UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

IMÁGENES Y PREIMÁGENES DEL ABANICO DE CANTOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

DAVID LÓPEZ CAAMAL

DIRECTOR DE TESIS:
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ.

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2006

Imágenes y Preimágenes del Abanico de Cantor

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno.
   López
   Caamal
   David
   53388997
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas

2. Datos del tutor.
   Doctor
   Sergio
   Macías
   Álvarez

3. Datos del sinodal 1
   Doctora
   Isabel
   Puga
   Espinosa

4. Datos del sinodal 2
   Doctora
   Patricia
   Pellicer
   Covarrubias

5. Datos del sinodal 3
   Doctor
   Gerardo
   Acosta
   García

6. Datos del sinodal 4
   Doctor
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

7. Datos del Trabajo escrito.
   Imágenes y Preimágenes del Abanico de Cantor
   70 pp.
   2006

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar a las imágenes y a las preimágenes del cono sobre el conjunto de Cantor, también llamado el *abanico de Cantor*, bajo funciones continuas, así como a las imágenes bajo distintos tipos de éstas.

En el Capítulo 1 se dan las definiciones y resultados necesarios para comprender el resto de trabajo.

En el Capítulo 2 se estudian las propiedades bajo las cuales un continuo (métrico) y un continuo Hausdorff es una imagen continua del abanico de Cantor, una preimagen continua del abanico de Cantor o ambas. También se da una condición necesaria para que un continuo sea una imagen continua del abanico de Cantor y, además, se observa que no es una condición suficiente. Modificando ligeramente este resultado se obtiene, en el Capítulo 3, una condición necesaria y suficiente para que un continuo X sea una imagen continua del abanico de Cantor.

Posteriormente, en el Capítulo 3 se definen a los espacios *uniformemente conexos por trayectorias* y a los espacios *uniformemente arcoconexos*. Se prueba el Teorema de Reparametrización (ver Teorema 3.1.10), el cual establece que dada una familia uniforme de trayectorias $\mathcal{P}$ en un espacio topológico X, es posible reparametrizar a cada elemento de $\mathcal{P}$ para obtener una familia equicontiua de trayectorias $\mathcal{P}'$. Así, si X es un continuo *uniformemente conexo por trayectorias*, entonces se puede obtener una familia equicontinua de trayectorias en X tal que cualesquiera dos puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria de esta familia. La existencia de tal familia resulta ser una condición necesaria y suficiente para que un continuo sea una imagen continua del abanico de Cantor. Esto muestra que el abanico de Cantor es un *modelo común* en la clase de los abanicos uniformemente arcoconexos y en la clase de los dendroides uniformemente arcoconexos, es decir, es un elemento de la clase que puede ser mandado de manera continua y suprayectiva a cualquier otro elemento de la clase.

Mediante el Teorema de Reparametrización se caracterizan a las imágenes continuas del abanico de Cantor como los continuos uniformemente conexos por trayectorias.

Finalmente, en el Capítulo 4, se obtienen unas caracterizaciones de las imágenes continuas del abanico de Cantor bajo distintos tipos de funciones, a saber: confluentes, abiertas, monótonas, retracciones y, como habíamos mencionado, ligeras. También se obtiene una condición necesaria y suficiente para que exista una función continua y monótona de un abanico a un arco.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo presentamos las definiciones y resultados necesarios para el entendimiento del resto del trabajo.

1.1. Continuos

En un espacio métrico X, denotaremos la distancia entre dos puntos $x, y \in X$ como $d_X(x, y)$ o simplemente $d(x, y)$ si se sobreentiende a qué espacio métrico nos referimos.

Mediante el símbolo $\mathbb{N}$ nos referiremos al conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$ de los números naturales. Además, $\mathbb{R}$ denotará al conjunto de los números reales.

Definición 1.1.1. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, no vacío, compacto y conexo. A cualquier subconjunto cerrado, conexo y no vacío* Y *de un continuo* X *se le llama* ***subcontinuo*** *de* X *y, si* $Y \neq X$ *entonces a* Y *se le llama un* ***subcontinuo propio*** *de* X*. A un espacio Hausdorff, no vacío, compacto y conexo se le llama un* ***continuo de Hausdorff****.*

Definición 1.1.2. *Denotaremos como* I *al intervalo* $[0, 1]$ *con la tpología usual. Llamaremos un* ***arco*** *a cualquier espacio homeomorfo a* I*.*

Como I es un continuo, entonces todo arco es un continuo.

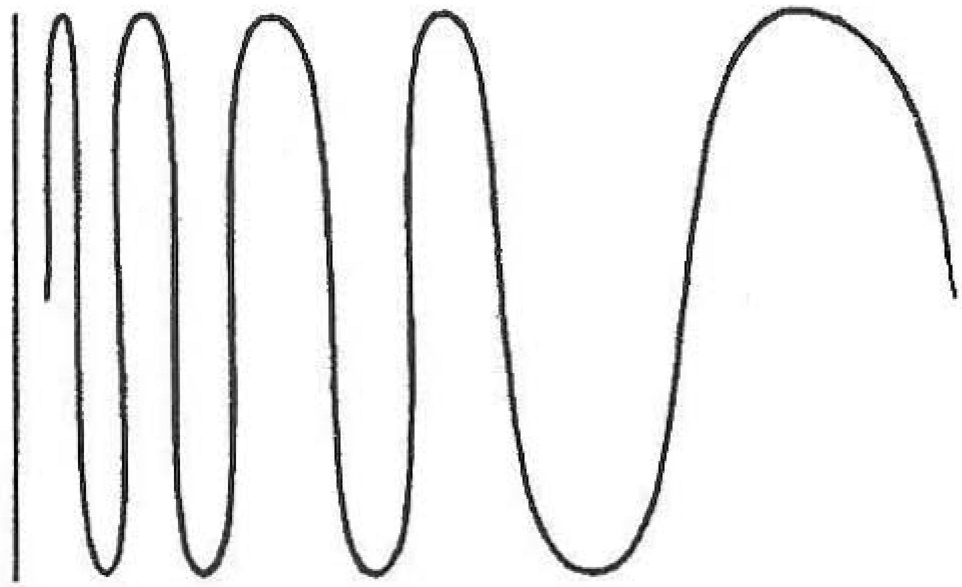

Figura 1.1: Continuo $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

Definición 1.1.3. *Denotaremos por S^1 a la circunferencia unitaria. Llamamos **curva cerrada simple** a cualquier espacio homeomorfo a S^1.*

Definición 1.1.4. *Si A es un arco y $h : I \to A$ es un homeomorfismo, a los puntos $u = h(0)$ y $v = h(1)$ se les denomina **puntos extremos** de A, y escribiremos uv en vez de A.*

Ejemplo 1.1.5. *El subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}$ es conexo, al ser la gráfica de una función continua definida en un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. El subespacio $cl_{\mathbb{R}^2}(A)$ es cerrado, acotado y conexo. Por lo tanto, $cl_{\mathbb{R}^2}(A)$ es un continuo. A cualquier espacio homeomorfo a $cl_{\mathbb{R}^2}(A)$ se le llama un continuo* $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$.

Ejemplo 1.1.6. *Sea $W = cl_{\mathbb{R}^2}(A) \cup B \cup C \cup D$, donde*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x \leq \tfrac{1}{\pi}, y = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})\},$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = \tfrac{1}{\pi},\ -2 \leq y \leq 0\},$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq \tfrac{1}{\pi},\ y = -2\},$$
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0,\ -2 \leq y \leq 0\}.$$

*Entonces W es un continuo. A cualquier espacio homeomorfo a W se le llama **Círculo de Varsovia**.*

Definición 1.1.7. *Decimos que un espacio X es **localmente conexo** si tiene una base de conjuntos abiertos y conexos. Si un continuo es localmente conexo se le llama un **continuo de Peano**.*

Definición 1.1.8. *Decimos que un continuo X tiene la **propiedad S** si para cada $\epsilon > 0$, existe un número finito de subcontinuos $A_1, ..., A_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y diám$(A_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

Teorema 1.1.9. *[11, 8.4, pág. 120] Un continuo X es un continuo de Peano si y solo si X tiene la propiedad S.*

Una demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [11, 8.18, pág. 128].

Teorema 1.1.10 (Hahn-Mazurkiewicz). *Un continuo es una imagen continua de I si y sólo si es un continuo de Peano.*

1.2. Componentes y Casicomponentes

Definición 1.2.1. *Dados un espacio X y un punto $p \in X$, se define la **componente** $C(p)$ de p en X como:*

$$C(p) = \bigcup \{C \subseteq X | C \text{ es conexo y } p \in C\}.$$

Definición 1.2.2. *Dados un espacio X y un punto $p \in X$, se define la **casicomponente** $Q(p)$ de p en X como:*

$$Q(p) = \bigcap \{A \subseteq X | A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{y } p \in A\}.$$

La siguiente proposición nos muestra una relación entre las componentes y casicomponentes.

Proposición 1.2.3. *Si X es un espacio topológico y $p \in X$, entonces $C(p) \subseteq Q(p)$.*

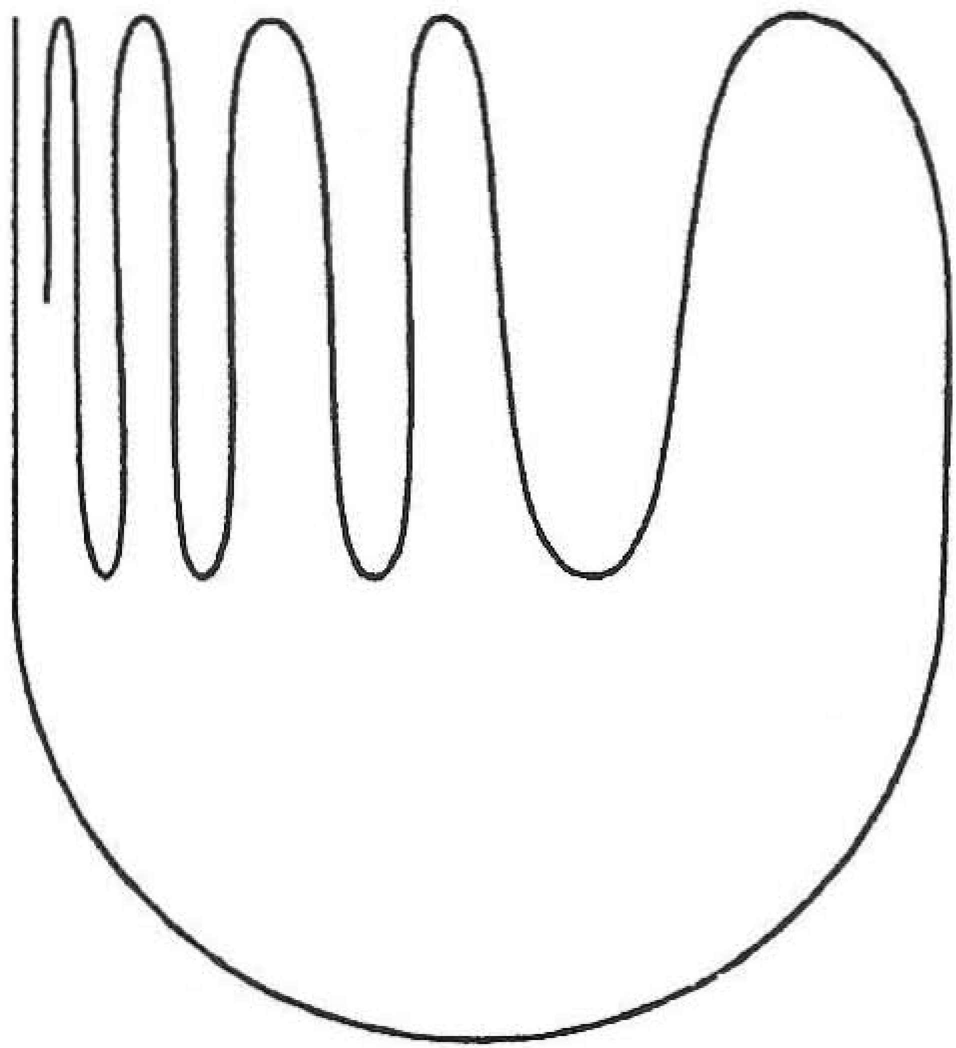

Figura 1.2: Círculo de Varsovia

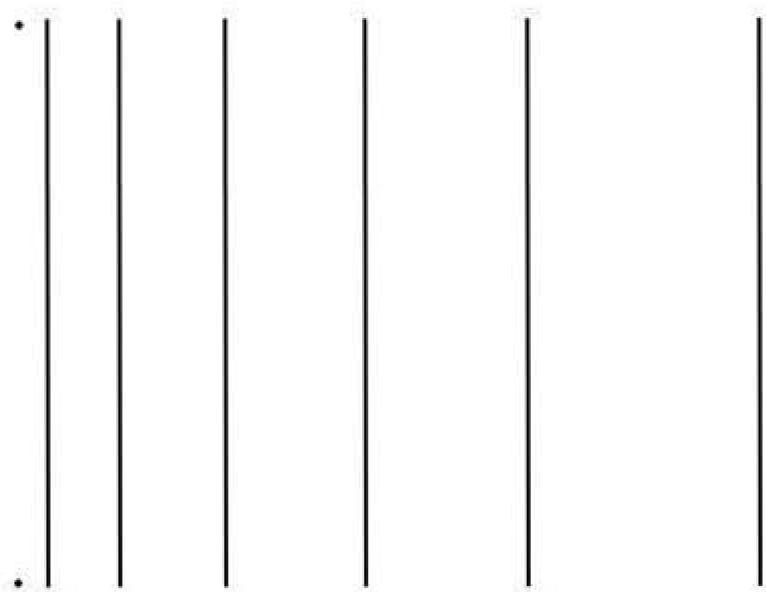

Figura 1.3: El subespacio X del Ejemplo 1.2.4

Demostración. Si A es un abierto y cerrado de X que contiene a p y C es un conexo que contiene a p, entonces A y $X \setminus A$ forman una separación de X, por lo que cualquier subconjunto conexo de X debe de estar contenido en A o en $X \setminus A$. Como $p \in A \cap C$, $C \subseteq A$ y, por lo tanto, $C(p) \subseteq Q(p)$. $\square$

Observemos que, en general, no se tiene que $Q(p) \subseteq C(p)$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.4. *Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ que consiste de los segmentos de líneas que tiene por extremos los puntos $(\frac{1}{n}, -1)$ y $(\frac{1}{n}, 1)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que, además, contiene a los puntos $(0, -1)$ y $(0, 1)$. Se tiene que $C((0, 1)) = \{(0, 1)\}$, pero $Q((0, 1)) = \{(0, 1), (0, -1)\}$.*

Sin embargo, si X es un espacio compacto y Hausdorff, las componentes y las casicomponentes de p en X son iguales, para todo $p \in X$.

Proposición 1.2.5. *Sea X un espacio compacto y Hausdorff. En-*

tonces para cada $p \in X$, se tiene que $C(p) = Q(p)$.

Demostración. Por la Proposición 1.2.3 se tiene que $C(p) \subseteq Q(p)$. Resta probar que $Q(p) \subseteq C(p)$. Para esto basta con mostrar que $Q(p)$ es conexo, ya que $C(p)$ contiene a todos los conexos que contienen a p y $p \in Q(p)$.

Supongamos que $Q(p)$ no es conexo. Notemos que $Q(p)$ es un cerrado en X, al ser una intersección de cerrados en X. Por lo tanto, existen dos subconjuntos no vacíos, cerrados y ajenos K y L de X tales que $Q(p) = K \cup L$. Como X es normal, existen dos abiertos ajenos U y V en X tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Como $p \in Q(p)$, podemos suponer que $p \in K$.

El conjunto $Y = X \setminus (U \cup V)$ es compacto y:

$$\begin{aligned} Y = X \setminus (U \cup V) \subseteq X \setminus (K \cup L) = X \setminus Q(p) \\ = X \setminus (\bigcap\{A \subseteq X | A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\} \\ = \bigcup\{X \setminus A | A \text{ es abierto y cerrado en } X\text{y } p \in A\}. \end{aligned}$$

La familia $\{X \setminus A | A \text{ es abierto y cerrado en } X \text{ y } p \in A\}$ es una cubierta abierta del compacto Y. Por lo tanto, existen $A_1, ..., A_m$ subconjuntos abiertos y cerrados de X tales que $p \in A_i$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$ y $X \setminus (U \cup V) \subseteq (X \setminus A_1) \cup \cdots \cup (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cap \cdots \cap A_m)$. De donde, $A_1 \cap \cdots \cap A_m \subseteq U \cup V$.

