con la tendencia obtenida con el polinomio de grado cinco mostrada en el Capítulo 2 ésta es creciente en todos sus puntos.

A continuación mostramos los valores antes graficados.

Tabla 1. Funciones obtenidas en base a un modelo Exponencial

Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
12	0.00000	1.00000	0.99989	0.00011	0.00010	103	75
13	0.00011	0.99989	0.99988	0.00012	0.00011	111	74
14	0.00022	0.99978	0.99988	0.00012	0.00012	120	73
15	0.00035	0.99965	0.99987	0.00013	0.00013	129	72
16	0.00048	0.99952	0.99986	0.00014	0.00014	139	71
17	0.00062	0.99938	0.99984	0.00016	0.00015	150	70
18	0.00078	0.99922	0.99983	0.00017	0.00016	161	69
19	0.00095	0.99905	0.99982	0.00018	0.00017	174	68
20	0.00113	0.99887	0.99981	0.00019	0.00019	187	67
21	0.00132	0.99868	0.99979	0.00021	0.00020	202	66

Tabla 1. Funciones obtenidas en base a un modelo Exponencial

Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
22	0.00153	0.99847	0.99977	0.00023	0.00022	218	65
23	0.00176	0.99824	0.99976	0.00024	0.00024	235	64
24	0.00200	0.99800	0.99974	0.00026	0.00025	253	63
25	0.00226	0.99774	0.99972	0.00028	0.00027	273	62
26	0.00255	0.99745	0.99969	0.00031	0.00029	294	61
27	0.00285	0.99715	0.99967	0.00033	0.00032	317	60
28	0.00318	0.99682	0.99964	0.00036	0.00034	341	59
29	0.00354	0.99646	0.99962	0.00038	0.00037	368	58
30	0.00392	0.99608	0.99959	0.00041	0.00040	396	57
31	0.00433	0.99567	0.99955	0.00045	0.00043	427	56
32	0.00477	0.99523	0.99952	0.00048	0.00046	460	55
33	0.00525	0.99475	0.99948	0.00052	0.00050	496	54
34	0.00577	0.99423	0.99944	0.00056	0.00054	535	53
35	0.00632	0.99368	0.99940	0.00060	0.00058	576	52
36	0.00692	0.99308	0.99935	0.00065	0.00063	621	51
37	0.00756	0.99244	0.99930	0.00070	0.00067	670	50
38	0.00826	0.99174	0.99924	0.00076	0.00073	722	49
39	0.00901	0.99099	0.99919	0.00081	0.00078	778	48
40	0.00982	0.99018	0.99912	0.00088	0.00085	838	47
41	0.01069	0.98931	0.99905	0.00095	0.00091	903	46
42	0.01163	0.98837	0.99898	0.00102	0.00099	974	45
43	0.01264	0.98736	0.99890	0.00110	0.00106	1,049	44
44	0.01373	0.98627	0.99881	0.00119	0.00115	1,131	44
45	0.01490	0.98510	0.99872	0.00128	0.00124	1,219	43
46	0.01617	0.98383	0.99861	0.00139	0.00134	1,314	42
47	0.01753	0.98247	0.99850	0.00150	0.00144	1,416	41
48	0.01900	0.98100	0.99838	0.00162	0.00156	1,526	40
49	0.02059	0.97941	0.99826	0.00174	0.00168	1,645	39
50	0.02229	0.97771	0.99812	0.00188	0.00181	1,773	38
51	0.02413	0.97587	0.99797	0.00203	0.00196	1,911	37
52	0.02612	0.97388	0.99780	0.00220	0.00211	2,059	36
53	0.02826	0.97174	0.99763	0.00237	0.00228	2,219	35
54	0.03056	0.96944	0.99744	0.00256	0.00247	2,392	34
55	0.03305	0.96695	0.99723	0.00277	0.00267	2,578	33
56	0.03572	0.96428	0.99701	0.00299	0.00288	2,779	32
57	0.03861	0.96139	0.99677	0.00323	0.00311	2,995	31
58	0.04172	0.95828	0.99650	0.00350	0.00337	3,228	31
59	0.04507	0.95493	0.99622	0.00378	0.00364	3,479	30
60	0.04868	0.95132	0.99591	0.00409	0.00394	3,749	29
61	0.05257	0.94743	0.99557	0.00443	0.00426	4,041	28
62	0.05677	0.94323	0.99521	0.00479	0.00462	4,355	27
63	0.06129	0.93871	0.99481	0.00519	0.00500	4,694	26
64	0.06617	0.93383	0.99437	0.00563	0.00542	5,059	25
65	0.07142	0.92858	0.99390	0.00610	0.00587	5,452	24
66	0.07708	0.92292	0.99339	0.00661	0.00637	5,876	24
67	0.08318	0.91682	0.99283	0.00717	0.00691	6,333	23

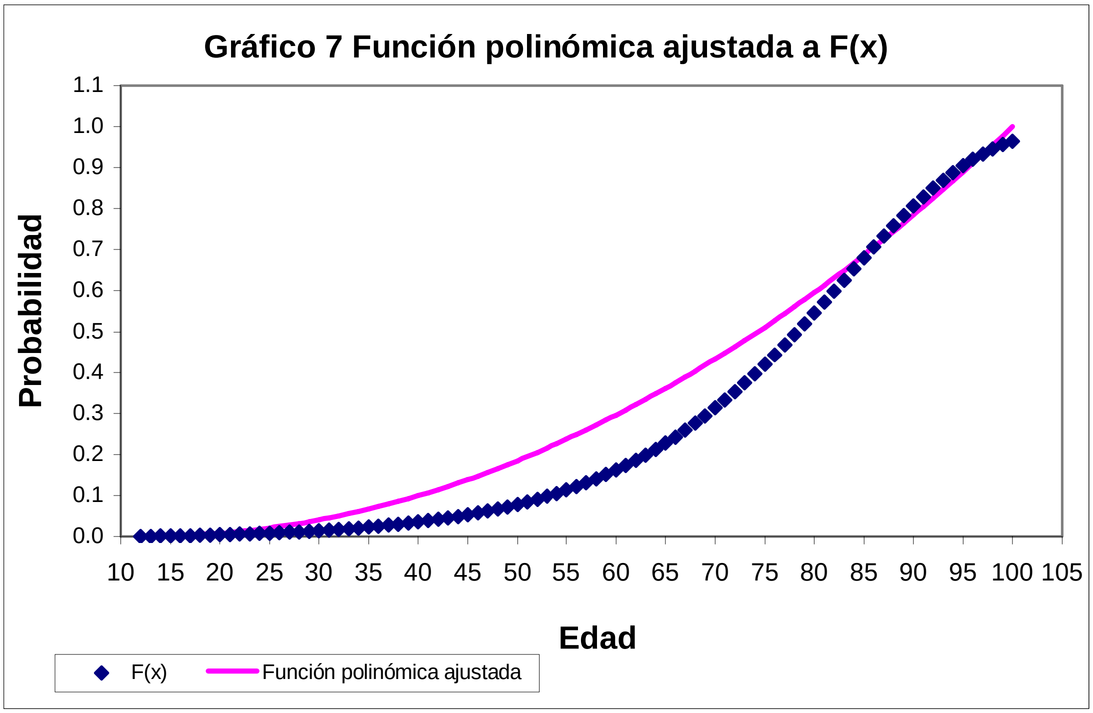
Tabla 1. Funciones obtenidas en base a un modelo Exponencial							
Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
68	0.08976	0.91024	0.99221	0.00779	0.00750	6,826	22
69	0.09685	0.90315	0.99154	0.00846	0.00815	7,357	21
70	0.10449	0.89551	0.99081	0.00919	0.00885	7,929	20
71	0.11272	0.88728	0.99000	0.01000	0.00963	8,546	19
72	0.12159	0.87841	0.98911	0.01089	0.01049	9,210	19
73	0.13116	0.86884	0.98814	0.01186	0.01143	9,927	18
74	0.14147	0.85853	0.98706	0.01294	0.01246	10,699	17
75	0.15258	0.84742	0.98587	0.01413	0.01361	11,531	16
76	0.16455	0.83545	0.98455	0.01545	0.01488	12,428	15
77	0.17745	0.82255	0.98309	0.01691	0.01628	13,394	15
78	0.19136	0.80864	0.98146	0.01854	0.01785	14,436	14
79	0.20635	0.79365	0.97964	0.02036	0.01960	15,559	13
80	0.22251	0.77749	0.97760	0.02240	0.02157	16,769	12
81	0.23992	0.76008	0.97531	0.02469	0.02378	18,073	12
82	0.25869	0.74131	0.97271	0.02729	0.02628	19,479	11
83	0.27892	0.72108	0.96977	0.03023	0.02911	20,994	10
84	0.30072	0.69928	0.96640	0.03360	0.03236	22,627	10
85	0.32421	0.67579	0.96253	0.03747	0.03609	24,386	9
86	0.34954	0.65046	0.95804	0.04196	0.04041	26,283	8
87	0.37683	0.62317	0.95280	0.04720	0.04546	28,327	8
88	0.40624	0.59376	0.94661	0.05339	0.05142	30,531	7
89	0.43795	0.56205	0.93921	0.06079	0.05854	32,905	6
90	0.47211	0.52789	0.93024	0.06976	0.06718	35,464	6
91	0.50894	0.49106	0.91917	0.08083	0.07784	38,223	5
92	0.54863	0.45137	0.90523	0.09477	0.09127	41,195	4
93	0.59141	0.40859	0.88716	0.11284	0.10866	44,399	4
94	0.63751	0.36249	0.86292	0.13708	0.13201	47,853	3
95	0.68720	0.31280	0.82879	0.17121	0.16488	51,574	3
96	0.74076	0.25924	0.77735	0.22265	0.21442	55,586	2
97	0.79848	0.20152	0.69130	0.30870	0.29728	59,909	2
98	0.86069	0.13931	0.51872	0.48128	0.46348	64,568	1
99	0.92774	0.07226	0.00000	1.00000	0.96302	69,590	1

En esta tabla se muestran los valores puntuales de la función de sobrevivencia obtenida con una aproximación exponencial además de todas las funciones necesarias para la construcción de los modelos de tarificación y reserva.

1.3 Propuesta mediante un Polinomio de Segundo Grado ($ax^2 + bx + c$)

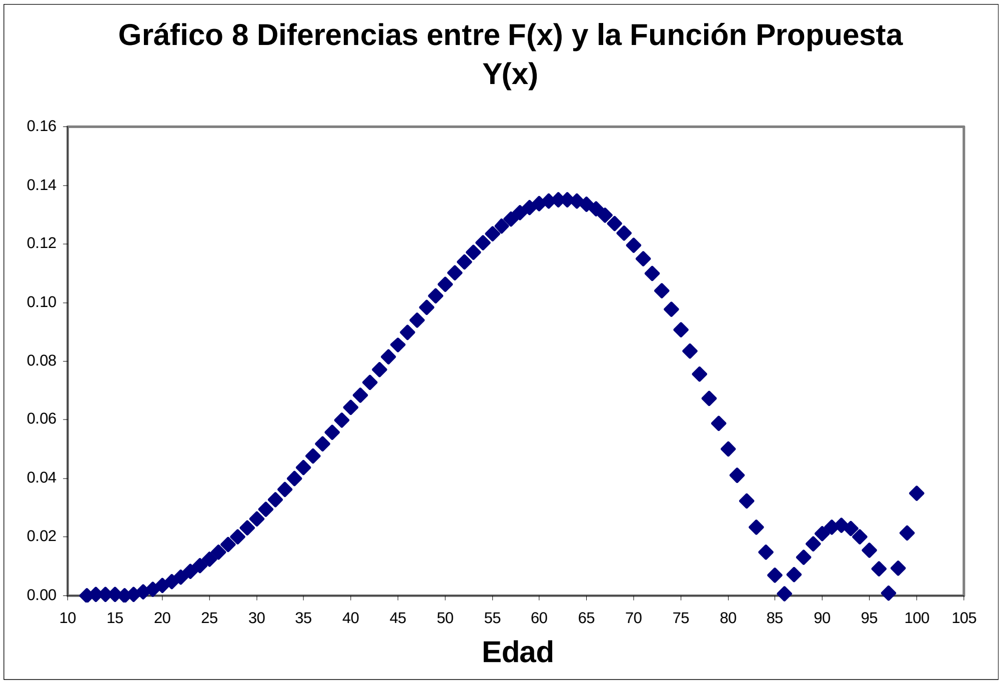
Función asociada a la aproximación de $F(x)$:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 12 \\ 1.301933E-04x^2 - 3.21801E-03x - 1.991059E-02 & \text{si } 12 \leq x < 100 \\ 1 & \text{si } 100 \leq x \end{cases}$$



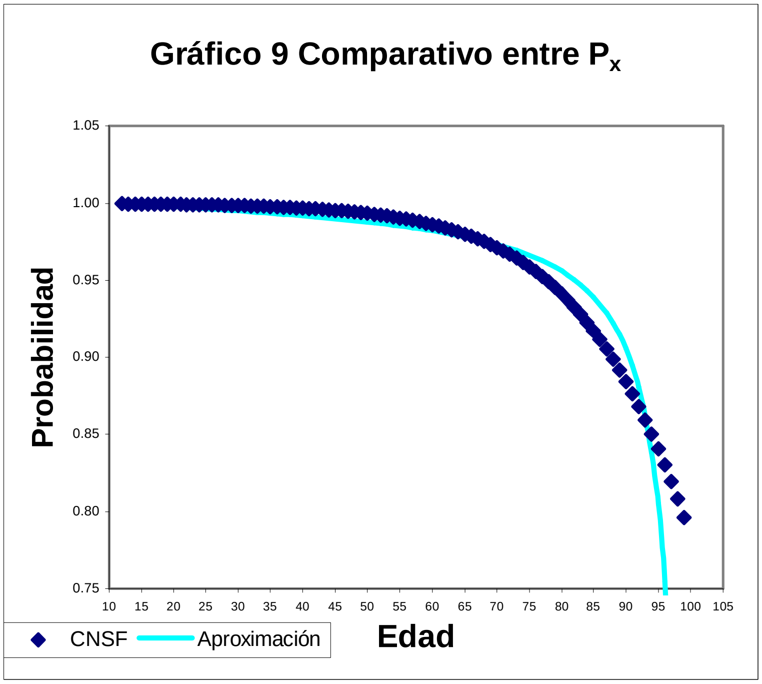
Este gráfico presenta el comportamiento del ajuste final dado por $Y(x)$ a $F(x)$, como se observa la separación entre las curvas está en el centro dentro del rango de edad, de 35 a 80 años.

Como se muestra en el siguiente gráfico este ajuste presenta una diferencia máxima entre $F(x)$ y $Y(x)$ del 14%, cabe decir que conforme el grado de la función polinómica sea mayor las diferencias serán menores debido a la flexibilidad de este tipo de funciones.



