



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis del artículo

APPROXIMATION BY PENALIZED LEAST SQUARES

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA

CRISANTO CASTILLO CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ LUIS MARTÍNEZ MORALES

MEXICO, DF.

FEBRERO, 2006



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CON MUCHO CARIÑO PARA MIS SERES QUERIDOS

A MIS PADRES

ZENÓN CASTILLO GARCÍA Y

OFELIA CASTILLO DE CASTILLO

A MI ESPOSA Y COMPAÑERA

LUZ ADRIANA NAVA DE CASTILLO

A MIS HIJAS

ANDREA OFELIA Y

DAFNE ELENA

AGRADECIMIENTOS

Me es muy grato agradecer al Dr. José Luis Martínez Morales por su paciencia y conducción en este trabajo.

También, es para mi importante agradecer la colaboración de los Doctores:

Jesús López Estrada

Carlos Eduardo Mendoza Durán

Manuel Jesús Falconí Magaña

Carlos Arturo Gómez -Mont Avalos

Enilio Marmolejo Olea y

Carlos Villegas Blas

Quienes con su apoyo y disposición hicieron posible la conclusión de esta tesis.

INDICE

1. INTRODUCCIÓN	4
2. MARCO TEÓRICO	9
2.1 Introducción.....	9
2.2 Espacios con producto interno.....	14
2.3 Sistemas Ortonormales.....	19
2.5 El mapeo \mathcal{K}	23
3 LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE I	28
3.1 Introducción.....	28
3.2 Sección minimizadora.....	28
4.- APLICACIONES	34
4.1 Mínimos cuadrados penalizados sobre una esfera.....	34
5. CONCLUSIONES	40
6.- APENDICE 1. Armónicos Esféricos y Polinomios de Legendre	41
A.1.1 El gradiente y el operador de Beltrami.....	41
A.1.2 De las series de Fourier a los armónicos esféricos.....	43
A.1.3 Ortogonalidad, completos y expansión en series.....	46
A.1.4 Polinomios de Legendre.....	50
7. BIBLIOGRAFIA:	57

RESUMEN

En esta tesis se presenta un análisis del artículo “Approximation by Penalized Least Squares” publicado por el Dr. José Luis Martínez Morales en la siguiente fuente:

Aproximation Theory X: Abstract and Classical Analysis

Charles K. Chui, Larry L. Schumaker, and Joachin Stockler (eds.) pp. 309-324

Copyright © 2002 by Vanderbilt University Press, Nashville, TN.

ISBN 0-8265-1415-4.

Con el objeto de hacer un análisis detallado de este trabajo y que de alguna manera tienda a ser autocontenido, se definirán y se enunciarán dentro del marco teórico, algunos de los conceptos, definiciones y resultados que son más utilizados en este artículo, dichos conceptos pertenecen principalmente a las áreas de la Geometría Diferencial, el Análisis Funcional y al Álgebra Multilineal, que serán la base para mostrar los resultados de esta investigación.

En términos generales, se define una variedad Riemanniana compacta n -dimensional sobre la cual está definido un haz vectorial hermitiano. El problema de aproximación que se considera aquí, es encontrar una sección f sobre M , que aproxime los datos $\{\mathbf{x}\}_{i=1}^p$ en el sentido de mínimos cuadrados penalizados, esto es, minimizando una funcional definida como la suma del promedio de la distancia al cuadrado a los datos, más un término que mide la “energía” de la sección f , esto es, la funcional siguiente:

$$I(f) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - f(x_i)|^2 + \lambda \|Af\|^2$$

Se demuestra que el problema de aproximación aquí considerado tiene una única solución y se obtiene una fórmula para esta. Como una ilustración, se expone un ejemplo donde se aplican los resultados obtenidos.

1.INTRODUCCIÓN

El problema considerado en este trabajo, es abordado desde la perspectiva de la teoría de la aproximación, tomando en cuenta el ruido que proporciona el levantamiento de los datos por una parte y por la otra las herramientas utilizadas para dicho levantamiento. Desde el punto de vista del Análisis Numérico, el problema de la mejor aproximación podría plantearse de la siguiente manera: “sea f una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$. Para un n fijo, nos preguntamos por un polinomio de grado n que se desvíe lo menos posible de f , la desviación puede ser medida por la expresión

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$$

Donde se puede reconocer inmediatamente que es totalmente diferente de simplemente interpolar f en algún conjunto de nodos fijos, y también es diferente de simplemente truncar la serie de Taylor de f ”¹

En este primer planteamiento, el dominio del polinomio $p(x)$ es el intervalo $[a, b]$ de números reales, sin embargo, en el desarrollo del presente trabajo, el dominio de la función aproximante que se determinará, será una estructura matemática más general, esto es una variedad suave M , en la cual esta definida una métrica riemaniana.

El significado de mínima desviación en la aproximación, tiene sentido porque en el espacio donde se lleva a cabo el proceso de minimización, esta definido un producto interno con su respectiva norma inducida, esto es, si se considera un espacio lineal normado E y un subespacio G en E , para cualquier $f \in E$ la distancia de f a G esta definida por

$$dis(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|$$

Esta expresión mide la desviación mínima absoluta que se espera lograr aproximando el vector f por un elemento de G . Si un elemento de $g \in G$ tiene la propiedad

$$\|f - g\| = dis(f, G)$$

¹ Ver [26], página 421

Entonces g logra la desviación mínima y es llamada una mejor aproximación de f a G . Es importante señalar que la mejor aproximación depende de la norma escogida para el problema, o del producto interno definido en el espacio. En el problema en cuestión, el espacio E será el haz vectorial \mathcal{V}_M y el subespacio G es el espacio de secciones definidas sobre la variedad M , esto es, $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$.

Esta es la forma en que se plantea un problema clásico de mínimos cuadrados, sin embargo, en este trabajo se trata un problema de mínimos cuadrados penalizados, esto significa, que además de encontrar la mínima desviación del subespacio G a la función f , se debe agregar un término que mida alguna característica deseada para la función g , en este caso la energía de esta función, definida por un operador integro-diferencial.

Dicho lo anterior se enuncia el problema de esta investigación:

Sea M una variedad Riemanniana compacta, y supóngase que $\{x_i\}_{i=1}^p$ es un conjunto de puntos dispersos sobre M . En este artículo se está interesado en el siguiente problema:

Problema 1. *Dados vectores $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^p$, encontrar una función f vector valuada (suave) definida sobre M que aproxime los datos en el sentido que*

$$f(x_i) \approx \mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

Problemas de ajuste de datos en donde el dominio subyacente es una variedad M , surgen en muchas áreas, incluyendo geofísica y meteorología donde una esfera es tomada como un modelo de la Tierra. La cuestión de si la interpolación o la aproximación se debe llevar a cabo depende del marco de referencia, aunque en la práctica los datos medidos son casi siempre ruidosos en cuyo caso la aproximación es probablemente más apropiada.

Una aproximación de solución al problema 1 es crear mínimos cuadrados ajustados: encontrar la función f que minimiza $L(f) = \sum_{i=1}^p |f(x_i) - \mathbf{x}_i|^2$.

Cuando los datos son especialmente ruidosos puede ser útil reemplazar los mínimos cuadrados discretos por un problema de mínimos cuadrados penalizados. La idea es minimizar una combinación

$$I(f) = L(f) + \lambda \mathcal{E}(f),$$

donde $\mathcal{E}(f)$ es una medida de energía definida por

$$\int_M |Af(x)|^2 dx,$$

donde A es un operador actuando sobre f . El parámetro λ controla la compensación entre estas dos cantidades, y es típicamente escogido como un número positivo pequeño.

Una forma de definir la energía funcional, es tomar A como un operador diferencial apropiado, esto es:

$$A = (-\Delta + L)^{m/2} \tag{1}$$

donde m es un entero par, Δ es el operador Laplace-Beltrami, sobre M , y L es la proyección sobre las constantes. La definición de A para el caso donde m es impar es más complicada. Los operadores (1) son similares a las funcionales que son minimizadas en “spherical thin plate splines”.

El acercamiento por mínimos cuadrados penalizados al problema 1 es una generalización de la “smoothing spline”, “ridge regresión” y problemas de validación cruzada generalizada “generalized cross-validation problems” que ha aparecido en la literatura estadística.

Como se mencionó al principio de esta introducción, esta tesis analiza el problema desde el punto de vista de la teoría de la aproximación. Un problema general de mínimos cuadrados penalizados puede ser formulado como sigue:

Sea X un espacio lineal. Sobre X están dados dos productos internos semidefinidos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y (\cdot, \cdot) con seminormas asociadas $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ respectivamente. Para una $F \in X$ y $\lambda > 0$, encontrar $f \in X$ tal que

$$|F - f|^2 + \lambda \|f\|^2 = \inf_{\phi \in X} \{ |F - \phi|^2 + \lambda \|\phi\|^2 \} \quad (2)$$

Consideremos un caso especial de (2).

Por mencionar resultados acerca del problema general (2), es fácil probar la unicidad del mínimo f en (2) si

$$[\cdot, \cdot]_\lambda := \langle \cdot, \cdot \rangle + \lambda (\cdot, \cdot)$$

es un producto interno sobre X , y la existencia de f si X es un espacio de Hilbert para $[\cdot, \cdot]_\lambda$. Ya que la existencia y unicidad del mínimo f son nuestro principal resultado, deberá ser suficiente probar que nuestro $(X, [\cdot, \cdot]_\lambda)$ es un espacio de Hilbert. En lugar de esto, se da una demostración constructiva de la existencia y unicidad de la función minimizadora. Como un subproducto de esta demostración se obtiene una fórmula explícita para la función minimizadora. Esta fórmula explícita puede ser usada en aplicaciones del tipo (1), y un estimado de la proporción de estimación del esquema numérico correspondiente puede ser obtenido. En el presente trabajo se da una aplicación de la adecuación de mínimos cuadrados penalizados, tomando a la variedad M como una esfera n -dimensional. En particular se considera el caso de la esfera bidimensional y una figura es incluida para mostrar visualmente la calidad de la aproximación.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera: en la sección 2 se exponen las definiciones básicas y los resultados preliminares que serán utilizados durante este trabajo,

además de la notación pertinente. Sobre algunos de los conceptos expuestos en esta sección se puede consultar el apéndice de esta tesis y si se quiere profundizar más, entonces consultar la bibliografía de referencia. En la sección 3, la existencia y unicidad de un mínimo global de la funcional I son demostrados y una fórmula explícita para este mínimo es obtenido. En la sección 4 se aplica el método a la esfera n -dimensional y fórmulas explícitas son obtenidas.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Introducción

En este capítulo se dará una formulación teórica acerca del esquema de mínimos cuadrados penalizados. Se empieza definiendo los conceptos matemáticos más importantes que se utilizarán y el espacio en el cual los procesos de minimización pueden ser llevados a cabo, también se introduce la notación que será usada a través de esta tesis.

Se empezará por definir a una variedad M , ya que será el dominio donde estará definida la sección minimizadora.