Sea $A = A_1 \cap \cdots \cap A_m$. Observemos que, por definición, A es abierto y cerrado en X y $p \in A \subseteq U \cup V$. Como $A \subseteq U \cup V$, tenemos que $A \cap U = A \cap (X \setminus V)$. Entonces $A \cap U$ es un abierto y cerrado de X. Además, como $p \in A \cap K \subseteq A \cap U$, se tiene que $Q(p) \subseteq A \cap U$ y, en consecuencia, $L \subseteq (K \cup L) \cap V = Q(p) \cap V \subseteq (a \cap U) \cap V = \emptyset$. Lo que contradice que L es no vacío. $\square$

1.3. Hiperespacios y la Propiedad de Kelley

Los *hiperespacios* de un continuo X son ciertas familias de subconjuntos de X con alguna característica particular. Entre los más importantes están:

$$2^X = \{A \subseteq X|\ A \text{ es cerrado y no vacío}\} \text{ y}$$
$$C(X) = \{A \in 2^X|\ A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.3.1. *Sea X un continuo. Definimos una función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ como $H(A, B) =$ínf$\{\epsilon > 0 | A \subseteq V_\epsilon(B)$ y $B \subseteq V_\epsilon(A)\}$, donde $V_\epsilon(A)$ es la unión de todas las ϵ-bolas abiertas con centro en los puntos de A, para cada $A, B \in 2^X$. H está bien definida y es una métrica para 2^X [11, 4.2, pág. 53], llamada la **métrica de Hausdorff**.*

Notemos que 2^X contiene a $C(X)$, entonces podemos considerar a $C(X)$ como un subespacio de 2^X con la métrica de Hausdorff.

Definición 1.3.2. *Un continuo X tiene la **propiedad de Kelley** si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si a y $b \in X$, $d(a, b) < \delta$ y $a \in A$ con $A \in C(X)$, entonces existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.*

1.4. Dendroides y Abanicos

Definición 1.4.1. *Un espacio topológico X es **arcoconexo** si para cualesquiera x_1 y $x_2 \in X$ existe un arco en X que contenga a x_1 y a x_2 como puntos extremos.*

Definición 1.4.2. *Un continuo es **hereditariamente unicoherente** si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es conexa.*

Definición 1.4.3. *Un **dendroide** es un continuo hereditariamente unicoherente y arcoconexo.*

Observación 1.4.4. *Si X es un dendroide y A es un subcontinuo de X, enonces A también es un dendroide [11, 10.58, pág. 192]. Por tanto, los subcontinuos de X son arcoconexos.*

Definición 1.4.5. *Un punto x en un dendroide X es un **punto extremo** de X si x es un punto extremo de cualquier arco en X que contenga a x.*

Definición 1.4.6. *Un punto x en un dendroide X es un **punto de ramificación** si existen tres arcos xa, xb y xc en X tales que x es el único punto de intersección de cualesquiera dos de ellos.*

Definición 1.4.7. *Un **abanico** es un dendroide con un único punto de ramificación, usualmente es denotado por v y es llamado el **vértice** del abanico.*

Notación 1.4.8. *El conjunto de puntos extremos de un dendroide X se denota como $E(X)$. Dado un abanico X, definimos $S(X) = \{v\} \cup E(X)$.*

Definición 1.4.9. *Un dendroide X es **suave** si existe un punto $v \in X$ tal que para cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ que converge a x, la sucesión de arcos $\{vx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al arco vx con la métrica de Hausdorff.*

Observación 1.4.10. *Si un abanico es suave, su vértice puede tomarse como el punto v en la definición precedente [5, pág. 301].*

Definición 1.4.11. *Un espacio topológico X es **totalmente disconexo** si cada componente de X consiste de un único punto.*

Definición 1.4.12. *Sean X y Y continuos. Una función suprayectiva $f : X \to Y$ es:*

1. ***Abierta**, si la imagen de cualquier conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y.*

2. ***Monótona**, si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.*

3. ***Monótona relativa a un punto** $p \in X$, si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo Q de Y tal que $f(p) \in Q$.*

4. ***Confluente**, si para cada subcontinuo Q de Y y para cada componente K de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(K) = Q$.*

5. ***Ligera***, *si $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo para cada $y \in Y$.*

A partir de ahora, en este capítulo, todas las funciones serán continuas y suprayectivas, a menos que explícitamente se diga lo contrario.

Proposición 1.4.13. *Sean X y Y continuos. Una función $f : X \to Y$ es monótona si y sólo si $f^{-1}(Q)$ es conexo para cada subcontinuo Q de Y.*

Demostración. Supongamos primero que $f^{-1}(y)$ es conexo para toda $y \in Y$ y sea Q un subcontinuo de Y. Supongamos que $f^{-1}(Q)$ no es conexo. Sean F_1 y F_2 dos cerrados disjuntos y no vacíos de X tales que $f^{-1}(Q) = F_1 \cup F_2$. En particular, F_1 y F_2 son cerrados en X y, en consecuencia, compactos. Entonces $f(F_1)$ y $f(F_2)$ son compactos en Y y, por lo tanto, cerrados. Supongamos que existe $y \in (f(F_1) \cap Q) \cap (f(F_2) \cap Q)$. De este modo, $f(x_1) = y = f(x_2)$ para algún $x_1 \in F_1$ y algún $x_2 \in F_2$. Entonces, como $x_1, x_2 \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(Q)$, los conjuntos F_1 y F_2 forman una disconexión de $f^{-1}(y)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(F_1) \cap Q$ y $f(F_2) \cap Q$ son ajenos. Como Q también es cerrado en Y, entonces $f(F_1) \cap Q$ y $f(F_2) \cap Q$ son dos cerrados disjuntos no vacíos tales que $Q = (f(F_1) \cap Q) \cup (f(F_2) \cap Q)$, en contradicción con la hipótesis de que Q es conexo.

Para la otra implicación, si $y \in Y$ entonces $f^{-1}(y)$ es conexo, ya que $\{y\}$ es un subcontinuo de Y. □

Observaciones 1.4.14. *1. No es difícil probar que la composición de funciones ligeras es ligera.*

2. *De la Proposición 1.4.13 se sigue que la composición de funciones monótonas es monótona.*
3. *Las funciones monótonas son confluentes[11, 13.15, pág 285].*
4. *Las funciones abiertas también son confluentes [14, pág. 148].*
5. *La imagen de un arco bajo una función continua y confluente es un arco [2, pág. 32].*

6. *Si la imagen de un abanico X bajo una función confluente $f : X \to f(X)$ contiene más de un punto, su imagen es un abanico y si no, es un arco. Además, en el primer caso, el vértice de X bajo f es mandado al vértice de $f(X)$ [2, pág. 32].*

Proposición 1.4.15. *Sean X, Y, Z continuos y $f_1 : X \to Z$, $f_2 : Z \to Y$ funciones. Si f_1 y f_2 son confluentes entonces $f = f_2 \circ f_1$ es confluente.*

Demostración. Sean B un subcontinuo de Y y A una componente de $f^{-1}(B) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(B))$. Entonces $f_1(A)$, al ser coenxo, está contenido en una componente, K, de $f_2^{-1}(B)$. Notemos que $A \subseteq f_1^{-1}(K)$ y $f_1^{-1}(K) \subseteq f_1^{-1}(f_2^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$. Como A es una componente de $f^{-1}(B)$, A debe ser una componente de $f_1^{-1}(K)$. Como f_1 y f_2 son confluentes, $f(A) = f_2(f_1(A)) = f_2(K) = B$. Esto prueba que f es confluente. $\square$

Proposición 1.4.16. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y Y un espacio. Si una función $f : X \to Y$ es monótona, entonces la función f restringida a cualquier subcontinuo de X es monótona.*

Demostración. Si K es un subcontinuo de X entonces, como X es hereditariamente unicoherente, $(f|_K)^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap K$ es un continuo de X para cualquier $y \in f(K) = Y$. $\square$

Proposición 1.4.17. *Si X y Y son abanicos con vértices v y v', respectivamente, y $f : X \to Y$ es una función confluente, entonces $f : X \to Y$ es monótona relativa a v.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de Y tal que $v' \in Q$. Como $v' = f(v)$, por la parte 6 de la Observación 1.4.14, tenemos que $v \in f^{-1}(Q)$. Debemos probar que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Para esto supongamos primero que Q no es un arco ni un punto. Supongamos, además, que $f^{-1}(Q)$ no es conexo. Entonces existe una componente A de $f^{-1}(Q)$ tal que $A \subseteq X \setminus \{v\}$, en consecuencia, A es un arco o un punto y, como f es confluente, $f(A) = Q$.

Antes de continuar la prueba, notemos que $f|_A$ es confluente. Para ver esto sean K un subcontinuo de $f(A)$ y C es una componente de $(f|_A)^{-1}(K)$. Como $C \subseteq (f|_A)^{-1}(K) = A \cap f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(K)$, entonces $C \subseteq C'$, para alguna componente C' de $f^{-1}(K)$. Ahora bien, como $K \subseteq f(A) = Q$, resulta que $C' \subseteq f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(Q)$. Más aún, $C' \cap A \neq \emptyset$, pues, al ser C un subconjunto de A, sucede que $\emptyset \neq C = A \cap C \subseteq A \cap C'$. Entonces C' es un subconjunto conexo de $f^{-1}(Q)$ que intersecta a la componente A de $f^{-1}(Q)$. Luego, $C' \subseteq A$. Esto implica que C' es un subconjunto conexo de $(f|_A)^{-1}(K)$ que contiene a la componente C de $(f|_A)^{-1}(K)$, de donde, $C = C'$. Por tanto, $(f|_A)(C) = f(C) = f(C') = K$. Esto prueba que $f|_A$ es confluente.

Regresando a la prueba, como A es un arco o un punto y $f|_A$ confluente, por la parte 5 de la Observación 1.4.14, tenemos que $Q = f(A)$ es un arco o punto. Una contradicción. Por lo tanto, si Q no es un arco ni un punto, $f^{-1}(Q)$ es conexo.

Supongamos ahora que Q es un arco o un punto. Como $v' \in Q$, en reaidad estamos suponiendo que Q es un arco que contiene a v' o bien, $Q = \{v'\}$. Como Y es un abanico, existe una sucesión decreciente $\{Q_n\}$ de subcontinuos de Y tales que: Q_n converge a Q con la métrica de Hausdorff, $v' \in Q_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que Q_n no es un arco ni un punto. Entonces, por lo demostrado en la primera parte de la prueba, $f^{-1}(Q_n)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Más aún, cada $f^{-1}(Q_n)$ es compacto por lo que cada $f^{-1}(Q_n)$ es un continuo. Ahora bien, $Q = \cap_{n=1}^{\infty} Q_n$, así que $f^{-1}(Q_n) = \cap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(Q_n)$. Entonces $\{f^{-1}(Q_n)\}$ es una sucesión decreciente de continuos que converge a $f^{-1}(Q)$, así que $f^{-1}(Q)$ es un continuo. Esto prueba el teorema. $\square$

Definición 1.4.18. *Si X es un dendroide y $p \in X$, definimos la relación $\leq_p$, como $x \leq_p y$ si $x \in py$.*

Lema 1.4.19. *Si X y Y son dendroides y $f : X \to Y$ es una función monótona relativa a un punto $p \in X$, entonces:*

1. *$f(px) = f(p)f(x)$ para todo $x \in X$.*
2. *Si $x \leq_p x'$ entonces $f(x) \leq_{f(p)} f(x')$, para cualesquiera dos puntos x y x' de X.*

3. $f|_{px}$ *es monótona para toda* $x \in X$*.*

Demostración.

1. Sea $x \in X$. Se tiene, por el Teorema de Hahn-Mazurkiewickz que $f(px)$ es un continuo de Peano y, en consecuencia, es arcoconexo [11, 8.23, pág. 130]. Por lo tanto, como $\{f(p), f(x)\} \subseteq f(px)$, se tiene que $f(p)f(x) \subseteq f(px)$. Además, $f^{-1}(f(p)f(x))$ es un continuo que contiene a p y a x, entonces tenemos que $px \subseteq f^{-1}(f(p)f(x))$, porque X es hereditariamente unicoherente, de donde $f(px) \subseteq f(f^{-1}(f(p)f(x))) = f(p)f(x)$. Por lo tanto, $f(px) = f(p)f(x)$.

2. Sean x y x' dos puntos en X. Si $x \leq_p x'$, por la definición de $\leq_p$, tenemos que $x \in px'$. Así, por 1., $f(x) \in f(px') = f(p)f(x')$. Por lo tanto, $f(x) \leq_{f(p)} f(x')$.

3. Supongamos que existen dos puntos distintos $z, w \in px$ con $z \in pw$ y $f(z) = f(w)$. Si $t \in zw$, entonces $z \leq_p t \leq_p w$. Tenemos, por 2., que $f(z) \leq_{f(p)} f(t) \leq_{f(p)} f(w)$. Esto implica que $f(z) = f(t) = f(w)$ y, por lo tanto, $f|_{px}$ es monótona. $\square$

Proposición 1.4.20. *Si* X *y* Y *son abanicos con vértices* v *y* v'*, respectivamente, y* $f : X \to Y$ *es una función confluente, entonces dada* $x \in X$*, la función* $f|_{vx}$ *es monótona y manda de manera suprayectiva el arco* vx *al arco* $v'f(x)$*.*

Demostración. Como $f : X \to Y$ es una función continua, confluente y suprayectiva, tenemos que $f(v) = v'$, por la parte 6 de la Observación 1.4.14. Además, f es monótona relativa a v, por la Proposición 1.4.17. Entonces, por el Lema 1.4.19, $f|_{vx}$ es monótona y $f(vx) = f(v)f(x) = v'f(x)$. $\square$

Recordemos que, para un abanico X, el conjunto $S(X)$ es la unión del vértice de X con el conjnto $E(X)$ de los puntos extremos de X.

Proposición 1.4.21. *Si* X *y* Y *son abanicos y* $f : X \to Y$ *es una función confluente, entonces* $f(S(X)) = S(Y)$*.*

Demostración. Sea $y \in f(S(X))$. Entonces existe $x \in S(X)$ tal que $y = f(x)$. Si x es el vértice v de X, entonces y es el vértice de Y(Observación 1.4.14) y, por lo tanto, $y \in S(Y)$. Supongamos que $x \in E(X)$ y que $y \in Y \setminus S(Y)$. Sean e un punto extremo de Y con $y \in v'e$ y K la componente de $f^{-1}(ye)$ que contiene a x. Si $v \in K$, entonces $vx \subseteq K$ y $v' \in f(vx) \subseteq f(K) = ye$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, K es un subarco propio del arco vx, pero entonces $f(K) \subseteq f(vx) \subseteq v'y$, lo que contradice que f es confluente. De esta manera, se tiene que $f(S(X)) \subseteq S(Y)$.

Ahora tomemos $y \in S(Y)$. Si y es el vértice de Y, entonces $y = f(v) \in f(S(X))$. Si $y \in E(Y)$, sea $x \in f^{-1}(y)$. Entonces $x \neq v$ y existe un único punto extremo e de X tal que $x \in ve$. Por la Proposición 1.4.20, $f(ve)$ es un arco cuyos puntos extremos son $f(v)$ y $f(e)$. Como $f(x) = y$ es un punto en este arco y $y \in E(Y)$, entonces $y = f(e)$. Por lo tanto, $y \in f(E(X)) \subseteq f(S(X))$. $\square$

Notemos que, para una función confluente $f : X \to Y$ definida entre los abanicos X y Y con vértices v y v', respectivamente, es posible que la imagen de un punto extremo de X sea el vértice v' de Y.

Para esto basta con tomar la función $f : X \to Y$ definida como $f(va) = v'a$, $f(vb) = v'b$, $f(vc) = v'c$ y $f(ve) = \{v'\}$. Entonces $e \in E(X) \cap f^{-1}(v)$. Naturalmente, si $f : X \to Y$ es tal que $f(e) = v'$ para algún $e \in E(X)$ entonces, por el Lema 1.4.19, $f(ve) = f(v)f(e) = \{v'\}$. Notemos que una función f con dicha propiedad no es abierta. Es por tanto factible sospechar que, si f es abierta, entonces sólo el vértice de X va al vértice v' de Y. La siguiente proposición confirma lo anterior.

Proposición 1.4.22. *Sean X un abanico y $f : X \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Si Y es un abanico y v y v' denotan los vértices de X y de Y, respectivamente, entonces $f^{-1}(v') = \{v\}$ y $f(E(X)) = E(Y)$.*

Demostración. Para probar que $f^{-1}(v') = \{v\}$, supongamos que existe $x_0 \in X \setminus \{v\}$ tal que $f(x_0) = v'$. Sean $e_0 \in E(X)$ tal que $x_0 \in ve_0$ y $e' \in E(Y) \setminus \{f(e_0)\}$. Sea $K = \bigcup\{vx | x \in f^{-1}(e')\} \subseteq X$. Demostraremos que K es cerrado. Para esto, sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en K que converja a un punto $a \in X$. Como $a_n \in K$, entonces existe una sucesión de puntos $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $a_n \in vb_n$ y $b_n \in f^{-1}(e')$ y podemos suponer, por la compacidad de X, que los puntos b_n convergen a un punto $b \in X$. Por la continuidad de f, tenemos que $b \in f^{-1}(e')$. Como X es un abanico suave, los arcos vb_n convergen al arco vb y, como $a_n \in vb_n$ entonces $a \in vb$, de donde $a \in K$. Por lo tanto, K es cerrado. Así, $X \setminus K$ es abierto y, como f es abierta, su imagen $f(X \setminus K)$ es un abierto de Y. Notemos que si $e \in K \cap E(X)$ entonces $f(e) = e'$. De donde, $e_0 \in X \setminus K$ y, por la Proposición 1.4.20, $x_0 \in X \setminus K$. Esto implica que $f(X \setminus K)$ es una vecindad abierta de v' en Y. Por consiguiente, existe un punto $y \in f(X \setminus K) \cap (v'e' \setminus \{v', e'\})$. Tomemos un punto $x \in X \setminus K$ tal que $f(x) = y$ y un punto $e_1 \in X \setminus K$. Como $f(ve_1)$ es un arco de v' a un punto de $E(Y)$ que contiene a y, por la Proposición 1.4.20 y por la Proposición 1.4.21, debe ser el arco $v'e'$. Por la definición de K, tenemos que $ve_1 \subseteq K$, lo cual es una contradicción.

