

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚMERO DICROMÁTICO Y
TORNEOS CIRCULANTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS ALBERTO SERRATO HERNÁNDEZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MIKA OLSEN

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres
A mis hermanos

A mi patria

Agradecimientos

“Si pudiéramos enumerar cuánto es lo que debemos a los demás, ya no nos quedaría mucho en propiedad.”

JOHANN WOLFGANG VON GOETHE

Con la publicación de esta tesis, culmino un trabajo de muchos años y comienzo una nueva etapa en mi vida. Llegar hasta este punto no ha sido fácil, y jamás lo hubiera logrado sin el apoyo y la compañía de mucha gente muy valiosa para mí. Por eso, quiero dar gracias a todos quienes han colaborado directa o indirectamente en el desarrollo de esta tesis.

En primer lugar, agradezco a mi familia el apoyo incondicional que me ha brindado durante toda mi trayectoria escolar hasta llegar a la Universidad, especialmente a mis padres María Luisa y Mario† por ser los causantes de mi arribo a este bello planeta. Gracias mamá por todo tu cariño y comprensión, y por estar presente siempre que necesité ayuda. Gracias padre por encargarte de que nada me faltara mientras tuviste vida. Gracias a mis hermanos Luis, Fabián, Jorge† y Carmen por darme su ejemplo de superación y por apoyarme siempre que lo necesité. Gracias a mis tíos Jesús, Gabino† y Guadalupe, y a mis primos por estar con nosotros en los momentos difíciles.

Agradezco también a Sandra por estar conmigo y motivarme a terminar esta tesis e ingresar a la maestría. Gracias amiga por todo lo que me has apoyado siempre.

Un especial agradecimiento al profesor Víctor Neumann†, gran matemático y excelente persona que siempre contará con mi respeto y admiración. Agradezco todas sus enseñanzas, el apoyo que me brindó permanentemente y sobre todo, su amistad. Gracias profesor por compartirme su sabiduría, por adentrarme en el mundo de las gráficas y por dirigir esta tesis mientras hubo oportunidad.

Agradezco enormemente a mi directora de tesis, la Dra. Mika Olsen, por aceptar ayudarme a terminar esta obra y poner gran empeño en lograr un trabajo final de gran hechura, además de toda la paciencia que me tuvo. En la misma medida agradezco a mi asesora en la Maestría en Ciencias Matemáticas, la Dra. Gabriela Araujo, por su apoyo en mis estudios de posgrado y en la realización de esta tesis, su orientación y estímulos han sido fundamentales para lograr terminar este trabajo a tiempo. Igualmente agradezco a la Dra. Hortensia Galeana por sus enseñanzas durante la maestría, por la orientación personal que me ha brindado y por confiar en mi trabajo. Agradezco al Dr. Juan José Montellano por su apoyo e interés en esta tesis. Agradezco también a la Dra. Pilar Valencia por su apoyo permanente en mi carrera, por su ayuda invaluable para lograr un buen resultado final en este trabajo y por su valiosa amistad.

Agradezco a mis profesores de la licenciatura y la maestría por compartir sus conocimientos y contribuir en mi formación como matemático. Especialmente agradezco al Mat. Luis Briseño por enseñarme lo divertido y apasionante que es hacer matemáticas, al Dr. Alberto Barajas† por compartir su genialidad y enseñarme la belleza detrás de la geometría. Al Dr. Emilio Lluís R. por enseñarme lo sublime del álgebra. A la profra. Beatriz Rodríguez por introducirme al fascinante mundo de la probabilidad. Al Dr. Santiago López de Medrano por sus enseñanzas sobre la variable compleja. Al Dr. Francisco Larrión por escucharme y orientarme. Agradezco a mis amigos de la licenciatura y la maestría por estar conmigo y hacer más placentera mi estancia en la Facultad y el Instituto, les deseo mucho éxito en sus carreras y en su vida.

Agradezco a mis tutoras en Universum, la Mat. Concepción Ruiz y la Mat. Alejandra García, por su ayuda y su amistad durante mi estancia en el museo como becario de la Dirección General de Divulgación de la Ciencia. Gracias también a todos mis compañeros por compartir conmigo una bella etapa de mi formación universitaria.

Agradezco a mi tutora en la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, la M. en C. Larisa Enríquez por su orientación, apoyo y amistad durante mi estancia en el Departamento de Productos Interactivos, primero como servicio social y posteriormente como becario. Gracias a todos mis compañeros de la DGSCA por formar parte de mi desarrollo universitario, espero que tengan todos prósperas carreras.

Agradezco también a mis profesores del Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras por abrirme el entendimiento a nuevas culturas a través del estudio de sus idiomas y por brindarme su amistad. Agradezco a mis amigos del CELE por la efímera pero fraterna relación que mantuvimos en todo momento.

Agradezco a mis entrenadores y compañeros de los equipos de atletismo y natación de la UNAM por ayudarme a desarrollarme deportivamente y brindarme su amistad.

Agradezco a mi querida *alma mater* por todas las satisfacciones y experiencias enriquecedoras que he vivido como universitario, me enorgullece que actualmente la UNAM sea considerada una de las cien mejores universidades del orbe. Gracias a mi querida Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas por todo lo que he vivido en su seno. Gracias a todos mis compañeros universitarios y especialmente a quienes estuvieron conmigo en el coyuntural año de 1999. Agradezco al plantel 6 de la Escuela Nacional Preparatoria por acojermé en sus aulas antes de mi llegada a la Ciudad Universitaria. Agradezco a mis amigos del bachillerato por todo lo que pasamos juntos y espero que el destino me permita volverlos a ver algún día.

Agradezco a mi querido país, México, por ser la nación independiente, humana y generosa, a la que entrego mi existencia¹, y que me brindó la oportunidad de estudiar una carrera y desarrollarme profesionalmente.

Muchas Gracias
Carlos Serrato

¹Paráfrasis del *Juramento a la Bandera*.

Índice

Introducción	XIII
0. Preliminares	1
0.1. A priori	1
0.2. Nociones de gráficas	3
0.3. Introducción a las digráficas	7
0.3.1. Digráficas circulantes	12
0.3.2. Número dicromático	14
I Torneos circulantes	17
1. Todos contra todos	19
1.1. Torneos	19
1.1.1. Torneos transitivos	22
1.1.2. Torneos circulantes	23
1.2. Torneos 3-dicromáticos de orden mínimo	24
1.2.1. El torneo ST_7	25
1.2.2. Los torneos W , W_0 y W_1	26
1.3. La familia $\{\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle\}$	33
2. Cuatro colores bastan	37
2.1. El torneo ST_{11}	37
2.2. La familia $\{D_m\}$	46

II	Sumas de Zykov	55
3.	Hipergráficas y sumas de Zykov	57
3.1.	Hipergráficas	57
3.1.1.	Multicubiertas y número de cubrimiento	59
3.1.2.	Hipergráficas circulantes	61
3.2.	Sumas de Zykov	63
3.2.1.	Sumas de Zykov y número dicromático	65
3.3.	Funciones de peso críticas	74
3.3.1.	Funciones de peso subcríticas	74
3.3.2.	Funciones de peso supracríticas	77
4.	Torneos circulantes r-dicromáticos críticos	79
4.1.	Trazando caminos	79
4.2.	Las familias \mathcal{F}_k	85
4.3.	La huidiza familia \mathcal{F}_7	86
A.	Aplicaciones	89
A.1.	Aplicación 1	89
A.2.	Aplicación 2	90
	Epílogo	91

Índice de figuras

1.	La gráfica de Petersen.	4
2.	Digráfica D y su gráfica subyacente $G \cong K_5$	8
3.	Ejemplo de un camino dirigido u_0, u_1, u_2 y un semicamino u_0, u_3, u_2	11
4.	Ejemplo de una digráfica D , uno de sus subconjuntos acíclicos $\{u_0, u_1, u_2\}$ y su digráfica opuesta D^{op}	12
5.	Digráfica circulante $\vec{C}_7(1, 3)$	13
1.1.	Torneos pequeños.	21
1.2.	Torneo transitivo TT_4	23
1.3.	Torneo circulante $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$	25
1.4.	El torneo especial $ST_7 = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$. Al torneo $ST_7 - \{0\}$ se le denomina ST_6	26
1.5.	Torneo W	27
1.6.	Torneo W_0	27
1.7.	Torneo W_1	28
1.8.	Torneo \bar{W}_1	33
2.1.	El torneo \vec{C}_3 es 2-dicromático, y el torneo $TT_2 \cong \vec{C}_3 - \{i\}$ con $i \in \{0, 1, 2\}$ es 1-dicromático.	38
2.2.	Torneo ST_{11}	39
2.3.	Conjuntos acíclicos maximales ajenos a U_0 en ST_{11}	40
2.4.	La digráfica $t(K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3)$	49

2.5.	Vértices de $H_{r,s}$ descartados (en blanco) cuando $\{3, r + 3\} \subseteq S$.	50
2.6.	Partición de $V(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle)$ en cuatro subconjuntos acíclicos.	51
2.7.	Organización conveniente de $N^+(0)$ la cual permite observar claramente que $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle [N^+(0)] - \{4m + 1\} \cong H_{2m-1,m}$.	52
2.8.	Aspecto de $N^+(0)$ en D_m (en blanco).	53
3.1.	Hipergráfica.	58
3.2.	Función de peso $\xi^{(5)}$ sobre la hipergráfica circulante $\Lambda_{7,3}$.	62
3.3.	Composición del torneo \vec{C}_5 con el torneo \vec{C}_3 .	64
3.4.	\vec{C}_3 bajo ξ .	72
3.5.	El valor mínimo de a es $\left\lceil \frac{(\xi_0 - \xi_1) + \xi_2}{2} \right\rceil$.	72
4.1.	El (3)(26)-camino W en D .	83

Prefacio

“Les mathématiques ont un triple but. Elles doivent fournir un instrument pour l'étude de la nature. Mais ce n'est pas tout: elles ont un but philosophique et, j'ose le dire, un but esthétique. Elles doivent aider le philosophe à approfondir les notions de nombre, d'espace, de temps. Et surtout leurs adeptes y trouvent des jouissances analogues à celles que donnent la peinture et la musique. Ils admirent la délicate harmonie des nombres et des formes; ils s'émerveillent quand une découverte nouvelle leur ouvre une perspective inattendue; et la joie qu'ils éprouvent ainsi n'a-t-elle pas le caractère esthétique, bien que les sens n'y prennent aucune part? Peu de privilégiés sont appelés à la goûter pleinement, cela est vrai, mais n'est-ce pas ce qui arrive pour les arts les plus nobles? C'est pourquoi je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres. Quand même le but physique et le but esthétique ne seraient pas solidaires, nous ne devrions sacrifier ni l'un ni l'autre.”

HENRI POINCARÉ, *La valeur de la science*

Las matemáticas pueden ser muchas cosas: un juego, una herramienta, una pasión. La abstracción es una habilidad que puede resultar divertida, útil o cautivadora. Ninguna barrera impide a un ser humano acercarse a las matemáticas y llegar a lugares que desbordan la imaginación. A mí me gustan las matemáticas porque los senderos no están establecidos. Las matemáticas son lo que uno quiere que sean.

La rama de estudio que elegí para desarrollar esta tesis es la *Teoría de Gráficas*. Muchas situaciones del mundo real pueden ser descritas por medio de un diagrama que consista de un conjunto de puntos, y líneas que unan ciertos pares de ellos. Por ejemplo, los puntos pueden representar personas, con líneas uniendo a los pares de amigos; o pueden ser centros de comunicación con líneas representando los enlaces de comunicación. En tales diagramas lo principal a tomar en cuenta es cuando dos puntos están unidos por una línea y cuando no, siendo irrelevante la manera en que la línea los une. La interpretación de las situaciones de este tipo dió origen a la noción de *gráfica*. Del estudio de las gráficas se ocupa la Teoría de Gráficas como una rama de las Matemáticas Discretas.

La Teoría de Gráficas es un área importante de la Combinatoria, y durante las últimas décadas se ha constituido, además, como un área significativa dentro de las Matemáticas en general. Se encuentra relacionada con muchas otras ramas, incluyendo la Teoría de Grupos, el Álgebra de Matrices, el Análisis Numérico, la Probabilidad y la Topología. Adicionalmente a su crecimiento en importancia e interés como tema matemático, la Teoría de Gráficas tiene aplicaciones en muchos diversos campos, tales como las Ciencias de la Computación, la Química, la Sociología y la Lingüística.

El hecho es que la Teoría de Gráficas sirve de modelo matemático para cualquier sistema que involucre una relación binaria. Y es en parte debido a su representación esquemática que las gráficas tienen un atractivo estético e intuitivo. No deben subestimarse los alcances del estudio de las gráficas, aunque haya muchos resultados en este campo con una naturaleza elemental, hay también una gran abundancia de problemas con suficiente delicadeza combinatoria como para retar al más experimentado matemático.

Hay ocasiones en las que la definición de gráfica descrita al principio no es suficiente para determinados propósitos, y este hecho ha llevado a desarrollar nuevos tópicos. Cuando las características de las gráficas no son suficientes para satisfacer los requerimientos, se tiene la opción de las gráficas dirigidas, las cuales introducen la noción de dirección. Al enfrentarse con problemas de tránsito, por ejemplo, es necesario conocer cuáles caminos en la red vial son de un sólo sentido y en qué dirección debe ir el tráfico. Claramente, una gráfica de la red vial no es muy útil en tal situación, lo que se necesita es una gráfica en la que cada arista tenga una determinada dirección, una gráfica dirigida o *digráfica*. Otra de las aplicaciones –y de las más importantes– de las digráficas es en la Teoría de Redes.

Tal como sucede con las gráficas, las digráficas tienen una representación pictórica simple. Una digráfica es representada mediante un diagrama similar al de una gráfica pero con flechas en lugar de líneas. Cada concepto que es válido para las gráficas puede extenderse también para las digráficas; de hecho, a cada digráfica suele asociársele una gráfica, con los mismos vértices pero con una arista en lugar de flecha.

Mi incursión en el estudio de las gráficas se debió a la inspiradora cátedra sobre el tema impartida por el gran matemático mexicano Víctor Neumann Lara (1933-2004), un hombre carismático y afable cuyo talento le mereció el reconocimiento mundial por sus aportaciones matemáticas. Merced a su mente visionaria, Víctor fue fundador en México de la rama de la Teoría de Gráficas, previendo la importancia que este campo adquiriría con el paso del

tiempo. Y es en buena medida gracias a su labor investigadora y docente que la combinatoria devino en una especialidad con crecimiento acelerado y dinámico. Además, Víctor siempre se caracterizó como innovador incansable y gran promotor, fue fundador del *Coloquio de Teoría de las Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones* que se efectúa cada año en distintas sedes del interior de la república.

El presente trabajo lo comencé a desarrollar bajo la dirección de Víctor, quien en 1982 introdujo el concepto de *número dicromático* para digráficas como una generalización muy natural del ampliamente estudiado *número cromático* para gráficas. Y aludiendo a esta trascendental aportación –que es aplicada en diversos campos de estudio como la Teoría de Núcleos y la Teoría de Torneos– esta tesis versa sobre una clase particular de digráficas llamadas *torneos circulantes* y su relación con el citado número dicromático, basándose en diversos artículos desarrollados por Víctor entre los años de 1982 y 2000.

Hacia el año de 1999, Víctor desarrolló un método para construir familias infinitas de torneos circulantes no isomorfos con un arbitrario número dicromático mayor que tres, exceptuando el valor siete, y que además cumplieran una propiedad llamada *criticidad en vértices*. De la singularidad existente para el número siete, surgió la idea de tocar este tema en la tesis y avanzar un poco en la construcción de la familia evasora mediante técnicas nuevas.

La parte culminante de esta obra la realicé bajo la dirección de una destacada alumna de Víctor, la Dra. Mika Olsen, quien actualmente trabaja en encontrar la familia faltante.

Introducción

“Desocupado lector, sin juramento me podrás creer que quisiera que este libro, como hijo del entendimiento, fuera el más hermoso, el más gallardo y más discreto que pudiera imaginarse. Pero no he podido yo contravenir a la orden de naturaleza; que en ella cada cosa engendra su semejante.”

MIGUEL DE CERVANTES, *Don Quijote de la Mancha*

En la presente tesis se manejan los objetos matemáticos conocidos como *digráficas* y sus propiedades. Se muestran técnicas que permiten construir familias infinitas de digráficas con ciertas características relacionadas a un número entero $r \geq 3$, así como el marco teórico de las mismas.

Un concepto que se puede definir para las digráficas es el de *número dicromático*, el cual es un entero positivo asociado a cada digráfica de forma única como se explica en el Capítulo 0. Este capítulo preliminar se ha incluido para quienes no estén familiarizados con la *Teoría de Gráficas* o algunos otros conceptos utilizados en esta tesis. Si se está familiarizado con el tema puede omitirse este capítulo y avanzar directamente al Capítulo 1 en el que aparecen los primeros resultados importantes.

La primera parte del texto arroja algunos resultados fundamentales sobre un tipo de digráfica llamada *Torneo Circulante*.

Si una digráfica tiene número dicromático r , es denominada r -dicromática. Dentro de la clase de las digráficas existe un subconjunto de ellas llamadas Torneos, y entre los torneos existen los denominados Torneos Circulantes, tal como se explica en el Capítulo 1, en donde también se define lo que es un torneo r -dicromático crítico. Al final del capítulo se exhibe una familia de torneos 3-dicromáticos críticos no isomorfos dos a dos.

Utilizando estos términos, el objetivo de esta tesis es mostrar cómo se pueden construir familias infinitas de torneos circulantes r -dicromáticos críticos, no isomorfos dos a dos, para cualquier número natural r mayor que 3 y distinto de 7.

En el Capítulo 2 se presenta el único torneo 4-dicromático de orden 11, llamado ST_{11} , y se muestra que es la única gráfica orientada 4-dicromática de orden a lo más 11. Adicionalmente, se muestra cómo construir una familia infinita de torneos circulantes 4-dicromáticos críticos, no isomorfos dos a dos (la familia $\{D_m\}$), y se concluye la primera parte de esta tesis.

En la segunda parte se exhibe una operación entre digráficas llamada *Suma de Zykov*, así como el concepto de *Hipergráfica*. Con la ayuda estos elementos se alcanza el objetivo planteado.

Primeramente, en el Capítulo 3 se expone el concepto de Hipergráfica y se define lo que es el *número de cubrimiento* para una hipergráfica y una función de peso sobre sus vértices. También se muestran algunos resultados importantes en torno al citado número de cubrimiento. Más adelante, se introduce una operación entre digráficas llamada Suma de Zykov y se muestra el comportamiento del número dicromático bajo esta operación. Posteriormente, se exhibe la relación estrecha que hay entre el número de cubrimiento de una hipergráfica y el número dicromático de las sumas de Zykov.

En el Capítulo 4 se muestra la construcción de familias de torneos circulantes r -dicromáticos críticos, no isomorfos dos a dos, para toda $r \geq 3$ distinta de 7.

Como colofón a este trabajo, en el Apéndice A se muestran dos aplicaciones de los resultados expuestos a lo largo de la tesis.

Capítulo 0

Preliminares

Los torneos son un caso particular de las digráficas, las cuales heredan la mayoría de sus propiedades directamente de las gráficas de manera natural. En este capítulo se incluyen los aspectos de las gráficas y digráficas que serán de utilidad para introducir diversos conceptos de torneos. Como preámbulo se presentan algunos conceptos y resultados preliminares para los lectores que no estén familiarizados con ellos.

0.1. A priori

Primeramente, algunos conceptos generales que hay que tener presentes.

Definición 0.1.1 \mathbb{N} denota al conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Definición 0.1.2 Para toda $n \in \mathbb{N}$ se denota al conjunto de los números enteros módulo n , $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, como \mathbb{Z}_n , y se dice que $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ es el intervalo de longitud n .

Notación 0.1.3 La expresión $a \equiv b \pmod{n}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, significa que a y b dejan el mismo residuo al dividirlos por n , o equivalentemente, que $a - b$ es un múltiplo de n .

Definición 0.1.4 Sean a y n enteros primos relativos. Se dice que a es un residuo cuadrático módulo n si existe un entero x tal que $x^2 \equiv a \pmod{n}$.

Definición 0.1.5 Para toda función $f : X \rightarrow Y$ se denota a la imagen de f como $\text{Im}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ para alguna } x \in X\}$.

Algunos conceptos del Álgebra que es importante conocer se exponen a continuación.

Definición 0.1.6 Un grupo $\langle G, * \rangle$ es un conjunto G cerrado bajo una operación binaria $*$ que satisface:

1. La operación binaria $*$ es asociativa.
2. Existe un elemento e en G tal que $e * a = a * e = a$ para toda $a \in G$. Este elemento e es denominado identidad para $*$ en G .
3. Para cada $a \in G$, existe un elemento a' en G con la propiedad de que $a' * a = a * a' = e$. El elemento a' es un inverso de a con respecto a la operación $*$.

Observación 0.1.1 El conjunto \mathbb{Z}_n junto con la operación $+_n$ (suma módulo n) forma un grupo.

Definición 0.1.7 Si X es un conjunto y G es un grupo, entonces X es un G -conjunto si existe una función $\alpha : G \times X \rightarrow X$, llamada una acción¹ y denotada como $\alpha : (g, x) \mapsto gx$, tal que:

1. $ex = x$ para toda $x \in X$
2. $g(hx) = (gh)x$ para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in X$

Definición 0.1.8 Si X es un G -conjunto y $x \in X$, entonces la G -órbita² de x es

$$\mathcal{O}(x) = \{gx : g \in G\} \subseteq X$$

Definición 0.1.9 Un G -conjunto X es transitivo siempre que tenga una sola órbita, es decir, si para cualesquiera $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

Definición 0.1.10 Una permutación de un conjunto dado A es una función biyectiva $\sigma : A \rightarrow A$.

¹Si X es un G -grupo se dice que G actúa sobre X .

²Suele decirse simplemente *órbita* en lugar de G -órbita cuando no hay riesgo de ambigüedad.

Observación 0.1.2 Cuando el conjunto A es finito, una permutación de A es una función uno a uno de A en A .

Los conceptos de grupo y permutación se relacionan mediante el siguiente teorema.

Teorema 0.1.11 Sea A un conjunto no vacío, y sea S_A la colección de todas las permutaciones de A . Entonces S_A es un grupo bajo la composición de permutaciones.

0.2. Nociones de gráficas

Una *gráfica* es un par de conjuntos finitos $G = \{V, A\}$, donde $V \neq \emptyset$ y $A \subseteq V^2$ es un conjunto de parejas de elementos de V . A los elementos de los conjuntos V y A se les denomina los *vértices* y las *aristas* de G , respectivamente. Cuando no está claramente especificada la gráfica a la que pertenecen los conjuntos de vértices y aristas de una gráfica, se hace referencia a ellos como $V(G)$ y $A(G)$ donde $G = \{V, A\}$. Una arista $e = \{u, v\} \in A(G)$ suele ser denotada simplemente como uv , y se dice que e une a los vértices u y v , en este caso los vértices u y v son los *extremos* de la arista uv .

A pesar de ser un objeto abstracto, una manera natural de esquematizar una gráfica es representar con sendos puntos a los vértices, y unir con líneas pares de puntos cuando los vértices correspondientes sean adyacentes en la gráfica. De ahí la importancia de la noción de incidencia en la definición de una gráfica. Un vértice v *incide* en una arista e_1 siempre que v sea uno de los extremos de e , así mismo, una arista e_2 *incide* en un vértice u siempre que u sea un extremo de e_2 . Un ejemplo de gráfica se puede observar en la Figura 1, la cual es conocida como la *Gráfica de Petersen*³.

El *tamaño* de una gráfica G es el número de aristas que contiene y se denota como $q = |A(G)|$. Así mismo, $p = |V(G)|$ es el *orden* de G , el número de vértices que contiene la gráfica. De esta forma, una (p, q) -gráfica es una gráfica con orden p y tamaño q . Una gráfica G se dice que es una *gráfica completa* si para cada $u, v \in V(G)$ se tiene que $uv \in A(G)$, una gráfica completa de orden p se denota como K_p . En el caso de la gráfica de Petersen, ésta tiene tamaño 15 y orden 10, por lo que es una $(10, 15)$ -gráfica.

³Esta gráfica a adquirido importancia por la frecuencia con que resulta ser un contraejemplo para importantes conjeturas.

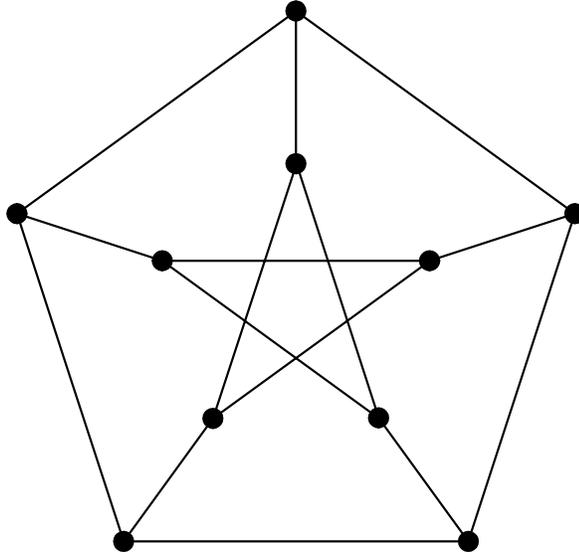


Figura 1: La gráfica de Petersen.

Dada una gráfica G , una *subgráfica* H de G es una gráfica para la cual $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$. Si $V(H) = V(G)$ se dice que H es una *subgráfica generadora* de G .

Definición 0.2.1 Una subgráfica H de G se denomina subgráfica maximal si $A(H) = \{uv \in A(G) : u, v \in V(H)\}$

Para cualquier conjunto S de vértices de G , la *subgráfica inducida* $G[S]$ es la subgráfica maximal de G cuyo conjunto de vértices es S .

En una gráfica G , para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$ se dice que u es *adyacente* a v si $uv \in A(G)$. La *vecindad* de un vértice v en una gráfica G es el conjunto

$$N(v) = \{u \in V(G) : uv \in A(G)\}$$

que consta de todos los vértices u que son adyacentes a v . Si $v \in V(G)$ y $N(v) = \emptyset$ se dice que v es un *vértice aislado* de G . El conjunto

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}$$

es la *vecindad cerrada* de v .

El *grado* de un vértice v de G , denotado por $d(v)$, es el número de vértices adyacentes a v , es decir, $d(v) = |N(v)|$. Al mínimo de los grados de los vértices de la gráfica se le denota como $\delta(G)$ y se dice que es el *grado mínimo* de G ; análogamente, al máximo de los grados de los vértices de la gráfica se le denota como $\Delta(G)$ y se dice que es el *grado máximo* de G . Si en una gráfica G , se tiene que $\delta(G) = \Delta(G) = r$, entonces todos los vértices tienen el mismo grado r y se dice que la gráfica es *regular* de grado r o bien, que es *r -regular*.