Definición (1): Supongamos que M es un espacio topológico. Diremos que M es una variedad topológica de dimensión n o una n -variedad topológica si tiene las siguientes propiedades:

- M es un espacio Hausdorff: Para cada par de puntos $p, q \in M$, hay subconjuntos abiertos disjuntos $U, V \subset M$ tal que $p \in U$ y $q \in V$.
- M es segundo numerable: Existe una base contable para la topología de M .
- M es localmente Euclidiano de dimensión n : Cada punto de M tiene una vecindad que es homeomórfica a algún subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . (Lee 2001)²

Dos conceptos, que aunque no se mencionan explícitamente en ninguna parte de esta tesis pero que están inmersos en la definición de métrica riemana, son: el de un k -tensor covariante y el de un l -tensor contravariante que se enuncian en seguida:

Definición (2): Un k -tensor covariante sobre V es una función multilineal real-valuada de k elementos de V :

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

El número k es llamado el rango de T

² La propiedad localmente euclidiano, significa que para cada $p \in M$ podemos encontrar lo siguiente

- Un conjunto abierto $U \subset M$ que contiene a p , un conjunto abierto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$

Definición (3): Un l -tensor contravariante es una función multilinear real-valuada de l elementos de V :

$$T : V^* \times \dots \times V^* \rightarrow R$$

l copias

donde V^* es el espacio dual.

A menudo se consideran tensores de tipo mixto. Un tensor de tipo mixto $\binom{k}{l}$, también llamado un k -covariante, l contravariante tensor, es un mapeo multilinear

$$T : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow R$$

k copias l copias

Definición (4): Aquella clase de tensores que cambian de signo cuando dos argumentos son intercambiados se llaman tensores alternantes y se denota por $\Lambda^k(V)$ al espacio de K tensores alternantes covariantes también llamados k -covectores o k -formas.

La siguiente definición es básica para la explicación de los resultados de este trabajo, esto es porque el conjunto de vectores esta dado en un haz de vectores.

Definición (5): Un haz vectorial k -dimensional es un par de variedades suaves E (el espacio total) y M (el espacio base), junto con un mapeo suprayectivo.

$\pi : E \rightarrow M$ (la proyección), que satisface las siguientes condiciones:

- a) Cada conjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$ (llamado la fibra de E sobre p) esta dotado con la estructura de un espacio vectorial.
- b) Para cada $p \in M$, existe una vecindad U de p y un difeomorfismo $\gamma : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times R^k$, llamado una trivialización local de E , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{y} & U \times R^k \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\
U & = & U
\end{array}$$

(donde π_1 , es la proyección sobre el primer factor).

- c) La restricción de y a cada fibra, $y : E_p \rightarrow \{p\} \times R^k$ es un isomorfismo lineal.

Una manera en que se puede denotar a un haz vectorial, es considerando la terna $(M, E, \pi) \equiv \mathcal{V}_M$ en donde el símbolo \mathcal{V}_M se ha designado en el presente trabajo como el haz donde se construye la sección minimizadora.

En la definición siguiente se enuncia el haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ en una forma corta, sobreentendiéndose que se están incluyendo todos los elementos de un haz descritos anteriormente.

Definición (6): Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial sobre M .

Una sección de E es un mapeo $F : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ F = Id_M$, o equivalentemente, $F(p) \in E_p$ para todo p .

Definición (7): Se define el haz de $\binom{k}{i}$ -tensores sobre M como

$$T_i^k M := \coprod_{p \in M} T_i^k(T_p M)$$

donde \coprod denota la unión disjunta.

Similarmente el haz de k -formas es $\Lambda^k M = \coprod \Lambda^k(T_p M)$.

Definición (8): Un campo tensorial sobre M es una sección suave de algún haz tensorial $T_i^k M$ y una k -forma diferencial es una sección suave de $\Lambda^k M$.

Definición (9): Una métrica Riemaniana³ sobre una variedad suave M es un 2 campo tensorial $g \in T^2(M)$ suave que es simétrico, (*i.e.* $g(X, Y) = g(Y, X)$) y positivo definido

(*i.e.* $g(X, X) > 0$ si $X \neq 0$). De esta manera, una métrica riemaniana determina un producto interno en cada espacio tangente $T_p M$ que es típicamente escrito como $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$ para $X, Y \in T_p M$.

Definición (10): Una variedad junto con una métrica Riemaniana es llamada una variedad Riemaniana.

En muchas ocasiones simplemente se utiliza la palabra métrica cuando no hay lugar a confusiones.

Definición (11): Conexión Riemaniana

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial sobre una variedad M , y sea $\mathcal{E}(M)$ el espacio de secciones suaves de E . Una conexión en E es un mapeo

$$\nabla : \tau(M) \times \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(M),$$

donde $\tau^k(M)$ es el espacio de k campos tensoriales covariantes escrito $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, satisfaciendo las siguientes propiedades:

a) $\nabla_X Y$ es lineal sobre $C^\infty(M)$ en X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \quad \text{para } f, g \in C^\infty(M);$$

b) $\nabla_X Y$ es lineal sobre \mathbf{R} en Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad \text{para } a, b \in \mathbf{R};$$

c) ∇ satisface la siguiente regla del producto

³ Algunas veces simplemente llamada métrica

$$\nabla_x(fY) = f\nabla_x Y + (Xf)Y \quad \text{para } f \in C^\infty(M).$$

En este trabajo se tiene especial interés en las conexiones de tipo lineal, definidas en el haz tangente de una variedad. Además, cabe hacer la distinción en cuanto a la notación que se está utilizando en este trabajo, el espacio de secciones suave se denota por $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$ en lugar de $\mathcal{E}(M)$, , que es como se enuncia en la definición anterior.

Definición (12): Una conexión lineal sobre M es una conexión en el haz tangente TM , es decir, un mapeo: $\nabla : \tau(M) \times \tau(M) \rightarrow \tau(M)$, satisfaciendo las condiciones (a)-(c) en la definición de una conexión en general.

Una conexión lineal sobre M es a menudo llamada una conexión sobre M omitiendo el adjetivo de lineal y algunos autores la llaman, conexión afín.

Definición (13):

Sea M una variedad Riemanniana compacta n -dimensional, tal que $\partial M \neq \emptyset$, entonces la frontera ∂M de M es una subvariedad cerrada y cerca de su frontera M es un producto directo $\partial M \times [0, \delta)$, $\delta > 0$. Para evitar dificultades técnicas se usará una variedad $\tilde{M} = ((-\infty, 0] \times \partial M) \cup M$.

Definición (14): Subvariedad Inmersa.

Sea M una variedad suave. Una subvariedad inmersa de dimensión k (o k -subvariedad inmersa) de M es un subconjunto $S \subset M$ que está dotado con una topología de k -variedad inmersa (no necesariamente topología de subespacio) junta con una estructura suave tal que el mapeo de inclusión $\iota : S \rightarrow M$ es una inmersión suave.⁴

⁴ Un mapeo suave $F : M \rightarrow N$ es llamada una inmersión si F_* es inyectiva en cada punto $p \in M$

Definición (15):

Un espacio de producto interno completo, será llamado un espacio Hilbert H , si se cumplen totalmente los siguientes requerimientos adicionales

- a) H es de dimensión infinita; esto es, si dado cualquier entero n , podemos encontrar n elementos independientes.
- b) Existe una sucesión cerrada (o completa) de elementos en H .

Definición (16): Núcleo reproductor de funciones

Sea S que designa a un conjunto de puntos ubicados en el espacio de uno o más variables reales o complejas. Designaremos puntos de S por x, y, z, \dots , etc. V denotará un espacio de producto interno completo de funciones definidas sobre S .

Una función de dos variables x y y en S , $K(x, y)$, es llamada una función núcleo reproductor del espacio V si

- (a) Para cada $y \in S$, $K(x, y)$ fijo, considerada como una función de x esta en V .
- (b) Para cada función $f(x) \in V$ y para cada punto $y \in S$, la propiedad reproductora

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x$$

se cumple. La letra x fuera del paréntesis, indica que y se mantiene constante y que el producto interno es hecho sobre la variable x .

2.2 Espacios con producto interno

Es muy importante destacar el hecho, de que se ha definido un producto interno dentro del espacio⁵ de secciones definidas sobre la variedad M , por lo que se considera pertinente colocar en este apartado de la tesis, algunos resultados y conceptos que están relacionados con la teoría de los espacios en donde se ha definido un producto interno, y sobre todo aquellos resultados de este tipo de estructuras matemáticas que están vinculados con la teoría de mínimos cuadrados.

⁵ Debemos enfatizar, en que este espacio es de Hilbert infinito-dimensional.

En este trabajo se privilegia la teoría de la aproximación sobre la de la interpolación por ser un problema en el que se está considerando entre otras variables, el ruido de los datos y porque también interesa medir la energía de la sección. Desde esta perspectiva, se hace el siguiente planteamiento, para profundizar ver [26].

Uno de los problemas clásicos de mejor aproximación puede ser enunciado como sigue: Una función continua f está definida sobre un intervalo $[a, b]$ para un n fijo, nos preguntamos por un polinomio de grado a lo más n que se desvía lo menos posible de f . La desviación puede ser medida por la expresión $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$.

Consideremos cualquier espacio lineal normado E y un subespacio G en E . Para cualquier $f \in E$, la distancia de f a G está definida por la cantidad

$$\text{dist}(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|$$

Si un elemento g de G tiene la propiedad

$$\|f - g\| = \text{dist}(f, G)$$

entonces g logra la mínima desviación y es llamada una mejor aproximación de f a G . El significado de mejor aproximación depende de la norma escogida para el problema.

En el problema de mejor aproximación, una de las principales características es si existe una mejor aproximación a f . Por este motivo enunciamos el siguiente

Teorema 1: Si G es un subespacio finito-dimensional en un espacio lineal normado E , entonces cada punto de E tiene al menos una mejor aproximación en G ⁶.

Realmente obtener las mejores aproximaciones para E, G , y f específica puede ser una tarea difícil. Esto exige generalmente la solución de un sistema no lineal de ecuaciones. Existe un caso importante, cuando necesitamos solamente resolver algunas ecuaciones lineales. Este es el caso en el cual E es un espacio de producto interno. Recuerde que un

⁶ Para la demostración de este teorema ver la página 423 de [26]

espacio real de producto interno es un espacio lineal E en el cual un producto interno y una norma se han introducido con estas características:

- (i) $\langle f, h \rangle = \langle h, f \rangle$
- (ii) $\langle f, \alpha h + \beta g \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle f, g \rangle$
- (iii) $\langle f, f \rangle > 0$ si $f \neq 0$
- (iv) $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

Dos importantes espacios de producto interno son \mathbb{R}^n , con

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

y $C_w[a, b]$, el espacio de funciones continuas sobre $[a, b]$, con

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$$

donde w es una función positiva continua fija. En cualquier espacio de producto interno, escribimos $f \perp g$ si $\langle f, g \rangle = 0$. Escribimos $f \perp G$ si $f \perp g$ para todo $g \in G$.

Lema 1. En un espacio de producto interno, tenemos

- (a) $\langle \sum_{i=1}^n a_i f_i, g \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle f_i, g \rangle$
- (b) $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2$
- (c) Si $f \perp g$, entonces $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

$$(d) \langle f, g \rangle \leq \|f\| \|g\|$$

$$(e) \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

Demostración: La parte (a) se prueba por inducción, utilizando los axiomas (i) y (ii). La parte (b) utiliza axiomas (i) y (ii) y la definición en (iv):

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \end{aligned}$$

La parte (c), la ley de Pitágoras, sigue inmediatamente de la parte (b). La parte (d) es la desigualdad de Schwarz. Para demostrarlo, suponga que falla para el par (f, g) :

$$|\langle f, g \rangle| > \|f\| \|g\|$$

Como $\langle f, 0 \rangle = 0$, es claro que $g \neq 0$. Por homogeneidad, podemos asumir $\|g\| = 1$, de modo que $|\langle f, g \rangle| > \|f\|$. Por homogeneidad, podemos asumir $\langle f, g \rangle = 1$, de modo que $\|f\| < 1$.

