



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CONTROL DIFUSO ROBUSTO ADAPTABLE  
DE UNA CLASE DE SISTEMAS NO LINEALES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

**DANIEL VÉLEZ DÍAZ**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. YU TANG XU

MÉXICO. 2006





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A Dios, quien nos permitirá volver a verte... papá.*

# Agradecimientos

Al Dr. Yu Tang Xu, mi tutor y asesor de esta tesis, por sus sugerencias y su constante supervisión durante las investigaciones que soportan este trabajo; también, le agradezco su paciencia y sus consejos para formarme, su guía para lograr los objetivos y, sobre todo, el ejemplo de una persona organizada, disciplinada y cumplida.

A a los Drs. Marco Antonio Arteaga Pérez y Luis Álvarez-Icaza Longoria por su permanente supervisión de todas mis actividades académicas, como miembros de mi comité doctoral; también, mi agradecimiento a los Drs. Gerardo Espinosa Pérez y Leonid Freedman, por sus comentarios de aliento durante mi formación en la UNAM.

A los Drs. Yu Wen Liu, Hector Benítez Pérez y Javier Vitela Escamilla, por sus valiosos comentarios sobre esta tesis; en forma muy especial, mi agradecimiento al Dr. Jorge Samuel Benítez Read, a quien siempre le agradeceré el haberme iniciado en la teoría del control difuso, su paciencia y apoyo y, sobre todo, su amistad invaluable.

A mis padres, Gustavo y Celia, y a mis hermanos, Gustavo, Leticia y Miguel Ángel, por todo su amor y comentarios de ánimo durante el desarrollo de este trabajo.

Muy especialmente, deseo agradecer a Irma, mi esposa, todo su apoyo y enorme paciencia; y a mis hijas: Dánae, Danya y Daniela, su comprensión durante toda mi formación doctoral.

Finalmente, agradezco los apoyos económicos recibidos de la UNAM, a través de los proyectos PAPIIT IN104700 y PAPIIT IN110402, y del CONACyT, a través del Proyecto de Investigación 36154-A y de su programa de becas para realizar estudios de posgrado.

Ciudad Universitaria, México  
Abril, 2005.

Daniel Vélez Díaz

# Tabla de Contenido

<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Planteamiento del Problema . . . . .	5
1.4. Objetivo y Contribuciones de la Tesis . . . . .	7
1.5. Organización de la Tesis . . . . .	9
<b>2. Preliminares: Sistemas de Lógica Difusa</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Conceptos Básicos . . . . .	12
2.2.1. Conjuntos Difusos . . . . .	12
2.2.2. Relaciones Difusas . . . . .	14
2.3. Razonamiento Aproximado . . . . .	16
2.4. Sistemas de Lógica Difusa . . . . .	20
2.5. Aproximación Funcional . . . . .	24
2.5.1. Aproximador Universal . . . . .	24
2.5.2. Funciones Base Difusas . . . . .	24
2.5.3. Aproximación de una Función . . . . .	25
<b>3. Control Difuso Robusto Adaptable de Sistemas Lagrangeanos</b>	<b>27</b>
3.1. Introducción . . . . .	27

3.2.	Descripción del Sistema . . . . .	28
3.3.	Diseño de Control . . . . .	30
3.3.1.	Ecuaciones de error . . . . .	30
3.3.2.	Ley de control . . . . .	32
3.3.3.	Análisis de estabilidad y comportamiento. . . . .	33
3.3.4.	Estimación de las cotas de incertidumbre . . . . .	35
3.4.	Resultados de las Simulaciones . . . . .	38
3.5.	Comentarios . . . . .	49
<b>4.</b>	<b>Control Difuso Robusto Adaptable para una Clase de Sistemas No Lineales Inciertos</b>	<b>51</b>
4.1.	Introducción . . . . .	51
4.2.	Planteamiento del Problema . . . . .	52
4.3.	Diseño de Control . . . . .	52
4.3.1.	Ecuaciones de error . . . . .	52
4.3.2.	Ley de control . . . . .	54
4.3.3.	Análisis de estabilidad y comportamiento . . . . .	56
4.3.4.	Estimación de las cotas de incertidumbre . . . . .	59
4.4.	Resultados de las Simulaciones . . . . .	62
4.5.	Comentarios . . . . .	66
<b>5.</b>	<b>Control Difuso Adaptable Robusto para una Clase de Sistemas No Lineales Inciertos</b>	<b>67</b>
5.1.	Introducción . . . . .	67
5.2.	Planteamiento del problema . . . . .	68
5.3.	Diseño del Control . . . . .	69
5.3.1.	Aproximación de $f(\mathbf{x})$ y $b(\mathbf{x})$ . . . . .	69
5.3.2.	Ley de control . . . . .	69
5.3.3.	Ley de adaptación con proyección . . . . .	70
5.3.4.	Análisis de estabilidad y comportamiento . . . . .	72
5.3.5.	Estimación de la cota de incertidumbre . . . . .	75
5.4.	Resultados de las Simulaciones . . . . .	78
5.5.	Comentarios . . . . .	81
<b>6.</b>	<b>Control Difuso Directo para una Clase de Sistemas no Lineales</b>	<b>84</b>
6.1.	Introducción . . . . .	84
6.2.	Planteamiento del Problema . . . . .	85
6.2.1.	Descripción del sistema . . . . .	85
6.2.2.	Diseño de control para sistemas no lineales conocidos . . . . .	85

6.3. Diseño de Control . . . . .	87
6.3.1. Ley de control . . . . .	87
6.3.2. Análisis de Estabilidad . . . . .	89
6.3.3. Retroalimentación de salida . . . . .	92
6.3.4. Procedimiento de diseño . . . . .	92
6.4. Resultados de las Simulaciones . . . . .	93
6.5. Comentarios . . . . .	98
<b>Conclusiones</b>	<b>99</b>
<b>Trabajo Futuro</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

# Índice de figuras

3.1.	Sin compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada $q_d$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Velocidad angular deseada $\dot{q}_d$ (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor $\dot{q}$ (línea sólida). (c) Entrada de control $u$ . . . . .	42
3.2.	Con compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada $q_d$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Velocidad angular deseada $\dot{q}_d$ (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor $\dot{q}$ (línea sólida). (c) Entrada de control $u$ . . . . .	43
3.3.	(a) Error del seguimiento de la posición $\tilde{q}$ . (b) Torque de la fricción $F$ . (c) Señal de compensación $(\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^e)\mathbf{W}(\mathbf{x}) + u_c$ . . . . .	44
3.4.	Estimación de las cotas de error. (a) Cota del error de la matriz de pesos $\hat{\rho}_f$ . (b) Cota del error de reconstrucción de la función $\hat{\kappa}_f$ . . . . .	45
3.5.	Sin compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada $q_d$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Entrada de control $u$ . . . . .	46
3.6.	Con compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada $q_d$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Entrada de control $u$ . . . . .	47
3.7.	Estimación de las cotas de error. (a) Cota del error de la matriz de pesos $\hat{\rho}_f$ . (b) Cota del error de reconstrucción de la función $\hat{\kappa}_f$ . . . . .	48



4.1.	Control difuso robusto. (a) Señal de referencia $q_r$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Velocidad de referencia $\dot{q}_r$ (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor $\dot{q}$ (línea sólida). (c) Entrada de control $u$ . . . . .	63
4.2.	La estimación de las cotas de incertidumbre. (a) Cota sobre el error de la matriz de pesos $\tilde{\mathbf{B}}_f$ . (b) Cota sobre el error de reconstrucción $\Delta f(\mathbf{x})$ . (c) Cota sobre el error de reconstrucción $\Delta b(\mathbf{x})$ . . . . .	64
4.3.	Control nominal. (a) Señal de referencia $q_r$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Velocidad de referencia $\dot{q}_r$ (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor $\dot{q}$ (línea sólida). (c) Entrada de control $u$ . . . . .	65
5.1.	(a) Señal de referencia $q_r$ (línea entrecortada) y la posición angular del rotor $q$ (línea sólida). (b) Derivada de la señal de referencia $\dot{q}_r$ (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor $\dot{q}$ (línea sólida). (c) Entrada de control $u$ . . . . .	79
5.2.	Error de seguimiento del controlador difuso adaptable robusto. (a) Comportamiento del error de seguimiento durante los primeros 15 <i>seg</i> . (b) Comportamiento del error de seguimiento después de los 8 <i>seg</i> . . .	80
5.3.	(a) Adaptación del parámetro $\hat{B}_{f1}$ . (b) Adaptación del parámetro $\hat{B}_{f2}$ . (c) Estimación de $\hat{k}_1$ de la cota de incertidumbre. . . . .	82
6.1.	La señal de referencia y sus derivadas. . . . .	95
6.2.	Control con retroalimentación de la salida del péndulo invertido. . . .	97

# Abstract

This work considers the problem of controlling a class of nonlinear systems to follow a reference trajectory in the presence of uncertainties. Fuzzy Logic Systems (FLS) are used to approximate the unknown nonlinear function of the system. Based on the *a priori* information, the premise part of the FLS as well as a nominal weight matrix are designed first and are fixed. A compensation signal to the weight matrix error is designed based on Lyapunov analysis. Exponential tracking (Chapters 3, 4, and 6) or asymptotical (Chapter 5) to the desired trajectory up to a uniformly ultimately bounded error is achieved with the proposed control. First, a mechanical system described by Euler-Lagrange equations is considered in Chapter 3. Then, the problem of controlling a class of nonlinear systems affine in control input is treated in Chapters 4 and 5. Chapter 4 presents a robust control where each uncertainty bound is estimated on-line, while Chapter 5 deals with the uncertainty by adapting the weight parameters on-line. Weight adaptation law with projection is used to approximate the unknown dynamics in a nonlinear system. Finally, a direct adaptive robust fuzzy control design for a class of nonlinear systems represented by input-output models to follow a reference trajectory in the presence of uncertainties is addressed. The effectiveness of each control is demonstrated through simulation and/or experimental results. The outcome also show that by incorporating *a priori* information about the system, the fuzzy logic control shows result good tracking behavior using a few fuzzy If-then rules.

# Resumen

Este trabajo de tesis considera el problema de controlar el seguimiento de una trayectoria de referencia, en presencia de incertidumbres, para una clase de sistemas no lineales. Los sistemas de lógica difusa o FLS (por sus siglas en inglés) se emplean para aproximar la función no lineal del sistema. Con base en información *a priori*, se diseña tanto la parte de la premisa del sistema de lógica difusa como la matriz de pesos nominal para posteriormente quedar fijos. Con base en análisis Lyapunov, se diseña una señal de compensación para el error de la matriz de pesos. Estos controladores logran el seguimiento exponencial (Capítulos 3, 4 y 6) o asintótico (Capítulo 5) de la trayectoria deseada, hasta lograr un error final acotado uniforme. Primero, en el Capítulo 3, se considera un sistema mecánico descrito por las ecuaciones de Euler-Lagrange, por lo que el problema de controlar una clase de sistemas no lineales afines en control se trata en los Capítulos 4 y 5. En el Capítulo 4 se presenta un control robusto donde cada cota de incertidumbre se estima en línea; mientras que en el Capítulo 5, la incertidumbre se trata con la adaptación en línea de los parámetros de pesos. Una ley de adaptación de los pesos, con proyección, se emplea para aproximar las dinámicas desconocidas en los sistemas no lineales. Finalmente, para una clase de sistemas representados por modelos entrada-salida, se presenta el diseño de un control difuso robusto adaptable directo para seguir una trayectoria de referencia en presencia de incertidumbres. La efectividad de cada control se demuestra con los resultados obtenidos a través de simulaciones y/o experimentos. Éstos también muestran un mejor desempeño cuando se incorpora información *a priori* sobre el sistema, a través de pocas reglas en los sistemas de lógica difusa.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Existen muchos sistemas complejos altamente no lineales y con características inciertas, las cuales son generalmente difíciles o imposibles de modelar matemáticamente en forma exacta, por lo que es inevitable la imprecisión en el modelo obtenido. En términos generales, la imprecisión puede surgir de la incertidumbre de la planta o de la selección de la representación simplificada de las dinámicas del sistema [31]. Aun si un modelo matemático detallado de la planta está disponible, éste puede ser de orden grande, lo cual conduce a un controlador complejo cuya implementación puede ser costosa [15].

El control adaptable y el control robusto son técnicas efectivas conocidas para el manejo de las incertidumbres. En principio, el control adaptable es superior al control robusto en el trato con las incertidumbres en los parámetros constantes o lentamente variables. Esto se debe a que un controlador adaptable mejora su rendimiento conforme el proceso de adaptación avanza, mientras que un controlador robusto simplemente intenta mantener un rendimiento consistente. El controlador robusto tiene

algunas características deseables que el controlador adaptable no tiene, tal como la habilidad para manejar las perturbaciones, la variación rápida de los parámetros y de las dinámicas no modeladas.

En el diseño del control robusto se considera el modelo nominal y alguna caracterización de las incertidumbres del modelo. El método de rediseño de Lyapunov, como se explica en [9, 17], se puede usar para lograr la estabilización robusta e introducir un amortiguamiento no lineal. Con esto garantizar el acotamiento de las trayectorias y la convergencia a un conjunto residual uniforme, cuyo “radio” puede ser arbitrariamente pequeño.

Los sistemas difusos pueden aproximar cierta clase de funciones, así como las redes neuronales artificiales [30, 52]. Particularmente, desde a principios de la década pasada, los sistemas difusos se utilizan como aproximadores de funciones continuas definidas en un conjunto compacto [3, 35, 45, 48]. En [48], la aproximación se presenta como una aproximación difusa parametrizada; mientras que en [35, 45], la salida de los aproximadores se presentan como una combinación lineal de funciones base difusas. Desde entonces, para los sistemas no lineales y conocidos en forma imprecisa se proponen varios esquemas de control difuso que emplean técnicas robustas [6, 7, 8, 14] o adaptables [36, 44, 51]. En ambas estrategias, la estabilidad en el sentido de Lyapunov se establece desde el diseño de la señal de control [14, 28, 44].

Un **controlador difuso adaptable**, que emplea un sistema de lógica difusa como aproximador de funciones, requiere de poco o nada de información *a priori* acerca de los parámetros desconocidos [28]; mientras que, usualmente, un **controlador difuso robusto** requiere de una estimación *a priori* razonable de las cotas de las incertidumbres [6, 7, 8]. La combinación de ambas técnicas en un sistema de control difuso

garantiza el acotamiento y la convergencia del error de seguimiento<sup>1</sup> [21], basado en la misma información que se requiere en un control adaptable común, pero la convergencia del error de seguimiento al conjunto residual es exponencial.

Dado que las incertidumbres son inevitables en los sistemas dinámicos no lineales, la principal motivación para la realización de esta tesis es el estudio del control adaptable y control robusto para su aplicación en sistemas no lineales inciertos y, con el empleo de los sistemas de lógica difusa para la aproximación de las funciones desconocidas en el modelo matemático, la obtención de convergencia asintótica del error de seguimiento a un conjunto residual.

## 1.2. Antecedentes

Desde la década pasada existe un gran interés por el estudio de controladores de sistemas no lineales inciertos. Para el desarrollo de éstos se emplean diferentes técnicas, ya sea en forma aislada o en forma conjunta, obteniendo desempeños con características deseables.

El trabajo presentado por Corless en [9] considera un sistema dinámico, para el cual se propone una clase de controladores con retroalimentación de estado. Esta clase de controladores garantiza que cada respuesta del sistema presenta un error de seguimiento final y uniformemente acotado en un conjunto residual.

En la mayoría de los esquemas de control existentes basados en aproximadores universales [14, 21, 28, 29, 30, 32, 44] y [20, 22, 25, 46, 49, 52] se logra la convergencia asintótica del error de seguimiento. También, en [23] y en [36], se propusieron dos controles adaptables de seguimiento, los cuales usan aproximadores universales (con

---

<sup>1</sup>El error de seguimiento define la diferencia entre la trayectoria deseada y la real.

red neuronal y con sistema de lógica difusa, respectivamente), con lo cual se logra la convergencia asintótica del error de seguimiento a un conjunto residual. Sin embargo, es importante obtener la convergencia exponencial, puesto que es más robusto con respecto a las dinámicas no modeladas y/o a las perturbaciones externas.

Por otra parte, la determinación de las cotas de incertidumbre no es un proceso simple. En [14], la cota de incertidumbre es una cantidad dependiente del estado, por lo que para su realización se necesita de parámetros como la cota superior en la matriz de inercia y las cotas sobre la cota de incertidumbre en cada uno de los conjuntos difusos, lo cual es difícil de conseguir. En [23] y [36], para reducir el error de aproximación se emplearon términos de compensación. Sin embargo en estos casos, la implementación de estos términos requiere de información sobre la cota del error de aproximación y sobre la cota de los pesos óptimos desconocidos del aproximador universal. Algunos esquemas de compensación se basan en un modelo de la incertidumbre (ver, *e.g.*, [26, 37]), lo cual genera una dependencia de la información acerca de las incertidumbres estructurales.

Son diversos los requerimientos de los esquemas de control. Por ejemplo, los controles adaptables que usan un aproximador universal, *i.e.*, [21, 32, 35, 45], requieren de una función conocida de acotamiento para las funciones no lineales involucradas en el sistema. Recientemente, en el control propuesto en [5, 14], la ganancia de control  $b(x)$  no es exactamente conocida, pero sí es acotada por una función continua conocida de  $x$ .

Un control robusto basado en su representación de espacio estado fue desarrollado

en [14] para manipuladores robóticos. Este sistema de control presenta una convergencia exponencial global a un conjunto residual. Sin embargo, transforma las ecuaciones Lagrangeanas en la forma de espacio estado de primer orden, por lo que las propiedades físicas, las cuales podrían ser utilizadas para facilitar el diseño, no se conservan.

Finalmente, Sanner y Slotine presentan en [30] un esquema de control para un seguimiento adaptable directo. Con el empleo de una red de funciones base radiales Gaussianas y la teoría de Lyapunov se consigue, respectivamente, compensar adaptablemente las no linealidades y determinar un mecanismo de ajuste de pesos estable. Motivados por este trabajo, Seshagiri y Khalil en [32] consideran, en la señal de control, las componentes relacionadas con el error de reconstrucción de la red que aproxima a cada función. Así, el empleo de control adaptable junto con el control robusto es posible tolerar errores de aproximación mayores, lo que resulta en el uso de redes de orden menor. Sin embargo, en estas propuestas es esencial el conocimiento de las cotas de los pesos para poder hacer proyección en la ley de adaptación.

### **1.3. Planteamiento del Problema**

A continuación se define el problema tratado en esta tesis en una forma general y se discuten algunas consideraciones importantes.



**Clases de sistemas a considerar.**

Inicialmente, se considera una clase de sistemas no lineales inciertos, los cuales serán expresados en la forma canónica

$$\dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad (1.1)$$

donde  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema y  $f, b \in \mathbb{R}$  son funciones de los estados.

Posteriormente, la clase de sistemas no lineales inciertos se presenta en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $y \in \mathbb{R}$  es la salida,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados del sistema,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control y  $\mathbf{f}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}$  son funciones de los estados.

**Problema.**

Sean  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}_d$  el vector de estados del sistema y el vector de estados deseado, respectivamente. El vector de error de seguimiento se define como

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d. \quad (1.3)$$

Para ambas clases de sistemas, (1.1) y (1.2), el problema es diseñar una ley de control  $u$  que asegure que el vector del error de seguimiento  $\tilde{\mathbf{x}}$  sea final y uniformemente acotado. Para lograr este objetivo, y dependiendo de la formulación específica del problema, se consideran algunas suposiciones. Para la clase de sistemas (1.1) se consideran las siguientes:

*Suposición 1.1.* El vector de estados  $\mathbf{x}$  es medible.

*Suposición 1.2.*  $f, b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones de  $\mathbf{x}$ , suaves y desconocidas.

*Suposición 1.3.*  $b(\mathbf{x}) \neq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Para la clase de sistemas (1.2), además de las Suposiciones 1.1 y 1.3, se consideran las siguientes:

*Suposición 1.4.*  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de  $\mathbf{x}$ , suave y desconocida.

*Suposición 1.5.*  $\mathbf{f}, \mathbf{b}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son funciones de  $\mathbf{x}$ , suaves y desconocidas.

*Suposición 1.6.* La planta (1.2) tiene orden relativo bien definido  $n$ .

### **Objetivo de control.**

El objetivo de control es lograr que el vector de estados  $\mathbf{x}$  del sistema (1.1) siga un vector de estados deseado  $\mathbf{x}_d$ . El objetivo de control para el sistema (1.2) es que la salida  $y$  siga una señal deseada  $y_d$ . Sobre la señal deseada, se hacen las siguientes suposiciones:

*Suposición 1.7.* El vector de estados deseado  $\mathbf{x}_d$  está acotado.

*Suposición 1.8.* La salida deseada  $y_d$  y sus derivadas están acotadas.

## **1.4. Objetivo y Contribuciones de la Tesis**

### **Objetivo.**

El propósito de esta tesis es presentar una serie de diseños sistemáticos de control difuso robusto adaptable para la clase de sistemas no lineales (1.1) ó (1.2), así como establecer la estabilidad del sistema en lazo cerrado y asegurar que el error de seguimiento tienda exponencialmente a un conjunto residual. Además, validar los resultados mediante simulación y/o experimentos.

**Contribuciones.**

- C1.** Desarrollo de un diseño de control difuso robusto basado en ecuaciones Lagrangeanas.
- C2.** Resultados experimentales obtenidos de la aplicación del control difuso robusto propuesto a un sistema mecánico.
- C3.** Diseño de un conjunto de leyes de adaptación para el control difuso robusto adaptable de sistemas no lineales inciertos.
- C4.** Desarrollo de un diseño de control difuso robusto usando adaptación directa.

*Comentario 1.1.* En las Contribuciones C1 y C2, el diseño no requiere la transformación en la forma de espacio estado de primer orden, por lo que se conservan las propiedades físicas del sistema, lo cual facilita el diseño del control (véase [38, 40]).

*Comentario 1.2.* Debido a la introducción de un estimador de las cotas de incertidumbre, no es necesaria la información *a priori* sobre estas cotas para la ejecución del controlador propuesto. Además, puesto que hay sólo dos parámetros estimados en línea, independientes del grado de libertad del sistema mecánico, la carga computacional es ligera (véase [40]).

*Comentario 1.3.* La Contribución C3 se aplica a sistemas no lineales inciertos, expresados en la forma canónica; por lo que, el control propuesto puede tratar con incertidumbres tanto en  $f(\mathbf{x})$  como en  $b(\mathbf{x})$  (véase [39, 42, 43]).

*Comentario 1.4.* En la Contribución C3, sólo se necesita la cota inferior constante sobre la ganancia de control  $b(\mathbf{x})$ . También, para su implementación, la cota del error de reconstrucción de la función no se asume conocida (véase [43]).

*Comentario 1.5.* La aproximación adaptable robusta seguida en C4, evita la necesidad del entrenamiento fuera de línea del aproximador universal. También, la carga computacional en línea, sobre la actualización del vector de parámetros del aproximador universal, se reduce al estimar sólo la cota de incertidumbre. Aún más importante, se logra que el seguimiento sea exponencial semiglobal hasta lograr un error finalmente acotado, lo cual provee robustez a las dinámicas no modeladas y/o a las perturbaciones externas.

## 1.5. Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se presentan algunos de los conocimientos fundamentales de los sistemas de lógica difusa, necesarios para la comprensión de los controladores desarrollados en esta tesis; desde una breve introducción de la teoría de conjuntos difusos hasta los sistemas de lógica difusa como aproximadores universales.

En el Capítulo 3 se considera el problema de controlar un sistema mecánico descrito por las ecuaciones de Euler-Lagrange, para ello se diseña una señal de compensación para el error de la matriz de pesos y una señal de compensación para reducir el error de seguimiento debido al error de reconstrucción de la función.

En el Capítulo 4 se considera el problema de controlar una clase de sistemas no lineales inciertos, expresados éstos en la forma canónica. Para este controlador, tanto  $f$  como  $b$  se consideran funciones desconocidas; por lo que, para éstas, se diseñan señales de compensación para la incertidumbre estructurada y para la incertidumbre no estructurada.

En el Capítulo 5 se considera el mismo problema del capítulo anterior; sin embargo, el controlador diseñado emplea la técnica de proyección para la adaptación de los

pesos.

En el Capítulo 6 se presenta el diseño de un control difuso robusto adaptable directo para una clase de sistemas no lineales representados por modelos entrada-salida para seguir una trayectoria de referencia en presencia de incertidumbres.

Para cada diseño de control propuesto, se muestran los resultados de las simulaciones; así como algunos comentarios al final de cada capítulo correspondiente.

Finalmente, se mencionan algunas de las líneas de investigación sobre las cuales el presente trabajo puede continuar.

# Capítulo 2

## Preliminares: Sistemas de Lógica Difusa

### 2.1. Introducción

Un Sistema de Lógica Difusa o FLS (por sus siglas en inglés) es, en general, cualquier sistema donde los dominios de sus variables (o al menos algunas de ellas) son estados representados por conjuntos difusos.

Los controladores difusos son controladores en los cuales están incorporados sistemas de lógica difusa. Un controlador de este tipo emplea una base de conocimientos expresada en términos de reglas de inferencia difusas relevantes y un generador de inferencias<sup>1</sup> apropiado para resolver un problema dado de control. Los controladores difusos son capaces de explotar el conocimiento del operador humano. El conocimiento del operador experto es difícil de expresar en términos precisos, pero se puede expresar fácilmente con una descripción lingüística que consiste en un conjunto de reglas de control que hacen uso de proposiciones difusas.

---

<sup>1</sup>También se conoce como máquina de inferencias.

## 2.2. Conceptos Básicos

### 2.2.1. Conjuntos Difusos

Sea  $X$  un conjunto universal y sea  $x$  cualquier elemento de éste.

**Definición 2.1.** Una *función de membresía*, se denota por  $\mu$ , es una función

$$\mu: X \rightarrow [0, 1], \quad (2.1)$$

que asigna un valor, llamado grado de membresía,  $\mu(x)$ , a cada elemento  $x$  de  $X$ .

