



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“SOBRE LA ESTABILIDAD Y MEDIDA DE LAS
PELÍCULAS DE JABÓN”.

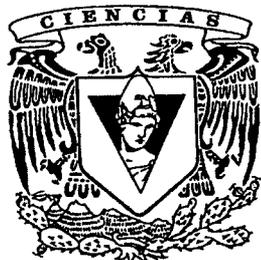
T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A:
J U A N O L G U I N O R T Í Z

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ GUADALUPE REYES VICTORIA

ASESORA DE TESIS:

M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN DE TESIS



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Entregue a la Dirección General de Bibliotecas de la
Unidad a difusir en formato electrónico a través de
Internet de los datos de los libros que se encuentran en
el inventario de los libros que se encuentran en el
inventario de los libros que se encuentran en el
inventario de los libros que se encuentran en el

Olguín Ortiz Juan

13/1/06



FECHA:

FIRMA:



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Sobre la estabilidad y medida de las películas de jabón"

realizado por Olgüín Ortiz Juan

con número de cuenta 09624608-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. José Guadalupe Reyes Victoria
Asesora de Tesis
Propietario M. en C. Mirna Villavicencio Torres
Propietario Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal
Suplente M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz
Suplente Fís. Estela Margarita Puente Leos

Mirna Villavicencio Torres

Consejo Departamental de Física



Alicia Zarzosa Pérez
M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Sobre la estabilidad y medida de las películas de jabón

Juan Olguín Ortíz
Facultad de Ciencias UNAM
México, D.F. MEXICO
j00j00j00@yahoo.com.mx

2005 P

Índice general

1. Superficies mínimas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Principio de mínima acción	3
1.4. La catenoide	5
1.5. La Helicoide	10
1.6. La ecuación de una superficie mínima	14
1.6.1. Generalización del problema	18
1.7. Coordenadas Isotermas	22
1.8. Vectores y operadores complejos	23
1.9. Conclusión	31
2. Medida de una superficie estable	33
2.1. Introducción	33
2.2. Estabilidad	33
3. Conclusiones	47

Introducción

Aunque la mecánica y otras áreas de la física se formulan más comúnmente en términos del álgebra vectorial desarrollada por J. Willard Gibbs, en algunas aplicaciones es más conveniente trabajar utilizando otro lenguaje matemático como por ejemplo, la geometría diferencial. Este es el caso del presente trabajo, cuyo tema central es el estudio teórico de las superficies mínimas conocidas.

La geometría diferencial en la física se ocupa entre muchas de sus áreas, para la cosmología, la mecánica, el electromagnetismo.

En cosmología se usa para deducir las ecuaciones de Einstein. Estas ecuaciones dan una perspectiva diferente al desarrollo de esta disciplina, ya que se concibe el universo como una variedad y estas ecuaciones están relacionadas con la curvatura de esta variedad [5]. En mecánica nos da una perspectiva diferente, esta herramienta (la geometría diferencial) vuelve a la mecánica geométrica en el siguiente sentido: El espacio de configuraciones del sistema se vuelve una variedad y las ecuaciones de Lagrange se convierten en las ecuaciones diferenciales que nos determinan las geodésicas en esta variedad y la energía cinética en la métrica de esta variedad [2], [5], [13]. En electromagnetismo se usa para darle una perspectiva diferente a las ecuaciones de Maxwell, ahora usamos formas diferenciales para reescribirlas y con esta nueva forma, las usamos para la teoría de la relatividad [5]. En particular, nos es muy útil para el estudio de las superficies mínimas. En biología, muchas plantas y muchos animales marinos tienen forma de superficies mínimas. En la arquitectura y el arte, también podemos encontrarlas, por ejemplo en la Sagrada Familia del famoso arquitecto Antoni Gaudí. El no usa rectas ni planos para construir esta catedral, usa curvas y superficies mínimas.