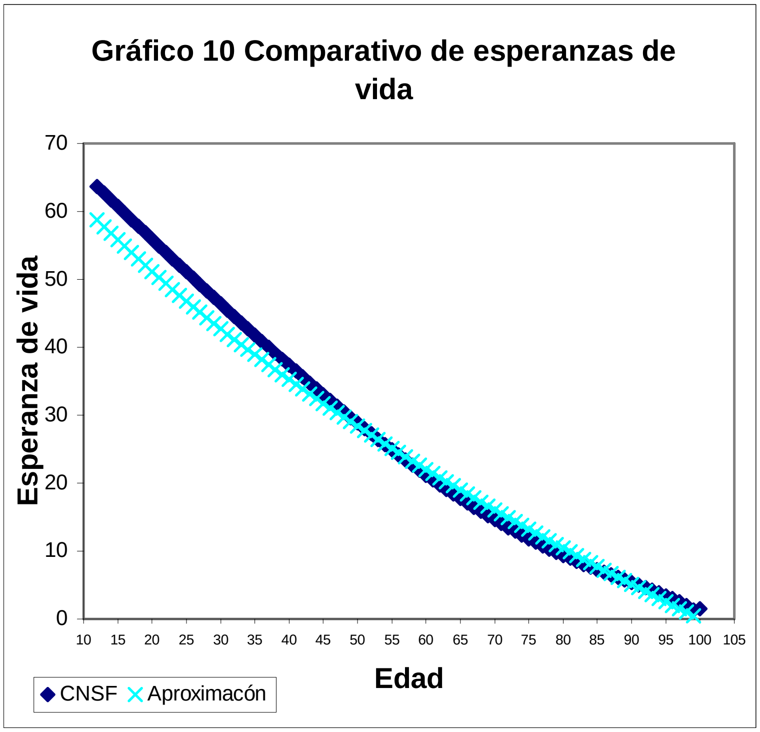
La función que utilizamos es:

$$P_x = \frac{-1.301933E-04(X+1)^2 + 3.21801E-03(X+1) + 1.01991059}{-1.301933E-04X^2 + 3.21801E-03X + 1.01991059}$$



En este caso la separación que existe entre las curvas es menor, siendo muy similares en el rango de 12 a 75 años de edad.

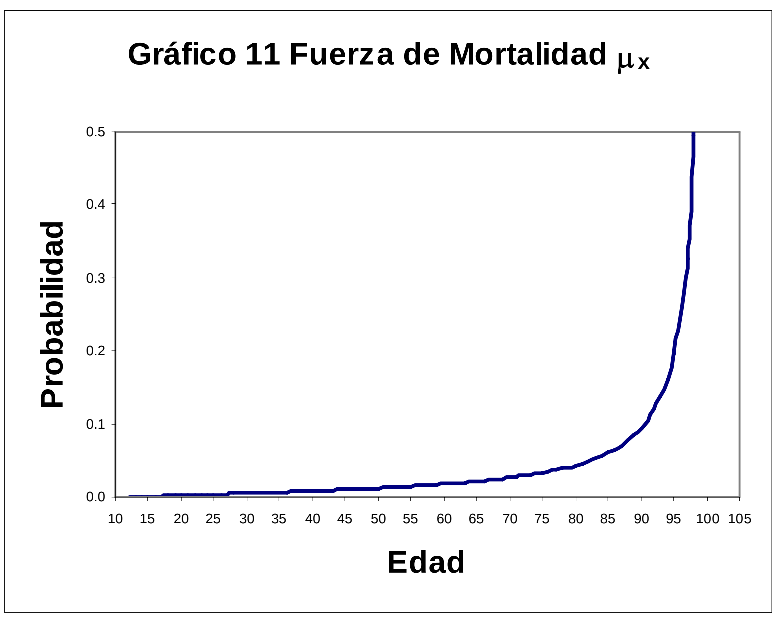
Empezando a ser mayor la función propuesta desde la edad de 75 hasta los 93 años.



En este caso la esperanza de vida calculada con nuestra propuesta es menor en los primeros 50 años y muy semejante en el resto del dominio, lo cual es consecuencia de tener menor probabilidad de vida en los primeros años de edad.

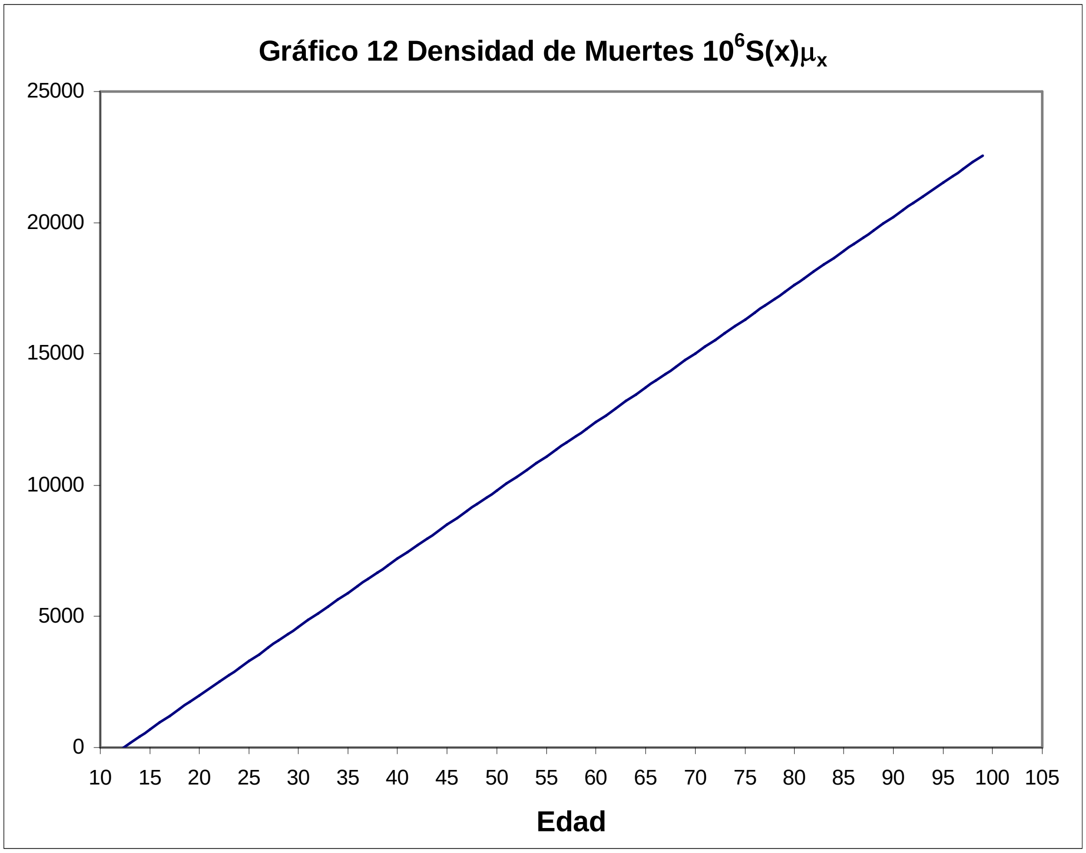
Función utilizada:

$$\mu_x = -\frac{-2.603866E-04X + 3.21801E-03}{-1.301933E-04X^2 + 3.21801E-03X + 1.01991059}$$



Comportamiento de la fuerza de mortalidad bajo una aproximación de $F(x)$ con un polinomio de grado 2.

Al igual que con la función exponencial esta es creciente en todos los puntos



Comportamiento de la densidad de muertes por edad bajo una aproximación de $F(x)$ con un polinomio de segundo grado.

Observemos que en comparación con la obtenida con el polinomio de grado cinco esta es creciente en todos sus puntos y tiene un comportamiento lineal, dado que la derivada de $S(x)$ es una función lineal.

A continuación se muestran los valores antes graficados.

Tabla 2. Funciones obtenidas en base a un Polinomio de 2do Grado

Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
12	0.00000	1.00000	0.99996	0.00004	0.00007	65	59
13	0.00004	0.99996	0.99970	0.00030	0.00017	167	58
14	0.00033	0.99967	0.99944	0.00056	0.00043	427	57
15	0.00089	0.99911	0.99918	0.00082	0.00069	688	56
16	0.00171	0.99829	0.99892	0.00108	0.00095	948	55
17	0.00279	0.99721	0.99866	0.00134	0.00121	1,209	54

Tabla 2. Funciones obtenidas en base a un Polinomio de 2do Grado							
Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
18	0.00413	0.99587	0.99839	0.00161	0.00148	1,469	53
19	0.00573	0.99427	0.99813	0.00187	0.00174	1,729	52
20	0.00759	0.99241	0.99786	0.00214	0.00200	1,990	51
21	0.00971	0.99029	0.99760	0.00240	0.00227	2,250	50
22	0.01209	0.98791	0.99733	0.00267	0.00254	2,510	49
23	0.01473	0.98527	0.99706	0.00294	0.00281	2,771	49
24	0.01763	0.98237	0.99678	0.00322	0.00309	3,031	48
25	0.02079	0.97921	0.99651	0.00349	0.00336	3,292	47
26	0.02421	0.97579	0.99623	0.00377	0.00364	3,552	46
27	0.02789	0.97211	0.99594	0.00406	0.00392	3,812	45
28	0.03184	0.96816	0.99566	0.00434	0.00421	4,073	44
29	0.03604	0.96396	0.99537	0.00463	0.00450	4,333	44
30	0.04050	0.95950	0.99508	0.00492	0.00479	4,594	43
31	0.04523	0.95477	0.99478	0.00522	0.00508	4,854	42
32	0.05021	0.94979	0.99448	0.00552	0.00538	5,114	41
33	0.05545	0.94455	0.99417	0.00583	0.00569	5,375	40
34	0.06096	0.93904	0.99386	0.00614	0.00600	5,635	40
35	0.06672	0.93328	0.99354	0.00646	0.00632	5,896	39
36	0.07275	0.92725	0.99322	0.00678	0.00664	6,156	38
37	0.07904	0.92096	0.99289	0.00711	0.00697	6,416	37
38	0.08558	0.91442	0.99256	0.00744	0.00730	6,677	37
39	0.09239	0.90761	0.99221	0.00779	0.00764	6,937	36
40	0.09946	0.90054	0.99186	0.00814	0.00799	7,197	35
41	0.10678	0.89322	0.99150	0.00850	0.00835	7,458	34
42	0.11437	0.88563	0.99114	0.00886	0.00871	7,718	34
43	0.12222	0.87778	0.99076	0.00924	0.00909	7,979	33
44	0.13033	0.86967	0.99038	0.00962	0.00947	8,239	32
45	0.13870	0.86130	0.98998	0.01002	0.00987	8,499	32
46	0.14733	0.85267	0.98957	0.01043	0.01027	8,760	31
47	0.15622	0.84378	0.98916	0.01084	0.01069	9,020	30
48	0.16537	0.83463	0.98872	0.01128	0.01112	9,281	30
49	0.17478	0.82522	0.98828	0.01172	0.01156	9,541	29
50	0.18445	0.81555	0.98782	0.01218	0.01202	9,801	28
51	0.19438	0.80562	0.98735	0.01265	0.01249	10,062	28
52	0.20457	0.79543	0.98686	0.01314	0.01298	10,322	27
53	0.21503	0.78497	0.98635	0.01365	0.01348	10,582	26
54	0.22574	0.77426	0.98583	0.01417	0.01400	10,843	26
55	0.23671	0.76329	0.98528	0.01472	0.01455	11,103	25
56	0.24795	0.75205	0.98472	0.01528	0.01511	11,364	24
57	0.25944	0.74056	0.98413	0.01587	0.01570	11,624	24
58	0.27119	0.72881	0.98351	0.01649	0.01631	11,884	23
59	0.28321	0.71679	0.98288	0.01712	0.01694	12,145	23
60	0.29548	0.70452	0.98221	0.01779	0.01761	12,405	22
61	0.30802	0.69198	0.98151	0.01849	0.01830	12,666	21
62	0.32081	0.67919	0.98078	0.01922	0.01903	12,926	21
63	0.33387	0.66613	0.98001	0.01999	0.01980	13,186	20

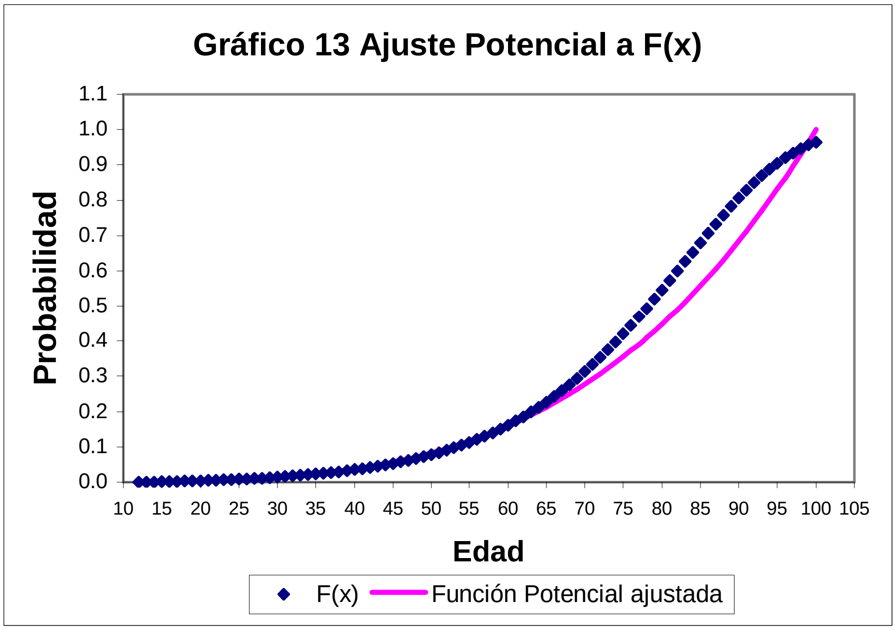
Tabla 2. Funciones obtenidas en base a un Polinomio de 2do Grado							
Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
64	0.34719	0.65281	0.97920	0.02080	0.02060	13,447	20
65	0.36076	0.63924	0.97835	0.02165	0.02144	13,707	19
66	0.37460	0.62540	0.97746	0.02254	0.02233	13,968	18
67	0.38870	0.61130	0.97651	0.02349	0.02327	14,228	18
68	0.40306	0.59694	0.97551	0.02449	0.02427	14,488	17
69	0.41768	0.58232	0.97445	0.02555	0.02533	14,749	17
70	0.43255	0.56745	0.97332	0.02668	0.02645	15,009	16
71	0.44769	0.55231	0.97212	0.02788	0.02765	15,269	15
72	0.46309	0.53691	0.97083	0.02917	0.02892	15,530	15
73	0.47875	0.52125	0.96946	0.03054	0.03029	15,790	14
74	0.49467	0.50533	0.96798	0.03202	0.03176	16,051	14
75	0.51085	0.48915	0.96639	0.03361	0.03335	16,311	13
76	0.52730	0.47270	0.96467	0.03533	0.03506	16,571	13
77	0.54400	0.45600	0.96280	0.03720	0.03691	16,832	12
78	0.56096	0.43904	0.96077	0.03923	0.03893	17,092	12
79	0.57818	0.42182	0.95855	0.04145	0.04114	17,353	11
80	0.59566	0.40434	0.95612	0.04388	0.04356	17,613	10
81	0.61341	0.38659	0.95343	0.04657	0.04623	17,873	10
82	0.63141	0.36859	0.95045	0.04955	0.04920	18,134	9
83	0.64967	0.35033	0.94712	0.05288	0.05251	18,394	9
84	0.66820	0.33180	0.94339	0.05661	0.05622	18,654	8
85	0.68698	0.31302	0.93916	0.06084	0.06043	18,915	8
86	0.70603	0.29397	0.93433	0.06567	0.06523	19,175	7
87	0.72533	0.27467	0.92876	0.07124	0.07076	19,436	7
88	0.74490	0.25510	0.92228	0.07772	0.07721	19,696	6
89	0.76473	0.23527	0.91462	0.08538	0.08482	19,956	6
90	0.78481	0.21519	0.90545	0.09455	0.09395	20,217	5
91	0.80516	0.19484	0.89423	0.10577	0.10510	20,477	5
92	0.82577	0.17423	0.88023	0.11977	0.11902	20,738	4
93	0.84663	0.15337	0.86224	0.13776	0.13691	20,998	4
94	0.86776	0.13224	0.83826	0.16174	0.16076	21,258	3
95	0.88915	0.11085	0.80470	0.19530	0.19413	21,519	3
96	0.91080	0.08920	0.75438	0.24562	0.24416	21,779	2
97	0.93271	0.06729	0.67054	0.32946	0.32753	22,039	2
98	0.95488	0.04512	0.50289	0.49711	0.49423	22,300	1
99	0.97731	0.02269	0.00000	1.00000	0.99426	22,560	1

En esta tabla se muestran los valores puntuales de la función de sobrevivencia obtenida con una aproximación de un polinomio de 2do grado además de todas las funciones necesarias para la construcción de los modelos de tarificación y reserva.