Un *camino* de una gráfica G es una sucesión alternada de vértices y aristas

$$v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

que comienza y termina con vértices, y en la cual cada arista x_i es de la forma $v_{i-1}v_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$, es decir, cada arista incide en el vértice que le precede y el que le sigue en la sucesión. Este camino une a los vértices v_0 y v_n , por lo que se le denomina como un *v_0v_n -camino* y puede también escribirse de la forma

$$v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$$

al estar las aristas contextualmente implícitas. La *longitud* del camino es el número de aristas en la sucesión, es decir, el camino tiene longitud n . Si los extremos del camino son distintos se dice que el camino es *abierto*, en el caso contrario, si los extremos coinciden ($v_0 = v_n$) se dice que el camino es *cerrado*⁴. Si todas las aristas de un camino son distintas, se dice que es un *paseo*, y si todos sus vértices –y por ende también sus aristas– son distintos se dice que es una *trayectoria*. Un paseo cerrado se dice que es un *recorrido*. Un *ciclo* es una trayectoria cerrada en donde $n \geq 3$. Se denota como C_n a la gráfica que consiste de un ciclo con n vértices y como P_n a la trayectoria con n vértices. La gráfica C_3 se llama también un *triángulo*.

Una gráfica es *conexa* si cada par de puntos están unidos por una trayectoria. Una subgráfica conexa maximal de una gráfica G es llamada una *componente conexa* o simplemente una *componente* de G . Obsérvese que una gráfica conexa tiene exactamente una componente, mientras que una gráfica disconexa tiene al menos dos componentes.

Si G_1 y G_2 son dos gráficas, se define la gráfica unión $G_1 \cup G_2$ como

$$\begin{aligned} V(G_1 \cup G_2) &= V(G_1) \cup V(G_2) \\ A(G_1 \cup G_2) &= A(G_1) \cup A(G_2) \end{aligned}$$

⁴En ocasiones, a un camino cerrado se le llama *círculo*.

Si U es un conjunto de vértices de G , se define la gráfica resta $G - U$ como

$$\begin{aligned} V(G - U) &= V(G) \setminus U \\ A(G - U) &= \{uv \in A(G) : \{u, v\} \cap U = \emptyset\} \end{aligned}$$

la gráfica resultante de eliminar los vértices de U y las aristas que inciden en ellos en G .

Si un conjunto V de vértices de G es tal que $uv \notin A(G)$ para cualesquiera $u, v \in V$, es decir, si V no contiene vértices adyacentes, se dice que V es un conjunto *independiente*.

Una *coloración* de una gráfica es una asignación de colores a sus vértices⁵; una *coloración propia* es aquella donde los colores se asignan de tal manera que dos vértices adyacentes no tengan el mismo color. Obsérvese que el conjunto de todos los vértices con un mismo color es un conjunto independiente. Se le llama *clase cromática*. Una *n-coloración* de una gráfica G es aquella que utiliza n colores. Nótese que una n -coloración parte a V en n clases cromáticas. El *número cromático* $\chi(G)$ de una gráfica G se define como la mínima n para la cual G tiene una n -coloración propia. Luego, G es llamada *r-cromática* si $\chi(G) = r$, y es llamada *r-cromática crítica* si $\chi(G) = r$ pero $\chi(G - \{u\}) < r$ para todo $u \in V(G)$. Similarmente, G es llamada *r-cromática crítica en aristas* si $\chi(G) = r$ pero $\chi(G - \{e\}) < r$ para toda $e \in A(G)$.

Existen casos especiales de gráficas. De acuerdo con la definición, entre dos vértices sólo puede haber una arista, sin embargo, para la resolución de ciertos problemas puede ser conveniente permitir que haya dos o más aristas entre algunos pares de vértices. A tales aristas se les conoce como *aristas múltiples*. Cuando una gráfica G contiene aristas múltiples se dice que es una *multigráfica*. En una gráfica tampoco están permitidas aristas cuyos extremos sean un mismo vértice, aunque para ciertos problemas también puede ser conveniente permitirlo, a tales aristas se les conoce como *lazos*; cuando una gráfica o multigráfica G contiene lazos se dice que es una *pseudográfica*. En las gráficas las aristas son subconjuntos de dos vértices, una *hipergráfica* es una gráfica cuyas aristas pueden también ser subconjuntos de tres o más vértices; a tales aristas se les conoce como *hiperaristas*. Finalmente, cuando se permite que el conjunto V sea infinito se dice que la gráfica G es *infinita*.

⁵A cada vértice se le asigna sólo un color.

Dos gráficas G y H son *isomorfas* si existe una correspondencia uno a uno entre sus conjuntos de vértices que preserve adyacencias, es decir, si existe una biyección $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in A(G)$ si y sólo si $\varphi(u)\varphi(v) \in A(H)$ para cualesquiera $u, v \in V(G)$; esta relación entre las gráficas G y H se denota como $G \cong H$, o en ocasiones como $G = H$, cuando no haya necesidad de distinguirlas. A tal correspondencia se le denomina un *isomorfismo*.

Un mapeo $\varphi : V(G) \mapsto V(G')$ se dice que es un *morfismo de gráficas* si $\varphi(u)\varphi(v) \in A(G')$ siempre que $uv \in A(G)$ para cualesquiera $u, v \in V(G)$.

Notación 0.2.2 *Un morfismo de gráficas se denota como $\varphi : G \rightarrow G'$.*

Un morfismo de gráficas se llama *monomorfismo* si φ es inyectivo, se llama *epimorfismo* si φ es suprayectivo y se llama *isomorfismo* si φ es biyectivo; es denominado *endomorfismo* si es un morfismo de G en G misma y se llama *automorfismo* a todo isomorfismo que a su vez es un endomorfismo. Obsérvese que un automorfismo de una gráfica G es una permutación de $V(G)$ que mapea las aristas en aristas y vértices no adyacentes en vértices no adyacentes. Claramente el morfismo identidad es un automorfismo, que se denota id , además, si σ es un automorfismo entonces σ^{-1} también es un automorfismo, y si τ es otro automorfismo entonces la composición $\sigma\tau$ es a su vez un automorfismo. Así el conjunto de todos los automorfismos de una gráfica G forma el *grupo de automorfismos* de G y se denota como $\text{Aut}(G)$.

0.3. Introducción a las digráficas

Como se mencionó en el prefacio, una digráfica es una gráfica a cuyas aristas se les ha asociado una orientación, a las aristas orientadas se les denomina flechas. Sea D una digráfica, $V(D)$ y $F(D)$ denotarán respectivamente a los conjuntos de vértices y flechas de D ; dados $u, v \in V(D)$ a la flecha que va de u a v se le denota como (u, v) o simplemente \vec{uv} . Las propiedades de orden p , tamaño q y número cromático χ de las gráficas –entre otras– son heredadas por las digráficas.

Se dice que una digráfica D es *simétrica*, si siempre que la flecha \vec{uv} pertenece a $F(D)$ entonces la flecha \vec{vu} también pertenece a $F(D)$; y se dice que es *asimétrica* si siempre que $\vec{uv} \in F(D)$ se tiene que $\vec{vu} \notin F(D)$.

Definición 0.3.1 *Un conjunto de flechas se dice que es independiente si éstas son disjuntas dos a dos.*

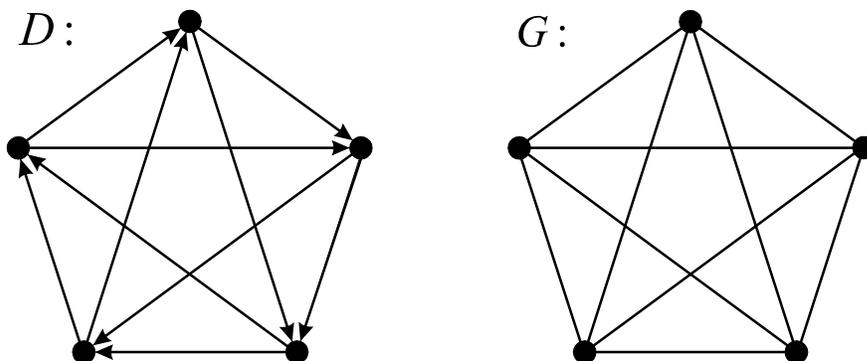


Figura 2: Digráfica D y su gráfica subyacente $G \cong K_5$.

Definición 0.3.2 Si $u, v \in V(D)$ y $\vec{uv}, \vec{vu} \in F(D)$, a la pareja de flechas \vec{uv} y \vec{vu} se le denomina par simétrico de flechas.

Entre el conjunto de las digráficas simétricas y el de las gráficas existe una correspondencia uno a uno muy natural, dada una gráfica G , se denota como G^* a la digráfica simétrica obtenida reemplazando cada arista uv de G por un par simétrico de flechas \vec{uv} y \vec{vu} . A las digráficas asimétricas también se les conoce como *gráficas orientadas*, y se pueden obtener a partir de una gráfica orientando cada una de sus aristas.

Observación 0.3.1 Una diferencia importante entre gráficas y digráficas es que, mientras que en la definición de una gráfica G , entre dos vértices distintos sólo puede haber una arista que los una, en una digráfica D puede haber dos flechas que unan dos vértices distintos, siempre y cuando tengan direcciones opuestas.

Como en el caso de las gráficas, distintas necesidades particulares dan pie a la existencia de varios tipos especiales de digráficas. Si más de una flecha en la misma dirección es permitida entre dos vértices distintos, se dice que se tiene una *multidigráfica*, al conjunto de dos o más uv -flechas se les llama flechas *paralelas*. Una digráfica en la que se permiten lazos (dirigidos) se denomina una *pseudodigráfica*.

Definición 0.3.3 La gráfica subyacente de una digráfica D es la gráfica G obtenida a partir de D reemplazando todas sus flechas \vec{uv} ó \vec{vu} por la arista uv (Figura 2).

Al igual que en las gráficas, dos vértices u y v de D se dice que son adyacentes si existe una flecha en D que los une; adicionalmente, si \overrightarrow{uv} es la flecha que los une, se dice que u es adyacente hacia v , y que v es adyacente desde u .

Si D es una digráfica y $v \in V(D)$, se define

$$N^+(v) = \{w \in V(D) : \overrightarrow{vw} \in F(D)\}$$

es decir, $N^+(v)$ es el conjunto de los vértices adyacentes desde v , y se le conoce como la *exvecindad* de v . A los elementos de $N^+(v)$ se les conoce como los *exvecinos* de v , y $d^+(v) = |N^+(v)|$ se llama el *exgrado* de v . Análogamente, se define

$$N^-(v) = \{w \in V(D) : \overrightarrow{wv} \in F(D)\}$$

el conjunto de los vértices adyacentes hacia v , denominado la *invecindad* de v , y $d^-(v) = |N^-(v)|$ es el *ingrado* de v . Si todos los vértices de D tienen ingrado y exgrado r , se dice que D es una digráfica regular de grado r ó r -regular.

De manera análoga a las gráficas, los conjuntos

$$\begin{aligned} N^+[v] &= N^+(v) \cup \{v\} \\ N^-[v] &= N^-(v) \cup \{v\} \end{aligned}$$

representan, respectivamente, a la *exvecindad cerrada* e *invecindad cerrada* de v .

Un vértice no aislado $v \in V(D)$ es una *fuentes* si $N^-(v) = \emptyset$, y es un *pozo* si $N^+(v) = \emptyset$.

Dada una digráfica D , se define a la *digráfica opuesta* D^{op} de D como aquella que se obtiene a partir de D invirtiendo cada una de sus flechas. De esta forma, si en D el vértice v es adyacente hacia u , en D^{op} el vértice v es adyacente desde u , y toda vu -arista en D se transforma en una uv -arista en D^{op} .

Afinando las definiciones originales para gráficas, un *camino dirigido* en una digráfica es una sucesión alternante de vértices y flechas de la forma

$$v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

en donde x_i es la flecha $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Un camino (dirigido) cerrado es aquel en el que sus extremos coinciden⁶.

⁶En ocasiones, a un camino dirigido cerrado se le llama *circuito dirigido*.

Definición 0.3.4 Se dice que un camino es generador si contiene a todos los vértices de la digráfica.

Una *trayectoria dirigida* es un camino en el cual todos los vértices son distintos; un *ciclo dirigido* es un camino cerrado con todos los vértices distintos excepto el primero y el último. Se denota como \vec{C}_n a la gráfica que consiste de un ciclo con n vértices⁷ y como \vec{P}_n a la trayectoria con n vértices. Un *paseo dirigido* es un camino que no repite aristas, y un *recorrido dirigido* es un paseo cerrado.

A diferencia del caso de las gráficas, existen varios tipos distintos de conexidad para las digráficas. Entonces, para distinguirlos es necesario incluir un término que se aplica sólo a la Teoría de Digráficas.

Definición 0.3.5 Un semicamino en una digráfica D es una sucesión alternante

$$v_0, x_1, v_1, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

de vértices y flechas en la que $x_i = \overrightarrow{v_{i-1}v_i}$ ó $x_i = \overleftarrow{v_i v_{i-1}}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Observación 0.3.2 Los mismos conceptos para caminos dirigidos se aplican a los semicaminos para así obtener semitrayectorias, semipaseos, semiciclos y semirecorridos.

Ejemplo. En la Figura 3 se puede observar que la sucesión u_0, u_1, u_2 es un $u_0 u_2$ -camino de la digráfica pues cada flecha se recorre en concordancia con su orientación. Sin embargo, la sucesión u_0, u_3, u_2 es un $u_0 u_2$ -semicamino ya que la flecha $\overrightarrow{u_2 u_3}$ se recorre en sentido inverso.

Una digráfica D es *conexa*⁸ si para cada par de vértices u, v , D contiene una uv -semitrayectoria (por supuesto, si D contiene una uv -semitrayectoria, entonces D contiene una vu -semitrayectoria). Equivalentemente, D es conexa si su gráfica subyacente es conexa. Una digráfica D es *unilateral* si para cada par de vértices u, v , D contiene una uv -trayectoria ó una vu -trayectoria.

Definición 0.3.6 Una digráfica D es fuertemente conexa⁹ si para cada par de vértices u, v , D contiene una uv -trayectoria y una vu -trayectoria.

⁷La gráfica \vec{C}_3 es llamada también un *triángulo dirigido*.

⁸También suele llamarse *debilmente conexa*.

⁹También suele decirse que D es *fuerte*.

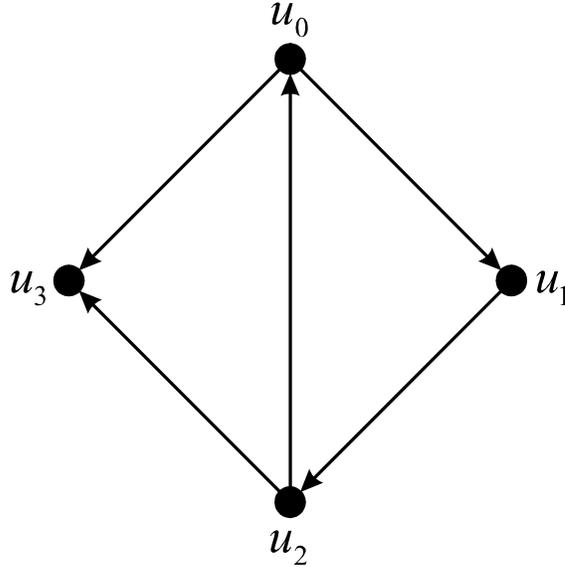


Figura 3: Ejemplo de un camino dirigido u_0, u_1, u_2 y un semicamino u_0, u_3, u_2 .

Una digráfica D es *acíclica* si no tiene ciclos dirigidos. La subdigráfica de D inducida por un subconjunto S de $V(D)$ se denotará como $D[S]$; se dice que S es *acíclico* si y sólo si $D[S]$ es acíclica.

Definición 0.3.7 La cardinalidad máxima de un conjunto acíclico de vértices de D se denota como $\vec{\beta}(D)$.

Ejemplo. En la Figura 4 se observan algunos de los conceptos mencionados. Ahí D es una $(5, 7)$ -digráfica con

$$\begin{aligned} V(D) &= \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4\} \\ F(D) &= \{\overrightarrow{u_0u_1}, \overrightarrow{u_0u_2}, \overrightarrow{u_1u_2}, \overrightarrow{u_1u_3}, \overrightarrow{u_2u_4}, \overrightarrow{u_3u_0}, \overrightarrow{u_4u_1}\} \end{aligned}$$

y dada su estructura se tiene que $\vec{\beta}(D) = 4$ pues $\{u_0, u_2, u_3, u_4\}$ es un conjunto acíclico, y si se toman los cinco vértices de la digráfica éstos inducen un ciclo.

Por otro lado, el conjunto $S = \{u_0, u_1, u_2\} \subset V(D)$ es acíclico pues la subdigráfica inducida $D[S]$, que se aprecia en la parte superior de la figura, es acíclica.

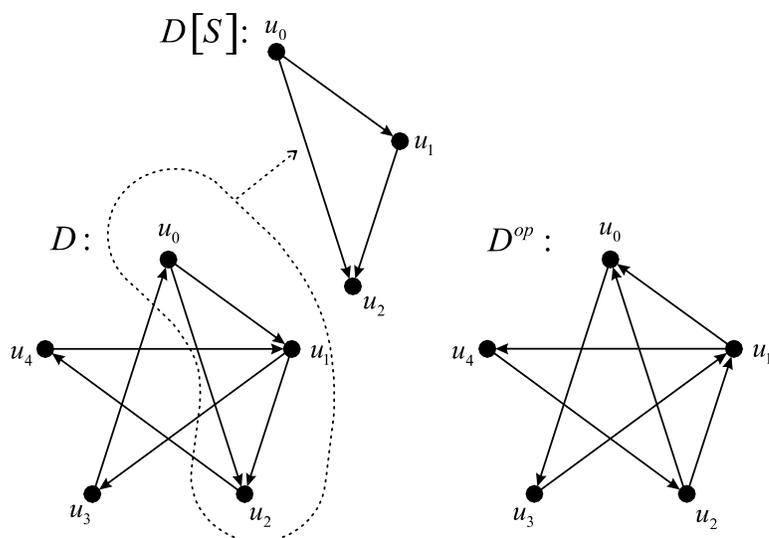


Figura 4: Ejemplo de una digráfica D , uno de sus subconjuntos acíclicos $\{u_0, u_1, u_2\}$ y su digráfica opuesta D^{op} .

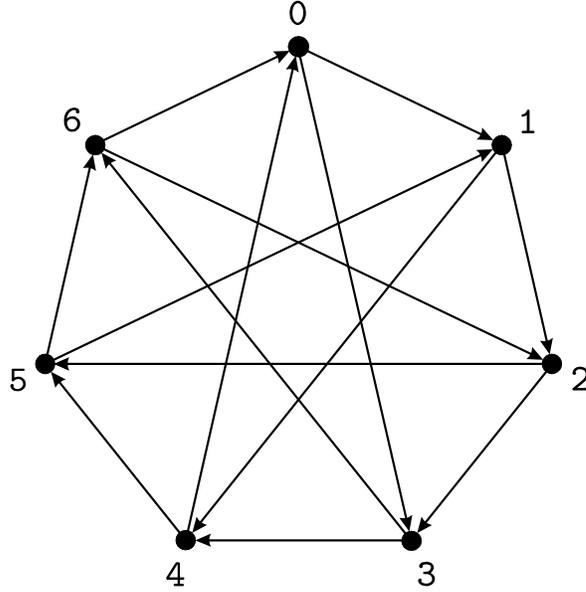
En el lado derecho de la figura se puede observar el aspecto de D^{op} , y han quedado definidos los subconjuntos de vértices

$$\begin{array}{ll}
 N^+(u_0) = \{u_1, u_2\} & N^-(u_0) = \{u_3\} \\
 N^+(u_1) = \{u_2, u_3\} & N^-(u_1) = \{u_0, u_4\} \\
 N^+(u_2) = \{u_4\} & N^-(u_2) = \{u_0, u_1\} \\
 N^+(u_3) = \{u_0\} & N^-(u_3) = \{u_1\} \\
 N^+(u_4) = \{u_1\} & N^-(u_4) = \{u_2\}
 \end{array}$$

que representan a las exvecindades e invecindades de cada vértice de D .

0.3.1. Digráficas circulantes

A las digráficas cuyas flechas están distribuidas en forma cíclica se les denomina digráficas circulantes (Figura 5). Entre las características de estas digráficas está el hecho de que son regulares y que todas las propiedades inherentes a cualquiera de sus vértices son también válidas para todos los demás sin excepción.

Figura 5: Digráfica circulante $\vec{C}_7(1,3)$.

Por la simetría que poseen las digráficas circulantes, puede describirse de forma sencilla y en su estudio es posible hacer análisis que serían muy complicados en una digráfica donde cada vértice tuviera características particulares e independientes de los demás vértices, de ahí que estas digráficas ofrezcan un vasto campo de exploración.

Definición 0.3.8 Para cualquier subconjunto no vacío J de $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, la digráfica circulante $\vec{C}_n(J)$ está definida como

$$\begin{aligned} V(\vec{C}_n(J)) &= \mathbb{Z}_n \\ F(\vec{C}_n(J)) &= \{\vec{ij} : i, j \in \mathbb{Z}_n \text{ y } j - i \in J\} \end{aligned}$$

y se observa que $\vec{C}_n(1)$ es el ciclo dirigido \vec{C}_n .

Así, los ciclos dirigidos resultan ser un caso particular de las digráficas circulantes.

Definición 0.3.9 En un ciclo dirigido \vec{C}_n , para cualesquiera $i, j \in V(\vec{C}_n)$ la expresión $A_{i,j}$ denotará la ij -trayectoria dirigida en \vec{C}_n .

Toda función $\varphi_k : \vec{C}_n(J) \rightarrow \vec{C}_n(J)$ dada por $\varphi_k(i) = i + k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$ describe un automorfismo de la digráfica circulante. Entonces para toda pareja $u, v \in V(\vec{C}_n(J))$ existe un automorfismo φ tal que $\varphi(u) = v$. De esta forma se tiene que $V(\vec{C}_n(J))$ es un $\text{Aut}(\vec{C}_n(J))$ -conjunto transitivo, es decir, que bajo la acción de $\text{Aut}(\vec{C}_n(J))$ cualesquiera $u, v \in V(\vec{C}_n(J))$ están en la misma órbita. A esta propiedad se le denomina *transitividad en vértices*.

Observación 0.3.3 *El hecho de que toda digráfica circulante sea transitiva en vértices es de gran ayuda pues permite generalizar cualquier propiedad de un vértice v a todos los demás de forma automática.*

0.3.2. Número dicromático

Al igual que en las gráficas, una coloración propia de los vértices de una digráfica D es una asignación de colores de tal forma que vértices adyacentes no tengan el mismo color, y se define para D el número cromático $\chi(D)$. Empero, la característica de la orientación en las digráficas ofrece la posibilidad de definir nuevos tipos de coloraciones que se relacionen mejor con su estructura.

Definición 0.3.10 *Una coloración de $V(D)$ es acíclica si todas las clases cromáticas son acíclicas.*

Observación 0.3.4 *Nótese que en una coloración acíclica de $V(D)$ no hay ciclos dirigidos monocromáticos.*

Tomando como base las coloraciones acíclicas, se define un nuevo concepto para digráficas que extiende la noción de número cromático.

Definición 0.3.11 *El número dicromático $dc(D)$ de una digráfica D es el menor número de colores necesarios para colorear los vértices de D de tal forma que cada clase cromática sea acíclica.*

Definición 0.3.12 *Una digráfica D es llamada r -dicromática si $dc(D) = r$, y es llamada r -dicromática crítica si $dc(D) = r$ pero $dc(D - \{u\}) < r$ para todo $u \in V(D)$. Similarmente, D es llamada r -dicromática crítica en flechas si $dc(D) = r$ pero $dc(D - \{a\}) < r$ para toda $a \in F(D)$.*

Definición 0.3.13 Una coloración acíclica de D que utiliza exactamente $dc(D)$ colores se llama una coloración óptima.

El número dicromático es un invariante que mide, de alguna manera, la complejidad de la estructura cíclica de las digráficas. Por ejemplo, se tiene que $dc(D) = 1$ si y sólo si D es acíclica. Además, es evidente que siempre $dc(D^{op}) = dc(D)$, pues los conjuntos acíclicos de una y otra digráfica son exactamente los mismos.

Observación 0.3.5 Sea G^* la digráfica simétrica obtenida a partir de la gráfica G , entonces $dc(G^*) = \chi(G)$ puesto que toda coloración acíclica de G induce una coloración acíclica en G^* y viceversa.

De la Observación 0.3.5 se sigue que el número dicromático generaliza al ya conocido número cromático χ .

Ejemplo. En la Figura 4 pueden verse ilustrados algunos de los conceptos que se acaban de definir. Ahí se tiene que $dc(D) = 2$, pues puede colorearse a $\{u_0, u_2, u_3, u_4\} \subset V(D)$ con un color y a $u_1 \in V(D)$ con otro, obteniendo así una coloración acíclica con dos colores, mientras que colorear los cinco vértices con el mismo color induciría el ciclo monocromático $C : u_1, u_2, u_4, u_1$. Por lo anterior D es 2-dicromática, pero no crítica en vértices, ya que $dc(D - \{u_0\}) = 2 \not\leq dc(D)$, al formar los vértices u_1, u_2 y u_4 un ciclo. También se observa por qué $dc(D^{op}) = dc(D)$.

Nótese que en general no es fácil determinar el número dicromático de una digráfica. De hecho, está comprobado que determinar el número dicromático para una digráfica arbitraria es un problema NP-Completo, lo cual significa *grosso modo* que no existe un algoritmo eficiente para resolver el problema en tiempo polinomial. De ahí la importancia de desarrollar la teoría en torno a este invariante.

Parte I

Torneos circulantes

Capítulo 1

Todos contra todos

Una de las situaciones que pueden modelarse perfectamente mediante las digráficas es la de los resultados de un torneo *round-robin*¹, en el cual, un conjunto dado de participantes o equipos compiten en alguna prueba en la cual las reglas del juego no son importantes para hacer un esquema. Así, los competidores pueden ser representados por sendos vértices, y para cada par de vértices se puede dibujar una flecha que vaya del ganador hacia el perdedor, obteniendo de esta forma una digráfica asimétrica. Por la mecánica del torneo, la digráfica resultante debe tener como gráfica subyacente (Definición 0.3.3) una gráfica completa.

El análisis anterior, da pie a la introducción de un nuevo concepto para clasificar a un tipo particular de digráficas denominadas “torneos”. En este capítulo se analizan algunas de sus propiedades generales y también se muestran dos tipos especiales de torneos: los transitivos y los circulantes. Así mismo, se exhiben los cuatro torneos 3-dicromáticos de orden mínimo y la construcción de una familia infinita de torneos circulantes 3-dicromáticos críticos.

1.1. Torneos

Definición 1.1.1 *Un torneo T es una digráfica asimétrica tal que su gráfica subyacente es una gráfica completa. Equivalentemente, T es una gráfica completa orientada.*

¹En este tipo de torneos, cada competidor enfrenta una vez a cada uno de sus adversarios, resultando un ganador en cada encuentro.

Por su estructura, los torneos poseen propiedades importantes respecto a las demás digráficas. Por ejemplo, nótese que si un torneo contiene una fuente u ésta es única, ya que al ser todos los demás vértices sus exvecinos, no puede haber otro con invecindad vacía, y análogamente, de contener un pozo v éste sería único, ya que al ser todos los demás vértices sus invecinos, no podría haber otro con exvecindad vacía. Así mismo, como el resto de las digráficas, un torneo es regular si todos sus vértices tienen el mismo exgrado² e ingrado. Pero es importante observar que todos los torneos regulares deben tener, necesariamente, orden impar. Esto es porque tanto su exvecindad como su invecindad tienen la misma cardinalidad.