Probaremos ahora que $f(E(X)) = E(Y)$. De la Proposición 1.4.21, se tiene que $f(S(X)) = S(Y)$. Como $f^{-1}(v') = \{v\}$, se tiene que $f(E(X)) = E(Y)$. $\square$

1.5. El Conjunto de Cantor

Definición 1.5.1. *Consideremos al intervalo I y dividámoslo en tres subintervalos cerrados de igual longitud. De I se removemos el intervalo abierto de en medio y sea C_1 el conjunto resultante, es decir, $C_1 = I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Suponiendo que C_n esté definido, definimos C_{n+1} a partir de C_n dividiendo a cada componente de C_n en tres subintervalos de igual longitud y removiendo el subintervalo abierto de en medio de cada componente. Sea $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. A C se le conoce como el **conjunto de Cantor**.*

Observación 1.5.2. *El conjunto de Cantor, C, puede definirse como el subespacio que consiste de todos los números en I que pueden ser escritos en base 3 sin utilizar el dígito 1. Ya que si $t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n}$, donde $t_n = \{0, 1, 2\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ si y sólo si $t_1 = 1$, $t \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ si y sólo si $t_2 = 1$ y $t_1 \in \{0, 2\}$ y así sucesivamente [6, Ejercicio 3, pág. 22].*

Teorema 1.5.3. *[11, 7.7, pág. 106] Todo espacio métrico, compacto y no vacío Y es una imagen continua de C.*

Definición 1.5.4. *Un espacio topológico X es* ***perfecto*** *si X no contiene puntos aislados en X.*

Teorema 1.5.5. *[11, 7.14, pág. 109] Un espacio métrico Y es homeomorfo a C si y sólo si Y es compacto, totalmente disconexo y perfecto.*

1.6. Funciones de Identificación

Definición 1.6.1. *Sea A un conjunto no vacío. Decimos que $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ es una* ***relación de equivalencia*** *en A si cumple las tres condiciones siguientes:*

1. *$(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.*
2. *Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, a) \in \mathcal{R}$ para cualesquiera puntos a y b de A.*
3. *Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R}$ entonces $(a, c) \in \mathcal{R}$ para cualesquiera puntos a, b y c de A.*

Observaciones 1.6.2.

1. *Sean A un conjunto no vacío y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Dado un punto $a \in A$, sea $[a] = \{b \in A | (a, b) \in \mathcal{R}\}$. Notemos que $A = \bigcup\{[a] | a \in A\}$ y que si a y b son puntos de A entonces $[a] = [b]$ o $[a] \cap [b] = \emptyset$. Si a es un punto de A entonces $[a]$ es llamado la* ***clase de equivalencia*** *de a.*
2. *Es común que a las relaciones de equivalencia se les denote con el símbolo $\sim$. Además, en vez de escribir $(a, b) \in \sim$, se pone $a \sim b$.*

Definición 1.6.3. *Al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia se le llama el* ***cociente*** *de A con respecto a $\sim$ y se le detona como $A/\sim$. A la función $p_A : A \to A/\sim$, dada por $p_A(a) = [a]$ se le llama la función* ***cociente*** *de A en $A/\sim$.*

Definición 1.6.4. *Si A y B son dos conjuntos con relaciones de equivalencia $\sim_A$ y $\sim_B$, respectivamente, se dice que una función $f : A \to B$* ***preserva la relación*** *si $a \sim_A a'$ implica que $f(a) \sim_B f(a')$.*

Proposición 1.6.5. *Si A y B son conjuntos no vacíos con relaciones de equivalencia $\sim_A$ y $\sim_B$, respectivamente, y $f : A \to B$ es una función que preserva la relación, entonces existe una única función $\widetilde{f} : A/\sim_A \to B/\sim_B$ tal que $p_B \circ f = \widetilde{f} \circ p_A$.*

Demostración. Definamos $\widetilde{f}([a]) = [f(a)]$ para cada clase de equivalencia $[a] \in A/\sim_A$. Notemos que $\widetilde{f}$ está bien definida, ya que si $a' \in [a]$, entonces $a \sim_A a'$ y, como f preserva la relación, $f(a) \sim_B f(a')$, con lo que $[f(a)] = [f(a')]$. Se tiene entonces que $(p_B \circ f)(a) = [f(a)] = \widetilde{f}([a]) = (\widetilde{f} \circ p_A)(a)$, por lo que $p_B = \circ f = \widetilde{f} \circ p_A$.

Supongamos que $\widetilde{g}$ es una función, distinta a $\widetilde{f}$, tal que $p_B \circ f = \widetilde{g} \circ p_A$. Entonces $\widetilde{g}([a]) \neq \widetilde{f}([a])$ para alguna $[a]$, como p_A es suprayectiva entonces $\widetilde{g} \circ p_A(a) \neq \widetilde{f} \circ p_A(a)$ para alguna $a \in A$. Esto es una contradicción, ya que $\widetilde{g} \circ p_A(a) = p_B \circ f(a) = \widetilde{f} \circ p_A(a)$. $\square$

Definición 1.6.6. *Si A y B son conjuntos no vacíos con relaciones de equivalencia $\sim_A$ y $\sim_B$, respectivamente, y $f : A \to B$ es una función que preserva la relación entonces a la función $\widetilde{f}$ de la Proposición 1.6.5 se le denomina la función* ***inducida por f al pasar al cociente****.*

Definición 1.6.7. *Sean Y un conjunto arbitrario, X un espacio topológico y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. La* ***topología de identificación*** *en Y inducida por q está dada por $\tau(q) = \{U \subseteq Y | q^{-1}(U)$ es abierto en $X\}$.*

Observación 1.6.8. *Sean Y un conjunto arbitrario, X un espacio topológico y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. Notemos que $\tau(q)$ es una topología, ya que q^{-1} preserva las operaciones entre conjuntos.*

Proposición 1.6.9. *Sean Y un conjunto arbitrario, X un espacio topológico y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. Entonces $\tau(q)$ es la topología más grande de Y para la cual $q : X \to Y$ es continua.*

Demostración. Cuando Y tiene la topología de identificación, claramente q es continua. Si τ es otra topología de Y para la cual q es continua entonces $U \in \tau$ implica que $q^{-1}(U)$ es abierto en X, es decir, $U \in \tau(q)$. $\square$

Definición 1.6.10. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua y suprayectiva $q : X \to Y$ es una **función de identificación** si la topología de Y coincide con $\tau(q)$.*

Proposición 1.6.11. *Sean X y Y espacios topológicos. Si $q : X \to Y$ es una función continua, abierta (o cerrada) y suprayectiva, entonces q es una función de identificación.*

Demostración. Sea τ la topología de Y. Como q es continua, por la Proposición 1.6.9 tenemos que $\tau \subseteq \tau(q)$.

Supongamos que q es abierta y sea $U \in \tau(q)$. Entonces $q^{-1}(U)$ es abierto en X y, por la suprayectividad de q, tenemos que $U = q(q^{-1}(U)) \in \tau$. En el caso en que q es cerrada, la demostración es análoga. $\square$

Proposición 1.6.12. *Sea $q : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. La función q es una función de identificación si y sólo si, para cada espacio topológico Z y cada función continua $g : Y \to Z$, la continuidad de $g \circ q$ implica la continuidad de g.*

Demostración. Supongamos que q es una identificación y que $g \circ q$ es continua. Entonces, para cada abierto U en Z, se tiene que el conjunto $(g \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X y, en consecuencia, $g^{-1}(U)$ es un abierto en Y. Por lo tanto, g es una función continua.

Ahora supongamos que para todo espacio topológico Z y para toda función continua $g : Y \to Z$, la continuidad de $g \circ q$ implica la continuidad de g. Denotemos por $q' : X \to (Y, \tau(q))$ a la función de identificación con $q'(x) = q(x)$ para cada $x \in X$. Sea $1_Y : Y \to (Y, \tau(q))$

la función identidad. Notemos que $(1_Y \circ q)(x) = q(x) = q'(x)$ para toda $x \in X$. Entonces q' es continua y, por la condición de la hipótesis, tenemos que 1_Y es continua. Entonces $\tau(q) \subseteq \tau$, donde τ es la topologia de Y. Como también $\tau \subseteq \tau(q)$, pues $\tau(q)$ es la topología más grande bajo la cual q es continua, tenemos que $\tau = \tau(q)$. $\square$

Proposición 1.6.13. *Sean $q : X \to Y$ una función de identificación, Z un conjunto y $g : Y \to Z$ una función suprayectiva. Entonces $\tau(g \circ q) = \tau(g)$.*

Demostración. La función $g \circ q$ es continua si y solo si g es continua, por la Proposición 1.6.12, entonces, $(g \circ q)^{-1}(U)$ es abierto si y solo si $g^{-1}(U)$ es abierto. $\square$

Observación 1.6.14. *Si $q : X \to Y$ es una función de identificación, Z es un conjunto y $g : Y \to Z$ es una función suprayectiva, en particular, de la Proposición 1.6.13, se tiene que $g \circ q$ es una función de identificación si y solo si g lo es.*

Proposición 1.6.15. *Sean X y Y dos espacios topológicos no vacíos con relaciones de equivalencia $\sim_X$ y $\sim_Y$, respectivamente. Si $f : X \to Y$ es una función continua que preserva la relación, entonces la función $\widetilde{f} : X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ inducida por f al pasar al cociente es continua. Además, $\widetilde{f}$ es una identificación si f lo es.*

Demostración. Sean $p : X \to X/\sim_X$ y $q : Y \to Y/\sim_Y$ las funciones cociente. Como $q \circ f$ es continua y $\widetilde{f} \circ p = q \circ f$, entonces $\widetilde{f}$ es continua, por la Proposición 1.6.12. Supongamos ahora que f es una identificación. Entonces, por la Observación 1.6.14, $\widetilde{f} \circ p = q \circ f$ es una función de identificación y, por lo tanto, también lo es $\widetilde{f}$. $\square$

1.7. Conos y Suspensiones

Definición 1.7.1. *Para un espacio topológico X, el* ***cono sobre*** *X, denotado como $Cono(X)$, es el espacio cociente $(X \times I)/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en $\times I$ dada por $(x,t) \sim (x,t)$ para toda $x \in X$ y para toda $t \in [0,1)$ y $(x,1) \sim (x',1)$, para todos $x, x' \in X$.*

Notación 1.7.2. *Sea X un espacio topológico. A los elementos de $Cono(X)$ se les denota como $\langle x,t\rangle$. Como $h : X \to Cono(X)$, definida como $h(x) = \langle x,0\rangle$, define un homeomorfismo del espacio X al subespacio $\{\langle x,0\rangle |\ x \in X\}$ de $Cono(X)$, podemos identificar a X con $\{\langle x,0\rangle |\ x \in X\}$.*

Proposición 1.7.3. *Toda función continua $f : X \to Y$ se puede extender a una función continua $\widetilde{f} : Cono(X) \to Cono(Y)$, definida como $\widetilde{f}(\langle x,t\rangle) = \langle f(x),t\rangle$.*

Demostración. Sea $\widehat{f} : X \times I \to Y \times I$ definida como $\widehat{f}((x,t)) = (f(x),t)$. Como $\widehat{f}$ preserva la relación, por la Proposición 1.6.15 se tiene el resultado. □

Definición 1.7.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. A la función $\widetilde{f} : Cono(X) \to Cono(Y)$ dada por la Proposición 1.7.3, se le llama la **función inducida por** f **entre conos**.*

Teorema 1.7.5. *Si X es un espacio métrico y compacto y $\mathcal{Q} = \Pi_{i=1}^{\infty} I_n$ el cubo de Hilbert, donde $I_n = [0,1]$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una función continua e inyectiva $h : X \to \mathcal{Q}$.*

Demostración. Observemos que $\mathcal{Q}$ es un espacio métrico y compacto [8, 4.12.2 y 4.14, pág. 213]. De hecho, por [8, 4.13.1, pág 213], una métrica, $d_0 : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to [0,\infty]$, para $\mathcal{Q}$ está dada por:

$$d_0((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i - y_i|.$$

Sea d una métrica para X. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $d(x,x') \leq 1$ para cualesquiera dos puntos x y x' de X [8, 4.11.3, pág. 211]. Como X es un espacio métrico y compacto, existe un subconjunto denso y numerable $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X [6, 4.1, pág. 233] y [6, 5.6, pág. 187]. Sea $h : X \to \mathcal{Q}$ definida como $h(x) = (d(x,a_n))_{n=1}^{\infty}$. Como la función distancia es continua [6, Ex. 4, pág. 184], se tiene que h es continua [6, 2.3, pág. 101]. Claramente, h es inyectiva. □

Observación 1.7.6. *Notemos que el Teorema 1.7.5 nos dice que si X es un espacio métrico y compacto, entonces hay una "copia" de*

X en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. A h se le conoce con el nombre de encaje *y, en este caso, se dice que X puede ser encajado en $\mathcal{Q}$*

Definición 1.7.7. *Sea X un espacio métrico tal que X puede ser encajado en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. En $\mathcal{Q} \times I$, consideremos el punto $v = ((x_n)_{n=1}^{\infty}, 1)$, donde $x_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se define el* ***cono geométrico sobre*** *X, denotado como $Conog(X)$, como $Conog(X) = \{tv + (1-t)x | x \in X \text{ y } t \in I\}$.*

El cono topológico de X, $Cono(X)$, se obtiene "apachurrando" todos los puntos de $X \times \{1\}$, mientras que el cono geométrico de X, $Conog(X)$, se obtiene como la unión de todos los segmentos de recta de v a un punto de X. Para espacios sencillos X es posible mostrar que $Cono(X)$ es homeomorfo a $Conog(X)$. Sin embargo, esto no siempre es así.

Observación 1.7.8. *Sea X un espacio topológico. El $Cono(X)$, aunque "geométricamente" es un cono, puede contener más conjuntos abiertos de los que se pueden formar en el cono geométrico. En $\mathbb{R}^2$, sea $X = \{(i,0)\}_{i=0}^{\infty}$. Consideremos $Conog(X)$. Claramente hay una biyección continua $f : Cono(X) \to Conog(X)$. Sin embargo, los dos espacios no son homeomorfos. Si V_n es el segmento de línea recta que va de v a $(n,0)$ de longitud $1/n$ y si $V = \bigcup V_n$, V no es abierto en $Conog(X)$, pero lo es en $Cono(X)$, ya que $q^{-1}(V)$ es abierto en $X \times I$, donde q denota a la función cociente.*

El siguiente resultado muestra una condición, bajo la cual, los conos geométrico y topológico son homeomorfos.

Proposición 1.7.9. *Si X es un espacio métrico y compacto entonces $Conog(X)$ es homeomorfo a $Cono(X)$.*

Demostración. Sea $f : X \times I \to Conog(X)$, definida como $f(x,t) = tv + (1-t)x$. La función f es continua, suprayectiva y $f(x,t) = f(x',t')$ si y sólo si $(x,t) = (x',t')$ o $t = 1 = t'$. Por lo tanto, la partición de $X \times I$ inducida por f es la partición asociada con el espacio $Cono(X)$. Denotemos por $q : X \times I \to Cono(X)$ a la función cociente. Por el Lema de la Transgresión [6, 3.2, pág. 123], la función $q \circ f^{-1} : Cono(X) \to Conog(X)$ está bien definida y es un homeomorfismo. $\square$

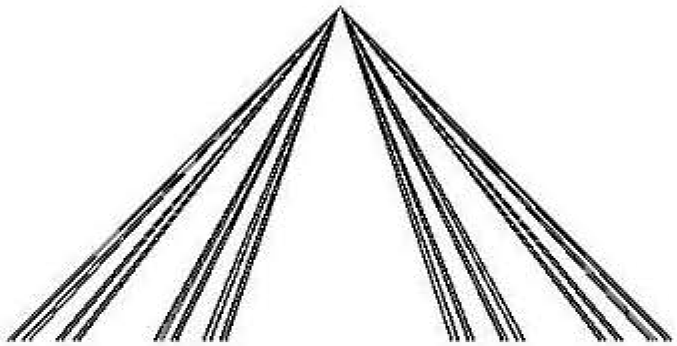

Figura 1.4: Abanico de Cantor

Definición 1.7.10. *Al cono sobre el conjunto de Cantor se le llama el* ***abanico de Cantor*** *y se le denota como* F_C.

En la presente sección mostraremos que el abnico de Cantor contiene a todos los abanicos suaves. Para esto necesitaremos de la siguiente noción y de un lema.

Definición 1.7.11. *Sean* X *un espacio topológico,* A *y* B *subconjuntos de* X*. Decimos que* X *es* ***conexo entre*** A ***y*** B *si* $X \neq U \cup V$ *siempre que* U *y* V *sean abiertos en* X *tales que* $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$ *y* $B \subseteq V$*. Si* $A = \{p\}$ *y* $B = \{q\}$ *decimos que* X *es* ***conexo entre*** p ***y*** q.