1.4 Propuesta Potencial (aX^b)

Función asociada a la aproximación de $F(x)$:

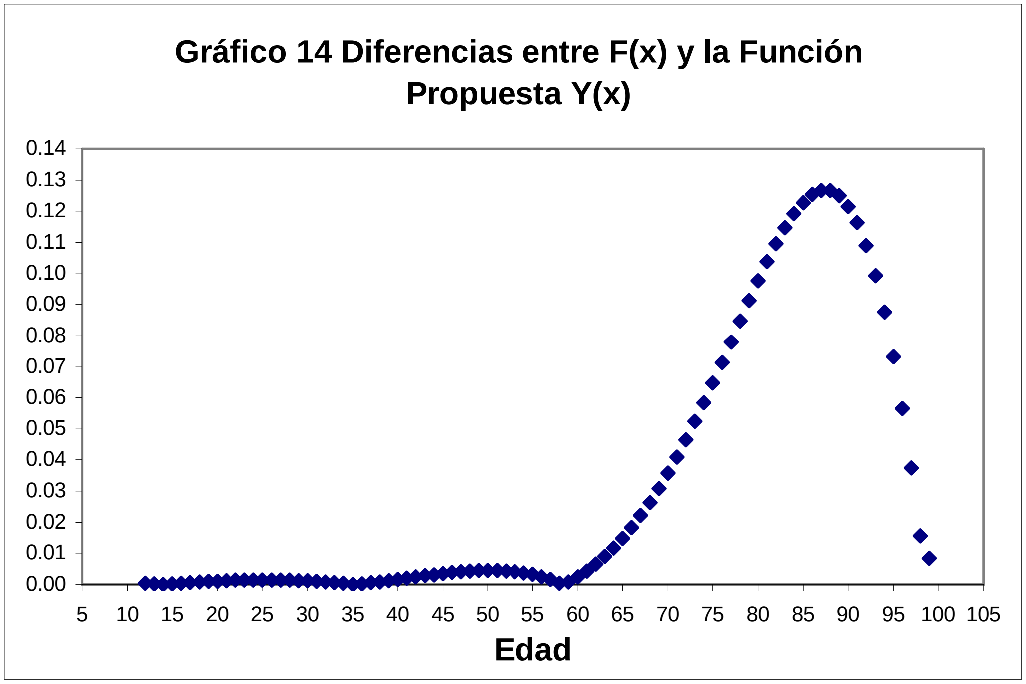
$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6.3738E-08X^{3.5978} & \text{si } 0 \le x < 100 \\ 1 & \text{si } 100 \le x \end{cases}$$

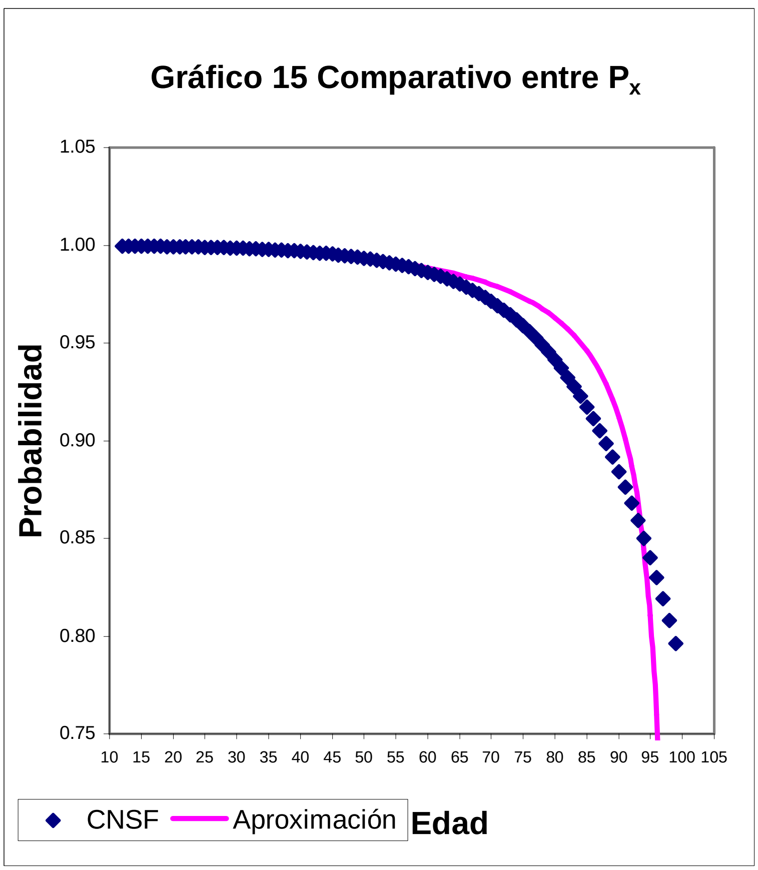


Este gráfico presenta el comportamiento del ajuste final dado por $Y(x)$ a $F(x)$, como podemos ver la aproximación presenta un comportamiento muy similar, empezando a separarse a partir de la edad 65.

Cabe señalar que esta aproximación es bastante buena si consideráramos una cartera con una edad máxima de venta para el plan de seguros de 50 años ya que las diferencias para estas edades están por debajo del 1%, además tendría la ventaja de ser una expresión sencilla y fácil de manejar.

Como se muestra en el gráfico siguiente este ajuste presenta una diferencia máxima entre $F(x)$ y $Y(x)$ de 13%, nótese además que en las primeras edades las diferencias son pequeñas, es decir, de 12 a 65 años con un 1% como diferencia máxima.

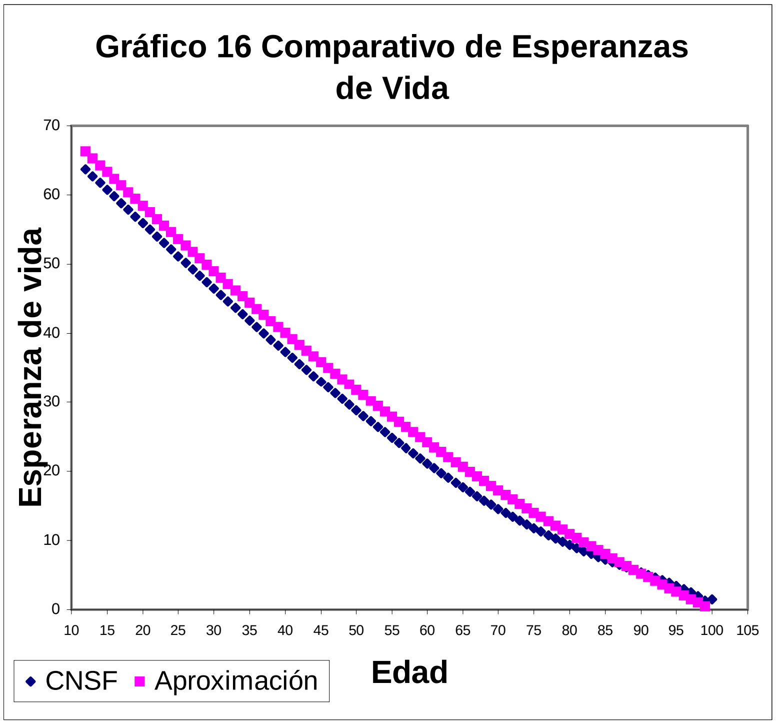




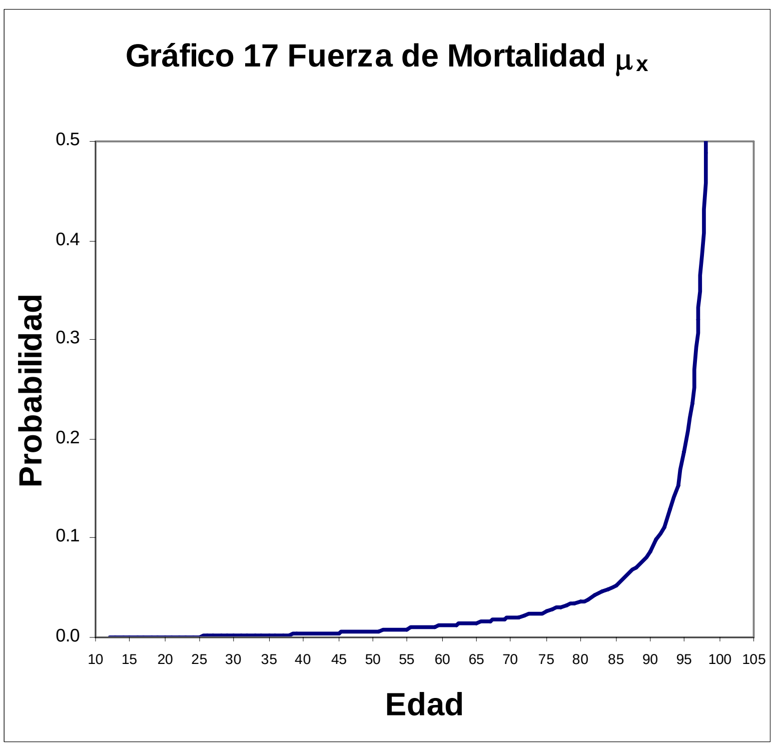
Notemos que la separación de las curvas se da pasando la edad 65, siendo mayor nuestra aproximación hasta la edad 94 en donde se cruzan de nuevo.

La función que utilizamos es:

$$P_X = \frac{1-6.3738E\text{-}08(X+1)^{3.5978}}{1-6.3738E\text{-}08X^{3.5978}}$$



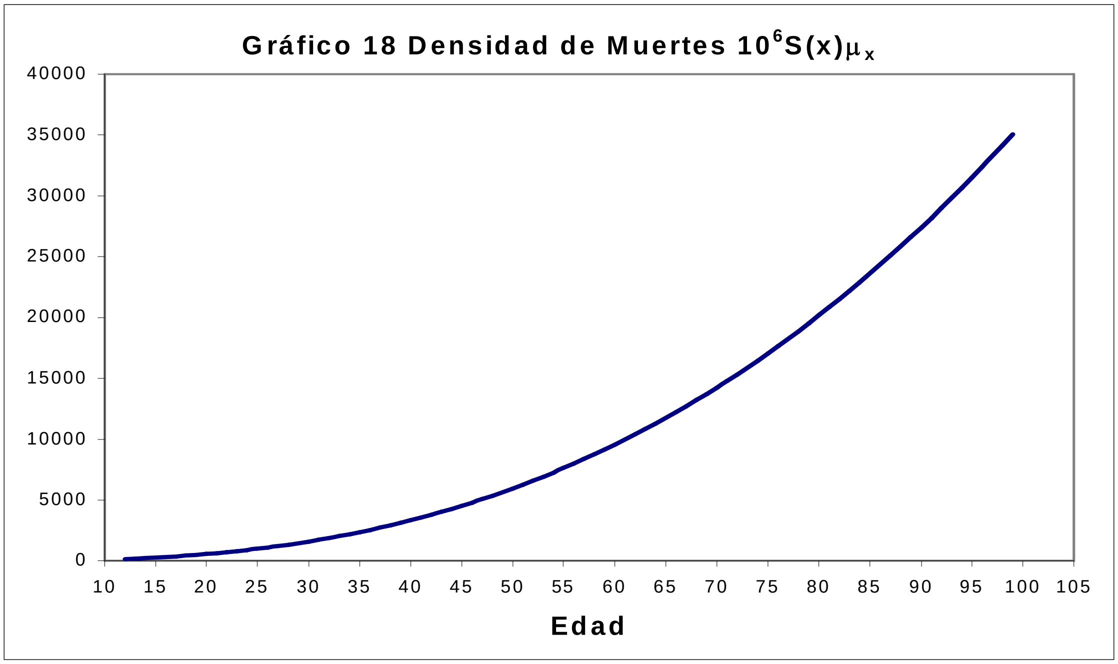
En el presente gráfico se muestra el comportamiento de las esperanzas de vida, teniendo valores mayores nuestra propuesta dentro de los primeros 87 años. Ya que de 65 a 94 años la probabilidad de vida año con año es mayor.



Comportamiento de la fuerza de mortalidad bajo una aproximación de $F(x)$ de la forma aX^b.

Función asociada:

$$\mu_x = \frac{2.293178E-07X^{2.5978}}{1-6.3738E-08\,X^{3.5978}}$$



Comportamiento de la densidad de muertes por edad bajo una aproximación de $F(x)$ de la forma aX^b.

Observemos que en comparación con la obtenida con el polinomio de grado cinco, ésta es creciente en todos sus puntos y a diferencia de la presentada con la función exponencial ésta tiene un crecimiento constante desde un inicio pero más lento.

A continuación se muestran los valores antes graficados.