Entonces se presenta una contradicción:

$$0 \leq \|f - g\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 = \|f\|^2 - 1$$

La parte (e) es un cálculo directo basado en la parte (b).

Una vez que la desigualdad de Schwarz este disponible, la desigualdad del triángulo para la norma es demostrado por:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \end{aligned}$$

$$= (\|f\| + \|g\|)^2$$

Teorema 2. Sea G un subespacio en un espacio de producto interno E . Para $f \in E$ y $g \in G$, estas características son equivalentes:

- (i) g es una mejor aproximación para f en G
- (ii) $f - g \perp G$

Demostración: Si $f - g \perp G$, entonces para cualquier $h \in G$ tenemos, por la ley de Pitágoras,

$$\|f - h\|^2 = \|(f - g) + (g - h)\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geq \|f - g\|^2$$

Para el inverso, suponga que g es una mejor aproximación a f . Sea $h \in G$ y $\lambda > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - g + \lambda h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \|f - g\|^2 + 2\lambda \langle f - g, h \rangle + \lambda^2 \|h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \lambda \{2\langle f - g, h \rangle + \lambda \|h\|^2\} \end{aligned}$$

Siendo $\lambda \downarrow 0$, obtenemos $\langle f - g, h \rangle \geq 0$. La misma desigualdad debe ser satisfecha por $-h$, y por lo tanto $\langle f - g, h \rangle \leq 0$. Por lo tanto, $\langle f - g, h \rangle = 0$. Donde h era arbitrario en G , $f - g \perp G$.

2.3 Sistemas Ortonormales

Hay otra forma de calcular problemas de aproximación en un espacio de producto interno, y esta es por medio de sistemas ortonormales. Decimos que en una secuencia finita o infinita de vectores f_1, f_2, \dots en un espacio de producto interno es ortogonal si

$$\langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

El conjunto es llamado a ser ortonormal si para toda i y j ,

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$$

Dichos sistemas son muy bien adaptados a la aproximación debido al siguiente resultado.

Teorema 3. Sea $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un sistema ortonormal en un espacio de producto interno E .

La mejor aproximación de f por un elemento $\sum_{i=1}^n c_i g_i$ se obtiene si y sólo si $c_i = \langle f, g_i \rangle$.

Demostración: Sea G el subespacio generado por g_1, g_2, \dots, g_n . Note que la mejor aproximación, $\sum_{i=1}^n c_i g_i$, se caracteriza como en el Teorema 2 por la condición

$$f - \sum_{i=1}^n c_i g_i \perp G$$

Así, solo necesitamos verificar que esta condición es equivalente a la condición

$c_i = \langle f, g_i \rangle$. Ahora, $f - \sum_{i=1}^n c_i g_i$ será ortogonal a G si y sólo si es ortogonal a cada vector de

la base g_j . Calculando los productos internos necesarios, tenemos (para $1 \leq j \leq n$):

$$\left\langle f - \sum_{i=1}^n c_i g_i, g_j \right\rangle = \langle f, g_j \rangle - \sum_{i=1}^n c_i \langle g_i, g_j \rangle$$

$$= \langle f, g_j \rangle - c_j = 0$$

Esta estrategia es recomendable para estas consideraciones: Si se desea aproximar elementos de E por elementos de un subespacio G , primero obtener una base ortonormal $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ para G . Después la mejor aproximación de f es $\sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i$.

El siguiente resultado es una generalización de la ley Pitagórica.

Lema 2. Si $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ es ortogonal, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \|g_i\|^2$$

Demostración: Si $n = 1$, es obvio. Si la ecuación es correcta para n , entonces es correcta para $n + 1$ porque $a_{n+1}g_{n+1}$ es ortogonal a $\sum_{i=1}^n a_i g_i$, y el caso elemental de la ley de Pitágoras se aplica:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} a_i g_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i g_i \right\|^2 + \|a_{n+1} g_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \|g_i\|^2 + a_{n+1}^2 \|g_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

El siguiente resultado es la desigualdad de Bessel

Lema 3. Si $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ es ortonormal, entonces

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, g_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Demostración: Sea $g^* = \sum_{i=1}^n \langle f, g_i \rangle g_i$. Por el Teorema 3, g^* es la mejor aproximación para f en el espacio G generado por g_i . Por el Teorema 2, $f - g^* \perp G$. Por la ley de Pitágoras (aplicada 2 veces),

2.4 espacios de Hilbert con kernel reproductor.

En esta sección se introducen los conceptos relacionados con el kernel reproductor en espacios con producto interno, esto es, porque la sección minimizadora esta dada en términos de un kernel, en donde en este caso el espacio de Hilbert, es el espacio de secciones suaves $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$. El concepto que se definirá a continuación, es el más importante en esta sección, y se hará una descripción más detallada porque juega un papel importante en el desarrollo del presente trabajo.

La definición es sobre *El haz vectorial de operadores de Hilbert-Schmidt* y antes de enunciar la definición se darán algunos elementos importantes para aclararla.

Para consultar con más detalle ver [9] que es donde está enunciada de la siguiente manera. Se definirá el haz vectorial de operadores⁷ de Hilbert-Schmidt sobre una variedad. Sea M una variedad C^∞ . Considérese una unión disjunta $\mathcal{V}_M = \bigcup_{x \in M} F_x$ de una familia de espacios vectoriales parametrizados por el conjunto M .

Algunas veces es conveniente describir a un punto de \mathcal{V}_M como (x, w) , donde $x \in M$ y $w \in F_x$.

El mapeo $\pi: \mathcal{V}_M \rightarrow M$, $\pi(x; w) = x$ es llamada la proyección. F_x es llamada la fibra de \mathcal{V}_M en x .

⁷ Si $\{e_n\}$ y $\{f_n^*\}$ son bases ortonormales de E y F^* y si para un operador $A: E \rightarrow F$ la serie

$\|A\|_2 = \left(\sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle f_m^*, A e_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ es convergente. De esta manera decimos que A es un operador de Hilbert-

Schmidt si la norma de $\|A\|_2$ es finita.

Se definirá primero lo que es un haz vectorial suave C^∞ sobre M para después enunciar el principal resultado de esta sección, esto es, el teorema 4:

Definición (17)

\mathcal{V}_M es llamado un haz vectorial C^∞ sobre M con fibra F , si hay una cubierta abierta $\{U_\alpha; \alpha \in M\}$ de M satisfaciendo lo siguiente:

- 1.- para cada U_α , hay un mapeo $\tau_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ tal que $\pi\tau_\alpha(x, u) = x$, y para cualquier x fijo, $\tau_\alpha(x) : F \rightarrow F_x (= \pi^{-1}(x))$ es un isomorfismo lineal, donde $\tau_\alpha(x)u = \tau_\alpha(x, u)$
- 2.- Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces $\phi : U_\alpha \cap U_\beta \times F \rightarrow F$ definida por $\phi(x)u = \tau_\alpha(x)^{-1}\tau_\beta(x)u$ es un mapeo C^∞
- 3.- \mathcal{A} es maximal entre la familia indexada y además satisface (1) y (2).

El siguiente teorema explica porque se puede definir un kernel en los espacios en donde se lleva a cabo el proceso de minimización.

Teorema 4. Sea M_i una variedad Riemanniana compacta C^∞ y sea (\mathcal{V}_{M_i}) un haz vectorial C^∞ sobre M_i con fibra F_i un espacio de Hilbert separable. Finalmente, sea $(\mathcal{V}_{M_1 \times M_2})$ un haz vectorial sobre $M_1 \times M_2$ con fibra $L^2(F_1^*, F_2)$. Un operador \tilde{K} de $L^2(\mathcal{V}_{M_1})$ a $L^2(\mathcal{V}_{M_2})$ es un operador Hilbert-Schmidt si y solo sí esta asociado con un núcleo $K \in L^2(\mathcal{V}_{M_1 \times M_2})$.

Para la demostración de este teorema ver [9]

Estamos ahora en la posibilidad de enunciar un marco en donde el proceso de minimización puede llevarse a cabo.

Para un haz de vectores hermitianos de dimensión finita \mathcal{V}_M sobre M , sea $\Gamma(\mathcal{V}_M)$ el espacio de todas las secciones C^∞ de \mathcal{V}_M . Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno hermitiano y sea la norma $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Para $f \in \Gamma(\mathcal{V}_M)$, definimos normas $\|f\|_k$ por

$$\|f\|_k^2 = \sum_{l \leq k} \int_M |(D^l f)(x)|^2 dx,$$

donde dx es el elemento de volumen definidos por la métrica Riemaniana, y Df denota la diferenciación covariante con respecto a la conexión Riemaniana. Sea $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$ el espacio completo de $\Gamma(\mathcal{V}_M)$ con respecto a la norma $\|f\|_k$. Para simplificar la notación escribimos $\|\cdot\|$ en vez de $\|\cdot\|_0$.

Denotemos por $\pi : \mathcal{V}_M \rightarrow M$ la proyección del haz. Supongamos que $\{x_i\}_{i=1}^p$ es un conjunto de puntos dispersos sobre M , y consideremos vectores $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^p \subset \mathcal{V}_M$ tal que $\pi \mathbf{x}_i = x_i$. Para $k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ consideremos un isomorfismo $A : \Gamma^k(\mathcal{V}_M) \rightarrow \Gamma^0(\mathcal{V}_M)$, y definimos la funcional

$$I(f) = \sum_{i=1}^p |\mathbf{x}_i - f(x_i)|^2 + \lambda \|Af\|^2. \quad (3)$$

Por el lema de Sobolev (ver 11 [11] página 116), cada sección en $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$ es continua. Entonces, el dominio de la funcional I es el conjunto $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$.

2.5 El mapeo \mathcal{K}

En la siguiente sección, la existencia y unicidad de un mínimo global de la funcional I son demostradas. Como un mínimo es dado en términos del inverso de una matriz que contiene toda la información ofrecida por los vectores $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^p$. Llamamos a esta matriz “matriz del sistema”.

Desarrollaremos alguna maquinaria técnica. Empezaremos definiendo la matriz del sistema y otros mapeos de las fibras. Sea E la fibra de \mathcal{V}_M y denotamos a $Hom(E)$ como el

espacio de los homomorfismos lineales de E en si mismo. Sea $\mathcal{V}_{M \times M}$ un haz vectorial C^∞ sobre $M \times M$ con fibra $\text{Hom}(E)$. Por el Teorema 4, el operador $A^{-1} : \Gamma^0(\mathcal{V}_M) \rightarrow \Gamma^k(\mathcal{V}_M)$ tiene asociado un kernel $K(\cdot, \cdot) \in \Gamma^0(\mathcal{V}_{M \times M})$.