Definición 1.1.2 *El dual de un torneo T es el torneo obtenido al invertir todas las flechas de T ; así mismo, se dice que T es autodual siempre que sea isomorfo a su dual.*

Notación 1.1.3 *Para todo torneo T , se denota como $\text{Aut}(T)$ al grupo de automorfismos de T .*

Cuando se quiere hacer referencia a un torneo de algún orden dado p , sin que sea importante cuál es su estructura, se denota al *torneo genérico* de orden p simplemente como T_p . A continuación se muestra un resultado importante que será de utilidad más adelante.

Teorema 1.1.4 *Todo torneo tiene una trayectoria generadora.*

Demostración. La prueba es por inducción sobre el orden del torneo. Por inspección (Figura 1.1), cada torneo con 2, 3 ó 4 vértices tiene una trayectoria generadora. Supóngase la afirmación cierta para todos los torneos con n vértices, y considérese el torneo T con $|V(T)| = n + 1$. Sea $v_0 \in V(T)$. Entonces $|T - \{v_0\}| = n$, por lo que $T - \{v_0\}$ tiene una trayectoria generadora $P : v_1, v_2, \dots, v_n$. Además, se tiene que $\overrightarrow{v_0v_1} \in F(T)$ ó $\overrightarrow{v_1v_0} \in F(T)$. Si $\overrightarrow{v_0v_1} \in F(T)$, entonces $P_1 : v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$ es una trayectoria generadora en T . Si $\overrightarrow{v_1v_0} \in F(T)$, sea v_i el primer vértice de P tal que $\overrightarrow{v_0v_i} \in F(T)$, si tal v_i existe. Entonces $\overrightarrow{v_{i-1}v_0} \in F(T)$, por lo que $P_2 : v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_0, v_i, \dots, v_n$ es una trayectoria generadora en T . Si no existe el vértice v_i , entonces se tiene que $P_3 : v_1, v_2, \dots, v_n, v_0$ es una trayectoria generadora en T . \square

²Usando la terminología de los torneos *round-robin*, en un torneo T suele llamarse *puntuación* al exgrado de un vértice v , es decir, la puntuación de v en T es $d_T^+(v)$.

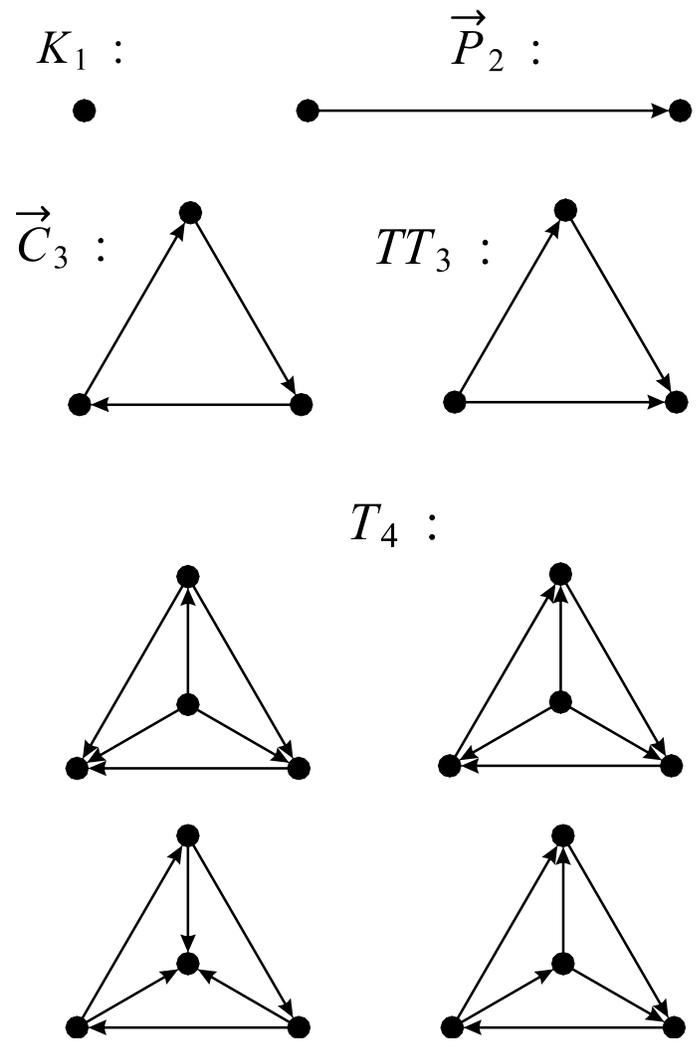


Figura 1.1: Torneos pequeños.

El número de torneos no isomorfos se incrementa marcadamente con el orden. Por ejemplo, existe sólo un torneo de orden 1 y uno de orden 2, hay dos torneos de orden 3 y cuatro de orden 4 (Figura 1.1); existen doce de orden 5, 56 de orden 6 y encima de 154 mil millones de orden 12.

1.1.1. Torneos transitivos

Existen torneos que, por la orientación de sus flechas, poseen la propiedad llamada *transitividad*, como se explica a continuación. Este tipo de torneos resultan particularmente útiles para el estudio de las coloraciones acíclicas.

Definición 1.1.5 *Un torneo T se dice que es transitivo si cada vez que \vec{uv} y \vec{vw} son flechas de T se tiene que también \vec{uw} es una flecha de T .*

En [4] se muestra que para cada entero positivo n , hay exactamente un torneo transitivo de orden n .

Notación 1.1.6 *Al torneo transitivo de orden n se le denota como TT_n .*

La importancia de los torneos transitivos para colorear torneos acíclicamente radica en el siguiente resultado.

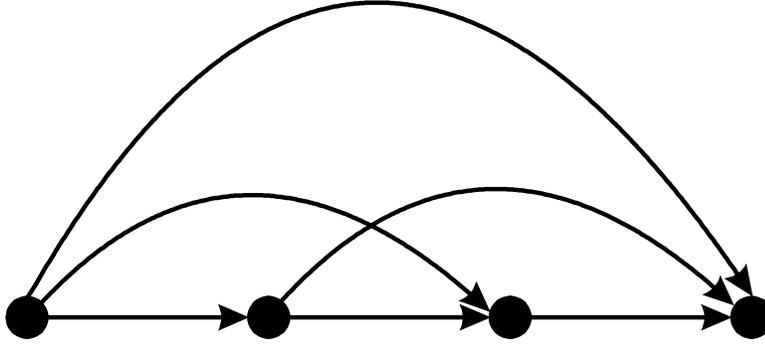
Teorema 1.1.7 *Un torneo T es transitivo si y sólo si T es acíclico.*

Demostración. Primero, sea $T \cong TT_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que T contiene algún ciclo $C : v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ con $k \geq 3$ dado que T es asimétrico. Como $\vec{v_1v_2}$ y $\vec{v_2v_3}$ son flechas de T , entonces $\vec{v_1v_3}$ también es una flecha de T por ser un torneo transitivo. Similarmente, tenemos que $\vec{v_1v_4}, \vec{v_1v_5}, \dots, \vec{v_1v_k}$ son flechas de T . Sin embargo, esto contradice el hecho de que $\vec{v_kv_1}$ es una flecha de T . Por lo tanto, T es acíclico.

Ahora, sea T un torneo acíclico. Supóngase que \vec{uv} y \vec{vw} son flechas de T . Dado que T es acíclico, tenemos que $\vec{wu} \notin F(T)$. Debido a esto, $\vec{uw} \in F(T)$ y por lo tanto, T es transitivo. \square

Nótese que a partir de esta caracterización de los torneos transitivos se deduce inmediatamente cuál es su número dicromático. En la Figura 1.2 se observa el torneo transitivo de orden 4.

Corolario 1.1.8 *Para todo torneo transitivo TT_n con $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $dc(TT_n) = 1$.*

Figura 1.2: Torneo transitivo TT_4 .

Un problema interesante sobre los torneos transitivos es el de determinar el mayor entero $v(n)$ tal que todos los torneos de orden n contienen un subtorneo inducido isomorfo a $TT_{v(n)}$. En [16] se muestran los valores que toma $v(n)$ para $4 \leq n \leq 27$ (Cuadro 1.1) y se demuestra que todo torneo de orden n con $28 \leq n \leq 31$ contiene como subtorneo inducido al torneo transitivo TT_6 .

$v(n)$	Intervalo
3	$4 \leq n \leq 7$
4	$8 \leq n \leq 13$
5	$14 \leq n \leq 27$
6	$28 \leq n \leq 31$

Cuadro 1.1: Valores de $v(n)$ para $4 \leq n \leq 31$.

1.1.2. Torneos circulantes

Existen torneos que a su vez son digráficas circulantes regulares, y al igual que éstas, su enorme simetría facilita el estudio de sus propiedades, entre ellas la de su número dicromático. La descripción de tales torneos se hace a partir de la definición de digráfica circulante (Definición 0.3.8).

Definición 1.1.9 Para toda $m \in \mathbb{Z}^+$, la digráfica circulante $\vec{C}_{2m+1}(J)$ es un torneo circulante siempre y cuando satisfaga que $|\{j, -j\} \cap J| = 1$ para todo $j \in (\mathbb{Z}_{2m+1} \setminus \{0\})$.

Al ser los torneos circulantes gráficas completas orientadas, en muchas ocasiones se puede simplificar su notación respecto a la de las digráficas circulantes.

Notación 1.1.10 Cuando una digráfica circulante $\vec{C}_{2m+1}(J)$ es un torneo, se denota como $\vec{C}_{2m+1}(K)$, donde $K = \{(2m+1-k) \in \mathbb{Z}_{2m} : k \in J, m < k\}$ es el subconjunto de los elementos de J cuyo valor es mayor que la mitad del orden del torneo.

Observación 1.1.1 Por su construcción, los torneos circulantes son gráficas completas orientadas regulares, y por ende, tienen orden impar.

La representación por antonomasia de los torneos circulantes es colocar sus vértices formando un polígono regular. En la Figura 1.3 se observa el torneo circulante $\vec{C}_7(\emptyset)$, donde $m = 3$ y $K = \emptyset$. Bajo este esquema, adquiere sentido la noción de amplitud de una flecha.

Definición 1.1.11 Al número $(j-i) \bmod p$ se le llama la amplitud de la flecha $\vec{i}j$ en un torneo circulante de orden p .

En la Figura 1.3 se observa que las amplitudes de las flechas del torneo circulante $\vec{C}_7(\emptyset)$ son 1, 2 y 3.

Dentro de la clase de los torneos circulantes se encuentran los denominados torneos de Paley. Tales torneos están basados en la estructura cíclica de los grupos de residuos cuadráticos.

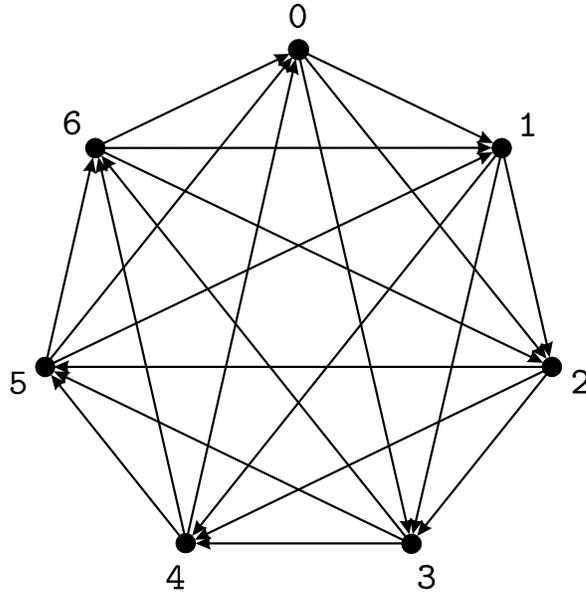
Definición 1.1.12 Un torneo T se denomina torneo de Paley si

$$\begin{aligned} V(T) &= \{0, 1, \dots, p-1\} \\ F(T) &= \left\{ \vec{i}j : j-i \text{ es un residuo cuadrático módulo } p \right\} \end{aligned}$$

para algún primo $p \equiv 3 \pmod{4}$.

1.2. Torneos 3-dicromáticos de orden mínimo

Sólo existen cuatro torneos 3-dicromáticos de orden 7 salvo isomorfismo, denominados ST_7 , W , W_0 y W_1 . Además, 7 es el orden mínimo para un torneo 3-dicromático. Ambas afirmaciones se demuestran a continuación. A partir de este punto, si no hay riesgo de ambigüedad se denotará a la flecha \vec{uv} simplemente como uv .

Figura 1.3: Torneo circulante $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$.

1.2.1. El torneo ST_7

Por [6, 15] se sabe que existe un único torneo de orden 7 salvo isomorfismo, denominado ST_7 , que no contiene un subtorneo acíclico de orden 4, y que existe un único torneo de orden 6 salvo isomorfismo, llamado ST_6 , que no contiene un torneo TT_4 como subdigráfica inducida. Además

$$\begin{aligned} ST_7 &= \vec{C}_7 \langle 3 \rangle \\ ST_6 &= ST_7 - \{0\} \end{aligned}$$

como se observa en la Figura 1.4. Por la transitividad en vértices de los torneos circulantes, en su condición de digráficas circulantes, se tiene que al restar a ST_7 cualquiera de sus vértices se obtiene el torneo ST_6 .

Se observa que $dc(ST_7) = 3$ y $dc(ST_6) = 2$, dado que $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ es una partición acíclica de $V(ST_6)$. En general, $dc(T_6) \leq 2$ para todo torneo de orden 6 y por lo tanto el mínimo orden de un torneo 3-dicromático es 7.

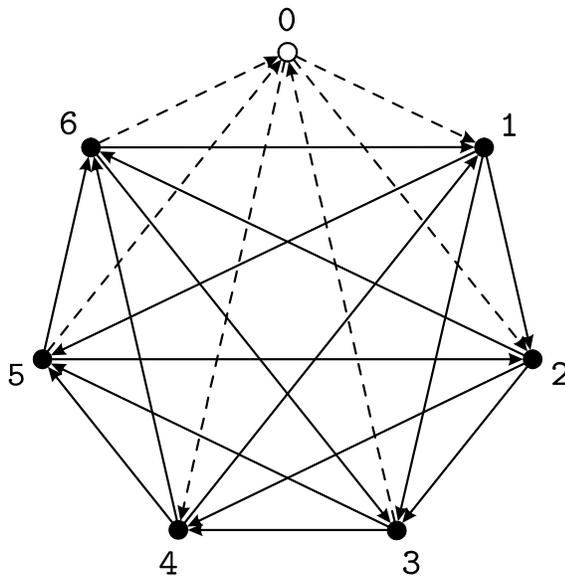


Figura 1.4: El torneo especial $ST_7 = \vec{C}_7(3)$. Al torneo $ST_7 - \{0\}$ se le denomina ST_6 .

1.2.2. Los torneos W , W_0 y W_1

Ahora, se define el torneo W (Figura 1.5) como

$$\begin{aligned} V(W) &= \{w_0, w_1^-, w_2^-, w_3^-, w_1^+, w_2^+, w_3^+\} \\ F(W) &= \{w_i^+ w_j^- : 1 \leq i, j \leq 3\} \cup \{w_0 w_i^+ : i = 1, 2, 3\} \\ &\quad \cup \{w_j^- w_0 : j = 1, 2, 3\} \cup \{w_i^+ w_{i+1}^+ : i = 1, 2, 3\} \\ &\quad \cup \{w_j^- w_{j+1}^- : j = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

donde la suma se toma módulo 3.

Si $f : V(W) \rightarrow \{0, 1\}$ es una 2-coloración de W en la cual ninguno $\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$ ni $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$ son monocromáticos, existen dos vértices w_i^+ y w_j^- tales que $f(w_i^+) = f(w_j^-) = f(w_0)$ y $C : w_j^-, w_0, w_i^+$ es un triángulo cíclico monocromático. Por lo tanto, $dc(W) = 3$. Obsérvese que $d_W^+(w_0) = 3$, $d_W^+(w_i^+) = 4$, $d_W^+(w_j^-) = 2$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Se definen ahora

$$\begin{aligned} W_0 &= W + \{w_1^- w_1^+, w_2^- w_2^+, w_3^- w_3^+\} - \{w_1^+ w_1^-, w_2^+ w_2^-, w_3^+ w_3^-\} \\ W_1 &= W + \{w_2^- w_2^+, w_3^- w_3^+\} - \{w_2^+ w_2^-, w_3^+ w_3^-\} \end{aligned}$$

como se observa en las Figuras 1.6 y 1.7. Luego, $W_1 = W_0 + w_1^+ w_1^- - w_1^- w_1^+$.

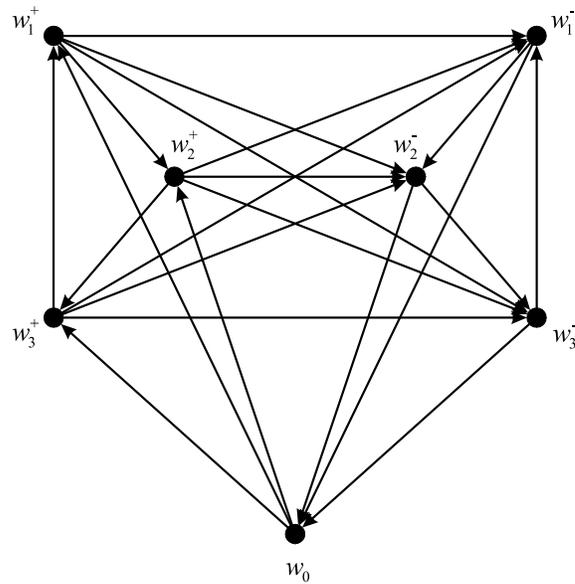


Figura 1.5: Torneo W .

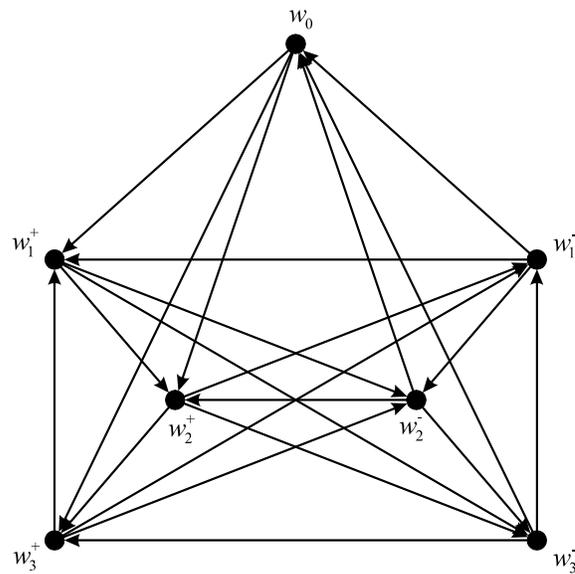
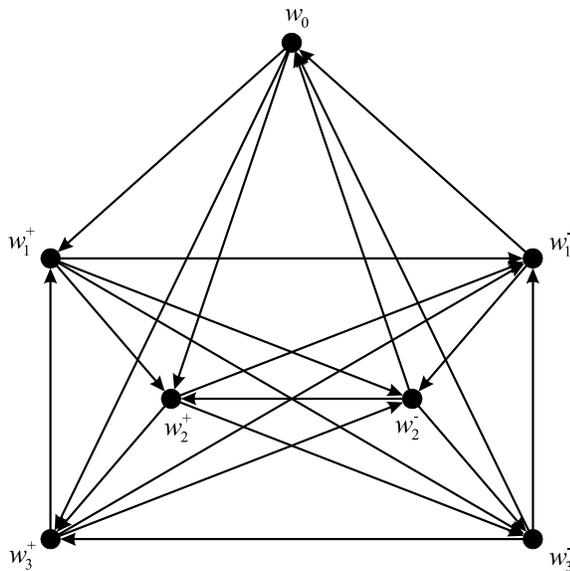


Figura 1.6: Torneo W_0 .

Figura 1.7: Torneo W_1 .

Para probar que $dc(W_0) = dc(W_1) = 3$, se define el torneo

$$W' = W - \{w_1^+ w_1^-, w_2^+ w_2^-, w_3^+ w_3^-\}$$

y se tiene que $W_0, W_1 \supseteq W'$.

Considérese cualquier 2-coloración $f : V(W') \rightarrow \{0, 1\}$ de W' , en la cual ninguno de los conjuntos $\{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$ y $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\}$ son monocromáticos. Puede suponerse que $f(w_0) = 0$. Obsérvese que si hay dos vértices w_i^+ y w_j^- con $i \neq j$ de color 0, $C : w_j^-, w_0, w_i^+$ es un triángulo cíclico monocromático. Por lo tanto, existe un índice i tal que w_j^-, w_j^+ son de color 1 para todo $j \neq i$. Pero estos cuatro vértices contienen un triángulo cíclico (monocromático) en $W_0 - w_1^- w_1^+ \subseteq W_0, W_1$. De ahí se sigue que

$$dc(W_0) = dc(W_1) = 3$$

Nótese que W_0 es un torneo regular y que $d_{W_1}^+(w_1^+) = 4$, $d_{W_1}^+(w_1^-) = 2$ y $d_{W_1}^+(z) = 3$ para $z \neq w_1^-, w_1^+$. Finalmente, nótese que W, W_0 y W_1 contienen subtorneos isomorfos a TT_4 .

Observando en las correspondientes sucesiones de exgrados (Cuadro 1.2) y recordando que W_0 contiene un subtorneo isomorfo a TT_4 , se puede establecer el siguiente teorema.

Torneo	$d^+(w_0)$	$d^+(w_1^+)$	$d^+(w_2^+)$	$d^+(w_3^+)$	$d^+(w_1^-)$	$d^+(w_2^-)$	$d^+(w_3^-)$
W	3	4	4	4	2	2	2
W_0	3	3	3	3	3	3	3
W_1	3	4	3	3	2	3	3

Cuadro 1.2: Sucesiones de exgrados de los torneos W , W_0 y W_1 .

Teorema 1.2.1 ST_7 , W , W_0 y W_1 son torneos 3-dicromáticos mutuamente no isomorfos de orden 7.

Observación 1.2.1 W , W_0 y W_1 tienen un único vértice (denominado w_0) para el cual sus dos semivecindades son triángulos cíclicos. Por esta razón, w_0 se llamará el vértice especial de estos torneos. En cada caso, el correspondiente grupo de automorfismos fija al vértice w_0 . Además, se tiene que hay exactamente tres $N_{W_0}^-(w_0)N_{W_0}^+(w_0)$ -flechas en W_0 y exactamente dos $N_{W_1}^-(w_0)N_{W_1}^+(w_0)$ -flechas en W_1 , y éstas son independientes.

Se define la función

$$\sigma_{rs} : V(W) \rightarrow V(W)$$

para $0 \leq r, s \leq 3$, como

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}(w_0) &= w_0 \\ \sigma_{rs}(w_i^-) &= w_{i+r}^- \\ \sigma_{rs}(w_j^+) &= w_{i+s}^+ \end{aligned}$$

en particular, $\sigma_{00} = \text{id}$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \text{Aut}(W) &= \{\sigma_{rs} : 0 \leq r, s \leq 3\} \\ \text{Aut}(W_0) &= \{\sigma_{rr} : 0 \leq r \leq 3\} \\ \text{Aut}(W_1) &= \{\sigma_{00}\} \end{aligned}$$

y que

$$\text{Aut}(ST_7) = \{\varphi_{a,b} : a \in \{1, 2, 4\}, b \in \mathbb{Z}_7\}$$

donde $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$.

Observación 1.2.2 Nótese que por su estructura, los torneos ST_7 , W , W_0 y W_1 son autoduales (Definición 1.1.2).

Teorema 1.2.2 *Los torneos ST_7 , W , W_0 y W_1 son, salvo isomorfismo, los únicos torneos 3-dicromáticos de orden 7.*

Demostración. Sea T_7 un torneo 3-dicromático de orden 7, se consideran tres casos.

Caso 1 T_7 no contiene un subtorneo transitivo de orden 4.

Entonces se tiene que $T_7 \cong ST_7$, ya que por [15] se sabe que ST_7 es el único torneo de orden 7 salvo isomorfismo que no contiene un TT_4 .

Caso 2 T_7 es un torneo 3-dicromático regular el cual contiene un subtorneo transitivo de orden 4.

Sea $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subseteq V(T_7)$ acíclico y supóngase que $u_i u_j \in F(T_7)$ para $1 \leq i < j \leq 4$. Sea

$$R = \{z_0, z_1, z_2\} = V(T_7) \setminus U$$

se tiene que $T_7[R] \cong \vec{C}_3$ dado que T_7 es 3-dicromática. Puede asumirse que $z_i z_{i+1} \in F(T_7)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, tomando la suma módulo 3. Dado que T_7 es regular, $z_i u_1, u_4 z_i \in F(T_7)$ para toda $i \in \{0, 1, 2\}$. Además, existe una única $u_2 R$ -flecha. Puede asumirse que $u_2 z_0 \in F(T_7)$.

Se sigue que $z_1 u_2, z_2 u_2, z_0 u_3 \in F(T_7)$, y entonces $u_3 z_1, u_3 z_2 \in F(T_7)$. Luego, T_7 está determinado salvo isomorfismo y dado que W_0 satisface las hipótesis, $T_7 \cong W_0$.

Caso 3 T_7 es un torneo 3-dicromático no regular el cual contiene un subtorneo transitivo de orden 4.

Sea $z_0 \in V(T_7)$ tal que $d_{T_7}^+(z_0) = \delta^+(T_7)$. Se tiene que $\delta^+(T_7) \geq 2$ pues en otro caso cualquier 2-coloración de $T_7 - \{z_0\}$ se podría extender a una 2-coloración de T_7 . Luego, $\delta^+(T_7) = 2$ y $N_{T_7}^-(z_0)$ no es cíclica, ya que en otro caso T_7 contendría un subtorneo isomorfo a TT_5 .

Se denota $N_{T_7}^-(z_0) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ y se consideran dos subcasos.

1. $N_{T_7}^-(z_0)$ es fuertemente conexa (Definición 0.3.6).

Puede asumirse que $C : z_1, z_2, z_3, z_4, z_1$ es un ciclo dirigido en $N_{T_7}^-(z_0)$ y que $z_1 z_3, z_2 z_4 \in F(T_7)$.

Dado que $\{z_0, z_2, z_3, z_4\}$ es acíclico, $C_1 : z_1, z_5, z_6$ es un triángulo cíclico. Similarmente, $C_2 : z_4, z_5, z_6$ es un triángulo cíclico. Entonces, se tiene que $z_1z_5, z_6z_1, z_4z_5, z_6z_4 \in F(T_7)$. Ahora, $\{z_0, z_1, z_4, z_5\}$ es acíclico y entonces $C_3 : z_2, z_3, z_6$ es un triángulo acíclico. Por lo tanto $z_3z_6, z_6z_2 \in F(T_7)$. Dado que $\{z_2, z_4, z_6\}$ es acíclico, $\{z_0, z_1, z_2, z_5\}$ no es acíclico y entonces $z_5z_2 \in F(T_7)$. Por lo tanto, T_7 está determinado salvo isomorfismo y dado que W_1 satisface la condición **1**, se tiene que $T_7 \cong W_1$.