Tabla 3. Funciones obtenidas en base a una aproximación Potencial

Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
12	0.00000	1.00000	0.99984	0.00016	0.00015	146	66
13	0.00016	0.99984	0.99980	0.00020	0.00018	180	65
14	0.00036	0.99964	0.99976	0.00024	0.00022	218	64
15	0.00060	0.99940	0.99972	0.00028	0.00026	261	63
16	0.00088	0.99912	0.99967	0.00033	0.00031	308	62
17	0.00122	0.99878	0.99961	0.00039	0.00036	361	61
18	0.00161	0.99839	0.99955	0.00045	0.00042	418	60
19	0.00206	0.99794	0.99948	0.00052	0.00048	481	59
20	0.00257	0.99743	0.99941	0.00059	0.00055	550	58

Tabla 3. Funciones obtenidas en base a una aproximación Potencial							
Edad	**F(x)**	**S(x)**	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
21	0.00316	0.99684	0.99933	0.00067	0.00063	624	57
22	0.00382	0.99618	0.99925	0.00075	0.00071	705	57
23	0.00457	0.99543	0.99916	0.00084	0.00079	791	56
24	0.00541	0.99459	0.99906	0.00094	0.00089	883	55
25	0.00634	0.99366	0.99896	0.00104	0.00099	982	54
26	0.00737	0.99263	0.99885	0.00115	0.00110	1,088	53
27	0.00852	0.99148	0.99873	0.00127	0.00121	1,200	52
28	0.00977	0.99023	0.99861	0.00139	0.00133	1,318	51
29	0.01116	0.98884	0.99847	0.00153	0.00146	1,444	50
30	0.01267	0.98733	0.99833	0.00167	0.00160	1,577	49
31	0.01431	0.98569	0.99818	0.00182	0.00174	1,718	48
32	0.01610	0.98390	0.99803	0.00197	0.00190	1,865	47
33	0.01805	0.98195	0.99786	0.00214	0.00206	2,020	46
34	0.02015	0.97985	0.99769	0.00231	0.00223	2,183	45
35	0.02241	0.97759	0.99750	0.00250	0.00241	2,354	44
36	0.02486	0.97514	0.99731	0.00269	0.00260	2,533	44
37	0.02748	0.97252	0.99710	0.00290	0.00280	2,720	43
38	0.03030	0.96970	0.99689	0.00311	0.00301	2,915	42
39	0.03332	0.96668	0.99667	0.00333	0.00323	3,118	41
40	0.03654	0.96346	0.99643	0.00357	0.00346	3,330	40
41	0.03998	0.96002	0.99618	0.00382	0.00370	3,551	39
42	0.04364	0.95636	0.99592	0.00408	0.00395	3,780	38
43	0.04754	0.95246	0.99565	0.00435	0.00422	4,019	37
44	0.05168	0.94832	0.99537	0.00463	0.00450	4,266	37
45	0.05608	0.94392	0.99507	0.00493	0.00479	4,522	36
46	0.06073	0.93927	0.99476	0.00524	0.00510	4,788	35
47	0.06566	0.93434	0.99443	0.00557	0.00542	5,063	34
48	0.07086	0.92914	0.99409	0.00591	0.00576	5,348	33
49	0.07636	0.92364	0.99373	0.00627	0.00611	5,642	33
50	0.08215	0.91785	0.99335	0.00665	0.00648	5,946	32
51	0.08825	0.91175	0.99296	0.00704	0.00687	6,260	31
52	0.09467	0.90533	0.99254	0.00746	0.00727	6,584	30
53	0.10142	0.89858	0.99211	0.00789	0.00770	6,918	29
54	0.10851	0.89149	0.99166	0.00834	0.00815	7,262	29
55	0.11595	0.88405	0.99118	0.00882	0.00862	7,617	28
56	0.12375	0.87625	0.99068	0.00932	0.00911	7,982	27
57	0.13192	0.86808	0.99015	0.00985	0.00963	8,357	26
58	0.14047	0.85953	0.98960	0.01040	0.01017	8,743	26
59	0.14941	0.85059	0.98902	0.01098	0.01075	9,140	25
60	0.15875	0.84125	0.98840	0.01160	0.01135	9,548	24
61	0.16851	0.83149	0.98776	0.01224	0.01199	9,967	23
62	0.17869	0.82131	0.98707	0.01293	0.01266	10,397	23
63	0.18931	0.81069	0.98635	0.01365	0.01337	10,839	22
64	0.20037	0.79963	0.98559	0.01441	0.01412	11,291	21
65	0.21189	0.78811	0.98478	0.01522	0.01492	11,755	21

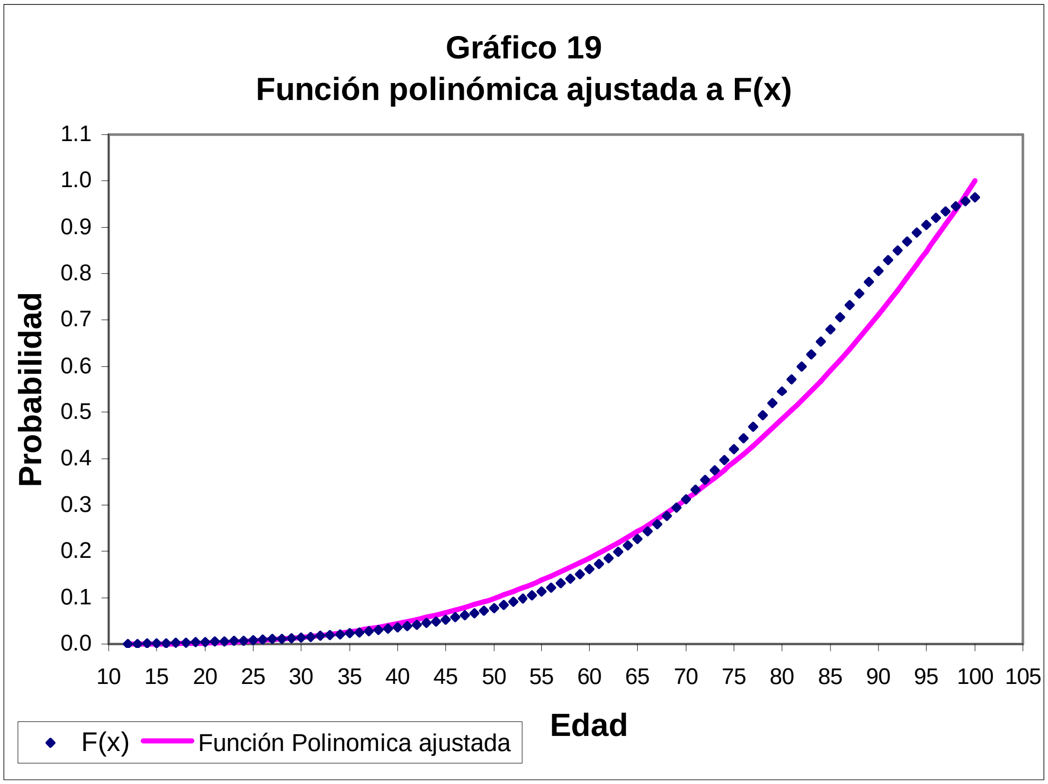
Tabla 3. Funciones obtenidas en base a una aproximación Potencial							
Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	μ_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
66	0.22388	0.77612	0.98393	0.01607	0.01576	12,231	20
67	0.23636	0.76364	0.98302	0.01698	0.01665	12,718	19
68	0.24932	0.75068	0.98205	0.01795	0.01761	13,217	19
69	0.26280	0.73720	0.98102	0.01898	0.01862	13,728	18
70	0.27678	0.72322	0.97993	0.02007	0.01971	14,251	17
71	0.29130	0.70870	0.97875	0.02125	0.02086	14,786	17
72	0.30636	0.69364	0.97749	0.02251	0.02211	15,333	16
73	0.32197	0.67803	0.97614	0.02386	0.02344	15,892	15
74	0.33815	0.66185	0.97468	0.02532	0.02488	16,464	15
75	0.35490	0.64510	0.97311	0.02689	0.02643	17,048	14
76	0.37225	0.62775	0.97141	0.02859	0.02811	17,645	13
77	0.39020	0.60980	0.96956	0.03044	0.02994	18,255	13
78	0.40876	0.59124	0.96754	0.03246	0.03193	18,877	12
79	0.42796	0.57204	0.96533	0.03467	0.03411	19,512	12
80	0.44779	0.55221	0.96289	0.03711	0.03651	20,160	11
81	0.46828	0.53172	0.96021	0.03979	0.03916	20,821	10
82	0.48944	0.51056	0.95723	0.04277	0.04210	21,496	10
83	0.51128	0.48872	0.95389	0.04611	0.04539	22,184	9
84	0.53381	0.46619	0.95015	0.04985	0.04909	22,885	9
85	0.55705	0.44295	0.94590	0.05410	0.05328	23,599	8
86	0.58101	0.41899	0.94106	0.05894	0.05806	24,327	7
87	0.60571	0.39429	0.93547	0.06453	0.06358	25,069	7
88	0.63116	0.36884	0.92895	0.07105	0.07001	25,824	6
89	0.65736	0.34264	0.92125	0.07875	0.07761	26,593	6
90	0.68435	0.31565	0.91201	0.08799	0.08673	27,377	5
91	0.71212	0.28788	0.90073	0.09927	0.09787	28,174	5
92	0.74070	0.25930	0.88663	0.11337	0.11178	28,985	4
93	0.77010	0.22990	0.86851	0.13149	0.12967	29,811	4
94	0.80033	0.19967	0.84436	0.15564	0.15350	30,651	3
95	0.83140	0.16860	0.81057	0.18943	0.18686	31,505	3
96	0.86334	0.13666	0.75988	0.24012	0.23689	32,374	2
97	0.89615	0.10385	0.67543	0.32457	0.32026	33,257	2
98	0.92986	0.07014	0.50656	0.49344	0.48695	34,155	1
99	0.96447	0.03553	0.00000	1.00000	0.98698	35,068	1

En esta tabla se muestran los valores puntuales de la función de sobrevivencia obtenida con una aproximación de una función potencial, además de todas las funciones necesarias para la construcción de los modelos de tarificación y reserva.

1.5 Propuesta mediante un Polinomio de Tercer Grado ($ax^3 + bx^2 + cx + d$)

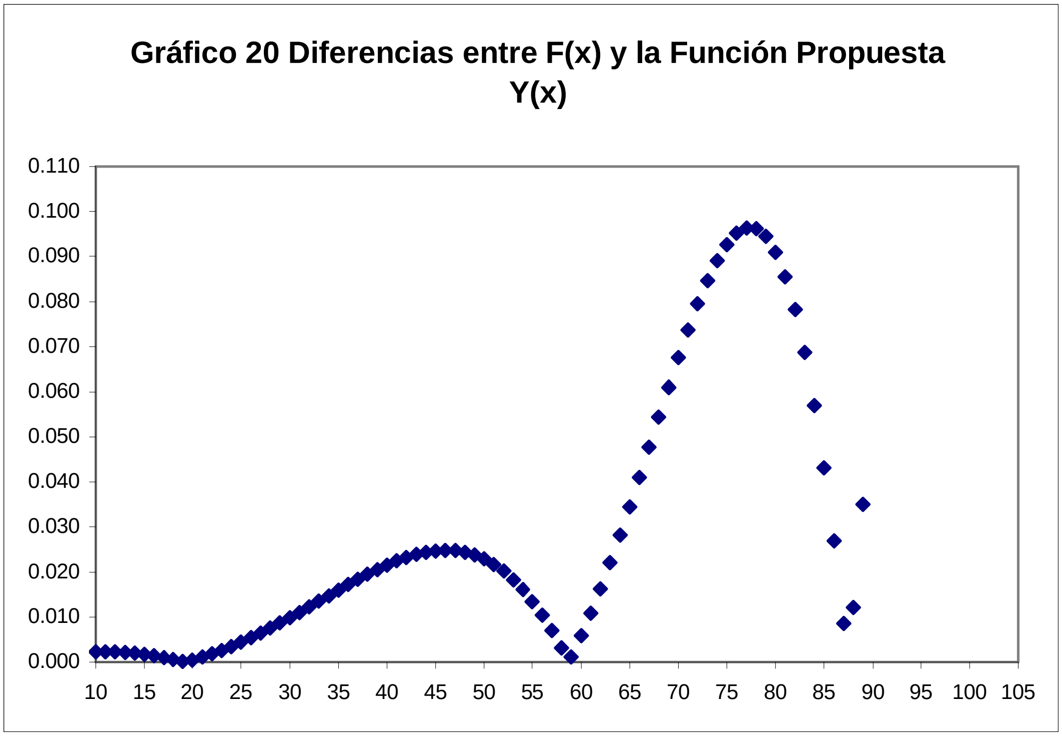
Función asociada a la aproximación de $F(x)$:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 12 \\ 1.2151E\text{-}06x^3 - 2.1499E\text{-}05x^2 + 1.3086E\text{-}05x + 1.1531E\text{-}03 & \text{si } 12 \leq x < 100 \\ 1 & \text{si } 100 \leq x \end{cases}$$



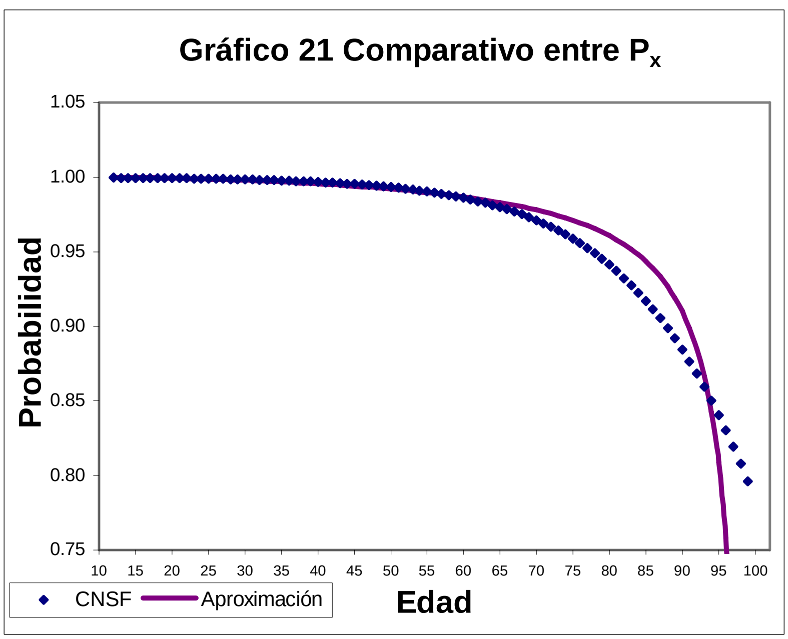
Este gráfico presenta el comportamiento del ajuste final dado por $Y(x)$ a $F(x)$, como podemos ver la aproximación presenta un comportamiento muy similar, empezando a separarse a partir de la edad 75.

Cabe señalar que esta aproximación es muy buena teniendo una diferencia máxima de alrededor del 10% y alcanzando diferencias por debajo del 3% en el rango de edades de 12 a 75 años como se muestra en el siguiente gráfico.



Función asociada:

$$P_x = \frac{1 - (1.2151E-06(X+1)^3 - 2.1499E-05(X+1)^2 + 1.3086E-05(X+1) + 1.1531E-03)}{1 - (1.2151E-06X^3 - 2.1499E-05X^2 + 1.3086E-05X + 1.1531E-03)}$$



La separación de las curvas se da a partir de la edad 65 y hasta la edad 93, en donde la función propuesta es mayor en este intervalo.