Nos planteamos como objetivo estudiar las superficies mínimas porque en física, solemos encontrarlas; y entender las superficies mínimas a profundidad nos ayuda a entender el fenómeno físico a profundidad. Por ejemplo,

para algunos sistemas mecánicos, su variedad de configuración puede ser una superficie mínima y comprender la naturaleza de este sistema, es entender esta superficie como tal. Para la construcción de aeronaves o edificios, necesitamos construir cierta superficie que maximice o minimice el área. Por ejemplo, si hacemos una planta de energía solar, será óptimo construir una superficie que maximice el área, de este modo, podemos captar mayor energía solar.

Usamos la geometría diferencial y no el álgebra vectorial, porque de esta manera es como se ha desarrollado la teoría de las superficies mínimas. Toda la teoría de las superficies mínimas está inmersa en la geometría diferencial, es por ello que nos vemos obligados a aprender geometría diferencial para comprender las superficies mínimas.

Esta tesis está dividida en dos capítulos: El primero se refiere a preliminares necesarios para el manejo de los términos que utilizaremos, mientras que en el segundo se demuestra un teorema que permite determinar la estabilidad de las superficies mínimas. Más abajo explicamos lo que esto significa.

En el primer capítulo se responde a las siguientes preguntas:

1. Si tenemos dos circunferencias coaxiales en dos planos paralelos distintos, ¿Qué forma tendrá la superficie que tiende por estas circunferencias?
2. ¿ Qué condición geométrica cumplen las superficies mínimas?
3. ¿ Cuándo podemos parametrizar las superficies mínimas? ¿ Qué condición cumple esta parametrización?

Las respuestas a estas preguntas son las siguientes y sus demostraciones se encuentran en el trabajo.

1. La **catenoide** o bien dos discos.

La catenoide es la superficie que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la curva llamada **catenaria**. Tal curva es la forma que adquiere una cuerda al ser levantada por sus extremos siempre y cuando sea de material homogéneo.

2. Primeramente definimos la **curvatura media** H de una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 , la cual nos sirve para medir cuánto está pandeada la

superficie. Otra característica de la curvatura media de este objeto nos la proporciona el **Teorema de Poisson-Laplace**, que nos dice que si tenemos una frontera entre dos medios diferentes, la curvatura media de la frontera es constante y está dada por $H = \frac{p_2 - p_1}{\lambda}$, donde p_1 y p_2 son las presiones que ejercen los medios en la interfase y λ es la tensión superficial, siendo además H la curvatura media de tal interfase.

En este trabajo se demuestra que las superficies mínimas tienen curvatura media cero. Más aún, las superficies con **curvatura media constante** diferente de cero las llamamos **superficies mínimas**. Por ejemplo, las esferas son superficies mínimas.

3. Sea r la parametrización de la superficie mínima. En tal caso r satisface la **ecuación de Poisson-Laplace**, es decir r es **armónica**. Esto significa que r satisface la misma ecuación que el **potencial eléctrico en el vacío**.

En el segundo capítulo analizamos el **criterio de estabilidad** para las superficies mínimas, descubierto por los brasileños **Barbosa y Do Carmo**. Por la estabilidad de una superficie mínima entendemos lo siguiente: Tomemos dicha superficie y perturbémosla. Si ésta empieza a vibrar sin romperse, será llamada **estable**. Por el contrario, si se rompe, se llamará **inestable**.

En este análisis, demostramos un resultado propuesto por **Schwartz** que podemos parafrasear de la siguiente forma: *si “pellizcamos” una película de jabón y la frecuencia de la onda obtenida en la película de jabón es menor que $2Hz$, entonces la película dada es estable*. Por otro lado, el criterio de Do Carmo y Barbosa, haciendo uso de esa misma jerga, dice que *si el área de la imagen de la película de jabón bajo la aplicación de Gauss es menor que 2π , entonces tal película de jabón es estable*. La **aplicación de Gauss** es una función definida en una superficie que toma valores en la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 , de tal forma que a cada punto de la superficie le asocia su vector normal unitario.

