UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DEL ANÁLISIS AL PARAISO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

CONCEPCIÓN ALARCÓN DORANTES

TUTOR: MAT. GUILLERMO EDUARDO ZAMBRANA CASTAÑEDA

2006

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

Alarcón
Dorantes
Concepción
5556870353
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas

1.
Matemático
Guillermo Eduardo
Zambrana
Castañeda

2.
Doctor
José Alfredo
Amor
Montaño

3.
Doctor
Carlos
Álvarez
Jiménez

4.
Doctora
Gabriela
Campero
Arena

5.
Doctora
Yolanda Magda
Torres
Falcón

Del Análisis al Paraiso
133
2006

AGRADECIMIENTOS.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular, a la Facultad de Ciencias por la oportunidad de estudiar una carrera profesional y a todos los profesores que alguna vez me dieron clase, por todas sus enseñanzas.

Todo mi agradecimiento a mi asesor de tesis Guillermo Zambrana por su esfuerzo e interés para realizar este trabajo. También agradezco a todos mis sinodales José Alfredo Amor, Carlos Alvarez, Gabriela Campero y Yolanda Torres por su dedicación a mi trabajo y sus comentarios.

En Particular, quiero agradecer al M. en C. Carlos Alvarez y al M. en C. Arturo Nieva, por ayudarme desinteresadamente a conseguir material indispensable para mi tesis. Del mismo modo agradezco a Javier Castañón por su colaboración en las traducciones y a Oscar Zamudio por sus ideas para la demostración de un teorema, que se incluyen en esta tesis.

A mi papá Hector Alarcón por brindarme su apoyo en mis estudios. A mi mamá Concepción Dorantes por todo el apoyo y constante cariño, gracias por darme la vida, porque te debo todo lo que soy. A mis hermanos Gabriel, Hector, Alfredo y Perla por su cariño, su comprensión y su paciencia.

A Erick Arnaldo, por el apoyo, comprensión, confianza y fuerza que me ha dado a lo largo de mi carrera, gracias mi amor porque sin tu ayuda no hubiera podido lograrlo, eres lo mejor que me ha pasado en la vida. También agradezco el cariño y el apoyo de la familia Arnaldo Ocádiz.

A todos y cada uno de mis amigos que siempre han estado junto a mí y que han compartido buenos o malos momentos conmigo.

Una vez más Gracias por su apoyo incondicional.

Índice general

Introducción iii

1. El Origen **1**
- 1.1. Antecedentes en el Análisis 1
  - 1.1.1. La aproximación de Riemann 3
  - 1.1.2. Eduard Heine y el Teorema de Unicidad 7
- 1.2. La Problemática de Cantor 8
  - 1.2.1. Primer problema: El Teorema de Unicidad y una extensión del mismo 8
  - 1.2.2. Segundo problema: La teoría de números irracionales. Nuevos conceptos y otra extensión del Teorema de Unicidad 9
  - 1.2.3. Tercer problema: La no numerabilidad del conjunto de los números reales 10
- 1.3. Los conjuntos derivados de puntos de la segunda especie (1879) 11
  - 1.3.1. Los números transfinitos 13

2. El Teorema de Unicidad **14**
- 2.1. La versión de Georg Cantor 15
- 2.2. La versión de Eduard Heine 19
- 2.3. Primera extensión del Teorema de Unicidad 25
- 2.4. Versión contemporánea del Teorema de Unicidad 28

3. Los Números Reales **33**
- 3.1. Heine y los irracionales 35
- 3.2. La teoría de números irracionales de Cantor 38
  - 3.2.1. Nuevos conceptos 44
  - 3.2.2. Última extensión del Teorema de Unicidad 45

3.3. La no numerabilidad de los números reales 50

4. Los Números Transfinitos **54**

Conclusiones **69**

Apéndice A. **71**

Apéndice B. **76**

Apéndice C. **79**

Apéndice D. **90**

Apéndice E **95**

Apéndice F **108**

Bibliografía **126**

Introducción

En la segunda mitad del siglo diecinueve, el matemático alemán Georg Cantor (1845 - 1918) dio origen a una nueva teoría que revolucionó el estudio de las matemáticas: la Teoría de Conjuntos. Pero ¿cómo surgió esta teoría? ¿En qué momento Cantor comenzó a tener visiones diferentes a las de los matemáticos de esa época? ¿cuál fue el hecho que lo obligó a generar una nueva teoría? ¿Con qué problemas se enfrentó en el camino? Estas son las preguntas que me guiaron a desarrollar esta tesis.

El tema central de la tesis es conocer cómo se originó la Teoría de Conjuntos, para ello es indispensable ver la transición que hubo del análisis matemático a dicha teoría; por lo que en el primer capítulo y de manera panorámica, se incluye un poco de historia del análisis matemático, referente a teoremas concernientes a la representación de una función por una serie trigonométrica. Posteriormente, se especifíca la problemática matemática a la que se enfrentó Cantor para poder generar la Teoría de Conjuntos desde una perspectiva general. Esto permite una apreciación global del surgimiento, a partir del análisis, de la Teoría de Conjuntos.

En el capítulo dos, se muestra la solución al Teorema de Unicidad en tres variantes, una de ellas es dada por el matemático alemán Eduard Heine (1821 - 1881), otra variante es una dada por Georg Cantor, y la última es una ampliación del mismo teorema también dada por el creador de la Teoría de Conjuntos. Por último se incluye en este capítulo el Teorema de Unicidad de una manera contemporánea del que se ofrece una demostración propia.

El capítulo tres trata a los números irracionales. Primero se habla sobre un artículo publicado por Eduard Heine, en el que da algunas propiedades de los números racionales escritos como sucesiones; luego se incluye la teoría de números irracionales de Cantor, además de algunos nuevos conceptos que fueron necesarios para demostrar la última extensión del Teorema de Unicidad. Esta última versión del teorema se coloca en este capítulo debido a que para su realización fue necesario definir a los números irracionales; también se dará una definición alternativa del conjunto de números reales que formuló el matemático alemán Richard Dedekind (1831 - 1916) en 1872. El capítulo tres concluye con el resultado que hoy en día se conoce como el trabajo inaugural de la Teoría de Conjuntos, un trabajo en el que Cantor demuestra que los números reales son no numerables.

El último capítulo estudia los números transfinitos. Aunque éstos ya se encuentran dentro de la Teoría de Conjuntos, es importante conocer su origen (que por cierto está muy relacionado con el tercer capítulo) ya que es una parte importante en la creación de la Teoría de Conjuntos. Hago notar que en los capítulos del dos al cuatro, se incluyen varias citas bibliográficas de los trabajos de Cantor, en las que se ven las demostraciones de algunos teoremas así como muchos de los nuevos conceptos que generó, por lo que algunas de estas citas pueden parecer un poco extensas, pero es preferible hacerlo de este modo para una mayor comprensión en el desarrollo de la Teoría de Conjuntos.

Por último se encuentran las conlusiones de la tesis, en las que, además de tratar de responder a cada una de las preguntas que se plantean en la introducción, se resaltan los hechos más relevantes en el trayecto de la creación de la Teoría de Conjuntos. Así mismo, se señala la línea que separa el análisis matemático de la Teoría de Conjuntos.

Al final de la tesis se incluyen seis apéndices, los cuatro primeros son traducciones al español de algunos trabajos de Cantor, sobre todo los que fueron indispensables para la realización de esta tesis, los otros dos apéndices son traducciones al español de los artículos de Eduard Heine que se mencionan en este trabajo.

Antes de entrar de lleno al tema de la tesis considero importante mencionar que Georg Cantor no sólo fue el creador de la Teoría de Conjuntos, también escribió importantes artículos en otras áreas de la matemática como: teoría de números, análisis matemático, cálculo de probabilidades, teoría de la medida, teoría de funciones. Además, también se dedicó a la filosofía. Entre otras cosas, debido a su conflicto con el matemático alemán Leopold

Kronecker (1823 - 1891), Cantor estaba convencido de hacer efectiva la libertad e independencia del individuo, por lo que quiso fomentar la formación de una sociedad de matemáticos alemanes. Fue él quien dio el primer paso hacia la constitución de esa unión en nombre de la libertad científica. En la Proclamación de Heidelberg de 1889, hecha en ocasión del 62 Congreso de la Medicina y las Ciencias Naturales de Alemania, hace el primer llamado a sus colegas y el año siguiente, se encuentra entre los firmantes cuando se constituye la Unión de Matemáticos (18 de Septiembre de 1890). Desde el día de su fundación Georg Cantor fue su presidente, además de ser el editor de los *Jahresberichtes* (Informes anuales); antes de 1893 la sociedad le rindió un homenaje por sus inspirados y tenaces esfuerzos para hacer realidad el proyecto de la fundación. Si bien, no pudo llevar a cabo su grandioso proyecto de la Unión Internacional de Matemáticos, fue decisivo su trabajo para poner en marcha la idea y realización de los Congresos Internacionales de Matemáticas.[1]

Aunque Cantor fue víctima de críticas y sufrió por el rechazo de su trabajo; en 1897 (ya con 52 años de edad), año en que terminan sus publicaciones, comienza de manera acelerada el reconocimiento universal de su obra. En este año tuvo lugar en Zurich el primer Congreso Internacional de Matemáticos. El reconocimiento que se le dio en esa ocasión fue general; aparte de una exposición a cargo del matemático francés Jacques S. Hadamard (1865-1963), en la que presentó los conceptos de la Teoría de Conjuntos como conocidos e indispensables instrumentos de trabajo. Por los años 1900, con cierto retraso, pero casi al mismo tiempo en que se dio el reconocimiento científico a Cantor, llegaron también los honores del exterior tales como: su elección como miembro honorario de la London Mathematical Society (1901) y de la Sociedad Matemática de Cracovia, así como corresponsal del R. Instituto Veneto di Science, Lettere ed Arti (Venecia). También recibió la distinción del doctorado honoris de la Universidad Christiana (1902) y la entrega de la medalla Sylvester por la Royal Society (1904) y el doctorado honorario de la Universidad de St. Andrews (1911). Cuando cumplió 70 años de edad, se esculpió su busto en mármol el cual fue colocado hasta 1928 en la escalinata principal de la Universidad de Halle en Alemania. Cantor falleció el 6 de Enero de 1918.[2]

---

[1] Cfr. Andrés Sestier, *Diccionario Encilopédico de las Matemáticas,* México, Mayo, 1981, pág. 158.

[2] Cfr. Andrés Sestier, op. cit., pág. 164.

Capítulo 1

El Origen

En este capítulo se analizarán algunos aspectos de la historia del análisis matemático referente a los teoremas concernientes a la representación de una función mediante una serie trigonométrica. Después se desglosan los problemas a los que se enfrentó Georg Cantor para lograr la creación de la Teoría de Conjuntos. Las demostraciones de los teoremas se omiten aquí, sin embargo, debido a que son relevantes para conocer cómo fue evolucionando el pensamiento de Cantor se incluyen en los capítulos posteriores de la tesis. Por lo tanto este capítulo sólo nos presenta los pasos que fue siguiendo Cantor antes de desarrollar completamente su Teoría de Conjuntos y sus números transfinitos.

1.1. Antecedentes en el Análisis

En el año de 1822 el físico francés J. B. Joseph Fourier (1768 - 1830) mostró que funciones arbitrarias podían ser representadas analíticamente mediante series infinitas de funciones trigonométricas con coeficientes de un tipo específico (hoy conocidas como series de Fourier); es decir, que en el intervalo $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) \quad = \quad a_0 \ + \ (a_1 \cos x + b_1 sen x) \ + \ (a_2 \cos 2x + b_2 sen 2x) \ + \ \cdots$$

donde las constantes $a_0, a_1, b_1, \ldots$ satisfacen las ecuaciones

$$a_0 = \tfrac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sennx dx. \end{array}\right\} n \geq 1$$

Este descubrimiento abrió una nueva era de investigación en análisis. Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) continuó el estudio de series de Fourier, interesado en establecer esta teoría con mayor rigor y claridad. Debido a que Dirichlet expresó la suma de los primeros n términos de la serie de Fourier de una función f en $[-\pi,\pi]$ como:

$$S_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k senkx) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{sen\left(n+\frac{1}{2}(t-x)\right)}{2sen\frac{1}{2}(t-x)}dt$$

fue guiado a estudiar la existencia del límite, cuando n tiende a ∞, de integrales del tipo $\int\limits_{0}^{h}\frac{sennx}{senx}f(x)\,dx$, hoy conocidas cómo integrales de Dirichlet. Lo que lo condujo a analizar el comportamiento de series trigonométricas, principalmente las series no divergentes, ya que eran de dos tipos: condicionalmente y absolutamente convergentes[1]; los matemáticos del siglo diecinueve descubrieron que la convergencia condicional podía asumir muchas formas y la convergencia absoluta era sólo una.[2]

Utilizando las integrales anteriores, Dirichlet demuestra que la suma de la serie de Fourier para $f(x)$ es igual a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en cada punto dentro del intervalo $(-\pi,\pi)$ y a $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$ para $x=\pm\pi$; siempre y cuando $f(x)$ cumpliera ciertas condiciones (en la actualidad conocidas como condiciones de Dirichlet). Estas condiciones pueden enunciarse de la siguiente manera:

---

[1]La serie infinita $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si existe el $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, donde $s_n = a_1 + \cdots + a_n$.

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Se llaman series condicionalmente convergentes a las series que convergen, pero que no convergen absolutamente.

[2]Cfr. Joseph W. Dauben, *Georg Cantor -His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* New Yersey, Princeton University Press, 1990, pág. 7.

1) $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$, con la posible excepción de un número finito de puntos en los que posee límites laterales (es decir, en los puntos de discontinuidad la función tiene límite por la derecha y límite por la izquierda) y además $f(x)$ es monótonamente creciente o decreciente.

2) $f(x)$ posee un número finito de máximos y mínimos en el mismo intervalo.

En 1829 Dirichlet publicó un artículo en el *Journal* de *Crelle* referido sólo a aquellas funciones que satisficieran las condiciones anteriores. La aproximación de Dirichlet es importante para el avance en el estudio de series de Fourier, ya que Dirichlet fue el primero en establecer las condiciones suficientes 1) y 2), para la representación de una función mediante una serie trigonométrica.

Las condiciones de Dirichlet señalaron el punto a partir del cual Bernhard Riemann (1826 - 1866) comenzaría sus propias investigaciones sobre el problema de Fourier.

1.1.1. La aproximación de Riemann

La aproximación que dio Riemann en su *Habilitationsschrift*, escrito en 1854[3], fue diferente a la de Dirichlet, ya que Riemann además de proceder con series de Fourier como caso particular, trabajó con series trigonométricas en general y fue el primero en enfatizar esta distinción[4].

Asumiendo que una función dada era representable, Riemann comenzó con las series trigonométricas de la forma:

[3] Aunque el artículo no se publicó hasta 1868, dos años después de la muerte de Riemann, ya que Richard Dedekind lo consideró de gran importancia.

[4] La distinción entre series de Fourier y las series trigonométricas es que en las primeras, los coeficientes a_n, b_n están dados mediante las fórmulas integrales de Fourier, mientras que en las series trigonométricas los coeficientes pueden tomar cualquier forma.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}b_0 + a_1 sen x + b_1 \cos x + a_2 sen 2x + b_2 \cos 2x + \cdots , \qquad (1.1)^5$$

y enfatizó que podría decirse que $f(x)$ sólo existe para aquellos valores donde la serie converge. Si los coeficientes $a_{n,}$ b_n tienden a cero, entonces los términos de la serie (1.1) convergen en todo un intervalo; o bien, la convergencia puede ocurrir únicamente para determinados valores de x.

El elemento fundamental de la aproximación de Riemann para el estudio de series trigonométricas fue su introducción de una función auxiliar $F(x)$, la cual además de ser continua, es también uniforme y absolutamente convergente. Para obtener esta función Riemann consideró la serie trigonométrica $A_0+A_1+A_2+\cdots$, donde $A_0 = \frac{1}{2}b_0$, $A_n = a_n sen nx + b_n \cos nx$, posteriormente integró dos veces esta serie con respecto a x obteniendo: $C + C'x + A_0\frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots = F(x)$. Para hacer más claro el comportamiento de la función $F(x)$, Riemann ofreció tres lemas:[6]

> "**Lema 1:** *En el caso de que la serie* (1.1) *converja, entonces:*
>
> $$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$
>
> *converge hacia el mismo valor de la serie, si α y β se vuelven infinitamente pequeños de tal manera que su radio permanezca finito.*
>
> **Lema 2:** $$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$
>
> *se vuelve infinitamente pequeño mientras α llega a ser infinitamente pequeño.*
>
> **Lema 3:** *Si se designa mediante b y c a dos constantes arbitrarias, la mayor por c, y mediante $\lambda(x)$ una función, la cual junto con su primer cociente diferencial es siempre continua entre b y c y se vuelve igual a cero en las fronteras, y cuyo segundo cociente diferencial no tenga una infinidad de máximos ni de mínimos, entonces la integral:*

[5] En lo sucesivo se utilizará esta numeración propia, formada por dos números dentro de un paréntesis y separados por un punto, para señalar las ecuaciones que se usarán repetidamente. Esta notación es diferente a la que utiliza Cantor para señalar sus ecuaciones y que consta únicamente de un número.

[6] Cfr. Bernhard Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, 2a ed., Editado por Heinrich Weber con la asistencia de Richard Dedekind, 1953, Dover Publications, Inc. New York, N. Y., pág. 245.

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

finalmente se vuelve menor que cualquier magnitud dada, mientras μ crece infinitamente.”[7]

Posteriormente, Riemann escribió los tres teoremas que establecen las condiciones necesarias para la representación de una función por una serie trigonométrica:

“**Teorema 1:** *Si una función periódica $f(x)$ con periodo 2π debe ser representada mediante una serie trigonométrica, cuyos términos eventualmente se vuelven infinitamente pequeños para cada valor de x, entonces debe existir una función continua $F(x)$, de la cual dependa $f(x)$, tal que*

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

converja hacia $f(x)$, si α y β se vuelven infinitamente pequeños y su radio permanece finito. Además

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

debe volverse infinitamente pequeña con μ creciente, cuando $\lambda(x)$ y $\lambda'(x)$ son cero en los límites de integración y entre los mismos son siempre continuas, y $\lambda''(x)$ no tiene una infinidad de máximos ni de mínimos.

Teorema 2: *Si por el contrario, estas dos condiciones se cumplen, entonces existe una serie trigonométrica en la cual los coeficientes eventualmente se vuelven infinitamente pequeños, y que en general representa a la función en donde converge.*

Teorema 3: *Sea $b < x < c$, y sea $\rho(t)$ una función tal que $\rho(t)$ y $\rho'(t)$ tengan el valor cero para $t = b$ y $t = c$, y entre estos valores sean $\rho(t)$ y $\rho'(t)$ continuas, $\rho''(t)$ no tiene una infinidad de máximos ni de mínimos y que además, para $t = x$, sean $\rho(t) = 1$,*

[7] Ver Bernhard Riemann, op. cit., pág. 246.

> *$\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$, pero que $\rho'''(t)$ y $\rho^{IV}(t)$ sean finitos y continuos; entonces la diferencia entre la serie $A_0 + A_1 + \cdots + A_n$ y la integral*
>
> $$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\frac{sen\frac{2n+1}{2}(x-t)}{sen\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)dt$$
>
> *eventualmente se vuelve infinitamente pequeña con n creciente. Entonces la serie $A_0+A_1+A_2+\cdots$ convergerá o no, dependiendo de si*
>
> $$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\frac{sen\frac{2n+1}{2}(x-t)}{sen\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\rho(t)dt$$
>
> *se aproxima a un límite fijo con n creciente, o de si esto no sucede.”*[8]

De los tres teoremas de Riemann, el primero esboza la condición suficiente y necesaria para la representación de una función por una serie trigonométrica; el Teorema 2 dice bajo qué condiciones existiría una serie trigonométrica tal que la suma pudiera ser de una función prescrita. El Teorema 3 da la condición suficiente y necesaria para que una serie trigonométrica converja a un punto x en particular.[9]

Posteriormente Riemann encontró una solución al problema de representar mediante series trigonométricas a las funciones discontinuas (aquéllas con un número infinito de oscilaciones en cualquier intervalo finito dado.) Riemann mostró que tales funciones eran integrables algunas veces, incluso aunque no fueran representadas por una serie de Fourier. Por otro lado, Riemann añadió que aunque una función dada fuera totalmente imposible de integrar en cualquier intervalo arbitrariamente pequeño, era posible que hubiera una infinidad de valores x en el mismo intervalo para los cuales la serie trigonométrica (1.1) converge. Entre los problemas que encontró Riemann, una pregunta era de particular interés: Dada una función representada por series trigonométricas, ¿existe sólo una de tales series?

---

[8] Ver Bernhard Riemann, op. cit., pág. 251.

[9] Cfr. Joseph Dauben, Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite, 1ª ed., Cambridge, Harvard University Press, 1979 (reimpreso en Princeton, 1990), pág. 16.

Recapitulando, Dirichlet encontró las condiciones suficientes para representar funciones mediante series trigonométricas, pero Riemann encontró las condiciones necesarias para la representación, considerando ambos tipos, es decir las condiciones necesarias y suficientes, quedaba establecida la existencia de estas series, como es sabido dentro de los fundamentos matemáticos es necesario demostrar la existencia y la unicidad de las cosas, por lo que después de Riemann, sólo restaba demostrar la unicidad de las series.

1.1.2. Eduard Heine y el Teorema de Unicidad

Heinrich Eduard Heine era profesor ordinario en la *Universidad de Halle* cuando Cantor se convirtió en *Privatdozent* en esa universidad. Heine reconoció de inmediato la manera en la que en Cantor se conjugaban un espíritu crítico poco común y una extraordinaria fantasía. Heine estaba entonces trabajando en problemas de análisis y estaba completando un estudio sobre series trigonométricas. En particular, en febrero de 1870, en su artículo: "*Ueber trigonometrische Reihen*"[10] (Sobre series trigonométricas), publicó el siguiente teorema acerca de la unicidad de la representación de una función por una serie trigonométrica (ver Apéndice E, pág. 95):

> "**Teorema:** *Una función $f(x)$, continua en general, no necesariamente finita, se puede desarrollar sólo de una manera en una serie trigonométrica de la forma:*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 sen x) + (a_2 \cos 2x + b_2 sen 2x) + \cdots \tag{1.2}$$

> *si la serie está sujeta a la condición de converger en general en un mismo grado. La serie representa a la función en general desde $-\pi$ hasta $+\pi$."*[11]

[10] Ver Eduard Heine, *Ueber Trigonometrische Reihen,* Crelle's Journal, Tomo 71, Halle, Februar, 1870, pág. 353. (Apéndice E, pág. 95)

[11] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 355. (Apéndice E, pág. 97)

Es de importancia notar que con la expresión 'converger en un mismo grado' Heine se refiere a la convergencia uniforme y con la expresión 'en general' quiere decir cualquier intervalo continuo con la posible excepción de un número finito de puntos.[12]

El teorema de Heine invitó a generalizaciones directas, aunque en el párrafo de apertura de su artículo enfatizó que las grandes mentes incluyendo a Lejeune Dirichlet, Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) y Bernhard Riemann habían sido incapaces de resolver el problema de unicidad. La iniciativa de Heine de estimular el interés de Georg Cantor en series trigonométricas fue decisiva y lo animó a trabajar en la difícil cuestión: dada una función arbitraria representada por una serie trigonométrica, ¿la representación es necesariamente única? Cantor tomó este reto y estaba determinado a llegar lejos sin tomar tantas restricciones como los enunciados en el Teorema de Heine, sin embargo, esto hacía más complicadas las cosas ya que para dar una solución más general eran necesarios nuevos conceptos.[13]

1.2. La Problemática de Cantor

1.2.1. Primer problema: El Teorema de Unicidad y una extensión del mismo

Georg Cantor decidió tomar la cuestión de la unicidad de las series trigonométricas y para el año de 1870, publicó en el *Journal de Crelle* un artículo titulado: "*Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[14] (Prueba de que una función $f(x)$ dada por cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, se puede representar en esta forma de una manera única), en el cual pudo demostrar el teorema de unicidad, pero con algunas restricciones, ya que supuso que la serie trigonométrica en cuestión, era convergente para todos los valores de x.

[12] De esto se deriva el término 'puntos excepcionales'

[13] Cfr. Joseph Dauben, *Georg Cantor -His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* New Yersey, Princeton University Press, 1990, pág. 31.

[14] Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 80. (Apéndice A, pág. 71)

Cantor no se sintió conforme con la demostración pues quería extender la validéz del teorema a funciones no necesariamente continuas, por lo que siguió investigando y un año después, publicó una nota al artículo anterior, titulada: "*Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[15] (Nota al artículo: Prueba de que una función $f(x)$ dada por cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, se puede representar en esta forma de una manera única). Esta nota, además de simplificar un poco la prueba de 1870, daba una extensión del Teorema de Unicidad, en el que aseguraba que, incluso si para un número infinito de valores de x la representación de la función o bien, la convergencia de la serie no se verificaban, éste seguía siendo válido, siempre y cuando el total de tales puntos excepcionales estuviera distribuido de una manera especial.

Georg Cantor quedó intrigado al darse cuenta de que, aún con un número infinito de excepciones para la representación, el teorema siguiera siendo válido. Fue entonces cuando se dedicó a estudiar más a fondo estos puntos excepcionales.

1.2.2. Segundo problema: La teoría de números irracionales. Nuevos conceptos y otra extensión del Teorema de Unicidad

La última extensión del Teorema de Unicidad, se publicó en el año de 1872 en su tratado "*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*"[16] (Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas). Este tratado comenzó con una teoría de los números irracionales, debido a que en el siglo diecinueve, aunque ya se utilizaban los números reales, no había una definición exacta y rigurosa de los mismos. Para que pudiera existir una nueva extensión del Teorema de Unicidad, Cantor necesitaba una definición de número real y algunos nuevos conceptos, como fueron los puntos de acumulación y los conjuntos derivados de puntos.

[15] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 84 (Apéndice B, pág. 76).
[16] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 92. (Apéndice C, pág. 79)

Con todas estas nuevas herramientas a su disposición, Cantor logra establecer la demostración de esta última extensión del Teorema de Unicidad, de la manera más general posible. En esta prueba se eliminan todas las restricciones que había anteriormente.

1.2.3. Tercer problema: La no numerabilidad del conjunto de los números reales

Debido a que el Teorema de Unicidad seguía siendo válido para un número infinito de puntos excepcionales tomados en un sistema de puntos de $v^{ésima}$ clase (ver §1.3, adelante), Cantor notó que la naturaleza del Teorema de Unicidad estaba más ligada a los puntos de la línea recta (es decir, los números reales) que a las funciones en sí. Esto sucede porque lo primordial para la demostración de dicho teorema es determinar la manera en que se reparten estos puntos excepcionales, quedando así en segundo término las propiedades de las funciones trigonométricas. Fue entonces cuando Cantor comenzó a estudiar más a fondo el sistema de los números reales; Cantor sabía que los racionales eran densos, pero no formaban un continuo como los reales, posiblemente en este momento comenzó a sospechar que había más irracionales que racionales, pero no podía encontrar nada para afirmar o negar este hecho. Fue así que se dedicó a investigar las propiedades de los números para diferenciar a los dominios discretos de los continuos, o bien para establecer la diferencia clara entre los conjuntos infinitos numerables como los racionales y los conjuntos continuos como los reales.

En 1874, publicó su trabajo "*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*"[17] (Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales), en el cual demuestra que el conjunto de los números reales es no numerable. Éste es el primer artículo que Cantor escribe para la Teoría de Conjuntos, aunque en ese momento el contexto en el cual Cantor trabajaba no le permitía hablar de esta teoría. Por esta razón se puede pensar que éste es el trabajo de Cantor que origina la Teoría de Conjuntos, pero considero que esto no es del todo cierto, ya que cuando Cantor publicó su artículo de 1871 considera, por vez primera, un conjunto de puntos (infinito numerable) en conexión con el problema de la representación única de una

[17] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 115. (Apéndice D, pág. 90)

función mediante una serie trigonométrica, es a partir de este artículo que él comienza a interesarse en el estudio de diversos conjuntos de puntos con diferentes estructuras, como los números reales y del mismo modo lo conduce a generar una Teoría de Conjuntos general.

1.3. Los conjuntos derivados de puntos de la segunda especie (1879)

Como los conjuntos derivados de puntos son los que dan origen a los números transfinitos de Cantor, es importante estudiar su evolución y por consiguiente comprender su definición. Para ello, es necesario conocer la definición actual de un punto límite o bien de un punto de acumulación:

> "**Definición:** Un punto x es un *punto de acumulación* del conjunto A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto $a \in A$ con $|x - a| < \varepsilon$ pero $x \neq a$."[18]

Ahora es posible dar un significado a la expresión 'conjunto derivado' de una manera sencilla. El conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto de puntos A, es lo que Cantor nombró como el conjunto derivado de puntos de A. Estos conjuntos derivados tienen la siguiente característica: si P' es el conjunto derivado del conjunto original A, entonces P' será el primer conjunto derivado de A; si P' es nuevamente un conjunto de puntos, se deduce de él otro conjunto derivado de puntos P'', que se llama el segundo conjunto derivado de A, y así sucesivamente.

Es importante hacer notar, que para que exista un conjunto derivado se necesita al menos una cantidad infinita numerable de puntos, es decir, dependiendo de cuántos elementos haya en cada conjunto derivado de puntos, se puede saber si existe un nuevo derivado o no, en el caso en que se tiene una cantidad finita de puntos ya no puede obtenerse un nuevo conjunto derivado. Por consiguiente dependiendo de cuantos conjuntos derivados tenga

[18] Ver Michael Spivak, *Calculus -Cálculo infinitesimal,* México, Reverté Editoriales, 1998, pág. 637.

el conjunto A, es posible determinar si A pertenece a la primera especie o a la segunda, esto es, que si A tiene un número finito v de conjuntos derivados (con los conjuntos derivados distintos del conjunto vacío), donde el $v^{ésimo}$ conjunto derivado de A tiene un número finito de puntos, entonces A pertenece a la primera especie y se dice que es de la $v^{ésima}$ clase. Pero si A tiene una infinidad de conjuntos derivados (con cada conjunto derivado distinto del vacío) se dirá que A es de la segunda especie.

A manera de ejemplo, considérese el conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de sus puntos límite será $A' = \{0\}$, cómo A' tiene un número finito de elementos, ya no puede deducirse de A' un nuevo conjunto derivado A'', pues en este caso $A'' = \varnothing$. Debido a que el conjunto A tiene un número finito de conjuntos derivados se dice que A pertenece a la primera especie y cómo además A sólo tiene un conjunto derivado A', se dice que A es de la primera clase.[19] Ahora consideremos el conjunto $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, en este caso el conjunto de sus puntos límite es $B' = \mathbb{R}$, cómo B' tiene una cantidad infinita de puntos, puede deducirse de él un nuevo conjunto derivado $B'' = \mathbb{R}$ y así sucesivamente, hasta obtener una sucesión de conjuntos derivados de B que nunca termina: $B' = \mathbb{R}, B'' = \mathbb{R}, B''' = \mathbb{R}, \ldots, B^{\nu} = \mathbb{R}, \ldots B^{\infty} = \mathbb{R}, \ldots$. Cómo B tiene una cantidad infinita de conjuntos derivados se dice que el conjunto B pertenece a la segunda especie.

Una vez claro el significado de los conjuntos derivados de la segunda especie es factible proseguir con nuestros intereses. Con la idea de numerabilidad en mente y la prueba de que los números reales no son numerables, Cantor retoma ideas como la de los conjuntos derivados de la primera especie y estudia sus propiedades. Con estos conjuntos derivados y tomando en consideración el símbolo "infinito", generó los conjuntos derivados de la segunda especie; sin embargo, Cantor afirmó que era posible encontrar órdenes superiores a los de la segunda especie.

[19] Pueden encontrarse otros conjuntos que sean de la primera especie pero no necesariamente de la primera clase. Tomando el conjunto $C = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$, se encuentra que $C' = \left\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ y $C'' = \{0\}$. Ya que C tiene dos conjuntos derivados, se dice que C es de la segunda clase y que además pertenece a la primera especie.

1.3.1. Los números transfinitos

Los conjuntos derivados de la segunda especie se forman por todos los conjuntos que tienen una infinidad de conjuntos derivados, al obtener un conjunto derivado P^{∞}, se puede obtener un nuevo derivado que sería $P^{\infty+1}$ y de éste se forma un nuevo conjunto derivado $P^{\infty+2}$, etcétera. Cómo esta sucesión de conjuntos derivados sigue indefinidamente, es decir no tiene un último derivado, entonces se puede considerar un número que sea el mayor de todos los $\infty + n$, este número se denota con 2∞ y de ahí nuevamente puede obtenerse una sucesión infinita de números que no tiene último elemento: $2\infty, 2\infty + 1, \ldots, 2\infty + n, \ldots$. Otra vez puede considerarse un número que sea más grande que todos aquéllos que estén incluidos en la sucesión anterior, este número puede considerarse como 3∞ y de él se genera una nueva sucesión infinita $3\infty, 3\infty + 1, \ldots$. Siguiendo este procedimiento puede obtenerse un número de la forma ∞^{∞} y de él formar una nueva sucesión $\infty^{\infty}, \infty^{\infty} + 1, \ldots$. Todos estos números o sucesiones de números, forman lo que Cantor nombró como los números de la segunda especie.[20]

También puede considerarse el número Ω, siendo el más grande que sigue a todos los números de la segunda especie, éste último y sus sucesores son los números que corresponden a los números de la tercera especie. Cómo podemos ver éste número Ω ya se encuentra en un orden superior a los de la segunda especie.