2. $N_{T_7}^-(z_0)$ no es fuertemente conexa.

Puede asumirse que z_1 es una fuente o un pozo de $N_{T_7}^-(z_0)$ y que $C_1 : z_2, z_3, z_4$ es un triángulo acíclico, dado que $N_{T_7}^-(z_0)$ no es cíclico. Claramente, $C_i : z_i, z_5, z_6$ es un triángulo cíclico para $i = 2, 3, 4$ ya que $(N_{T_7}^-(z_0) \cup \{z_0\}) \setminus \{z_i\}$ es acíclico. Por lo tanto, $z_iz_5, z_6z_i \in F(T_7)$ para $i = 2, 3, 4$. Si z_1 fuera una fuente de $N_{T_7}^-(z_0)$, $\{\{z_1, z_3, z_4, z_6\}, \{z_0, z_2, z_5\}\}$ sería una partición acíclica de $V(T_7)$. Por lo tanto, z_1 es un pozo. Entonces se tiene que $z_iz_1 \in F(T_7)$ para $i = 2, 3, 4$. Si $z_6z_1 \in F(T_7)$, entonces $\{\{z_1, z_3, z_4, z_6\}, \{z_0, z_2, z_5\}\}$ sería una partición acíclica de $V(T_7)$. Luego, $z_1z_6 \in F(T_7)$. Ahora, $z_5z_1 \in F(T_7)$, ya que en otro caso $d_{T_7}^+(z_5) = 1$. Por lo tanto, T_7 está determinado salvo isomorfismo y dado que W satisface **2**, se tiene que $T_7 \cong W$.

De esta forma, los únicos torneos 3-dicromáticos de orden 7 salvo isomorfismo son ST_7 , W , W_0 y W_1 . Y por ser 7 el mínimo orden para un torneo 3-dicromático, se tiene que los cuatro torneos son críticos. \square

Teorema 1.2.3 *Sea T un torneo 3-dicromático de orden 7 de tal forma que $T \supseteq T_0 \cong ST_6$, entonces $T \cong ST_7$. Más aún, cada isomorfismo $f_0 : T_0 \rightarrow ST_6$ puede extenderse a un isomorfismo $f : T \rightarrow ST_7$.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.2, T es isomorfo a alguno de los torneos ST_7 , W , W_0 ó W_1 . Nótese que cada uno de los conjuntos $\{w_1^+, w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$, $\{w_2^+, w_3^+, w_1^-, w_3^-\}$ y $\{w_1^+, w_3^+, w_1^-, w_2^-\}$ induce un TT_4 en cada uno de W , W_0 y W_1 , y eliminando un único vértice cualquiera de W , W_0 ó W_1 permanece uno de esos TT_4 . Dado que ST_6 no contiene TT_4 , se sigue que $T \cong ST_7$. Para probar la segunda parte, se define f como $f(z) = f_0(z)$ para $z \in T_0$ y $f(z) = 0$ cuando z es el vértice en $T - T_0$. \square

Notación 1.2.4 Si $\overline{W}_1 \cong W_1$ y $f : W_1 \rightarrow \overline{W}_1$ es el único isomorfismo de W_1 a \overline{W}_1 , entonces $\bar{\alpha}$ denotará al vértice $f(\alpha)$.

Lema 1.2.5 Sea \overline{W}_1 una copia isomorfa de W_1 cuya intersección con W_1 es $W_1 - \{w_1^-\}$ y sea ξ el vértice de \overline{W}_1 que no está en W_1 . Si $\xi w_1^+ \in F(\overline{W}_1)$, entonces $\bar{w}_0 = w_3^+$, $\bar{w}_1^+ = w_2^-$, $\bar{w}_2^+ = \xi$, $\bar{w}_3^+ = w_1^+$, $\bar{w}_1^- = w_2^+$, $\bar{w}_2^- = w_3^-$ y $\bar{w}_3^- = w_0$.

Demostración. Nótese que todo vértice de exgrado 3 en W_1 tiene al menos una semivecindad cíclica. Luego, $N_{\overline{W}_1}^-(w_1^+)$ tiene que ser cíclica y entonces $w_0 w_3^+, w_3^+ \xi, \xi w_0 \in F(\overline{W}_1)$. Se sigue que w_0, w_1^+ y w_3^+ tienen exgrado 3 en \overline{W}_1 . Dado que los vértices de exgrado 2 en $W_1 - \{w_1^-\}$ son w_2^+, w_3^+ y w_3^- , se sigue que el vértice de exgrado 2 en \overline{W}_1 pertenece a $\{w_2^+, w_3^-, \xi\}$.

Supóngase que $d_{\overline{W}_1}^+(\xi) = 2$. Luego $N_{\overline{W}_1}^+(\xi) = \{w_0, w_1^+\}$. Se sigue que ambas semivecindades de w_3^+ en \overline{W}_1 son triángulos cíclicos y por lo tanto $\bar{w}_0 = w_3^+$. Además, se tiene que los vértices de exgrado 2 y 4 en \overline{W}_1 son $\bar{w}_1^- = \xi$ y $\bar{w}_1^+ = w_2^-$, respectivamente, y ambos pertenecen a $N_{\overline{W}_1}^+(\bar{w}_0)$ lo cual es imposible (Figura 1.7).

Supóngase ahora que $d_{\overline{W}_1}^+(w_3^-) = 2$. Entonces $w_2^+ \xi, \xi w_3^- \in F(\overline{W}_1)$. Si $w_2^- \xi \in F(\overline{W}_1)$, se tiene que $\bar{w}_1^+ = w_2^-$. Además, $\bar{w}_0 = w_3^+$ dado que ambas semivecindades de w_3^+ son cíclicas, de ahí que $\bar{w}_2^+ = \xi$ y $\bar{w}_2^- = w_0$ y por lo tanto $\bar{w}_2^+ \bar{w}_2^- \in F(\overline{W}_1)$ lo cual es imposible. Si $\xi w_2^- \in F(\overline{W}_1)$, entonces $\bar{w}_0 = w_2^+$, $\bar{w}_1^+ = \xi$ y $\bar{w}_1^- = w_3^-$. Además, \bar{w}_1^+ y \bar{w}_1^- pertenecen a $N_{\overline{W}_1}^+(\bar{w}_0)$ lo cual es imposible (Figura 1.7).

Se ha probado entonces que $\bar{w}_1^- = w_2^+$. Por lo tanto, $\xi w_2^+, w_3^- \xi \in F(\overline{W}_1)$. Si $\xi w_2^- \in F(\overline{W}_1)$, entonces $\bar{w}_0 = w_0$ y $\bar{w}_1^+ = \xi$. En este caso, $\bar{w}_1^+ \in N_{\overline{W}_1}^-(\bar{w}_0)$ lo cual es imposible (Figura 1.7).

Entonces $w_2^- \xi \in F(\overline{W}_1)$ y $\bar{w}_1^+ = w_2^-$ ya que $d_{\overline{W}_1}^+(w_2^-) = 4$. Además, todas las flechas están determinadas; la estructura del torneo \overline{W}_1 puede observarse en la Figura 1.8.

Los conjuntos $N_{\overline{W}_1}^+(w_3^+) = \{w_2^-, \xi, w_1^+\}$ y $N_{\overline{W}_1}^-(w_3^+) = \{w_2^+, w_3^-, w_0\}$ inducen triángulos cíclicos. Entonces, por la Observación 1.2.1 se tiene que $\bar{w}_0 = w_3^+$. Luego, $\bar{w}_2^+ = \xi$, $\bar{w}_3^+ = w_1^+$, $\bar{w}_2^- = w_3^-$ y $\bar{w}_3^- = w_0$. \square

Observación 1.2.3 Nótese que las igualdades del Lema 1.2.5 dan una efectiva descripción de \overline{W}_1 cuando $\xi w_1^+ \in F(\overline{W}_1)$.

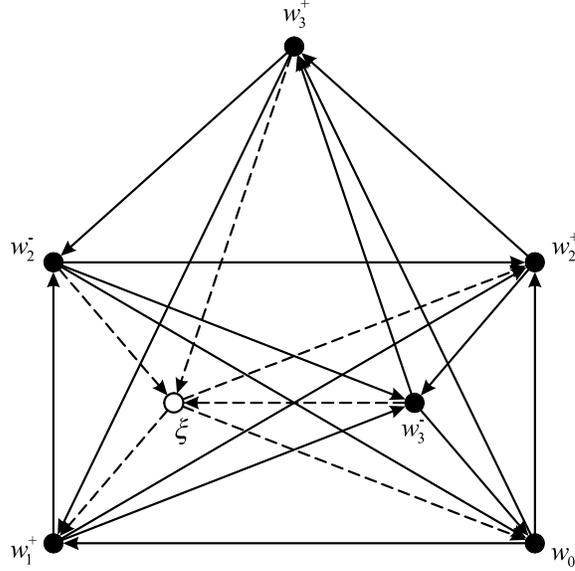


Figura 1.8: Torneo \overline{W}_1 .

1.3. La familia $\{\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle\}$

Como se verá a continuación, los torneos circulares de la forma $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$, con $m \geq 3$, son 3-dicromáticos críticos. A partir de este hecho, y dado que todos los elementos de la familia tienen distinto orden, se tiene una familia infinita de torneos circulares 3-dicromáticos críticos no isomorfos dos a dos.

Teorema 1.3.1 *Si T_{2m+1} es un torneo regular, entonces $dc(T_{2m+1}) = 2$ si y sólo si $T_{2m+1} \cong \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$.*

Demostración. Primero, asúmase que $dc(T_{2m+1}) = 2$.

Sea $\{S', S''\}$ una partición de $V(T_{2m+1})$ tal que los subtorneos $T_{2m+1}[S']$ y $T_{2m+1}[S'']$ de T_{2m+1} inducidos por S' y S'' , respectivamente, son acíclicos.

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que $|S'| > |S''|$, y de ahí se sigue que $|S'| > m$. Sea u la fuente de $T_{2m+1}[S']$. Dado que $d_{T_{2m+1}}^+(u) = m$ se tiene que $|S'| \leq m + 1$. De ahí que $|S'| = m + 1$.

Sean $P : u_0, u_1, \dots, u_m$ y $Q : u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{2m}$ trayectorias dirigidas generadoras de $T_{2m+1}[S']$ y $T_{2m+1}[S'']$, respectivamente.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} d_{T_{2m+1}[S']}^-(u_i) &= i && \text{para } i = 0, 1, \dots, m \\ d_{T_{2m+1}[S'']}^-(u_i) &= i - m - 1 && \text{para } i = m + 1, m + 2, \dots, 2m \end{aligned}$$

de donde se sigue directamente que

$$u_j u_0 \in F(T_{2m+1}) \text{ para } j = m + 1, m + 2, \dots, 2m$$

y u_0 es el pozo de $T_{2m+1}[S'' \cup \{u_0\}]$.

Similarmente

$$u_i u_{m+1} \in F(T_{2m+1}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, m$$

y u_{m+1} es el pozo de $T_{2m+1}[S' \cup \{u_{m+1}\} \setminus \{u_0\}]$.

Por lo tanto

$$T_{2m+1}[\{u_1, u_2, \dots, u_{m+1}\}]$$

y

$$T_{2m+1}[\{u_{m+2}, u_{m+3}, \dots, u_{2m}, u_0\}]$$

son subtorneos acíclicos de T_{2m+1} con trayectorias dirigidas generadoras

$$P' : u_1, u_2, \dots, u_{m+1}$$

y

$$Q' : u_{m+2}, u_{m+3}, \dots, u_{2m}, u_0$$

respectivamente.

Repitiendo *mutatis mutandis* el mismo argumento sucesivamente, se llega a que $T_{2m+1}[\{u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m}\}]$ y $T_{2m+1}[\{u_{m+1+i}, u_{m+2+i}, \dots, u_{2m+i}\}]$, tomando la suma módulo $2m + 1$, son subtorneos acíclicos de T_{2m+1} con trayectorias dirigidas generadoras

$$u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+m}$$

y

$$u_{m+1+i}, u_{m+2+i}, \dots, u_{2m+i}$$

respectivamente.

De ahí que $u_i u_{i+l}, u_{i-l} u_i \in F(T_{2m+1})$ para $l = 1, 2, \dots, m$.

Luego, la función

$$f : V(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) \rightarrow V(T_{2m+1})$$

definida como

$$f(i) = u_i \text{ para } i = 0, 1, \dots, 2m$$

es un isomorfismo de $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ en T_{2m+1} .

Por otro lado, dado que $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ no es transitivo y los conjuntos $\{0, 1, \dots, m\}$ y $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$ inducen en $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ subtorneos acíclicos, se tiene que $dc(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) = 2$. \square

Teorema 1.3.2 $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ es un torneo 3-dicromático crítico para $m \geq 3$.

Demostración. $T = \vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \not\cong \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ dado que $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ es localmente acíclico, mientras que T no lo es (el conjunto $\{1, m-1, m+1\}$ induce un ciclo en $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$). Entonces, por el Teorema 1.3.1 se tiene que $dc(T) \geq 3$. Sin embargo, $\{0\}$, $\{1, 2, \dots, m\}$ y $\{m+1, m+2, \dots, 2m\}$ inducen subtorneos acíclicos de T . Entonces, $dc(T) = 3$. Evidentemente, $dc(T - \{0\}) = 2$ y dado que $T - \{i\} \cong T - \{0\}$ para toda $i = 1, 2, \dots, 2m$, se tiene que T es crítico. \square

Observación 1.3.1 Para todo número impar $k \geq 7$ existe un torneo regular 3-dicromático crítico con k vértices.

Capítulo 2

Cuatro colores bastan

Dado que todo T_{10} contiene un conjunto acíclico de vértices U con 4 elementos (Cuadro 1.1) y $dc(T_{10} - U) \leq 2$, entonces $dc(T_{10}) \leq 3$. En este capítulo se muestra que el torneo de Paley ST_{11} es 4-dicromático, y por lo tanto, que 11 es el orden mínimo de un torneo 4-dicromático. También se exhibe una familia infinita de torneos circulantes 4-dicromáticos críticos (Definición 0.3.12), denominada $\{D_m\}$.

2.1. El torneo ST_{11}

Como se muestra a continuación, el torneo $ST_{11} = \vec{C}_{11} \langle 2 \rangle$ (Figura 2.2) es la única gráfica orientada 4-dicromática de orden a lo más 11. Obsérvese que hay sólo un torneo 2-dicromático crítico, el triángulo cíclico \vec{C}_3 (Figura 2.1).

Observación 2.1.1 *Nótese que el torneo especial ST_{11} es uno de los llamados torneos de Paley, ya que*

$$V(ST_{11}) = \{0, 1, \dots, 10\}$$

y las amplitudes de sus flechas son 1, 3, 4, 5 y 9.

Observación 2.1.2 *Dado que $\{1, 3, 4, 5, 9\}$ es el conjunto de los residuos cuadráticos módulo 11, la función $\varphi_{a,b}(z) = az + b$ es un automorfismo de ST_{11} para toda $a \in \{1, 3, 4, 5, 9\}$ y toda $b \in \mathbb{Z}_{11}$. Entonces, $\text{Aut}(ST_{11})$ es transitivo en flechas¹.*

¹Este resultado se puede generalizar para todos los torneos de Paley.

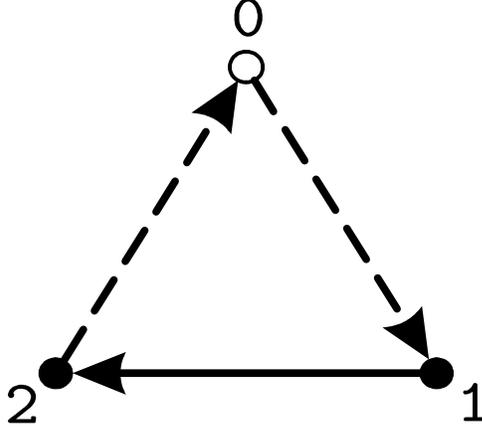


Figura 2.1: El torneo \vec{C}_3 es 2-dicromático, y el torneo $TT_2 \cong \vec{C}_3 - \{i\}$ con $i \in \{0, 1, 2\}$ es 1-dicromático.

Teorema 2.1.1 *El torneo $ST_{11} \cong \vec{C}_{11} \langle 2 \rangle$ es 4-dicromático. Además, para todo conjunto $U \subset V(ST_{11})$ acíclico maximal, se tiene que $(ST_{11} - U) \cong W_1$.*

Demostración. Sea $U_0 \subseteq \mathbb{Z}_{11}$ un conjunto acíclico maximal en ST_{11} tal que $0, 1 \in U_0$ y supóngase que 0 es la fuente de U_0 y que 1 es la fuente de $U_0 \setminus \{0\}$. Dado que $N^+(0) \cap N^+(1) = \{4, 5\}$, entonces $U_0 = \{0, 1, 4, 5\}$.

Si U es otro conjunto acíclico maximal de ST_{11} , entonces existe un automorfismo $\varphi_{a,b}(z)$ de ST_{11} el cual manda a U_0 en U . De ahí se sigue que ST_{11} no contiene un TT_5 .

Un cálculo directo muestra que los únicos valores de U para los cuales U es disjunto a U_0 son

$$\{2, 3, 6, 7\}, \{9, 10, 2, 3\}, \{6, 9, 7, 10\} \text{ y } \{9, 2, 3, 7\}$$

como se observa en la Figura 2.3.

Los complementos de $U_0 \cup U$ en $V(ST_{11})$ son

$$\{8, 9, 10\}, \{6, 7, 8\}, \{2, 3, 8\} \text{ y } \{6, 8, 10\}$$

respectivamente, y todos ellos inducen un triángulo cíclico en ST_{11} .

Entonces se sigue de forma inmediata que el torneo ST_{11} es 4-dicromático.

Por otra parte, $(ST_{11} - U) \cong (ST_{11} - U_0) \cong W_1$. \square

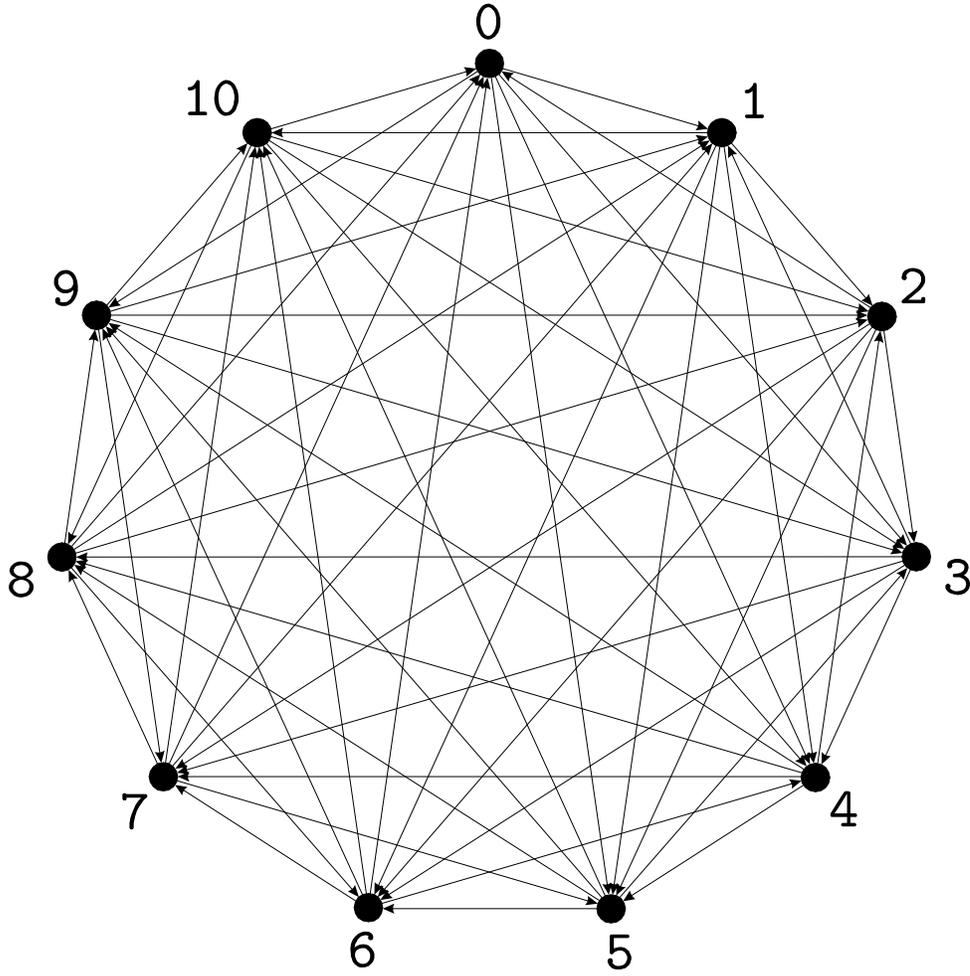


Figura 2.2: Torneo ST_{11} .

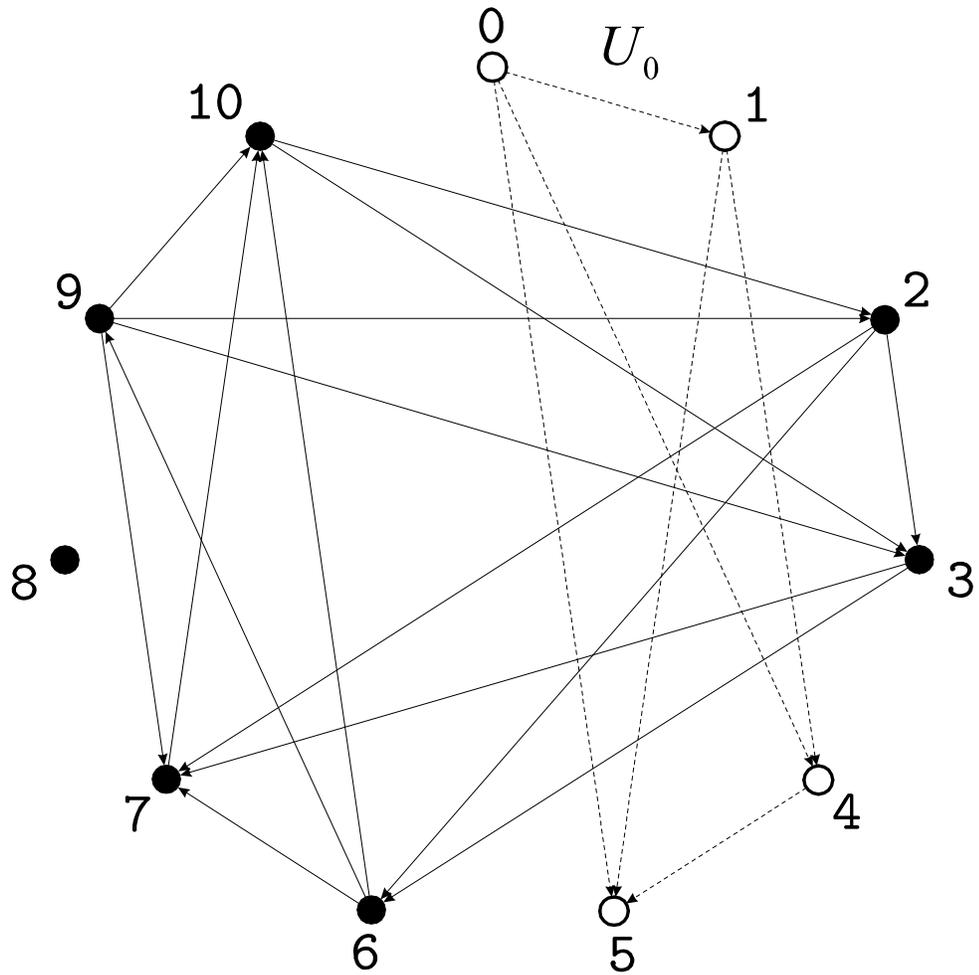


Figura 2.3: Conjuntos acíclicos maximales ajenos a U_0 en ST_{11} .

Lema 2.1.2 *Si $dc(T_{11}) = 4$, entonces T_{11} es regular.*

Demostración. Es suficiente probar que $\delta^+(T_{11}) = 5$. Sea w un vértice tal que $d^+(w) = \delta^+(T_{11})$. Se tiene que $dc(T_{11} - \{w\}) \leq 3$. Si $\delta^+(T_{11}) \leq 2$, entonces $dc(T_{11}) \leq 3$ dado que cualquiera 3-coloración de $T_{11} - \{w\}$ se puede extender a una 3-coloración de T_{11} . Por lo tanto $\delta^+(T_{11}) \geq 3$.

Supóngase que $\delta^+(T_{11}) = 3$. Se tiene que $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_7$, de lo contrario $T_{11}[N^-(w)]$ contendría un TT_4 , entonces T_{11} contendría un TT_5 y $dc(T_{11}) \leq 3$. Sea $P : z_1, z_2, z_3$ una trayectoria dirigida en $T_{11}[N^+(w)]$. Si $\xi \in N^-(w)$, una de dos: $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi\}]$ es transitivo o $T_{11}[\{z_2, z_3, \xi\}]$ es transitivo. Se sigue que hay dos diferentes vértices $\xi_1, \xi_2 \in N^-(w)$ tales que una de dos: $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$ ó $T_{11}[\{z_2, z_3, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$. Se puede asumir que $T_{11}[\{z_1, z_2, \xi_i\}]$ es transitivo para $i = 1, 2$. Luego, $dc(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\}) = 3$ para $i = 1, 2$ y dado que w tiene exgrado 1 en $T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i\}$, se sigue que $dc(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i, w\}) = 3$. Además

$$(T_{11} - \{z_1, z_2, \xi_i, w\}) \supseteq (T_{11}[N^-(w)] - \{\xi_i\}) \cong ST_6$$

y entonces, por el Teorema 1.2.3, para todo $\eta \in N^-(w) \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$ se tiene que $z_3\eta \in F(T_{11}[(N^-(w) \cup \{z_3\}) \setminus \{\xi_i\}])$ si y sólo si $\xi_i\eta \in F(T_{11}[N^-(w)])$. Pero existe $\eta \in (N^-(w) \setminus \{\xi_1, \xi_2\})$ tal que $\xi_1\eta, \eta\xi_2 \in F(T_{11}[N^-(w)])$ y entonces $z_3\eta, \eta z_3 \in F(T_{11})$ lo cual es una contradicción. Entonces $\delta^+(T_{11}) \geq 4$.

Supóngase ahora que $\delta^+(T_{11}) = 4$. Obsérvese que $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_6$ pues de otra forma $T_{11}[N^-(w)]$ contendría un TT_4 y T_{11} contendría un TT_5 . Extiéndase $T_{11}[N^-(w)]$ a un torneo $T_7 \cong ST_7$ añadiendo un nuevo vértice $\lambda \notin V(T_{11})$ y las bien determinadas flechas faltantes. Sea $z_i \in N^+(w)$, con $i \in \{1, 2\}$, tal que $T_{11}[N^+(w) \setminus \{z_i\}]$ sea acíclico. Luego, se tiene que $T_{11}[(N^+(w) \cup \{w\}) \setminus \{z_i\}]$ es acíclico, y por lo tanto $T_{11}[N^-(w) \cup \{z_i\}]$ es 3-dicromático.