**Definición 2.2.** Un *conjunto difuso*  $\mathcal{A}$  se define completamente en  $X$  por su función de membresía,  $\mu_{\mathcal{A}}$ , como

$$\mathcal{A} = \{(x, \mu_{\mathcal{A}}(x)) \mid x \in X, \mu_{\mathcal{A}}(x) \in [0, 1]\} . \quad (2.2)$$

Existe otra notación<sup>2</sup> para la función de membresía de un conjunto difuso, la cual es la misma que se emplea para denotar al conjunto difuso; esto es, la función  $\mu_{\mathcal{A}}$  que define al conjunto difuso  $\mathcal{A}$

$$\mu_{\mathcal{A}}: X \rightarrow [0, 1], \quad (2.3)$$

se denota por

$$\mathcal{A}: X \rightarrow [0, 1]. \quad (2.4)$$

Puesto que un conjunto difuso se define completa y únicamente por una función de membresía particular, en esta tesis, se emplea la segunda notación.

**Ejemplo 2.1.** *El conjunto difuso  $\mathcal{A}$  de forma Gaussiana se define por la siguiente función de membresía:*

$$\mathcal{A}(x) = \exp \left\{ - \left( \frac{x - c}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad (2.5)$$

---

<sup>2</sup>También muy empleada en la literatura [19].

donde  $x$  es elemento del dominio,  $c$  y  $\sigma$  son parámetros de la función.

**Ejemplo 2.2.** Un tipo particular de función de membresía se define como

$$\mathcal{A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x' \\ 0, & \text{si } x \neq x' , \end{cases} \quad (2.6)$$

la cual define al conjunto difuso singleton<sup>3</sup>.

**Definición 2.3.** Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto difuso definido en el conjunto universal  $X$ . El *Soporte* o *Conjunto Soporte* de  $\mathcal{A}$  es un conjunto denotado por  $\text{sop}(\mathcal{A})$  y se define como

$$\text{sop}(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mathcal{A}(x) > 0\} . \quad (2.7)$$

**Ejemplo 2.3.** Si  $\mathcal{A}$  es un conjunto difuso definido en el conjunto universal  $X = [-1, 1]$  por la función Gaussiana (2.5), entonces el  $\text{sop}(\mathcal{A}) = (0, 1]$ .

**Ejemplo 2.4.** Si  $\mathcal{A}$  es un conjunto difuso singleton definido en el conjunto universal  $X = [-1, 1]$  por la función (2.6), entonces el  $\text{sop}(\mathcal{A}) = \{x'\}$ .

La teoría de conjuntos difusos originalmente se formul en términos de los siguientes operadores de unión ( $\cup$ ), intersección ( $\cap$ ) y complemento ( $^c$ ) de conjuntos difusos:

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})(x) = \text{máx}[\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)], \quad (2.8)$$

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})(x) = \text{mín}[\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)], \quad (2.9)$$

$$\mathcal{A}^c(x) = 1 - \mathcal{A}(x), \quad (2.10)$$

para toda  $x \in X$ . Estas operaciones se conocen como *operaciones difusas estándar* de la teoría de conjuntos difusos [19].

---

<sup>3</sup>La función (2.6) se conoce matemáticamente como función impulso unitario.



Nótese que, como caso particular, cuando el intervalo de los grados de membresía es restringido al conjunto finito  $\{0, 1\}$ , estas funciones se comportan, precisamente, como los operadores correspondientes a la unión, intersección y complemento de la teoría de conjuntos clásicos. En forma general, las operaciones de intersección y unión difusas son realizadas por funciones difusas<sup>4</sup> denotadas como  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{u}$ , repectivamente, y definidas como

$$\mathbf{i}, \mathbf{u}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]; \quad (2.11)$$

mientras que la operación difusa para el complemento difuso es denotada y definida como

$$\mathbf{c}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]. \quad (2.12)$$

### 2.2.2. Relaciones Difusas

Una relación exacta representa la presencia o ausencia de asociación, interacción o interconectividad entre los elementos de dos o más conjuntos. Este concepto puede ser generalizado para permitir varios grados o intensidades de relación o interacción entre elementos. Los grados de asociación en una relación difusa se pueden representar en la misma forma en que los grados de membresía se representan en los conjuntos difusos. De hecho, así como los conjuntos exactos se pueden ver como un caso restringido del concepto más general de conjuntos difusos, la relación exacta se considera como un caso restringido de la relación difusa.

Una relación difusa es un conjunto difuso de tuplas, esto es, cada tupla tiene un grado de membresía entre 0 y 1.

---

<sup>4</sup>Comúnmente, las funciones de intersección y unión difusas también se conocen como *t-norm* y *t-conorm*, respectivamente; ver, *e.g.*, [19].

**Definición 2.4.** Una *relación difusa*  $\mathcal{R}$  es un conjunto difuso definido en  $X \times Y$ , por la función  $\mathcal{R}: X \times Y \rightarrow [0, 1]$ , como

$$\mathcal{R} = \{((x, y), \mathcal{R}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, \mathcal{R}(x, y) \in [0, 1]\}. \quad (2.13)$$

Las relaciones difusas son muy importantes en control difuso, porque pueden describir las interacciones entre variables. Esto es particularmente interesante en las reglas *si-entonces*, también se conocen como reglas “If-then”.

**Definición 2.5.** Sean  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  relaciones difusas definidas en  $U \times X$  y  $X \times Y$ , respectivamente. La *composición de*  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  es una relación difusa denotada por  $\mathcal{P} \circ \mathcal{R}$  y se define en  $U \times Y$  como

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{R} = \{((u, y), \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u, y)) \mid (u, y) \in U \times Y, \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u, y) \in [0, 1]\}, \quad (2.14)$$

donde

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u, y) = \max_{x \in X} \min[\mathcal{P}(u, x), \mathcal{R}(x, y)]. \quad (2.15)$$

Esta composición *estándar* también se conoce como *composición máx-mín*.

**Ejemplo 2.5.** Si  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  son relaciones difusas definidas en  $U \times X$  y  $X \times Y$ , respectivamente, donde  $U = \{u_1, u_2\}$ ,  $X = \{x_1, x_2\}$  y  $Y = \{y_1, y_2\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ \mathcal{R} = & \{((u_1, y_1), \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_1, y_1)), ((u_1, y_2), \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_1, y_2)), \\ & ((u_2, y_1), \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_2, y_1)), ((u_2, y_2), \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_2, y_2))\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_1, y_1) &= \max \{ \min[\mathcal{P}(u_1, x_1), \mathcal{R}(x_1, y_1)], \min[\mathcal{P}(u_1, x_2), \mathcal{R}(x_2, y_1)] \} \\ \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_2, y_1) &= \max \{ \min[\mathcal{P}(u_2, x_1), \mathcal{R}(x_1, y_1)], \min[\mathcal{P}(u_2, x_2), \mathcal{R}(x_2, y_1)] \} \\ \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_1, y_2) &= \max \{ \min[\mathcal{P}(u_1, x_1), \mathcal{R}(x_1, y_2)], \min[\mathcal{P}(u_1, x_2), \mathcal{R}(x_2, y_2)] \} \\ \mathcal{P} \circ \mathcal{R}(u_2, y_2) &= \max \{ \min[\mathcal{P}(u_2, x_1), \mathcal{R}(x_1, y_2)], \min[\mathcal{P}(u_2, x_2), \mathcal{R}(x_2, y_2)] \} \end{aligned} \quad (2.17)$$

En control difuso es necesaria la generalización de la composición *máx-mín* a la *composición sup-i*, donde  $i$  se refiere a una función *t-norm*. Por lo que, la composición *sup-i* de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  es una relación difusa definida en  $U \times Y$  por

$$\mathcal{P} \circ^i \mathcal{R}(u, y) = \sup_{x \in X} i[\mathcal{P}(u, x), \mathcal{R}(x, y)], \quad (2.18)$$

para toda  $u \in U$  y  $y \in Y$ . Es posible que  $\mathcal{P}$  sea sólo un conjunto difuso definido en  $X$ , *e.g.*,  $\mathcal{A}$ ; en este caso

$$\mathcal{A} \circ^i \mathcal{R}(y) = \sup_{x \in X} i[\mathcal{A}(x), \mathcal{R}(x, y)], \quad (2.19)$$

donde  $\mathcal{A} \circ^i \mathcal{R}(y)$  se convierte en un conjunto difuso definido en  $Y$ , *e.g.*,  $\mathcal{B}$ .

### 2.3. Razonamiento Aproximado

En lógica clásica las proposiciones en las premisas o en la conclusión sólo son verdaderas o falsas; esto es, la lógica clásica es una lógica bi-valuada. La lógica difusa es una lógica valuada en forma continua; esto es, las proposiciones toman valores en un espacio continuo de valores de verdad [19]. El razonamiento aproximado es la mejor forma conocida de lógica difusa y abarca una gran variedad de reglas de inferencia, cuyas premisas contienen proposiciones difusas [10]. La inferencia en el razonamiento aproximado es el cálculo con conjuntos difusos, que representan el significado de un cierto conjunto de proposiciones difusas, para obtener un conjunto difuso consecuente, que representa el significado de la conclusión.

### Variable lingüística.

El concepto de *variable lingüística* es fundamental para la representación del conocimiento en el razonamiento aproximado. En [45], Wang indica que hay dos interpretaciones para este concepto: formal e intuitiva. Formalmente, como se menciona en [10], una variable lingüística tiene asociada la siguiente estructura:

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{LX}, X, M_{\mathbf{X}} \rangle, \quad (2.20)$$

en donde  $\mathbf{X}$  denota el nombre simbólico de la variable lingüística,  $\mathbf{LX}$  es el conjunto de valores lingüísticos<sup>5</sup> que pueden ser asignados a  $\mathbf{X}$ ,  $X$  es el conjunto universal o dominio de valores cuantitativos, o numéricos, asociados a la variable lingüística, que pueden ser asignados a la variable exacta  $x$ , y  $M_{\mathbf{X}}$  es una función semántica. Esta función semántica es una función que toma un valor lingüístico como su argumento y le asigna un “significado” (interpretación) en términos de un conjunto difuso definido en  $X$ ,

$$M_{\mathbf{X}}: \mathbf{LX} \rightarrow P(X), \quad (2.21)$$

donde  $P(X)$  es el conjunto potencia difuso<sup>6</sup> de  $X$  [19].

### Proposiciones difusas.

El razonamiento aproximado se usa para representar el conocimiento con expresiones en un lenguaje natural. En general, una expresión afirmativa es una proposición.

La diferencia fundamental entre las proposiciones clásicas y las proposiciones difusas es el conjunto de sus valores de verdad. Mientras que, cada proposición clásica

---

<sup>5</sup>Un valor lingüístico es una palabra en lenguaje natural.

<sup>6</sup>Un conjunto potencia difuso de  $X$  se define como el conjunto de todos los conjuntos difusos que se pueden definir en  $X$ .

puede ser o falsa o verdadera, las proposiciones difusas presentan cierto grado de veracidad o falsedad. Esto es, asumiendo por ejemplo que la verdad absoluta se exprese por el valor 1, y 0 la negación de ésta, entonces el valor de verdad de una proposición difusa se expresa por un número del intervalo  $[0, 1]$ .

Una proposición difusa del tipo:

$$\text{La velocidad (V) es baja (A)}, \quad (2.22)$$

de acuerdo con [19] se puede expresar por su forma canónica como

$$V \text{ es } \mathcal{A}, \quad (2.23)$$

donde  $V$  es la variable lingüística que puede tomar valores  $v$  de algún conjunto universal  $V$ . Esto es, la veracidad de que la velocidad ( $V$ ) es baja ( $\mathcal{A}$ ) se determina por  $\mathcal{A}(v)$ .

Con base en la notación de las proposiciones difusas y de los conectivos lingüísticos, tales como “y”, “o”, “no” y “si ..., entonces ...”, se pueden formar proposiciones difusas compuestas. El significado de estas proposiciones difusas compuestas se da por la interpretación de los conectivos.

Una proposición difusa condicional se expresa simbólicamente como

$$\text{Si } \langle \text{proposición difusa } \mathcal{A} \rangle, \text{ entonces } \langle \text{proposición difusa } \mathcal{B} \rangle.$$

La proposición difusa  $\mathcal{A}$  se conoce como el antecedente de la regla, la cual puede ser una proposición difusa compuesta. La proposición difusa  $\mathcal{B}$  se conoce como el consecuente de la regla. En general, a esta proposición difusa condicional se le conoce como *regla difusa de inferencia si-entonces*, la cual describe la relación causal entre las variables; particularmente en control, puede describir la relación entre las variables de estado de estado del proceso y las variables de salida de control.

**Ejemplo 2.6.** Para un sistema mecánico, tal como un motor, considere la siguiente regla difusa de inferencia:

$$\begin{aligned} & \text{Si } \langle \text{la velocidad del rotor es positiva} \rangle, \\ & \text{entonces } \langle \text{la fuerza de fricción es positiva} \rangle; \end{aligned} \tag{2.24}$$

en donde “la velocidad del rotor es positiva” es el antecedente y “la fuerza de fricción es positiva” es el consecuente.

### Reglas difusas de inferencia y su significado.

Una regla difusa de inferencia presenta la siguiente forma:

$$\text{Si “}x \text{ es } \mathcal{A}\text{”, entonces “}y \text{ es } \mathcal{B}\text{”} . \tag{2.25}$$

En el razonamiento aproximado, las dos principales reglas de inferencia (o deducción de conclusiones de conjuntos de premisas) de acuerdo con [10] son: la regla difusa de inferencia *modus ponens generalizada* y la regla difusa de inferencia *composicional*. La primera usa una regla difusa *si-entonces* que implícitamente representa una relación difusa; la segunda usa una relación difusa explícitamente para representar la conexión entre dos proposiciones difusas.

**Definición 2.6.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  conjuntos difusos definidos en  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Una *implicación difusa*, denotada por  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , es una clase especial de relación difusa en  $X \times Y$  con función de membresía  $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{A}(x) * \mathcal{B}(y)$ , en donde “ $*$ ” es un operador de implicación difusa<sup>7</sup> [45].

<sup>7</sup>Algunas implicaciones difusas, que se pueden emplear para representar el significado de las reglas *si-entonces*, se encuentra en la Tabla 11.1 en [19].

**Definición 2.7.** El significado de la regla difusa (2.25) es una *relación difusa*  $\mathcal{R}$ , definida por

$$\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{A}(x) * \mathcal{B}(y), \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \quad (2.26)$$

**Ejemplo 2.7.** Una interpretación para la regla difusa si-entonces es la regla “Operación Producto” [45]:

$$\mathcal{A}(x) * \mathcal{B}(y) = \mathcal{A}(x) \mathcal{B}(y). \quad (2.27)$$

## 2.4. Sistemas de Lógica Difusa

Un sistema con variables de entrada y salida valuadas en los reales, cuya configuración básica presenta cuatro partes principales: difusificador, base de reglas difusas, generador de inferencias difusas y dedifusificador, se considera un sistema de lógica difusa [45].

### Difusificador.

Un *difusificador* realiza un mapeo de la entrada exacta observada

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n_i}]^T \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$$

a un conjunto difuso definido en  $X$ . Hay por lo menos dos tipos de difusificadores: *singleton* y *no singleton*. En este trabajo de tesis, se considera el difusificador singleton.

**Ejemplo 2.8.** Para el sistema del Ejemplo 2.6, considere un valor particular de entrada  $\dot{x}_p$  para la velocidad del rotor. Con un difusificador singleton se obtiene el

conjunto difuso

$$\mathcal{A}'(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \dot{x} = \dot{x}_p \\ 0, & \text{si } \dot{x} \neq \dot{x}_p . \end{cases} \quad (2.28)$$

### Base de reglas difusas.

La *base de reglas difusas* consiste en un conjunto de  $n_r$  reglas difusas *si-entonces*, de la forma

$$R^r : \text{Si } x_1 \text{ está en } \mathcal{A}_1^r(x_1) \text{ y ... y } x_{n_i} \text{ está en } \mathcal{A}_{n_i}^r(x_{n_i}), \text{ entonces } y \text{ está en } \mathcal{B}^r, \quad (2.29)$$

donde  $r$ ,  $1 \leq r \leq n_r$ , indica la  $r$ -ésima regla difusa,  $\mathcal{A}_1^r(x_1), \dots, \mathcal{A}_{n_i}^r(x_{n_i})$  son conjuntos difusos caracterizados por funciones de membresía Gaussianas<sup>8</sup>,  $x_i$  es la  $i$ -ésima entrada exacta,  $y \in Y \subset \mathbb{R}$  es la salida del sistema de lógica difusa y  $\mathcal{B}^r$  es un conjunto difuso definido en  $Y$ .

Particularmente, si  $\mathcal{B}^r$  es un conjunto difuso singleton, entonces las reglas difusas pueden presentar la forma

$$R^r : \text{Si } x_1 \text{ está en } \mathcal{A}_1^r(x_1) \text{ y ... y } x_{n_i} \text{ está en } \mathcal{A}_{n_i}^r(x_{n_i}), \text{ entonces } y = b^r. \quad (2.30)$$

Recordando que cada regla difusa se puede ver como una implicación difusa.

**Ejemplo 2.9.** *Para el sistema del Ejemplo 2.6 se puede considerar la siguiente base de reglas difusas:*

$$\begin{aligned} R^1 : & \text{Si } \dot{x} \text{ es } \mathcal{A}^1(\dot{x}), \text{ entonces } y = b^1 \\ R^2 : & \text{Si } \dot{x} \text{ es } \mathcal{A}^2(\dot{x}), \text{ entonces } y = b^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

---

<sup>8</sup>El análisis de esta tesis es válido para todo tipo de funciones de membresía. La razón principal de la selección de las funciones de membresía Gaussianas es su propiedad deseada para la aproximación [27]



En donde el conjunto difuso  $\mathcal{A}^1(\dot{x})$  representa la “velocidad positiva”,  $\mathcal{A}^2(\dot{x})$  representa la “velocidad negativa”,  $b^1$  es una “fricción constante positiva” y  $b^2$  es una “fricción constante negativa”.

### Generador de inferencias difusas.

Un *generador de inferencias difusas* realiza un mapeo de un conjunto difuso arbitrario  $\mathcal{A}'$ , definido en  $X \subset \mathbb{R}^{n_i}$ , a un conjunto difuso  $\mathcal{B}'$ , definido en  $Y \subset \mathbb{R}$ ; el generador emplea los principios de lógica difusa para combinar las reglas difusas *si-entonces*, en la base de reglas difusas.

Por simplicidad, sea  $\mathcal{A}_1^r \times \dots \times \mathcal{A}_{n_i}^r = \mathcal{A}^r$  la representación de los conjuntos difusos en  $X = X_1 \times \dots \times X_{n_i}$  y  $\mathcal{A}'(\mathbf{x})$  la entrada al generador de inferencias difusas, entonces cada regla (2.29) determina un conjunto difuso  $\mathcal{B}'^r = \mathcal{A}' \circ \mathcal{R}^r$  en  $Y$ . Usando la composición (2.19) y la Definición 2.6,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'^r(y) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{i}[\mathcal{A}'(\mathbf{x}), \mathcal{A}^r(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{B}^r(y)] \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{i}[\mathcal{A}'(\mathbf{x}), \mathcal{A}^r(\mathbf{x}) \mathcal{B}^r(y)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dado que  $\mathcal{A}^r(\mathbf{x}) = \mathcal{A}_1^r(x_1) \times \dots \times \mathcal{A}_{n_i}^r(x_{n_i})$ , en esta tesis se emplea la función  $\mathbf{i}$  como el producto de las funciones de membresía, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{B}'^r(y) &= \sup_{\mathbf{x} \in X} \left[ \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}'(\mathbf{x}) \mathcal{A}_i^r(x_i) \mathcal{B}^r(y) \right] \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in X} \left[ \mathcal{A}'(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i) \mathcal{B}^r(y) \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalmente, la combinación de  $\mathcal{B}'^r(y)$  a través del conjunto de reglas se conoce como *generador de inferencias difusas producto* [47], y se define como

$$\mathcal{B}'(y) = \max_{r=1}^{n_r} \left( \sup_{\mathbf{x} \in X} \left[ \mathcal{A}'(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i) \mathcal{B}^r(y) \right] \right). \quad (2.34)$$

Particularmente, si se emplea el difusificador (2.6) en (2.34), se observa que el  $\sup_{\mathbf{x} \in X}$  se logra en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Por lo que, (2.34) se reduce a

$$\mathcal{B}'(y) = \max_{r=1}^{n_r} \left[ \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x'_i) \mathcal{B}^r(y) \right]. \quad (2.35)$$

### Dedifusificador.

El *dedifusificador* se define como un mapeo del conjunto difuso  $\mathcal{B}'$  en  $Y \subset \mathbb{R}$ , el cual es la salida del generador de inferencias difusas, a un punto exacto  $y^* \in Y$ .

Un dedifusificador particular es el *dedifusificador de promedio de los centros ponderados* de los  $n_r$  conjuntos difusos  $\mathcal{B}'^r$ , y define a  $y^*$  como

$$y^* = \frac{\sum_{r=1}^{n_r} \bar{y}^r [\mathcal{B}'^r(\bar{y}^r)]}{\sum_{r=1}^{n_r} [\mathcal{B}'^r(\bar{y}^r)]}, \quad (2.36)$$

donde  $\bar{y}^r$  es el centro del  $r$ -ésimo conjunto difuso, y  $\mathcal{B}'^r(\bar{y}^r)$  es la ponderación correspondiente.

En resumen, las diferentes combinaciones de los posibles diferentes procesos de difusificación, generación de inferencias difusas y dedifusificación, y la selección particular de las funciones de membresía producen diferentes clases de sistemas de lógica difusa.

**Ejemplo 2.10.** Si en un sistema de lógica difusa se emplean conjuntos difusos singleton (2.6), para las variables tanto de entrada como de salida, entonces (2.36) presenta la siguiente forma

$$y(\mathbf{x}') = \frac{\sum_{r=1}^{n_r} \bar{y}^r \left[ \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x'_i) \right]}{\sum_{r=1}^{n_r} \left[ \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x'_i) \right]}, \quad (2.37)$$

dado que  $\mathcal{B}'^r(\bar{y}^r) = 1$  para  $y = \bar{y}^r$ .

## 2.5. Aproximación Funcional

### 2.5.1. Aproximador Universal

El siguiente teorema de aproximación universal establece que cierta clase de sistemas de lógica difusa tienen la capacidad de aproximar una función cualquiera [47].

**Teorema 2.1.** *Suponiendo que  $X \subset \mathbb{R}^{n_i}$  es un conjunto compacto. Entonces, dada cualquier función continua real  $g(\mathbf{x})$  definida en  $X$  y cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un sistema de lógica difusa  $f(\mathbf{x})$  en la forma (2.37) tal que*

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < \epsilon. \quad (2.38)$$

Esto es, los FLS con difusificador singleton (2.6), funciones de membresía Gaussianas (2.5), generador de inferencias difusas producto (2.34) y dedifusificador de promedio de los centros ponderados (2.36), son aproximadores universales.<sup>9</sup>

### 2.5.2. Funciones Base Difusas

Considerando  $\bar{y}^r = b^r$  en un sistema de lógica difusa de la forma (2.37) se obtiene

$$y(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{r=1}^{n_r} b^r [\prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i)]}{\sum_{r=1}^{n_r} [\prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i)]}, \quad (2.39)$$

de tal forma que, definiendo

$$w^r(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i)}{\sum_{r=1}^{n_r} [\prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i)]}, \quad r = 1, \dots, n_r, \quad (2.40)$$

---

<sup>9</sup>Una prueba del Teorema 2.1 se puede encontrar en [47] (pp. 124-126).

se obtiene

$$\begin{aligned}
y(\mathbf{x}) &= \sum_{r=1}^{n_r} b^r w^r(\mathbf{x}) \\
&= b^1 w^1(\mathbf{x}) + b^2 w^2(\mathbf{x}) + \dots + b^{n_r} w^{n_r}(\mathbf{x}) \\
&= [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^{n_r}] [w^1(\mathbf{x}) \ w^2(\mathbf{x}) \ \dots \ w^{n_r}(\mathbf{x})]^T \\
&= \mathbf{B} \mathbf{W}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.41}$$

las  $w^r(\mathbf{x})$  se conocen como *funciones base difusas*, así

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) \triangleq [w^1(\mathbf{x}) \ w^2(\mathbf{x}) \ \dots \ w^{n_r}(\mathbf{x})]^T \tag{2.42}$$

y

$$\mathbf{B} \triangleq [b^1 \ b^2 \ \dots \ b^{n_r}]. \tag{2.43}$$

Si las funciones de membresía Gaussianas (2.5), contenidas en (2.40), permanecen constantes con respecto a sus parámetros  $c_i^r$  y  $\sigma_i^r$ , la intensidad normalizada de activación (o grado de activación<sup>10</sup>) de la  $r$ -ésima regla  $w^r$  es una función de  $\mathbf{x}$  únicamente, por lo que la salida de un FLS permite una parametrización lineal en sus parámetros del consecuente  $b^r$ .

En esta tesis, se hará referencia a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1 \times n_r}$  como *matriz de pesos* o como *vector de parámetros* de los FLS y  $\mathbf{W} : X \rightarrow \mathbb{R}^{n_r}$  como el *vector de funciones base difusas*.

### 2.5.3. Aproximación de una Función

Una función continua,  $f(\mathbf{x})$ , se puede aproximar por

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^* \mathbf{W}(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^{n_i}, \tag{2.44}$$

---

<sup>10</sup>Al conjunto de reglas difusas (2.29) se le dice *completo*, si para cualquier  $\mathbf{x} \in X$ , hay al menos una regla difusa activada, *i.e.*,  $\sum_{r=1}^{n_r} \prod_{i=1}^{n_i} \mathcal{A}_i^r(x_i) > 0$ .

donde  $\mathbf{B}^*$  es el *vector de parámetros óptimo*

$$\mathbf{B}^* \triangleq \arg \min_{\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1 \times n_r}} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{B} \mathbf{W}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \right\} \quad (2.45)$$

y  $\Delta f(\mathbf{x})$  se conoce como *error de aproximación de la función*, que satisface

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} |\Delta f(\mathbf{x})| < \kappa, \quad (2.46)$$

$\kappa$  es una cota del error de aproximación.

En la práctica, el vector de parámetros óptimo puede ser no único o desconocido. Varios métodos basados en el gradiente de una función de error están disponibles para estimarlo (ver, *e.g.*, [45]). Además, cuando alguna parte del FLS (el número de reglas  $n_r$ , las funciones de membresía  $\mu_{A_i}(x_i)$  o los parámetros del consecuente  $b^r$ ) está fija,  $\kappa$  es desconocida.