Para $x, y \in M$ y $H \in \text{Hom}(E_x, E_y)$, se denota por $H^* \in \text{Hom}(E_y, E_x)$ la adjunta de H definida por

$$\langle e_x, H^* e_y \rangle = \langle H e_x, e_y \rangle, \quad e_x \in E_x, e_y \in E_y.$$

Definición (18): Para $i, j = 1, \dots, p$, sean

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{ij} &\in \text{Hom}(E_{x_j}, E_{x_i}), \\ P_i &\in \text{Hom}(E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}, E_{x_i}), \\ \mathcal{K} &\in \text{Hom}(E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}), \end{aligned}$$

los mapeos definidos por

$$\mathcal{K}_{ij} = \int_M K(x_i, x) K(x_j, x)^* dx \quad (4)$$

$$P_i(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) = e_{x_i}, \quad (5)$$

$$P_i \mathcal{K} = \sum_{j=1}^p \mathcal{K}_{ij} P_j. \quad (6)$$

Definición (19): Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en $E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}$ definido por

$$\langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle = \sum_{i=1}^p \langle e_{x_i}, e'_{x_i} \rangle, \quad e_{x_i}, e'_{x_i} \in E_{x_i}. \quad (7)$$

El mapeo \mathcal{K} tiene las siguientes propiedades: (i) es adjunta a sí misma con respecto al producto interno (7), (ii) es semidefinida positiva y, si se denota por \mathcal{I} la identidad del

mapeo en $E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}$, entonces (iii) el mapeo $\lambda\mathcal{I} + \mathcal{K}$ es invertible. Estas aseveraciones son consecuencias del siguiente teorema.

Teorema 5: Para $(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \in E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}$ tenemos

- (i) $\langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), \mathcal{K}(e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle = \langle \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle$
- (ii) $\langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), \mathcal{K}(e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle = \left\| \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * e_{x_i} \right\|^2$
- (iii) $\langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (\lambda\mathcal{I} + \mathcal{K})(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle \geq \lambda \langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle$.

Para poder probar este teorema, se necesita un lema técnico. Sea

$$(f, g) = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle dx \quad (8)$$

el producto interno de dos secciones $f, g \in \Gamma^0(\mathcal{V}_M)$.

Lema 4. Sea $1 \leq i \leq p$ y $(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \in E_{x_1} \times \dots \times E_{x_p}$. Entonces, para $e'_{x_i} \in E_{x_i}$,

$$\langle e'_{x_i}, P_i \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle = \sum_{j=1}^p (K(x_i, \cdot) * e'_{x_i}, K(x_j, \cdot) * e_{x_j})$$

Demostración: Se tiene

$$P_i \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) = \sum_{j=1}^p \mathcal{K}_{ij} P_j(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \quad (\text{por (6)})$$

$$= \sum_{j=1}^p \mathcal{K}_{ij} e_{x_j} \quad (\text{por (5)})$$

$$= \sum_{j=1}^p \int_M K(x_i, x) K(x_j, x)^* dx e_{x_j} \quad (\text{por (4)})$$

Tomando el producto interno con e'_{x_i} da

$$\begin{aligned} \langle e'_{x_i}, P_i \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle &= \sum_{j=1}^p \int_M \langle e'_{x_i}, K(x_i, x) K(x_j, x)^* e_{x_j} \rangle dx \\ &= \sum_{j=1}^p \int_M \langle K(x_i, x)^* e'_{x_i}, K(x_j, x)^* e_{x_j} \rangle dx \\ &\quad (\text{por definición de } K(x_i, x)^*) \\ &= \sum_{j=1}^p \langle K(x_i, \cdot)^* e'_{x_i}, K(x_j, \cdot)^* e_{x_j} \rangle \quad (\text{por (8)}) \end{aligned}$$

En la práctica, los cálculos puramente formales como los anteriores algunas veces son omitidos.

Demostración del Teorema 5. (i) Tenemos

$$\begin{aligned} \langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), \mathcal{K}(e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle &= \sum_{i=1}^p \langle e_{x_i}, P_i \mathcal{K}(e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle \quad (\text{por definición 16}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle K(x_i, \cdot)^* e_{x_i}, K(x_j, \cdot)^* e'_{x_j} \rangle \quad (9) \end{aligned}$$

(por Lema 4)

$$= \sum_{j=1}^p \overline{\langle e'_{x_j}, P_j \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle}.$$

(otra vez por Lema 4, donde la línea superior denota conjugación compleja)

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^p \langle P_j \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), e'_{x_j} \rangle \\ &= \langle \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), (e'_{x_1}, \dots, e'_{x_p}) \rangle. \end{aligned}$$

Para la parte (ii) se tiene que

$$\begin{aligned} \langle (e_{x_1}, \dots, e_{x_p}), \mathcal{K}(e_{x_1}, \dots, e_{x_p}) \rangle &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (K(x_i, \cdot) * e_{x_i}, K(x_j, \cdot) * e_{x_j}) && \text{(por (9))} \\ &= \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * e_{x_i}, \sum_{j=1}^p K(x_j, \cdot) * e_{x_j} \right) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * e_{x_i} \right\|^2. \end{aligned}$$

Finalmente la parte (iii) se sigue de (ii)

3 LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE I

3.1 Introducción

Con los resultados obtenidos en el capítulo anterior se esta en posibilidades de primeramente, definir el candidato a ser el mínimo de la funcional

$$I(f) = \sum_{i=1}^p |\mathbf{x}_i - f(x_i)|^2 + \lambda \|Af\|^2$$
 que se definió en el capítulo anterior y después de mostrar

que dicho mínimo es único.

3.2 Sección minimizadora

En este sección mostraremos la existencia de un único mínimo global de la funcional I en $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$. Empezaremos definiendo nuestro candidato para esto.

Definición (18): Sea f_{\min} la sección definida por

$$f_{\min} = A^{-1} \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * P_i (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p). \quad (10)$$

Notemos que para cualquier $e_{x_i} \in E_{x_i}$, $K(x_i, \cdot) * e_{x_i} \in \Gamma^0(\mathcal{V}_M)$ si $K(\cdot, \cdot) \in \Gamma^0(\mathcal{V}_{M \times M})$. Entonces $A^{-1} K(x_i, \cdot) * e_{x_i} \in \Gamma^k(\mathcal{V}_M)$. En particular $f_{\min} \in \Gamma^k(\mathcal{V}_M)$.

Como un resultado preliminar, calculamos el valor de la funcional I en f_{\min} .

Teorema 6:

$$I(f_{\min}) = \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{x}_i - f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle. \quad (11)$$

Una consecuencia obvia de este teorema es que si f_{min} interpola los datos $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^p$, entonces $I(f_{min})$ es cero. Para demostrar el teorema 6 necesitamos dos lemas técnicos.

Lema 5. Para $\mathbf{x} \in V_M$ y $f \in \Gamma^0(V_M)$, tenemos

$$\langle f(\pi\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = (f, A^* K(\pi\mathbf{x}, \cdot)^* \mathbf{x}),$$

Donde A^* denota la adjunta de A .

Demostración: Tenemos

$$\begin{aligned} \langle f(\pi\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle &= \langle (A^{-1} Af)(\pi\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \left\langle \int_M K(\pi\mathbf{x}, x) Af(x) dx, \mathbf{x} \right\rangle \\ &= \int_M \langle K(\pi\mathbf{x}, x) Af(x), \mathbf{x} \rangle dx = \int_M \langle Af(x), K(\pi\mathbf{x}, x)^* \mathbf{x} \rangle dx \\ &= (Af, K(\pi\mathbf{x}, \cdot)^* \mathbf{x}) = (f, A^* K(\pi\mathbf{x}, \cdot)^* \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Lema 6. Esta sección f_{min} satisface

$$\lambda Af_{min} + \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i. \quad (12)$$

Demostración: Primero calculamos

$$f_{min}(x_i) = A^{-1} \sum_{j=1}^p K(x_j, x_i)^* P_j (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \quad (\text{por (10)})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M K(x_i, x) \sum_{j=1}^p K(x_j, x) * P_j (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) dx \\
&= \sum_{j=1}^p \int_M K(x_i, x) K(x_j, x) * dx P_j (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \\
&= \sum_{j=1}^p \mathcal{K}_{ij} P_j (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \quad (\text{por(4)}) \\
&= P_i \mathcal{K} (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \quad (\text{por (6)}).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * f_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * P_i \mathcal{K} (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p). \quad (13)$$

De otra forma,

$$\lambda A f_{min} = \lambda \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * P_i (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p),$$

por (10). Sumando esto con (13) da

$$\begin{aligned}
\lambda A f_{min} + \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * f_{min}(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * P_i (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K}) (\lambda \mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \\
&= \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * P_i (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \\
&= \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot) * \mathbf{x}_i.
\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 6. Comenzamos calculando

$$|\mathbf{x}_i - f_{min}(x_i)|^2$$

$$\begin{aligned}
&= |\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle + \langle f_{\min}(x_i), f_{\min}(x_i) \rangle^8 \\
&= |\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle + \langle A^* K(x_i, \cdot)^* f_{\min}(x_i), f_{\min} \rangle
\end{aligned}$$

Por el lema 5, donde en este caso $\mathbf{x} = f_{\min}(x_i)$ y $f = f_{\min}$. Sustituyendo esto y

$\|Af_{\min}\|^2 = (A^* Af_{\min}, f_{\min})$ en (3), obtenemos

$$\begin{aligned}
I(f_{\min}) &= \sum_{i=1}^p \left(|\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle + (A^* K(x_i, \cdot)^* f_{\min}(x_i), f_{\min}) \right) + \lambda (A^* Af_{\min}, f_{\min}) \\
&= \sum_{i=1}^p \left(|\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle + \left(A^* \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* f_{\min}(x_i) + \lambda Af_{\min} \right), f_{\min} \right)
\end{aligned}$$

(factorizando f_{\min} y A^*)

$$= \sum_{i=1}^p \left(|\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle \right) + \left(A^* \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i f_{\min} \right) \quad (\text{por (12)})$$

$$= \sum_{i=1}^p \left(|\mathbf{x}_i|^2 - \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle - \langle f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle \right) + \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{x}_i, f_{\min}(x_i) \rangle$$

(por el lema 5, donde en este caso $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ y $f = f_{\min}$)

$$= \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{x}_i - f_{\min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle.$$

Teorema 7: Para todo $f \in \Gamma^k(\mathbf{V}_M)$,

$$I(f) - I(f_{\min}) = \sum_{i=1}^p |(f - f_{\min})(x_i)|^2 + \lambda \|A(f - f_{\min})\|^2. \quad (14)$$

⁸ Por el lema 1

De este resultado se concluye, que la funcional evaluada en cualquier sección en el espacio de las secciones $\Gamma^k(\mathcal{V}_M)$, es mayor o igual a la funcional evaluada en f_{min} , esto es ;
 $I(f) - I(f_{min}) \geq 0$

Corolario 1. La sección dada por (10) es el único mínimo de la funcional I .

Demostración: Esto es una consecuencia del Teorema 7. Si $I(f_{min}) = I(f)$ entonces $A(f - f_{min}) = 0$, por (14). De aquí $f = f_{min}$, si A es inyectiva.