Dado que $T_{11}[N^-(w)] \cong ST_6$, se sigue, de nuevo por el Teorema 1.2.3, que para todo $\eta \in N^-(w)$, con $i \in \{1, 2\}$, $\eta z_i \in F(T_{11}[N^-(w) \cup \{z_i\}])$ si y sólo si $\eta\lambda \in F(T_7)$. Tómensse $\eta_1, \eta_2 \in N^-(w)$ tales que $\eta_j\lambda \in F(T_7)$ para $j \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, $\eta_i z_i \in F(T_{11})$ para $i, j \in \{1, 2\}$ y $T_{11}[\{z_1, z_2, w, \eta_1, \eta_2\}]$ es un TT_5 , lo cual es una contradicción. \square

Notación 2.1.3 *A partir de ahora, se denota como U a un conjunto de vértices de T_{11} tal que $T_{11}[U] \cong TT_4$ y $P : u_1, u_2, u_3, u_4$ es una trayectoria dirigida en $T_{11}[U]$.*

Lema 2.1.4 Si T_{11} es regular y $T_{11} - U \cong W$, entonces T_{11} contiene un subtorneo isomorfo a TT_5 .

Demostración. Puede asumirse que $T_{11} - U = W$. Supóngase que T_{11} no contiene un subtorneo isomorfo a TT_5 . La flecha $w_i^+ u_4 \notin F(T_{11})$ pues de lo contrario, por regularidad se tendría que $u_j w_i^+ \in F(T_{11})$ para $j \in \{1, 2, 3\}$ y, por ende, $T_{11} [U \cup \{w_i^+\}] \cong TT_5$. Entonces, se sigue que

$$u_4 w_i^+ \in F(T_{11}) \quad (2.1)$$

para $i \in \{1, 2, 3\}$, y similarmente

$$w_i^- u_1 \in F(T_{11}) \quad (2.2)$$

para $i \in \{1, 2, 3\}$.

Si para dos diferentes índices j, k y alguna $i \in \{1, 2, 3\}$, se cumple que $w_j^+ u_i, w_k^+ u_i \in F(T_{11})$, entonces se tendría que $u_m w_j^+, u_m w_k^+ \in F(T_{11})$ para $m \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$ y $T_{11} [\{w_j^+, w_k^+\} \cup (U \setminus \{u_i\})] \cong TT_5$.

Dado que existe exactamente una $w_j^+ U$ -flecha para cada j , se sigue que el conjunto de $\{w_1^+, w_2^+, w_3^+\} (U \setminus \{u_4\})$ -flechas es independiente y tiene cardinalidad 3. Similarmente, el conjunto de $(U \setminus \{u_1\}) \{w_1^-, w_2^-, w_3^-\}$ -flechas es independiente y tiene cardinalidad 3.

Se puede asumir que $w_3^+ u_i, u_4 w_3^- \in F(T_{11})$. De ahí se sigue que

$$\begin{aligned} w_3^+ u_1, u_1 w_1^+, u_1 w_2^+ &\in F(T_{11}) \\ u_m w_3^+ &\in F(T_{11}) \text{ para } m = 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

similarmente

$$u_4 w_3^-, w_1^- u_4, w_2^- u_4, w_3^- u_m \in F(T_{11}) \text{ para } m = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

y por regularidad

$$w_0 u_1, u_4 w_0 \in F(T_{11}) \quad (2.5)$$

más aún, existe exactamente una $\{w_1^-, w_2^-\} u_m$ -flecha para cada $m \in \{2, 3\}$, dado que el conjunto de $\{u_2, u_3\} \{w_1^-, w_2^-\}$ -flechas es independiente y tiene cardinalidad 2.

Ahora, por regularidad, existe exactamente una $w_0 \{u_2, u_3\}$ -flecha. Sea $w_0 u_s \in F(T_{11})$ con $s \in \{2, 3\}$. Entonces $T_{11} [\{u_1, u_2, w_0, w_j^-, w_3^-\}] \cong TT_5$ donde w_j^- es el vértice tal que $w_j^- u_s \in F(T_{11})$ y la prueba está completa. \square

Lema 2.1.5 Si T_{11} y $T_{11} - U$ son regulares y T_{11} no contiene TT_5 , entonces existen vértices $z, z', w \in V(T_{11}) \setminus U$ tales que

1. $zu_1, zu_4, u_2z, u_3z \in F(T_{11})$
2. $u_1z', u_4z', z'u_2, z'u_3 \in F(T_{11})$
3. $u_1w, wu_4, wu_2, u_3w \in F(T_{11})$

Más aún, se tiene que

4. $\xi u_1, u_4\xi \in F(T_{11})$ para todo $\xi \in (V(T_{11}) \setminus U) \setminus \{z, z', w\}$
5. $\{zz', zw, wz'\}$ no está contenido en $F(T_{11})$.

Demostración. Si $\zeta \in V(T_{11}) \setminus U$ es tal que $\zeta u_4 \in F(T_{11})$, entonces se tiene que

$$\zeta u_1, u_2\zeta, u_3\zeta, \zeta u_4 \in F(T_{11}) \quad (2.6)$$

o bien

$$u_1\zeta, \zeta u_2, u_3\zeta, \zeta u_4 \in F(T_{11}) \quad (2.7)$$

pues en otro caso, por regularidad, $T_{11}[U \cup \{\zeta\}] \cong TT_5$.

Dos diferentes valores de ζ, ζ_1, ζ_2 , no pueden ser ambos del tipo 2.6 o del tipo 2.7 dado que $T_{11}[\{\zeta_1, \zeta_2, u_2, u_3, u_4\}]$ ó $T_{11}[\{\zeta_1, \zeta_2, u_1, u_2, u_4\}]$, respectivamente, serían isomorfías a TT_5 . Entonces existe un vértice z del tipo 2.6 y otro w del tipo 2.7. De forma dual, se tiene que existe también un vértice z' que satisface **2**. La propiedad **4** se sigue de la regularidad de T_{11} .

Finalmente, si $\{zz', zw, wz'\}$ estuviera contenido en $F(T_{11})$, entonces el conjunto $\{u_1, u_4, z, z', w\}$ induciría un TT_5 . \square

Lema 2.1.6 Si T_{11} es 4-dicromático entonces $T_{11} - U \cong W_1$.

Demostración. Primeramente, T_{11} no contiene TT_5 ya que si $U \cong TT_5$ entonces $T_{11} - U$ tiene orden 6 y todo torneo de orden 6 es 2-dicromático, por lo que T_{11} sería 3-dicromático.

Por el Lema 2.1.2 se tiene que T_{11} es regular. Luego, por el Lema 2.1.4 se sigue que $T_{11} - U$ es no isomorfo a W , y dado que $T_{11} - U$ es 3-dicromático basta probar, por el Teorema 1.2.2, que no puede ser regular.

Supóngase que $T_{11} - U$ es regular. Entonces por el Lema 2.1.5 se tiene que $\{zz', zw, wz'\}$ no está contenido en $F(T_{11})$.

Si $z'z \in F(T_{11})$, entonces $U_1 = \{u_2, u_3, z, z'\}$ es acíclico. Luego $T_{11} - U_1$ no es isomorfo a W (Lemas 2.1.2 y 2.1.4). Dado que $d_{T_{11}-U_1}^+(u_1) = 2$ y $d_{T_{11}-U_1}^+(u_4) = 4$, se sigue que $T_{11} - U_1 \cong W_1$ (Cuadro 1.2) y por la estructura de W_1 se tiene que $u_4u_1 \in F(T_{11} - U_1)$ lo cual arroja una contradicción con el hecho de que U es acíclico y $P : u_1, u_2, u_3, u_4$ es una trayectoria dirigida. Por lo tanto $z'z \notin F(T_{11})$.

Si $wz \in F(T_{11})$, entonces el conjunto $U_2 = \{u_3, u_4, z, w\}$ es acíclico y $d_{T_{11}-U_2}^+(u_1) = d_{T_{11}-U_2}^+(u_2) = 2$. Pero como $T_{11} - U_2$ es 3-dicromático, no regular y distinto de W (Lema 2.1.4), se tiene que $T_{11} - U_2 \cong W_1$ lo cual es una contradicción puesto que W_1 tiene exactamente un vértice de exgrado 2 y uno de ingrado 2. Por lo tanto $wz \notin F(T_{11})$.

Si $z'w \in F(T_{11})$, entonces el conjunto $U_3 = \{u_1, u_2, z', w\}$ es acíclico y $d_{T_{11}-U_3}^-(u_3) = d_{T_{11}-U_3}^-(u_4) = 2$. Pero como $T_{11} - U_3$ es 3-dicromático, no regular y distinto de W (Lema 2.1.4), se tiene que $T_{11} - U_3 \cong W_1$ lo cual es una contradicción puesto que W_1 tiene exactamente un vértice de exgrado 2 y uno de ingrado 2. Por lo tanto $z'w \notin F(T_{11})$.

Entonces se tiene que $\{zz', zw, wz'\} \subset F(T_{11})$, contraviniendo lo establecido en el Lema 2.1.5. De ahí que $T_{11} - U$ no puede ser regular y, por ende, es isomorfo a W_1 . \square

Teorema 2.1.7 ST_{11} es el único torneo 4-dicromático de orden 11.

Demostración. Sea T_{11} un torneo 4-dicromático. Por el Lema 2.1.6 se tiene que

$$(T_{11} - U) \cong W_1$$

y se puede asumir que $(T_{11} - U) = W_1$. Dado que T_{11} es regular por el Lema 2.1.2, hay una única w_1^+U -flecha y sólo una Uw_1^- -flecha.

Si $w_1^+u_4 \in F(T_{11})$, entonces $U \cup \{w_1^+\}$ induciría un TT_5 . Por lo tanto, se tiene que

$$u_4w_1^+ \in F(T_{11}) \tag{2.8}$$

y también

$$w_1^-u_1 \in F(T_{11}) \tag{2.9}$$

por dualidad.

Se define $U_i = (U \cup \{w_1^-\}) \setminus \{u_i\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Se probará ahora que $u_3w_1^-$ es la Uw_1^- -flecha.

Supóngase que $u_2w_1^- \in F(T_{11})$. Entonces U_2 es acíclico y $d_{T_{11}-U_2}^+(u_2) = 2$. Dado que w_2^+ , w_3^- y w_3^+ tienen exgrado 2 en $(T_{11} - U_2) - \{u_2\}$ y además $(T_{11} - U_2) \cong W_1$, se sigue que $w_2^+u_2, w_3^-u_2, w_3^+u_2 \in F(T_{11})$ y el conjunto $\{u_2, w_1^-, w_2^+, w_3^+, w_3^-\}$ induciría un TT_5 , lo cual es imposible. Por lo tanto, se tiene que

$$w_1^-u_2 \in F(T_{11}) \quad (2.10)$$

y también

$$u_3w_1^+ \in F(T_{11}) \quad (2.11)$$

por dualidad.

Supóngase ahora que $u_4w_1^- \in F(T_{11})$, entonces se tiene que U_4 es acíclico, $(T_{11} - U_4) \cong W_1$ y $d_{T_{11}-U_4}^-(u_4) = 2$. Aplicando el Lema 1.2.5, con $\xi = u_4$, se sigue que $d_{T_{11}-U_4}^-(u_4) = 3$, lo cual es imposible. Por lo tanto, se tiene que

$$w_1^-u_4 \in F(T_{11}) \quad (2.12)$$

$$u_3w_1^- \in F(T_{11}) \quad (2.13)$$

y también

$$u_1w_1^+ \in F(T_{11}) \quad (2.14)$$

$$w_1^+u_2 \in F(T_{11}) \quad (2.15)$$

por dualidad.

Además, se tiene que

$$u_4w_0 \in F(T_{11}) \quad (2.16)$$

ya que en otro caso $N_{T_{11}}^+(u_4) \cap N_{T_{11}}^+(w_1^+) = \{w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ el cual es acíclico y por lo tanto $\{u_4, w_1^+, w_2^+, w_2^-, w_3^-\}$ induciría un TT_5 . Tenemos que

$$w_0u_1 \in F(T_{11}) \quad (2.17)$$

por dualidad.

Ahora, U_3 es acíclico. Por el Lema 1.2.5, $N_{T_{11}-U_3}^+(u_3) = \{w_0, w_1^+, w_2^+\}$ y de esta manera $N_{T_{11}}^+(u_3)$ está también determinada. Dado que $\{w_0, w_1^+, w_2^+\}$ es acíclico y $u_4w_0, u_4w_1^+ \in F(T_{11})$, entonces $w_2^+u_4 \in F(T_{11})$ ya que en otro caso $\{u_3, u_4, w_0, w_1^+, w_2^+\}$ induciría un TT_5 . Se sigue que $N_{T_{11}}^-(u_4) = U_4 \cup \{w_2^+\}$. Y por dualidad, $N_{T_{11}}^-(u_2)$ y $N_{T_{11}}^+(u_1)$ están determinadas. Así que el torneo T_{11} está completamente determinado y debe ser isomorfo a ST_{11} dado que es 4-dicromático. \square

Lema 2.1.8 ST_{11} es la única gráfica orientada 4-dicromática de orden a lo más 11.

Demostración. Se tiene el hecho de que $\{\{0, 1, 4, 5\}, \{2, 3, 6, 7\}, \{8, 9, 10\}\}$ es una partición de \mathbb{Z}_{11} en subconjuntos acíclicos de $ST_{11} - \{(8, 9)\}$, y dado que ST_{11} es transitivo en flechas (Observación 2.1.2), se sigue que ST_{11} es 4-dicromática crítica en flechas (Definición 14). \square

2.2. La familia $\{D_m\}$

Definición 2.2.1 Dadas tres digráficas D_0, D_1, D_2 disjuntas dos a dos, una nueva digráfica² $t(D_0, D_1, D_2)$ se define como

$$V(t(D_0, D_1, D_2)) = \bigcup_{i=0}^2 V(D_i)$$

$$F(t(D_0, D_1, D_2)) = \bigcup_{i=0}^2 F(D_i) \cup \{\vec{uv} : u \in V(D_i), v \in V(D_{i+1})\}$$

tomando los índices módulo 3.

Observación 2.2.1 Nótese que $t(D_0, D_1, D_2)$ está perfectamente definida salvo isomorfismo.

Observación 2.2.2 Si D_0, D_1 y D_2 son digráficas regulares con el mismo número de vértices, entonces $t(D_0, D_1, D_2)$ es también regular.

Ahora se describe la función³ $\tilde{n} : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ que está muy relacionada con la digráfica anterior.

Definición 2.2.2 Para cualesquiera tres enteros no negativos m_0, m_1 y m_2 , $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$ denota al menor entero k tal que existen tres subconjuntos $J_0, J_1, J_2 \subseteq \{0, 1, \dots, k-1\}$ tales que $|J_i| = m_i$ para $0 \leq i \leq 2$ y $\bigcap_{i=0}^2 J_i = \emptyset$.

²Más adelante, este concepto se extenderá hacia una construcción más general llamada Suma de Zykov.

³Esta función se generalizará más adelante para obtener el concepto de número de cubrimiento.

Ejemplo. $\tilde{n}(3, 3, 3) = 5$, pues dado $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ se tiene que los conjuntos $J_0 = \{0, 1, 2\}$, $J_1 = \{2, 3, 4\}$ y $J_2 = \{0, 1, 3\}$ tienen cardinalidad 3 y su intersección es vacía, mientras que para el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ es imposible encontrar tres conjuntos que cumplan las propiedades requeridas.

Por otro lado, $\tilde{n}(2, 3, 3) = 4$ pues dado $\{0, 1, 2, 3\}$ se tiene que los conjuntos $J_0 = \{0, 1\}$, $J_1 = \{1, 2, 3\}$ y $J_2 = \{0, 2, 3\}$ tienen cardinalidades 2, 3 y 3, respectivamente, y su intersección es vacía, mientras que para el conjunto $\{0, 1, 2\}$ es imposible encontrar tres conjuntos que cumplan las propiedades requeridas.

Obsérvese que al ser $\tilde{n}(2, 2, 3) = \tilde{n}(2, 3, 3) = 4$ se tiene que \tilde{n} no es inyectiva, pero dado que $\tilde{n}(0, 0, i) = i$ para toda $i \in \mathbb{Z}^+$, la función \tilde{n} es suprayectiva.

Observación 2.2.3 *Nótese que para cualesquiera $m_0, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ siempre existe $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$ puesto que $\{0, 1, \dots, m_0 + m_1 + m_2 - 1\}$ cumple las propiedades requeridas. De esta forma, $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2) \leq m_0 + m_1 + m_2$.*

Obsérvese que dados m_0, m_1 y m_2 , para toda permutación σ de $\{0, 1, 2\}$ se tiene que $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2) = \tilde{n}(m_{\sigma(0)}, m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)})$.

Definición 2.2.3 *Se dice que $\{m_0, m_1, m_2\}$ es una terna \tilde{n} -crítica si cumple que $1 \leq m_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ y además $\tilde{n}(m_0 - 1, m_1, m_2)$, $\tilde{n}(m_0, m_1 - 1, m_2)$ y $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2 - 1)$ son todos iguales a $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2) - 1$.*

Ejemplo. Se tiene que $\tilde{n}(3, 3, 3) = 5$ y $\tilde{n}(2, 3, 3) = 4$, por lo que la terna $\{3, 3, 3\}$ es \tilde{n} -crítica.

Teorema 2.2.4 *Sean D_0, D_1, D_2 tres digráficas ajenas dos a dos tales que $dc(D_i) = m_i \geq 1$ para $i = 0, 1, 2$, entonces*

$$dc(t(D_0, D_1, D_2)) = \tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$$

más aún, si $\{m_0, m_1, m_2\}$ es una tripleta \tilde{n} -crítica y D_0, D_1, D_2 son críticas, entonces $t(D_0, D_1, D_2)$ es también crítica.

Demostración. Sean $J_0, J_1, J_2 \subseteq \{0, 1, \dots, \tilde{n}(m_0, m_1, m_2) - 1\}$ tales que $|J_i| = m_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ y $\bigcap_{i=0}^2 J_i = \emptyset$.

Se colorea propiamente la digráfica D_i con los colores en J_i para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Estas coloraciones parciales inducen una coloración acíclica de $t(D_0, D_1, D_2)$ utilizando exactamente $\tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$ colores, ya que ningún color aparece en las tres digráficas D_i .

De ahí que $dc(t(D_0, D_1, D_2)) \leq \tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$.

Supóngase ahora que $dc(t(D_0, D_1, D_2)) = k < \tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$.

Sea $\{0, 1, \dots, k-1\}$ el conjunto de colores de una coloración acíclica de $t(D_0, D_1, D_2)$ y sea J_i el conjunto de colores usados en D_i para $i \in \{0, 1, 2\}$. Como $k < \tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$ se tiene que $\bigcap_{i=0}^2 J_i \neq \emptyset$.

Sea $c \in \bigcap_{i=0}^2 J_i$ y $u_i \in V(D_i)$ tal que u_i fue coloreado con el color c para $i \in \{0, 1, 2\}$. Por la estructura de $t(D_0, D_1, D_2)$ se tiene que $\{u_0, u_1, u_2\}$ induce un triángulo dirigido monocromático, lo cual es una contradicción.

Entonces $dc(t(D_0, D_1, D_2)) = \tilde{n}(m_0, m_1, m_2)$.

Luego, supóngase que $\{m_0, m_1, m_2\}$ es \tilde{n} -crítica y D_0, D_1, D_2 son críticas. Sea $v \in V(t(D_0, D_1, D_2))$ y considérese la digráfica $t(D_0, D_1, D_2) - \{v\}$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $v \in V(D_0)$, entonces se tiene que $t(D_0, D_1, D_2) - \{v\} \cong t(D_0 - \{v\}, D_1, D_2)$. Pero $dc(D_0 - \{v\}) = m_0 - 1$ por lo que $dc(t(D_0 - \{v\}, D_1, D_2)) = \tilde{n}(m_0, m_1, m_2) - 1$.

De ahí que $dc(t(D_0, D_1, D_2) - \{v\}) = dc(t(D_0, D_1, D_2)) - 1$ y la digráfica $t(D_0, D_1, D_2)$ es crítica. \square

Ejemplo. Se tiene que la digráfica $t(K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3)$ es 3-dicromática dado que $\tilde{n}(1, 2, 2) = 3$. Además, $\{1, 2, 2\}$ es \tilde{n} -crítica y K_1 y \vec{C}_3 son críticas. Entonces $t(K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3)$ es un torneo 3-dicromático crítico (Figura 2.4).

La existencia de una familia infinita de torneos 4-dicromáticos críticos (no necesariamente regulares), por el Teorema 2.2.4, es una consecuencia inmediata del hecho de que $t(\vec{C}_3, \vec{C}_3, T)$ es un torneo 4-dicromático crítico siempre que T sea un torneo 3-dicromático crítico.

Definición 2.2.5 Sean r y s dos enteros tales que $1 \leq s < r$. El torneo $H_{r,s}$ se define como

$$\begin{aligned} V(H_{r,s}) &= \{1, 2, \dots, r+s\} \\ F(H_{r,s}) &= \left\{ \overrightarrow{ij} : 1 \leq i < j \leq r+s \text{ y } j-i \neq r \right\} \cup \left\{ \overrightarrow{(i+r)i} : i \leq s \right\} \end{aligned}$$

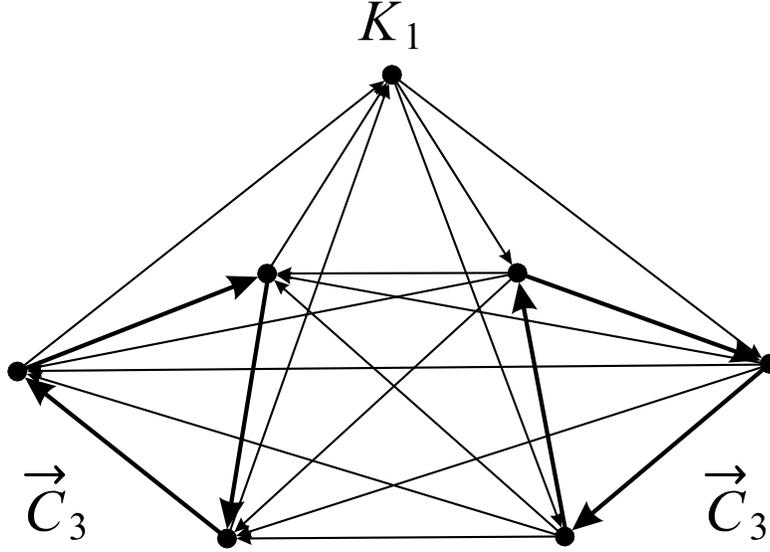


Figura 2.4: La digráfica $t(K_1, \vec{C}_3, \vec{C}_3)$.

Lema 2.2.6 *El máximo número de vértices en un subtorneo transitivo de $H_{r,s}$ es r . Es decir, $\vec{\beta}(H_{r,s}) = r$.*

Demostración. Sea S un conjunto acíclico de vértices de $H_{r,s}$. Si para cada $1 \leq i \leq s$, S no contiene a $\{i, i+r\}$, entonces $|S| \leq r$. Si para alguna i , $\{i, i+r\} \subseteq S$, entonces $k \notin S$ para toda k que satisfaga $i < k < i+r$ (Figura 2.5), ya que $\{i, k, i+r\}$ induce un triángulo cíclico en $H_{r,s}$. Luego $|S| \leq s+1 \leq r$. Dado que $\{1, 2, \dots, r\}$ induce un subtorneo transitivo de $H_{r,s}$ el lema es válido. \square

En [11] se probó que el torneo circulante $\vec{C}_{13}\langle 4 \rangle$, el cual se denota como ST_{13} , es el único torneo de orden 13 (salvo isomorfismo) que no contiene un torneo transitivo con cinco vértices. Por lo tanto, $dc(ST_{13}) \geq 4$, y dado que $\{\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 10, 11\}, \{12\}\}$ es una partición de su conjunto de vértices en cuatro subconjuntos acíclicos, se sigue que $dc(ST_{13}) = 4$ y $dc(ST_{13} - \{12\}) = 3$. Entonces ST_{13} es un torneo circulante 4-dicromático crítico.

Notación 2.2.7 *Para $m \geq 2$, D_m denota al torneo circulante $\vec{C}_{6m+1}\langle 2m \rangle$.*

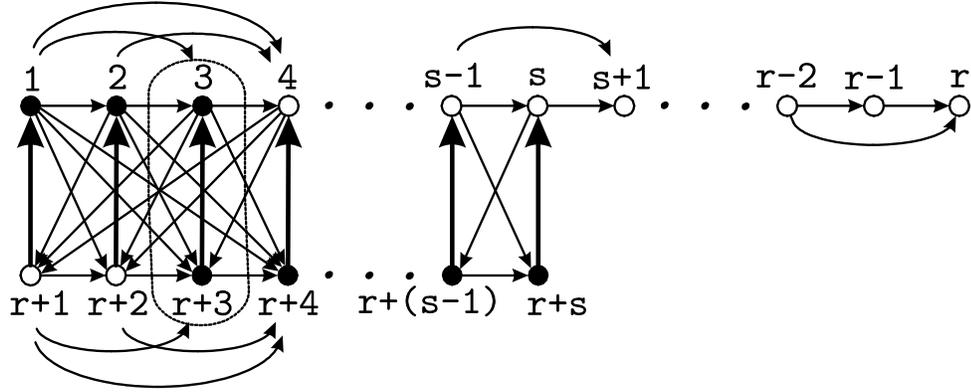


Figura 2.5: Vértices de $H_{r,s}$ descartados (en blanco) cuando $\{3, r+3\} \subseteq S$.

Observación 2.2.4 *Nótese que los subconjuntos*

$$\begin{aligned} & \{0, 1, \dots, 2m-1\} \\ & \{2m, 2m+1, \dots, 4m-1\} \\ & \{4m, 4m+1, \dots, 6m-1\} \\ & \{6m\} \end{aligned}$$

forman una partición acíclica de $V(D_m)$ (Figura 2.6).

Por la Observación 2.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} dc(D_m) & \leq 4 \\ dc(D_m - \{6m\}) & \leq 3 \end{aligned}$$

pues los cuatro subconjuntos inducen una 4-coloración acíclica.

Nótese también que para $m = 1$, $D_1 = \vec{C}_7 \langle 2 \rangle \cong \vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$, por lo que es 2-dicromático (Teorema 1.3.1).

Teorema 2.2.8 D_m es un torneo circulatorio 4-dicromático crítico para toda $m \geq 2$.

Demostración. Por la Observación 2.2.4, para probar que D_m es un torneo 4-dicromático crítico para $m \geq 2$, basta mostrar que $dc(D_m) \geq 4$ para $m \geq 2$.

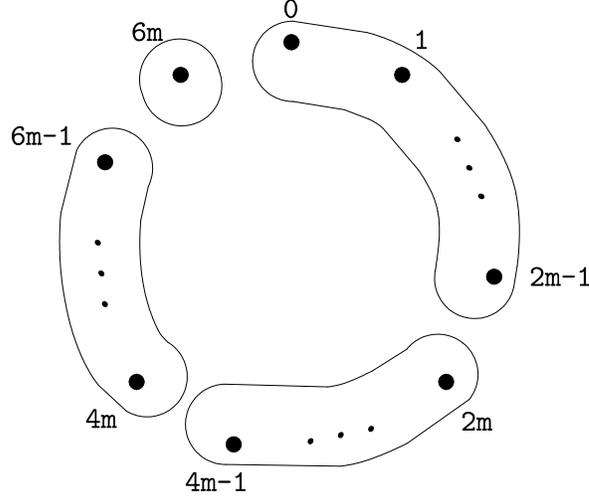


Figura 2.6: Partición de $V(\vec{C}_{6m+1}(2m))$ en cuatro subconjuntos acíclicos.