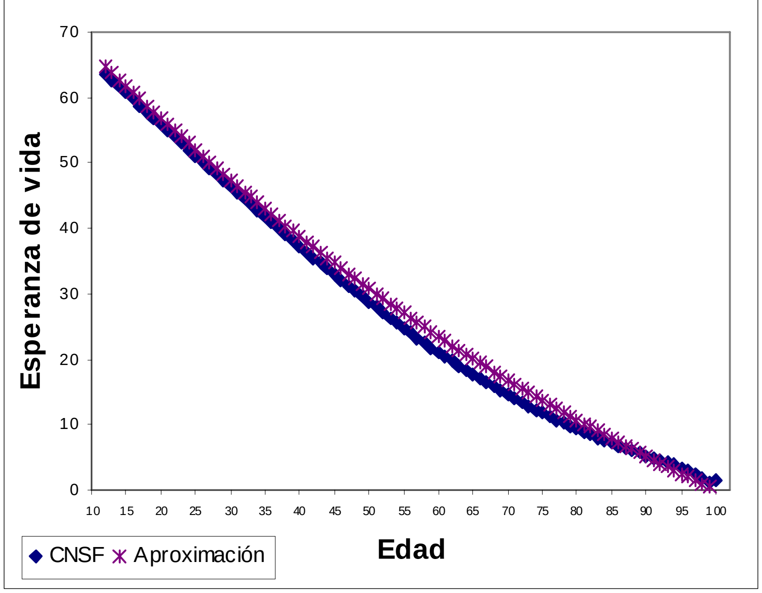


Gráfico 22 Comparativo de la Esperanza de Vida

En el caso de las esperanzas de vida estas son muy similares, notando una pequeña separación de 50 a 75 años que está dentro del rango donde la P_x aproximada fue mayor.

Función asociada:

$$\mu_x = \frac{3.6454267E-06X^2 - 4.299734089E-05X + 1.3086E-05}{1-(1.2151E-06X^3 - 2.1499E-05X^2 + 1.3086E-05X + 1.1531E-03)}$$

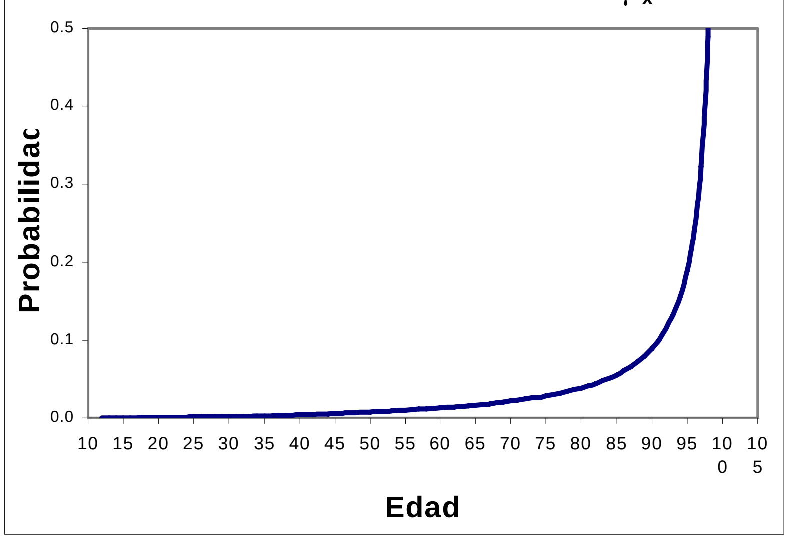
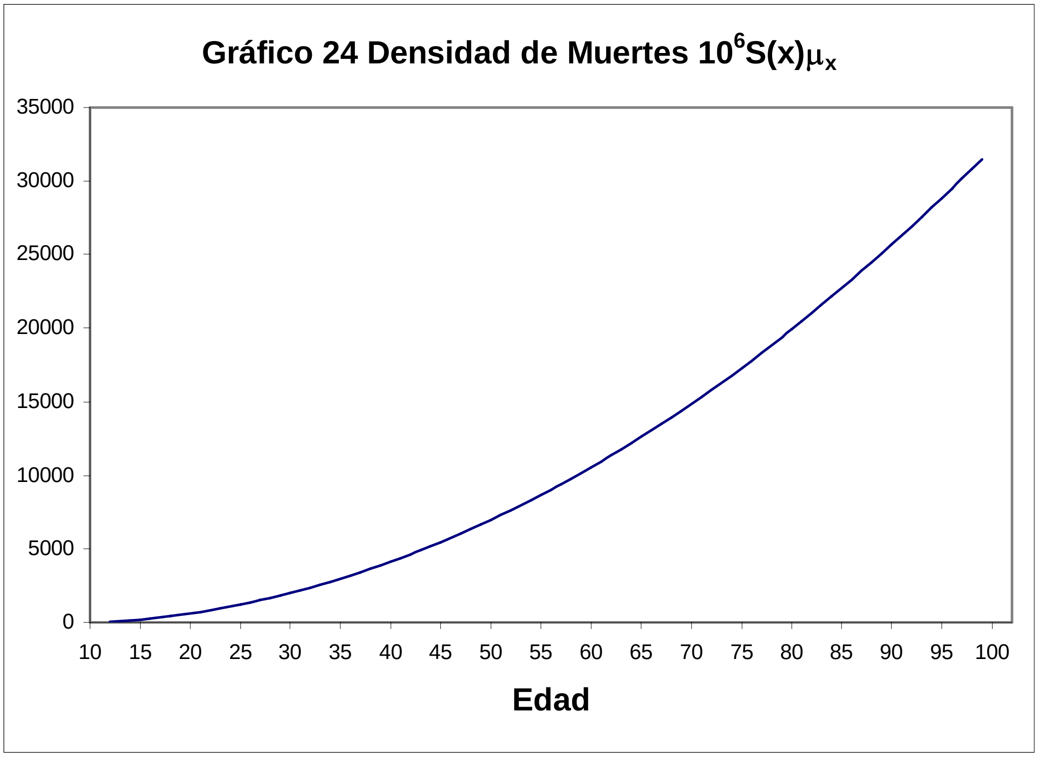


Gráfico 23 Fuerza de Mortalidad μ_x

Comportamiento de la fuerza de mortalidad bajo una aproximación de $F(x)$ con un polinomio de grado 3.



Comportamiento de la densidad de muertes por edad bajo una aproximación de $F(x)$ con un polinomio de tercer grado.

Observemos que en comparación con la obtenida con el polinomio de grado cinco ésta es creciente en todos sus puntos.

A continuación se muestran los valores antes graficados.

Tabla 4. Funciones obtenidas en base a un polinomio de 3er grado

Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
12	0.00000	1.00000	0.99998	0.00002	22	65
13	0.00002	0.99998	0.99993	0.00007	70	64
14	0.00009	0.99991	0.99987	0.00013	126	63
15	0.00022	0.99978	0.99980	0.00020	188	62
16	0.00042	0.99958	0.99973	0.00027	258	61
17	0.00069	0.99931	0.99965	0.00035	336	60
18	0.00104	0.99896	0.99956	0.00044	420	59
19	0.00148	0.99852	0.99946	0.00054	512	58
20	0.00201	0.99799	0.99936	0.00064	611	57

Tabla 4. Funciones obtenidas en base a un polinomio de 3er grado						
Edad	F(x)	S(x)	P_x	q_x	$10^6 s(x)\mu_x$	e^o_x
21	0.00265	0.99735	0.99925	0.00075	718	56
22	0.00340	0.99660	0.99913	0.00087	832	55
23	0.00426	0.99574	0.99901	0.00099	953	54
24	0.00525	0.99475	0.99887	0.00113	1,081	53
25	0.00638	0.99362	0.99873	0.00127	1,217	52
26	0.00764	0.99236	0.99858	0.00142	1,359	51
27	0.00904	0.99096	0.99842	0.00158	1,510	50
28	0.01061	0.98939	0.99826	0.00174	1,667	49
29	0.01233	0.98767	0.99809	0.00191	1,832	48
30	0.01422	0.98578	0.99790	0.00210	2,004	47
31	0.01629	0.98371	0.99771	0.00229	2,183	47
32	0.01854	0.98146	0.99751	0.00249	2,370	46
33	0.02098	0.97902	0.99731	0.00269	2,564	45
34	0.02362	0.97638	0.99709	0.00291	2,765	44
35	0.02646	0.97354	0.99686	0.00314	2,974	43
36	0.02951	0.97049	0.99663	0.00337	3,190	42
37	0.03279	0.96721	0.99638	0.00362	3,413	41
38	0.03629	0.96371	0.99612	0.00388	3,643	40
39	0.04002	0.95998	0.99586	0.00414	3,881	40
40	0.04400	0.95600	0.99558	0.00442	4,126	39
41	0.04823	0.95177	0.99529	0.00471	4,378	38
42	0.05271	0.94729	0.99499	0.00501	4,638	37
43	0.05745	0.94255	0.99468	0.00532	4,905	36
44	0.06247	0.93753	0.99435	0.00565	5,179	36
45	0.06776	0.93224	0.99402	0.00598	5,460	35
46	0.07334	0.92666	0.99367	0.00633	5,749	34
47	0.07921	0.92079	0.99330	0.00670	6,045	33
48	0.08538	0.91462	0.99292	0.00708	6,348	32
49	0.09185	0.90815	0.99252	0.00748	6,659	32
50	0.09864	0.90136	0.99211	0.00789	6,977	31
51	0.10576	0.89424	0.99168	0.00832	7,302	30
52	0.11320	0.88680	0.99123	0.00877	7,634	29
53	0.12098	0.87902	0.99076	0.00924	7,974	29
54	0.12910	0.87090	0.99027	0.00973	8,321	28
55	0.13757	0.86243	0.98976	0.01024	8,676	27
56	0.14640	0.85360	0.98923	0.01077	9,037	26
57	0.15559	0.84441	0.98867	0.01133	9,406	26
58	0.16516	0.83484	0.98808	0.01192	9,782	25
59	0.17511	0.82489	0.98747	0.01253	10,166	24
60	0.18544	0.81456	0.98683	0.01317	10,557	24
61	0.19617	0.80383	0.98615	0.01385	10,955	23
62	0.20730	0.79270	0.98544	0.01456	11,360	22
63	0.21884	0.78116	0.98469	0.01531	11,773	21
64	0.23080	0.76920	0.98391	0.01609	12,193	21
65	0.24318	0.75682	0.98307	0.01693	12,620	20
66	0.25599	0.74401	0.98219	0.01781	13,055	19

Tabla 4. Funciones obtenidas en base a un polinomio de 3er grado						
Edad	**F(x)**	**S(x)**	**P_x**	**q_x**	**$10^6 s(x)\mu_x$**	**e^o_x**
67	0.26924	0.73076	0.98126	0.01874	13,497	19
68	0.28293	0.71707	0.98027	0.01973	13,946	18
69	0.29708	0.70292	0.97922	0.02078	14,402	18
70	0.31169	0.68831	0.97810	0.02190	14,866	17
71	0.32676	0.67324	0.97690	0.02310	15,337	16
72	0.34231	0.65769	0.97562	0.02438	15,815	16
73	0.35834	0.64166	0.97425	0.02575	16,301	15
74	0.37486	0.62514	0.97278	0.02722	16,794	14
75	0.39188	0.60812	0.97119	0.02881	17,294	14
76	0.40940	0.59060	0.96947	0.03053	17,801	13
77	0.42743	0.57257	0.96760	0.03240	18,316	13
78	0.44598	0.55402	0.96557	0.03443	18,838	12
79	0.46506	0.53494	0.96334	0.03666	19,367	11
80	0.48467	0.51533	0.96090	0.03910	19,904	11
81	0.50482	0.49518	0.95820	0.04180	20,448	10
82	0.52551	0.47449	0.95521	0.04479	20,999	10
83	0.54677	0.45323	0.95187	0.04813	21,558	9
84	0.56858	0.43142	0.94812	0.05188	22,123	8
85	0.59096	0.40904	0.94387	0.05613	22,697	8
86	0.61392	0.38608	0.93902	0.06098	23,277	7
87	0.63747	0.36253	0.93343	0.06657	23,865	7
88	0.66160	0.33840	0.92691	0.07309	24,460	6
89	0.68634	0.31366	0.91921	0.08079	25,062	6
90	0.71167	0.28833	0.90999	0.09001	25,671	5
91	0.73763	0.26237	0.89872	0.10128	26,288	5
92	0.76420	0.23580	0.88464	0.11536	26,912	4
93	0.79140	0.20860	0.86656	0.13344	27,544	4
94	0.81924	0.18076	0.84245	0.15755	28,182	3
95	0.84772	0.15228	0.80872	0.19128	28,828	3
96	0.87685	0.12315	0.75815	0.24185	29,482	2
97	0.90663	0.09337	0.67388	0.32612	30,142	2
98	0.93708	0.06292	0.50539	0.49461	30,810	1
99	0.96820	0.03180	0.00000	1.00000	31,485	1

En esta tabla se muestran los valores puntuales de la función de sobrevivencia obtenida con una aproximación de una función polinómica de 3er grado, además de todas las funciones necesarias para la construcción de los modelos de tarificación y reserva.