Lema 1.7.12. *[6, 10.5, pág. 85] Sean* $f_i : X \to \mathbb{R}$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *funciones continuas tales que* $|f_i(x)| \leq M_i$, *para toda* $i \in \mathbb{N}$, *donde* $\sum_{i=1}^{\infty} M_i$ *es una serie convergente. Entonces la función* $f : X \to Y$ *dada por* $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ *está bien definida y es continua.*

Teorema 1.7.13. *Un abanico es suave si y sólo si puede ser encajado en* F_C.

Demostración. Supongamos que X es un abanico encajado en F_C. Sea v el vértice de F_C. Si $v \in F_C \setminus X$ entonces X es un arco o un punto. Supongamos que $v \in X$ entonces v es el vértice de X y, por tanto, X es un abanico suave [5, Corolario 6, pág. 299].

Si X es un abanico suave con vértice v' entonces existe una función continua y suprayectiva $f : X \to I$ tal que $f|_{v'x}$ es inyectiva para todo $x \in X$ [7, 4, pág. 90].

Probaremos que existe una función continua $g : X \setminus \{v'\} \to C$ tal que $g^{-1}(c)$ es una casicomponente de $X \setminus \{v'\}$ para toda $c \in C$. Para esto, primero demostraremos que existe una colección numerable $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ de abiertos y cerrados de $X \setminus \{v'\}$ tal que para cualesquiera p y $q \in X \setminus \{v'\}$ tales que $X \setminus \{v'\}$ no es conexo entre p y q (Definición 1.7.11) existe F_n tal que $p \in F_n$ y $q \notin F_n$. Sea $\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base numerable para X. Para cualesquiera R_i, R_j tales que $X \setminus \{v'\}$ no es conexo entre ellos, existe un abierto y cerrado F_{ij} tal que $R_i \subseteq F_{ij}$ y $F_{ij} \cap R_j = \emptyset$. Reordenando los F_{ij} tenemos una colección numerable de abiertos y cerrados $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$. Si F es un abierto y cerrado tal que $p \in F$ y $q \in X \setminus F$, entonces existen un R_i y un R_j tales que $p \in R_i \subseteq F$ y $q \in R_j \subseteq X \setminus F$, es decir, X no es conexo entre R_i y R_j. Por tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in R_i \subseteq F_n$ y $q \in R_j \subseteq X \setminus F_n$.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f^{(n)} : X \to \mathbb{R}$ como $f^{(n)}(x) = 2$ si $x \in F_n$ y $f^{(n)}(x) = 0$ en otro caso. Sea entonces, $g : X \setminus \{v'\} \to C$ dada por $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{3^n}$. Como cada F_n es abierto y cerrado, $f^{(n)}$ es continua y, como $|\frac{f^{(n)}(x)}{3^n}| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ es convergente entonces $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{3^n}$ es continua, por el Lema 1.7.12. Si p y q pertenecen a dos casicomponentes distintas de $X \setminus \{v'\}$, existe un F_n tal que $p \in F_n$ y $q \in X \setminus F_n$, de donde $f^{(n)}(p) = 2$ y $f^{(n)}(q) = 0$ y, por tanto, $g(p) \neq g(q)$. Esto demuestra que $g^{-1}(c)$ está contenido en una casicomponente de $X \setminus \{v'\}$ para cada $c \in C$. Inversamente, si Q es una casicomponente de $X \setminus \{v'\}$ se tiene que $Q \subseteq F_n$ o $Q \subseteq (X \setminus \{v'\}) \setminus F_n$. De donde Q está contenido en a lo más uno de los conjuntos $g^{-1}(c)$ con $c \in C$.

Pero las casicomponentes de $X \setminus \{v'\}$ son de la forma $v'e \setminus \{v'\}$ con $e \in E(X)$ [2, 3, pág. 25]. Entonces, para cualquier $c \in C$ se tiene $g^{-1}(c) = v'e_x \setminus \{v'\}$ para algún $e_x \in E(X)$.

Supongamos que en $\mathbb{R}^2$ tenemos un sistema de coordenadas polares (r,θ) y consideremos el conjunto de Cantor C en el arco $0 \leq \theta \leq 1$ de la circunferencia $r = 1$. Es decir, el conjunto de puntos $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde $p_i = (1,\theta_i)$, $\theta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2c_i}{3^i}$ y $c_i = 0$ o 1, por la Observación 1.5.2. Denotemos por O al origen y por Op_i al segmento de línea recta que une al origen O con p_i. La unión $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Op_i$ es homeomorfa a F_C y definimos una función $h : X \to Y$ como $h(v') = O$ y $h(x) = (f(x), g(x))$. Claramente h es continua. Además, como $f|_{v'e}$ es un homeomorfismo y $g^{-1}(c)$ es una casicomponente, h es inyectiva. Por tanto, h es un homeomorfismo. □

Como una consecuencia inmediata de la Proposición 1.7.13 tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 1.7.14. *Todo abanico suave puede representarse como la unión de segmentos de línea recta en el plano.*

Definición 1.7.15. *Para un espacio topológico X, la **suspensión de** X, denotada como $Susp(X)$, es el espacio cociente $(X\times[-1,1])/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por $(x,t) \sim (x,t)$ para toda $x \in X$ y para toda $t \in (-1,1)$ y $(x,1) \sim (x',1)$, $(x,-1) \sim (x',-1)$ para todos $x, x' \in X$.*

1.8. Trayectorias

Definición 1.8.1. *Una **trayectoria** en un espacio métrico X es una función continua $p : I \to X$. Decimos que $x = p(0)$ es el **punto inicial** y $y = p(1)$ es el **punto final** de la trayectoria p. También decimos que p une a x con y.*

Definición 1.8.2. *Dados una trayectoria p en un espacio métrico X y un número $\epsilon > 0$, se dice que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ es una ϵ-**partición** de p en n pedazos si diám $p([t_{i-1}, t_i]) \leq \epsilon$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Definición 1.8.3. *Una familia de trayectorias $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en un espacio métrico X es **uniforme** si para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo $n = n(\epsilon)$ tal que cada trayectoria $p \in \mathcal{P}$ admite una ϵ-partición en n pedazos.*

Definición 1.8.4. *Una familia $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de funciones continuas $f_\alpha : X \to Y$ continuas entre espacios métricos X y Y es* ***equicontinua*** *si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f_\alpha(x_1), f_\alpha(x_2)) < \epsilon$ siempre que $d_X(x_1, x_2) < \delta$ para toda $f_\alpha \in \mathcal{F}$.*

Proposición 1.8.5. *Toda familia equicontinua de trayectorias $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in J}$ en un espacio métrico X es uniforme.*

Demostración. Tomemos un número arbitrario $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq 1$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $d_X(p(x_1), p(x_2)) < \epsilon$. Sean $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta \geq 1$ y $0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{i}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1$ una partición de I. Claramente esta es una ϵ-partición de p en n pedazos para toda $p \in \mathcal{P}$. $\square$

Sin embargo, el recíproco de la Proposición 1.8.5 no es cierto. La familia de trayectorias $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en I, donde $f_n(x) = x^n$, fácilmente se puede comprobar que es uniforme, pero no equicontinua.

1.9. Homotopías

Definición 1.9.1. *Sean X y Y dos espacios. Las funciones $f, g : X \to Y$ son* ***homotópicas****, llamada homotopía, si existe una función $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, para toda $x \in X$.*

Intuitivamente, tomando a t como un parámetro de tiempo, la homotopía F representa una deformación continua de la función f a la función g, con $F|_{X \times \{t_0\}}$ como la etapa de la deformación en el tiempo t_0.

Proposición 1.9.2. *Sea X un espacio. Una función $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f puede extenderse a una función continua $F : Cono(X) \to Y$.*

Demostración. Sea $q : X \times I \to Cono(X)$ la función cociente. Como $q|_{X \times \{0\}}$ es un homeomorfismo, consideramos a X y a $q(X \times \{0\})$ como el mismo espacio. Si f es homotópica a una función constante, existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = y_0$ para toda $x \in X$ y para algún

$y_0 \in Y$. Entonces, por el Teorema de la Transgresión [6, 5, 3.2, pág. 123], $F \circ q^{-1} : Cono(X) \to Y$ es una función bien definida, pues si v denota el vértice de $Cono(X)$ entonces $(F \circ q^{-1})(v) = F(x, 1) = y_0$ y como q es una función abierta y $(F \circ q^{-1})\langle x, 0\rangle = F(x, 0) = f(x)$ para toda $x \in X$ entonces $F \circ q^{-1}$ es continua y extiende a f.

Inversamente, si f se puede extender a una función continua $F : Cono(X) \to Y$, entonces la función $F \circ q : X \times I \to Y$ muestra que f es homotópica a una función constante. □

Definición 1.9.3. *Un espacio X es* ***contraíble*** *si la función identidad $1_X : X \to X$ es homotópica a una función constante.*

Proposición 1.9.4. *Sean X un espacio y Y un espacio contraíble. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son funciones, entonces $g \circ f : X \to X$ es homotópica a una función constante.*

Demostración. Definamos la función $f \times 1_I : X \times I \to Y \times I$ como $(f \times 1_I)(x, t) = (f(x), t)$ para toda $x \in X$ y para toda $t \in I$. Como Y es un espacio contraíble, existe una función continua $F : Y \times I \to Y$ tal que $F(y, 0) = y$ y $F(y, 1) = y_0$ para toda $y \in Y$ y para alguna $y_0 \in Y$. Consideremos ahora la función $G : X \times I \to X$ definida como $G = g \circ F \circ (f \times 1_I)$. La función G es continua, por ser la composición de funciones continuas. Además, $G(x, 0) = g(F(f(x), 0)) = g(f(x))$ y $G(x, 1) = g(F(f(x), 1)) = g(y_0)$ para toda $x \in X$. Por lo tanto, $g \circ f$ es homotópica a una función constante. □

Definición 1.9.5. *Un espacio X es* ***simplemente conexo*** *si es conexo por trayectorias y si toda función continua $f : S^1 \to X$ es homotópica a una constante.*

Proposición 1.9.6. *Todo espacio contraíble es simplemente conexo.*

Demostración. Sea X un espacio contraíble. Probemos primero que X es conexo por trayectorias. Sean $x_1, x_2 \in X$ y tomemos una función continua $F : X \times I \to X$ tal que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = x_0$ para toda $x \in X$ y para alguna $x_0 \in X$. Definamos la función $p : I \to X$ como $p(t) = F(x_1, 2t)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y, como

$p(t) = F(x_2, 2(1-t))$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Así, p es una trayectoria que une a x_1 con x_2.

Si $f : S^1 \to X$ es una función continua, definimos $G : S^1 \times I \to X$ como $G(x,t) = F(f(x), t)$. Entonces G es continua, $G(x, 0) = f(x)$ y $G(x, 1) = x_0$ para toda $x \in X$. Por lo tanto, X es es simplemente conexo. $\square$

Capítulo 2

Funciones Continuas de F_C en Ambas Direcciones

2.1. Preimágenes Continuas de F_C

Recordemos que F_C denota al cono sobre el conjunto de Cantor. Denotemos por v al vértice de F_C.

La siguiente proposición da una condición necesaria para que un continuo sea una imagen continua de F_C.

Proposición 2.1.1. *Si X es un continuo y existe una función continua y suprayectiva $f : X \to F_C$ entonces X contiene un subconjunto abierto con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. $f^{-1}(F_C \setminus \{v\})$ es un abierto con una cantidad no numerable de componentes. □

Observación 2.1.2. *Notemos que la condición presentada en la Proposición 2.1.1 no es una condición suficiente para que un continuo sea una preimagen bajo una función continua de F_C. Consideremos $Cono([0, \Omega])$, donde Ω representa el primer ordinal no numerable. Si se quita el vértice de $Cono([0, \Omega])$ entonces se tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Sin embargo, no existe una función continua y suprayectiva de $Cono([0, \Omega])$ a F_C, lo cual es una consecuencia de la siguiente:*

Proposición 2.1.3. *Si X es un continuo y $f : Cono([0,\Omega]) \to X$ es una función continua y suprayectiva entonces X es la unión numerable de continuos de Peano.*

Demostración. Sea $q : [0,\Omega] \times I \to Cono([0,\Omega])$ la función de identificación. Para cada $t \in [0,1)$, definimos la función continua $f_t : [0,\Omega] \to X$ como $f(\alpha) = f(q(\alpha,t))$. Sea $t \in I$ fija. Como X es un continuo, existe una sucesión $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos de X tal que $f_t(\Omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl(G_n)$. Como f_t es continua, $\Omega \in f_t^{-1}(f_t(\Omega)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_t^{-1} cl(G_n)$. Como cada $f_t^{-1}(cl(G_n))$ es compacto, existe $\alpha_n \in [0,\Omega]$ tal que $[\alpha_n,\Omega] \subseteq f_t^{-1}(cl(G_n))$. Como toda sucesión en $[0,\Omega]$ está acotada superiormente [6, 9.1, pág. 54], existe $\alpha_t \in [0,\Omega]$ tal que $\alpha_n < \alpha_t$. De esta manera se tiene que $[\alpha_t,\Omega] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_t^{-1}(cl(G_n))$. Por tanto, para cada $\beta \in [\alpha_t,\Omega]$, resulta que $f_t(\beta) = f_t(\alpha_t)$. Como el conjunto de los números racionales en I es numerable, existe un ordinal numerable $\alpha' > \alpha_t$ para todo racional $t \in I$. Se tiene entonces que para $\beta \geq \alpha'$, $f(q(\beta,t)) = f_t(\beta) = f_t(\alpha') = f(q(\alpha',t))$ para todo racional $t \in [0,1)$. Como el conjunto de números racionales en $[0,1)$ es denso en I y, como f es continua, $f(q(\beta,t)) = f(q(\alpha',t))$ para todo $t \in I$ y toda $\beta \geq \alpha'$. Por lo tanto, $f_{|Cono([0,\alpha'])} : Cono([0,\alpha']) \to X$ es suprayectiva. Pero como $Cono([0,\alpha'])$ es unión numerable de arcos, se tiene por el Teorema 1.1.10, que X debe ser unión numerable de continuos de Peano. □

Corolario 2.1.4. *No existe una función continua y suprayectiva de $Cono([0,\Omega])$ en F_C.*

Demostración. Sea $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subcontinuos de F_C cuya unión es F_C, entonces al menos un W_i contiene una cantidad no numerable de puntos de C. Así, $W_i \setminus \{v\}$ es abierto en W_i y contiene una cantidad no numerable de componentes. Por lo tanto, W_i no es un continuo de Peano. □

En el siguiente Teorema se presenta una caracterización de las preimágenes continuas de F_C.

Teorema 2.1.5. *Si X es un continuo de Hausdorff entonces existe una función continua y suprayectiva $f : X \to F_C$ si y sólo si X*

contiene un abierto G y un conjunto perfecto y no vacío $A \subseteq G$ tal que puntos distintos de A pertenecen a componentes distintas de G.

Demostración. Supongamos que existe una función continua y suprayectiva $f : X \to F_C$. Sea $\mathfrak{M} = \{B | B$ es cerrado en X y $f(B) = C\}$. Notemos que $\mathfrak{M}$ es no vacío, pues $f^{-1}(C) \in \mathfrak{M}$. Dando un orden parcial a $\mathfrak{M}$ mediante la inclusión y aplicando el Lema de Zorn, se obtiene un elemento minimal $A_0 \in \mathfrak{M}$. Aplicando el axioma de elección, existe un conjunto $A \subseteq A_0$ que contiene exactamente un punto de $f^{-1}(x)$ para cada $x \in C$. Es claro que A no es vacío. Para demostrar que A es perfecto, supongamos que $a \in A$ es un punto aislado. Entonces existe un conjunto abierto U en A_0 tal que $U \cap A = \{a\}$. Entonces $A_0 \setminus U$ es un subconjunto propio y cerrado de A_0 y $f(A_0 \setminus U)$ es un subconjunto compacto y cerrado de C que contiene todos los puntos de C salvo, posiblemente, $f(a)$. Notemos que debe de contener a $f(a)$, porque C es perfecto. Por lo tanto, $f(A_0 \setminus U) = C$, contradiciendo que A_0 es un elemento minimal. De esta manera se tiene que A es perfecto. Sea $G = f^{-1}(F_C \setminus \{v\})$. Observemos que puntos distintos de A tienen imágenes distintas en C y, por lo tanto, pertenecen a componentes distintas de G.

Para demostrar la otra implicación, sean G y A como en el enunciado del teorema. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $cl(A) \subseteq G$. Si no fuera el caso, sean $a \in A$ y U un abierto en X con $a \in U \subseteq cl(U) \subseteq G$. Como un subconjunto abierto de un conjunto perfecto es perfecto, se puede reemplazar A por $A \cap U$. También supondremos, sin pérdida de generalidad, que puntos distintos de A pertenecen a componentes distintas de $cl(G)$. De otro modo, aplicando la normalidad, existe un abierto V tal que $cl(A) \subseteq V \subseteq cl(V) \subseteq G$. Claramente, puntos distintos de A pertenecen a componentes distintas de $cl(V)$ y se puede reemplazar G por V si es necesario.