Capítulo 1

Superficies mínimas

1.1. Introducción

Este capítulo es una introducción al tema de las superficies mínimas, lo que buscamos es que el lector quede familiarizado con este tema y adquiera el conocimiento necesario para comprender el siguiente capítulo.

En este capítulo mostraremos que las superficies mínimas tienen curvatura media constante igual a cero en todos sus puntos, más aún, si una superficie tiene curvatura media igual a cero, entonces ésta es una superficie mínima.

Demostraremos que las superficies mínimas satisfacen una ecuación diferencial parcial llamada Ecuación de Bernstein. Obtendremos una solución de ella, la cual recibe el nombre de Superficie de Scherk.

Veremos que tanto el plano así como la helicoide son superficies mínimas regladas y que en virtud a un resultado de Catalán, éstas son las únicas superficies mínimas regladas. Mostraremos que todas las superficies mínimas tienen una parametrización armónica, es decir, que satisfacen la ecuación de Laplace.

También demostraremos que las superficies mínimas aceptan una representación compleja, lo cual es de mucha utilidad, pues muchos de los resultados que se obtienen para la variable compleja, son heredados directamente por las superficies mínimas.

1.2. Planteamiento del problema

Si sumergimos un aro de alambre en una solución jabonosa. ¿Qué forma tendrá la película de jabón que se formará en éste? ¿Será única? ¿Será orientable? ¿Habrá algún principio físico que nos permita describirlas? ¿Puede tener autointersecciones?

En la figura 1.1 se muestra el contorno de Douglas y las películas de jabón que se forman si lo sumergimos en una solución jabonosa.

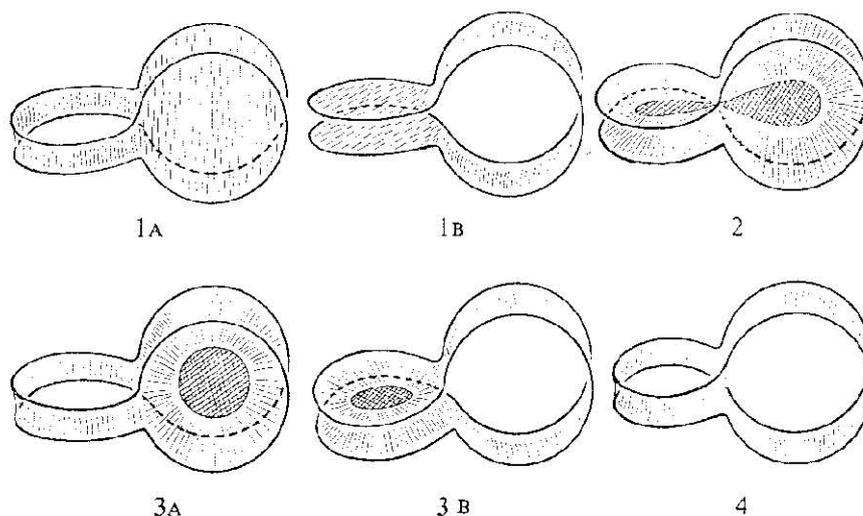


Figura 1.1: Más figuras para el contorno de Douglas.

Podemos observar que no se tiene una superficie única y, que de hecho, algunas presentan autointersecciones.

Un ejemplo de una superficie mínima no orientable es la banda de Mobius (véase figura 1.2) ¿Qué es una superficie orientable?

Para ver si hay algún principio físico que nos permita describirla, vale la pena enunciar el siguiente resultado obtenido por Poisson y Laplace:

[?]i M^2 es una variedad suave en \mathbb{R}^3 . Si M^2 es la frontera entre dos medios homogéneos, la curvatura media estará determinada por

$$H = \frac{1}{h}(p_2 - p_1)$$

donde p_2 y p_1 son las presiones sobre la superficie de cada líquido y h es una constante llamada tensión superficial.