1.6 Resumen de Funciones Propuestas

Función	Aproximación de $F(x)$	Diferencia Máxima
Exponencial	$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 5.586425E-04\, e^{0.0749X} & \text{si} \quad 0 < x < 100 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 100\end{cases}$	**35.62%**
Polinomio de Segundo Grado	$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x \le 12 \\ 1.301933E-04X^2-3.21801E-03X-1.991059E-02 & \text{si} \quad 12 < x < 100 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 100\end{cases}$	**13.52%**
Potencial	$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 6.3738E-08X^{3.5978} & \text{si} \quad 0 < x < 100 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 100\end{cases}$	**12.67%**

Función	Aproximación de $F(x)$	Diferencia Máxima
Polinomio de Tercer Grado	$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 12\\ 1.2151E-06X^3-2.1499E-05X^2+1.3086E-05X+1.1531E-03 & \text{si } 12<x<100\\ 1 & \text{si } 100\le x\end{cases}$	**9.64%**
Polinomio de Quinto Grado	$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<17\\ -1.32E-9x^5+3.19E-7x^4-2.60E-05x^3+9.94E-4x^2-1.6E-2x+1.01E-1 & \text{si } 17\le x<101\\ 1 & \text{si } 101\le x\end{cases}$	**3.77%**

Función	$\tilde{S}(x)$
Exponencial	$\tilde{S}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq 12\\ 1-5.586425E-04\,e^{0.0749X} & \text{si } 12<x<100\\ 0 & \text{si } 100\leq x\end{cases}$
Polinomio de Segundo Grado	$\tilde{S}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq 12\\ 1-(1.301933E-04X^{2}-3.21801E-03X-1.991059E-02) & \text{si } 12<x<101\\ 0 & \text{si } 100\leq x\end{cases}$
Potencial	$\tilde{S}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leq 12\\ 1-6.3738E-08X^{3.5978} & \text{si } 12<x<100\\ 0 & \text{si } 100\leq x\end{cases}$

Función	$\tilde{S}(x)$
Polinomio de Tercer Grado	$\tilde{S}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x \le 12 \\ 1-(1.2151E-06X^3-2.1499E-05X^2+1.3086E-05X+1.1531E-03) & \text{si } 12 < x < 100 \\ 0 & \text{si } 100 \le x \end{cases}$
Polinomio de Quinto Grado	$\tilde{S}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 17 \\ 1-(-1.3266E-9x^5+3.1944E-7x^4-2.6061E-05x^3+9.9495E-4x^2-1.683E-2x+1.018E-1) & \text{si } 17 \le x < 101 \\ 1 & \text{si } 101 \le x \end{cases}$

Función	$\tilde{S}'(x)$
Exponencial	$\tilde{S}'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<12\\ 4.184233E-05\,e^{0.0749(X)} & 12<x<100\\ 0 & \text{si } 100<x\end{cases}$
Polinomio de Segundo Grado	$\tilde{S}'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<12\\ -(2.603866E-04X\ \ -3.21801E-03) & \text{si } 12<x<100\\ 0 & \text{si } 100<x\end{cases}$
Potencial	$\tilde{S}'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<12\\ -2.293178E-07X^{2.5978} & \text{si } 12<x<100\\ 0 & \text{si } 100<x\end{cases}$

Función	$\tilde{S}'(x)$
Polinomio de Tercer Grado	$\tilde{S}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 12 \\ -(3.6454267E-06X^2 - 4.299734089E-05X + 1.3086E-05) & \text{si } 12 < x < 100 \\ 0 & \text{si } 100 < x \end{cases}$
Polinomio de Quinto Grado	$\tilde{S}'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 17 \\ -(-6.633032E-09X^4 + 1.27778E-06X^3 - 7.818197E-05X^2 + 1.98991E-03X - 1.682986E-02) & \text{si } 17 < x < 101 \\ 0 & \text{si } 101 \leq x \end{cases}$

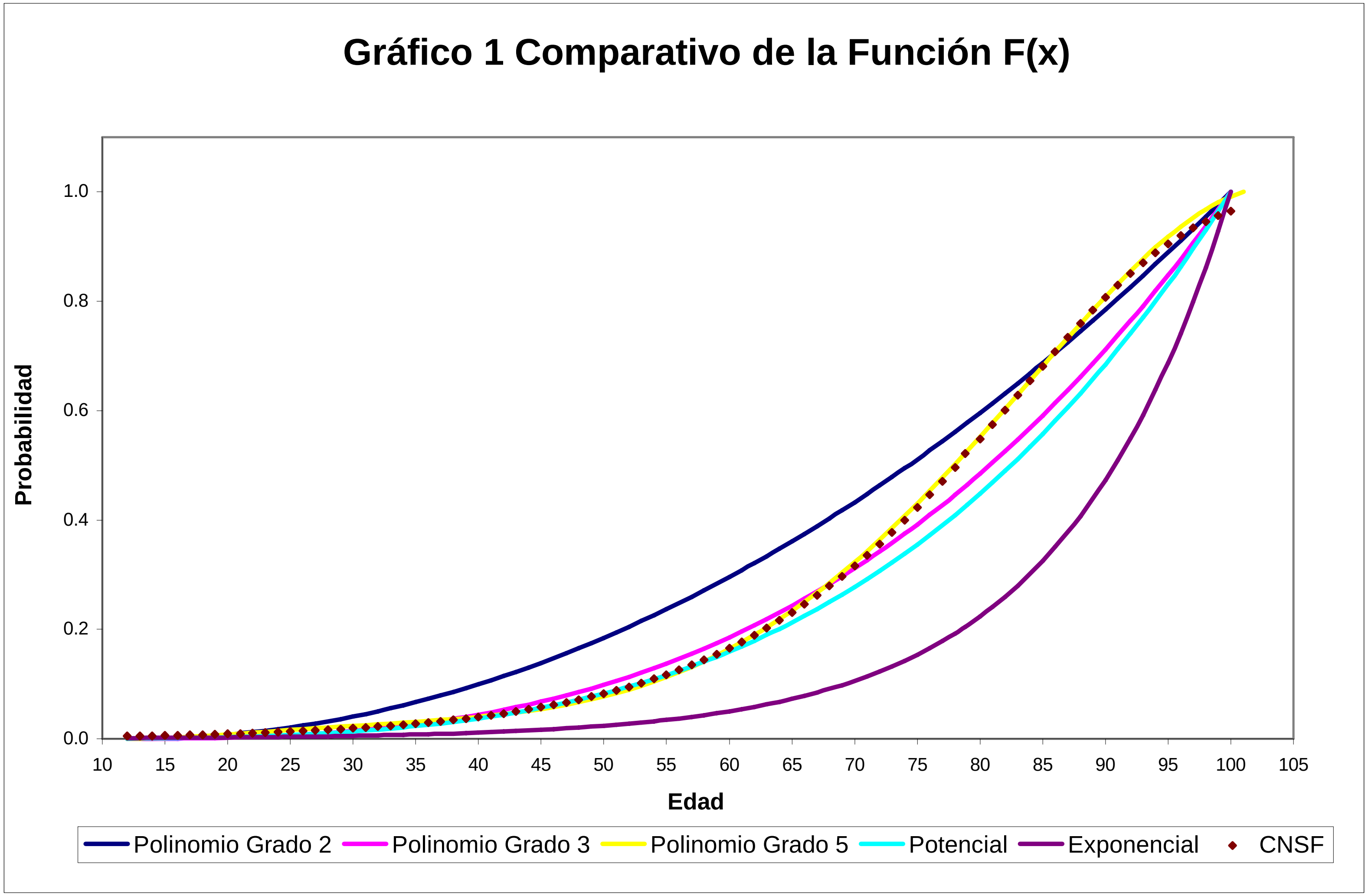
Función	${}_{t}P_{x}$
Exponencial	$\dfrac{1 - 5.586425E - 04\, e^{0.0749(X+t)}}{1 - 5.586425E - 04\, e^{0.0749X}}$
Polinomio de Segundo Grado	$\dfrac{1 - (1.301933E - 04(X+t)^{2} - 3.21801E - 03(X+t) - 1.991059E - 02)}{1 - (1.301933E - 04X^{2} - 3.21801E - 03X - 1.991059E - 02)}$
Potencial	$\dfrac{1 - 6.3738E - 08\,(X+t)^{3.5978}}{1 - 6.3738E - 08\, X^{3.5978}}$
Polinomio de Tercer Grado	$\dfrac{1 - (1.2151E - 06(X+t)^{3} - 2.1499E - 05(X+t)^{2} + 1.3086E - 05(X+t) + 1.1531E - 03)}{1 - (1.2151E - 06X^{3} - 2.1499E - 05X^{2} + 1.3086E - 05X + 1.1531E - 03)}$
Polinomio de Quinto Grado	$\dfrac{1 - (-1.3266E - 09(X+1)^{5} + 3.1944E - 07(X+1)^{4} - 2.6061 - 05(X+1)^{3} + 9.9495E - 04(X+1)^{2} - 1.683E - 02(X+1) + 1.018E - 02)}{1 - (-1.3266E - 09(X)^{5} + 3.1944E - 07(X)^{4} - 2.6061 - 05(X)^{3} + 9.9495E - 04(X)^{2} - 1.683E - 02(X) + 1.018E - 02)}$

Función	μ_{x+t}
Exponencial	$\dfrac{4.184233E-05\, e^{0.0749(X+t)}}{1-5.586425E-04\, e^{0.0749(X+t)}}$
Polinomio de Segundo Grado	$\dfrac{2.603866E-04(X+t)-3.21801E-03}{1-(1.301933E-04(X+t)^{2}-3.21801E-03(X+t)-1.991059E-02)}$
Potencial	$\dfrac{2.293178E-07(X+t)^{2.5978}}{1-6.3738E-08\,(X+t)^{3.5978}}$
Polinomio de Tercer Grado	$\dfrac{3.6454267E-06(X+t)^{2}-4.29973408\,9E-05(X+t)+1.3086E-05}{1-(1.2151E-06(X+t)^{3}-2.1499E-05(X+t)^{2}+1.3086E-05(X+t)+1.1531E-03)}$
Polinomio de Quinto Grado	$\dfrac{(-6.633032\,E-09X^{4}+1.27778E-06ZX^{3}-7.818197E-05X^{2}+1.98991E-03X-1.682986E-02)}{1-(-1.3266E-09(X)^{5}+3.1944E-07(X)^{4}-2.6061-05(X)^{3}+9.9495\,E-04(X)^{2}-1.683E-02(X)+1.018\,E-02)}$

Anexo 2

Gráficos comparativos

2.1 Comparativo del comportamiento de las funciones propuestas



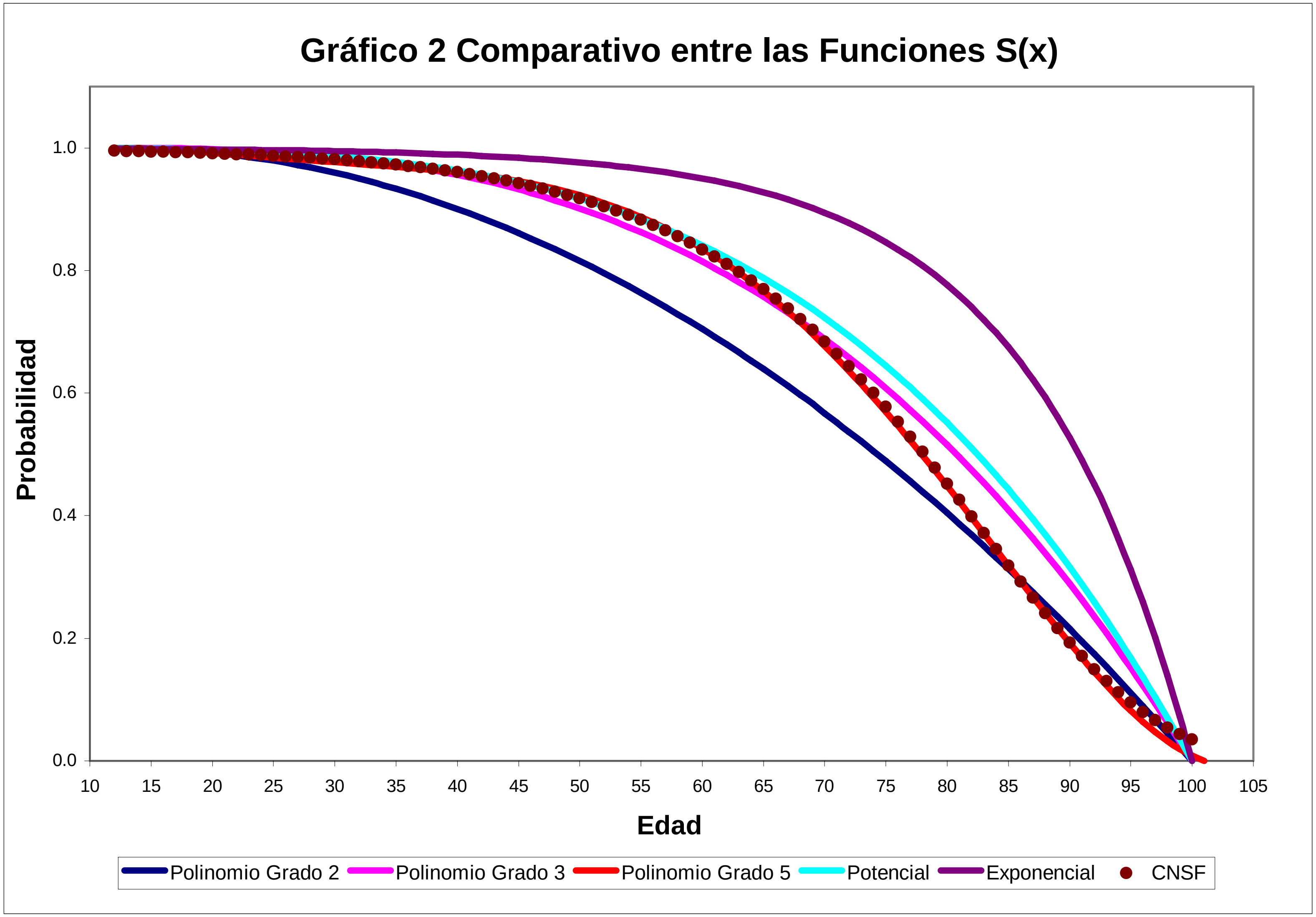


Gráfico 2 Comparativo entre las Funciones S(x)
Probabilidad
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
105
Edad
Polinomio Grado 2
Polinomio Grado 3
Polinomio Grado 5
Potencial
Exponencial
CNSF

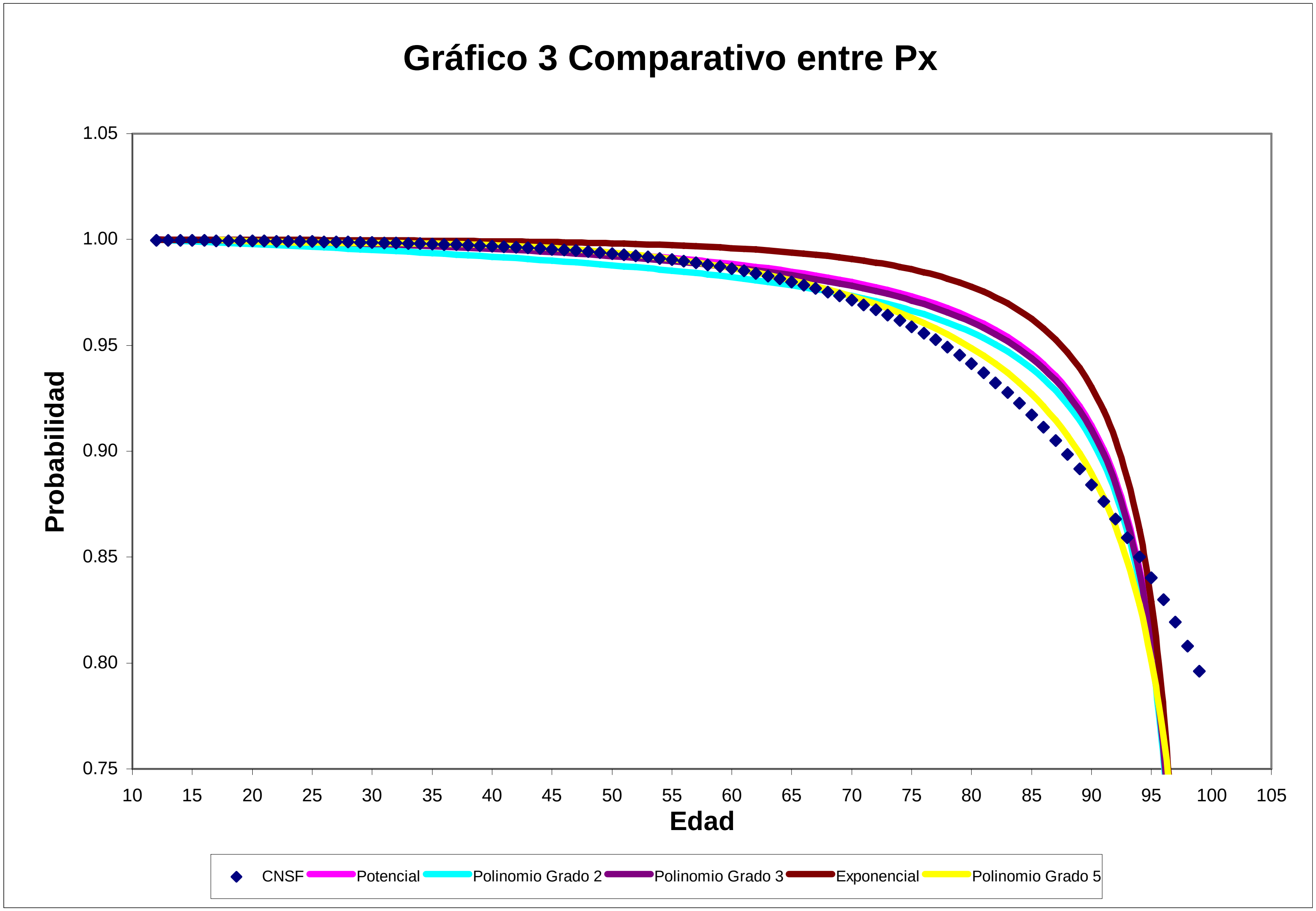


Gráfico 3 Comparativo entre Px
Probabilidad
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
105
Edad
CNSF
Potencial
Polinomio Grado 2
Polinomio Grado 3
Exponencial
Polinomio Grado 5