# Capítulo 3

## Control Difuso Robusto Adaptable de Sistemas Lagrangeanos

### 3.1. Introducción

En muchas aplicaciones de control de movimiento, la fricción es un obstáculo en el diseño satisfactorio de sistemas de control. En general, la fricción es una de las no linealidades más comunes en los sistemas mecánicos y de los fenómenos naturales difíciles de modelar [2], y que aún no es completamente entendida [4]. Las estrategias de control que intentan compensar los efectos de la fricción basándose en un modelo para ésta se conocen como técnicas de compensación de fricción basadas en modelo, *e.g.*, ver [4, 11, 18, 41].

La fricción es una de las principales fuentes de incertidumbre en los modelos de sistemas mecánicos. Entre las opciones desarrolladas para el control de seguimiento, para esta clase de sistemas, se encuentra el control difuso robusto de manipuladores robóticos [8, 14, 40]. Sin embargo, uno de los puntos críticos, en el diseño de sistemas de control difuso (aunque diseñados de una forma heurística), es cómo asegurar la estabilidad robusta y global del sistema bajo control [14].

En la siguiente sección, se describe el sistema mecánico a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, y se presentan sus propiedades para el propósito de diseñar el controlador, además del planteamiento del problema en forma particular. En el diseño de control, Sección 3.3, se usa un FLS para aproximar las dinámicas desconocidas del sistema. Se usa la técnica de control robusto [9] para diseñar dos señales de compensación; éstas compensan las incertidumbres debidas principalmente a: 1) la incertidumbre estructurada (parámetros), la cual se incrementa por el desconocimiento de la matriz de pesos óptima  $\mathbf{B}^*$ ; y, 2) la incertidumbre no estructurada, la cual se incrementa por el error de reconstrucción de la función. Se proponen dos estimadores, para el cómputo en línea de la cota del error paramétrico y para la cota del error de reconstrucción de la función. En la Sección 3.4, se muestra la validez del esquema de control propuesto a través de simulaciones y con resultados experimentales.

## 3.2. Descripción del Sistema

Como un caso especial de la clase de sistemas (1.1), se consideran primero los sistemas Lagrangeanos en la forma

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u} , \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{q}$  representa el vector  $n$ -dimensional de las posiciones angulares,  $\dot{\mathbf{q}} = (d/dt)\mathbf{q}$  el vector  $n$ -dimensional de las velocidades angulares,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  representa la entrada de control (torque),  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  es la matriz de inercia simétrica y es definida positiva  $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . El término  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  es un vector  $n$ -dimensional de las fuerzas de Coriolis y centrípeta. El vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  representa las fuerzas gravitacionales. Finalmente, el vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  representa las fuerzas de fricción.

Una de las ventajas a considerar en un sistema en la forma (3.1) es que algunas propiedades físicas pueden ser aprovechadas en el diseño del control. En este capítulo, se considera un sistema mecánico con “ $n$  grados de libertad” descrito por ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}, \quad (3.2)$$

donde  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es la función Lagrangeana y  $\boldsymbol{\tau}$  representa las fuerzas generalizadas aplicadas al sistema; se observa que con:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} - \mathbf{f}$ , la ecuación (3.2) toma la forma (3.1). Predominantemente, la fricción  $\mathbf{f}$  depende de la velocidad, aunque en general también depende de la posición, del tiempo y de las fuerzas externas [24]. Esta fuerza constituye una de las principales fuentes de incertidumbre en los sistemas mecánicos.

Para el propósito de diseñar el controlador, se asume que las ecuaciones dinámicas del sistema presentan las siguientes propiedades [34]:

1. *Simetría y acotamiento* de  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ : Para alguna  $\bar{m} \geq \underline{m} > 0$ ,

$$\underline{m} \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}) \leq \bar{m} \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad,  $\underline{m}$  y  $\bar{m}$  son las cotas constantes positivas inferior y superior, respectivamente.

2. *Anti-simetría* de  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ :

$$\dot{\mathbf{s}}^T [\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{s}} = 0, \quad \forall \dot{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^n.$$



### 3.3. Diseño de Control

Para el análisis siguiente se usa la teoría de estabilidad de Lyapunov. Primero, se desarrollan las ecuaciones de error de las dinámicas de la planta a controlar (3.1)<sup>1</sup>.

#### 3.3.1. Ecuaciones de error

Sea  $\tilde{q} = q - q_d$  el error de seguimiento en la variable  $q$  (posición angular), donde  $q_d$  representa la posición angular deseada, sea

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d = [\tilde{q} \ \tilde{q}^{(1)} \ \dots \ \tilde{q}^{(n-1)}]^T \quad (3.3)$$

el vector de error de seguimiento. De acuerdo con [33], para obtener un controlador robusto se define una superficie variante en el tiempo  $S(t)$  en el espacio-estado  $\mathbb{R}^{(n)}$  por la ecuación escalar  $s(\mathbf{q}, t) = 0$ , donde

$$s(\mathbf{q}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{q} \quad (3.4)$$

y  $\lambda$  es una constante estrictamente positiva.

Dada la condición inicial  $\mathbf{q}_d(0) = \mathbf{q}(0)$ , el problema de seguimiento  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_d$  es equivalente a permanecer sobre la superficie  $S(t)$  para todo  $t > 0$ ; de este modo  $s \equiv 0$  representa una ecuación diferencial lineal cuya solución única es  $\tilde{\mathbf{q}} \equiv 0$ . Así, el problema de seguimiento al vector  $n$ -dimensional  $\mathbf{q}_d$  se puede reducir a mantener la cantidad escalar  $s$  en cero;  $s$  se conoce como error de seguimiento filtrado.

El vector del error de seguimiento filtrado  $\mathbf{s}$ , en un sistema mecánico con 2 grados de libertad, se define como

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \end{aligned} \quad (3.5)$$

---

<sup>1</sup>Ver [33], p. 398.

donde  $\Lambda$  es una matriz simétrica definida positiva,  $\dot{\mathbf{q}}_r = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$  se puede interpretar como una velocidad de referencia, y se forma por el desplazamiento de las velocidades deseadas de acuerdo al error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$ . De (3.5), es claro que si  $\mathbf{s}$  está acotado y tiende a una región (pequeña) centrada en el origen, también lo hacen  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ , por lo que la ley de control se diseñará tal que el vector del error de seguimiento filtrado  $\mathbf{s}$  sea uniforme y finalmente acotado.

Con la sustitución de (3.5) en (3.1) se obtienen las dinámicas de  $\mathbf{s}$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} = \mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{q}^T \ \dot{\mathbf{q}}^T \ \ddot{\mathbf{q}}_r^T \ \ddot{\mathbf{q}}_r^T] \in \mathbb{R}^{4n}$ ,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (3.7)$$

En esta última ecuación, se asume que las fricciones son funciones de las posiciones y de las velocidades. Como se sabe,  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  puede ser aproximada por un FLS en un conjunto compacto  $X \subset \mathbb{R}^{4n}$  (recordando que  $n$  denota los grados de libertad del sistema mecánico)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^* \mathbf{W}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^{4n}, \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{B}^*$  se puede determinar por (2.45),  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  se define por (2.42) y el error de reconstrucción de la función  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$  se acota por una cota desconocida  $\kappa_f$ ,

$$\|\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})\| \triangleq \sup_{\mathbf{x} \in X} \sqrt{\Delta \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})} < \kappa_f, \quad \forall \mathbf{x} \in X. \quad (3.9)$$

### 3.3.2. Ley de control

Sean  $\mathbf{B}^0 \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  una matriz de pesos nominal,  $\mathbf{B}^*$  la matriz de pesos óptima (2.45) y  $\rho_f$  una cota para el error de la matriz de pesos  $\tilde{\mathbf{B}} \triangleq \mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^*$ ; esto es,

$$\|\tilde{\mathbf{B}}\| \leq \rho_f, \quad (3.10)$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma Euclidiana o la norma inducida en la matriz [17]. Primero, se asume que tanto la cota del error de la matriz de pesos,  $\tilde{\mathbf{B}}$ , como la cota del error de reconstrucción de la función,  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , se conocen; posteriormente, se remueve esta suposición estimándolas en línea. Para el sistema mecánico (3.1), se propone la siguiente ley de control

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{s} + (\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^c)\mathbf{W}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_c, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de ganancia que es definida positiva y  $\mathbf{B}^c(t) \in \mathbb{R}^{n \times n_r}$  (recordando que  $n_r$  indica el número de reglas *si-entonces* en un FLS) y  $\mathbf{u}_c(t) \in \mathbb{R}^n$  son diseñadas para compensar el error de la matriz de pesos y el error de reconstrucción de la función, respectivamente,

$$\mathbf{B}^c = -\rho_f^2 \frac{\mathbf{s}\mathbf{W}^T(\mathbf{x})}{\rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \epsilon_B}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}_c = -\kappa_f^2 \frac{\mathbf{s}}{\kappa_f \|\mathbf{s}\| + \epsilon_f}, \quad (3.13)$$

con  $\epsilon_B, \epsilon_f > 0$  como parámetros de diseño. Se verá en la siguiente sección que los valores propuestos para  $\mathbf{B}^c$  y  $\mathbf{u}_c$  dados por (3.12) y (3.13), respectivamente, satisfacen los requerimientos de estabilidad para el diseño del controlador que se propone.

### 3.3.3. Análisis de estabilidad y comportamiento.

Sustituyendo  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y la ley de control  $\mathbf{u}$ , definidas respectivamente en (3.8) y (3.11), en las ecuaciones de error (3.6), se obtiene el sistema en lazo cerrado en términos del vector de error de seguimiento filtrado  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{K}\mathbf{s} = (\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}^c)\mathbf{W}(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})) \quad (3.14)$$

donde  $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\tilde{\mathbf{B}}$  denotan la incertidumbre no estructurada y la incertidumbre estructurada, respectivamente (ecuaciones (3.9) y (3.10)).

Ahora, se presenta el siguiente teorema de estabilidad para la ley de control (3.11).

**Teorema 3.1.** *Considere el sistema mecánico (3.1) con la ley de control (3.11), donde  $\mathbf{B}^c$  está dada por (3.12) y  $\mathbf{u}_c$  está dada por (3.13). Entonces, todos los estados en el sistema en lazo cerrado permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge exponencialmente al conjunto residual*

$$\left\{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \left( \frac{1}{\underline{\lambda}} \right) \left( \frac{\overline{m}}{\underline{m}} \frac{\epsilon}{\underline{k}} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Se considera la siguiente función definida positiva,

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{M}(\mathbf{q})\mathbf{s}, \quad (3.15)$$

se recuerda que  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  cumple con la Propiedad 1. De ésta, se observa que

$$\frac{\underline{m}}{2} \|\mathbf{s}(t)\|^2 \leq V(t) \leq \frac{\overline{m}}{2} \|\mathbf{s}(t)\|^2, \quad (3.16)$$

$\forall t \geq t_0 \geq 0$ . Con la derivada con respecto al tiempo de  $V(t)$ , a lo largo de la ecuación (3.14), y de acuerdo con la Propiedad 2 se obtiene

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T\mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T(\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}^c)\mathbf{W}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^T(\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})). \quad (3.17)$$

El término  $\mathbf{s}^T(\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}^c)\mathbf{W}(\mathbf{x})$  de (3.17) se puede acotar por arriba considerando que

$$\|\mathbf{s}\| \left\| \tilde{\mathbf{B}} \right\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \mathbf{s}^T \mathbf{B}^c \mathbf{W}(\mathbf{x}) \leq \rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \mathbf{s}^T \mathbf{B}^c \mathbf{W}(\mathbf{x}).$$

Si se sustituye  $\mathbf{B}^c$  por (3.12), la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}\| \left\| \tilde{\mathbf{B}} \right\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \mathbf{s}^T \mathbf{B}^c \mathbf{W}(\mathbf{x}) &\leq \rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| - \rho_f^2 \frac{\|\mathbf{s}\|^2 \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\|^2}{\rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \epsilon_B} \\ &= \frac{\rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\|}{\rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \epsilon_B} \epsilon_B \\ &\leq \epsilon_B. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En forma similar, el término  $\mathbf{s}^T(\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}))$  de (3.17) se acota por

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \epsilon_f \quad (3.19)$$

si se emplea (3.13) para  $\mathbf{u}_c$ . Definiendo

$$\epsilon \triangleq \epsilon_B + \epsilon_f, \quad \alpha \triangleq \frac{k}{m}, \quad (3.20)$$

donde  $k$  denota el valor propio más pequeño de la matriz definida positiva de ganancia,  $\mathbf{K}$ , entonces de (3.17), (3.18) y (3.19) se obtiene

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0; \quad (3.21)$$

lo cual implica que

$$V(t) \leq \left[ V(t_0) - \frac{\epsilon}{2\alpha} \right] e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2\alpha}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (3.22)$$

Por la ecuación (3.16),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}(t)\|^2 &\leq \left[ \frac{\overline{m}}{\underline{m}} \|\mathbf{s}(t_0)\|^2 - \frac{\epsilon}{\alpha \underline{m}} \right] e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{\alpha \underline{m}} \\ &\rightarrow \frac{\epsilon}{\alpha \underline{m}} = \frac{\overline{m} \epsilon}{\underline{m} k}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sea  $X \subset \mathbb{R}^{4n}$  un conjunto compacto, que contiene la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = [\mathbf{q}^T(t_0) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t_0) \ \dot{\mathbf{q}}_r^T(t_0) \ \ddot{\mathbf{q}}_r^T(t_0)]^T$ , y  $X_s \in \mathbb{R}^n$  el conjunto que corresponde a la vecindad del origen, con radio

$$\text{máx} \left\{ \frac{\overline{m}}{\underline{m}} \|\mathbf{s}(t_0)\|, \left( \frac{\overline{m} \ \epsilon}{\underline{m} \ \underline{k}} \right)^{1/2} \right\}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, para toda  $\mathbf{s}(t_0) \in X_s$ , la trayectoria de (3.14) permanecerá en  $X_s$ . Esto significa que para toda  $\mathbf{x}(t_0) \in X$ , la trayectoria que corresponde al sistema en lazo cerrado permanecerá en  $X$ . Consecuentemente, todas las señales en el sistema de lazo cerrado se acotan uniformemente y el vector de error de seguimiento filtrado  $\mathbf{s}$  tiende a una vecindad del origen con radio  $[(\overline{m}/\underline{m})(\epsilon/\underline{k})]^{1/2}$ . Esto implica que el error de seguimiento tenderá a una vecindad del origen con radio  $[(\overline{m}/\underline{m})(\epsilon/\underline{k})/\underline{\lambda}]^{1/2}$ ; esta vecindad puede ser arbitrariamente pequeña ajustando las ganancias de control  $\mathbf{K}$ ,  $\Lambda(\underline{k}, \underline{\lambda})$  y los parámetros de diseño  $\epsilon(\epsilon_B, \epsilon_f)$ .  $\square$

A continuación, se diseñan dos estimadores para las cotas  $\rho_f$  y  $\kappa_f$ .

### 3.3.4. Estimación de las cotas de incertidumbre

Sean  $\hat{\rho}_f(t)$  y  $\hat{\kappa}_f(t)$  la estimación de las cotas de incertidumbre  $\rho_f(t)$  y  $\kappa_f(t)$  en el tiempo  $t$ , respectivamente, las cuales son actualizadas de acuerdo con

$$\dot{\hat{\rho}}_f = -\sigma_B \hat{\rho}_f + \gamma_B \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\|, \quad \hat{\rho}_f(t_0) > 0, \quad (3.25)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_f = -\sigma_f \hat{\kappa}_f + \gamma_f \|\mathbf{s}\|, \quad \hat{\kappa}_f(t_0) > 0, \quad (3.26)$$

donde  $\sigma_B, \sigma_f, \gamma_B, \gamma_f > 0$  son parámetros de diseño. Las señales de compensación  $\mathbf{B}^c$  y  $\mathbf{u}_c$  se definen respectivamente por

$$\mathbf{B}^c = -\hat{\rho}_f^2 \frac{\mathbf{s} \mathbf{W}^T(\mathbf{x})}{\hat{\rho}_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \epsilon_B}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u}_c = -\hat{\kappa}_f^2 \frac{\mathbf{s}}{\hat{\kappa}_f \|\mathbf{s}\| + \epsilon_f}. \quad (3.28)$$

Tanto los valores propuestos para  $\hat{\rho}_f$  y  $\hat{\kappa}_f$  dados por (3.25) y (3.26), como los valores propuestos para  $\mathbf{B}^c$  y  $\mathbf{u}_c$  dados por (3.27) y (3.28), respectivamente, satisfacen los requerimientos de estabilidad para el diseño del controlador que se propone.

El siguiente teorema establece la estabilidad para la ley de control (3.11) junto con la estimación de las cotas  $\rho_f$  y  $\kappa_f$  (3.25)-(3.28).

**Teorema 3.2.** *Considérese el sistema mecánico (3.1) con la ley de control (3.11), donde las señales de compensación  $\mathbf{B}^c$  y  $\mathbf{u}_c$  se definen por (3.27) y (3.28), respectivamente. Entonces, todos los estados en el sistema en lazo cerrado permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge exponencialmente al conjunto residual*

$$\left\{ \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \left( \frac{1}{\underline{\lambda}} \right) \left( \frac{\epsilon_e}{\alpha_e \underline{m}} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Sean

$$\tilde{\rho}_f(t) \triangleq \hat{\rho}_f(t) - \rho_f \quad (3.29)$$

y

$$\tilde{\kappa}_f(t) \triangleq \hat{\kappa}_f(t) - \kappa_f. \quad (3.30)$$

Considérese la siguiente función definida positiva,

$$V_e = V + \frac{\tilde{\rho}_f^2(t)}{2\gamma_B} + \frac{\tilde{\kappa}_f^2(t)}{2\gamma_f}, \quad (3.31)$$

donde  $V$  se define en (3.15). Como se procedió en la subsección anterior,

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \left\{ \mathbf{s}^T (\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}^c) \mathbf{W}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f \dot{\rho}_f \right\} \\ &\quad + \left\{ \mathbf{s}^T (\mathbf{u}_c - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\kappa}_f \dot{\kappa}_f \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Siguiendo el procedimiento que se empleó para (3.18), el segundo término, del lado derecho, de la expresión (3.32) se acota por

$$\begin{aligned}
\rho_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \mathbf{s}^T \mathbf{B}^c \mathbf{W}(\mathbf{x}) \\
+ \frac{1}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f \dot{\rho}_f &= \left\{ \hat{\rho}_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| - \hat{\rho}_f^2 \frac{\|\mathbf{s}\|^2 \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\|^2}{\hat{\rho}_f \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| + \epsilon_B} \right\} \\
&+ \tilde{\rho}_f \left\{ \frac{1}{\gamma_B} \dot{\rho}_f - \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{W}(\mathbf{x})\| \right\} \\
&= \epsilon_B - \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f \hat{\rho}_f \\
&= \epsilon_B - \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f^2 - \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f \rho_f \\
&= \epsilon_B - \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \tilde{\rho}_f^2 + \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \rho_f^2. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a que  $-\tilde{\rho}_f \rho_f = -\hat{\rho}_f \rho_f + \rho_f^2 \leq \rho_f^2$ . En forma similar, el tercer término del lado derecho de (3.32) está acotado por

$$\mathbf{s}^T (\mathbf{u}_c - \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})) + \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\kappa}_f \dot{\kappa}_f \leq \epsilon_f - \frac{\sigma_f}{\gamma_f} \tilde{\kappa}_f^2 + \frac{\sigma_f}{\gamma_f} \kappa_f^2. \tag{3.34}$$

De las ecuaciones (3.32)-(3.34) se sigue que

$$\dot{V}_e \leq -2\alpha_e V_e + \epsilon_e, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{3.35}$$

donde

$$\begin{aligned}
\epsilon_e &\triangleq \epsilon_B + \epsilon_f + \frac{\sigma_B}{\gamma_B} \rho_f^2 + \frac{\sigma_f}{\gamma_f} \kappa_f^2, \\
\alpha_e &\triangleq \min \left\{ \frac{k}{m}, \sigma_B, \sigma_f \right\}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Por lo que, la solución de (3.35) se da por

$$V_e(t) \leq [V_e(t_0) - \epsilon_e / 2\alpha_e] e^{-2\alpha_e(t-t_0)} + \frac{\epsilon_e}{2\alpha_e}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{3.37}$$



Por (3.16),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}(t)\|^2 &\leq \left[ \frac{\overline{m}}{\underline{m}} \|\mathbf{s}(t_0)\|^2 + \frac{1}{\gamma_B \underline{m}} \tilde{\rho}_f^2 + \frac{1}{\gamma_f \underline{m}} \tilde{\kappa}_f^2 - \frac{\epsilon_e}{\alpha_e \underline{m}} \right] e^{-2\alpha_e(t-t_0)} + \frac{\epsilon_e}{\alpha_e \underline{m}} \\ &\rightarrow \frac{\epsilon_e}{\alpha_e \underline{m}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sea  $X \subset \mathbb{R}^{4n}$  un conjunto compacto, el cual contiene la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = [\mathbf{q}^T(t_0) \ \dot{\mathbf{q}}^T(t_0) \ \dot{\mathbf{q}}_r^T(t_0) \ \ddot{\mathbf{q}}_r^T(t_0)]$ , y  $X_s \subset \mathbb{R}^n$  la correspondiente vecindad del origen, siendo ésta

$$\text{máx} \left\{ \left[ \frac{\overline{m}}{\underline{m}} \|\mathbf{s}(t_0)\|^2 + \frac{1}{\gamma_B \underline{m}} \tilde{\rho}_f^2 + \frac{1}{\gamma_f \underline{m}} \tilde{\kappa}_f^2 \right]^{1/2}, \left[ \frac{\epsilon_e}{\alpha_e \underline{m}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto,  $\forall \mathbf{s} \in X_s$ , la trayectoria de (3.14) permanecerá en  $X_s$ , lo cual implica que todas las señales en el sistema en lazo cerrado se acotan uniformemente y el vector de error de seguimiento filtrado,  $\mathbf{s}$ , tiende a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen con radio  $[\epsilon_e/(\alpha_e \underline{m})]^{1/2}$ . Consecuentemente, el error de seguimiento tenderá a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen con radio  $[1/\lambda_m] [\epsilon_e/(\alpha_e \underline{m})]^{1/2}$ , el cual puede ser arbitrariamente pequeño ajustando las ganancias de control  $\mathbf{K}$ ,  $\Lambda(\underline{k}, \lambda)$  y los parámetros de diseño  $\epsilon(\epsilon_B, \epsilon_f)$  y  $\sigma_B, \sigma_f$ .  $\square$

### 3.4. Resultados de las Simulaciones

Considérense las dinámicas de un sistema mecánico de un grado de libertad, que consiste de un motor de DC conectado a una carga, a través de un juego de engranes, con una fricción significativa:

$$J\ddot{q} = u - F, \quad (3.40)$$

donde  $q$  es la posición angular del rotor,  $u$  la entrada de control y  $F$  representa a la fricción, lo cual es esencial en el modelo (3.40). Hay muchas investigaciones recientes

acerca de este fenómeno (para estudiarlo ver [2]). Para el propósito de simulación, las fricciones se representan por el modelo de LuGre [4] y [24]:

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{q} \quad (3.41)$$

$$\dot{z} = -\sigma_0 a(\dot{q}) z + \dot{q}, \quad (3.42)$$

$$a(\dot{q}) \triangleq \frac{|\dot{q}|}{\alpha_0 + \alpha_1 e^{-(\dot{q}/\alpha_2)^2}}, \quad (3.43)$$

donde  $z$  es un estado interno de este modelo de fricción. Los parámetros que se usan en la simulación:  $J = 0.0023$ ,  $\sigma_0 = 260$ ,  $\sigma_1 = 0.6$ ,  $\sigma_2 = 0.0176$ ,  $\alpha_0 = 0.28$ ,  $\alpha_1 = 0.05$  y  $\alpha_2 = 0.01$ , se toman de [24].

Este ejemplo también se empleó en [26], donde se propuso un compensador adaptable de fricción.

Puesto que la principal fuente de incertidumbre en (3.40) es la fricción, para exhibir sus efectos se cierra el lazo con un controlador PD con prealimentación:

$$u = J\ddot{q}_r - ks, \quad \ddot{q}_r = \ddot{q}_d - \lambda\dot{\tilde{q}}, \quad \tilde{q} = q - q_d. \quad (3.44)$$

La trayectoria deseada  $q_d$  y sus derivadas se generan por un filtro sobreamortiguado, con función de transferencia

$$\frac{3}{p^2 + 3p + 2}, \quad (3.45)$$

donde  $p \triangleq (d/dt)$  es un operador, que se alimenta por una función  $-\sin(t)$ , los parámetros de control se definen como  $k = \lambda = 1$ . La posición y velocidad iniciales se definen como  $[q(0) \dot{q}(0)] = [1 \ 0]$ , tanto la posición y velocidad deseadas como la entrada de control correspondiente se muestran en la Figura 3.1.

Los errores grandes de seguimiento, que se observan en la Figura 3.1(a), se pueden reducir con ganancias grandes de  $k$  y  $\lambda$ , al costo de un gran esfuerzo de la entrada.

El control difuso robusto (3.11) con las señales de compensación (3.25)-(3.28) se implementó con dos reglas *si-entonces*

$$R^r : \text{Si } \dot{q} \text{ es } A_1^r(\dot{q}), \text{ entonces } \hat{F} \text{ es } b_1^r, \quad r = 1, 2, \quad (3.46)$$

donde  $A_1^r(\dot{q})$  son funciones de membresía Gaussianas (2.5) con  $c_1^1 = 0.1$ ,  $c_1^2 = -0.1$ ,  $\sigma_1^1 = \sigma_1^2 = 2$  y  $\sigma_1^1 = \sigma_1^2 = 2$ , las funciones base difusas se dan por

$$\mathbf{W}(\dot{q}) = [w^1(\dot{q}) \quad w^2(\dot{q})]^T, \quad (3.47)$$

con la correspondiente matriz de pesos

$$\mathbf{B} = [b_1^1 \quad b_1^2]. \quad (3.48)$$

La motivación para este FLS es el modelo más simple para la fricción

$$F = -F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}), \quad (3.49)$$

siendo  $F_s > 0$  el nivel desconocido de la fricción [24].

En la ley de control (3.11), la matriz de pesos nominal es  $B^0 = [0.1 \quad -0.1]$ , los parámetros de diseño en las señales de compensación (3.25)-(3.28) son  $\epsilon_B = \epsilon_f = 0.1$ ,  $\sigma_B = \sigma_f = 0.1$ ,  $\gamma_B = \gamma_f = 10$  y las condiciones iniciales  $\hat{\rho}_f(0) = \hat{\kappa}_f(0) = 1$ . El comportamiento es bastante robusto para estos parámetros de diseño y condiciones iniciales. La evolución de las señales relevantes se muestran en las Figuras 3.2, 3.3 y 3.4. Nótese que

- A pesar de que el controlador difuso robusto tiene sólo dos reglas *si-entonces*, las cuales modelan solamente los efectos de la fricción, el seguimiento es muy bueno.