Vamos a construir una función $g : cl(G) \to C$. Para esto definimos primero $R(0,1) = cl(G)$. Como A es perfecto y no vacío, A contiene al menos dos puntos y, como pertenecen a componentes distintas del compacto $R(0,1)$, existen dos cerrados disjuntos, $R(1,1)$ y $R(1,2)$, tales que $R(1,j) \cap A \neq \emptyset$ para $j \in \{1,2\}$, y $R(1,1) \cup R(1,2) = cl(G) = R(0,1)$. Inductivamente, supongamos que $R(i,k)$ ha sido elegido, para cada i con $0 \leq i < n$ y para cada k con $1 \leq k \leq 2^i$, tal que, para $i \neq 0$, $R(1, 2k) \cup R(1, 2k-1)$ es una separación de $R(i-1, k)$, y tal que $R(i, k) \cap A \neq \emptyset$ para cada i, k. Como $R(i, k) \cap A$ es abierto en A, cada $R(i, k)$ contiene al menos dos puntos de A. Entonces podemos elegir, para cada k, a $R(n, 2k)$ y a $R(n, 2k-1)$ como una separación de $R(n-1, k)$ de tal forma que ambos conjuuntos intersecten a A, ya que puntos diferentes de $A \cap R(n-1, k)$ pertenecen a casicomponentes diferentes de $R(n-1, k)$. Así, se satisface de nuevo la hipótesis de inducción y obtenemos una familia $\{R(i, k) | i \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1 \leq k \leq 2^i\}$, con la propiedad de que $\bigcap_{i=0}^{\infty} R(i, k_i) \cap cl(A) \neq \emptyset$ siempre que $\bigcap_{i=0}^{\infty} R(i, k_i) \neq \emptyset$ (es decir, cuando $k_{i+1} \in \{2k_i,\ 2k_i - 1\}$ para todo i). Además, si $x \in cl(G)$, existe una única sucesión de números enteros $\{K_i\}_{1=0}^{\infty}$ tal que $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty}(R(i, K_i(x)))$.

Sea $g : cl(G) \to C$ definida como $g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l}{3^l}$, donde $a_l = 0$ si $K_l(x)$ es impar y $a_l = 2$ si $K_l(x)$ es par.

Por el Lema de Urysohn, existe una función $h : X \to I$ tal que $h(x) = 0$ si $x \in cl(A)$ y $h(x) = 1$ si $x \notin G$. Sea $f : X \to F_C$ la función continua, definida como: $f(x) = q(g(x), h(x))$ si $x \in cl(G)$ y $f(x) = v$ si $x \notin G$. Para demostrar que f es suprayectiva, sea $q(x, t) \in F_C$. Sea $y \in g^{-1}(x)$, el cual no es vacío porque g es suprayectiva. Sea L una componente de $\bigcap_{i=1}^{\infty} R(i, K_i(y))$ tal que $L \cap cl(A) \neq \emptyset$. Entonces $L \cap (S \setminus G)$ no es vacío, por el teorema de los golpes en la frontera [11, 5.7, pág. 75] y, por lo tanto, $f(L)$ es cerrado, conexo y contiene a v y a $q(x, 0)$. En particular, $q(x, t) \in f(L) \subseteq f(X)$. $\square$

Para espacios métricos, se tiene una caracterización mejor y más simple:

Teorema 2.1.6. *Si X es un continuo, entonces X es una preimagen continua de F_C si y sólo si X contiene un abierto G con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Observemos que, por la Proposición 2.1.1, si X es una preimagen de F_C entonces X contiene un subconjunto abierto con una cantidad no numerable de componentes. Para demostrar la implicación inversa, sea G un subconjunto abierto de X con una cantidad no numerable de componentes. Por el axioma de elección, existe un conjunto A_0 tal que A_0 tiene exactamente un elemento de cada componente de G. Sea $L = \{x \in A_0|$ existe un abierto U de A_0, con $x \in U$ y U numerable$\}$. Para cada $x \in L$, sea U_x un conjunto abierto como en la definición de L. Como L es Lindelöf y $\{U_x\}_{x \in L}$ es una cubierta de L, existe una subcubierta numerable $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Por la definición de L, cualquier punto de U_{x_i} pertenece a L. Entonces $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$. De donde L es numerable al ser la unión numerable de conjuntos numerables. Sea $A = A_0 \setminus L$. Si $x \in A$ y U es un abierto en A_0 con $x \in U$ entonces U es no numerable. En particular, $U \setminus \{x\}$ no está contenido en L y $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, x no es un punto aislado de A. Entonces, A es perfecto. Así pues, A y G satisfacen las condiciones del Teorema 2.1.5. Por tanto, existe una función continua y suprayectiva $f : X \to F_C$. $\square$

2.2. Imágenes Continuas de F_C

Ahora se discutirán las imágenes de F_C.

Lema 2.2.1. *Si X un espacio contraíble, compacto y métrico entonces X es una imagen de F_C.*

Demostración. Por el teorema 1.5.3, como X es un espacio compacto y métrico, existe una función continua y suprayectiva $f : C \to X$. La función inducida por f entre conos $\widetilde{f} : F_C \to Cono(X)$ introducida en la Proposición 1.7.3 es también suprayectiva y continua. Como X es contraíble, existe una retracción $r : Cono(X) \to X$ [6, 1.3, pág. 317]. Entonces, $r \circ \widetilde{f} : F_C \to X$ es continua y suprayectiva. $\square$

Observación 2.2.2. *Notemos que la condición del Lema 2.2.1 no es necesaria, pues $Susp(C)$ no es simplemente conexa y, por lo tanto, no es contraíble por la Proposición 1.9.6; pero sí es una imagen continua de F_C. Sin embargo, la siguiente generalización es de mayor interés.*

Definición 2.2.3. *Un espacio X es* ***g-contraíble*** *si existe una función continua y suprayectiva $f : X \to X$ tal que f es homotópica a* *una función constante.*

Observación 2.2.4. *Si X es contraíble entonces se puede elegir a f como la identidad.*

Lema 2.2.5. *Si X es un espacio g-contraíble, compacto y métrico entonces X es una imagen continua de F_C.*

Demostración. Sean $f : C \to X$ una función continua y $\widetilde{f} : F_C \to Cono(X)$ la función inducida por f entre conos, definida en la Proposición 1.7.3. Como X es g-contraíble, existen una función continua y suprayectiva $g : X \to X$ y una homotopía $G : X \times I \to X$ tales que $G(x, 0) = g(x)$ y $G(x, 1) = p$ para toda $x \in X$ y alguna $p \in X$.

Sean $k : X \times I \to Cono(X)$ la función cociente y $r : Cono(X) \to X$ definida como $r(k(x, t)) = G(x, t)$. Notemos que r es una función continua y suprayectiva.

De esta manera se tiene que la función $h : F_C \to X$ definida como $h = r \circ \widetilde{f}$ es continua y suprayectiva. □

Teorema 2.2.6. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces X es una imagen continua y una preimagen continua de F_C si y sólo si X es g-contraíble y contiene un abierto G con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Si $f : X \to F_C$ y $g : F_C \to X$ son funciones continuas y suprayectivas, entonces por la Proposición 1.9.4, $g \circ f : X \to X$ es suprayectiva y homotópica a una función constante, pues F_C es contraíble. Como f es suprayectiva, X contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes por la Proposición 2.1.1.

Inversamente, si X es g-contraíble y contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes, existen $f : X \to F_C$ y $g : F_C \to X$ funciones continuas y suprayectivas, por el Teorema 2.1.6 y Lema 2.2.5, respectivamente. □

Podría pensarse que todo espacio conexo por trayectorias, compacto y métrico es una imagen continua de F_C. Sin embargo, éste no es el caso.

Ejemplo 2.2.7. *El círculo de Varsovia W, definido en el Ejemplo 1.1.6, es* indescomponible por trayectorias*, es decir, no es la unión de dos subcontinuos propios conexos por trayectoras. Supongamos que existe una función continua y suprayectiva $f : F_C \to W$. Aplicando el Lema de Zorn, existe un subcontinuo W_0 de F_C minimal con respecto a la propiedad: $f(W_0) = W$. Sea v el vértice de F_C. Si W_0 no contiene a v como punto de corte, es decir, si $W_0 \setminus \{v\}$ es conexo, W_0 es un arco y $f(W_0)$ es localmente conexo, por el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz. Esto es una contradicción, pues W no es localmente conexo. Por lo tanto, $W_0 \setminus \{v\} = A \cup B$ es una separación. Sean $W_1 = A \cup \{v\}$ y $W_2 = B \cup \{v\}$. Observemos que W_1 y W_2 son subcontinuos propios conexos por trayectorias de W_0. Por la minimalidad de W_0, $f(W_1)$ y $f(W_2)$ son subcontinuos propios conexos por trayectorias de W. Pero $f(W_1) \cup f(W_2) = f(W_1 \cup W_2) = f(W_0) = W$, lo cual es una contradicción, pues W es indescomponible por trayectorias.*

La indescomponibilidad por trayectorias no parece estar relacionada de manera significativa con las imágenes continuas de F_C.

Ejemplo 2.2.8. *Sea W el círculo de Varsovia, como en el ejemplo anterior. Notemos que $W \times I$ tampoco es una imagen continua de F_C, pues si $p : W \times I \to W$ es la proyección y $f : F_C \to W \times I$ es continua y suprayectiva, entonces $p \circ f : F_C \to W$ sería suprayectiva, lo cual es imposible. Notemos también que $W \times I$ no es indescomponible por trayectorias, pues $W = (W \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (W \times [\frac{1}{2}, 1])$.*

Hay otras dos condiciones necesarias para que un continuo sea una imagen continua de F_C.

Proposición 2.2.9. *Sean X un espacio métrico y compacto y $f : F_C \to X$ una función continua y suprayectiva. Entonces existe una familia $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de continuos de Peano en X tales que $\bigcap_{\alpha \in J} W_\alpha \neq \emptyset$, $\bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha = X$ y $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es cerrado en $C(X)$.*

Demostración. Sea $q : C \times I \to F_C$ la función de identificación. Consideremos la familia $\{f(q(\{c\} \times I))\}_{c \in C}$. Como $q(\{c\} \times I)$

es homeomorfo a I y f es continua, tenemos por el Teorema 1.1.10 que $\{f(q(\{c\} \times I))\}_{c\in C}$ es una familia de continuos de Peano que claramente cumple las condiciones requeridas. $\square$

La existencia de la familia descrita en la Proposición 2.2.9 no es suficiente para garantizar que un continuo sea una imagen continua de F_C.

Lema 2.2.10. *Sea $Y \subseteq I$ el subespacio $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Si X es un espacio métrico y compacto, $f : F_C \to X$ es una función continua y suprayectiva y $g : Y \to X$ es una función continua, entonces existe un subconjunto $Y_0 \subseteq Y$ cerrado e infinito tal que $g_{|Y_0}$ es homotópica a una función constante.*

Demostración. Para cada entero positivo n, sea $x_n \in f^{-1}(g(\frac{1}{n}))$. Como F_C es compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge, en F_C, a un punto x. Sea $Y_0 = \{\frac{1}{n_k}\} \cup \{0\}$. Notemos que Y_0 es un subconjunto cerrado e infinito de Y. Sea $h : Y_0 \to F_C$, definida como $h(\frac{1}{n_k}) = x_{n_k}$ y $h(0) = x$. Entonces $g_{|Y_0} = f \circ h$, pues $f \circ h(\frac{1}{n_k}) = f(x_{n_k}) = g(\frac{1}{n_k})$ y $f \circ h(0) = g(0)$, ya que ambas funciones son continuas. Por lo tanto $g_{|Y_0}$ es homotópica a una función constante, por la Proposición 1.9.4, pues F_C es contraíble. $\square$

A continuación se presenta un contraejemplo del recíproco de la Proposición 2.2.9.

Ejemplo 2.2.11. *Considérese el continuo L definido de la siguiente manera:*
$L = M \cup N \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i)$, *donde:*
$M = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | x \in [0, \frac{1}{\pi}],\ y \in [-1, 1]\}$,
$N = \{(\frac{1}{\pi}, 0, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in I\}$,
$W_n = \{(x, y, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^3 | x \in [\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{\pi}],\ y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}$, *para cada entero positivo n.*

Recordemos que $Y = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$. Sea $g : Y \to L$ definida como $g(\frac{1}{n}) = (\frac{1}{(n+1)\pi}, 0, \frac{1}{n})$ y $g(0) = (0, 0, 0)$. Se probará que si $Y_0 = \{\frac{1}{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ es un subconjunto cerrado e infinito de Y, $g_{|Y_0}$ no es homotópica a una función constante.

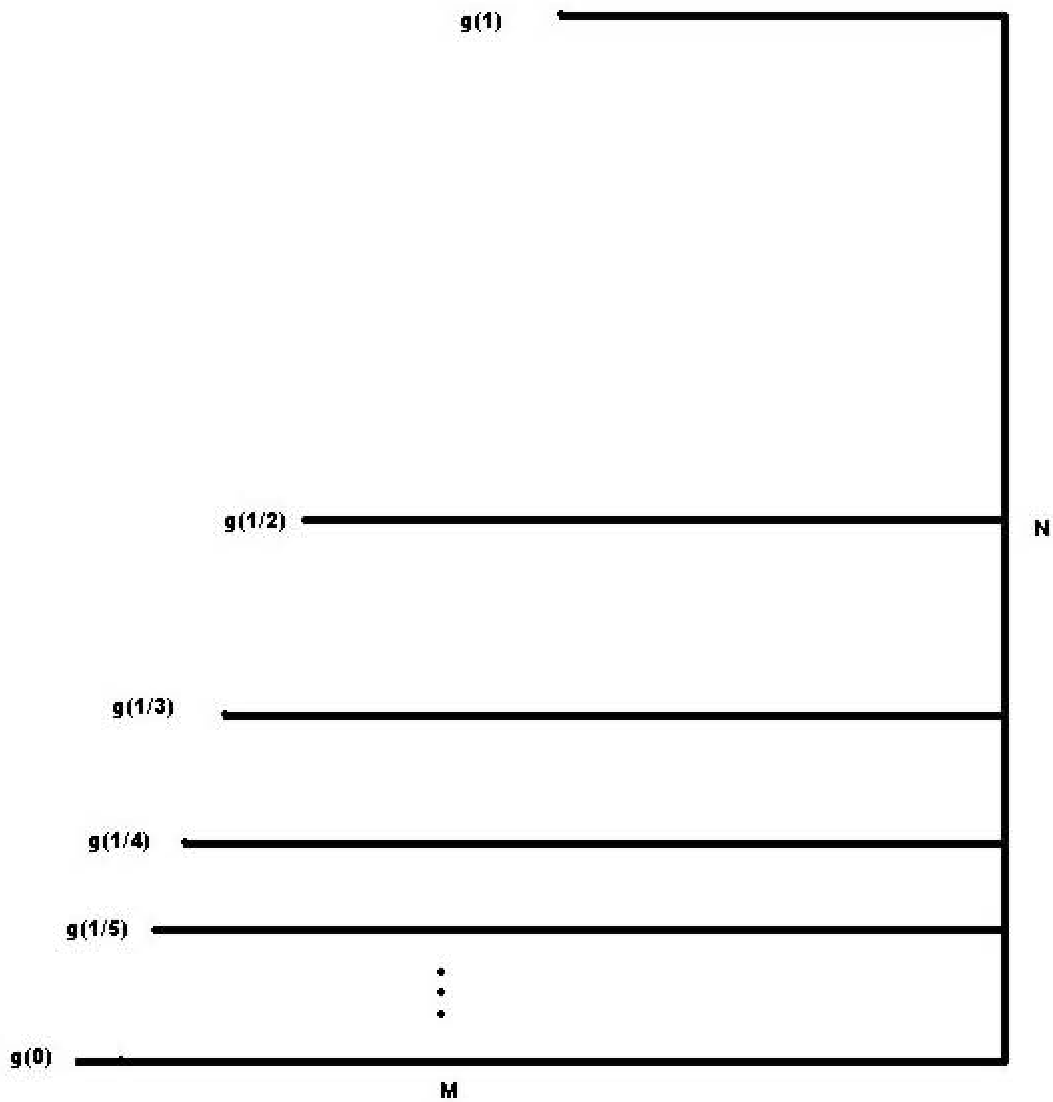

Figura 2.1: Proyección del continuo L sobre el plano xz

Supongamos que $H : Y_0 \times I \to L$ *es una homotopía, con* $H(y,0) = g(y)$ *y* $H(y,1) = (\frac{1}{\pi}, 0, 1)$*. Notemos que* $L \setminus N$ *es abierto en* L*, por lo tanto,* $H^{-1}(L \setminus N)$ *es abierto en* $Y_0 \times I$*. Como* $H(0,0) = g(0) = (0,0,0)$ *no pertenece a* N*,* $(0,0) \in H^{-1}(L \setminus N)$*. Entonces existe* $x > 0$ *tal que* $\{0\} \times [0,x) \subseteq H^{-1}(L \setminus N)$*.*