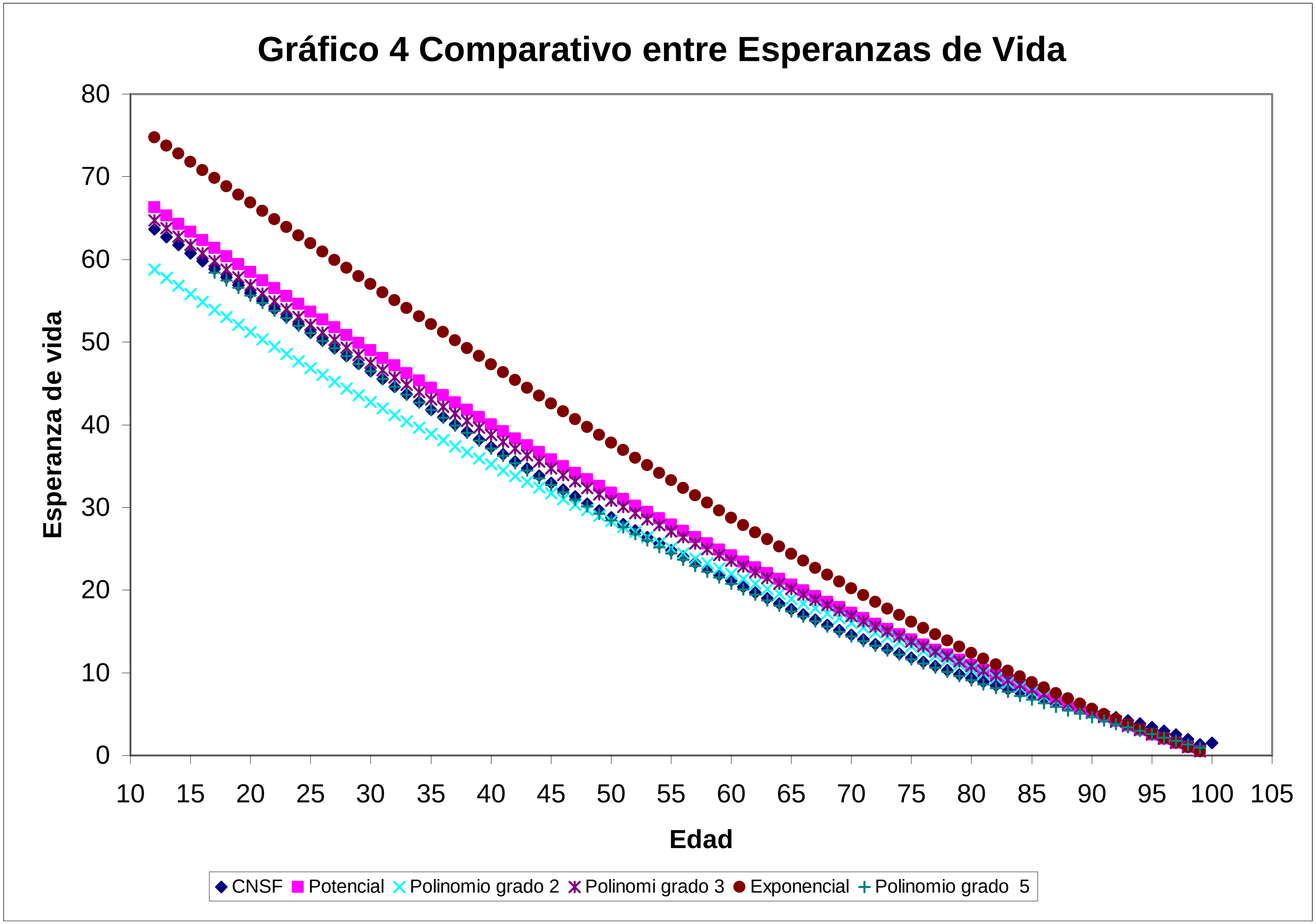


Gráfico 4 Comparativo entre Esperanzas de Vida
Esperanza de vida
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105
Edad
CNSF
Potencial
Polinomio grado 2
Polinomi grado 3
Exponencial
Polinomio grado 5

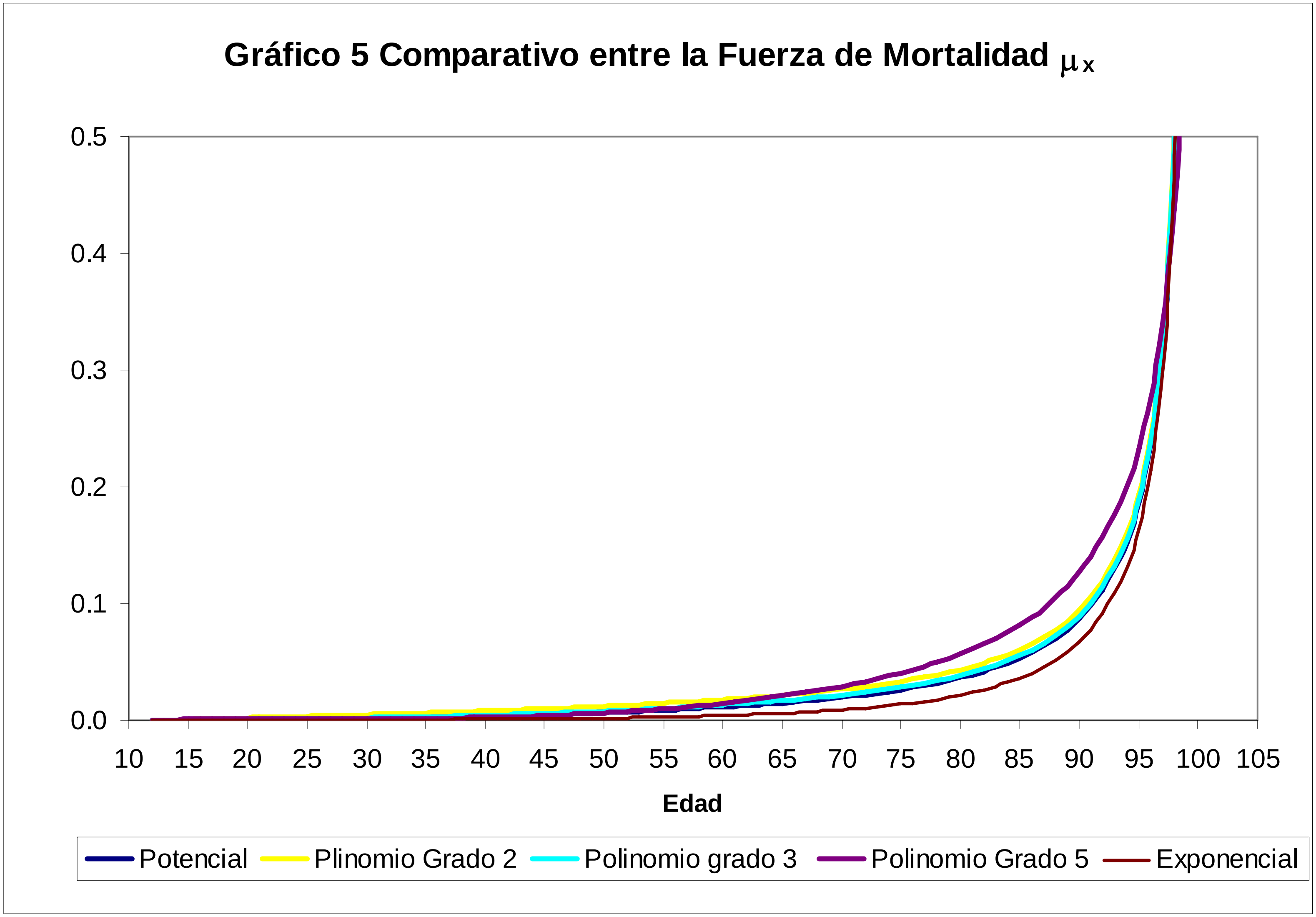


Gráfico 5 Comparativo entre la Fuerza de Mortalidad μ_x
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105
Edad
Potencial
Plinomio Grado 2
Polinomio grado 3
Polinomio Grado 5
Exponencial

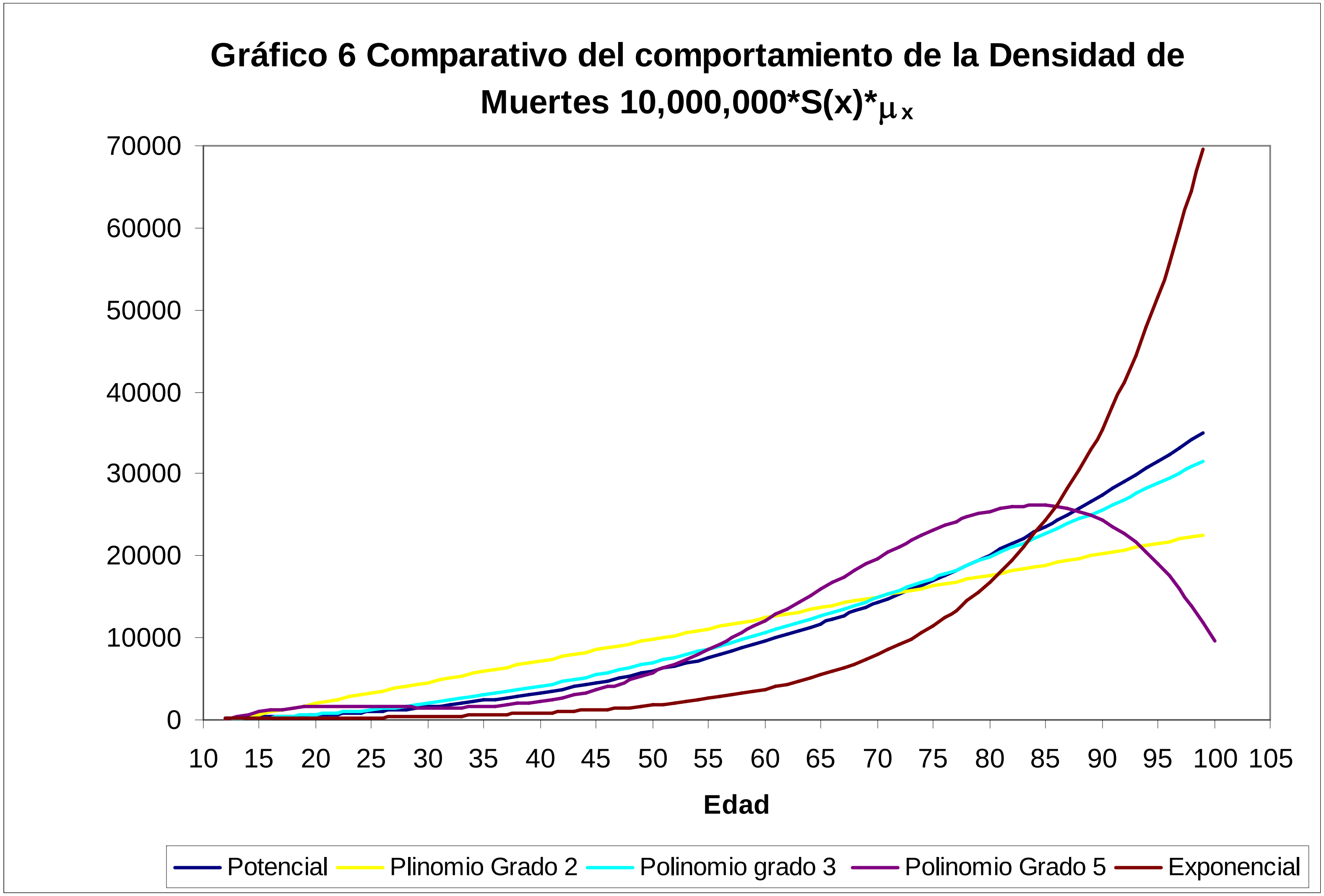


Gráfico 6 Comparativo del comportamiento de la Densidad de Muertes 10,000,000*S(x)*μ x
70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105
Edad
Potencial
Plinomio Grado 2
Polinomio grado 3
Polinomio Grado 5
Exponencial

Anexo 3

Valuación de la PNU considerando un recargo con la función de probabilidad de $T(x)$

3.1 Recargo considerando de forma individual el riesgo

En el capítulo uno propusimos considerar un recargo a la PNU de tal forma que lo que cobre la compañía de seguros sea suficiente para cubrir sus obligaciones con una probabilidad de α, basado en la función de densidad probabilística de $T(x)$ y considerando de forma individual el riesgo, es decir:

$$\Pr(Z_{T(x)} \leq S.A \cdot \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + h) = \alpha$$

de este planteamiento llegamos a la conclusión que debemos cobrar

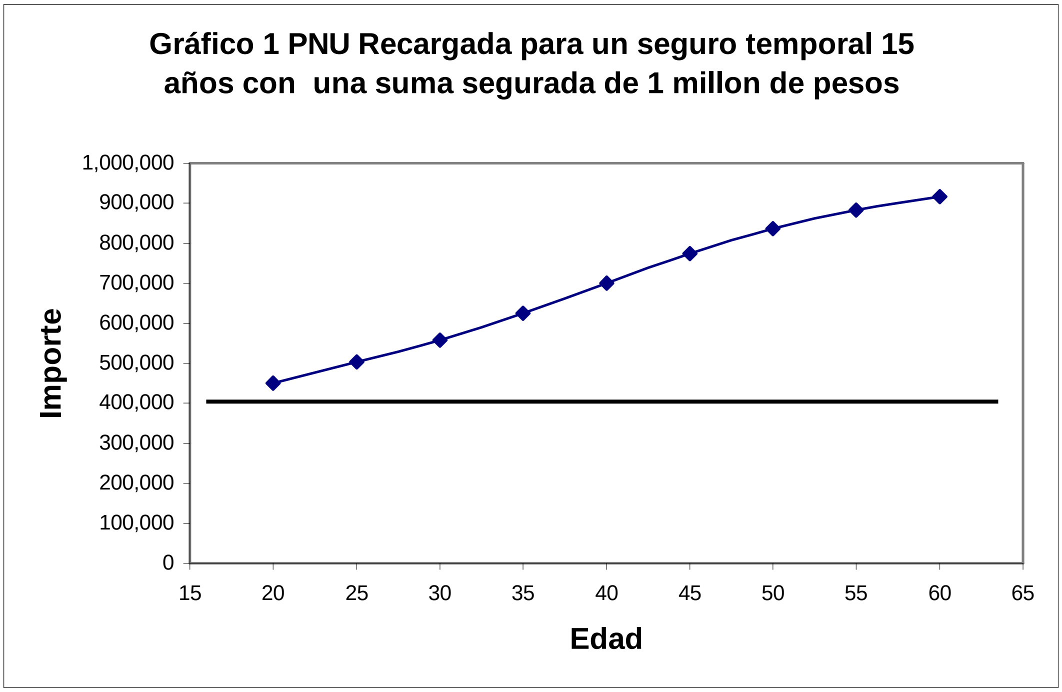
$$PNU^{Rec} = V^{\varphi(t)} \cdot S.A$$

donde $\phi(t)$ es la cantidad que satisface

$$_{\phi(t)}q_x = 1 - \alpha$$

A continuación mostramos cual es el valor de la PNU para algunas edades sí suponemos una probabilidad del 97.5%, una $S.A.$ de $1,000,000 y utilizando nuestro modelo polinómico de $S(x)$ para valuar ésta.