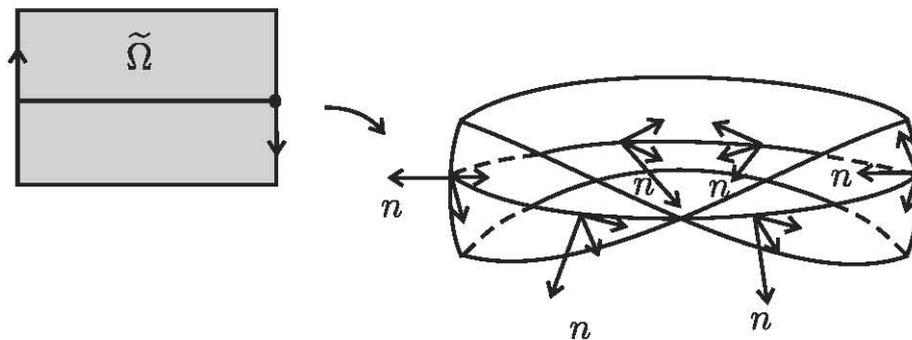


Figura 1.2: Banda de Mobius.

1.3. Principio de mínima acción

El principio de mínima acción fue formulado heurísticamente en 1744 por Pierre Maupertius, quien en 1746 publica un artículo con el nombre de "*las leyes del movimiento se deducen de un principio metafísico*". Al igual que otros científicos, Maupertius tiene intereses filosóficos, parte en primer lugar de la perfección de Dios y por otro lado de "*la supuesta economía de la naturaleza*".

En el mismo año de 1744, L. Euler demuestra rigurosamente al principio de mínima acción. Pero a diferencia de Maupertius, deduce que el movimiento no necesariamente corresponde a una acción mínima y sino que se puede dar también a través de la acción máxima. El error de Maupertius fue su idealismo por un lado y por el otro el negar la existencia de los contrarios, es decir, si existe el mínimo debe existir el máximo. Vale la pena ilustrar un ejemplo de lo anterior.

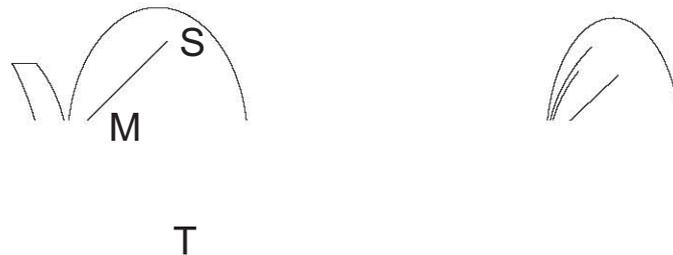


Figura 1.3: Elipses: caso a. y caso b.

Consideremos un espejo esférico y un espejo con forma de elipse, cuyos focos están en los puntos que denotaremos S y T . El principio de Fermat enuncia que la luz seguirá la trayectoria que le lleve de un lugar a otro en el menor tiempo posible.

Las elipses cumplen con la condición de que si ponemos en un uno de sus focos una lámpara y la prendemos, el rayo de luz reflejado en un punto de la pared de la elipse pasará por el otro foco (véase figura 1.4).

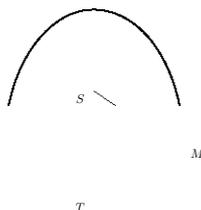


Figura 1.4: Elipse.

Regresando a nuestro ejemplo lo que se ve en la figura del ejemplo es una elipse con espejo esférico tangente a la elipse en el punto M , pero en el primer caso el espejo está dentro de la elipse, en el segundo se encuentra afuera de esta. Coloquemos una lámpara en S ; en ambos casos el rayo chocará en el punto M y se reflejará pasando por T . Se puede demostrar que para un punto interior P' de la elipse se cumple que

$$d(S, P') + d(P', T) < d(S, M) + d(M, T)$$

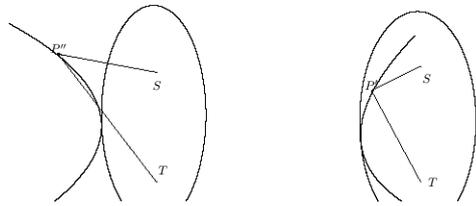
mientras que para un punto externo P'' se cumple

$$d(S, M) + d(M, T) < d(S, P'') + d(P'', T)$$

como lo muestra la figura 1.5.

