



Universidad Nacional
Autónoma de
México

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

**“MODELADO Y SIMULACIÓN DE
DISPOSITIVOS DE TRANSFORMACIÓN DE
ENERGÍA”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

PRESENTA:

GUILLERMO EFRÉN OVANDO CHACÓN

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. GUADALUPE HUELSZ LESBROS

DR. LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Eduardo Ramos Mora

Secretario: Dr. Martín salinas Vázquez

1er. Vocal: Dra. Guadalupe Huelsz Lesbros

2do. Vocal: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

3er. Vocal: Dr. Sergio Cuevas García

1er. Suplente: Dr. Juan Carlos Prince Avelino

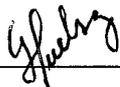
2do. Suplente: Dr. Arturo Orozco Santillán

Lugar donde se realizó la tesis:

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN ENERGÍA

DIRECTORES DE TESIS

DRA. GUADALUPE HUELSZ LESBROS



DR. LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA



Agradecimientos

Al **Todo Poderoso** por iluminarme siempre el camino a pesar de lo oscuro que éste pareciera.

A todos mis amigos y compañeros del Centro de Investigación en Energía por haber propiciado un agradable ambiente durante mis estudios de Doctorado, en especial a **Gaby y Saúl** del departamento de Termociencias, así como a **Alex y Jose** del laboratorio de Refrigeración por compartir la afición por el frontenis.

A la **Universidad Nacional Autónoma de México** y en especial a la **Dirección General de Estudio de Posgrado** y al **Centro de Investigación en Energía**, departamento de **Termociencias** por permitirme realizar los estudios de doctorado, así como a la unidad de cómputo por su apoyo.

A **CONACyT** (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), por brindarme el financiamiento económico para realizar mis estudios de doctorado.

A los proyectos IN104702-2 y U41347-F de **DGAPA-UNAM** y **CONACyT**, respectivamente.

A la **Dra. Guadalupe Huelsz Lesbros** y al **Dr. Héctor Juárez Valencia** por haberme dado la oportunidad de trabajar en este proyecto de investigación y por sus valiosas contribuciones en la presente tesis.

A los integrantes del comité de revisión y jurado: **Dr. Eduardo Ramos Mora, Dr. Juan Carlos Prince Avelino, Dr. Sergio Cuevas García, Dr. Arturo Orozco Santillán y Dr. Martín Salinas Vázquez** por sus valiosas sugerencias.

Dedicatoria

A mis padres, **Ricardo Ovando Alvarez y Sara Chacón Jiménez** a quienes dedico esta tesis por regalarme la vida, por sus sabios consejos que a pesar de la distancia siempre los tengo presentes y por su apoyo incondicional que me han permitido salir adelante.

A mi hermana **Sandy Luz Ovando Chacón** por su ayuda, confianza y cariño incondicional, así como por sus aportaciones y sugerencias durante mi formación profesional.

A mi novia **Lupita Delgado Nuñez** por su amor, cariño y comprensión incondicional.

Índice general

Agradecimientos	I
Dedicatoria	II
Introducción	1
Resumen	3
Abstract	4
1. Motores termoacústicos	5
1.1. Antecedentes generales	6
1.2. Estructura básica del motor termoacústico	10
1.3. Principio de operación del motor termoacústico	11
1.4. Ciclo del motor termoacústico de onda estacionaria	11
1.5. Aplicaciones de los motores termoacústicos	14
1.6. Modelado de máquinas termoacústica	18
1.6.1. Modelos analíticos	18
1.6.2. Modelos numéricos no comerciales	20
1.6.3. Modelos numéricos comerciales	22
1.6.4. Guías de diseño derivadas del modelado de máquinas termoacústicas	24
2. Estudio teórico del efecto de un campo magnético en la estabilidad lineal	

de una oscilación termoacústica	26
2.1. Antecedentes generales	26
2.2. Formulación del problema	27
2.3. Resultados	34
2.4. Conclusiones	35
3. Método numérico para la solución de flujos incompresibles	39
3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes	40
3.2. Ecuación de la energía	40
3.3. Descomposición de las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes y de energía mediante separación de operadores	41
3.4. Adimensionalización	43
3.5. Método numérico	44
3.5.1. Formulación débil del problema	44
3.5.2. Aproximación con elemento finito	45
3.5.3. Discretización en el tiempo mediante separación de operadores en forma variacional	46
3.6. Solución del problema de Stokes	50
3.7. Solución del problema de difusión	52
3.8. Solución del problema de advección	54
3.9. Algoritmo de gradiente conjugado para resolver sistemas de ecuaciones lineales	55
3.10. Validación del código numérico	57
4. Flujo en una cavidad oscilatoria isotérmica	67
4.1. Antecedentes generales	67
4.2. Formulación del problema	69
4.2.1. Descripción física y geométrica	69
4.2.2. Ecuaciones de conservación	70
4.3. Análisis de convergencia de malla	71
4.4. Resultados	72

4.4.1. Caso $Re = 50$	75
4.4.2. Caso $Re = 500$	82
4.4.3. Caso $Re = 1000$	88
4.5. Conclusiones	95
5. Flujo en una cavidad oscilatoria con transferencia de calor	98
5.1. Antecedentes generales	98
5.2. Formulación del problema	99
5.2.1. Descripción física y geométrica	99
5.2.2. Ecuaciones de conservación	100
5.3. Resultados	101
5.3.1. Caso $Re = 50$	102
5.3.2. Caso $Re = 500$	103
5.3.3. Caso $Re = 1000$	107
5.4. Conclusiones	108
6. Conclusiones generales	111
Apéndices	113
A. Documentación del programa que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la energía de manera acoplada	113
A.1. Información general	113
A.2. Significado de las cantidades usadas en el programa	115
A.2.1. Cantidades escalares	115
A.2.2. Cantidades vectoriales y matriciales	117
A.2.3. Variables auxiliares	122
A.2.4. Cantidades simbólicas	124
A.3. Subrutinas del programa	125
A.4. Uso del programa	128

B. Elemento finito triangular	129
B.1. Elementos triangulares	129
B.2. Integración de elemento finito	130
C. Propiedades termodinámicas del agua	132
D. Simulación numérica de flujos viscosos isentrópicos compresibles	134
E. Publicaciones derivadas de esta tesis	138
Bibliografía	186
Índice de figuras	194
Nomenclatura	199

Introducción

En la actualidad se ha demostrado que es posible construir motores termoacústicos que puedan ser utilizados en aplicaciones prácticas, como la refrigeración y la generación de electricidad; por ejemplo, estos dispositivos se pueden usar como convertidores de energía solar en electricidad. Sin embargo, aún hay mucho trabajo de investigación básica y aplicada que debe realizarse para poder comprender mejor el funcionamiento de estos dispositivos y lograr mejorar su eficiencia. También es necesario desarrollar programas de cómputo que permitan modelar y simular este tipo de dispositivos, lo que ayudaría a estudiar su comportamiento y a diseñarlos de manera segura, confiable y eficiente.

Este trabajo forma parte de un proyecto general que tiene como objetivo final desarrollar un código numérico que permita simular el comportamiento de máquinas termoacústicas. En particular, el objetivo de este trabajo es establecer las bases para el modelado y simulación de dispositivos de transferencia de calor. Este trabajo constituye la primera parte del proyecto general en el cual se desarrolla un código numérico robusto para la simulación de flujo de fluidos incompresibles con transferencia de calor. La segunda parte de este proyecto general, el cual queda fuera del alcance de este trabajo, es el desarrollo de un código numérico robusto para la simulación de flujo de fluidos compresibles con transferencia de calor, con el que se podrían simular máquinas termoacústicas. En la actualidad existen modelos numéricos que simulan el comportamiento básico de algunas de las componentes de refrigeradores termoacústicos, sin embargo, basados en la literatura es claro que hace falta desarrollar códigos numéricos que simulan el comportamiento de motores termoacústicos. En el capítulo 1, se da información general sobre las características de los motores ter-

moacústicos y se hace una revisión de la literatura sobre el modelado de máquinas termoacústicas. En el capítulo 2, se hace un estudio teórico del efecto de un campo magnético en la estabilidad lineal de una oscilación termoacústica. En el capítulo 3, se presenta el método numérico de elemento finito para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la energía en fluidos incompresibles. En el capítulo 4, se presentan los resultados de la simulación en una cavidad oscilatoria isotérmica. Finalmente en el capítulo 5, se presentan los resultados de la simulación en una cavidad oscilatoria con transferencia de calor. El código numérico para flujos incompresibles desarrollado en esta tesis se utilizó para simular una cavidad oscilatoria isotérmica y con transferencia de calor para adquirir experiencia en el estudio de fenómenos oscilatorios, los cuales también están presentes en los dispositivos termoacústicos.

Resumen

En este trabajo se estudian dos sistemas que utilizan flujos oscilatorios para la transformación de energía, un motor termoacústico con un fluido de trabajo eléctricamente conductor y una cavidad con paredes oscilatorias. Se hace un estudio teórico de la estabilidad lineal de la oscilación termoacústica del fluido eléctricamente conductor dentro del motor considerando el efecto de un campo magnético aplicado en la región del *stack*, la ecuación general de estado, y variaciones de las propiedades físicas del fluido con la temperatura. La teoría desarrollada se aplica para el caso de agua con cloruro de sodio y se analiza la posibilidad de usar este material como fluido de trabajo en un motor termoacústico. Para el estudio de la cavidad con paredes oscilatorias se desarrolló un código numérico para la simulación de flujos incompresibles con transferencia de calor, basado en una formulación de elemento finito con un esquema de separación de operadores. El código desarrollado se usa para la simulación de la cavidad oscilatoria isotérmica para diferentes números de Reynolds y diferentes amplitudes de desplazamiento de la pared oscilatoria, haciéndose un análisis de los mecanismos que provocan la formación de vórtices en toda la cavidad para la fase donde las velocidades de la paredes son cero y la fase donde las velocidades de la paredes son máximas. En este estudio se obtienen los campos de velocidad y el área de los vórtices. Finalmente se presentan los resultados de la simulación de una cavidad oscilatoria con transferencia de calor para diferentes números de Reynolds y números de Peclet, y se discute la formación de vórtices, haciéndose una comparación con los resultados obtenidos para la cavidad isotérmica. En este caso se obtienen los campos de velocidad, el área de los vórtices y los campos de temperatura.

Abstract

In this work, two systems that use oscillatory flows to transform the energy, a thermoacoustic primer mover with an electrically conducting working fluid and a cavity with oscillatory walls are studied. First a theoretical study on the linear stability of a thermoacoustic oscillation of the electrically conducting fluid inside the primer mover considering the effect of a magnetic field applied in the stack, a fluid with a general state equation and variations of the working fluid physical properties with temperature is carried out. The theory developed is applied to the case of liquid water with sodium chloride and the possibility of using this material as the working fluid in a thermoacoustic primer mover is analyzed. For the study of the cavity with oscillatory walls, a numerical code for the simulations of incompressible fluids with heat transfer was developed, based on a finite element formulation with a splitting operator scheme. The code is used for the simulation of an isothermal oscillatory cavity for different Reynolds numbers and different displacement amplitudes of the oscillatory walls, and an analysis of the mechanism that generates the vortices formation in the whole cavity for the phase where the velocities of the walls are zero and the phase where the velocities of the walls are maximum is performed. In this study, the velocities fields and the area of vortices are obtained. Finally, the results of the simulations of an oscillatory cavity with heat transfer for different Reynolds and Peclet numbers are presented; the vortices formation and a comparison with the results obtained for the isothermal cavity are discussed. In this case the velocities fields, the area of vortices and the temperature fields are obtained.

Capítulo 1

Motores termoacústicos

El desarrollo de motores termoacústicos es una nueva aplicación de un fenómeno termodinámico conocido como termoacústica. Los motores termoacústicos, a diferencia de los motores de combustión desarrollados hasta ahora, son dispositivos de conversión de energía simples en su construcción, confiables en su operación y que no contaminan a la atmósfera mediante la emisión de sustancias tóxicas ya que utilizan la tecnología acústica, en donde se presenta la interacción de un flujo de calor a través de un fluido de trabajo y una pared sólida desde una fuente de alta temperatura a un sumidero de baja temperatura generando energía acústica, que es utilizada para desarrollar trabajo mecánico. Otras ventajas de este tipo de dispositivos es que no tienen partes en movimiento, no requieren de lubricación y no tienen dimensiones o tolerancias críticas por lo que su mantenimiento es relativamente sencillo. Básicamente, un motor termoacústico está compuesto por una estructura interna (apilamiento de placas) llamada *stack*, un intercambiador de calor a alta temperatura, un intercambiador de calor a baja temperatura y un resonador. Su funcionamiento está basado en el llamado efecto termoacústico en el que se produce una onda acústica en un fluido compresible que se encuentra en contacto con una pared sólida donde existe un gradiente axial de temperatura apropiado. Hasta ahora todo indica que la tecnología termoacústica es una nueva forma de conversión de energía que no contamina y con un costo de mantenimiento bajo, que promete en un futuro próximo el desarrollo de los primeros dispositivos

termoacústicos de uso doméstico, tales como refrigeradores y sistemas de aire acondicionado termoacústicos, los cuales podrían funcionar con un motor termoacústico.

1.1. Antecedentes generales

Las primeras ideas sobre los motores termoacústicos surgieron a mediados del siglo XVIII, al observar a los sopladores de vidrio, quienes utilizaban un tubo delgado y largo. En un extremo tenían el vidrio fundido a alta temperatura y por el otro extremo soplaban, estando éste aproximadamente a temperatura ambiente. Al dejar de soplar el extremo a temperatura ambiente quedaba abierto y emitía un sonido fuerte, surgiendo así las primeras ideas para producir sonido o trabajo acústico a través del calentamiento adecuado de un sistema. Putnam y Dennis [11] describieron experimentos de Byron Higgins realizados en 1777 en los cuales se logró excitar oscilaciones acústicas en un tubo largo al colocar apropiadamente en su interior una flama de hidrógeno. Las investigaciones de Higgins evolucionaron eventualmente la ciencia moderna de la combustión pulsante cuyas aplicaciones incluyen el cohete alemán V-1 usado en la segunda guerra mundial y el horno residencial de combustión pulsante introducido por Lennox, Inc. en 1982, ver [12]. Sondhauss [13] realizó experimentos en el llamado tubo de Sondhauss, que se caracterizaba porque no había flujo neto de gas, tenía por lo menos un extremo cerrado en forma de bulbo y al agregar interna o externamente calor se producían oscilaciones acústicas. Sondhauss observó que una flama de gas permanente aplicada al extremo cerrado causaba que el aire en todo el tubo oscilara y generara claramente un sonido, el cual era característico de las dimensiones del tubo. La frecuencia del sonido fue medida y registrada para tubos que tenían un diámetro interior de 1 a 2 mm con diferentes tamaños de bulbo y longitudes. Él observó que bulbos grandes y tubos largos producían sonidos de baja frecuencia, mientras que flamas más calientes producían sonidos más intensos, sin embargo no dio ninguna explicación del sonido. El tubo de Sondhauss representa el primer antecedente de investigación en motores termoacústicos, ver [14]. Clement y Gaffney [15] estudiaron experimentalmente oscilaciones térmicas espontáneas las cuales ocurrieron en tubos de diámetro pequeño que tenían un extremo a

temperatura ambiente y el otro extremo a la temperatura del helio líquido. Ellos observaron que las óptimas condiciones de operación ocurrían cuando el extremo a temperatura ambiente (extremo caliente) estaba completamente cerrado y el extremo inmerso en helio líquido (extremo frío) estaba abierto. Sus experimentos indicaron que un tubo completamente abierto en el extremo caliente no podían generar oscilaciones a menos que su diámetro interior fuera lo suficientemente pequeño, además, tubos que tenían el extremo frío completamente cerrado no podían generar oscilaciones, aunque, un sólo pequeño orificio en el extremo frío era suficiente para que las oscilaciones ocurrieran, ver [14]. En 1859 Rijke [16], investigó otras geometrías al utilizar el llamado tubo de Rijke, el cual consiste en un tubo vertical con ambos extremos abiertos, un flujo de gas hacia arriba a través del tubo y una malla en la mitad inferior del tubo, en donde al agregarle calor internamente se producen las oscilaciones acústicas (Feldman y Carter [17]). En 1878 Rayleigh [18] publicó sus trabajos sobre acústica, que incluían diversas discusiones del fenómeno termoacústico. Él explicó el trabajo previo hecho por Sondhauss y otros, a partir del criterio que lleva su nombre, el cual establece: “si el calor es cedido al aire en el momento de máxima presión y extraído en el momento de máxima expansión, la onda acústica es excitada” (Feldman [14]). El primero en optimizar motores termoacústicos fue Feldman en 1966. Sin embargo su motor más eficiente produjo 27 W usando 600 W de calor. Él realizó un análisis físico del oscilador de Sondhauss y estableció las siguientes condiciones necesarias para que la oscilación pueda presentarse: (i) una fuente de calor permanente tiene que interactuar con las fluctuaciones del sistema de tal manera que la energía agregada al gas esté en la fase apropiada para que la oscilación incremente su amplitud (criterio de Rayleigh). (ii) la rapidez de adición de calor debe ser mayor o igual a un valor mínimo, (iii) la cavidad de calentamiento tiene que tener la forma apropiada que permita la oscilación de un gas resonante, (iv) la fuente de calor tiene que ser colocada en un punto del tubo donde tanto la oscilación de la velocidad como de la presión del gas sean significativas. Por otra parte, él estableció que la oscilación del gas podía ser iniciada por alguna perturbación aleatoria externa, o bien, cuando la rapidez de calentamiento era lo suficientemente grande que una onda de presión de expansión térmica podría comenzar a oscilar, sin embargo, en este último caso se tenía que tomar en

cuenta que una rapidez alta de calentamiento podía provocar explosiones. Por otra parte, él estableció que en el motor Sondhauss la bancada de tubos de vidrio que formaban el *stack* realizaban tres funciones: (i) actuaba como un regenerador de energía térmica; (ii) actuaba como un aislante poroso de baja fricción, es decir, la región caliente estaba aislada térmicamente de la región fría mientras que permitía que el gas oscilante pasara de una región a otra; y (iii) provocaba el cambio de fase entre la presión acústica y la velocidad de la onda (Feldman [14]). En 1979 Ceperley [19] propuso el desarrollo de un motor térmico de onda viajera. Su diseño consistía en un circuito tubular, de tal manera que la onda viajera podía viajar alrededor de ese circuito. En una parte del circuito, un regenerador y dos intercambiadores de calor funcionaban como motor, agregando potencia acústica a la onda viajera conforme el calor fluye de una fuente de calor de alta temperatura a un sumidero de calor a temperatura ambiente. En otra parte del circuito, otro regenerador y dos intercambiadores de calor funcionaban como bomba de calor, usando potencia acústica de la onda viajera para bombear calor desde un lugar a baja temperatura hasta un lugar a temperatura ambiente. En este tipo de dispositivos el regenerador está formado por una estructura porosa fina con un gradiente de temperatura que provoca la transferencia de calor con el fluido de trabajo. En la década de los 80, John Wheatley *et al.* [20, 21] enfocaron sus esfuerzos para investigar el uso de ondas acústicas en el desarrollo de motores y refrigeradores termoacústicos en el Laboratorio Nacional de Los Álamos, actualmente este grupo, encabezado ahora por G. Swift, es el líder mundial en este campo. Ellos analizaron las estructuras que pueden ser colocadas en tubos acústicamente resonantes para producir grandes diferencias de temperatura y efectuaron diversas mediciones para investigar el efecto de la separación de las placas del *stack* sobre la rapidez de transferencia de calor. En 1991 Ward *et al.* [22] del grupo del Laboratorio Nacional de Los Álamos señalan en un reporte interno haber analizado el funcionamiento de motores termoacústico de 1MW de potencia acústica operando con una mezcla de helio y xenón, con helio puro y con una mezcla eutéctica de sodio y potasio como fluidos de trabajo y con un conjunto de placas planas paralelas en el *stack*. De acuerdo a los resultados del análisis teórico y a las soluciones numéricas de la ecuación de onda para la presión, consideraron a estos motores termoacústicos como

técnicamente viables ya que funcionaban con eficiencias cercanas al 20 %. Sin embargo, este grupo no continuó la investigación sobre el motor termoacústico con metales líquidos debido a las estrictas medidas de seguridad de ese laboratorio. Gabrielson [23] propuso el uso de un motor termoacústico como fuente acústica submarina. Como resultado del análisis teórico que realizó, encontró que una fuente submarina con un motor termoacústico puede alcanzar más potencia si el resonador se llena con gas en vez de líquido. Además, que la potencia radiada está en función de la geometría del resonador, dada una amplitud máxima de presión dentro del resonador. Luck y Trepp [24, 25] propusieron un motor termoacústico en forma radial, con un apilamiento de placas en forma de anillo, el intercambiador frío en la zona central, el intercambiador caliente en la zona periférica y un pistón en la zona superior central; ellos modelaron el gas contenido en el sistema como un resorte ideal y usaron una solución a la ecuación de onda de Rott [26]. Las predicciones teóricas sobre la potencia y la presión concordaron sólo cualitativamente con los resultados experimentales. Recientemente, la necesidad de mejorar las eficiencias de los dispositivos termoacústicos, hicieron que se reconsiderara el enfoque de Ceperley, construyendo el primer motor termoacústico que produce ondas acústicas viajeras. En este caso el espaciamiento entre las placas del *stack* era más pequeño que en motores que producen ondas estacionarias, por lo tanto, fue necesario minimizar la velocidad del flujo del gas para vencer las pérdidas viscosas dentro del generador, cuyos pequeñísimos poros permiten que el calor se transfiera más eficientemente entre el gas y el sólido (Garrett and Backhaus [27]). De acuerdo a un reporte de la Universidad de Pennsylvania, además de los Estados Unidos, se sabe que en Japón hay una asociación de 100 investigadores de la industria y academia quienes están trabajando en refrigeración termoacústica, así como en Francia, Inglaterra, Argentina, Bangladesh y Sudáfrica. En México es muy poca la investigación que se está realizando sobre esta nueva tecnología, siendo el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CECADET) y el Centro de Investigación en Energía (CIE) de la UNAM, los únicos lugares donde se realiza hasta el momento, ver [33, 34, 35, 36, 37, 38].

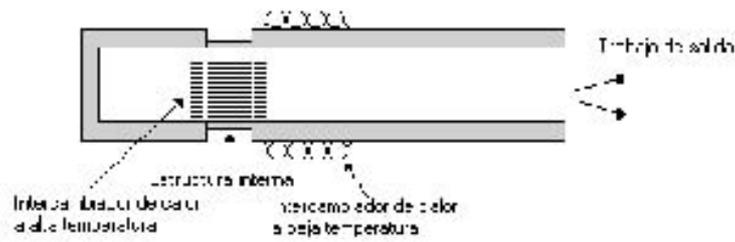


Figura 1.1: Estructura básica de un motor termoacústico.

1.2. Estructura básica del motor termoacústico

El motor termoacústico más sencillo está compuesto básicamente por un tubo, llamado resonador, cerrado en un extremo y abierto al aire en el otro extremo. Cerca del centro, una sección del tubo es remplazada por un conjunto de placas delgadas, bien espaciadas y alineadas paralelamente al eje del tubo, llamada *stack*. En cada extremo del *stack* hay un conjunto de laminillas espaciadas, cuyos planos también están alineadas en forma paralela al eje del tubo y están soldados al tubo. Durante su operación el calor fluye desde una fuente de alta temperatura situada cerca del extremo cerrado del tubo, mientras que fluido de enfriamiento pasa a través de un tubo delgado enrollado alrededor del extremo abierto del tubo, como se ve en la figura 1.1. Las laminillas más cercanas al extremo cerrado llevan el calor a ese extremo del *stack*, mientras que las laminillas más cercanas al extremo abierto mantienen el otro extremo del *stack* a una temperatura cercana a la temperatura del fluido de enfriamiento. Cuando el gradiente de temperatura a través del *stack* es lo suficientemente grande, el aire dentro del resonador oscila espontáneamente con una frecuencia tal que un cuarto de la longitud de onda del sonido es igual a la longitud del tubo, con un antinodo de presión (es decir, máxima amplitud) en el extremo cerrado y un antinodo de velocidad en el extremo abierto.

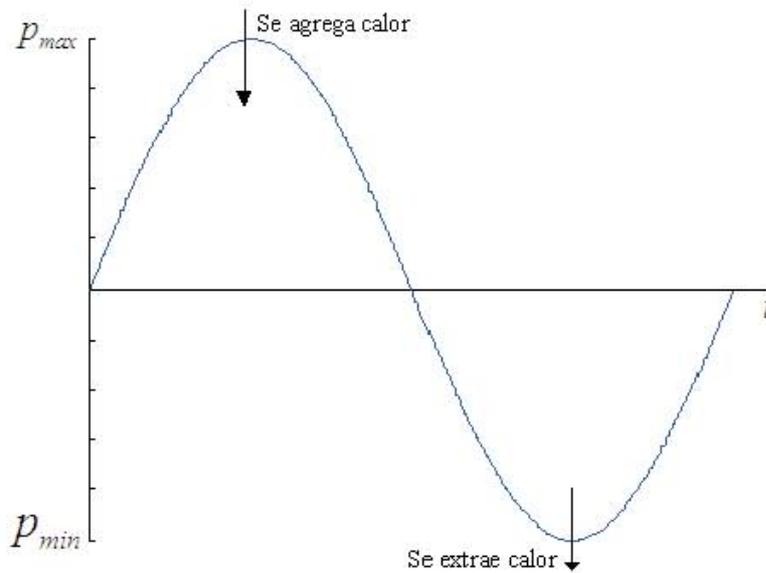


Figura 1.2: Criterio de Rayleigh.

1.3. Principio de operación del motor termoacústico

El funcionamiento del motor termoacústico se basa en la producción de una onda acústica por un gradiente axial de temperatura apropiado, para esto es necesario que se cumpla con el criterio de Rayleigh, el cual establece que si se agrega calor en el momento de máxima compresión y se extrae calor en el momento de máxima expansión la onda acústica es exitada, como se ve en la figura 1.2.

1.4. Ciclo del motor termoacústico de onda estacionaria

El ciclo de un motor termoacústico de onda estacionaria se puede describir siguiendo un elemento típico de fluido conforme ésta oscila a lo largo de una de las placas del *stack*. En un motor real las oscilaciones son senosoidales, pero por simplicidad se puede considerar un movimiento de onda cuadrada, de tal manera que el ciclo básico termodinámico pueda ser representado por dos procesos reversibles adiabáticos y dos procesos irreversibles a presión constante, como se ve en la figura 1.3. Un factor importante en la operación de

una máquina térmica tradicional es la fase: los pistones y válvulas tienen que moverse en el momento correcto para que el medio de trabajo sea transportado a través del ciclo termodinámico deseado. En el motor termoacústico obviamente no hay partes en movimiento para realizar estas funciones, aunque la estimulación acústica de calor y la generación (o absorción) de trabajo acústico requieren también que los procesos termodinámicos sean puestos en fase. La clave para poner en fase los motores termoacústicos es la presencia de dos medios termodinámicos: el fluido y la placa. Conforme el fluido, oscila a lo largo de la placa a la frecuencia acústica, experimenta cambios en temperatura. Parte de los cambios de temperatura se deben a la compresión y expansión adiabática del fluido por la presión de sonido y el resto es una consecuencia de la temperatura local de la misma placa. El flujo de calor entre el fluido y la placa no produce cambio instantáneo en la temperatura del fluido. En lugar de esto, el flujo de calor entre los dos medios crea un retraso temporal entre la temperatura, la presión y el movimiento, el cual es necesario para conducir al fluido a través de un ciclo termodinámico. Para el movimiento senoidal, estos argumentos aplican a los elementos de fluido que están dentro de la distancia de penetración térmica desde la placa. Los elementos que están más allá no tienen contacto térmico y son simplemente comprimidas y expandidas adiabáticamente de manera reversible por la onda de sonido. Sin embargo, los elementos que están dentro de la profundidad de penetración térmica desde la placa tienen un contacto térmico suficientemente bueno para intercambiar calor con la placa, pero al mismo tiempo, tienen un contacto térmico lo suficientemente pobre para producir un tiempo de retraso temporal entre el movimiento y la transferencia de calor. En la figura 1.3 se muestra un elemento de fluido que se encuentra a una presión media p_m , se desplaza una distancia x_m e intercambia calor con una placa que se encuentra a una temperatura T_m . Cuando el gradiente de temperatura a lo largo de la placa es grande, de tal manera que la parte a mayor temperatura se encuentra próxima a un extremo cerrado del resonador, la máquina termoacústica funciona como motor y su operación, para el caso ideal de oscilaciones de onda cuadrada, se caracteriza por cuatro procesos térmicos que se describen a continuación:

En el primer proceso adiabático el elemento de fluido se desplaza desde una posición a menor

temperatura $(T_m - x_m \nabla T_m)$, comprimiéndose hasta otra nueva posición distante x_m . Dada su velocidad, se considera que el fluido del elemento tuvo poco tiempo para intercambiar calor con la pared sólida, por lo que su temperatura $(T_m - x_m \nabla T_m + T_1)$ es prácticamente la de su lugar de procedencia más un aumento termodinámico de temperatura T_1 debido al aumento de presión p_1 . En este proceso los alrededores hacen trabajo dw_1 sobre el fluido del elemento comprimiéndolo. En el segundo proceso a presión constante, el elemento de fluido no se mueve y la presión es máxima $(p_m + p_1)$. En este proceso, el fluido del elemento intercambia calor con la pared sólida que se encuentra a una mayor temperatura $(T_m + x_m \nabla T_m)$. Si el gradiente de temperatura media a lo largo del tubo ∇T_m es suficientemente grande, la temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido es mayor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor dQ_2 hacia el fluido. La temperatura del fluido aumenta hasta alcanzar la temperatura de la pared sólida $(T_m + x_m \nabla T_m)$, el aumento de temperatura ocasiona una expansión y el fluido hace trabajo dW_2 sobre sus alrededores. En el tercer proceso adiabático, el elemento de fluido se mueve en sentido contrario expandiéndose y desplazándose una distancia x_m , desde una posición a mayor temperatura $(T_m + x_m \nabla T_m)$. Dada su velocidad, se considera que el fluido del elemento tuvo poco tiempo para intercambiar calor con la pared sólida, por lo que su temperatura $(T_m + x_m \nabla T_m - T_1)$ es prácticamente la de su lugar de procedencia menos una reducción termodinámica de temperatura T_1 debido a la reducción de presión p_1 . En este proceso el fluido del elemento hace trabajo dw_3 sobre los alrededores al expandirse. En el cuarto proceso a presión constante, el elemento de fluido no se mueve y la presión es mínima $(p_m - p_1)$. En este proceso, el fluido del elemento intercambia calor con la pared que se encuentra a una menor temperatura $(T_m - x_m \nabla T_m)$. Como el gradiente de temperatura media a lo largo del tubo ∇T_m es suficientemente grande, la temperatura de la pared sólida en contacto con el fluido es menor que la temperatura de éste, por lo que hay un flujo de calor dQ_4 hacia la pared sólida. La temperatura del fluido disminuye hasta alcanzar la temperatura de la pared sólida $(T_m - x_m \nabla T_m)$, la disminución de temperatura ocasiona una contracción y los alrededores hacen trabajo dW_4 sobre el fluido del elemento. En el caso de un motor termoacústico en donde el gradiente de temperatura media axial es suficientemente grande

$\nabla T_m > T_1/x_m$, en el momento de máxima presión entra calor al fluido y en el momento de mínima presión sale calor del fluido, por lo tanto, de acuerdo al criterio de Rayleigh se presenta la condición de excitación de la onda acústica y habrá una producción neta de potencia acústica. Además, en este caso hay un flujo de calor a través del fluido, de la región más caliente a la región más fría de la placa.

1.5. Aplicaciones de los motores termoacústicos

En 1962 se dio el avance más importante en termoacústica moderna cuando Carter, White y Stelle [28] plantearon de manera descriptiva y sin incluir análisis teóricos ni datos experimentales extensos la posibilidad de utilizar el efecto termoacústico para desarrollar un motor que generara electricidad al acoplarlo a un generador magnetohidrodinámico (MHD), que es un dispositivo que convierte energía mecánica en energía eléctrica mediante la interacción de un fluido, eléctricamente conductor en movimiento, con un campo magnético; cuando el fluido pasa a través del campo magnético induce un campo eléctrico que genera una corriente eléctrica que puede extraerse a través de electrodos, en el caso de un motor termoacústico acoplado a un generador MHD el fluido está confinado y se aprovecha el movimiento oscilatorio del fluido para generar electricidad. Debido a que el efecto termoacústico se lleva a cabo en la capa límite térmica, ellos propusieron aumentar el área de contacto entre las paredes sólidas con un gradiente de temperatura y el fluido, colocando placas apiladas. Con esta configuración ellos determinaron que era posible usar el fenómeno termoacústico para producir oscilaciones acústicas en el fluido contenido en un tubo, el cual se acoplaría a un generador MHD para producir corriente eléctrica. Es decir se podría generar corriente eléctrica alterna utilizando una fuente de calor permanente mediante la oscilación de un gas conductor en un campo magnético (Feldman [14]). La idea de usar un oscilador del tipo Sondhauss como motor para un generador magnetohidrodinámico de corriente alterna fue discutido también en publicaciones de Carter y Feldman [29] y Carter, Feldman y McKinnon [30]. El primer experimento en la historia de los motores termoacústicos para generar energía eléctrica mediante un campo de onda acústica fue realizado en 1979

Motor termoacústico: ∇T_m grande

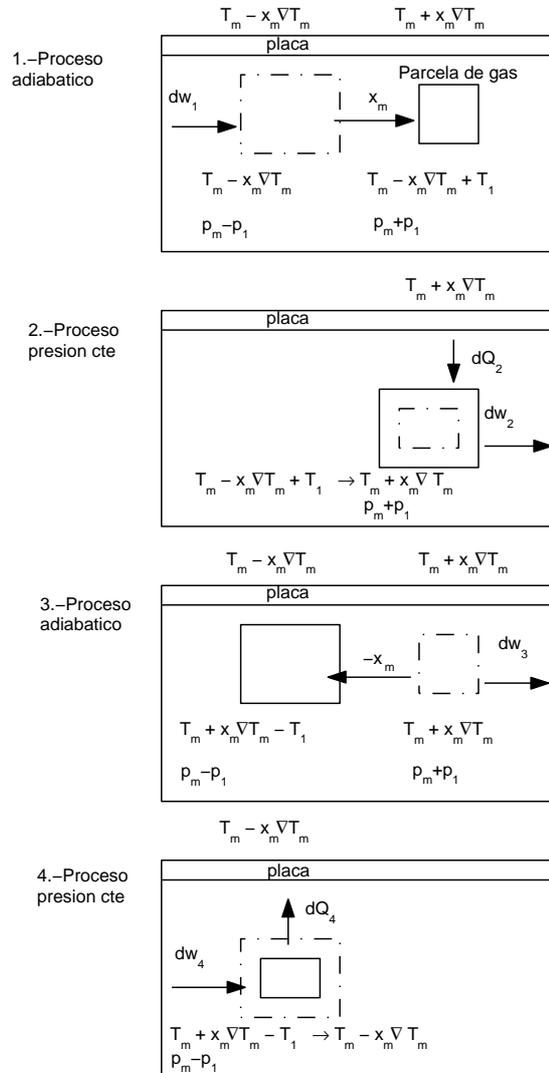


Figura 1.3: Ciclo del motor termoacústico.

por Moose *et al.* [31], usando para esto el efecto de transducción magnetohidrodinámica, sus experimento fueron realizados a nivel de laboratorio a 10 KHz y con agua salada (Hamann y Gerbeth [32]). En 1988, Swift [42] reportó los resultados de sus experimentos en un motor termoacústico usando sodio líquido. El *stack* consistía en un apilamiento de placas paralelas de molibdeno, en cuyos extremos se encontraban los intercambiadores de calor formados por tubos. El intercambiador de calor de alta temperatura fue conectado a un circuito intercambiador de calor de sodio líquido, formado por un calentador eléctrico, una bomba y un medidor de flujo. El intercambiador de calor de baja temperatura fue conectado a un circuito intercambiador de calor de agua presurizada. La diferencia de temperatura en el *stack* se estimó 10 % menor que la diferencia de temperatura exterior de los fluidos intercambiadores de calor, debido a las conductividades finitas del sodio y del acero inoxidable. Los resultados experimentales variaron cuantitativamente de los resultados numéricos basados en la teoría presentada antes por Swift *et al.* [39]. Para la mayor amplitud acústica en la cual el aparato podría trabajar de manera segura, el motor produjo 18 W de potencia acústica con 990 W de calor con una eficiencia del 1.8 %. Ellos no lograron altas eficiencias debido a problemas de cavitación que se producían al aumentar la amplitud de la presión, sin embargo, propusieron el acoplamiento de su motor a un transductor magnetohidrodinámico, el cual aprovecharía el movimiento del metal líquido (alta conductividad eléctrica) en presencia de un campo magnético, para generar potencia eléctrica, este dispositivo es conocido como generador MHD por efecto termoacústico, ver figura 1.4. Posteriormente, Swift y Fusco [40] indicaron la posibilidad de utilizar agua de mar como fluido de trabajo en el generador MHD por efecto termoacústico. Los intentos por desarrollar dispositivos prácticos basados en termoacústica comenzaron hace algunos años atrás, en los Estados Unidos y algunos otros países. Este interés surge debido a varios factores, entre ellos la necesidad de desarrollar nuevos y confiables dispositivos de conversión de energía para aplicaciones espaciales de la NASA y la crisis en la industria de la refrigeración causada por la destrucción del ozono de la estratosfera por los clorofluorocarbonos usados en la refrigeración convencional. Dentro de las instituciones que han desarrollado algún dispositivo termoacústico se pueden mencionar al Departamento de Investigación Científica e Industrial de Sudáfrica, en

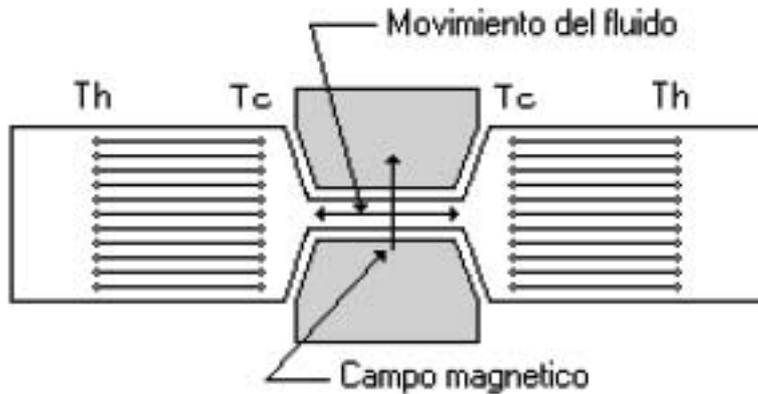


Figura 1.4: Generador magnetohidrodinámico por efecto termoacústico.

donde se construyó un refrigerador termoacústico accionado con un motor termoacústico que opera con neón a 15 bar y 120 Hz, ver figura 1.5. Científicos de Ford Motor Company construyeron también un refrigerador termoacústico con motor termoacústico que opera con helio a 10 bars con oscilaciones a 430 Hz o con una mezcla de 80 % helio y 20 % argón a 260 Hz. La corporación Tektronix, en Beaverton, Oregon construyó un motor termoacústico para accionar un refrigerador criogénico desarrollado para el enfriamiento de circuitos electrónicos; para su funcionamiento el motor termoacústico entrega una potencia acústica de 500 W a un refrigerador de tubo pulsante. En Denver, Colorado, Cryenco Inc. también desarrolló un motor termoacústico para operar un refrigerador de tubo pulsante, sin embargo, en este caso la fuente de calor para el motor era combustión de gas natural y se diseñó para la licuefacción industrial y comercial de gas natural. Este dispositivo medía 12 metros de largo, utilizaba dos estructuras internas en forma de espiral de 0.5 m de diámetro para producir 40 kW de potencia acústica a 40 Hz y empleaba gas helio a 30 bars (Swift [41]).

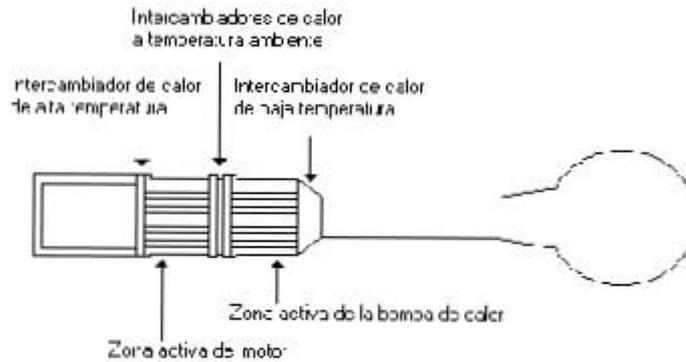


Figura 1.5: Enfriador termoacústico.

1.6. Modelado de máquinas termoacústica

Inicialmente la investigación científica de máquinas termoacústicas (MTA) se basó en enfoques de tipo teórico y experimental. A partir de 1994 Ward *et al.* [4], fueron los primeros en desarrollar un programa de computo llamado DELTAE para la simulación de máquinas termoacústicas, el cual está basado en la teoría termoacústica lineal planteada por Rott. El enfoque se basó en la dinámica de fluidos computacionales (DFC), la cual permite el desarrollo de algoritmos numéricos que contienen las ecuaciones de conservación que gobiernan el comportamiento de los fluidos, bajo diferentes condiciones de operación. En la actualidad se pueden encontrar diversos trabajos de investigación con este enfoque. Algunos investigadores han desarrollado sus propios códigos computacionales, otros han empleado códigos comerciales de DFC, tales como PHOENICS y FLUENT. Los estudios con códigos comerciales que existen en la literatura sólo modelan partes de una MTA.

1.6.1. Modelos analíticos

En 1969 Rott desarrolló exitosamente la teoría termoacústica lineal. Más tarde, diversos investigadores mejoraron la teoría termoacústica lineal y trataron de usarla para explicar y diseñar máquinas y crioenfriadores aprovechando el fenómeno termoacústico. La teoría termoacústica lineal es una poderosa herramienta que proporcionó con éxito no sólo un

buen entendimiento de los fenómenos físicos involucrados en estas máquinas sino también una buena guía para su innovación. El enfoque de los estudios previos sobre el modelado de flujos oscilatorios en dispositivos termoacústicos se ha centrado en el flujo sobre y alrededor del *stack*.

En 1988 Swift [12] presentó el modelo teórico de una placa termoacústica la cual consideraba un gas ideal sometido a una onda estacionaria plana y a una pequeña placa sólida alineada paralelamente a la dirección de la vibración de la onda, observándose que la onda estacionaria era modificada por la presencia de la placa, provocando dos efectos importantes: 1) un flujo de calor promedio cerca de la superficie de la placa, a lo largo de la vibración acústica y 2) la generación o absorción de energía acústica (trabajo) cerca de la superficie de la placa. En este trabajo se obtuvo una expresión analítica para la oscilación de la temperatura del fluido dentro de la capa límite, el gradiente de temperatura crítico, el cual es importante ya que indica el límite entre el funcionamiento de motor o bomba de calor para una máquina termoacústica y el flujo de calor en la dirección axial debido a la oscilación de velocidad.

En 1988 Swift [12] presentó el modelo teórico de máquina corta. En este caso consideró que la diferencia de temperatura es mucho menor que la temperatura absoluta y que la longitud de las placas es mucho más corta que la longitud de onda. La geometría considerada fue un conjunto de placas paralelas, con su eje axial a lo largo de la dirección de la vibración de la onda y el eje transversal perpendicular al plano de las placas paralelas. Como condiciones de frontera se consideró que en la interface fluido-placa: 1) la velocidad era igual a cero 2) el fluido y el sólido tenían la misma temperatura 3) el fluido y el sólido tenían los mismos gradientes de temperatura respecto a la coordenada transversal. Con estas consideraciones se logró obtener una ecuación de onda para la oscilación de la presión en términos del gradiente de temperatura medio, de las propiedades del material y de la geometría. Al analizar el caso de viscosidad cero, se observó, que el semiespaciamiento de las placas debe ser mayor a la profundidad de penetración térmica y menor a dos veces esta profundidad. También se determinó que el flujo de calor por conducción tiene un efecto negativo en el funcionamiento de las máquinas termoacústicas, siendo necesario que las conductividades térmicas en la

dirección axial sean lo más pequeñas posibles. Otros resultados de estos trabajos indican que los intercambiadores de calor deben tener una longitud aproximadamente igual a la amplitud de desplazamiento de los elementos de fluido de un extremo a otro ($2|u_1|/\omega$).

1.6.2. Modelos numéricos no comerciales

En los últimos años ha surgido un renovado interés por los dispositivos termoacústicos, tanto motores como refrigeradores, algunos investigadores han desarrollado códigos numéricos para estudiar estos dispositivos, sin embargo son cuasiunidimensionales o bidimensionales y sólo simulan alguna parte de la MTA, por lo que es importante trabajar en el desarrollo de códigos que puedan modelar completamente una MTA. A continuación se hace una revisión bibliográfica de este tipo de códigos.

Watanabe *et al.* [5] presentaron un modelo lineal cuasiunidimensional para motores termoacústicos formulado mediante el promedio de las ecuaciones de conservación en la sección transversal. Además incluyeron efectos de transferencia de calor y viscosidad proponiendo la aplicación de ciertos coeficientes. El modelo fue resuelto numéricamente, discretizando las ecuaciones mediante diferencias centradas sobre una red espaciada uniformemente y usando 2000 celdas a lo largo del tubo y aproximadamente 100 celdas en la región del *stack*. Los campos de velocidad, temperatura y densidad promedios en la sección transversal se aproximaron bastante bien a los datos experimentales, sin embargo, esto no ocurrió con el flujo de energía.

Yuan *et al.* [8] presentaron un modelo no lineal cuasiunidimensional para motores termoacústicos. Las ecuaciones fueron discretizadas espacialmente utilizando diferencias centradas e integrando explícitamente en el tiempo. En el tiempo cero, se consideró una perturbación inicial en la presión con una amplitud de 100 Pa. En estos cálculos se usaron 2000 nodos espaciales para una solución independiente de la red y un máximo número de Courant¹ de 0.4. Los cálculos efectuados para un motor termoacústico demostraron que el modelo describe cualitativamente el crecimiento y la eventual saturación de las oscilaciones,

¹número de Courant = $u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ donde u es la velocidad característica, Δt es el paso temporal y Δx es el paso espacial.

siendo este modelo el primero que describe el comportamiento transitorio de un motor termoacústico.

Worlikar *et al.* [6] analizaron el flujo bidimensional alrededor del *stack* de un refrigerador termoacústico idealizado usando un modelo para bajos números de Mach y consideraron como fluido de trabajo un gas Newtoniano con viscosidad y conductividad térmica constantes. El objetivo de este artículo fue analizar los gradientes de temperatura en estado estacionario generados acústicamente en el *stack*. El método numérico utilizado para resolver las ecuaciones del modelo fue diferencias finitas aplicado sobre un dominio rectangular. Las derivadas espaciales se discretizaron usando diferencias de segundo orden y la discretización temporal se hizo con un esquema explícito de tercer orden. Los cálculos se comenzaron con el gas en reposo y con una distribución de temperatura uniforme en el gas y el *stack*, el efecto de la onda acústica se simuló imponiendo condiciones de velocidad oscilatorias. Las simulaciones mostraron que la transferencia de calor entre el *stack* y el fluido se concentra en los extremos del *stack*, y que la transferencia de calor en la región media del *stack* es despreciable.

Worlikar *et al.* [7] analizaron el flujo y los campos de temperatura en la vecindad de una configuración idealizada de *stack*-intercambiador de calor de un refrigerador termoacústico, usando un modelo bidimensional para bajos números de Mach. El modelo se desarrolló mediante una formulación basada en vorticidad y utilizaron el método numérico de diferencias finitas. Las placas de los intercambiadores de calor se consideraron isotérmicas y en perfecto contacto térmico con las placas del *stack*. En este trabajo se consideró que el flujo neto de calor en el intercambiador de calor depende de tres componentes, las cuales son, el flujo de calor transversal sobre la superficie del intercambiador de calor, el flujo de calor en el extremo del intercambiador de calor que está en contacto con el gas y el flujo de calor por conducción en la interface *stack*-intercambiador de calor. Los resultados indicaron que el flujo de calor en el extremo del intercambiador de calor es comparable con el flujo de calor transversal, tiene el mismo signo y ambos contribuyen al enfriamiento. El flujo de calor neto fue considerablemente más pequeño que la suma de los dos flujos de calor mencionados anteriormente, indicando que el flujo de calor por conducción en la interface

stack-intercambiador de calor es perjudicial para el rendimiento del *stack*. Los resultados indicaron que el óptimo rendimiento del *stack* se logra cuando la longitud del intercambiador de calor es aproximadamente igual al desplazamiento de los elementos de fluido. Besnoin *et al.* [1] realizaron un estudio numérico de los intercambiadores de calor en el límite de placa delgada, el espesor de una placa del *stack* es mucho menor que el espaciamiento entre placas, para un refrigerador termoacústico idealizado. La mayoría de las simulaciones se realizaron utilizando un modelo basado en vorticidad e hicieron verificaciones de sus resultados con simulaciones basadas en el método de volumen finito. Los cálculos indicaron que es esencial optimizar cuidadosamente las posiciones de los intercambiadores de calor, esto se debe a que la interacción entre el *stack* y los intercambiadores de calor está gobernada por el desplazamiento de los elementos de fluido y consecuentemente está limitada por la amplitud de desplazamiento de la partícula. Conforme las separaciones fueron más grandes, el acoplamiento térmico entre el *stack* y los intercambiadores de calor disminuyó y la carga de enfriamiento decreció. Conforme las separaciones fueron más pequeñas se presentó un flujo de calor inverso en el extremo más cercano al *stack* lo cual hizo que la carga de enfriamiento decreciera, esto se debe a que entre más pequeño es el ancho de separación la transferencia de calor por conducción desde el *stack* al intercambiador de calor de baja temperatura es mayor, reduciéndose la capacidad de enfriamiento.