Los conjuntos derivados de la segunda especie y de órdenes superiores son los que dieron origen a los números transfinitos de Cantor y por lo tanto a la Teoría de Conjuntos, pero Cantor no lo descubrió inmediatamente, de hecho para él, los conjuntos derivados de la segunda especie y de órdenes superiores, eran sólo símbolos para poder diferenciar y etiquetar a los conjuntos derivados. Pasaron varios meses antes de que Cantor se percatara de que esos símbolos eran números existentes como los racionales.

[20] Todos estos números de la segunda especie y de órdenes superiores a la segunda especie, se utilizan cómo superíndices para designar diferentes conjuntos derivados, es decir, denotan los conjuntos derivados de la segunda especie.

Capítulo 2

El Teorema de Unicidad

Veamos ahora cómo resolvió Cantor cada uno de los problemas a los que se enfrentó en el camino para la creación de la Teoría de Conjuntos. Como se pudo ver en el capítulo anterior, el primero de estos problemas fue el Teorema de Unicidad.

En el primer capítulo se menciona que Eduard Heine demostró una versión del Teorema de Unicidad, esta versión se publicó dos meses antes que la primera versión del teorema en cuestión de Georg Cantor. En mi opinión, Eduard Heine y Georg Cantor de cierta manera estaban trabajando juntos, apoyándose con ideas y sugerencias para la publicación de artículos, al menos en los que se refieren al Teorema de Unicidad. De hecho en el artículo de Heine "*Ueber trigonometrische Reihen*"[1] (Sobre series trigonométricas) publicado en 1870, Heine agradece a Cantor por haberlo motivado a realizar esta versión del teorema en la que supone que para un número finito de puntos no es necesaria la convergencia uniforme. Debido a esto, considero que la primera extensión del Teorema de Unicidad de Cantor es más bien una extensión del Teorema de Unicidad de la versión de Heine.

Por lo anterior, aunque el orden cronólogico de las versiones del Teorema de Unicidad sería: la versión de Heine, la versión de Cantor y por último la extensión del mismo teorema dada por Cantor. Desde mi punto de vista es mejor utilizar un orden lógico para tener mayor comprensión en la evolución del Teorema de Unicidad, ya que con el orden lógico iremos de la

[1]Ver Eduard Heine, op. cit., 353. (Apéndice E, pág. 95)

demostración más sencilla a la más compleja. Este orden lógico es listado de la siguiente manera: la versión de Cantor, la versión de Heine y la primera extensión del teorema dada por Georg Cantor.

2.1. La versión de Georg Cantor

En Marzo de 1870 Cantor publicó su artículo: "*Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*"[2] (Sobre un teorema concerniente a las series trigonométricas) en el que demostró un teorema[3] que utilizó para la demostración del Teorema de Unicidad. El Teorema de Unicidad se publicó en el *Journal* de *Crelle* en abril de 1870 (en el artículo: "*Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[4]), a este teorema lo enunció de la siguiente manera (ver Apéndice A, pág. 71):

> "*Si una función $f(x)$ de una variable 'real' (reellen Veränderlichen) x está dada mediante una serie trigonométrica convergente para cada valor de x:*
> $f(x) = \frac{1}{2}b_0 + (a_1 senx + b_1 \cos x) + (a_2 sen2x + b_2 \cos 2x) + \cdots$
> *entonces no existe otra serie de la misma forma que también sea convergente para cada valor de x y represente la misma función $f(x)$.*"[5]

Antes de hacer la demostración Cantor hizo la siguiente observación:

> "...Primero subrayo que, como es comprobado en mi tratado '*Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*', en una serie trigonométrica

[2]Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 71.

[3]**Teorema:** *Cuando para cada valor real de x entre los límites dados ($a < x < b$) el* $\lim(a_n sennx + b_n \cos nx) = 0$, *entonces tanto* $\lim a_n = 0$ *como* $\lim b_n = 0$.

[4]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 80. (Apéndice A, pág. 71)

[5]Cfr. Georg Cantor, op. cit., pág. 83. (Apéndice A, pág. 75)

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots ,$$

la cual es convergente para todos los valores de x en un intervalo dado (que por cierto puede ser tan pequeño como uno quiera), los coeficientes a_n, b_n se hacen infinitamente pequeños con un n creciente...”[6]

Después de esto, condujo la demostración de la siguiente manera:

“...Si ahora uno se imagina dos series trigonométricas, las cuales son convergentes para cualquier valor real de x y toman el mismo valor, y por lo tanto representan la misma función $f(x)$, entonces se deduce mediante sustracción la una de la otra una representación convergente del cero para cada valor de x.

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots \qquad (1)$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n sennx + d_n \cos nx$ y donde los coeficientes c_n, d_n llegan a ser infinitamente pequeños con un n creciente, según lo dicho ahora mismo. Con Riemann formo, de la serie (1), la función:

$$F(x) = C_0\frac{xx}{2} - C_1 - \ldots - \frac{c_n}{nn} - \ldots \qquad (2)$$

Es una función continua de x en la proximidad de cada valor de x, la cual según el Teorema 1 en el § 8 del tratado de Riemann: “*Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*; Göttingen, 1867” (Sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica), tiene la característica que para cada valor de x el segundo cociente diferencial

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha\alpha}$$

se acerca al límite cero con un α decreciente.

Si fijamos estos dos datos para la función $F(x)$:

I. Que sea continua en la proximidad de cualquier valor de x,

II. Que el límite de su segundo cociente diferencial sea igual a cero para cada valor de x con un α decreciente,

entonces se puede deducir de eso, que $F(x)$ es una función de primer grado $cx + c'$...”[7]

[6] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 83. (Apéndice A, pág. 72)

[7] Cfr. Georg Cantor, op. cit., pág. 81. (Apéndice A, pág. 72)

Posteriormente Cantor argumenta que $F(x)$ es una función lineal[8] y aclara que este argumento se lo comunicó el matemático alemán Herman Amandus Schwarz (1843 - 1921) en Zurich. Luego retoma la demostración del Teorema de Unicidad como se muestra a continuación:

"...De eso resulta para nuestra función $F(x)$ (porque aquí se

[8] Cantor conduce la demostración de la siguiente manera (ver Apéndice A, pág. 73): "Sean cumplidas las condiciones I. y II. para una función $F_1(x)$ de la variable real x dada en un intervalo $(a...b)$, y la primera en la proximidad de cada valor de x en el intervalo, la segunda para cada valor intermedio x [para $a < x < b$], y tomando por i la unidad positiva o negativa, por x cualquier magnitud real, veamos la función

$$\varphi(x) = i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right)\right\} - \tfrac{\chi^2}{2}(x-a)(b-x).$$

De las presuposiciones sobre $F_1(x)$ se deduce que $\varphi(x)$ es continua en el intervalo $(a...b)$, y que el límite del segundo cociente diferencial de $\varphi(x)$ es igual a χ^2 para cada valor intermedio de x con α decreciendo infinitamente; además $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0$. Si por eso denominamos

$$\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha) \qquad \text{con} \quad \varphi(x,\alpha),$$

entonces $\varphi(x,\alpha)$ es aproximadamente igual a $\chi^2\alpha^2$ para cada valor intermedio de x, con α decreciendo infinitamente, o sea positivo y distinto de cero para valores de α suficientemente pequeños. De eso se deduce que $\varphi(x)$ no es positivo para ningún valor de x dentro del intervalo. Efectivamente, en los límites $\varphi(x) = 0$; si $\varphi(x)$ fuera positivo para un valor intermedio, entonces el máximo de los valores que puede asumir $\varphi(x)$ también sería una magnitud positiva y sería alcanzado para por lo menos un valor intermedio x_0 de x; entonces para valores suficientemente pequeños de α sería

$$\varphi(x_0+\alpha) - \varphi(x_0) \leq 0, \qquad (x_0-\alpha) - \varphi(x_0) \leq 0,$$

por lo tanto también $\varphi(x,\alpha) \leq 0$, mientras $\varphi(x,\alpha)$ es positivo para valores de α suficientemente pequeños. Luego para cada valor de x en el intervalo $(a...b)$, para $i = \pm 1$ y para cualquier valor real de χ

$$\varphi(x) \leq 0;$$

si en eso se deja que χ llegue a ser infinitamente pequeño, entonces se deduce:

$$i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right)\right\} \leq 0 \quad \text{para } i = \pm 1,$$

luego

$$F_1(x) = F_1(a) + \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right).$$

Luego bajo las presuposiciones hechas $F_1(x)$ es una función entera de primer grado de x."

puede ampliar el intervalo como se desee) la siguiente forma válida para todos los valores de x: $F(x) = cx + c'$, y por eso se tiene para cada valor de x

$$C_0 \frac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots .$$

Primero se deduce de la periodicidad del lado derecho, que tanto $c = 0$ como también $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$ y por eso se mantiene la ecuación

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots \quad . \tag{3}$$

La serie a la derecha es de esta forma, que, con un ε dado, se puede indicar un número entero m, así que, si $n \geq m$, el resto R_n respecto a su valor absoluto es más pequeño que ε *para todos los valores de* x [es decir la serie es "uniformemente convergente"].

Por eso se puede integrar la ecuación (3) después de multiplicarla por $\cos n(x-t)dx$ *miembro por miembro* de $-\pi$ hasta $+\pi$; el resultado es

$$c_n sennt + d_n \cos nt = 0$$

donde por t se entiende cualquier magnitud real; entonces se tiene: $c_n = 0, d_n = 0$, mientras que ya antes se dedujo que $d_0 = 0$..."[9]

Como puede verse, Cantor toma dos diferentes series trigonométricas de la forma (1.2), que representen a la misma función $f(x)$, restando estas dos series obtuvo la serie que representa al cero (para Cantor la ecuación señalada con (1)). Luego usando el tratado de Riemann Cantor formó la función $F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{nn} - \cdots$, que es continua en la proximidad de cada valor de x y además, para cada x el valor del segundo cociente diferencial de la función se acerca a cero mientras α disminuye sin límite. Con estos dos datos Cantor demuestra que la función es lineal, por lo tanto tiene la forma $F(x) = cx + c'$. Sustituyendo $F(x)$ en la serie y despejando se obtiene: $C_0 \frac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots$; debido a que $C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots = \sum \frac{(c_n sennx + d_n \cos nx)}{nn}$ tiene un periodo de 2π, entonces también $C_0 \frac{xx}{2} - cx - c'$ debe tener periodo 2π, lo que sólo es posible cuando $c = 0$ y $C_0 = 0$. Entonces queda la ecuación $-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \cdots + \frac{C_n}{nn} + \cdots$ cuyo lado derecho converge uniformemente; entonces después de multiplicar la expresión anterior por $\cos n(x-t)$, el resultado se integra de $-\pi$ hasta π,

[9] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 83. (Apéndice A, pág. 74)

obteniendo $c_n sennt + d_n \cos nt = 0$ donde t es cualquier número real, por lo que $c_n = 0, d_n = 0$.

Para esta versión del Teorema de Unicidad se pide que la función sea continua en todo el dominio, por lo que la demostración tiene una restricción. Esto ocasiona que esta prueba sea la más sencilla de todas. Sin embargo, como se menciona al inicio de este capítulo, Eduard Heine ya había publicado otra versión del teorema en febrero de 1870, una que prescindía de la continuidad de la función.

2.2. La versión de Eduard Heine

En esta versión del teorema, Heine supone que existen algunos puntos en los que la serie no converge o bien que la representación de la función mediante la serie no es cero en esos puntos. Pero esta versión todavía tiene una restricción, que las discontinuidades ocurran solamente en un número finito de puntos. Eduard Heine en su artículo "*Ueber trigonometrische Reihen*"[10] (Sobre series trigonométricas), redactó su Teorema de Unicidad de la siguiente manera (ver apéndice E, pág. 95):

> "*Teorema. Si una serie trigonométrica*
>
> $$(\alpha.) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 senx) + (a_2 \cos 2x + b_2 sen2x) + \cdots$$
>
> *desde $-\pi$ hasta $+\pi$ converge en general en un mismo grado y representa generalmente al cero,* lo cual no presupone que tenga un valor finito ahí donde no desaparece, *entonces todos los coeficientes a* y *b deben desaparecer, y por lo tanto la serie representa al cero en todas partes.*"[11]

[10]Ver Eduard Heine, *Ueber trigonometrische Reihen,* Crelle's Journal, Tomo 71, Halle, Februar, 1870, pág. 353. (Apéndice E, pág. 95)

[11]Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 355. (Apéndice E, pág. 97)

Hago notar que en este enunciado, Heine se refiere a la convergencia uniforme como "converge en un mismo grado" y con la palabra "en general" quiere decir que dentro del dominio dado puede existir un número finito de valores que no cumplen con la convergencia uniforme.

Es importante resaltar que lo primero que hace Heine en su demostración es dar las conclusiones a las que llegará, cuando se enlazan las dos partes en las que divide la demostración del teorema:

> "...Se puede demostrar primero que una serie trigonométrica, si converge en general, pertenece a aquéllas *en que los miembros para cada valor de x finalmente se hacen infinitamente pequeños*, tal como indica la expresión en el §. 7, P. 25 del trabajo de *Riemann* "*Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*" (Sobre la representación de una función mediante una serie trigonométrica). Solamente es necesario mostrar esto para una serie de cosenos y para una serie de senos por separado; pues la suma o la diferencia de dos series convergentes en mismo grado en general es igual a una serie de la misma característica, y ya que x recorre los valores desde $-\pi$ hasta $+\pi$, entonces las series con el $n^{ésimo}$ miembro
>
> $$a_n cosnx + b_n sennx, \qquad a_n cosnx - b_n sennx$$
>
> son, según nuestra suposición, ambas uniformemente convergentes en general.
>
> Para demostrar ahora que en la serie de cosenos
>
> $$\frac{1}{2}a_0 + a_1 cosx + a_2 cos2x + ...$$
>
> a_n con n creciente decrece bajo cualquier magnitud ε dada aún más pequeña, se eliminan, como en el §. 2, los puntos críticos. Sea pq, entonces, algún tramo continuo, de modo que, si sólo se dan a x valores que pertenecen a pq, la serie converge ahí en mismo grado, es decir, n puede tomarse tan grande, que para ésta y una n más grande todas las x pertenecientes al tramo pq hacen el miembro $a_n \cos nx < \varepsilon$. Ahora si n es tan grande que $\frac{\pi}{n} < pq$, entonces para por lo menos un valor entero de m, seguramente $x = \frac{m\pi}{n}$ pertenecerá a la línea pq, o sea $a_n \cos nx$, es decir a_n debe estar situado debajo de ε.

> Sucede de manera similar con la serie del seno; para la demostración se tiene que poner en este caso $x = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$..."[12]

Una vez que Heine dejó claro que la suma de una serie de senos con una serie de cosenos, ambas uniformemente convergentes y por consiguiente en donde en ambas los coeficientes tienen como límite al cero, dan como resultado una serie trigonométrica uniformemente convergente en la cual los coeficientes eventualmente llegan a ser cero, llevó a cabo la demostración de este teorema en dos partes. En la primera parte prueba que para una serie de senos los coeficientes son cero:

> "...Sea la serie de senos
>
> $$b_1 sen x + b_2 sen 2x + b_3 sen 3x + \cdots$$
>
> convergente en mismo grado en general e igual a cero; $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\tau$ ordenadas según su magnitud, deben representar 0, π y las abscisas positivas de los puntos críticos, con lo cual es indistinto, si x_0 y x_τ, es decir 0 y π, pertenecen o no a éstos. Puntos críticos son aquí aquéllos en los cuales o la serie no desaparece o en sus alrededores ésta no converge en mismo grado.
>
> Si σ representa algún número entero de 1 hasta τ, y si se integra la ecuación
>
> $$\sum b_n sen nx = 0$$
>
> según x, y los límites de integración están incluídos *entre* $x_{\sigma-1}$ y x_σ, entonces es válido intercambiar la integral de la suma por la suma de las integrales; se tiene por lo tanto
>
> $$\sum b_n \frac{\cos nx - \cos nz}{n} = 0$$
>
> si z representa alguna constante que, tal como x, esté situada entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ..."[13]

Eduard Heine consideró una serie de senos uniformemente convergente en cada subintervalo continuo (x_i, x_{i+1}) con $i = 0, 1, \ldots \tau$, acomodando los puntos críticos x_i de menor a mayor, sin importar si los extremos del intervalo dado (es decir 0 y π) son puntos críticos o no. Posteriormente, integró la serie de senos en cada uno de los subintervalos continuos:

[12] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 357. (Apéndice E, pág. 99)

[13] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 357. (Apéndice E, pág. 99)

> "... No es posible resolver la serie anterior como la diferencia de dos partes, de las cuales una incluye sólo a x, la otra sólo a z, pues no se ha demostrado que cada parte converge para sí misma. Pero la serie converge en mismo grado tal como aquélla que resultó por la integración, siempre y cuando x permanezca dentro de sus límites. Por lo tanto, con una segunda integración dentro de los mismos límites, se puede dejar que la sumatoria suceda a la integración. De tal modo resulta
>
> $$\sum b_n(\tfrac{sennx-sennz}{n^2} - (x-z)\tfrac{\cos nz}{n}) = 0.$$
>
> Los miembros b_n disminuyen a cero con n creciente; por lo tanto, las series con el $n^{ésimo}$ miembro
>
> $$b_n\tfrac{sennx}{n^2}, \qquad b_n\tfrac{sennz}{n^2},$$
>
> son incondicionalmente (absolutamente) convergentes, y de la ecuación precedente se deduce que también la serie con el $n^{ésimo}$ miembro $b_n\frac{\cos nz}{n}$ es convergente e igual a una constante, que es k, o mejor dicho, k_σ. Si se pone
>
> $$b_n\tfrac{sennx}{n^2} = F(x),$$
>
> y c_σ también representa una constante, entonces, por lo tanto, se tiene
>
> $$F(x) = \sum b_n\tfrac{sennx}{n^2} = c_\sigma + xk_\sigma, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma)..."$$ [14]

Debido a que c_σ y k_σ son constantes y como x no tiene ninguna potencia, Heine encuentra que $F(x)$ es una función lineal. Posteriormente determina los valores de las constantes para lo cual hace uso de la función de Riemann, pero procediendo con dos diferentes criterios:

> "... a) Primero, comprender que la ecuación anterior es válida para los límites $x = x_{\sigma-1}$ e incluso $x = x_\sigma$, ya que $F(x)$ es una serie absolutamente convergente y el lado derecho es una función lineal de x. Por lo tanto, para todos los puntos $x_0, x_1, \ldots x_\tau$ se obtienen $\tau+1$ ecuaciones dobles en $F(x)$, o sea, $\tau-1$ de la forma

[14] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 358. (Apéndice E, pág. 100)

$$F(x_\sigma) = c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} \qquad (0 < \sigma < \tau)$$

y para $x_0 = 0$ y $x_\tau = \pi$

$$F(x_0) = 0 = c_1,$$
$$F(x_\tau) = 0 = c_\tau + \pi k_\tau.$$

b) En segundo lugar uno puede servirse del teorema que *Riemann* formula y demuestra rigurosamente en el trabajo mencionado arriba, según el cual

$$\frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha}$$

con α volviéndose siempre infinitamente pequeño. Si se coloca aquí x_σ para x, entonces $x+\alpha$, con α positiva, se sitúa entre x_σ y $x_{\sigma+1}$, por el contrario, $x-\alpha$ entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ. Se tiene por lo tanto

$$F(x_\sigma + \alpha) = c_{\sigma+1} + (x_\sigma + \alpha)k_{\sigma+1},$$
$$F(x_\sigma - \alpha) = c_\sigma + (x_\sigma - \alpha)k_\sigma,$$
$$2F(x_\sigma) = (c_\sigma + x_\sigma k_\sigma) + (c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}),$$

y después de la substitución de estos valores por el teorema de *Riemann*

$$k_\sigma = k_{\sigma+1}.$$"[15]

Después de probar que todas las constantes son iguales, Heine concluye esta parte de la demostración argumentando que la serie de senos es absolutamente convergente, con lo cual los coeficientes b_n son cero para toda n:

"... Ya que ahora se ha hallado que todas las k son idénticas entonces se sigue de a), que igualmente todas las c, es decir $c_1 = 0$, se vuelven idénticas. De aquí resulta que $k_\tau = 0$, al ser $c_\tau + \pi k_\tau = 0$; por tanto, toda k es igual a cero, así como toda c. Por lo tanto desaparece la serie absolutamente convergente

$$F(x) = \sum b_n \frac{sennx}{n^2}$$

para toda x desde 0 hasta π, de modo que toda b desaparece, y por lo tanto la parte del Teorema III. que se refiere a la serie del seno está probada..."[16]

[15] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 358. (Apéndice E, pág. 100)
[16] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 359. (Apéndice E, pág. 101)

En la segunda parte de la demostración, Heine también prueba que para una serie de cosenos los coeficientes llegan a ser cero:

> "...para una serie de cosenos
> $$\tfrac{1}{2}a_0+\sum a_n \cos nx \qquad (n>0)$$
> en la cual las letras z, σ, τ, c, k tienen un significado similar para la serie de cosenos tal como en el párrafo anterior para la serie de senos. Además se pone
> $$F(x)=\sum a_n \tfrac{\cos nx}{n^2}, \qquad (n>0).$$
> Una doble integración, si x y z están situados entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ, proporciona la ecuación
> $$\tfrac{1}{2}a_0(x-z)^2-\sum a_n(\tfrac{\cos nx-\cos nz}{n^2}+\tfrac{x-z}{n} sennz)=0,$$
> es decir
> $$F(x)=c_\sigma+xk_\sigma+\tfrac{1}{4}a_0x^2, \qquad (x_{\sigma-1}<x<x_\sigma).$$
> Esta ecuación debe ser válida aún en los límites $x_{\sigma-1}$ y x_σ, de modo que, por otro lado, se obtiene un sistema de ecuaciones
> $$c_\sigma+x_\sigma k_\sigma+\tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2=c_{\sigma+1}+x_\sigma k_{\sigma+1}+\tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2$$
> o, después de quitar el mismo miembro, como en el §. 4 según a)
> $$c_\sigma+x_\sigma k_\sigma=c_{\sigma+1}+x_\sigma k_{\sigma+1}, \qquad (0<\sigma<\tau).\ \ldots$$"[17]

Ahora Heine considera la serie de cosenos uniformemente convergente en cada subintervalo continuo (x_i, x_{i+1}) con $i=0,1,\ldots\tau$, e integra dos veces la serie de cosenos en la que nuevamente los límites de integración estaban dados por los puntos críticos. Luego retoma los dos criterios que dio para la serie de senos y deduce de manera similar que las constantes son todas iguales a cero, con lo que se obtiene que todos los coeficientes a_n de la serie de cosenos son cero:

[17]Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 359. (Apéndice E, pág. 101)

"... Como en el §. 4. según b) resulta

$$k_1 = k_2 = ... = k_\tau$$

y de esto

$$c_1 = c_2 = ... = c_\tau,$$

también desde $x = 0$ hasta $x = \pi$

$$F(x) = c + kx + \frac{1}{4}a_0x^2,$$

donde c y k designan las mismas constantes en todo el intervalo. Para determinarlos hay que notar que la serie para $F(x)$ converge absolutamente, que también existe la ecuación:

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos nx dx = \frac{2}{n^2\pi}\left(\frac{\pi}{2}a_0 \cos n\pi - 2ksen^2\frac{n\pi}{2}\right).$$

Si se emplea el valor hallado de a_n en la serie de cosenos dada, entonces se comprende inmediatamente que ella no converge, mientras que la suma, sin embargo, en general debe ser cero, si no a_0 y k, y por lo tanto toda a desaparece, con lo cual se da la demostración del Teorema III..."[18] (ver página 17 anterior)

Esta demostración de Heine es de gran importancia ya que Georg Cantor utiliza la mayor parte de ella para las dos versiones posteriores del Teorema de Unicidad, una de las cuales es la siguiente (ver § 2.3), la otra versión del teorema se verá en el capítulo tres (ver § 3.2.2).

2.3. Primera extensión del Teorema de Unicidad

En 1871, Cantor publicó una nota de su artículo: "*Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[19],

[18]Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 360. (Apéndice E, pág. 102)

[19]Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 80. (Apéndice A, pág. 71)

la nota se tituló: "*Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[20] (Nota al artículo: Prueba de que una función $f(x)$ dada por cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, se puede representar en esta forma de una manera única). En esta nota, ofreció una simplificación (en la cual recibió la ayuda de Leopold Kronecker) de la prueba del Teorema de Unicidad, pero lo más importante de este artículo, es que Georg Cantor ofreció la primera generalización del Teorema de Unicidad (ver Apéndice B, pág. 76).

> "*Dada una representación del valor cero, válida para cada valor de x, es decir convergente, mediante una serie trigonométrica* (1), *entonces los coeficientes c_n, d_n, de esta representación son cero.*"[21]

Cantor hizo la demostración de este teorema como sigue:

> "... Sea $\ldots x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ la sucesión infinita de valores de x, para la cual o termina la convergencia de la serie (1) o la parte derecha toma un valor distinto de cero, y los x_v están sujetos a la restricción de existir *solamente* en intervalos finitos y en *número finito*, entonces se deriva del artículo que la función ahí denominada $F(x)$ es igual a una función lineal $k_v x + l_v$ en cada intervalo $(x_v \ldots x_{v+1})$, y sólo resta exponer la identidad de esta función lineal, para poder aplicar en el artículo las otras conclusiones a $F(x)$, las cuales llevan a la desaparición de los coeficientes c_n, d_n...."[22]

Para la demostración Cantor tomó una sucesión infinita de puntos excepcionales, con estos valores formó intervalos abiertos en los que, como sucede en el artículo anterior de Cantor: "*Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur*

[20]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 84. (Apéndice B, pág. 76)
[21]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 85. (Apéndice B, pág. 77)
[22]Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice B, pág. 77)

auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt"[23], existe $F(x)$ que es una función lineal con la cual se llega a la prueba de que los coeficientes de la serie trigonométrica son cero. Por lo tanto solamente tenía que demostrar que esta función lineal es la misma en cada uno de los intervalos (x_v, x_{v+1}). La prueba para la identidad de la función la condujo de la siguiente manera:

> "... Esta prueba de la identidad se hace para cada dos funciones vecinas $k_v x + l_v$, $k_{v+1} x + l_{v+1}$ y con eso para todas, mediante el mismo procedimiento que el señor profesor Heine introduce en una cuestión análoga en el tratado "Ueber trigonometrische Reihen", volumen 71, página 353 de esta revista (Crelles Journal), ... "[24]

El procedimiento de Heine al que se refiere Cantor es la parte de la demostración del Teorema de Unicidad en la que se determina el valor de las constantes, es decir, cuando Eduard Heine encuentra que todas las constantes son cero (ver § 2.2, arriba).

> "... sólo se tiene que tomar en consideración la continuidad de la función $F(x)$ y el segundo teorema de Riemann en su tratado (Riemann: "Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", tratado de la Sociedad Científica de Göttingen, volumen 13) para el valor x_{v+1} de x; se encuentra:
>
> $$F(x_{v+1}) = k_v x_{v+1} + l_v \qquad \text{y}$$
>
> $$lim \tfrac{x_v+1(k_{v+1}-k_v)+l_{v+1}-l_v+\alpha(k_{v+1}-k_v)}{\alpha} = 0,$$
>
> que sólo es posible, cuando $k_v = k_{v+1}$ y $l_v = l_{v+1}$..."[25]

[23]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 80. (Apéndice A, pág. 71)
[24]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 85. (Apéndice B, pág. 77)
[25]Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice B, pág. 77)

De manera general, la diferencia esencial entre las dos versiones anteriores del teorema, es que Eduard Heine hace la prueba del teorema para un número finito de puntos excepcionales, mientras que Georg Cantor la hace para un número infinito de estas excepciones, con lo que el resto de la demostración es básicamente la misma que da Heine. Las discontinuidades que consideró Cantor, solamente podían presentase en subintervalos acotados (a, b) dentro del dominio dado y además sólo ocurría una cantidad finita de estas excepciones dentro de cada uno de los subintervalos (es notable que cada subintervalo sólo tiene dos excepciones que son las fronteras del intervalo, pues estos puntos determinan cada subintervalo continuo dentro del dominio.) Así puede concluirse que esta versión del teorema es una extensión del Teorema de Unicidad tanto de la primera versión de Cantor, como también de la versión de Eduard Heine.

Cabe notar que en este artículo de 1871 "*Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[26] Cantor escribió: "... Esta ampliación del teorema de ninguna forma es la última; he logrado una extensión mucho mayor que también se basa en procedimientos estrictos, la cual comunicaré en otra ocasión..."[27] Por lo tanto, cuando éste se publicó Cantor ya tenía en mente la segunda extensión del Teorema de Unicidad (publicada en el artículo: "*Über die Ausdehnung eines Satzes der Theorie der trigonometrischen Reihen;*" aquí ver §3.2.2, adelante), posiblemente sólo faltaba que la escribiera de una manera rigurosa.

2.4. Versión contemporánea del Teorema de Unicidad

Para cerrar este capítulo se muestra la versión actual del Teorema de Unicidad, aunque hoy en día este teorema no tiene el mismo auge que en el siglo diecinueve, sigue siendo importante. Desafortunadamente en los libros actuales de análisis matemático o series trigonométricas, sólo se menciona la unicidad como una característica que se cumple al representar una función

[26] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 84. (Apéndice B, pág. 76)
[27] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 86 (Apéndice B, pág. 78)

mediante una serie trigonométrica, pero no existe el Teorema de Unicidad como tal, ni su demostración actual. Debido a que el Teorema de Unicidad ya se demostró hace mucho tiempo, se da como un corolario del siguiente teorema:

> "**TEOREMA**. (i) Si $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_0 cos\ nx + b_0 sen\ nx)$ (2.1)
> converge en todas partes a cero, la serie desaparece idénticamente; esto es, todos sus coeficientes son 0.
> (ii) Más generalmente, si (2.1) converge en todas partes a una función integrable $f(x)$, entonces (2.1) es
>
> $$\frac{1}{2}\ a_0 + (a_1 cosx + b_1 senx) + \cdots + (a_n cos\ nx + b_n sen\ nx) + \cdots.$$
>
> Donde x es una variable real o compleja, los coeficientes $a_0, a_1, b_1, \ldots$ son independientes de x y los términos de (2.1) son todos de periodo 2π."[28]

Ahora veamos el corolario del inciso (i) del teorema anterior, que en la actualidad es el equivalente al Teorema de Unicidad con el cual trabajó Cantor y del que propongo la siguiente demostración:

> "**COROLARIO**. Si dos series trigonométricas convergen en todas partes a la misma suma, entonces las dos series son idénticas; esto es, los correspondientes coeficientes de ambas series son los mismos."[29]

Demostración. Sean $f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos nx + d_n sennx)$ y $f(x) = \frac{1}{2}g_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(g_n \cos nx + h_n sennx)$ dos series trigonométricas que convergen en todos los puntos del intervalo a la misma suma y que representan a la función $f(x)$. Restando término a término ambas igualdades se obtiene

[28] Ver A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Cambridge, Cambridge University Press, 1993, pág. 326.
[29] Ver A. Zygmund, ídem.

$$f(x) - f(x) = \tfrac{1}{2}(c_0 - g_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(c_n - g_n)\cos nx + (d_n - h_n)sennx\right].$$

Nombremos $f_1(x) = f(x) - f(x) = 0$, $a_0 = c_0 - g_0$, $a_n = c_n - g_n$ y $b_n = d_n - h_n$, entonces se tiene que

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx) \tag{2.2}$$

Debido a que $f(x)$ converge uniformemente, $f(x)$ es continua así como también el lado derecho de la igualdad. Por lo tanto también (2.2) es continua, entonces se puede integrar término a término ambos lados de la igualdad (2.2) de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} sennxdx)$$

Como $senx$ es una función impar, entonces $\int_{-\pi}^{\pi} sennxdx = 0$.

Ahora,
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \frac{1}{n}sennx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\left(senn\pi - sen\left(-n\pi\right)\right) = \frac{2}{n}senn\pi = 0$, ya que $senn\pi = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo que se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0 \ x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \tfrac{1}{2}a_0(\pi - (-\pi)) = \tfrac{1}{2}a_0 2\pi = a_0\pi$$

Entonces $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)dx$, pero $f_1(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\therefore a_0 = 0$.