- El nivel de fricción  $F_s$ , cerca de 0.3 (Nm) como se muestra en la Figura 3.3(b), da una incertidumbre paramétrica (con respecto a  $B^0$ ) de 200 %.
- Se obtiene una convergencia exponencial del error de seguimiento, de la posición y velocidad, a una pequeña vecindad del origen.

Comparando los resultados de la simulación en [26], en donde el conjunto de parámetros utilizados es ligeramente diferente, y los mostrados en [1], el control propuesto proporciona un comportamiento similar; aunque teóricamente, los controles en [1] y en [26] dan un seguimiento asintótico global, mientras que en el control propuesto el seguimiento es exponencial semiglobal hasta un error uniforme y finalmente acotado.

El control de seguimiento, que se menciona en la simulación, se repitió en forma experimental. El experimento consistió de un motor de DC (de Feedback Inc.). Debido a la falta de mantenimiento, este motor presenta fricciones significativas. El algoritmo se implantó en una tarjeta dSPACE 1103, insertada en una computadora Pentium III. El tiempo de muestreo que se empleó fue de 0.001 s.

Como en la simulación, los experimentos iniciados con el control en (3.44) con los parámetros del controlador  $J = 0.0023$ ,  $k = \lambda = 1$ . Debido a la fricción del motor, el motor no se movería con estas ganancias. Así que, se incrementaron las ganancias del controlador a  $k = 10$ ,  $\lambda = 4$ . La posición deseada y la real, así como la entrada de control, se muestran en la Figura 3.5. Obsérvese que el sistema en lazo cerrado falla al seguir a la señal deseada cuando las velocidades cambian de dirección. En seguida, se añade a (3.44) la componente de compensación, implantada por (3.27) y (3.28) con los mismos parámetros como en la simulación y el estimador de la cota de incertidumbre (3.25) y (3.26) con  $\epsilon_B = \epsilon_f = 0.1$ ,  $\sigma_B = \sigma_f = 5$ ,  $\gamma_B = \gamma_f = 10$ , y las condiciones

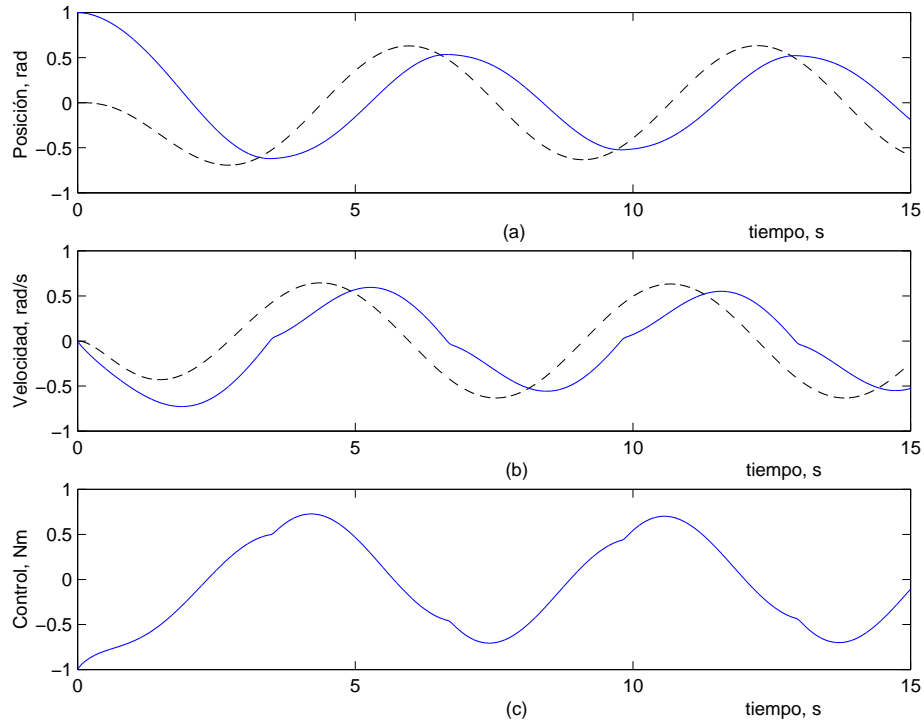


Figura 3.1: Sin compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada  $q_d$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Velocidad angular deseada  $\dot{q}_d$  (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor  $\dot{q}$  (línea sólida). (c) Entrada de control  $u$ .

iniciales  $\hat{\rho}_f(0) = 3.58$ ,  $\hat{\kappa}_f(0) = 6.48$ . Los resultados se presentan en las Figuras 3.6 y 3.7. Nótese que la señal de control responde rápidamente a la fricción, y presenta una mejora significativa en el comportamiento del seguimiento, especialmente cuando la velocidad cambia de dirección.

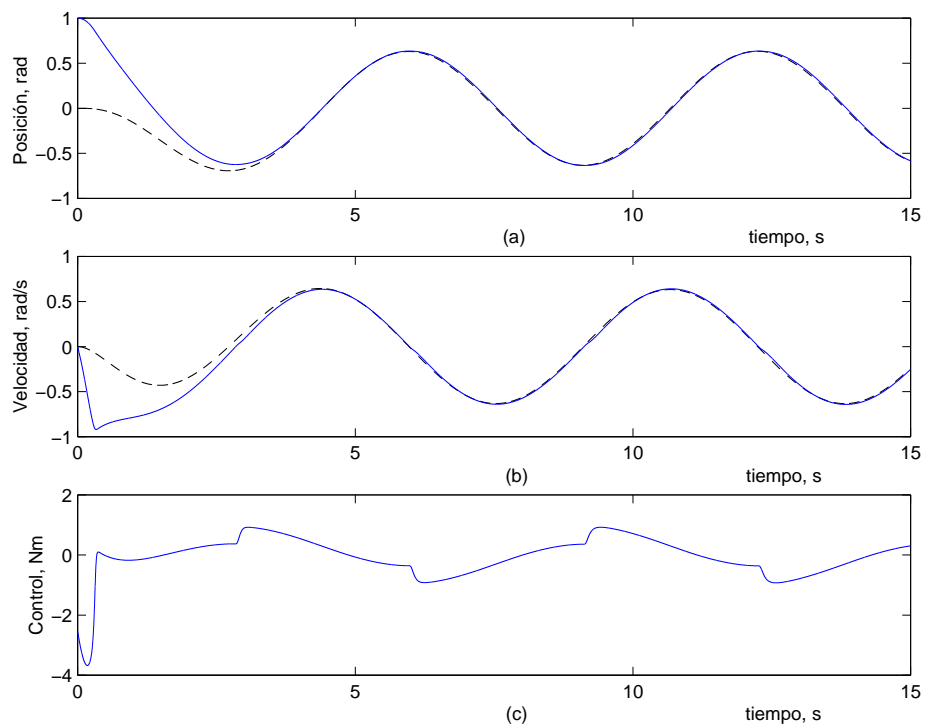


Figura 3.2: Con compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada  $q_d$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Velocidad angular deseada  $\dot{q}_d$  (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor  $\dot{q}$  (línea sólida). (c) Entrada de control  $u$ .

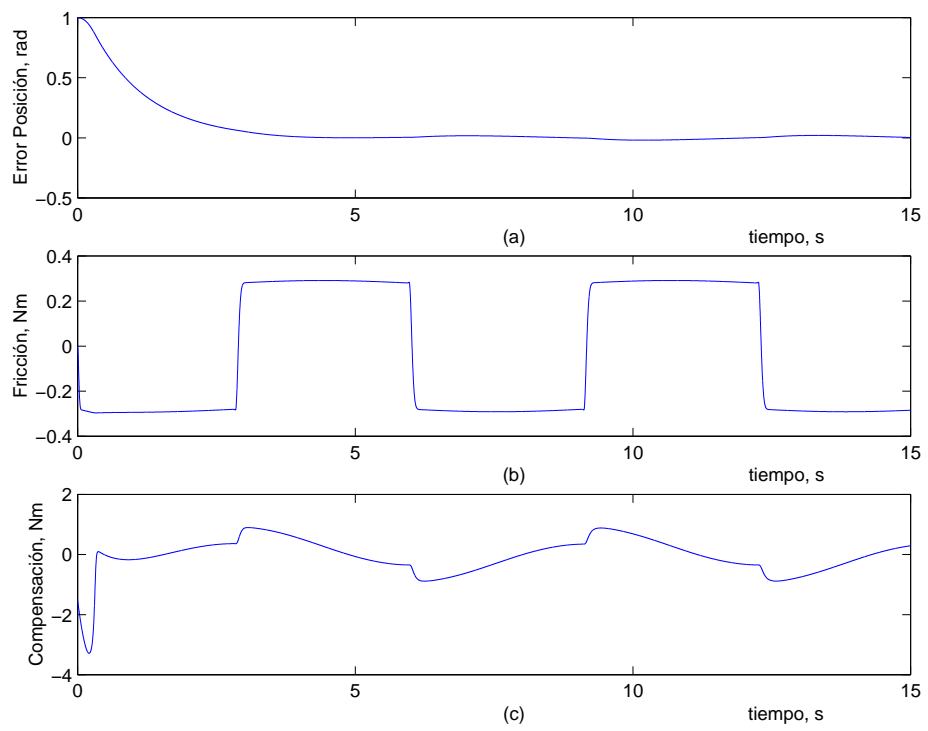


Figura 3.3: (a) Error del seguimiento de la posición  $\tilde{q}$ . (b) Torque de la fricción  $F$ . (c) Señal de compensación  $(\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^c)\mathbf{W}(\mathbf{x}) + u_c$ .

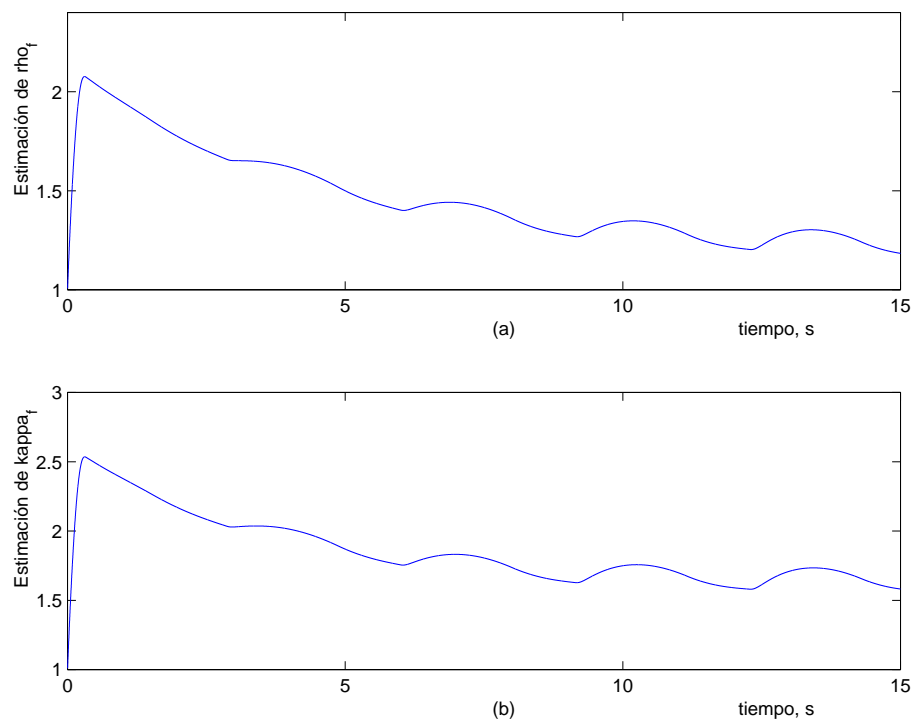


Figura 3.4: Estimación de las cotas de error. (a) Cota del error de la matriz de pesos  $\hat{\rho}_f$ . (b) Cota del error de reconstrucción de la función  $\hat{\kappa}_f$ .



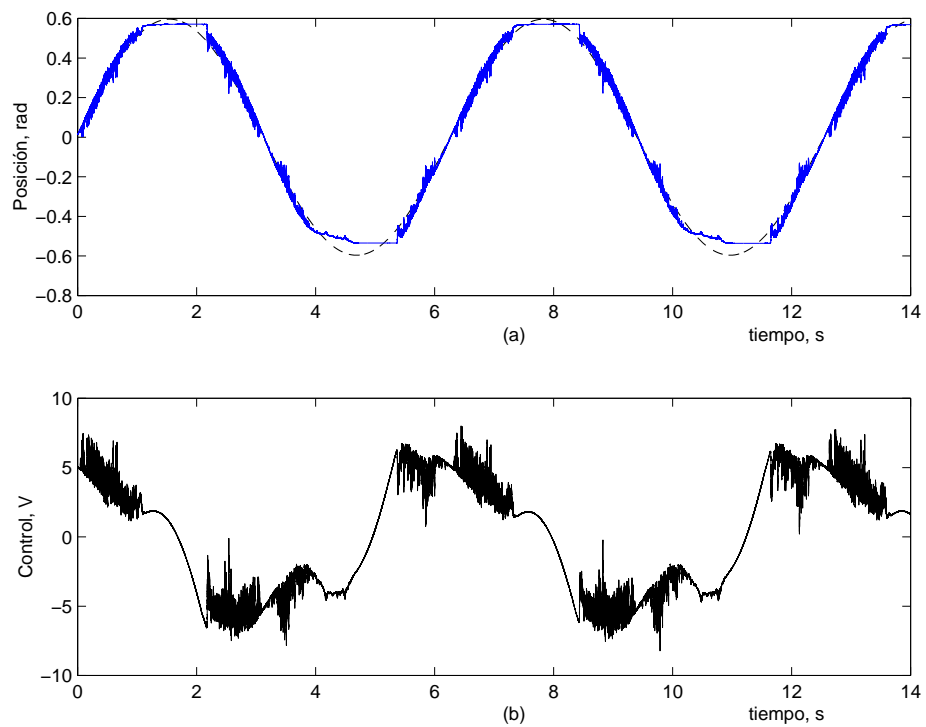


Figura 3.5: Sin compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada  $q_d$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Entrada de control  $u$ .

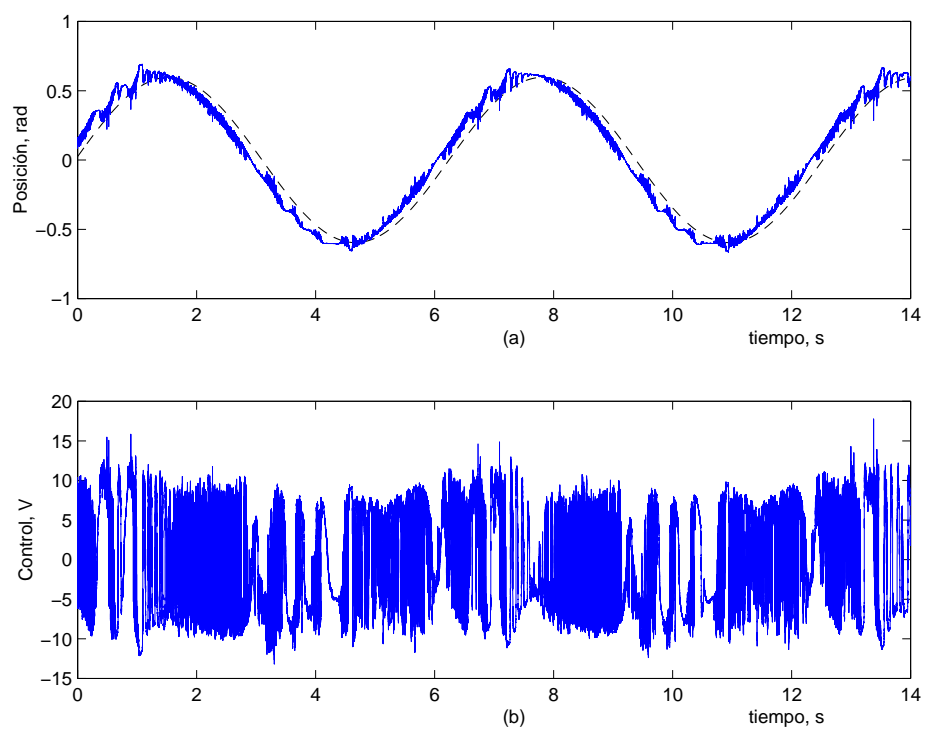


Figura 3.6: Con compensación de la fricción. (a) Posición angular deseada  $q_d$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Entrada de control  $u$ .

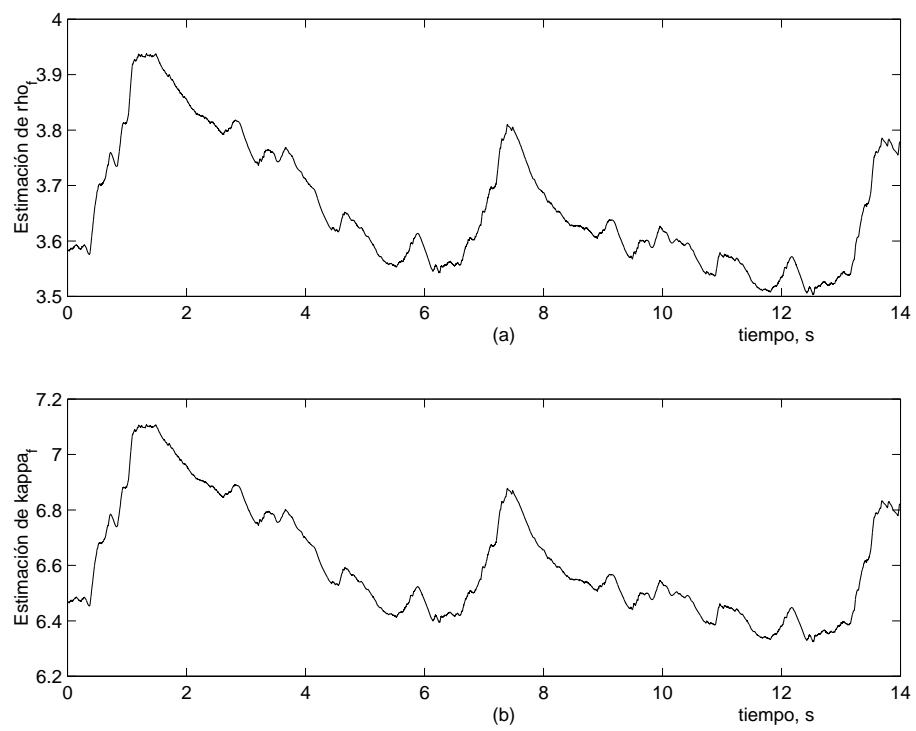


Figura 3.7: Estimación de las cotas de error. (a) Cota del error de la matriz de pesos  $\hat{\rho}_f$ . (b) Cota del error de reconstrucción de la función  $\hat{\kappa}_f$ .

### 3.5. Comentarios

*Comentario 3.1.* Combinando las ventajas de los FLSs y las técnicas de control adaptable y control robusto, el controlador propuesto puede incorporar, fácilmente, información *a priori* acerca del sistema a través de reglas *si-entonces*, con lo cual, se logra la convergencia exponencial del error de seguimiento a una vecindad pequeña del origen, en lugar de la convergencia asintótica como en la mayoría de los esquemas de control existentes basados en aproximadores universales [14, 21, 23, 28, 29, 30, 32, 44] Es importante obtener la convergencia exponencial puesto que es más robusto con respecto a las dinámicas no modeladas y/o a las perturbaciones existentes.

*Comentario 3.2.* Basado en su representación de espacio estado, un control robusto se desarrolló en [14] para manipuladores robóticos. Este sistema de control presenta una convergencia exponencial global a una vecindad arbitrariamente pequeña del origen. Las diferencias principales entre los resultados en [14] y los resultados del presente trabajo son 1) el control propuesto se basa en las ecuaciones Lagrangeanas (3.1) sin transformarlas en la forma espacio estado de primer orden. Por lo tanto, las propiedades físicas se conservan, las cuales son utilizadas para facilitar el diseño de control. 2) Las cotas de incertidumbre en el control propuesto son constantes, las cuales son fáciles de ser estimadas; mientras que en [14], la cota de incertidumbre es una cantidad dependiente del estado ( $\rho_s(x)$  en la Ec. (15) de [14]). 3) La implementación en [14] necesita parámetros como la cota superior en la matriz inicial ( $\overline{m}$ ), y las cotas sobre la cota de incertidumbre  $\rho_s(x)$  en cada uno de los conjuntos difusos ( $k_i$  en la Ec. (25) de [14]), lo cual es difícil de conseguir además de tomar valores muy grandes en la simulación.

*Comentario 3.3.* En [23] y en [36], se propusieron dos controles adaptables de seguimiento, los cuales usan aproximadores universales (NN y FLS, respectivamente), logrando convergencia asintótica del error de seguimiento a una vecindad pequeña del origen. Así, para reducir el error de aproximación, se emplearon términos tal como (3.12) y (3.13). La implementación de estos términos, sin embargo, requiere de información sobre las cota del error de aproximación y sobre la cota de los pesos óptimos desconocidos del aproximador universal. Introduciendo un estimador de las cotas de incertidumbre, el control en este capítulo no necesita información *a priori* sobre estas cotas. También, puesto que sólo hay dos parámetros estimados en línea independientes de los grados de libertad del sistema mecánico, la carga computacional es mucho menor que en un control adaptable, el cual actualiza en línea la matriz de pesos, típicamente de dimensión grande.

*Comentario 3.4.* Una de las ventajas de usar FLS como un aproximador de las incertidumbres es la fácil incorporación de la información *a priori* a través de reglas *si-entonces*, y no necesita información sobre la estructura de las incertidumbres como en los esquemas de compensación basados en un modelo de la incertidumbre (ver, *e.g.*, [26] y [37]).

# Capítulo 4

## Control Difuso Robusto Adaptable para una Clase de Sistemas No Lineales Inciertos

### 4.1. Introducción

En este capítulo, se considera el problema de controlar una clase de sistemas no lineales, expresados en la forma canónica, para seguir una trayectoria deseada en presencia de incertidumbres. En la siguiente sección, se presenta la descripción de un sistema no lineal, que generaliza el sistema mecánico del capítulo anterior. En la Sección 4.3, primero se desarrollan las ecuaciones de error de las dinámicas del sistema no lineal. En seguida, empleando FLSs para aproximar las dinámicas desconocidas del sistema, se diseña la ley de control. Para la ley de control que se propone se establece la estabilidad por los Teoremas 4.1 y 4.2. En la Sección 4.4, se presentan los resultados de las simulaciones que avalan el esquema de control que se propone en este capítulo.

## 4.2. Planteamiento del Problema

Se considera una clase de sistemas no lineales cuyas ecuaciones dinámicas pueden ser expresadas en la forma canónica (1.1).

Sea  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados del sistema y  $u(t) \in \mathbb{R}$  su entrada de control. Así, para asegurar la controlabilidad de (1.1), se consideran las Suposiciones 1.1, 1.3 y 1.5.

Dado  $\mathbf{x}_d = [x_{d1} \ x_{d2} \ \dots \ x_{dn}]^T \in \mathbb{R}^n$  un vector acotado de estados deseados, el vector de error de seguimiento se define como  $\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$ . El problema que se considera en este capítulo es diseñar una ley de control para (1.1) que asegure que el vector de error de seguimiento sea final y uniformemente acotado; además, se desea que la cota final sea arbitrariamente pequeña así, a través de una selección apropiada de los parámetros del controlador, todas las señales del sistema se mantienen uniformemente acotadas.

## 4.3. Diseño de Control

### 4.3.1. Ecuaciones de error

Para el siguiente análisis se usa la teoría de estabilidad de Lyapunov; primero, se desarrollan las ecuaciones de error de las dinámicas del sistema no lineal (1.1).

Sea  $p \triangleq d/dt$  el operador derivativo, y sea  $s$  el error de seguimiento filtrado, que se define como

$$s \triangleq (p + \lambda)^{(n-1)} \tilde{x}, \quad (4.1)$$

con  $\lambda > 0$  como una constante definida por el usuario. Es claro que, de (4.1)

$$\tilde{x}^{(m)}(t) = \frac{p^m}{(p + \lambda)^{(n-1)}} s(t), \quad m = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (4.2)$$

si  $|s(t)| \leq \psi, \forall t \geq t_0$ , entonces  $|\tilde{x}^{(m)}(t)| \leq \psi(2\lambda)^m / \lambda^{(n-1)}, \forall t \geq t_0$  ([33], p. 279). De este modo, la ley de control se diseñará para que el error de seguimiento filtrado  $s$  sea uniforme y finalmente acotado. Las dinámicas de  $s$  se obtienen de (1.1) y (4.1)

$$\begin{aligned} \dot{s} &= p(p + \lambda)^{(n-1)} \tilde{x} \\ &= (p + \lambda - \lambda) (p + \lambda)^{(n-1)} \tilde{x} \\ &= (p + \lambda) (p + \lambda)^{(n-1)} \tilde{x} - (\lambda) (p + \lambda)^{(n-1)} \tilde{x} \\ &= (p + \lambda)^n \tilde{x} - (\lambda) s \\ &= -\lambda s + f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) + b(\mathbf{x})u, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) \triangleq -x_d^{(n)} + \sum_{i=1}^n C_n^i \lambda^i p^{(n-i)} \tilde{x}. \quad (4.4)$$

Observando de la ecuación de error (4.3) que si  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  son funciones conocidas, la selección de la ley de control

$$u = -\frac{1}{b(\mathbf{x})} [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) + k_s s], \quad k_s > 0 \quad (4.5)$$

garantizará que el error de seguimiento filtrado  $s(t)$  tienda exponencialmente a cero. Dado que  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  se desconocen, cada una se aproximará por un FLS para la implementación de la ley de control.