1.6.3. Modelos numéricos comerciales

La simulación de alguna de las partes de un MTA también se ha hecho usando códigos numéricos comerciales con modelos unidimensionales o bidimensionales, sin embargo se tiene la desventaja de su costo elevado y de no tener acceso al código fuente, por lo que la investigación con este tipo de códigos está restringida. A continuación se hace una revisión bibliográfica de este tipo de códigos.

Ward *et al.* [4] presentaron el programa DELTAE (Desing Environment for Low-amplitude Thermoacoustic Engines) de uso comercial para el diseño de máquinas termoacústicas de baja amplitud. En motores termoacústicos y muchos otros sistemas acústicos simples, la dependencia espacial de la presión y velocidad acústica puede ser determinada por una

ecuación de onda unidimensional. DELTAE considera al sistema como una serie de segmentos, los cuales toman en cuenta de manera apropiada los efectos de pérdidas viscosas y térmicas. Dentro de cada segmento integra una ecuación de onda unidimensional apropiada a la geometría del segmento. En todos los casos la integración es controlada por variables globales tales como la frecuencia y presión media y por variables locales tales como la geometría del segmento. Este programa tiene las siguientes desventajas: 1) únicamente permite realizar un análisis unidimensional, 2) considera números de Mach bajos, 3) no toma en cuenta aspectos transitorios, por lo tanto, no predice el inicio de las oscilaciones acústicas y no simula la transición a estado permanente del campo de sonido, 4) no toma en cuenta las no linealidades de las ecuaciones de movimiento, por lo que no es capaz de considerar el fenómeno de corrientes acústicas, 5) no considera aspectos de turbulencia.

Ishikawa *et al.* [3] simularon numéricamente intercambiadores de calor de dispositivos termoacústicos, analizando los campos de flujo y energía en una placa isotérmica sujeta a una onda acústica estacionaria en un resonador. Para la simulación se utilizó el código comercial PHOENICS, el modelo empleado fue bidimensional y se resolvieron las ecuaciones completas de Navier-Stoke en dos dimensiones. Para modelar únicamente la sección de los intercambiadores de calor se aplicaron condiciones de onda estacionaria en el extremo abierto del dominio de la simulación. El espesor de la placa no se modeló y la turbulencia se despreció para todos los casos. Los resultados de la simulación mostraron que puede observarse un efecto de bombeo de calor no sólo en las placas largas sino también en las placas más cortas (comparadas con el desplazamiento de las partículas), cuando el espaciamiento de la placa es mayor que la profundidad de penetración térmica. Los resultados mostraron que en términos de la cantidad total de bombeo de calor, no es necesario tener placas mayores a cuatro veces la distancia de desplazamiento de la partícula, cualquier área superficial extra contribuye a la disipación de energía.

Chen *et al.* [2] analizaron la optimización de un refrigerador termoacústico (RTA) mediante técnicas numéricas, realizando simulaciones con el código comercial FLUENT de DFC. Debido a la gran disparidad en la escala de longitud en el *stack* de estos dispositivos, el análisis del tipo DFC sólo fue factible para simular un canal entre dos placas del *stack*, ana-

lizándose los parámetros termoacústicos adentro y afuera de un poro del *stack*. FLUENT permitió realizar simulaciones de flujo transitorio bidimensional y de transferencia de calor, resolviendo las ecuaciones completas de Navier-Stokes en flujo no permanente de un RTA. Inicialmente no se incluyeron los intercambiadores de calor, observándose un fenómeno muy interesante, la separación de flujo en ambos extremos del canal del apilamiento donde normalmente se localizan los intercambiadores de calor. La longitud de estas regiones de separación fue aproximadamente igual a la longitud del *stack*, lo cual sugirió que la forma de los intercambiadores de calor es muy importante y debe ser diseñada cuidadosamente para reducir las pérdidas relacionadas con los bordes. Para incluir los intercambiadores de calor dentro del modelo detallado y realizar cálculos precisos en el tiempo, se tomaron en cuenta los parámetros de diseño óptimo obtenidos previamente con DELTAE para un RTA. Se observó que cuando la longitud y el diámetro del resonador se reducen las dimensiones óptimas de la longitud del *stack*, la posición del *stack* y la longitud del intercambiador de calor cambian proporcionalmente.

1.6.4. Guías de diseño derivadas del modelado de máquinas termoacústicas

Swift [12], con el modelo de máquina corta, señaló que la longitud del intercambiador de calor debe ser aproximadamente igual al desplazamiento de los elementos de fluido oscilante, por su parte, Ishikawa *et al.* [3] encontraron que la longitud del intercambiador de calor debe ser menor a cuatro veces el desplazamiento del elemento de fluido, sin embargo no reportaron el límite inferior ni el valor óptimo. Para el caso específico de un refrigerador termoacústico, Worlikar *et al.* [7] señalaron que la longitud óptima del intercambiador de calor es igual al desplazamiento de un extremo a otro del elemento de fluido más la profundidad de penetración térmica. Besnoin *et al.* [1] señalaron que la longitud del intercambiador de calor de un refrigerador termoacústico es una función inversamente proporcional de la relación de excitación Dr .

Swift [12] determinó que el máximo flujo de calor en los intercambiadores de calor se obtiene cuando el espaciado entre placas es mayor a dos veces y menor a cuatro veces la

profundidad de penetración térmica. Por su parte, Ishikawa *et al.* [3] determinaron que el máximo flujo de calor en los intercambiadores de calor se obtiene cuando el espaciamiento entre las placas es de 3.2 veces la profundidad de penetración térmica. Para el caso específico de un refrigerador termoacústico Besnoin *et al.* [1] determinaron que el máximo flujo de enfriamiento se obtiene cuando la separación entre las placas es igual al 3.5 veces la profundidad de penetración térmica. Estos dos últimos resultados están dentro del rango reportado por Swift.

Worlikar *et al.* [7] y Chen *et al.* [2] señalaron que para un refrigerador termoacústico el COP es una función lineal inversa de la diferencia de temperatura entre los intercambiadores de calor. Estos últimos investigadores señalaron además que el COP es una función cuadrática de la relación de excitación Dr cuando ésta aumenta hasta un valor de 2%, para valores superiores la rapidez de variación del COP se reduce.

Worlikar *et al.* [7] y Chen *et al.* [2] determinaron que la carga de enfriamiento (calor extraído) es una función lineal inversa de la diferencia de temperatura entre los intercambiadores de calor. Estos últimos investigadores determinaron además que la carga de enfriamiento es una función lineal de la relación de excitación. Chen *et al.* [2] determinaron que la carga de enfriamiento se incrementa al reducir el espesor de las placas, hasta alcanzar un valor óptimo y que es una función cuadrática de la amplitud de la presión.

Besnoin *et al.* [1] señalaron que existe un valor óptimo para la separación entre el intercambiador de calor y el *stack*, con el cual se obtiene el máximo flujo de calor de enfriamiento en un refrigerador termoacústico.

Como se observa de la revisión bibliográfica aún hace falta mucha investigación experimental y teórica para poder aplicar la tecnología termoacústica en el desarrollo de dispositivos termoacústicos y en especial hace falta códigos numéricos para modelar y simular motores termoacústicos. En el capítulo siguiente se presenta un estudio analítico enfocado a los sistemas termoacústicos magnetohidrodinámicos, los cuales pueden ser usados para convertir energía térmica en energía eléctrica.

Capítulo 2

Estudio teórico del efecto de un campo magnético en la estabilidad lineal de una oscilación termoacústica

2.1. Antecedentes generales

El uso de motores termoacústicos con fluidos de trabajo eléctricamente conductores bajo un campo magnético aplicado, ha sido propuesto para desarrollar sistemas simples que transforman calor en energía eléctrica [42]. Estos dispositivos pueden ser potencialmente usados como convertidores de energía solar en electricidad, y dependiendo de su eficiencia podrían ser una alternativa a las celdas fotovoltaicas. Debido a su simplicidad y a la ausencia de partes móviles, la generación de electricidad por efecto termoacústico puede usarse en aplicaciones espaciales.

Actualmente el comportamiento de los sistemas termoacústicos magnetohidrodinámicos es prácticamente desconocido, los pocos estudios que existen en la literatura son para geometrías, materiales y condiciones físicas específicas. En este trabajo se hace un análisis

de la estabilidad lineal de un motor termoacústico de onda estacionaria cuando un campo magnético constante se aplica en la región del *stack*. Para esto, se extiende la teoría de estabilidad desarrollada por Rivera-Alvarez y Chejne [43]. Esta teoría considera las ecuaciones de conservación linealizadas para un gas ideal y desarrolla un criterio de estabilidad para una solución oscilatoria usando el gradiente de temperatura en el *stack* como parámetro de bifurcación. En este trabajo, esta teoría se extiende en tres direcciones. Primero, se adapta la teoría para considerar un fluido Newtoniano con una ecuación general de estado. Segundo, se considera que las propiedades físicas del fluido de trabajo varían con la temperatura. Esta consideración es importante si se pretende desarrollar un modelo más realista, ya que en la mayoría de los casos, los motores termoacústicos trabajan con altos gradientes de temperatura ($\sim 100K/cm$) y para la mayoría de los fluidos de interés, considerar propiedades físicas constantes es una gran simplificación. Tercero, se considera que el fluido de trabajo es un líquido eléctricamente conductor, como un metal líquido, una sal fundida o un electrolito y se explora el efecto que provoca la presencia de un campo magnético sobre el gradiente de temperatura crítico.

2.2. Formulación del problema

Las ecuaciones de conservación para el flujo en estado no permanente de un fluido compresible Newtoniano pueden escribirse de la siguiente forma:

Ecuación de continuidad o de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0. \quad (2.1)$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i. \quad (2.2)$$

Ecuación de conservación de la energía

$$\rho \frac{\partial c_v T}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial c_v T}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \Phi. \quad (2.3)$$

Ecuación general de estado

$$\rho = \rho(p, T). \quad (2.4)$$

En las ecuaciones anteriores la velocidad del flujo es denotada por u_i , la presión por p , la densidad del fluido por ρ , la temperatura por T y la fuerza de cuerpo externa por f_i . Φ es la función que incluye disipación viscosa y otras fuentes de disipación como la generada por el efecto Joule. A su vez, μ , λ , c_v y k son respectivamente la viscosidad dinámica, el segundo coeficiente de viscosidad, el calor específico a volumen constante y la conductividad térmica del fluido. Estas propiedades son funciones de la temperatura y por lo tanto varían en el espacio y el tiempo. En la ecuación de la energía se empleó la relación de estado $\delta e = c_v \delta T$, donde e es la energía interna por unidad de masa.

Para un fluido eléctricamente conductor que fluye en presencia de un campo magnético, las ecuaciones anteriores se complementan con las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm, [44, 45]:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial B_i}{\partial t}, \quad \epsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu_0 J_i, \quad \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0, \quad (2.5)$$

$$J_i = \sigma(E_i + \epsilon_{ijk} u_j B_k), \quad (2.6)$$

donde los símbolos B_i , E_i y J_i denotan la inducción magnética, el campo eléctrico y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente. Además, μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y σ es la conductividad eléctrica del fluido de trabajo.

En este caso la fuerza externa f_i en la ecuación de cantidad de movimiento es la fuerza de Lorentz, la cual puede escribirse en términos de las variables electromagnéticas como:

$$f_i = \epsilon_{ijk} J_j B_k. \quad (2.7)$$

En el flujo de un fluido eléctricamente conductor en presencia de un campo magnético, las corrientes eléctricas inducidas que circulan en el medio representan una fuente de disipación llamada disipación por efecto Joule, el cual es la transformación de energía eléctrica en calor. En el modelo, este efecto se despreció ya que se esperan corrientes eléctricas inducidas pequeñas. También se consideró que la disipación viscosa no afecta considerablemente el balance de energía del sistema ($\Phi = 0$).

En el análisis se consideró un ducto bidimensional cerrado en un extremo y abierto en el otro, el cual contiene un fluido de trabajo. Su longitud total es S y la coordenada x se define a lo largo de la dirección axial, medida desde el extremo abierto, mientras las coordenadas y y z son perpendiculares entre si y transversales al ducto. En x_s se localiza un *stack* compuesto de placas delgadas aisladas eléctricamente, con una longitud Δx y separadas por una distancia s . La temperatura de la pared se consideró baja en la región cerca del extremo abierto y alta cerca del extremo cerrado, generándose un gradiente en el *stack*. Bajo condiciones favorables un gradiente de temperatura lo suficientemente grande puede generar un movimiento oscilatorio del fluido en la dirección axial, siendo razonable considerar que el movimiento del fluido es unidimensional, es decir, $u_i = (u, 0, 0)$. Externamente se impuso al ducto un campo magnético uniforme en la dirección y , como se ve en la figura 2.1. Este campo magnético afecta la región del gradiente de temperatura, influyendo en la estabilidad lineal del fluido a través de la fuerza de Lorentz.

El movimiento relativo del fluido y el campo magnético induce una corriente eléctrica perpendicular al plano del movimiento (J_z), la cual, a su vez, interactúa con el campo aplicado y crea una fuerza de Lorentz en la dirección del flujo. Por otra parte, esta corriente también inducirá un campo magnético en la dirección del flujo. Aquí se considera que el campo inducido es mucho más pequeño que el campo aplicado y consecuentemente puede despreciarse. En términos adimensionales, esto significa que el número de Reynolds magnético $Rm = \mu_0 \sigma U s$ es mucho más pequeño que la unidad, donde U es la velocidad característica del flujo. Esta aproximación aplica en la mayoría de los flujos con metales líquidos, sales fundidas y electrolitos [45], e implica que el campo magnético no es modificado por el movimiento del fluido. Matemáticamente esto significa que el campo magnético está de-

sacoplado del movimiento del fluido y es gobernado por las ecuaciones magnetostáticas, por lo que el campo magnético está dado sólo por el campo externo $B_i = (0, B_0, 0)$. Ya que existe únicamente una corriente eléctrica en la dirección perpendicular al movimiento del fluido, estrictamente, no es posible proponer un problema MHD bidimensional auto-consistente. Por lo tanto, los circuitos de corriente deben modelarse de alguna manera. Se considera entonces la existencia de paredes laterales conductoras en posiciones distantes $z = \pm z_1$, conectadas a un circuito eléctrico externo; por lo tanto, debe existir un campo eléctrico E_z cuyo valor depende de las condiciones del circuito eléctrico externo. Mientras el campo magnético permanezca sin perturbación, la ley de inducción de Faraday se reduce a $\epsilon_{ijk}\partial E_k/\partial x_j = 0$ y el campo eléctrico se vuelve potencial. Se puede demostrar que E_z es espacialmente constante y es una función del tiempo [46].

Si se considera condición de circuito abierto, el campo eléctrico puede encontrarse fácilmente ya que la densidad de corriente eléctrica integrada en la sección transversal debe ser cero (la corriente recircula dentro del fluido), es decir

$$\int_0^s J_z dy = \int_0^s \sigma(E_z + uB_0) dy = 0, \quad (2.8)$$

en este caso, el campo eléctrico está dado por $E_z = -\tilde{u}B_0$, donde \tilde{u} es la velocidad promedio en la sección transversal entre las placas. En general, para condiciones eléctricas externas arbitrarias se puede seguir un enfoque de circuito eléctrico equivalente [45], [47], e introducir un factor de carga, \bar{K} , definido como

$$\bar{K} = -\frac{E_z}{\tilde{u}B_0}, \quad (2.9)$$

donde la constante \bar{K} es positiva y puede tomar valores entre 0 y 1, según las condiciones de circuito eléctrico. Para corto circuito (resistencia externa cero) se tiene $\bar{K} = 0$, ya que E_z es nulo cuando las paredes laterales son conectadas a un conductor perfecto. Para circuito abierto (resistencia externa $\rightarrow \infty$) $\bar{K} = 1$, ya que la corriente eléctrica forma circuitos cerrados dentro del fluido y su integral en la sección transversal es cero. Valores intermedios de \bar{K} representan cargas externas finitas. El valor $\bar{K} = 0.5$ da la potencia máxima.

Usando las consideraciones descritas antes, el sistema de ecuaciones 2.1 - 2.7 se reduce a:

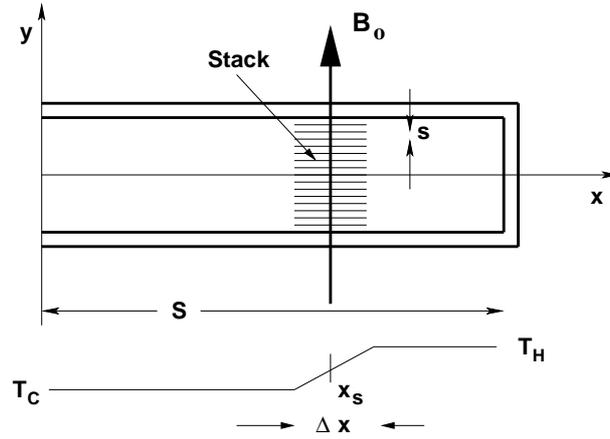


Figura 2.1: Ducto termoacústico.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + B_0^2 \sigma (\bar{K} \bar{u} + u) = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v u \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho u T \frac{\partial c_v}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

la forma de la ecuación de estado permanece sin cambio.

Las perturbaciones de la velocidad axial, la presión y la densidad se consideran como funciones de las coordenadas axial y transversal, pero la perturbación de la temperatura se considera sólo como una función de la coordenada transversal. La justificación física para omitir la dependencia axial en las perturbaciones de temperatura radica en el hecho de que la modificación en la distribución de temperatura transversal debido a la transferencia de calor desde las paredes es mayor que aquella en la dirección axial debida a la onda acústica. Esta simplificación es crucial para el desarrollo de esta teoría, porque permite la solución analítica. Matemáticamente lo anterior puede escribirse como:

$$u = u'(x, y, t), \quad p = p_0 + p'(x, y, t),$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, t), \quad T = T_0 + T'(y, t).$$

Las variables primas se consideran pequeñas en el sentido de que sus productos pueden despreciarse, dada las condiciones físicas consideradas; el estado no perturbado se define con velocidad cero, presión constante p_0 y una distribución de temperatura T_0 , dada por:

$$T_0 = \begin{cases} T_c & 0 \leq x \leq x_s - \Delta x/2, \\ T_c + \nabla T(x - x_s + \Delta x/2) & x_s - \Delta x/2 < x \leq x_s + \Delta x/2, \\ T_H = T_c + \nabla T(\Delta x) & x_s + \Delta x/2 < x \leq S, \end{cases}$$

donde T_c y T_H son constantes y se considera que $T_c < T_H$. El gradiente de temperatura es $\nabla T = (T_H - T_c)/\Delta x$.

Con estas condiciones se tiene:

$$\rho_0 = \rho_0(T_0, p_0) = \rho_0(x),$$

siendo las ecuaciones que gobiernan las perturbaciones:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{\beta_T}{\beta} \frac{p_0}{\rho_0 c_v} - \frac{\rho_0}{\beta} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\beta_T}{\beta} \frac{k}{\rho_0 c_v} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\beta_T}{\beta} \frac{T_0}{c_v} u' \frac{\partial c_v}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - (\bar{u}' + \bar{K} u') \frac{B_0^2 \sigma}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u'}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{2\partial \mu}{\partial x} \right), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -u' \nabla T + \frac{k}{\rho_0 c_v} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \frac{p_0}{\rho_0 c_v} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{T_0}{c_v} u' \frac{\partial c_v}{\partial x}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x}. \quad (2.17)$$

En estas ecuaciones se usó la expresión $\delta \rho' = \beta \delta p' + \beta_T \delta T'$, donde β y β_T son respectivamente los coeficientes de compresibilidad y expansión térmica del fluido de trabajo, definidos por:

$$\beta = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T \quad \text{y} \quad \beta_T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p.$$

Las condiciones de frontera son:

$$p'(0, y, t) = 0,$$

$$u'(S, y, t) = \partial u'(0, y, t) / \partial x = u'(x, 0, t) = u'(x, s, t) = 0,$$

$$T'(0, t) = T'(s, t) = 0.$$

La solución más simple que satisface todas las condiciones de frontera en la zona del *stack* es:

$$u' = C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (2.18)$$

$$p' = C_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (2.19)$$

$$T' = C_3 \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (2.20)$$

$$C_4 = \left(-(\lambda + \mu) \frac{n\pi}{2S} + \frac{\partial\mu}{\partial T} \nabla T \cot \frac{n\pi x}{2S}\right) C_1, \quad (2.21)$$

donde n es el modo de oscilación en la dirección axial, m es el modo de oscilación en la dirección transversal y los coeficientes C_i son funciones del tiempo de la forma $C_i = a_i e^{\alpha t}$, donde a_i es la amplitud de la oscilación y α es la frecuencia de oscilación. Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de perturbación e integrando en y entre 0 y s y en x entre $x_s - \Delta x/2$ y $x_s + \Delta x/2$, se obtiene la siguiente ecuación de coeficientes:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = L_{ij} C_j, \quad (2.22)$$

donde $C_i = (C_1, C_2, C_3)^T$.

La ecuación característica del sistema anterior es $L_{ij} - \alpha \delta_{ij} = 0$, obteniéndose:

$$\alpha^3 + P_2 \alpha^2 + P_1 \alpha + P_0 = 0, \quad (2.23)$$

donde los coeficientes P_i están dados en términos de L_{ij} . El objetivo es obtener el valor crítico de ∇T tal que el sistema sufra una transición de un estado de no movimiento a un estado oscilatorio. Esta condición se satisface cuando la solución de la ecuación previa tiene $Re(\alpha) = 0$ y $Im(\alpha) \neq 0$. En términos de los coeficientes de la ecuación previa y haciendo uso del teorema de Vieta [48], esta condición se reduce a:

$$P_1 P_2 = P_0, \quad (2.24)$$

la solución de esta ecuación en términos de ∇T , conduce al valor crítico de ∇T_c .

2.3. Resultados

En esta sección se aplica la teoría desarrollada anteriormente para el caso de agua líquida y se analiza la posibilidad de usar este material como fluido de trabajo en un tubo termoacústico. Aunque la conductividad eléctrica del agua es baja comparada con los metales líquidos, el agua es un fluido de trabajo mucho más conveniente para realizar experimentos relativamente simples. Su conductividad eléctrica puede incrementarse considerablemente agregando una pequeña cantidad de cloruro de sodio, con cambios menores en otras propiedades. Las propiedades termodinámicas del agua usadas en los cálculos fueron obtenidas del National Institute of Standards and Technology de los Estados Unidos (NIST) [49]. Todas las propiedades del agua requeridas en los cálculos están disponibles de estas tablas excepto para λ . Dado que la información de la viscosidad volumétrica del agua es insuficiente, se consideró que la hipótesis de Stokes es válida, es decir $\lambda = -2/3\mu$. Para cada propiedad del agua se hizo un ajuste polinomial de los datos obtenidos de las tablas del NIST, ver apéndice C.

Al hacer el análisis se consideraron sólo aquellos casos donde el fluido permanece en estado líquido, así, dada una longitud del *stack* Δx y una temperatura en su posición central T_s , hay un gradiente de temperatura axial máximo permitido. Denotándose este límite por ∇T_{lim} . En todos los cálculos realizados se excluyen situaciones donde el fluido pueda sufrir cambios de fase, es decir, $\nabla T_{lim} > \nabla T_c$. Los resultados que se presentan corresponden a los modos de oscilación $n = 1$ y $m = 1$ con $T_s = 455K$, $P_s = 150 \times 10^5 Pa$, $S = 1m$ y se reportan en términos del factor

$$G = \nabla T_{lim} / \nabla T_c > 1.$$

Antes de discutir la dependencia de la estabilidad del sistema con campo magnético, es interesante describir la estabilidad dinámica como una función de parámetros geométricos. La dependencia del factor G como una función de la longitud adimensional del *stack*, $\Delta x^* \equiv \Delta x / S$ en el rango $0.02 \leq \Delta x^* \leq 0.17$ para tres posiciones axiales del *stack* ($x_s^* = 0.4, 0.5, 0.6$) siendo $x_s^* = 0.6$ la posición óptima de acuerdo con el modelo de motor corto en términos de la energía acústica [12], se muestra en la figura 2.2 para un conjunto específico de parámetros

termodinámicos y geométricos. El factor G es una función monotónicamente decreciente de Δx^* . Este resultado indica que a presiones bastante altas, se obtienen grandes G para $\Delta x^* \leq 0,1$, el cual es la longitud típica del *stack* en un dispositivo termoacústico de onda estacionaria [50].

En la figura 2.3, se grafica G como una función de la separación de placa adimensional $s^* \equiv s/\delta_k$ para tres longitudes adimensionales del *stack* ($\Delta x^* = 0.05, 0.075, 0.1$). La escala δ_k es la profundidad de penetración térmica definida por $\delta_k \equiv \sqrt{2k/(\rho c_p \omega)}$ donde c_p es el calor específico a presión constante. Se observa que G incrementa monotónicamente y se satura para $s^* \sim 13$. Para $s^* = 5$, la separación teórica optima [51], G es lo suficientemente grande para generar ondas acústicas.

Un parámetro adimensional conveniente para describir el efecto del campo magnético es el número de Hartmann, definido por $H_a = sB_0\sqrt{\sigma/\rho\nu}$. El cuadrado de este número da una estimación de la relación de las fuerzas magnéticas a las fuerzas viscosas [45]. En la figura 2.4 se muestra G como una función de H_a con $\bar{K} = 0.5$ y considerando una concentración de cloruro de sodio acuoso de $0.1gM/l$, el cual de acuerdo a [52] es una función lineal de temperatura de la forma $\sigma = 10 + 0.26(T - 298.16)1/\Omega m$. En el rango de H_a explorado, G es una función monotónicamente decreciente aproximadamente lineal de H_a para los tres casos analizados. La tendencia decreciente de G como una función de H_a refleja el hecho de que la fuerza de Lorentz se opone al movimiento del fluido de trabajo en el tubo y por lo tanto, para un dispositivo dado y un fluido de trabajo, un incremento del campo magnético aumenta el gradiente de temperatura requerida para disparar la onda termoacústica.

2.4. Conclusiones

En este estudio se analizó la influencia del campo magnético sobre la estabilidad de las oscilaciones termoacústicas en un tubo. La teoría presentada puede aplicarse para determinar las condiciones de generación de ondas acústicas cuando el fluido de trabajo es un líquido eléctricamente conductor. En el análisis se incluyó la dependencia de temperatura de todas las propiedades termodinámicas del fluido de trabajo. Como se esperaba, la teoría

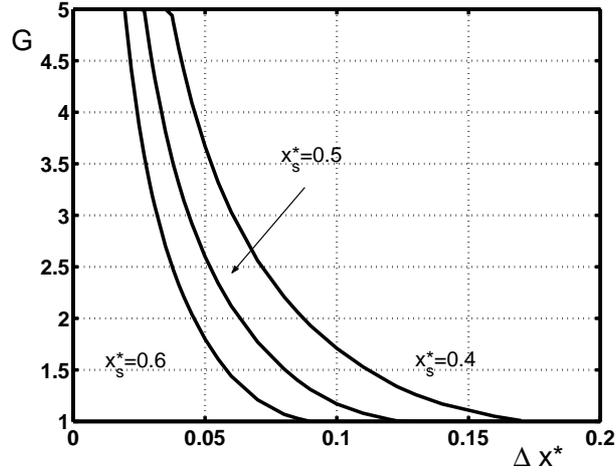


Figura 2.2: G como una función de la longitud adimensional del *stack* (Δx^*), considerando agua como fluido de trabajo. $T_s = 455K$, $P_s = 150 \times 10^5 Pa$, $S = 1$ m, $s^* = 5$, para tres diferentes posiciones del *stack* ($x_s^* \equiv x_s/S$).

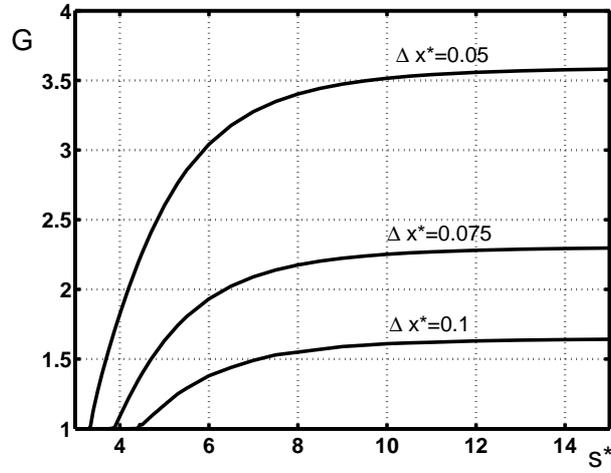


Figura 2.3: G como una función de la separación adimensional entre placas en el *stack* (s^*), considerando agua como fluido de trabajo. $T_s = 455K$, $P_s = 150 \times 10^5 Pa$, $S = 1$ m. Para tres diferentes longitudes adimensionales del *stack* (Δx^*).

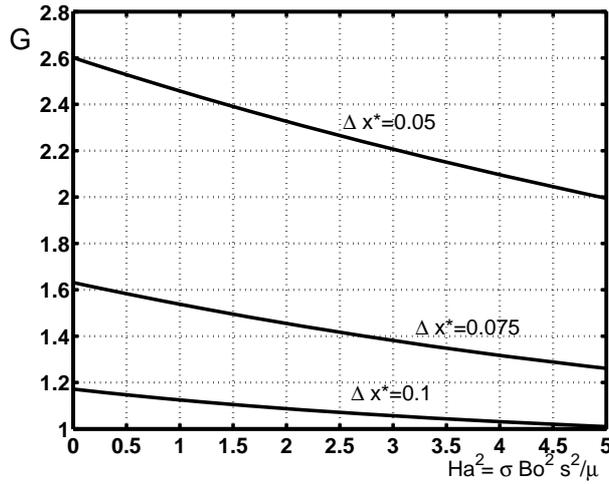


Figura 2.4: G como una función del número de Hartmann(Ha), considerando agua con cloruro de sodio como fluido de trabajo. $T_s = 455K$, $P_s = 150 \times 10^5 Pa$, $S = 1m$, $s^* = 5$, $x_s^* = 0.5$, $\bar{K} = 0.5$ y tres diferentes longitudes adimensionales del *stack* (Δx^*).

indica que las temperaturas y presiones promedios requeridos para generar oscilaciones termoacústicas en un líquido (agua $T_s = 455K$ y $P_s = 150 \times 10^5 Pa$) son mucho mayores que aquellas con un gas en dispositivos con magnitudes geométricas similares (aire $T_s = 350K$ y $P_s = 100 \times 10^3 Pa$, Rivera-Alvarez y Chejne [43]). En general para los líquidos, las condiciones termodinámicas requeridas para generar la onda termoacústica se obtienen cerca del punto crítico. En el ejemplo, se describe la estabilidad del agua con cloruro de sodio como fluido de trabajo. Este ejemplo fue seleccionado ya que la mayoría de sus propiedades termodinámicas son conocidas con excepción de la viscosidad volumétrica. Esta propiedad está asociada cercanamente con la atenuación acústica y puede jugar un papel importante en estudios termoacústicos. El efecto disipativo del campo magnético da como resultado que se incremente el gradiente de temperatura requerido para generar la onda termoacústica, este efecto puede verse en la figura 2.4, donde se observa que aumentando el campo magnético se aumenta el número de Hartmann, lo cual implica menores valores de G , el cual es inversamente proporcional al gradiente de temperatura. Se ha encontrado a través de

observaciones experimentales en aire, que las teorías disponibles en la literatura subestiman el gradiente de temperatura crítico [53]. Si esta observación aplica a ductos termoacústicos con líquidos como fluido de trabajo, entonces $G > 1$ sería sólo un criterio necesario pero no suficiente para observar realmente el efecto termoacústico en un ducto con agua como fluido de trabajo. El análisis presentado es un ejemplo de un campo promisorio el cual no ha sido explorado lo suficientemente bien, por ejemplo, el uso de líquidos como fluido de trabajo termoacústico a condiciones termodinámicas cercanas al punto crítico.

Motivados por la potencial aplicación del motor termoacústico acoplado a un generador magnetohidrodinámico para la conversión de energía solar en electricidad, en el siguiente capítulo se presenta el desarrollo de un código numérico para la simulación de flujos incompresibles, el cual servirá de base al código numérico para la simulación de flujos compresibles que permita estudiar el comportamiento de los motores termoacústicos.

Capítulo 3

Método numérico para la solución de flujos incompresibles

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de flujos incompresibles son ecuaciones diferenciales parciales, las cuales son válidas en todos los puntos del dominio. En general las ecuaciones que gobiernan la dinámica de los fluidos son tan complejas que no es posible encontrar soluciones analíticas, de modo, que es necesario buscar una solución computacional mediante la aplicación de métodos numéricos, los cuales proporcionan técnicas para aproximar de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales parciales, permitiendo analizar de manera relativamente rápida y sencilla diversas condiciones del problema. La eficiencia del método depende de la precisión que se requiera, de la facilidad con la que pueda implementarse, así como del tipo de ecuación que se esté manejando. En este trabajo se utilizó el método de elemento finito para discretizar las ecuaciones de conservación del modelo matemático que caracteriza el comportamiento de flujos incompresibles, empleándose elementos triangulares los cuales se ajustan en su conjunto para formar la malla que aproxima el dominio computacional, además se utilizó un esquema de separación de operadores, el cual permite dividir el problema original en subproblemas.

3.1. Ecuaciones de Navier-Stokes

Se considera una región del espacio dimensional Ω , la cual está delimitada por una frontera $\partial\Omega$, dividida en dos partes, donde $\partial\Omega_1$ representa la frontera tipo Dirichlet y $\partial\Omega_2$ representa la frontera tipo Newman. La frontera está definida por un vector normal unitario \vec{n} hacia fuera del dominio. Las ecuaciones de Navier-Stokes que modelan el flujo de fluidos viscosos incompresibles en Ω están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla P &= \vec{f} \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \text{ sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f], \\ \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} - \vec{n} P &= \vec{g}_2 \text{ sobre } \partial\Omega_2 \times [0, t_f], \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, \vec{u} es el vector velocidad, \vec{f} es el vector fuente, \vec{g}_1 es la condición de frontera tipo Dirichlet, \vec{g}_2 es la condición de frontera tipo Newman, \vec{u}_0 son las condiciones iniciales, t es el tiempo, t_f es el tiempo final y \vec{x} el vector de posición. $P = p/\rho$ donde p es la presión y ρ es la densidad. La velocidad se resuelve en una malla fina y la presión en una malla gruesa. Cuando las ecuaciones de Navier-Stokes se acoplan con la ecuación de la energía se usa la aproximación de Boussinesq $\vec{f} = g\beta T\hat{j}$, donde g es la gravedad, β es el coeficiente de compresibilidad, T es la temperatura del fluido y \hat{j} es un vector unitario en la dirección de la fuerza de la gravedad.

3.2. Ecuación de la energía

La ecuación de la energía que modela la transferencia de calor en Ω , donde la frontera $\partial\Omega$ se divide en dos partes tal que $\partial\Omega_3$ representa la frontera tipo Dirichlet y $\partial\Omega_4$ representa la frontera tipo Newman, está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \bar{\alpha} \Delta T + \vec{u} \cdot \nabla T &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ T &= T_1 \text{ sobre } \partial\Omega_3 \times [0, t_f], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} &= Q \text{ sobre } \partial\Omega_4 \times [0, t_f], \\ T(\vec{x}, 0) &= T_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega,\end{aligned}$$

donde T es la temperatura del fluido, \vec{u} es el vector velocidad, T_1 es la condición de frontera tipo Dirichlet, Q es el flujo de calor (condición de frontera tipo Newman), T_0 es la temperatura inicial, t es el tiempo, \vec{x} es el vector de posición y $\bar{\alpha} = k/\rho c_p$ es la difusividad térmica, siendo k la conductividad térmica del fluido, ρ la densidad y c_p el calor específico a presión constante. La temperatura se resuelve en la malla de velocidad.

3.3. Descomposición de las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes y de energía mediante separación de operadores

Para resolver estas ecuaciones se puede descomponer el problema en cinco subproblemas, utilizando un esquema de partición del operador del tipo Marchuk-Yanenko [62]. En el primer subproblema se resuelve la presión mediante un problema de Stokes degenerado (viscosidad cero), dependiente del tiempo. En el segundo subproblema se resuelve el problema de advección para la velocidad mediante una ecuación de transporte convectivo dependiente del tiempo. En el tercer subproblema se resuelve el problema de advección para la temperatura mediante una ecuación de transporte convectivo dependiente del tiempo. En el cuarto subproblema se resuelve el problema de difusión para la temperatura mediante una ecuación elíptica dependiente del tiempo. Y en el quinto subproblema se resuelve el problema de difusión para la velocidad mediante una ecuación elíptica dependiente del tiempo. La solución se obtiene iterando estos subproblemas a través del tiempo. Suponiendo que se han obtenido soluciones aproximadas \vec{u}^n, p^n, T^n en el tiempo $t^n = n\Delta t$ de \vec{u}, p y T respectivamente, se calcula soluciones aproximadas $\vec{u}^{n+1}, p^{n+1}, T^{n+1}$ en el tiempo $t^n = (n+1)\Delta t$ mediante la solución de los siguientes subproblemas (las fracciones que aparecen en las variables de los siguientes subproblemas denotan un nombre que se le da a la variable para identificar a que subproblema corresponde).

Subproblema de Stokes degenerado

En este subproblema se calcula $\vec{u}^{n+1/3}$ y p^{n+1} mediante la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla P &= 0 \text{ en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \text{ sobre } \partial\Omega_1 \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u}(\vec{x}, t^n) &= \vec{u}^n(\vec{x}) \text{ en } \Omega.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Subproblema de advección para la velocidad

En este subproblema se calcula $\vec{u}^{n+2/3}$ mediante la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}^{n+1/3} \cdot \nabla \vec{u} &= 0 \text{ en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \text{ sobre } \bar{\Gamma} \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u}(\vec{x}, t^n) &= \vec{u}^{n+1/3}(\vec{x}) \text{ en } \Omega,\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde $\bar{\Gamma}$ es la parte de la frontera donde entra fluido, es decir: $\bar{\Gamma} = \{\vec{x} \in \partial\Omega_1, \vec{g}_1 \cdot \vec{n} < 0\}$.

Subproblema de advección para la temperatura

En este subproblema se calcula $T^{n+2/3}$ mediante la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}^{n+1/3} \cdot \nabla T &= 0 \text{ en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ T &= T_1 \text{ sobre } \bar{\Gamma} \times [t^n, t^{n+1}], \\ T(\vec{x}, t^n) &= T^n(\vec{x}) \text{ en } \Omega.\end{aligned}\tag{3.5}$$
$$T(\vec{x}, t^n) = T^n(\vec{x}) \text{ en } \Omega.\tag{3.6}$$

Subproblema de difusión para la temperatura

En este subproblema se calcula T^{n+1} mediante la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} - \bar{\alpha} \Delta T &= 0 \text{ en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ T &= T_1 \text{ sobre } \partial\Omega_3 \times [t^n, t^{n+1}], \\ \bar{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} &= Q \text{ sobre } \partial\Omega_4 \times [t^n, t^{n+1}],\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$T(\vec{x}, t^n) = T^{n+2/3}(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega.$$

Subproblema de difusión para la velocidad

En este subproblema se calcula \vec{u}^{n+1} mediante la solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} &= g\beta T \hat{j} \quad \text{en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [t^n, t^{n+1}], \\ \nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} &= \vec{g}_2 \quad \text{sobre } \partial\Omega_2 \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u}(\vec{x}, t^n) &= \vec{u}^{n+2/3}(\vec{x}) \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.4. Adimensionalización

Las ecuaciones de conservación se adimensionalizaron usando diferentes cantidades características, tales como: velocidad característica U_c , longitud característica L_c , temperatura característica T_c y flujo de calor característico Q_c , obteniéndose las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L_c}, & y^* &= \frac{y}{L_c}, & t^* &= \left(\frac{L_c}{U_c}\right) t, \\ u_1^* &= \frac{u_1}{U_c}, & u_2^* &= \frac{u_2}{U_c}, & p^* &= \frac{P}{U_c^2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$T^* = \frac{T - T_c}{Q_c L_c / k},$$

con estas cantidades característica se obtuvieron los siguientes parámetros adimensionales:

Número de Reynolds Re :

$$Re = \frac{U_c L_c}{\nu}. \tag{3.10}$$

Número de Rayleigh Ra_Q en función del flujo de calor:

$$Ra_Q = \frac{g\beta Q_c L_c^2}{k U_c^2}, \tag{3.11}$$

Número de Peclet Pe :

$$Pe = \frac{U_c L_c}{\bar{\alpha}}. \tag{3.12}$$

3.5. Método numérico

3.5.1. Formulación débil del problema

Para aproximar las variables adimensionales \vec{u} , p , T (por simplicidad el superíndice * se omite de aquí en adelante) mediante el método de elemento finito, se necesita obtener la formulación débil del problema 3.1-3.2. Para esto se introduce el siguiente espacio de funciones de prueba (ver [54], [55], [56] y [57]) de velocidad V_0 , temperatura W_0 y presión L_0 :

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \mid \vec{v} = \vec{0} \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_1 \right\}, \\ W_0 &= \left\{ \theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_3 \right\}, \\ L_0 &= \left\{ q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\vec{x} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

donde \vec{v} es la función de prueba para la velocidad, θ es la función de prueba para la temperatura y q es la función de prueba para la presión.

Para obtener la formulación débil del problema se integra sobre todo el dominio el producto de la ecuación de cantidad de movimiento con la función de prueba de velocidad y el producto de la ecuación de continuidad con la función de prueba de presión, obteniéndose:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{v} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \right] d\vec{x} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} d\vec{x} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} d\vec{x} \\ &= R_{aQ} \int_{\Omega} T \hat{j} \cdot \vec{v} d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_2} \vec{g}_2 \cdot \vec{v} d(\partial\Omega) \quad \forall \quad \vec{v} \in V_0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = 0 \quad \forall \quad q \in L_0, \quad (3.14)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{g}_1(\vec{x}) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_1 \times [0, t_f]. \quad (3.15)$$

De manera similar integrando sobre todo el dominio, el producto de la ecuación de la energía con la función de prueba de temperatura se obtiene:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \theta + (\vec{u} \cdot \nabla) T \theta \right] d\vec{x} + \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla \theta d\vec{x} = \int_{\partial\Omega_4} Q \theta d(\partial\Omega) \quad \forall \quad \theta \in W_0, \quad (3.16)$$

$$T(\vec{x}, t) = T_1(\vec{x}) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_3 \times [0, t_f]. \quad (3.17)$$

Estas ecuaciones se completan con las siguientes condiciones iniciales

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad (3.18)$$

$$T(\vec{x}, 0) = T_0(\vec{x}). \quad (3.19)$$

3.5.2. Aproximación con elemento finito

Para la aproximación de elemento finito se emplea un paso de discretización espacial h , una triangulación de elemento finito τ_h sobre $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, como se muestra en la figura 3.1, un espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ sobre $\bar{\Omega}$ y un espacio de polinomios \bar{P}_1 de dos variables de grado menor o igual a uno. También se construye otra triangulación de elemento finito $\tau_{h/2}$ sobre $\bar{\Omega}$, la cual es dos veces más fina que τ_h y se obtiene mediante la subdivisión de cada triángulo de τ_h en cuatro subtriángulos similares con los puntos medios de las aristas como se muestra en la figura 3.2.

Dados los siguientes conjuntos de funciones discretas:

$$V_h = \left\{ \vec{v}_h \mid \vec{v}_h \in [\mathcal{C}(\bar{\Omega})]^2, \quad \vec{v}_h|_{\tau} \in \bar{P}_1 \times \bar{P}_1, \quad \forall \tau \in \tau_{h/2} \right\},$$

$$L_h = \left\{ q_h \mid q_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad q_h|_{\tau} \in \bar{P}_1, \quad \forall \tau \in \tau_h \right\},$$

$$W_h = \left\{ \theta_h \mid \theta_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad \theta_h|_{\tau} \in \bar{P}_1, \quad \forall \tau \in \tau_{h/2} \right\},$$

se construyen los siguientes espacios de funciones de dimension finita que aproximan los espacios V_0 , L_0 y W_0 , respectivamente:

$$V_{0h} = \left\{ \vec{v}_h \in V_h \mid \vec{v}_h = \vec{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \right\},$$

$$L_{0h} = \left\{ q_h \in L_h \mid \int_{\Omega} q_h d\vec{x} = 0 \right\},$$

$$W_{0h} = \left\{ \theta_h \in W_h \mid \theta_h = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_3 \right\}.$$

Esta aproximación es conocida como aproximación de elemento finito Bercovier-Pironneau, la cual fue introducida en [58] para la formulación presión-velocidad del problema de Stokes. En las aproximaciones anteriores, los valores de velocidad y temperatura del fluido están localizados sobre los vértices de cada triángulo en $\tau_{h/2}$, mientras los valores de presión

están localizados en los vértices de cada triángulo en τ_h , como se muestra en la figura 3.3. El uso de los espacios dimensionales finitos anteriores conduce a la siguiente aproximación del problema 3.13-3.19.

Para $t > 0$, hallar $\vec{u}_h \in V_h$ con $\vec{u}_h = \vec{g}_{1h}$ sobre $\partial\Omega_1$, $p_h \in L_h$, $T_h \in W_h$ con $T_h = T_{1h}$ sobre $\partial\Omega_3$, tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} \cdot \vec{v} + (\vec{u}_h \cdot \nabla) \vec{u}_h \cdot \vec{v} \right] d\vec{x} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_h : \nabla \vec{v} d\vec{x} - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v} d\vec{x} \\ = R_{aQ} \int_{\Omega} T_h \hat{j} \cdot \vec{v} d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_2} \vec{g}_{2h} \cdot \vec{v} d(\partial\Omega) \quad \forall \quad \vec{v} \in V_{oh}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u}_h d\vec{x} = 0 \quad \forall \quad q \in L_{oh}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial T_h}{\partial t} \theta + (\vec{u}_h \cdot \nabla) T_h \theta \right] d\vec{x} + \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \nabla T_h \cdot \nabla \theta d\vec{x} \\ = \int_{\partial\Omega_4} T_{2h} \theta d(\partial\Omega) \quad \forall \quad \theta \in W_{oh}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\vec{u}_h(\vec{x}, 0) = \vec{u}_{0h}(\vec{x}), \quad T_h(\vec{x}, 0) = T_{0h}(\vec{x}). \quad (3.23)$$

En las formulaciones de elemento finito previas, \vec{g}_{1h} y \vec{g}_{2h} son aproximaciones de las funciones de frontera \vec{g}_1 y \vec{g}_2 , respectivamente. La aproximación \vec{g}_{1h} debe cumplir $\int_{\partial\Omega} \vec{g}_{1h} \cdot \vec{n} d(\partial\Omega) = 0$. De manera similar, \vec{u}_{0h} y T_{0h} son aproximaciones de las funciones de condición inicial \vec{u}_0 and T_0 .

3.5.3. Discretización en el tiempo mediante separación de operadores en forma variacional

Muchos de los resolvedores modernos de Navier-Stokes están basados en esquemas de separación de operadores (ver [59], [60] y [61]) para tratar en forma separada y óptima las diferentes dificultades matemáticas y físicas del problema. Este enfoque aplica al problema de valor inicial 3.20-3.23, el cual contiene cinco características numéricas, las cuales son:

- a) Condición de incompresibilidad en la ecuación 3.21 y presión desconocida asociada en la ecuación 3.20

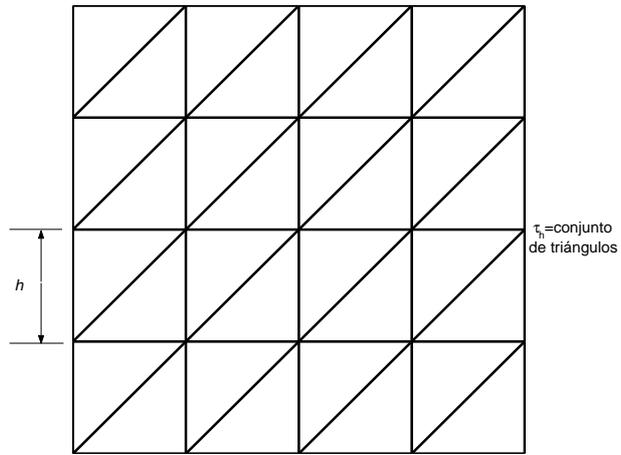


Figura 3.1: Triangulación τ_h con elemento finito del dominio Ω .