Demostración del Teorema 7. Comenzamos calculando el lado derecho de (14). Por el Lema 6,

$$\begin{aligned}
|(f - f_{min})(x_i)|^2 &= |f(x_i)|^2 - \langle f(x_i), f_{min}(x_i) \rangle - \langle f_{min}(x_i), f(x_i) \rangle \\
&\quad + \langle f_{min}(x_i), f_{min}(x_i) \rangle = \\
&= |f(x_i)|^2 - (f, A * K(x_i, \cdot) * f_{min}(x_i)) \\
&\quad - (A * K(x_i, \cdot) * f_{min}(x_i), f) \\
&\quad + (f_{min}, A * K(x_i, \cdot) * f_{min}(x_i)),
\end{aligned} \tag{15}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|A(f - f_{min})\|^2 &= \|Af\|^2 - (Af, Af_{min}) - (Af_{min}, Af) + (Af_{min}, Af_{min}) \\
&= \|Af\|^2 - (f, A * Af_{min}) - (A * Af_{min}, f) \\
&\quad + (f_{min}, A * Af_{min}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Por (15) y (16),

$$\sum_{i=1}^p |(f - f_{min})(x_i)|^2 + \lambda \|A(f - f_{min})\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p \left(|f(x_i)|^2 - (f, A^* K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i)) - (A^* K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i), f) \right) \\
&\quad + (f_{min}, A^* K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i)) + \lambda (\|Af\|^2 - (f, A^* Af_{min}) \\
&\quad - (A^* Af_{min}, f) + (f_{min}, A^* Af_{min}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p |f(x_i)|^2 - \left(f, A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i) + \lambda Af_{min} \right) \right) \\
&\quad - \left(A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i) + \lambda Af_{min} \right), f \right) \\
&\quad + \left(f_{min}, A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* f_{min}(x_i) + \lambda Af_{min} \right) \right) + \lambda \|Af\|^2
\end{aligned}$$

(factorizando f_{min} , f y A^* en los productos internos)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p |f(x_i)|^2 - \left(f, A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i \right) \right) - \left(A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i \right), f \right) \\
&\quad + \left(f_{min}, A^* \left(\sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i \right) \right) + \lambda \|Af\|^2 \quad (\text{por (12)})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^p \left(|f(x_i)|^2 - (f, A^* K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i) - (A^* K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i, f) + (f_{min}, A^* K(x_i, \cdot)^* \mathbf{x}_i) \right) + \lambda \|Af\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^p \left(|f(x_i)|^2 - \langle f(x_i), \mathbf{x}_i \rangle - \langle \mathbf{x}_i, f(x_i) \rangle + \langle f_{min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle \right) + \lambda \|Af\|^2$$

(por el lema 5)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^p \left(|f(x_i)|^2 - \langle f(x_i), \mathbf{x}_i \rangle - \langle \mathbf{x}_i, f(x_i) \rangle + \langle f_{min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle \right) + \lambda \|Af\|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^p |\mathbf{x}_i|^2 - \sum_{i=1}^p |\mathbf{x}_i|^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^p |f(x_i) - \mathbf{x}_i|^2 + \lambda \|Af\|^2 - \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{x}_i - f_{min}(x_i), \mathbf{x}_i \rangle$$

$$= I(f) - I(f_{min}), \quad \text{por (3) y (11)}$$

4.- APLICACIONES

4.1 Mínimos cuadrados penalizados sobre una esfera.

En esta sección se aplicará método al caso cuando M es una esfera n -dimensional. Sea \mathcal{V}_M el haz normal sobre la esfera n -dimensional unitaria. Definimos la energía funcional tomando A como

$$A = -\Delta + L,$$

Donde Δ es el operador Laplace-Beltrami⁹ sobre M , y L es la proyección de las constantes. Los eigenvalores del operador elíptico A son los mismos que para $-\Delta$, excepto que uno de ellos ha sido cambiado de cero a 1. Entonces, $A : \Gamma^2(\mathcal{V}_M) \rightarrow \Gamma^0(\mathcal{V}_M)$ es un isomorfismo.

La sección minimizadora (10) está dada en términos del kernel K del operador A^{-1} . En el siguiente teorema se calcula una fórmula para K .

Teorema 8: Sea H_0, H_1, \dots una secuencia ortogonal de armónicos esféricos n -dimensional. Entonces

$$K(x, y) = H_0(x)H_0(y)/\|H_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} [n_j(n_j + n - 1)]^{-1} H_j(x)H_j(y)/\|H_j\|, \quad (17)$$

donde n_j denota el orden de H_j .

Demostración: Considere una función $\gamma \in \Gamma^0(\mathcal{V}_M)$. Resolvemos la ecuación

$$(-\Delta + L)f = \gamma, \quad f \in \Gamma^2(\mathcal{V}_M), \quad (18)$$

⁹ algunas veces simplemente llamado operador de Laplace

como

$$f(x) = \int_{S^n} K(x, y) \gamma(y) dy.$$

La solución f tiene la siguiente expansión de término de H_j ,

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j H_j. \quad (19)$$

por el teorema 4 del apéndice,

$$\Delta f = -\sum_{j=0}^{\infty} n_j (n_j + n - 1) f_j H_j. \quad (20)$$

De otro modo

$$Pf = f_0 H_0 \quad (21)$$

Asumiendo que γ tiene una expansión finita en términos de los armónicos esféricos,

$$\gamma = \sum_{j=0}^J c_j H_j \quad (22)$$

con

$$c_j = (\gamma, H_j) / \|H_j\|. \quad (23)$$

Sustituyendo (21) y (22) en (18)

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j (n_j + n - 1) f_j H_j + f_0 H_0 = \sum_{j=0}^J c_j H_j,$$

$$f_0 = c_0 \quad \text{y} \quad n_j (n_j + n - 1) f_j = \begin{cases} c_j, & 0 < j \leq J \\ 0, & J < j \end{cases},$$

Resolviendo para f_j y substituyendo en (21)

$$f = c_0 H_0 + \sum_{j=1}^J [n_j (n_j + n - 1)]^{-1} c_j H_j$$

$$= (\gamma, H_0) / \|H_0\| H_0 + \sum_{j=1}^J [n_j(n_j + n - 1)]^{-1} (\gamma, H_j) / \|H_j\| H_j \quad (\text{por (23)})$$

$$= \int_M \gamma(x) H_0(x) dx / \|H_0\| H_0 + \sum_{j=1}^J [n_j(n_j + n - 1)]^{-1} \int_M \gamma(x) H_j(x) dx / \|H_j\| H_j \quad (\text{por (8)})$$

$$= \int_M \left(H_0(x) / \|H_0\| H_0 + \sum_{j=1}^J [n_j(n_j + n - 1)]^{-1} H_j(x) / \|H_j\| H_j \right) \gamma(x) dx$$

Como J es arbitrario,

$$K(\cdot, x) = H_0(x) / \|H_0\| H_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [n_j(n_j + n - 1)]^{-1} H_j(x) / \|H_j\| H_j.$$

La sección minimizadora puede ser expresada como una serie de polinomios de Legendre. Los coeficientes en las series dependen de la dimensión de la esfera y del grado de los polinomios.

Como el kernel K es cuadrado integrable con respecto a las dos variables independientes, es cuadrado integrable con respecto a cualquiera de las variables, conservando fija la otra. En la demostración del siguiente lema, la expansión (17) del kernel K en armónicos esféricos es usada, también como el teorema de adición para armónicos esféricos. Sea $x \cdot y$ denota el producto punto en \mathbb{R}^n .

Lema 7. Sea

$$N(l, n) = \frac{(2l + n - 1)(l + n - 2)!}{l!(n - 1)!}$$

Donde σ_n denota la superficie de M y P_l^n denota el polinomio de Legendre de dimensión n y grado l . Entonces

$$\int_M K(x, y)K(y, z)^* dy = \frac{1}{\sigma_n} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} [l(l+n-1)]^{-2} N(l, n) P_l^n(x \cdot z) \right).$$

Demostración: Por el teorema 4 de esta tesis $K(\cdot, \cdot) \in \Gamma^0(\mathcal{V}_{M \times M})$; en particular,

$$\forall x \in M : K(x, \cdot) \in \Gamma^0(\mathcal{V}_M).$$

Por (17) y el teorema 3 del apéndice.

$$\int_M K(x, z)K(z, y)^* dz = H_0(x)H_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} [n_j(n_j+n-1)]^{-2} H_j(x)H_j(y).$$

Por el teorema 5 del apéndice.

$$\begin{aligned} & H_0(x)H_0(y) + \sum_{j=1}^{\infty} [n_j(n_j+n-1)]^{-2} H_j(x)H_j(y) \\ &= \frac{1}{\sigma_n} P_0^n(x \cdot y) + \sum_{l=1}^{\infty} [l(l+n-1)]^{-2} \frac{N(l, n)}{\sigma_n} P_l^n(x \cdot y) \\ &= \frac{1}{\sigma_n} + \sum_{l=1}^{\infty} [l(l+n-1)]^{-2} \frac{N(l, n)}{\sigma_n} P_l^n(x \cdot y), \end{aligned}$$

desde $P_0^n(t) = 1$ ([6]).

Considerando el caso de la esfera de dimensión dos. Entonces, las series de polinomios de Legendre pueden ser expresadas en términos de funciones di logarítmicas¹⁰.

¹⁰ Función dilogairtmo = $\int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt$

Corolario 2. Sea $n = 2$. entonces

$$\int_M K(x, y)K(y, z)^* dy = \frac{1}{4\pi} \left(-1 + \frac{\pi^2}{7} - \text{dilog}(x \cdot z) \right). \quad (24)$$

Demostración: Por el teorema 5 en [8],

$$\int_M K(x, y)K(y, z)^* dy = \frac{1}{\sigma_n} \left(1 - \frac{1}{7}(12 - \pi^2) - \text{dilog}(x \cdot z) \right),$$

donde $\sigma_n = 4\pi$.

Siendo \mathcal{V}_M el conjunto normal en M , los vectores $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^p$ son, en efecto, escalares.

Proposición 1. Sea

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p). \quad (25)$$

Considerar la función $f : M \times M \rightarrow R$ definido como

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(-1 + \frac{\pi^2}{7} - \text{dilog}(x \cdot y) \right). \quad (26)$$

Considerando la matriz $M = (f(x_i, x_j))$, Donde $\{x_i\}_{i=1}^p$ es el conjunto de puntos dispersos en M . Considérese la función $F : M \rightarrow R^p$ definido como

$$F(x) = (f(x, x_1), \dots, f(x, x_p)). \quad (27)$$

Denotando por $\mathbf{I}_{p \times p}$ la $p \times p$ matriz identidad. Donde

$$f_{\min} = F \cdot (\lambda \mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x}.$$

Demostración: Si la fibra de \mathcal{V}_M es unidimensional, con la definición 1 y (24),

$$f_{\min} = A^{-1} \sum_{i=1}^p K(x_i, \cdot)^* P_i (\lambda \mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M K(\cdot, x) \sum_{i=1}^p K(x_i, x) * P_i (\lambda \mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x} dx \\
&= \sum_{i=1}^p f(\cdot, x_i) P_i (\lambda \mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x} \quad (\text{por (24) y (26)}) \\
&= F \cdot (\lambda \mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{M})^{-1} \mathbf{x} \quad \text{por (6) y (27)}.
\end{aligned}$$

La figura 1 ilustra una aplicación de datos ajustados a una esfera. En la gráfica 1 un armónico esférico de orden 5 es graficado sobre el haz normal de la esfera. En la gráfica 2 un total de de 150 puntos son muestreados de la superficie original con un poco de ruido agregado. Las gráficas 3 y 4 muestran la aproximación que se obtiene. Como un comentario adicional, diremos que es notable la calidad de la aproximación en regiones donde tenemos pocos puntos muestreados.