### 4.3.2. Ley de control

Siguiendo los resultados del capítulo anterior, las funciones desconocidas  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  se pueden aproximar por (2.44), en un conjunto compacto  $X \in \mathbb{R}^n$ ; tal que

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_f^* \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad (4.6)$$

$$b(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_b^* \mathbf{W}_b(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{B}_f^* \in \mathbb{R}^{1 \times n_{rf}}$  y  $\mathbf{B}_b^* \in \mathbb{R}^{1 \times n_{rb}}$  son las matrices de pesos óptimas,  $\mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_{rf}}$  y  $\mathbf{W}_b(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_{rb}}$  son vectores de funciones base difusas con  $n_{rf}$  y  $n_{rb}$  reglas difusas en los FLSs. Los errores de reconstrucción de las funciones,  $\Delta f(\mathbf{x})$  y  $\Delta b(\mathbf{x})$ , se acotan por cotas desconocidas  $\kappa_f$  y  $\kappa_b$ , respectivamente,

$$|\Delta f(\mathbf{x})| \leq \kappa_f, \quad |\Delta b(\mathbf{x})| \leq \kappa_b. \quad (4.8)$$

Sean  $\mathbf{B}_f^* \in \mathbb{R}^{1 \times n_{rf}}$  y  $\mathbf{B}_b^* \in \mathbb{R}^{1 \times n_{rb}}$  matrices de pesos óptimas, los errores de las matrices de peso se definen como

$$\tilde{\mathbf{B}}_f \triangleq \mathbf{B}_f^* - \mathbf{B}_f^0, \quad \tilde{\mathbf{B}}_b \triangleq \mathbf{B}_b^* - \mathbf{B}_b^0. \quad (4.9)$$

Tanto  $\tilde{\mathbf{B}}_f$  como  $\tilde{\mathbf{B}}_b$  se acotan por

$$\|\tilde{\mathbf{B}}_f\| \leq \rho_f, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_b\| \leq \rho_b, \quad (4.10)$$

respectivamente.

Primero, se asume que las cotas sobre los errores  $\kappa_f$ ,  $\kappa_b$ ,  $\rho_f$  y  $\rho_b$ , se conocen. Posteriormente, se remueve esta suposición con la estimación en línea de las cotas.

Sean

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_f^0 \mathbf{W}_f(\mathbf{x}), \\ b_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}_b^0 \mathbf{W}_b(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

las funciones nominales de las funciones desconocidas. En este capítulo, para el sistema no lineal (1.1) se propone el control

$$u = u_0 + u_c, \quad (4.12)$$

donde  $u_0$  es el control nominal, que se define como

$$u_0 = -\frac{1}{b_0(\mathbf{x})} [f_0(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_d) + k_s s], \quad k_s > 0, \quad (4.13)$$

y  $u_c$  es una señal de compensación de los errores de las matrices de pesos y de los errores de reconstrucción de las funciones, debidas a la aproximación de las funciones desconocidas  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$ ,  $u_c$  se diseña como

$$u_c = \mathbf{B}_f^c \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + w_f + \{\mathbf{B}_b^c \mathbf{W}_b(\mathbf{x}) + w_b\} u_0, \quad (4.14)$$

donde

$$\mathbf{B}_f^c = -\frac{\rho_f^2}{b_0} \frac{s \mathbf{W}_f^T(\mathbf{x})}{\rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + \epsilon_{f1}}, \quad (4.15)$$

$$w_f = -\frac{\kappa_f^2}{b_0} \frac{s}{\kappa_f |s| + \epsilon_{f2}}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{B}_b^c = -\frac{\rho_b^2}{b_0} \frac{s u_0 \mathbf{W}_b^T(\mathbf{x})}{\rho_b |s u_0| \|\mathbf{W}_b(\mathbf{x})\| + \epsilon_{b1}}, \quad (4.17)$$

$$w_b = -\frac{\kappa_b^2}{b_0} \frac{s u_0}{\kappa_b |s u_0| + \epsilon_{b2}}, \quad (4.18)$$

donde  $\epsilon_{f1}, \epsilon_{f2}, \epsilon_{b1}, \epsilon_{b2} > 0$ , son parámetros de diseño. Los valores propuestos para  $\mathbf{B}_f^c$ ,  $w_f$ ,  $\mathbf{B}_b^c$  y  $w_b$ , definidos por (4.15), (4.16), (4.17) y (4.18), respectivamente, satisfacen los requerimientos de estabilidad para el diseño del controlador (4.14).

### 4.3.3. Análisis de estabilidad y comportamiento

La ley de control  $u$ , que se define en (4.12) por el control nominal (4.13) y la señal de compensación (4.14), se sustituye en la ecuación para las dinámicas de  $s$  (4.3), con lo que se obtiene el sistema en lazo cerrado en términos del error de seguimiento filtrado  $s$

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -(\lambda + k_s)s + \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{B}}_f + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_f^c \right] \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + [\Delta f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_f] \right\} \\ &= + \left\{ \left[ \tilde{\mathbf{B}}_b + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_b^c \right] \mathbf{W}_b(\mathbf{x})u_0 + [\Delta b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_b] u_0 \right\}\end{aligned}\quad (4.19)$$

donde  $\tilde{\mathbf{B}}_f$  y  $\tilde{\mathbf{B}}_b$  denotan la incertidumbre estructurada, acotadas en (4.10),  $\Delta f(\mathbf{x})$  y  $\Delta b(\mathbf{x})$  denotan la incertidumbre no estructurada, acotadas en (4.8).

Ahora, se presenta el siguiente teorema de estabilidad para la ley de control (4.12).

**Teorema 4.1.** *Considérese el sistema (1.1) con la ley de control (4.12), donde  $u_0$  está dada por (4.13) y  $u_c$  está dada por (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) y (4.18). Entonces, todos los estados en el sistema difuso robusto permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge exponencialmente al conjunto residual*

$$\left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R} \mid |\tilde{x}| \leq \left( \frac{1}{\lambda^{(n-1)}} \right) \left( \frac{\epsilon}{(\lambda + k_s)} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Considérese la siguiente función definida positiva,

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (4.20)$$

Derivando  $V(t)$  con respecto al tiempo a lo largo de (4.19) resulta,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -(\lambda + k_s)s^2 + \left\{ s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_f + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_f^c \right] \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \right\} + \left\{ s [\Delta f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_f] \right\} \\ &\quad + \left\{ s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_b + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_b^c \right] \mathbf{W}_b(\mathbf{x})u_0 \right\} + \left\{ s [\Delta b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_b] u_0 \right\}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Considerando el segundo término del lado derecho de (4.21),

$$\begin{aligned}
 s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_f + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_f^c \right] \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) &\leq |s| \left\| \tilde{\mathbf{B}}_f \right\| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + b_0 s \mathbf{B}_f^c \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \\
 &\leq \rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + b_0 s \mathbf{B}_f^c \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \\
 &= \rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| - \rho_f^2 \frac{|s|^2 \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\|^2}{\rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + \epsilon_{f1}} \\
 &= \frac{\rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\|}{\rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + \epsilon_{f1}} \epsilon_{f1} \\
 &\leq \epsilon_f.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

El segundo término del lado derecho de la primera desigualdad de (4.22) se debe a  $b(\mathbf{x}) \geq b_0 > 0$  y  $s \mathbf{B}_f^c \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \leq 0$ . En forma similar, el tercer término del lado derecho de (4.21) está acotado por

$$\begin{aligned}
 s [\Delta f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_f] &\leq |s| |\Delta f(\mathbf{x})| + b_0 s w_f \\
 &\leq \kappa_f |s| + b_0 s w_f \\
 &\leq \kappa_f |s| - \kappa_f^2 \frac{|s|^2}{\kappa_f |s| + \epsilon_{f2}} \\
 &= \frac{\kappa_f^2 |s|}{\kappa_f |s| + \epsilon_{f2}} \epsilon_{f2}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Mientras que el quinto término de (4.21),

$$s [\Delta b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_b] u_0 \leq \epsilon_{b2}. \tag{4.24}$$

Sea

$$\epsilon \triangleq \epsilon_{f1} + \epsilon_{f2} + \epsilon_{b1} + \epsilon_{b2}, \tag{4.25}$$

se sigue de las ecuaciones (4.21)-(4.24) que

$$\dot{V} \leq -2(\lambda + k_s)V + \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \tag{4.26}$$

lo cual implica que  $\forall t \geq t_0 \geq 0$

$$V(t) \leq \left\{ V(t_0) - \frac{\epsilon}{2(\lambda + k_s)} \right\} e^{-2(\lambda+k_s)(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{2(\lambda + k_s)}. \quad (4.27)$$

Por la Ec. (4.20),

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &\leq \left\{ |s(t_0)|^2 - \frac{\epsilon}{\lambda + k_s} \right\} e^{-2(\lambda+k_s)(t-t_0)} + \frac{\epsilon}{\lambda + k_s} \\ &\rightarrow \frac{\epsilon}{\lambda + k_s}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Por lo tanto, una cota final para  $|\tilde{x}^{(m)}(t)|$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$  es

$$|\tilde{x}^{(m)}(t)| \leq \left( \frac{\epsilon}{\lambda + k_s} \right)^{1/2} \frac{(2\lambda)^m}{\lambda^{(n-1)}}. \quad (4.29)$$

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto que contiene la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $X_s \subset \mathbb{R}$  la vecindad del origen con radio  $\max \left\{ |s(t_0)|, \left( \frac{\epsilon}{\lambda+k_s} \right)^{1/2} \right\}$ . Por lo tanto, para toda  $s(t_0) \in X_s$ , la trayectoria de (4.19) permanecerá en  $X_s$ . Esto significa que para toda  $\mathbf{x}(t_0) \in X$ , la trayectoria correspondiente del sistema en lazo cerrado permanecerá en  $X$ . Consecuentemente, toda las señales en el sistema de lazo cerrado están uniformemente acotadas, y el error de seguimiento filtrado  $s$  tiende a una vecindad del origen con radio  $[\epsilon/(\lambda + k_s)]^{1/2}$ . Esto implica que el error de seguimiento tenderá a una vecindad del origen con radio  $(1/\lambda^{(n-1)}) [\epsilon/(\lambda + k_s)]^{1/2}$  (ver (4.2)), el cual se puede hacer arbitrariamente pequeño ajustando las ganancias de control  $k_s$ ,  $\lambda$  y el parámetro de diseño  $\epsilon \in (\epsilon_{f1}, \epsilon_{f2}, \epsilon_{b1}, \epsilon_{b2})$ .  $\square$

Para remover las suposición sobre el conocimiento de las cotas de incertidumbre  $\rho_f$ ,  $\kappa_f$ ,  $\rho_b$  y  $\kappa_b$  se diseña un estimador en línea para cada una de estas cotas.

#### 4.3.4. Estimación de las cotas de incertidumbre

Sean  $\hat{\rho}_f(t)$ ,  $\hat{\kappa}_f(t)$ ,  $\hat{\rho}_b(t)$  y  $\hat{\kappa}_b(t)$ , las estimaciones de  $\rho_f(t)$ ,  $\kappa_f(t)$ ,  $\rho_b(t)$  y  $\kappa_b(t)$ , en el instante  $t$ , respectivamente, las cuales se actualizan de acuerdo con

$$\dot{\hat{\rho}}_f = -\sigma_{f1}\hat{\rho}_f + \gamma_{f1}|s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\|, \hat{\rho}_f(t_0) > 0, \quad (4.30)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_f = -\sigma_{f2}\hat{\kappa}_f + \gamma_{f2}|s|, \hat{\kappa}_f(t_0) > 0, \quad (4.31)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_b = -\sigma_{b1}\hat{\rho}_b + \gamma_{b1}|su_0| \|\mathbf{W}_b(\mathbf{x})\|, \hat{\rho}_b(t_0) > 0, \quad (4.32)$$

$$\dot{\hat{\kappa}}_b = -\sigma_{b2}\hat{\kappa}_b + \gamma_{b2}|su_0|, \hat{\kappa}_b(t_0) > 0, \quad (4.33)$$

donde  $\sigma_{f1}$ ,  $\sigma_{f2}$ ,  $\sigma_{b1}$ ,  $\sigma_{b2} > 0$  y  $\gamma_{f1}$ ,  $\gamma_{f2}$ ,  $\gamma_{b1}$ ,  $\gamma_{b2} > 0$  son parámetros de diseño. Tanto los valores propuestos para las estimaciones, (4.30)-(4.33), como las señales de compensación  $\mathbf{B}_f^c$ ,  $w_f$ ,  $\mathbf{B}_b^c$  y  $w_b$ , definidas por

$$\mathbf{B}_f^c = -\frac{\hat{\rho}_f^2}{b_0} \frac{s\mathbf{W}_f^T(\mathbf{x})}{\hat{\rho}_f|s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + \epsilon_{f1}}, \quad (4.34)$$

$$w_f = -\frac{\hat{\kappa}_f^2}{b_0} \frac{s}{\hat{\kappa}_f|s| + \epsilon_{f2}}, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B}_b^c = -\frac{\hat{\rho}_b^2}{b_0} \frac{su_0\mathbf{W}_b^T(\mathbf{x})}{\hat{\rho}_b|su_0| \|\mathbf{W}_b(\mathbf{x})\| + \epsilon_{b1}}, \quad (4.36)$$

$$w_b = -\frac{\hat{\kappa}_b^2}{b_0} \frac{su_0}{\hat{\kappa}_b|su_0| + \epsilon_{b2}}, \quad (4.37)$$

respectivamente, satisfacen los requerimientos de estabilidad para el diseño del controlador que se propone.

El siguiente teorema garantiza la estabilidad para la ley de control (4.12) junto con la estimación de las cotas  $\rho_f$ ,  $\kappa_f$ ,  $\rho_b$  y  $\kappa_b$ .

**Teorema 4.2.** *Considérese el sistema (1.1) con la ley de control (4.12),  $u_0$  dada por (4.13) y las señales de compensación  $\mathbf{B}_f^c$ ,  $w_f$ ,  $\mathbf{B}_b^c$  y  $w_b$ , dadas por (4.34), (4.35), (4.36) y (4.37), respectivamente. Entonces, todos los estados en el sistema difuso*

robusto permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge exponencialmente al conjunto residual

$$\left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R} \mid |\tilde{x}| \leq \left( \frac{1}{\lambda^{(n-1)}} \right) \left( \frac{\epsilon_e}{\alpha} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Sean  $\tilde{\rho}_f(t) \triangleq \hat{\rho}_f(t) - \rho_f$ ,  $\tilde{\rho}_b(t) \triangleq \hat{\rho}_b(t) - \rho_b$ ,  $\tilde{\kappa}_f(t) \triangleq \hat{\kappa}_f(t) - \kappa_f$ ,  $\tilde{\kappa}_b(t) \triangleq \hat{\kappa}_b(t) - \kappa_b$ . Considérese la siguiente función definida positiva,

$$V_e = V + \frac{\tilde{\rho}_f^2(t)}{2\gamma_{f1}} + \frac{\tilde{\kappa}_f^2(t)}{2\gamma_{f2}} + \frac{\tilde{\rho}_b^2(t)}{2\gamma_{b1}} + \frac{\tilde{\kappa}_b^2(t)}{2\gamma_{b2}}, \quad (4.38)$$

donde  $V$  se define en (4.20). Como se procedió en la subsección previa,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(\lambda + k_s)s^2 + \left\{ s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_f + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_f^c \right] \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma_{f1}} \tilde{\rho}_f \dot{\rho}_f \right\} \\ &\quad + \left\{ s \left[ \Delta f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_f \right] + \frac{1}{\gamma_{f2}} \tilde{\kappa}_f \dot{\kappa}_f \right\} \\ &\quad + \left\{ s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_b + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_b^c \right] \mathbf{W}_b(\mathbf{x})u_0 + \frac{1}{\gamma_{b1}} \tilde{\rho}_b \dot{\rho}_b \right\} \\ &\quad + \left\{ s \left[ \Delta b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_b \right] u_0 + \frac{1}{\gamma_{b2}} \tilde{\kappa}_b \dot{\kappa}_b \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Siguiendo los pasos de (4.22), el segundo término del lado derecho de (4.39) está acotado por,

$$\begin{aligned} s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_f + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_f^c \right] \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma_{f1}} \tilde{\rho}_f \dot{\rho}_f &\leq \rho_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + b_0 s \mathbf{B}_f^c \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma_{f1}} \tilde{\rho}_f \dot{\rho}_f \\ &= \left\{ \hat{\rho}_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| - \rho_f^2 \frac{|s|^2 \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\|^2}{\hat{\rho}_f |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| + \epsilon_{f1}} \right\} \\ &\quad + \tilde{\rho}_f \left\{ \frac{1}{\gamma_{f1}} \dot{\rho}_f - |s| \|\mathbf{W}_f(\mathbf{x})\| \right\} \\ &\leq \epsilon_{f1} - \frac{\sigma_{f1}}{\gamma_{f1}} \tilde{\rho}_f \hat{\rho}_f \\ &\leq \epsilon_{f1} - \frac{\sigma_{f1}}{\gamma_{f1}} \tilde{\rho}_f^2 + \frac{\sigma_{f1}}{\gamma_{f1}} \rho_f^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

La última desigualdad se debe a que  $-\tilde{\rho}_f = -\hat{\rho}\rho_f + \rho_f^2 \leq \rho_f^2$ . En forma similar, el tercer término del lado derecho de (4.39) está acotado por,

$$s [\Delta f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_f] + \frac{1}{\gamma_{f2}} \tilde{\kappa}_f \dot{\kappa}_f \leq \epsilon_{f2} - \frac{\sigma_{f2}}{\gamma_{f2}} \tilde{\kappa}_f^2 + \frac{\sigma_{f2}}{\gamma_{f2}} \kappa_f^2. \quad (4.41)$$

De la misma forma al desarrollo inmediato anterior, se tiene que

$$s \left[ \tilde{\mathbf{B}}_b + b(\mathbf{x})\mathbf{B}_b^c \right] \mathbf{W}_b(\mathbf{x})u_0 + \frac{1}{\gamma_{b1}} \tilde{\rho}_b \dot{\rho}_b \leq \epsilon_{b1} - \frac{\sigma_{b1}}{\gamma_{b1}} \tilde{\rho}_b^2 + \frac{\sigma_{b1}}{\gamma_{b1}} \rho_b^2, \quad (4.42)$$

$$s [\Delta b(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})w_b] u_0 + \frac{1}{\gamma_{b2}} \tilde{\kappa}_b \dot{\kappa}_b \leq \epsilon_{b2} - \frac{\sigma_{b2}}{\gamma_{b2}} \tilde{\kappa}_b^2 + \frac{\sigma_{b2}}{\gamma_{b2}} \kappa_b^2. \quad (4.43)$$

Se sigue de (4.39)-(4.43) que

$$\dot{V}_e \leq -2\alpha V_e + \epsilon_e, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (4.44)$$

donde

$$\alpha \triangleq \min \{(\lambda + \kappa_s), \sigma_{f1}, \sigma_{f2}, \sigma_{b1}, \sigma_{b2}\}, \quad (4.45)$$

$$\epsilon_e \triangleq \epsilon_{f1} + \epsilon_{f2} + \epsilon_{b1} + \epsilon_{b2} + \frac{\sigma_{f1}}{\gamma_{f1}} \rho_f^2 + \frac{\sigma_{f2}}{\gamma_{f2}} \kappa_f^2 + \frac{\sigma_{b1}}{\gamma_{b1}} \rho_b^2 + \frac{\sigma_{b2}}{\gamma_{b2}} \kappa_b^2. \quad (4.46)$$

La ecuación (4.44) implica que

$$V_e(t) \leq \left\{ V_e(t_0) - \frac{\epsilon_e}{2\alpha} \right\} e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{\epsilon_e}{2\alpha}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (4.47)$$

Por la Ec. (4.38),

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &\leq \left\{ |s(t_0)|^2 - \frac{\epsilon_e}{\alpha} \right\} e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{\epsilon_e}{\alpha} \\ &\rightarrow \frac{\epsilon_e}{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Sea  $X \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto, que contiene la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ , y  $X_s \subset \mathbb{R}$  la correspondiente vecindad del origen con radio máx  $\left\{ |s(t_0)|, \left(\frac{\epsilon_e}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$ . Por



lo tanto, para toda  $s(t_0) \in X_s$ , la trayectoria de (4.19) permanecerá en  $X_s$ , lo cual implica que todas las señales en el sistema de lazo cerrado están uniformemente acotadas, y el error de seguimiento filtrado  $s$  tiende a una vecindad centrada del origen con radio  $[\epsilon_e/\alpha]^{1/2}$ . Consecuentemente, el error de seguimiento tenderá a una vecindad centrada del origen con magnitud  $(1/\lambda^{n-1})[\epsilon_e/\alpha]^{1/2}$ , la cual se puede hacer arbitrariamente pequeña ajustando las ganancias de control  $k_s$ ,  $\lambda$ , los parámetros en la señal de compensación  $\epsilon_{f1}$ ,  $\epsilon_{f2}$ ,  $\epsilon_{b1}$ ,  $\epsilon_{b2}$ , y los parámetros en los estimadores  $\sigma_{f1}$ ,  $\gamma_{f1}$ ,  $\sigma_{f2}$ ,  $\gamma_{f2}$ ,  $\sigma_{b1}$ ,  $\gamma_{b1}$ ,  $\sigma_{b2}$ ,  $\gamma_{b2}$ .  $\square$

## 4.4. Resultados de las Simulaciones

Para verificar los resultados teóricos, fue empleado el sistema (3.40) en la forma canónica (1.1), esto es,

$$\ddot{q} = \frac{-F}{J} + \frac{1}{J}u \quad (4.49)$$

donde  $f(\dot{q}) = F/J$  y  $b = 1/J$ .  $q$  es la posición angular del rotor y variable de salida del sistema,  $u$  la entrada de control,  $F$  representa a las fricciones y  $J$  es el parámetro de inercia. La fuente de incertidumbre en (4.49) es la fricción y la incertidumbre del parámetro de inercia, la cual es una constante desconocida. De este modo, sólo se necesita un FLS para aproximar a  $f(\dot{q})$ .

Para el propósito de simulación, (3.41), (3.42) y (3.43) representan la fricción del modelo de LuGre [4] y [24]. Mientras que, los parámetros usados son los mismos de [24], esto es,  $J = 0.0023$ ,  $\sigma_0 = 260$ ,  $\sigma_1 = 0.6$ ,  $\sigma_2 = 0.0176$ ,  $\alpha_0 = 0.28$ ,  $\alpha_1 = 0.05$ ,  $\alpha_2 = 0.01$ .

El control difuso robusto (4.12), con señales de compensación (4.34), (4.35) y

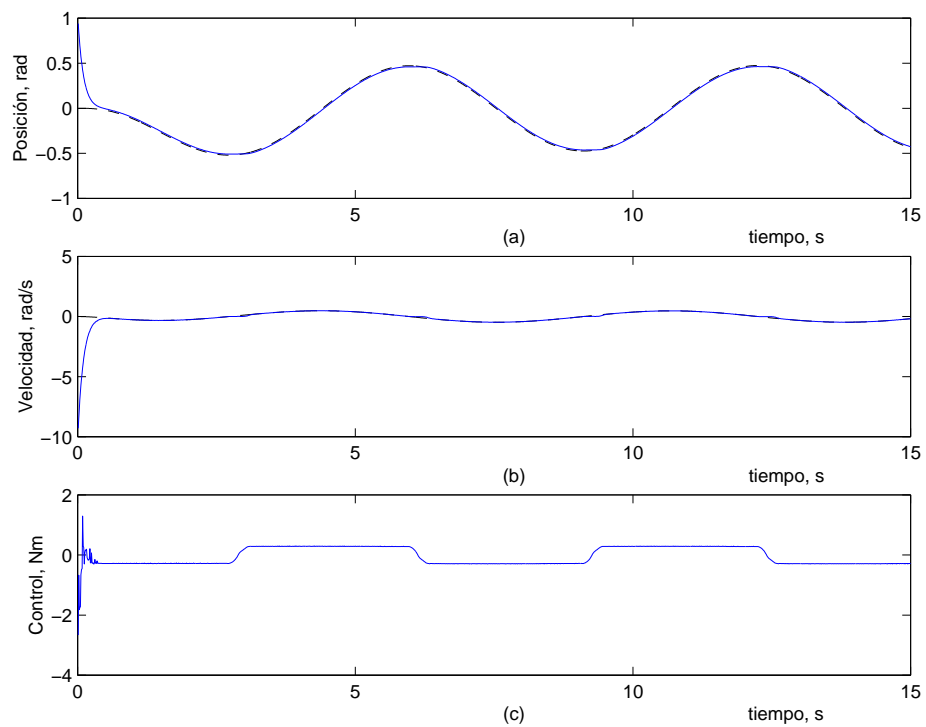


Figura 4.1: Control difuso robusto. (a) Señal de referencia  $q_r$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Velocidad de referencia  $\dot{q}_r$  (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor  $\dot{q}$  (línea sólida). (c) Entrada de control  $u$ .

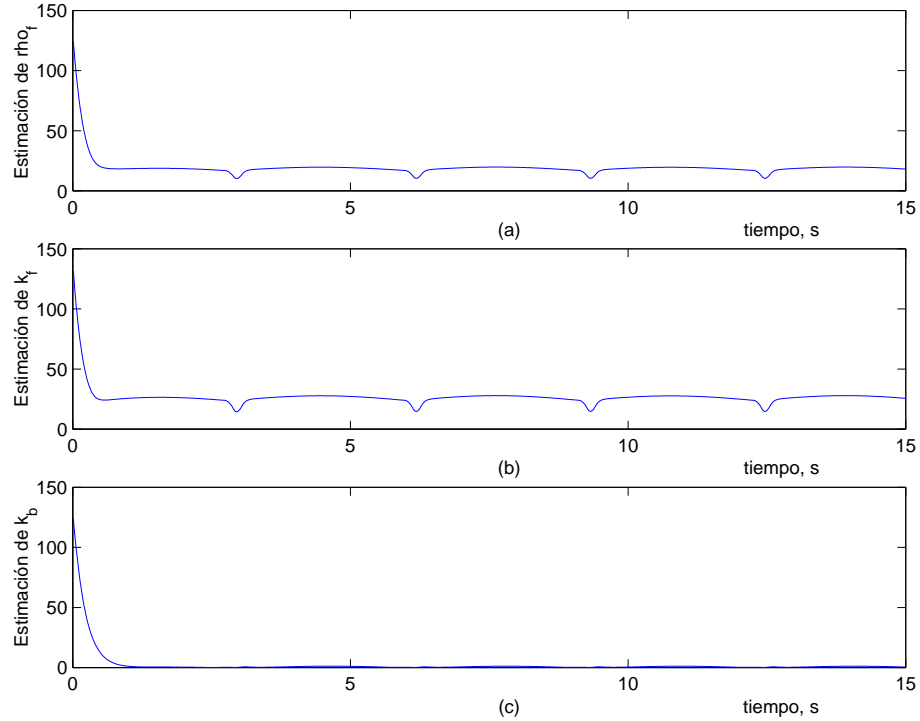


Figura 4.2: La estimación de las cotas de incertidumbre. (a) Cota sobre el error de la matriz de pesos  $\tilde{\mathbf{B}}_f$ . (b) Cota sobre el error de reconstrucción  $\Delta f(\mathbf{x})$ . (c) Cota sobre el error de reconstrucción  $\Delta b(\mathbf{x})$ .