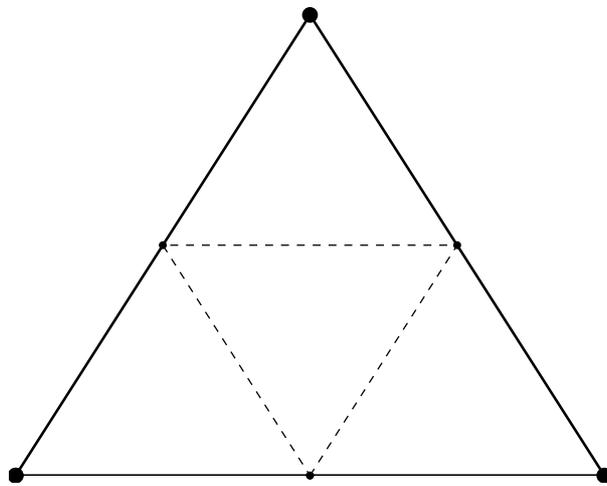


Figura 3.2: Subdivisión de un triángulo τ_h en $\tau_{h/2}$.

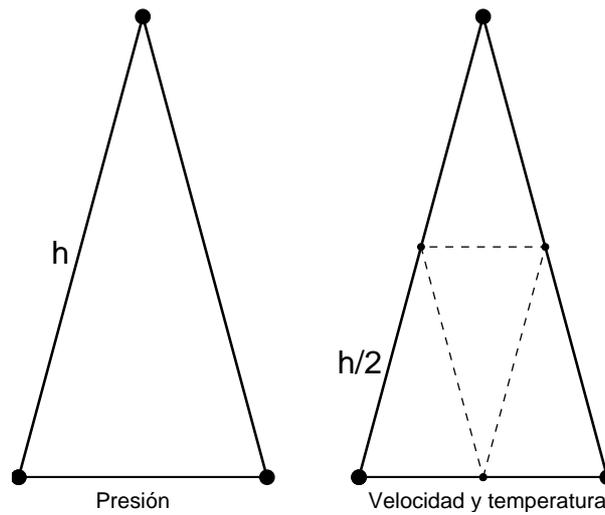


Figura 3.3: Nodos de presión, velocidad y temperatura en la aproximación de elemento finito.

- b) Un término de advección en la ecuación 3.20
- c) Un término de difusión en la ecuación 3.20
- d) Un término de advección en la ecuación 3.22
- e) Un término de difusión en la ecuación 3.22

Hay muchos métodos de separación de operadores que pueden ser empleados para resolver este tipo de problemas. Aquí se considera el esquema de paso fraccional del tipo Marchuk-Yanenko [62], este esquema simple sólo tiene una precisión de primer orden (ver [62]), pero su bajo orden es compensado por su simplicidad, robustez y estabilidad (ver [63] y [64]). Aplicando este esquema al problema 3.20-3.23, dado $\vec{u}^0 = \vec{u}_{0h}$, $T^0 = T_{0h}$ y suponiendo que se conoce \vec{u}^n , T^n para $n \geq 0$, se calcula \vec{u}^{n+1} y T^{n+1} mediante la solución de los siguientes subproblemas:

Subproblema de Stokes degenerado

Encontrar $\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} \in V_h$, con $\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} = \vec{g}_{1h}$ sobre $\partial\Omega_1$, y $p^{n+1} = p^{n+\frac{1}{3}} \in L_{0h}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} - \bar{u}^n}{\Delta t} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} - \int_{\Omega} p^{n+\frac{1}{3}} \nabla \cdot \vec{v} \, d\vec{x} = 0, \quad \forall \quad v \in V_{0h}, \quad (3.24)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \bar{u}^{n+\frac{1}{3}} \, d\vec{x} = 0, \quad \forall \quad q \in L_h. \quad (3.25)$$

Subproblema de advección para la velocidad

Encontrar $\bar{u}^{n+\frac{2}{3}} \in V_h$, con $\bar{u}^{n+\frac{2}{3}} = \vec{g}_{1h}$ sobre $\bar{\Gamma}$, del problema de advección:

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{u}^{n+\frac{2}{3}} - \bar{u}^{n-\frac{1}{3}}}{\Delta t} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} + \int_{\Omega} (\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} \cdot \nabla) \bar{u}^{n+\frac{2}{3}} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} = 0, \quad \forall \quad v \in V_{0h}^-, \quad (3.26)$$

donde $V_{0h}^- = \{\vec{v} \in V_h \mid \vec{v} = 0 \text{ sobre } \bar{\Gamma}\}$.

Subproblema de advección para la temperatura

Encontrar $T^{n+\frac{2}{3}} \in W_h$, con $T^{n+\frac{2}{3}} = T_{1h}$ sobre $\bar{\Gamma}$, del problema de advección:

$$\int_{\Omega} \frac{T^{n+\frac{2}{3}} - T^n}{\Delta t} \cdot \theta \, d\vec{x} + \int_{\Omega} (\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} \cdot \nabla) T^{n+\frac{2}{3}} \cdot \theta \, d\vec{x} = 0, \quad \forall \quad \theta \in W_{0h}^-, \quad (3.27)$$

donde $W_{0h}^- = \{\theta \in W_h \mid \theta = 0 \text{ sobre } \bar{\Gamma}\}$.

Subproblema de difusión para la temperatura

Encontrar $T^{n+1} \in W_h$ con $T^{n+1} = T_{1h}$ sobre $\partial\Omega_3$ tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{T^{n+1} - T^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta t} \theta \, d\vec{x} + \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \nabla T^{n+1} \cdot \nabla \theta \, d\vec{x} = \int_{\partial\Omega_4} Q_h \theta \, d(\partial\Omega), \quad \forall \quad \theta \in W_{0h}. \quad (3.28)$$

Subproblema de difusión para la velocidad

Encontrar $\bar{u}^{n+1} \in V_h$ con $\bar{u}^{n+1} = \vec{g}_{1h}$ sobre $\partial\Omega_1$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta t} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \bar{u}^{n+1} : \nabla \vec{v} \, d\vec{x} &= R_{aQ} \int_{\Omega} T^{n+1} \mathbf{j} \cdot \vec{v} \, d\vec{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega_2} \vec{g}_{2h} \cdot \vec{v} \, d(\partial\Omega), \quad \forall \quad \vec{v} \in V_{0h}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

El problema 3.24 se resolvió mediante un algoritmo tipo Uzawa/gradiente conjugado discutido con detalle en [57] y [65]. Los problemas 3.28 y 3.29 son sistemas elípticos cuya solución iterativa o directa es un problema clásico. En este trabajo los sistemas elípticos fueron resueltos por el método de gradiente conjugado adaptado para sistemas escasos [68]. Los problemas 3.26 y 3.27 son problemas de advección puros, en este trabajo se resolvieron utilizando el método de la ecuación de onda, ver [60], [66], [64] y [67]. A continuación se describen algunos detalles de estos algoritmos.

3.6. Solución del problema de Stokes

El problema de Stokes se resuelve por medio de un esquema iterativo tipo Uzawa/gradiente conjugado, ver [57] y [65]. El algoritmo para resolver el problema de Stokes generalizado está dado por los siguientes pasos:

1. Considerar que p^0 es la presión en el paso de tiempo previo.
2. Resolver para \vec{u}^0 , tomando $\bar{a} = 1/\Delta t$, el siguiente problema elíptico:

$$\begin{aligned} \bar{a}\vec{u}^0 - \nu\Delta\vec{u}^0 &= \vec{f} - \nabla p^0 && \text{en } \Omega, \\ \vec{u}^0 &= \vec{g}_1 && \text{en } \partial\Omega_1, \\ \nu\frac{\partial\vec{u}^0}{\partial\vec{n}} - \vec{n}p &= \vec{g}_2 && \text{en } \partial\Omega_2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

3. Calcular $r^0 = \nabla \cdot \vec{u}^0$.
4. Resolver para ϱ^0 , el siguiente problema de Poisson:

$$\begin{aligned} -\Delta\varrho^0 &= r^0 && \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\varrho^0}{\partial\vec{n}} &= 0 && \text{en } \partial\Omega_1, \\ \varrho^0 &= 0 && \text{en } \partial\Omega_2. \end{aligned} \tag{3.31}$$

5. Calcular $g^0 = \bar{a}\varrho^0 + \nu r^0$.

6. Considerar $w^0 = g^0$. Para $m \geq 0$, considerando que se conocen $p^m, \vec{u}^m, r^m, g^m, w^m$ encontrar $p^{m+1}, \vec{u}^{m+1}, r^{m+1}, g^{m+1}, w^{m+1}$, mediante los siguientes pasos:

7. Resolver para \vec{u}^m , el siguiente problema elíptico:

$$\begin{aligned} \bar{a}\vec{u}^m - \nu\Delta\vec{u}^m &= -\nabla w^m & \text{en } \Omega, \\ \vec{u}^m &= 0 & \text{en } \partial\Omega_1, \\ \nu\frac{\partial\vec{u}^m}{\partial\vec{n}} &= \vec{n}w^m & \text{en } \partial\Omega_2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

8. Calcular $\bar{r}^m = \nabla \cdot \vec{u}^m$.

9. Calcular:

$$\bar{\rho}_m = \frac{\int_{\Omega} r^m g^m d\Omega}{\int_{\Omega} \bar{r}^m w^m d\Omega}. \quad (3.33)$$

10. Calcular $p^{m+1} = p^m - \bar{\rho}_m w^m$, $\vec{u}^{m+1} = \vec{u}^m - \bar{\rho}_m \vec{u}^m$, $r^{m+1} = r^m - \bar{\rho}_m \bar{r}^m$.

11. Resolver para $\bar{\varrho}^m$, el siguiente problema de Poisson:

$$\begin{aligned} -\Delta\bar{\varrho}^m &= \bar{r}^m & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\bar{\varrho}^m}{\partial\vec{n}} &= 0 & \text{en } \partial\Omega_1, \\ \bar{\varrho}^m &= 0 & \text{en } \partial\Omega_2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

12. Calcular:

$$g^{m+1} = g^m - \bar{\rho}_m(\nu\bar{r}^m + \bar{a}\bar{\varrho}^m), \quad (3.35)$$

si

$$\frac{\int_{\Omega} r^{m+1} g^{m+1} d\Omega}{\int_{\Omega} r^0 g^0 d\Omega} \leq \epsilon, \quad (3.36)$$

tomar

$$p = p^{m+1} \quad y \quad u = u^{m+1}, \quad (3.37)$$

de lo contrario, continuar con los siguientes pasos:

13. Calcular:

$$\gamma_m = \frac{\int_{\Omega} r^{m+1} g^{m+1} d\Omega}{\int_{\Omega} r^m g^m d\Omega}, \quad (3.38)$$

14. Calcular:

$$w^{m+1} = g^{m+1} + \gamma_m w^m, \quad (3.39)$$

hacer $m = m + 1$ y regresar al paso 7

Para resolver el problema de Stokes degenerado se aplica el mismo procedimiento con viscosidad igual a cero, en este caso la matriz de los problemas elípticos degenerados en 3.30 y 3.32 es diagonal y por lo tanto los sistemas discretos resultantes se pueden resolver directamente.

3.7. Solución del problema de difusión

El problema de difusión consiste en una ecuación elíptica, una ecuación típica de este tipo está dada por la ecuación 3.30. Esta ecuación, para una componente u , se puede escribir como:

$$\bar{a}u - \nabla \cdot (\nu \nabla u) = f, \quad (3.40)$$

Al aplicar la formulación variacional a la ecuación anterior, la cual consiste en multiplicar por una función de prueba v e integrar sobre el dominio, se tiene:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}u - \nabla \cdot (\nu \nabla u)) v d\vec{x} = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \quad (3.41)$$

desarrollando el primer miembro, se tiene:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}uv - v \nabla \cdot (\nu \nabla u)) d\vec{x} = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \quad (3.42)$$

por la regla del producto para la diferenciación, se obtiene:

$$v \nabla \cdot (\nu \nabla u) = \nabla \cdot (v \nu \nabla u) - \nu \nabla u \cdot \nabla v, \quad (3.43)$$

así, la ecuación 3.42 se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}uv - \nabla \cdot (v \nu \nabla u) + \nu \nabla u \cdot \nabla v) d\vec{x} = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \quad (3.44)$$

aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nu \nabla u) d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} (v \nu \nabla u) \cdot \vec{n} d(\partial\Omega), \quad (3.45)$$

así, la ecuación 3.44, se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}uv + \nu \nabla u \cdot \nabla v) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} (v\nu \nabla u) \cdot \vec{n} d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \quad (3.46)$$

pero

$$\nabla u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad (3.47)$$

por lo tanto:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}uv + \nu \nabla u \cdot \nabla v) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} v\nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d(\partial\Omega) = \int_{\Omega} f v d\vec{x}, \quad (3.48)$$

reordenando términos, se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}uv + \nu \nabla u \cdot \nabla v) d\vec{x} = \int_{\Omega} f v d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v d(\partial\Omega), \quad (3.49)$$

Sustituyendo

$$v = \sum_{i=1}^{nn} v_i \psi_i \quad (3.50)$$

donde nn es el número de nodos, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\bar{a}u \left(\sum_{i=1}^{nn} v_i \psi_i \right) + \nu \nabla u \cdot \nabla \left(\sum_{i=1}^{nn} v_i \psi_i \right) \right) d\vec{x} &= \int_{\Omega} f \left(\sum_{i=1}^{nn} v_i \psi_i \right) d\vec{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \left(\sum_{i=1}^{nn} v_i \psi_i \right) d(\partial\Omega), \end{aligned} \quad (3.51)$$

factorizando, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{nn} v_i \left[\int_{\Omega} (\bar{a}u \psi_i + \nu \nabla u \cdot \nabla \psi_i) d\vec{x} = \int_{\Omega} f \psi_i d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \psi_i d(\partial\Omega) \right], \quad (3.52)$$

lo cual es equivalente a escribir:

$$\int_{\Omega} (\bar{a}u \psi_i + \nu \nabla u \cdot \nabla \psi_i) d\vec{x} = \int_{\Omega} f \psi_i d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \psi_i d(\partial\Omega) \quad i = 1, \dots, nn, \quad (3.53)$$

empleando la aproximación:

$$u = \sum_{j=1}^{nn} u_j \psi_j, \quad (3.54)$$

y reordenando se tiene:

$$\sum_{j=1}^{nn} \left[\int_{\Omega} (\bar{a} \psi_i \psi_j + \nu \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j) d\vec{x} \right] u_j = \int_{\Omega} f \psi_i d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \psi_i d(\partial\Omega) \quad i = 1, \dots, nn, \quad (3.55)$$

obteniéndose un sistema de ecuaciones lineales, de la forma:

$$\sum_{j=1}^{nn} k_{ij} u_j = f_i \quad i = 1, \dots, nn, \quad (3.56)$$

donde

$$k_{ij} = \int_{\Omega} (\bar{a} \psi_i \psi_j + \nu \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j) d\vec{x}, \quad (3.57)$$

y

$$f_i = \int_{\Omega} f \psi_i d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \nu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \psi_i d(\partial\Omega). \quad (3.58)$$

El sistema de ecuaciones lineales se resuelve aplicando el método de gradiente conjugado.

3.8. Solución del problema de advección

Para resolver este problema se aplica el método de la ecuación de onda, el cual consiste en expresar la ecuación de advección de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \varphi &= \varphi_1 \quad \text{sobre } \bar{\Gamma} \times [t^n, t^{n+1}], \\ \varphi(t^n) &= \varphi_0 \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (3.59)$$

donde φ es la variable sobre la que se aplica el problema de advección, con $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ y $\partial \vec{u} / \partial t = 0$ en $\Omega \times [t^n, t^{n+1}]$.

Dadas las propiedades del problema anterior se puede llegar a una forma equivalente del problema, obteniéndose la siguiente ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla \cdot ((\vec{u} \cdot \nabla \varphi) \vec{u}) &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [t^n, t^{n+1}], \\ \varphi &= \varphi_1 \quad \text{sobre } \partial \bar{\Omega}_1 \times [t^n, t^{n+1}], \\ \vec{u} \cdot \vec{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi \right) &= 0 \quad \text{sobre } (\partial\Omega - \bar{\Gamma}) \times [t^n, t^{n+1}], \\ \varphi(t^n) &= \varphi_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t^n) &= -\vec{u} \cdot \nabla \varphi_0 \quad \text{en } \Omega, \end{aligned} \quad (3.60)$$

aplicando formulación variacional, se obtiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} v d\vec{x} + \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla \varphi)(\vec{u} \cdot \nabla v) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega-\bar{\Gamma}} \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v d(\partial\Omega) = 0, \quad (3.61)$$

para resolver la ecuación anterior, se divide en \mathcal{S} subdivisiones el intervalo de tiempo Δt entre los tiempos (t^n, t^{n+1}) . Definiendo $\tau_1 = \frac{\Delta t}{\mathcal{S}}$, se tiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \approx \frac{\varphi^{s+1} - 2\varphi^s + \varphi^{s-1}}{\tau_1^2}, \quad (3.62)$$

y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \frac{\varphi^{s+1} - \varphi^{s-1}}{2\tau_1}, \quad (3.63)$$

sustituyendo 3.62 en la ecuación 3.61, se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi^{s+1} - 2\varphi^s + \varphi^{s-1}}{\tau_1^2} v d\vec{x} + \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla \varphi^s)(\vec{u} \cdot \nabla v) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega-\bar{\Gamma}} \vec{u} \cdot \vec{n} \frac{\partial \varphi^s}{\partial t} v d(\partial\Omega) = 0, \quad (3.64)$$

de las ecuaciones 3.63 y 3.64, se obtiene para $s = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^1 v d\vec{x} &= \int_{\Omega} \varphi^0 v d\vec{x} - \tau_1 \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla \varphi^0) v d\vec{x} \\ &\quad - \frac{\tau_1^2}{2} \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla \varphi^0)(\vec{u} \cdot \nabla v) d\vec{x} + \frac{\tau_1^2}{2} \int_{\partial\Omega-\bar{\Gamma}} (\vec{u} \cdot \vec{n})(\vec{u} \cdot \nabla \varphi^0) v d(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (3.65)$$

De la ecuación 3.64, se obtiene para $s = 1, 2, \dots, \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^{s+1} v d\vec{x} + \frac{\tau_1}{2} \int_{\partial\Omega-\bar{\Gamma}} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \varphi^{s+1} v d(\partial\Omega) &= 2 \int_{\Omega} \varphi^s v d\vec{x} - \int_{\Omega} \varphi^{s-1} v d\vec{x} \\ &\quad - \tau_1^2 \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla \varphi^s)(\vec{u} \cdot \nabla v) d\vec{x} \\ &\quad + \frac{\tau_1}{2} \int_{\partial\Omega-\bar{\Gamma}} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \varphi^{s-1} v d(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.9. Algoritmo de gradiente conjugado para resolver sistemas de ecuaciones lineales

En este trabajo se utilizó el algoritmo de gradiente conjugado para resolver los sistemas de ecuaciones lineales asociados a los problemas 3.30, 3.31, 3.32 y 3.34. Este algoritmo permite

obtener la solución de un conjunto de sistemas de ecuaciones lineales de la forma 3.56, es decir:

$$[K][\vec{U}] = [\vec{F}], \quad (3.67)$$

donde K es la matriz simétrica positiva definida común de coeficientes, \vec{F} es el conjunto de vectores del lado derecho y \vec{U} es el conjunto de vectores solución para cada sistema. Este algoritmo es útil para grandes sistemas escasos, es decir para sistemas donde sólo algunos elementos k_{ij} son diferentes de cero. Durante la aplicación del algoritmo sólo se realizan operaciones tales como la multiplicación de K con un vector o la multiplicación de la transpuesta de K con un vector, lo cual permite que en lugar de almacenar toda la matriz, sólo se tenga que almacenar aquellos elementos de la matriz diferentes de cero, ahorrándose espacio de memoria. Este algoritmo resuelve el sistema de ecuaciones 3.67, sólo cuando la matriz K es simétrica y positiva definida.

Para iniciar el algoritmo es necesario proporcionar un valor inicial \vec{U}_0 para el sistema y la exactitud o tolerancia ϵ con que se requiere obtener la solución. Con esta aproximación inicial de la solución, se calcula el residual inicial \vec{R}_0 de la siguiente manera:

$$\vec{R}_0 = \vec{F} - K\vec{U}_0, \quad (3.68)$$

y se considera que el conjunto de vectores de dirección inicial \vec{P}_0 son iguales a los valores del residual inicial, es decir:

$$\vec{P}_0 = \vec{R}_0, \quad (3.69)$$

posteriormente se calcula de manera iterativa nuevos valores de \vec{U}_i , \vec{R}_i , \vec{P}_i , para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, mediante el siguiente procedimiento:

1. Calcular:

$$\vec{W} = K\vec{P}_i, \quad (3.70)$$

2. Calcula el escalar de dirección:

$$a_i = \frac{(\vec{R}_i, \vec{R}_i)}{(\vec{P}_i, \vec{W})} \quad (3.71)$$

3. Calcula el nuevo valor de la solución:

$$\vec{U}_{i+1} = \vec{U}_i + a_i \vec{\mathcal{P}}_i \quad (3.72)$$

4. Calcula el nuevo residual:

$$\vec{R}_{i+1} = \vec{R}_i - a_i \vec{W} \quad (3.73)$$

si $(\vec{R}_{i+1}, \vec{R}_{i+1}) \leq \epsilon$ el algoritmo termina y se toma \vec{U}_{i+1} como la solución del sistema de ecuaciones, de lo contrario continuar con los siguientes pasos:

5. Calcula, el nuevo escalar de dirección:

$$b_i = \frac{(\vec{R}_{i+1}, \vec{R}_{i+1})}{(\vec{R}_i, \vec{R}_i)} \quad (3.74)$$

6. Calcula el nuevo vector de dirección:

$$\vec{\mathcal{P}}_{i+1} = \vec{R}_{i+1} + b_i \vec{\mathcal{P}}_i \quad (3.75)$$

regresar al paso 1.

3.10. Validación del código numérico

El código numérico desarrollado se validó comparándolo contra resultados numéricos obtenidos por otros investigadores, en primer lugar se validó el código que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y posteriormente se validó el código que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con la ecuación de la energía.

Para validar el código que resuelve la ecuación de Navier-Stokes se utilizó un problema de referencia, el cual consiste en una cavidad cuadrada que contiene un fluido cuyo flujo recircula por el deslizamiento de la pared superior, como se muestra en la figura 3.4. En este caso el fluido es viscoso, bidimensional, homogéneo, isotérmico e incompresible, por lo tanto este problema puede modelarse por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes; el dominio utilizado fue $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. No se aplicaron fuerzas de cuerpo, de modo que

$\vec{f} = 0$, y las condiciones de frontera se definieron de la siguiente manera:

$$\vec{g}_1(\vec{x}, t) = \begin{cases} (g_a(x), 0) & \text{sobre } \{\vec{x} = (x, 1), 0 < x < 1\}, \\ 0 & \text{sobre cualquier otra parte,} \end{cases} \quad (3.76)$$

donde

$$g_a(x) = \begin{cases} \sin(x\pi/2x_a) & \text{si } 0 < x \leq x_a, \\ 1 & \text{si } x_a \leq x \leq 1 - x_a, \\ \sin((1 - x)\pi/2x_a) & \text{si } 1 - x_a \leq x < 1, \end{cases} \quad (3.77)$$

en todas las simulaciones se uso $x_a = 1/32$.

El problema se resolvió numéricamente para $Re = 100, 400$ y 1000 con mallas estructuradas de $40 \times 40, 60 \times 60$ y 80×80 para el dominio de presión, respectivamente. Se consideró que el estado permanente se alcanzaba cuando el cambio relativo $\|\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n\|/\|\vec{u}^{n+1}\|$ fue menor que 10^{-8} . Las condiciones iniciales se tomaron como $\vec{u}(0) = 0$, los resultados muestran una buena aproximación cualitativa con respecto a los presentados por Pan *et al.* [69]. Ejemplos de estos resultados se muestran en las figuras 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10.

Para validar el código que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con la ecuación de la energía se utilizó un problema de referencia, el cual consiste en un flujo generado por flotación dentro de una cavidad cuadrada con paredes sujetas a un diferencial de temperatura, como se muestra en la fig. 3.11. En este caso el fluido es viscoso, bidimensional, homogéneo e incompresible, por lo tanto este problema puede modelarse por medio de las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes y la ecuación de la energía, el dominio utilizado fue $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y las condiciones de frontera se definieron de la siguiente manera:

paredes horizontales aisladas

$$Q(x, y = 0) = 0, \quad Q(x, y = 1) = 0, \quad (3.78)$$

paredes verticales a temperatura constante

$$T(x = 0, y) = 0, \quad T(x = 1, y) = 1. \quad (3.79)$$

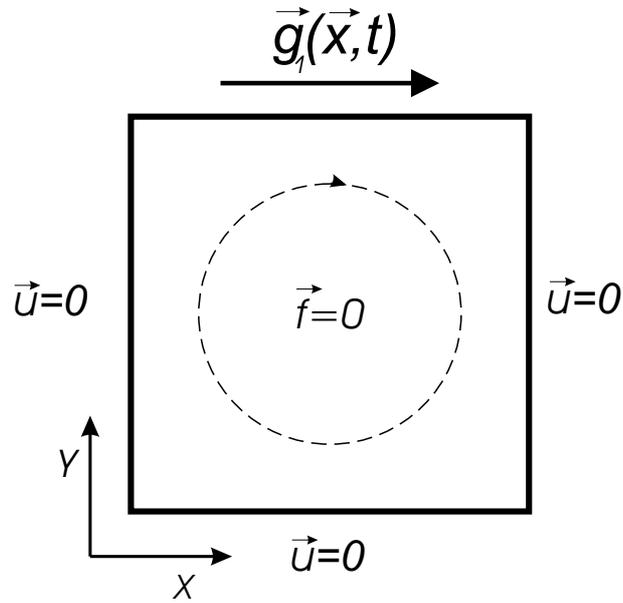


Figura 3.4: Cavity cuadrada utilizada para validar el programa que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes.

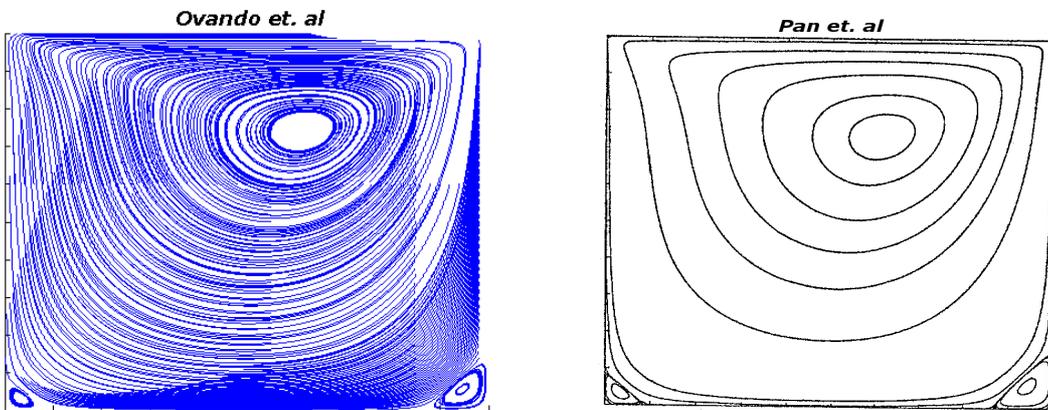


Figura 3.5: Comparación de las líneas de corriente obtenidas para $Re = 100$.

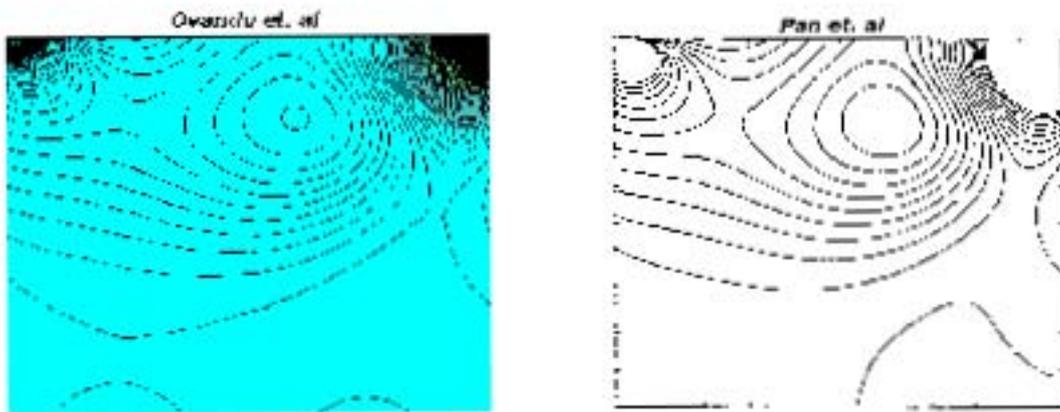


Figura 3.6: Comparación de los campos de presión obtenidos para $Re = 100$.

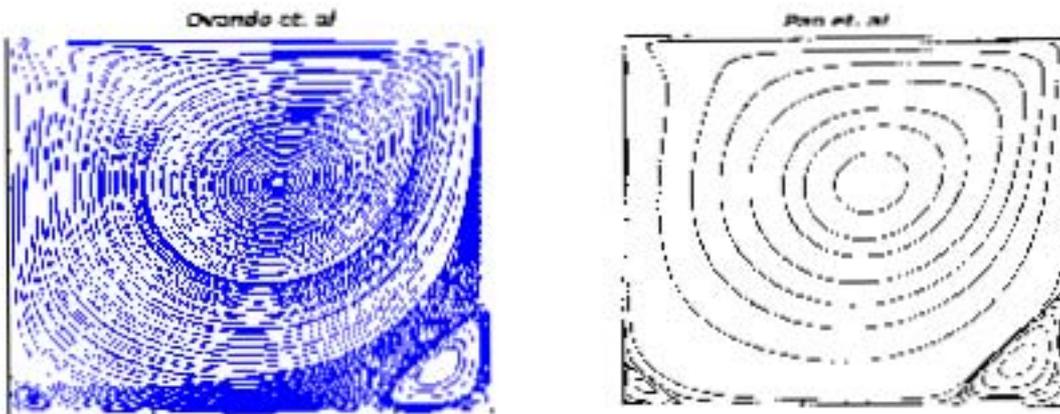


Figura 3.7: Comparación de las líneas de corriente obtenidas para $Re = 400$.

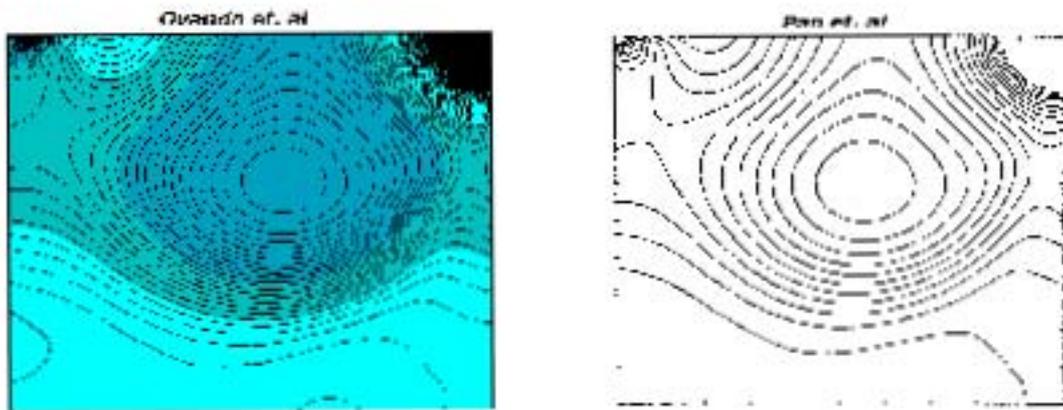


Figura 3.8: Comparación de los campos de presión obtenidos para $Re = 400$.

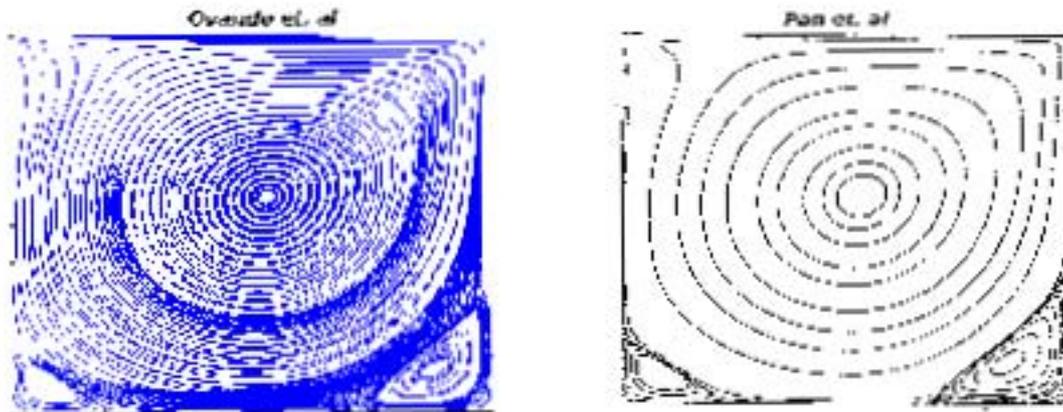


Figura 3.9: Comparación de las líneas de corriente obtenidas para $Re = 1000$.

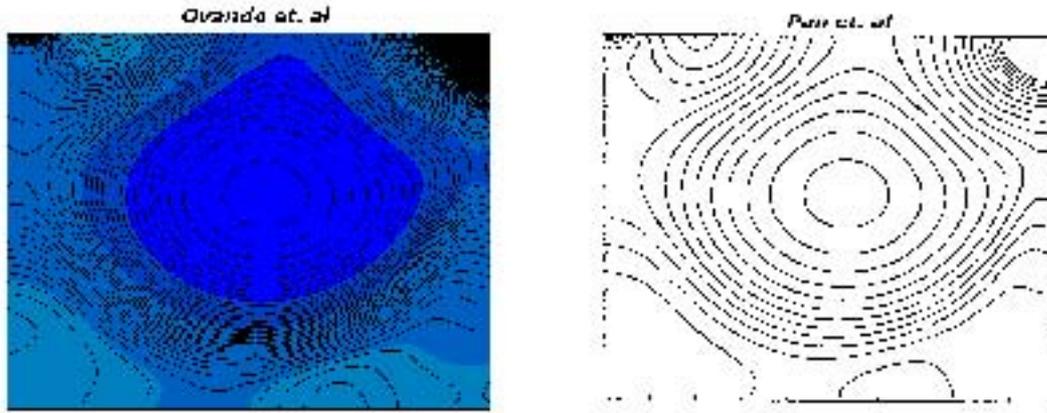


Figura 3.10: Comparación de los campos de presión obtenidos para $Re = 1000$.

Las componentes de velocidad en las superficies de la pared se consideraron como:

$$\begin{aligned}
 u_1(x = 0, y) &= u_2(x = 0, y) = 0 \\
 u_1(x = 1, y) &= u_2(x = 1, y) = 0 \\
 u_1(x, y = 0) &= u_2(x, y = 0) = 0 \\
 u_1(x, y = 1) &= u_2(x, y = 1) = 0
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

El problema se resolvió numéricamente para $Ra = 1 \times 10^3$, 1×10^4 y 1×10^5 con mallas estructuradas de 40×40 , 60×60 y 80×80 para el dominio de presión, respectivamente. En las simulaciones se usó $Pr = 0.71$ y se consideró que el estado permanente se alcanzaba cuando el cambio relativo $\|\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n\|/\|\vec{u}^{n+1}\|$ fue menor que 10^{-8} . Las condiciones iniciales se tomaron como $\vec{u}(0) = 0$ y $T(0) = 0$, los resultados muestran una buena aproximación cualitativa con respecto a los presentados por De Vahl [70]. Ejemplos de estos resultados se muestran en las figuras 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17.

El código numérico para flujos incompresibles desarrollado en esta tesis se caracteriza por ser robusto, estable y eficiente, el cual se puede utilizar para simular flujos en diversas geometrías y bajo diferentes condiciones, como por ejemplo flujos oscilatorios, los cuales también están presentes en los motores termoacústicos. En el siguiente capítulo se presenta

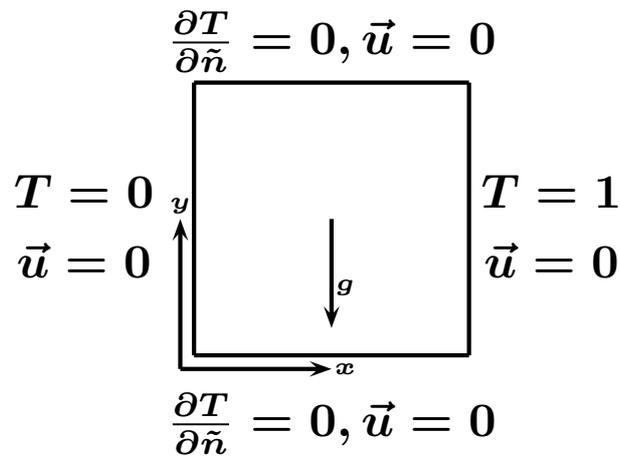


Figura 3.11: Cavity cuadrada utilizada para validar el programa que resuelve las ecuaciones acopladas de Navier-Stokes y la energía.

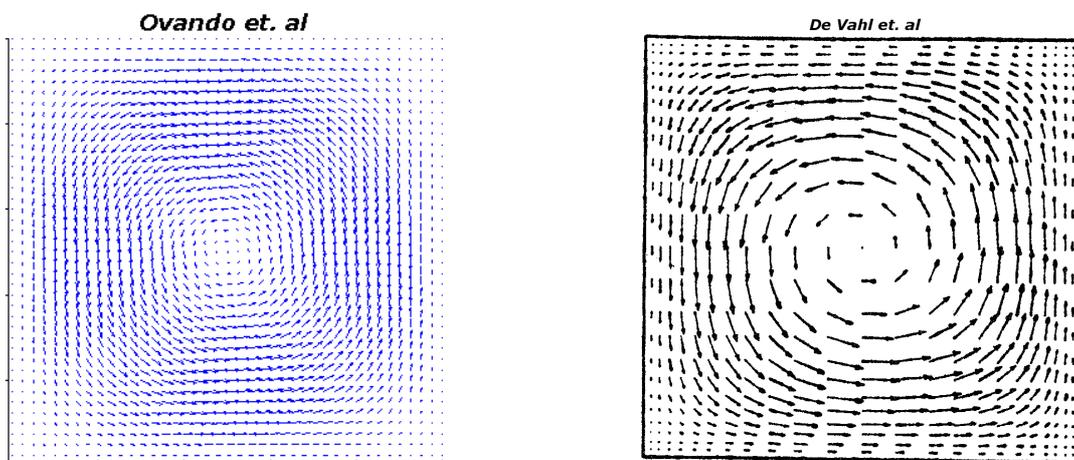


Figura 3.12: Comparación de los campos de velocidad obtenidos para $Ra = 1 \times 10^3$.

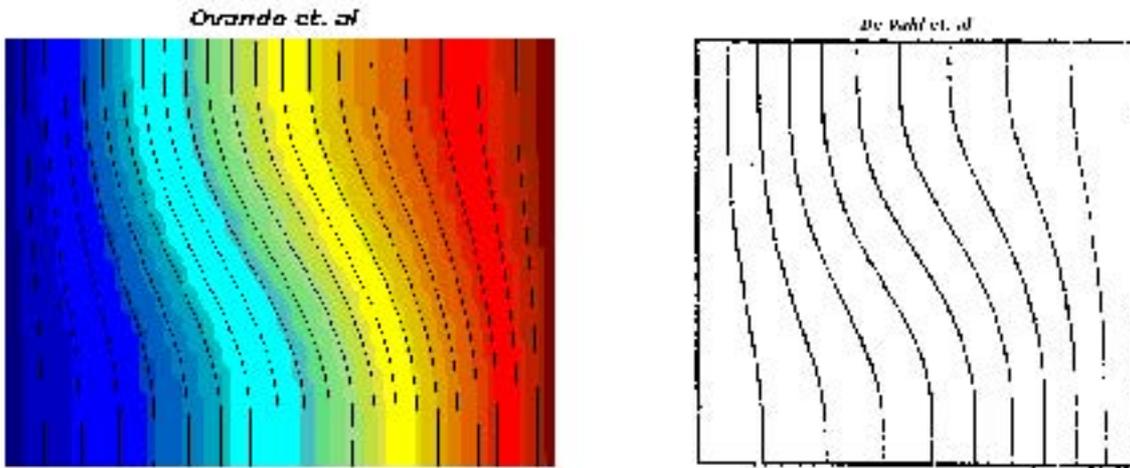


Figura 3.13: Comparación de los campos de temperatura obtenidos para $Ra = 1 \times 10^3$.

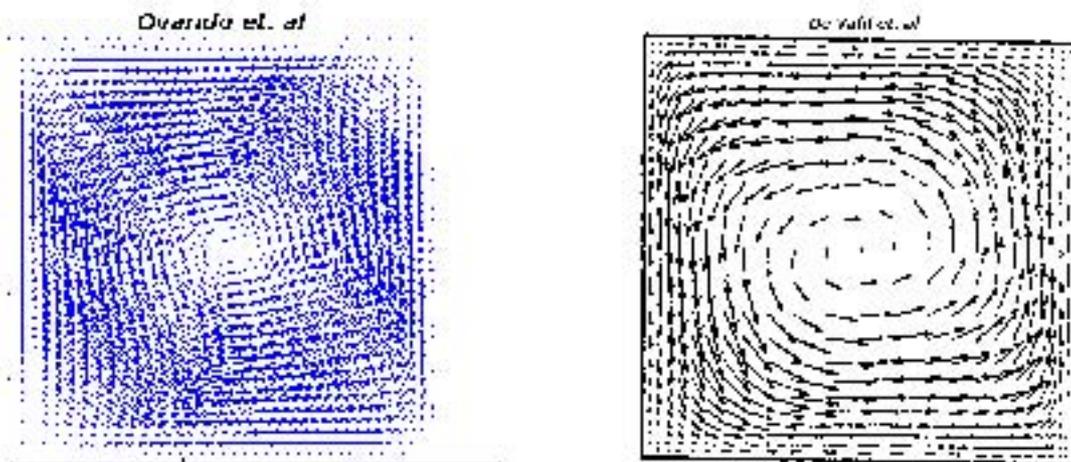


Figura 3.14: Comparación de los campos de velocidad obtenidos para $Ra = 1 \times 10^4$.

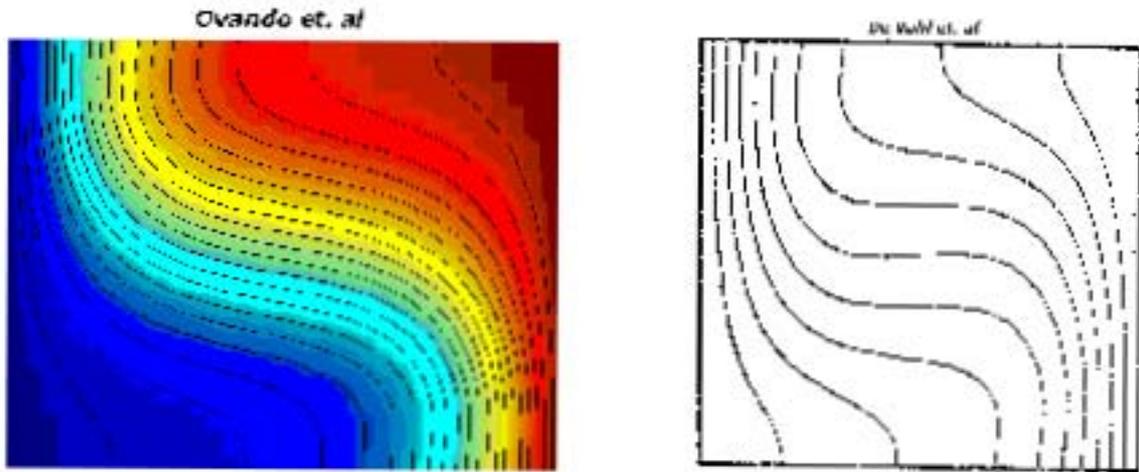


Figura 3.15: Comparación de los campos de temperatura obtenidos para $Ra = 1 \times 10^4$.

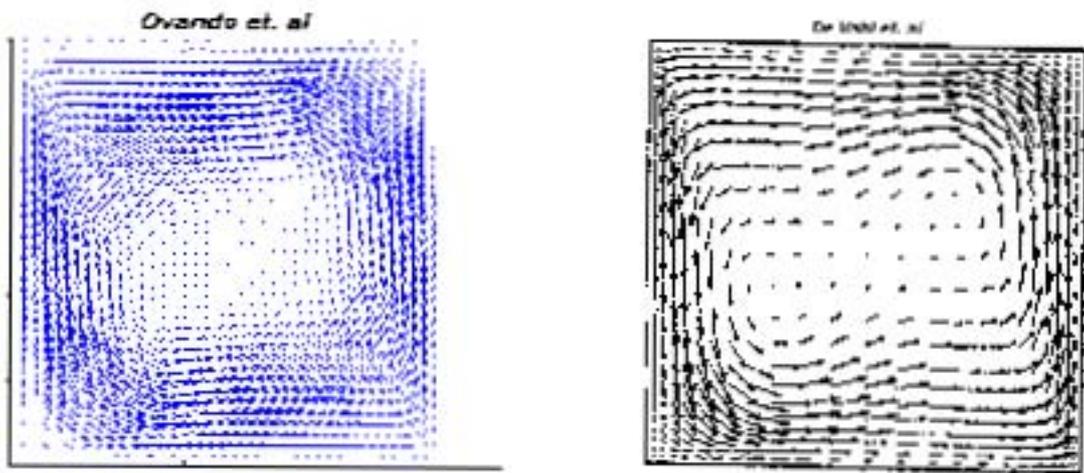


Figura 3.16: Comparación de los campos de velocidad obtenidos para $Ra = 1 \times 10^5$.

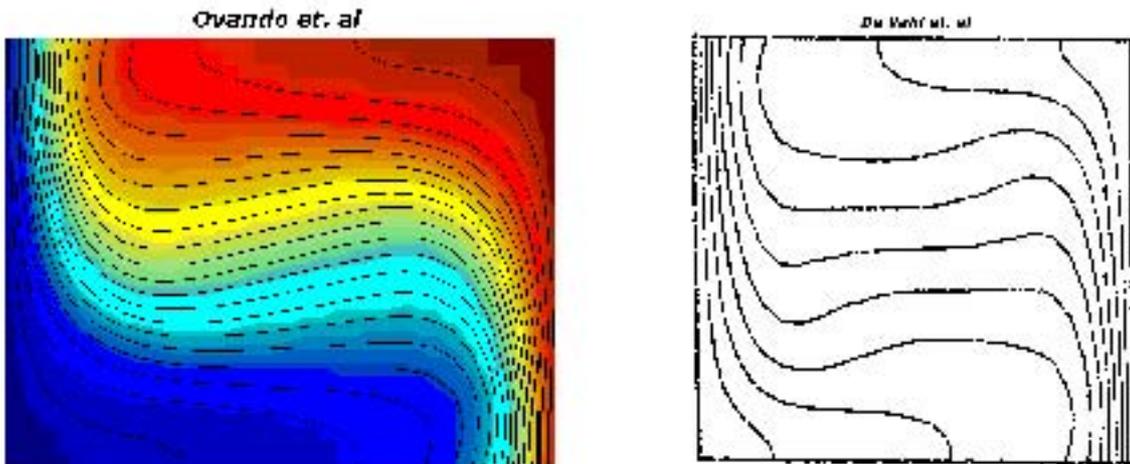


Figura 3.17: Comparación de los campos de temperatura obtenidos para $Ra = 1 \times 10^5$.

la simulación de un problema enfocado a flujos oscilatorios y en el apéndice D se encuentra una guía para el desarrollo de un código numérico para flujo compresible. En ésta se presenta la estrategia numérica que permite la simulación de flujos viscosos isentrópicos compresibles [57], la cual se basa en aplicar el método de perturbación a orden n sobre las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos compresibles, lo que transforma el problema en n ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible, que se pueden resolver utilizando el método de elemento finito con el esquema de separación de operadores desarrollado en esta tesis.