Nótese que para $m = 2$, se tiene que $D_2 = \vec{C}_{13}\langle 4 \rangle \cong ST_{13}$ y entonces es 4-dicromático crítico.

Entonces, para demostrar que $dc(D_m) \geq 4$ es suficiente con exhibir que cada conjunto acíclico S de vértices de D_m tiene cardinalidad a lo más $2m$. Dado que D_m es transitivo en vértices, podemos asumir que 0 es la fuente de $D_m[S]$. Entonces

$$S_1 = S \setminus \{0\} \subseteq N^+(0) = (\{1, 2, \dots, 3m\} \cup \{4m + 1\}) \setminus \{2m\}$$

donde $4m + 1 = -2m$ módulo $6m + 1$.

Como $D_m[N^+(0)] - \{4m + 1\} \cong H_{2m-1,m}$ (toda biyección que preserva el orden es un isomorfismo, Figura 2.7), se tiene que por el Lema 2.2.6 se cumple que $|S_1| \leq 2m - 1$ cuando $4m + 1 \notin S_1$.

Entonces supóngase que $4m + 1 \in S_1$.

Considérese la igualdad

$$\begin{aligned} F(D_m[N^+(0)]) &= F(D_m[N^+(0)] - \{4m + 1\}) \\ &\cup \left\{ \overrightarrow{(4m + 1)j} : j = 1, 2, \dots, m, 2m + 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \overrightarrow{(m + j)(4m + 1)} : j = 1, 2, \dots, m - 1, m + 2, \dots, 2m \right\} \end{aligned}$$

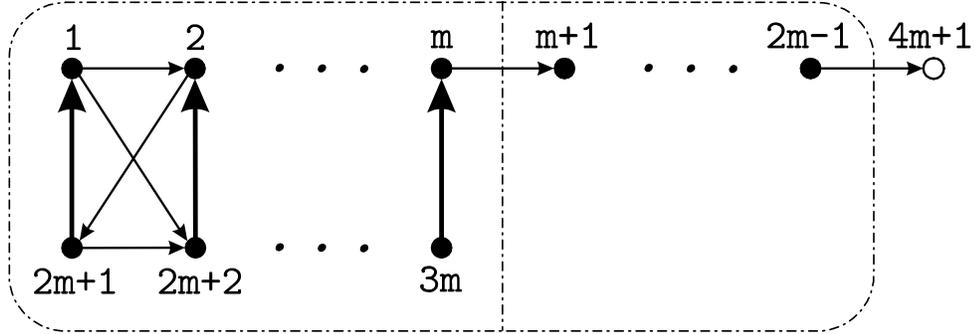


Figura 2.7: Organización conveniente de $N^+(0)$ la cual permite observar claramente que $\vec{C}_{6m+1}(2m)[N^+(0)] - \{4m+1\} \cong H_{2m-1,m}$.

de la cual se desprende que siempre se cumple una de dos

$$S_1 \cap \{1, 2, \dots, m\} = \emptyset$$

ó

$$S_1 \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\} = \emptyset$$

ya que en otro caso, si existen $u, v \in S_1$ tales que

$$u \in \{1, 2, \dots, m\}$$

y

$$v \in \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\}$$

entonces $C : u, v, 4m+1, u$ sería un triángulo cíclico en $D_m[S_1]$.

Análogamente, se tiene que siempre se cumple una de dos

$$2m+1 \notin S_1$$

ó

$$S_1 \cap \{2m+2, 2m+3, \dots, 3m\} = \emptyset$$

ya que en otro caso, si $u, 2m+1 \in S_1$ donde

$$u \in \{2m+2, 2m+3, \dots, 3m\}$$

entonces $C : u, 4m+1, 2m+1, u$ sería un triángulo cíclico en $D_m[S_1]$.

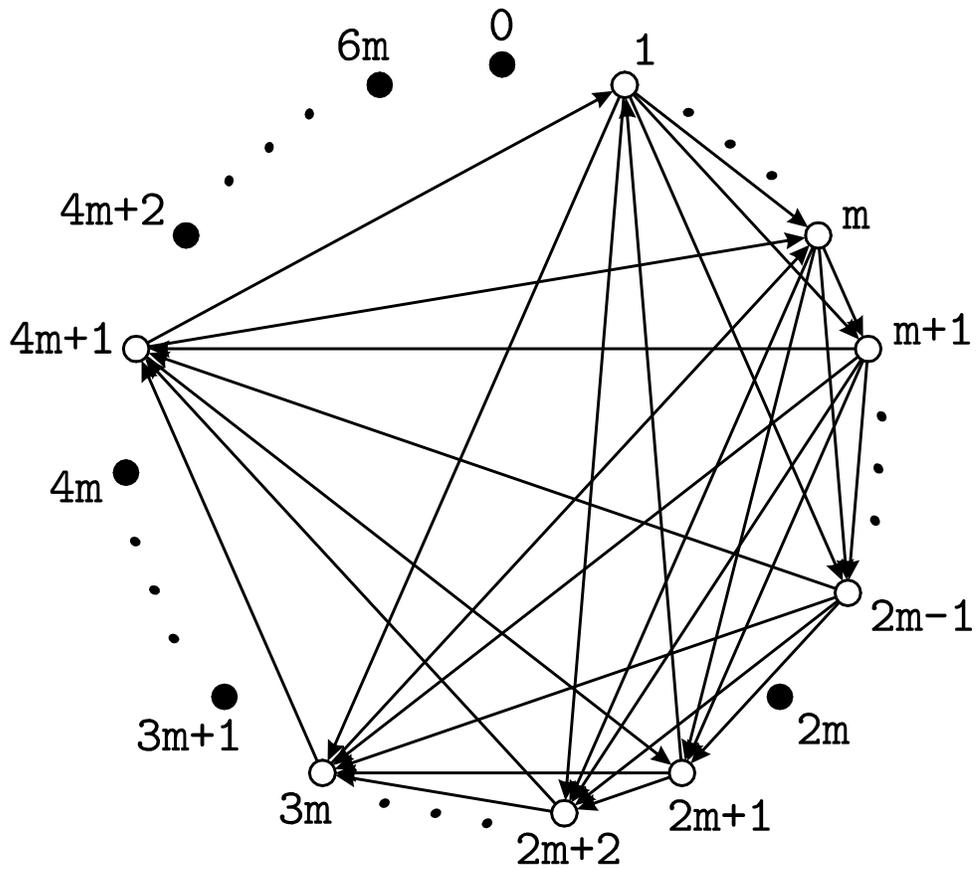


Figura 2.8: Aspecto de $N^+(0)$ en D_m (en blanco).

Por lo tanto, si se tiene que $S_1 \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\} \neq \emptyset$, entonces $|S_1| \leq 2m-1$.

Supóngase entonces que $S_1 \cap \{m+1, m+2, \dots, 2m-1\} = \emptyset$. Luego, si $2m+1 \in S_1$, entonces

$$S_1 \subseteq \{1, 2, \dots, m, 2m+1, 4m+1\}$$

pero dado que $\{1, 2, 2m+1\}$ induce un triángulo cíclico en $D_m[N^+(0)]$, entonces $|S_1| \leq m+1 \leq 2m-1$.

Finalmente, si $2m+1 \notin S_1$ entonces

$$S_1 \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \cup \{2m+2, 2m+3, \dots, 3m\} \cup \{4m+1\}$$

pero dado que $\{j, j+2m+1, 4m+1\}$ es cíclico en $D_m[N^+(0)]$ para toda $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, se concluye que $|S_1| \leq m+1 \leq 2m-1$. \square

Parte II
Sumas de Zykov

Capítulo 3

Hipergráficas y sumas de Zykov

Las hipergráficas extienden el concepto de gráfica al permitir que en cada arista incidan más de dos vértices distintos. En este capítulo se exponen los conceptos de multicubiertas y número de cubrimiento para hipergráficas.

Más adelante, se explica la operación de digráficas llamada suma de Zykov y su comportamiento respecto al número dicromático. Adicionalmente, se muestra la relación entre el número dicromático de sumas de Zykov y el número de cubrimiento de hipergráficas.

3.1. Hipergráficas

Una *hipergráfica* $H = (V, A)$ es la dupla compuesta por $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto finito y $A = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ una familia de subconjuntos de V tal que

1. $E_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \dots, m$
2. $\bigcup_{i=1}^m E_i = V$

Una hipergráfica simple o Sperner es una hipergráfica H tal que

3. Si $E_i \subseteq E_j$ entonces $i = j$

Los elementos v_1, v_2, \dots, v_n de V son llamados vértices, y los conjuntos E_1, E_2, \dots, E_m de A son las (hiper)aristas de la hipergráfica H .

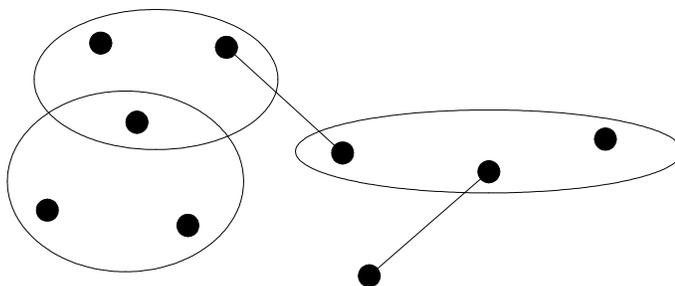


Figura 3.1: Hipergráfica.

Observación 3.1.1 *Nótese que una gráfica sin vértices aislados es una hipergráfica simple cuyas aristas tienen todas cardinalidad exactamente dos¹.*

Para esquematizar una hipergráfica H , ésta puede ser dibujada mediante un conjunto de puntos que representen a los vértices, la arista E_j se representa mediante una curva continua que una ambos elementos si $|E_j| = 2$, con un lazo si $|E_j| = 1$ y con una curva cerrada simple encerrando sus elementos si $|E_j| \geq 3$ (Figura 3.1).

Notación 3.1.1 *Como en las gráficas, el orden de H , denotado como $|H|$, es el número de vértices. El número de aristas, también llamado tamaño, se denota como $\|H\|$.*

Definición 3.1.2 *Si $H = (V, A)$ es una hipergráfica, el rango $\rho(H)$ de H se define como la máxima cardinalidad de una arista de H ; se dice que H es una r -gráfica si cada una de sus aristas tiene cardinalidad r .*

Observación 3.1.2 *Nótese que el concepto de rango sólo tiene sentido para las hipergráficas.*

Para $v \in V$ se define la *estrella* $H(v)$ con centro en v como la subhipergráfica formada por las aristas que contienen a v . Se define el *grado* $d(v)$ de v como el número de aristas de $H(v)$, entonces $d(v) = \|H(v)\|$. El máximo grado de las aristas de una hipergráfica H se denota como

$$\Delta(H) = \max \{d_H(v) : v \in V(H)\}$$

y si todos los vértices tienen el mismo grado se dice que H es *regular*.

¹Similarmente, una pseudomultigráfica es una hipergráfica en la cual cada arista tiene cardinalidad a lo más dos.

3.1.1. Multicubiertas y número de cubrimiento

Sea H una hipergráfica finita sin puntos aislados. Una función

$$\xi : V(H) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

se llamará una *función de peso* sobre H . Se dice que ξ es *degenerada*² si $\xi^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Notación 3.1.3 Se denota como \mathbf{k} a la función de peso sobre H cuando tiene valor constante k .

Definición 3.1.4 Se define como

$$\|\xi\| = \sum_{w \in V(H)} \xi(w)$$

al peso³ de ξ .

Observación 3.1.3 Nótese que $\|\mathbf{k}\| = |V(H)| \cdot k$.

Sea $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ una familia de aristas de H y $u \in V(H)$, se define

$$J_u = \{j \in J : u \in \alpha_j\}$$

el conjunto de los índices de las aristas que contienen al vértice u . Se dice que $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ es una ξ -cubierta de H siempre que $|J_u| \geq \xi(u)$ para toda $u \in V(H)$.

Definición 3.1.5 El número de ξ -cubrimiento $\tilde{n}(H, \xi)$ de H está dado por

$$\tilde{n}(H, \xi) = \min \left\{ |J| : \{\alpha_j\}_{j \in J} \text{ es una } \xi\text{-cubierta de } H \right\}$$

Observación 3.1.4 El número de \mathbf{k} -cubrimiento de H es el usual número de (multi)cubrimiento que ha sido estudiado en varios artículos, como por ejemplo en [1].

Observación 3.1.5 Nótese que si H' es la subhipergráfica generadora de H cuyas aristas son las aristas máximas de H , entonces $\tilde{n}(H, \xi) = \tilde{n}(H', \xi)$.

²El término función de peso degenerada tiene distintas connotaciones para diferentes autores.

³Obsérvese la variación del significado de $\|\cdot\|$ dependiendo de si se aplica a una hipergráfica o a una función de peso.

Proposición 3.1.6 *Para toda hipergráfica H se cumple que*

1. $\tilde{n}(H, \xi + \xi') \leq \tilde{n}(H, \xi) + \tilde{n}(H, \xi')$ y
 $\tilde{n}(H, k\xi) \leq k\tilde{n}(H, \xi)$ para todo entero positivo k .
2. $\tilde{n}(H, \xi) \leq \tilde{n}(H, \xi')$ cuando $\xi \leq \xi'$.
3. $\tilde{n}(H, \xi) \geq \left\lceil \frac{\|\xi\|}{\rho(H)} \right\rceil$.
4. Si H_0 es una subhipergráfica generadora de H entonces $\tilde{n}(H, \xi) \leq \tilde{n}(H_0, \xi)$.

Demostración. Primero se observa que la desigualdad

$$\rho(H) \cdot \tilde{n}(H, \xi) \geq \|\xi\|$$

siempre se cumple ya que la suma de los pesos no puede sobrepasar a $\tilde{n}(H, \xi)$ veces la cardinalidad máxima de una hiperarista.

1. Si se enciman las cubiertas de ξ y ξ' se obtiene una cubierta para $\xi + \xi'$, por lo que una cubierta óptima de $\xi + \xi'$ tiene a lo más tantas aristas como la suma de las aristas de las cubiertas de ξ y de ξ' . Muy similar es el caso para $\tilde{n}(H, k\xi)$, ya que si se encima k veces la cubierta de ξ se obtiene una cubierta para $k\xi$, por lo que el número de $k\xi$ -cubierta para H es a lo más k veces el número de ξ -cubierta para H .
2. Como $\xi \leq \xi'$, entonces una cubierta de ξ' es también una cubierta para ξ . Luego la cantidad de hiperaristas necesarias para cubrir a ξ es a lo más la cantidad necesaria para cubrir a ξ' .
3. Dada $\rho(H) \cdot \tilde{n}(H, \xi) \geq \|\xi\|$, se tiene que $\tilde{n}(H, \xi) \geq \frac{\|\xi\|}{\rho(H)}$, pero $\tilde{n}(H, \xi)$ es entero, por lo que es mayor o igual que $\left\lceil \frac{\|\xi\|}{\rho(H)} \right\rceil$.
4. Como H_0 es una subhipergráfica generadora de H , cualquier ξ -cubierta de H_0 es también una ξ -cubierta de H . Luego $\tilde{n}(H, \xi)$ es a lo más $\tilde{n}(H_0, \xi)$, pudiendo ser menor si es que con las hiperaristas adicionales se puede encontrar una mejor distribución.

□

3.1.2. Hipergráficas circulantes

Una hipergráfica H es *circulante* si tiene un automorfismo que sea una permutación cíclica de $V(H)$. Si $r \leq m$, la r -gráfica circulante $\Lambda_{m,r}$ se define como

$$\begin{aligned} V(\Lambda_{m,r}) &= \mathbb{Z}_m \\ A(\Lambda_{m,r}) &= \{\alpha_j : j \in \mathbb{Z}_m\} \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_j = \{j, j+1, \dots, j+r-1\}$$

para $j \in \mathbb{Z}_m$.

Para cada entero positivo s , se define la función de peso $\xi^{(s)}$ sobre $\Lambda_{m,r}$ de la forma: si $sr = qm + t$ donde t es el residuo de $sr \bmod m$, entonces

$$\xi^{(s)}(j) = \begin{cases} q & \text{si } j \in A_{t,m-1} \\ q+1 & \text{si } j \notin A_{t,m-1} \end{cases}$$

y en particular, $\xi^{(s)} = \mathbf{q}$ cuando $t = 0$.

Observación 3.1.6 Nótese que $\|\xi^{(s)}\| = sr$.

Ejemplo. En la Figura 3.2 se observa la hipergráfica $\Lambda_{7,3}$ bajo la función de peso $\xi^{(5)}$. En este caso $m = 7$, $r = 3$ y $s = 5$, de donde $q = 2$ y $t = 1$.

Proposición 3.1.7 Si H contiene a $\Lambda_{m,r}$ como subhipergráfica generadora y $\rho(H) = r$ entonces $\tilde{n}(H, \xi^{(s)}) = s$ y $\tilde{n}(H, \xi') > s$ siempre que $\|\xi'\| > \|\xi^{(s)}\|$.

Demostración. La familia $\{\alpha_j : j = rj', j' = 0, 1, \dots, s\}$ es una $\xi^{(s)}$ -cubierta de H , entonces $\tilde{n}(H, \xi^{(s)}) \leq s$. Luego, por la Proposición 3.1.6.3 se tiene que

$$\tilde{n}(H, \xi^{(s)}) \geq \left\lceil \frac{\|\xi^{(s)}\|}{\rho(H)} \right\rceil = \left\lceil \frac{sr}{r} \right\rceil = \lceil s \rceil = s$$

y por lo tanto $\tilde{n}(H, \xi^{(s)}) = s$.

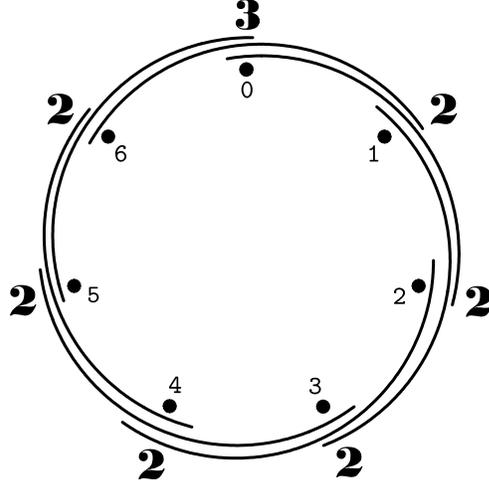


Figura 3.2: Función de peso $\xi^{(5)}$ sobre la hipergráfica circular $\Lambda_{7,3}$.

Como $\|\xi'\| > \|\xi^{(s)}\| = sr$, entonces por la Proposición 3.1.6.3 se tiene que

$$\tilde{n}(H, \xi') \geq \left\lceil \frac{\|\xi'\|}{\rho(H)} \right\rceil > \left\lceil \frac{\|\xi^{(s)}\|}{\rho(H)} \right\rceil = s$$

y por lo tanto $\tilde{n}(H, \xi') > s$. \square

Proposición 3.1.8 *Sea k un entero positivo. Si $\rho(H) = r$ y H contiene una copia isomorfa de $\Lambda_{m,r}$ como subhipergráfica generadora, entonces*

$$\tilde{n}(H, \mathbf{k}) = \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \mathbf{k}) = \left\lceil \frac{km}{r} \right\rceil$$

Demostración. Puede asumirse que $\Lambda_{m,r}$ es una subhipergráfica generadora de H . La desigualdad

$$\tilde{n}(H, \mathbf{k}) \geq \left\lceil \frac{km}{r} \right\rceil$$

se deduce de la Proposición 3.1.6.3, ya que $\|\mathbf{k}\| = km$.

Como $\Lambda_{m,r}$ es una subhipergráfica generadora de H entonces por la Proposición 3.1.6.4 se tiene que

$$\tilde{n}(H, \mathbf{k}) \leq \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \mathbf{k})$$

y dado que $\xi^{(s)} \geq \mathbf{k}$ para $s = \lceil \frac{km}{r} \rceil$, por la Proposición 3.1.6.2 se tiene que

$$\tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \mathbf{k}) \leq \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \xi^{(s)})$$

Además, al contenerse $\Lambda_{m,r}$ a sí misma como subhipergráfica generadora, por la Proposición 3.1.7 se cumple que

$$\tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \xi^{(s)}) = s$$

Luego

$$\lceil \frac{km}{r} \rceil \leq \tilde{n}(H, \mathbf{k}) \leq \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \mathbf{k}) \leq \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \xi^{(s)}) = s = \lceil \frac{km}{r} \rceil$$

lo cual demuestra las igualdades. \square

Observación 3.1.7 *La Proposición 3.1.8 es válida en particular para $K_m^{(r)}$, la r -gráfica completa de orden m .*

3.2. Sumas de Zykov

Sea D una digráfica y sea $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in V(D)}$ una familia de digráficas no vacías y mutuamente disjuntas. La *suma de Zykov* $\sigma(\alpha, D)$ de α sobre D se define como

$$\begin{aligned} V(\sigma(\alpha, D)) &= \bigcup_{i \in V(D)} V(\alpha_i) \\ F(\sigma(\alpha, D)) &= \bigcup_{i \in V(D)} F(\alpha_i) \cup \left\{ \overrightarrow{vw} : u \in V(\alpha_i), w \in V(\alpha_j), \overrightarrow{ij} \in F(D) \right\} \end{aligned}$$

y si los miembros de una familia α no son mutuamente disjuntos, se reemplaza cada uno de ellos por una copia isomorfa de tal forma que la nueva familia α' se transforme en una de digráficas mutuamente disjuntas; sin embargo, $\sigma(\alpha, D)$ continuará denotando la digráfica resultante $\sigma(\alpha', D)$ que se obtuvo salvo isomorfismo.

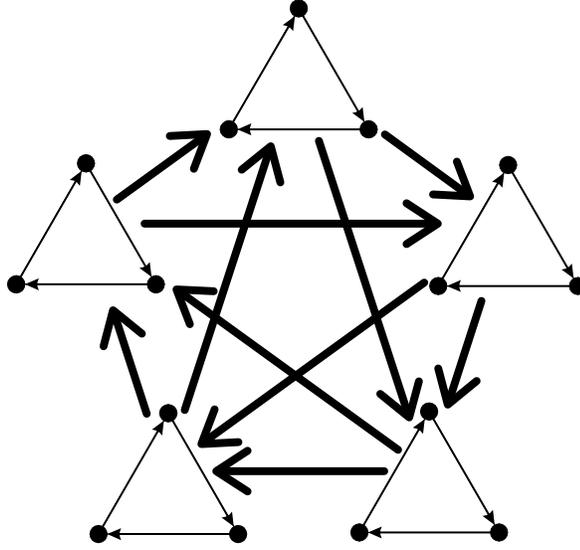


Figura 3.3: Composición del torneo \vec{C}_5 con el torneo \vec{C}_3 .

Observación 3.2.1 *Nótese que $t(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ (Definición 2.2.1) denota lo mismo que $\sigma(\alpha, D)$ para $D = \vec{C}_3$ y $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$.*

Definición 3.2.1 *La función*

$$p : \sigma(\alpha, D) \rightarrow D$$

cuyo valor es constante en cada α_u e igual a u , es un epimorfismo reflexivo el cual se llamará la proyección natural de $\sigma(\alpha, D)$ sobre D .

Definición 3.2.2 *Si $\alpha_i \cong W$ para cada $i \in V(D)$ se escribe $D[W]$, en lugar de $\sigma(\alpha, D)$, y se habla de la composición de D con W , en lugar de la suma de Zykov.*

Ejemplo. La Figura 3.3 es un ejemplo de composición para $D = \vec{C}_5$ y $W = \vec{C}_3$. Las flechas gruesas de la figura significan que todos los vértices de la componente que está en la cola de la flecha son invecinos de los vértices de la componente que está en la punta de la flecha.

Teorema 3.2.3 *La composición de dos digráficas circulantes es a su vez una digráfica circulante.*

Demostración. Sean $\vec{C}_{2r+1}(K)$ y $\vec{C}_{2s+1}(J)$ dos digráficas circulantes.

Considerando la digráfica circulante

$$H = \vec{C}_{(2r+1)(2s+1)}((2r+1)J \cup (K + (2r+1)I_{2s+1})) \quad (3.1)$$

basta con probar que $\vec{C}_{2r+1}(K) \left[\vec{C}_{2s+1}(J) \right] \cong H$.

Sea $p : H \rightarrow \vec{C}_{2r+1}(K)$ el epimorfismo reflexivo definido como asignar a $p(z)$ el residuo de z módulo $2r+1$. Entonces para todo $w \in V\left(\vec{C}_{2r+1}(K)\right)$ (es decir, para todo $w \in \mathbb{Z}_{2r+1}$) se tiene que $p^{-1}(z) = w + (2r+1)I_{2s+1}$ induce una copia isomorfa de $\vec{C}_{2s+1}(J)$.

Finalmente, si existe una $p^{-1}(w)p^{-1}(w')$ -flecha en H , entonces se tiene que $zz' \in F(H)$ para todo $z \in p^{-1}(w)$ y $z' \in p^{-1}(w')$. Esto prueba la afirmación y muestra que p es la proyección natural de H en $\vec{C}_{2r+1}(K)$. \square

Corolario 3.2.4 *La composición de dos torneos circulantes es a su vez un torneo circulante.*

Demostración. Sean $\vec{C}_{2r+1}(K)$ y $\vec{C}_{2s+1}(J)$ dos torneos circulantes.

Por el Teorema 3.2.3 se tiene que $H = \vec{C}_{2r+1}(K) \left[\vec{C}_{2s+1}(J) \right]$ es una digráfica circulante definida como en 3.1.

Por ser ambas digráficas torneos se sigue que H es a su vez un torneo. \square

3.2.1. Sumas de Zykov y número dicromático

El problema de calcular el número dicromático de una suma de Zykov puede reducirse al de calcular el número de cubrimiento de una hipergráfica, como se muestra a continuación.

Definición 3.2.5 *Sea D una digráfica. La hipergráfica $H_1(D)$ se define como*

$$\begin{aligned} V(H_1(D)) &= V(D) \\ A(H_1(D)) &= \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un conjunto acíclico maximal}\} \end{aligned}$$

Definición 3.2.6 Sea D una digráfica. La hipergráfica $\widehat{H}_1(D)$ se define como

$$\begin{aligned} V(\widehat{H}_1(D)) &= V(D) \\ A(\widehat{H}_1(D)) &= \{S \subseteq V(D) : S \text{ es un conjunto acíclico}\} \end{aligned}$$

y se observa que $\widehat{H}_1(D) \supseteq H_1(D)$.