Ahora, multiplicando (2.2) por $\cos kx$ para $k \geq 1$ e integrando término a término de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos kxdx =$$
$$\tfrac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cos nxdx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxsennxdx)$$

Ya sabemos que $a_0 = 0, \Longrightarrow \frac{1}{2}a_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0.$

Usando una identidad trigonométrica, se obtiene:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \; sennxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} sen\,(n+k)\,xdx - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} sen\,(n-k)\,xdx = 0$$

Por otra parte, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \pi \text{ si } n = k \end{cases}$

Ya que para el caso en que $n \neq k$, por la identidad trigonométrica: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos\,(m+n)\,x + \cos\,(m-n)\,x\right]$, se tiene que:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nxdx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos\,(k+n)\,x + \cos\,(k-n)\,x\right] dx =$$
$$\frac{1}{2}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\,(k+n)\,xdx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\,(k-n)\,xdx\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos udu + \frac{1}{k-n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos vdv\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+n} sen\,(k+n)\,x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k-n} sen\,(k-n)\,x \Big|_{-\pi}^{\pi}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k+n}\left[sen\,(k+n)\,\pi - sen\,(k+n)\,(-\pi)\right] + \frac{1}{k-n}\left[sen\,(k-n)\,\pi - sen\,(k-n)\,(-\pi)\right]\right\}$$

Que es igual a cero debido a que $senx$ es una función impar, por lo tanto tiene la propiedad de que $f\,(x) = -f\,(-x)$.

Por lo que sólo nos queda
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos kxdx = a_k\pi$, y despejándo obtenemos que
$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos kxdx = 0$ ya que $f_1(x) = f(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto $a_k = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$.

Debido a que $k = n$ y lo anterior se cumple para toda k, entonces $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se procede análogamente para encontrar b_n, primero se multiplica (2.2) por $senkx$ para $k \geq 1$ y luego se integra término a término de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) senkxdx =$$
$$\frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} senkxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} senkx \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} senkxsennxdx)$$

Ya se mostró que $a_0 = 0$ y que $a_n = 0$, por lo que sólo nos interesa:

$$\int_{-\pi}^{\pi} senkxsennxdx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ \pi \text{ si } n = k \end{cases}$$

Entonces
$\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cos kxdx = b_k\pi$, por lo que $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) senkxdx = 0$, ya que nuevamente $f_1(x) = f(x) - f(x) = 0$. Por lo tanto $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Como $k = n$ y lo anterior se cumple para toda k, entonces $b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Debido a que $b_0 = 0$ y que $b_0 = c_0 - g_0$, se tiene que $0 = c_0 - g_0$. Por lo tanto $c_0 = g_0$.

Análogamente se llega a la conclusión que $c_n = g_n$ así como también $d_n = h_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces las dos series trigonométricas son la misma. Por lo tanto la representación de una función por una serie trigonométrica es única.

Capítulo 3

Los Números Reales

En 1870 Hermann Hankel (1839 - 1873) publicó un artículo en el que incluía el "Principio de condensación de singularidades", este principio consiste en crear funciones discontinuas en todos los puntos racionales de un dominio definido. Este principio de Hankel y el artículo de Cantor de 1871 fueron el punto de partida para una profunda prueba del Teorema de Unicidad, pero sobre todo fueron una importante guía en la mente del creador de la Teoría de Conjuntos.[1]

Cantor ya había mostrado que la función de Riemann $F(x)$ era idéntica en dos intervalos separados por una singularidad[2] x_0, pero ¿Qué pasaría si fuera permitido un número infinito de tales puntos excepcionales dentro del intervalo (α, β)? El teorema de Bolzano-Weierstrass garantizaba que al menos existía un punto de condensación[3] en cualquier vecindad que tuviera un número infinito de puntos singulares x_v. Si había sólo un punto de acumulación x' en (α, β), considerando el intervalo (α, x') se podía tomar un subintervalo propio (s, t) que tuviera sólo un número finito de puntos excepcionales x_v (de otro modo habría un punto límite en (s, t) contradiciendo la suposición de que x' era el único.)[4]

[1] Cfr. Joseph Dauben, *Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* New Jersey, Princeton University Press, 1990, pág. 36.

[2] Aquí una singularidad representa lo mismo que un punto excepcional o punto de excepción.

[3] En esto, un punto de condensación es equivalente a un punto de acumulación o punto límite.

[4] Cfr. Joseph Dauben, op. cit., pág. 36.

El artículo de Cantor "*Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden rellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt*"[5] garantizaba que para todo (s,t) con un número de singularidades x_v estrictamente finito, $F(x)$ era lineal e idéntica en cada intervalo (s,t). Como $F(x)$ era continua, los puntos s y t podían acercarse arbitrariamente a α y x' respectivamente por lo que $F(x)$ era lineal en (α, x'). El mismo argumento era válido si existía un número finito de tales puntos de condensación $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Entonces el Teorema de Unicidad era posible incluso para un número infinito de puntos de excepción, distribuidos de esta manera específica. Si éste fuera el caso, es decir, que existiera un número infinito de estos puntos en (α,β), nuevamente por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existía al menos un punto de condensación entre la infinidad de x'_v. Suponiendo que sólo había uno de tales puntos de acumulación $x"$, seguía como antes, que sólo podía ocurrir un número finito de puntos x'_v en cualquier subintervalo (s,t) de $(\alpha, x")$. En estos subintervalos nuevamente $F(x)$ es lineal. Este argumento podía extenderse a cualquier número finito de veces.[6]

Cantor tenía muy clara la idea, pero describir tal procedimiento de manera clara y rigurosa no era tan sencillo, ya que necesitaba desenredar y explicar los diferentes niveles de singularidades condensadas en intervalos que estaban situados unos dentro de otros. La solución más factible era proceder aritméticamente, sin embargo, para ello era indispensable una teoría rigurosa de los números reales, lo que también originaba una dificultad, referente a la diferencia entre el continuo aritmético de números reales y el continuo geométrico de puntos en una línea. Con todo esto encima, Cantor notó que antes de dar cualquier otra extensión del Teorema de Unicidad, existían muchos problemas importantes que debían ser resueltos.

En el artículo: "*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*"[7] (Sobre la ampliación de un teorema de la teoría de series trigonométricas) publicado en 1872, Cantor comunicó la última extensión del Teorema de Unicidad; pero para poder dar esta extensión, fue necesario determinar nuevos conceptos.

---

[5] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 84. (Apéndice B, pág. 76)

[6] Cfr. Joseph Dauben, op. cit., pág. 36.

[7] Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 92. (Apéndice C, pág. 79)

3.1. Heine y los irracionales

En octubre de 1871 Eduard Heine publicó su artículo "*Die Elemente der Functionenlehre*"[8] (Los elementos de la teoría de funciones) en el *Journal de Crelle*. Este artículo se compone de dos partes, la primera trata sobre números y la segunda parte sobre funciones. En la introducción de su artículo, Heine explica que pudo llevar a cabo este trabajo gracias a las ideas que otros le comunicaron verbalmente, sobre todo el matemático alemán Carlos Weierstrass (1815 - 1897). Por otro lado Heine agradece al Sr. Cantor por su colaboración en la redacción del trabajo y por sus ideas para introducir los números generales mediante series numéricas.

Aquí hay que hacer la siguiente observación. En este artículo, Heine no da una definición rigurosa de los números irracionales, en la introducción explica cómo se llega a los irracionales y después simplemente dice que existen. Lo interesante del artículo para nuestro tema es la primera parte, relacionada con los números racionales y a las operaciones entre ellos (ver Apéndice F, pág. 108). Es importante resaltar que cuando Eduard Heine dice la palabra 'número', se refiere a los números reales, pero también de vez en cuando se refiere a los racionales (con la inclusión del cero) como casos específicos. El artículo de Heine comienza con una serie de definiciones sobre los números escritos como sucesiones, por lo que en esta sección sólo se citarán las definiciones y teoremas que son relevantes para nuestro objetivo:

> "1. *Definición. Serie numérica* es una serie de números a_1, a_2,etc., a_n,etc., si para cada número η dado lo más pequeño que sea, pero diferente de cero, existe un valor n que provoca que $a_n - a_{n+v}$ permanezca debajo de η para todo entero positivo v.
>
> 2. *Definición.* Toda serie numérica en la cual los números a_n, que tengan índice n creciente, decrezcan bajo cada magnitud definible, se llama *serie elemental.*"[9]

[8] Ver Eduard Heine, *Die Elemente der Functionenlehre,* Crelle's Journal, Tomo 74, Halle, October, 1871, pág. 172. (Apéndice F, pág. 108)

[9] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 174. (Apéndice F, pág. 110)

En esto, Heine se refiere a las sucesiones convergentes a cero como 'series elementales' (con lo que se puede observar que aunque Heine escribe 'series numéricas' realmente se refiere a sucesiones de números), después define las operaciones elementales entre series numéricas, es decir, la suma, la resta, la multiplicación y la división entre dos sucesiones numéricas (para la división pide que la serie que está como denominador no sea una serie elemental, ver Definición 2. arriba); luego determina la igualdad entre dos sucesiones numéricas diciendo que si el resultado de la resta entre las dos sucesiones es una serie elemental entonces las dos series son iguales.

En el párrafo siguiente, Eduard Heine introdujo las series numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como indicaciones encerrándolas entre corchetes $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ y las nombró números generales o indicaciones numéricas denotándolas con letras mayúsculas, es decir, $[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A$, concluyó este párrafo con la definición de la igualdad, la desigualdad en más y en menos entre series numéricas, además agregó que si a una indicación numérica se le quitan algunos términos en número finito, la serie permanece invariable. En el tercer párrafo de su artículo, Heine ofrece las indicaciones $(+, -, \cdot, \div)$ que indican las operaciones elementales entre series numéricas y definió el valor absoluto de una indicación numérica como la sucesión de los valores numéricos en vez colocar la sucesión de las indicaciones. En el cuarto párrafo introduce el límite de una sucesión numérica:

> "1. *Definición.* Si existe para números (racionales) a_1, a_2, etc. un número (racional) U de tal naturaleza que $U - a_n$ con n creciente, decrece con cada valor definible, entonces se dice que U es el límite de las a.
>
> 1. *Teorema.* Si los miembros de la serie numérica a_1, a_2, etc. poseen un límite (racional) U, entonces U es también la indicación perteneciente a la serie a_1, a_2,etc.
>
> 3. *Definición.* Si A es una indicación numérica determinada, y $A - B$ decrece, siendo n creciente, con cada indicación numérica asignable, entonces se dice que A *es el límite de* B.
>
> 2. *Teorema. La indicación numérica A es el límite de los miembros a de la serie a la cual pertenecen.*"[10]

[10]Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 178. (Apéndice F, pág. 114)

El párrafo cinco del artículo de Heine se tituló ‘Los números irracionales de órdenes arbitrarios’, pero aquí no se hace una definición rigurosa de los números reales; simplemente Heine toma como caso particular a los números racionales para introducir distintos órdenes que pueden llegar a tener los números generales:

> “*Indicación.* Los números generales, cuando también llegan a ser racionales en casos especiales, deben ser llamados números irracionales de primer orden. Tal como fueron formados estos números irracionales de primer orden A a partir de los racionales, así también, a partir de éstos, se pueden formar nuevamente irracionales de segundo orden A', y, a partir de éstos, irracionales de tercer orden A”, etc. Los irracionales del orden $m+1$ serán señalados con $A^{(m)}$.
>
> Lo irracional, sin importar el orden, se opone a lo racional. El hecho de que existen números irracionales, de que tampoco todas las magnitudes $A^{(m)}$ pueden ser números racionales, será mostrado en la sección B, §.3, Corol.2.
>
> *Teorema. Las irracionalidades del* $m+2^{ésimo}$ *orden no son nuevas, sino que concuerdan con aquéllas de primer orden.*”[11]

Al parecer lo que dice Heine es, que al considerar esos casos en que los números reales son racionales, a esos números racionales se les puede llamar números irracionales de primer orden y asegura que mediante los irracionales de primer orden, pueden formarse irracionales de segundo orden, a partir de estos se pueden formar números irracionales de tercer orden y así sucesivamente hasta llegar a los irracionales de orden $m+1$. Se observa que Heine en ningún momento explica cómo pueden obtenerse entos números irracionales de distintos órdenes, pero si aclara que no todos los irracionales de orden $m+1$ son números racionales.

En este artículo de Heine existe una teoría de los números reales pues la mayor parte del artículo se refiere a los números reales y a la aritmética básica entre ellos, aunque en ninguna parte se ve la definición rigurosa de los mismos. Lo más importante de este artículo con respecto a nuestros intereses,

[11] Ver Eduard Heine, op. cit., pág. 180. (Apéndice F, pág. 116)

es la manera en que Heine define a los números como series numéricas, ya que Cantor toma estas series numéricas para introducir los números irracionales.

3.2. La teoría de números irracionales de Cantor

El artículo de Cantor "*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*"[12] (Sobre la extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas) publicado en 1872, comenzó con el desarrollo de una teoría de los números reales, para ello Cantor tomó como base a los números racionales (incluyendo el cero) y los nombró el sistema A (ver apéndice C, pág. 79):

> "...Se encuentra una primera generalización de la noción de magnitud numérica en el caso en que mediante una ley se ha obtenido una serie infinita de números racionales
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$
> construida de tal manera que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n crece, para cualquier número entero positivo m, o en otros términos, que con ε (positivo, racional) tomado arbitrariamente se tiene un número n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n \geq n_1$ y si m es un número entero positivo tomado arbitrariamente. Esta propiedad de la serie (1) la expreso así: 'la serie (1) tiene un límite determinado b'..."[13]

Cantor escribió que con esta palabra de límite sólo quería argumentar una propiedad de la sucesión y no otra cosa; posteriormente agregó: "... como ligamos la serie (1) con un signo particular b así también hay que asignar diferentes signos $b, b', b'', \ldots$ a diversas series de la misma especie..."[14] Para poder ver las propiedades que cumplían tales sucesiones, procedió de la siguiente manera:

---

[12]Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 92. (Apéndice C, pág. 79)
[13]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 92. (Apéndice C, pág. 80)
[14]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 93. (Apéndice C, pág. 80)

"...Sea una segunda serie

$$a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots, \qquad (1')$$

que tenga un límite determinado b', se encuentra que las dos series (1) y (1') tendrán constantemente una de las tres relaciones mutuamente exclusivas: o bien 1. $a_n - a'_n$ se hace infinitamente pequeño a medida que n crece, o bien 2. $a_n - a'_n$ a partir de un cierto n permanece más grande que una magnitud positiva (racional) ε, o finalmente 3. $a_n - a'_n$ a partir de un cierto n permanece más pequeño que una magnitud negativa (racional) $-\varepsilon$. En el caso de la primera relación escribo

$$b = b',$$

en el caso de la segunda $b > b'$ y en el caso de la tercera $b < b'$.

Asimismo, se tiene que si una serie (1) tiene un límite b, no tiene con un número racional a más que una cualquiera de las tres relaciones siguientes. O bien 1. $a_n - a$ se hace infinitamente pequeño al aumentar n, o bien 2. $a_n - a$, a partir de un cierto n es siempre mayor que una magnitud positiva (racional) ε, o finalmente 3. $a_n - a$ a partir de un cierto n permanece inferior a una magnitud negativa (racional) $-\varepsilon$. Para expresar la existencia de estas relaciones, escribimos respectivamente:

$$b = a, \qquad b > a, \qquad b < a...$$"[15]

En el párrafo anterior vemos lo que hoy en día se conoce como la propiedad de la tricotomía para los números reales. Cantor denotó con la letra B a la totalidad de las magnitudes numéricas b, la unión de este sistema B con A, el sistema de los números racionales, forma un nuevo sistema de números en el que Cantor define las operaciones elementales:

"...Por las convenciones precedentes se pueden extender las operaciones elementales efectuadas con números racionales a la unión de los dos sistemas A y B. Sean en efecto b, b' y b'' tres magnitudes numéricas del sistema B, las fórmulas

[15] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 93. (Apéndice C, pág. 80)

$$b + b' = b'', \qquad bb' = b'', \qquad \tfrac{b}{b'} = b''$$

sirven para expresar entre las series correspondientes a los 3 números b, b', b''

$$a_1, a_2, \ldots$$
$$a'_1, a'_2, \ldots$$
$$a''_1, a''_2, \ldots$$

respectivamente las relaciones

$$\text{lím}(a_n + a'_n - a''_n) = 0, \qquad \text{lím}(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$
$$\text{lím}\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0 \qquad \text{para} \quad a'_n \neq 0 \ldots\text{''}$$[16]

Lo anterior no es otra cosa que las definiciones de las operaciones básicas (suma, multiplicación y división) entre números reales. Además, Cantor escribió que cuando uno o dos de los tres números pertenecen al sistema A, también existen definiciones semejantes para las operaciones algebraicas elementales, es decir, también pueden realizarse las operaciones básicas con números racionales y algún número irracional. Posteriormente Cantor decide hacer uso nuevamente de extensiones y forma una generalización de la noción de número:

> "...El sistema A ha dado origen al sistema B, asimismo los dos sistemas B y A reunidos darán origen por el mismo procedimiento a un nuevo sistema C. Sea en efecto una serie infinita
> $$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \qquad (2)$$
> de números elegidos en los sistemas A y B y que no pertenecen todos al sistema A, estando esta serie constituída de tal forma que, $b_{n+m} - b_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n crece, cualquiera que sea m, esta condición por las definiciones precedentes, se puede concebir como algo perfectamente determinado, diré que esta serie tiene un límite determinado c. Las magnitudes numéricas c constituyen el sistema C..."[17]

[16] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 94. (Apéndice C, pág. 81)
[17] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 82)

Aquí Cantor intenta construir nuevos sistemas de números, pero cómo puede verse, los sistemas subsecuentes a B serán siempre iguales al mismo sistema B, debido a que $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$ que viene siendo el sistema C. Cantor comentó que las definiciones de igualdad, de mayor que y de menor que, así como las operaciones elementales entre magnitudes de alguno de los sistemas, son análogas a las definiciones anteriores. Después continuó haciendo extensiones sobre magnitudes numéricas:

> "...El sistema C y los que le preceden, producen de manera análoga un sistema D, éstos a su vez otro sistema E y así sucesivamente; mediante λ de estas operaciones (considerando la operación por la cual se pasó de A a B como la primera) se llega a un sistema L de magnitudes numéricas. Si se recuerda la sucesión de las definiciones dadas para la equivalencia y la desigualdad en más o en menos de estas diferentes magnitudes numéricas y para las operaciones elementales que permiten pasar de un sistema al otro, tendrá lugar la misma relación con los que preceden, exceptuando el sistema A, de manera que podrá siempre igualarse una magnitud numérica l a una magnitud numérica k, i, $\ldots$, c, b, y recíprocamente..."[18]

En esta parte del artículo, Cantor hace la siguiente afirmación: "... la noción del número, por muy desarrollada que esté aquí, trae consigo el principio de una extensión necesaria en ella misma y absolutamente infinita..."[19] También hace algunas observaciones sobre los sistemas subsecuentes al sistema B:

> "...Parece legítimo, dada una magnitud numérica, en el sistema L, utilizar esta expresión: es una magnitud numérica, un valor o un límite de $\lambda^{ésima}$ especie, de donde se ve que empleo en general las expresiones magnitud numérica, valor y límite en el mismo sentido.

[18] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 95. (Apéndice C, pág. 82)

[19] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 83)

> Una ecuación $F(l, l', \ldots, l^{(\rho)}) = 0$ formada por los números $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$ mediante un número finito de operaciones elementales, aparece precisamente en la teoría en cuestión, como la expresión de una relación determinada entre $\rho + 1$ series λ veces infinitas de números racionales; estas series son producidas por las series simplemente infinitas que definen en primer lugar las magnitudes $l, l', \ldots, l^{(\rho)}$, se les obtiene reemplazando en las primeras los elementos por las series que los definen y tratando de la misma manera las series así obtenidas que en realidad serán doblemente infinitas y continuando este proceso hasta que no tenga uno frente a sí más que números racionales..."[20]

Lo que Cantor dice es que debido a la manera en que se han formado las sucesiones de números tomadas en alguno de los sistemas, en el fondo siempre vamos a tener una sucesión infinita numerable[21] de números racionales. Una vez que quedó establecido este sistema de números de una manera aritmética, Cantor trató de definirlos sobre una línea recta:

> "...Los puntos de una línea recta están determinados cuando tomando como base una unidad de medida, se indican sus distancias, abscisas desde un punto fijo *0* de la línea recta con el signo $+$ ó $-$, según que el punto en cuestión se encuentre en la parte positiva o negativa (fijada de antemano) de la recta a partir de *0*.
>
> Si esta distancia tiene un cociente racional con la unidad de medida, se le expresa por una magnitud numérica del sistema A; en el caso contrario si el punto es conocido mediante una construcción, siempre se puede imaginar una serie
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots , \qquad (1)$$
>
> que realiza las condiciones enunciadas en el §1 y que tiene con la distancia en cuestión una relación tal que los puntos de la recta, a los que se refieren las distancias $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, se aproximan en el infinito al punto por determinar, a medida que aumenta n.

[20] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 83)

[21] Cuando Cantor dice una sucesión simplemente infinita, realmente se refiere a una sucesión infinita numerable.

> Lo que expresamos diciendo: La distancia del punto por determinar al punto *0* es igual a b cuando b es la magnitud numérica correspondiente a la serie (1)..."[22]

Para esto, Cantor considera un punto fijo (el cero) en la línea recta y a partir de él, ubica a todos los números a la derecha si son positivos y a la izquierda si son negativos. Después Cantor argumenta de nuevo que la igualdad, el mayor que y el menor que de las distancias son equivalentes a la igualdad, el mayor que y el menor que de las magnitudes numéricas del sistema B; y posteriormente enunció lo que hoy en día se conoce como el axioma de continuidad:

> "... hay todavía que agregar un axioma el cual enunciamos simplemente como: A cada magnitud numérica pertenece también recíprocamente un punto determinado de la recta cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica en el sentido expuesto en este § ... De lo que precede, considero un punto de la recta como determinado cuando su distancia desde *0* precedida del signo conveniente está dada como magnitud numérica, valor o límite de la $\lambda^{ésima}$ especie..."[23]

En una nota al pie de página de este mismo artículo, Cantor explica que a cada punto le corresponden como coordenadas, una cantidad innumerable de magnitudes numéricas, pero que a una magnitud numérica no le pueden corresponder diferentes distancias en la línea recta. Lo que quiere decir que a cada punto le corresponden muchos números pero a cada número le corresponde un sólo punto. Con este sistema de números definido aritméticamente y geométricamente, Cantor estaba listo para dar conceptos totalmente nuevos.

Este sistema corresponde claramente a nuestro concepto de números reales. Es importante notar que en 1872 el matemático alemán Richard Dedekind (1831 - 1916) publicó un artículo titulado "*Stetigkeit und irrationale Zahlen*"[24]

---

[22] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 96. (Apéndice C, pág. 84)

[23] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 97. (Apéndice C, pág. 84)

[24] Ver Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1963, pág. 1.

(Continuidad y números irracionales) en el que define de manera rigurosa a los números irracionales, esta definición está basada en cortes. Si se considera un número racional a, éste forma una separación dentro del sistema de los números racionales en dos clases, de tal modo que cada número a_1 de la primera clase A_1, es menor que todo número a_2 de la segunda clase A_2; el número a es el mayor de la clase A_1 o es el menor de la clase A_2. A este tipo de separaciones Dedekind las llamó un corte (hoy conocido como cortaduras de Dedekind) y las designó mediante (A_1, A_2).

Dedekind demostró que existen muchas cortaduras que no son producidas por números racionales y aseguró que existían estos cortes debido a que los racionales son discontinuos. Entonces, al hacer una cortadura (A_1, A_2) que no sea producido por un número racional, se crea un nuevo número, un irracional a, que se considera completamente definido por la cortadura (A_1, A_2); Dedekind afirmó que el número a corresponde a esa cortadura, o que el número produce ese corte. Algunos párrafos después, Dedekind dice que el conjunto de todos los reales son todos los números racionales e irracionales. Puede verse que aunque las dos definiciones que hemos visto de número irracional (la de Dedekind y la de Cantor) son diferentes, las dos están basadas en el conjunto de los números racionales, una definición se da mediante cortaduras y la otra mediante límites de sucesiones.

Para concluir, se pudo ver que Cantor enfocó su atención en la manera en que debían ser definidos los conjuntos de puntos con distintas propiedades, lo que provocó la necesidad de desarrollar una rigurosa teoría de números reales. Este fue el primer paso antes de que los conjuntos de puntos de estructura complicada pudieran ser identificados, descritos y analizados satisfactoriamente. Además Cantor fue el primero en hacer las diferencias que había en las magnitudes identificadas entre conjuntos infinitos, lo que proveyó el punto de estudio de conjuntos infinitos como algo completamente independiente de la teoría de funciones.

3.2.1. Nuevos conceptos

Georg Cantor comenzó por llamar sistema de valores a una cantidad finita o infinita de magnitudes numéricas y por sistema de puntos a una cantidad finita o infinita de puntos de una línea recta; este hecho era necesario para poder dar la siguiente definición (ver apéndice C, pág. 79):

> "...Por la frase 'punto límite de un sistema de puntos P' quiero decir un punto de la recta tal que en su vecindad haya una infinidad de puntos del sistema P; puede ocurrir por otra parte que el punto límite pertenezca a este sistema. Y llamo 'vecindad de un punto' todo intervalo en el cual este punto esté contenido.
>
> ... y se tiene así también definido al mismo tiempo que el sistema P, el sistema de sus puntos límite que yo designo mediante P' y que llamo 'el primer sistema derivado de P'. Si el sistema P' no está compuesto por un número finito de puntos, se puede deducir de él por el mismo procedimiento otro sistema P'' que llamo el segundo sistema derivado de P. Por medio de ν operaciones análogas se llega a la noción del $\nu^{ésimo}$ sistema $P^{(\nu)}$ derivado de P.
>
> Puede ocurrir y éste es el caso que nos interesa que después de ν operaciones, el sistema $P^{(\nu)}$ se componga de un número finito de puntos y por consiguiente él mismo no dé origen, por deducción, a ningún otro sistema; en este caso el sistema primitivo P diremos que es de la $\nu^{ésima}$ especie, y de aquí se sigue que P', P'', $\ldots$ son entonces de la $\nu - 1^{ésima}$ especie, $\nu - 2^{ésima}$ $\ldots$"[25]

Con todas estas definiciones y el sistema de los "números reales" definido, Cantor estaba listo para demostrar la segunda extensión del Teorema de Unicidad.

3.2.2. Última extensión del Teorema de Unicidad

El artículo publicado en 1872, concluye con la demostración de la última extensión del Teorema de Unicidad, esta versión del teorema, es la más general que pudo haberse dado. El teorema se enuncia como sigue (ver apéndice C, pág. 79):

[25] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 97. (Apéndice C, pág. 85)

"**Teorema.** *Si una ecuación que tiene la forma*

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots \ , \qquad (1)$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n sennx + d_n \cos nx$; *se satisface para todos los valores de* x *con la excepción de aquéllos que corresponden a los puntos de un sistema de puntos* P *de* $\nu^{ésima}$ *especie dado en el intervalo* $(0, 2\pi)$, *donde* ν *designa un número entero tan grande como se quiera, afirmo que se tendrá que*

$$d_0 = 0, \qquad c_n = d_n = 0.$$"[26]

La demostración de esta versión del Teorema de Unicidad es un poco larga, Cantor la divide en dos partes (aunque no hace la división específica); primero demuestra que la función de Riemann es lineal y posteriormente prueba la identidad de la función en los diferentes intervalos.

"...*Demostración.* En esta demostración como se verá en lo sucesivo al hablar de P se tiene en mente no solamente el sistema dado de $v^{ésima}$ especie de los puntos excepcionales en el intervalo $(0 \ldots 2\pi)$, sino también el sistema producido sobre la línea infinita entera por repetición periódica. Ahora consideremos la función

$$F(x) = C_0\tfrac{xx}{2} - C_1 - \tfrac{C_2}{4} - \ldots - \tfrac{C_n}{nn} - \cdots \ .$$

Resulta, de la naturaleza de un sistema P de $v^{ésima}$ especie, que debe haber un intervalo (α, β), donde no se encuentra ningún punto de este sistema; para todos los valores de x comprendidos en este intervalo se tendrá pues a causa de la convergencia de nuestra serie (1) que ha sido supuesta

$$\text{lím}(c_n sennx + d_n \cos nx) = 0,$$

por consiguiente según un teorema conocido

$$\text{lím}\, c_n = 0, \qquad \text{lím}\, d_n = 0....$$"[27]

[26]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 99. (Apéndice C, pág. 87)
[27]Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 87)

Del mismo modo que con las versiones anteriores del teorema, Cantor enunció las propiedades que tiene la función de Riemann:

> "...La función $F(x)$ goza de las siguientes propiedades:
> 1. es continua para todos esos valores de x,
> 2. $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, cuando $\lim \alpha = 0$, para todos los valores de x, exceptuados los que corresponden a los puntos del sistema P,
> 3. $\lim \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, cuando $\lim \alpha = 0$, para cada valor de x sin excepción.
>
> Voy ahora a mostrar que $F(x) = cx + c'$. Para ello, considero primeramente un intervalo cualquiera $(p \ldots q)$, donde no hay más que un número finito de puntos del sistema P; sean $x_0, x_1, \ldots, x_r$ estos puntos escritos según su orden de sucesión. Digo que $F(x)$ es lineal en el intervalo $(p \ldots q)$ pues $F(x)$, a causa de las propiedades 1. y 2. es función lineal en cada uno de los intervalos, obtenidos al dividir $(p \ldots q)$ por los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_r$; como en efecto no hay puntos excepcionales en ninguno de esos intervalos, las conclusiones aplicadas en la memoria (Journal de Borchardt T. 72, P. 159) tienen aquí toda su fuerza..."[28]

Aquí, Cantor retomó las conclusiones de su artículo publicado en abril de 1870, de que la función de Riemann es lineal; posteriormente demuestra que la función es la misma en todos los intervalos, para ello nuevamente Cantor retoma el método que utilizó Eduard Heine (Ver § 2.2, antes) para mostrar la identidad de la función. Cantor realizó la prueba como antes, para cada dos funciones vecinas tomadas en dos intervalos diferentes:

> "...Sea pues en $(x_0 \ldots x_1)$, $F(x) = kx + l$.
> En $(x_1 \ldots x_2)$, $F(x) = k'x + l'$.
> A causa de 1. se tiene $F(x_1) = kx_1 + l$; y para los valores suficientemente pequeños de α:
>
> $$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l' \qquad F(x_1 + \alpha) = k(x_1 + \alpha) + l.$$

[28] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 87)

Se tiene así como consecuencia de la condición 3:

$$\lim \frac{(k'-k)x_1+l'-l+\alpha(k'-k)}{\alpha} = 0, \qquad \text{para } \lim \alpha = 0,$$

lo cual no es posible, más que si $k = k'$, $l = l'$..."[29]

Después retoma la demostración de que $F(x)$ es lineal en el intervalo (p, q), para ello probó dos pequeños resultados, que se enuncian a continuación, sin embargo no se verá la prueba de los mismos ya que no es relevante para la demostración del Teorema de Unicidad:

> "(A) Sea (p, q) un intervalo cualquiera en el que no hay más que un número finito de puntos del sistema P, $F(x)$ será lineal en este intervalo.
>
> (A') Sea (p', q') un intervalo cualquiera que sólo encierra un número finito de puntos del sistema P', $F(x)$ es lineal en este intervalo."[30]

Cantor concluye este artículo de 1872 con la parte final de la prueba de la última extensión del Teorema de Unicidad:

> "...Así concluímos mediante un número finito de deducciones sucesivas que $F(x)$ es lineal en todo intervalo que no contenga más que un número finito de puntos del sistema $P^{(\nu)}$. Pero el sistema P es de especie $\nu^{ésima}$, por hipótesis, y entonces un intervalo (a, b) tomado arbitrariamente en la recta no contendrá más que un número finito de puntos de $P^{(\nu)}$. $F(x)$ es pues lineal en todo intervalo (a, b) tomado arbitrariamente, y de aquí se sigue, como se ve fácilmente, que $F(x)$ toma la forma $F(x) = cx + c'$ para todos los valores de x. Habiendo puesto lo anterior en evidencia, la demostración se prosigue como en el trabajo antes citado dos veces, desde el momento en que se ha establecido la forma lineal..."[31]

---

[29] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 100. (Apéndice C, pág. 88)
[30] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice C, pág. 88)
[31] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 101. (Apéndice C, pág. 89)

Comparando las cuatro versiones del Teorema de Unicidad, definitivamente esta última es la más general ya que en ella se considera un número infinito de discontinuidades, repartidas en varios niveles debido a que se toman en un sistema de puntos de $\nu^{ésima}$ especie. Es para esta versión que Cantor observa que la naturaleza del teorema está más relacionada a los conjuntos de puntos que a las series trigonométricas en sí. También es en esta versión donde puede notarse un gran cambio en la mente de Cantor, ya que comparándola con la versión de Heine (y por consiguiente con la versión anterior de Cantor) después de tomar en cuenta una sucesión infinita numerable de puntos, Cantor llega a considerar un conjunto de puntos excepcionales que están ubicados en una infinidad de intervalos anidados pero que se acaban en algún momento, es decir, el Teorema de Unicidad seguía siendo válido para cualquier cantidad de puntos de excepción siempre y cuando estos puntos no formaran un conjunto denso.