Si consideramos que el rayo de luz se propaga en un medio homogéneo, la velocidad del rayo será constante y por tanto, la condición de un tiempo mínimo de recorrido se traduce en la distancia mínima. De este modo se deduce que En la figura 1.4, la luz describe una trayectoria cuya acción es máxima, mientras en la figura 1.5 ocurre lo contrario.

Así pues, utilizar el término de mínima acción puede resultar erróneo ya que lo correcto es llamarlo “principio de acción extrema”.



fs

Figura 1.5: Trayectorias de la luz.

1.4. La catenoide

Ahora nos preguntamos:

¿Cuáles son las superficies de revolución mínimas?

Vale la pena recordar que, en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) , la métrica de \mathbb{R}^3 está dada por

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Para una superficie de revolución cuya generatriz no es necesariamente una recta, tal generatriz está dada por una relación del tipo $r = r(z)$ (véase figura 1.6).

▲

$r(z)$

Figura 1.6: Superficie de revolución y su generatriz.

De este modo, en las coordenadas (φ, z) , se tiene que $dr = \dot{r}(z)dz$ y por lo tanto la métrica en tal superficie de revolución está dada por

$$ds^2 = r^2 d\varphi + (\dot{r}^2 + 1) dz^2$$

o bien, en notación matricial,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \dot{r}^2 + 1 \end{pmatrix}$$

con $\det g_{ij} = r^2(\dot{r}^2 + 1)$.

Denotemos por K a tal superficie de revolución: el área de K está dada por

$$\begin{aligned} A(K) &= \int_K \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 dx^2 = \int \sqrt{r^2(\dot{r}^2 + 1)} d\varphi dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\dot{r}^2 + 1)} dz \end{aligned}$$

Nuestro problema será encontrar la parametrización de la generatriz $r = r(z)$ de la superficie de revolución de tal modo que

$$A(k) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\dot{r}^2 + 1)} dz$$

sea mínima.

Para generalizar este problema es necesario enunciar las siguientes definiciones:

1. Denotamos por

$$C^{\infty} = C^{\infty}([\alpha, \beta], \mathbb{R}^3)$$

al conjunto de curvas suaves en \mathbb{R}^3 definidas en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

- 2.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}([\alpha, \beta], \mathbb{R}) = \{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^{\infty}\}$$

es el conjunto de funciones reales de variable real suaves.

3. Definimos una aplicación

$$F : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

para $\gamma \in C^\infty$, $\gamma : x = x(t)$ mediante

$$F(\gamma) = \int_\alpha^\beta L(x, \dot{x}, t) dt$$

donde la aplicación

$$L : C^\infty \rightarrow \mathcal{F}$$

le asocia a cada elemento de C^∞ una función del espacio \mathcal{F} .

A la función F le llamaremos *funcional* y a la función L le llamaremos el *Lagrangiano* [10].

4. Sea $\gamma : [\alpha, \beta] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida de tal manera que $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$ es diferenciable en su dominio. A esta función le llamamos **homotopía** o deformación suave de γ si $\gamma_s(\alpha) = \gamma(\alpha)$ y $\gamma_s(\beta) = \gamma(\beta)$ con los extremos fijos (véase figura 1.7).