Proposición 3.2.7 Para todo m entero positivo se cumple que

1. $H_1(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) \supseteq \Lambda_{2m+1, m+1}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle) = m + 1$.
2. $H_1(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle) \supseteq \Lambda_{2m+1, m}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle) = m$.
3. $H_1(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle) \supseteq \Lambda_{6m+1, 2m}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle) = 2m$.
4. $H_1(\vec{C}_{17} \langle 5 \rangle) \supseteq \Lambda_{17, 5}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{17} \langle 5 \rangle) = 5$.
5. $H_1(\vec{C}_{17} \langle 7 \rangle) \supseteq \Lambda_{17, 7}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{17} \langle 7 \rangle) = 7$.
6. $H_1(\vec{C}_{17} \langle 6 \rangle) \supseteq \Lambda_{17, 6}$ y $\vec{\beta}(\vec{C}_{17} \langle 6 \rangle) = 6$.

Demostración. Sea m un entero positivo.

1. Sea S un conjunto acíclico máximo de $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$, y supóngase que el vértice v es la fuente de S . Entonces $|S| \leq d^+(v) + 1$. Por la estructura de $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ se tiene que

$$N^+(v) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + m\}$$

y el conjunto

$$N^+[v] = \{v, v + 1, \dots, v + m\} \in A(\Lambda_{2m+1, m+1})$$

es acíclico; pero además es acíclico maximal ya que para cualquier otro vértice u de $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ el conjunto $\{v, v + 1, \dots, v + m, u\}$ contiene al ciclo $C : u, v, v + m, u$.

Luego, como $d^+(v) + 1 = |N^+[v]|$ se tiene que

$$\vec{\beta} \left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \right) = |S| = |N^+[v]| = m + 1$$

y

$$\{v, v + 1, \dots, v + m\} \in A \left(H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \right) \right)$$

con lo que queda demostrado que $H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \right) \supseteq \Lambda_{2m+1, m+1}$.

2. Se tiene, por el Teorema 1.3.2, que $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ es un torneo 3-dicromático crítico para $m \geq 3$. Y dado que $\{v, v + 1, \dots, v + m - 1\}$ induce un subtorneo acíclico de $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ para todo $v \in V \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right)$, se sigue que

$$\vec{\beta} \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) = m$$

y

$$\{v, v + 1, \dots, v + m - 1\} \in A \left(H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \right)$$

con lo cual queda demostrado que $H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) \supseteq \Lambda_{2m+1, m}$.

3. Sea v un vértice de $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle$, entonces como el conjunto

$$N^+(v) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + 2m - 1\}$$

es acíclico, se sigue que

$$\{v, v + 1, \dots, v + m\} \in A \left(\Lambda_{2m+1, m+1} \right)$$

es acíclico, pero además, en la demostración del Teorema 2.2.8 se mostró que

$$\vec{\beta} \left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \right) = 2m$$

por lo que

$$\{v, v + 1, \dots, v + 2m - 1\} \in A \left(H_1 \left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \right) \right)$$

y entonces queda demostrado que $H_1 \left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \right) \supseteq \Lambda_{6m+1, 2m}$.

Ahora, para los últimos tres incisos se tienen sendas inclusiones de las digráficas circulantes. Obsérvese que

$$\widehat{H}_1(\vec{C}_{17}\langle j \rangle) \supseteq \Lambda_{17,j} \text{ para } j = 5, 6, 7$$

pues para cualquier vértice v de $\vec{C}_{17}\langle j \rangle$ se tiene que el conjunto

$$\{v, v+1, \dots, v+j-1\} \in \Lambda_{17,j}$$

es acíclico con cardinalidad j .

Luego, sea $T^j = \vec{C}_{17}\langle j \rangle$ para $j \in \{5, 6, 7\}$. Basta con probar que los conjuntos

$$A_{i,i+j-1} = \{i, i+1, \dots, i+j-1\}$$

son acíclicos máximos.

Sea S_j un conjunto acíclico de T^j . Se probará que $|S_j| \leq j$. Puede asumirse que 0 es la fuente de $T^j[S_j]$.

Sea N_j la exvecindad de 0 en T^j . Entonces $S_j - \{0\} \subseteq N_j$. Nótese que $T^j[N_j - \{17-j\}] \cong H_{j-1,8-j}$ (la correspondencia $i \rightarrow i$ para $0 < i \leq j-1$ y $i \rightarrow i+1$ para $j \leq i \leq 7$ es un isomorfismo de $H_{j-1,8-j}$ en $T^j[N_j - \{17-j\}]$), y $j-1 > 8-j$. Entonces, por el Lema 2.2.6 que afirma que para cualesquiera dos enteros r, s tales que $1 \leq s < r$, se cumple que $\vec{\beta}(H_{r,s}) = r$, se sigue que $|S_j| \leq j$ siempre que $17-j \notin S_j$.

Asúmase entonces que $17-j \in S_j$.

4. Primero se probará que $\vec{\beta}(\vec{C}_{17}\langle 5 \rangle) = 5$.

Cuando $j = 5$, se tiene que $12 \in S_5$.

Si $4 \in S_5$ entonces $S_5 \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$ puesto que $\{v, 4, 12\}$ induce un ciclo para $v \in \{1, 2, 3\}$. Y dado que $\{7, 8, 12\}$ induce un ciclo se sigue que $|S_5 \cap \{7, 8\}| \leq 1$. Por lo tanto se deduce que $|S_5| \leq 5$.

Si $4 \notin S_5$ y $8 \in S_5$ entonces $S_5 \cap \{1, 2, 7\} = \emptyset$ puesto que $\{v, 8, 12\}$ induce un ciclo para $v = 1, 2, 7$. y entonces $|S_5| \leq 5$.

Finalmente, si $S_5 \cap \{4, 8\} = \emptyset$, entonces dado que

$$T^5[N_5] - \{0, 4, 8, 12\} \cong H_{3,2}$$

se concluye por el Lema 2.2.6 que $|S_5| \leq 5$ puesto que el máximo número de vértices en un subtorneo transitivo de $H_{3,2}$ es 3.

5. Ahora se probará que $\vec{\beta}(\vec{C}_{17}\langle 7 \rangle) = 7$.

Cuando $j = 7$, se tiene que $10 \in S_7$.

Si $\{1, 3\} \cap S_7 \neq \emptyset$ entonces $\{4, 5, 6\} \cap S_7 = \emptyset$ puesto que $\{v, 10, 1\}$ y $\{v, 10, 3\}$ inducen ciclos para toda $v \in \{4, 5, 6\}$. Por lo tanto se tiene que $|S_7| \leq 6$.

Si $\{1, 3\} \cap S_7 = \emptyset$ entonces $|S_7| \leq 7$.

6. Por último se probará que $\vec{\beta}(\vec{C}_{17}\langle 6 \rangle) = 6$.

Cuando $j = 6$, se tiene que $11 \in S_6$.

Entonces se cumple una de dos, $\{1, 2\} \cap S_6 = \emptyset$ o bien $\{3, 4\} \cap S_6 = \emptyset$, puesto que $\{1, 2, 11\}$ y $\{3, 4, 11\}$ son acíclicos pero $\{1, 3, 11\}$, $\{1, 4, 11\}$, $\{2, 3, 11\}$ y $\{2, 4, 11\}$ son cíclicos. Además $|S_6 \cap \{5, 7\}| \leq 1$ puesto que $\{5, 7, 11\}$ induce un ciclo. Por lo tanto $|S_6| \leq 6$.

□

Observación 3.2.2 *Nótese que el número dicromático de una suma de Zykov debe ser mayor o igual que el máximo de los números dicromáticos de los sumandos.*

Teorema 3.2.8 *Para cualesquiera dos digráficas D y W siempre se cumple que*

$$dc(D[W]) \geq dc(D) + dc(W) - 1$$

Demostración. Si $dc(W) = 1$ se tiene que la igualdad es cierta puesto que $dc(D[W]) = dc(D)$. Entonces se puede suponer que $dc(W) \geq 2$.

Denótese como W_v a la copia isomorfa de W inducida por $\{v\} \times W$ en $D[W]$ y tómensse $n = dc(D[W])$ y $m = dc(W) - 1$. Claramente $n - m \geq 1$ puesto que $dc(D[W]) \geq dc(W)$ y entonces $dc(D[W]) - dc(W) + 1 \geq 1$.

Sea $f : V(D[W]) \rightarrow I_n$ una n -coloración acíclica de $D[W]$. Entonces $f^{-1}(I_n - I_m) \cap V(W_v) \neq \emptyset$ para cada $v \in V(D)$ dado que $f^{-1}(I_n - I_m)$ pierde solamente $m = dc(W) - 1$ clases cromáticas.

Tómese $w_v \in f^{-1}(I_n - I_m) \cap V(W_v)$. La subdigráfica de $D[W]$ generada por $\{w_v : v \in V(D)\}$ es una copia isomorfa de D . Esto implica que $n - m = |I_n - I_m| \geq dc(D)$ por lo que $dc(D[W]) - (dc(W) - 1) \geq dc(D)$ y queda demostrada la desigualdad. □

Sea D una digráfica y $Q = \{Q_u\}_{u \in V(D)}$ una familia de digráficas. Se define la función de peso $\xi_Q : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$ como $\xi_Q(u) = dc(Q_u)$.

Definición 3.2.9 Una ξ_Q -cubierta de $H_1(D)$ es una cubierta óptima, si su cardinalidad es menor o igual que la de cualquiera otra ξ_Q -cubierta de $H_1(D)$.

Teorema 3.2.10 $dc(\sigma(D, Q)) = \tilde{n}(H_1(D), \xi_Q)$.

Demostración. Puede asumirse que Q está formada por digráficas disjuntas dos a dos y por lo tanto $Q_u \subseteq \sigma(D, Q)$.

Sea $p : \sigma(D, Q) \rightarrow D$ la proyección natural, de tal forma que $p(Q_u) = u$ para todo $u \in V(D)$.

Sea $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ una ξ_Q -cubierta óptima de $H_1(D)$, entonces

$$|J| = \tilde{n}(H_1(D), \xi_Q)$$

Defínase una coloración f de $V(\sigma(D, Q))$ con J como su conjunto de colores de la forma siguiente. Para cada $u \in V(D)$ tómesese una coloración acíclica de Q_u con colores en J_u , lo cual es posible ya que Q_u es ξ_Q -dicromática y $|J_u| \geq \xi_Q(u)$. Sea C un ciclo dirigido de $\sigma(D, Q)$.

Si $C \subseteq Q_u$ para alguna u , entonces C no es monocromático.

En otro caso, $p(C)$ contiene un ciclo dirigido C_0 . Si C fuera monocromático de color j , entonces

$$\alpha_j \supseteq V(p(C)) \supseteq V(C_0)$$

lo cual es imposible ya que α_j es acíclica. Luego C no es monocromático y f es una coloración acíclica. Por lo tanto

$$dc(\sigma(D, Q)) \leq |J| = \tilde{n}(H_1(D), \xi_Q)$$

Sea J un conjunto de cardinalidad $dc(\sigma(D, Q))$ y $f : \sigma(D, Q) \rightarrow J$ una coloración acíclica óptima de $\sigma(D, Q)$. Denótese como R_j a la clase cromática del color j . Entonces $\alpha_j = p(R_j)$ es un subconjunto acíclico de $V(D)$ dado que R_j es acíclico y por tanto $\alpha_j \in A(\widehat{H}_1(D))$. Dado que $J_u = \{j : u \in \alpha_j\}$ se tiene que $j \in J_u$ si y sólo si $R_j \cap V(Q_u)$ es no vacío, de ahí se sigue que $|J_u| \geq dc(Q_u) = \xi_Q(u)$ y $\{\alpha_j\}_{j \in J}$ es una ξ_Q -cubierta de $\widehat{H}_1(D)$. Por lo tanto

$$\tilde{n}(H_1(D), \xi_Q) = \tilde{n}(\widehat{H}_1(D), \xi_Q) \leq dc(\sigma(D, Q))$$

y la demostración está completa. \square

Notación 3.2.11 Para simplificar, en adelante se escribe $\tilde{n}_1(D, \xi)$ en lugar de $\tilde{n}(H_1(D), \xi)$.

Observación 3.2.3 Nótese que $\tilde{n}_1(D, \mathbf{1}) = dc(D)$.

Corolario 3.2.12 Si $dc(\alpha) = k$, entonces $dc(D[\alpha]) = \tilde{n}_1(D, \mathbf{k})$.

Sea ξ una función de peso sobre \vec{C}_3 tal que $\xi_0 \geq \xi_1$ y $\xi_0 \geq \xi_2$, con $\xi(j) = \xi_j$.

Proposición 3.2.13 $\tilde{n}_1(\vec{C}_3, \xi) = \left\lceil \frac{\xi_0 + \xi_1 + \xi_2}{2} \right\rceil$ ó $\tilde{n}_1(\vec{C}_3, \xi) = \xi_0$ dependiendo de si $\xi_0 \leq \xi_1 + \xi_2$ o por el contrario $\xi_1 + \xi_2 \leq \xi_0$. En particular $\tilde{n}_1(\vec{C}_3, \mathbf{k}) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$.

Demostración. Si $\xi_1 + \xi_2 \leq \xi_0$, entonces considérese un entero positivo h tal que $\xi_1 + \xi_2 + h = \xi_0$, luego basta con tomar ξ_1 veces la arista α_{01} y $\xi_2 + h$ veces la arista α_{20} (Figura 3.4) para cubrir los vértices 0, 1 y 2. Así se obtiene una cubierta óptima, por lo que $\tilde{n}_1(\vec{C}_3, \xi) = \xi_0$.

Si $\xi_1 + \xi_2 \geq \xi_0$, entonces se considera $h \geq 0$ y se construye una cubierta con h veces la arista α_{12} , $\xi_1 - h$ veces la arista α_{01} y a veces la arista α_{20} , donde $a \geq \xi_2 - h$ (Figura 3.4). Así se habrán cubierto los vértices 1 y 2; para cubrir el vértice 0 se debe pedir además que

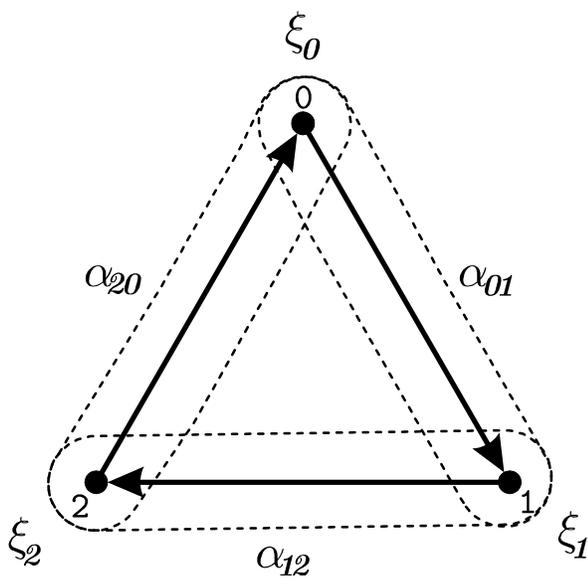
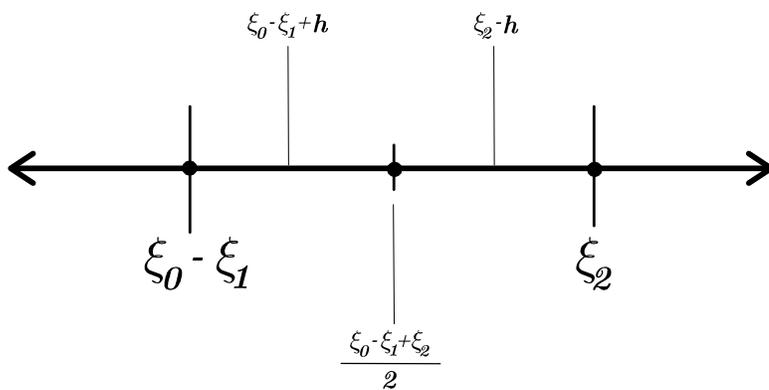
$$a + (\xi_1 - h) \geq \xi_0$$

es decir, que $a \geq (\xi_0 - \xi_1) + h$. Como se busca una cubierta óptima se tiene que encontrar el $\min \{a + (\xi_1 - h) + h\} = \min \{a + \xi_1\}$, y al ser ξ_1 fijo, basta con encontrar el valor mínimo que puede tener a .

Como las únicas restricciones para a son las desigualdades

$$\begin{aligned} a &\geq \xi_2 - h \\ a &\geq (\xi_0 - \xi_1) + h \end{aligned}$$

se sigue que el valor mínimo de a está dado por el menor valor que satisface ambas desigualdades simultáneamente. Se tiene que a , ξ_0 , ξ_1 y ξ_2 tienen valores fijos, por lo que todo se reduce a encontrar una h adecuada. Obsérvese que $\xi_0 - \xi_1 \leq \xi_2$ y que tanto $(\xi_0 - \xi_1) + h$ como $\xi_2 - h$ se encuentran dentro del intervalo $[\xi_0 - \xi_1, \xi_2]$ (Figura 3.5). \square

Figura 3.4: \vec{C}_3 bajo ξ .Figura 3.5: El valor mínimo de a es $\left\lceil \frac{(\xi_0 - \xi_1) + \xi_2}{2} \right\rceil$.

Proposición 3.2.14 *Sea \mathbf{k} una función de peso constante.*

1. $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{k(2m+1)}{m+1} \right\rceil$ para $m \geq 2$.
2. $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{k(2m+1)}{m} \right\rceil$ para $m \geq 3$.
3. $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{k(6m+1)}{2m} \right\rceil$ para $m \geq 2$.
4. $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 5 \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{17k}{5} \right\rceil$
 $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 7 \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{17k}{7} \right\rceil$
 $\tilde{n}_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 6 \rangle, \mathbf{k} \right) = \left\lceil \frac{17k}{6} \right\rceil$.

Demostración. Las igualdades se siguen de la Proposición 3.2.7 según la cual se tienen las contenciones

$$\begin{aligned} H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{2m+1, m+1} \\ H_1 \left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{2m+1, m} \\ H_1 \left(\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{6m+1, 2m} \\ H_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 5 \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{17, 5} \\ H_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 7 \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{17, 7} \\ H_1 \left(\vec{C}_{17} \langle 6 \rangle \right) &\supseteq \Lambda_{17, 6} \end{aligned}$$

y de la Proposición 3.1.8 que asegura que cuando una hipergráfica H con $\rho(H) = r$ contiene una copia isomorfa de $\Lambda_{m,r}$ como subhipergráfica generadora, se tiene que

$$\tilde{n}(H, \mathbf{k}) = \tilde{n}(\Lambda_{m,r}, \mathbf{k}) = \left\lceil \frac{km}{r} \right\rceil$$

para todo entero positivo k . \square

3.3. Funciones de peso críticas

Diferentes funciones de peso pueden dar como resultado el mismo número de cubrimiento. Cuando se disminuye en uno el peso asignado a uno de los vértices de una hipergráfica puede suceder que el número de cubrimiento permanezca igual o por el contrario que disminuya en una unidad. Similarmente, al aumentar en uno el peso asignado a un vértice el número de cubrimiento puede aumentar o permanecer igual. Las funciones de peso que al tener un incremento o decremento de una unidad en el peso de cualquiera de los vértices provocan una variación en el número de cubrimiento se denominan *funciones de peso críticas*.

3.3.1. Funciones de peso subcríticas

Una función de peso ξ sobre H se dice que es H -subcrítica si para cada función de peso ξ' tal que $\xi' \leq \xi$ y $\|\xi'\| = \|\xi\| - 1$, se tiene que

$$\tilde{n}(H, \xi') < \tilde{n}(H, \xi)$$

y por lo tanto, $\tilde{n}(H, \xi') = \tilde{n}(H, \xi) - 1$.

Notación 3.3.1 Para abreviar, en adelante se escribe D -subcrítica en lugar de $H_1(D)$ -subcrítica.

Teorema 3.3.2 Si para cada $u \in V(D)$, la digráfica Q_u es $\xi_Q(u)$ -dicromática crítica y ξ_Q es D -subcrítica, entonces $\sigma(D, Q)$ es $\tilde{n}_1(D, \xi_Q)$ -dicromática crítica.

Demostración. Se sigue directamente del Teorema 3.2.10, el cual afirma que $dc(\sigma(D, Q)) = \tilde{n}_1(D, \xi_Q)$. Para cualquier $v \in V(\sigma(D, Q))$ se tiene que

$$dc(Q_u - \{v\}) = dc(Q_u) - 1$$

donde $v \in V(Q_u)$. Luego

$$dc(\sigma(D, Q) - \{v\}) = \tilde{n}_1(D, \xi'_Q)$$

donde $\|\xi'_Q\| = \|\xi_Q\| - 1$. Por lo tanto

$$dc(\sigma(D, Q) - \{v\}) = dc(\sigma(D, Q)) - 1$$

□

Observación 3.3.1 *Nótese que la función de peso ξ considerada en la Proposición 3.2.13 es \vec{C}_3 -subcrítica si y sólo si $\xi_0 \leq \xi_1 + \xi_2$ y $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2$ es impar.*

Teorema 3.3.3 *Sea \mathbf{k} una función de peso constante.*

1. \mathbf{k} es $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv m \pmod{m+1}$ y $m \geq 2$.
2. \mathbf{k} es $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv 1 \pmod{m}$ y $m \geq 3$.
3. \mathbf{k} es $\vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv 1 \pmod{2m}$ y $m \geq 2$.
4. \mathbf{k} es
 - \vec{C}_3 -subcrítica si y sólo si k es impar,
 - $\vec{C}_{17} \langle 5 \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv 3 \pmod{5}$,
 - $\vec{C}_{17} \langle 7 \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv 5 \pmod{7}$,
 - $\vec{C}_{17} \langle 6 \rangle$ -subcrítica si y sólo si $k \equiv 5 \pmod{6}$.

Demostración. Sea ξ una función de pesos tal que $\xi \leq \mathbf{k}$ y $\|\xi\| = \|\mathbf{k}\| - 1$.

1. Sea $T \cong \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ con $m \geq 2$.
 Primero, si k es T -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lfloor \frac{k(2m+1)-1}{m+1} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{k(2m+1)}{m+1} \right\rfloor$.
 Luego $(m+1) \mid (k+1)$ y $k = q(m+1) + m$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv m \pmod{m+1}$.
 Ahora, si $k \equiv m \pmod{m+1}$ se tiene que $(m+1) = \vec{\beta}(T)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{m+1}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T -subcrítica.
2. Sea $T \cong \vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ con $m \geq 3$.
 Primero, si k es T -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lfloor \frac{k(2m+1)-1}{m} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{k(2m+1)}{m} \right\rfloor$. Luego $m \mid (k-1)$ y $k = qm + 1$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv 1 \pmod{m}$.
 Ahora, si $k \equiv 1 \pmod{m}$ se tiene que $m = \vec{\beta}(T)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{m}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T -subcrítica.

3. Sea $T \cong \vec{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle$ con $m \geq 2$.

Primero, si k es T -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lceil \frac{k(6m+1)-1}{2m} \right\rceil < \left\lceil \frac{k(6m+1)}{2m} \right\rceil$. Luego $2m \mid (k-1)$ y $k = q(2m) + 1$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv 1 \pmod{2m}$.

Ahora, si $k \equiv 1 \pmod{2m}$ se tiene que $2m = \vec{\beta}(T)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{2m}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T -subcrítica.

4. Por la Proposición 3.2.13 se tiene que $\tilde{n}_1(\vec{C}_3, \mathbf{k}) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil$, de ahí que \mathbf{k} es \vec{C}_3 -subcrítica si y sólo si k es impar.

Sea $T_1 \cong \vec{C}_{17} \langle 5 \rangle$.

Primero, si k es T_1 -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lceil \frac{17k-1}{5} \right\rceil < \left\lceil \frac{17k}{5} \right\rceil$. Luego $5 \mid (17k-1)$ y $k = q(5) + 3$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv 3 \pmod{5}$.

Ahora, si $k \equiv 3 \pmod{5}$ se tiene que $5 = \vec{\beta}(T_1)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T_1)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{5}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T_1 -subcrítica.

Sea $T_2 \cong \vec{C}_{17} \langle 7 \rangle$.

Primero, si k es T_2 -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lceil \frac{17k-1}{7} \right\rceil < \left\lceil \frac{17k}{7} \right\rceil$. Luego $7 \mid (17k-1)$ y $k = q(7) + 5$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv 5 \pmod{7}$.

Ahora, si $k \equiv 5 \pmod{7}$ se tiene que $7 = \vec{\beta}(T_2)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T_2)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{7}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T_2 -subcrítica.

Sea $T_3 \cong \vec{C}_{17} \langle 6 \rangle$.

Primero, si k es T_3 -subcrítica, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\left\lceil \frac{17k-1}{6} \right\rceil < \left\lceil \frac{17k}{6} \right\rceil$. Luego $6 \mid (17k-1)$ y $k = q(6) + 5$ para alguna $q \geq 1$. De ahí que $k \equiv 5 \pmod{6}$.

Ahora, si $k \equiv 5 \pmod{6}$ se tiene que $6 = \vec{\beta}(T_3)$ divide a $\|\xi\|$. Dado que $\text{Aut}(T_3)$ es transitivo en vértices, se puede asumir que $\xi = \xi^{(s)}$ para $s = \frac{\|\xi\|}{6}$ y de la Proposición 3.1.7 se sigue que \mathbf{k} es T_3 -subcrítica.

□

3.3.2. Funciones de peso supracríticas

Después de considerar funciones de pesos subcríticas, se define de manera similar que una función de pesos ξ sobre H será H -supracrítica si para cada función de pesos ξ' tal que $\xi \leq \xi'$ y $\|\xi'\| = \|\xi\| + 1$, se tiene que

$$\tilde{n}(H, \xi) < \tilde{n}(H, \xi')$$

y por lo tanto $\tilde{n}(H, \xi') = \tilde{n}(H, \xi) + 1$.

Notación 3.3.4 *Para abreviar, en adelante se escribe D -supracrítica en lugar de $H_1(D)$ -supracrítica.*

Por poner un ejemplo, la Proposición 3.1.7 asevera que la función de pesos $\xi^{(s)}$ es H -supracrítica. Obsérvese que la función de pesos ξ considerada en la Proposición 3.2.13 es \vec{C}_3 -supracrítica si y sólo si $\xi_0 \leq \xi_1 + \xi_2$ y $\xi_0 + \xi_1 + \xi_2$ es par [10]. Este resultado se generaliza con el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5 *Si ξ_Q es D -supracrítica, entonces cada $\tilde{n}_1(D, Q)$ -coloración acíclica de $\sigma(D, Q)$ induce en cada Q_u una coloración acíclica óptima.*

Capítulo 4

Torneos circulantes r -dicromáticos críticos

La existencia de familias infinitas de torneos circulantes k -dicromáticos críticos para cada $k \geq 3$, $k \neq 7$ quedará probada en este capítulo. Adicionalmente, se mostrará un método para construir tales familias a partir de encontrar caminos dirigidos en una digráfica acíclica D . Recuérdese que en los Capítulos 1 y 2 se exhibieron sendas familias de torneos circulantes r -dicromáticos críticos para $r = 3$ y $r = 4$, respectivamente.