Ahora que se ha visto el Teorema de Unicidad en toda su extensión es importante resaltar algunos puntos. Primero, debido a las generalizaciones, Cantor obtuvo la versión más general del teorema, pero principalmente logró tener una mayor visión sobre objetos matemáticos inexistentes (en la actualidad indispensables). Segundo, aunque Cantor fue el mayor colaborador para establecer el Teorema de Unicidad, no puede ignorarse la versión de Eduard Heine (ver § 2.2, antes), ya que además de ser un gran eslabón en las versiones subsecuentes del Teorema de Unicidad tal vez sin su demostración, pero sobre todo sin su influencia sobre Cantor, no hubiera sido posible la mayor creación de Georg Cantor. Por último, gracias a la última extensión del Teorema de Unicidad, Cantor comenzó a analizar más profundamente a los conjuntos de puntos, principalmente al conjunto de números reales, porque aunque sabía que la naturaleza del teorema estaba más ligado a los puntos que a las funciones trigonométricas, aún desconocía la diferencia exacta entre el conjunto de números reales y el de los racionales. Este asunto lo condujo a un problema más complicado que puede plantearse de la siguiente manera: ¿el sistema de números reales puede ponerse en correspondencia biunívoca con el sistema de los números enteros?

3.3. La no numerabilidad de los números reales

Con su último artículo, Georg Cantor comenzó a estudiar las propiedades del sistema de números reales y descubrió que este sistema no era numerable, aunque para demostrarlo pasaron dos años de intentos infructuosos. En 1874 publicó su artículo: "*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*"[32] (Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales). Este artículo comienza con la definición de lo que es un número algebraico real (ver Apéndice D, pág. 90):

> "...Se llama, en general, *número algebraico real*, un número real ω que es raíz de una ecuación no idéntica de la forma
> $$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$
> donde $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ son números enteros; podemos suponer que los números n y a_0, son positivos, que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ no tienen divisor común y que la ecuación (1) es irreducible; estas suposiciones dan como resultado por los teoremas fundamentales de la aritmética y del álgebra, que si la ecuación (1) admite como raíz un número algebraico real determinado, es una ecuación enteramente determinada; recíprocamente a una ecuación de la forma (1) corresponden cuando más tantos números algebraicos reales, raíces de esta ecuación como unidades hay en el grado n.. . ."[33]

Cantor denota con (ω) al sistema de todos los números algebraicos reales y luego demuestra que el conjunto (ω) puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto (v) de todos los números enteros. Cabe mencionar que el conjunto de los números algebraicos reales al que se refiere Cantor coincide con la definición actual del conjunto de los números algebraicos reales. Depués Cantor afirma que encontró la diferencia esencial que hay entre un continuo de números y un sistema de la especie de la totalidad de los números algebraicos reales, para ello demuestra que el sistema de números

[32]Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 115. (Apéndice D, pág. 90)

[33]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 115 (Apéndice D, pág. 90)

reales no puede corresponderse con el sistema de números enteros, el enuncia el teorema como sigue:

> "Cuando se tiene una sucesión infinita de números reales diferentes entre sí, que se suceden de acuerdo a una ley determinada cualquiera
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$ [34]
>
> se puede en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano, determinar un número η (y por consiguiente existe una infinidad de números tales), que no se encuentra en la sucesión (4)"[35]

Luego Cantor hace la demostración por medio de lo que hoy conocemos como intervalos anidados (también conocidos como intervalos encajados):

> "...Vamos a partir del intervalo dado de antemano $(\alpha \ldots \beta)$, y sea $\alpha < \beta$; designemos con α', β' los dos primeros números de la sucesión (4) distintos entre sí, que son distintos de α, β y que se encuentran en este intervalo, y sea $\alpha' < \beta'$; designemos asimismo con α'', β'', los dos primeros números de nuestra sucesión distintos entre sí y que se encuentran en el intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$, y sea $\alpha'' < \beta''$; de acuerdo con esta misma ley, formemos un intervalo $(\alpha''' \ldots \beta''')$ y así sucesivamente. Según esta definición los números $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ son números determinados de nuestra sucesión (4), cuyos índices crecen constantemente y lo mismo tiene lugar para los números $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$; además, los números $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ son magnitudes crecientes, los números $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ son magnitudes decrecientes; cada uno de los intervalos $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta'), (\alpha'', \beta'') \ldots$ comprende a todos los que le siguen. Entonces no pueden concebirse más que dos casos.
>
> O el número de los intervalos que pueden formarse así es finito; sea $\left(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)}\right)$ el último de ellos; como en ese intervalo se

[34] Hago notar que en el escrito original de Cantor la sucesión aparece como $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, mientras que en el libro de Sestier la sucesión aparece como $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu, \ldots$, por lo que en el Apéndice D (Pág. 85) aparecerá la sucesión con la notación de Andrés Sestier.

[35] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 117. (Apéndice D, pág. 92)

> encuentra a lo más un número de la sucesión (4), se puede tomar en este intervalo, un número η que no pertenece a la sucesión (4), y el teorema está así demostrado para este caso. O bien el número de intervalos así formados es infinito; entonces como los números $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ crecen constantemente, sin crecer al infinito, tienen un cierto límite α^∞; así también los números $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$, que decrecen constantemente, tienen un cierto límite β^∞; si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (lo que siempre se presentará aplicando este método al sistema (ω) de los números algebraicos reales), fácilmente se asegura uno, volviendo a la definición de los intervalos, que el número $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ no puede estar comprendido en nuestra sucesión; si por el contrario $\alpha^\infty < \beta^\infty$, todo número η comprendido en el intervalo $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ o igual a alguno de sus límites llena la condición requerida de no pertenecer a la sucesión (4)..."[36]

Cantor agregó en esta parte del artículo, una nota al pie de página en la que explica que, para el caso en que $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$, si el número η estuviera comprendido en la sucesión, se tendría que $\eta = \omega_p$, donde p es un índice determinado, lo que no es posible, ya que ω_p no está en el intervalo $\left(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)}\right)$, mientras que el número η está en él según su definición. Para concluir su artículo, nuevamente hace uso de las extensiones, en este caso generaliza el teorema anterior obteniendo el siguiente resultado:

> "...Sean $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$ una sucesión finita o infinita de números linealmente independientes (de números tales que no existe entre ellos ninguna ecuación de la forma $a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \ldots + a_n\omega_n = 0$ con los coeficientes enteros, no todos nulos a la vez) y podemos concebir el sistema (Ω) de todos los números Ω, que se pueden representar como funciones racionales de coeficientes enteros de los números dados ω, entonces en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, hay una infinidad de números, que no están contenidos en el sistema (Ω)..."[37]

[36] Ver Georg Cantor, ídem. (Apéndice D, pág. 92)
[37] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 118. (Apéndice D, pág. 93)

Reitero que este teorema de la no numerabilidad de los números reales ya se considera dentro de la Teoría de Conjuntos y aunque este teorema coloca a Cantor como el fundador de dicha teoría, como ha podido verse en el camino, no es aquí donde Cantor crea la Teoría de Conjuntos pues algunos años antes ya tenía la idea general de la misma al menos en la mente. Es importante mencionar que en 1878 Georg Cantor publicó un artículo titulado: "*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*"[38] (Una contribución a la Teoría de Conjuntos) en el que hace otra demostración del teorema de la no numerabilidad de los números reales. Esta demostración en la actualidad se conoce como la prueba de la diagonal y debido a que es conocida no la veremos en este trabajo.

Georg Cantor no tenía bases para definir el primer número transfinito que sigue a todos los números naturales finitos n, hasta que encontró que existen conjuntos mucho más numerosos que el de los números naturales, conjuntos que no podían ser numerados con números naturales como índices. A partir de esto, se dedicó a buscar otras potencias infinitas mayores que la de los números reales, después de tres años de investigación logró demostrar en 1877 que era posible establecer una correspondencia biunívoca entre una superficie y una línea recta; este descubrimiento provocó en Cantor la conocida frase: ¡Lo veo, pero no lo creo![39] Con este artículo, limitó su estudio de la continuidad al continuo lineal de los números reales.

[38] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 119.

[39] Cfr. Andrés Sestier, *Diccionario Encilopédico de las Matemáticas,* México, Mayo, 1981, pág. 66.

Capítulo 4

Los Números Transfinitos

Cuando Cantor tuvo clara la idea de numerabilidad, comenzó a precisar algunas de sus anteriores ideas, principalmente aquélla de los conjuntos derivados de un conjunto de puntos P, ya que creyó que las propiedades de los conjuntos derivados le darían las propiedades esenciales del continuo. Estas ideas las desarrolló completamente en una serie de artículos que comenzó a publicar en 1879 y que terminó en 1884, la serie de artículos en su totalidad se tituló: "*Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*"[1] ("Sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos;" de donde los dos últimos artículos de la serie son los *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*,[2] en los cuales explica la Teoría de Conjuntos de una manera más formal y metódica). El primero de los artículos de la serie, comenzó con el recordatorio de la definición de un conjunto derivado:

> "...El derivado P' de un conjunto lineal de puntos P es el conjunto de todos estos puntos que tienen la característica de un *punto límite* de P, sin importar si el punto límite es a la vez un punto de P o no, ... Ahora, puede darse el caso que la serie de los derivados $P', P'', \ldots$ lleve a un derivado $P^{(n)}$ que consiste de puntos que en cualquier ámbito finito existen sólo en número finito, así que $P^{(n)}$ *no* tiene puntos límite y por lo

[1] Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 139.

[2] Ver Georg Cantor, op. cit., Leipzig, 1883, pág. 165.

> tanto tampoco tiene derivado; en tal caso decimos del conjunto de puntos P que es de la *primera especie* y de la n^{ma} *clase*. Pero si la serie de derivados de P, la sucesión $P', P'', \ldots P^{(v)}, \ldots$ *no* termina, entonces decimos que el conjunto de puntos P es de la *segunda especie...*"[3]

Hasta este momento Cantor mostró que hay dos tipos diferentes de conjuntos, los conjuntos de la primera especie y los conjuntos de la segunda especie haciendo clara la diferencia entre ellos. Luego expresó algunas características importantes de los conjuntos de puntos, entre ellas dió la definición de densidad:

> "...Además resultan importantes características de un conjunto de puntos P, si miramos su comportamiento hacia un intervalo continuo dado $(\alpha \ldots \beta)$, (cuyos puntos finales se consideran como pertenecientes al intervalo). Puede resultar que puntos singulares o también todos los puntos del intervalo a la vez sean puntos de P, o también que ningún punto de $(\alpha \ldots \beta)$ sea punto de P; en el último caso decimos, que P está completamente *fuera* del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$. Si P está parcialmente o completamente dentro del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, entonces puede darse el caso notable, que cualquier intervalo $(\gamma \ldots \delta)$ contenido en $(\alpha \ldots \beta)$, *por muy pequeño que sea*, contenga puntos de P. En tal caso decimos que P es *denso en todas partes en el intervalo* $(\alpha \ldots \beta)$...
>
> De esta explicación de la expresión '*denso en todas partes en un intervalo dado*' se deduce que, si un conjunto de puntos *no* es *denso en todas partes*, *necesariamente* existe un intervalo $(\gamma \ldots \delta)$ contenido en el otro intervalo, en el cual no se encuentra ningún punto de P. ... un conjunto de puntos P se llama *denso por todas partes* en un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, si su derivado P' contiene todos los puntos de $(\alpha \ldots \beta)$ como elementos..."[4]

Otra de las propiedades que anunció, fue que dado un conjunto P denso en todas partes en un inervalo $(\alpha \ldots \beta)$, el conjunto P también es denso en

[3]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 139.
[4]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 140.

todas partes en cualquier subintervalo de $(\alpha \ldots \beta)$. Además hizo la siguiente afirmación:

> "...Un conjunto de puntos P *denso por todas partes* en un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ necesariamente es de la *segunda especie*, porque también P' y en consecuencia también $P'', P''', \ldots$ son entonces *densos por todas partes* en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, este proceso de los derivados de P es por lo tanto ilimitado, es decir P pertenece a la *segunda especie*. De eso deducimos que un conjunto de puntos P de la *primera especie* seguramente *no* es denso por todas partes en cualquier intervalo dado $(\alpha \ldots \beta)$, y en consecuencia siempre se puede encontrar un intervalo $(\gamma \ldots \delta)$ dentro de $(\alpha \ldots \beta)$ que no contiene ningún punto de P..."[5]

Como podemos ver, aquí se muestra que todos los conjuntos densos en algún intervalo, pertenecen a la segunda especie. Un año antes, Cantor publicó su artículo: "*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*"[6] (Una contribución a la Teoría de Conjuntos) en el cual habla por primera vez de la potencia de los conjuntos.[7] Entonces para este primer artículo de la serie retoma la definición de igualdad de potencia entre dos conjuntos:

[5] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 141.

[6] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 119.

[7] En este artículo de 1878, a pesar de que Cantor utiliza por primera vez la palabra "potencia"no da ninguna definición rigurosa de la misma, simplemente hace la siguiente aclaración: "Si los conjuntos que se contemplan son finitos, que quiere decir que consisten de un número finito de elementos, entonces el concepto de potencia corresponde, como se puede ver fácilmente, al concepto del número y por lo tanto al concepto de un número entero positivo, porque a dos conjuntos así les corresponde la misma potencia entonces y solamente entonces si el número de sus elementos es el mismo. Un componente de un conjunto finito siempre tiene una potencia menor que el conjunto mismo; esta relación se termina por completo en conjuntos infinitos, o sea conjuntos que consisten de un número infinito de elementos. De hecho que un conjunto infinito M sea parte de otro conjunto N o que se pueda adjuntar a tal de forma clara y completa, de ninguna manera se debe deducir que su potencia sea menor a la de N; esta conclusión solamente está justificada si se sabe que la potencia de M no es igual a la de N. El hecho que N sea un componente de M o que pueda ser adjuntada a tal de forma clara y completa, tampoco se debe considerar suficiente para que la potencia de M sea mayor a la de N."

Pero hay que resaltar que en el primer párrafo de este mismo artículo, Cantor da la siguiente definición: "...dos conjuntos M y N tienen la misma potencia o son equivalentes cuando pueden asignarse uno al otro de forma definida y completa..."

> "... dos conjuntos M y N tienen la *misma potencia*, cuando es posible determinar leyes para clasificarlos tanto a uno como al otro, que a cada elemento de M corresponde un elemento de N y también al revés, a cada elemento de N corresponde un elemento de M ..."[8]

Aquí Cantor da una clasificación para los conjuntos, dependiendo de si dos conjuntos tienen la misma o diferente potencia se les puede asignar una misma clase o bien diferentes clases, con lo que Cantor dedujo que si dos conjuntos son de la misma clase tienen la misma potencia y si están en diferentes clases tienen diferente potencia. Estas clases a las que se refiere son solamente dos diferentes: la de los conjuntos finitos y la de los conjuntos infinitos numerables. Además comentó que dentro de la clase de los infinitos numerables se encuentran todos los conjuntos de la primera especie, pero también muchos otros de la segunda especie.

Con estos resultados, Cantor retoma el teorema de la no numerabilidad de los números reales (anteriormente publicado en 1874 y en 1878). El teorema se enuncia como sigue:

> "*Dada una sucesión simplemente infinita*
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v, \ldots,$$
> *de números reales no idénticos que progresan según alguna ley, entonces se puede señalar en cualquier intervalo dado* $(\alpha \ldots \beta)$ *un número* η (y en consecuencia se puede señalar un número infinito de ellos), *el cual no existe en aquella sucesión* (como miembro de ella)"[9]

Es importante resaltar que cuando Cantor dice una sucesión simplemente infinita, realmente se refiere a una sucesión infinita numerable. La demostración que Cantor da a este teorema es diferente a las dos anteriores, sin embargo la idea de la demostración es básicamente la misma que se publicó en 1874, de hecho el mismo Cantor hace esta observación:

[8] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 141.
[9] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 143.

> "...Tomando en cuenta el gran interés que se liga a este teorema no solamente en la discusión actual, sino también en muchas otras relaciones tanto aritméticas como analíticas, entonces no estará de más, si desarrollamos más claramente la forma de prueba allí usada, con unas modificaciones simplificantes.
>
> Basándose en la sucesión
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v, \ldots,$$
>
> (a la cual atribuimos el signo (ω)) y cualquier intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, donde $\alpha < \beta$, ahora queremos mostrar, que en este intervalo se puede encontrar un número real η que *no* esta incluído en (ω).
>
> I. Primero notamos que si nuestro conjunto (ω) *no es denso por todas partes* en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, debe existir dentro de este intervalo otro intervalo $(\gamma \ldots \delta)$, cuyos números en su totalidad no pertenecen a (ω); entonces por η se puede escoger cualquier número del intervalo $(\gamma \ldots \delta)$, que está dentro del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ y seguro *no* existe en nuestra sucesión (ω). Este caso no presenta ninguna circunstancia especial y podemos continuar con el más difícil.
>
> II. El conjunto (ω) es *denso por todas partes* en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$. En este caso cualquier intervalo $(\gamma \ldots \delta)$ contenido en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, por muy pequeño que sea, contiene números de nuestra sucesión (ω). Para demostrar que *no obstante* existen números η en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, que no aparecen en (ω), consideremos lo siguiente..."[10]

Cantor divide la demostración en dos casos, pero en esta ocasión cada caso se debe a que el intervalo sea o no denso en todas partes, mientras que en la demostración de 1874 (ver § 3.3, antes) los casos se daban dependiendo de si el número de intervalos obtenido era finito o infinito.

> "...Como es seguro que en nuestra sucesión
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_v, \ldots,$$
>
> existen números *dentro* del intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, uno de estos números debe tener el *índice más pequeño* sea $\omega_{\varkappa_1}$ y otro $\omega_{\varkappa_2}$ debe tener el siguiente índice más grande. El más pequeño de los dos números

[10] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 143.

$\omega_{\varkappa_1}, \omega_{\varkappa_2}$ se llame α', el más grande β' (su identidad se puede excluir, porque presuponemos que nuestra sucesión consiste de puros números diferentes). Entonces según la definición

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

además

$$\varkappa_1 < \varkappa_2;$$

y además hay que notar que todos los números ω_μ de nuestra sucesión para los cuales $\mu \leq \varkappa_2$, *no* están adentro del intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$ como se ve inmediatamente de la determinación de los números $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$. Igual sean $\omega_{\varkappa_3}, \omega_{\varkappa_4}$ los dos números con los índices más pequeños de nuestra sucesión que están *dentro* del intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$, y el más pequeño de los números $\omega_{\varkappa_3}, \omega_{\varkappa_4}$ se llame α'' el más grande β''.

Entonces se tiene

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'$$

$$\varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4,$$

y se nota que todos los números ω_μ de nuestra sucesión para los cuales $\mu \leq \varkappa_4$, *no* están *dentro* del intervalo $(\alpha'' \ldots \beta'')$...”[11]

Como puede verse hasta este momento, la demostración es muy similar a la de 1874 ya que Cantor utiliza nuevamente los intervalos anidados, la diferencia entre ambas pruebas es la notación y que en los dos posibles casos que se dan se toman consideraciones diferentes. Ahora sigamos con el final de la demostración:

“...Después de llegar – aplicando la misma ley – a un intervalo $(\alpha^{(v-1)} \ldots \beta^{(v-1)})$, resulta el siguiente intervalo del mismo, de tal manera que se formulan los primeros dos números (es decir con los índices más bajos) de nuestra sucesión (ω) (sean $\omega_{\varkappa_{2v-1}}$ y $\omega_{\varkappa_{2v}}$) los cuales están *adentro* de $(\alpha^{(v-1)} \ldots \beta^{(v-1)})$; denominamos

[11] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 143.

el más pequeño de estos dos números $\alpha^{(v)}$, el más grande $\beta^{(v)}$. El intervalo $(\alpha^{(v)} \dots \beta^{(v)})$ entonces está adentro de todos los intervalos anteriores y tiene con nuestra sucesión la relación peculiar que todos los números ω_μ para los cuales $\mu \leq \varkappa_{2v}$ *seguramente no están en su interior*. Como obviamente

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \dots \ \varkappa_{2v-2} < \varkappa_{2v-1} < \varkappa_{2v} \dots$$

y como estos números como índices son números enteros, entonces es

$$\varkappa_{2v} \geq 2_\nu$$

y por lo tanto

$$\nu < \varkappa_{2v};$$

luego podemos decir con certeza (y eso es suficiente para lo siguiente) *que, si ν es cualquier número entero, la cantidad ω_v está fuera del intervalo* $(\alpha^{(v)} \dots \beta^{(v)})$.

Como los números $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \alpha^{(v)}, \dots$ crecen constantemente respecto a su cantidad, pero no obstante están encerrados en el intervalo $(\alpha \dots \beta)$, según un conocido teorema fundamental de la teoría de las magnitudes tienen un límite que llamamos A, así que

$$A = \text{Lim } \alpha^{(v)} \qquad \text{para} \quad \nu = \infty \dots$$ ”[12]

Otra vez Cantor toma el límite de las sucesiones α y el límite de las sucesiones β para obtener el número que está dentro del intervalo pero no dentro de la sucesión original de números enteros.

“...Lo mismo se puede decir de los números $\beta', \beta'', \beta''', \dots, \beta^{(v)}, \dots$, los cuales disminuyen constantemente y con eso también están dentro del intervalo $(\alpha \dots \beta)$; su límite lo llamamos B, así que

$$B = \text{Lim } \beta^{(v)} \qquad \text{para} \quad \nu = \infty.$$

[12] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 144.

Evidentemente se tiene

$$\alpha^{(v)} < A \leq B < \beta^{(v)}.$$

Pero se puede ver fácilmente que el caso $A < B$ no puede presentarse aquí, porque entonces cada número ω_v de nuestra sucesión estaría *fuera* del intervalo $(A \ldots\ B)$, a medida que ω_v esté fuera del intervalo $(\alpha^{(v)} \ldots \beta^{(v)})$; nuestra sucesión (ω) *no sería densa por todas partes* en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, contrario a la suposición. Por lo tanto nada más queda el caso $A = B$ y ahora se muestra que el número

$$\eta = A = B$$

no existe en nuestra sucesión (ω). Porque, si fuera un miembro de nuestra sucesión, por ejemplo el $\nu^{ésimo}$, entonces tendríamos $\eta = \omega_v$. Esta última ecuación, sin embargo, no es posible para ningún valor de ν, porque η está *adentro* del intervalo $(\alpha^{(v)} \ldots \beta^{(v)})$, pero ω_v tiene que estar *fuera* del mismo..."[13]

En 1880, publicó el segundo artículo de la serie, éste comienza con algunas definiciones de relaciones, o más bien de operaciones entre conjuntos:

"...Se expresa la identidad de dos conjuntos de puntos P y Q mediante la fórmula $P \equiv Q$. Si los dos conjuntos P y Q no tienen ningún elemento común, entonces decimos que están sin relación. Si un conjunto P resulta de la unión de varios: $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ en número finito o infinito, que no tienen relación entre los pares respectivos, entonces escribimos:

$$P \equiv \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}.$$

Si todos los puntos de un conjunto P pertenecen a otro conjunto Q, entonces decimos: sea P incluído en Q o también sea P un divisor de Q, es decir, Q es un múltiplo de P. Si $P_1, P_2, P_3, \ldots$ son cualesquiera conjuntos de puntos en número finito o infinito, entonces pertenece a ellos tanto un múltiplo común más pequeño, el cual denotamos

[13] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 144.

> $$m\left(P_1, P_2, P_3, \ldots\right) \qquad \text{[la “unión de conjuntos”]}$$
> y el cual es el conjunto que consiste de todos los puntos diferentes de $P_1, P_2, P_3, \ldots$ y no tiene otros puntos como elementos; como también le corresponde un divisor común más grande, el cual denotamos
> $$D\left(P_1, P_2, P_3, \ldots\right) \qquad \text{[“intersección”]}$$
> y es el conjunto de los puntos que tienen en común todos los $P_1, P_2, P_3, \ldots$, ... Además es conveniente tener una indicación que expresa la ausencia de puntos, para eso escogemos la letra O; $P \equiv O$ luego significa que el conjunto P *no contiene ningún punto*, o sea que estrictamente hablando no existe como tal...”[14]

Después de estas definiciones y otras referentes a la equivalencia entre conjuntos, Cantor se dispuso a establecer con mayor claridad, los conjuntos derivados de puntos, especialmente los de la segunda especie:

> “...Se tiene presente que en la sucesión de los derivados P', P'', $P''', \ldots$ de un conjunto P, cada miembro es divisor del miembro anterior, es decir cada nuevo derivado $P^{(\nu)}$ se da del anterior $P^{(\nu-1)}$ quitando ciertos puntos sin que se pongan puntos nuevos. Si P pertenece a la segunda especie, entonces P' se compondrá de dos conjuntos de puntos Q y R, esencialmente diferentes, de tal forma que
> $$P' \equiv \{Q, R\},$$
> Q consiste de estos puntos de P' que se pierden cuando se avanza lo suficiente en la sucesión $P', P'', P''', \ldots$, el otro R contiene estos puntos que se mantienen en *todos* los miembros de la sucesión $P', P'', P''', \ldots$, luego R se define mediante la fórmula
> $$R \equiv D\left(P', P'', P''', \ldots,\right).$$
> Pero evidentemente también tenemos
> $$R \equiv D\left(P'', P''', P^{IV}, \ldots,\right)$$

[14]Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 145.

> Y generalmente
> $$R \equiv D\left(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \ldots,\right),$$
> donde $n_1, n_2, n_3, \ldots$ es cualquier sucesión de números enteros positivos, creciendo hacia el infinito..."[15]

Es notable que Cantor define un conjunto derivado $P^{(v)}$ como la intersección de todos los derivados aneriores, esta intersección es diferente del conjunto vacío, debido a que cada conjunto derivado $P^{(i)}$ es diferente del vacío y además se obtiene del derivado anterior $P^{(i-1)}$. En estos momentos, utiliza el símbolo "∞" infinito (y posteriormente lo cambia por el tradicional ω) para denotar y generar conjuntos derivados de órdenes superiores:

> "...Este conjunto de puntos R derivándose del conjunto P ahora se expresa mediante la indicación
> $$P^{(\infty)}$$
> y se llama 'derivado de P de orden ∞'. Denótese el primer derivado de $P^{(\infty)}$ con $P^{(\infty+1)}$, el n^{mo} derivado de $P^{(\infty)}$ con $P^{(\infty+n)}$; pero $P^{(\infty)}$ tendrá también un derivado de orden ∞ generalmente distinto de O, lo nombramos $P^{(2\infty)}$. Continuando estas construcciones de conceptos se llega a derivados que consecuentemente se tienen que denominar mediante
> $$P^{(n_0\infty+n_1)}$$
> donde n_0, n_1 son números enteros positivos. Pero también pasamos eso formando
> $$D\left(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \ldots\right)$$
> fijando para eso la indicación $P^{(\infty 2)}$. De esto resulta mediante repetición de la misma operación y combinación con lo obtenido anteriormente el concepto más general
> $$P^{\left(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2\right)}$$
> y mediante la continuación de este procedimiento se llega a
> $$P^{\left(n_0\infty^v+n_1\infty^{v-1}+\cdots+n_v\right)}$$
> donde $n_0, n_1, \ldots, n_\nu$, son números enteros positivos. A conceptos adicionales se llega cuando se deja llegar a ser variable ν; se pone:

[15] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 146.

$$P^{(\infty^\infty)} \equiv D\left(P^{(\infty)}, P^{\left(\infty^2\right)} P^{\left(\infty^3\right)}, \ldots\right). \text{...”}^{16}$$

Como puede verse en esta parte, Cantor sigue utilizando la intersección de los conjuntos derivados anteriores para obtener un nuevo conjunto derivado, en este caso, un derivado de orden infinito. Aquí también debemos observar que esta intersección, de una cantidad infinita numerable de conjuntos, es diferente del conjunto vacío, no sólo por como se construye la intersección de los conjuntos derivados[17], sino también porque influye de manera crucial el axioma de continuidad. Es principalmente este axioma el que permite que esta intersección no sea vacía, ya que al tener una cantidad infinita numerable de intervalos anidados, siempre se puede encontrar un punto dentro de todos los intervalos debido a la continuidad de los números reales.

Georg Cantor nuevamente hace extensiones de los términos que ya están definidos para poder obtener otros más generales, de hecho, aquí es donde genera sus números transfinitos pero desafortunadamente no se ha percatado de ello, para él sólo eran símbolos infinitos para distinguir diferentes conjuntos derivados. Cantor concluye este artículo de la serie diciendo:

> “...Avanzando consecuentemente se obtienen sucesivamente los siguientes conceptos:
>
> $$P^{(n\infty^\infty)}, P^{\left(\infty^{\infty+1}\right)}, P^{\left(\infty^{\infty+n}\right)}, P^{(\infty^{n\infty})}, P^{\left(\infty^{\infty^n}\right)}, P^{\left(\infty^{\infty^\infty}\right)}, \qquad \text{etc.}$$
>
> Vemos aquí una elaboración dialéctica de conceptos que siempre sigue adelante y mientras permanece necesaria y consecuente, libre de cualquier arbitrariedad en sí.
>
> Para los conjuntos de puntos de la primera especie es, como se deduce de su concepto
>
> $$P^{(\infty)} \equiv O;$$
>
> es notable que también se puede demostrar lo inverso: cualquier conjunto de puntos para el cual existe esta ecuación, es de la primera especie; por lo tanto, los conjuntos de primera especie se caracterizan *completamente* mediante esta ecuación.

[16] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 147.

[17] Es decir, que cada conjunto derivado es diferente del vacío y que cada conjunto derivado se obtiene del anterior.

> Es sencillo construir el ejemplo de un conjunto de puntos de segunda especie para el que $P^{(\infty)}$ consista en un punto p; se toman conjuntos de puntos de la primera especie cuyos números ordinales excedan todo límite, en intervalos que se sucedan, se limiten y que converjan hacia p volviéndose infiniamente pequeños, si el intervalo correspondiente se aproxima a p; de esta forma construyen conjuntamente un ejemplo tal que resuelva a la vez la primera cuestión de sí un intervalo, a lo largo del cual un conjunto de puntos de segunda especie es denso, tiene que pertenecer siempre a éste; podemos ver en este ejemplo que esto no es necesario *de ninguna manera*. Con la misma facilidad se construyen conjuntos de puntos de segunda especie para los cuales $P^{(\infty+n)}$ o $P^{(2\infty)}$ o en general
>
> $$P^{\left(n_0\infty^v+n_1\infty^{v-1}+\cdots+n_v\right)}$$
>
> consisten de un punto p antes requerido.
>
> Todos los conjuntos de tal naturaleza no son densos a lo largo de *ningún* intervalo y además pertenecen a la primera clase; en estas dos relaciones se parecen a los conjuntos de puntos de la primera especie..."[18]

Aquí, Cantor asegura que pueden existir conjuntos derivados de la segunda especie con un único punto, es decir, que no todos los conjuntos derivados de la segunda especie son densos.

En 1882, publica el tercer artículo de la serie en el que se dedica a estudiar los espacios continuos n-dimensionales y para 1883 publica el cuarto artículo. En éste último da la definición de los conjuntos aislados en un espacio continuo n-dimensional, esta definición dice que si la intersección del conjunto dado con el conjunto de sus puntos límite es el conjunto vacío, entonces el conjunto dado es un conjunto aislado.

Teniendo en manos la idea de numerabilidad, los conjuntos aislados y los conjuntos derivados, Cantor estableció varios teoremas para poder saber cuando un conjunto es numerable. De estos teoremas, sólo se enunciará el quinto, ya que para nuestro caso es interesante la redacción del mismo:

[18] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 148.

> "**Teorema V.** *Cualquier conjunto de puntos P de la segunda especie, para el cual $P^{(\alpha)}$ es numerable, es numerable también.*
>
> ... el último teorema se puede formular también de la siguiente manera:
>
> *Si P es un conjunto de puntos no numerable, entonces $P^{(\alpha)}$ tampoco es numerable, tanto si α es un número entero finito, como también si es uno de los símbolos infinitos.*"[19]

Nuevamente hago énfasis en la palabra "símbolo infinito," esto demuestra que Cantor no consideró que estos símbolos fueran números específicos y reales (en el sentido de que existen). Aunque Cantor creó sus números transfinitos en 1880, no fue sino hasta finales de 1882 en que él se percata de su existencia, en ese mismo año publica el quinto de los seis artículos. Los dos últimos trabajos de la serie, son la primera parte[20] (1883) y la segunda parte[21] (1884) del conocido: "*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*" (Fundamentos de una general Teoría de Conjuntos), que como su título lo dice, son los primeros artículos en los que define de manera rigurosa, todas las herramientas básicas de la Teoría de Conjuntos y sus números transfinitos. De hecho en la primera de estas partes, es en la que nos presenta a sus números transfinitos como lo que son en la actualidad.

En los *Grundlagen* Cantor trata de convencer a los matemáticos de esa época, para que acepten el infinito actual, así como también de que sus números transfinitos eran números concretos de significado real. En estos artículos, define el primer principio de generación, el segundo principio de generación y logra establecer las distintas potencias existentes. Aquí es donde da la diferencia entre Cardinal (*Zahl*) y Ordinal (*Anzahl*) y define las operaciones aritméticas transfinitas.