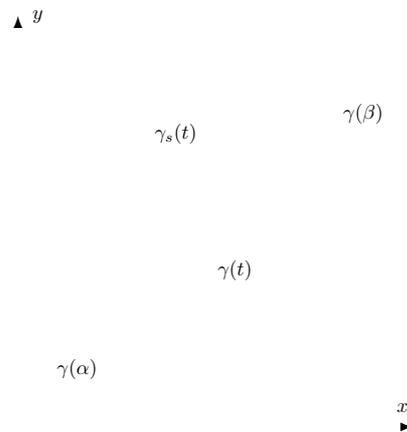


Figura 1.7: Homotopía γ_s de γ .

Si ahora, consideramos la familia de funcionales

$$F[s] = F(\gamma_s) = \int_\alpha^\beta L(x_s(t), \dot{x}_s(t), t) dt,$$

llamaremos **variación** de F respecto a γ a la cantidad

$$\frac{\delta F}{\delta \gamma} = \frac{dF}{ds}(\delta \gamma),$$

mientras que diremos que una curva es extremal si $\frac{\delta F}{\delta \gamma}|_{s=0} = 0$ para alguna deformación γ_s .

Además, una condición necesaria para que una curva sea extremal, es el siguiente:

Si $F(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} L(x, \dot{x}, t) dt$ y $\gamma : x = x(t)$ es una funcional, la curva γ es extremal si se satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Esta ecuación es la conocida **ecuación de Euler-Lagrange**.

Demostremos que esta condición ha de satisfacerse. Para esto, veamos que:

$$\frac{dF(s)}{ds}|_{s=0} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial s} \right) |_{s=0} dt$$

Sea $\eta = \frac{\partial x}{\partial s}|_{x=0}$, en tal caso,

$$\frac{dF}{ds}|_{s=0} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \eta \right) dt$$

Como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \eta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \right) - \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds}|_{s=0} &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta \right) - \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta |_{\alpha}^{\beta} \end{aligned}$$

Pero $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta |_{\alpha}^{\beta} = 0$ debido a que $\gamma_s(\alpha) = \gamma(\alpha)$ y $\gamma_s(\beta) = \gamma(\beta)$.

Por otro lado, de la definición de extremal, se tiene que

$$0 = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt$$

Como $\eta > 0$ y $\eta \in C_{[\alpha, \beta]}$, se sigue que

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

lo que termina la prueba.

Consideremos ahora, por ejemplo el Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$$

donde $\dot{x} = v$.

A la cantidad $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ le llamamos **momentum** (o momento lineal), mientras que a la cantidad $f = \frac{\partial L}{\partial x}$ le llamamos la **fuerza**.

Para nuestro ejemplo se cumple que las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -mg = f, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv,$$

por lo que en este caso, las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben

$$f = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dp}{dt} = p$$

Si ahora queremos encontrar la energía $H = T + V$, con T la energía cinética y V la energía potencial del sistema, tenemos que considerar:

$$H = 2T - L = T + V,$$

pero $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mvv = \frac{1}{2}PV$ y por lo tanto, $H = PV - L$

Recordemos que H es conocido como el **Hamiltoniano** del sistema mecánico.

Conservación de la energía

Ahora bien, si H es el Hamiltoniano asociado al funcional F y $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, entonces el Hamiltoniano es constante sobre las extremales de la funcional F . Es decir, el Hamiltoniano es una integral de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Esto puede demostrarse a partir de la siguiente cadena de igualdades

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] = 0$$

donde se han utilizado las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Toda la excursión anterior ha sido hecha con el afán de encontrar las extremales de $A(k)$. Ahora ya estamos con la posibilidad de encontrar la generatriz $r = r(z)$ de una superficie de revolución.

Ya que la funcional A tenemos que el lagrangiano es: $L = 2\pi r\sqrt{\dot{r}^2 + 1}$ y el momentum $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{2\pi r\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}}$, tendremos que el Hamiltoniano es $H = pv - L = \frac{2\pi r\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}} - 2\pi r\sqrt{\dot{r}^2 + 1}$, de donde

$$H = \frac{2\pi r}{\sqrt{\dot{r}^2 + 1}} = a_1$$

con $a_1 \in \mathbb{R}$ una constante debido a la conservación de la energía.