Capítulo 4

Flujo en una cavidad oscilatoria isotérmica

4.1. Antecedentes generales

El problema de un pistón moviéndose en un cilindro se ha estudiado teórica y experimentalmente, no sólo porque está presente en muchas situaciones prácticas, como bombas de agua, motores de combustión interna (Lee and Hochgreb [76]), dispositivos con flujos oscilatorios (Castrejon *et al.* [74]), dispositivos con generación de vórtices (Glazer [75] y Allen y Auvity [71]), y problemas relacionados con el flujo de sangre cerca de válvulas (Bellhouse and Talbot [72]), sino porque también es de fundamental importancia para el estudio de la dinámica de fluidos. Se han hecho estudios tanto moviendo la pared del cilindro como moviendo el pistón; el flujo en la esquina es equivalente en ambos casos si $\frac{\sqrt{\nu t}}{U_w T} \ll 1$, donde ν es la viscosidad cinemática, t es el tiempo, U_w es la velocidad instantánea del pistón, y T es el periodo (Tabaczynski *et al.* [78]). El trabajo pionero experimental de Tabaczynski *et al.* [78] muestra un flujo sin vórtice conforme la pared del cilindro se aleja del pistón y un vórtice en espiral entre la cara del pistón y la interfase de la pared del cilindro conforme la pared del cilindro se mueve hacia el pistón, tanto para velocidades de pared constante como oscilatorias.

El flujo cerca de una esquina debido al movimiento de una placa que se desliza a velocidad constante sobre otra fue tratado analíticamente por Batchelor [73]. En esta región los gradientes de velocidad son grandes, existiendo discontinuidades en el campo de velocidades en la unión del pistón que se mueve respecto a la pared. En esta región las fuerzas viscosas son más grandes que las inerciales. El estudio de Batchelor [73] implica que la distancia r desde la esquina hasta donde los efectos viscosos son apreciables es del orden de $r \ll \nu/U_w$. Experimentos de Allen y Chong [79] han demostrado que la validez de esta solución analítica es significativamente mayor que ν/U_w .

El estudio del flujo de vórtices ha tenido un interés especial. Hughes y Gerrard [81] investigaron el flujo cerca de un pistón en movimiento y el flujo cerca de una superficie libre de un fluido contenido dentro de un tubo, ambos comenzando desde el reposo. Para el flujo cerca de una superficie libre, comenzando desde el reposo, con una pequeña transición a velocidad constante, encontraron un número de Reynolds crítico, basado en la velocidad de la superficie libre y el diámetro del tubo, de alrededor de 450, arriba del cual se generó un vórtice justo abajo de la superficie. Para números de Reynolds más altos (2500) se observó más de un vórtice. Ellos encontraron dificultad para determinar el número de Reynold crítico para la formación de los vórtices con el pistón y sólo presentan el caso de $Re = 525$, donde observaron la formación de un vórtice. Allen y Chong [79] encontraron experimentalmente que para números de Reynolds mayores de 400 se presenta el enrollamiento de vórtices. Las simulaciones numéricas en dos dimensiones (2D) de Gerrard [80], reprodujeron la formación de vórtices sólo mediante la aplicación de perturbación aleatoria al flujo durante cada paso de tiempo. Ellos sostuvieron que de manera similar con la transición a turbulencia en capas límites, las perturbaciones axisimétricas pequeñas no se amplifican en una simulación 2D, de modo que tuvieron que introducir artificialmente una perturbación aleatoria; la precisión de sus soluciones dependía del paso espacial de la malla y del paso de tiempo. Gerrard y Hughes [81] señalaron que la formación de un vórtice se da al inicio de cada carrera hacia adelante del pistón respecto al cilindro. El mecanismo para la formación de este vórtice es la remoción de la capa límite de la pared del cilindro enfrente del avance del pistón (Allen y Chong [79]).

Tabaczynski *et al.* [78] y Allen y Chong [79] estudiaron la dimensión del vórtice cuando la pared lateral se mueve hacia el pistón. Los primeros autores consideraron una velocidad de pared constante y senoidal mientras Allen y Chong [79] observaron el fenómeno para velocidad constante y exponencial. Los estudios analíticos y numéricos sobre flujos incompresibles fueron hechos considerando condiciones isotérmicas.

Tabaczynski *et al.* [78] investigaron la transición a turbulencia en un vórtice, encontrando dos números de Reynolds críticos, basados en la velocidad instantánea del pistón y la carrera, el primero de alrededor de 12,500 abajo del cual el vórtice es estable, y el segundo de 17,500 arriba del cual el vórtice es completamente turbulento.

En esta tesis, se analiza la formación de vórtices en toda la cavidad, mientras que en estudios previos sólo se analizó la formación de vórtices en una esquina, ver [78] y [79]. El rango estudiado fue $50 \leq Re \leq 1000$ y $0.2 \leq Y \leq 0.8$, donde $Y = Y_w/D$, ver sección 4.2. El trabajo experimental hecho por Tabaczynski *et al.* [78] para paredes con velocidad senoidal fue para $7.2 \times 10^3 \leq Re \leq 97.8 \times 10^3$ y para $0.44 \leq Y \leq 0.58$. Por otra parte, el trabajo numérico hecho por Gerrard [80] fue para números de Reynolds de 525 y 1200, y tuvo que aplicar perturbación numérica para reproducir la formación de vórtices.

4.2. Formulación del problema

4.2.1. Descripción física y geométrica

Las simulaciones numéricas de la cavidad oscilatoria se realizaron en un dominio bidimensional con una razón de 1.5 entre las dimensiones vertical y horizontal como se muestra en la figura 4.1. Las paredes verticales se mueven simultáneamente con una velocidad oscilatoria mientras las paredes horizontales son los pistones fijos, similar al arreglo experimental usado por Tabaczynski *et al.* [78]. Para agua como fluido de trabajo, las dimensiones vertical y horizontal son $H = 7.5 \times 10^{-2}m$ y $D = 5.0 \times 10^{-2}m$, respectivamente.

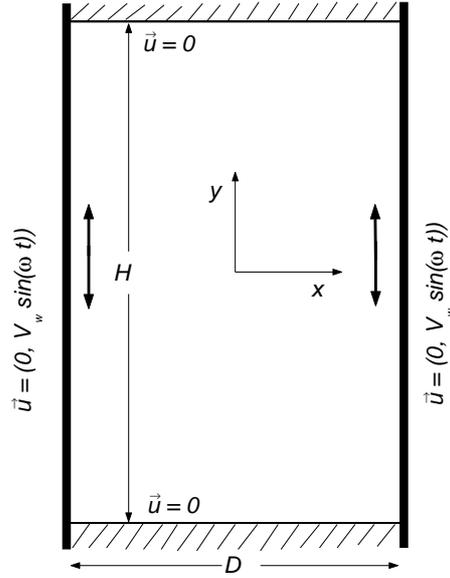


Figura 4.1: Geometría y condiciones de frontera de la cavidad con paredes verticales deslizantes.

4.2.2. Ecuaciones de conservación

Considerando una región bidimensional Ω , donde se analiza el flujo de la cavidad, las ecuaciones de conservación que describen el flujo oscilatorio de un fluido incompresible en esta región son las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla P &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el vector velocidad, siendo u_1 y u_2 las componentes de velocidad transversal y axial respectivamente; ν es la viscosidad cinemática, t es el tiempo y t_f es el tiempo final. $P = p/\rho$ donde p es la presión y ρ es la densidad.

Las condiciones de frontera de la cavidad oscilatoria son:

$$\begin{aligned}
u_1(x = -D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = -D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\
u_1(x = D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\
u_1(x, y = -H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = -H/2, t) &= 0, \\
u_1(x, y = H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = H/2, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}
\vec{u}(x, y, t = 0) &= 0, \\
p(x, y, t = 0) &= 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

V_W es la amplitud de la velocidad de oscilación de las paredes verticales dada por $V_W = Y_W \omega$, donde ω es la frecuencia y Y_W es la amplitud del desplazamiento. En este problema se consideraron: longitud característica $L_c = D$ y velocidad característica $U_c = V_W$. Todos los resultados reportados en este capítulo corresponden al estado permanente que se obtiene después de 30 ciclos.

4.3. Análisis de convergencia de malla

Las simulaciones fueron hechas con tres diferentes mallas para todos los casos, la primera fue una malla equidistante con un paso espacial constante en la dirección transversal Δx y un paso espacial constante en la dirección axial Δy . La segunda fue una malla graduada, tal que el refinamiento en la esquina del dominio fue $1/3\Delta x$ y $1/3\Delta y$. La tercera fue una malla graduada, tal que el refinamiento en la esquina del dominio fue $1/5\Delta x$ y $1/5\Delta y$. Para $Re = 50$ se usó una malla 41×51 , para $Re = 500$ se usó una de 81×101 y para $Re = 1000$ se usó una de 101×121 en el dominio de presión. Analizando la convergencia de las tres mallas se pudieron observar importantes diferencias entre los resultados obtenidos con la malla graduada de $1/3\Delta x$ y la malla equidistante, sin embargo los valores obtenidos con las mallas graduadas de $1/5\Delta x$ y $1/3\Delta x$ fueron prácticamente los mismos, este comportamiento se observó para todos los casos. En la figura 4.2, se puede observar un ejemplo de convergencia de malla. La malla graduada fue generada tal que el paso espacial se incrementó desde las esquinas hacia el centro en ambas direcciones.

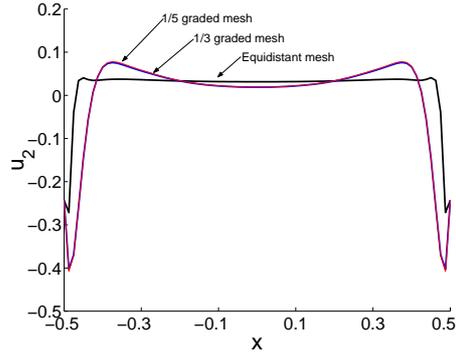


Figura 4.2: Perfil de velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x . Para las mallas equidistantes, 1/3 graduada y 1/5 graduada, para $Re = 500$ y $Y = 0.4$ in $y = 0.15$.

En la dirección transversal se usó la siguiente relación de graduación:

$$x_k = x_{k-1} + r_x^{k-2} \epsilon_x \quad \forall 2 \leq k \leq nc \quad \text{y} \quad x_{nc+j} = D - x_{nc-j} \quad \forall 1 \leq j \leq nc - 1$$

siendo r_x la razón común de incremento, y

$$\epsilon_x = (r_x - 1)/(r_x^{nl} - 1)(D/2),$$

donde $nl =$ número de elementos en la dirección- $x/2$, $nc = (n - 1)/2 + 1$ con $n =$ número de nodos en la dirección- x . En la dirección axial se usó una relación de graduación similar a la anterior.

El mayor error relativo entre las mallas graduadas de $1/5\Delta x$ y $1/3\Delta x$, de todos los casos en más del 95 % del dominio fue menor que 1.5 % para la velocidad axial y 3 % para la velocidad transversal, el error relativo se incrementa en la zona de las esquinas. En la figura 4.3, se muestra el mayor error relativo para la velocidad axial.

4.4. Resultados

Se hicieron simulaciones para nueve casos con $Re = V_W D/\nu = Y_W \omega D/\nu = 50, 500$ y 1000 , y diferentes relaciones $Y = Y_W/D = 0.2, 0.4$ y 0.8 , describiéndose los campos de velocidad

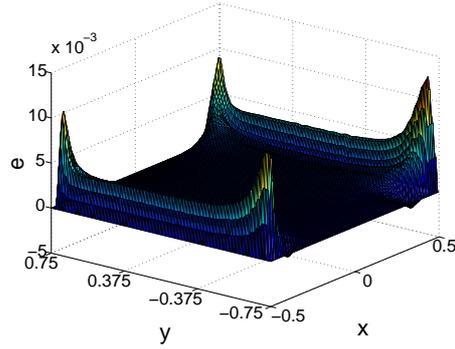


Figura 4.3: Error relativo para velocidad axial como una función de la posición (x, y) entre las mallas graduadas de $1/5\Delta x$ y $1/3\Delta x$, para $Re = 500$ y $Y = 0.4$.

y las áreas de vórtices, aplicando el criterio de Jeong-Hussain [82], el cual define un vórtice en un flujo incompresible en términos de los eigenvalores del tensor $\mathbf{S}^2 + \mathbf{A}^2$, donde \mathbf{S} y \mathbf{A} son respectivamente las partes simétrica y antisimétrica del tensor de gradientes de velocidad. En flujos planos, el núcleo de un vórtice se define como el área donde el eigenvalor de $\mathbf{S}^2 + \mathbf{A}^2$ es negativo. La razón física de este criterio es que en un vórtice la presión tiene un mínimo local debido a los gradientes de velocidad.

Para tener una referencia conveniente para interpretar la dinámica del flujo, la figura 4.4 enfatiza que la velocidad y el desplazamiento de las paredes verticales están un cuarto de ciclo fuera de fase. Se observa por ejemplo que para $\phi = 0$, la velocidad de las paredes verticales de la cavidad es cero mientras el desplazamiento es máximo negativo y para $\phi = \pi/2$, la velocidad de las paredes verticales de la cavidad es máxima positiva mientras el desplazamiento es cero. Debido a la simetría del flujo, se pueden describir las características más importantes del flujo en estas dos fases.

A continuación se presenta un resumen de los resultados generales para los nueve casos estudiados. Como era de esperarse de las ecuaciones de conservación y condiciones de frontera, los campos de velocidad y consecuentemente el área de los vórtices para todos los casos, (excepto para $Re = 1000$ y $Y = 0.8$, ver sección 4.4.3), muestran las siguientes simetrías:

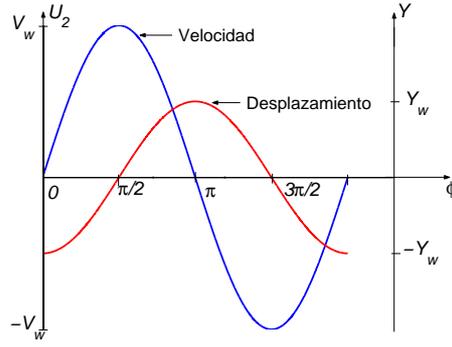


Figura 4.4: Velocidad y desplazamiento de las paredes verticales como una función de la fase.

a) simetría axial

$$u_1(x, y, \phi) = -u_1(-x, y, \phi), \quad u_2(x, y, \phi) = u_2(-x, y, \phi)$$

y

b) simetría cíclica

$$u_1(x, y, \phi) = u_1(x, -y, \phi + \pi), \quad u_2(x, y, \phi) = -u_2(x, -y, \phi + \pi).$$

Para las condiciones estudiadas, el flujo producido por dos paredes opuestas oscilatorias en un canal con una relación de aspecto finito genera vórtices debido a dos mecanismos. El primero se debe al efecto combinado de la inyección de vorticidad dentro del fluido debido al movimiento cortante de las fronteras móviles, el defasamiento con respecto a las paredes del movimiento del fluido al interior de la cavidad y la existencia de las paredes fijas; los vórtices generados por este mecanismo están cercanos a las paredes móviles. Este mecanismo es etiquetado con M1 para su referencia. El segundo mecanismo de generación de vórtices es el cambio abrupto en la dirección del flujo conforme el fluido puesto en movimiento por las paredes móviles llega a las esquinas. Este segundo mecanismo se etiqueta con M2. Los vórtices generados por este mecanismo se separan de las paredes. El principal proceso físico en este caso consiste en el enrollamiento de los vórtices y ha sido discutido por Tabaczynski *et al.* [78] y Allen y Chong [79] para números de Reynolds grandes. Los dos mecanismos

están presentes en todos los casos analizados, pudiéndose generar vórtices por ambos procesos, pero el dominio de uno u otro, depende de la fase de oscilación y se manifiesta de diferentes maneras en diferentes regiones de la cavidad. Los vórtices generados por M1 se pueden observar durante todo el ciclo y están localizadas en regiones cerca de las paredes en movimiento. En contraste, M2 genera vórtices cerca de las paredes horizontales cuando el fluido choca contra éstas, observándose en fases específicas. Por ejemplo, se generan vórtices mediante M2 cerca de la pared horizontal inferior cuando $\phi = 0$ y cerca de la pared horizontal superior cuando $\phi = \pi$. Cabe señalar que en los casos analizados no se presenta desprendimiento de la capa límite ya que el número de Reynolds es menor a 2300 [83].

4.4.1. Caso $Re = 50$

La figura 4.5 muestra los campos de velocidad y el área de vórtices para $Re = 50$ y $Y = 0.2$, para dos fases de la oscilación. En $\phi = 0$ cuando la velocidad de las paredes es cero y están en su posición más baja, el campo de velocidad indica que el flujo se organiza en dos vórtices estirados en la dirección vertical formados por el movimiento hacia abajo del fluido en las capas límites cerca de las paredes verticales que da vuelta en el fondo y forma un flujo central hacia arriba. En esta fase el vórtice de la izquierda tiene un sentido antihorario (+), mientras el vórtice de la derecha tiene un sentido horario (-). La geometría de los vórtices es confirmada por el criterio de Jeong-Hussain. El área de vórtices indica que los vórtices son más gruesos en el fondo debido a la formación de vórtices generados por los dos mecanismos descritos en la sección previa (M1 y M2). Este flujo origina puntos silla en los centros de las paredes horizontales y se pueden identificar dos puntos elípticos en $x = \pm 0.32$, $y = 0$ que indican los centros de los vórtices.

El flujo en $\phi = \pi/2$ muestra regiones delgadas ascendentes cerca de las paredes móviles, las cuales tienen máxima velocidad en esta fase del ciclo. El fluido retornante que desciende se confina a regiones cercanas a las paredes verticales y en el centro de la cavidad el fluido está prácticamente en reposo, en esta fase el vórtice de la izquierda tiene un sentido horario (-), mientras el vórtice de la derecha tiene un sentido antihorario (+). Los vórtices en esta fase del ciclo son generados por el mecanismo M1. Esto se observa incluso cuando la ve-

locidad de la pared es máxima pero debido a la inercia, el fluido no ha adquirido una gran velocidad vertical. Los vórtices generados por el flujo en esta fase, muestran un espesor casi constante y están localizados cerca de las paredes en movimiento, como se muestra en la figura 4.5. Como era de esperarse, los vórtices están localizados alrededor de puntos elípticos y lejos de puntos de silla. La extensión vertical de los vórtices permanece casi constante a través del ciclo, pero el grosor pulsa con un máximo en $\phi = 0, \pi$ y un mínimo en $\phi = \pi/2, 3\pi/2$.

El efecto de incrementar la amplitud de desplazamiento de la pared (Y) se ilustra en la figura 4.6, donde se presentan los campos de velocidad y los vórtices para $Re = 50$ y $Y = 0.4$. La diferencia más notable entre los flujos de las figuras 4.5 y 4.6 es que el grosor de las estructuras de vórtices se incrementa conforme la amplitud se incrementa. Esto es de esperarse, ya que las paredes móviles constituyen una fuente de vorticidad. Conforme la amplitud de la oscilación se incrementa a $Y = 0.8$, el grosor de los vórtices se incrementa aún más, para este caso los vórtices cubren por lo menos 50% del área total. Esto se ilustra en la figura 4.7 donde se muestran los campos de velocidad y el área cubierta por los vórtices. Para los tres casos analizados con $Re = 50$ se observa que en la fase $\pi = 0$ los vórtices generados por los mecanismos M1 y M2 se unen, mientras que para $\phi = \pi/2$ los vórtices son generados por el mecanismo M1.

Para evaluar la influencia de las paredes fijas superior e inferior en la dinámica del flujo, se analizaron los perfiles de velocidad axial teóricos u_2 como función de la coordenada transversal para diversas fases en un ciclo, para una cavidad con paredes verticales infinitas. El perfil de velocidad como una función de la coordenada transversal en un canal infinitamente largo con paredes oscilatorias (segundo problema de Stokes, ver [9]) está dado por:

$$u(x, t) = BV_W \cos \omega t + CV_W \sin \omega t, \quad (4.4)$$

donde

$$B = \left[\frac{\cos l\beta_s \cos x\beta_s \cosh l\beta_s \cosh x\beta_s + \sin l\beta_s \sin x\beta_s \sinh l\beta_s \sinh x\beta_s}{(\cos l\beta_s \cosh l\beta_s)^2 + (\sin l\beta_s \sinh l\beta_s)^2} \right],$$

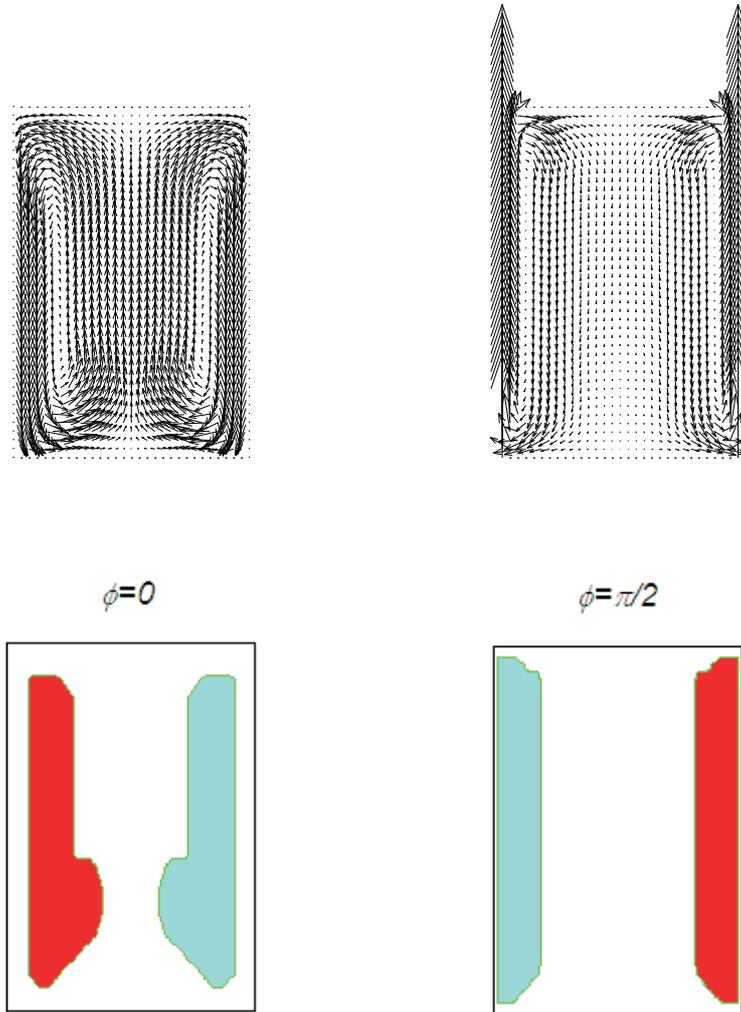


Figura 4.5: Campo de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 50$ y $Y = 0.2$.

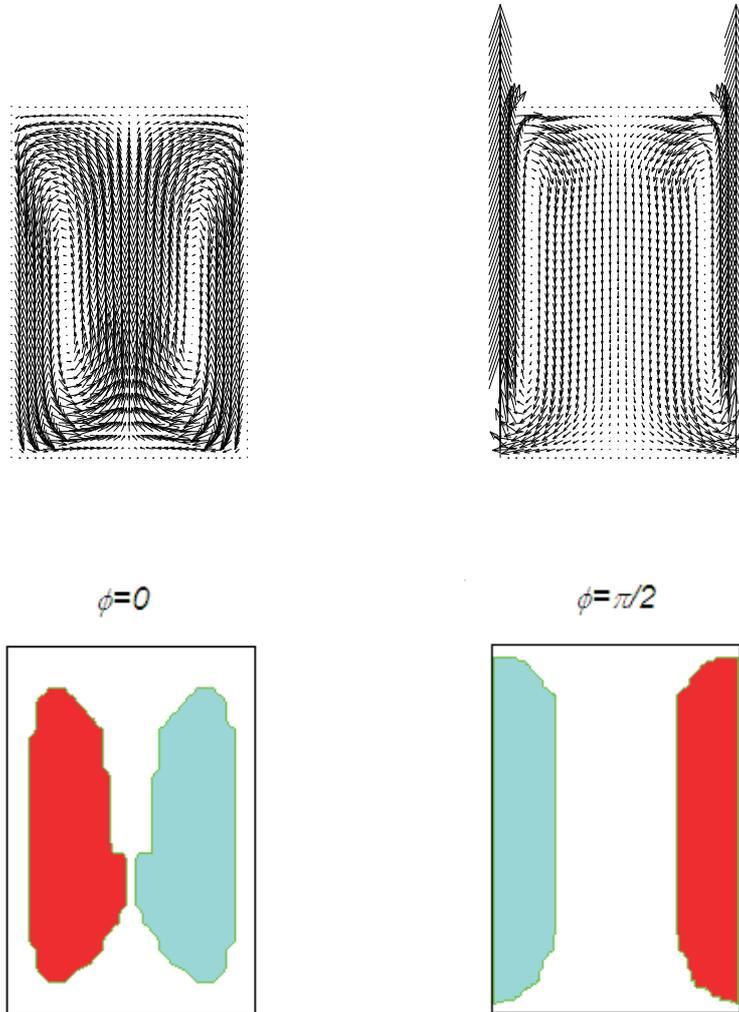


Figura 4.6: Campo de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 50$ y $Y = 0.4$.

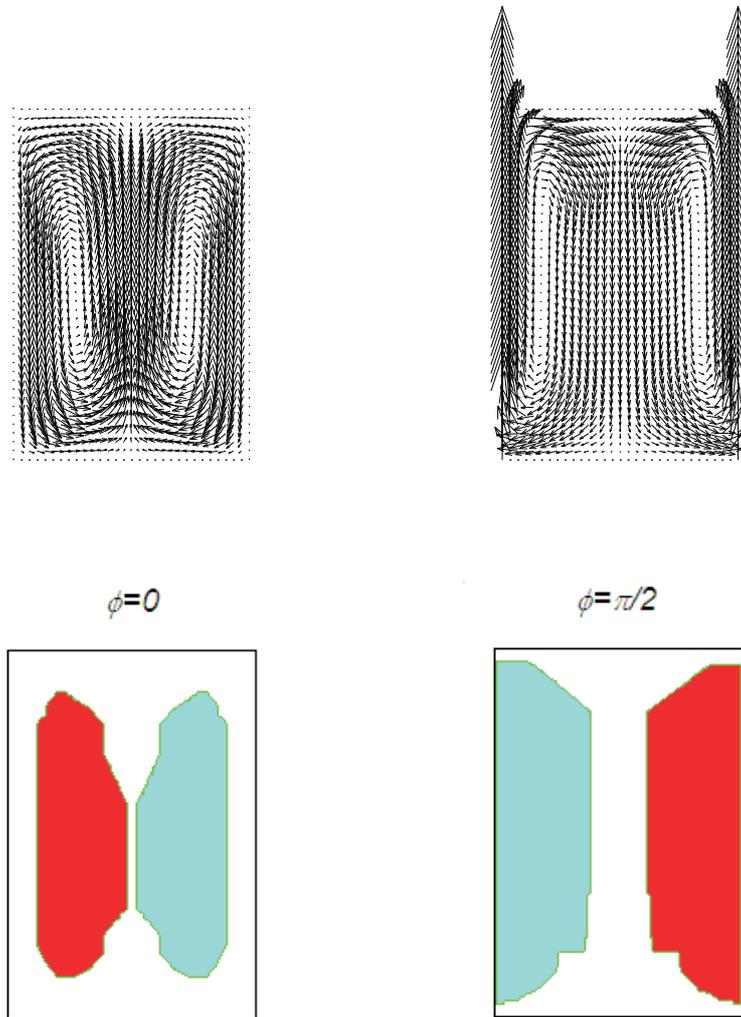


Figura 4.7: Campo de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 50$ y $Y = 0.8$.

$$C = \left[\frac{\cos l\beta_s \sin x\beta_s \cosh l\beta_s \sinh x\beta_s - \sin l\beta_s \cos x\beta_s \sinh l\beta_s \cosh x\beta_s}{(\cos l\beta_s \cosh l\beta_s)^2 + (\sin l\beta_s \sinh l\beta_s)^2} \right],$$

donde $l = D/2$ y el parámetro β_s es el inverso de la profundidad de penetración de Stokes y está definido por

$$\beta_s = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},$$

donde ω es la velocidad angular y ν es la viscosidad cinemática. Este perfil de velocidad se muestra en la figura 4.8 tomando $Re = 50$ y $Y = 0.2$. Se observa que para estas condiciones, la profundidad de penetración de Stokes es más pequeña que la semi distancia entre las paredes del canal ($\frac{\delta_\nu}{D/2} = 0.18$) y para valores de x positivos (o negativos), las envolventes son funciones monótonas de esta coordenada. El flujo en la región cerca del centro del canal ($x \sim 0$) está aproximadamente en reposo en todos los tiempos. Es importante señalar que para un canal infinito, la velocidad instantánea promediada en x no es cero, mientras que para un canal con una relación de aspecto finito, la velocidad instantánea promediada en x es cero para todo tiempo debido a que la presencia de las paredes horizontales hace que para cada sección transversal el fluido que asciende se compense con el fluido que desciende. Los perfiles de velocidad equivalentes obtenidos en $y=0$, para el canal con una relación de aspecto finito ($H/D = 1.5$) se muestran en la figura 4.9. Las envolventes no son funciones monótonas de x y consecuentemente, no se puede definir la profundidad de penetración de Stokes. En contraste al canal con una relación de aspecto infinito, el flujo en el centro del canal está en reposo sólo para fases específicas del ciclo. En la región cercana a las paredes laterales, los perfiles de velocidad para las relaciones de aspecto finito e infinito coinciden, indicando que en $y = 0$, la presencia de las paredes horizontales afecta sólo el centro del canal. Cuando la amplitud del movimiento oscilatorio de las paredes se incrementa a $Y=0.8$, las características anteriormente descritas se amplifican como puede observarse en la figura 4.10. Otro parámetro usual para describir el efecto de la presencia de las paredes horizontales en la dinámica del flujo oscilatorio es la diferencia de fase de la oscilación del fluido con respecto a las paredes ψ como una función de la distancia de la pared vertical. Como se sabe, en el segundo problema de Stokes, el fluido oscila con un cambio de fase linealmente proporcional a la distancia de la pared. La constante de proporcionalidad es

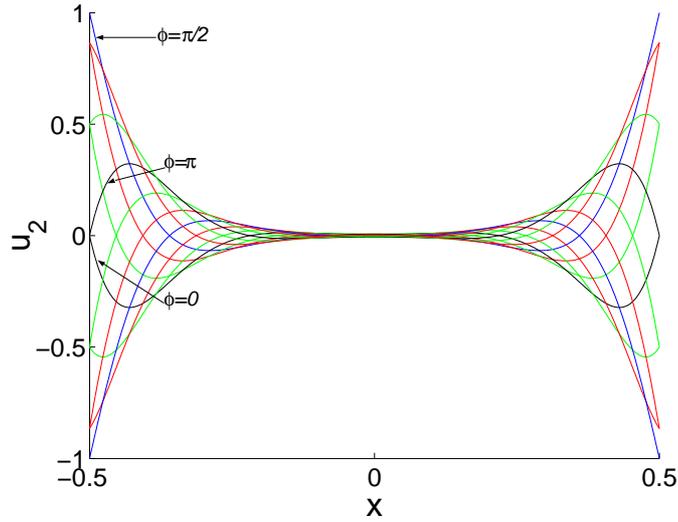


Figura 4.8: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal infinito (ecuación 4.4) con $Re=50$ y $Y = 0.2$. Los intervalos de fase entre los perfiles son de $\Delta\phi = \pi/6$.

β_s , el inverso de la profundidad de penetración de Stokes. Para el canal infinito, el cambio de fase se obtiene de la siguiente ecuación:

$$\psi = \arctag \left[\frac{\cos l\beta_s \sin x\beta_s \cosh l\beta_s \sinh x\beta_s - \sin l\beta_s \cos x\beta_s \sinh l\beta_s \cosh x\beta_s}{\cos l\beta_s \cos x\beta_s \cosh l\beta_s \cosh x\beta_s + \sin l\beta_s \sin x\beta_s \sinh l\beta_s \sinh x\beta_s} \right]. \quad (4.5)$$

En la figura 4.11, se muestra (ψ) como una función de la coordenada transversal para dos casos $Y = 0.2$ y 0.8 con $y=0$ y $Re=50$; las líneas son para un canal largo infinito (ecuación (4.5)), mientras los símbolos representan los resultados para un canal con aspecto finito. Se encontró que ψ coincide para canales con relación de aspecto infinito y finito dentro de la profundidad de penetración de Stokes, la cual es 18% y 35% del semidiámetro para $Y = 0.2$ y $Y = 0.8$, respectivamente. Aunque las amplitudes de oscilación de los dos casos analizados difieren por un factor de cuatro, la máxima ψ alcanzada en $x = 0$, es solamente 1.34π y 1.22π , respectivamente. Estos valores contrastan con los valores correspondientes de 1.875π y 0.875π para el canal infinito. Esto se debe a que, por conservación de masa la existencia de las paredes fijas produce un flujo en la zona central con sentido opuesto

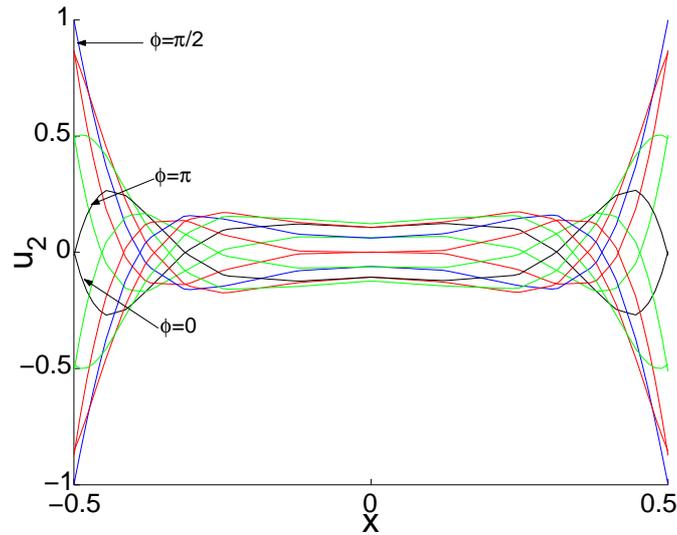


Figura 4.9: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal con relación de aspecto ($H/D=1.5$), $Re = 50$ y $Y = 0.2$. Para todos los perfiles, $y=0$. Los intervalos de fase entre perfiles son de $\Delta\phi = \pi/6$.

al del flujo cercano a la pared, por lo que ψ está limitada entre π y 1.5π . Para $Re = 50$ y $Y = 0.2$, las figuras 4.8, 4.9 y 4.11 indican que en una región relativamente pequeña, en $y = 0$, cerca de las paredes oscilatorias (δ_v) la presencia de las paredes horizontales no tiene una influencia importante en el flujo, pero en cualquier otra parte de la cavidad, las paredes limitantes son determinantes.

4.4.2. Caso $Re = 500$

Las figuras 4.12, 4.13, 4.14 muestran los campos de velocidad y área de vórtices para $Re = 500$, $Y = 0.2, 0.4$ y 0.8 , para dos fases de la oscilación. La distribución de vórtices durante el ciclo es más compleja que para $Re = 50$. Para $Re = 500$ se encontró que hay una intensa formación y separación de vórtices durante el ciclo y que los vórtices formados por los dos mecanismos (M1 y M2) están separados. Los vórtices generados por M1 son más delgados. Los vórtices generados por M2 comienzan su formación pegados a las paredes móviles en la fase de máxima velocidad, en las regiones donde las paredes

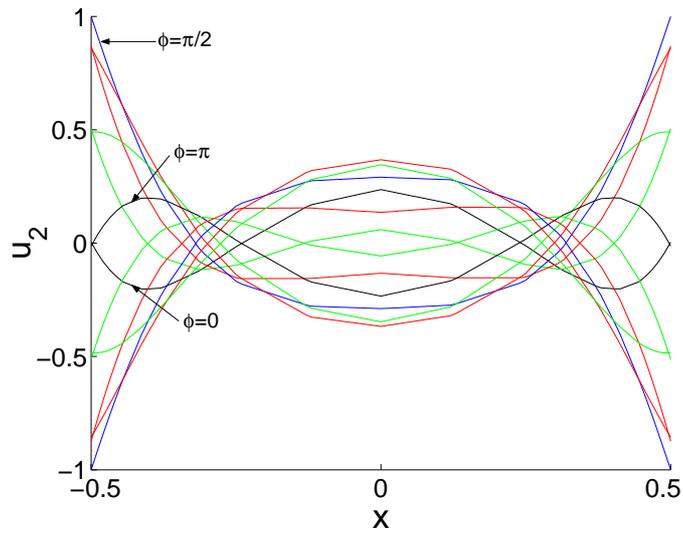


Figura 4.10: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal con relación de aspecto ($H/D=1.5$), $Re=50$ y $Y = 0.8$. Para todos los perfiles, $y=0$. Los intervalos de fase entre perfiles son de $\Delta\phi = \pi/6$.

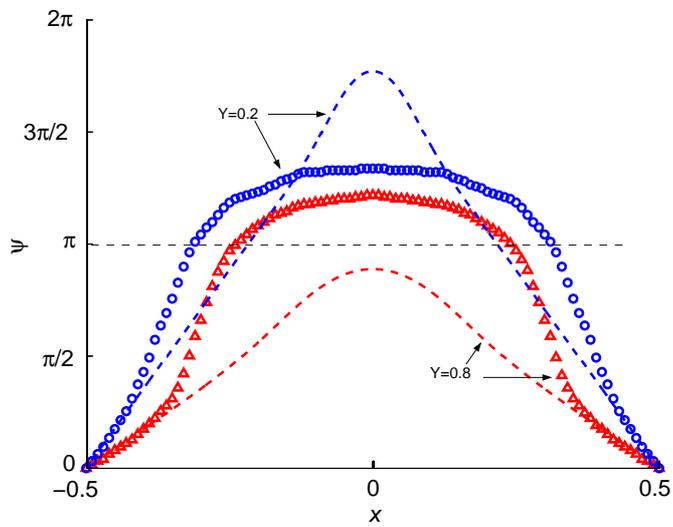


Figura 4.11: Fase relativa entre las paredes oscilantes y la velocidad axial del fluido ψ como una función de la coordenada transversal x . $Re = 50$ y $y = 0$.

deslizantes se encuentran con las paredes superiores fijas (paredes inferiores fijas) para $\phi = \pi/2$ ($\phi = 3\pi/2$), alcanzando su máxima vorticidad cuando las paredes deslizantes se detienen en $\phi = \pi$ ($\phi = 0$). La presencia de estos vórtices en estas fases fue descrita por Tabaczynski *et al.* [78] y se etiqueta con “A” en la figura 4.14. Estos vórtices permanecen en las fases donde las paredes oscilatorias se alejan de las paredes fijas, $\phi = 3\pi/2$ ($\phi = \pi/2$), separándose de las paredes en movimiento. Para $Y = 0.2$ cuando los vórtices superiores (vórtices inferiores) se separan, son absorbidos por el flujo central en $\phi = 0$ ($\phi = \pi$). Para $Y = 0.4$ y 0.8 cuando los vórtices superiores (vórtices inferiores) se separan, permanecen en $\phi = 0$ ($\phi = \pi/2$) pero con baja vorticidad. La presencia de estos vórtices en las fases donde las paredes móviles se alejan de las paredes fijas, etiquetada con “B” en la figura 4.14, no fue observada en las visualizaciones de Tabaczynski *et al.* [78]. La separación de los vórtices generados por M2 con respecto a las paredes en movimiento se debe a la formación medio ciclo después, pegados a la pared de los vórtices M1 con vorticidad opuesta. Los vórtices generados por M2 conservan su sentido durante el ciclo y su tamaño incrementa conforme se incrementa Y .

La figura 4.15 muestra el campo de vorticidad graficado como función de la posición para $Re = 500$, $Y = 0.8$ y $\phi = 0$. Conforme el fluido se mueve hacia abajo y choca contra la pared fija, una región de vorticidad secundaria con signo (-) se forma entre el vórtice con signo (+), formado por el mecanismo M2, y la pared fija, provocando que este último vórtice se aleje de la esquina

La figura 4.16 muestra, en el lado izquierdo, el patrón observado por la visualización de vórtices generados por el flujo oscilatorio para el caso $Re = 500$ y $Y = 0.8$ de esta tesis, en el lado derecho, se muestra las visualizaciones obtenidas experimentalmente por Allen y Chong [79], observándose similitudes cualitativas entre ambas visualizaciones. Las líneas de traza obtenidas en esta tesis simulan un trazador inyectado aproximadamente en un décimo de la altura ($y = -0.610$) y $0.450 < x < -0.423$, cuando la velocidad es máxima positiva y el desplazamiento es cero ($\phi = \pi/2$). En la simulación el trazador se inyecta durante un ciclo. El patrón formado con esta técnica de visualización se puede dividir en tres zonas. La primera comprende los trazadores inyectados cerca del final del ciclo y se

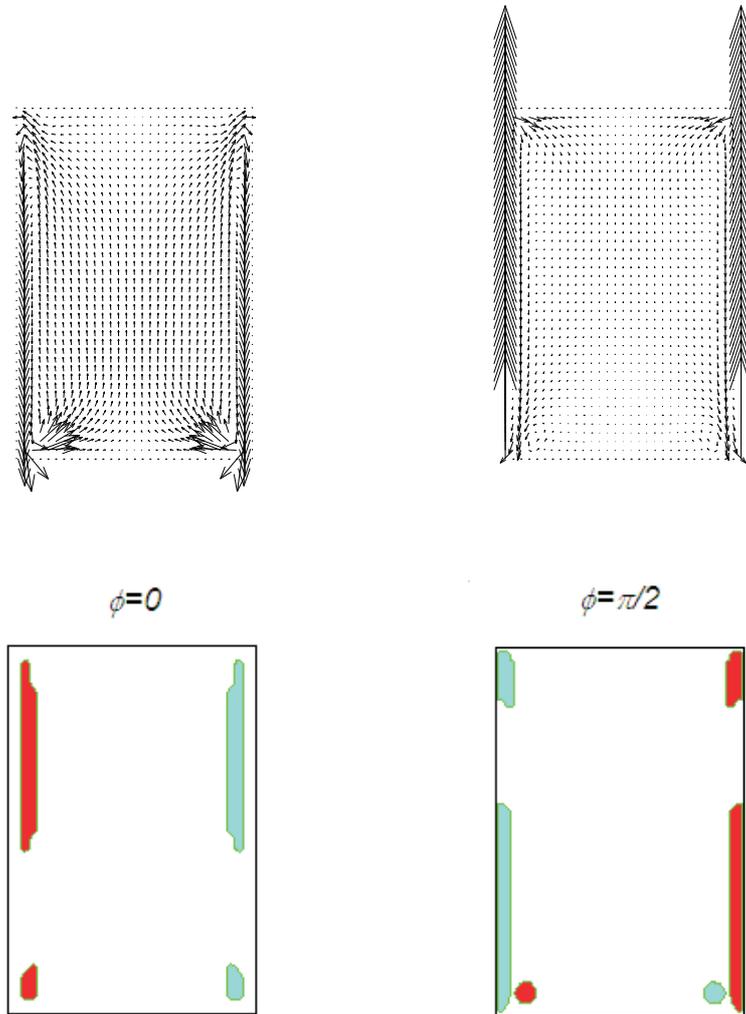


Figura 4.12: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 500$ y $Y = 0.2$.

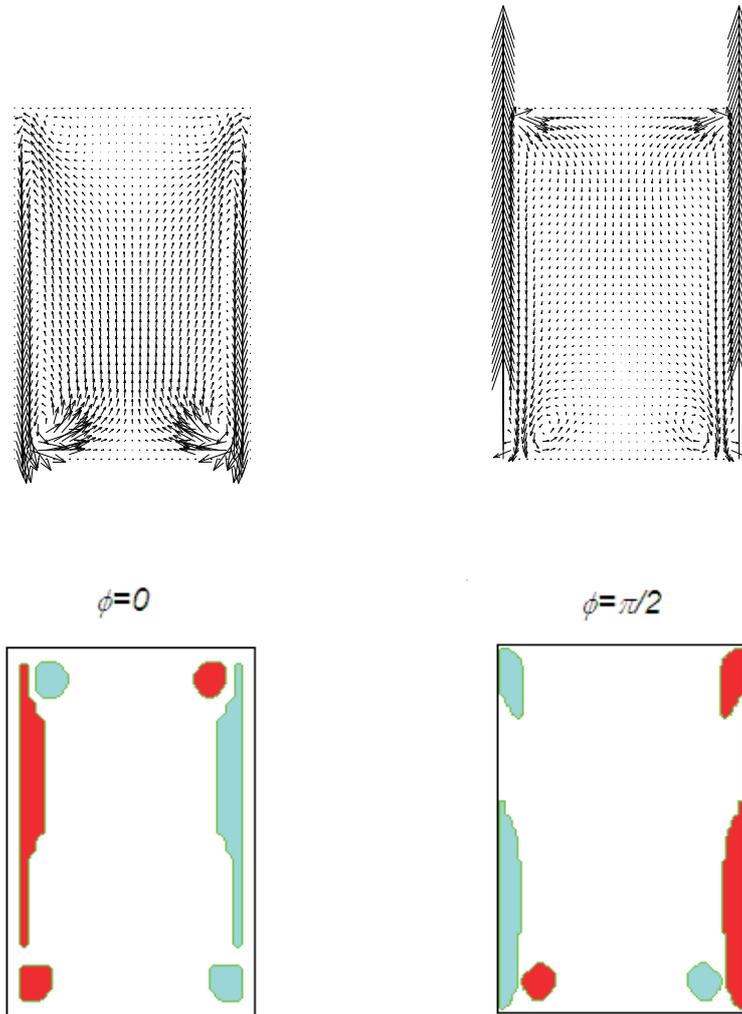


Figura 4.13: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 500$ y $Y = 0.4$.

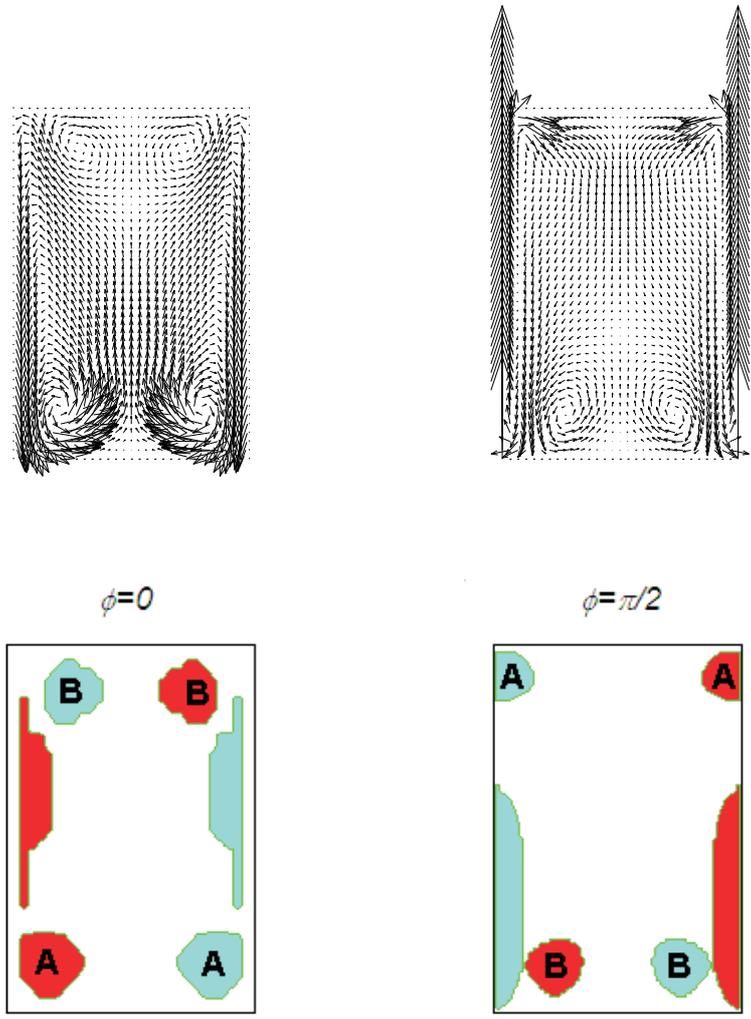


Figura 4.14: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 500$ y $Y = 0.8$.