Por último quisiera comparar la manera en que surgen los números transfinitos mediante conjuntos derivados con la rigurosa definición que da Cantor posteriormente a los números transfinitos. Para definir sus nuevos números, Cantor consideró la sucesión de todos los números enteros positivos: (I) $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$que surge de la repetida adición de la unidad con un número

[19] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 160.
[20] Ver Georg Cantor, op. cit., pág 165.
[21] Ver Georg Cantor, op. cit., pág. 210.

que ya está definido, esto es lo que Cantor llamó el primer principio de generación; y además Cantor notó que como es un procedimiento infinito, no existe una cota superior en la sucesión (I), por lo que imaginó un nuevo número ω que expresara la sucesión entera de los números enteros positivos; hago la observación que el conjunto formado por los elementos de la sucesión (I), es lo que Cantor nombró "los números de la primera especie." Haciendo uso nuevamente del primer principio de generación, Cantor obtiene la sucesión $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\nu, \ldots$ en la que nuevamente no hay una cota superior, entonces es posible imaginar un nuevo número 2ω que es el primero que les sigue a todos los números ν y $\omega+\nu$ formados hasta ahora. Aplicando repetidamente el primer principio de generación a 2ω, se obtiene una nueva sucesión $2\omega+1, 2\omega+2, \ldots, 2\omega+\nu, \ldots$.

Puede observarse que en la manera en que se han creado los números $\omega, 2\omega$ no se utiliza el primer principio de generación, Cantor lo llamó el segundo principio de generación, más específicamente, el segundo principio nos dice que si se tiene cualquier sucesión definida infinita numerable de números (que pueden ser enteros positivos o números transfinitos cómo ω), que no posee mayor elemento (o una cota superior), puede crearse un nuevo número que se define como el número mayor que le sigue a todos los números de la sucesión.[22]

Usando los dos principios de generación a la vez, se llega a la sucesión: $3\omega, 3\omega+1, \ldots, 3\omega+\nu, \ldots, \mu\omega, \ldots \mu\omega+\nu, \ldots$que también es infinita, entonces usando el segundo principio de generación se obtiene el siguiente número más grande que todos los anteriores y que se denota con ω^2, al aplicar sucesivamente ambos principios de generación se llega a la noción del número ω^ω y así indefinidamente. Posteriormente Cantor define la totalidad de los números α formados con la ayuda de los dos principios: (II) $\omega, \omega+1, \ldots, \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}^{\omega+\nu}\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \alpha, \ldots$,el conjunto que forma la sucesión (II), es lo que Cantor llamó "los números de la segunda especie." Como (II) es una sucesión infinita que no tiene máximo, se aplica el segundo principio de generación, para definir un nuevo número Ω que es el número que sigue a todos los números de (II). Este número Ω es el primero del conjunto de "los números de la tercera especie (III)."[23]

[22]Cfr. Georg Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers,* 1ª ed. Instituto Politécnico Nacional, México, Introducción, VII; Pág. 52.
[23]Cfr. Georg Cantor, op. cit., Introducción, VII; Pág. 52.

Ahora es posible hacer una comparación. Primero, Cantor llegó a los números transfinitos por la necesidad de tener superíndices de mayor grado como el derivado de orden ∞ de un conjunto de puntos P, es decir P^{∞}; en esta última definición de los números transfinitos Cantor ya sabía que eran números concretos por lo que sólo le puso nombre a la construcción de los mismos y cambió la notación. Por lo tanto el símbolo ∞ es equivalente al número transfinito ω. Ya que ambos representan el límite de la sucesión infinita de los números enteros, aunque para el caso de los conjuntos derivados el número ∞ se utiliza como superíndice no hay diferencia alguna en la manera en que se definen los números transfinitos (salvo la notación), ya que en ambos casos los números subsecuentes se construyen por la adición de la unidad repetidamente y por la creación de nuevos números que representan un límite, lo que equivaldría al uso de los dos principios de generación (aunque en el caso de los conjuntos derivados, los principios no tienen el nombre como tal).

Conclusiones

Para la primera extensión del Teorema de Unicidad, Cantor ideó una simple modificación de la afirmación inicial, manipulando ciertos elementos de la prueba, dentro de una idea matemática embrionaria, que desde entonces creó en su mente y que lo guió eventualmente a su teoría de los números reales, a los números transfinitos y a la Teoría de Conjuntos en sí. Este artículo de 1871 marcó una transición en el pensamiento de Cantor, ya que fue aquí la primera vez que consideró conjuntos de puntos.

Después del artículo de 1872, Cantor observó que la naturaleza del Teorema de Unicidad, estaba más ligada a los puntos relacionados con la línea recta que con las funciones trigonométricas, por lo que comenzó a estudiar las distinciones entre conjuntos infinitos numerables y conjuntos continuos. Este estudio es el que lo llevó a establecer una Teoría de Conjuntos independiente y por lo tanto, en este punto se forma la línea que separa al análisis matemático de la nueva teoría.

Hablando matemáticamente, el mayor problema al que se enfrentó Cantor, fue demostrar que los números reales no son numerables. Tardó un par de años en poder dar con este resultado, pero al mismo tiempo, fue el más importante para poder dar un paso hacia adelante, y así establecer su nueva teoría. Con la idea de numerabilidad y la existencia de conjuntos no numerables, llegó el momento de que Cantor precisara algunas viejas ideas, como la de los conjuntos derivados, que realmente fueron el fundamento para los números transfinitos. Para ello era necesario establecer la base para hacer distinciones entre los $P^{(n)}$ y $P^{(\infty)}$.

Principalmente Cantor se dedicó a estudiar los conjuntos de puntos de la segunda especie y con ello formuló un número de definiciones y teoremas acerca de diferentes tipos de conjuntos, por ejemplo introdujo los conjuntos aislados. En esos momentos, los "símbolos infinitos" eran sólo símbolos; pero sólo fue cuestión de meses para que Cantor cambiara la dirección de su investigación introduciendo los nuevos números transfinitos.

A finales de 1882 terminó de escribir el *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*[1], que fue la última parte de la serie de artículos que comenzó a publicarse en 1879; éste fue el más sorprendente y original, ya que en el *Grundlagen* se presentó a los números transfinitos como una extensión autónoma y sistemática de los números reales. Este último artículo de la serie es el que coloca a Georg Cantor como el fundador de la Teoría de Conjuntos.

Aunque definitivamente una de las grandes cualidades de Georg Cantor fue hacer extensiones de los objetos matemáticos ya existentes, como podemos ver, el aspecto más importante de su habilidad matemática, no fue modificar lemas o detalles para obtener generalizaciones en los teoremas o conceptos, sino más bien la capacidad para crear nuevas formas y conceptos donde existían aproximaciones fallidas.

[1]Ver Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Berlín, 1932, pág. 165.

Apéndice A.

Prueba de que una función $f(x)$ dada por cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, se puede representar en esta forma de una manera única.

Por G. Cantor, Abril de 1870; de la Universidad de Halle.
Traducción al español por Concepción Alarcón con la colaboración especial de Wolfgang Achberger, 2005.

Si una función $f(x)$ de una variable real x está dada mediante una serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{2}b_0 + (a_1 senx + b_1 \cos x) + \cdots + (a_n sennx + b_n \cos nx) + \cdots$$

convergente para cada valor de x, entonces es importante saber, si existen otras series de la misma forma, las cuales también son convergentes para cada valor de x, y representan la función $f(x)$. Esta pregunta, que ha sido sugerida apenas últimamente, no se puede, como se supone comúnmente, decidir de tal forma que se multiplica aquella ecuación por $\cos n(x-t)dx$ y se integra miembro a miembro de $-\pi$ hasta $+\pi$ (con lo cual de hecho para el lado derecho sólo la integral que se deriva del $n^{ésimo}$ miembro no se eliminaría); porque, aparte de que aquí se presupondría la posibilidad de la integración de $f(x)$, la integración de una serie

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots ,$$

en la cual A_n son funciones de una variable x, mediante la integración de sus partes, se puede efectuar sin problemas sólo entonces, cuando el resto que se queda después de la separación de los primeros n miembros, se hace al mismo tiempo infinitamente pequeño para todos los valores de x que están dentro del intervalo de integración. Por lo tanto, cuando se pone

$$f(x) = A_0 + A_1 + ... + A_n + R_n$$

y dada la magnitud ε, debe existir un número entero m con la característica que, para $n \geq m$, R_n es más pequeño respecto a su valor absoluto que ε para todos los valores de x. [Aquí se trata de la así llamada "convergencia uniforme".]

Es que se tiene que tomar el número entero más pequeño m, el cual cumple para un x dado la condición que el valor absoluto de R_n sea más pequeño que ε, si $n \geq m$, por una función no continua de x y ε; si en estas circunstancias se denomina $m(x, \varepsilon)$, entonces no se sabe, si la función $m(x, \varepsilon)$ con un ε dado esté debajo de un límite finito para todos los valores de x; hasta se puede ver fácilmente que, si $f(x)$ tiene una discontinuidad para $x = x_1$, la función $m(x, \varepsilon)$ tiene que tomar valores que sobrepasan cualquier límite que se pueda designar, si, con un ε fijo, x se acerca infinitamente al valor x_1.

De eso se deduce, que la unicidad de la representación de una función mediante una serie trigonométrica convergente para cada valor de x, no se puede averiguar de esta manera.

El tratado de Riemann "Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe; Göttingen, 1867" me llevó a otro camino para alcanzar la misma meta, el cual quiero exponer brevemente aquí.

Primero subrayo que, como es comprobado en mi tratado "Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz", en una serie trigonométrica

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots ,$$

la cual es convergente para todos los valores de x en un intervalo dado (que por cierto puede ser tan pequeño como uno quiera), los coeficientes a_n, b_n se hacen infinitamente pequeños con un n creciente.

Si ahora uno se imagina dos series trigonométricas, las cuales son convergentes para cualquier valor real de x y toman el mismo valor, y por lo tanto representan la misma función $f(x)$, entonces se deduce mediante sustracción la una de la otra una representación convergente del cero para cada valor de x:

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots \tag{1}$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$, $C_n = c_n sennx + d_n \cos nx$ y donde los coeficientes c_n, d_n llegan a ser infinitamente pequeños con un n creciente, según lo dicho ahora mismo. Con Riemann formo de la serie (1) la función:

$$F(x) = C_0 + \tfrac{xx}{2} - C_1 - \cdots - \tfrac{C_n}{nn} - \cdots . \tag{2}$$

Ella es una función de x, continua en la proximidad de cada valor de x[1], la cual según el teorema 1 en el § 8 del tratado mencionado arriba, tiene la característica que para cada valor de x el segundo ["centro"] cociente diferencial

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha\alpha}$$

se acerca al límite cero con un α decreciente.

Si fijamos estos dos datos para la función $F(x)$:

I. Que sea continua en la proximidad de cualquier valor de x,

II. Que el límite de su segundo cociente diferencial sea igual a cero para cada valor de x con un α decreciente,

entonces se puede deducir de eso, que $F(x)$ es una función de primer grado $cx + c\prime$. La siguiente prueba de esto me fue comunicada por el señor Schwarz en Zürich.[2]

Sean cumplidas las condiciones I. y II. para una función $F_1(x)$ de la variable real x dada en un intervalo $(a...b)$, y la primera en la proximidad de cada valor de x en el intervalo, la segunda para cada valor intermedio x [para $a < x < b$], y tomando por i la unidad positiva o negativa, por x cualquier magnitud real, veamos la función

$$\varphi(x) = i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right)\right\} - \tfrac{\chi^2}{2}(x-a)(b-x)\,.$$

De las presuposiciones sobre $F_1(x)$ se deduce, que $\varphi(x)$ es continua en el intervalo $(a...b)$, y que el límite del segundo cociente diferencial de $\varphi(x)$ es igual a χ^2 para cada valor intermedio de x con α decreciendo infinitamente; además $\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0$. Si por eso denominamos

$$\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha) \qquad \text{con} \quad \varphi(x,\alpha)\,,$$

entonces $\varphi(x,\alpha)$ es aproximadamente igual a $\chi^2\alpha^2$ para cada valor intermedio

[1] Para comprender eso, sería suficiente saber que los c_n, d_n estén abajo de un límite señalable, pero la prueba de eso supuestamente requeriría los mismos medios con los cuales se demuestra que $\lim c_n = 0$ y $\lim d_n = 0$.

[2] Esta prueba se basa en lo esencial, en el teorema tratado frecuentemente y comprobado en los cursos del señor Weierstrass:

"Una función continua $\varphi(x)$ dada en un intervalo $(a...b)$ (incluyendo los límites) de la variable real x alcanza su máximo g de los valores que puede asumir, para por lo menos un valor x_0 de la variable, así que $\varphi(x_0) = g$".

Una prueba similar, basándose en lo mismo, para el teorema fundamental del cálculo diferencial efectuó Ossian Bonnet; ésta se encuentra en J. A. Serret, Cours de calcul differentiel et intégral 1, 17-19. Paris 1868.

de x, con α decreciendo infinitamente, o sea positivo y distinto de cero para valores de α suficientemente pequeños. De eso se deduce, que $\varphi(x)$ no es positivo para ningún valor de x dentro del intervalo. Efectivamente, en los límites $\varphi(x) = 0$; si $\varphi(x)$ fuera positivo para un valor intermedio, entonces el máximo de los valores que puede asumir $\varphi(x)$ también sería una magnitud positiva y sería alcanzado para por lo menos un valor intermedio x_0 de x; entonces para valores suficientemente pequeños de α sería

$$\varphi(x_0 + \alpha) - \varphi(x_0) \leq 0, \qquad (x_0 - \alpha) - \varphi(x_0) \leq 0,$$

por lo tanto también $\varphi(x, \alpha) \leq 0$, mientras $\varphi(x, \alpha)$ es positivo para valores de α suficientemente pequeños. Luego para cada valor de x en el intervalo $(a...b)$, para $i = \pm 1$ y para cualquier valor real de χ

$$\varphi(x) \leq 0;$$

si en eso se deja que χ llegue a ser infinitamente pequeño, entonces se deduce:

$$i\left\{F_1(x) - F_1(a) - \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right)\right\} \leq 0 \ \text{ para } i = \pm 1,$$

luego

$$F_1(x) = F_1(a) + \tfrac{x-a}{b-a}\left(F_1(b) - F_1(a)\right).$$

Luego bajo las presuposiciones hechas $F_1(x)$ es una función entera de primer grado de x.

De eso resulta para nuestra función $F(x)$ (porque aquí se puede ampliar el intervalo como se desee) la siguiente forma válida para todos los valores de x: $F(x) = cx + c'$, y por eso se tiene para cada valor de x

$$C_0 \tfrac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \tfrac{C_2}{4} + \cdots + \tfrac{C_n}{nn} + \cdots.$$

Primero se deduce de la periodicidad del lado derecho, que tanto $c = 0$ como también $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$, y por eso se mantiene la ecuación

$$-c' = C_1 + \tfrac{C_2}{4} + \cdots + \tfrac{C_n}{nn} + \cdots. \tag{3}$$

La serie a la derecha es de esta forma, que, con un ε dado, se puede indicar un número entero m, así que, si $n \geq m$, el resto R_n respecto a su valor absoluto es más pequeño que ε *para todos los valores de* x [es decir la serie es "uniformemente convergente"].

Por eso se puede integrar la ecuación (3) después de multiplicarla por $\cos n(x-t)dx$ *miembro por miembro* de $-\pi$ hasta $+\pi$; el resultado es

$$c_n sennt + d_n \cos nt = 0,$$

donde por t se entiende cualquier magnitud real; entonces se tiene: $c_n = 0$, $d_n = 0$, mientras que ya antes se dedujo que $d_0 = 0$.

Luego resulta que una representación del cero convergente para cada valor singular de x mediante una serie trigonométrica (1) no se puede hacer de otra forma mas que cuando los coeficientes d_0, c_n, d_n son todos igual a cero, y se obtiene el teorema:

"Si una función $f(x)$ de una variable real x está dada mediante una serie trigonométrica convergente para cada valor de x, entonces no existe otra serie de la misma forma que también sea convergente para cada valor de x y represente la misma función $f(x)$."

Apéndice B.

Nota al artículo: Prueba de que una función $f(x)$ dada por cada valor real de x mediante una serie trigonométrica, se puede representar en esta forma de una manera única.

Por G. Cantor, 1871; Universidad de Halle.

Traducción al español por Concepción Alarcón con la colaboración especial de Wolfgang Achberger, 2005.

En lo siguiente quiero añadir algunos comentarios al tratado mencionado arriba.

Primero[1], la prueba para la unicidad de la representación de series trigonométricas que intento dar en el lugar mencionado, se simplifica de cierta forma, haciéndola independiente del teorema que postulo y pruebo estrictamente en un trabajo anterior pero que es extraño para el área de este análisis.

Tomando por u algún valor fijo, sustituyase en la ecuación

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots \tag{1}$$

x una vez por $u + x$, la otra vez por $u - x$ y sumense las dos ecuaciones. De esta manera resulta una nueva ecuación:

$$0 = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \cdots \tag{1'}$$

de la cual la validez para cada valor de x es una consecuencia inmediata de la validez ilimitada de (1) la cual fue presupuesta. – Los coeficientes de (1') $e_n = c_n sennu + d_n \cos nu$ sin embargo se vuelven infinitamente pequeños con un n creciente, porque coinciden con los miembros C_n de (1), si en ellos se iguala x con u.

[1] Agradezco un comunicado oral del profesor Kronecker.

Por eso, si las conclusiones, que en el artículo se refieren a la ecuación (1), se aplican sin cambio a (1'), entonces resulta:

$$e_n = c_n sennu + d_n \cos nu = 0,$$

y luego se deduce la desaparición de los coeficientes c_n, d_n a causa de la arbitrariedad del valor u.

El segundo comentario se refiere a una cierta ampliación respecto a la unicidad del teorema. Así como es probado en el mismo artículo, se deja expresar de la siguiente manera:

"Dada una representación del valor cero válida *para cada valor* de x, es decir convergente, mediante una serie trigonométrica (1), entonces los coeficientes c_n, d_n de esta representación son cero."

En esto las presuposiciones se pueden modificar en el sentido que para ciertos valores de x se desiste o de la representación del cero por (1) o de la convergencia de la serie.

Sea $\ldots\ x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ la sucesión infinita de valores de x (aumentando con el índice), para la cual o termina la convergencia de la serie (1) o la parte derecha toma un valor distinto de cero, y los x_v están sujetos a la restricción de existir *solamente* en intervalos finitos y en *número finito*, entonces se deriva del artículo que la función ahí denominada $F(x)$ es igual a una función lineal $k_v x + l_v$ en cada intervalo $(x_v \ldots x_{v+1})$, y sólo resta exponer la identidad de esta función lineal, para poder aplicar en el artículo las otras conclusiones a $F(x)$, las cuales llevan a la desaparición de los coeficientes c_n, d_n.

Esta prueba de la identidad se hace para cada dos funciones vecinas $k_v x + l_v$, $k_{v+1}x + l_{v+1}$ y con eso para todas, mediante el mismo procedimiento que el señor profesor Heine introduce en una cuestión análoga en el tratado "Ueber trigonometrische Reihen", volumen 71, página 353 de esta revista (Crelles Journal), sólo se tiene que tomar en consideración la continuidad de la función $F(x)$ y el segundo teorema de Riemann en su tratado (Riemann: "Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", tratado de la Sociedad Científica de Göttingen, volumen 13) para el valor x_{v+1} de x; se encuentra:

$$F(x_{v+1}) = k_v x_{v+1} + l_v \qquad \text{y}$$

$$\text{lím}\, \tfrac{x_{v+1}(k_{v+1}-k_v)+l_{v+1}-l_v+\alpha(k_{v+1}-k_v)}{\alpha} = 0 \qquad \text{para} \qquad \text{lím}\, \alpha = 0,$$

lo cual solamente es posible si $k_v = k_{v+1}$, y $l_v = l_{v+1}$.

Esta ampliación del teorema de ninguna forma es la última; he logrado una extensión mucho mayor que también se basa en procedimientos estrictos, la cual comunicaré en otra ocasión.

Finalmente me permito cambiar una *expresión* en el trabajo aquí discutido.

Cito ahí en un nota el teorema:

"Una función continua $\varphi(x)$ de variable real x dada en un intervalo $(a \ldots b)$ (incluyendo los límites), alcanza el máximo g de los valores que puede adoptar, para por lo menos un valor x_0 de la variable, así que $\varphi(x_0) = g$."

Entiendo aquí bajo *máximo* no el concepto que normalmente se une a esta palabra (que ya incluye el alcanzar), sino el *límite superior* de los valores de la función $\varphi(x)$; y según eso también sería preferible esta última expresión.

De la expresión de un conjunto de valores *dado* (definido) dentro de un ámbito finito, se deduce que éste siempre tiene un límite superior, o sea un valor g que tiene tal relación con el conjunto de valores, que para cualquier ε positivo existe por lo menos un valor del conjunto que es más grande que $g - \varepsilon$ y más pequeño o igual a g, pero que no existe un valor del conjunto que sea más grande que g.

Si se toma por ejemplo el conjunto de valores que consiste de todos los valores de una función finita y definida $\varphi(x)$ dada en un intervalo $(a \ldots b)$ (incluyendo los límites), entonces este conjunto de valores tiene un límite superior g. Si se añade la condición de la continuidad de $\varphi(x)$ para toda la función, se deduce en lo siguiente que el límite superior g de la función se alcanza, o sea que existe un valor x_0 de x, para el cual $\varphi(x_0) = g$. Eso es el sentido del teorema mencionado, en concordancia con la fuente citada.

Apéndice C.

Extensión de un teorema de la teoría de las series trigonométricas.

Por G. Cantor, 1872; Universidad de Halle.
Traducción al español por Andrés Sestier, Mayo de 1981.

Quisiera yo dar a conocer en este trabajo una extensión del teorema según el cual, una función no puede desarrollarse más que de una sola manera en serie trigonométrica.

En el Journal de Crelle, Tomo 22 pág. 139, intenté demostrar que dos series trigonométricas:

$$\tfrac{1}{2}b_n + \sum(a_n sennx + b_n \cos nx)$$

y

$$\tfrac{1}{2}b'_n + \sum(a'_n sennx + b'_n \cos nx)$$

que para todos los valores de x, convergen y tienen misma suma, tienen los mismos coeficientes; después demostré en una nota referente a este trabajo, que este teorema sigue siendo verdadero si para un número finito de valores de x se renuncia a la convergencia o bien a la igualdad de las sumas de las dos series.

La extensión que tengo en mente aquí, consiste en que para un número infinito de valores de x en el intervalo $(0 \dots 2\pi)$ se puede renunciar a la convergencia o a la concordancia de las sumas de las series sin que el teorema deje de ser verdad.

Pero con ese fin estoy obligado a empezar con algunas explicaciones, o más bien algunas simples indicaciones destinadas a hacer ver las diversas maneras en que pueden comportarse magnitudes numéricas en número finito o infinito; me veo conducido a dar algunas definiciones para abreviar tanto como es posible la exposición del teorema en cuestión cuya demostración se encuentra en el § 3.

§ 1

Los números racionales sirven de fundamento para llegar a la noción más extendida de una magnitud numérica; voy a designarlos bajo el nombre de sistema A, incluyendo el cero.

Se encuentra una primera generalización de la noción de magnitud numérica en el caso en que mediante una ley se ha obtenido una serie infinita de números racionales:

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots \tag{1}$$

construida de tal manera que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n crece, para cualquier número entero positivo m, o en otros términos que con ε (positivo racional) tomado arbitrariamente se tiene un número n_1 tal que $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, si $n \geq n_1$, y si m es un número entero positivo tomado arbitrariamente.

Esta propiedad de la serie (1) la expreso así: "la serie (1) tiene un límite determinado b".

Estas palabras no sirven pues, mas que para enunciar esta propiedad de la serie sin antes expresar otra cosa y así como ligamos la serie (1) con un signo particular b así también hay que asignar diferentes signos $b, b', b'', \ldots$ a diversas series de la misma especie.

Sea una segunda serie:

$$a'_1, a'_2, \ldots a'_n, \ldots \tag{1'}$$

que tenga un límite determinado b'; se encuentra que las dos series (1) y (1') tendrán constantemente una de las tres relaciones mutuamente exclusivas: o bien: 1º. $a_n - a'_n$, se hace infinitamente pequeño a medida que n crece, o bien 2º. $a_n - a'_n$, a partir de un cierto n permanece más grande que una magnitud positiva (racional) ε, o finalmente 3º. $a_n - a'_n$, a partir de un cierto n permanece más pequeño que una magnitud negativa (racional) $-\varepsilon$. En el caso de la primera relación yo escribo: $b = b'$, en el caso de la segunda: $b > b'$ y en el caso de la tercera: $b < b'$.

Asimismo se tiene que si una serie (1) tiene un límite b, no tiene con un número racional a mas que una cualquiera de las tres relaciones siguientes. O bien:

1^{o}. $a_n - a$ se hace infinitamente pequeño al aumentar n o bien: 2^{o}. $a_n - a$, a partir de un cierto n es siempre mayor que una magnitud positiva (racional) ε, o finalmente 3^{o}. $a_n - a$, a partir de un cierto n permanece inferior a una magnitud negativa (racional) $-\varepsilon$.

Para expresar la existencia de estas relaciones escribimos respectivamente:

$$b = a, \qquad b > a, \qquad b < a.$$

De estas definiciones y de las que siguen de inmediato, resulta (y se puede demostrar rigurosamente esta consecuencia), que b, siendo el límite de la serie (1), $b - a_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n crece lo que justifica por consiguiente de manera precisa la designación de "límite de la serie (1)" que se ha dado a b.

Desígnese con B la totalidad de las magnitudes numéricas b.

Por las convenciones precedentes se pueden extender las operaciones elementales efectuadas con números racionales a la unión de los dos sistemas A y B.

Sean en efecto b, b' y b'' tres magnitudes numéricas del sistema B, las fórmulas:

$$b \pm b' = b'', \qquad bb' = b'', \qquad \tfrac{b}{b'} = b''$$

sirven para expresar entre las series correspondientes a los 3 números b, b', b''.

$$a_1, a_2, \ldots$$
$$a'_1, a'_2, \ldots$$
$$a''_1, a''_2, \ldots$$

respectivamente las relaciones:

$$\text{lím}\,(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0,$$
$$\text{lím}\,(a_n a'_n - a''_n) = 0,$$
$$\text{lím}\,\tfrac{a_n}{a'_n} - a''_n = 0.$$

En donde ya no tengo necesidad, por lo anterior, de explicar con mas detalle la significación del signo lím. Se tienen definiciones semejantes para los casos en donde uno o dos de los tres números pertenecen al sistema A.

En general, toda ecuación obtenida por un número finito de operaciones elementales

$$F\left(b, b', \ldots b^{(\rho)}\right) = 0$$

se presentará como expresión de una relación determinada entre las series que dan origen a las magnitudes numéricas

$$b, b', \dots b^{(\rho)}.$$[1]

El sistema A ha dado origen al sistema B, asimismo los dos sistemas B y A reunidos darán origen por el mismo procedimiento a un nuevo sistema C.

Sea en efecto una serie infinita:

$$b_1, b_2, \dots b_n, \dots \tag{2}$$

de números elegidos en los sistemas A y B y que no pertenecen todos al sistema A, estando esta serie constituída de tal forma que $b_{n+m} - b_n$ se hace infinitamente pequeña a medida que n crece, cualquiera que sea m (y esta condición por las definiciones precedentes se puede concebir como algo perfectamente determinado) diré que esta serie tiene un límite determinado c.

Las magnitudes numéricas c constituyen el sistema C.

Las definiciones de la equivalencia, de la desigualdad en más y en menos, y de las operaciones elementales, ya sean entre las magnitudes c, ya sea entre estas magnitudes y las de los sistemas B y A son análogas a las definiciones antes dadas.

En tanto que los sistemas B y A son tales que se puede igualar cada uno de los a a un b, pero no cada uno de los b a uno de los a, se puede por el contrario igualar no sólo cada uno de los b a un c sino también cada c a un b.

Aunque de esta forma puedan considerarse como idénticos los sistemas B y C, en cierta medida, en la teoría que aquí expongo (y según la cual la magnitud numérica no teniendo en un principio en sí misma en general ningún objeto, no aparece sino como elemento de teoremas que tienen cierta objetividad, por ejemplo de este teorema de que la magnitud numérica sirve de límite a la serie correspondiente), es esencial, digo, mantener la distinción abstracta entre los dos sistemas B y C; así como la equivalencia de dos magnitudes numéricas b y b' tomadas del sistema B no trae consigo su identidad, sino que expresa solamente una relación determinada entre las series a las cuales se refieren.

El sistema C y los que le preceden, producen de manera análoga un sistema D, estos a su vez otro sistema E y así sucesivamente; mediante λ de estas operaciones (considerando la operación por la cual se pasó de A a B como la primera) se llega a un sistema L de magnitudes numéricas.

[1] Cuando se dice, por ejemplo, que una ecuación de grado μ con coeficientes enteros: $f(x) = 0$, tiene una raíz real ω, esto significa que se tiene una serie $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ de misma naturaleza que la serie (1) y que tiene como límite el signo ω, y que además goza de la propiedad $\lim f(a_n) = 0$.

Si se recuerda la sucesión de las definiciones dadas para la equivalencia y la desigualdad en más o en menos de estas diferentes magnitudes numéricas y para las operaciones elementales que permiten pasar de un sistema al otro, tendrá lugar la misma relación con los que preceden, exceptuando el sistema A, de manera que podrá siempre igualarse una magnitud numérica l a una magnitud numérica $k, i, \ldots c, b$, y recíprocamente.

A igualdades de esta especie se pueden reducir los resultados del análisis (exceptuando algunos casos conocidos), aún cuando (aquí sólo lo indico en atención a estas excepciones) la noción del número por muy desarrollada que esté aquí, trae consigo el principio de una extensión necesaria en ella misma y absolutamente infinita.

Parece legítimo, dada una magnitud numérica, en el sistema L, utilizar esta expresión: es una magnitud numérica, un valor, o un límite de $\lambda^{ésima}$ especie; de donde se ve que empleo en general las expresiones magnitud numérica, valor y límite en el mismo sentido.

Una ecuación $F\left(l, l', \ldots l^{(\rho)}\right) = 0$ formada por los números $l, l', \ldots l^{(\rho)}$ mediante un número finito de operaciones elementales aparece precisamente en la teoría en cuestión, como la expresión de una relación determinada entre $\rho + 1$ series λ veces infinitas de números racionales; estas series son producidas por las series simplemente infinitas que definen en primer lugar las magnitudes $l, l', \ldots l^{(\rho)}$; se les obtiene reemplazando en las primeras los elementos por las series que los definen y tratando de la misma manera las series así obtenidas que en realidad serán doblemente infinitas y continuando este proceso hasta que no tenga uno frente a sí más que números racionales.

En otra circunstancia volveré con más detalle sobre todas estas relaciones. Tampoco es aquí donde deba explicarse cómo las convenciones y las operaciones de las que he hablado en este párrafo, pueden de hecho servir en el análisis infinitesimal.

En lo que sigue al exponer la relación de las magnitudes numéricas con la geometría de la línea recta, me limitaré casi exclusivamente a los teoremas necesarios, de donde se puede, si no me equivoco, deducir el resto por medio de una demostración puramente lógica. Para compararlo con los §§ 1 y 2 señalo el libro 10 de los Elementos de Euclides; que puede servir de punto de comparación en esta materia.

§ 2.

Los puntos de una línea recta están determinados cuando tomando como base una unidad de medida, se indican sus distancias, abscisas, desde un punto fijo 0 de la línea recta con el signo + o −, según que el punto en cuestión se encuentre en la parte positiva o negativa (fijada de antemano) de la recta a partir de 0.

Si esta distancia tiene un cociente racional con la unidad de medida, se le expresa por una magnitud numérica del sistema A; en el caso contrario si el punto es conocido mediante una construcción, siempre se puede imaginar una serie:

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots \tag{1}$$

que realiza las condiciones enunciadas en el § 1, y que tiene con la distancia en cuestión una relación tal que los puntos de la recta a los que se refieren las distancias $a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$, se aproximan en el infinito al punto por determinar, a medida que aumenta n.

Lo que expresamos diciendo: la distancia del punto por determinar al punto 0 es igual a b cuando b es la magnitud numérica correspondiente a la serie (1).

Se demuestra a continuación que las condiciones de equivalencia y de desigualdad en más o en menos de las distancias conocidas, están en concordancia con las condiciones de equivalencia y de desigualdad en más y en menos (definidas en el § 1), de las magnitudes numéricas correspondientes, que representan estas distancias.

Ahora se sigue sin dificultad que las magnitudes numéricas de los sistemas $C, D \dots$ también son capaces de determinar distancias conocidas. Pero para acabar de reportar el lazo que observamos entre los sistemas de las magnitudes numéricas definidas en el § 1 y la geometría de la línea recta hay todavía que agregar un axioma el cual enunciamos simplemente como: A cada magnitud numérica pertenece también recíprocamente un punto determinado de la recta cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica en el sentido expuesto en este §.[2]

[2] A cada magnitud numérica pertenece un punto determinado, pero a cada punto se reportan como coordenadas, en el sentido señalado, una cantidad innumerable de magnitudes numéricas iguales; porque como ya se dió a entender anteriormente, de los fundamentos puramente lógicos, se sigue que puntos distintos no pueden responder a magnitudes numéricas iguales, y que uno y el mismo punto se puede reportar a magnitudes numéricas desiguales como coordenadas.

LLamo a este teorema un axioma porque está en su naturaleza el que no pueda ser demostrado de manera general.

Este teorema también sirve para dar como suplemento una cierta objetividad a las magnitudes numéricas de las que sin embargo son completamente independientes.

De lo que precede, considero un punto de la recta como determinado cuando su distancia desde 0 precedida del signo conveniente está dada como magnitud numérica, valor o límite de $\lambda^{ésima}$ especie.