En consecuencia $\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}$ y al integrar por cuadraturas esta ecuación diferencial se tiene que $z = \pm\text{arccosh}\frac{r}{a} + C$ lo que nos lleva a que la superficie mínima obtenida es la llamada **catenoide**.

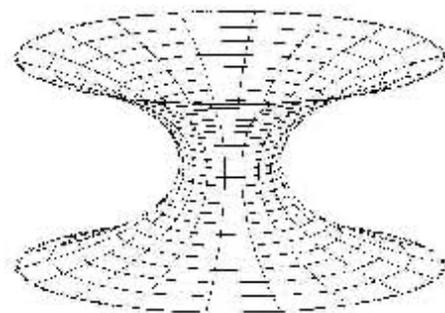


Figura 1.8: La catenoide.

1.5. La Helicoide

Veamos ahora otro tipo de superficie:

La helicoide es el lugar geométrico del espacio \mathbb{R}^3 que cumple con la siguiente condición:

Sean z y ℓ dos rectas perpendiculares, z vertical y ℓ horizontal. Si hacemos que ℓ gire con velocidad constante alrededor de z , pero que a la vez se mueva

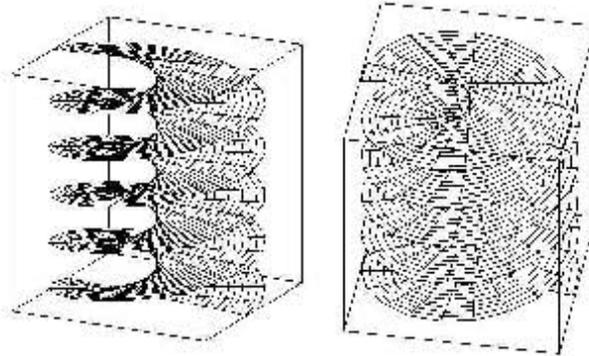


Figura 1.9: La helicoide.

sobre z , obtenemos la superficie que se muestra en la figura 1.9 y que se llama helicoide.

La parametrización de la helicoide está dada por:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Se sabe que la helicoide tiene curvatura media cero (véase Do Carmo [4] o Palmas-Reyes [14]).

Claramente los planos son superficies mínimas pero, ¿habrá superficies regladas mínimas no planas?.

A tal pregunta respondió E. Catalan en 1842 como a continuación se enuncia:

Sea M^2 una superficie en \mathbb{R}^3 reglada y mínima. En tal caso M^2 es un fragmento del plano o de una helicoide.

Antes de demostrar esta importante afirmación, enunciemos los siguientes resultados:

- Sea M^2 una superficie mínima contenida en \mathbb{R}^3 y sea I un intervalo de una recta tal que $I \subset \partial M$. Si M^* es la reflexión de M^2 sobre I con M^* mínima, entonces $M \cup M^*$ es mínima. En tal caso, M y M^* deben estar unidas suavemente a través de I (véase la figura 2.2), a este resultado se le conoce como Principio de reflexión de Schwartz-Riemann.

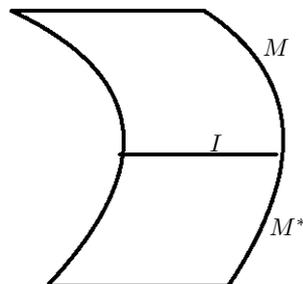


Figura 1.10: Principio de Schwarz-Riemann.

- Si M_1 y M_2 son superficies mínimas y contienen en su intersección un conjunto abierto, entonces $M_1 \cup M_2$ es una superficie mínima suave.
- Sea M una superficie mínima reglada con directriz $\gamma(t)$ siendo la curva $\gamma[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Sean ℓ_0 y ℓ_1 las directrices que pasan por $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ respectivamente, entonces existe $t \in [t_0, t_1]$ tal que la directriz l que pasa por $\gamma(t)$ es un eje de simetría de ℓ_0 y ℓ_1 son simétricas con respecto a l . l recibe el nombre de línea media (véase la figura 1.11).