4.1. Trazando caminos

Dada una familia T^k de torneos circulantes k -dicromáticos críticos, si $k = r(m + 1) - 1$, entonces por la Proposición 3.2.14 se tiene que

$$dc\left(\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle [T^k]\right) = \left\lceil \frac{(r(m+1)-1)(2m+1)}{m+1} \right\rceil = r(2m+1) - 1$$

y análogamente, si $k = rm + 1$ se tiene que

$$dc\left(\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle [T^k]\right) = \left\lceil \frac{(rm+1)(2m+1)}{m} \right\rceil = r(2m+1) + 3$$

este hecho fundamental permite la construcción de familias infinitas de torneos $(r(2m+1) - 1)$ -dicromáticos y $(r(2m+1) + 3)$ -dicromáticos a partir de sendas familias infinitas de torneos $(r(m+1) - 1)$ -dicromáticos y $(rm + 1)$ -dicromáticos, respectivamente.

Definición 4.1.1 Las funciones f_0, f'_0, f_1 y f'_1 con dominio \mathbb{N}^2 están dadas por

$$\begin{aligned} f_0(r, m) &= r(2m + 1) - 1 \\ f'_0(r, m) &= r(m + 1) - 1 \end{aligned}$$

para $r \geq 1, m \geq 2$ y

$$\begin{aligned} f_1(r, m) &= r(2m + 1) + 3 \\ f'_1(r, m) &= rm + 1 \end{aligned}$$

para $r \geq 1, m \geq 3$.

Es importante observar que si existe un torneo circulante T que sea $f'_0(r, m)$ -dicromático, entonces componiendo $\vec{C}_{2m+1}(\emptyset)$ con T se puede construir un torneo circulante $f_0(r, m)$ -dicromático.

Observación 4.1.1 Nótese que $\{5, 7, 11, 15, 23\} \cap (\text{Im}(f_0) \cup \text{Im}(f_1)) = \emptyset$ (Cuadros 4.1 y 4.2) y $\{9, 13\} \subset \text{Im}(f_0)$ ya que $f_0(2, 2) = 9$ y $f_0(2, 3) = 13$.

$\text{Im}(f_0) \cap \{5, 7, 11, 15, 23\}$
$f_0(r, m) = 5 \Rightarrow r(2m + 1) = 6 \Rightarrow 2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1$
$f_0(r, m) = 7 \Rightarrow r(2m + 1) = 8 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$f_0(r, m) = 11 \Rightarrow r(2m + 1) = 12 \Rightarrow 2m + 1 \in \{1, 3\} \Rightarrow m \in \{0, 1\}$
$f_0(r, m) = 15 \Rightarrow r(2m + 1) = 16 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$f_0(r, m) = 23 \Rightarrow r(2m + 1) = 24 \Rightarrow 2m + 1 \in \{1, 3\} \Rightarrow m \in \{0, 1\}$

Cuadro 4.1: Suponer que $\{5, 7, 11, 15, 23\} \cap \text{Im}(f_0) \neq \emptyset$ contradice el hecho de que $m \geq 2$.

$\text{Im}(f_1) \cap \{5, 7, 11, 15, 23\}$
$f_1(r, m) = 5 \Rightarrow r(2m + 1) = 2 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$f_1(r, m) = 7 \Rightarrow r(2m + 1) = 4 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$f_1(r, m) = 11 \Rightarrow r(2m + 1) = 8 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$f_1(r, m) = 15 \Rightarrow r(2m + 1) = 12 \Rightarrow 2m + 1 \in \{1, 3\} \Rightarrow m \in \{0, 1\}$
$f_1(r, m) = 23 \Rightarrow r(2m + 1) = 20 \Rightarrow 2m + 1 \in \{1, 5\} \Rightarrow m \in \{0, 2\}$

Cuadro 4.2: Suponer que $\{5, 7, 11, 15, 23\} \cap \text{Im}(f_1) \neq \emptyset$ contradice el hecho de que $m \geq 3$.

Observación 4.1.2 Nótese que las cuatro funciones f_0, f'_0, f_1 y f'_1 son crecientes sobre las variables r y m .

Lema 4.1.2 Si $f'_0(r_1, m_1) = f'_1(r_2, m_2)$ entonces $f_0(r_1, m_1) \neq f_1(r_2, m_2)$.

Demostración. Sean r_1, m_1, r_2, m_2 enteros tales que $f'_0(r_1, m_1) = f'_1(r_2, m_2)$, entonces $r_1(m_1 + 1) - 1 = r_2m_2 + 1$.

De ahí que $2m_1r_1 + 2r_1 - 2r_2m_2 - 4 = 0$.

Ahora supóngase que $f_0(r_1, m_1) = f_1(r_2, m_2)$, entonces se tiene que $r_1(2m_1 + 1) - 1 = r_2(2m_2 + 1) + 3$.

Luego, $2m_1r_1 + 2r_1 - 2r_2m_2 - 4 - r_2 - r_1 = 0$ de donde $r_1 = -r_2$ lo cual es una contradicción puesto que $1 \leq r_1$ y $r \leq r_2$. \square

A continuación se mostrará que para cualquier entero $x \geq 4$ tal que $x \notin \{5, 7, 11, 15, 23\}$, puede construirse un torneo circulante x -dicromático a partir de un torneo circulante T^r que sea r -dicromático para alguna $r \in \mathbb{N}$, componiendo alguno de los torneos $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ ó $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle$ con T^r .

Lema 4.1.3 Si x es un entero, entonces $x \in \text{Im}(f_0) \cup \text{Im}(f_1)$ si y sólo si $x \geq 4$ y $x \notin \{5, 7, 11, 15, 23\}$.

Demostración. Sea $X = \text{Im}(f_0) \cup \text{Im}(f_1)$.

Como $f_0(1, 2) = 4$, $f_1(1, 3) = 10$ y las funciones f_0 y f_1 son crecientes para r y m , entonces para todo $x \in X$ se tiene que $x \geq 4$. Además, por la Observación 4.1.1 se tiene que $\{5, 7, 11, 15, 23\} \cap X = \emptyset$ por lo que si $x \in X$ entonces $x \notin \{5, 7, 11, 15, 23\}$.

Por otro lado, para $r = 1$ se tiene que $f_0(r, m) = 2m$, por lo que si $x \geq 4$ es un número par entonces $x \in \text{Im}(f_0) \subset X$.

Sea $x = 2n + 1$ con $n \geq 2$ y $x \notin X$.

Supóngase que $2k + 1$ divide a $2n + 2$ para alguna $k \geq 0$. Entonces $2n + 2 = r(2k + 1)$ para alguna $r \geq 1$, por lo que $x = r(2k + 1) - 1$ y $k \leq 1$. Supóngase ahora que $2k + 1$ divide a $2n - 2$ para alguna $k \geq 0$. Entonces $2n - 2 = r(2k + 1)$ para alguna $r \geq 1$, por lo que $x = r(2k + 1) + 3$ y $k \leq 2$.

Luego $2n + 2$ no tiene un divisor impar mayor que 3 y $2n - 2$ no tiene un divisor impar mayor que 5. De ahí que $n + 1 = 2^t \cdot i$ con $i \in \{1, 3\}$ y $n - 1 = 2^s \cdot j$ con $j \in \{1, 3, 5\}$.

Se deduce entonces que $t \leq 1$ o bien $s \leq 1$, alguno de los dos. En el primer caso $x \in \{5, 11\}$ y en el segundo caso $x \in \{5, 9, 13, 7, 15, 23\}$. Sin embargo, $\{9, 13\} \subset \text{Im}(f_0)$ (Observación 4.1.1) y por lo tanto $x \in \{5, 7, 11, 15, 23\}$. \square

A partir de las funciones f_0, f'_0, f_1 y f'_1 se construye la digráfica infinita $D = D_0 \cup D_1$ donde D_0 y D_1 son las digráficas acíclicas definidas como

$$\begin{aligned} V(D_0) &= \{z \in \mathbb{Z} : z > 2\} \\ F(D_0) &= \{(f'_0(r, m), f_0(r, m)) : r \geq 1, m \geq 2\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V(D_1) &= \{z \in \mathbb{Z} : z > 2\} \\ F(D_1) &= \{(f'_1(r, m), f_1(r, m)) : r \geq 1, m \geq 3\} \end{aligned}$$

Observación 4.1.3 *Por el Lema 4.1.2 se tiene que D_0 y D_1 son disjuntas en flechas.*

Observación 4.1.4 *Nótese que si se tiene un torneo circulante T que sea u -dicromático crítico y $uv \in F(D_i)$ para $i \in \{0, 1\}$, entonces por el Corolario 3.2.12, la Proposición 3.2.14 y los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3 se puede construir un torneo circulante v -dicromático crítico mediante la composición $\vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle [T]$ si $j = 0$ y $\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle [T]$ si $j = 1$.*

Para $j \in \{0, 1\}$, se asigna a cada flecha $\tau = (f'_j(r, m), f_j(r, m))$ de D el peso $\omega(\tau) = 2m + 1$ y un operador de digráficas $\hat{\tau}$ tal que

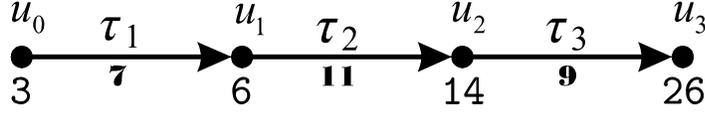
$$\hat{\tau}(\alpha) = \begin{cases} \vec{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle [\alpha] & \text{si } j = 0 \\ \vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle [\alpha] & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

Luego, si $\pi : u_0, \tau_1, u_1, \tau_2, u_2, \dots, u_{n-1}, \tau_n, u_n$ es un camino dirigido en D se definen

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\alpha) &= \hat{\tau}_n(\hat{\tau}_{n-1}(\dots \hat{\tau}_2(\hat{\tau}_1(\alpha))\dots)) \\ \omega(\pi) &= \omega(\tau_n)\omega(\tau_{n-1})\dots\omega(\tau_2)\omega(\tau_1) \end{aligned}$$

Ejemplo. La forma de obtener un torneo circulante 26-dicromático crítico a partir de un torneo circulante 3-dicromático crítico utilizando los resultados obtenidos es la siguiente.

Sea T^3 un torneo circulante 3-dicromático crítico. Se tiene que en D existe un (3) (26)-camino W dado por $W : 3, 6, 14, 26$ (Cuadro 4.3) como se observa en la Figura 4.1. Entonces las flechas τ_i y sus pesos $\omega(\tau_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ son los que aparecen en el Cuadro 4.4.

Figura 4.1: El (3) (26)-camino W en D .

j	r	m	$f'_j(r, m)$	$f_j(r, m)$
0	1	3	3	6
1	1	5	6	14
0	3	4	14	26

Cuadro 4.3: Valores de r y m que permiten obtener el (3) (6)-camino W en D .

Primero se obtiene un torneo circulante 6-dicromático crítico a partir de T^3 mediante la composición

$$\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [T^3]$$

donde el orden del torneo base está dado por el peso de la flecha τ_1 .

En segundo lugar se obtiene un torneo circulante 14-dicromático crítico a partir de $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [T^3]$ mediante la composición

$$\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \left[\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [T^3] \right]$$

donde que el orden del torneo base está dado por el peso de la flecha τ_2 .

Por último, se obtiene un torneo circulante 26-dicromático crítico a partir de $\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \left[\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [T^3] \right]$ mediante la composición

$$\vec{C}_9 \langle \emptyset \rangle \left[\vec{C}_{11} \langle 5 \rangle \left[\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [T^3] \right] \right]$$

donde el orden del torneo base está dado por el peso de la flecha τ_3 .

El orden del torneo circulante obtenido es $7 \cdot 11 \cdot 9 \cdot |V(T^3)| = 693 |V(T^3)|$.

i	τ_i	$\omega(\tau_i)$	j
1	(3, 6)	7	0
2	(6, 14)	11	1
3	(14, 26)	9	0

Cuadro 4.4: Pesos de las flechas τ_1 , τ_2 y τ_3 en el (3) (26)-camino W de D .

Lema 4.1.4 *Sea α un torneo circulante u_0 -dicromático crítico, entonces $\widehat{\pi}(\alpha)$ es un torneo circulante u_n -dicromático crítico y $|V(\widehat{\pi}(\alpha))| = |V(\alpha)|\omega(\pi)$.*

Demostración. Por la construcción de D , se sigue de la Observación 4.1.4 que $\widehat{\pi}(\alpha)$ es un torneo circulante u_n -dicromático crítico cuyo orden está dado por $\omega(\widehat{\tau}_n)\omega(\widehat{\tau}_{n-1})\dots\omega(\widehat{\tau}_2)\omega(\widehat{\tau}_1)|V(\alpha)|$. \square

Observación 4.1.5 *Recordando que $V(D) = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq 3\}$, a partir del Lema 4.1.3 se sigue que el conjunto de vértices de D con ingrado 0 es $\{3, 4, 5, 7, 11, 15, 23\}$.*

Lema 4.1.5 *Para cada entero $n \geq 3$, $n \neq 7$ hay un camino dirigido en D desde un vértice en $\{3, 4, 5, 11, 13, 15, 23\}$ hasta n .*

Demostración. Se definen los siguientes conjuntos

$$B = \{3, 4, 5, 11, 13, 15, 23\}$$

$$W = \{w \in V(D) : \text{hay un } Bw\text{-trayectoria dirigida en } D\}$$

Ya que $(3, 6), (4, 8), (5, 9), (5, 10), (6, 12), (8, 14), (8, 16), (9, 17), (9, 18), (10, 20), (11, 19), (11, 20), (11, 21), (11, 22), (12, 24) \in F(D_1)$, entonces

$$I_{24} \setminus \{1, 2, 7\} \subseteq W$$

Sea $K = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 7\}$ se probará que $K = W$. La prueba es por inducción.

Sea $n \geq 25$ tal que $s \in W$ siempre que $s \leq n - 1$, $s \in K$. Por la Observación 4.1.5 existe un k tal que $(k, n) \in F(D)$. Entonces, se tiene que $k < n$ y $k \notin \{1, 2, 7\}$ ya que las únicas $\{1, 2, 7\}$ -flechas de D son $(2, 4), (7, 13)$ y $(7, 14)$. Por lo tanto $k \in K$ y así $n \in K$. \square

A partir de este resultado, se observa que es suficiente con tener por lo menos una familia infinita de torneos circulantes k -dicromáticos críticos para cada

$$k \in \{3, 4, 5, 7, 11, 15, 23\}$$

para poder construir familias infinitas de torneos circulantes r -dicromáticos críticos para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 7$ mediante la composición con los torneos circulantes $\overrightarrow{C}_{2m+1} \langle \emptyset \rangle$ y $\overrightarrow{C}_{2m+1} \langle m \rangle$.

Proposición 4.1.6 *Para cada entero $k \in \{3, 4, 5, 11, 13, 15, 23\}$ existe una familia infinita \mathcal{F}_k de torneos circulares k -dicromáticos críticos tal que ningún par de elementos tienen el mismo orden.*

Demostración. Por los Teoremas 1.3.2 y 2.2.8, y la Proposición 3.2.13, se tiene que las familias \mathcal{F}_j para $j = 3, 4, 5$ son

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3 &= \left\{ \overrightarrow{C}_{2m+1} \langle m \rangle : m \geq 3 \right\} \\ \mathcal{F}_5 &= \left\{ \overrightarrow{C}_3 \left[\overrightarrow{C}_{2m+1} \langle m \rangle \right] : m \geq 3 \right\} \\ \mathcal{F}_4 &= \left\{ \overrightarrow{C}_{6m+1} \langle 2m \rangle : m \geq 2 \right\}\end{aligned}$$

y se definen ahora

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{11} &= \left\{ \overrightarrow{C}_{17} \langle 5 \rangle [\alpha] : \alpha \in \mathcal{F}_3 \right\} \\ \mathcal{F}_{13} &= \left\{ \overrightarrow{C}_{17} \langle 7 \rangle [\alpha] : \alpha \in \mathcal{F}_5 \right\} \\ \mathcal{F}_{15} &= \left\{ \overrightarrow{C}_{17} \langle 6 \rangle [\alpha] : \alpha \in \mathcal{F}_5 \right\}\end{aligned}$$

Por el Corolario 3.2.4 se tiene que los miembros de las familias son torneos circulares. Que el número dicromático de las familias sea el buscado es consecuencia del Corolario 3.2.12, la Proposición 3.2.14 y la Observación 4.1.4. Que las familias sean críticas en vértices se sigue de los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3. Que en cada familia ningún par de elementos tengan el mismo orden se tiene del hecho de que para cada $j \in \{3, 4, 5\}$, todos los miembros de \mathcal{F}_j tienen diferentes órdenes.

Finalmente, se define la familia

$$\mathcal{F}_{23} = \left\{ \overrightarrow{C}_3 [\alpha] : \alpha \in \mathcal{F}_{15} \right\}$$

la cual satisface las condiciones requeridas debido a la Proposición 3.2.13 y a los Teoremas 3.2.10, 3.3.2 y 3.3.3. \square

4.2. Las familias \mathcal{F}_k

Con base en el análisis antes mostrado, se tiene el siguiente resultado. Cabe recordar que el valor 7 quedó excluido de todas las propiedades encontradas.

Teorema 4.2.1 *Para cada entero $k \geq 3$, $k \neq 7$ existe una familia infinita \mathcal{F}_k de torneos circulantes k -dicromáticos críticos en vértices no isomorfos dos a dos.*

Demostración. De hecho, se construirá, para cada $k \geq 3$, $k \neq 7$, una familia infinita \mathcal{F}_k de torneos circulantes k -dicromáticos críticos en vértices tal que todos sus miembros tengan órdenes distintos.

Por el Lema 4.1.5, se tiene que hay en D un uk -camino dirigido π tal que $u \in \{3, 4, 5, 11, 13, 15, 23\}$. Defínase la familia

$$\mathcal{F}_k = \{\widehat{\pi}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{F}_u\}$$

que por el Lema 4.1.4 y la Proposición 4.1.6, es una familia infinita de torneos circulantes k -dicromáticos críticos. Entonces \mathcal{F}_k tiene las propiedades requeridas. \square

Con base en el resultado anterior, se tiene un método para construir familias infinitas de torneos circulantes r -dicromáticos críticos para cualquiera $r \geq 3$, $r \neq 7$. En el Cuadro 4.5 se muestra una forma de obtener seis familias infinitas de torneos r -dicromáticos críticos para cada $r \in \{5, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

Familia	dc	Justificación de criticidad
$\vec{C}_3 [\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle]$	$\lceil \frac{3-3}{2} \rceil = 5$	$k = 3$ impar $\Rightarrow \mathbf{k}$ es \vec{C}_3 -subcrítica.
$\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle [\vec{C}_{2m+1} \langle m \rangle]$	$\lceil \frac{3-7}{4} \rceil = 6$	$3 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \mathbf{k}$ es $\vec{C}_7 \langle \emptyset \rangle$ -subcrítica.
$\vec{C}_3 [T^{(5)}]$	$\lceil \frac{3-5}{2} \rceil = 8$	$k = 5$ impar $\Rightarrow \mathbf{k}$ es \vec{C}_3 -subcrítica.
$\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle [T^{(5)}]$	$\lceil \frac{5-5}{3} \rceil = 9$	$5 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \mathbf{k}$ es $\vec{C}_5 \langle \emptyset \rangle$ -subcrítica.
$\vec{C}_{11} \langle \emptyset \rangle [T^{(5)}]$	$\lceil \frac{5-11}{6} \rceil = 10$	$5 \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow \mathbf{k}$ es $\vec{C}_{11} \langle \emptyset \rangle$ -subcrítica.
$\vec{C}_3 [T^{(7)}]$	$\lceil \frac{3-7}{2} \rceil = 11$	$k = 7$ impar $\Rightarrow \mathbf{k}$ es \vec{C}_3 -subcrítica.

Cuadro 4.5: Construcción de seis familias infinitas de torneos r -dicromáticos críticos para $r \in \{5, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

4.3. La huidiza familia \mathcal{F}_7

El método de construcción mostrado anteriormente es inaplicable para obtener la familia \mathcal{F}_7 ya que ésta no puede obtenerse mediante la composición de torneos circulantes, como queda asentado en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1 *Un torneo circulante 7-dicromático crítico en vértices no puede ser isomorfo a la composición de dos torneos circulantes.*

Demostración. Sea T un torneo circulante 7-dicromático crítico en vértices.

Supóngase que existen dos torneos circulantes C_1 y C_2 tales que T es isomorfo a $C_1 [C_2]$. Sean $k = dc(C_2)$, $v = |V(C_1)|$ y $m = \overrightarrow{\beta}(C_1)$, entonces, por la Proposición 3.2.14 se tiene que $\lceil \frac{kv}{m} \rceil = 7$ y $\lceil \frac{kv-1}{m} \rceil = 6$.

Luego, $6 < \frac{kv}{m} \leq 7$ y $5 < \frac{kv-1}{m} \leq 6$, de donde $6m < kv \leq 7m$ y $5m < kv - 1 \leq 6m$. Entonces $kv - 1 \leq 6m < kv$, por lo que $6m = kv - 1$, lo cual es imposible. \square

Esta limitante obliga a disertar mediante un análisis distinto sobre la estructura de la familia \mathcal{F}_7 y fuerza el desarrollo de nuevas técnicas con las cuales conseguir construirla. Actualmente, es un problema abierto develar la incógnita bajo la cual subyace la familia \mathcal{F}_7 .

Apéndice A

Aplicaciones

Paralelamente a la construcción de las familias \mathcal{F}_k , los conceptos mostrados en esta tesis son útiles para abordar otros problemas interesantes. En este apéndice se incluyen dos resultados obtenidos merced a la teoría ya expuesta. En adelante, se denota como $T^{(m)}$ a un torneo genérico m -dicromático crítico de orden par; y se denota como $W^{(m)}$ a un torneo genérico m -dicromático crítico de orden impar.

A.1. Aplicación 1

El orden mínimo de un torneo 5-dicromático es hasta ahora desconocido, este ejemplo muestra que no es más grande que 19.

Si $\xi : \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{N}$ está definida por $\xi(j) = 2$ para $j \neq 0$ y $\xi(0) = 1$, entonces para $T = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle$ se tiene que $\tilde{n}_1(T, \xi) \geq \lceil \frac{13}{3} \rceil = 5$ por la Proposición 3.1.6.3 ya que $\vec{\beta}(\vec{C}_7 \langle 3 \rangle) = 3$.

Por la Proposición 3.1.7 se sabe que $\tilde{n}_1(T, \xi^{(5)}) = 5$ y dado que $\xi \leq \xi^{(5)}$ se sigue de la Proposición 3.1.6 que $\tilde{n}_1(T, \xi) = 5$.

Ahora se define $Q_0 = T_1$ y $Q_j = \vec{C}_3$ para $j \in \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$. Por el Teorema 3.2.10 se tiene que $\sigma(T, (Q_u)_{u \in V(T)})$ es un torneo 5-dicromático de orden 19.

Entonces el orden mínimo de un torneo 5-dicromático es a lo más 19. Por otro lado, se sabe que el orden mínimo es al menos 17 ya que todo torneo de orden 16 es 4-coloreable. Actualmente es un problema abierto determinar si el orden mínimo de un torneo 5-dicromático es 17, 18 ó 19.

A.2. Aplicación 2

Otro de los resultados que se pueden inferir a partir de los resultados ya mostrados es el de que para todo entero $r \geq 4$ puede construirse una familia infinita de torneos r -dicromáticos críticos en vértices, de orden par y no isomorfos dos a dos.

Sea $\xi : \mathbb{Z}_7 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $\xi(j) = 1$ para $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\xi(6) = 2$. Se tiene que ξ es ST_6 -subcrítica, donde

$$ST_6 = \vec{C}_7 \langle 3 \rangle - \{0\}$$

y

$$\tilde{n}_1(ST_6, \xi) = 3$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, se obtiene un torneo 3-dicromático crítico en vértices $T^{(3)}$ de orden 8. Recuérdese que $t(T^{(m)}, W^{(m)}, T_1)$ es un torneo $(m+1)$ -dicromático crítico en vértices de orden par y que hay una infinidad de torneos $W^{(3)}$ no isomorfos dos a dos.

Usando la inducción matemática sobre m , se sigue que para cada entero $r \geq 4$ se puede construir una familia infinita de torneos r -dicromáticos críticos en vértices y de orden par, tales que sean no isomorfos dos a dos.

Epílogo

Muchos conceptos e invariantes fundamentales de la Teoría de Gráficas están relacionadas con la conexidad. El número dicromático es uno de tales invariantes, el cual, generaliza al conocido concepto de número cromático. Sin embargo, se tiene que el problema de encontrar el número dicromático de una digráfica es NP-Completo, es decir, que no se puede resolver algorítmicamente en tiempo polinomial. Entonces, el número de cubrimiento otorga una alternativa para calcular el número dicromático en ciertas familias de torneos. De ahí la importancia del material expuesto en esta tesis, la relación existente entre el número dicromático de una suma de Zykov y el número de cubrimiento de una hipergráfica resulta ser una herramienta muy eficaz.

La simetría que presentan los torneos circulantes facilita su análisis, de ahí que sólo quede pendiente por cubrir un caso: el de los torneos circulantes 7-dicromáticos críticos. Las técnicas utilizadas en esta tesis no aplican para encontrar la familia faltante y es necesario un enfoque diferente para obtenerla, siendo una interesante línea de investigación.

Bibliografía

- [1] Claude Berge, *Graphs and Hypergraphs*. Amsterdam : North Holland, 1973
- [2] Bela Bollobás, *Modern Graph Theory*. New York : Springer, c1998
- [3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*. London : Macmillan, 1976
- [4] Gary Chartrand, Linda Lesniak, *Graphs & Digraphs*. London : Chapman, 1996
- [5] Reinhard Diestel, *Graph Theory*. New York : Springer, 2000
- [6] Paul Erdős, Leo Moser, *On the representation of directed graphs as unions of orderings*. Publ. Math. Inst. Hungar, Acad. Sci. 9 (1964) 125-132
- [7] Frank Harary, *Graph Theory*. Reading, Addison-Wesley, 1969
- [8] Víctor Neumann-Lara, *The Dichromatic Number of a Digraph*. Journal of Combinatorial Theory, Series B Vol. 33, No. 3 (1982) 265-270
- [9] Víctor Neumann-Lara, Jorge Urrutia, *Vertex critical r -dichromatic tournaments*. Discrete Mathematics 49 (1984) 83-87
- [10] Víctor Neumann-Lara, Jorge Urrutia, *Uniquely colourable r -dichromatic tournaments*. Discrete Mathematics. 62 (1986) 65-70
- [11] Víctor Neumann-Lara, *The 3 and 4-dichromatic tournaments of minimum order*. Discrete Mathematics 135 (1994) 233-243

- [12] Víctor Neumann-Lara, *Vertex critical 4-dichromatic circulant tournaments*. Discrete Mathematics 170 (1997) 289-291
- [13] Víctor Neumann-Lara, *The acyclic disconnection of a digraph*. Discrete Mathematics 197/198 (1999) 617-632
- [14] Víctor Neumann-Lara, *Dichromatic number, circulant tournaments and Zykov sums of digraphs*. Discussiones Mathematicae. Graph Theory 20 No. 2 (2000) 197-207
- [15] K. Brooks Reid, E. T. Parker, *Disproof of a conjecture of Erdős and Moser on tournaments*. Journal of Combinatorial Theory 9 (1970) 225-238
- [16] Adolfo Sánchez-Flores, *On tournaments free of large transitive subtournaments*. Graphs Combin. 14, No. 2 (1998) 181-200