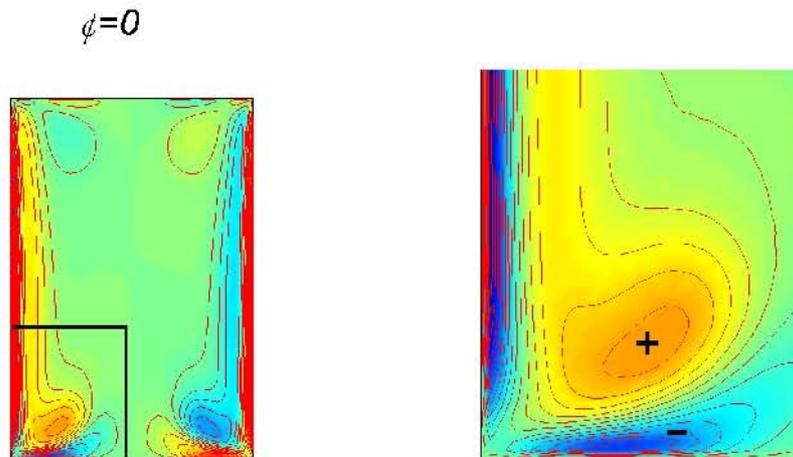


Figura 4.15: Campo de vorticidad como una función de la posición para $Re = 500$, $Y = 0.8$, $\phi = 0$. Los signos (+) y (-) indican vorticidades positivas y negativas, respectivamente.

encuentra cerca de las paredes deslizantes. La segunda es una espiral similar a las observadas experimentalmente por Tabaczynski *et al.* [78] y Allen y Chong [79]. La tercera zona, corresponde a los trazadores inyectados al comienzo del ciclo, éstos no se enrollan uniéndose en el centro de la espiral sino forman otra estructura donde todos los trazadores se unen. Esta distribución compleja de los trazadores es consecuencia del movimiento oscilatorio de las paredes deslizantes.

4.4.3. Caso $Re = 1000$

Las figuras 4.17 y 4.18 muestran los campos de velocidad y área de vórtices para $Re = 1000$, $Y = 0.2$ y 0.4 , para dos fases de la oscilación. Los vórtices generados por los dos mecanismos (M1 y M2) están separados, siendo la distribución de vórtices y su evolución similares a las de $Re=500$, sólo que en el caso de $Re=1000$ las estructuras de vórtices son más delgadas y están confinadas a regiones más cercanas a las paredes. La mayor parte del canal está libre de vórtices durante todo el ciclo. Conforme la amplitud de desplazamiento se incrementa, el área ocupada por los vórtices aumenta, pero las propiedades cualitativas del flujo son las

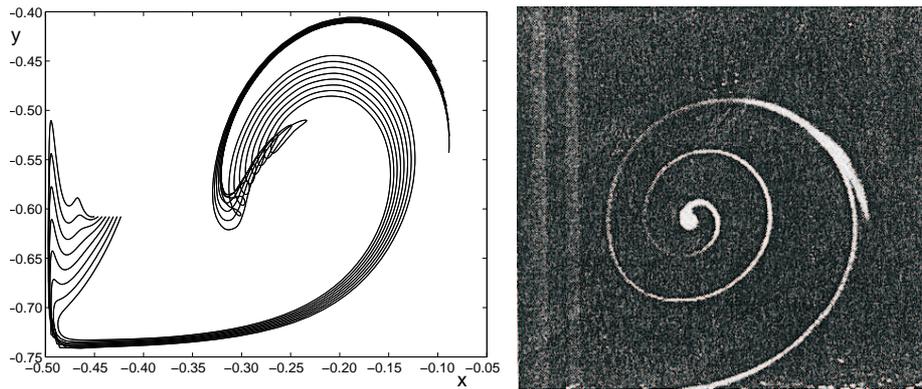


Figura 4.16: Izquierda: Líneas de traza obtenidas en esta tesis para $Re= 500$ y $Y= 0.8$, que simulan la visualización del flujo. La inyección de los trazadores inicia en $\phi = \pi/2$ y continua para un ciclo. Los trazadores se inyectaron en $x = -0.450, -0.446, -0.442, -0.439, -0.435, -0.431, -0.427$ y $-0.423, y = -0.610$. Derecha: Líneas de traza obtenidas por Allen and Chong [79].

mismas. Ver figura 4.18. En todos los casos presentados hasta ahora, las distribuciones de flujo presentan simetrías axial y cíclica definidas en el inicio de la sección 4.4. Cuando la amplitud de la oscilación de la pared se incrementa a $Y = 0.8$, la simetría alrededor de $x=0$ se pierde. La figura 4.19 muestra el campo de velocidad y área de vórtices para $Y = 0.8$, para dos fases de la oscilación. Con este conjunto de parámetros, el flujo no tiene simetría axial pero conserva simetría cíclica. En $\phi = 0$, los vórtices derecho e izquierdo generados por el mecanismo M2 conforme las paredes deslizantes se aproximan a la pared inferior y aquéllos que están cerca de la pared superior no son del mismo tamaño. En esta fase también se observa un sólo vórtice del tipo M1 pegado a la pared izquierda deslizante mientras en la esquina superior derecha se observa un vórtice del tipo M2. Este desbalance genera un flujo cruzado que se mueve de la esquina inferior derecha a la esquina superior izquierda de la cavidad formando un gran vórtice que gira en dirección de las manecillas del reloj. Ver panel superior izquierdo en la figura 4.19. La distribución de vórtices mostrada en el panel inferior izquierdo de la figura 4.19 confirma observaciones previas mostrando una

gran estructura cerca del centro de la cavidad. Es interesante comparar esta figuras con las correspondientes a $Re=500$ dadas en la figura 4.14 las cuales pueden ser interpretadas como una versión aproximada simétrica de 4.19 donde el flujo cruzado y el vórtice central están ausentes. La estructura del flujo en $\phi = \pi/2$ (paneles derechos de la figura 4.19) también incluye un vórtice central grande. Los dos vórtices tipo M2 pegados a la pared fija inferior permanecen en esta fase pero con menor vorticidad. En esta fase se observan dos vórtices del tipo M1 pegados a cada una de las paredes deslizantes. En cada esquina superior comienza la formación de un vórtice tipo M2 pegado a cada una de las paredes móviles que alcanzan su máxima velocidad hacia arriba.

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y condiciones de frontera son simétricas respecto al eje $x = 0$, por lo tanto, un campo de velocidad y presión simétrico al obtenido, descrito en el párrafo anterior, también es solución, es decir:

$$u_1(x, y, \phi) = -u_1^*(-x, y, \phi), \quad u_2(x, y, \phi) = u_2^*(-x, y, \phi) \quad p(x, y, \phi) = p^*(-x, y, \phi)$$

donde u_1^*, u_2^* y p^* son las distribuciones de velocidad y presión del flujo obtenidas. Lo anterior indica que el sistema presenta una bifurcación. Para $Re = 1000$, Y es el parámetro de bifurcación y el valor crítico es $0.4 < Y < 0.8$. Para $Y = 0.8$, Re es el parámetro de bifurcación y el valor crítico está entre $500 < Re < 1000$.

La figura 4.20 muestra el perfil de velocidad axial u_2 para un canal con longitud infinita como una función de la coordenada transversal x . En esta figura, $Re = 1000$ y $Y = 0.2$. Para este caso, la profundidad de penetración de Stokes es más pequeña ($\frac{\delta_\nu}{D/2} = 0.04$), formándose una capa límite más delgada cerca de la pared, mientras el centro del canal permanece sin movimiento. Las gráficas correspondientes de velocidad axial para un canal con relación de aspecto 1.5 y $Re = 1000$ se muestran en las figuras 4.21 y 4.22 para $Y = 0.2$ y 0.8, respectivamente. Estas gráficas se obtienen para $y = 0$. Las propiedades de los perfiles de velocidad para $Y = 0.2$ (figura 4.21) son similares a los descritos en la sección 4.4.1, siendo los perfiles para un canal infinito y un canal con relación de aspecto finito muy similares cerca de las paredes (δ_ν). También se encontró que la diferencia de los perfiles de velocidad debida a la presencia de las paredes horizontales en la parte central de la cavidad

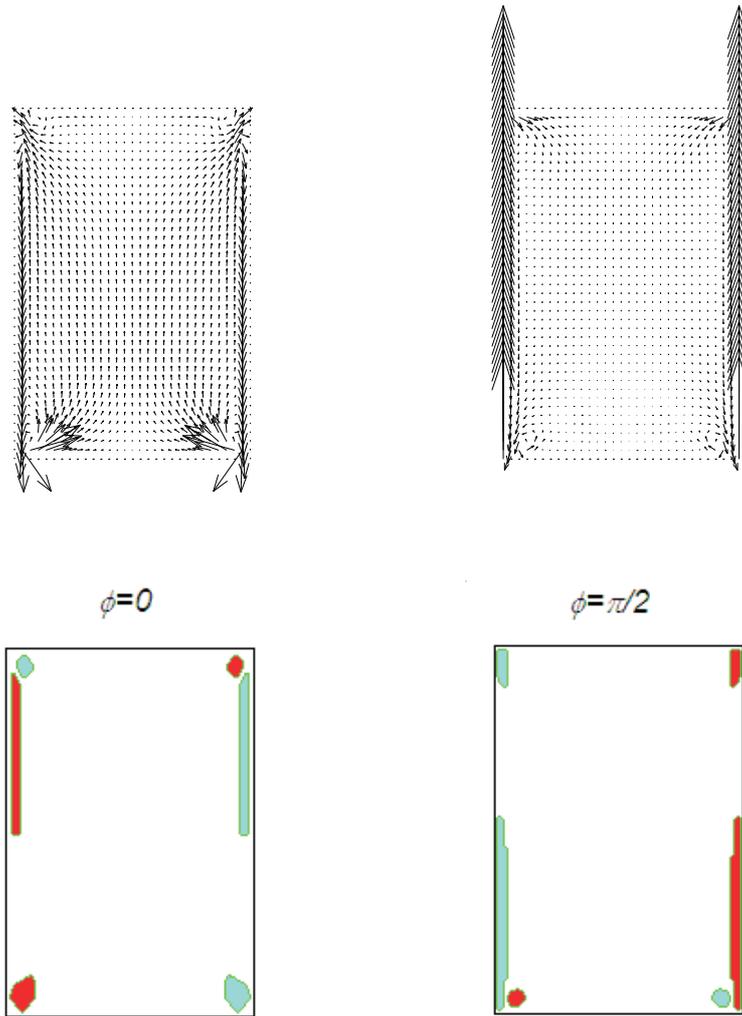


Figura 4.17: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 1000$ y $Y = 0.2$.

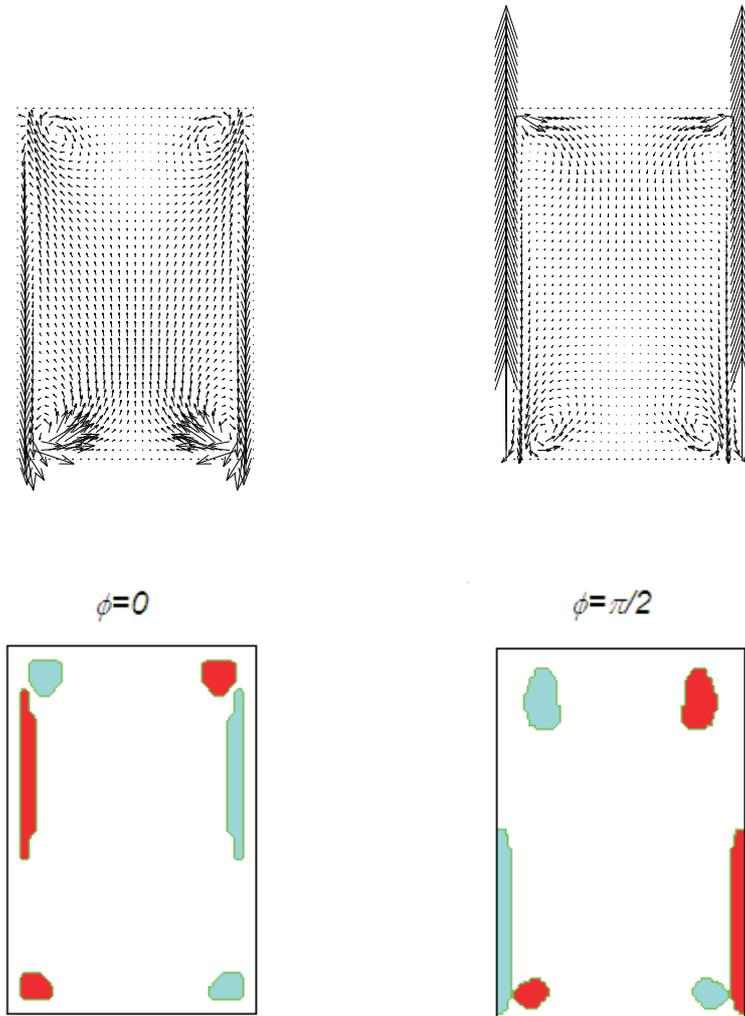


Figura 4.18: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 1000$ y $Y = 0.4$.

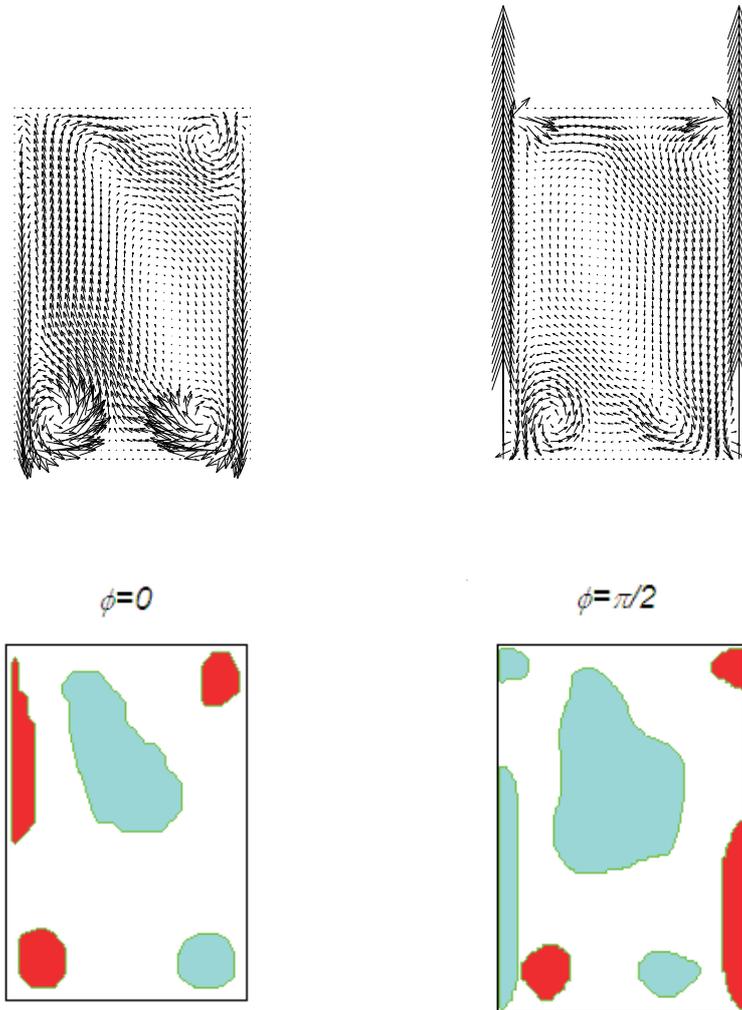


Figura 4.19: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 1000$ y $Y = 0.8$.

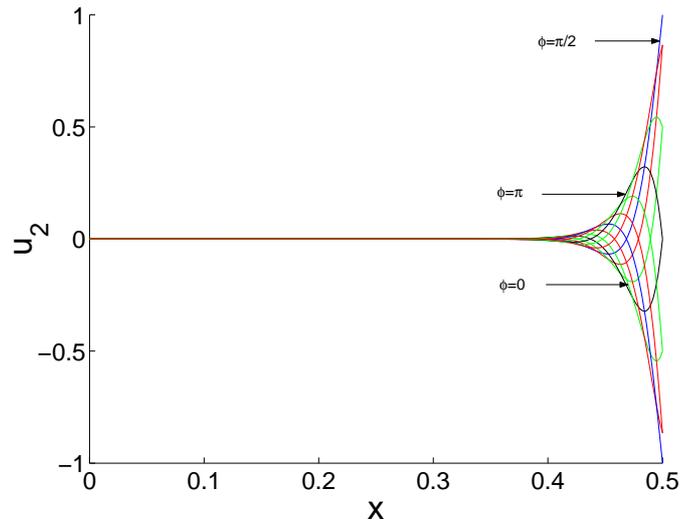


Figura 4.20: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal infinito (ecuación 4.4) con $Re=1000$ y $Y = 0.2$. Los intervalos de fase entre perfiles son $\Delta\phi = \pi/6$.

se incrementa conforme Y incrementa.

Para $Y = 0.8$ se observaron notables diferencias en la distribución de velocidad con respecto al comportamiento de canal infinito debido al rompimiento de la simetría axial, como se muestra en la figura 4.22. En este caso se observa que un vórtice en el sentido de las manecillas del reloj está presente permanentemente cerca del centro de la cavidad desviándose ligeramente hacia arriba del lado izquierdo y hacia abajo cerca del lado derecho. Las velocidades en unas regiones (δ_ν) cercanas a las paredes en movimiento son simétricas, pero en el centro se distorsionan debido al movimiento del vórtice central el cual tiene siempre la misma dirección de rotación. Como se comentó anteriormente, existe una segunda solución en la cual el vórtice del centro gira en contra de las manecillas del reloj.

En la figura 4.23, se muestra (ψ) como una función de la coordenada transversal para dos casos $Y = 0.2$ y 0.8 con $y=0$ y $Re=1000$; las líneas son para un canal largo infinito (ecuación (4.5)), mientras los símbolos representan los resultados para un canal con aspecto finito. Se encontró que ψ coincide para canales con relación de aspecto infinito y finito dentro de la

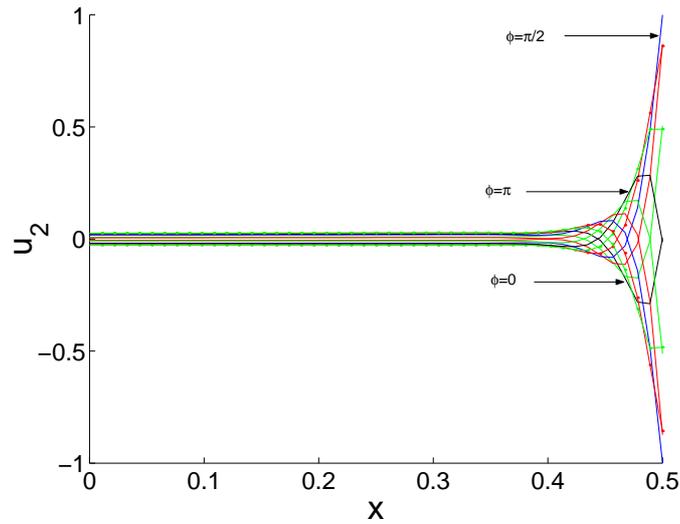


Figura 4.21: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal con una relación de aspecto ($H/D=1.5$), $Re = 1000$ y $Y = 0.2$. Para todos los perfiles, $y=0$. Los intervalos de fase entre perfiles son $\Delta\phi = \pi/6$.

profundidad de penetración de Stokes, la cual es 4% y 8% del semidiámetro para $Y = 0.2$ y $Y = 0.8$, respectivamente. En el centro de la cavidad ($x = 0$) el valor de la diferencia de fase de la oscilación del fluido con respecto a las paredes tiende a un valor común de aproximadamente 1.25π .

4.5. Conclusiones

Se obtuvo la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, usando elemento finito y un esquema de separación de operadores, para la simulación del flujo dentro de una cavidad con paredes verticales oscilatorias. Aplicando este método numérico se pudo reproducir la formación de vórtices sin introducir perturbación numérica, en contraste con otros estudios que han aparecido en la literatura, ver [80] y [81]. La solución para el flujo oscilatorio en toda la cavidad se obtuvo para $Re = 50, 500$ y 1000 , y para tres diferentes relaciones de desplazamiento de la pared vertical $Y = 0.2, 0.4$ y 0.8 . En todos los casos se observó un

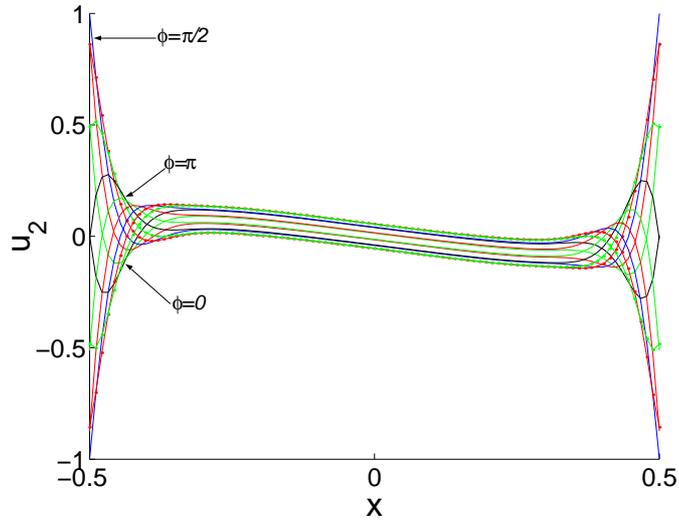


Figura 4.22: Velocidad axial u_2 como una función de la coordenada transversal x para un canal con relación de aspecto ($H/D=1.5$), $Re=1000$ y $Y = 0.8$. Para todos los perfiles, $y=0$. Los intervalos de fase entre perfiles son $\Delta\phi = \pi/6$.

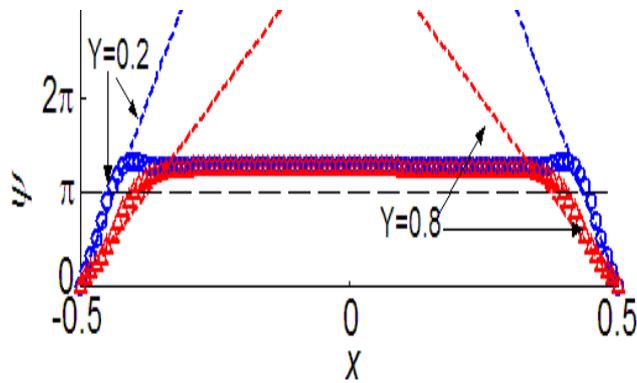


Figura 4.23: Fase relativa entre las paredes oscilatorias y la velocidad axial del fluido ψ como una función de la coordenada transversal x . $Re = 1000$ y $y = 0$. Las líneas se obtienen de la ecuación 4.5.

flujo laminar con simetría cíclica y axial, excepto para el caso $Re = 1000$, $Y = 0.8$, donde se observó rompimiento de simetría axial, flujo cruzado y la formación de un gran vórtice en la parte central de la cavidad. Para $Re = 50$ se observaron básicamente dos vórtices distribuidos simétricamente respecto $x = 0$, los cuales aumentaron de tamaño a medida que Y aumentó, mientras que para $Re = 500$ y $Re = 1000$ el número de vórtices es mayor. La comparación de los resultados numéricos con resultados analíticos de un canal infinitamente largo sugieren que las paredes superior e inferior de la cavidad no afectan significativamente la dinámica del flujo en regiones cercanas a las paredes verticales (δ_ν) para la altura central ($y = 0$). En la fase donde las paredes deslizantes se mueven contra las paredes horizontales fijas se observó la formación de vórtices pequeños en las esquinas de la cavidad semejantes a los observados experimentalmente por otros investigadores, estos vórtices permanecen con menor vorticidad en la fase cuando las paredes deslizantes se alejan de las paredes fijas, lo cual no ha sido observado en trabajos previos. La formación de vórtices fue generada por dos mecanismos: M1) El primero se debe al efecto combinado del movimiento cortante de las paredes móviles oscilatorias, el defasamiento del fluido en el interior de la cavidad y la presencia de las paredes fijas inferior y superior. M2) El segundo se debe al cambio abrupto en la dirección del flujo en las esquinas de la cavidad. Manteniendo constante Re y aumentando Y se observa que los vórtices generados por los mecanismos M1 y M2 aumentan de tamaño. Manteniendo constante Y y aumentando Re se observa que los vórtices debidos al mecanismo M1 disminuyen, mientras los generados por M2 permanecen constantes. Para $Re = 50$ los vórtices formados por ambos mecanismos se unen.

El código numérico desarrollado en esta tesis también permite analizar fenómenos de transferencia de calor, en el siguiente capítulo se presentan algunos ejemplos de la simulación de un problema con transferencia de calor enfocado a flujos oscilatorios.

Capítulo 5

Flujo en una cavidad oscilatoria con transferencia de calor

5.1. Antecedentes generales

Experimentos realizados en el laboratorio de termociencias del CIE-UNAM, sobre flujos oscilatorios usando un pistón (Castrejon *et. al.*, [74]) mostraron un pequeño calentamiento sobre la pared cerca del pistón producida por la fricción del pistón, esto sugiere la necesidad de investigar el efecto de la transferencia de calor por la fricción del pistón sobre la formación del vórtice. En este capítulo se propone un modelo de transferencia de calor para una cavidad con paredes verticales oscilatorias, y se resuelven numéricamente las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido dentro de la cavidad sujeta a flujo de calor en las esquinas. Otro fenómeno que podría estudiarse utilizando este modelo es el mejoramiento de la conducción de calor en flujos viscosos oscilatorios dentro de canales con placas paralelas, como lo reporta Kurzweg [84], en un estudio analítico de este problema. Sus resultados muestran que para una frecuencia dada la difusividad térmica efectiva correspondiente alcanza un máximo, aumentando la transferencia de calor axial en el fluido inmerso en el canal, lo cual sugiere que este fenómeno puede encontrar aplicaciones importantes en áreas donde se requiere enfriar rápidamente sin flujo másico neto.

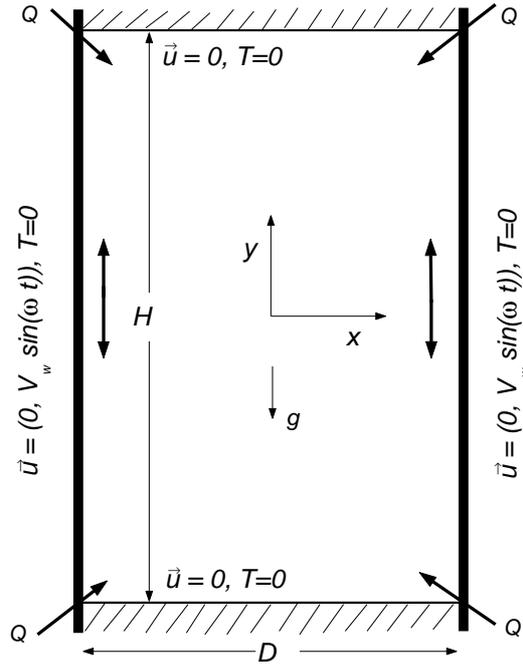


Figura 5.1: Geometría y condiciones de frontera de la cavidad con flujo de calor en las esquinas y paredes verticales deslizantes.

5.2. Formulación del problema

5.2.1. Descripción física y geométrica

Las simulaciones numéricas de la cavidad oscilatoria con flujo de calor en las esquinas se realizaron en un dominio bidimensional, similar al de la cavidad isotérmica, con una razón de 1.5 entre las dimensiones vertical y horizontal como se muestra en la figura 5.1, siendo la dimensión vertical $H = 7.5 \times 10^{-2}m$ y la dimensión horizontal $D = 5.0 \times 10^{-2}m$, el fluido de trabajo es aire, que para las condiciones del flujo puede considerarse incompresible. Las paredes verticales se mueven simultáneamente con una velocidad oscilatoria, las paredes horizontales son los pistones fijos y en las cuatro esquinas de la cavidad se aplica un flujo de calor proporcional a la velocidad. El rango estudiado fue $50 \leq Re \leq 1000$ con $Y = 0.2$.

5.2.2. Ecuaciones de conservación

Se considera una región bidimensional Ω , correspondiente a la cavidad estudiada. Las ecuaciones de conservación que describen el flujo oscilatorio de un fluido incompresible en esta región son las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de continuidad y la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla P &= \vec{f} \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f], \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \bar{\alpha} \Delta T + \vec{u} \cdot \nabla T &= 0 \text{ en } \Omega \times [0, t_f],\end{aligned}$$

donde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es el vector velocidad, siendo u_1 y u_2 las componentes de velocidad transversal y axial respectivamente; ν es la viscosidad cinemática, t es el tiempo, t_f es el tiempo final, T es la temperatura, $\bar{\alpha}$ es la difusividad térmica y $\vec{f} = g\beta T\hat{j}$. $P = p/\rho$ donde p es la presión y ρ es la densidad.

Las condiciones de frontera de la cavidad oscilatoria con transferencia de calor son:

para la velocidad:

$$\begin{aligned}u_1(x = -D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = -D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\ u_1(x = D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\ u_1(x, y = -H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = -H/2, t) &= 0, \\ u_1(x, y = H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = H/2, t) &= 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

para la temperatura:

$$\begin{aligned}T(x = -D/2, y = \partial\Omega_3, t) &= 0, \\ T(x = D/2, y = \partial\Omega_3, t) &= 0, \\ T(x = \partial\Omega_3, y = -H/2, t) &= 0, \\ T(x = \partial\Omega_3, y = H/2, t) &= 0,\end{aligned}\tag{5.2}$$

para el flujo de calor:

$$Q = cu_2^2 \quad \text{en} \quad (\partial\Omega_4, t),\tag{5.3}$$

donde c es una constante de proporcionalidad.

Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} \vec{u}(x, y, t = 0) &= 0, \\ p(x, y, t = 0) &= 0, \\ T(x, y, t = 0) &= 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

V_W es la amplitud de la velocidad de oscilación de las paredes verticales dada por $V_W = Y_W \omega$, donde ω es la frecuencia y Y_W es la amplitud de desplazamiento. En este problema se consideraron: longitud característica $L_c = D$, velocidad característica $U_c = V_W$, flujo de calor característico $Q_c = cV_W^2$, $Ra_Q = 3.34 \times 10^{-3}$ y $c = 1W \cdot s^2/m^4$. En el modelo se propuso que el flujo de calor es proporcional al cuadrado de la velocidad de las paredes oscilatorias. Todos los resultados reportados en este capítulo corresponden al estado permanente que se obtiene después de 30 ciclos.

5.3. Resultados

Se hicieron simulaciones para tres casos con $Re = V_W D / \nu = 50, 500$ y 1000 , con $Pe = V_W D / \bar{\alpha} = 36, 360$ y 720 , respectivamente. En todos los casos $Y = Y_W / D = 0.2$

Como era de esperarse de las ecuaciones de conservación y las condiciones de frontera, los campos de velocidad y los campos de temperatura para todos los casos, muestra la siguiente simetría:

a) simetría axial

$$u_1(x, y, \phi) = -u_1(-x, y, \phi), \quad u_2(x, y, \phi) = u_2(-x, y, \phi),$$

$$T(x, y, \phi) = T(-x, y, \phi),$$

El flujo producido por dos paredes opuestas, oscilatorias, en un canal con una relación de aspecto finito y con flujo de calor en las esquinas, genera vórtices debido a los mismos dos mecanismos que en el caso isotérmico pero ambos se modifican por el flujo de calor desde las esquinas, siendo más notorio este efecto en los casos con mayor velocidad y por lo tanto mayor flujo de calor. El primero se debe al efecto combinado del movimiento cortante de

las fronteras móviles, el desfaseamiento del movimiento del fluido al interior de la cavidad y la existencia de las paredes fijas. Los vórtices generados por este mecanismo están cercanos a las paredes móviles. Este mecanismo modificado por el flujo de calor se designa como M1C. El segundo mecanismo se debe al cambio abrupto en la dirección del flujo del fluido al chocar con las esquinas y que modificado por el flujo de calor aplicado en las esquinas se denomina M2C.

5.3.1. Caso $Re = 50$

La figura 5.2 muestra los campos de velocidad y área de vórtices para $Re = 50$ y $Pe = 36$, en dos fases de la oscilación. En $\phi = 0$ cuando la velocidad de las paredes es cero y éstas están en su posición más baja, el flujo se organiza de manera uniforme en toda la cavidad, excepto en las esquinas donde se observa un flujo más complejo, estas zonas son confirmadas por el criterio de Jeong-Hussain. En esta fase los vórtices de la izquierda tienen un sentido antihorario (+), mientras que los vórtices de la derecha tienen un sentido horario (-). En las esquinas inferiores se observa como el fluido rebota debido al efecto combinado del movimiento cortante hacia abajo que la pared móvil tenía justo antes de esta fase y la presencia de la pared fija, este fluido da vuelta en el fondo y forma un flujo hacia arriba en la parte central de la cavidad. En las esquinas superiores se observa como el fluido ascendente de la parte central de la cavidad se encuentra con la pared superior y se mueve hacia las esquinas donde da vuelta hacia abajo. Aunque en esta fase las paredes verticales están en reposo, debido a la inercia, el fluido cerca de estas paredes tiende a moverse hacia abajo, ya que ésta era la dirección de las paredes verticales justo antes de llegar a esta fase. En esta fase los vórtices superiores son generados por el mecanismo M1C y los inferiores por los mecanismos M1C y M2C. En $\phi = \pi/2$ cuando la velocidad de las paredes es máxima, el fluido se ve completamente uniforme ya que es una transición entre la configuración mostrada en la fase $\phi = 0$ y la fase $\phi = 3\pi/2$, en donde se tendría una configuración semejante a $\phi = 0$ pero invertida. En esta fase los vórtices son del tipo M1C. El flujo de calor en las esquinas produce una disminución en el tamaño de los vórtices (ver sección 4.4.1) debido a que la formación de los vórtices se concentra en las esquinas.

La figura 5.3 muestra los campos de temperatura para $Re = 50$ y $Pe = 36$. En $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ se observa que el flujo de calor inyectado se difunde de manera uniforme en las cuatro esquinas de la cavidad, sin embargo en $\phi = 0$ se observa que el calor se difunde en una región mucho más grande que en $\phi = \pi/2$, esto debido a que en $\phi = 0$ hay un movimiento más intenso del fluido cerca de las esquinas, es decir el movimiento inercial del fluido dentro de la cavidad es el que domina y no el movimiento de las paredes oscilatorias las cuales en esta fase se encuentran en reposo.

5.3.2. Caso $Re = 500$

La figura 5.4 muestra los campos de velocidad y área de vórtices para $Re = 500$ y $Pe = 360$, en dos fases de la oscilación. En $\phi = 0$ cuando la velocidad de las paredes es cero y éstas están en su posición más baja, se observa un vórtice muy cerca de cada esquina de la cavidad, los cuales son generados por el mecanismo M2C. En las esquinas inferiores se observa como las capas límites debido a la inercia del fluido se mueven hacia abajo chocando contra la pared horizontal inferior, generando un flujo hacia arriba cuya velocidad vertical se reduce y la velocidad horizontal aumenta a medida que el fluido se aleja de la esquina, formando una zona de recirculación que permite formar el vórtice. En las esquinas superiores se observa como el fluido ascendente converge hacia las esquinas de la cavidad, pegándose a la pared vertical la cual en esta fase se encuentra en reposo, parte de este fluido da vuelta hacia abajo sobre la pared vertical formando una capa límite delgada, mientras que el resto se mueve hacia el centro de la cavidad, pegado a la pared fija lo que genera una zona de recirculación que provoca la presencia del vórtice M2C. A cada lado de la pared móvil se forma un vórtice delgado debido al mecanismo M1C. En $\phi = \pi/2$ cuando la velocidad de las paredes es máxima, la intensidad de los vórtices M1C disminuye debido a que es la transición en el cambio de dirección de las capas límites pegadas a las paredes verticales. Los vórtices de cada una de las esquinas, generados por el mecanismo M2C, permanecen en esta fase con el mismo tamaño y con baja vorticidad. Los vórtices generados por el mecanismo M1C, también permanecen en esta fase pero con menor tamaño, baja vorticidad y de sentido contrario al de la fase $\phi = 0$. En este caso los vórtices generados en cada una de las

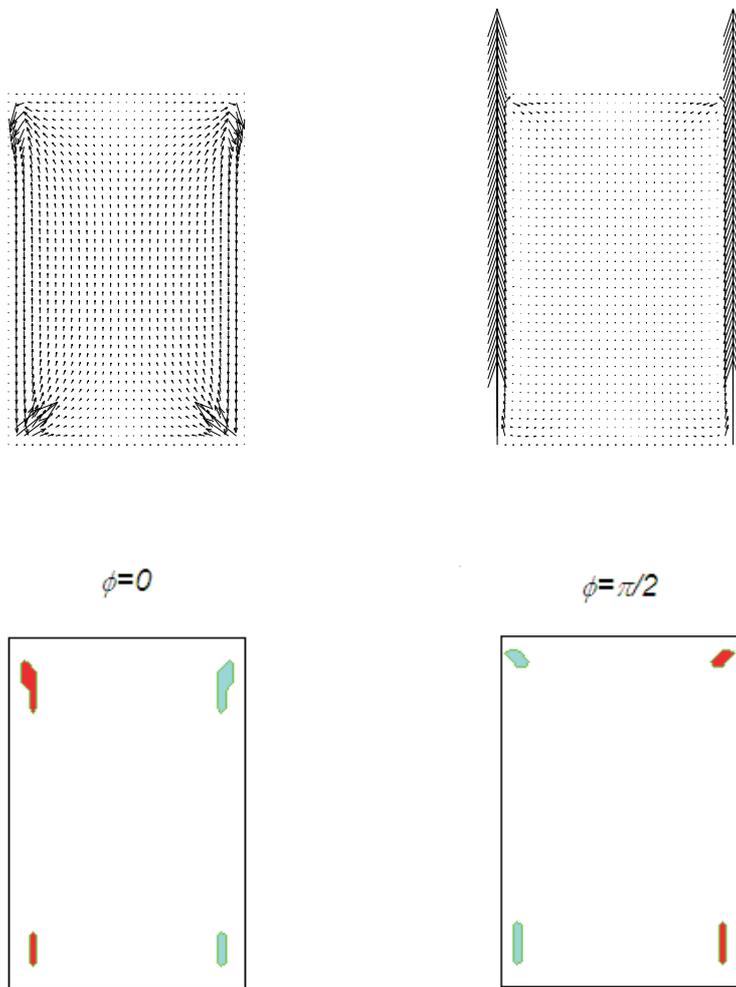


Figura 5.2: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 50$ y $Pe = 36$.

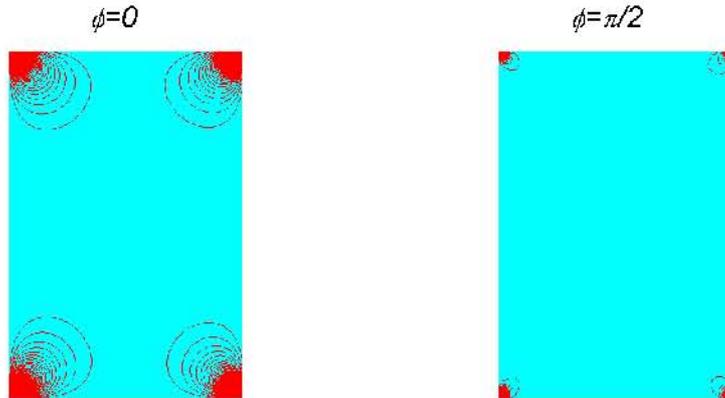


Figura 5.3: Campos de temperatura para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 50$ y $Pe = 36$.

esquinas por el mecanismo M2C conserva su tamaño durante todo el ciclo. Para $Re = 500$ y $Pe = 360$, el flujo de calor en las esquinas produce que los vórtices M2C aumenten de tamaño, los vórtices M1C sean más delgados y que ambos permanezcan durante todo el ciclo.

La figura 5.5 muestra los campos de temperatura para $Re = 500$ y $Pe = 360$. En $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ se observa que el flujo de calor inyectado se difunde de manera uniforme en las cuatros esquinas de la cavidad, sin embargo en $\phi = 0$ se observa que el calor se difunde en una región mucho más grande que en $\phi = \pi/2$, esto debido a que en $\phi = 0$ hay un movimiento más intenso del fluido cerca de las esquinas. La región sobre la que se difunde el calor en cada esquina es aproximadamente del tamaño del vórtice formado en esa esquina. Para $\phi = 0$ se observa que la región en la que se difunde el calor es semejante a la que se observa con un Re más bajo, sin embargo, para $\phi = \pi/2$ la región en la que se difunde el calor es mayor que la que se presenta con un Re más bajo.

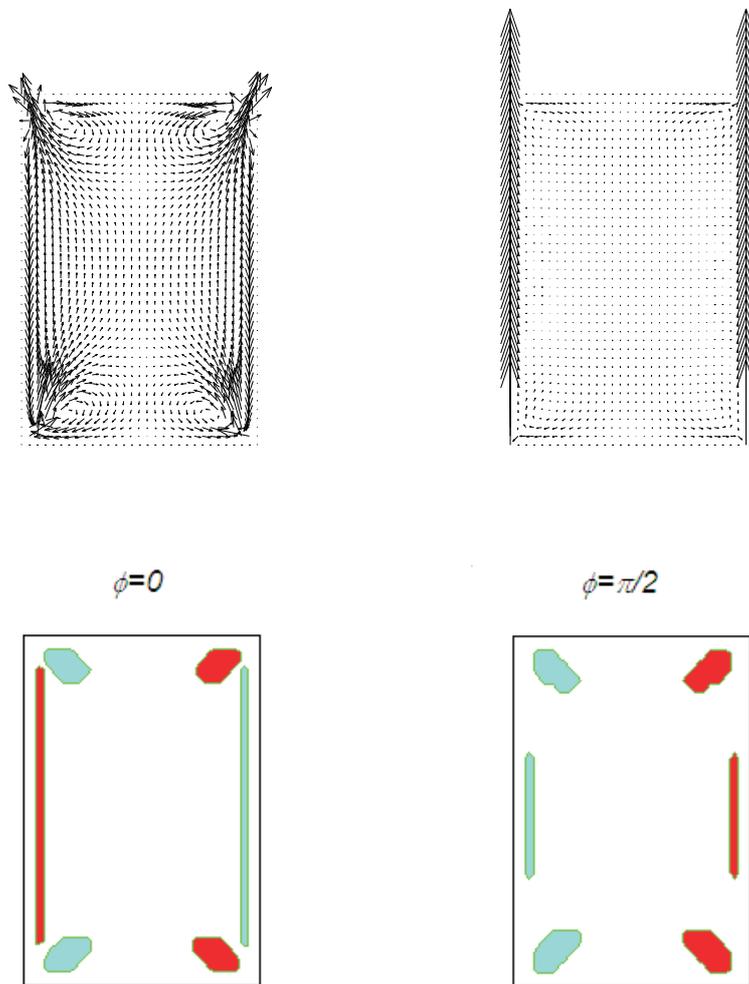


Figura 5.4: Campos de velocidad y y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 500$ y $Pe = 360$.

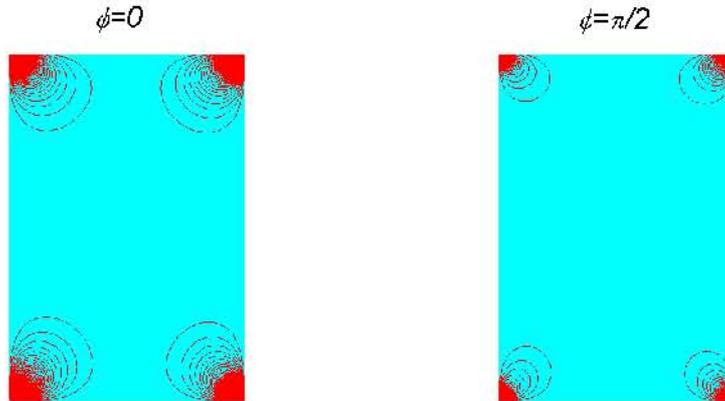


Figura 5.5: Campos de temperatura para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 500$ y $Pe = 360$.

5.3.3. Caso $Re = 1000$

La figura 5.6 muestra los campos de velocidad y área de vórtices para $Re = 1000$ y $Pe = 720$, en dos fases de la oscilación. En $\phi = 0$ cuando la velocidad de las paredes es cero y éstas están en su posición más baja, se observa un flujo más complejo y la presencia de un vórtice en cada esquina de la cavidad, debidos al mecanismo M2C. También se observa la presencia de dos vórtices uno a cada lado del eje axial, pegadas a la pared y formados por el mecanismo M1C. El flujo asociado a estos vórtices forma capas límites mucho más gruesas que con números de Reynolds bajos. En $\phi = \pi/2$ los vórtices permanecen con menor vorticidad, sin embargo, los vórtices de las esquinas conservan su tamaño, mientras que los vórtices laterales reducen su tamaño. A diferencia del caso isotérmico los vórtices de gran intensidad generados en cada una de las esquinas por el mecanismo M2C conservan su tamaño durante todo el ciclo, lo que provoca que los vórtices tipo M1C asociados a las paredes móviles sean más grandes que en el caso sin transferencia de calor.

La figura 5.7 muestra los campos de temperatura para $Re = 1000$ y $Pe = 720$. En $\phi = 0$

y $\phi = \pi/2$ se observa que el flujo de calor inyectado se difunde de manera uniforme en las cuatro esquinas de la cavidad, sin embargo en $\phi = \pi/2$ se observa que el calor se difunde en una región ligeramente menor que en $\phi = 0$, es decir las regiones sobre las que se difunde en calor ya no cambian mucho entre fases diferentes al aumentar Re , esto se debe a la inercia que lleva el fluido por la alta velocidad de las paredes oscilatorias.

5.4. Conclusiones

Se obtuvo la solución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a la ecuación de la energía, usando elemento finito y un esquema de separación de operadores, para la simulación del flujo dentro de una cavidad con paredes verticales oscilatorias y con flujo de calor en las esquinas. Para el rango de números de Reynolds y números de Peclet explorados se encontró que la principal característica del flujo es la formación de vórtices, aumentando su intensidad a medida que aumentan los números de Reynolds y Peclet. En todos los casos se observó simetría axial. La formación de vórtices fue generada por los mismos dos mecanismos que en el caso isotérmico, pero ambos se modifican por el flujo de calor aplicado en las esquinas. A medida que se aumenta el número de Reynolds la intensidad de los vórtices en las esquinas (M2C) aumenta debido a que la inyección de calor hacia el interior de la cavidad se incrementa, lo cual no ocurre en una cavidad isotérmica. El efecto del flujo de calor desde las esquinas sobre el tamaño de los vórtices es complejo. Para $Re = 50$ el tamaño de los vórtices disminuye con la entrada de calor, mientras que para $Re = 500$ y $Re = 1000$ el efecto es el contrario.

Para números de Reynolds bajos la difusión de calor en el fluido depende de la fase, observándose que cuando las paredes oscilatorias están en su posición más baja y tienen velocidad cero, la región sobre la que se difunde el calor es mayor que cuando las paredes oscilatorias alcanzan su máxima velocidad, esto se debe a que cuando las paredes oscilatorias están en reposo, el fluido tiene un mayor movimiento inercial, difundiendo calor hacia el interior de la cavidad. Cuando las paredes oscilatorias alcanzan su máxima velocidad el fluido pasa por un estado de menor movilidad debido al cambio en la dirección del fluido.

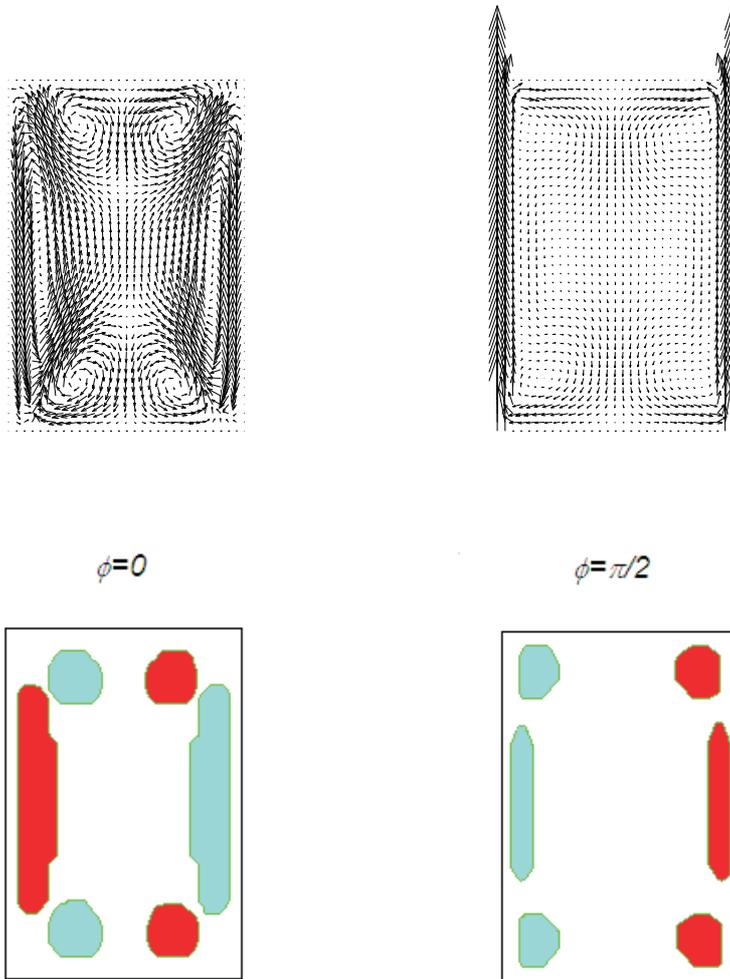


Figura 5.6: Campos de velocidad y área de vórtices para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 1000$ y $Pe = 720$.