(4.37), y los estimadores (4.30), (4.31) y (4.33), se implementó con dos reglas *si-entonces* (3.46), donde las funciones de membresía son funciones Gaussianas (2.5) con los mismos parámetros. De igual forma, se emplean las funciones (3.47) y (3.48) para las funciones base difusas y la matriz de pesos, respectivamente.

En la ley de control (4.12), la matriz de pesos nominal es  $b_0 = 1/J_0$ , con  $J = 0.01$ , y  $\mathbf{B}_f^0 = [100 \ -100]$ , y los parámetros de diseño que se emplean en las señales de compensación son  $\epsilon_{f1} = \epsilon_{f2} = \epsilon_{b2} = 1$ ,  $\sigma_{f1} = \sigma_{f2} = \sigma_{b2} = 10$ ,  $\gamma_{f1} = \gamma_{f2} = \gamma_{b2} = 1000$ . La trayectoria de referencia  $q_r$  y sus derivadas se generan por un filtro sobreamortiguado, con función de transferencia (3.45), y se alimenta por una función

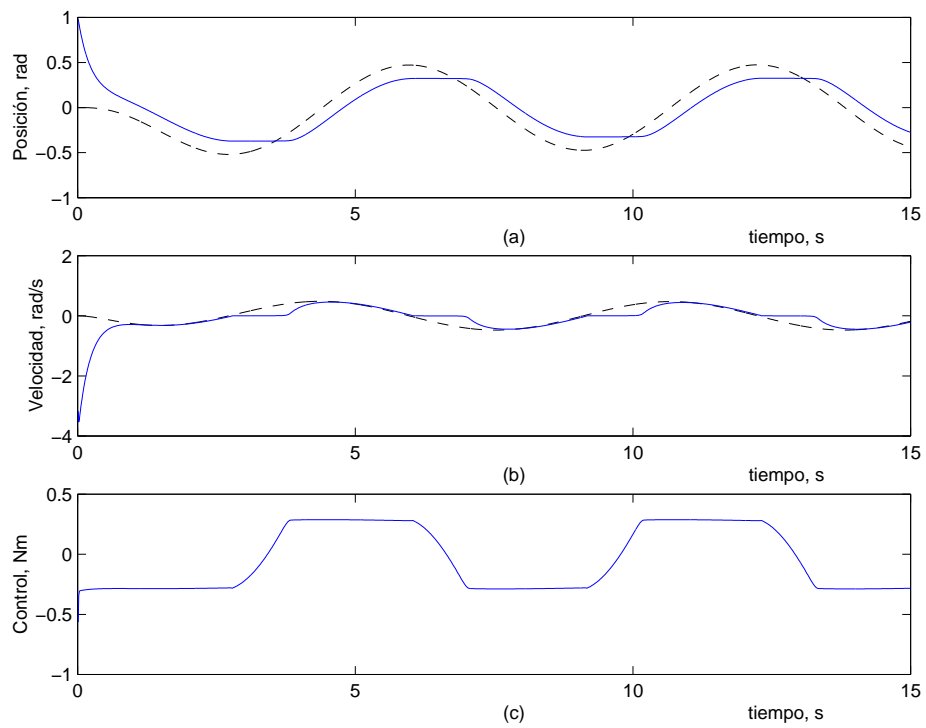


Figura 4.3: Control nominal. (a) Señal de referencia  $q_r$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Velocidad de referencia  $\dot{q}_r$  (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor  $\dot{q}$  (línea sólida). (c) Entrada de control  $u$ .

–  $\sin(t)$ , los parámetros de control  $k_s = \lambda = 10$ . La posición y velocidad iniciales se definen como  $[q(0) \ \dot{q}(0)] = [1 \ 0]$ , tanto la posición y la velocidad de referencia como la entrada de control correspondiente se muestran en la Figura 4.1, la estimación de las cotas de incertidumbre se muestran en la Figura 4.2. De esta forma, para ilustrar el mejoramiento del control difuso robusto, la Figura 4.3 muestra tanto la posición y velocidad como la señal de control cuando sólo el control nominal es aplicado ( $u = u_0$ ). En este último caso, el error grande de seguimiento, que se observa, se debe a las incertidumbres, especialmente cuando la velocidad cambia de dirección.

## 4.5. Comentarios

*Comentario 4.1.* Con la ejecución en línea de un estimador para cada cota de incertidumbre la implementación del controlador propuesto no necesita información *a priori* sobre estas cotas.

*Comentario 4.2.* El control propuesto puede tratar con incertidumbres en los sistemas no lineales (1.1) tanto en  $f(\mathbf{x})$  como en  $b(\mathbf{x})$ . Además, no se requiere que la incertidumbre en la ganancia de control  $\Delta b(\mathbf{x})$  sea pequeña como en [5] y en [32].

# Capítulo 5

## Control Difuso Adaptable Robusto para una Clase de Sistemas No Lineales Inciertos

### 5.1. Introducción

El método de diseño basado en Lyapunov [9, 16], se puede usar para lograr estabilidad robusta y así el acotamiento final se puede garantizar. Recientemente, muchos trabajos de investigación con base en este método construyen controladores difusos adaptables estables; ver por ejemplo [22, 21, 35, 43, 45] y las referencias ahí citadas. Con base en las señales medidas del sistema y el uso del principio de equivalencia cierta en el cálculo de la entrada de control [15], la idea básica en control adaptable es estimar en línea los parámetros inciertos de la planta (control adaptable indirecto), o los parámetros del controlador correspondientes (control adaptable directo). A pesar de los significativos avances teóricos logrados y algunas aplicaciones reportadas, mucho del control adaptable convencional presenta problemas de robustez para las dinámicas no modeladas [15]. Nuevas soluciones surgen de diferentes métodos que se

proponen para colaborar en la solución de este problema. Entre estas nuevas soluciones, el control difuso adaptable proporciona un método atractivo. Dado que las dinámicas del sistema (en control difuso adaptable indirecto) o del controlador (en control difuso adaptable directo) se aproximan por un FLS, las incertidumbres involucradas en el sistema de lazo cerrado, sean paramétricas o no paramétricas, se trasladan a sólo incertidumbres en los parámetros consecuentes del FLS mientras las funciones base difusas no cambian. Esto simplifica el diseño de los sistemas de control, especialmente cuando los fenómenos físicos no bien conocidos están presentes en los sistemas dinámicos (tal como la fricción en los sistemas mecánicos).

En la siguiente sección se considera la clase de sistemas que se pueden controlar con el sistema de control difuso adaptable propuesto. Posteriormente, en la Sección 5.3, se presenta el diseño de la ley de control propuesta, la cual se desarrolla combinando las técnicas adaptables y robustas, empleando la técnica de proyección para la adaptación de los pesos.

## 5.2. Planteamiento del problema

Considérese una clase de sistemas no lineales, cuyas ecuaciones dinámicas pueden ser expresadas en la forma canónica (1.1). Para asegurar la controlabilidad se consideraran las Suposiciones 1.1, 1.3 y 1.5.

El problema consiste en de diseñar una ley de control para el sistema (1.1), que asegure que el vector de error de seguimiento (3.3) sea final y uniformemente acotado. Además, se desea que la cota final sea arbitrariamente pequeña a través de una selección apropiada de los parámetros del controlador.

### 5.3. Diseño del Control

Recordando que  $\tilde{x} = x - x_d$  es el error de seguimiento y  $s$  es el error de seguimiento filtrado que se define por (4.1). Se diseña la ley de control para que el error de seguimiento filtrado  $s$  sea final y uniformemente acotado. Como en la sección anterior, las dinámicas de  $s$  se denotan por  $\dot{s}$  y se definen por (4.3) y (4.4).

#### 5.3.1. Aproximación de $f(\mathbf{x})$ y $b(\mathbf{x})$

Las funciones desconocidas  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  se pueden expresar por un FLS en un conjunto compacto  $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_f^* \mathbf{W}_f(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

$$b(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_b^* \mathbf{W}_b(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{B}_f^* \in \Omega_f \subset \mathbb{R}^{1 \times n_{rf}}$  y  $\mathbf{B}_b^* \in \Omega_b \subset \mathbb{R}^{1 \times n_{rb}}$  son las matrices de pesos óptimas,  $\mathbf{W}_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_{rf}}$  y  $\mathbf{W}_b(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_{rb}}$  son los vectores de funciones base difusas, con  $n_{rf}$  y  $n_{rb}$  que denotan el número de reglas *si-entonces* en los FLSs, y  $\Delta f(\mathbf{x})$  y  $\Delta b(\mathbf{x})$  son los errores de reconstrucción de las funciones. Las constantes positivas desconocidas  $\kappa_f$  y  $\kappa_b$  acotan estos errores, respectivamente,

$$|\Delta f(\mathbf{x})| \leq \kappa_f, \quad |\Delta b(\mathbf{x})| \leq \kappa_b, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \quad (5.3)$$

#### 5.3.2. Ley de control

Para el sistema no lineal (1.1) se propone la siguiente ley de control

$$u = u_a + u_r \quad (5.4)$$



donde  $u_a$  es la *componente de control adaptable* y  $u_r$  es la *componente de control robusta*.

En esta ley de control, la componente de control adaptable se define como

$$u_a = -\frac{1}{\hat{b}(\mathbf{x})} \left[ \hat{f}(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r) + k_s s \right], \quad k_s > 0, \quad (5.5)$$

donde  $\hat{f}(\mathbf{x})$  y  $\hat{b}(\mathbf{x})$  son funciones estimadas expresadas cada una por un FLS

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{B}_f \mathbf{W}_f(\mathbf{x}), \quad \hat{b}(\mathbf{x}) = \hat{B}_b \mathbf{W}_b(\mathbf{x}), \quad (5.6)$$

donde  $\hat{B}_f(t)$  y  $\hat{B}_b(t)$  denotan respectivamente la estimación de  $\mathbf{B}_f^*$  y  $\mathbf{B}_b^*$  en el instante  $t$ , las cuales se actualizan por una ley de adaptación que se dará a conocer más adelante.

Para compensar los errores de reconstrucción de la función (5.3), la componente de control robusta se diseña como

$$u_r = -\frac{\kappa_1^2}{b_0} \frac{(1 + |u_a|)^2 s}{\kappa_1(1 + |u_a|)|s| + \varepsilon}, \quad (5.7)$$

donde  $\kappa_1$  se toma como  $\kappa_1 = \max\{\kappa_f, \kappa_b\}$  y  $\varepsilon > 0$ . Inicialmente, se proponen los valores para  $\kappa_f$  y  $\kappa_b$ ; sin embargo, como se verá más adelante, el valor para  $\kappa_1$  se estimará.

### 5.3.3. Ley de adaptación con proyección

Sea  $\hat{\Omega}$  un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^{1 \times n_{rf}} \times \mathbb{R}^{1 \times n_{rb}}$  y  $\Omega \in \hat{\Omega}$ , donde  $\Omega$  es un subconjunto conocido *a priori*, definido como

$$\Omega = \Omega_f \times \Omega_b = \{\mathbf{b}_i \mid \underline{b}_i \leq \mathbf{b}_i \leq \bar{b}_i, i = 1, 2, \dots, n_{rf} \times n_{rb}\}$$

como su interior. Se define a continuación

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_f \\ B_b \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{B}_f \\ \hat{B}_b \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_f \\ \tilde{B}_b \end{bmatrix} \quad y \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_f \\ \phi_b \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

y

$$\Gamma = \text{diag}[\Gamma_f \Gamma_b], \quad \Omega = \Omega_f \times \Omega_b, \quad \hat{\Omega} = \hat{\Omega}_f \times \hat{\Omega}_b, \quad (5.9)$$

donde  $\phi_f = W(x)s$  y  $\phi_b = W(x)u_a s$ . La ley de adaptación del parámetro se selecciona como en [16] (también, ver [32])

$$\dot{\hat{\mathbf{B}}} = \text{Proj}(\dot{\hat{\mathbf{B}}}, \Phi) = \Gamma \Phi, \quad (5.10)$$

para que  $\hat{\mathbf{B}} \in \Omega$ ; mientras que, fuera de  $\Omega$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  se modifica para asegurar que

$$\tilde{\mathbf{B}} \Gamma^{-1} \left[ \dot{\hat{\mathbf{B}}}^T + \Gamma \Phi \right] \leq 0, \quad (5.11)$$

de acuerdo con (5.18) (como se verá más adelante), y  $\mathbf{B}(t) \in \Omega_\delta, \forall t \geq 0$ , donde  $\Omega \subset \Omega_\delta$ . Definiendo el error del vector de pesos como

$$\tilde{B}_f = \mathbf{B}_f^* - \hat{B}_f, \quad \tilde{B}_b = \mathbf{B}_b^* - \hat{B}_b, \quad (5.12)$$

se induce que  $\dot{\hat{\mathbf{B}}} = -\dot{\tilde{\mathbf{B}}}$ , así

$$\tilde{\mathbf{B}} \Gamma^{-1} \left[ -\dot{\tilde{\mathbf{B}}}^T + \Gamma \Phi \right] \leq 0. \quad (5.13)$$

Por lo que, la proyección se define como en [15],

$$[\text{Proj}(\hat{\mathbf{B}}, \Phi)]_i = \begin{cases} \gamma_{ii} \phi_i, & \text{si } \underline{\mathbf{b}}_i \leq \hat{B}_i \leq \bar{\mathbf{b}}_i \text{ o} \\ & \text{si } \hat{B}_i > \bar{\mathbf{b}}_i \text{ y } \phi_i \leq 0 \text{ o} \\ & \text{si } \hat{B}_i < \underline{\mathbf{b}}_i \text{ y } \phi_i \geq 0 \\ \gamma_{ii} \left[ 1 + \frac{\bar{\mathbf{b}}_i - \hat{B}_i}{\delta} \right] \phi_i, & \text{si } \hat{B}_i > \bar{\mathbf{b}}_i \text{ y } \phi_i > 0 \\ \gamma_{ii} \left[ 1 + \frac{\hat{B}_i - \underline{\mathbf{b}}_i}{\delta} \right] \phi_i, & \text{si } \hat{B}_i < \underline{\mathbf{b}}_i \text{ y } \phi_i < 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n_{rf} + n_{rb}$ ,  $\gamma_{ii}$  son los elementos de la matriz diagonal positiva  $\Gamma$ , y  $\delta > 0$  se selecciona de tal manera que  $\Omega_\delta \subset \hat{\Omega}$ .

### 5.3.4. Análisis de estabilidad y comportamiento

En el sistema de lazo cerrado, sustituyendo la ley de control (5.4), compuesta de una componente de control adaptable (5.5) y una componente de control robusta (5.7), en la ecuación dinámica del error de seguimiento filtrado (4.3) se tiene

$$\dot{s} = -(\lambda + k_s)s + \left[ f(\mathbf{x} - \hat{f}(\mathbf{x})) \right] + \left[ b(\mathbf{x} - \hat{b}(\mathbf{x})) \right] u_a + b(\mathbf{x})u_r. \quad (5.15)$$

Tomando en cuenta que (5.12), y después de algunas manipulaciones, se obtiene

$$\dot{s} = -(\lambda + k_s)s + \tilde{B}_f W(\mathbf{x}) + \tilde{B}_b W(\mathbf{x})u_a + [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a + b(\mathbf{x})u_r]. \quad (5.16)$$

El siguiente teorema garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado para la ley de control (5.4) junto con la adaptación de  $\mathbf{B}$  con proyección.

**Teorema 5.1.** *Considérese el sistema (1.1) con la ley de control (5.4), donde  $u_a$  está dada por (5.5), que emplea (5.14), para la estimación de  $\mathbf{B}(t)$  y  $u_r$  está dada por (5.7). Entonces, todos los estados en el sistema difuso robusto adaptable permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge asintóticamente al conjunto residual*

$$\left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R} \mid |\tilde{x}| \leq \left( \frac{1}{\lambda^{(n-1)}} \right) \left( \frac{c}{\alpha} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_f \Gamma_f^{-1} \tilde{B}_f^T + \frac{1}{2}\tilde{B}_b \Gamma_b^{-1} \tilde{B}_b^T, \quad (5.17)$$

donde  $\Gamma_f = \Gamma_f^T > 0$  y  $\Gamma_b = \Gamma_b^T > 0$  son las ganancias de adaptación. La derivada de

$V$  a lo largo de las trayectorias de la ecuación de error (5.16) se determina por

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= s\dot{s} + \tilde{B}_f \Gamma_f^{-1} \dot{\tilde{B}}_f^T + \tilde{B}_b \Gamma_b^{-1} \dot{\tilde{B}}_b^T \\
 &= -(\lambda + k_s) s^2 + \tilde{B}_f W(\mathbf{x}) s + \tilde{B}_b W(\mathbf{x}) u_a s + [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x}) u_a + b(\mathbf{x}) u_r] s \\
 &\quad + \dot{\tilde{B}}_f \Gamma_f^{-1} \tilde{B}_f^T + \dot{\tilde{B}}_b \Gamma_b^{-1} \tilde{B}_b^T \\
 &= -(\lambda + k_s) s^2 + \tilde{B}_f \Gamma_f^{-1} \left[ \dot{\tilde{B}}_f^T + \Gamma_f W(\mathbf{x}) s \right] + \tilde{B}_b \Gamma_b^{-1} \left[ \dot{\tilde{B}}_b^T + \Gamma_b W(\mathbf{x}) u_a s \right] \\
 &\quad + [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x}) u_a + b(\mathbf{x}) u_r] s.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Para tratar las incertidumbres paramétricas (el segundo y tercer términos) se necesita el mecanismo de adaptación (5.14), para satisfacer

$$\tilde{B}_f \Gamma_f^{-1} \left[ \dot{\tilde{B}}_f^T + \Gamma_f W(\mathbf{x}) s \right] \leq 0 \leq -\frac{1}{2} \tilde{B}_f \Gamma_f^{-1} \tilde{B}_f^T + c_1 \tag{5.19}$$

y

$$\tilde{B}_b \Gamma_b^{-1} \left[ \dot{\tilde{B}}_b^T + \Gamma_b W(\mathbf{x}) u_a s \right] \leq 0 \leq -\frac{1}{2} \tilde{B}_b \Gamma_b^{-1} \tilde{B}_b^T + c_2, \tag{5.20}$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{B}_f^*, \hat{B}_f \in \Omega_f} \left[ \left( \mathbf{B}_f^* - \hat{B}_f \right) \Gamma_f^{-1} \left( \mathbf{B}_f^* - \hat{B}_f \right)^T \right], \tag{5.21}$$

y

$$c_2 = \frac{1}{2} \max_{\mathbf{B}_b^*, \hat{B}_b \in \Omega_b} \left[ \left( \mathbf{B}_b^* - \hat{B}_b \right) \Gamma_b^{-1} \left( \mathbf{B}_b^* - \hat{B}_b \right)^T \right]. \tag{5.22}$$

Para tratar la incertidumbre no paramétrica, se sustituye la componente de control

robusta (5.7) en el cuarto término de (5.18), así que

$$\begin{aligned}
 [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a + b(\mathbf{x})u_r] s &\leq |\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a| |s| + b(\mathbf{x})u_r s \\
 &\leq (|\Delta f(\mathbf{x})| + |\Delta b(\mathbf{x})| |u_a|) |s| + b(\mathbf{x})u_r s \\
 &\leq (\kappa_f + \kappa_b |u_a|) |s| + b(\mathbf{x})u_r s \\
 &\leq \kappa_1 (1 + |u_a|) |s| + b(\mathbf{x})u_r s \\
 &\leq \kappa_1 (1 + |u_a|) |s| + b_0 u_r s \\
 &\leq \kappa_1 (1 + |u_a|) |s| - \frac{\kappa_1^2 (1 + |u_a|)^2 s^2}{\kappa_1 (1 + |u_a|) |s| + \varepsilon} \\
 &= \frac{\kappa_1 (1 + |u_a|) |s|}{\kappa_1 (1 + |u_a|) |s| + \varepsilon} \varepsilon \\
 &\leq \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

donde se emplea la consideración  $b(\mathbf{x}) \geq b_0 > 0$ .

Se sustituye (5.19), (5.20) y (5.23), en (5.18) y se obtiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -(\lambda + k_s)s^2 - \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T - \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + c_1 + c_2 + \varepsilon \\
 &\leq -2\alpha \left( \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T + \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T \right) + c_1 + c_2 + \varepsilon \\
 &= -2\alpha V + c,
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

donde  $\alpha = \max\{(\lambda + k_s), \frac{1}{2}\}$ ,  $c = c_1 + c_2 + \varepsilon$ , lo cual implica que

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-2\alpha(t-t_0)} - \frac{c}{2\alpha}e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{c}{2\alpha}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \tag{5.25}$$

De (5.17), se sabe que  $\frac{1}{2}s(t)^2 \leq V(t)$  así que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}s(t)^2 &\leq \left[ V(t_0) - \frac{c}{2\alpha} \right] e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{c}{2\alpha} \\
 |s(t)|^2 &\leq \left[ |s(t_0)|^2 - \frac{c}{\alpha} \right] e^{-2\alpha(t-t_0)} + \frac{c}{\alpha} \\
 |s(t)| &\rightarrow \left( \frac{c}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad t \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Por lo tanto, una cota última para  $|\tilde{x}^{(m)}(t)|$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$  es

$$|\tilde{x}^{(m)}(t)| \leq \left(\frac{c}{\alpha}\right)^{1/2} \frac{(2\lambda)^m}{\lambda^{(n-1)}}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.27)$$

□

### 5.3.5. Estimación de la cota de incertidumbre

Sea  $\hat{\kappa}_1(t)$  la estimación de la cota de incertidumbre  $\kappa_1(t)$  en el instante  $t$ , la cual se actualiza de acuerdo con

$$\dot{\hat{\kappa}}_1 = -\sigma_e \hat{\kappa}_1 + \gamma_e (1 + |u_a|) |s| \quad (5.28)$$

donde  $\sigma_e > 0$  y  $\gamma_e > 0$  son parámetros de diseño. La señal de compensación  $u_r$  se define como

$$u_r = -\frac{\hat{\kappa}_1^2}{b_0} \frac{(1 + |u_a|)^2 s}{\hat{\kappa}_1 (1 + |u_a|) |s| + \varepsilon}. \quad (5.29)$$

El siguiente teorema garantiza la estabilidad para la ley de control (5.4) junto con la estimación de la cota de incertidumbre  $\kappa_1$ .

**Teorema 5.2.** *Considérese el sistema (1.1) con la ley de control (5.4), donde  $u_a$  dada por (5.5) emplea (5.14) para la estimación de  $\mathbf{B}(t)$  y  $u_r$  dada por (5.29) emplea (5.28) para la estimación de  $\kappa_1$ . Entonces, todos los estados en el sistema difuso robusto adaptable permanecerán acotados, y el error de seguimiento converge asintóticamente al conjunto residual*

$$\left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R} \mid |\tilde{x}| \leq \left( \frac{1}{\lambda^{(n-1)}} \right) \left( \frac{c_e}{\alpha_e} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Considérese la siguiente función definida positiva

$$V_e = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T + \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + \frac{1}{2\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2, \quad (5.30)$$

donde  $\gamma_e > 0$  es un parámetro de diseño, y

$$\tilde{\kappa}_1(t) = \kappa_1 - \hat{\kappa}_1(t), \quad (5.31)$$

siendo  $\hat{\kappa}_1(t)$  la estimación de  $\kappa_1$  en el instante  $t$ . Como en la subsección previa

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= s\dot{s} + \dot{\tilde{B}}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T + \dot{\tilde{B}}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\tilde{\kappa}}_1 \\ &= -(\lambda + k_s)s^2 + \tilde{B}_fW(\mathbf{x})s + \tilde{B}_bW(\mathbf{x})u_a s + [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a + b(\mathbf{x})u_r]s \\ &\quad + \dot{\tilde{B}}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T + \dot{\tilde{B}}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\tilde{\kappa}}_1 \\ &\leq -2(\lambda + k_s)s^2 - \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T - \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + c_1 + c_2 \\ &\quad + [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a + b(\mathbf{x})u_r]s + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\tilde{\kappa}}_1. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para los dos últimos términos en (5.32), se necesita la componente de control robusta

(5.29), tal que, usando (5.31) y siguiendo los pasos realizados en (5.23) se tiene

$$\begin{aligned}
 [\Delta f(\mathbf{x}) + \Delta b(\mathbf{x})u_a + b(\mathbf{x})u_r]s + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\kappa}_1 &\leq \leq \kappa_1(1 + |u_a|)|s| + b_0u_rs + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\kappa}_1 \\
 &= \hat{\kappa}_1(1 + |u_a|)|s| + b_0u_rs + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\kappa}_1 \\
 &\quad + \tilde{\kappa}_1(1 + |u_a|)|s| \\
 &\leq \varepsilon + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\dot{\kappa}_1 + \tilde{\kappa}_1(1 + |u_a|)|s| \\
 &= \varepsilon + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1[\dot{\kappa}_1 + \gamma_e(1 + |u_a|)|s|] \\
 &= \varepsilon + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1\hat{\kappa}_1 \\
 &= \varepsilon + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1(\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1) \\
 &= \varepsilon - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}(\kappa_1 - \hat{\kappa}_1)\kappa_1 \\
 &= \varepsilon - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\kappa_1^2 - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\kappa_1\hat{\kappa}_1 \\
 &\leq \varepsilon - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\kappa_1^2 \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

donde  $-\frac{\sigma_e}{\gamma_e}\kappa_1\hat{\kappa}_1 \leq 0$  y  $\dot{\kappa}_1 + \gamma_e(1 + |u_a|)|s| = \sigma_e\hat{\kappa}_1$ . Considerando la adaptación de los pesos y la estimación de la cota de incertidumbre, se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_e &\leq -2(\lambda + k_s)\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T - \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 + c_1 + c_2 + \varepsilon + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 \\
 &\leq -2(\lambda + k_s)\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T - \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T - \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 + c_e \\
 &\leq -2\alpha_e \left[ \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{B}_f\Gamma_f^{-1}\tilde{B}_f^T + \frac{1}{2}\tilde{B}_b\Gamma_b^{-1}\tilde{B}_b^T + \frac{1}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2 \right] + c_e \\
 &\leq -2\alpha_e V_e + c_e, \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

siendo  $c_e = c_1 + c_2 + \varepsilon + \frac{\sigma_e}{\gamma_e}\tilde{\kappa}_1^2$  y  $\alpha_e = \max\{(\lambda + k_s), \sigma_e, \frac{1}{2}\}$ , la Ec. (5.34) es similar a (5.24)

$$V_e \rightarrow \frac{c_e}{2\alpha_e}. \tag{5.35}$$



Por lo tanto, una cota final para  $|\tilde{x}^{(m)}(t)|$ ,  $m = 0, 1, \dots, n - 1$  es

$$|\tilde{x}^{(m)}(t)| \leq \left(\frac{c_e}{\alpha_e}\right)^{1/2} \frac{(2\lambda)^m}{\lambda^{(n-1)}}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.36)$$

□

## 5.4. Resultados de las Simulaciones

Nuevamente, para verificar los resultados teóricos, las simulaciones fueron realizadas en “Simulink”. Se considera la planta (3.40), donde  $q$  es la posición angular del rotor,  $u$  la entrada de control y  $F$  representa a las fricciones [24]. En [38] se dan más detalles sobre el experimento realizado. El sistema está en la forma canónica (1.1) con  $f(\dot{q}) = F/J$  y  $b = 1/J$ . Es claro que esta planta presenta dos fuentes de incertidumbres, una es el parámetro incierto de inercia  $J$  (constante desconocida) y la otra incertidumbre se produce por la fricción desconocida  $F$ . En esta versión de control difuso adaptable, la ley de control (5.4) está dada por la ley de adaptación, (5.14) y (5.5), y la ley de compensación, (5.29) y (5.28). Se consideraron los siguientes parámetros del controlador  $\lambda = 1$  y  $k_s = 10$ ; además, para esta planta, se consideró  $b = 1/J_0$ , con  $J_0 = 0,01$ , el cual es fijo.