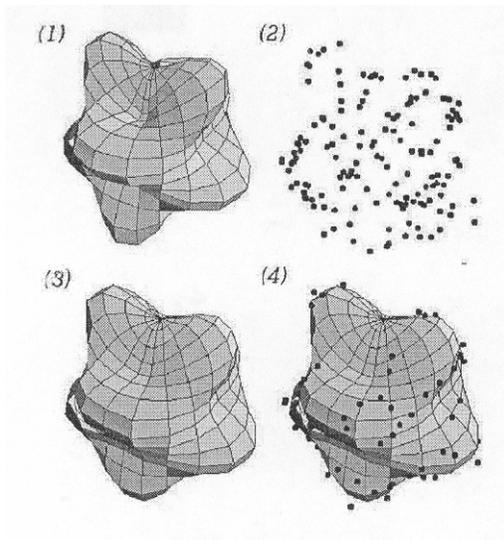


Figura 1

5. CONCLUSIONES

En el planteamiento, y en la construcción de los espacios donde se lleva a cabo el proceso de minimización de los mínimos cuadrados penalizados de este problema, se observa la posibilidad natural que tiene la matemática de resolver con cierto grado de éxito, situaciones en donde hay problemas prácticos y en donde se aplican conceptos teóricos de la matemática abstracta, ya que se han utilizando conceptos como; variedad riemana, Haz vectorial, haz tensorial, diferenciación covariante, etc. También se puede advertir que se continúa con ese espíritu que caracteriza a la investigación en este campo del conocimiento, esto es, el de generalizar y tener un espectro más amplio para explicar resultados dentro del campo matemático y para poder al mismo tiempo aplicar sus resultados en la solución de problemas en una amplia gama de situaciones. Dentro del análisis numérico, una de las técnicas más utilizadas para resolver problemas dentro de esta área, es la de mínimos cuadrados, en la que los dominios de las funciones que se determinan, son espacios euclidianos R^n , en esta tesis, el dominio de la función o sección como se le llama aquí, es una estructura más general y más compleja que un espacio vectorial euclidiano, es, una variedad con ciertas características estructurales, que nos permiten aplicar los resultados que conocemos del cálculo y que de esta forma los estamos generalizando. También se puede ver que en la utilización de la fórmula para obtener la sección minimizadora, es determinante la variedad y los espacios que se definan sobre ella para la obtención del mínimo. Esto significa, que podrá continuarse haciendo investigación, en la aplicación de estos resultados donde se tomé como dominio a otro tipo de variedades y evidentemente obteniéndose para cada problema una sección minimizadora. En este trabajo la aplicación del resultado, es decir, la fórmula para obtener la sección minimizadora, se llevó a cabo, cuando se tiene un problema, en donde la variedad implicada es una esfera de dos dimensiones, por supuesto que podría darse como dominio una variedad de otro tipo.

6.- APENDICE 1. Armónicos Esféricos y Polinomios de Legendre

En esta tesis, se hace uso de ciertos conceptos y estructuras matemáticas que se considera necesario enunciar en este apéndice, para hacer de alguna manera más completo este trabajo. La aplicación del principal resultado, que es la fórmula para obtener la sección minimizadora, utiliza un kernel, el cual, para los espacios que se construyen en el ejemplo de la n -esfera, utiliza los armónicos esféricos y los polinomios de Legendre. Los polinomios de Legendre sirven como una base para expresar el kernel de la sección minimizadora, y los armónicos esféricos son la base para expresar los polinomios de Legendre. Antes de enunciar los principales resultados de este apéndice, se recordarán algunos conceptos y definiciones generales de los espacios euclidianos, simplemente para estandarizar nuestra notación. Cabe aclarar, que los resultados y conceptos de este apéndice fueron revisados y seleccionados en su totalidad de la fuente bibliográfica [6].

En este apéndice denotamos al espacio euclidiano d -dimensional por \mathbf{E}^d . Si x es un punto de \mathbf{E}^d las coordenadas de x será denotado por x_i ; es decir, un punto de \mathbf{E}^d es de la forma, $x = (x_1, \dots, x_d)$. La medida de Lebesgue de un subconjunto S de \mathbf{E}^d usualmente será llamada el volumen de S y será denotada por $\nu(S)$. Escribimos $B^d(p, r)$ para una bola cerrada en \mathbf{E}^d de radio r centrada en p , $B^d = (0,1)$ para la bola unitaria cerrada en \mathbf{E}^d centrada en 0 . Además denotamos con S^{d-1} la frontera de B^d , esto es, la esfera unitaria en \mathbf{E}^d . La medida de Lebesgue sobre S^{d-1} será denotada por σ , el volumen de B^d por κ_d y el área de superficie por σ_d . (Ver página 1 de [6])

A.1.1 El gradiente y el operador de Beltrami

Si f es una función cuyo dominio es un subconjunto de \mathbf{E}^d que contiene S^{d-1} y cuyo rango esta en el conjunto de los números reales o en \mathbf{E}^d , escribimos \hat{f} o f^\wedge para la restricción de

f a S^{d-1} . Si, por otra parte, F es definida sobre S^{d-1} dejamos que $\overset{\vee}{F}$ o F^\vee denote la extensión radial de F a $\mathbf{E}^d \setminus \{o\}$. Esto significa que (ver página 5 de [6])

$$\overset{\vee}{F}(x) = F(x/|x|).$$

Note que siempre $(F^\vee)^\wedge = F$ mientras que en general $(f^\wedge)^\vee \neq f$.

Una función F sobre S^{d-1} será n veces diferenciable (o n veces continuamente diferenciable) si las derivadas parciales de $\overset{\vee}{F}$ de orden n existen (o existen y son continuas). Para aplicaciones geométricas de armónicos esféricos frecuentemente se tiene que trabajar con los siguientes operadores diferenciales de segundo orden. El operador de Laplace Δ y el gradiente ∇ son definidos, respectivamente, por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

y

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + e_d \frac{\partial}{\partial x_d},$$

donde $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{E}^d$ con 1 ocurrencia en la i -ésima posición. Ambos Δ y ∇ operan sobre cualquier una función suficientemente suave definida sobre un subconjunto abierto de \mathbf{E}^d .

Utilizando el procedimiento de extensión anterior se puede transferir el operador de Laplace y el operador del gradiente a operadores que actúan sobre funciones S^{d-1} . Estos operadores serán denotados, respectivamente, por ∇_0 y Δ_0 y son definidos por

$$\Delta_0 F = (\Delta \overset{\vee}{F})^\wedge$$

y

$$\nabla_0 F = (\nabla \overset{\vee}{F})^\wedge$$

Entonces $\Delta_0 F$ y $\nabla_0 F$ existen si F es, respectivamente, 2 o 1 vez diferenciable. El operador Δ_0 es usualmente llamado operador Laplace-Beltrami o simplemente operador Beltrami, mientras que ∇_0 se refiere otra vez al gradiente.

A.1.2 De las series de Fourier a los armónicos esféricos.

Sea ahora f una función que esta definida en casi todas partes sobre $[0, 2\pi]$ e integrable. Entonces sus coeficientes de Fourier respecto a la sucesión dada, están definidos por

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \cos k\omega d\omega \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin k\omega d\omega \quad (k = 1, 2, \dots)$$

y su serie de Fourier es la serie infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) \quad (\text{A.1.2.1})$$

note que siempre $b_0=0$.

En efecto la serie (A.1.2.1) es la serie de Fourier de f y se denotará como sigue

$$f(\omega) \approx \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) \quad (\text{A.1.2.2})$$

Si f es absolutamente continua sobre $[0, 2\pi]$ uno puede encontrar los coeficientes de Fourier de f usando integración por partes. Los resultados de estos cálculos pueden ser formulados por los siguientes dos afirmaciones.

Si f es una función absolutamente continua sobre $[0, 2\pi]$ tal que $f(0)=f(2\pi)$ y si f tiene la serie de Fourier $1, \cos w, \sin w, \cos 2w, \sin 2w \dots$ entonces:

$$f' \approx \sum_{k=0}^{\infty} (kb_k \cos k\omega - ka_k \sin k\omega) \quad (\text{A.1.2.3})$$

La definición de armónicos esféricos puede ser motivado por las siguientes consideraciones. Sustituimos

$$\cos \omega = x \quad \sin \omega = x_2 \quad (\text{A.1.2.4})$$

y usando las bien conocidas formulas para $\cos n\omega$ y $\sin n\omega$ podemos escribir:

$$\cos n\omega = \binom{n}{0} X_1^n X_2^0 - \binom{n}{2} X_1^{n-2} X_2^2 + \binom{n}{4} X_1^{n-4} X_2^4 + \dots \quad (\text{A.1.2.5})$$

$$\sin n\omega = \binom{n}{1} X_1^{n-1} X_2^1 - \binom{n}{3} X_1^{n-3} X_2^3 + \binom{n}{5} X_1^4 \quad (\text{A.1.2.6})$$

Un polinomio p se dirá armónico si es homogéneo y $\Delta p = 0$. Fácilmente se ve que las expresiones (A.1.2.5) y (A.1.2.6) son polinomios armónicos y la expresión:

$$a \cos n\omega + b \sin n\omega \quad (\text{A.1.2.7})$$

es la restricción de un polinomio armónico en S' .

Por otra parte si $f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^n C_i X_1^{n-i} X_2^i$ es un polinomio armónico de grado n . Entonces

la condición $\Delta p = 0$ trae como consecuencia la fórmula

$$C_{i+2} = -\frac{(n-i)(n-i-1)}{(i+1)(i+2)} C_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-2)$$

tomando $C_0=1$ y $C_1=0$ obtenemos $C_{2j} = (-1)^j \binom{n}{2j}$ $C_{2j+1}=0$

y tomando $C_0=0$ y $C_1=1$ obtenemos $C_{2j+1} = (-1)^j \binom{n}{2j+1}$ $C_{2j}=0$

Se sigue que $f(x_1, x_2)$ es una combinación lineal de los polinomios (A.1.2.5) y (A.1.2.6) y la restricción de f a S' es de la forma (A.1.2.7)

Proposición: Cada polinomio armónico en dos variables x_1, x_2 de grado n_1 , si se restringe al círculo unitario por la parametrización (A.1.2.4) es de la forma (A.1.2.7) y cualquier expresión de esta clase es la restricción de tal polinomio.

Esta proposición sugiere la posibilidad de construir una teoría de funciones que son referidas sobre (S^{d-1}) análogamente como las expresiones $a \cos n\omega + b \sin n\omega$ son definidas sobre S' . Esto sugiere la siguiente definición:

Definición (A1): Un armónico esférico de dimensión n es la restricción a S^{d-1} de un polinomio armónico en n variables.

Frecuentemente en lugar de armónico esférico simplemente decimos armónico, ejemplos obvios de armónicos de dimensión n son las restricciones respectivas a S^{d-1} de las funciones constantes o las funciones lineales $C_1X_1+C_2X_2+\dots+C_nX_n$. Si f es un polinomio en X_1, X_2, \dots, X_d usualmente escribimos $f(x)$ con $x \in E^n$ mas que $f(x_1, \dots, x_n)$.

Será conveniente ahora introducir varios espacios de funciones:

V_n^d : El espacio de todos los polinomios homogéneos de grado n en d variables.

L_n^d : El espacio de todos los polinomios armónicos de grado n en d variables.

H_n^d : El espacio de todos los armónicos esféricos de dimensión d que son obtenidos como restricciones a S^{d-1} polinomios de L_n^d .

H : El espacio de todas las sumas finitas de armónicos esféricos de dimensión d .

A.1.3 Ortogonalidad, completos y expansión en series

Como lo sugieren las propiedades de las series trigonométricas de Fourier, uno puede esperar que los esféricos armónicos tengan ciertas propiedades de ortogonalidad como lo menciona el siguiente resultado.

Teorema 1: Si $G \in H_m^d$ y $m \neq n$ entonces G y H son ortogonales.