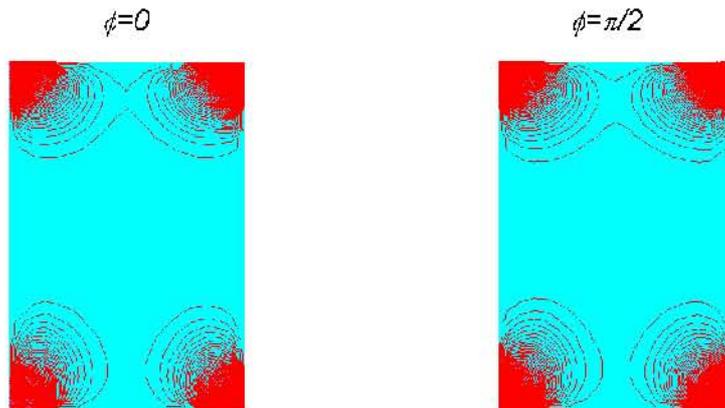


Figura 5.7: Campos de temperatura para $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$ con $Re = 1000$ y $Pe = 720$.

Entre mayor es el número de Reynolds la región sobre la que se difunde el calor, ya no depende tanto de la fase como se observa para el caso $Re = 1000$, esto se debe a la alta velocidad con la que se mueven las paredes oscilatorias, lo que hace que el cambio de dirección en el fluido sea muy rápido. Para números de Reynolds altos se favorece la difusión de calor hacia el interior de la cavidad, ya que el flujo de calor aplicado en las esquinas tiene efectos importantes en el flujo, formando estructuras complejas de vorticidad.

Capítulo 6

Conclusiones generales

En esta tesis se estudian dos dispositivos de transformación de energía, los cuales tienen la característica en común de presentar movimiento de flujos oscilatorios.

En primer lugar se estudió analíticamente un motor termoacústico con un fluido de trabajo compresible eléctricamente conductor. La originalidad de este estudio radica en el hecho de que se incluyó la dependencia de temperatura de todas las propiedades termodinámicas del fluido de trabajo, la ecuación general de estado y el efecto de un campo magnético en la región del *stack*. El análisis se aplicó para agua con cloruro de sodio como fluido de trabajo y se analizó la posibilidad de usar este material como fluido de trabajo en un motor termoacústico. El análisis indica que el efecto del campo magnético provoca que se incremente el gradiente de temperatura requerido para generar la onda termoacústica.

En segundo lugar se estudió numéricamente una cavidad con paredes verticales oscilatorias, para los casos isotérmicos y con transferencia de calor. Para realizar este estudio se desarrolló un código numérico basado en el método de elemento finito con un esquema de separación de operadores para el análisis de flujos incompresibles con transferencia de calor. La cavidad isotérmica se estudió para un rango de $50 \leq Re \leq 1000$ y $0.2 \leq Y \leq 0.8$. La formación de vórtices fue generada por dos mecanismos: M1) El primero se debe al efecto combinado del movimiento cortante de las paredes móviles oscilatorias, el defasamiento del fluido en el interior de la cavidad y la presencia de las paredes fijas inferior y superior.

M2) El segundo se debe al cambio abrupto en la dirección del flujo en las esquinas de la cavidad. La originalidad de este estudio es la capacidad de poder reproducir la formación de vórtices mediante el código numérico sin tener que aplicar perturbación numérica y analizar la formación de estos vórtices dentro de toda la cavidad para las fases cuando las paredes móviles se alejan o se mueven hacia las paredes fijas.

La cavidad con transferencia de calor se estudió para $Re = 50, 500$ y 1000 , con $Pe = 36, 360$ y 720 , respectivamente. En todos los casos $Y = 0.2$. La formación de vórtices fue generada por dos mecanismos: M1C) El primero se debe al efecto combinado del movimiento cortante de las fronteras móviles, el desfaseamiento del movimiento del fluido al interior de la cavidad, a la existencia de las paredes fijas y al flujo de calor aplicado en las esquinas, los vórtices generados por este mecanismo están pegados a las paredes móviles. M2C) El segundo mecanismo se debe al efecto combinado del cambio abrupto en la dirección del flujo del fluido al chocar con las esquinas y al flujo de calor aplicado en las esquinas, los vórtices generados por este mecanismo están pegados a las esquinas. A diferencia del caso isotérmico, para la cavidad con flujo de calor siempre hay vórtices en las cuatro esquinas de la cavidad a lo largo del ciclo y su tamaño aumenta al aumentar el número de Reynolds, estos vórtices son del tipo M2C. En la literatura no se encontró ningún trabajo de cavidades con paredes oscilatorias y flujo de calor.

La originalidad del código numérico es el uso del esquema de separación de operadores el cual permite descomponer el problema en varios subproblemas y su aplicación a problemas de flujos incompresibles oscilatorios con transferencia de calor. Este esquema sugiere la posibilidad de usarlo en problemas más complejos con lo cual se podría descomponer el problema original en subproblemas.

En esta tesis se concluye la primera parte de un proyecto general que tiene como finalidad desarrollar un código numérico que permita la simulación de dispositivos termoacústicos, y cuyo desarrollo se propone como trabajo a futuro. La contribución de este trabajo es el desarrollo de una herramienta numérica para simular flujos incompresibles para diversas condiciones y geometrías, la cual se propone sirva de base para desarrollar la versión compresible del código.

Apéndice A

Documentación del programa que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la energía de manera acoplada

A.1. Información general

El código numérico que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de la energía fue desarrollado en FORTRAN 90 y se encuentra dividido en los siguientes archivos:

1. nsc.f90 contiene el programa principal, en donde se definen los módulos que contienen todas las variables a las que se les asigna memoria dinámica, desde este programa se mandan llamar la subrutina que contiene los datos y la subrutina de preprocesamiento. Dentro de este archivo se encuentra el ciclo iterativo en el tiempo, en el cual se manda llamar cada uno de los subproblemas que resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes. Desde este archivo se pueden guardar las coordenadas de la malla de presión y velocidad, así como los campos de presión, velocidad y temperatura para el último paso de tiempo, en caso de que se requiera guardar campos de presión, velocidad y

temperatura en diferentes pasos de tiempo, hay que utilizar la subrutina de post-procesamiento, la cual también permite graficar con gnuplot el campo de velocidades en cada paso de tiempo. Aquí también se calcula la diferencia relativa de los campos de velocidades entre dos pasos de tiempo consecutivos.

2. `dat.f90` contiene información con la que se resuelve el programa. En este archivo se define el número de componentes, el número de iteraciones en el problema de onda, el número de Prandtl, el número de Reynolds, el paso de tiempo, el tiempo inicial, los nombres de los archivos que contiene la información de la malla, nodos de salida, nodos de temperatura. En el caso de un problema oscilatorio hay que definir la amplitud y la velocidad angular adimensionales. También en este archivo se definen los nodos Dirichlet de velocidad adimensional y la función fuente de ser el caso. Aquí también se definen los datos de la malla de temperatura, sus condiciones de frontera y condiciones iniciales.
3. `prep.f90` se llama la subrutina que permite acceder a la información de la malla de presión, se llama la subrutina que genera la malla de velocidad. Se llaman las subrutinas que calculan los determinantes y las matrices inversas de las matrices jacobianas de cada elemento. Se llaman las subrutinas que determinan los índices de los coeficientes diferentes de ceros fuera de la diagonal principal de las matrices de ensamble. Se llaman las subrutinas que ensamblan las matrices del problema elíptico y el problema de Poisson. Se llaman las subrutinas que calculan la suma de los determinantes de los elementos que rodean a cada nodo en las mallas de presión y velocidad. Se llaman las subrutinas que permiten y se realizan todos los cálculos que no cambian en cada paso de tiempo.
4. `form.f90` contiene el cálculo de diversas integrales, tales como la integral de una función vectorial con su función base, cálculo de la integral del gradiente de una función vectorial con su función base, cálculo de la integral de la presión con la divergencia de la función base, cálculo de la integral de la divergencia de una función vectorial con una función base, cálculo de la integral de una función escalar con una función

base, cálculo de la integral del término convectivo, cálculo de la integral del término de transporte.

5. res.f90 contiene los resolvedores de Poisson y elíptico, que resuelven los sistemas lineales de ecuaciones mediante el método de gradiente conjugado.
6. pelip.f90 obtiene los lados derechos de los problemas elípticos de velocidad y temperatura y manda a llamar las subrutinas que resuelven los problemas elípticos de velocidad y temperatura, obteniendo su solución.
7. pronda.f90 resuelve el problema de onda, calculando los términos de convección, transporte y la integral de línea en los nodos de salida.
8. stokdeg.f90 resuelve el problema de Stokes degenerado mediante el método de gradiente conjugado. Dentro de este problema se resuelve la presión.
9. postp.f90 permite guarda la informacion de los campos de velocidad, presión y temperatura para pasos de tiempo especificados.

A.2. Significado de las cantidades usadas en el programa

A.2.1. Cantidades escalares

x_1	coordenada espacial en la dirección horizontal
ipnodp	número de nodos en la malla de presión (mp)
ipnodv	número de nodos en la malla de velocidad (mv)
ipelep	número de elementos en la mp
ipelev	número de elementos en la mv
nbe	número de aristas con nodos conocidos en la mp
nvff	número de nodos de velocidad total sobre la frontera física de la mp
nvf	número de nodos de velocidad conocidos sobre la frontera de la mp

na	número total de aristas de la mp
ndel	diferencia entre nvff y nvf
nvi	número de nodos interiores sobre la frontera de la mp
nvfv	número de nodos de frontera en la mv
nav	número de aristas formados en el interior de los elementos de presión
ncm	número de componentes
nq	número de iteraciones en el problema de advección
tao	delt/nq
hvr	separación unidireccional entre los nodos donde sale fluido
ntban	parámetro que toma los siguientes valores: para el problema de Poisson $\text{ntban}=7*\text{ipnod}$, para el problema elíptico de velocidad $\text{ntban}=7*\text{ipnodv}-\text{nvfv}$ y para el problema elíptico de temperatura $\text{ntban}=7*\text{ipnodv}-\text{ljs}$
ntbandsd	parámetro que toma los siguientes valores, para el problema de Poisson $\text{ntbandsd}=6*\text{ipnod}$, para el problema elíptico de velocidad $\text{ntbandsd}=6*\text{ipnodv}-\text{nvfv}$ y para el problema elíptico de temperatura $\text{ntbandsd}=6*\text{ipnodv}-\text{ljs}$
vgradphiterm	obtiene la sumatoria del producto término a término de vterm con la transpuesta de agbref
eft	error permitido en el ciclo iterativo
efs	error permitido en el algoritmo de gradiente conjugado para resolver el problema de Stokes degenerado
errt	parámetro de convergencia en el ciclo iterativo
errs	parámetro de convergencia del algoritmo de gradiente conjugado para resolver el problema de Stokes degenerado
re	número de Reynolds
delt	paso de tiempo

t	tiempo
alp	1/delt
nu	1/re
nutm	$\alpha/U_w L$
ampa	amplitud de velocidad de la pared izquierda de la cavidad oscilatoria
ampb	amplitud de velocidad de la pared derecha de la cavidad oscilatoria
w1	velocidad angular de la pared izquierda de la cavidad oscilatoria
w2	velocidad angular de la pared derecha de la cavidad oscilatoria
dotc	calcula $\int_{\Omega} r^m g^m d\Omega$ en el el problema de Stokes degenerado
rho	calcula $\int_{\Omega} r^m g^m d\Omega / \int_{\Omega} \bar{r}^m w^m d\Omega$ en el problema de Stokes degenerado
dot	calcula $\int_{\Omega} r^{m+1} g^{m+1} d\Omega$ en el problema de Stokes degenerado
gam	calcula $\int_{\Omega} r^{m+1} g^{m+1} d\Omega / \int_{\Omega} r^m g^m d\Omega$ en el problema de Stokes degenerado
vmipr	valor mínimo de la presión
e	error permitido en la solución de los sistemas lineales
ncr	parámetro de convergencia (\sum sncri) para la solución de los sistemas lineales
sncri	calcula $\vec{R} \cdot \vec{R}$ en la solución de los sistemas lineales
snpw	calcula $\vec{P} \cdot \vec{W}$ en la solución de los sistemas lineales
ncri	\sum sncri
npw	\sum snpw
alpn	escalar de dirección del sistema lineal
sncri	calcula $\vec{R} \cdot \vec{R}$ corregido en la solución de los sistemas lineales
bet	escalar de dirección corregido del sistema lineal

A.2.2. Cantidades vectoriales y matriciales

x vector de tamaño [ipnodp] que contiene la coordenada axial de cada nodo de la mp

y	vector de tamaño [ipnodp] que contiene la coordenada transversal de cada nodo de la mp
xv	vector de tamaño [ipnodv] que contiene la coordenada axial de cada nodo de la mv
yv	vector de tamaño [ipnodv] que contiene la coordenada transversal de cada nodo de la mv
nve	arreglo de [ipelep×3] que contiene los vértices(3) de cada elemento de la mp
nvev	arreglo de [ipelev×3] que contiene los vértices(3) de cada elemento de la mv
nveti	arreglo de [ipelep×3] que etiqueta con -1 los vértices conocidos de cada elemento de presión
nvevti	arreglo de [ipelev×3] que etiqueta con -1 los vértices conocidos de cada elemento de velocidad
narif	arreglo de [nbe×2] que contiene los pares de nodos (aristas) conocidas de velocidad en la frontera de la mp
nari	arreglo de [na×2] que contiene los pares de nodos (aristas) conocidas y desconocidas de toda la mp
neari	vector de tamaño [na] que etiqueta con 0 las aristas conocidas y con 1 las desconocidas de la mp
narit	arreglo de [ipelep×3] que contiene las aristas(3) de cada elemento de la mp
nariv	arreglo de [nav×2] que contiene los pares de nodos (aristas) del triángulo formado dentro del interior de cada elemento de presión
ntino	vector de tamaño [ipnodp] que etiqueta con 0 los nodos conocidos y con 1 los nodos desconocidos de la mp
g1	arreglo de [nfv×ncm] que almacena los valores de velocidad de los nodos de la frontera Dirichlet

pr	vector de tamaño [ipnodp] que almacena el campo de presión
fte	arreglo de [ipnodv×ncm] que permite agregar una función fuente en el campo de velocidad
djcp	vector de tamaño [ipelep] que almacena el determinante de la matriz jacobiana cada elemento de la mp
mjcip	arreglo de [ipelep×2×2] que almacena la matriz jacobiana inversa de cada elemento de la mp
djcv	vector de tamaño [ipelev] que almacena el determinante de la matriz jacobiana cada elemento de la mv
mjciv	arreglo de [ipelev×2×2] que almacena la matriz jacobiana inversa de cada elemento de la mv
u	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena el campo de velocidad
ui	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena condiciones iniciales o anteriores de velocidad
uitmp	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena temporalmente las condiciones iniciales del primer subproblema
up	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena la solución del segundo subproblema
upn	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena temporalmente la solución anterior en cada ciclo del segundo subproblema
us	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de velocidad
r	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena residual del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico
p	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena la dirección de descenso en la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico
w	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena la dirección de descenso corregida en la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico

f	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena el lado derecho del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico
usp	vector de tamaño [ipnod] que almacena la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson
rp	vector de tamaño [ipnod] que almacena el residual del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson
pp	vector de tamaño [ipnod] que almacena la dirección de descenso en la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson
wp	vector de tamaño [ipnod] que almacena la dirección de descenso corregida en la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson
fp	vector de tamaño [ipnod] que almacena el lado derecho del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson
tet	vector de tamaño [ipnodv] que almacena la solución del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de temperatura
sdean	vector de tamaño [ipnodp] que almacena la suma de los determinantes de cada elemento que rodean a cada nodo de presión
sdeanv	vector de tamaño [ipnodp] que almacena la suma de los determinantes de cada elemento que rodean a cada nodo de velocidad
ascke	vector de tamaño [ntban] que almacena los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de velocidad
iascke	vector de tamaño [ntban] que contiene información de los índices de los elementos diferentes de ceros guardados en el vector ascke
msckfe	arreglo de [ipnodv-nvfv×ncm] que almacena el producto de los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de velocidad por un vector

asckp	vector de tamaño [ntban] que almacena los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema Poisson
iasckp	vector de tamaño [ntban] que contiene información de los índices de los elementos diferentes de ceros guardados en el vector asckp
msckfp	vector de tamaño [ipnodp] que almacena el producto de los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema de Poisson por un vector
ascketm	vector de tamaño [ntban] que almacena los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de temperatura
iascketm	vector de tamaño [ntban] que contiene información de los índices de los elementos diferentes de ceros guardados en el vector ascketm
msckfetm	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena el producto de los elementos diferentes de cero de la matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones del problema elíptico de temperatura por un vector
indi	arreglo de [ntbansd×ncm] que almacena los índices de los elementos diferentes de ceros fuera de la diagonal de la matriz de coeficiente de los diversos problemas
aindi	vector de tamaño [ntbansd] que almacena los valores de los elementos diferentes de ceros fuera de la diagonal de la matriz de coeficiente de los diversos problemas
wv	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena la integral del término de transporte
cv	arreglo de [ipnodv×ncm] que almacena la integral del término de convección
gwci	vector de tamaño [ipnodp] que almacena la integral de una función escalar en el dominio de presión con una función base

- fga arreglo temporal de $[ipnodv \times ncm]$ que almacena la integral de una función vectorial con una función base, la integral del gradiente de una función vectorial con su función base, la integral de la presión con la divergencia de la función base
- wd vector de tamaño $[ipnodp]$ que calcula la integral de la divergencia de una función vectorial con una función base
- phi vector de tamaño $[ipnodp]$ que obtiene la solución del problema de Poisson
- rd vector de tamaño $[ipnodp]$ que almacena la divergencia de la velocidad
- rdt vector de tamaño $[ipnodp]$ que obtiene la nueva divergencia de la velocidad
- gc vector de tamaño $[ipnodp]$ que calcula el residual en el problema de Stokes degenerado
- wc vector de tamaño $[ipnodp]$ que calcula el vector de dirección de búsqueda en el problema de Stokes degenerado
- rhw arreglo de $[ipnodv \times ncm]$ que almacena la solución del problema de onda

A.2.3. Variables auxiliares

- amjciv arreglo de $[2 \times 2]$ que obtiene la matriz inversa de cada elemento
- ampgf arreglo de $[2 \times 2]$ que obtiene la matriz de los productos de las componentes de los gradientes de las funciones base
- vag vector de tamaño $[ipnodp]$ que obtiene la presión
- fteg arreglo de $[ipnodv \times ncm]$ que obtiene una función vectorial en el dominio de velocidad, como pueden ser la función fuente en el problema de Stokes degenerado o la función sobre la que se aplica el problema de onda
- ftev arreglo de $[ipnodv \times ncm]$ que almacena el campo de velocidad durante el problema de onda
- gwc vector de tamaño $[ipnodp]$ que obtiene una función escalar en el dominio de presión

xg	vector temporal de tamaño [ipnodp] y tamaño [ipnodv] que obtiene las coordenadas axial de la mp y la mv, respectivamente
yg	vector temporal de tamaño [ipnodp] y tamaño [ipnodv] que obtiene las coordenadas transversal de la mp y la mv, respectivamente
nveg	arreglo temporal de [ipelep×3] y [ipelev×3] que obtiene los vértices de cada elemento de la mp y la mv, respectivamente
djcg	vector temporal de tamaño [ipelep] y tamaño [ipelev] que calcula el determinante de la matriz jacobiana de cada elemento de la mp y la mv, respectivamente
mjcig	arreglo temporal de [ipelep×2×2] y [ipelev×2×2] que calcula la matriz jacobiana inversa de cada elemento de la mp y la mv, respectivamente
gcx	arreglo auxiliar de [1×2] que obtiene los gradientes de las funciones base
gcw	vector auxiliar de tamaño [2] que transforma gcx a vector
vx	vector auxiliar de tamaño [2] que obtiene $\sum_{\lambda=1}^3 g1(\text{ipelev}, 1)^\lambda [\nabla\psi_\lambda]$ para un elemento dado de la malla de velocidad
vy	vector auxiliar de tamaño [2] que obtiene $\sum_{\lambda=1}^3 g1(\text{ipelev}, 2)^\lambda [\nabla\psi_\lambda]$ para un elemento dado de la malla de velocidad
gczn	arreglo auxiliar de [2×1] que obtiene el el producto [amjciv][gcx] ^t
gcz	arreglo auxiliar de [1×2] que obtiene el el producto [gcx][amjciv]
pterm	vector de tamaño [4] que calcula el efecto de la presión sobre cada uno de los 4 elementos de velocidad que componen a un elemento de presión dado
divs	vector de tamaño [4] que calcula la divergencia de velocidad sobre cada uno de los 4 elementos de velocidad que componen a un elemento de presión dado
uterm	arreglo auxiliar de [2×2] que obtiene la sumatoria del producto de las componentes sobre la cual se aplica el problema de onda con el gradiente de las funciones base y la matriz jacobiana inversa, en el cálculo de los términos convectivos y de transporte

vterm	arreglo auxiliar de $[2 \times 1]$ que obtiene las componentes de velocidad en el cálculo de los términos convectivos y de transporte
vuterm	arreglo auxiliar de $[2 \times 1]$ que obtiene el producto de uterm por vterm en el cálculo de los términos convectivos y de transporte
agbref	arreglo auxiliar de $[1 \times 2]$ que obtiene el producto de los gradientes de las funciones base con la matriz inversa jacobiana en el cálculo del término de transporte
mei	arreglo auxiliar de $[3 \times 2]$ que almacena las tres aristas (dos vértices por arista) de cada elemento de la mp
l1	obtiene el primer nodo global para un elemento dado de la mp o mv
l2	obtiene el segundo nodo global para un elemento dado de la mp o mv
l3	obtiene el tercer nodo global para un elemento dado de la mp o mv
x12	obtiene $x(l1)-x(l2)$ o $xv(l1)-xv(l2)$ para un elemento dado en la mp y mv, respectivamente
x32	obtiene $x(l3)-x(l2)$ o $xv(l3)-xv(l2)$ para un elemento dado en la mp y mv, respectivamente
y12	obtiene $y(l1)-y(l2)$ o $yv(l1)-yv(l2)$ para un elemento dado en la mp y mv, respectivamente
y32	obtiene $y(l3)-y(l2)$ o $yv(l3)-yv(l2)$ para un elemento dado en la mp y mv, respectivamente

A.2.4. Cantidades simbólicas

nomae1	ubicación y nombre del archivo que contiene la información de la malla de presión
nomae2	ubicación y nombre del archivo que contiene la información sobre los nodos donde sale el fluido
nomae3	ubicación y nombre del archivo que contiene la información sobre los nodos con temperatura conocida

nomae4 ubicación y nombre del archivo que contiene la información sobre los nodos con flujo de calor

Contenido del archivo mell.dat

mpf arreglo de $[3 \times 3]$ que contiene las integrales de los productos de las funciones base por el método de simpson

mpgf arreglo de $[9 \times 2 \times 2]$ que contiene las matrices de los productos de las componentes de los gradientes de las funciones base

gbref arreglo de $[3 \times 2]$ que contiene los gradientes de las funciones base

refbasis arreglo de $[3 \times 3]$ que contiene el valor de las funciones base evaluado en los puntos medios del triángulo de referencia

A.3. Subrutinas del programa

1. Subrutina dat: Permite acceder los datos del programa.
2. Subrutina prep: Realiza todo el preprocesamiento de la corrida, estos cálculos se realizan sólo una vez al inicio de la corrida y no cambian con el tiempo.
3. Subrutina coffuf: Define la frontera esencial y la función fuente.
4. Subrutina capcoi: Define el campo de presión y condiciones iniciales de velocidad.
5. Subrutina stokdeg: Resuelve el problema de Stokes degenerado.
6. Subrutina pronda: Resuelve el problema de advección.
7. Subrutina peliptm: Resuelve el problema elíptico de temperatura.
8. Subrutina pelip: Resuelve el problema elíptico de velocidad.
9. Subrutina postp: Realiza el posprocesamiento de datos.
10. Subrutina erv: Calcula el error relativo de velocidad entre dos pasos de tiempo consecutivos.

11. Subrutina ldcmp: Lee los datos de la malla de presión y genera diversos arreglos para esta malla.
12. Subrutina cmvel: Genera los arreglos para la malla de velocidad.
13. Subrutina demjic: Calcula los determinantes y la matriz inversa de la matriz jacobiana de cada elemento.
14. Subrutina csdrnc: Suma de los determinantes de los elementos que rodean a cada nodo en la mp.
15. Subrutina csdrncv: Suma de los determinantes de los elementos que rodean a cada nodo en la mv.
16. Subrutina enmpe: Ensambla la matriz del problema elíptico.
17. Subrutina cmtemp: Define la malla de temperatura y sus condiciones de frontera y velocidad.
18. Subrutina cvf: Contribución al vector fuente por una función. Calcula la integral del producto de una función de dos componentes con las funciones base en la mv, aplicando el método de Simpson.
19. Subrutina cvftra: Contribución al vector fuente por una función. Calcula la integral del producto de una función de dos componentes con las funciones base en la mv, aplicando el método del trapecio.
20. Subrutina cvfgra: Contribución al vector fuente por gradientes de frontera esencial. Calcula la integral del producto del gradiente de una función con los gradientes de las funciones base en la mv.
21. Subrutina amdsc: Almacena una matriz dispersa.
22. Subrutina gracon: Soluciona un sistema lineal con gradiente conjugado.

23. Subrutina graconel: Soluciona el sistema lineal con gradiente conjugado del problema elíptico de velocidad.
24. Subrutina graconeltn: Soluciona el sistema lineal con gradiente conjugado del problema elíptico de temperatura.
25. Subrutina graconpo: Soluciona el sistema lineal con gradiente conjugado del problema de Poisson.
26. Subrutina mmdaauv: Multiplica una matriz dispersa almacenada en un arreglo unidimensional con un vector en graconel.
27. Subrutina mmdaauvtm: Multiplica una matriz dispersa almacenada en un arreglo unidimensional con un vector en graconeltn.
28. Subrutina mmdaauvp: Multiplica una matriz dispersa almacenada en un arreglo unidimensional con un vector en graconpo.
29. Subrutina grava: Calcula la integral del gradiente de una variable y su contribución al vector fuente.
30. Subrutina divva: Calcula la integral de la divergencia de una variable.
31. Subrutina enmpp: Ensamble de la matriz del problema de Poisson.
32. Subrutina cipffb: Calcula la integral del producto de una función de una componente con las funciones base en la mp, aplicando método de Simsons.
33. Subrutina cipffbtra: Calcula la integral del producto de una función de una componente con las funciones base en la mp, aplicando método del trapecio.
34. Subrutina ctcv: Calcula el término de convección por el método del trapecio.
35. Subrutina ctte: Calcula el término de transporte por el método del trapecio.
36. Subrutina ctcvsi: Calcula el término de convección por el método de simpsons.

37. Subrutina `cttesi`: Calcula el término de transporte por el método de simpsons.
38. Subrutina `cidcfde`: Cálculo de los índices diferentes de cero fuera de la diagonal para el problema elíptico de velocidad.
39. Subrutina `cidcfdp`: Cálculo de los índices diferentes de cero fuera de la diagonal para el problema de Poisson.
40. Subrutina `cidcfdetm`: Cálculo de los índices diferentes de cero fuera de la diagonal para el problema elíptico de temperatura.
41. Subrutina `enmpetm`: Ensamble de la matriz del problema elíptico de temperatura.
42. Subrutina `lisnsa`: Lee información sobre los nodos donde sale el fluido.
43. Subrutina `guar`: Guarda y transfiere archivos de velocidad y temperatura con un nombre con número consecutivo hasta un directorio especificado.

A.4. Uso del programa

El archivo `damp.mesh`, contiene la información de la malla de presión. La única parte del programa que deberá modificarse dependiendo de la malla que se utilice es la subrutina `froesc`, en el apartado de fronteras esenciales, en donde se definen los valores de los nodos de velocidad conocidos.

Para compilar el programa se tiene que escribir desde la línea de comandos lo siguiente:

```
fort -o prog nsc.f90 dat.f90 prep.f90 form.f90 res.f90 pelip.f90 pronda.f90 stokdeg.f90  
postp.f90
```

donde `prog` es el nombre que se le dará al ejecutable que se genera durante la compilación y el cual puede ser cualquier otro nombre con o sin extensión.

Apéndice B

Elemento finito triangular

B.1. Elementos triangulares

El triángulo es el polígono bidimensional más simple en el sentido de que tiene el menor número de lados y vértices, lo cual hace fácil elegir nodos lo suficientemente exactos para definir las funciones de forma, las cuales son polinomios completos de algún grado específico.

El estudio de elementos finitos triangulares se comienza considerando el caso de triángulos arbitrarios generalizados Ω_e , como los que se tendrían en cualquier malla de elemento finito y un triángulo de referencia isóceles recto, con lo que el mapeo de un triángulo a otro y la formulación con elemento finito se simplifican considerablemente. Una simple transformación lineal mapea el triángulo generalizado Ω_e en el triángulo de referencia isóceles-recto Ω_r , como se muestra en la figura B.1. Las líneas coordenadas generalizadas 2-1 y 2-3 del elemento Ω_e corresponden a las coordenadas del elemento de referencia $\xi = 0$ y $\eta = 0$, es decir, la transformación lineal describe el mapa desde un sistema generalizado a un sistema de referencia, ya que el mapa es lineal e invertible, el mapa inverso desde Ω_r a Ω_e existe y es también lineal. Esta linealidad implica también que una base polinomial en el plano x_1, x_2 será transformado a una base polinomial en el plano ξ y η y viceversa. La transformación lineal desde Ω_e a Ω_r puede derivarse directamente haciendo que los lados generalizados

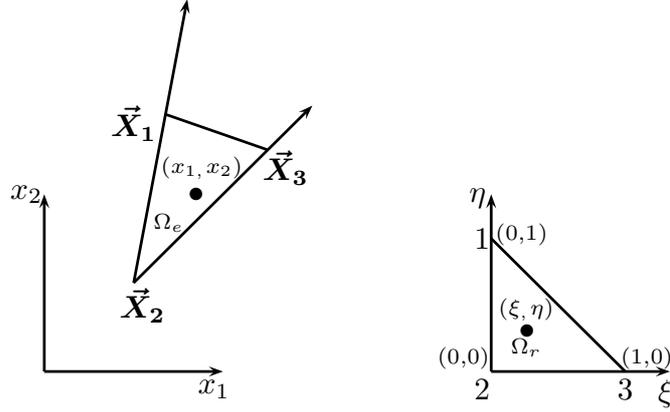


Figura B.1: Mapa lineal desde un elemento triangular Ω_e a un elemento maestro Ω_m y mapa inverso.

mapeen los lados rectos de Ω_r . Las tres funciones de forma lineal para el elemento de referencia isóceles recto Ω_r puede escribirse por inspección, ya que cada uno debe tener el valor unitario en el correspondiente vértice y cero en el lado opuesto a ese vértice, obteniéndose:

$$\psi_1(\xi, \eta) = \eta \quad \psi_2(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad \psi_3(\xi, \eta) = \xi. \quad (\text{B.1})$$

B.2. Integración de elemento finito

El cálculo de las entradas locales de las matrices y vectores definidos por las ecuaciones 3.57 a 3.58, se realiza, mediante integración de elemento finito. Un término muy utilizado en estos cálculos para cada uno de los elementos finitos en que se divide el dominio es el determinante de la matriz jacobiana, el cual esta dado por:

$$Je = x_1(3, 2)x_2(1, 2) - x_1(1, 2)x_2(3, 2), \quad (\text{B.2})$$

así como la inversa de la matriz jacobiana:

$$[Je^{-1}] = \frac{1}{Je} \begin{bmatrix} x_2(1, 2) & -x_1(1, 2) \\ -x_2(3, 2) & x_1(3, 2) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

donde:

$$x_1(1, 2) = x_1(1) - x_1(2), \quad (\text{B.4})$$

$$x_1(3, 2) = x_1(3) - x_1(2), \quad (\text{B.5})$$

$$x_2(1, 2) = x_2(1) - x_2(2), \quad (\text{B.6})$$

$$x_2(3, 2) = x_2(3) - x_2(2). \quad (\text{B.7})$$

La matriz definida por las entradas locales de la ecuación 3.57 se calculan como:

$$k_{ij}^e = \bar{a}Je \int \psi_i \psi_j d\vec{\xi} + \frac{\nu Je}{2} [\nabla \psi_i] [Je^{-1}] [Je^{-1}]^t [\nabla \psi_j]^t, \quad (\text{B.8})$$

donde

$$\int \psi_i \psi_j d\vec{\xi} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla \psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Suponiendo $\partial u / \partial \tilde{n} = 0$, el vector definido por las entradas locales de la ecuación 3.58, se calcula como:

$$f_i^e = \frac{J}{24} \begin{bmatrix} 2fg(e,1) + fg(e,2) + fg(e,3) \\ fg(e,1) + 2fg(e,2) + fg(e,3) \\ fg(e,1) + fg(e,2) + 2fg(e,3) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Propiedades termodinámicas del agua

Propiedades del agua basadas en un ajuste polinomial de los datos obtenidos de las tablas del NIST [49].

- Densidad

$$\rho = -716.61404 + 17.11415T - 0.0614T^2 + 9.51603 \times 10^{-5}T^3 - 5.66569 \times 10^{-8}T^4.$$

- Conductividad térmica

$$k = -4.17851 + 0.04537T - 1.69243T^2 + 3.15489 \times 10^{-7}T^3 - 2.8964 \times 10^{-10}T^4 + 1.00028 \times 10^{-13}T^5.$$

- Calor específico a volumen constante

$$C_v = 1 \times 10^3(-19.31596 + 0.28256T - 1.31 \times 10^{-3}T^2 + 2.94621 \times 10^{-6}T^3 - 3.28012 \times 10^{-9}T^4 + 1.45407 \times 10^{-12}T^5).$$

- Coeficiente de compresibilidad

$$\beta = 1 \times 10^{-6}(-392.565514 + 4.79847T - 0.02315T^2 + 5.52034 \times 10^{-5}T^3 - 6.50677 \times 10^{-8}T^4 + 3.03693 \times 10^{-11}T^5).$$

- Coeficiente de expansión térmica

$$\beta_T = 213.35822 - 2.55991T + 0.01218T^2 - 2.87718 \times 10^{-5}T^3 \\ + 3.36876 \times 10^{-8}T^4 - 1.56533 \times 10^{-11}T^5.$$

- Viscosidad dinámica

$$\mu = 0.06682 - 6.83428 \times 10^{-4}T + 2.8104 \times 10^{-6}T^2 - 5.7765 \times 10^{-9}T^3 \\ + 5.92036 \times 10^{-12}T^4 - 2.41747 \times 10^{-15}T^5.$$

Apéndice D

Simulación numérica de flujos viscosos isentrópicos compresibles

Un modelo para la simulación numérica de flujos viscosos isentrópicos compresibles [57], está dado por el siguiente sistema de ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] - \mu \Delta \vec{u} - \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla p &= \vec{f} \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \\ \rho - \rho_0 &= \varepsilon p, \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f], \\ \vec{g}_1 \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f], \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_*(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \rho(\vec{x}, 0) &= \rho_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{D.1}$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, \vec{u} es el vector velocidad, p es la presión, ρ es la densidad, \vec{f} es la densidad de fuerzas externas, ε es un parámetro pequeño, Ω es el dominio, \vec{g}_1 es la condición de frontera tipo Dirichlet, $\partial\Omega_1$ es la frontera tipo Dirichlet, \vec{u}_* es la condición inicial para velocidad, ρ_0 es la condición inicial para densidad, t es el tiempo, t_f es el tiempo final, \vec{n} es el vector normal unitario y \vec{x} el vector de posición.

Combinando la ecuación de estado $\rho - \rho_0 = \varepsilon p$ con la condición inicial $\rho(0) = \rho_0$, se obtiene:

$$p(0) = 0. \quad (\text{D.2})$$

Combinando la ecuación de continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} = 0$ con la condición de flujo $\vec{g}_1 \cdot \vec{n} = 0$, se obtiene:

$$\int_{\Omega} p(t) d\vec{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (\text{D.3})$$

Para resolver el sistema de ecuaciones D.1 se puede eliminar la presión p , utilizando la ecuación de estado $\rho - \rho_0 = \varepsilon p$, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] - \mu \Delta \vec{u} - \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \varepsilon^{-1} \nabla \rho &= \vec{f} \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{u} &= 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \\ \int_{\Omega} \rho(t) d\vec{x} &= \rho_0 \int_{\Omega} d\vec{x} \quad \forall t \in [0, t_f], \\ \vec{u} &= \vec{g}_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f], \\ \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_*(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \\ \rho(\vec{x}, 0) &= \rho_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

sin embargo, para pequeños valores de ε el problema D.4 está mal condicionado desde un punto de vista computacional, para vencer esta dificultad se regresa al caso incompresible mediante el método de perturbación, lo cual requiere hacer la siguiente suposición:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \vec{u}_k, \quad (\text{D.5})$$

$$\rho = \rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k, \quad (\text{D.6})$$

$$p = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k. \quad (\text{D.7})$$

Susituyendo las expansiones D.5-D.7 en el sistema D.1 y en las relaciones D.2 y D.3, se obtiene:

$$\rho_k = p_k - 1 \quad \forall k \geq 1, \quad (\text{D.8})$$

$$p_k(0) = 0 \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{D.9})$$

$$\int_{\Omega} p(t) d\vec{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f], \quad \forall k \geq 0, \quad (\text{D.10})$$

y para $k = 0, 1$ y 2 ,

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right] - \mu \Delta \vec{u}_0 + \nabla p_0 = \vec{f} \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \quad (\text{D.11})$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_0 = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f],$$

$$\int_{\Omega} p_0(t) d\vec{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f],$$

$$\vec{u}_0 = \vec{g}_1 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f],$$

$$\vec{u}_0(\vec{x}, 0) = \vec{u}_*(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega,$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right] - \mu \Delta \vec{u}_1 + \nabla p_1 = \vec{f}_1 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \quad (\text{D.12})$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_1 = c_1 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f],$$

$$\int_{\Omega} p_1(t) d\vec{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f],$$

$$\vec{u}_1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f],$$

$$\vec{u}_1(\vec{x}, 0) = \vec{u}_*(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega,$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_2 + \vec{u}_2 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right] - \mu \Delta \vec{u}_2 + \nabla p_2 = \vec{f}_2 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f], \quad (\text{D.13})$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_2 = c_2 \quad \text{en } \Omega \times [0, t_f],$$

$$\int_{\Omega} p_2(t) d\vec{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f],$$

$$\vec{u}_2 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \times [0, t_f],$$

$$\vec{u}_2(\vec{x}, 0) = \vec{u}_*(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \Omega,$$

donde c_1 y f_1 están definidos por

$$c_1 = -\rho_0^{-1} \left[\frac{\partial p_0}{\partial t} + \nabla \cdot (p_0 \vec{u}_0) \right], \quad (\text{D.14})$$

$$f_1 = \frac{\mu}{3} \nabla c_1 - p_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right], \quad (\text{D.15})$$

y c_2 y f_2 están definidos por

$$c_2 = -\rho_0^{-1} \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla \cdot (p_1 \vec{u}_0 + p_0 \vec{u}_1) \right], \quad (\text{D.16})$$

$$f_2 = \frac{\mu}{3} \nabla c_2 - \rho_0 \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_1 - p_0 \left[\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right] - p_1 \left[\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 \right]. \quad (\text{D.17})$$

Los problemas D.11-D.13 contiene ecuaciones del tipo Navier-Stokes incompresibles ya que en los problemas D.12 y D.13 la divergencia de la solución, aunque diferente de cero, es una función dada de x y t , por lo que estos problemas se pueden resolver usando la metodología basada en:

- Esquemas de separación de operadores.
- Subproblemas de advección difusión.
- Subproblemas de Stokes.
- Aproximaciones de elemento finito.

Apéndice E

Publicaciones derivadas de esta tesis

A continuación se incluyen copias de las publicaciones en revistas de arbitraje internacional que se han obtenido de esta tesis.

- G. Ovando, G. Huelsz, E. Ramos and S. Cuevas. Effect of a magnetic field on the linear stability of a thermoacoustic oscillation. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2005. Vol. 30. pp. 137-149.
- G. Ovando, H. Juárez, G. Huelsz, E. and Ramos. Vortex formation in a cavity with oscillating walls. Enviado a *Physics of Fluids* para su publicación.

Effect of a magnetic field on the linear stability of a thermoacoustic oscillation

G. Ovando, G. Huelsz, E. Ramos and S. Cuevas
Center for Energy Research-UNAM, Ap.P. 34, Temixco, Mor. 62580, Mexico

*Corresponding author ■

Abstract

The effect of a constant magnetic field on the stability of a compressible, electrically conducting fluid contained in a duct with an axial temperature gradient is studied. A plausible physical model of the phenomenon is presented and its linear stability is analyzed. The study includes the consideration of a general state equation for the working fluid and the variation of its physical properties with temperature. An expression for the critical thermal gradient required to generate thermoacoustic standing waves is found as a function of the external magnetic field. The potential application of this work is in the context of thermoacoustic prime movers with magnetohydrodynamic transducers.

1. Introduction

The use of thermoacoustic prime movers with electrically conducting working fluids under an applied magnetic field has been proposed for developing simple systems that transform heat into electric power [1]. For this reason, these devices can potentially be used as solar energy to electricity converters and, depending on their efficiency, they could be an alternative to photovoltaic cells. Also, due to its simplicity and the absence of moving rigid components, thermoacoustic electricity generation can conveniently be used in space applications.

At present, the properties of thermoacoustic-magnetohydrodynamic systems are practically unknown, and only scattered studies of specific geometries, materials, and physical conditions have appeared in the literature. Here we make an analysis of the linear stability of a thermoacoustic prime mover when a constant magnetic field is applied at the stack region. For this task, we use the stability theory developed by Rivera-Álvarez and Chejne [2]. In short, this theory considers the linearized conservation equations for an ideal gas and develops a stability criterion for an oscillatory solution using the temperature gradient in the stack as the bifurcation parameter. We extend this theory in three directions. First, we adapt it to consider a fluid

with a general state equation. Second, we consider that the physical properties of the working fluid vary with temperature. This consideration is important if we aim to build a more realistic model, since in most cases, thermoacoustic prime movers work with large temperature gradients (~ 100 K/cm) and for most fluids of interest, considering constant physical properties is a gross oversimplification. Third, we assume that the working fluid is an electrically conducting liquid like a liquid metal, a molten salt, or an electrolyte, and explore the effect that the presence of a magnetic field has on the critical temperature gradient.

2. Formulation

The balance equations for the unsteady flow of a compressible Newtonian fluid can be conveniently written in the following form [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial C_v T}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial C_v T}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \Phi. \quad (3)$$

In addition, we consider a general form of the state equation:

$$\rho = \rho(p, T). \quad (4)$$

Here, the flow velocity is denoted by u_i , the pressure by p , the fluid density by ρ , the temperature by T , and the external body force by f_i . In Eq. (3), Φ denotes a function that includes viscous and other sources of dissipation such as Joule heat. In turn, μ , λ , C_v , and k are, respectively, the dynamic viscosity, the second viscosity coefficient, the heat capacity at constant volume, and the heat conductivity of the fluid. These properties are considered to be functions of temperature and consequently will vary in space and time. In writing the energy equation, a caloric equation of state of the form $\delta e = C_v \delta T$ has been assumed, with e the internal energy per unit mass.

If the fluid is electrically conducting and flows in the presence of a magnetic field, the balance and state equations (Eqs. [1–4]) must be complemented with Maxwell equations in the quasistatic approximation and Ohm's law [3, 4], namely,

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial B_i}{\partial t}, \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial x_j} = \mu_0 J_i, \quad \frac{\partial B_k}{\partial x_k} = 0, \quad (5)$$

and

$$\mathbf{J}_i = \sigma (E_i + \varepsilon_{ijk} u_j B_k), \quad (6)$$

where the symbols B_i , E_i , and J_i denote the magnetic induction, the electric field, and the electric current density, respectively. In the previous equations, μ_0 is the magnetic permeability of vacuum and σ is the electric conductivity of the working fluid.

In this case, the external body force f_i in the momentum equation (2) is given by the Lorentz force, which can be written as:

$$f_i = \varepsilon_{ijk} J_j B_k. \quad (7)$$

In the flow of an electrically conducting fluid under a magnetic field, the induced electric currents that circulate in the medium represent a source of dissipation, namely, the Joule heat. In this work, Joule heat will be neglected since induced currents are expected to be small. We also assume that viscous dissipation does not alter substantially the energetic balance of the system and will be neglected. Therefore, we set $\Phi = 0$ in Eq. (3).

In our model, a two-dimensional duct closed at one end and open at the other, is assumed to contain the working fluid. Its total length is S and the coordinate x is defined along the axial direction, measured from the open end, while coordinates y and z run perpendicular and across to the duct, respectively. A stack composed of electrically insulating thin plates, Δx long, separated by a distance s is located at x_s . The wall temperature is low in the region near the open end, high near the closed end, and presents a gradient zone in the stack. As is well known, under favorable conditions, a large enough temperature gradient can generate an oscillatory motion of the fluid in the axial direction and, as an approximation, it is reasonable to assume that the fluid velocity is unidirectional, that is, $u_i = (u, 0, 0)$. We assume that an external uniform magnetic field, B_0 , in the vertical direction y , is imposed externally to the duct, affecting the temperature gradient region and influencing the linear stability of the fluid through the Lorentz force. This situation is sketched in Figure 1.

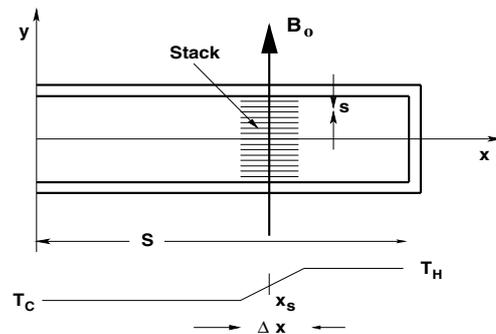


Figure 1 The thermoacoustic duct in the presence of a transversal magnetic field.

The relative motion of the fluid and the magnetic field induces an electric current perpendicular to the plane of motion (J_z) which, in turn, interacts with the applied field and creates a Lorentz force in the streamwise direction. On the other hand, this current will also induce a magnetic field in the streamwise direction. In this work, we assume that the induced field is much smaller than the applied field and, consequently, can be neglected. In dimensionless terms, this means that the magnetic Reynolds number $Rm = \mu_o \sigma U s$ is much smaller than unity, where U is a characteristic flow velocity. This approximation holds in most industrial and laboratory flows with liquid metals, molten salts, and electrolytes [4] and implies that the magnetic field is not modified by the motion of the fluid. Mathematically, it means that the magnetic field is uncoupled from the fluid velocity and governed by the magnetostatic equations which, evidently, are satisfied by our initial assumption, $B_i = (0, B_o, 0)$. Since the electric current exists in the direction perpendicular to the flow motion, strictly speaking, it is not possible to propose a self-consistent two-dimensional magnetohydrodynamic problem. Therefore, current paths must be modeled in some way. Here, we assume the existence of lateral conducting walls at distant positions $z = \pm z_o$, connected, in principle, to an external electric circuit; therefore, there must exist an electric field E_z , the value of which depends on the external electric circuit conditions. As the magnetic field remains unperturbed, Faraday's law of induction reduces to $\epsilon_{ijk} \partial E_k / \partial x_j = 0$ and the electric field becomes potential. In fact, it can be shown that E_z is spatially constant and is at most a function of time [5]. If we assume that open circuit conditions prevail, the electric field can be easily found since the electric current density integrated in the cross section must be zero (the current recirculates within the fluid), that is,

$$\int_0^s J_z dy = \int_0^s \sigma(E_z + uB_o) dy = 0. \quad (8)$$

In this case, therefore, the electric field is given by $E_z = -\bar{u}B_o$, where \bar{u} is the average velocity in the cross section between the plates. In general, for arbitrary external electric conditions we can follow an equivalent circuit approach [4, 6] and introduce the load factor, K , defined as

$$K = -\frac{E_z}{\bar{u}B_o}. \quad (9)$$

The constant K is positive and may take values between 0 and 1, according to the electric circuit conditions. For short circuit conditions (zero external resistance), we have $K = 0$ since E_z vanishes when the lateral walls are connected to a perfect conductor. In turn, for open circuit conditions (external resistance $\rightarrow \infty$), $K = 1$ since the electric current forms closed loops inside the fluid and its integral in the cross section vanishes, as it was previously shown. Intermediate values of K represent finite external loads.