Para la simulación del comportamiento del sistema se empleó un FLS. La aproximación de  $f(\dot{q})$  se realizó con dos reglas difusas (3.46), para las cuales las funciones de membresía son Gaussianas (2.5) con  $c_1^1 = 0,3$ ,  $c_1^2 = -0,3$ ,  $\sigma_1^1 = \sigma_1^2 = 2$ . Con un conocimiento *a priori*,  $\underline{b}_{f1} = 80$  y  $\bar{b}_{f1} = 120$  pertenecen a  $\Omega_{f1}$ ,  $\underline{b}_{f2} = -120$  y  $\bar{b}_{f2} = -80$  pertenecen a  $\Omega_{f2}$ , y considerando a  $\delta = 1$ ,  $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 10000$ , como los parámetros de diseño para la proyección, los parámetros de la ley de adaptación están calculados por (5.10). Por lo tanto, se puede obtener  $\hat{f}(\dot{q})$  de (5.6).

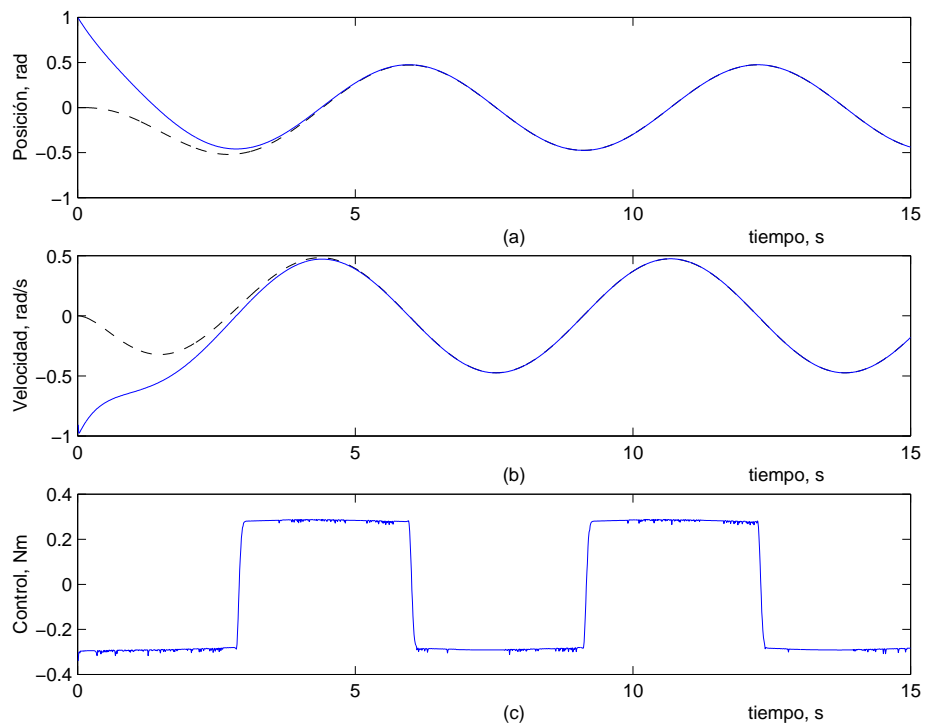


Figura 5.1: (a) Señal de referencia  $q_r$  (línea entrecortada) y la posición angular del rotor  $q$  (línea sólida). (b) Derivada de la señal de referencia  $\dot{q}_r$  (línea entrecortada) y la velocidad angular del rotor  $\dot{q}$  (línea sólida). (c) Entrada de control  $u$ .

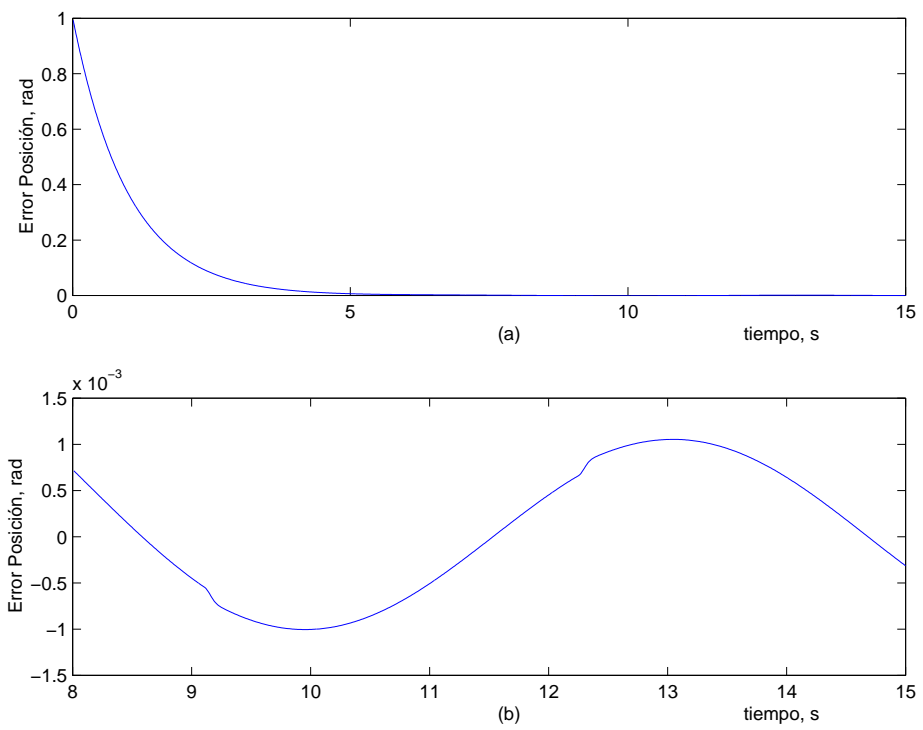


Figura 5.2: Error de seguimiento del controlador difuso adaptable robusto. (a) Comportamiento del error de seguimiento durante los primeros 15 *seg.* (b) Comportamiento del error de seguimiento después de los 8 *seg.*

Las condiciones iniciales para la estimación de  $k_1$  se propone como  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\gamma_e = 1000$ , y  $k_0 = 1$ . Las condiciones iniciales para los estimadores son  $b_{f_01} = 100$ ,  $b_{f_02} = -100$ , los cuales se calculan fuera de línea empleando (2.45).

La trayectoria de referencia  $q_r$  y sus derivadas se generan por un filtro sobreamortiguado, con función de transferencia (3.45) y se alimenta por una función  $-\sin(t)$  con frecuencia de 0,16 Hz, los parámetros de control  $k_s = \lambda = 10$ . La posición y velocidad iniciales se definen como  $[q(0) \ \dot{q}(0)] = [1 \ 0]$  tanto la posición y la velocidad de referencia como la entrada de control correspondiente se muestran en la Figura 5.1. El error de seguimiento durante los primeros 15 segundos de operación, se muestra en la Figura 5.2(a), la cual muestra la estabilidad asintótica del sistema de control propuesto. Mientras que, en la Figura 5.2(b), se muestra el error de seguimiento posterior a los 8 segundos, donde es claro el acotamiento final. En las Figuras 5.3(a) y (b), se muestra la evolución de los parámetros  $\hat{B}_{f1}$  y  $\hat{B}_{f2}$ . Finalmente, la estimación de la cota de incertidumbre  $\hat{k}_1$  se muestra en la Figura 5.3(c).

## 5.5. Comentarios

*Comentario 5.1.* El control difuso adaptable robusto propuesto tiene la característica de no requerir una función de acotamiento conocida para las funciones no lineales  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$ , involucradas en el sistema, ésto en comparación con los controles adaptables que usan un aproximador universal, *i.e.*, [21, 32, 35, 46]

*Comentario 5.2.* El control difuso adaptable robusto propuesto sólo necesita una cota inferior constante sobre la ganancia de control  $b(\mathbf{x})$ , en lugar de una función de acotamiento conocida.

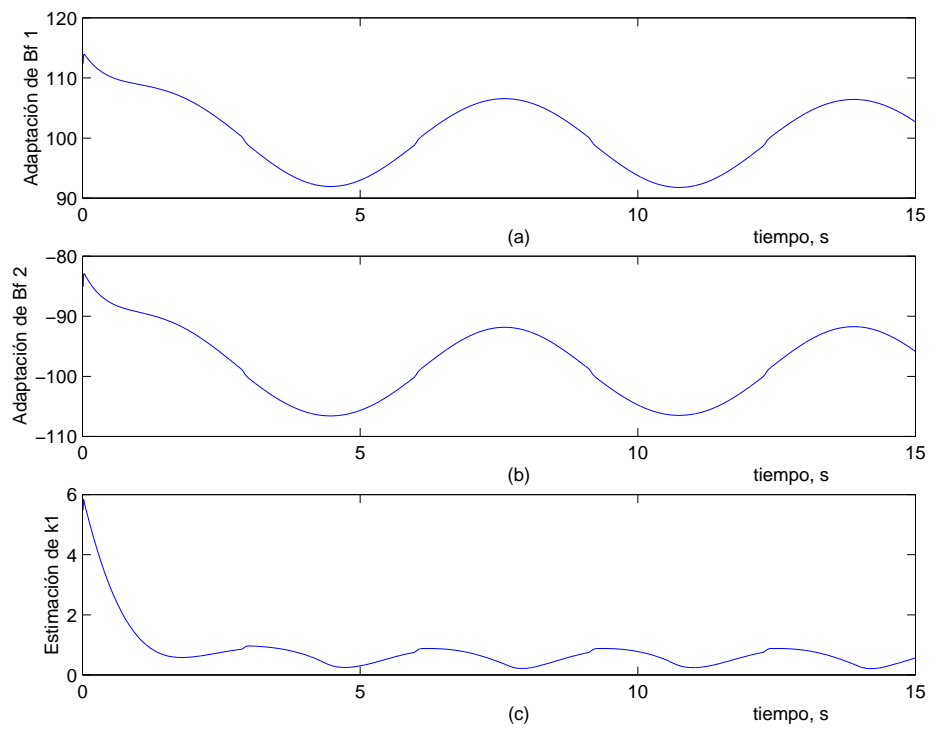


Figura 5.3: (a) Adaptación del parámetro  $\hat{B}_{f1}$ . (b) Adaptación del parámetro  $\hat{B}_{f2}$ . (c) Estimación de  $\hat{k}_1$  de la cota de incertidumbre.

*Comentario 5.3.* Para la implementación del control difuso adaptable robusto propuesto no se asume el conocimiento *a priori* de la cota del error de reconstrucción de la función.

# Capítulo 6

## Control Difuso Directo para una Clase de Sistemas no Lineales

### 6.1. Introducción

Los diseños de control propuestos hasta este momento, han sido esquemas de control difuso robusto con adaptación en línea de las cotas de incertidumbre. En estos controles, la estimación se realiza sobre las funciones  $f(x)$  y  $b(x)$  de la planta, por lo que la adaptación se conoce como indirecta [15].

En este capítulo, se presenta un diseño de control difuso robusto adaptable para una clase de sistemas no lineales representados por modelos entrada/salida, el objetivo del control propuesto es seguir una trayectoria de referencia en presencia de incertidumbres. A diferencia de los controles anteriores, en esta ocasión la adaptación es directa; esto es, las funciones desconocidas aproximadas pertenecen al controlador. De acuerdo con [45], si un control difuso adaptable usa un FLS como controlador, entonces el sistema se conoce como control difuso adaptable directo.

## 6.2. Planteamiento del Problema

### 6.2.1. Descripción del sistema

En este capítulo, se considera la clase de sistemas no lineales SISO que presentan la forma (1.2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \\ y &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde  $\mathbf{x} \triangleq [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado del sistema,  $u, y \in \mathbb{R}$  es la entrada de control y la salida medida, respectivamente. Se asumen las Suposiciones 1.1-1.6.

### 6.2.2. Diseño de control para sistemas no lineales conocidos

En el diseño del controlador difuso, de acuerdo con la Suposición 1.6, a través de la transformación  $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \triangleq [y \ y^{(1)} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T$ ,  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo un difeomorfismo, en este capítulo, el sistema (1.2) se expresa en la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = A_o \mathbf{y} + B_o [f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u],\tag{6.2}$$

con

$$f(\mathbf{x}) = L_F^n h(\mathbf{x}), \quad b(\mathbf{x}) = L_g L_F^{n-1} h(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\tag{6.3}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.\tag{6.4}$$



*Suposición 6.1.*  $0 < b_0 \leq b(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})) \leq b_1 q(\|\mathbf{y}\|)$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $b_0$  y  $b_1$  son constantes desconocidas y  $q(\|\mathbf{y}\|) = 1 + \|\mathbf{y}\| + \dots + \|\mathbf{y}\|^p$  con  $p \geq 0$  un entero conocido.

Sea  $y_r$  una señal de referencia dada. Sean  $y_r$  y sus derivadas hasta de orden  $n$  acotadas, y  $y_r^{(n)}$  continua por intervalos. El problema que se considera en este capítulo es diseñar una ley de control con retroalimentación de salida para que (6.1) asegure que la salida de la planta  $y$  y sus derivadas hasta de orden  $n - 1$  sigan a la referencia  $y_r$  y a sus derivadas correspondientes dentro de un error final acotado, mientras que todas las señales se mantienen acotadas. A través de la selección apropiada de los parámetros, este error puede ser arbitrariamente pequeño.

Sea  $\mathbf{y}_r \triangleq [y_r \ y_r^{(1)} \ \dots \ y_r^{(n-1)}]^T \in \mathbb{R}^n$  el vector de la señal de referencia y sea  $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_r$  el error de seguimiento. Sus dinámicas son obtenidas de (6.2) como

$$\dot{\mathbf{e}} = A_o \mathbf{e} + B_o [f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u - y_r^{(n)}]. \quad (6.5)$$

Es fácil ver que si la ley de control se selecciona como

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})} [K\mathbf{e} - f(\mathbf{x}) + y_r^{(n)}] \triangleq u^*(\mathbf{x}, \mathbf{e}, y_r^{(n)}), \quad (6.6)$$

donde  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  es tal que la matriz

$$A_c \triangleq A_o + B_o K, \quad (6.7)$$

es Hurwitz, *i.e.*, todos sus valores propios tienen la parte real negativa, por lo que el error de seguimiento tiende a cero exponencialmente:

$$\mathbf{e}(t) = \exp(A_c t) \mathbf{e}(0) \rightarrow 0.$$

Se hará referencia a la ley de control (6.6) como *control ideal*. En la coordenada  $\mathbf{y}$ , esta ley de control se puede expresar como  $u^* = u^*(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$  donde

$$\mathbf{y}_R \triangleq [y_r \ y_r^{(1)} \ \dots \ y_r^{(n-1)} \ y_r^{(n)}]^T \in \mathbb{R}^{n+1} .$$

Aunque no puede ser implementado, debido a que se desconocen las funciones  $F(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  y  $h(\mathbf{x})$  y en consecuencia  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  también se desconocen, es una función continua de  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{y}_R$ , así que, se puede aproximar a cualquier grado de exactitud en un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$  por un aproximador universal.

## 6.3. Diseño de Control

En esta sección, se diseña una ley de control para la planta (6.1) a través de la aproximación de la ley de control ideal (6.6) por medio de un FLS. Se usa la técnica de control robusto que se empleó en [9] para diseñar una señal de compensación, y con ésta compensar tanto la incertidumbre paramétrica, que se genera por la matriz de pesos óptima  $B^*$ , como la incertidumbre no paramétrica, que se genera al aproximar la ley de control ideal desconocida. En primer lugar, se considera el diseño del control con retroalimentación de estados. Posteriormente, se considera el observador de alta ganancia [16] para diseñar un control con retroalimentación de la salida.

### 6.3.1. Ley de control

Dado  $\mathbf{y}_R = [y_r \ y_r^{(1)} \ \dots \ y_r^{(n-1)} \ y_r^{(n)}]^T$ , la referencia y sus derivadas hasta de orden  $n$ , primero se seleccionan los conjuntos difusos  $A_j^r$  para  $0 \leq j \leq n$ , y las funciones de membresía correspondientes  $A_j^r(y_r^{(j)})$  como en (2.5). De acuerdo con esto, los conjuntos difusos y las funciones de membresía para  $\mathbf{y}$  pueden ser seleccionados como  $A_j^r(\cdot)$ , *i.*

e.,

$$A_{n+j+1}^r(y^{(j)}) = A_j^r(y_r^{(j)}), \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Se propone la ley de control para la planta (6.1) como

$$u = u_0 + u_c, \quad (6.8)$$

donde  $u_0$  es el *control nominal* que representa las mejores experiencias sobre como controlar la planta dada por  $n_r$  reglas difusas:

$$R^r : \quad \text{Si } y_r \text{ es } A_0^r(y_r) \text{ y } y_r^{(1)} \text{ es } A_1^r(y_r^{(1)}) \text{ y } \dots \text{ y } y_r^{(n)} \text{ es } A_n^r(y_r^{(n)}) \\ \text{y } y \text{ es } A_{n+1}^r(y) \text{ y } \dots \text{ y } y^{(n-1)} \text{ es } A_{2n}^r(y^{(n-1)}) \quad \text{entonces } u = b_0^r, \quad (6.9)$$

donde  $r = 1, 2, \dots, n_r$ .

Se asume que el conjunto de reglas difusas (6.9) está completo. En ocasiones, la experiencia de control con la que se cuenta puede dar un conjunto de reglas difusas incompleto. En este caso, el conjunto de reglas difusas completo se puede obtener complementando el espacio difuso con conjuntos difusos cuyas funciones de membresía tienen parte consecuente cero.

Este conjunto de reglas difusas da la función base difusa  $W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$  como en (2.40) con  $n_i = 2n + 1$  y el vector de parámetros nominal  $B^0 = [b_0^1 \ b_0^2 \ \dots \ b_0^{n_r}]$ . Por lo que el control nominal es

$$u_0 = B^0 W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R). \quad (6.10)$$

La componente  $u_c$  se diseña para compensar las incertidumbres y se define como

$$u_c = -\hat{\delta}^2 \frac{q^2(\|\mathbf{y}\|) p_n^T \mathbf{e}}{\hat{\delta} q(\|\mathbf{y}\|) |p_n^T \mathbf{e}| + \epsilon}, \quad (6.11)$$

con

$$\dot{\hat{\delta}} = -\sigma \hat{\delta} + \gamma |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|), \quad \hat{\delta}(0) > 0, \quad (6.12)$$

donde  $\epsilon > 0$ ,  $\sigma$  y  $\gamma > 0$  son parámetros de diseño,  $\hat{\delta}(t)$  es el estimado de  $\delta$  (definido abajo (6.16)) en el instante  $t \geq 0$ , y  $p_n \in \mathbb{R}^n$  es la última columna de la matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que resulta de

$$A_c^T P + P A_c = -Q, \quad (6.13)$$

para una  $0 < Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dada, donde  $A_c$  se define en (6.7).

### 6.3.2. Análisis de Estabilidad

De los resultados de la segunda sección de este capítulo, la ley de control ideal (6.6) puede ser aproximada por un FLS con el vector de parámetros óptimo  $B^*$  y la función base difusa  $W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$  resultando un error de aproximación  $\Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$

$$u^* = B^* W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) + \Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R). \quad (6.14)$$

De la Suposición 6.1 se sigue que el vector de error del parámetro  $\tilde{B} \triangleq B^0 - B^*$  y el error de aproximación  $\Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$  cumple con

$$\begin{aligned} \left| b(\mathbf{x}) \left[ \tilde{B} W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) \right] \right| &\leq b_1 q(\|\mathbf{y}\|) \left[ \left\| \tilde{B} \right\| \|W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)\| + |\Delta u| \right], \\ &\leq b_1 q(\|\mathbf{y}\|) \left[ \left\| \tilde{B} \right\| + |\Delta u| \right], \\ &\leq b_0 \delta q(\|\mathbf{y}\|), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$\forall \mathbf{y} \in Y \subset \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{y}_R \in Y_R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , donde

$$\delta = \frac{b_1}{b_0} \rho, \quad (6.16)$$

para alguna constante  $\rho \geq \left\| \tilde{B} \right\| + |\Delta u|$ ,  $Y_R$  es un conjunto compacto que contiene la señal de referencia y sus derivadas hasta de orden  $n$ , y  $Y$  es un conjunto compacto cuya definición se presentará en el análisis siguiente.

Reescribiendo la ley de control (6.8) como

$$u = u^* + \left\{ u_c + \tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) \right\}, \quad (6.17)$$

se obtienen las dinámicas del error en términos de la incertidumbre paramétrica y error de aproximación sustituyendo (6.6) y (6.17) en (6.5)

$$\dot{\mathbf{e}} = A_c \mathbf{e} + B_o b(\mathbf{x}) \left\{ u_c + \tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) \right\}. \quad (6.18)$$

El siguiente teorema garantiza la estabilidad para la ley de control (6.8) con retroalimentación de estados.

**Teorema 6.1.** *Considérese el sistema (6.1) con la ley de control (6.8), donde  $u_0$  está dada por (6.10) y  $u_c$  está dada por (6.11) y (6.12). Entonces, todos los estados en el sistema difuso adaptable directo permanecerán acotados en forma semiglobal, y el error un seguimiento converge exponencialmente en forma semiglobal al conjunto*

$$\left\{ \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R} \mid |\tilde{\mathbf{x}}| \leq \left( \frac{1}{\lambda^{(n-1)}} \right) \left( \frac{\epsilon_e}{\alpha} \right)^{1/2} \right\}.$$

*Demostración.* Sea  $P = P^T > 0$  la solución de la ecuación de Lyapunov (6.13).

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T P \mathbf{e} + \frac{b_0}{2\gamma} \tilde{\delta}^2, \quad (6.19)$$

donde  $\tilde{\delta} \triangleq \hat{\delta} - \delta$ . Tomando la derivada con respecto del tiempo de  $V$ , se sigue de (6.13) y (6.18) que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (A_c^T P + P A_c) \mathbf{e} \\ &\quad + \mathbf{e}^T P B_o b(\mathbf{x}) \left\{ u_c + \tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u \right\} + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + p_n^T \mathbf{e} b(\mathbf{x}) \left\{ u_c + \tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \right\} + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

En seguida, se acotarán los dos últimos términos del lado derecho de (6.20) usando la componente de compensación  $u_c$  en (6.11)

$$\begin{aligned}
p_n^T \mathbf{e} b(\mathbf{x}) \left\{ u_c + \tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u \right\} \\
+ \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} &\leq p_n^T \mathbf{e} b(\mathbf{x}) u_c + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} \\
&\quad + |p_n^T \mathbf{e}| \left| b(\mathbf{x}) [\tilde{B}W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R) - \Delta u] \right| \\
&\leq p_n^T \mathbf{e} b(\mathbf{x}) u_c + b_0 \delta |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|) + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} \\
&\leq b_0 p_n^T \mathbf{e} u_c + b_0 \delta |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|) + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} \\
&= b_0 \left\{ p_n^T \mathbf{e} u_c + \hat{\delta} |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|) \right\} \\
&\quad + \frac{b_0}{\gamma} \tilde{\delta} \left\{ \dot{\tilde{\delta}} - \gamma |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|) \right\} \\
&\leq 0 - \frac{b_0 \sigma}{\gamma} \tilde{\delta}^2 + \frac{b_0 \sigma}{\gamma} \delta^2. \tag{6.21}
\end{aligned}$$

De la ecuación (6.15) se sigue la segunda desigualdad. La tercera desigualdad se debe a  $0 < b_0 \leq b(\mathbf{x})$  y  $p_n^T \mathbf{e} u_c \leq 0$ . Mientras que, la última desigualdad se debe a que  $p_n^T \mathbf{e} u_c + \hat{\delta} |p_n^T \mathbf{e}| q(\|\mathbf{y}\|) \leq \epsilon$  y  $-\tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}} \leq -\tilde{\delta}^2 + \delta^2$ , puesto que  $\hat{\delta}(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ .

Se sigue de (6.20) y (6.21) que

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + \epsilon_e, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.22}$$

donde  $\alpha \triangleq \min \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)}, \sigma \right\}$  y  $\epsilon_e \triangleq b_0(\epsilon + \frac{\sigma}{\gamma} \delta^2)$ .

Sea  $r_E \triangleq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \|\mathbf{e}(0)\|^2 + \frac{b_0 \delta^2(0)}{\lambda_{\min}(P)\gamma}, \frac{\epsilon_e}{\lambda_{\min}(P)\alpha} \right\}$ ,  $E \triangleq \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{e}\| \leq r_E^{1/2} \right\} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto, y  $Y \subset \mathbb{R}^n$  el conjunto compacto correspondiente para un  $Y_r \subset \mathbb{R}^n$  dado. Entonces  $E$  es invariante, *i.e.*, para cualquier condición inicial  $\mathbf{e}(0) \in E \Rightarrow \mathbf{e}(t) \in E, \forall t \geq 0$ . Así que,  $\mathbf{y}(t) \in Y, \forall t \geq 0$ .