Entremos ahora de lleno en nuestro tema y consideremos las relaciones que se presentan, dadas ciertas magnitudes numéricas en número finito o infinito.

De lo que precede se pueden considerar las diferentes magnitudes numéricas como correspondientes una por una a los diferentes puntos de una línea recta. Para mayor claridad y sin que sea esencial, en lo que sigue vamos a usar este modo de representación y cuando hablemos de puntos siempre tendremos en mente los valores para los cuales se les obtiene.

Para mayor brevedad, llamo sistema de valores a un número dado finito o infinito, de magnitudes numéricas y sistema de puntos a un número dado finito o infinito de puntos de una recta. Lo que se dirá en lo sucesivo de los sistemas de puntos se puede aplicar inmediatamente por lo dicho, a los sistemas de valores.

Dado en un intervalo finito un sistema de puntos, cabe en general considerar un segundo sistema de puntos deducido del primero de cierta manera, y un tercero deducido del segundo de la misma manera, etc.; es necesario estudiarlos todos si se quiere concebir la naturaleza del primero.

Para definir estos nuevos sistemas de puntos, definamos primero la noción del: punto límite de un sistema de puntos.

Por la frase punto límite de un sistema de puntos P, quiero decir un punto de la recta tal que en su vecindad haya una infinidad de puntos del sistema P; puede ocurrir por otra parte que el punto límite pertenezca a este sistema. Y llamo vecindad de un punto todo intervalo en el cual este punto esté contenido. Según esto es fácil demostrar que un sistema compuesto por un número infinito de puntos tiene siempre por lo menos un punto límite. Llamamos punto aislado de P todo punto que al pertenecer a P no sea al mismo tiempo punto límite de P.

De aquí que sea condición determinada de todo punto de la recta respecto a un sistema dado P, ser o no ser un punto límite de este sistema y se tiene así también definido al mismo tiempo que el sistema P, el sistema de sus puntos límite que yo designo mediante P' y que llamo el primer sistema derivado de P.

Si el sistema P' no está compuesto por un número finito de puntos, se puede deducir de él por el mismo procedimiento otro sistema P'', que llamo el segundo sistema derivado de P. Por medio de ν operaciones análogas se llega a la noción del $\nu^{\acute{e}simo}$ sistema $P^{(\nu)}$ derivado de P.

Si por ejemplo el sistema P se compone de todos los puntos de la recta cuyas abscisas son racionales y comprendidas entre 0 y 1 (ya sea que se incluyan o no los límites), el sistema derivado P' se va a componer de todos los puntos del intervalo $(0 \ldots 1)$, comprendidos los límites 0 y 1. Los sistemas siguientes $P'', P''', \ldots$ no difieren de P'. O bien, si el sistema P *está* compuesto por los puntos cuyas abscisas son respectivamente

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots \tfrac{1}{n}, \cdots ,$$

el sistema P' se va a componer del único punto 0 y no dará origen él mismo por deducción a ningún otro.

Puede ocurrir y este es el caso que nos interesa que después de ν operaciones, el sistema $P^{(\nu)}$ se componga de un número finito de puntos y por consiguiente él mismo no dé origen, por deducción, a ningún otro sistema; en este caso el sistema primitivo P diremos que es de la $\nu^{\acute{e}sima}$ especie; y de aquí se sigue que $P'', P''', \ldots$ son entonces de la $\nu - 1^{\acute{e}sima}$ especie, de la $\nu - 2^{\acute{e}sima} \ldots$

En esta teoría, el conjunto de todos los sistemas de especie determinada, es pues considerado como un género particular en el conjunto de todos los sistemas de puntos imaginables, y los sistemas de puntos que hemos llamado de $\nu^{\acute{e}sima}$ especie, forman una especie particular en este género.

Un sólo punto ofrece ya un ejemplo de un sistema de puntos de $\nu^{\acute{e}sima}$ especie, si se da su abscisa como magnitud numérica de $\nu^{\acute{e}sima}$ especie, satisfaciendo a ciertas condiciones fáciles de establecer. Si en efecto se descompone entonces esta magnitud numérica para obtener los términos de $\nu - 1^{\acute{e}sima}$ especie de la serie que le corresponde, si se descomponen estos miembros a su vez para llegar a los términos (de especie $\nu - 2^{\acute{e}sima}$), que los constituyen y así sucesivamente se acaba por tener un número infinito de números racionales; y si se representa el sistema de puntos correspondiente a estos números, será de especie ν[3].

[3]Señalo explícitamente que no es este siempre el caso. En general, el sistema de puntos así generado por una magnitud numérica de especie ν puede ser de especie inferior o superior a la $\nu^{\acute{e}sima}$ o no tener especie determinada.

§ 3.

Teorema. Si una ecuación que tiene la forma:

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots \qquad (1)$$

donde $C_0 = \frac{1}{2}d_0; C_n = c_n sen\, nx + d_n \cos nx$, se satisface para todos los valores de x con la excepción de aquéllos que corresponden a los puntos de un sistema de puntos P de $\nu^{ésima}$ especie dado en el intervalo $(0 \ldots 2\pi)$, donde ν designa un número entero tan grande como se quiera, afirmo que se tendrá:

$$d_0 = 0, \qquad c_n = d_n = 0.$$

Demostración. En esta demostración como se verá en lo sucesivo al hablar de P se tiene en mente no solamente el sistema dado de $\nu^{ésima}$ especie de los puntos excepcionales en el intervalo $(0 \ldots 2\pi)$, sino también el sistema producido sobre la línea infinita entera por repetición periódica.

Ahora consideremos la función:

$$F(x) = C_0 \tfrac{xx}{2} - C_1 - \tfrac{C_2}{4} - \cdots - \tfrac{C_n}{nn} - \cdots .$$

Resulta, de la naturaleza de un sistema P de $\nu^{ésima}$ especie, que debe haber un intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ donde no se encuentra ningún punto de este sistema; para todos los valores de x comprendidos en este intervalo se tendrá pues a causa de la convergencia de nuestra serie (1) que ha sido supuesta:

$$\text{lím}(c_n sennx + d_n \cos nx) = 0,$$

por consiguiente según un teorema conocido (v. 4^e vol. de Annalen math.)

$$\text{lím}\, c_n = 0 \qquad \text{lím}\, d_n = 0.$$

La función $F(x)$ goza de las siguientes propiedades (ver RIEMANN, “*Über die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*”, § 8):

1º Es continua para todos esos valores de x.

2º $\text{lím} \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, si $\text{lím}\, \alpha = 0$, para todos los valores de x, exceptuados los que corresponden a los puntos del sistema P.

3º Se tiene $\text{lím} \frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha} = 0$, si $\text{lím}\, \alpha = 0$, para todos los valores de x sin excepción.

Voy a mostrar que $F(x) = cx + c'$. Para ello, considero primeramente un cualquier intervalo $(p \ldots q)$ donde no hay mas que un número finito de puntos del sistema P; sean $x_0, x_1, \dots x_n$ estos puntos escritos según su orden de sucesión.

Digo que $F(x)$ es lineal en el intervalo $(p \dots q)$ pues $F(x)$, a causa de las propiedades 1 y 2 es función lineal en cada uno de los intervalos obtenidos al dividir $(p \dots q)$ por los puntos $x_0, x_1, \dots x_n$; como en efecto no hay puntos excepcionales en ninguno de esos intervalos, las conclusiones aplicadas en la memoria (Journal de Borchardt, t. 72, p. 159) tienen aquí toda su fuerza; por lo tanto no queda sino demostrar la identidad de esas funciones lineales.

Voy a hacerlo para dos funciones vecinas y las elijo en los dos intervalos $(x_0 \dots x_1)$ y $(x_1 \dots x_2)$.

Sea pues en $(x_0 \dots x_1)$, $F(x) = kx + l$.

En $(x_1 \dots x_2)$ sea $F(x) = k'x + l'$.

A causa de 1º se tiene $F(x_1) = kx_1 + l$; y para valores suficientemente pequeños de α:

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l'; \qquad F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l.$$

Se tiene así como consecuencia de la condición 3º:

$$\lim \tfrac{(k'-k)x_1 + l' - l + \alpha(k'-k)}{\alpha} = 0, \qquad \text{para } \lim \alpha = 0,$$

lo cual no es posible más que si:

$$k = k', \qquad l = l'.$$

Resumiendo, podemos enunciar el resultado siguiente:

(A) "Sea $(p \dots q)$ un intervalo cualquiera en el que no hay mas que un número finito de puntos del sistema P; $F(x)$ será lineal en este intervalo".

Considero a continuación un intervalo cualquiera $(p' \dots q')$ que no contiene más que un número finito de puntos $x'_0, x'_1, \dots x'_n$ del primer sistema derivado P'; -y digo en primer lugar que en cada uno de los intervalos parciales obtenidos al dividir $(p \dots q)$ mediante los puntos $x'_0, x'_1, \dots$, por ejemplo en $(x'_0 \dots x'_1)$, la función $F(x)$ es lineal.

Pues cada uno de estos intervalos parciales contiene, es verdad, en general un número infinito de puntos de P, de tal suerte que el resultado (A) no se le puede aplicar inmediatamente; pero cada intervalo $(s \dots t)$ comprendido entre los límites de $(x'_0 \dots x'_1)$ no encierra sino un número finito de puntos de P. (Porque de otra manera habría todavía entre x'_0 y x'_1 otros puntos del sistema P') y en consecuencia la función es lineal en $(s \dots t)$ a causa de (A). Pero como se puede acercar a voluntad los puntos extremos s y t de los puntos x'_0 y x'_1, se concluye sin más que la función continua $F(x)$ es también lineal en $(x'_0 \dots x'_1)$.

Después de haberlo demostrado para cada uno de los intervalos parciales $(p' \dots q')$ se obtiene el resultado siguiente por los mismos raciocinios que los que condujeron al resultado (A):

(A') "Sea $(p' \dots q')$ un intervalo cualquiera que sólo encierra un número finito de puntos del sistema P', $F(x)$ es lineal en este intervalo."

La demostración se lleva a cabo de la misma manera. Pues habiendo establecido que $F(x)$ es una función lineal en un intervalo cualquiera $\left(p^{(k)} \dots q^{(k)}\right)$, que no contiene más que un número finito de puntos del $k^{ésimo}$ sistema $P^{(k)}$, derivado de P, resulta como en el paso de (A) a (A'), que $F(x)$ es también función lineal en un intervalo cualquiera $\left(p^{(k+1)} \dots q^{(k+1)}\right)$, que no encierra más que un número finito de puntos del $(k+1)^{ésimo}$ sistema $P^{(k+1)}$.

Así concluímos mediante un número finito de deducciones sucesivas que $F(x)$ es lineal en todo intervalo que no contenga más que un número finito de puntos del sistema $P^{(\nu)}$. Pero el sistema P es de especie $\nu^{ésima}$, por hipótesis, y entonces un intervalo $(a \dots b)$ tomado arbitrariamente en la recta no contendrá más que un número finito de puntos de $P^{(\nu)}$. $F(x)$ es pues lineal en todo intervalo $(a \dots b)$ tomado arbitrariamente, y de aquí se sigue que, como se ve fácilmente, que $F(x)$ toma la forma: $F(x) = cx + c'$ para todos los valores de x. Habiendo puesto lo anterior en evidencia, la demostración se prosigue como en el trabajo antes citado dos veces, desde el momento en que se ha establecido la forma lineal.

También se puede enunciar el teorema que hemos demostrado aquí, de la manera siguiente:

"Una función discontinua $f(x)$, distinta de cero o indeterminada para todos los valores de x que corresponden a un sistema de puntos P de $\nu^{ésima}$ especie dado en el intervalo $(0 \dots 2\pi)$, pero igual a cero para todos los demás valores de x, no se puede representar por medio de una serie trigonométrica."

Apéndice D.

Sobre una propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales.

Por G. Cantor, 1874; de la Universidad de Halle.
Traducción al español por Andrés Sestier, Mayo de 1981.

Se llama, en general, *número algebraico real*, un número real ω que es raíz de una ecuación no idéntica de la forma

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$

donde $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ son números enteros; podemos suponer que los números n y a_0, son positivos, que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ no tienen divisor común y que la ecuación (1) es irreducible; estas suposiciones dan como resultado por los teoremas fundamentales de la aritmética y del álgebra, que si la ecuación (1) admite como raíz un número algebraico real determinado, es una ecuación enteramente determinada; recíprocamente a una ecuación de la forma (1) corresponden cuando más tantos números algebraicos reales, raíces de esta ecuación como unidades hay en el grado n.Los números algebraicos reales constituyen en su totalidad un sistema de números que vamos a denotar con (ω); así como resulta a partir de consideraciones elementales, este sistema (ω) de números es de tal naturaleza que existe una infinidad de números de (ω) cuya diferencia respecto a un número α cualquiera, es menor que una cantidad dada, por pequeña que sea. Esta observación hace más sorprendente a primera vista la proposición que sigue: *es posible hacer corresponder uno a uno los números del sistema* (ω), a los números ν que pertenecen a la serie de los enteros positivos, sucesión que será designada mediante (ν), de manera tal que a cada número algebraico real ω responda un número entero positivo determinado ν, y que recíprocamente a cada número entero positivo ν responda un número real algebraico ω completamente determinado; en otros términos, es posible imaginar los números del sistema (ω) dispuestos según alguna ley en una sucesión infinita

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{2}$$

en la cual figuran todos los números de la categoría (ω), cada uno de ellos se encuentra en la sucesión (2) en un lugar determinado indicado por el índice correspondiente. Una vez que se ha encontrado una ley que permita disponer de esta manera los números de (ω), se deducirán de esta, otras maneras, por modificaciones que se podrán elegir a voluntad; nos bastará pues indicar, como lo hacemos en el § 1, el modo de clasificación que parece basado sobre el más pequeño número de consideraciones.

Para dar una ampliación de esta propiedad del sistema de todos los números algebraicos reales, agrego al §1 el § 2 en el cual muestro que cuando se considera una sucesión dada bajo la forma (2), formada por números reales, se puede determinar en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, dado de antemano, números η no contenidos en esta sucesión (2).

Combinando las proposiciones de los §§ 1 y 2, se obtiene así una nueva demostración del teorema siguiente demostrado por primera vez por LIOUVILLE (Journ. de Math. red. p. Liouville primera serie T. XVI, 1851): en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano existe una infinidad de números trascendentes, es decir, números que no son algebraicos reales. Además el teorema del § 2 da la razón por la cual no se puede hacer corresponder uno a uno a los números enteros de la serie (ν) con números reales que forman un sistema continuo de números, es decir, por ejemplo, todos los números reales que son ≥ 0 y ≤ 1. He llegado así a encontrar de manera neta la diferencia esencial que hay entre un sistema continuo de números y un sistema de números de la misma especie que la totalidad de los números algebraicos reales.

§ 1.

Volvamos a la ecuación (1) a la cual satisface un número algebraico real ω y que de acuerdo con los supuestos que se hicieron antes, es una ecuación enteramente determinada; llamemos *altura* del número ω la suma de los valores absolutos de los coeficientes aumentada con el número $n-1$, siendo $n =$ grado de la ecuación; designando esta altura con N y aplicando una notación conocida para designar los valores absolutos de los números, se tiene en consecuencia,

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|. \tag{3}$$

Esta altura N es por consiguiente, para cada número algebraico real, un número entero positivo determinado y recíprocamente a un número entero positivo dado N sólo corresponden un número limitado de números algebraicos reales que tienen altura N; sea $\varphi(N)$ este número se tendrá por ejemplo, $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 4$. Los números del sistema (ω), es decir, todos los números algebraicos reales, pueden entonces disponerse en el orden siguiente: se tomará como primer número ω_1, el único número de altura $N = 1$; se escribirá consecutivamente por orden de magnitudes crecientes los 2 números algebraicos reales de altura $N = 2$ y se les designará con ω_2, ω_3; después, siguiendo a éstos y por orden de magnitudes crecientes, se escribirán los cuatro números de altura $N = 3$; de manera general una vez que se hayan así contado y clasificado los números de la categoría (ω) hasta una altura determinada $N = N_1$, se dispondrán seguidamente y por orden de magnitudes crecientes los números reales algebraicos de altura $N = N_1 + 1$. Así se obtiene el sistema de todos los números algebraicos reales bajo la forma:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots,$$

y se puede reportándose a esta clasificación, hablar del $\nu^{ésimo}$ número algebraico real, sin omitir ningún número del sistema (ω).

§ 2.

Cuando se tiene una sucesión infinita de números reales diferentes entre sí, que se suceden de acuerdo con una ley determinada cualquiera

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu, \ldots \tag{4}$$

se puede en cada intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ dado de antemano determinar un nuevo número η que no se encuentra en la sucesión (4); por consiguiente existe una infinidad de números tales. A continuación la demostración de este teorema.

Vamos a partir del intervalo dado de antemano $(\alpha \ldots \beta)$ y sea $\alpha < \beta$; designemos con α', β' los dos primeros números de la sucesión (4) distintos entre sí, que son distintos de α, β y que se encuentran en este intervalo, y sea $\alpha' < \beta'$; designemos asimismo con α'', β'', los dos primeros números de nuestra sucesión distintos entre sí y que se encuentran en el intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$ y sea $\alpha'' < \beta''$; de acuerdo con esta misma ley, formemos un intervalo siguiente $(\alpha''' \ldots \beta''')$ y así sucesivamente. Según esta definición los números $\alpha', \alpha'', \ldots$ son números determinados $\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots \mu_{k_\nu}$ de nuestra sucesión (4) cuyos índices k crecen constantemente y lo mismo tiene lugar para los números $\beta', \beta'', \ldots$; además, los números $\alpha', \alpha'', \ldots$ son magnitudes crecientes, los números $\beta', \beta'', \ldots$ son magnitudes decrecientes; cada uno de los intervalos $(\alpha \ldots \beta), (\alpha' \ldots \beta'), (\alpha'' \ldots \beta''), \ldots$ comprende a todos los que le siguen. Entonces no pueden concebirse más que dos casos.

O bien el número de intervalos que pueden formarse así es finito; sea $\left(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)}\right)$ el último de ellos; como en ese intervalo se encuentra un número de la sucesión (4), se puede tomar en este intervalo un número η que no pertenece a la sucesión (4) y el teorema está así demostrado en este caso.

O *bien* el número de los intervalos así formados es infinito; entonces como los números $\alpha', \alpha'', \ldots$ crecen constantemente sin crecer al infinito tienen un cierto límite α^∞; así también los números $\beta', \beta'', \ldots$, que decrecen constantemente tienen un cierto límite β^∞. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (lo que siempre se presentará aplicando este método al sistema (ω) de los números algebraicos reales), fácilmente se asegura uno, volviendo a la definición de los intervalos, que el número
$\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ no puede estar comprendido en nuestra sucesión; porque si este número estuviese comprendido en nuestra sucesión se tendría $\eta = \mu_p$, siendo μ_p un índice determinado; pero esto no es posible pues μ_p no está en el intervalo $\left(\alpha^{(p)} \ldots \beta^{(p)}\right)$, en tanto que el número η está en él según su definición. Si por el contrario $\alpha^\infty < \beta^\infty$, todo número η, comprendido en el intervalo $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ o igual a uno de sus límites llena la condición requerida de no pertenecer a la sucesión (4).

Los teoremas que acabamos de demostrar pueden ser generalizados de diferentes maneras; aquí no indicaremos más que la proposición siguiente: "sea $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_\nu, \ldots$ una sucesión finita o infinita de números linealmente independientes, es decir, de números tales que no existe entre ellos ninguna ecuación de la forma $a_1\upsilon_1 + a_2\upsilon_2 + \ldots + a_n\upsilon_n = 0$, siendo los coeficientes $a_1, a_2, \ldots a_n$ enteros no todos nulos a la vez; podemos concebir el sistema (Ω) de todos los números Ω representables por funciones racionales de coeficientes enteros de los números dados $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_\nu, \ldots$; entonces, en todo intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, hay una infinidad de números que no están contenidos en el sistema (Ω)."

En efecto con ayuda de consideraciones análogas a las que se emplearon en el § 1, se ve que los números de la categoría (Ω) pueden disponerse en una sucesión de la forma

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_\nu, \ldots,$$

de donde resulta el teorema en cuestión según la proposición demostrada.

M.B. MININGERADE ha demostrado por una reducción a los principios de GALOIS, un caso muy particular del teorema que acabamos de indicar, a saber el caso en el que los números $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots \upsilon_\nu$, son en número finito, y en el cual el grado de las funciones racionales que sirven para formar los números de la categoría (Ω) está dado de antemano. (Ver Math. Annalen de CLEBSCH y NEUMANN, Tomo III pág. 497.)

Apéndice E

Sobre series trigonométricas.

(por el Sr. E. Heine en Halle a. S.)

Traducción al español por Concepción Alarcón con la colaboración especial de Javier Castañón.

§. 1. Hasta hace poco tiempo, se creía que la integral de una serie convergente, cuyos miembros siguen siendo finitos dentro de límites de integración finitos, era igual a la suma de las integrales de cada uno de los miembros, hasta que el Sr. *Weierstrass* hizo notar que la demostración de este teorema requiere que la serie no solamente converja en los límites de integración, sino que también converja en un mismo grado[1]. Pero observemos el teorema:

Dada una función finita $f(x)$ entre $x = -\pi$ y $x = \pi$ ésta se puede desarrollar sólo de una manera en una serie trigonométrica de la forma

$$(\alpha.) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 sen x) + (a_2 \cos 2x + b_2 sen 2x) + \cdots$$

volviéndose nula, y de ahí que a través los trabajos de *Dirichlet*, de *Lipschitz* y de *Riemann* solamente se haya comprobado, que una función de x en un número de casos de naturaleza muy general se puede desarrollar en una serie de la forma $(\alpha.)$, cuyos coeficientes son conocidos, pero *no de cuántas maneras puede darse el desarrollo.*

La importancia que correspondía hasta hace poco a la representación de una función por medio de una serie trigonométrica, se basaba en su mayor parte en la unidad del desarrollo, es decir, en la certeza de encontrar la misma serie, y también en qué manera se puede transformar la función en

[1]En la presente publicación también el Sr. *Thomé* en Berlín menciona este teorema como celebre. Cfr.: Sobre el desarrollo de fracciones continuas de la función de *Gauss* $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ T. 66, P. 334.

la serie. He intentado, por lo tanto, cambiar el teorema ya mencionado por otro que restaura la unidad del desarrollo, y que es suficiente para todo tipo de aplicaciones, por ejemplo para problemas de física.

Una sencilla reflexión (compárese la conclusión del §. 2.) muestra que una serie (α.), que sea igual a una función *discontinua*, no puede converger en un mismo grado, incluso si permanece finita; sin embargo aún no se sabe que, o mejor dicho, si una serie que representa una función continua tenga que converger en un mismo grado, lo cual se ha aceptado sin ninguna clase de reparo. Este asunto tampoco se esclarece con lo siguiente: *No se sabe hasta hoy*[2] *ni siquiera aún con certeza, si en realidad es posible representar una función continua dada por medio de una serie trigonométrica convergente en mismo grado.* Acerca de esto, así como acerca de la cuestión similar para el caso de otras funciones que permanecen finitas, el siguiente teorema proporciona una explicación, para cuya demostración (compárese el apéndice) se encuentran los elementos esenciales en el famoso trabajo de *Dirichlet* sobre las series de *Fourier* en el repertorio Doves[3]:

I. Teorema. *La serie de Fourier para una función finita* $f(x)$, que *posee un número finito de máximos y de mínimos,* es decir, aquella serie totalmente determinada por la forma (α.), en la cual

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \qquad \pi b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) senmx dx,$$

converge en mismo grado, en cuanto $f(x)$ *sea continua de* $-\pi$ *hasta* $+\pi$ (*ambos incluidos*) *y* $f(\pi) = f(-\pi)$; *en el resto de los casos solamente es convergente, en general, en un mismo grado.*

La expresión "*en general*" se utiliza aquí de la manera que se verá a continuación, si la excepción se refiere a *un número finito de puntos.* Estos lugares de excepción en el teorema antedicho son, por cierto, fáciles de indicar: son los alrededores de los puntos de discontinuidad, - en tanto que las discontinuidades en estos puntos no puedan ser eliminadas alterando la función en ellos, - y que además $x = \pm\pi$, si no $f(\pi) = f(-\pi)$.

Gracias a este teorema ha sido preparado el camino por el cual se puede llegar desde el teorema no demostrado a uno que sea seguro. Y esto se logra inmediatamente, si uno agrega a las palabras finales de éste la condición "que

[2] Los dos siguientes teoremas y el contenido del §. 6 se los he comunicado al Sr. *Thomae*, quien desea utilizar mis investigaciones en un trabajo que trata sobre las Θ-funciones de *Jacobi*, y que ya se encuentra en la imprenta.

[3] T. I, P. 152-174: Sobre la representación de funciones completamente arbitrarias por medio de series de Senos y Cosenos.

converge en un mismo grado"; sin embargo quedaría muy ceñido, porque pierde su significado si no se trata justamente de una función continua, para la que además $f(\pi) = f(-\pi)$, porque, como se observó antes, en los otros casos no existe un desarrollo único convergente en un mismo grado. Cambiaré este teorema por el siguiente:

II. Teorema. *Una función $f(x)$ continua en general, no necesariamente finita, se puede desarrollar sólo de una manera en una serie trigonométrica de la forma* (α.), *si la serie está sujeta a la condición de converger en general en un mismo grado. La serie representa a la función en general desde $-\pi$ hasta $+\pi$.*

La conclusión de este teorema todavía requiere una explicación: si se desarrolla una función finita dada en una serie de *Fourier*, entonces se debe descartar que la serie represente exactamente a la función dada; en los lugares de discontinuidad ésta da, como es sabido, cierto valor medio. La pregunta siguiente ahora sería, si aquella función que es *exactamente* igual a la serie de *Fourier* también puede ser representada *exactamente* por otra serie trigonométrica de la forma (α.). Gracias al Sr. *Cantor*[4] en Halle, a quien hice público con mis investigaciones, me vi motivado a extenderla al caso, en el que ya no se exige una concordancia en los puntos de discontinuidad[5]. El segundo teorema nos da el resultado, si se renuncia a la concordancia en éstos y en cualesquiera otros puntos en número finito; nos dice, no obstante, que la serie esté determinada, ésta concuerda con el desarrollo de *Fourier*, si la misma existe para la función.

Es evidente que el segundo teorema también se puede poner de la forma siguiente, en la que deberá ser demostrado:

III. Teorema. *Si una serie trigonométrica* (α.) *desde $-\pi$ hasta $+\pi$ converge en general en un mismo grado y representa generalmente al cero,* lo cual no presupone que tenga un valor finito ahí donde no desaparece, *entonces todos los coeficientes a* y *b deben desaparecer, y por lo tanto la serie representa al cero en todas partes.*

---

[4] El mismo hace notar que el término de convergencia en un mismo grado aparace en una "Nota sobre una característica de las series que representan funciones discontinuas" del Sr. *Seidel*, en las Memorias de la Academia de Munich de 1948.

[5] Este caso no se puede considerar más que como resuelto por el trabajo de *Riemann* "Sobre la representación de una función por medio de una serie trigonométrica" §. 3, P. 15, No. 3, cuya comunicación se la debemos al Sr. *Dedekind*, ya que justo el teorema en el que se basa la determinación de los coeficientes, se pone aquí en duda.

§. 2. Antes de la demostración del teorema III. adelanto unas *definiciones*: Una serie de elementos

$$g_1, g_2, g_3, \cdots g_m,$$

es *convergente*, cuando a partir de un valor n asignable, para valores de n siempre crecientes, la suma

$$g_n + g_{n+1} + g_{n+2} + \cdots + g_{n+m}$$

decrece bajo cualquier cantidad ε dada y diferente de cero, cuyo valor positivo se puede dar también a m.

Si los miembros g dependen de una variable x, que puede recorrer todos los valores desde α hasta β (incluidos α, β), entonces la serie dentro de estos límites se llama *convergente en mismo grado, si el criterio de convergencia para cada ε dada se satisface por medio de la misma x, mientras n recorre todos los valores*; para n entonces se tiene que tomar otro valor si se da otra ε.

Llamo a una serie *convergente en mismo grado* de α hasta β *en general*, es decir con excepción de los alrededores de ciertos puntos, a la que cumple el criterio de convergencia uniforme en toda la línea desde α hasta β, una vez que se haya eliminado con anterioridad cualquiera de los pequeños segmentos, que incluyen los puntos mencionados. Si la serie de hecho converge o diverge en los puntos críticos es en este caso algo absolutamente sin importancia; las series de *Fourier,* por ejemplo, convergen para las funciones finitas con saltos finitos también en los sitios de salto, y sin embargo, no son convergentes de ninguna manera en un mismo grado.

De hecho, suponiendo que x_0 sea un punto crítico tal, entonces en el mismo la serie, que por lo general es $f(x)$, representa, como se sabe, el recurso aritmético de $f(x_0 + 0)$ y de $f(x_0 - 0)$; es decir que, con la más pequeña variación de x en el punto x_0 (aquí se trata solamente de valores muy pequeños de la diferencia $x - x_0$) se modifica la serie de *Fourier* en más de lo que indica una magnitud finita d que sea menor que el valor numérico de $\frac{1}{2}(f(x_0+0) - f(x_0-0))$. Ahora que si se toma para ε una parte alícuota de d, por ejemplo $\varepsilon = 0,01d$, y supone que para esta ε existe un n fijo, entonces resulta una contradicción. Y es que, *por un lado,* se modifica la serie infinita $g_1 + g_2 + \cdots$; en algo más que d, tal como se ha hecho notar anteriormente; sin embargo, después de la suposición, en ambos lugares la serie infinita se diferencía de la suma de los primeros n miembros a lo más en ε; por consiguiente se modifica esta suma finita, $g_1 + g_2 + \cdots g_n$, tan poco como se modifique también a x, por lo menos en $d - 2\varepsilon$. *Por otra parte* uno puede cambiar tan poco a x, que cada miembro g cambia a lo sumo alrededor de la $n^{ésima}$ parte de ε, es decir, la suma finita $g_1 + g_2 + \cdots + g_n$ cambia a lo sumo en ε, lo cual no concuerda con aquel resultado en el que las cantidades ascienden por lo menos a $d - 2\varepsilon$.

§. 3. Se puede demostrar primero que una serie trigonométrica, si converge en general, pertenece a aquéllas *en que los miembros para cada valor de* x *finalmente se hacen infinitamente pequeños*, tal como indica la expresión en el §. 7, p. 25 del trabajo de *Riemann* sobre series trigonométricas. Solamente es necesario mostrar esto para una serie de cosenos y para una serie de senos por separado; pues la suma o la diferencia de dos series convergentes en mismo grado en general es igual a una serie de la misma característica, y ya que x recorre los valores desde $-\pi$ hasta $+\pi$, entonces las series con el $n^{ésimo}$ miembro

$$a_n \cos nx + b_n sennx, \qquad a_n \cos nx - b_n sennx$$

son, según nuestra suposición, ambas convergentes uniformemente en general.

Para demostrar ahora que en la serie de cosenos

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$

a_n con n creciente decrece bajo cualquier magnitud ε dada aún más pequeña, se eliminan, como en el §. 2, los puntos críticos. Sea pq, entonces, algún tramo continuo, de modo que, si sólo se dan a x valores que pertenecen a pq, la serie converge ahí en mismo grado, es decir, n puede tomarse tan grande, que para esta y una n más grande todas las x pertenecientes al tramo pq hacen el miembro $a_n \cos nx < \varepsilon$. Ahora si n es tan grande, que $\frac{\pi}{n} < pq$, entonces, para por lo menos un valor entero de m, seguramente $x = \frac{m\pi}{n}$ pertenecerá a la línea pq, o sea, $a_n \cos nx$, es decir a_n debe estar situado debajo de ε.

Sucede de manera similar con la serie del seno; para la demostración se tiene que poner en este caso $x = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$.

§. 4. Después de las observaciones en el inicio del §. 3, será suficiente probar el teorema III por separado para una serie de senos y luego para una serie de cosenos.

Sea la serie de senos

$$b_1 senx + b_2 sen2x + b_3 sen3x + \cdots$$

convergente en mismo grado en general e igual a cero; $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\tau$ ordenadas según su magnitud, deben representar 0, π y las abscisas positivas de los puntos críticos, con lo cual es indistinto, si x_0 y x_τ, es decir 0 y π, pertenecen o no a éstos. Puntos críticos son aquí aquéllos en los cuales o la serie no desaparece o en sus alrededores ésta no converge en mismo grado.

Si σ representa algún número entero de 1 hasta τ, y si se integra la ecuación

$$\sum b_n sennx = 0$$

según x, y los límites de integración están incluídos *entre* $x_{\sigma-1}$ y x_σ, entonces es válido intercambiar la integral de la suma por la suma de las integrales; se tiene por lo tanto

$$\sum b_n \frac{\cos nx - \cos nz}{n} = 0$$

si z representa alguna constante que, tal como x, esté situada entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ.