Upon using the considerations described before, the system of Eqs. (1–7) reduces to:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + B_o^2 \sigma (-K\bar{u} + u) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_v u \frac{\partial T}{\partial x} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho u T \frac{\partial C_v}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

The form of the equation of state remains unchanged.

It is considered that the perturbations of the axial velocity, the pressure, and the density are functions of the axial and transversal coordinates, but the perturbation of the temperature is only a function of the transversal coordinate. The physical justification for omitting the axial dependence in the temperature perturbation lies in the fact that the modification in the transversal temperature distribution due to the heat transfer from the walls is larger than that in the axial direction due to the acoustic wave. This simplification is crucial in the development of the theory. Therefore,

$$\begin{aligned} u &= u'(x, y, t), & p &= p_o + p'(x, y, t), \\ T &= T_o + T'(y, t), & \text{and } \rho &= \rho_o + \rho'(x, y, t). \end{aligned} \quad (14)$$

The primed variables are assumed to be small in the sense that their products can be neglected. Note that given the assumed physical conditions, the unperturbed state is defined by zero velocity, constant pressure p_o , and a temperature distribution T_o given by

$$T_o = \begin{cases} T_c & 0 \leq x \leq x_s - \Delta x/2, \\ T_c + \nabla T(x - x_s + \Delta x/2) & x_s - \Delta x/2 < x \leq x_s + \Delta x/2, \\ T_H = T_c + \nabla T(\Delta x) & x_s + \Delta x/2 < x \leq S, \end{cases} \quad (15)$$

where T_c and T_H are constants and it is assumed that $T_c < T_H$. The temperature gradient is $\nabla T = (T_H - T_c)/\Delta x$.

With these conditions, it follows that,

$$\rho_o = \rho_o(T_o, p_o) = \rho_o(x). \quad (16)$$

The equations governing the perturbations are:

J. Non-Equilib. Thermodyn. · 2005 · Vol. 30 · No. 2

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{\rho_o}{\rho_o C_v} - \frac{\rho_o}{g_1} \right) \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{g_2}{g_1} \frac{k}{\rho_o C_v} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{g_2}{g_1} \frac{T_o}{C_v} u' \frac{\partial C_v}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_o} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\mu}{\rho_o} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - (\bar{u}' - Ku') \frac{B_o^2 \sigma}{\rho_o} \\ & + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial u'}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{2\partial \mu}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -u' \nabla T + \frac{k}{\rho_o C_v} \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} - \frac{\rho_o}{\rho_o C_v} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{T_o}{C_v} u' \frac{\partial C_v}{\partial x}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x}. \quad (20)$$

We have used the expression $\delta\rho' = g_1\delta p' + g_2\delta T'$, where g_1 and g_2 are respectively the compressibility and the thermal expansion coefficient of the working fluid defined by

$$g_1 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T \quad \text{and} \quad g_2 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p. \quad (21)$$

The boundary conditions are:

$$p'(0, y, t) = \partial p'(S, y, t) / \partial x = 0, \quad (22)$$

$$u'(S, y, t) = \partial u'(0, y, t) / \partial x = u'(x, 0, t) = u'(x, s, t) = 0, \quad (23)$$

$$T'(0, t) = T'(s, t) = 0. \quad (24)$$

We assume that the solutions to Eqs. (17–20) can be expressed in terms of products of harmonic functions of the longitudinal and transversal coordinates. Following Rivera-Álvarez and Chejne [2], we propose the following *ansatz* and solve for the unknown functions C_i ,

$$u' = C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (25)$$

$$p' = C_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) + C_4 \sin\left(\frac{n\pi x}{2S}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (26)$$

$$T' = C_3 \sin\left(\frac{m\pi y}{s}\right), \quad (27)$$

$$C_4 = \left(-(\lambda + \mu) \frac{n\pi}{2S} + \frac{\partial \mu}{\partial T} \nabla T \cot \frac{n\pi x}{2S} \right) C_1. \quad (28)$$

Here, the coefficients C_i are functions of time. Note that Eqs. (25–28) constitute the simplest model that satisfies all boundary conditions. Substituting these expressions in the equations for the perturbations, and integrating in y between 0 and s and in x between $x_s - \Delta x/2$ and $x_s + \Delta x/2$, we get the following equation for the coefficients:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = L_{ij} C_j, \quad (29)$$

where $C_i = (C_1, C_2, C_3)^T$ and the entries of the matrix L_{ij} are defined in the Appendix.

If we consider zero magnetic field, an ideal gas as the working fluid ($p_o/\rho_o = RT_o$, $g_2/g_1 = -p_o/T_o$ and $1/g_1 = RT_o$), and fluid properties independent of temperature, L_{ij} reduces to the corresponding simplified expression [2].

The characteristic equation is $L_{ij} - \alpha \delta_{ij} = 0$ and the equation for α is

$$\alpha^3 + P_2 \alpha^2 + P_1 \alpha + P_o = 0, \quad (30)$$

where the coefficients P_i are given in terms of L_{ij} . We are interested in the critical value of ∇T such that the system undergoes a transition from no motion to an oscillatory state. This condition is met when the three roots of the previous equation have $Re(\alpha) = 0$ and $Im(\alpha) \neq 0$. Using the following relations between the roots and the coefficients, known as Vieta's Formulas [7]

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -P_2, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3 = P_1, \quad \text{and} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -P_o, \quad (31)$$

the stability condition reduces to

$$P_1 P_2 = P_o. \quad (32)$$

The solution to this equation in terms of ∇T yields the critical value ∇T_c .

3. Example

In this section we apply the theory developed above to the case of liquid water with sodium chloride and analyze the possibility of using this material as the working fluid in a thermoacoustic tube. Although the electric conductivity of water is low compared to liquid metals, water is a much more convenient working liquid for performing relatively simple experiments. Also, its electric conductivity can be considerably increased by adding a small quantity of sodium chloride, with a minor change in other properties. The thermodynamic properties of water used in the calculations are obtained from the International Association for the Properties of Water and Steam, available from the NIST website [8]. All properties of water required in the calculation are available from these tables except for λ . Given that the information of the bulk viscosity of water is insufficient, we shall consider that the Stokes hypothesis is valid and take $\lambda = -2/3\mu$.

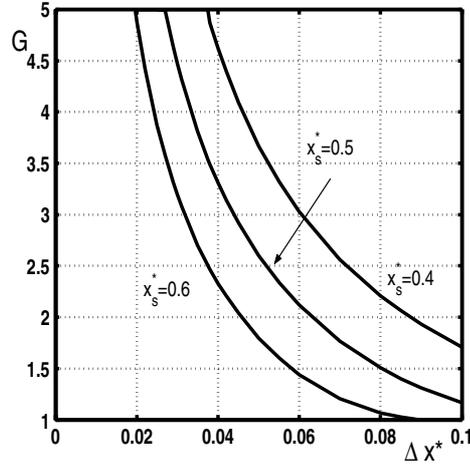


Figure 2 G as a function of the nondimensional length of the stack (Δx^*). Water is the working fluid. $T_s = 455$ K, $P_s = 150 \times 10^5$ Pa, $S = 1$ m, $s^* = 5$, for three different axial positions of the stack ($x_s^* \equiv x_s/S$).

In making the analysis, we have considered only those cases where the fluid remains in liquid state. Thus, given a length of the stack (Δx) and a temperature at its central position (T_s), there is a maximum axial temperature gradient allowed. We denote this limit by ∇T_{lim} . In all our calculations, we have excluded situations where the fluid might undergo phase changes. We always have i.e., $\nabla T_{lim} > \nabla T_c$ and results are reported in terms of the factor

$$G = \nabla T_{lim} / \nabla T_c > 1. \quad (33)$$

Before discussing the dependence of the stability of the system on the magnetic field, it is instructive to describe the purely dynamic stability as a function of geometrical parameters. The dependence of the factor G as a function of the nondimensional length of the stack, $\Delta x^* \equiv \Delta x/S$, for three axial positions of the stack around the short-engine optimal position in terms of the acoustic power [9] is shown in Figure 2 for a specific set of thermodynamic and geometric parameters. The factor G is a monotonously decreasing function of Δx^* . This result indicates that at this rather high pressure, large enough G is reached for $\Delta x^* \leq 0.1$, which is the typical length of the stack in a standing-wave thermoacoustic device [10].

In Figure 3, G is plotted as a function of the nondimensional plate separation, $s^* \equiv s/\delta_k$. The scale δ_k is the thermal penetration depth defined by $\delta_k \equiv \sqrt{2k/(\rho C_p \omega)}$ where C_p is the heat capacity at constant pressure. It can be seen that G increases monotonically and saturates for $s^* \sim 13$. For $s^* = 5$, the theoretical optimal separation [11], G is large enough for acoustic wave production.

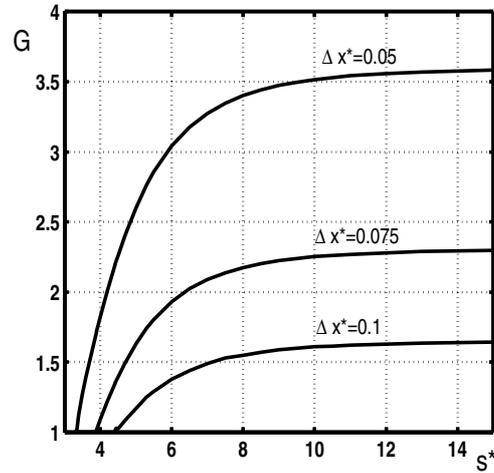


Figure 3 G as a function of the nondimensional separation between plates in the stack (s^*). Water is the working fluid. $T_s = 455$ K, $P_s = 150 \times 10^5$ Pa, $S = 1$ m. For three different nondimensional lengths of the stack (Δx^*).

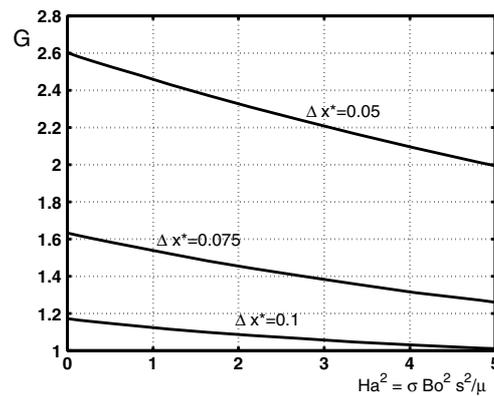


Figure 4 G as a function of the Hartmann number (Ha). Water with sodium chloride is the working fluid. $T_s = 455$ K, $P_s = 150 \times 10^5$ Pa, $S = 1$ m, $s^* = 5$, $x_s^* = 0.5$, $K = 0.5$ and three different nondimensional lengths of the stack (Δx^*).

A convenient dimensionless parameter to describe the effect of the magnetic field is the Hartmann number, defined by $Ha = sB_o \sqrt{\sigma/\rho\nu}$. The square of this number gives an estimate of the ratio of magnetic forces to viscous forces [4]. Figure 4 presents G as a function of Ha with $K = 0.5$ and considering a concentration of the aqueous

sodium chloride of 0.1 gM/l which is a linear function of temperature of the form [12] $\sigma = 10 + 0.26(T - 298.16) \text{ 1}/\Omega\text{m}$. In the range of Ha explored, G is an approximately linear monotonously decreasing function of Ha for the three cases of Δx^* explored. The decreasing trend of G as a function of Ha reflects the fact that the Lorenz force opposes the motion of the working fluid in the tube and therefore for a given device and working fluid, an increase of the magnetic field raises the temperature gradient required to trigger the thermoacoustic wave.

4. Concluding remarks

The present study aims to determine the influence of a magnetic field on the stability of thermoacoustic oscillations in a tube, and the theory presented can be applied to determine the conditions for generating thermoacoustic waves when the working fluid is an electrically conducting liquid. We have included in the analysis the temperature dependence of all thermodynamic properties of the working fluid. As expected, the theory indicates that the average temperatures and pressures required for the onset of oscillatory motion are much larger than those with a gas in a device with similar geometrical magnitudes. In many cases, the thermodynamic conditions required for generating the thermoacoustic wave will require working close to the critical point. In the example, we describe the stability of water with sodium chloride as the working fluid. This example was chosen since most of its thermodynamic properties are known with the notable exception of the bulk viscosity. This property is closely associated with the acoustic attenuation and it might play an important role in thermoacoustic studies. Unfortunately, data are scarce even for water. The dissipative effect of the magnetic field results in the increase of the temperature gradient required for generating the thermoacoustic wave. It has been found through experimental observations in air that theories available in the literature underestimate the critical temperature gradient. If this observation applies to thermoacoustic ducts with liquids as working fluids, then $G > 1$ would be only a necessary but not a sufficient criterion for actually observing the thermoacoustic effect in a duct with water as the working fluid. The analysis presented is an example of a promising field which has not been explored well enough at present, namely, the use of liquids at thermodynamic conditions close to the critical point as thermoacoustic working fluids.

Acknowledgements

This research was partially supported by DGAPA-UNAM and CONACYT under projects IN104702 and GU41347, respectively. Drs. Allan Harvey and Mike Moldover from NIST provided useful information on physical properties of water and water solutions.

Appendix

The entries of matrix L_{ij} defined in Eq. (29) are:

J. Non-Equilib. Thermodyn. · 2005 · Vol. 30 · No. 2

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{n^2 \pi^2}{4S^2} \left(\frac{\Gamma_7}{\Gamma_2} - \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_2} \right) - \frac{m^2 \pi^2}{s^2} \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_2} + (1-K) B_o^2 \frac{\Gamma_9}{\Gamma_2} - \frac{n\pi}{2S} \frac{\nabla T}{\Gamma_2} (\Gamma_8 + \Gamma_{10}), \\
L_{12} &= -\frac{n^2 m \pi^2}{4S} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}, \\
L_{13} &= 0, \\
L_{21} &= \frac{n^3 \pi^2}{4S^3 m} \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_4} - \frac{n^2 \pi}{2Sm} \nabla T \frac{\Gamma_{14}}{\Gamma_4} - \frac{n^3 \pi^2}{4S^3 m} \frac{\Gamma_{26}}{\Gamma_4} - \frac{mn\pi^2}{Ss^2} \frac{\Gamma_{24}}{\Gamma_4} \\
&\quad + \frac{n}{Sm} B_o^2 (1-K) \frac{\Gamma_{15}}{\Gamma_4} - \frac{n^2 \pi}{2Sm} \nabla T \frac{\Gamma_{16}}{\Gamma_4} + \frac{n(\nabla T)^2}{Sm} \frac{\Gamma_{18}}{\Gamma_4} \\
&\quad - \frac{n^2 \pi}{2S^2 m} \nabla T \frac{\Gamma_{25}}{\Gamma_4} + \frac{m\pi}{S} \nabla T \frac{\Gamma_{19}}{\Gamma_4} - \frac{2}{m\pi} \nabla T B_o^2 (1-K) \frac{\Gamma_{20}}{\Gamma_4} \\
&\quad - \frac{n}{Sm} (\nabla T)^2 \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_4} - \frac{n}{Sm} \left(p_o \frac{\Gamma_{22}}{\Gamma_4} - \frac{\Gamma_6}{\Gamma_4} \right), \\
L_{22} &= -\frac{n^2 \pi^2}{4S^2} \frac{\Gamma_3}{\Gamma_4} + \frac{n\pi}{2S} \nabla T \frac{\Gamma_{17}}{\Gamma_4}, \\
L_{23} &= \frac{2m\pi}{s^2} \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_4}, \\
L_{31} &= -\frac{\nabla T}{\Delta x} (\Gamma_{27} + \Gamma_2) + \frac{p_o}{\Delta x} \frac{n\pi}{2S} \Gamma_5, \\
L_{32} &= 0, \\
L_{33} &= -\frac{m^2 \pi^2}{s^2 \Delta x} \Gamma_{28},
\end{aligned}$$

where the Γ 's are:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\rho_o} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_2 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_3 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda + \mu}{\rho_o} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_4 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_5 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{C_v \rho_o} \sin Nx \, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_6 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\rho_o}{g_1} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_7 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda + \mu}{\rho_o} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_8 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \mu}{\partial T} \cot Nx \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_9 &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sigma}{\rho_o} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{10} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_{11} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_o} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{12} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mu}{\rho_o} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{13} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{(\lambda + \mu)^2}{\rho_o} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_{14} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\lambda + \mu}{\rho_o} \frac{\partial \mu}{\partial T} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{15} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{(\lambda + \mu)\sigma}{\rho_o} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_{16} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \tan Nx \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_{17} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \mu}{\partial T} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{18} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)^2 \cot Nx \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{19} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \mu \frac{\partial \mu}{\partial T} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{20} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sigma}{\rho_o} \frac{\partial \mu}{\partial T} \cos Nx \, dx, \\
\Gamma_{21} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} + 2 \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \frac{\partial \mu}{\partial T} \sin Nx \, dx, \\
\Gamma_{22} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{g_2}{g_1} \frac{1}{C_v \rho_o} \sin Nx \, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{g_2}{g_1} \frac{k}{C_v \rho_o} dx, \\ \Gamma_{24} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\rho_o} \sin Nx dx, \\ \Gamma_{25} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho_o} \frac{\partial \mu}{\partial T} \cos Nx dx, \\ \Gamma_{26} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)}{\rho_o} \sin Nx dx, \\ \Gamma_{27} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{T_o}{C_v} \frac{\partial C_v}{\partial T} \cos Nx dx, \\ \Gamma_{28} &\equiv \int_{x_0}^{x_1} \frac{k}{C_v \rho_o} dx.\end{aligned}$$

In the previous equations, $N = n\pi/2S$.

References

- [1] Swift, G.W., A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer, *J. Acoust. Soc. Am.*, 83 (1988), 350–361.
- [2] Rivera-Alvarez, A., Chejne, F., Stability analysis of thermoacoustic engines, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 26 (2001), 53–71.
- [3] Sutton, G.W., Sherman, A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, Mcgraw-Hill, New York, 1965.
- [4] Hughes, W.F., Young, F.J., *The Electromagnetodynamics of Fluids*, Krieger Publishing, 1989.
- [5] Moffatt, H.K., Toomre, J., The annihilation of a two-dimensional jet by a transverse magnetic field, *J. Fluid Mech.*, 83 1 (1967), 65–82.
- [6] Ibáñez, G., Cuevas, S., López de Haro, M., Optimization analysis of an alternate magnetohydrodynamic generator, *Energy Conv. Mngmt.*, 43 (2002), 1757–1771.
- [7] Bold, B., *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them*, Dover, New York, 1989. See also Weisstein, E.W., Vieta's Formulas. From Math World – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html>.
- [8] National Institute of Standards and Technology, <http://www.nist.gov/srd/nist10.htm>.
- [9] Swift, G.W., Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.*, 84 No 4 (1988), 1145–1180.
- [10] Garret, S.L., Thermoacoustic engines and refrigerators, *Am. J. Phys.*, 72 No 1 (2004), 11–17.
- [11] Swift, G.W., *Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators*, Acoustical Society of America, New York, 2002.
- [12] Quist, A.S., Marshall, W.L., Electrical conductances of aqueous sodium chloride solutions from 0 to 800° and at pressures to 4000 bars, *J. Phys. Chem.*, 72 No 2 (1968), 684–703.

Vortex formation in a cavity with oscillating walls

G. Ovando^{a,*}, H. Juárez^b, G. Huelsz^a and E. Ramos^a

^aCentro de Investigación en Energía, UNAM, Ap. P. 34, Temixco, Mor. 62580, Mexico

^bDepartamento de Matemáticas UAM-I, Ap. P. 55-534, 09340 Mexico D.F. Mexico

February 23, 2006

Abstract

The vortex formation in a two-dimensional, Cartesian cavity is studied numerically. The governing equations were solved with a finite element method combined with an operator splitting scheme. We analyzed the behavior of vortical structures occurring inside a cavity with an aspect ratio of height to width of 1.5 for three different displacement amplitudes of the vertical oscillatory walls (amplitude/width = $Y = 0.2, 0.4$ and 0.8) and Reynolds numbers based on the cavity width of 50, 500 and 1000. Two vortex formation mechanisms are identified: a) the shear, oscillatory motion of the moving boundaries coupled with the fixed walls that provide a translational symmetry-breaking effect and b) the sharp changes in the flow motion when the flow meets the corners of the cavity. The vortices cores were identified using the Jeong-Hussain criterium and it is found that they occupy smaller areas as the Reynolds number increases. All flows studied are cyclic symmetric and are also symmetric with respect to the vertical axis dividing the cavity in two sides, this last symmetry is lost for $Re = 1000$ and $Y = 0.8$. In this case, the unbalance between the vortices on each side of the mid-vertical line generates a vortex that occupies the central part of the cavity.

1 Introduction

The problem of a piston moving in a cylinder has been the topic of a range of theoretical and experimental studies. Not only because it is present in many practical situations, such as water pumps, internal combustion engines (Lee and Hochgreb [21]), oscillating flow devices (Castrejon *et al.* [19]), vortex ring generation devices used for flow control (Glazer [20] and Allen and Auvity [16]), and related to other problems like the flow of blood near valves (Bellhouse and Talbot [17]), but also because its importance in fundamental science. Studies have been done both for a moving cylinder wall with fixed piston, or for a moving piston. According

*Corresponding author. Tel.: +52+55+562-29711; Fax: +52+55+562-29741; E-mail address: geoc@cie.unam.mx

to Tabaczynski *et al.* [23], the flow near the corner is equivalent in both cases provided $\sqrt{\nu t}/U_w T \ll 1$, where ν is the kinematic viscosity, t is the time, U_w is the instantaneous piston speed, and T is the period. The pioneering experimental observations of Tabaczynski *et al.* [23] have shown that the fluid motion is a sink-type flow when the cylinder wall retreats from the piston and a spiral ring vortex motion near the piston face and cylinder wall interface when the cylinder wall moves toward the piston, both for constant and oscillatory velocity of the walls.

The flow in the vicinity of the corner as the wall moves towards a fixed piston with a steady motion was studied theoretically by Taylor [22] and Batchelor [18], assuming that the inertial effects can be neglected. In this region, the velocity gradients are large and a discontinuity exists in the velocity field at the junction of the moving piston relative to the wall. Also, close to the corner, viscous forces are much larger than inertial ones. Using an order of magnitude argument Batchelor [18] indicates that the distance r from the corner to where a steady viscous solution is applicable is of the order of $r \ll \nu/U_w$, but experiments of Allen and Chong [24] have shown that the validity of the viscous solution is significantly larger than ν/U_w . Analogous studies for oscillatory motion are not found in the literature.

The study of the ring vortex flow that is formed when the wall moves toward the the piston, has generated great interest. Hughes and Gerrard [26] investigated the flow near a moving piston and the flow near a free surface, both started from rest. They found it difficult to determine the critical Reynolds number for the vortex ring formation using the piston. For the flow near a free surface starting from rest, with a very short transition to constant speed, they found a critical Reynolds number, based on free surface speed and diameter, of about 450 above which a ring vortex was produced just below the surface during the first diameter of travel. At higher Reynolds number (~ 2500) more than one vortex was observed. Allen and Chong [24] found experimentally that for Reynolds number greater than 400 the roll up of vortices occurs. Numerical simulations, in two-dimensions (2D), of Gerrard [25] could reproduce the formation of the ring vortex only by applying a random disturbance to the flow at each time step. They argued that, amplification is a three-dimensional effect which is excluded by a 2D computing method and has to be introduced artificially as random disturbances. Hughes and Gerrard [26] pointed out that the mechanism for this vortex formation is the removal of the boundary layer from the cylinder wall in front of the advancing piston. This interpretation was later confirmed and documented by Allen and Chong [24].

Tabaczynski *et al.* [23] and Allen and Chong [24] studied the dimension of the vortex generated when the lateral wall moves towards the piston. The first authors considered constant and sinusoidal wall speed while Allen and Chong [24] observed the phenomenon for constant or power law wall speed. Analysis and numerical studies on incompressible flows are done considering isothermal conditions.

Tabaczynski *et al.* [23] investigated the transition to turbulence in the ring vortex and found two critical Reynolds numbers, based on instantaneous piston speed and length of stroke, the first of about 12,500 below which the vortex flow is stable, and, above a value of 17,500 the vortex is fully turbulent.

In this work, we analyzed the vortices formation in all the cavity with vertical oscillating walls, for $Re = 50$, 500 and 1000 with $Y = 0.2, 0.4$ and 0.8 , while the experimental work done by Tabaczynski *et al.* [23] for the sinusoidal velocity walls was for $7.2 \times 10^3 \leq Re \leq 97.8 \times 10^3$ and for $0.44 \leq Y \leq 0.58$, where $Y = Y_W/D$, see section 2. On the other hand, the numerical work done by Gerrard [25] was restricted to Reynolds number of 525 and 1200, and he had to apply random disturbance to reproduce formation of vortices.

2 Problem formulation

2.1 Physical and geometry description

We present numerical simulations in two dimensional cavity with a ratio of 1.5 between vertical and horizontal dimensions as shown in figure (1). The vertical walls move simultaneously with an oscillatory velocity while the horizontal walls are the fixed pistons, similar to the experimental arrangement used by Tabaczynski *et al.* [23]. For water as the working fluid, the vertical and horizontal dimensions of the cavity are $H = 7.5 \times 10^{-2}m$ and $D = 5.0 \times 10^{-2}m$, respectively.

2.2 Governing equations

Considering a two dimensional region Ω , where the flow of the cavity is analyzed, the conservation equations that describe the oscillatory flow of an incompressible fluid in this region are the Navier-Stokes equation and the continuity equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p &= 0 \text{ in } \Omega \times [0, t_f], \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \text{ in } \Omega \times [0, t_f], \end{aligned} \quad (1)$$

where $\vec{u} = (u_1, u_2)$ is the velocity vector, being u_1 and u_2 the transversal and axial velocity components respectively; ν is kinematic viscosity, p is the pressure, t is the time and t_f is the final time.

The boundary conditions of the oscillatory cavity are:

$$\begin{aligned} u_1(x = -D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = -D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\ u_1(x = D/2, y, t) &= 0, & u_2(x = D/2, y, t) &= V_W \sin \omega t, \\ u_1(x, y = -H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = -H/2, t) &= 0, \\ u_1(x, y = H/2, t) &= 0, & u_2(x, y = H/2, t) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

V_W is the amplitude of the oscillatory velocity of the vertical walls given by $V_W = Y_W \omega$, where ω is the frequency and Y_W is the displacement amplitude.

3 Numerical method

3.1 Weak formulation of the problem

Since we want to approximate the variables \vec{u} and p by finite element method, we need to obtain the so called weak formulation of equations (1-2). For this purpose we introduce the following notation: Let Γ be the boundary of the domain Ω , and $\Gamma = \Gamma_W \cup \Gamma_P$, where Γ_W represents the two vertical sliding walls and Γ_P represents the two horizontal fixed walls. Let $\vec{g}_0(\vec{X}, t)$ be a vector defined by

$$\vec{g}_0(\vec{X}, t) = \begin{cases} \vec{0} & \text{if } \vec{X} \in \Gamma_P, \quad t \in (0, t_f), \\ (0, V_W \sin \omega t) & \text{if } \vec{X} \in \Gamma_W, \quad t \in (0, t_f). \end{cases}$$

We introduce the following sets of functions:

$$L_2(\Omega) = \left\{ q : \int_{\Omega} q^2 d\vec{X} < \infty \right\},$$

$$\vec{V} = V \times V,$$

where $V = H^1(\Omega) = \left\{ v \in L_2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad i = 1, 2 \right\}$.

We also introduce the following spaces of functions:

$$L_0 = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q(\vec{X}) d\vec{X} = 0 \right\},$$

$$\vec{V}_0 = \left\{ \vec{v} \in \vec{V} : \vec{v} = \vec{0} \text{ on } \Gamma \right\}.$$

Applying the virtual power principle to the momentum equation and to the continuity equation, we obtain:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \cdot \vec{v} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \right] d\vec{X} + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} d\vec{X}$$

$$- \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} d\vec{X} = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}_0, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} d\vec{X} = 0, \quad \forall q \in L_2(\Omega), \quad (4)$$

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{g}_0(\vec{X}, t) \quad \text{on } \Gamma \times (0, t_f). \quad (5)$$

These equations are completed by the following initial conditions

$$\vec{u}(\vec{X}, 0) = \vec{u}_0. \quad (6)$$

In the above weak formulation, it is reasonable to assume that $\vec{u}(t) \in \vec{V}$ and $p(t) \in L_0$ (see [1], [2], [3] and [4]), where we use the notation $\vec{u}(t) \equiv \vec{u}(\vec{X}, t) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$ and t fixed. Similarly for $t > 0$ fixed, $p(t) \equiv p(\vec{X}, t) \quad \forall \vec{X} \in \Omega$.

3.2 Finite element approximation

Let h be a space discretization step and τ_h a finite element triangulation of the polygonal domain $\bar{\Omega}$. Let P_1 be the space of polynomials in two variables of degree less or equal to one, and let $C^0(\bar{\Omega})$ be the space of continuous functions defined in $\bar{\Omega}$. We construct another finite element triangulation $\tau_{h/2}$ of $\bar{\Omega}$ which is twice thinner than τ_h , by subdividing each triangle of τ_h into four similar subtriangles by the mid point sides as shown in figure (2).

Then we approximate the spaces introduced in the previous section by the following finite dimensional spaces, respectively:

$$\begin{aligned} L_h &= \{q_h \mid q_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad q_h|_T \in P_1, \quad \forall \tau \in \tau_h\}, \\ L_{0h} &= \left\{q_h \in L_h \mid \int_{\Omega} q_h d\vec{X} = 0\right\}, \\ V_h &= \left\{\vec{v}_h \mid \vec{v}_h \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \quad \vec{v}_h|_T \in P_1 \times P_1, \quad \forall \tau \in \tau_{h/2}\right\}, \\ V_{0h} &= \left\{\vec{v}_h \in V_h \mid \vec{v}_h = \vec{0} \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1\right\}. \end{aligned}$$

This approximation was derived from the so called Bercovier-Pironneau (or P1 iso P2/P1) finite element approximation which was introduced in [5] for the velocity-pressure formulation of the Stokes problem. In the above approximation the degrees of freedom for the velocity of the fluid are located on the vertices of each triangle $\tau_{h/2}$, while the degrees of freedom for the pressure are located on the vertices of each triangle in τ_h , as shown in figure (2). Using the above finite dimensional spaces leads to the following approximation of equations (3-6).

For $t > 0$, find $\vec{u}_h(t) \in V_h$ with $\vec{u}_h(t) = \vec{g}_{0h}(t)$ on Γ , $p_h \in L_{0h}$ such that

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} \cdot \vec{v} + (\vec{u}_h \cdot \nabla) \vec{u}_h \cdot \vec{v} \right] d\vec{X} + \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_h : \nabla \vec{v} d\vec{X} - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \vec{v} d\vec{X} = 0, \quad \forall \vec{v} \in V_{0h}, \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u}_h d\vec{X} = 0, \quad \forall q \in L_h, \quad (8)$$

$$\vec{u}_h(\vec{X}, 0) = \vec{u}_{0h}(\vec{X}). \quad (9)$$

In the previous discretization \vec{g}_{0h} is the finite element approximation of the boundary function \vec{g}_0 , with must satisfy $\int_{\Gamma} \vec{g}_0 \cdot \vec{n} d\Gamma = 0$. Similarly, \vec{u}_{0h} is finite element approximation of the initial condition function \vec{u}_0 .

3.3 Time discretization by operator splitting

Following Chorin [6], most modern Navier-Stokes solvers are based on operator splitting schemes (see [7] and [8]) in order to force the incompressibility condition via Stokes solver or a L^2 -projection method. This approach still applies to the initial value problem 7-9 which contain three numerical difficulties to each of which can be associated a specific operator, namely

a) The incompressibility condition (8) and the related unknown pressure (7)

b) The advection term in (7)

c) The diffusion term in (7)

From an abstract point of view, problem 7-9 is a particular case of the following class of initial value problems:

$$\frac{d\Theta}{dt} + \sum_{i=1}^3 A_i(\Theta, t) = f, \quad \Theta(0) = \Theta_0, \quad (10)$$

where the operators A_i can be multivalued. There are many operator-splitting methods that can be employed to solve this type of problems. Here we consider the fractional step scheme of Marchuk-Yaneuko [9] type:

Let $\Delta t > 0$ be a time discretization step. Given $\Theta^0 = \Theta_0$, compute Θ^{n+1} from Θ^n by solving:

$$\frac{\Theta^{n+\frac{1}{3}} - \Theta^{n+\frac{1}{3}-1}}{\Delta t} + A_i(\Theta^{n+\frac{1}{3}}, t^{n+1}) = f_i^{n+1}, \quad (11)$$

for $i = 1, 2, 3$ with $t^n = n\Delta t$, and $\sum_{i=1}^3 f_i^{n+1} = f^{n+1}$.

This very simple scheme is only first order accurate (see [9]), but its low order is compensated by good stability and robustness properties. Actually, this scheme can be made second order accurate by symmetrization (see [10] and [11] for the application of symmetrized splitting schemes to the solution of the Navier-Stokes equations).

Applying scheme (11) to the equations (7-9), we obtain the following three stage scheme (after dropping some of the subscripts h), given $\bar{u}^0 = \bar{u}_{0h}$ and assuming we know \bar{u}^n for $n \geq 0$:

Step 1. Find $\bar{w}^{n+\frac{1}{3}} \in V_h$ with $\bar{w}^{n+\frac{1}{3}} = \bar{g}_{0h}^{n+1}$ on Γ , and $p^{n+\frac{1}{3}} \in L_{0h}$ such that

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{w}^{n+\frac{1}{3}} - \bar{u}^n}{\Delta t} \cdot \bar{v} \, d\bar{X} + \int_{\Omega} p^{n+\frac{1}{3}} \nabla \cdot \bar{v} \, d\bar{X} = 0, \quad \forall v \in V_{0h}, \quad (12)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \bar{w}^{n+\frac{1}{3}} \, d\bar{X} = 0, \quad \forall q \in L_h.$$

Step 2. Find $\bar{u}^{n+\frac{2}{3}} = \bar{u}(t^{n+1})$, where $\bar{u}(t)$ is the solution on (t^n, t^{n+1}) of the following advection problem

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t} \cdot \bar{v} \, d\bar{X} + \int_{\Omega} (\bar{u}^{n+\frac{1}{3}} \cdot \nabla) \bar{u}(t) \cdot \bar{v} \, d\bar{X} = 0, \quad \forall v \in V_{0h}^-, \quad (13)$$

$\bar{u}(t^n) = \bar{u}^{n+\frac{1}{3}}$, and $\bar{u}(t) = \bar{g}_{0h}(t^{n+1})$ on $\Gamma^- \times (t^n, t^{n+1})$, where $\Gamma_1^- = \{\bar{x} \in \Gamma \mid \bar{g}_{0h} \cdot \bar{n}(\bar{X}) < 0\}$ and $V_{0h}^- = \{\bar{v} \in V_h \mid \bar{v} = 0 \text{ on } \Gamma^-\}$.

Step 3. Find $\bar{w}^{n+1} \in V_h$ with $\bar{w}^{n+1} = \bar{g}_{0h}^{n+1}$ on Γ such that

$$\int_{\Omega} \frac{\bar{w}^{n+1} - \bar{u}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta t} \cdot \bar{v} \, d\bar{X} + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \bar{w}^{n+1} : \nabla \bar{v} \, d\bar{X} = 0, \quad \forall \bar{v} \in V_{0h}. \quad (14)$$

Problem (12) is a finite dimensional problem known as a saddle-point system which was solved by a Uzawa/conjugate-gradient algorithm discussed with many details in, e.g. refs. [4] and [12]. Problem (14) is a discrete

elliptic system whose iterative or direct solution is a quite classical problem. In this work this elliptic system was solved by a conjugate gradient method adapted for sparse systems [15]. On the other hand, solving the pure advection equation (13) is a more delicate issue. This equation can be solved by a method of characteristics as in [7] and [13]. An easier alternative is provided by the wave-like equation method discussed in [4], [11] and [14]. We applied this last method to solve equation (13).

4 Mesh convergence analysis

The simulations were made with three different meshes for all cases, the first one was an equidistant mesh with a constant spacial step Δx in the transversal direction, and a constant spacial step Δy in the axial direction. The second one was a graded mesh, such that the refinement in the corner of the domain was $1/3\Delta x$ and $1/3\Delta y$. The third one was a graded mesh, such that the refinement in the corner of the domain was $1/5\Delta x$ and $1/5\Delta y$. For $Re = 50$ we used a mesh with 41×51 subdivisions to approximate pressure, for $Re = 500$ we used a mesh with 81×101 subdivisions, and for $Re = 1000$ we used a mesh with 101×121 subdivisions. To approximate velocity we used twice as finer meshes for each case. Analyzing the convergence of the three meshes for stationary state we could observed important differences between the results obtained with the $1/3$ graded mesh and the equidistant mesh, however the values obtained with the $1/5$ and $1/3$ graded mesh are practically the same, this behavior was observed for all cases. In figure (3), it can be observed an example of the mesh convergence. The graded meshes were generated such that the spacial step increased from the corners to the center in both direction.

In the transversal direction we used the law

$$x_k = x_{k-1} + r_x^{k-2} \epsilon_x \quad \forall 2 \leq k \leq nc,$$

and

$$x_{nc+j} = D - x_{nc-j} \quad \forall 1 \leq j \leq nc - 1,$$

with r_x being the increasing common ratio, and

$$\epsilon_x = (r_x - 1)/(r_x^{nl} - 1)(D/2),$$

where $nl = \text{elements number in the x-direction}/2$, $nc = (n-1)/2+1$ with $n = \text{nodes number in the x-direction}$.

In the axial direction a similar law was used.

For all cases the worst relative error for axial and transversal velocities between the $1/5$ and $1/3$ graded meshes were, in more than 95% of the domain, less than 1.5% and 3%, respectively. In figure (4), is shown the worst relative error for axial velocity.

5 Results

5.1 Overview.

Simulations for nine cases were done for $Re = V_w D / \nu = 50, 500, 1000$, and $Y = 0.2, 0.4, 0.8$. We characterize the flows by describing the velocity fields and vortices cores. The vortices cores were obtained by applying the Jeong-Hussain criterium [27], which defines a vortex in an incompressible flow in terms of the eigenvalues of the tensor $S^2 + A^2$, where S and A are respectively the symmetric and antisymmetric parts of the velocity gradient tensor. In planar flow, a vortex core is defined as the area where the eigenvalue of $S^2 + A^2$ is negative.

As expected from the governing equations and boundary conditions, the velocity fields and consequently the vortices cores for all cases, (except for $Re = 1000$ and $Y = 0.8$, see section 5.4 for discussion), display the following symmetries:

a) axial symmetry

$$u_1(x, y, \phi) = -u_1(-x, y, \phi), \quad u_2(x, y, \phi) = u_2(-x, y, \phi),$$

and

b) cyclic symmetry

$$u_1(x, y, \phi) = u_1(x, -y, \phi + \pi), \quad u_2(x, y, \phi) = -u_2(x, -y, \phi + \pi).$$

In order to have a convenient reference for interpreting the dynamics of the flow, figure (5) emphasizes that the velocity and the displacement of the vertical walls are one quarter of a cycle out of phase. We see for instance that for $\phi = 0$, the velocity of the vertical walls of the cavity is zero while the displacement is maximum negative and for $\phi = \pi/2$, the velocity of the vertical walls of the cavity is maximum positive while the displacement is zero. Due to the symmetries of the flow, we can give a fairly complete account of the important features of the motion by describing the flows at these two representative phases.

The flow produced by two opposite, oscillating walls in a finite aspect ratio channel generates vortex motion due to various mechanisms. Two of them determine the most salient features of the flow and we describe them here somewhat in detail. The first is vorticity injection into the fluid due to the shear motion of the moving boundaries and a translational symmetry-breaking mechanism due to the presence of the pistons. The oscillatory boundary acts as vorticity source and the vortices generated are attached to moving walls. This process is labeled *M1*. The second vortex generation mechanism (labeled *M2*) is the sharp change in the flow direction as the fluid set in motion by the moving walls meets the fixed wall. The main physical process in this case consists on roll up of cast off vortex sheets and has been discussed by Tabaczynski *et al.* [23] and Allen and Chong [24] for large Reynolds numbers. Vortices generated by *M1* are noticeable along the whole cycle, they change their vorticity sign along the cycle and are located in the regions near

the moving walls. In contrast, $M2$ generates vortices near horizontal walls when the fluid impinges on them; therefore, it is more noticeable on specific phases, but they do not change their vorticity sign along the cycle. For instance, vortices are generated via $M2$ near the lower horizontal wall for $\phi = 0$ and near the higher horizontal wall for $\phi = \pi$.

5.2 Case $Re = 50$

Figure (6) shows the velocity fields and vortices cores for $Re = 50$ and $Y = 0.2$, for two phases of the oscillation. At $\phi = 0$ when the velocity of the walls is zero and they are at their lowermost position, the flow is organized in two vortices elongated in the vertical direction formed by downward moving boundary layer near the vertical walls that turn at the bottom and form a central upward flow. At this phase, the left red vortex is anticlockwise (+) while the right blue vortex is clockwise (-). The geometry of the vortical structures as revealed by the Jeong-Hussain criterium, indicate that vortices are thicker at the bottom due to the merging of the vortices generated by the concurrence of the two mechanisms described in the previous section ($M1$ and $M2$). This is the region of larger vorticity. This flow originates half saddle critical points at the centers of the horizontal walls. Two elliptical points are identified at $x = \pm 0.32$, $y = 0$ indicating the center of the vortices.

The flow at $\phi = \pi/2$ displays thin ascending regions near the moving walls which at this phase of the cycle have maximum positive velocity. The returning, descending flows are confined to regions close to the vertical walls and in the core of the container, the fluid is practically stagnant, at this phase the left vortex is clockwise (-) while the right vortex is anticlockwise (+). The vortices generated by the flow at this phase, display an almost constant thickness and are located close to the moving walls, as shown in figure (6). The vortices at this phase of the cycle, are generated by mechanism $M1$. As expected, the vortices are located around elliptic points and away from saddle points. The vertical extension of the vortices remain almost constant through the cycle, but the thickness pulsates with maxima (minima) at $\phi = 0, \pi$ ($\phi = \pi/2, 3\pi/2$). The effect of increasing the amplitude of the wall displacement (Y) is illustrated in figure (7), where velocity fields and vortices are shown for $Re = 50$ and $Y = 0.4$. The most notable difference between the flows in figures (6) and (7) is that the thickness of the vortical structure increases as the amplitude increases. This is expected since the moving walls constitute a vorticity source. When the amplitude of the oscillation is further increased to $Y = 0.8$, the thickening of the vortices continues and in this case, the vortices cover at least 50% of the total area. This is illustrated in figure (8) where the velocity field and vortices cores are shown.

In order to assess the influence of the top and bottom fixed walls on the dynamics of the flow, we analyze the profile of the axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate for several phases in one cycle. For reference, we recall that the velocity profile as a function of the transversal coordinate in an infinitely

long channel with oscillating walls (Second Stokes Problem, see reference [28]) is given by

$$u(x, t) = BV_W \cos \omega t + CV_W \sin \omega t, \quad (15)$$

where

$$B = \left[\frac{\cos l\beta \cos x\beta \cosh l\beta \cosh x\beta + \sin l\beta \sin x\beta \sinh l\beta \sinh x\beta}{(\cos l\beta \cosh l\beta)^2 + (\sin l\beta \sinh l\beta)^2} \right],$$

and

$$C = \left[\frac{\cos l\beta \sin x\beta \cosh l\beta \sinh x\beta - \sin l\beta \cos x\beta \sinh l\beta \cosh x\beta}{(\cos l\beta \cosh l\beta)^2 + (\sin l\beta \sinh l\beta)^2} \right],$$

where $l = D/2$ and the parameter β is the inverse of the Stokes penetration depth and is defined by

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},$$

where ω is the angular velocity, and ν is the kinematic viscosity. This velocity profile is shown in figure (9) taking $Re = 50$ and $Y = 0.2$. It is seen that for these conditions, the Stokes penetration depth is smaller than the semi distance between the channel walls $((D/2)/\delta_\nu = 5.5)$ and for positive (or negative) x , the envelopes are monotonous functions of this coordinate. The flow in the region near the center of the channel ($x \sim 0$) is practically stagnant at all times. Also, it should be noted that for an infinite channel, the x -averaged instantaneous velocity is not zero, while for the finite aspect ratio channel, the x -averaged instantaneous velocity must be zero at all times due to presence of the horizontal walls.

The equivalent velocity profiles obtained at $y=0$, for the channel with finite aspect ratio ($H/D=1.5$) are shown in figure (10). The envelopes are not monotonous functions of x . In contrast to the infinite aspect ratio channel, the flow at the center of the channel is stagnant only for specific phases in the cycle. In the region close to the lateral walls (δ_ν), the velocity profiles for infinite and finite aspect ratios coincide, indicating that at $y = 0$, the presence of the horizontal walls is felt only in the core of the channel. When the amplitude of the oscillatory motion of the walls is increased to $Y=0.8$, the features just described are amplified as can be observed in figure (11). Another useful parameter to describe the effect of the presence of the horizontal walls on the dynamics of the oscillatory flow is the phase shift of the fluid oscillation as a function of the distance to the vertical wall ψ . As is well known, in the Second Stokes Problem, the fluid oscillates with a phase shift linearly proportional to the distance to the wall. The proportionality constant is β . For the infinite channel, the phase shift follows from equation (15) and is:

$$\psi = \text{arctag} \left[\frac{\cos l\beta \sin x\beta \cosh l\beta \sinh x\beta - \sin l\beta \cos x\beta \sinh l\beta \cosh x\beta}{\cos l\beta \cos x\beta \cosh l\beta \cosh x\beta + \sin l\beta \sin x\beta \sinh l\beta \sinh x\beta} \right]. \quad (16)$$

In figure (12), (ψ) is shown as a function of the transversal coordinate for $y=0$ and $Re=50$. Two cases are displayed, $Y = 0.2$ and 0.8 ; the lines are for an infinite long channel (equation (16)), while symbols represent finite aspect channel results. It is found that ψ for infinite and finite aspect ratio channels coincide within the Stokes penetration depth which is 18% and 35% of the semi-diameter, but then the presence of the horizontal

walls generates an steep increase up to approximately one quarter of the channel width where a plateau is reached. Even though the wall oscillation amplitude of the two cases analyzed differs by a factor of four, the maxima ψ reached at $x = 0$, are only 1.34π and 1.22π respectively. This observation contrasts with the corresponding values of 1.875π and 0.875π for the infinite channel. Figures (9), (10) and (12) indicate that in a relative small region near the channel center ($y=0$) and close to the oscillatory walls ($x=\pm 0.5$), the presence of the horizontal walls does not have a major influence on the flow, but elsewhere in the cavity, the limiting walls are determinant.

5.3 Case $Re = 500$

Figures (13) to (15) show the velocity fields and vortices cores for $Re = 500$ $Y = 0.2, 0.4$ and 0.8 , for two phases of the oscillation. The vortex distribution along the cycle is more complex than that for $Re = 50$. The vortices generated by M1 are thinner than those observed in the previous subsection. The vortices generated by M2 are separated from those generated by M1. They are formed initially in the regions next to the moving walls as these meet the upper fixed walls (bottom fixed walls) at the phase of maximum wall velocity $\phi = \pi/2$ ($\phi = 3\pi/2$). The maximum vorticity is seen to occur at $\phi = 0$ ($\phi = \pi$) when the velocity of the sliding walls is zero. These vortices are labeled "A" in figure (15) and were described and interpreted by Tabaczynski *et al.* [23]. For $Y=0.2$, the vortices dissipate at the core of the cavity, but for $Y=0.4$ and 0.8 , they persist up to the phase $\phi = \pi/2$ ($\phi = 3\pi/2$) as indicated by label "B" in figure (15). Eventually, they dissipate in the core of the cavity. The presence of these structures at phases where the sliding walls move away from the fixed walls was not noticed in the visualizations made by Tabaczynski *et al.* [23].

The separation of the vortices formed by mechanism M2 from the fixed wall that is observed on the flows described in this and the previous section, can be interpreted in terms of general concepts of interactions of individual vortices and walls. It has been found that as a vortex approaches a wall perpendicular to its direction of motion, a region with opposite vorticity is formed between its core and the wall. See for instance Walker *et al.* [29] and Allen and Chong [16] for experimental observations and Peace and Riley [30] for numerical calculations. In our simulations, this effect is present at the lower fixed wall for $\phi = 0$ as can be seen from figure (16) where the vorticity field is plotted as a function of position for $Re = 500$, $Y = 0.8$. As the vortices moving downwards approach the horizontal wall, a secondary vorticity region with opposite sign is formed between the vortex core and the fixed wall, inducing the vortex to move away from the fixed wall. Given that the driving force of the flow is oscillatory, the formation of the vortices and the induced secondary vorticity regions are periodic too.