Demostración: Si G^ϱ y H^ϱ son los polinomios armónicos respectivos de grado m y n correspondientes a G y H , las derivadas direccionales en la dirección de u de G^ϱ y H^ϱ están dadas por

$$D_u(G^\varrho) = \left(\frac{\partial G(tu)}{\partial t} \right)_{t=1} = mG(u), D_u(H^\varrho) = \left(\frac{\partial H^\varrho(tu)}{\partial t} \right)_{t=1} = nH(u)$$

Consecuentemente la fórmula de Green y el efecto o hecho que $\Delta G^\varrho = \Delta H^\varrho = 0$, ya que la conclusión deseada es $\int_{S^{d-1}} G(u)H(u)d\sigma(u)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m-n} \int_{S^{d-1}} (D_u(G^\varrho)H^\varrho(u) - D_u(H^\varrho)G^\varrho(u))d\sigma(u) \\ &= \frac{1}{m-n} \int_{B^d} (G^\varrho(x)\Delta H^\varrho(x) - H^\varrho(x)\Delta G^\varrho(x))dx = 0. \end{aligned}$$

ya que cualquier $H \in H_k^d$ con $k \neq 0$ es ortogonal al armónico 1 el siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema

Corolario 1

$$\text{Si } H \in H_n^d \text{ y } n \neq 0, \text{ entonces } \int_{S^{d-1}} H(u)d\sigma(u) = 0 \quad (\text{A.1.3.1})$$

Lema 1 Si $u=(u_1, \dots, u_d) \in S^{d-1}$ entonces cada u_k , considerado como una función de u , es un armónico esférico d-dimensional de orden 1, y las funciones u_1, \dots, u_d forman una base

ortogonal de H_1^d . Aquí cada armónico esférico de orden 1 puede ser escrito únicamente en la forma

$$a_1 u_1 + \dots + a_d u_d = a \cdot u$$

además

$$\|u_i\|^2 = k_d. \quad (\text{A.1.3.2})$$

Lema 2 Para cada polinomio homogéneo f de grado n en x_1, \dots, x_d existen polinomiales armónicos con p_n, p_{n-2}, \dots en x_1, \dots, x_d con p_i teniendo grado i , tal que

$$f(x) = p_n(x) + |x|^2 p_{n-2}(x) + |x|^4 p_{n-4}(x) + \dots \quad (\text{A.1.3.3})$$

Corolario 2 Si g es un polinomio de grado n en d variables hay armónicos esféricos $H_i \in H_i^d$ ($i = 0, \dots, n$) tal que

$$\hat{g} = H_0 + H_1 + \dots + H_n$$

Corolario 3 Sea F una función continua sobre S^{d-1} para cada $\epsilon > 0$ existen armónicos esféricos F_1, \dots, F_k tal que $F_i \in H_i^d$ y para toda $u \in S^{d-1}$

$$\left| F(u) - \sum_{i=0}^k F_i(u) \right| < \epsilon.$$

Además, si $G \in L_2(S^{d-1})$ existen armónicos esféricos G_1, G_2, \dots, G_m tal que

$$\left\| G - \sum_{i=0}^m G_i \right\| < \epsilon$$

Teorema 2: Cada sucesión estándar de armónicos esféricos es completa.

Demostración: Sea H_1, H_2, \dots una sucesión estándar de armónicos d -dimensionales, y sea F

una función de $L_2(S^{d-1})$ con la expansión armónica $F \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j$

La segunda desigualdad del corolario 3 muestra que para cada $\epsilon > 0$ existe una suma, digamos L , de armónicos tal que $\|F - L\| < \epsilon$. Sea n el orden mayor de armónicos apareciendo en L . De acuerdo al lema 1.1.1 las sumas paralelas de la expansión armónica provee la mejor L_2 aproximación y se sigue que

$$\left\| F - \sum_{j=0}^n c_j H_j \right\| < \epsilon$$

Entonces para cada $F \in S^{d-1}$ la correspondiente serie de Fourier converge hacia F , y esto es como la completas queda definida.

Teorema 3: Sea H_1, H_2, \dots una sucesión estándar de armónicos esféricos d -dimensionales y asumimos que $F \in L_2(S^{d-1})$. Si

$$F \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j$$

entonces

$$\|F\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 \|H_j\|^2 \quad (\text{A.1.3.4})$$

y si

$$F \approx \sum_{n=0}^{\infty} Q_n$$

es la expansión armónica condensada de F , entonces

$$\|F\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Q_n\|^2 \quad (\text{A.1.3.5})$$

más generalmente, si $F, G \in L_2(S^{d-1})$ y

$$F \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j, \quad G \approx \sum_{j=0}^{\infty} d_j H_j,$$

entonces

$$\langle F, G \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} c_j d_j \|H_j\|^2 \quad (\text{A.1.3.6})$$

y si

$$F \approx \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \qquad G \approx \sum_{n=0}^{\infty} R_n$$

son las correspondientes expansiones armónicas condensadas, entonces

$$\langle F, G \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Q_n, R_n \rangle \qquad (A.1.3.7)$$

Demostración: La validez de (A.1.3.4) y (A.1.3.6) se nota fácilmente si se revisa la sección 2.3 de esta tesis, para espacios de dimensión infinita, si se requiere de mayor detalle, ver página 3 de [6], y (A.1.3.7) sigue inmediatamente de (A.1.3.5) si esta relación es aplicada a F , G y $F+G$. Entonces, solo (A.1.3.5) falta ser mostrada. Pero si (en la notación introducida arriba) $Q_n = \sum_{X(H_j)=n} c_j H_j$, entonces $\|Q_n\|^2 = \sum_{X(H_j)=n} c_j^2 \|H_j\|^2$ y (A.1.3.5) sigue de (A.1.3.4).

Ambas (A.1.3.4) y (A.1.3.5) serán referenciadas como ecuaciones de Parseval¹¹ y (A.1.3.6) y (A.1.3.7) como ecuaciones Parseval generalizadas. Como ya se remarcó en conexión con las series de Fourier trigonométricas, una consecuencia importante de las ecuaciones de Parseval es que las funciones continuas sobre S^{d-1} son únicamente determinadas por su expansiones armónicas.

Teorema 4. Si $H \in H_n^d$, entonces: $\Delta_0 H = -n(n+d-2)H$. Además, si F es una función sobre S^{d-1} tal que $\Delta_0 F$ existe y es continuo y si F tiene la expansión armónica

$$F \approx \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j$$

entonces

$$\Delta_0 F \approx -\sum_0^{\infty} n_j (n_j + d - 2) c_j H_j$$

¹¹ la ecuación de Parseval es $\|F\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \|H_i\|^2$

Donde n_j denota el orden de H_j . Similarmente si F tiene la expansión armónica condensada

$$F \approx \sum_{j=0}^{\infty} Q_n$$

entonces

$$\Delta_0 F \approx -\sum_0^{\infty} n_j (n_j + d - 2) Q_n$$

Mas generalmente, si $k \geq 0$ y Δ_0^k denota que el operador beltrami es k veces iterado y si

$$\Delta_0^k F \text{ existe y es continuo, entonces } \Delta_0^k F \approx -\sum_0^{\infty} n_j (n_j + d - 2) c_j H_j$$

y

$$\Delta_0^k F \approx (-1)^k \sum_0^{\infty} n_j (n_j + d - 2) Q_n.$$

A.1.4 Polinomios de Legendre

Para el propósito de establecer estimados explícitos y como una herramienta para ir más allá en resultados sobre armónicos esféricos, introducimos una clase de polinomios que son de dimensión más alta de los polinomios clásicos de Legendre. Para hacer esto de manera más eficiente primero se prueban dos lemas:

Lema 3 Sea H un subespacio lineal de H_n^d que es invariante bajo O_+^d y tiene dimensión al menos 1. Además, asumimos que ya sea que $d \geq 3$, o $d=2$ y $H = H_n^2$. Entonces existe una función real valuada Q sobre $[-1,1]$ que no es idénticamente cero y que tiene la siguiente propiedad

Si H_1, \dots, H_m es cualquier base ortogonormal de H entonces para toda $u, v \in S^{d-1}$

$$H_1(u)H_1(v) + \dots + H_m(u)H_m(v) = Q(u \cdot v) \quad (\text{A.1.4.1})$$

Además, si $d = 2$ entonces Q es un polinomio de grado n , normalmente

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \frac{1}{\pi} \cos(n \cos^{-1} t) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\binom{n}{0} t^n (1-t^2)^0 - \binom{n}{2} t^{n-2} + \dots \right) \\
 &\text{y } Q(t) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{si } n=0
 \end{aligned} \tag{A.1.4.2}$$

Demostración: Sea H_1, \dots, H_m y H'_1, \dots, H'_m dos bases ortonormales de H y sea

$$\sum_{i=1}^m H_i(u) H_i(v) = F(u \cdot v) \tag{A.1.4.3}$$

y

$$\sum_{i=1}^m H'_i(u) H'_i(v) = F'(u, v)$$

Primero mostramos que $F = F'$. Claramente, si $\mathbf{H} \in H$, entonces

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^m a_i H_i, \quad a_i = \langle \mathbf{H}, H_i \rangle$$

y

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^m b_i H'_i, \quad b_i = \langle \mathbf{H}, H'_i \rangle$$

Se sigue que para un $v \in S^{d-1}$

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{H}(u), F(u, v) - F'(u, v) \rangle &= \left\langle \mathbf{H}(u), \sum_{i=1}^m \left(H_i(u) H_i(v) - H'_i(u) H'_i(v) \right) \right\rangle \\
 &= \sum_{i=1}^m a_i H_i(v) - \sum_{i=1}^m b_i H'_i(v) = 0
 \end{aligned}$$

Escogiendo $\mathbf{H}(u) = F(u, v) - F'(u, v)$ uno deduce que para cualquier $v \in S^{d-1}$

$$\|F(u, v) - F'(u, v)\| = 0$$

lo cual en vista de la continuidad de F y F' , implica que $F = F'$ consecuentemente, $F(u,v)$ definida por (A.1.4.3) no depende de la base ortonormal especial H_1, \dots, H_m . En particular, si $p \in O_+^d$, entonces la proposición 3.2.4 página 69 en [6] muestra que uno puede usar las bases pH_1, \dots, pH_m . Esto muestra que

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \sum_{i=1}^m \left((pH_i)(u) \right) \left((pH_i)(v) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m H_i(p^{-1}u) H_i(p^{-1}v) \\ &= F((p^{-1}u), (p^{-1}v)). \end{aligned} \quad (\text{A.1.4.4})$$

Se asume ahora que $d \geq 3$. Entonces, si $u, v \in S^{d-1}$ están dados, entonces obviamente existe un $p \in O_+^d$ tal que $p^{-1}u = e_d$ y $p^{-1}v = (0, \dots, 0, \sqrt{1 - (u \cdot v)^2}, u \cdot v)$ (donde el signo de la raíz cuadrada indica la raíz positiva). Aquí, (A.1.4.4) muestra que la función $Q(t)$ en (A.1.4.1) puede ser definida por:

$$Q(t) = F(e_d(0, \dots, 0, \sqrt{1-t^2}, t)).$$

Para probar que Q no puede ser idénticamente cero es suficiente señalar que hay un $w \in S^{d-1}$ con $H_1(w) \neq 0$ y que (A.1.4.1) con $u = v = w$ muestra que $Q(1) > 0$.