No es posible resolver la serie anterior como la diferencia de dos partes, de las cuales una incluye sólo a x, la otra sólo a z, pues no se ha demostrado que cada parte converge para sí misma. Pero la serie converge en mismo grado tal como aquélla que resultó por la integración, siempre y cuando x permanezca dentro de sus límites. Por lo tanto, con una segunda integración dentro de los mismos límites, se puede dejar que la sumatoria suceda a la integración. De tal modo resulta

$$\sum b_n (\frac{sennx - sennz}{n^2} - (x-z)\frac{\cos nz}{n}) = 0.$$

Los miembros b_n disminuyen a cero con n creciente; por lo tanto, las series con el $n^{ésimo}$ miembro

$$b_n \frac{sennx}{n^2}, \qquad b_n \frac{sennz}{n^2},$$

son incondicionalmente (absolutamente) convergentes, y de la ecuación precedente se deduce que también la serie con el $n^{ésimo}$ miembro $b_n \frac{\cos nz}{n}$ es convergente e igual a una constante, que es k, o mejor dicho, k_σ. Si se pone

$$\sum b_n \frac{sennx}{n^2} = F(x),$$

y c_σ también representa una constante, entonces, por lo tanto, se tiene

$$F(x) = \sum b_n \frac{sennx}{n^2} = c_\sigma + xk_\sigma, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma)$$

Después de haber sido hallada de esta manera la forma de la función $F(x)$, se trata de la determinación de las constantes c y k, para las cuales conservamos el número necesario de ecuaciones, si procedemos a partir de dos diversos criterios.

a) Primero, comprender que la ecuación anterior es válida para los límites $x = x_{\sigma-1}$ e incluso $x = x_\sigma$, ya que $F(x)$ es una serie absolutamente convergente y el lado derecho es una función lineal de x. Por lo tanto, para todos los puntos $x_0, x_1, \ldots x_\tau$ se obtienen $\tau + 1$ ecuaciones dobles en $F(x)$, o sea, $\tau - 1$ de la forma

$$F(x_\sigma) = c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} \qquad (0 < \sigma < \tau)$$

y para $x = 0$ y $x_\tau = \pi$

$$F(x_0) = 0 = c_1,$$
$$F(x_\tau) = 0 = c_\tau + \pi k_\tau.$$

b) En segundo lugar uno puede servirse del teorema que *Riemann* formula y demuestra rigurosamente en el trabajo mencionado arriba[6], según el cual $\frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha}$ con α se vuelve siempre infinitamente pequeño. Si se coloca aquí x_σ para x, entonces $x + \alpha$, con α positiva, se sitúa entre x_σ y $x_{\sigma+1}$, por el contrario, $x - \alpha$ entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ. Se tiene por lo tanto

$$F(x_\sigma + \alpha) = c_{\sigma+1} + (x_\sigma + \alpha)k_{\sigma+1},$$
$$F(x_\sigma - \alpha) = c_\sigma + (x_\sigma - \alpha)k_\sigma,$$

$$2F(x_\sigma) = (c_\sigma + x_\sigma k_\sigma) + (c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}),$$

y después de la substitución de estos valores por el teorema de *Riemann*

$$k_\sigma = k_{\sigma+1}.$$

Ya que ahora se ha hallado, que todas las k son idénticas, entonces se sigue de a), que igualmente todas las c, es decir $c_1 = 0$, se vuelven idénticas. De aquí resulta que $k_\tau = 0$, al ser $c_\tau + \pi k_\tau = 0$; por tanto, toda k es igual a cero, así como toda c. Por lo tanto desaparece la serie absolutamente convergente $F(x) = \sum b_n \frac{sen nx}{n^2}$ para toda x desde 0 hasta π, de modo que toda b desaparece, y por lo tanto la parte del teorema III. que se refiere a la serie del seno está probada.

§. 5. Ahora debe probarse el teorema III. para una serie de cosenos $\frac{1}{2}a_0 + \sum a_n \cos nx \qquad (n > 0)$ en la cual las letras z, σ, τ, c, k tienen un significado similar para la serie de cosenos tal como en el párrafo anterior para la serie de senos. Además se pone

$$F(x) = \sum a_n \frac{\cos nx}{n^2}, \qquad (n > 0).$$

[6] §. 8, P. 29, teorema 2.

Una doble integración, si x y z están situados entre $x_{\sigma-1}$ y x_σ, proporciona la ecuación

$$\tfrac{1}{2}a_0(x-z)^2 - \sum a_n(\tfrac{\cos nx - \cos nz}{n^2} + \tfrac{x-z}{n} sen nz) = 0,$$

es decir

$$F(x) = c_\sigma + xk_\sigma + \tfrac{1}{4}a_0x^2, \qquad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Esta ecuación debe ser válida aún en los límites $x_{\sigma-1}$ y x_σ, de modo que, por otro lado, se obtiene un sistema de ecuaciones

$$c_\sigma + x_\sigma k_\sigma + \tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2 = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} + \tfrac{1}{4}a_0x_\sigma^2$$

o, después de quitar el mismo miembro, como en el §. 4 según a)

$$c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1}, \qquad (0 < \sigma < \tau).$$

Como en el §. 4 según b) resulta

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_\tau$$

y de esto

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_\tau,$$

también desde $x = 0$ hasta $x = \pi$

$$F(x) = c + kx + \tfrac{1}{4}a_0x^2,$$

donde c y k designan las mismas constantes en todo el intervalo. Para determinarlos hay que notar que la serie para $F(x)$ converge absolutamente, que también existe la ecuación:

$$\tfrac{a_n}{n^2} = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x)\cos nx dx = \tfrac{2}{n^2\pi}(\tfrac{\pi}{2}a_0\cos n\pi - 2ksen^2 n\pi).$$

Si se emplea el valor hallado de a_n en la serie de cosenos dada, entonces se comprende inmediatamente que ella no converge, mientras que la suma, sin embargo, en general debe ser cero, si no a_0 y k, y por lo tanto toda a desaparece, con lo cual se da la demostración del teorema III.

§. 6. Algunos puntos en la demostración de los Principios de *Dirichlet* todavía no están justificados con aquélla manifestada rigurosidad que sería deseable para un teorema de tal importancia. Como es sabido, ya mucho tiempo atrás los señores *Kronecker* y *Weierstrass* expresaron sus suposiciones de que tiene que existir un mínimo, así como también sobre la aplicación del cálculo de variaciones. También yo hice notar ya hace varios años que una condición no es incuestionable, y sobre todo aquella que dice que una función del borde al interior siempre puede seguir siendo continua, mientras que sus primeros cocientes diferenciales deben permanecer continuos en coordenadas cartesianas. En años pasados se ha intentado llevar a cabo la demostración con ayuda de las series trigonométricas, lo cual debe traerse a colación ahora ya que de lo mismo se desprendería que cada función continua de una variable $f(x)$, para la cual $f(\pi) = f(-\pi)$, se desarrolla solamente de *una* manera en una serie trigonométrica de la forma $(\alpha.)$, sin que la convergencia uniforme en general se convierta en condición del desarrollo. Por eso menciono que aquel método de demostración tiene como fundamento una condición sin demostrar, sobre la que todavía quiero agregar, puesto que una circunstancia particularmente esencial viene aquí a colación con la consideración de funciones de varias variables. Sea $(\alpha.)$ algún desarrollo de $f(x)$ en una serie trigonométrica, entonces se considera comúnmente la expresión

$$(\beta.) \qquad \tfrac{1}{2}a_0 + r(a_1 \cos x + b_1 sen x) + r^2(a_2 \cos 2x + b_2 sen 2x) + \cdots$$

como una función de r y de x que es continua para todo valor de x y de $r = 0$ hasta $r = 1$ (incluidos). Después de que *Dirichlet*[7] demostrara exactamente el teorema[8] formulado por *Abel* en su trabajo sobre la serie del binomio, según el cual el límite de una función dada como una serie de potencias

$$c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \cdots \qquad (r < 1)$$

para $r = 1$ se vuelve igual a $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$, si la última serie converge, entonces es evidentemente claro que la función $(\beta.)$ cambia contínuamente con x en r fija, y con r hasta $r = 1$ (incluido) en x fija. Sin embargo parece que aún no se ha notado que estas propiedades, *esta continuidad en cada punto individual hacia dos direcciones,* no es aquélla continuidad que se debe presuponer si uno desea utilizar conclusiones similares sobre la función como aquéllas que son permitidas para las funciones continuas con una variable, y a la que puede llamársele *continuidad uniforme* debido a que se extiende uniformemente sobre todos los puntos y todas las direcciones. *Una función de dos variables* x, y *se llama uniformemente continua en un dominio, si para cualquier pequeña magnitud* ε dada *existen magnitudes* h_1 y k_1, *de las cuales*

[7] *Liouville*, Journal de Mathématiques, serie II, T. VII, p. 253-255.
[8] T. I, No. II, teorema IV, P. 314 y 315 de este diario.

ninguna es cero, de modo que la diferencia $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ *permanece menor que* ε*, mientras* h y k o h_1 y k_1 *no se excedan, y más concretamente esto debe darse con* ε *dada y* h_1 y k_1 *fijos para todos los puntos* (x, y) y $(x+h, y+k)$ *que pertenecen al dominio, incluida su delimitación.*

Apéndice.

§. 7. Aquí debe añadirse la demostración del teorema I., justo después del ensayo de *Dirichlet* mencionado anteriormente, al cual se remiten también las siguientes citas. Se cree que la función $f(x)$ mencionada en el teorema I. está libre de las discontinuidades que son removibles debido a la alteración de sus valores en puntos individuales, lo que está permitido pues el desarrollo de $f(x)$ en una serie de *Fourier* concuerda con aquel que daría la misma función, libre de esa discontinuidad. Sea además g un número positivo tan grande que $g + f(x)$ permanezca positivo, n un número entero positivo y $2n+1 = k$ fijo.

Los puntos del eje de las abscisas, los cuales pertenecen ahora a los sitios de discontinuidad, se eliminan como en el §. 2 al rodear estos puntos con segmentos arbitrariamente pequeños, los cuales se cree que están excluidos mas adelante, si se hace que también *la letra* x (mas no otras letras) recorra los valores desde $-\pi$ a $+\pi$, de modo que $f(x)$ también sea univariable, y $f(x+0)$ concuerde con $f(x-0)$. *No es posible reducir más los segmentos circundantes en el transcurso de la demostración.* Los puntos $\pm\pi$ son apreciados del mismo modo que los sitios de discontinuidad, si $f(\pi)$ no concuerda con $f(-\pi)$. Puesto que la suma de la serie de *Fourier* es exactamente $f(x)$ en cada punto x del eje de las abscisas desde $-\pi$ hasta π, entonces la parte del teorema I. que todavía está por ser demostrado, se puede formular así: El número n se puede tomar tan grande tal que la suma de los primeros n miembros de la serie menos $f(x)$ es menor que una magnitud arbitrariamente pequeña ε dada, *y de hecho esto ocurre en mismo grado, es decir para la* x *desde* $-\pi$ *hasta* π *atravez de la misma* n. Además, para valores aún más grandes de n aquella diferencia no puede exceder otra vez a ε.

Para la demostración se tiene que averiguar de que forma

$$S = \int_0^h \varphi(\beta) \frac{senk\beta}{sen\beta} d\beta, \qquad (0 < h \leq \tfrac{\pi}{2})$$

con n creciente, se aproxima a su valor límite $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$; nótese de antemano que aquí $\varphi(\beta)$ debe representar *o* $f(x \pm 2\beta)$ *o* alguna función que desde el primer tramo, es decir, a partir de $\beta = 0$, es constante en un tramo, y en todas partes permanece debajo de g. En el primer caso

$$\varphi(\beta) - \varphi(0) = f(x \pm\ 2\beta) - f(x);$$

ahora es una función de una variable x que posee solamente un número finito de máximos y de mínimos, si permanece constante en un tramo desde $x = a$ hasta $x = b$, seguramente continua en mismo grado en estos tramos, es decir para cualquier ε dada existe una magnitud h tan pequeña que todas las ordenadas pertenecen a las abscisas desde x hasta $x + h$, se diferencían una de la otra en menos que ε, más concretamente para toda x de a hasta b con ε y h fijas. O sea que (debido a la continuidad de $f(x)$ para cada abscisa x), existirá la desigualdad $\varphi(\beta) - \varphi(0) < \varepsilon$ para toda función φ que en este primer caso se tome en cuenta, para una ε y una β correspondiente fijas, y también existirá aún si β se reduce. En el segundo caso $\varphi(\beta) - \varphi(0)$ es exactamente el mismo cero incluso para un β suficientemente pequeño.

§. 8. *Dirichlet* trata (P. 164) primero el caso en que $\varphi(\beta)$ es constante desde $\beta = 0$ a $\beta = h$, nunca aumenta y nunca llega a ser negativo. El demuestra entonces que el valor de S está situado entre los límites

$$\tfrac{\pi}{2}\varphi(\tfrac{2m\pi}{k}) - \rho_{2m+1}\varphi(\tfrac{2m\pi}{k}),$$

$$\tfrac{\pi}{2}\varphi(\tfrac{2m\pi}{k})+\rho_{2m+1}\varphi(\tfrac{2m\pi}{k})+\rho_1(\varphi(0)-\varphi(\tfrac{2m\pi}{k}))$$

donde m representa algún número entero positivo que está constituido de tal manera que $(2m + 1)\pi$ permanece abajo de hk, donde además

$$\rho_1 < \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{2}{ksen\frac{\pi}{k}},$$

$$\tfrac{2}{k}\tfrac{1}{sen\frac{(2m+1)\pi}{k}} < \rho_{2m+1} < \tfrac{2}{k}\tfrac{1}{sen\frac{2m\pi}{k}}.$$

Si se toma a m aproximadamente del tamaño $\sqrt{n}$, y se le asigna, por ejemplo, para m el número entero siguiente de $\sqrt{n}$; entonces para valores suficientemente grandes de n

$$\rho_1 < \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{2}{\pi}, \qquad\qquad \rho_{2m+1} = \tfrac{1}{\pi\sqrt{n}}.$$

si se dejan fuera debido a su pequeñez las magnitudes del orden $n^{-\frac{3}{2}}$ que son aquí totalmente insignificantes.

Entonces S se diferencía de $\frac{\pi}{2}\varphi\,(0)$ en menos de

$$(\gamma.) \qquad \tfrac{2}{\pi}(\varphi(0)-\varphi(\tfrac{\pi}{\sqrt{m}}))+\tfrac{g}{\pi\sqrt{n}},$$

si se hace caso omiso del miembro de un orden superior, por lo tanto, uniformemente para todas nuestras funciones φ, en todo lo menos que se quiera, o la diferencia $S - \frac{\pi}{2}\varphi(0)$ para toda φ se aproxima en mismo grado al cero.

Al aplicar este teorema (*Dirichlet*, P. 167 y 168) en el caso en que φ permanece constante en los límites de integración, donde $S - \frac{\pi}{2}\varphi(0)$ como $\frac{g}{\pi\sqrt{n}}$ convergen a cero, además en la función $\varphi\,(\beta)+g$ si $\varphi\,(\beta)$ adopta también valores negativos, finita en $-\varphi\,(\beta)$ si φ nunca disminuye, se encuentra el resultado de que $S - \frac{\pi}{2}\varphi(0)$ converge uniformemente a cero para toda x, cuando la función $\varphi\,(\beta)$ definida en el §. 7. en el intervalo desde $\beta = 0$ hasta $\beta = h$ no pasa del crecimiento al decrecimiento o inversamente, y permanece constante.

Para liberar a la función φ también de esta condición, considérese

$$\sigma = \int_c^h \varphi\,(\beta)\,\frac{sen(k\beta)}{sen\beta}d\beta, \qquad (0 < c < h \leq \tfrac{\pi}{2})$$

si $\varphi\,(\beta)$ todavía está sujeta a la misma condición en los límites de integración g y h. Si era $\varphi\,(\beta) = f(x+2\beta)$, entonces esta función permanece bien definida para $\beta = 0$, porque se transforma en $f(x)$ y a x solamente le fueron dados aquellos valores que no recaen en lugares críticos. Así, el límite c se puede diferenciar ya que en esta relación del 0 anterior, en que le pueden pertenecer dos ordenadas. Se sabe cómo *Dirichlet* P. 169 encontró el límite de σ a partir del de S mediante la descomposición de la integral desde c hasta h en dos, en una desde 0 a h y en otra desde 0 hasta c; para ello continuó la función φ desde c hasta 0 de manera tal que permanece constantemente igual a $\varphi(c+0)$ ahí. Es decir que se tiene que utilizar en dos ocasiones repetidas el teorema sobre la integral S, ambas veces en una función $\psi\,(\beta)$ que está constituída de la misma forma en que lo está la función $\varphi\,(\beta)$ en S, y de hecho tal como en el segundo caso en la conclusión del §. 7; es decir que la función es constante para valores pequeños de β, y la diferencia de cada S con $\frac{\pi}{2}\psi(0)$ o $\frac{\pi}{2}\varphi(c+0)$ es por lo tanto (fórmula γ.) $< \frac{g}{\pi\sqrt{n}}$, y por consiguiente $\sigma < \frac{2g}{\pi\sqrt{n}}$ o sea uniformemente tan pequeño como se desee.

De aquí se desprende, que entonces $S-\frac{\pi}{2}\varphi(0)$ se vuelve también uniformemente arbitrariamente pequeño para n creciente, si φ es liberada de todas las condiciones de este párrafo y solamente permanece sujeta a aquellas del §. 7.

§. 9. Según los datos del §. 7. se tiene que investigar *cómo* se aproxima la suma de los primeros n miembros de la serie (α.) a $f(x)$. Esta suma se puede representar (*Dirichlet*, P.170) mediante la expresión

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\beta)\frac{senk\beta}{sen\beta}d\beta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\beta)\frac{senk\beta}{sen\beta}d\beta.$$

El análisis del mismo para cualquier valor individual determinado de x no tiene importancia para nosotros, puesto que se conoce, a partir del trabajo de *Dirichlet,* el valor de los límites de las integrales, incluso en el caso en que x representara alguno de los valores que hemos excluido; se sabe que para cada punto individual la serie converge, y de hecho, puede ser interesante en sí saber qué tan rápido convergeen cada uno, pero no lo es la pregunta de si la serie converge en mismo grado. Por lo tanto, no es necesario considerar aquí los casos $\pm\pi$, aún si la respectiva abscisa no debiera ser excluida por sí misma.

Supongamos que fuera $x < \pi$ y positivo, entonces una x negativa no requeriría un estudio esencialmente diferente. Luego $\frac{\pi - x}{2}$ permanece bajo $\frac{\pi}{2}$ y la primera integral que es de la forma S, y se aproxima, para toda x por igual, al valor $\frac{1}{2}f(x)$.

La segunda integral se puede descomponer en una que vaya desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, y que se aproxime de la misma manera a $\frac{1}{2}f(x)$, y en otra desde $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi+x}{2}$, la cual, si se introduce $\pi - \beta$ para β como una variable, se transforma en

$$\text{(2.)} \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2\beta + x - 2\pi)\frac{sen k\beta}{sen\beta}d\beta.$$

Esto se maneja de manera similar como σ en el §. 8, se descompone pues en la diferencia de dos integrales que tienen al 0 como límite inferior, al continuarse la función $f(x)$ desde $\beta = \frac{\pi-x}{2}$ hasta $\beta = 0$ de tal manera que permanezca constante $f(-\pi + 0)$, se reconoce inmediatamente después, que el valor de (2.) con n creciente se aproxima en mismo grado al cero para toda x, con lo que el teorema está demostrado.

Halle, en febrero de 1870.

Apéndice F

Los elementos de la Teoría de funciones.

(por el Sr. *E. Heine* de Halle del Saale.)
Traducción al español por Concepción Alarcón con la colaboración especial de Javier Castañón.

El avance de la teoría de funciones está detenido principalmente por el hecho de que ciertos teoremas elementales de la misma, a pesar de haber sido demostrados por un investigador perspicaz, aún se ponen en duda, de tal forma que los resultados de una investigación no siempre pueden considerarse correctos, si están basados en estos teoremas fundamentales imprescindibles. Yo lo atribuyo a que si bien los principios del Sr. *Weierstrass* se han difundido incluso en otros círculos, ya sea directamente por sus conferencias y otras comunicaciones verbales, o indirectamente por copias de los cuadernos que fueron elaborados después de estas conferencias, aún no han sido publicados por él mismo en una versión auténtica, de modo que no existe ningún lugar en el cual se encuentren los teoremas *desarrollados coherentemente*. Sin embargo, su verdad está basada en la definición no del todo establecida de los números irracionales, en la que conceptos de la geometría, en especial sobre la *producción* de una línea *mediante el movimiento*, a menudo han influido de manera confusa. *Los teoremas son válidos para la definición de los números irracionales tomada como base más adelante, en la cual se dice de los números que son iguales si no se diferencian en ningún número infinitesimal asignable, en la cual, además, a los números irracionales les corresponde una verdadera existencia*, de modo que una función univariable para cada uno de los valores de las variables, sea racional o irracional, también posee un valor *determinado*. Desde otro punto de vista, sin embargo, pueden surgir, con todo derecho, objeciones contra la verdad de los teoremas.

No sin reparos publico este trabajo, cuya primera y esencial parte "Sobre números" ya desde hace mucho tiempo está completa. Fuera de la considerable dificultad para describir tal materia, tenía dudas sobre la publicación de un trabajo que contiene principalmente ideas de otros que me fueron transmitidas a través de comunicaciones personales, sobre todo del Sr. *Weierstrass*, de modo que apenas me corresponde poco más que su realización, en la cual fue importante no dejar ningún vacío que fuese considerable en cierto sentido. No obstante, fue principalmente la necesidad de referirme a los teoremas fundamentales de la teoría de funciones en un tratado posterior lo que me motivó a la publicación del actual, en el que finalmente pruebo estos teoremas.

Le estoy agradecido particularmente al Sr. *Cantor* en Halle por su comunicación personal, que ejerció una influencia importante en la redacción de mi trabajo, al tomar prestadas sus ideas para introducir los números generales mediante aquellas series particularmente convenientes, que aquí (A, §. 1, Def. 1) llamaremos series numéricas. Esto me parece, particularmente para las aplicaciones de la teoría de funciones (B, §. 2, Teorema.1), un perfeccionamiento afortunado de la especie de introducción original, en la cual los números generales son determinados mediante múltiplos de ciertas magnitudes en una cantidad infinita. La justificación para considerar como magnitudes numéricas lo introducido por medio de las series la halla el Sr. *Cantor* en el hecho de que es posible determinar también aquí los conceptos de "mayor que", "menor que" e "igual que".

La pregunta: ¿qué es un número?, la responderé cuando no me quiera detener con los racionales positivos, no a través de una definición conceptual del número, o introduciendo, por ejemplo, los irracionales como límite cuya *existencia* fuese una suposición. En cuanto a la definición, me pongo en el punto de vista puramente formal[1] *al llamar números a ciertas indicaciones concretas*, de modo que la existencia de estos números quede fuera de la cuestión. *Se puede poner un interés principal en la operación aritmética*, y la indicación numérica se debe seleccionar de tal manera, o poseer tal mecanismo, que provea de una noción para la definición de las operaciones.

Las operaciones aritméticas son reglas según las cuales dos números que están conectados por el operador, se pueden cambiar por uno solo. Estas reglas fueron determinadas en un principio de tal forma que daban el resultado del cálculo ordinario, si los números introducidos eran solamente $0, 1, 2, 3,$

[1]Desde hace muchos años introduzco mis conferencias sobre análisis algebraico en la forma en que lo hago en esta introducción.

etc. La imposibilidad de la substracción en muchos casos motivó la introducción de nuevas indicaciones o números: para cada indicación a ya existente se introduce otra indicación $neg(a)$, y se amplía la definición de las operaciones de manera conveniente, de modo que éstas provean aún de un resultado para las nuevas indicaciones, conveniente para el anterior, lo mismo que antes. Entonces resulta, según la definición apropiada de substracción, que $neg(a) = 0 - a$. La imposibilidad de la división de dos números a y b, cuando el cociente no es un número entero, motivó a añadir la indicación doble (a, b) a los anteriores, con lo cual se establece la conexión con éstos por el hecho de que se debe permitir el intercambio de $(a, 1)$ con a. Si se amplía la explicación de la multiplicación, entonces resulta que (a, b) no es nada más que el resultado de la división de $(a, 1)$ entre $(b, 1)$, o de a entre b. De aquí en adelante les es posible a los números introducidos la adición, substracción, multiplicación, y en general la división; para esto último hay un caso imposible, cuando el denominador es cero y el numerador no es cero. La imposibilidad de sacar la raíz en todos los casos, y también de realizar otras operaciones trascendentes en los números introducidos hasta ahora, motivó la introducción de nuevas indicaciones, de los números reales irracionales y de los imaginarios. En la sección A se puede observar cómo son seleccionados los primeros para dar a las operaciones una aplicación. En la misma me he limitado a los números reales, puesto que se puede llegar, sin esfuerzo, a partir de ellos a los complejos, al añadir a las indicaciones de los números reales a, b,etc. otros compuestos. En vez del número complejo $a + b\sqrt{} - 1$ aparece (a, b) como indicación, la cual, después de una explicación adecuada de la adición, se vuelve igual a $a+b$, después de la explicación de la multiplicación en un principio es igual a $a + b$,1 y, finalmente 1, puesto que de la misma explicación se sigue; que una raíz de -1, es igual a $a + b\sqrt{} - 1$.

A. Sobre Números.

§. 1. Las series numéricas.

1. *Definición. Serie numérica* es una serie de números a_1, a_2,etc.,a_n,etc., si para cada número η dado lo más pequeño que sea, pero diferente de cero, existe un valor n que provoca que $a_n - a_{n+v}$ permanezca debajo de η para todo entero positivo v.

Nota. La palabra *número*, significa siempre en la sección A, sin mayores rodeos, *número racional.* En este caso el cero es considerado como un número racional.

2. *Definición*. Toda serie numérica en la cual los números a_n, que tengan índice n creciente, decrezcan con cada magnitud definible, se llama *serie elemental.*

Corolario. Los miembros a_n de cada serie numérica permanecen debajo de una magnitud finita. Si la serie no es elemental, entonces también permanecen *todos,* a partir de un cierto valor del índice n, sobre una magnitud diferente de cero.

Convención. A fin de llevar un mejor seguimiento serán utilizadas las letras griegas para los miembros sólo en series elementales. Así η_1, η_2,etc., es una serie elemental.

1. *Teorema*. Si tanto a_1, a_2,etc. como b_1, b_2,etc. son series numéricas, entonces $a_1 + b_1, a_2 + b_2$,etc., así como $a_1 - b_1, a_2 - b_2$,etc., y $a_1 b_1, a_2 b_2$,etc. son también series numéricas.

Demostración. $(a_n \pm b_n) - (a_{n+v} \pm b_{n+v}) = (a_n - a_{n+v}) \pm (b_n - b_{n+v})$, si los signos superiores, así como los inferiores, concuerdan. Esta expresión se vuelve arbitrariamente pequeña con n creciente, ya que las a y las b forman series numéricas, es decir que (§.1, Def.1) $a_n - a_{n+v}$ y $b_n - b_{n+v}$ se vuelven arbitrariamente pequeños con n creciente.

Lo mismo se aplica para

$$a_n b_n - a_{n+v} b_{n+v} = a_n (b_n - b_{n+v}) + b_{n+v}(a_n - a_{n+v}),$$

puesto que a_n y b_{n+v} permanecen bajo una magnitud finita (§.1, Corol.).

2. *Teorema*. Bajo las condiciones del primer teorema, y si además las a no forman una serie elemental, también

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \dots$$

es una serie numérica.

Demostración. $\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+v}}{a_{n+v}} = \frac{b_n a_{n+v} - a_n b_{n+v}}{a_n a_{n+v}} = \frac{b_n (a_{n+v} - a_n) + a_n (b_n - b_{n+v})}{a_n a_{n+v}}$.

Puesto que el numerador de la expresión del lado derecho se vuelve arbitrariamente pequeño con n creciente, mas el denominador, sin embargo, permanece sobre una magnitud diferente de cero (§.1, Corol.), entonces también el lado izquierdo se vuelve arbitrariamente pequeño con n creciente.

3. *Definición. Las series numéricas* a_1, a_2,etc. y b_1, b_2,etc. *son iguales si y sólo si, la serie numérica* $a_1 - b_1, a_2 - b_2$,etc. *es elemental.*

3. *Teorema. Todas las series elementales son iguales unas a otras*, e inversamente una serie elemental no es igual a otra serie numérica más que a una elemental.

Demostración. Si ε_n y η_n son miembros de dos series elementales, entonces $\varepsilon_n - \eta_n$ se vuelve arbitrariamente pequeño con n creciente. Por lo tanto $\varepsilon_1 - \eta_1, \varepsilon_2 - \eta_2$,etc. es una serie elemental, es decir, (§.1, Def.3) realmente la serie elemental $\varepsilon_1, \varepsilon_2$,etc. es igual a la otra η_1, η_2,etc.

Sin embargo, una serie no elemental con el $n^{ésimo}$ miembro a_n no puede ser igual a la elemental con el $n^{ésimo}$ miembro ε_n, porque $a_n - \varepsilon_n$ con n creciente permanece por encima de una magnitud definible (§.1, Corol.).

§. 2. Introducción de los números generales o indicaciones numéricas.

Petición. Añadir a cada serie numérica una indicación.

Se introduce la serie misma como una indicación, puesta entre corchetes, de modo que, por ejemplo, la indicación perteneciente a la serie a, b, c, etc. es $[a, b, c$,etc.$]$.

1. *Definición. Un número general o una indicación numérica* es aquella indicación que pertenece a una serie numérica.

2. *Definición. Las indicaciones numéricas son iguales* o permutables, si pertenecen a series numéricas iguales; son desiguales o no permutables si pertenecen a series numéricas desiguales (§.1, Def.3.).

Designación. Si $[a, b$,etc.$]$ y $[a\prime, b\prime$,etc.$]$ son idénticas, entonces esto se indica con $[a, b$,etc.$] = [a\prime, b\prime$,etc.$]$, o con $[a\prime, b\prime$,etc.$] = [a, b$,etc.$]$.

Abreviatura. Como indicación numérica que pertenece a una serie numérica cuyos miembros están formados con las mismas letras minúsculas, debe poderse tomar también la mayúscula correspondiente; por lo tanto, como indicación de $[a_1, a_2$,etc.$]$ también está A y de $[\eta_1, \eta_2$,etc.$]$ también H.

Convención. La indicación numérica que pertenece a una serie numérica que contiene solamente el mismo miembro a es el mismo número racional a.

1. *Corolario.* Así (§.2, Convención)

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A$$
$$[a, a, a, \ldots] = a.$$

1. *Teorema. La indicación de cada serie elemental es* 0.

Demostración. Todas las series elementales son iguales (§.1, Teor. 3), por lo mismo, las indicaciones de todas las series elementales son iguales (§.2, Def. 2), o sea, iguales a la indicación $[0, 0, 0, \text{etc.}]$, es decir (§.2, Corol. 1) que son iguales a cero.

Aclaración. No se calcula con series numéricas, sino con indicaciones numéricas. Las operaciones aritméticas se definirán más adelante (§. 3) por medio de las series numéricas, y de tal forma que produzcan el resultado conocido para los números racionales, si todos los miembros a_1, a_2,etc. se vuelven iguales, es decir, si las indicaciones numéricas se vuelven números racionales; la *convención* anterior es, por lo tanto, lícita.

3. *Definición.* Se dice que $A > B$, si $a_n - b_n$ a partir de un cierto valor del número n siempre permanece positivo y definible, y $A < B$, si $a_n - b_n$ a partir de cierta n permanece negativo y definible.

Aclaración. La igualdad excluye la desigualdad en más o en menos. Es decir que si $A = B$, entonces los miembros $a_n - b_n$ pertenecen a una serie elemental; sin embargo, si $A = B$ no se cumple, entonces los miembros $a_n - b_n$ no pertenecen a una serie elemental, por lo que permanecen, estrictamente hablando, (§.1, Corol. 1) sobre una magnitud diferente de cero, de modo que entonces o $A > B$ o $A < B$.

2. *Corolario.* Si $A > B$, entonces también $B < A$.

2. *Teorema.* Las indicaciones de ambas series

$$b_1, b_2, b_3, \ldots;$$
$$a_1, a_2, \text{ etc.}, a_\rho, b_\mu, b_{\mu+1}, b_{\mu+2}, \text{etc.},$$

son idénticas.

Demostración. Las dos series son idénticas, pues la serie de las diferencias

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \text{etc.}, a_\rho - b_\rho, b_\mu - b_{\rho+1}, b_{\mu+1} - b_{\rho+2}, \text{etc.}$$

es una serie elemental (§.2, Def.2; §.1, Def.3).

3. *Corolario.*[2] Una indicación numérica permanece invariable si se deja salir de la serie a la cual pertenece cualquier número finito de miembros.

---

[2]De esto se deduce que habría sido suficiente no tomar en la indicación perteneciente a la serie sus primeros miembros, sino solamente la ley general, de modo que se pueda elegir también $[a_n]$ como indicación perteneciente a la serie a_1, a_2, etc. Esto lleva a la designación por lo demás también usual, al intercambiar simplemente los paréntesis con los puntos, y no poner, por ejemplo, $\frac{1}{9} = [0{,}1, 0{,}11, 0{,}111,\text{etc.}]$, lo cual está permitido (§. 4, ejemplo), sino $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$. Por cierto, de aquí en adelante se conservará la designación actual en general.

§. 3. Cálculos con números generales.