Una cota de error final está dada por  $\frac{\epsilon_e}{\lambda_{\min}(P)\alpha}$ , la cual puede ser arbitrariamente pequeña, a través de una selección apropiada de los parámetros de diseño.  $\square$

### 6.3.3. Retroalimentación de salida

Ahora, se usa el observador de alta ganancia o HGO (por sus siglas en inglés) [16, 17] para estimar el estado  $\mathbf{y}$ . En ([17], p. 622) se muestra que el diseño del HGO satisface el principio de separación, por lo que el control con retroalimentación de estado garantiza el acotamiento semiglobal de  $\mathbf{y}$  y las ganancias del observador son suficientemente altas. El HGO está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_i &= \hat{e}_{i+1} + \frac{\alpha_i}{\epsilon_{ob}^i} (e_1 - \hat{e}_1), \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{\hat{e}}_n &= \frac{\alpha_n}{\epsilon_{ob}^n} (e_1 - \hat{e}_1),\end{aligned}\tag{6.23}$$

donde  $0 < \epsilon_{ob} \ll 1$  es un parámetro de diseño y  $\alpha_i > 0$  son seleccionadas de tal forma que las raíces de  $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$  tengan partes reales negativas. La estimación de  $\mathbf{y}$  es por lo tanto

$$\hat{y}^{(i-1)} = \hat{e}_i + y_r^{(i-1)}, \quad 1 \leq i \leq n.\tag{6.24}$$

El controlador es implementado sustituyendo  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{e}$  en (6.8)-(6.12) por sus estimados. El control se satura fuera de la región compacta de interés para prevenir el pico introducido por el HGO [17], *i.e.*,

$$u = S \operatorname{sat} \left( \frac{u_0 + u_c}{S} \right),\tag{6.25}$$

donde  $\operatorname{sat}(\cdot)$  es la función de saturación y  $S$  el límite de saturación, seleccionados para cubrir la región de interés. La estabilidad es asegurada por la estabilidad semiglobal provocada por la retroalimentación de estado y el principio de separación [17].

### 6.3.4. Procedimiento de diseño

Dado un sistema no lineal en (6.1), verificar la Suposición 6.1 para un entero  $p \geq 0$ .

**Para el control con retroalimentación de estado**

**Paso 1.** Diseñar las funciones de membresía de acuerdo a la señal de referencia dada y a sus derivadas hasta de orden  $n$ .

**Paso 2.** Obtener las funciones base difusas  $W(\mathbf{y}, \mathbf{y}_R)$  como en (2.40) con  $n_i = 2n + 1$ .

**Paso 3.** Si una experiencia previa de control como en (6.9), incorporarla en  $u_0$  a través de  $B^0$ . De otra manera asignar  $B^0 = 0$ .

**Paso 4.** Implementar la componente de compensación y el estimador de la cota de incertidumbre (6.11) y (6.12). Seleccionar  $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  de tal manera que los valores propios de la matriz  $A_c$  en (6.7) tengan partes reales negativas, y una matriz  $Q > 0$ , es solución de la ecuación  $A_c^T P + P A_c = -Q$  con  $A_c \triangleq A_o + B_o K$  para obtener la última columna de  $P$ ,  $p_n$ . Seleccionar las constantes positivas  $\epsilon$ ,  $\sigma$  y  $\gamma$  tal que la cota final del error de seguimiento sea aceptable.

**Para el control con retroalimentación de la salida**

**Paso 5.** Implementar el HGO (6.23). Seleccionar las constantes positivas  $\epsilon_{ob} \ll 1$ , y  $\alpha_i > 0$  tal que las raíces de  $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$  tienen parte real negativa. Seleccionar el límite de saturación  $S > 0$  para cubrir la región de interés.

**6.4. Resultados de las Simulaciones**

En la simulación se usa el modelo de un péndulo invertido, y se usa en muchos trabajos similares (*e.g.*, [20, 46]).



En la simulación, las dinámicas de la planta son de la forma

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= f(x, \dot{x}) + g(x)u, \\ y &= x \end{aligned} \quad (6.26)$$

y la señal de referencia  $y_r$  es generada como la salida de un filtro pasa bajas

$$y_r = \frac{1000}{(s + 10)^3} \left( \frac{\pi}{30} \sin t \right). \quad (6.27)$$

La señal de referencia y sus derivadas hasta la de orden 2 se muestran en la Figura 6.1. Los parámetros usados en el controlador son  $K = [-2 \ -3]$ . Las componentes de control (6.11) y (6.12) son implantadas con los parámetros de diseño  $\epsilon = 0,1$ ,  $\sigma = 10$  y  $\gamma = 10000$ , y las condiciones iniciales  $\hat{\delta}(0) = 10$ . El polinomio de acotación en la Suposición 6.1 es  $q(\|\mathbf{y}\|) = 1$ . La matriz en la función de Lyapunov es  $Q = \text{diag}[1 \ 1]$ , dando como la última columna de la solución resultado  $p_n^T = [0,25 \ 0,25]$ .

Los parámetros usados en el HGO (6.23) son  $\epsilon_{ob} = 10^{-5}$ ,  $S = 100$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ , y las condiciones iniciales para el observador (6.23) son  $\mathbf{e}(0) = [0 \ 0]^T$ .

Dos funciones de membresía Gaussianas para cada variable ( $y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, y, \dot{y}$ ) son usadas, por lo que resultan  $n_r = 32$  reglas difusas. El centro y el ancho de estas funciones de membresía son seleccionadas de acuerdo a la señal de referencia y a sus derivadas hasta de orden  $n = 2$  para cubrir el conjunto compacto de interés.

La ecuación dinámica de un péndulo invertido es (6.26) con

$$F(x, \dot{x}) = \left[ \dot{x} \frac{g(m_c + m) \sin x - ml\dot{x}^2 \cos x \sin x}{l \left[ \frac{4}{3}(m_c + m) - m \cos^2 x \right]} \right]^T \quad (6.28)$$

$$g(x) = \left[ 0 \frac{\cos x}{l \left[ \frac{4}{3}(m_c + m) - m \cos^2 x \right]} \right]^T, \quad (6.29)$$

la cual ya está en la forma (6.2). El significado de los parámetros y sus valores usados en la simulación (en unidades del SI) son:  $m = 0,1$  la masa del péndulo,  $m_c = 1$  la

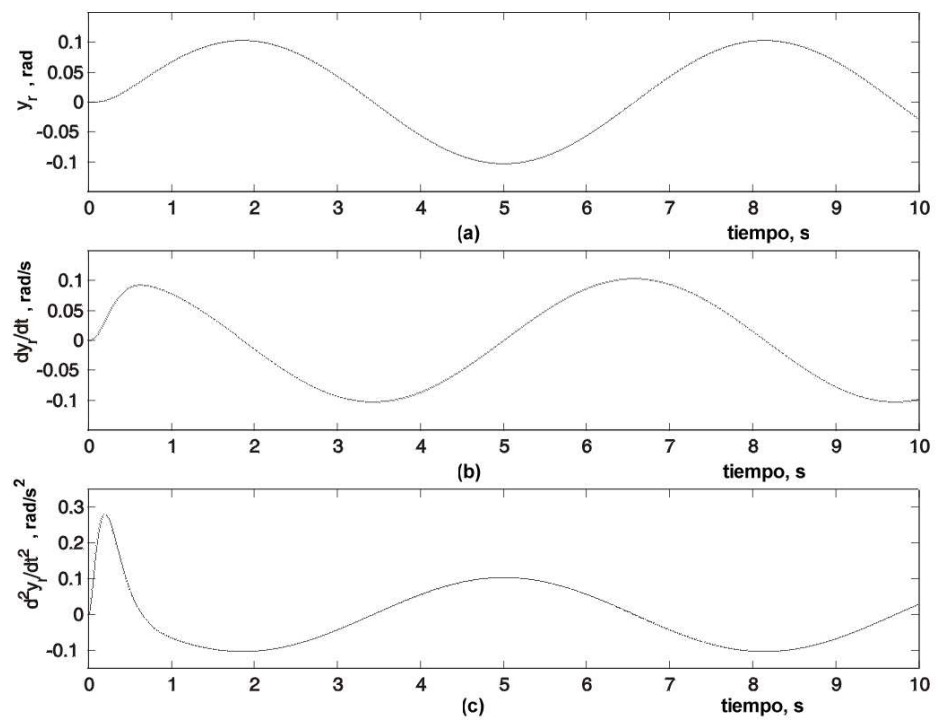


Figura 6.1: La señal de referencia y sus derivadas.

masa del carro,  $l = 0,5$  la longitud del péndulo y  $g = 9,8$  la aceleración de la gravedad. La condición inicial para el péndulo es  $\mathbf{x}(0) = [-\frac{\pi}{60}, 0]^T$ . Todas las condiciones para la simulación son iguales a las empleadas en [46].

Para este ejemplo, un control intuitivo basado en la experiencia es

Si  $y_r$  es  $N(y_r)$  y  $y$  es  $N(y)$  entonces  $u = PS$

Si  $y_r$  es  $P(y_r)$  y  $y$  es  $N(y)$  entonces  $u = PL$

Si  $y_r$  es  $N(y_r)$  y  $y$  es  $P(y)$  entonces  $u = NL$

Si  $y_r$  es  $P(y_r)$  y  $y$  es  $P(y)$  entonces  $u = NS$

donde  $N$  y  $P$  significan conjuntos difusos Negativo y Positivo, caracterizados por una función de membresía Gaussiana (2.5) con  $(centro, ancho) = (-\frac{\pi}{30}, \frac{\pi}{60})$  y  $(\frac{\pi}{30}, \frac{\pi}{60})$ , respectivamente, y las funciones singleton  $NS$ ,  $PS$ ,  $NL$ ,  $PL$  para Negativo-Pequeño, Positivo-Pequeño, Negativo-Grande y Positivo-Grande, con valores  $PS = -NS = 0,5$ ,  $PL = -NL = 5$ , respectivamente. Representando esta experiencia de control en la forma (6.9) se obtiene la  $r$ -ésima regla (superíndice  $1 \leq r \leq n_r = 32$ )

$$R^r : \text{ Si } y_r \text{ es } A_0^r(y_r) \text{ y } \dot{y}_r \text{ es } A_1^r(\dot{y}_r) \text{ y } \ddot{y}_r \text{ es } A_2^r(\ddot{y}_r) \text{ y } y \text{ es } A_3^r(y) \text{ y } \dot{y} \text{ es } A_4^r(\dot{y}), \\ \text{ entonces } u = b_0^r \tag{6.30}$$

donde cada conjunto difuso  $A_j^r$  es  $N$  o  $P$ . La singleton correspondiente a  $b_0^r$  se le asigna un valor en  $\{NS, PS, NL, PL\}$  de acuerdo al cual los conjuntos difusos  $y_r$  y  $y$  pertenecen. Con las funciones base difusas dadas por este conjunto de reglas difusas, el control (6.8) con (6.11) y (6.12) es aplicado, los resultados se muestran en la Figura 6.2.

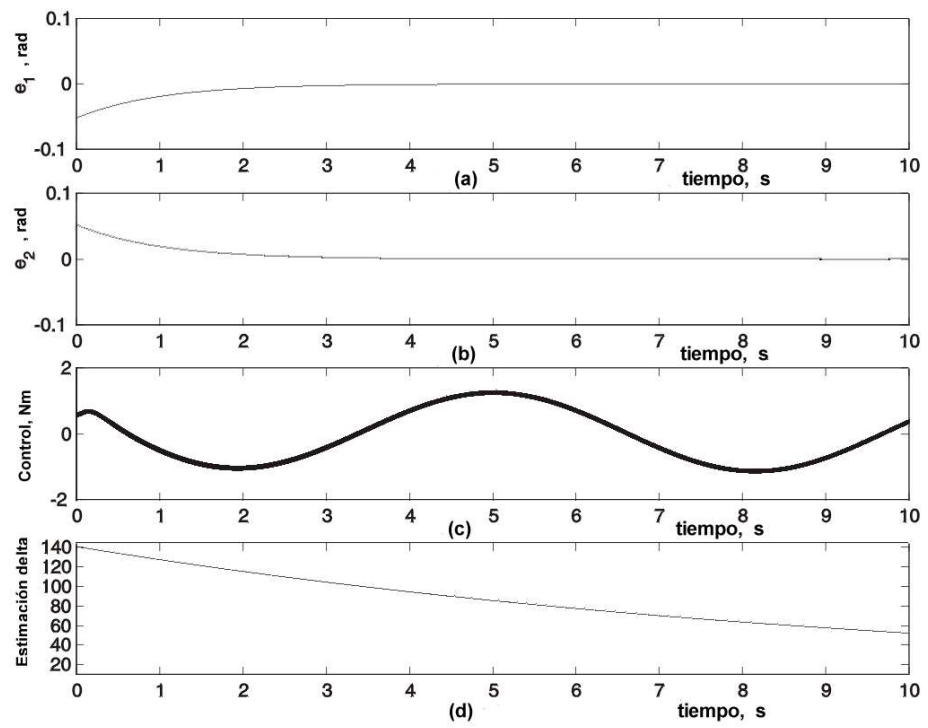


Figura 6.2: Control con retroalimentación de la salida del péndulo invertido.

## 6.5. Comentarios

*Comentario 6.1.* La única información *a priori* sobre la planta desconocida (6.1) requerida para la implementación del controlador es un orden superior  $p$  del acotamiento polinomial  $q(\|\mathbf{y}\|)$  en la Suposición 6.1.

*Comentario 6.2.* Comparado el control adaptable con un aproximador universal (sistema de lógica difusa o redes neuronales, ver *e.g.*, [30, 45, 12, 50, 23, 28, 46, 35, 32, 52, 20, 13]), la aproximación adaptable robusta seguida aquí aligera la necesidad del entrenamiento fuera de línea del aproximador universal, el conocimiento de un conjunto compacto al cual el vector de parámetros óptimo pertenece, la cota sobre la norma del parámetro óptimo del aproximador universal, o el conocimiento sobre los sistemas no lineales, tal como conocer la cota superior sobre la función desconocida  $F(\mathbf{x})$  y  $g(\mathbf{x})$  para la implementación del controlador. También, la carga computacional en línea sobre la actualización del vector de parámetros del aproximador universal (cuya dimensión puede exceder los cientos) es reducido para estimar solamente la cota de incertidumbre. Aún más importante, se logra que el seguimiento sea exponencial semiglobal hasta lograr un error final acotado, lo cual provee robustez a las dinámicas no modeladas y/o a las perturbaciones externas.

# Conclusiones

El uso de los sistemas de lógica difusa (FLSs) en combinación con las técnicas de control adaptable y control robusto, permite el diseño de una serie de controladores difusos con características propias de las técnicas empleadas. Sin embargo, la particularidad en el empleo y en la combinación de las técnicas es lo que, por consecuencia, determina las características novedosas de cada diseño.

En términos generales, en esta tesis, el control difuso robusto con adaptación indirecta presenta la aproximación de las funciones  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  en cada diseño. Sin embargo, el control difuso robusto con adaptación directa emplea solamente un FLS para realizar la aproximación del controlador, por lo que la carga computacional en línea sobre la actualización del vector de parámetros del aproximador universal es reducida para estimar solamente la cota de incertidumbre.

La planta a controlar es, en esta tesis, un sistema no lineal incierto. Por lo que, el desconocimiento de  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  del sistema no lineal obliga a estimar estas funciones; para las cuales, se considera de antemano algunas suposiciones. El empleo de los FLSs, como aproximadores universales, para las estimaciones de las funciones desconocidas permite una de las ventajas de los controladores propuestos, ésta es la fácil incorporación de la información *a priori* a través de reglas difusas *si-entonces*. La estimación de las funciones desconocidas está acompañada de las incertidumbres debidas a las

aproximaciones, por lo que es necesario el diseño de señales de compensación para la incertidumbre estructurada y para la incertidumbre no estructurada. En comparación con los esquemas de compensación basados en un modelo de la incertidumbre (ver, *e.g.*, [26] y [37]), en los diseños propuestos en esta tesis no es necesaria la información sobre la estructura de las incertidumbres.

En general, los diseños de los controladores difusos robustos fueron realizados empleando el método de rediseño de Lyapunov, por lo que el control difuso robusto adaptable (directo o indirecto) es asintótico o exponencialmente estable, logrando la convergencia del error de seguimiento a un conjunto residual. Es importante obtener la convergencia exponencial puesto que el diseño es más robusto con respecto a las dinámicas no modeladas y/o a las perturbaciones existentes. Mientras que, con el mismo método de rediseño de Lyapunov, pero de control difuso adaptable robusto se logra una convergencia asintótica, al igual que la mayoría de los esquemas de control basados en aproximadores universales existentes, (ver, *e.g.*, [14, 21, 23, 28, 29, 30, 32, 44]).

A través de los diseños presentados en esta tesis, es claro que la aproximación robusta adaptable aligera la necesidad del entrenamiento fuera de línea del aproximador universal. Además, presentan la característica de no requerir una función de acotamiento conocida para las funciones no lineales involucradas en el sistema; en su lugar, sólo es necesario una cota inferior constante sobre la ganancia de control. En comparación, esta característica no se presenta en los sistemas de control difusos adaptables que usan un aproximador universal, *e.g.*, [21, 32, 35, 46].

Particularmente, considerando el problema de controlar un sistema mecánico, descrito éste por ecuaciones de Euler-Lagrange, se diseña un control difuso robusto adaptable indirecto para este sistema. Dado que el diseño del control propuesto está basado en las ecuaciones Lagrangeanas, las propiedades físicas se conservan, facilitando el diseño de control. También, se diseña una señal de compensación para el error de la matriz de pesos y una señal de compensación para reducir el error de seguimiento debido al error de reconstrucción de la función, siendo constantes las cotas de incertidumbre, lo que facilita su estimación. En comparación, por ejemplo, con el trabajo presentado en [14], donde se presenta un diseño de control robusto basado en la representación de espacio estado del sistema mecánico, la cota de incertidumbre es una cantidad dependiente del estado. Finalmente, la implementación en [14] necesita parámetros como la cota superior en la matriz inicial ( $\overline{m}$ ), y las cotas sobre la cota de incertidumbre  $\rho_s(x)$  en cada uno de los conjuntos difusos, lo cual es difícil de conseguir además de tomar valores muy grandes en la simulación.



# Bibliografía

- [1] J. Amin, B. Friedland, and A. Harnoy, “Implementation of a friction estimation and compensation technique”, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, pp. 71-76, 1997.
- [2] B. Armstrong-Helouvry, P. Dupont, and C. Canudas de Wit, “A survey of models, analysis tools and compensation methods for control of machines with friction”, *Automatica*, vol. 30, no. 7, pp. 1083-1138, 1994.
- [3] J.J. Buckley, “Universal fuzzy controllers”, *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1245-1248, 1992.
- [4] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.T. Astrom, and P. Lischinsky, “A new model for control of systems with friction”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 40, pp. 419-425, 1995.
- [5] Y.-C. Chang, “A robust tracking control for chaotic Chua’s circuits via fuzzy approach”, *IEEE Transactions on Circuits Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, pp. 889-895, 2001.
- [6] W. Chang, J.B. Park, Y.H. Joo, and G. Chen, “Robust fuzzy-model-based controller for uncertainty systems”, *Proc. of the IEEE International Fuzzy Systems Conference*, Seoul, Korea, August 22-25, pp. I-486 - I-491, 1999.

- [7] W. Chang, J.B. Park, Y.H. Joo, and G. Chen, "Design of robust fuzzy-model controller with sliding mode control for SISO nonlinear system", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 125, pp. 1-22, 2002.
- [8] S.-B. Choi and J.-S. Kim, "A fuzzy mode controller for robust tracking of robotic manipulators", *Mechatronics*, vol. 7, no. 2, pp. 199-216, 1997.
- [9] M.J. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, no. 5, October, pp. 1139-1144, 1981.
- [10] D. Driankov, H. Hellendoorn and M. Reinfrank, *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [11] H. Du and S.S. Nair, "Modeling and compensation of low-velocity friction with bounds", *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 1, pp. 110-121, 1999.
- [12] G. Feng, "New robust model reference adaptive control algorithm", *IEE Proc. Control Theory Appl.*, vol. 141, pp. 177-180, 1994.
- [13] S.S. Ge, G.Y. Li and T.H. Lee, *Automatica*, vol. 34, no. 7, pp. 807-819, 2003.
- [14] C. Ham, Z. Qu, and R. Johnson, "Robust fuzzy control for robot manipulators", *IEE Proc. Control Theory Applications*, vol. 147, no. 2, March, pp. 212-216, 2000.
- [15] P.A. Ioannou and J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall PTR, 1996.
- [16] H.K. Khalil, "Adaptive output feedback control of nonlinear systems by input-output models", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 2, pp. 177-188, 1996.
- [17] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*. (3rd Ed.), Prentice-Hall, Inc., 2002.

- [18] Y.H. Kim and F.L. Lewis, "Reinforcement adaptive learning neural-net-based friction compensation control for high speed and precision", *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 1, pp. 118-126, 2000.
- [19] G.J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [20] T.J. Koo, "Stable model reference adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 4, pp. 624-636, 2001.
- [21] H. Lee and M. Tomizuka, "Robust adaptive control using an universal approximator for SISO nonlinear systems", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 1, pp. 95-106, 2000.
- [22] Y. Lee, J.Q. Gong, B. Yao, and S.H. Zak, "Fuzzy adaptive robust control of a class of nonlinear systems", *Proc. American Control Conference*, Arlington, VA, pp. 4040-4045, 2001.
- [23] F.L. Lewis, A. Yesildirek, and K. Liu, "Multilayer neural-net-robot controller with guaranteed tracking performance", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 7, March, pp. 388-399, 1996.
- [24] H. Olsson, K.J. Astrom, C. Canudas, M. Gafvert, and P. Lischinsky, "Friction models and friction compensation", *European J. Control*, vol. 4, no. 3, 1998.
- [25] R. Palm, "Robust control by fuzzy sliding mode", *Automatica*, vol. 30, no. 9, pp. 1429-1437, 1994.
- [26] E. Panteley, R. Ortega, and M. Gafvert, "An adaptive friction compensator for global tracking in robot manipulators", *Systems & Control Letters*, vol. 33, pp. 307-313, 1998.
- [27] T. Poggio and F. Girosi, "Networks for approximation and learning", *Proc. IEEE*, vol. 78, no. 9, Sep., pp. 1481-1497, 1990.

- [28] M.M. Polycarpou, “Stable adaptive neural control scheme for nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, March, pp. 447-451, 1996.
- [29] A. Pozniak, W. Yu, E.N. Sánchez, and J.P. Pérez, “Nonlinear adaptive trajectory tracking using dynamical neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 10, December, pp. 1402-1411, 1999.
- [30] R.M. Sanner and J.J. Slotine, “Guassian Networks for direct adaptive control”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 3, no. 6, November, pp. 837-863, 1992.
- [31] D. Schroder (Ed), *Intelligent Observer and Control Design for nonlinear systems*. Springer-Verlag, 2000.
- [32] S. Seshagiri and H.K. Khalil, “Output feedback control of nonlinear systems using RBF neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, no. 1, January, pp. 69-79, 2000.
- [33] J.J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Inc., 1991.
- [34] M.W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [35] J.T. Spooner and K.M. Passino, “Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 3, August, pp. 339-359, 1996.
- [36] C.-Y. Su and Y. Stepanenko, “Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 2, no. 2, November, pp. 285-294, 1994.

- [37] Y. Tang and M. Tomizuka, “Decentralized robust control for a class of nonlinear systems”, *Proc. 1997 American Control Conference*, Albuquerque, NM, 1997.
- [38] Y. Tang and D. Vélez-Díaz, “Robust fuzzy control of mechanical systems”, *Proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, pp. 2404-2409, 2001.
- [39] Y. Tang and D. Vélez-Díaz, “Robust fuzzy control for a class of nonlinear systems with uncertainty”, *Proc. of the 41th IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, pp. 179-184, 2002.
- [40] Y. Tang and D. Vélez-Díaz, “Robust fuzzy control of mechanical systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 3, June, pp. 411-417, 2003.
- [41] P. Vedagarbha, D.M. Dawson, and M. Feemster, “Tracking control of mechanical systems in the presence of nonlinear dynamic friction effects”, *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 4, July, pp. 446-456, 1999.
- [42] D. Vélez-Díaz and Y. Tang, “Adaptive fuzzy control for a class of uncertain nonlinear systems”, *Proc. of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, pp. 5227-5232, 2003.
- [43] D. Vélez-Díaz and Y. Tang, “Adaptive robust fuzzy control of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, vol. 34, no. 3, June, pp. 1596-1601, 2004.
- [44] L.-X. Wang, “Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 1, no. 2, May, pp. 146-155, 1993.
- [45] L.-X. Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and stability analysis*. Prentice Hall, Inc., 1994.

- [46] L.-X. Wang, “Stable adaptive fuzzy controller with application to inverted pendulum tracking”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 26, pp. 677-691, 1996.
- [47] L.-X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall, Inc., 1997.
- [48] L.-X. Wang and J.M. Mendel, “Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 3, no. 5, September, pp. 807-814, 1992.
- [49] H. Xu, M. Mirmirani, P.A. Ioannou, and H. Boussalis, “Robust adaptive sliding control of linearizable systems”, *Proc. American Control Conference*, Arlington, VA, pp. 4351-4356, 2001.
- [50] J. Yen, R. Langari, and L.A. Zadeh (Eds), *Industrial Applications of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*. NY: IEEE Press, 1995.
- [51] W.-S. Yu and C.-J. Sun, “Fuzzy model based adaptive control for a class of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 3, June, pp. 413-425, 2001.
- [52] Y. Zhang, P.Y. Peng, and Z.P. Jiang, “Stable neural controller design for unknown nonlinear systems using backstepping”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, no. 6, November, pp. 1347-1360, 2000.

# Trabajo Futuro

Una de las líneas de investigación, en las cuales se puede continuar el presente trabajo, es la aportación de diseños sistemáticos para el continuo desarrollo de la “Teoría de Control Inteligente”. De este modo, lo desarrollado en esta tesis nos brinda una plataforma sólida para continuar con aportaciones formales en esta línea.

También, es nuestro interés, enriquecer los controladores propuestos empleando técnicas de computación inteligente. Esto es, proponer sistemas híbridos con características de razonamiento, aprendizaje, adaptación y evolución; por ejemplo, la optimización del vector de parámetros empleando algoritmos genéticos, o bien la determinación óptima de los conjuntos difusos en control difuso heurístico.

Una línea interesante, para continuar nuestro trabajo, podría ser sobre el empleo de conjuntos difusos de tipo 2 en el control difuso de sistemas no lineales inciertos.