The pattern observed by the visualization of vortices generated by the oscillatory flow for $Re = 500$, $Y = 0.8$, is shown in figure (17). The streak lines in this figure simulate a tracer injected at approximately one tenth of the height ($y = -0.610$) and $-0.450 < x < -0.423$. Injection starts when the velocity is maximum positive and displacement is zero ($\phi = \pi/2$), and it lasts throughout the one full cycle simulation.

It is seen that the pattern formed with this visualization technique has three zones. The first comprises the tracer that is been injected near the end of the cycle and the tracers are distributed near the sliding wall. The second is an spiral similar to that observed in experiments where the velocity of the wall is unidirectional as shown by Tabaczynski *et al.* [23] and Allen and Chong [24]. In the present case however, the traces do not wind up tightly at the center of the spiral but rather form another structure where all tracers are distributed close together that contains the spiral. This complex distribution of tracers are a consequence of the oscillatory motion of the sliding wall.

5.4 Case $Re = 1000$

Figures (18) and (19) show the velocity fields and vortices cores for $Y = 0.2$ and 0.4 , for two phases of the oscillation. The vortex distribution and evolution are similar to those of $Re=500$, only the vortical structures are thinner and confined to the regions near the walls. Most of the channel is vortex free all along the cycle. As the amplitude of the displacement is increased, the area occupied by the vortices is enlarged, but the qualitative properties of the flow are the same. See figure (19). In all cases presented up to this point, the flow distributions display the axial and cyclic symmetries defined at the beginning of section 5. When the amplitude of the wall oscillation is increased to $Y = 0.8$, the symmetry around $x=0$ is lost. Figure (20) shows the velocity fields and vortices cores for $Y = 0.8$, for two phases of the oscillation. With this set of parameters, the flow is not axial symmetric anymore but it conserves cycle symmetry. At $\phi = 0$, the right and left vortices generated as the sliding walls approach the bottom wall and those near the upper wall are not of the same size. This imbalance generates a cross flow that moves from the bottom right corner to the upper left corner of the cavity forming a large vortex rotating clockwise. See upper left panel in figure (20). The vortex distribution shown in the lower left panel of figure (20) confirm the previous observations by displaying a large structure near the center of the cavity. It is instructive to compare these figures with the corresponding for $Re=500$ given in figure (15) which can be interpreted as an approximate symmetric version of (20) where the cross flow and the central vortex are absent. The flow structure at $\phi = \pi/2$ (right hand side panels of figure (20)) also includes a large central vortex and is similar to that of $\phi = 0$. Left upward and right downward flows are more intense. The governing equations and boundary conditions are symmetric with respect to the $x = 0$ axis, therefore, a velocity and pressure fields of the form:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, \phi) &= -u_1^*(-x, y, \phi), & u_2(x, y, \phi) &= u_2^*(-x, y, \phi), \\ p(x, y, \phi) &= p^*(-x, y, \phi), \end{aligned} \quad (17)$$

where u_1^* , u_2^* and p^* are the velocity and pressure distributions of the flow described in the previous paragraph and illustrated in figure (20), is also a solution. We conclude then that the system presents a bifurcation. For $Re = 1000$, Y is the bifurcation parameter and the critical value is $0.4 < Y < 0.8$. For $Y = 0.8$, Re is the bifurcation parameter and the critical value is $500 < Re < 1000$.

Figure (21) shows the profile of axial velocity u_2 for a channel with infinite length as a function of the transversal coordinate x . In this figure, $Re = 1000$ and $Y = 0.2$. The Stokes penetration depth is smaller and a thinner boundary layer forms near the wall. The core of the channel is motionless. The corresponding plots of axial velocity for a channel with aspect ratio 1.5 and $Re = 1000$ are displayed in figures (22) and (23) for $Y = 0.2$ and 0.8 respectively. The plots in these figures are obtained for $y = 0$. The properties of the velocity profiles for $Y = 0.2$ (figure(22)) are similar to those described for the cases of section 5.2 namely, the profiles for an infinite channel and a finite aspect ratio channel are indistinguishable near the walls ($(D/2)/\delta_\nu = 25$). The boundary layer is thinner than that obtained for smaller Reynolds numbers and the flow in the core is not stagnant but ascends or descends at different phases of the oscillation. Also, it was found (but not shown in figures) that, as discussed in section 5.2, the distortion due to the presence of the horizontal walls in the central part of the cavity increase as Y increases.

For $Y = 0.8$ we observe notable differences in the velocity distributions with respect to the infinite channel behavior due to the breaking of the axial symmetry, as is shown in figure (23). It is found that a clockwise vortex is permanently present in the cavity, deflecting slightly upwards the velocity traces on the left side and downwards near the right side. Velocities close to the moving walls ($(D/2)/\delta_\nu = 12.5$) are symmetric, but in the core they are distorted due to the vortical global motion which has always the same direction of rotation. As commented previously, a second solution also exists in which the core vortex rotates anticlockwise.

6 Discussion and Conclusions

A numerical solution of the Navier-Stokes equations, using finite element and an operator splitting scheme, have been obtained for simulating the flow in a cavity with oscillatory vertical walls. In contrast with others studies [25] and [26], using our numerical method, we were able to predict the formation of vortices without introducing any random perturbation. For the range of oscillation amplitude Y and Reynolds number Re explored, we have found that the main feature of the flow is the formation of vortices that except for the case of largest Y and Re are symmetric with respect to the vertical axis. We have identified two basic mechanisms of vortex formation: The first is vorticity injection into the fluid due to the shear motion of the moving walls in the presence of the fixed walls that provide a translational symmetry breaking (M1). Note that both fixed walls break the translational symmetry, regardless of whether they are up- or downstream the flow and thus contribute to the formation of vortices. These vortices are elongated, aligned with the oscillatory walls with return regions near the fixed walls and change their vorticity sign along the cycle. Their characteristic dimension in the transversal direction is inversely proportional to the frequency of oscillation which for fixed fluid and geometry can be expressed in terms of the oscillatory Reynolds number defined by $R_\omega = Re/Y = \omega D^2/\nu$. Note for instance that the width of the elongated vortices cores of figures ($Y = 0.2$, $Re = 500$) and ($Y = 0.4$, $Re = 1000$) at $\phi = 0$ which have the same oscillatory Reynolds number

are equal. The second vortex formation mechanism is the abrupt change in the flow direction as the fluid meets the downstream fixed wall (M2). This effect occurs for oscillatory walls as well as for a walls moving with constant velocity and is a consequence of boundary layer being scrapped off by the fixed wall. Since the flow under analysis is oscillatory, the vortex formation by this mechanism is strongly dependent on the phase of the cycle. Vortices are formed at the bottom (top) fixed wall at $\phi = 0$ (π) when the flow moves against the wall. The vortices formed by mechanism M2 conserve their vorticity sign and remain at phases where the sliding walls move away from the fixed wall, but detach from the corresponding moving wall. The streak lines topology are difficult to analyze since for this time-dependent flow, the trace distributions depend on the position where the traces are released, the phase in the cycle when this occurs and the duration. We have just illustrated one case to highlight the fact that these features might be interesting in the context of mixing with oscillatory flows. All the analyzed cases display cyclic symmetry and in contrast with all other cases analyzed, for $Y = 0.8$ and $Re = 1000$, the distribution of vortices is not symmetric with respect to the vertical axis. The reason is the formation of a large vortex in the center of the cavity rotating in the same direction in the whole cycle. This feature indicates the existence of a bifurcation point and the existence of multiple solutions. The details of flows with larger Y and Re are the subject of ongoing research.

We found that for Reynolds number greater than 500 the detach of vortices by mechanism M2 occurs, this agrees with the critical Reynolds number (> 450) for the vortex ring formation obtained by Hughes and Gerrard [26] and with the Reynolds number (> 400) for the roll up of vortices obtained by Allen and Chong [24].

Although the application of the present study is limited due to the fact that is made for a two dimensional flow, it is considered that the time-dependent vortex distribution is potentially useful for understanding transport properties in oscillatory flows.

7 Acknowledgements

This research was supported by DGAPA-UNAM and CONACyT under projects IN104702-2 and U41347-F, respectively. GEOC acknowledges the scholarship given by CONACyT.

References

- [1] TEMAM R. (1977) Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations., North-Holland, Amsterdam.
- [2] GIRAULT V., RAVIART P.A. (1986) Finite element methods for the Navier-Stokes equations: theory and algorithms., Springer-Verlag, Berlin.
- [3] GUNZBURGER M. D. (1989) Finite element methods for viscous incompressible flows., Academic Press, Boston MA.
- [4] GLOWINSKI R. (2003) Numerical methods for fluids., part 3, Handbook of Numerical Analysis, vol IX, P. G: Garlet and J. L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam.
- [5] BERCOVIER M., PIRONNEAU O. (1979) Error estimates for the finite element solution of the Stokes problem in the primitive variables., Numer. Math. **33**, 211-224.
- [6] CHORIN A. (1973) Numerical study of slightly viscous flow., J. Fluid Mech. **57**, 785-796.
- [7] GLOWINSKI R., PIRONNEAU O. (1992) Finite element methods for the Navier-Stokes equations., Annual rev. Fluid Mech. **24**, 167-204.
- [8] TUREK S. (1999) Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic and computational approach., Springe-Verlag, Berlin.
- [9] MARECHUK G. I. (1990) Splitting and alternate direction methods., in Handbook of Numerical Analysis, vol 1, P.G. Garlet and J.L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam 197-462.
- [10] BEALE J. T., MAJDA A. (1981) Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations., Math. Comput. **37**, 243-260.
- [11] DEAN E. J., GLOWINSKI R. (1997) A wave equation approach to the numerical solution of the Navier-Stokes equations for incompressible viscous flow., C. R. Acad. Sci. Paris, **325**, Serie I, 789-797.
- [12] GLOWINSKI R., LE TALLEC P. (1989) Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in non-linear mechanics., SIAM, Philadelphia.
- [13] PIRONNEAU O. (1989) Finite element methods for fluids., Wiley, Chichester.
- [14] DEAN E. J., GLOWINSKI R., PAN T. W. (1998) A wave equation approach to the numerical simulation of incompressible viscous fluid flow modeled by the Navier-Stokes equations. Mathematical and numerical aspects of wave propagation., Edited by J. A. de Santo, SIAM, Philadelphia, 65-74.

- [15] PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P. Numerical recipes in C++, Cambridge University Press.
- [16] ALLEN J. J., AUVITY B. (2002) Interaction of a vortex ring with a piston vortex., J. Fluid Mech. **465**, 353-378.
- [17] BELLHOUSE B. J., TALBOT L. (1969) The fluid mechanics of the aortic valve., J. Fluid Mech. **35**, 721.
- [18] BATCHELOR G. K. (1967) An Introduction to Fluid Dynamics., Cambridge University Press.
- [19] CASTREJÓN-PITA J. R., DEL RÍO J. A., CASTREJÓN-PITA A. A., HUELSZ G. (2003) Experimental observation of dramatic differences in the dynamic responses of Newtonian and viscoelastic fluids., Phys. Rev. E, **68**, 04301-1 - 04301-5.
- [20] GLAZER A. (1988) The formation of vortex rings., Phys. Fluids **31**(12), 3532-3542.
- [21] LEE G., HOCHGREB. (1998) Rapid compression machines: heat transfer and suppression of corner vortex., Combustion and flame **114**, 531-545.
- [22] TAYLOR G. (1960) Aeronautics and Aeromechanics., Pergamon.
- [23] TABACZYNSKI R. J., HOULT D. P., KECK J. C. (1970), High Reynolds number flow in a moving corner., J. Fluid Mech. **42**, 249-255.
- [24] ALLEN J. J., CHONG M. S. (2000) Vortex formation in front of a piston moving through a cylinder., J. Fluid Mech. **416**, 1-28.
- [25] GERRARD J. H. (1971) The stability of unsteady axisymmetric incompressible pipe flow close to a piston. Part 1. Numerical analysis., J. Fluid Mech. **50**, 625-644.
- [26] HUGHES M. D., GERRARD J. H. (1971) The stability of unsteady axisymmetric incompressible pipe flow close to a piston. Part 2. Experimental investigation and comparison with computation., J. Fluid Mech. **50**, 645-655.
- [27] JEONG J., HUSSAIN F. (1995) On the identification of a vortex., J. Fluid Mech. **285**, 69-94.
- [28] CURRIE I. G. Fundamental mechanics of fluids., McGrawHill.
- [29] WALKER J., SMITH C., CERRA A., DOLIGALSKI T. (1987) The impact of a vortex ring on a wall., J. Fluid Mech. **181**, 99-140.
- [30] PEACE A. J., RILEY N. (1983) A viscous vortex pair in ground effect., J. Fluid Mech. **129**, 409-426.

List of Figures

1	Geometry of the container with sliding vertical walls and boundary conditions.	19
2	Degrees of freedom for pressure and velocity in the finite element approximation.	19
3	Profile of axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x . For the equidistant, 1/3 graded and 1/5 graded meshes, for $Re = 500$ and $Y = 0.4$ in $y = 0.15$	20
4	Relative error for axial velocity as a function of the position (x, y) between 1/5 and 1/3 graded meshes, for $Re = 500$ and $Y = 0.4$	20
5	Velocity and displacement of vertical walls as a function of phase.	20
6	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.2$	21
7	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.4$	22
8	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.8$	23
9	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for an infinite channel (equation (15)) with $Re=50$ and $Y = 0.2$. The phase interval between profiles is $\pi/6$	24
10	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re = 50$ and $Y = 0.2$. For all profiles, $y=0$. The phase interval between profiles is $\pi/6$	24
11	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re=50$ and $Y = 0.8$. For all profiles, $y=0$. The phase interval between profiles is $\pi/6$	25
12	Relative phase between oscillating walls and the fluid axial velocity ψ as a function of the transversal coordinate x . $Re = 50$ and $y = 0$	25
13	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.2$	26
14	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.4$	27
15	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.8$	28
16	Vorticity field as a function of position for $Re = 500$, $Y = 0.8$, $\phi = 0$. The + and - signes indicate positive and negative vorticities, respectively.	29
17	Streak lines for $Re= 500$, $Y= 0.8$ to simulate flow visualization. Tracer injection starts at $\phi = \pi/2$ and continues for one cycle. Coordinates at for tracer injection are $x = -0.450$, -0.446 , -0.442 , -0.439 , -0.435 , -0.431 , -0.427 and -0.423 , $y = -0.610$	29
18	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.2$	30
19	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.4$	31
20	Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.8$	32
21	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for an infinite channel (equation (15)) with $Re=1000$ and $Y = 0.2$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$	33

22	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re = 1000$ and $Y = 0.2$. For all profiles, $y=0$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$	33
23	Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re=1000$ and $Y = 0.8$. For all profiles, $y=0$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$	34

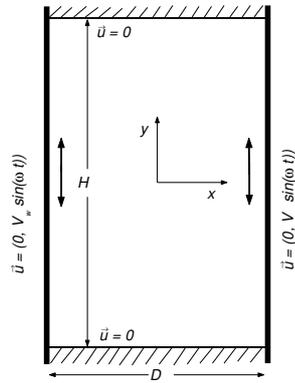


Figure 1: Geometry of the container with sliding vertical walls and boundary conditions.

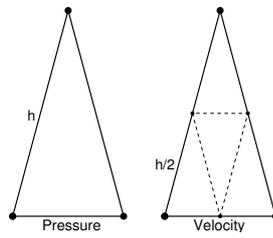


Figure 2: Degrees of freedom for pressure and velocity in the finite element approximation.

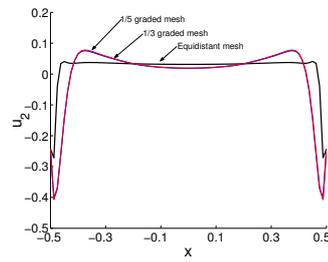


Figure 3: Profile of axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x . For the equidistant, 1/3 graded and 1/5 graded meshes, for $Re = 500$ and $Y = 0.4$ in $y = 0.15$.

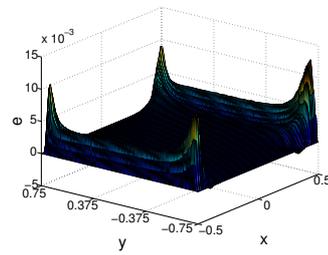


Figure 4: Relative error for axial velocity as a function of the position (x, y) between 1/5 and 1/3 graded meshes, for $Re = 500$ and $Y = 0.4$.

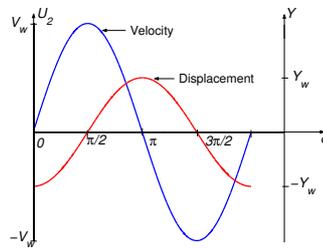


Figure 5: Velocity and displacement of vertical walls as a function of phase.

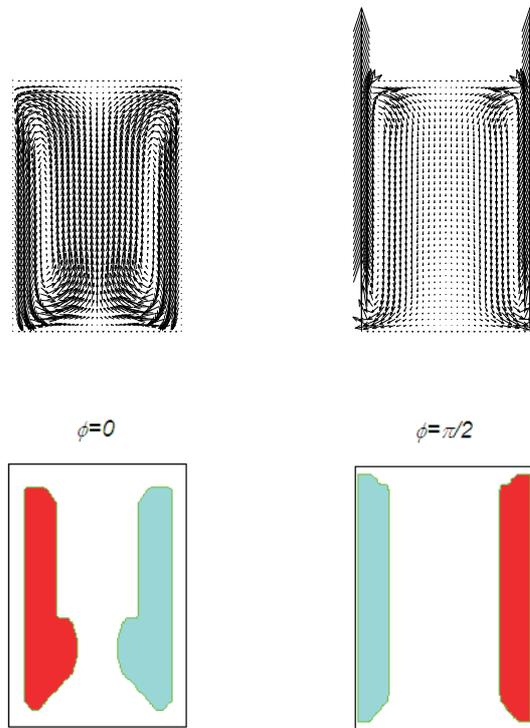


Figure 6: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.2$.

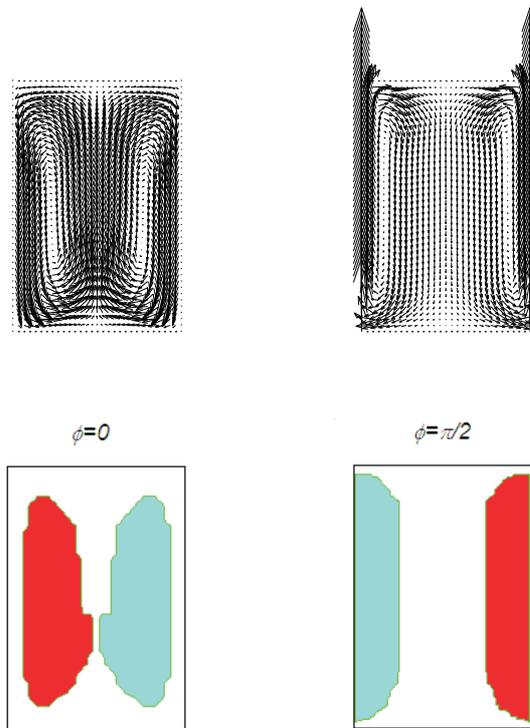


Figure 7: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.4$.

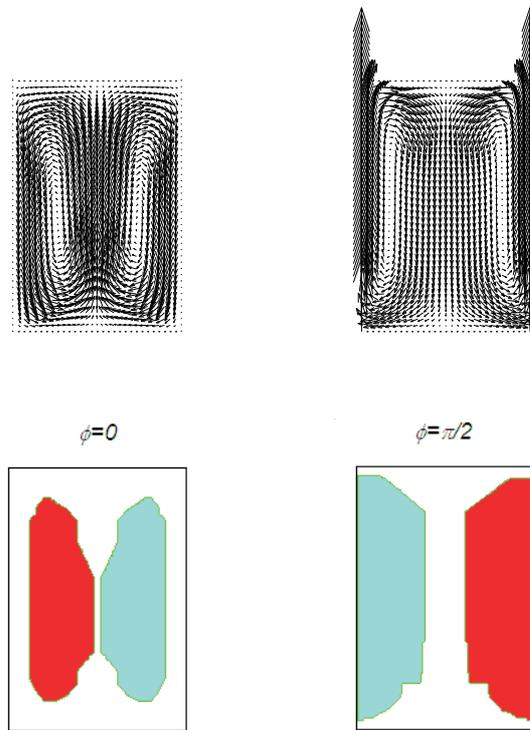


Figure 8: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 50$ and $Y = 0.8$.

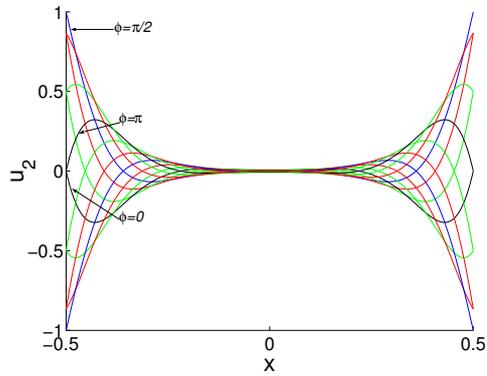


Figure 9: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for an infinite channel (equation (15)) with $Re=50$ and $Y = 0.2$. The phase interval between profiles is $\pi/6$.

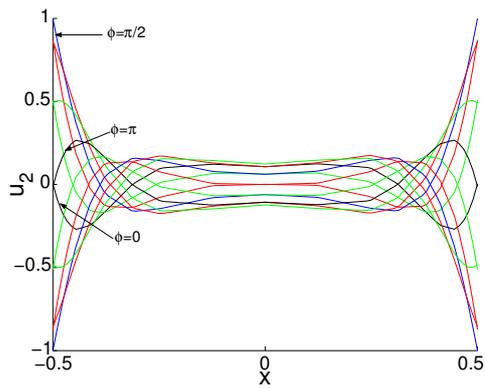


Figure 10: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re = 50$ and $Y = 0.2$. For all profiles, $y=0$. The phase interval between profiles is $\pi/6$.

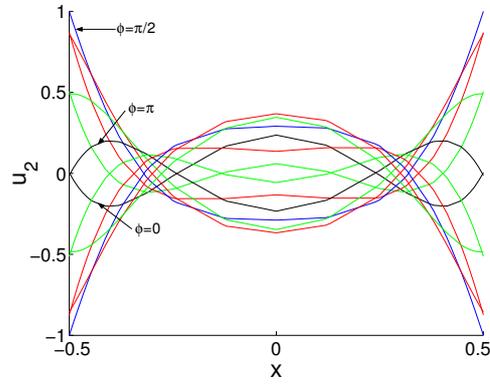


Figure 11: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re=50$ and $Y = 0.8$. For all profiles, $y=0$. The phase interval between profiles is $\pi/6$.

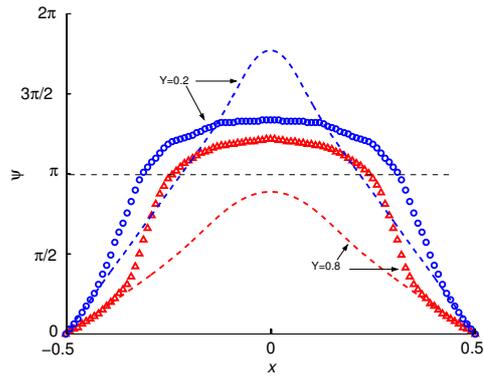


Figure 12: Relative phase between oscillating walls and the fluid axial velocity ψ as a function of the transversal coordinate x . $Re = 50$ and $y = 0$.

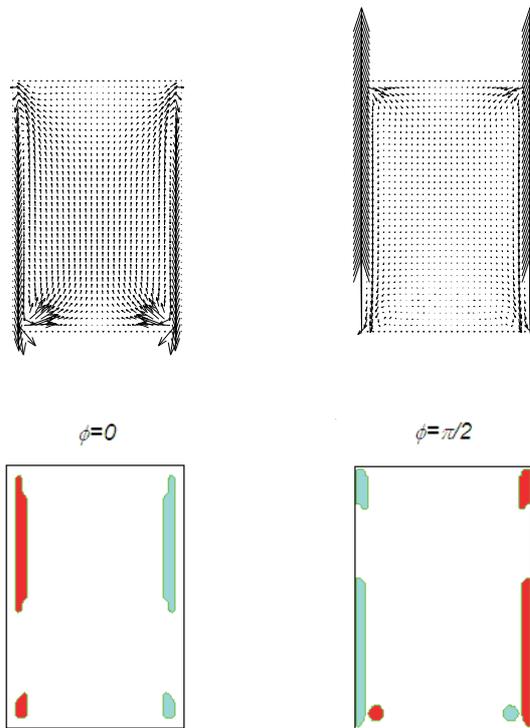


Figure 13: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.2$.

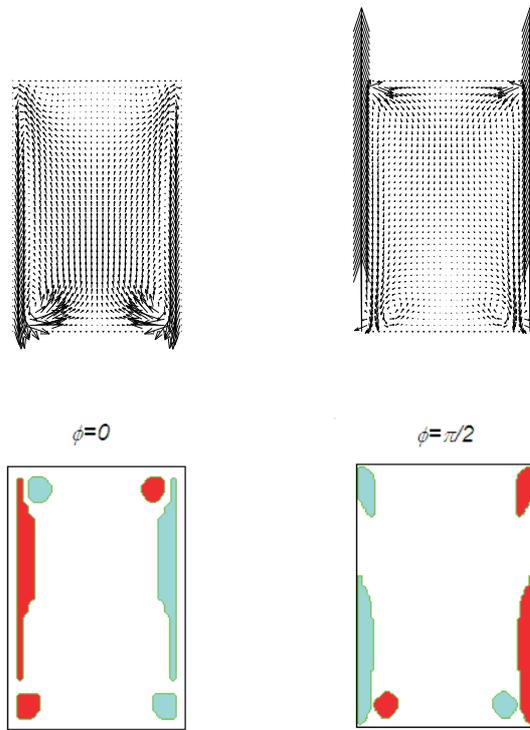


Figure 14: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.4$.

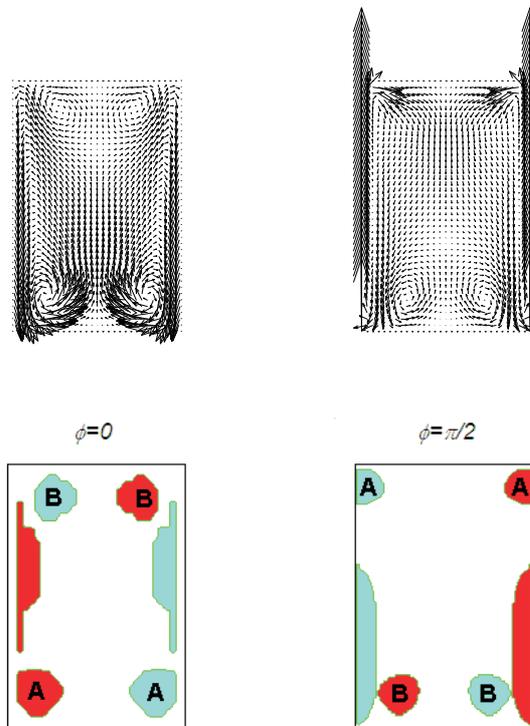


Figure 15: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 500$ and $Y = 0.8$.

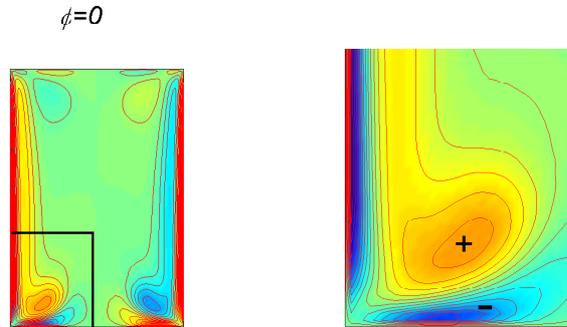


Figure 16: Vorticity field as a function of position for $Re = 500$, $Y = 0.8$, $\phi = 0$. The + and - signs indicate positive and negative vorticities, respectively.

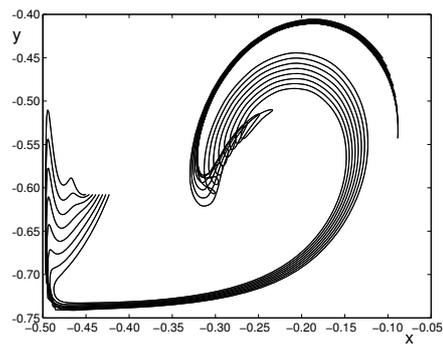


Figure 17: Streak lines for $Re = 500$, $Y = 0.8$ to simulate flow visualization. Tracer injection starts at $\phi = \pi/2$ and continues for one cycle. Coordinates at for tracer injection are $x = -0.450, -0.446, -0.442, -0.439, -0.435, -0.431, -0.427$ and $-0.423, y = -0.610$.

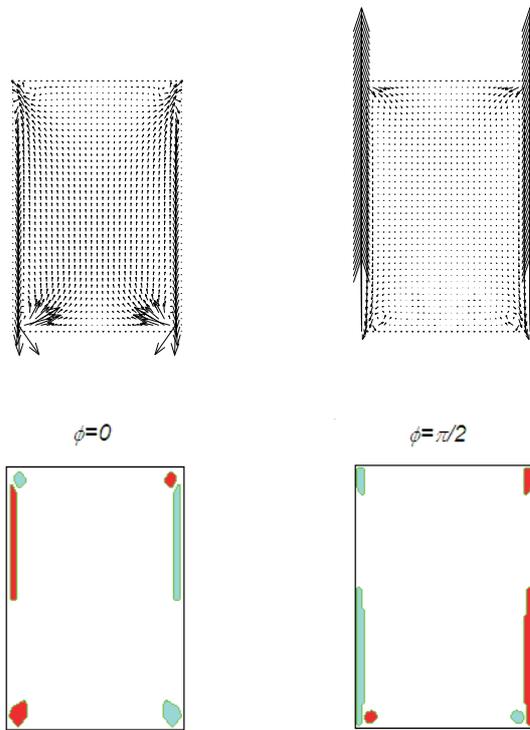


Figure 18: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.2$.

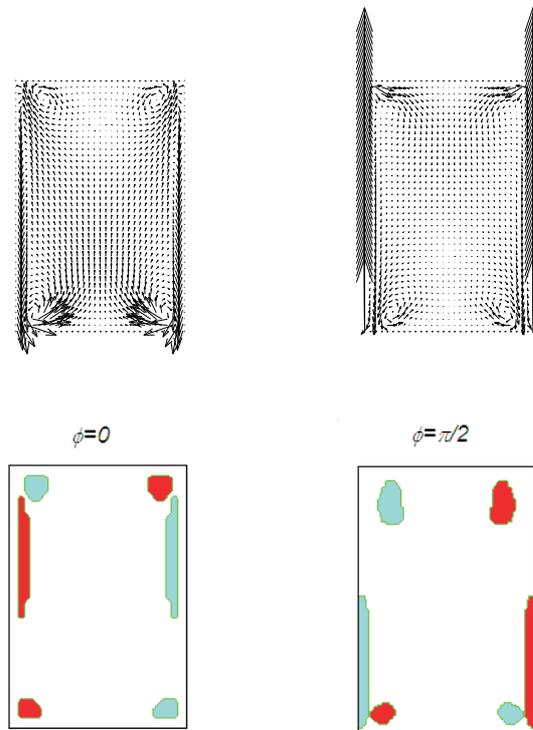


Figure 19: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.4$.

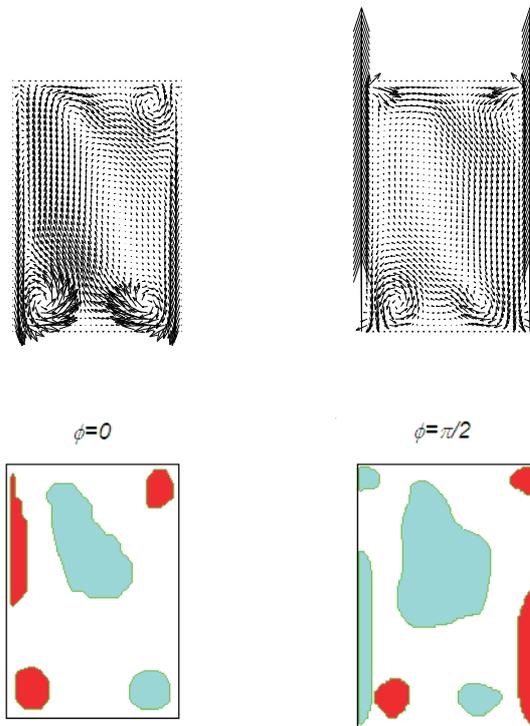


Figure 20: Velocity fields and vortices cores for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ with $Re = 1000$ and $Y = 0.8$.

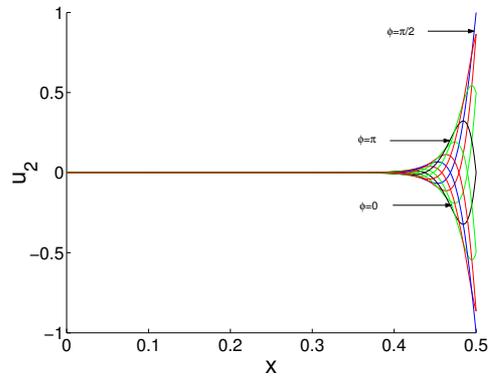


Figure 21: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for an infinite channel (equation (15)) with $Re=1000$ and $Y = 0.2$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$.

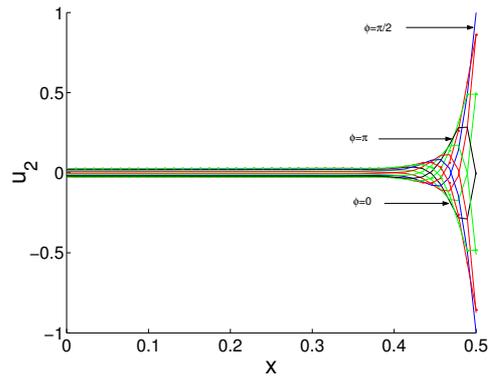


Figure 22: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re = 1000$ and $Y = 0.2$. For all profiles, $y=0$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$.

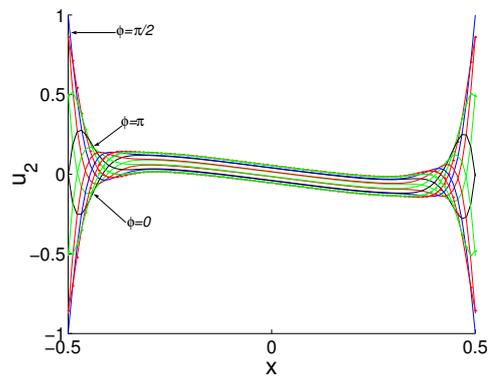


Figure 23: Axial velocity u_2 as a function of the transversal coordinate x for a channel with aspect ratio ($H/D=1.5$), $Re=1000$ and $Y = 0.8$. For all profiles, $y=0$. Phase intervals between profiles are $\Delta\phi = \pi/6$.

Bibliografía

- [1] BESNOIN E., KNIO O. M. (2001) Numerical study of thermoacoustic heat exchangers in the thin plate limit, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **40**, 445-471.
- [2] CHEN Y.-C., CHEN R.-L., CHEN C.-L. (2002) Development of miniature thermoacoustic refrigerators, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Paper 2002-0206.
- [3] ISHIKAWA H., MEE D. (2002) Numerical investigations of flow and energy fields near a thermoacoustic couple, *J. Acoust. Soc. Am.* **111**, 831-839.
- [4] WARD W. C., SWIFT G. W. (1994) Design environment for low-amplitude thermoacoustic engines., *J. Acoust. Soc Am.* **95**, 3671-3672.
- [5] WATANABLE M., PROSPERETTI A., YUAN H. (1997) A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part I. Model and linear theory., *J. Acoust. Soc. Am.* **102**, 3484-3496.
- [6] WORLIKAR A. S., KNIO O. M., KLEIN R. (1998) Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. Part II. Stratified flow around the stack., *J. Comput. Phys.* **144**, 299-324.
- [7] WORLIKAR A. S., KNIO O. M. (1999) Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack., *Numerical Heat Transfer, Part A*, **35**, 49-65.

- [8] YUAN H., KARPOV S., PROSPERETTI A. (1997) A simplified model for linear and nonlinear processes in thermoacoustic prime movers. Part II. Nonlinear oscillations., J. Acoust. Soc. Am. **102**, 3497-3506.
- [9] CURRIE I. G. Fundamental mechanics of fluids., McGrawHill.
- [10] BECKER B., CAREY F., ODEN T. Finite elements., Prentice Hall.
- [11] PUTMAN A. A., DENNIS W. R. (1956) Survey of organ-pipe oscillations in combustion systems., J. Acoust. Soc. Am. **28**, 246-259.
- [12] SWIFT G. W. (1988) Thermoacoustic engines., J. Acoust. Soc. Am. **84**, 1145-1180.
- [13] SONDHAUSS C. (1850) Ueber die schallschwingungen der luft in erhitzten glasrohren und in gedeckten pfeifen von ungleicher weite., Ann. Phys. (Leipzig) **79**, 1. Citado por Feldman 1968.
- [14] FELDMAN K. T. (1968) Review of the literature on Sondhauss thermoacoustic phenomena., J. Sound Vib. **7**, 71-82.
- [15] CLEMENT J. R., GAFFNEY J. (1954) Thermal oscillations in low-temperature apparatus., Proc. Cryogenic engineering conf., Boulder, Colorado, September 1954. citado por Feldman 1968.
- [16] RIJKE P. L. (1859) Notiz uber eine neue art, die in einer an beiden enden offenen rohre anthaltene luft in schwingungen zu verstezen., Foggendorff annalen der physik und chemic, Vol. 107, May 1859. Citado por Feldman and Carter 1970.
- [17] FELDMAN K. T., CARTER R. L. (1970) A study of heat driven pressure oscillations in a gas., Journal of heat transfer, **92**, 536-540.
- [18] RAYLEIGH (1878) Theory of sound., New york: Dover publications, 1945 re-issue, 2, 224. citado por Feldman 1968.
- [19] CEPERLEY P. H. (1979) A pistonless Stirling engine - The traveling wave heat engine., J. Acoustic. Soc. Am. **66**, 1688-1694.

- [20] WHEATLEY J., HOFER T., SWIFT G., MIGLORI A. (1983a) Experiments with an intrinsically irreversible acoustic heat engine., *Phys. Rev. Lett.* **50**, 499-502.
- [21] WHEATLEY J., HOFER T., SWIFT G., MIGLORI A. (1983b) An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine., *J. Acoust. Soc. Am.* **74**, 153-170.
- [22] WARD W. C., SWIFT G. W., MARTIN R. A., MERRIGAN M.A. (1991) Thermoacoustic engine scaling, acoustic and safety study., Los Álamos, National Laboratory LA-12103-MS.
- [23] GABRIELSON T. B. (1991) Radiation from a submerged thermoacoustic source., *J. Acoust. Soc. Am.* **90**, 2628-2636.
- [24] LUCK H., TREPP CH. (1992a) Thermoacoustic oscillations in Cryogenics. Part 1: Basic theory and experimental verification., *Cryogenics* **32**, 690-697.
- [25] LUCK H., TREPP CH. (1992b) Thermoacoustic oscillations in Cryogenics part 2: Applications., *Cryogenics* **32**, 698-702.
- [26] ROTT N. (1969) Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes., *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **20**, 230.
- [27] GARRETT S. L., BACKHAUS S. (2000) The power of sound., *American Scientist* available in <http://www.sigmaxi.org/amsci/amsci/articles/00articles/garrettintro.html>
- [28] CARTER R. L., WHITE M., STELLE A. M. (1962) Private Communication of Atomic International Division of North American Aviation, Inc., September 24. Referido por Feldman 1968.
- [29] CARTER R.L., FELDMAN K. T. (1963) An acoustically resonant stirling engine., *Proc. Associated midwest universities - Argonne National Laboratory Conf. On direct Energy Conversion*, Argonne, Illinois, Nov. 3-4, ANL-6802166. Citado por Feldman 1968.

- [30] CARTER R. L., FELDMAN K.T., MCKINNON C. N. (1964) Applicability of thermoacoustic phenomena to MHD conversion systems., University of Missouri engineering experiment station, reprint No. 64. Citado por Feldman 1968.
- [31] MOOSE P. H., KLAUS R.F. (1979) Experimental observations of magnetoacoustic fields., *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 74. Citado por Hamann y Gerbeth 1993.
- [32] HAMANN D., GERBETH G. (1993) Recent developments in liquid-metal MHD thermoacoustic engines., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.
- [33] HUELSZ G., RAMOS E. (1995a) On the phase differences of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect., *Int. Comm. Heat Mass Transf.* **22**, 71-80.
- [34] HUELSZ G., RAMOS E. (1995b) Anemometría de hilo caliente en ondas acústicas., *Soc. Mex. Fís. Sup.* Vol. **9-3**, 109-109.
- [35] HUELSZ G., RAMOS E. (1996) A physical interpretation of the thermoacoustic effect., *J. Non Equilibrium Thermodynamics* **21**, 278-284.
- [36] OROZCO A. (1995) Análisis del fenómeno termoacústico de onda sonora estacionaria y de onda viajera y su comparación., Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [37] SANTILLAN A. O., BOULLOSA R. R. (1995) Space dependence of acoustic power and heat flux in the thermoacoustic effect., *Int. Comm. Heat Mass Transf* **22**, 539-548.
- [38] HUELSZ G. (1996) Estudio del efecto termoacústico., Tesis de doctorado, Facultad de ingeniería, UNAM.
- [39] SWIFT G. W., MIGLIORI A., HOFLEER T., WHEATLEY J. (1985) Theory and calculations for an intrinsically irreversible acoustic prime mover using liquid sodium as primary working fluid., *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, 767-781.
- [40] SWIFT G. W., FUSCO A. M. (1988) Seawater as a working fluid for thermoacoustic engines., *J. Acoust. Soc. Am. Suppl. 1*, **84**, S37-S37.

- [41] SWIFT G. W. (1995) Thermoacoustic engines and refrigerators., *Physics Today*, **48**, 22-28.
- [42] SWIFT G. W. (1988) A liquid-metal magnetohydrodynamic acoustic transducer., *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 350-361.
- [43] RIVERA-ALVAREZ A., CHEJNE, F. (2001) Stability analysis of thermoacoustic engines., *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **26**, 53-71.
- [44] SUTTON G. W., SHERMAN, A. (1965) *Engineering Magnetohydrodynamics.*, McGraw-Hill, New York.
- [45] HUGHES W.F., F.J. YOUNG. (1989) *The Electromagnetodynamics of fluids.*, Krieger Publishing, New York.
- [46] MOFFATT H. K., TOOMRE J. (1967) The anihilation of a two-dimensional jet by a transverse magnetic field., *J. Fluid Mech.* **83**, 65-82.
- [47] IBÁÑEZ, G., CUEVAS, S., LÓPEZ DE HARO, M. (2002) Optimization analysis of an alternate magnetohydrodynamic generator., *Energy Conv. Mngmt.* **43**, 1757-1771.
- [48] BOLD, B. (1982) *Famous problems of geomtry and how to solve them.*, Dover, New York. See also Weisstein, E. W., Vieta's formulas. From Math World - A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html>.
- [49] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY., <http://www.nist.gov/srd/nist10.htm>.
- [50] GARRET, S.L. (2004) Thermoacoustic engines and refrigerators., *Am. J. Phys.* **72**, 11-17.
- [51] SWIFT, G.W. (2002) *Thermoacoustics: A unifying perspective for some engines and refrigerators.*, Acoustical Society of America, New York.

- [52] QUIST A. S., MARSHALL W. L. (1968) Electrical conductances of aqueous sodium chloride solutions from 0 to 800° and at pressures to 4000 bars., *J. Phys. Chem.*, **72**, 684-703.
- [53] LÓPEZ J. F. (2004) Diseño, construcción y caracterización de un motor termoacústico., Tesis de maestría, CENIDET.
- [54] TEMAM R. (1977) Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations., North-Holland, Amsterdam.
- [55] GIRAULT V., RAVIART P.A. (1986) Finite element methods for the Navier-Stokes equations: theory and algorithms., Springer-Verlag, Berlin.
- [56] GUNZBURGER M. D. (1989) Finite element methods for viscous incompressible flows., Academic Press, Boston MA.
- [57] GLOWINSKI R. (2003) Numerical methods for fluids, part 3, Handbook of Numerical Analysis., Vol IX, P. G: Garlet and J. L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam.
- [58] BERCOVIER M., PIRONNEAU O. (1979) Error estimates for the finite element solution of the Stokes problem in the primitive variables., *Numer. Math.* **33**, 211-224.
- [59] CHORIN A. (1973) Numerical study of slightly viscous flow., *J. Fluid Mech.* **57**, 785-796.
- [60] GLOWINSKI R., PIRONNEAU O. (1992) Finite element methods for the Navier-Stokes equations., *Annual Rev. Fluid Mech.* **24**, 167-204.
- [61] TUREK S. (1999) Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic and computational approach., Springe-Verlag, Berlin.
- [62] MARECHUK G. I. (1990) Splitting and alternate direction methods, in Handbook of Numerical Analysis., Vol 1, P.G. Garlet and J.L. Lions eds., North-Holland, Amsterdam 197-462.

- [63] BEALE J. T., MAJDA A. (1981) Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations., *Math. Comput.* **37**, 243-260.
- [64] DEAN E. J., GLOWINSKI R. (1997) A wave equation approach to the numerical solution of the Navier-Stokes equations for incompressible viscous flow., *C. R. Acad. Sci. Paris*, **325**, Serie I, 789-797.
- [65] GLOWINSKI R., LE TALLEC P. (1989) Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics., SIAM, Philadelphia.
- [66] PIRONNEAU O. (1989) Finite element methods for fluids., Wiley, Chichester.
- [67] DEAN E. J., GLOWINSKI R., PAN T. W. (1998) A wave equation approach to the numerical simulation of incompressible viscous fluid flow modeled by the Navier-Stokes equations. *Mathematical and numerical aspects of wave propagation.*, Edited by J. A. de Santo, SIAM, Philadelphia, 65-74.
- [68] PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P. *Numerical recipes in C++*, Cambridge University Press.
- [69] PAN T. W., GLOWINSKI R. (2000) A projection/wake-like equation method for the numerical simulation of incompressible viscous fluid flow modeled by the Navier-Stokes equations., *Computational Fluid Dynamics Journal* **465**, 28-42.
- [70] DE VAHL D. G. (1983) Natural convection in a square cavity. A benchmark solution., *International Journal for Numerical Methods in fluids* **3**, 249-264.
- [71] ALLEN J. J., AUVITY B. (2002) Interaction of a vortex ring with a piston vortex., *J. Fluid Mech.* **465**, 353-378.
- [72] BELLHOUSE B. J., TALBOT L. (1969) The fluid mechanics of the aortic valve., *J. Fluid Mech.* **35**, 721.
- [73] BATCHELOR G. K. (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics.*, Cambridge University Press.

- [74] CASTREJÓN-PITA J. R., DEL RÍO J. A., CASTREJÓN-PITA A. A., HUELSZ G. (2003) Experimental observation of dramatic differences in the dynamic responses of Newtonian and viscoelastic fluids., *Phys. Rev. E*, **68**, 04301-1 - 04301-5.
- [75] GLAZER A. (1988) The formation of vortex rings., *Phys. Fluids* **31**(12), 3532-3542.
- [76] LEE G., HOCHGREB. (1998) Rapid compression machines: heat transfer and suppression of corner vortex., *Combustion and Flame* **114**, 531-545.
- [77] TAYLOR G. (1960) *Aeronautics and Aeromechanics.*, Pergamon.
- [78] TABACZYNSKI R. J., HOULT D. P., KECK J. C. (1970), High Reynolds number flow in a moving corner., *J. Fluid Mech.* **42**, 249-255.
- [79] ALLEN J. J., CHONG M. S. (2000) Vortex formation in front of a piston moving through a cylinder., *J. Fluid Mech.* **416**, 1-28.
- [80] GERRARD J. H. (1971) The stability of unsteady axisymmetric incompressible pipe flow close to a piston. Part 1. Numerical analysis., *J. Fluid Mech.* **50**, 625-644.
- [81] HUGHES M. D., GERRARD J. H. (1971) The stability of unsteady axisymmetric incompressible pipe flow close to a piston. Part 2. Experimental investigation and comparison with computation., *J. Fluid Mech.* **50**, 645-655.
- [82] JEONG J., HUSSAIN F. (1995) On the identification of a vortex., *J. Fluid Mech.* **285**, 69-94.
- [83] SHAMES I. H. (1992) *Mechanics of fluids.*, McGrawHill.
- [84] KURZWEIG U. H. (1985) Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels., *J. Fluid Mech.* **156**, 291-300.