PNU a un nivel de confianza del 97.5%			
Edad	$\phi(t)$	**S.A.**	**PNU**
20	16	1,000,000	450,304
25	14	1,000,000	503,506
30	12	1,000,000	557,272
35	10	1,000,000	624,653
40	7	1,000,000	700,955
45	5	1,000,000	774,783
50	4	1,000,000	836,523
55	3	1,000,000	882,947
60	2	1,000,000	915,945



Como podemos observar la PNU es demasiado alta (por arriba de los $400,000), ya que este recargo considera a cada Asegurado como un ente independiente, dejando de lado la mutualidad y la posibilidad de que se tenga un excedente de recursos por buena siniestralidad de la cartera de Asegurado.

Por esto consideramos al recargo basado en el Teorema del Límite Central como el más apropiado para dar un margen de seguridad a los modelos expuestos de cobro y reserva para nuestro plan de seguro de vida temporal, ya que considera la mutualidad y las leyes de los grandes números como fundamento.

Notación

X: Variable aleatoria de tipo continuo que representa la edad al fallecimiento de una persona recién nacida.

$F(x)$: Representación de la función de acumulación probabilística de la variable aleatoria X.

$f(x)$ Representación de la función de densidad o probabilidad de la variable aleatoria X.

$S(x)$: Función de Sobrevivencia.

$T(x)$: Variable Aleatoria de tipo continuo que representa el tiempo futuro de vida de la persona de edad x.

$G(x)$: Representación de la función de acumulación probabilística de la variable aleatoria $T(x)$.

$g(x)$: Representación de la función de densidad o probabilidad de la variable aleatoria $T(x)$.

q_x: Probabilidad de que una persona de edad x muera entre las edades x y $x+t$.

${}_tP_x$: Probabilidad de que una persona de edad x llegue con vida a la edad $x+t$.

μ_x: Fuerza de mortalidad, Tasa Instantánea de muerte que nos representará la rapidez de cambio en la mortalidad para un individuo de edad x.

$\dot{e}_x$: Esperanza de vida de un individuo de edad x.

b_t Función de indemnización.

v_t Función de descuento.

S.A. Suma Asegurada.

$z_{T(x)}$ Variable aleatoria que representa el valor presente de un pago en el tiempo.

$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ Prima neta única del seguro temporal a n años con una S.A. de una unidad monetaria.

${}^{2}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\rvert}$	Segundo momento del seguro temporal a n años con una $S.A.$ de una unidad monetaria.
$\bar{a}_{x:\overline{15}\rvert}$	Anualidad continua para un individuo de edad x temporal 15 años.
$\bar{a}_{\overline{t}\rvert}$	Anualidad cierta continua temporal t años.
δ	Tasa instantánea de interés.
r	Coeficiente de correlación.
r^2	Coeficiente de determinación.
ω	Edad ultima en al Tabla CNSF 2000 I

Citas y Observaciones

1. *Asociación Mexicana de Actuarios*, estándar 3, Pág. 2.
2. Triple igualdad $(1+i) = (1+\frac{i^m}{m})^m = e^\delta$
3. Esta manipulación algebraica no afecta la desigualdad ya que la función logaritmo es monótona creciente, es decir, $\forall\ a, b \in R^+$, si $a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$ además de que $\ln V \neq 0$, ya que $V \neq 1 \quad si \quad i \neq 0$.
4. Spiegel, Murray R. *Probabilidad y Estadística*. México. McGRAW-HILL. 1998, Pág. 112.
5. Ley Sobre el Contrato de Seguro, México, 2002. Art. 51, 179-184.
6. La aproximación continua de la PNU para un seguro de vida desde el punto de vista clásico puede conseguirse si se supone que existe una proporcionalidad entre la forma en que llegan los siniestros, o bien en este caso, en que ocurren las muertes de los individuos.

   Bajo nuestro enfoque probabilístico esto implicaría que q_x se distribuye uniformemente en el intervalo comprendido entre x y $x+1$, por lo cual bastara conseguir en ese intervalo el valor de la PNU de un seguro continuo temporal a un año para un individuo de edad x bajo este supuesto para posteriormente deducir una expresión para seguros donde la temporalidad sea mayor.

   A continuación presentamos el desarrollo algebraico de como es que se obtiene la PNU para un seguro continuo temporal a un año para un individuo de edad x, con una S.A. de una unidad monetaria bajo el supuesto de una tasa de mortalidad q_x constante.

   Como hipótesis tenemos que q_x es constante, esto implica que la PNU continua podemos aproximarla como:

$$\bar{A}^{1}_{x:\bar{1}|} \approx \int_0^1 V^t \cdot q_x dt$$

   Resolviendo esta integral tenemos como resultado que

$$\int_0^1 V^t \cdot q_x dt = A^{1}_{x:\bar{1}|} \cdot \tfrac{i}{\delta}$$

Como a continuación se muestra:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 V^t q_x dt &= q_x \cdot \int_0^1 V^t dt \\
&= q_x \cdot \frac{V^t}{\ln V} \Big|_0^1 \\
&= q_x \cdot \left[\frac{V^1}{\ln V} - \frac{V^0}{\ln V}\right] \\
&= q_x \cdot \left[\frac{V\text{-}1}{\ln V}\right] \\
&= q_x \cdot \left[\frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1+i}{1+i}}{\ln V}\right] \\
&= q_x \cdot \frac{\frac{-i}{1+i}}{\ln V} \\
&= q_x \cdot \frac{-i \cdot V}{\ln V} \\
&= V \cdot q_x \cdot \frac{i}{-\ln V} \\
&= V \cdot q_x \cdot \frac{i}{\ln(1+i)} \\
&= V \cdot q_x \cdot \frac{i}{\delta} \\
&= A^1_{x:\overline{1}|} \cdot \frac{i}{\delta}
\end{aligned}$$

Ahora bien para el caso en que la temporalidad del plan es mayor a un año tenemos que:

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{1}|} + \bar{A}^1_{x+1:\overline{1}|}\ {}_1E_x + \bar{A}^1_{x+2:\overline{1}|}\ {}_2E_x + \cdots + \bar{A}^1_{x+n-1:\overline{1}|}\ {}_{n-1}E_x$$

Aplicando el resultado anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \tfrac{i}{\delta} \cdot A^1_{x:\overline{1}|} + \tfrac{i}{\delta} \cdot A^1_{x+1:\overline{1}|}\ {}_1E_x + \tfrac{i}{\delta} \cdot A^1_{x+2:\overline{1}|}\ {}_2E_x + \cdots + \tfrac{i}{\delta} \cdot A^1_{x+n-1:\overline{1}|}\ {}_{n-1}E_x \\
&= \tfrac{i}{\delta} \cdot (A^1_{x:\overline{1}|} + A^1_{x+1:\overline{1}|}\ {}_1E_x + A^1_{x+2:\overline{1}|}\ {}_2E_x + \cdots + A^1_{x+n-1:\overline{1}|}\ {}_{n-1}E_x)
\end{aligned}$$

Donde ${}_tE_x = V^t\ {}_tP_x$

De modo que nuestro problema se reduce a demostrar que un seguro temporal a n años discreto se pude ver como la suma de seguros temporales discretos a un año traídos a valor presente para ser valuados en la edad x.

Para demostrar esto haremos uso de las equivalencias de ${}_tE_x$ y $A^{1}_{x:\overline{t|}}$ en valores conmutados las cuales son:

$$D_x = V^x \cdot l_x \qquad C_x = V^{x+1} \cdot d_x \qquad N_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} D_{x+t} \qquad M_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t}$$

y con los cuales se obtiene como resultado que ${}_tE_x = \frac{D_{x+t}}{D_x}$ y $A^{1}_{x:\overline{t|}} = \frac{M_x - M_{x+t}}{D_x}$ como a continuación se muestra.

$$\begin{aligned}
{}_tE_x &= V^t \, {}_tP_x \\
&= V^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{V^t \cdot l_{x+t}}{l_x} \\
&= \frac{V^t \cdot l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{V^x}{V^x} \\
&= \frac{V^{t+x} \cdot l_{x+t}}{V^x \cdot l_x} \\
&= \frac{D_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{1}_{x:\overline{15|}} &= \sum_{t=1}^{15} V^t \cdot {}_{t-1|}q_x \\
&= \sum_{t=1}^{15} V^t \cdot \frac{d_{x+t-1}}{l_x} \\
&= \sum_{t=1}^{15} V^t \cdot \frac{d_{x+t-1}}{l_x} \cdot \frac{V^x}{V^x} \\
&= \sum_{t=1}^{15} \frac{V^{x+t}}{V^x} \cdot \frac{d_{x+t-1}}{l_x} \\
&= \sum_{t=1}^{15} \frac{V^{x+t} \cdot d_{x+t-1}}{V^x \cdot l_x} \\
&= \sum_{t=1}^{15} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} \\
&= \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{15} C_{x+t-1} \\
&= \frac{1}{D_x} \cdot \left[C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+14} \right] \\
&= \frac{1}{D_x} \cdot \left[M_x - M_{x+15} \right] \\
&= \frac{M_x - M_{x+15}}{D_x}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas igualdades en la siguiente expresión tenemos.

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\cdot\left(A^{1}_{x:\overline{1}|} + A^{1}_{x+1:\overline{1}|}\,{}_{1}E_{x} + A^{1}_{x+2:\overline{1}|}\,{}_{2}E_{x} + \cdots + A^{1}_{x+n-1:\overline{1}|}\,{}_{n-1}E_{x}\right)\\
&= \frac{i}{\delta}\cdot\left[\frac{M_{x}-M_{x+1}}{D_{x}} + \frac{M_{x+1}-M_{x+2}}{D_{x+1}}\cdot\frac{D_{x+1}}{D_{x}} + \cdots + \frac{M_{x+n-1}-M_{x+n}}{D_{x+n-1}}\cdot\frac{D_{x+n-1}}{D_{x}}\right]\\
&= \frac{i}{\delta}\cdot\left[\frac{M_{x}-M_{x+1}}{D_{x}} + \frac{M_{x+1}-M_{x+2}}{D_{x}} + \cdots + \frac{M_{x+n-1}-M_{x+n}}{D_{x}}\right]\\
&= \frac{i}{\delta}\cdot\left[\frac{M_{x}-M_{x+1}+M_{x+1}-M_{x+2}+\cdots+M_{x+n-1}-M_{x+n}}{D_{x}}\right]\\
&= \frac{i}{\delta}\cdot\left[\frac{M_{x}-M_{x+n}}{D_{x}}\right]\\
&= \frac{i}{\delta}\cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto concluimos que podemos aproximar un seguro temporal a n años continuo por un seguro temporal a n años discreto al multiplicar este por un factor de $\frac{i}{\delta}$.

Como corolario de esta demostración se puede ver que cualquier seguro continuo se puede aproximar como uno discreto multiplicado por este factor $\frac{i}{\delta}$ si se supone que q_x es constante por intervalos de edades contiguas.

7. Para demostrar esta aproximación partiremos del uso de la expresión de la anualidad temporal a n años pagadera m veces al año la cual se consigue vía interpolación:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{m-1}{2m}\left(1-{}_{n}E_{x}\right)$$

Ahora bien, si suponemos que m puede ser cada vez mas grande bien podemos pensar en el límite de esta expresión, es decir la anualidad continua temporal a n la podemos aproximar como $\lim_{m\to\infty}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$, de esta manera tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} &= \lim_{m\to\infty} \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \lim_{m\to\infty} \tfrac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \lim_{m\to\infty} \tfrac{m}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) - \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{2m}\left(1 - {}_nE_x\right) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \tfrac{1}{2}\left(1 - {}_nE_x\right)
\end{aligned}
$$

Bibliografía

Bower, Newton L. et al *Actuarial Mathematics*. USA. Ed. The Society of Actuaries. 1986, 659 págs.

Jordan, Charles W. *Life Contingences*. USA. Ed. The Society of Actuaries. 1967, 394 págs.

Mendoza Ramírez, Manuel. *Tablas de Mortalidad CNSF 2000 – I y CNSF 2000 – G*. México, CNSF. 2000, 21 págs.

Spiegel, Murray R. *Probabilidad y Estadística*. México. McGRAW-HILL. 1998, 372 págs.

Mendenhall, William. *Estadística Matemática con Aplicaciones*. México. Iberoamérica.1986, 751 págs.

Tesis:

Covarrubias, Pedro. *Proyecto de Texto para un Curso de Cálculo Actuarial I*. UNAM, 196 págs.

Circulares:

Circular S-10.1.7.1. CNSF. 11 de Septiembre del 2003.

Circular S- 8.1, CNSF. 20 de Febrero de 2004.

Estándares Actuariales:

1. Cálculo de Primas de Seguros a Corto Plazo.
2. Cálculo y Valuación de Reservas de Seguros a Corto Plazo.
3. Cálculo de Primas de Seguros a Largo Plazo.
4. Cálculo y Valuación de Reservas de Seguros a Largo Plazo.