Sea $t = \sup\{x | \{0\} \times [0,x) \subseteq H^{-1}(L \setminus N)\}$*. Entonces,* $H(\{0\} \times [0,t))$ *es un conexo que contiene a* $(0,0,0)$ *y no intersecta a* N*. Así,* $H(0 \times [0,t)) \subseteq M \setminus (\frac{1}{\pi}, 0, 0)$*, donde* $M \setminus (\frac{1}{\pi}, 0, 0)$ *es la componente de* $L \setminus N$ *que contiene a* $(0,0,0)$*. Por lo tanto,* $H(0 \times [0,t]) \subseteq M$*, ya que* M *es cerrado y* $H((0,t))$ *es un punto límite de* $H(0 \times [0,t])$*. Por la definición de* t*,* $H(0,t) = (\frac{1}{\pi}, 0, 0)$*.*

Sea $A \subseteq M$ *definido como* $A = cl\{(x,y,0) | 0 < x \leq \frac{1}{\pi}, y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}$*. Entonces* A *es la cerradura de la proyección de* $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ *en* M*. Notemos que* $H(\{0\} \times [0,t])$ *no está contenido en* A*. Si lo estuviera, como* A *es irreducible de* $(0,0,0)$ *a* $(\frac{1}{\pi}, 0, 0)$ *y* $H(\{0\} \times [0,t])$ *es un continuo que contiene a ambos puntos, tendríamos que* $H(\{0\} \times [0,t]) = A$*. Pero* $H(\{0\} \times [0,t])$ *es localmente conexo, mientras que* A *no lo es. Por lo tanto, existe* $s \in [0,t]$ *tal que* $H(0,s) \notin A$*. Entonces,* $H(0,s) \in M \setminus A$ *o* $(0,s) \in H^{-1}(M \setminus A)$*. Pero, como* $M \setminus A$ *es abierto en* L *y la sucesión* $\{(\frac{1}{k_n}, s)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $(0,s)$ *en* $Y_0 \times I$*, existe una* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para* $n > m$*,* $(\frac{1}{k_n}, s) \in H^{-1}(M \setminus A)$*. Entonces, para* $n > m$*,* $H(\frac{1}{k_n}, s) \in M \setminus A$*. Pero* $H(\frac{1}{k_n}, 0) \in W_{k_n}$ *y* N *separa a* L *entre* $H(\frac{1}{k_n}, 0) \in W_{k_n}$ *y* $H(\frac{1}{k_n}, s) \in W_{k_n}$*. Entonces, para cada* $n > m$*, existe una* $t_n < s$ *tal que* $H(\frac{1}{k_n}, t_n) \in N$*. Pero,* $\{(\frac{1}{k_n}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tiene una subsucesión* $\{(\frac{1}{k_{n_l}}, t_{n_l})\}_{l=1}^{\infty}$ *que converge, en* $Y_0 \times I$*, a un punto* $(0, t_\infty)$*, donde* $t_\infty \leq s \leq t$*.*

Observemos que $H(0,t_\infty) \in N$*, porque* N *es cerrado y* $H(0,t_\infty)$ *es el límite de una sucesión,* $\{(\frac{1}{k_{n_l}}, t_{n_l})\}_{l=1}^{\infty}$*, de puntos de* N*. Pero, como* $t_\infty < t$*,* $H(0,t_\infty) \notin N$*, por la elección de* t*. Por lo tanto,* $g_{|Y_0}$ *no es homotópica a una función constante y* L *no es una imagen continua de* F_C*, ya que no se satisfacen las conclusiones del Lema 2.2.10.*

Sin embargo, sí se satisfacen las conclusiones de la Proposición 2.2.9. Sean $K_{\frac{1}{n}} = N \cup M \cup W_n$*, para cada entero positivo* n*, y* $K_0 = N \cup M$*. La familia* $\{K_p\}_{p \in Y}$ *es un subconjunto de* $C(L)$ *es cual es homeomor-*

fo a Y y, por tanto, es cerrado en $C(L)$. Es fácil ver que la familia $\{K_p\}_{p\in Y}$ satisface las otras condiciones de la Proposición 2.2.9.

Capítulo 3

Continuos Uniformemente Conexos por Trayectorias

En el Capítulo 2 probamos que si un espacio métrico y compacto X es una imagen continua de F_C entonces existe una colección $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de continuos de Peano de X tales que $\bigcap_{\alpha\in J} W_\alpha \neq \emptyset$, $\bigcup_{\alpha\in J} W_\alpha = X$ (Proposición 2.2.9).

En el presente capítulo agregaremos una propiedad más a la familia $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ para obtener así, una condición necesaria y suficiente para que un continuo sea una imagen continua de F_C (Teorema 3.2.11).

3.1. Reparametrización de Familias Uniformes de Trayectorias

Definición 3.1.1. *Sean $\mathcal{P}$ una familia de trayectorias en un espacio topológico X y $\mathcal{H} = \{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ una familia de homeomorfismos de I tal que $h_p(0) = 0$ y $h_p(1) = 1$ para cada $p \in \mathcal{P}$. A la familia de homeomorfismos $\mathcal{H}$ se le llama una **reparametrización** de $\mathcal{P}$.*

Observación 3.1.2. *Si $\mathcal{P}$ es una familia de trayectorias en un espacio topológico X y $\mathcal{H} = \{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ es una reparametrización de $\mathcal{P}$ entonces cada $q = p \circ h_p$ es una trayectoria en X con $q(0) = p(0)$ y $q(1) = p(1)$.*

Notación 3.1.3. *Si $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia de trayectorias en* *un espacio topológico X y $\mathcal{H} = \{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ es una reparametrización de $\mathcal{P}$, se denota como $\mathcal{PH}$ a la familia de trayectorias $\{q = p \circ h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$.*

Proposición 3.1.4. *Si una familia $\mathcal{P}$ de trayectorias en un espacio métrico X es uniforme entonces $\mathcal{PH}$ es una familia uniforme de trayectorias para cualquier reparametrización $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Si $q = p \circ h \in \mathcal{PH}$ es una trayectoria, como $\mathcal{P}$ es una familia uniforme de trayectorias, existe un entero positivo $n = n(\epsilon)$ tal que p admite una partición $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ tal que diám$(p([s_{i-1}, s_i])) \leq \epsilon$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $t_i = h^{-1}(s_i)$, con $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ es una partición y diám$(q([t_{i-1}, t_i]))$=diám $(p(h([t_{i-1}, t_i])))$=diám$(p([s_{i-1}, s_i])) \leq \epsilon$. $\square$

Observación 3.1.5. *La reparametrización de una familia equicontinua de trayectorias es también uniforme, por la Proposición 1.8.5 y por la Proposicón 3.1.4, pero no es necesariamente equicontinua. Sean $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ la familia de trayectorias en I dada por $p_n : I \to I$, donde cada p_n está definida como $p_n(x) = x$ para toda $x \in I$ y $\mathcal{H} = \{h_{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ la reparametrización de I dada por $h_{p_n}(x) = x^n$. Entonces, la familia $\mathcal{PH} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $q_n(x) = x^n$ no es equicontinua.*

Definición 3.1.6. *Un espacio métrico X es **uniformemente conexo por trayectorias** si existe una familia uniforme de trayectorias $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in J}$ en X tal que, para cada $x, y \in X$, existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que une a x con y.*

Definición 3.1.7. *Un espacio métrico X es **uniformemente arcoconexo** si es arcoconexo y si para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo n tal que, cualquier arco en X, contiene n puntos que dividen al arco en subarcos de diámetro menor que ϵ.*

Lema 3.1.8. *Sea X un espacio métrico tal que para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un único arco que une a x con y. Entonces X es uniformemente arcoconexo si y sólo si X es uniformemente conexo por trayectoias.*

Demostración. Claramente todo espacio métrico y uniformemente arcoconexo es uniformemente conexo por trayectorias. Si X

es un espacio métrico y uniformemente conexo por trayectorias, sea $\mathcal{P}$ una familia uniforme de trayectorias en X tal que, para cualesquiera dos puntos en X, existe una trayectoria en $\mathcal{P}$ que los une. Sean $\epsilon > 0$, $x, y \in X$ y $p \in \mathcal{P}$ una trayectoria que une a x con y. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que para la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de I se tiene que $\text{diám}(p[t_{i-1}, t_i]) \leq \epsilon$ con $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Sean A el arco en X que une a x con y, $h = I \to A$ un homeomorfismo tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$. Definamos $s_i = h^{-1}p(t_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $0 = s_0 < s_i < \cdots < s_n = 1$ es una partición de I y, como $p(t_i) = h(t_i) \in A$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, entonces $0 = s_0 < s_i < \cdots < s_n = 1$ es la partición requerida. $\square$

Lema 3.1.9. *Sea $\mathcal{P}$ una familia uniforme de trayectorias en un espacio métrico X. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un entero positivo $N(k)$ y, para cada $p \in \mathcal{P}$, existe una $\frac{1}{k}$-partición $T_k = \{t_0^k, t_1^k, ..., t_{N(k)}^k\}$, donde $0 = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{N(k)}^k$=1, tales que:*

1. *$T_k \subseteq T_{k+1}$ para $k \in \mathbb{N}$.*
2. *$t_i^k - t_{1-i}^k < \frac{1}{k}$ para $i \in \{1, 2, ..., N(k)\}$ y $k \in \mathbb{N}$.*
3. *Para cualquier k, los conjuntos $\{t \in T_{k+1} | t_{i-1}^k < t < t_i^k\}$ y $\{t \in T_{k+1} | t_{j-1}^k < t < t_j^k\}$ tienen el mismo número de elementos para $i, j \in \{1, 2, ..., N(k)\}$.*

Demostración. Como la familia $\mathcal{P}$ es uniforme, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un entero positivo n_k tal que, para cada $p \in \mathcal{P}$, existe una $\frac{1}{k}$-partición, $0 = s_0^k < s_1^k < \cdots < s_{n_k}^k = 1$. Se definirán los enteros $N(k)$ y a los conjuntos $T(k)$ por inducción.

Sea $N(1) = n_1$ y, para cada $p \in \mathcal{P}$, sea $t_i = s_i^1$ para $i \in \{1, 2, ..., n_1\}$. Supongamos que para algún $k \geq 1$ el número $N(k)$ está definido y que, para toda $p \in \mathcal{P}$ el conjunto $T_k = \{t_0^k, ..., t_{N(k)}^k\}$ ha sido construido. Sea $N(k+1) = (n_{k+1} + k)(N(k))$ y consideremos a p, un elemento arbitrario de la familia $\mathcal{P}$. Construiremos T_{k+1} a partir del conjunto $T_k = \{t_0^k, ..., t_{N(k)}^k\}$. Para esto, agregamos exactamente $n_{k+1} - 1$ elementos al conjunto T_k, de tal modo que el conjunto resultante contenga a todos los números s_i^{k+1} para $i \in \{1, ..., n_{k+1} - 1\}$. Después, agregamos exactamente otros k elementos para asegurarnos de que contenga a todos los números

$\frac{1}{k+1}, \frac{2}{k+1}, ..., \frac{k}{k+1}$.

Hasta ahora, hemos agregado exactamente $q_k = n_{k+1} + k - 1$ nuevos elementos a T_k distribuidos aleatoriamente entre los elementos de T_k. Para completar la construcción de T_{k+1}, añadimos exactamente $(N(k)-1)q_k$ números, asegurando que cada intervalo (t^k_{i-1}, t^k_i) contenga exactamente q_k elementos, para $i \in \{1, 2, ..., N(k)\}$.

Sea T_{k+1} el conjunto que resulta de agregar todos estos elementos. Por tanto, T_{k+1} contiene exactamente $N(k)+n_{k+1}-1+k+(N(k)-1)q_k = (n_{k+1}+k)+(N(k)-1)(q_k+1) = (n_{k+1}+k)(N(k)) = N(k+1)$ elementos y satisfacen las condiciones *1*, *2* y *3* del enunciado del teorema. $\square$

Teorema 3.1.10 (Teorema de Reparametrización). *Si $\mathcal{P}$ es una familia uniforme de trayectorias en un espacio métrico X, entonces existe una reparametrización $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ tal que la familia $\mathcal{PH}$ es equicontinua.*

Demostración. Considérense a los números $N(k)$, con $k \in \mathbb{N}$, y para cada $p \in \mathcal{P}$, a los conjuntos $T_k = \{t^k_0, t^k_1, ..., t^k_{N(k)}\}$ con las propiedades descritas en el Lema 3.1.9. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $g_k : I \to I$ un homeomorfismo definido por las siguientes condiciones:

1. $g_k(t^k_i) = \frac{i}{N(k)}$ para $i \in \{0, 1, ..., N(k)\}$,
2. g_k es lineal entre t^k_{i-1} y t^k_i para $i \in \{1, 2, ..., N(k)\}$.

Notemos que g_k es creciente y, del Lema 3.1.9, se sigue que $g_{k+1}|_{T_k} = g_k|_{T_k}$. Inductivamente, $g_{k+r}|_{T_k} = g_k|_{T_k}$. En consecuencia, se tiene que $d(g_{k+r}(t), g_k(t)) < \frac{1}{k}$ para todo $t \in I$, para toda $r \in \mathbb{N}$ y para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a una función $g : I \to I$ continua y creciente con $g|_{T_k} = g_k|_{T_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, tenemos que g es inyectiva en el conjunto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$, ya que si $x, y \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$ y $x \neq y$, digamos, $x < y$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [t^k_{i-1}, t^k_i]$ y $y \in [t^k_{j-1}, t^k_j]$ con $i < j$ y, en consecuencia, $g_{k'}(x) < g_{k'}(y)$ para toda $k' \geq k$. De donde, $g(x) \neq g(y)$. Como el conjunto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k$ es denso en I y la función g es creciente, se tiene que g es un homeomorfismo. Claramente, $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$.

Escogiendo a $h_p = g^{-1}$ para toda $p \in \mathcal{P}$, obtenemos una reparametrización $\mathcal{H} = \{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$. Probaremos que $\mathcal{H} = \{h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ es la reparametrización requerida. Para demostrar que la familia $\mathcal{PH} = \{p \circ h_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ es equicontinua, sea $\epsilon > 0$, entonces, existe un entero $k > \frac{2}{\epsilon}$, y sea entonces $\delta = \frac{1}{N(k)}$. Si $t, t' \in I$ y $|t-t'| < \delta$, existe $i \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq N(k) - 1$ tal que t y t' pertenecen al intervalo $[\frac{i-1}{N(k)}, \frac{i+1}{N(k)}]$. Sean $h \in \mathcal{H}$ y $p \in \mathcal{P}$. Entonces $h(t)$ y $h(t')$ pertenecen al intervalo $[t^k_{i-1}, t^k_{i+1}]$ y, por lo tanto, $d(p(h(t)), p(h(t'))) < \epsilon$, ya que $\text{diám}(p([t^k_{i-1}, t^k_{i+1}])) < \frac{2}{k} < \epsilon$. $\square$

Observación 3.1.11. *El Teorema de Reparametrización (Teorema 3.1.10), junto con la Proposiciones 1.8.5 y la Proposición 3.1.4, dan una caracterización de las familias uniformes de trayectorias en términos de la equicontinuidad y de la reparametrización: una familia de trayectorias $\mathcal{P}$ en un espacio métrico es uniforme si y sólo si existe una reparametrización $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ tal que la familia $\mathcal{PH}$ es equicontinua.*

3.2. Continuos Uniformemente Conexos por Trayectorias

Teorema 3.2.1. *Un espacio métrico X es uniformemente conexo por trayectorias si y sólo si existe una familia equicontinua $\mathcal{P}$ de trayectorias en X tal que para cualesquiera $x, y \in X$ existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que une a x con y.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio uniformemente conexo por trayectorias y sea $\mathcal{P}$ una familia uniforme de trayectorias en X tal que para cualesquiera dos puntos de X existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que los une. Por el Teorema de Reparametrización (Teorema 3.1.10) existe una reparametrización $\mathcal{H}$ de $\mathcal{P}$ tal que la familia $\mathcal{PH}$ es equicontinua y claramente esta familia une a cualesquiera dos puntos de X.

La implicación inversa se sigue la Proposición 1.8.5. $\square$

Proposición 3.2.2. *Si X es un espacio métrico uniformemente conexo por trayectorias y si para algún espacio métrico Y existe una* *función unifomemente continua y suprayectiva $f : X \to Y$, entonces Y es uniformemente conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es uniformemente conexo por trayectorias existe una familia uniforme de trayectorias $\mathcal{P}$, en X, tal que para cualesquiera dos puntos de X existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que los une. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y $x_i \in f^{-1}(y_i)$ con $i \in \{1, 2\}$. Entonces existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(0) = x_1$ y $p(1) = x_2$. Sea $q = f \circ p$. Claramente $q(0) = y_1$ y $q(1) = y_2$. Sea $f\mathcal{P} = \{f \circ p | p \in \mathcal{P}\}$.