Si $d=2$ y $H = H_n^2$, entonces para $n=0$ y una base ortonormal de H_0^2 es obviamente $H_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ y se sigue que en este caso $Q(t) = 1/2\pi$. Si $n \geq 1$ uno puede colocar $u = (\cos w, \sin w)$ y escoger

$$H_1(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nw \quad H_2(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nw$$

Como una base ortonormal de H_n^2 . Entonces si escribimos $v = (\cos \psi, \sin \psi)$ es evidente que

$$H_1(u)H_1(v) + H_2(u)H_2(v) = \frac{1}{\pi} (\cos nw \cos n\psi + \sin nw \sin n\psi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \cos(n(w - \psi)) \\
&= \frac{1}{\pi} \cos(n \cos^{-1}(u \cdot v))
\end{aligned}$$

La segunda igualdad en (A.1.4.2) se sigue fácilmente de (A.1.2.5) y es también obvio que el grado del polinomio en (A.1.4.2) es n . Estos polinomios normalizados nos dejan el coeficiente 1, son llamados los polinomios de Chebyshev.

Si $\rho \in E^d$ dejamos que $O_+^d(p)$ denote el grupo de todo $\rho \in O_+^d$ con $\rho p = p$. El lema siguiente establece una caracterización útil de armónicos que son invariantes bajo el grupo $O_+^d(e_d)$.

Lema 4. Asumimos que $d \geq 3$. Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ y \tilde{x} denota el vector $(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)$ y $T_n(x)$ sea el polinomio

$$T_n(x) = x_d^n + a_2 x_d^{n-2} |\tilde{x}|^2 + a_4 x_d^{n-4} |\tilde{x}|^4 + \dots,$$

donde

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k+1)}{2^k k! (d-1)(d+1)(d+3)\dots(d+2k-3)} \quad (\text{A.1.4.5})$$

Entonces, una función H sobre S^{d-1} pertenece a H_n^d y es invariante sobre $O_+^d(e_d)$ si y solo si

$$H(u) = c \hat{T}_n(u) \quad (\text{A.1.4.6})$$

con c no dependiente de u .

Demostración: Se asume primero que $\mathbf{H} \in H_n^d$ y que \mathbf{H} es invariante sobre $O_+^d(e)$. Es obvio que el polinomio armónico $H^Q(x)$ correspondiente a H puede ser escrito únicamente de la forma

$$H^Q(x) = \sum_{j=0}^n x_d^{n-j} p_j(\tilde{x}) \quad (\text{A.1.4.7})$$

donde p_j denota un polinomio homogéneo en x_1, \dots, x_{d-1} de grado j . Asumimos que H , y por lo tanto H^Q , es invariante bajo $O_+^d(e_d)$ se sigue que cada p_j es también invariante bajo $O_+^d(e_d)$. Sea que haya un $\rho^{-1} \in O_+^d(e_d)$ que transforma a \bar{x} en $(|\bar{x}|, 0, \dots, 0)$. Tomando en cuenta que p_j es homogéneo de grado j se deduce que $p_j(\bar{x})$ debe ser un múltiple de $(\bar{x})^j$. Pero como es un polinomio se sigue además que j debe ser uniforme, se dice $j = 2k$. Por lo tanto (A.1.4.7) puede ser reescrito como

$$H^Q(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{2k} x_d^{n-2k} |\bar{x}|^{2k}$$

(donde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota el mayor entero que no excede $n/2$). Para determinar los coeficientes c_{2k} utilizamos el hecho de que $H^Q(x)$ es armónico y por lo tanto

$$\Delta H^Q(x) = 0 \tag{A.1.4.8}$$

Observando que $\Delta |\bar{x}|^{2k} = 2k(d+2k-3)|\bar{x}|^{2(k-1)}$ encontramos

$$\begin{aligned} \Delta H^Q(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_{2k} \left((n-2k)(n-2k-1)x_d^{n-2k-2} |\bar{x}|^{2k} \right. \\ &\quad \left. + 2k(d+2k-3)x_d^{n-2k} |\bar{x}|^{2k-2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left((n-2k)(n-2k-1)c_{2k} + 2(k+1)(d+2k-1)c_{2k+2} \right) x_d^{n-2k-2} |\bar{x}|^{2k} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (A.1.4.8) es equivalente a

$$c_{2k+2} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(d+2k-1)} c_{2k}.$$

Esta relación de repetición implica que $C_{2k} = c_0 a_{2k}$ con a_{2k} especificado por (A.1.4.5), y sigue que (A.1.4.6) con $c = c_0$.

Si, inversamente, H es de la forma (A.1.4.6), entonces (A.1.4.5) implica que (A.1.4.8), y por lo tanto que $\mathbf{H} \in H_n^d$, y es obvio de (A.1.4.6) que H tiene la característica pertinente de la invariación.

Los dos lemas anteriores permiten demostrar que el siguiente teorema proporciona información adicional sobre la función Q en el lema 3, y conduce a la definición de los polinomios de Legendre.

Teorema 5: Si son dados $d \geq 2$ y $n \geq 0$, existe exactamente un polinomio $P_n^d(t)$ con la siguiente característica: Si H_1, \dots, H_N es cualquier base ortonormal de H_n^d , entonces

$$\sum_{i=1}^N H_i(u)H_i(v) = \frac{N}{\sigma_d} P_n^d(u \cdot v). \quad (\text{A.1.4.9})$$

Además, el grado de P_n^d es n y para cualquier $v \in S^{d-1}$ la función $P_n^d(u \cdot v)$ es un d -dimensional armónico esférico de orden n .

Demostración. El lema 3 en el caso $H = H_n^d$ muestra que, independientemente de la selección de las bases H_1, \dots, H_N de H_n^d , tenemos

$$\sum_{i=1}^N H_i(u)H_i(v) = Q(u \cdot v) \quad (\text{A.1.4.10})$$

con una función Q que no es idénticamente 0. Si $d = 2$ el mismo lema muestra que Q es actualmente un polinomio de grado n . Así, se puede proceder bajo la suposición que $d \geq 3$. Colocando en (A.1.4.10) $v = e_d$ encontramos

$$\sum_{i=1}^N H_i(u)H_i(e_d) = Q(u \cdot e_d),$$

donde $Q(u \cdot e_d)$ es un armónico esférico de H_n^d el cuál es invariante bajo $O_+^d(e_d)$ (puesto que para cualquier $\rho \in O_+^d(e_d)$ tiene $\rho Q(u \cdot e_d) = Q(\rho^{-1}u \cdot e_d) = Q(u \cdot \rho e_d) = Q(u \cdot e_d)$).

Escogiendo $u = (0, \dots, 0, \sqrt{1-t^2}, t)$ se puede aplicar el Lema 4 para deducir que

$$Q(t) = Q(u \cdot e_d) = cT(u) = c(t^n + a_2 t^{n-2}(1-t^2) + \dots).$$

El coeficiente principal de $Q(t)$ es $c(1 - a_2 + a_4 - + \dots)$. Como $Q \neq 0$ implica $c \neq 0$, y como (A.1.4.5) muestras que $c(1 - a_2 + a_4 - + \dots > 0)$ se sigue que Q tiene grado n . Como también es evidente de el lado izquierdo de (A.1.4.9) que $P(u \cdot v)$ es, para v fija, un armónico de la clase especificada, el polinomio $P(t) = (\sigma_d / N)Q(t)$ tiene las características del teorema indicado.

El polinomio $P_n^d(t)$ es llamado el *polinomio de Legendre* de dimensión d y de grado (orden) n .

7. BIBLIOGRAFIA:

1. Alfeld, P., M. Neamtu, and L. L. Schumaker, Fitting scattered data on sphere-like surfaces using spherical splines, J. Comput. Appl. Math. 73 (1996), 5-43.
2. Clemens, H., Introduction to Hodge Theory, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1998.
3. Eubank, R.L. and R.F. Gunst, Diagnostics for penalized least-squares estimators, Statist. Probab. Lett 4 (1986), 265-272.
4. Von Golitschek, M., and L. L. Schumaker, Data fitting by penalized least squares, in Algorithms for Approximation II, J.C. Mason and M.G. Cox (eds), Chapman & Hall, London, 1990, 210-227.
5. Good, P. I., Resampling Methods. A Practical Guide to Data Analysis, Birkhäuser Boston, 1999.
6. Groemer, H., Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics, Cambridge University Press, New York, 1996.
7. Lee, J. M., Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature, Springer Verlag, New York, 1997.
8. Martínez-Morales, J. L., Generalized Legendre series and the fundamental solution of the Laplacian on the n -sphere, preprint.
9. Martínez-Morales, J. L., The Kernel Theorem of Hillbert-Schmidt operators, preprint. Disponible en www.matcuer.unam.mx/~martinez/Articulos_publicados_o_sometidos/Kernel.ps.
10. Nowark, R.D., Penalized least squares estimation of Volterra filters and higher order statistics, IEEE Trans. Signal Process 46 (1998), 419-428.
11. Omori, H., Infinite-Dimensional Lie Groups, American Mathematical Society, Providence, 1997.
12. Seeley, R.T., Complex powers of an elliptic operator, A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. 10 (1967), 288-307. Corrections in: The resolvent of an elliptic boundary problem. Am. J. Math. 91, 917-919 (1969).
13. Sun, W., A penalized least squares method for image reconstruction and its stability analysis, Information 31 (2000), 43-49.

14. Wahba, G., Spline interpolation and smoothing on the sphere, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **2** (1981), 5-16.
15. Wahba, G., Errata: Spline interpolation and smoothing on the sphere, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **3** (1982), 385-386.
16. Wahba, G., Vector splines on the sphere, with application to the estimation of vorticity and divergence from discrete, noisy data, in *Multivariate Approximation Theory II*, W. Schempp and K. Zeller, (eds.), Birkhäuser, Basel, 1982, 407-429.
17. Wahba, G., Surface fitting with scattered noisy data on Euclidean d-space and on the sphere, Rocky Mountain J. Math. **14** (1984), 281-299.
18. Weyrich, N., Bivariate spline approximation by penalized least squares, in *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, II*, T. Lyche and L. Schumaker (eds.), Academic Press, Boston, 1992, 607-614.
19. Bishop L.,Richard and Goldberg I., Samuel, Tensor Analysis on Manifolds, Dover Publications, Inc., 1980.
20. Boothby, William M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, 1975.
21. Lee, John M., Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag New York, Inc, 2003.
22. Davis, Philip J., Interpolation & Approximation, Dover Publications, Inc., New York, 1975.
23. López, Jesús E., Principio de pseudo-optimalidad en la resolución de problemas mal-planteados por el método de regularización de Tikhonov, UNAM, México, D, F, 1988.
24. Lynn, Loomis H. and Sternberg, Shlomo, Advanced Calculus, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1968.
25. Luenberger, David G., Optimization by Vector Space Methods, Stanford, California, John Wiley & Sons, Inc. 1968.
26. David Kincaid, Ward Cheney, Second Edition Numerical Analysis, The University of Texas at Austin. Brooks/Cole publishing Companing.
27. Mendoza Carlos, (Octubre ,1984). Smoothing Directional Data, Tesis presentada a la facultad de la Universidad de Princeton para el grado de Doctor en Filosofía.

28. Wu Limin, (2003) A parameter choice method for Tikhonov Regularization, Vol. 16, Electronic Transactions on Numerical Analysis, pp 107-128.
29. Bardsley Johnathan, (2005) A nonnegatively constrained trust region algorithm for the restoration of images with an unknown blur, Vol. 20, Electronic Transactions on Numerical Analysis, pp 139-153.