1. *Definición.* $A \pm B$ es aquella indicación que pertenece a la serie numérica (§.1, Teor.1) $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2$,etc., y AB la que pertenece a la serie numérica $a_1 b_1, a_2 b_2$,etc. Si $A = 0$ no se cumple (§.1, Teor.2; §.2, Teor.1), entonces $\frac{B}{A}$ pertenece a la serie numérica

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \cdots .$$

1. *Corolario.* Si $A + B = C$, o $AB = C$, o, presuponiendo, que A no tiene el valor cero, $\frac{C}{A} = B$, entonces se tiene respectivamente

$$a_n \pm b_n + \eta_n = c_n; \qquad a_n b_n + \eta_n = c_n; \qquad c_n + \eta_n = b_n.$$

Inversamente las primeras ecuaciones se deducen de las tres pasadas.

2. *Corolario.* $A + 0 = A$.

3. *Corolario.* La indicación que pertenece a $-a_1, -a_2$, etc., es igual a $0 - A$.

Observación. Se ha convenido escribir $-A$ en vez de $0 - A$; se calcula con $-A$ como si la expresión completa que representa estuviera presente.

2. *Definición. El valor numérico* o valor absoluto de la indicación A es la indicación que se obtiene si, en vez de las a, se colocan sus valores numéricos en la serie.

Teorema. Si $A \pm B = C$, o $AB = C$ y simultáneamente no $A = 0$, entonces tenemos respectivamente $A = C \mp B$ o $B = \frac{C}{A}$.

Demostración. En el primer caso tenemos (§.3, Corol. 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n$, por consiguiente $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. Es decir que tenemos

$$[a_1 + \eta_1, a_2 + \eta_2, \text{etc.}] = [c_1 \mp b_1, c_2 \mp b_2, \text{etc.}].$$

El lado izquierdo da (§.3, Def.1; §.2, Teor.1) $A + 0$ o (§.3, Corol. 2) A, el derecho (§.3, Def.1) $C \mp A$. La demostración del segundo caso se lleva a cabo de manera semejante.

§. 4. Comportamiento de los números generales con respecto a los racionales.

1. *Definición.* Si existe para números (racionales) a_1, a_2, etc. un número (racional) U de tal naturaleza que $U - a_n$ con n creciente, decrece con cada valor definible, entonces se dice que U es el límite de las a.

1. *Teorema*. Si los miembros de la serie numérica a_1, a_2, etc. poseen un límite (racional) U, entonces U es también la indicación perteneciente a la serie a_1, a_2,etc.

Demostración. Según la noción de límite (§.4, Def.1), los miembros

$$U-a_1,\ U-a_2,\ U-a_3, \ldots$$

forman una serie elemental, cuyas indicaciones son cero (§.2, Teor.1). Pero por otra parte (§.3, Def.1) esto también es

$$= [U,\ U,\ U,\text{etc.}] - [a_1, a_2, a_3,\text{etc.}],$$

es decir (§.2, observ.), igual a $U - A$. De hecho, de aquí se desprende que

$$U = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Ejemplo. Puesto que las fracciones 0,1, 0,11, 0,111, etc. se aproximan todo lo que se quiera al número (racional) $\frac{1}{9}$, entonces (Compárese la observación del §.2, Corol. 3)

$$\tfrac{1}{9} = [0{,}1, 0{,}11, 0{,}111,\text{etc.}].$$

2. *Definición*. Se dice de las indicaciones numéricas C_1, C_2, etc., C_n, etc., que decrecen con cada valor definible, siendo n creciente, si para cada indicación numérica D diferente de cero existe un valor de n tal que para esta n y todo número entero positivo v, el valor numérico de C_{n+v} (§.3, Def.2) es menor (§.2, Def.3) que el de D.

Corolario. Si éste es el caso para cada D, entonces ocurre también para cada número racional d, al ser un número racional un caso especial de las indicaciones numéricas (§.2, Observ.). Pero también inversamente: si ocurre para cada número racional d, entonces para cada indicación numérica es el caso. Si ocurriera para un determinado D, cuyo valor numérico es igual a $[d_1, d_2,\text{etc.}]$ y no es cero, de modo que también d_n permanezca definible sobre cero, entonces existe un número positivo racional d que es menor que todos los números d_m a partir de una m determinada. Ahora bien, si los valores numéricos de C_{n+v} decrecieran por debajo de d, de forma tal que $d - c_m$ con el aumento de n siempre permaneciera positivo si tal valor numérico se representase mediante $[c_1, c_2,\text{etc.}]$, entonces también $d_m - c_m$ permanecerá positivo puesto que $d_m > d$, . *Es decir que basta si el criterio se cumple para los números racionales D.*

3. *Definición*. Si A es una indicación numérica determinada, y $A - B$ decrece, siendo n creciente, con cada indicación numérica definible, entonces se dice que A *es el límite de* B.

2. *Teorema. La indicación numérica A es el límite de los miembros a de la serie a la cual pertenecen.*

Demostración. Se tiene que mostrar (§.4, Def.3) que $A - a_n$ decrece con cada indicación numérica definible, es decir, que solamente (§.4, Corol.), decrece con cada número racional d. Ahora $A - a_n$ es igual a

$$[a_1 - a_n, a_2 - a_n, \text{etc.}, a_n - a_n, a_{n+1} - a_n, \text{etc.}],$$

o (§.2, Teor.2) igual a

$$[a_{n+1} - a_n, a_{n+2} - a_n, \ldots].$$

Si se toma n suficientemente grande, entonces los miembros individuales de la serie permanecen debajo de d en la expresión anterior; es decir, las indicaciones numéricas se sitúan debajo de $[d, d, d, \text{etc.}]$, o sea debajo de d.

§. 5. Los números irracionales de órdenes arbitrarios.

Indicación. Los números generales, cuando también llegan a ser racionales en casos especiales, deben ser llamados números irracionales de primer orden. Tal como fueron formados estos números irracionales de primer orden A a partir de los racionales, así también, a partir de éstos, se pueden formar nuevamente irracionales de segundo orden A', y, a partir de éstos, irracionales de tercer orden A”, etc. Los irracionales del orden $m+1$ serán señalados con $A^{(m)}$.

Lo irracional, sin importar el orden, se opone a lo racional. El hecho de que existen números irracionales, de que tampoco todas las magnitudes $A^{(m)}$ pueden ser números racionales, será mostrado en la sección B, §.3, Corol.2.

Teorema. Las irracionalidades del $m + 2^{ésimo}$ orden no son nuevas, sino que concuerdan con aquellas de primer orden.

Demostración[3]. Sea

$$A^{(m+1)} = [A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}, \ldots].$$

[3] Se presupone el hecho de que las irracionalidades de órdenes superiores se tratan de la misma forma como fueron tratadas las de primer orden anteriormente. Además se producen relaciones totalmente similares que doy por sentado aquí sin más, puesto que su desarrollo sería substancialmente una repetición del anterior.

Además a_1, a_2, a_3,etc. pueden representar números racionales, que están situados respectivamente bajo $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}$,etc., y que se diferencían de éstos en menos de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,etc. respectivamente. Si la indicación que pertenece a a_1, a_2, a_3,etc., y que por lo mismo es un número irracional de primer orden es A, entonces $A^{(m+1)} - A$ será la indicación de una serie elemental o cero, es decir $A^{(m+1)}$ es igual a A.

B. Sobre funciones.

§. 1. Funciones en general.

Definición. Una función de un valor de una variable x es una expresión que está claramente definida para cada uno de los valores racionales o irracionales de x.

Aclaración. El valor de la función para un valor irracional de las variables no se puede definir de tal forma que dependa de la serie numérica de la cual se obtuvo justamente aquél valor irracional, *por el contrario, tiene que permanecer igual a la indicación que fue seleccionada de las mismas indicaciones numéricas para la comprobación del valor irracional* x.

1. *Teorema.* Cada potencia entera de x es una función univariable.

Demostración. Sea cualquier valor determinado de x, racional o irracional, digamos X, obtenido tanto de $[x_1, x_2$,etc.$]$ como de la indicación $[y_1, y_2$,etc.$]$, que es igual al mismo X,[4] de modo que (A, §.2. Def.2) $x_1 - y_1, x_2 - y_2$,etc. formen una serie elemental η_1, η_2,etc. Tras multiplicar m veces X consigo misma (A, §.3, Def.1) se obtiene respectivamente

$$[x_1^m, x_2^m,\text{etc.}], \qquad [y_1^m, y_2^m,\text{etc.}],$$

en las que los números concuerdan, puesto que su diferencia

$$[(x_1+\eta_1)^m - x_1^m, (x_2+\eta_2)^m - x_2^m,\text{etc.}]$$

es la indicación numérica de una serie elemental.

Corolario. Cada función, llamada entera, de x es una función de x.

2. *Teorema. Senx* y *Cosx* son funciones de x.

Demostración de la primera afirmación. Como explicación de *senx* se da la conocida serie de potencias, lo que debe ser comprendido de tal forma que *senx* sea la indicación que pertenece a la serie numérica

[4] Según las ampliaciones esbozadas en el §. 5, no se deberá entender más a las magnitudes x y y como números racionales; pueden ser también completamente o parcialmente irracionales. Puesto que lo siguiente trata solamente de funciones que son univariables, entonces será redundante agregar esta designación cada vez.

$$x, x - \frac{x^3}{6}, x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \text{ etc.}$$

Cada miembro, tan lejos como se ha llegado, es una función entera de x, teniendo así un valor totalmente determinado, independientemente del origen de x. Si los miembros de la serie numérica están totalmente determinados, entonces también lo está la indicación que pertenece a ella, es decir *senx*.

Nota. Aquí no debería darse ningún medio para calcular *senx* para un valor irracional de x, por ejemplo mediante aproximación, formando valores aproximados $senx_1, senx_2$,etc., donde x_1, x_2,etc. representen miembros de la serie numérica para el valor irracional. Hasta aquí, ni siquiera se ha investigado si los senos de estos valores están relacionados con $senx_1, senx_2$,etc. (Compárese B, §.2, Explic.). Así como un número irracional posee un significado totalmente determinado, también al seno de cada número le corresponde uno; esto es lo que ha sido demostrado únicamente hasta ahora. Así, tiene sentido si se trabaja *también en los sitios de salto de la suma, una serie de Fourier*, en la cual se desarrolló una función finita. La objeción de que no existe allí un valor si la abscisa, dividida entre π, es un número irracional, solamente podría considerarse justificada mientras no se le adjudique una existencia independiente a las irracionalidades. (Mediante el cálculo numérico de la suma, por cierto, uno se aproximará, tomando en consideración un menor número de miembros n, al valor medio antes del salto, con un número arbitrariamente mayor uno se aproximará al valor después del salto. La aproximación del valor medio sólo puede ser aumentada mediante una n más grande si se ha colocado un valor racional para la abscisa irracional crítica tal que se acerque al valor auténtico).

§. 2. Condiciones de la Continuidad.

1. *Definición*. Se dice que una función $f(x)$ *es continua en un determinado valor individual* $x = X$, si para cada magnitud infinitesimal dada ε, existe otro número positivo η_0 de tal naturaleza que para ninguna magnitud positiva η que sea menor a η_0, el valor numérico de $f(X \pm \pm\eta) - f(X)$ exceda a la ε.

1. *Corolario*. Dos valores de la función para la variable independiente x, que están situados entre $X - \eta$ y $X + \eta$, se pueden diferenciar a lo más en 2ε.

Aclaración. Una función es solamente un agregado de valores individuales (A, §.1. Def.); una relación entre los mismos, de modo que un valor resulte a partir de los valores en las inmediaciones, se producce sólo por la continuidad.

1. *Teorema*[5]. Si una función $f(x)$ es continua en $x = X$, entonces $f(x_1)$, $f(x_2)$,etc. forman una serie numérica con la indicación $f(X)$ para cada serie numérica x_1, x_2,etc. que posee la indicación numérica X; *e inversamente*, si para cada serie numérica x_1, x_2,etc., que posee la indicación X, también $f(x_1), f(x_2)$,etc. forman una serie numérica con la indicación $f(X)$, entonces $f(x)$ es continua en $x = X$.

Demostración. Primero. Cada serie numérica x_1, x_2,etc. se puede representar como $X + \eta_1, X + \eta_2$,etc. con ayuda de una serie elemental. Ahora, si la función es continua, entonces los miembros de la serie η_1, η_2,etc. decrecen por debajo de η_0 para cada magnitud dada ε (B, §. 2. Def. 1), de modo que, a partir de un cierto valor de n, $f(X + \eta_n) - f(X)$, es decir $f(x_n) - f(X)$ ya no excede a ε. Esta diferencia es el miembro general de una serie elemental, $f(x_1) - f(X), f(x_2) - f(X)$,etc., puesto que se puede tomar la ε arbitrariamente pequeña, sus indicaciones numéricas, por lo tanto, se vuelven cero. Por otro lado, también (A, §.3, Def.1) es igual a

$$[f(x_1), f(x_2),\text{etc.}] - f(X),$$

mediante lo cual la primera parte, es decir, la igualdad

$$f(X) = [f(x_1), f(x_2), \text{ etc.}]$$

está demostrada.

Segundo. Ahora, si la función satisface la condición anterior que dice que $f(x_1) - f(X), f(x_2) - f(X)$,etc., se vuelve arbitrariamente pequeño, para cada serie numérica x_1, x_2,etc. cuya indicación numérica es X sin ninguna excepción, entonces de ahí se deriva su continuidad. Si no se satisfaciera nunca la condición de continuidad, fijándose un número determinado ε (B, §.2, Def.1), y por más pequeño que se tome un número η_0, es decir, si existieran siempre valores η debajo de η_0 para los que $f(X + \eta) - f(X)$ permaneciera sobre ε, entonces, para una magnitud de η_0, un valor de η (debajo de este η_0), para el cual la diferencia anterior no fuera más pequeña que ε, sería

[5]El teorema con su prueba, de que la función es continua si y sólo si, $f(X) - f(x_n)$, para cada serie numérica de X, se vuelve arbitrariamente pequeña, la tomé del Sr. *Cantor*. Mientras que aquí me limito a funciones con una variable, el señor *Cantor* ha tratado en general funciones de varias variables; él demostrará que estas funciones poseen continuidad si satisfacen ciertas condiciones en cada punto individual; yo llamo esta continuidad uniforme en otro lugar (este diario, T. 71, P. 361). El curso general de las demostraciones de algunos teoremas en el §. 3 según los principios del Sr. *Weierstrass* lo conozco por medio de comunicaciones personales suyas, así como de los Sres. *Schwarz* y *Cantor*, de tal forma que, en estas demostraciones, solamente la ejecución detallada se debe a mí.

igual a η'. Para la mitad de un valor de η_0 la diferencia en $\eta = \eta$" no puede ser más pequeña que ε; para un η_0 igual a la mitad del anterior (un cuarto del primero) puede suceder esto en $\eta = \eta'''$, y así sucesivamente. Puesto que los valores de η_0 forman una serie elemental, lo mismo ocurre con (los más pequeños) η', η", η''',etc.; así $X + \eta', X + \eta$",etc. representaría una serie numérica x_1, x_2,etc. con la indicación X, pero sin que $f(x_1) - f(X), f(x_2) - f(X)$,etc. decrezcan debajo de ε - contra lo supuesto.

2. *Teorema.* Una función continua $f(x)$ se conoce para cada valor de x si está dada para cada valor racional de esta variable.

Demostración. Sea X una magnitud irracional dada por la serie x_1, x_2, x_3,etc.; además y_1, y_2, y_3,etc. pueden representar números racionales que se diferencían de x_1, x_2, x_3,etc. en menos de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$,etc. Puesto que las x son diferentes del común denominador y solamente en los miembros de una serie elemental, entonces (A, §.2, Def.2), por consiguiente X igual a $[y_1, y_2$,etc.$]$ se conoce, es decir (B, §.2. Teor.1),

$$f(X) = [f(y_1), f(y_2), \text{etc.}].$$

3. *Teorema.* Cada potencia entera x^m es continua en cada uno de los valores $x = X$.

Demostración. Sea otra vez $X = [x_1, x_2$,etc.$]$, de lo que se deriva (A, §.3, Def.1) que

$$X^m = [x_1^m, x_2^m, \ldots].$$

Sin embargo esto es (B, §.2, Teor.1) la condición de continuidad para una función $f(x) = x^m$ en X.

2. *Corolario.* Cada función entera es continua en cada uno de los valores de las variables.

4. *Teorema.* *Senx* es continua en cada uno de los valores $x = X$.

Demostración. Se tiene que mostrar que $senx_1, senx_2$,etc. forman una serie numérica, y en segundo lugar, que la indicación es la misma $senX$. Ambas cosas ocurren, si se ha demostrado que la serie $senX - senx_1, senX - senx_2$,etc. es una elemental. Sin embargo, $senX - senx_n$ o

$$[X - x_n, X - x_n - \frac{X^3 - x_n^3}{6}, \text{etc.}]$$

se vuelve de hecho arbitrariamente pequeño con el aumento de n.

§. 3. Propiedades de las funciones continuas.

1. *Definición.* Se dice que una función $f(x)$ es *continua* desde $x = a$ hasta $x = b$, si en cada uno de los valores entre $x = a$ y $x = b$, con a y b incluídos, es continua (B, §.2. Def.1); se dice que es uniformemente continua desde $x = a$ hasta $x = b$, si para cada magnitud infinitesimal ε dada existe una magnitud positiva η_0, tal que para todos los valores positivos η que sean menores que η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ permanece bajo ε. Qué valor se puede dar también a x, siempre y cuando, x y $x \pm \eta$ pertenezcan a ese dominio desde a hasta b, *el mismo* η_0 tiene que proveerlo.

1. *Teorema.* Cada potencia entera de x es uniformemente continua en cualquiera de los límites dados.

Demostración. Puesto que $(x \pm \eta)^m - x^m$, permanece debajo del producto de η y una magnitud fija en los límites dados, entonces esta diferencia evidentemente se puede hacer arbitrariamente pequeña para toda x mediante el mismo valor de η.

1. *Corolario.* Cada función entera es uniformemente continua entre cualesquiera límites dados.

2. *Teorema.* Si una función continua $f(x)$ (para cada una de las x) posee, desde a hasta b signos contrarios para dos números $x = x_1$ y $x = x_2$, que están situados entre a y b, entonces ésta desaparece para un valor de x situado entre ellos.

Demostración.[6] Sean $x_2 - x_1 = \delta$ y $f(x_1)$ positivos . Se forman ahora los números

$$x_3 = x_2 - \tfrac{\delta}{2}, \qquad x_4 = x_3 \pm \tfrac{\delta}{4}, \qquad x_5 = x_4 \pm \tfrac{\delta}{8},$$

en general

$$x_{n+1} = x_n \pm \tfrac{\delta}{2^{n-1}}$$

y es válido, en la formación de x_{n+1} a partir de x_n, el signo positivo o negativo, según si $f(x_n)$ posee el signo positivo o negativo; - si el valor de la función $f(x_n)$ es cero para alguna n, entonces el teorema no requiere mayor demostración de por qué este caso permanece descartado.

Los números x_1, x_2,etc. forman una serie numérica, puesto (A, §.1, Def.1) que $x_{n+v} - x_n$, se vuelve arbitrariamente pequeño con n creciente, como resulta de las ecuaciones anteriores mediante un cálculo totalmente elemental,

[6] Me pareció apropiado excluir conceptos geométricos en la demostración, aún a expensas de la brevedad.

incluso en el peor de los casos, cuando los valores de la función poseen todos el mismo signo para x_{n-1}, x_n,etc.,x_{n+v-1}. Sea X la indicación numérica de esta serie numérica; demuestro que $f(X)$ es cero.

Si no fuera cero, entonces es un número determinado, denominado como 4ε. Ahora, se forma una magnitud η_0, tal que $f(X \pm \eta_0) - f(X) < \varepsilon$ (B, §.2, Def.1), y se toma n de tal magnitud que x_n, x_{n+1},etc. se diferencíe de X en menos de η_0, por lo que $f(X)$ se diferencía de $f(x_n), f(x_{n+1})$,etc. en menos de ε. Entonces la diferencia $f(x_n) - f(x_{n+v})$ es menor que 2ε. Si se toma, ahora, v de tal magnitud que $f(x_n)$ y $f(x_{n+v})$ tengan signos contrarios (Más adelante se mostrará que esto siempre se puede conseguir), entonces está claro que incluso $f(x_n)$ es menor que 2ε, por lo tanto, $f(X)$ menor que 3ε, es decir, que no es igual a 4ε.

Pero si $f(x_{n+v})$ conservara siempre el mismo signo que x_n, no importa que tan grande se tome el número v para una n determinada, entonces x_m sería aquel número de la serie con el índice más bajo, del cual la función $f(x)$ ya no cambia en los signos, de modo que permanecen iguales para x_m, x_{m+1},etc. Puesto que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ poseen signos contrarios, entonces m es, por lo menos, igual a 2; por lo tanto $f(x_{m-1})$ y $f(x_m)$ tienen signos contrarios. Si α indica la unidad positiva o negativa, según sea $f(x_{m-1})$ positivo o negativo, entonces, después de estas suposiciones se obtiene

$$x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}, \quad x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}, \quad x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m}, \quad \text{etc.},$$

por lo tanto

$$x_{m+\mu} - x_{m-1} = -\alpha\delta 2^{2-m}(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2\mu}).$$

Con μ creciente el lado derecho que posee el signo de α decrece infinitesimalmente, de tal forma que la indicación numérica X de la serie numérica formada anteriormente sería exactamente x_{m-1}. O sea que el miembro general x_n de esta serie numérica se acercaría arbitrariamente a x_{m-1}, y entonces la magnitud totalmente determinada $f(x_{m-1})$ tendría el signo de α, al contrario de $f(x_n)$. Esto no es posible, debido a la continuidad de $f(x)$.

2. *Corolario.* Tan pronto como a indique un número entero positivo no cuadrado, la ecuación $x^2 - a$ no poseerá ninguna raíz entera, y por lo tanto tampoco racional. Sin embargo el lado izquierdo tiene signos contrarios para ciertos valores diversos de x, es decir que la ecuación tiene una raíz

irracional. Por esto queda demostrado que no todas las indicaciones numéricas se reducen a números racionales, sino *que también existen los números irracionales.* (A, §.5).

3. *Teorema.* Una función $f(x)$, que desde $x = a$ hasta $x = b$ esté formada de tal forma que entre cada dos números x_1 y x_2, según que tan cerca se elijan, existan también otros para los cuales $f(x)$ posee otro signo, es discontinua.

Demostración. Si fuera continua, entonces sería igual a 2ε para un determinado valor ξ de x. Entonces se puede determinar una magnitud η_0 tal que

$$f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon,$$

para cada valor η debajo de η_0. Si entre $x = \xi$ y $x = \xi + \eta_0$ cambia el signo de $f(x)$, entonces tiene que desaparecer (B, §.3, Teor.2) entre ellos, para un valor $x = \xi + \eta$, de modo que $f(\xi)$ se diferencíe de cero a lo sumo en ε, por lo que no puede ser 2ε.

4. *Teorema.* Si la función continua $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ (para cada una de las x) nunca se vuelve negativa desde $x = a$ hasta $x = b$, pero entre estos límites se vuelve menor que cada magnitud definible, entonces *alcanza* también el valor cero.

Demostración. Puesto que $f(x)$ para cada x determinada también posee valor determinado, entonces, para tal x, sólo puede ser menor que cada magnitud definible si allí desaparece. Ahora sean x_1 y x_2 dos números tales que entre ellos estén situados otros para las cuales $f(x)$ se vuelve arbitrariamente pequeña; si se conserva la nota en la demostración del segundo teorema, es decir, si forma números x_1, x_2,etc. mediante las fórmulas de recursión indicadas allí, en las cuales aún deben darse más detalles acerca de la elección de los signos dejados como indeterminados, entonces, en primer lugar, podrían ser $x = x_3$, o $x = x_4$,etc., $x = x_n$, tales sitios en los cuales $f(x)$ se vuelve arbitrariamente pequeña. Pero entonces desaparece en estos lugares, como se desprende del inicio de esta demostración, y el teorema estaría demostrado. O sea, se trata tan sólo de la demostración cuando la función no desaparece ni para x_3 ni para x_4, etc., según que tantos de estos números se puedan formar.

Los números x para los cuales $f(x)$ se vuelve arbitrariamente pequeña son o más grandes que x_3 o menores que x_4, o parcialmente mayores o menores. En el primer caso x_4 se forma a partir de x_3 con ayuda del signo positivo, en el segundo, con ayuda del negativo; en el tercero, según que tan arbitrariamente se determine, con el positivo. En forma similar x_5 se forma a partir de x_4, y así sucesivamente, de modo que crea una serie numérica x_1, x_2,etc. con la indicación numérica X, demuestro que $f(X)$ es cero.

Si no fuera cero sino 3ε, entonces se forma, tal como en el segundo teorema, η_0 y se toma n tan grande como en ese caso, es decir de tal magnitud que x_n, x_{n+1},etc. se diferencíe de X en menos de η_0. Ahora x_n y x_{n+v} son valores entre los que están situados números x para los que $f(x)$ se vuelve arbitrariamente pequeña, por ejemplo $< \varepsilon$, entonces $f(X)$, que se puede diferenciar en menos de ε de todos los números $f(x)$ donde $X - \eta_0 < x < X + \eta_0$, es a lo sumo 2ε y no 3ε. Pero si no hubiera ninguna v, es decir, si se consiguieran a partir de x_n siempre valores más grandes o más pequeños x_{n+1}, x_{n+2},etc., entonces x_m sería la última x a formarse que posee respectivamente un valor más pequeño o más grande que la anterior; entonces x_{m+1}, x_{m+2},etc. son todos respectivamente más grandes o más pequeños que x_m y forman una serie de miembros creciente o decreciente, que, sin embargo permanecen siempre bajo o sobre x_{m-1}. Se halla que $X = x_{m-1}$ por el mismo cálculo como en el segundo teorema en el caso correspondiente. Mientras $f(X) = f(x_{m-1})$ poseea un valor determinado 3ε, $f(x)$ tiene que ser, por lo tanto, arbitrariamente pequeña para valores x, que estén arbitrariamente cercanos a x_{m-1}, es decir, entre $X = x_{m-1}$ y x_n, según que tan grande se tome n. Sin embargo, esto no es posible debido a la continuidad de $f(x)$.

3. *Corolario.* Si una función continua desde $x = a$ hasta $x = b$ (para cada uno de los valores) no posee valores iguales en todas partes, entonces alcanza un máximo y además un mínimo para un valor definido de x.

5. *Teorema.* Si la función continua $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ (para cada uno de los valores), no se vuelve positiva, sino sólo más allá de X para cada uno de los valores que estén situados entre a y un número racional o irracional X, donde $a < X < b$, según que tan próximo esté X, entonces $f(X) = 0$.

Demostración. Sea x_1, x_2,etc. una serie numérica para X, cuyos miembros deben estar todos situados bajo X. Entonces

$$f(X) = [f(x_1), f(x_2),\text{etc.}]$$

no se vuelve positivo; es imposible que pueda ser negativo debido a la continuidad de $f(x)$, porque poseería entonces un valor negativo determinado y definible diferente de cero, mientras que $f(x)$ es positivo, incluso para el valor más pequeño que hace a la x más grande que X, según la suposición. Entonces sólo queda que $f(X)$ es cero.

6. *Teorema.* Una función continua $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ (para cada uno de los valores) es también uniformemente continua. (B, §.3, Def.1).

Demostración. Si 3ε denota una magnitud arbitraria, entonces existe un número tal que desde $x = a$ hasta $f(x) - f(a)$ su valor absoluto es $\leq 3\varepsilon$. Un valor que permita esto es el mayor y hace simultáneamente que $f(x) - f(a) - 3\varepsilon = 0$ (B, §.3, Teor.5). Sea este valor x_1. En forma similar, se halla un número x_2 como el mayor, que provoca que $f(x) - f(x_1) \leq 3\varepsilon$ desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$. Así se continúa; si se llega a $x_n = b$ después de un número finito de operaciones n o se halla que $f(x) - f(x_{n-1})$, desde $x = x_{n-1}$ hasta $x = b$, aún no excede a 3ε, entonces el teorema está demostrado.

Aún queda el caso restante de que no exista ninguna n, es decir, el caso de que las magnitudes x_1, x_2,etc. formen una serie infinita de magnitudes crecientes, que estén situadas por debajo de b. Esta serie sería, entonces, una serie numérica cuya indicación numérica es X, es digno de mencionar su característica según lo cual consiste la ecuación para cada n: $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Ahora, sea η_0 de tal naturaleza que $f(X)$ se diferencíe de $f(X-\eta)$ en menos de ε, siempre que $\eta < \eta_0$. Entre los números $X - \eta_0$ y X pueden caer x_n, x_{n+1},etc. de la serie numérica antes mencionada, de modo que (B, §.2, Consec.1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ fuera menor que 2ε, mientras que, por otro lado, tendría que ser 3ε. La suposición tomada como base es por lo tanto imposible, y la función es uniformemente continua.

Halle, en octubre de 1871.

Bibliografía

1. Berberian, Sterling K., Fundamentals of Real Analisys, 1ª ed., North America, Universitext Editorial Board,1926 (reimpreso en New York, Springer, 1998), 9 capítulos - 479 pág.

2. Boyer, Carl B., The History of the Calculus and ist Conceptual Development, 1ª ed., Hafner Publishing Company, 1949 (reimpreso por Dover Publications, New York, 1959), VIII cap. - 309 pág.

3. Cantor, Georg, Gesammelte Abhandlungen - Mathematischen und Philosophischen Inhalts, 1ª ed. E. Zermelo: 1932, (reimp. 1990), Berlín, Julius Springer, IV cap.- 483 pág.
   - "Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz." *Crelles Journal f. Mathematik* T. 72, P. 130 - 138 (1870).
   - "Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt." *Crelles Journal f. Mathematik* T. 72, P. 139 - 142 (1870).
   - "Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt." *Crelles Journal f. Mathematik* T. 73, P. 294 - 296 (1871).
   - "Über trigonometrische Reihen." *Math. Annalen* T. 4, P. 139 - 143 (1871).
   - "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen." *Math. Annalen* T. 5, P. 123 - 132 (1872).

- "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen." *Crelles Journal f. Mathematik* T. 77, P. 258 - 262 (1874).
- "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre." *Crelles Journal Mathematik* T. 84, P. 242 - 258 (1878).
- "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten." *Math. Annalen* T. 15, P. 1 - 7 (1879); T. 17, P. 355 - 358 (1880); T. 20, P. 113 - 121 (1882); T. 21, P. 51 - 58 (1883).

4. Cantor, Georg, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers, 1ª ed. Instituto Politécnico Nacional, México, 2 cap.- 208 pág.

5. Carslaw, H. S., Introduction to the Theory of Fourier's series and Integrals, 3ª ed., Macmillan and Company, 1930 (reimpreso por Dover Publications, New York, 1950), X cap. - 368 pág.

6. Courant, Richard / John, Fritz, Introduction to calculus and analysis. Volume I, Versión autorizada en español, Editorial Limusa, México D. F., 1999, 9 cap. -668 pág.

7. Dauben, Joseph Warren, Georg Cantor - His Mathematics and Philosophy of the Infinite, 1ª ed., Cambridge, Harvard University Press, 1979 (reimpreso en Princeton, 1990), 12 cap. - 299 pág.

8. Dedekind, Richard, Essays on the Theory of Numbers, 1ª ed., Dover Publications, Inc., New York, 1963, 2 cap.-115 pág. (traducción autorizada por Wooster Woodruff Beman).

9. Fulks, Watson, Advanced Calculus - An Introduction to Analysis, 2ª ed., New York, J. Wiley, 1969 (8va impresión, 1967), 20 capítulos - 597 pág.

10. Grattan-Guinness, I., From the Calculus to Set Theory: 1630-1910. An Introductory History, edición de 1980, Versión española de Mariano Martínez Pérez, Editorial Alianza, Madrid, 1984, 6 cap. - 327 pág.

11. Heine, Eduard, "Ueber trigonometrische Reihen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle's Journal), T. 71, P. 353 - 365, Febrero 1870.

12. Heine, Eduard, "Die Elemente der Functionenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle's Journal), T. 74, P. 172 - 188, Octubre 1872.

13. Lelong-Ferrand, Jaqueline/Arnaudiés, Jean-Marie, Curso de Matemáticas - Tomo 2 - Análisis, 1ª ed., Barcelona, Editorial Reverté, 1918 (impresión en México, Reverté, 1980), 758 pág.

14. Riemann, Bernhard, Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass, 2a ed., Editado por Heinrich Weber con la asistencia de Richard Dedekind, 1953, Dover Publications, Inc. New York, N. Y., 3 Tratados, 558 pág.
 - "Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe." *Habilitationsschrift,* 1854, P. 227 - 264.

15. Sestier, Andrés, Diccionario enciclopédico de las matemáticas, 1ª ed., México D. F., Editorial del Valle de México, 1982, XIII cap. - 483 pág.

16. Spivak, Michael, Calculus, Second Edition, Versión española por Dr. Bartolomé Frontera Marqués, Calculus - Cálculo infinitesimal, 2ª ed., 1998, Reverté Ediciones, México D.F., 29 cap. - 925 pág.

17. Zygmund, A., Trigonometric Series. Volume I, 1ª ed., Warsaw, 1935 (reimpresión en Cambridge, Cambridge University Press, 1993), IX cap. - 374 pág.