Ahora probaremos que $f\mathcal{P}$ es uniforme. Sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe ϵ' tal que si $x_1, x_2 \in X$ y $d(x_1, x_2) < \epsilon'$ entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$. Como $\mathcal{P}$ es uniforme, entonces existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tal que diám$(p([t_{i-1}, t_i])) \leq \frac{\epsilon'}{2}$. Por tanto, diám$(q(([t_{i-1}, t_i])))$=diám$(f((p([t_{i-1}, t_i])))) < \epsilon$. $\square$

Corolario 3.2.3. *Si X es un continuo uniformemente conexo por trayectorias y si Y es un espacio métrico y $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es un continuo uniformemente conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es compacto y conexo y f es continua entonces Y es un continuo. Además, como X es compacto, la función $f : X \to Y$ es uniformemente continua. Por la Proposición 3.2.2, se tiene que Y es un continuo uniformemente conexo por trayectorias. $\square$

Observación 3.2.4. *Del Corolario 3.2.3, tenemos que la conexidad uniforme por trayectorias es un invariante topológico para continuos.*

Proposición 3.2.5. *Para cualquier espacio métrico y compacto X, el $Cono(X)$ es un continuo uniformemente conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es compacto y métrico, por el Teorema 1.7.5, X se puede encajar en el cubo de Hilbert $\mathcal{Q}$. La Proposición 1.7.9 muestra que $Cono(X)$ es homeomorfo $Conog(X)$, el cono geométrico sobre X. Definamos, para cualesquiera r y $s \in I$, la función $f_{rs} : I \to I$ como $f_{rs}(t) = (1-t)r + st$ para cada $t \in I$. Claramente, la familia $\{f_{rs}\}$ es equicontinua y, por la Proposición 1.8.5,

$\{f_{rs}\}$ es una familia uniforme. Sean $w_1 = \langle x_1, t_1\rangle$, $w_2 = \langle x_2, t_2\rangle \in Conog(X)$. Denotemos por $q : X \times I \to Cono(X)$ a la función cociente y definamos la trayectoria $p_{w_1w_2} : I \to Cono(X)$ como $p_{w_1w_2}(t) = q(x_1, 2f_{t_11})$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y como $p_{w_1w_2}(t) = q(x_2, 2f_{1t_2} - 1)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. La familia $\{p_{w_1w_2} | w_1, w_2 \in Conog(X)\}$ es claramente uniforme. □

Teorema 3.2.6. *Un continuo X es imagen continua de F_C si y sólo si existe una familia equicontinua $\mathcal{P}$ de trayectorias en X tal que para cualesquiera x y $y \in X$, existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que los une.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ una familia equicontinua de trayectorias como en el enunciado del lema. Sea x_0 un punto de X. Denotamos por p_{xx_0} a la trayectoria de $\mathcal{P}$ que tiene como punto inicial a x y como punto final a x_0. Sea $\mathcal{P}' = \{p_{xx_0}\}_{x \in X}$. Tenemos que $cl(\mathcal{P}')$ es compacto y que $p'(1) = x_0$ para todo $p' \in \mathcal{P}'$. Al ser $\mathcal{P}'$ compacto, por el Teorema 1.5.3, existe una función continua y suprayectiva $f : C \to \mathcal{P}'$. Definamos la función $g : F_C \to \mathcal{P}'$ como $g(\langle c, t\rangle) = (f(c))(t)$ para todo $\langle c, t\rangle \in F_C$. Notemos que g está bien definida, pues $(f(c))(1) = x_0$ para toda $c \in C$. Sean $x \in X$ y $c \in f^{-1}(x)$, como $x = (f(c))(0) = g(\langle c, 0\rangle)$ se tiene que g es suprayectiva.

Probaremos que g es continua. Sean $\epsilon > 0$ y $\langle c_0, t_0\rangle \in F_C$. Como $\mathcal{P}'$ es equicontinua, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|c - c_0| < \delta_1$ entonces $\sup\{d(f(c_0), f(c))\} < \frac{\epsilon}{2}$ y, en particular, $d(f(c_0)(t), f(c)(t)) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $t \in I$. Además, como $f(c_0)$ es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $d((f(c_0))(t_0), (f(c_0))(t_0)) < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $|t - t_0| < \delta_2$ y $t \in I$. Por tanto, si $|c - c_0| < \delta_1$ y $|t - t_0| < \delta_2$ entonces:

$$\begin{aligned} & d((f(c_0))(t_0), (f(c))(t)) \\ \leq\ & d((f(c_0))(t_0), (f(c_0))(t)) + d((f(c_0))(t), (f(c))(t)) \\ <\ & 2\tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Así, X es imagen continua de F_C bajo la función continua g.

Ahora probaremos la otra implicación. De la Proposición 3.2.5 se sigue que F_C es un continuo uniformemente conexo por trayectorias y, del Corolario 3.2.3, se tiene que que X es un continuo uniformemente conexo por trayectorias. Por el Teorema 3.2.1, existe una familia equicontinua $\mathcal{P}$ de trayectorias en X tal que para cualesquiera $x, y \in X$ existe una trayectoria $p \in \mathcal{P}$ que une a x con y. $\square$

Teorema 3.2.7. *Un continuo X es uniformemente conexo por trayectorias si y sólo si existe una función continua y suprayectiva $f : F_C \to X$.*

Demostración. Supongamos que existe una función $f : F_C \to X$ continua y suprayectiva. Como C es métrico y compacto tenemos, por la Proposición 3.2.5, que F_C es un continuo uniformemente conexo por trayectorias. Del Corolario 3.2.3, tenemos que $X = f(F_C)$ es un continuo uniformemente conexo por trayectorias.

Ahora supongamos que X es un continuo uniformemente conexo por trayectorias. Entonces, por la Proposición 3.2.1, existe una familia equicontinua de trayectorias $\mathcal{P}$ en X tal que, para cualesquiera $x, y \in X$, existe una trayectoria en la familia que los une. Se sigue, del Teorema 3.2.6, que X es una imagen continua de F_C. $\square$

Definición 3.2.8. *Sea Γ una clase de espacios. Un **modelo común** para Γ es un elemento $X \in \Gamma$ tal que para cualquier elemento $Y \in \Gamma$ existe una función continua y suprayectiva $f_Y : X \to Y$.*

Corolario 3.2.9. *En la familia de los abanicos uniformemente arcoconexos y en la familia de los dendroides uniformemente arcoconexos, F_C es un modelo común.*

Demostración. De la Proposición 3.2.5 se sigue que F_C es un continuo uniformemente conexo por trayectorias y, por el Lema 3.1.8, F_C es uniformemente arcoconexo. El resultado se sigue del Teorema 3.2.7. $\square$

Definición 3.2.10. *Sea $\mathcal{F} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de continuos de Peano. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ satisface la **propiedad** S^U si para todo $\epsilon > 0$, existe una cantidad finita de subcontinuos $A_1^\alpha, ..., A_n^\alpha$ de W_α tales que $W_\alpha = \bigcup_{i=1}^n A_i^\alpha$ para toda $\alpha \in J$ y $\text{diám}(A_i^\alpha) < \epsilon$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y para toda $\alpha \in J$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ es **uniforme** si satisface la propiedad S^U.*

Teorema 3.2.11. *Un continuo X es una imagen continua de F_C si y sólo si existe una familia uniforme de subcontinuos de Peano $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ de X tales que $\bigcap_{\alpha\in J} W_\alpha \neq \emptyset$ y $\bigcup_{\alpha\in J} W_\alpha = X$.*

Demostración. Supongamos primero la existencia de una familia $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que cumpla con las condiciones del enunciado del teorema. Como cada conjunto W_α satisface la propiedad S (Teorema 1.1.9), en [12] se construye una función continua y suprayectiva $p_\alpha : I \to W_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. La forma en que se prueba, en [12], que cada p_α es continua y la condición S^U permiten asegurar que la familia $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in J}$ es una familia equicontinua de trayectorias en X.

Para x_1 y x_2, puntos arbitrarios de X, definiremos una trayectoria $p'_{x_1x_2}$ que tenga a x_1 como punto inicial y a x_2 como punto final. Sea $x_0 \in \bigcap_{\alpha\in J} W_\alpha$. Notemos que, para cada trayectoria p_α, existe $t_\alpha \in I$ tal que $p_\alpha(t_\alpha) = x_0$. Como la colección $\{p_\alpha(I)\}_{\alpha\in J}$ es una cubierta de X, existen $\alpha_i \in J$ y $t_i \in I$ tales que $p_{\alpha_i}(t_{\alpha_i}) = x_i$ con $i \in \{1, 2\}$. Definamos la trayectoria $p^1 : I \to X$ como $p^1(t) = p_{\alpha_1}((t_\alpha - t_{\alpha_1})t + t_{\alpha_1})$ para toda $t \in I$. Claramente $p^1(0) = x_1$ y $p^1(1) = x_0$. Análogamente definimos la trayectoria $p^2 : I \to X$ como $p^2(t) = p_{\alpha_2}((t_{\alpha_2} - t_\alpha)t + t_\alpha)$ y tenemos que $p^2(0) = x_0$ y que $p^2(1) = x_2$. Sea $p_{x_1x_2} : I \to X$ la trayectoria definida por $p_{x_1x_2}(t) = p^1(2t)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y por $p_{x_1x_2}(t) = p^2(2t-1)$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Obtenemos que $p_{x_1x_2}(0) = x_1$ y $p'_{x_1x_2}(1) = x_2$.

Sea $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{p_{x_1x_2} | x_1, x_2 \in X\}$. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitraria y sea $\delta' > 0$ tal que si $t_0, t_1 \in I$ y $|t_0 - t_1| < \delta'$ entonces $d(p(t_0), p(t_1)) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $p \in \mathcal{P}$. Sea ahora $p_{x_1x_2} \in \mathcal{P}'$, con $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t_0 < \frac{1}{2} < t_1$. Entonces si $|t_0 - t_1| < \frac{\delta'}{2}$, tenemos que $(\frac{1}{2} - t_0) + (t_1 - \frac{1}{2}) = t_1 - t_0 = |t_0 - t_1| < \frac{\delta'}{2}$ y, por tanto, $|\frac{1}{2} - t_i| = \frac{1}{2} - t_i < \frac{\delta'}{2}$ con $i \in \{0, 1\}$. Así, si definimos $\delta = \frac{\delta'}{2}$, se tiene que $d(p_{x_1x_2}(t_0), p_{x_1x_2}(t_1)) \leq d(p^1(t_0), p^1(\frac{1}{2})) + d(p^2(\frac{1}{2}), p^2(t_1)) = d(p_{\alpha_1}(2t_0), p_{\alpha_1}(1)) + d(p_{\alpha_2}(1), p_{\alpha_2}(2t_1 - 1)) < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ si $|t_0 - t_1| < \delta$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{p_{x_1x_2} | x_1, x_2 \in X\}$ es equicontinua y, por el Teorema 3.2.6, X es una imagen continua de F_C.

La otra implicación quedó probada en la Proposición 2.2.9. $\square$

Capítulo 4

Más Imágenes del Abanico de Cantor

En este capítulo estudiaremos las imágenes del Abanico de Cantor bajo funciones confluentes, abiertas, monótonas y ligeras.

4.1. Imágenes del Abanico de Cantor Bajo Funciones Confluentes

Definición 4.1.1. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Una* ***retracción*** *de X en A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = 1_A$. Al subespacio A se le llama un* ***retracto*** *de X.*

Definición 4.1.2. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Un* ***encaje*** *de X en Y es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Teorema 4.1.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo no degenerado Y:*

1. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, confluente y suprayectiva.*

2. *Y puede encajarse en F_C y, para todo (o para algún) encaje $h : Y \to F_C$, $h(Y)$ es un retracto confluente de F_C.*

3. *Y puede encajarse en F_C y, para todo (o para algún) encaje $h : Y \to F_C$, $h(Y)$ es un retracto ligero de F_C.*

4. *Y puede encajarse en F_C y, para todo (o para algún) encaje $h : Y \to F_C$, $h(Y)$ es un retracto de F_C.*

5. *Y es un abanico con la propiedad de Kelley (Definición 1.3.2) o un arco.*

6. *Y es un abanico suave y $S(Y)$ (Notación 1.4.8) es cerrado en Y o Y es un arco.*

Demostración. Probaremos que 6 implica 2, 2 implica 1, 1 implica 6 y que 6 implica 3, 3 implica 4, 4 implica 5 y 5 implica 6. En el primer círculo de implicaciones, que 2 implica 1 es trivial. Para demostrar que 1 implica 6, sea $f : F_C \to Y$ una función continua, confluente y suprayectiva. Como F_C es un abanico suave y la imagen de un abanico suave bajo una función continua y confluente es un abanico suave o un arco [2, Teorema 13, pág. 33], entonces Y es un abanico suave o un arco. Si Y es un abanico, por la Proposición 1.4.21, como $S(F_C)$ es compacto entonces $S(Y)$ es compacto y por tanto, cerrado.

Probaremos que 6 implica 2. El continuo Y puede encajarse en F_C, por el Teorema 1.7.13. Consideremos cualquier encaje $h : Y \to F_C$. Para simplificar la notación, consideramos a Y como un subconjunto de F_C. Sean v el vértice de F_C y $E = cl(\{e \in E(F_C) | Y \cap ve \neq \{v\}\})$. Como todo subconjunto cerrado del conjunto de Cantor $C = E(F_C)$ es su retracto [10, Sección 26 II, pág. 281], existe una retracción $r : E(F_C) \to E$. Sea $f : F_C \to f(F_C) \subseteq F_C$ la extensión lineal de r. Observemos que f es confluente y que $f|_Y = 1_Y$. Definamos $s : f(F_C) \to Y$ como $s(y) = y$ para toda $y \in Y$ y para la cerradura, K, de cualquier componente de $f(F_C) \setminus Y$ definimos $s(K)$ como el punto contenido en $K \cap Y$. Como $K \cap Y$ consta de un solo punto, la función s está bien definida y, como $S(Y)$ es cerrado, s es continua. Además, s es una retracción monótona. Como la composición de dos funciones confluentes es confluente (Proposición 1.4.15), la composición $s \circ f : F_C \to Y$ es una retracción confluente.

En el segundo círculo de implicaciones, que 3 implica 4 es trivial. Probemos que 4 (la versión "para algún") implica 5. Notemos que F_C satisface la Propiedad de Kelley, la cual es un invariante bajo las retracciones [13, Teorema 2.9, pág. 294].

Para probar que 5 implica 6, basta notar que los abanicos Y con la Propiedad de Kelley se caracterizan como los abanicos suaves con $S(Y)$ cerrado [3, Teorema 3].

Ahora demostraremos que 6 implica 3. Por la Proposición 1.7.13, Y puede encajarse en F_C. Supondremos que Y es un subconjunto de F_C. Definimos $E = cl(\{e \in E(F_C) | Y \cap ve \neq \{v\}\})$, sean $r : E(F_C) \to E$ una retracción [10, Sección 26 II, pág. 281] y $f : F_C \to f(F_C) \subseteq F_C$ la extensión lineal de r. De nuevo, $f|_Y = 1_Y$ y observemos que f es ligera.

Supongamos que Y es un arco. Entonces E consta de uno o dos puntos y $f(F_C)$ es un arco también. Si $Y = f(F_C)$, $f : F_C \to Y$ es una retracción ligera. Si $f(F_C) \setminus Y$ no es vacío, entonces consta de a lo más dos componentes. Definamos una retracción $s : f(F_C) \to Y$ como $s|_Y = 1|_Y$ y, para la cerradura K de una componente de $f(F_C) \setminus Y$, poniendo $s|_K : K \to Y$ como un homeomorfismo que es la identidad en el conjunto $K \cap Y$, que contiene un único punto. Por la Observación 1.4.14, $s \circ f : F_C \to Y$ es una retracción ligera.

Ahora supongamos que Y es un abanico. Notemos que para cualquier componente de $f(F_C) \setminus Y$, su cerradura, K, es un segmento de línea recta que contiene un punto extremo $y_K \in Y$ y el otro punto extremo $e_K \in E(F_C) \subseteq E(F_C)$. Tomemos un segmento de recta auxiliar va de longitud igual a diám(F_C) tal que $va \cap F_C = \{v\}$. Definamos la función $s : f(F_C) \to Y \cup va$ tomando $s|_Y = 1|_Y$ y, para la cerradura, K, de una componente de $f(F_C) \setminus Y$, poniendo a $s|_K$ como una isometría de $K = y_K e_K$ en $y_K v \cup va$ con $s(y_K) = y_K$. Así, s está bien definida y, como $S(Y)$ es cerrado, s es continua. Además, por la definición de s, s es ligera. Sea $g : s \circ f(F_C) \to Y$ una función suprayectiva tal que $g|_Y = 1|_Y$ y que mande de manera homeomorfa a $va \cap (s \circ f(F_C))$, si no es degenerada, al arco ve, donde $e \in E(Y)$. La función g es ligera y, por la Observación 1.4.14, la composición $g \circ s \circ f : F_C \to Y$ es una retracción ligera. $\square$

4.2. Imágenes del Abanico de Cantor Bajo Funciones Abiertas

Observación 4.2.1. *En esta sección, dados un espacio Y y un subconjunto K de Y, diremos que K es un retracto abierto de Y si existe una retracción abierta $h : Y \to K$.*

Lema 4.2.2. *Para todo conjunto A metrizable, compacto y totalmente disconexo, existe un encaje $g : A \to C$ tal que $g(A)$ es un retracto abierto de C.*

Demostración. Sea A un conjunto metrizable, compacto y totalmente disconexo. Como $A \times C$ es compacto, totalmente disconexo y perfecto, por el Teorema 1.5.5, $A \times C$ es homeomorfo a C. Su proyección sobre A es una retracción abierta. $\square$

Teorema 4.2.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo no degenerado Y:*

1. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, abierta y suprayectiva.*
2. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, ligera, abierta y suprayectiva.*
3. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, ligera, confluente y suprayectiva.*
4. *Existe un encaje $h : Y \to F_C$ tal que $h(Y)$ es un retracto abierto de F_C.*
5. *Existe un encaje $h : Y \to F_C$ tal que $h(Y)$ es un retracto ligero y abierto de F_C.*
6. *Existe un encaje $h : Y \to F_C$ tal que $h(Y)$ es un retracto ligero y confluente de F_C.*
7. *Y es un abanico suave y $E(Y)$ es cerrado en Y o Y es un arco.*

Demostración. La equivalencia entre las condiciones 1, 2, 5 y 7 se probará mostrando que la condición 1 implica la 7, la 7 la 5, la 5 la 2 y la 2 la 1. Para la equivalencia entre 2, 3, 5 y 7 se demostrará que 2 implica a 3, 3 a 7, 7 a 5 y 5 a 2. Esto muestra la equivalencia de todas las condiciones, excepto 4, 5 y 6. Claramente 5 implica 4 y 4 implica 1; además, 5 implica 6 y 6 implica 3. La equivalencia entre 4 y 5 con las demás condiciones se sigue, una vez probada la equivalencia entre 1, 2, 3, 5 y 7, de estas imlicaciones. Notemos que la implicacion de 5 a 2, la de 2 a 1 y la de 2 a 3 son evidentes. Por tanto, restan demostrar sólo las implicaciones de 1 a 7, 7 a 5 y 3 a 7. Procedamos en este orden.

Supongamos 1 y demostremos 7. Sea $f : F_C \to Y$ una función continua, abierta y suprayectiva. Como las funciones abiertas son confluentes (Observación 1.4.14), por el Teorema 4.1.3, Y es un abanico suave y $S(Y)$ es cerrado en Y o Y es un arco. En el caso en que Y es un abanico, como $E(F_C)$ es cerrado, por la Proposición 1.4.22, $E(Y)$ es cerrado.

Ahora, para demostrar 5 supongamos 7. Como Y es un abanico suave o un arco, de acuerdo al Corolario 1.7.14, Y puede representarse como la unión de segmentos de líneas rectas en el plano. Sea v' el vértice de Y en caso que Y sea un abanico, o en caso contrario, sea v' un punto interior de Y. Si Y es un arco, consideramos a Y como la unión de dos segmentos de línea recta, cada uno de los cuales une a v' con un punto en $E(Y)$. Construyamos el encaje requerido $h : Y \to F_C$.

Por el Teorema 1.7.13, Y se puede encajar en F_C. Consideramos entonces a $E(Y)$ como un subconjunto del conjunto de Cantor C. Como C es totalmente disconexo (Teorema 1.5.5), $E(Y)$ es totalmente disconexo. Por el Lema 4.2.2, existe un encaje $g : E(Y) \to E(F_C)$ tal que $g(E(Y))$ es es un retracto abierto de $E(F_C)$. Sea $r : E(F_C) \to g(E(Y))$ una retracción abierta. Denotemos como $h : Y \to h(Y) \subseteq F_C$ a la extensión lineal de g. Como $E(Y)$ es cerrado, h es continua. Además, como h es inyectiva, h es un encaje. Sea $f : F_C \to h(Y)$ la extensión lineal de la retracción abierta r. Claramente f es continua de $E(F_C)$ sobre $r(E(F_C)) = g(E(Y)) = h(E(Y))$ y, como h y f son extensiones lineales de g y r, respectivamente, entonces f es una retracción del cono F_C sobre $f(F_C) = h(Y)$. Además, para todo $y \in Y$, $f^{-1}(h(y))$ es compacto y no contiene subcontinuos no degenerados y, por tanto, es totalmente disconexo. Así, f es ligera. Como r es abierta y $f|_{ve}$ es lineal para toda $e \in E(F_C)$, donde v es el vértice de F_C, f es abierta.

Probaremos que 3 implica 7. Sea $f : F_C \to Y$ una función continua, suprayectiva, ligera y confluente. Por el Teorema 4.1.3, Y es un abanico suave o un arco. Si Y es un abanico, denotemos por v' a su vértice. Supongamos que $E(Y)$ no es cerrado. De acuerdo con la Proposición 1.4.21, existe un punto $e \in E(F_C)$ tal que $f(e) = v'$. Pero, por la Proposición 1.4.20, $f(ve) = \{v'\}$, lo cual contradice que f es ligera. $\square$

4.3. Imágenes del Abanico de Cantor Bajo Funciones Monótonas

Definición 4.3.1. *Dado un abanico X, un arco $ab \subseteq X$ es **libre** si $ab \setminus \{a, b\}$ es un abierto en X.*

Teorema 4.3.2. *Dado un abanico X, existe una función continua, monótona y suprayectiva f definida en X tal que $f(X)$ es un arco si y sólo si X contiene un arco libre.*

Demostración. Si un abanico X contiene un arco libre ab, entonces $X \setminus (ab \setminus \{a, b\})$ contiene exactamente dos componentes, una que contiene a a y otra a b. Sean A la componente que contiene a a y B la componente que contiene a b. Definamos una función suprayectiva $f : X \to ab$ como $f(x) = x$ si $x \in ab$, $f(x) = a$ si $x \in A$ y $f(x) = b$ si $x \in B$. Así, f es una retracción monótona.

Inversamente, sea $f : X \to ab$ una función continua, monótona y suprayectiva y supongamos que X no contiene ningún arco libre. Como $f^{-1}(a)$ y $f^{-1}(b)$ son dos subcontinuos disjuntos de X, a lo más uno de ellos contiene al vértice v. Por tanto, supongamos que $v \notin f^{-1}(a)$. Entonces, $f^{-1}(a)$ es un arco o un punto contenido en el arco ve_0 para algún $e_0 \in E(X)$. Sea d una métrica en X y, supongamos, sin pérdida de generalidad, que la métrica d' en ab es convexa. Sean $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < d'(a, f(v))$ y $\delta > 0$ tal que $\delta < d(v, f^{-1}(a))$ y tal que si $d(x_1, x_2) < \delta$, entonces $d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$ para todo $x_1, x_2 \in X$. Sea $x_0 \in f^{-1}(a)$. Como ningún arco es es libre en

X, la bola abierta con centro en x_0 y radio δ contiene un punto $x \in ve$ para algún $e \in E(X) \setminus \{e_0\}$. Por lo tanto, el arco xx_0 contiene al vértice v. Además, la función $f|_{xx_0}$ es monótona, ya que como X es hereditariamente unicoherente y f es monótona, $(f|_{xx_0})^{-1} = f^{-1}(y) \cap xx_0$ es conexo. Además, f no es constante y, por lo tanto, $f(xx_0) = f(xv \cup vx_0) = f(xv) \cup f(vx_0) = f(x)f(x_0)$, por el Lema 1.4.19. Por la convexidad de d', el arco $af(x) = f(xx_0)$ está contenido en la bola abierta con centro en a y de radio ϵ, de donde, $d'(a, f(v)) < \epsilon$, lo cual es una contradicción. □

Definición 4.3.3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_C^n una copia de F_C con* diám $(F_C^n) < \frac{1}{n}$*, y sea F_C^ω la unión de todos los abanicos F_C^n con sus vértices identificados.*

En otras palabras, F_C^ω es homeomorfo a F_C/ve para algún $e \in E(F_C)$.

Teorema 4.3.4. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo no degenerado Y:*

1. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, monótona y suprayectiva.*
2. *Existe un encaje $h : Y \to F_C$ tal que $h(Y)$ es un retracto monótono de F_C.*
3. *Y es homeomorfo a F_C o a F_C^ω.*

Demostración. Claramente la condición 2 implica la 1. Demostraremos primero que la afirmación 1 implica la 3 y después que la 3 implica la 2.

Supongamos que existe una función continua, monótona y suprayectiva $f : F_C \to Y$. Por el Teorema 4.1.3, Y es un abanico suave o un arco. Sin embargo, Y no puede ser un arco, por el Teorema 4.3.2. Por tanto, Y es un abanico suave y, por la Proposición 1.7.13, podemos suponer que está encajado en F_C. Denotemos por v el vértice de F_C y sean $v' = f(v)$ y $T = S(F_C) \setminus f^{-1}(v')$.

Consideremos primero el caso en que $v' \in Y \setminus cl(E(Y))$. Tenemos entonces que el conjunto $\{v'\}$ es un abierto y cerrado de $S(Y)$.

Como la función $f|_{S(F_C)} : S(F_C) \to S(Y)$ es continua y suprayectiva, por la Proposición 1.4.21, entonces $S(F_C) \cap f^{-1}(v')$ es un abierto y cerrado de $S(F_C)$. De esta manera, T es un abierto y cerrado de $E(F_C)$ y, por lo tanto, es homeomorfo C. Demostraremos que la función $f|_T : T \to E(Y)$ es un homeomorfismo. Es suficiente mostrar que $f|_T$ es inyectiva. Supongamos que $f|_T$ no es inyectiva. Entonces existen $e_1, e_2 \in E(F_C)$ tales que $f(e_1) = f(e_2)$. Como $f^{-1}(f(e_1))$ es conexo, entonces contiene a v, lo cual es una contradicción. De aquí que $E(Y) = f(T)$ es homeomorfo a C y, por lo tanto, los conos sobre estos conjuntos son homeomorfos, es decir, Y es homeomorfo a F_C.

Supongamos ahora que $v' \in cl(E(Y))$. En este caso el conjunto T es abierto, pero no es cerrado en $E(F_C)$. Por esto, T puede escribirse como la unión numerable $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, donde $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y cada E_n es una copia de C abierta y cerrada de C en $E(F_C)$ tal que lím diám $(E_n) = 0$. Como en el caso anterior, se puede probar que $f|_{E_n}$ es un homeomorfismo. Tenemos que $E(Y) = f(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ y $\{v'\}$ =lím $f(E_n)$. Denotemos por F_n al cono sobre $f(E_n)$ con vértice v'. Observemos que F_n es homeomorfo a F_C, lím $F_n = \{v'\}$, $F_i \cap F_j = \{v'\}$ si $i \neq j$ y $Y = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Por lo tanto, existe un homeomorfismo entre Y y F_C^{ω}.

Probemos ahora que la condición 3 implica la 2. Si Y es homeomorfo a F_C, el homeomorfismo $h : Y \to F_C$ es el encaje requerido. Supongamos que Y es homeomorfo a F_C^{ω}, es decir, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, donde cada Y_n es una es una copia de F_C y lím $Y_n = \{v'\} = Y_i \cap Y_j$ si $i \neq j$, donde v' es el vértice de Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = [\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}] \cap E(F_C)$. Así, cada E_n es un subconjunto del conjunto de Cantor $E(F_C)$ y, por lo tanto, $F_C^n = (E_n \times [1 - \frac{1}{n}, 1])/E_n \times \{1\}$ puede considerarse como un subabanico de $F_C = (E(F_C) \times I)/E(F_C) \times \{1\}$. Tomemos homeomorfismos $h_n : Y_n \to F_C^n$ y sea $h : Y = \bigcup Y_n \to \bigcup F_C^n \subseteq F_C$ definida como $h|_{Y_n} = h_n$. Entonces h es un homeomorfismo que encaja Y en F_C. Definimos una retracción monótona $r : F_C \to \bigcup F_C^n = h(Y)$ como sigue: para cada componente K de $F_C \setminus h(Y)$, $r(K)$ es el conjunto $h(Y) \cap cl(K)$ que consta de un único punto. $\square$

Teorema 4.3.5. *Toda función continua, abierta, monótona y su-*

prayectiva definida en F_C es un homeomorfismo.

Demostración. Sean Y un continuo, v el vértice de F_C y $f : F_C \to Y$ una función continua, abierta, monótona y suprayectiva. La Proposición 1.4.20 y la Proposición 1.4.22 implican que para cualquier $e \in E(F_C)$ el arco $ve = f^{-1}(f(ve)) \subseteq F_C$. Para todo $Q \subseteq Y$, la función $f|_{f^{-1}(Q)} : f^{-1}(Q) \to Q$ es abierta, ya que $f|_{f^{-1}(Q)}(G) = f(G \cap f^{-1}(Q)) = f(G) \cap Q$ es un abierto de Q, para cualquier abierto G de F_C. En particular, $f|_{ve} : ve \to f(ve)$ es abierta y, como es monótona, por la Proposición 1.4.20, entonces es un homeomorfismo. Para mostrar que f es biyectiva basta considerar dos puntos $x_1, x_2 \in F_C \setminus \{v\}$ tales que $x_1 \in ve_1$ y $x_2 \in ve_2$ para dos puntos extremos distintos $e_1, e_2 \in E(F_C)$. Como $x_1x_2 = x_1v \cup vx_2$ y como la función $f|x_1x_2$ es monótona, por la Proposición 1.4.16, se concluye que $f(x_1) \neq f(x_2)$, porque de otro modo tendríamos que $f(v) \in f(x_1x_2) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$, lo cual contradice a la Proposición 1.4.22. $\square$

4.4. Imágenes del Abanico de Cantor Bajo Funciones Ligeras

Teorema 4.4.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo no degenerado Y:*

1. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua, ligera y suprayectiva.*
2. *Y es una imagen de F_C bajo una función continua y suprayectiva.*
3. *Y es uniformemente conexo por trayectorias.*

Demostración. La equivalencia entre las condciones 2 y 3 se demostró en el Teorema 3.2.7. Es claro que la afirmación 1 implica la 2. Para finalizar, demostraremos que la condición 2 implica la 1. Para esto, sea $f : F_C \to Y$ una función continua y suprayectiva. De acuerdo con el Teorema de Factorización de Whyburn [14, 4.1, pag. 141], existen dos funciones continuas y suprayectivas $f_1 : F_C \to X$ y $f_2 : X \to Y$ tales que f_1 es monónota, f_2 es ligera y $f = f_2 \circ f_1$. Por el Teorema 4.3.4, el continuo X es homeomorfo a F_C o a F_C^ω. En el primer caso la prueba está terminada. Supongamos entonces que X es homeomorfo a F_C^ω. Aplicando la equivalencia entre las condiciones 6 y 3 del Teorema 4.1.3, como X es un abanico suave y $S(X)$ es un cerrado de X entonces X es una imagen de F_C bajo una función continua y ligera $g : F_C \to X$. La composición $f_2 \circ g : F_C \to Y$ es una función continua y ligera, por la Observación 1.4.14. $\square$

Conclusiones

Se caracterizaron a los continuos métricos y a los continuos Hausdorff que son una imagen continua del Abanico de Cantor F_C. Mediante la noción de *g-contractibilidad* se obtuvo una caracterización de los continuos que son una imagen continua de F_C y una preimagen continua de F_C.

Se dio una condición necesaria (pero no suficiente) para que un continuo métrico sea una imagen de F_C. Modificando este resultado se obtuvo una condición necesaria y suficiente para que un continuo X sea una imagen continua de F_C. Se mostró que esta condición es equivalente a que X sea la imagen de F_C bajo una función ligera, caracterizando así, a las imágenes continuas de F_C bajo funciones continuas y ligeras.

Se probó que el Abanico de Cantor es un *modelo común* en la clase de los abanicos uniformemente arcoconexos y en la clase de los dendroides uniformemente arcoconexos, es decir, es un elemento de la clase que puede ser mandado de manera continua sobre cualquier otro elemento de la clase.

Se caracterizó a las imagenes continuas de F_C como los continuos uniformemente conexos por trayectorias.

Finalmente, se dieron unas caracterizaciones de las imagenes continuas del Abanico de Cantor bajo distintos tipos de funciones, a saber: confluentes, abiertas, monótonas, ligeras y retracciones. También se dio una condición necesaria y suficiente para la cual existe una función continua y monótona de un abanico a un arco.

Bibliografía

[1] D. Bellamy, *The Cone over the Cantor Set-Continous maps from both directions*, Proc. Topology Conference. (Emory University, Atlanta, Ga, Atlanta 1970), J. W. Rogers, Jr., editor, 8-25.

[2] J.J. Charatonik, *On fans*, Disertationes Math. (Rozprawy Mat.) 54 (1967), 1-40.

[3] J.J. Charatonik y W.J. Charatonik, *Fans with the property of Kelley*, Topology Appl., 29 (1988), 73-78.

[4] J.J. Charatonik y W.J. Charatonik, *Images of the Cantor Fan*, Topology Appl., 33 (1989), 163-172.

[5] J.J. Charatonik y C. Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math., 67 (1970), 297-322.

[6] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1966.

[7] C. Eberhart, *A note on smooth fans*, Colloq. Math., 20 (1969), 89-90.

[8] A. García-Máynez y A. Tamariz Mascarúa, *Topología General*, Ed. Porrúa, S.A., 1988.

[9] W. Kuperberg, *Uniformly pathwise connected continua*, Proc. Charlotte Topology Conference (University of North Carolina at Charlotte, 1974), Studies in Topology, Academic Press, New York, 1975, N. M. Stavrakas y K. R. Allen, editores, 315-324.

[10] W. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, New York, 1966.

[11] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[12] W. Sierpiński, *Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne*, Fund. Math., 1 (1920), 44-60.

[13] R.W. Wardle, *On a property of J.L. Kelley*, Houston J. Math., 3 (1977) 291-299.

[14] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.

Índice alfabético