Considérese el generador l que pasa por el punto $\gamma(t')$ con $t < t' < t_1$. Denotemos $M[t_0, t']$ el pedazo de superficie que pasa por ℓ_0 y l .

Ahora reflejemos este pedazo de superficie mínima con respecto a l . A tal reflexión la denotamos por medio de $M^*[t_0, t']$. En virtud al principio de reflexión $M[t_0, t'] \cup M^*[t_0, t']$ es una superficie mínima.

Digamos que tal unión es igual a $M[t_0, t_1]$ con $t_0 < t^* < t_1$, es decir, $M[t_0, t^*] \subset M[t_0, t_1]$ si $t' \rightarrow t_0$ y $t^* \rightarrow t_0$. Si por el contrario $t' \rightarrow t_1$, entonces $t^* \rightarrow t_1$. Por continuidad existe t' tal que $t^* = t_1$. Esto termina la demostración.

Con esta información demostraremos el resultado de Catalán:

Tomemos primero una superficie mínima M y sea γ la curva directriz y ℓ_0, ℓ_1 un par de rectas generatrices en los puntos $\gamma(t_0), \gamma(t_1)$ respectivamente.

Denotemos con l_2 a la línea media entre ℓ_0 y ℓ_1 . De manera semejante, denotemos como $l_{1/4}$ a la línea media entre ℓ_0 y $l_{1/2}$ y $l_{3/4}$ a la línea media entre $l_{1/2}$ y ℓ_1 . Sigamos con este proceso de manera indefinida. En el límite obtenemos el sistema L de la superficie $M[t_0, t_1]$. Para obtener un sistema

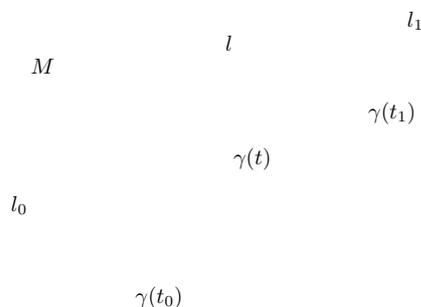


Figura 1.11: Eje de simetría.

de M debemos reflejar L con respecto a l_0 y l_1 y considerar la unión de l con sus imágenes. El resultado es un sistema de la superficie mínima reglada $M_{-1,2} = M_{-1}^* \cup M_{[t_0,t_1]} \cup M_2^*$ donde M_1^* y M_2^* son las reflexiones de $M_{[t_0,t_1]}$ con respecto a l_0 y l_1 respectivamente. Repitiendo los anteriores pasos podemos encontrar un sistema L_∞ para toda la superficie M .

Para concluir, basta demostrar que L_∞ es un plano o una helicoides. Si l_0 y l_1 son paralelas o se intersectan L_∞ es un plano. En caso contrario consideremos un plano paralelo en ambas rectas que llamaremos Π . A continuación proyectemos estas líneas sobre Π . A las proyecciones las denotaremos con l_0 y l_1 . (véase figura 1.12).

Sea l la línea media de l_0 y l_1 y l' su proyección sobre Π . Sea además P el punto de intersección de estas rectas.

Como l es la línea media de l_0 y l_1 l' es bisectriz de l'_0 y l'_1 . Sea z la recta que pasa por P y que es ortogonal a π . Esta recta intersecta a l , l_0 y l_1 en los puntos z , z_0 , z_1 respectivamente. En virtud a la simetría tenemos $d(z_0, z) = d(z, z_1)$ y el ángulo entre l'_1 y l' es el mismo que tiene l' y l_1 . Consecuentemente el sistema es una helicoides.

De este modo queda demostrado.

Hasta el momento hemos mencionado dos superficies mínimas importantes, la catenoide y la helicoides. Vale la pena señalar que estas superficies son homótopas.

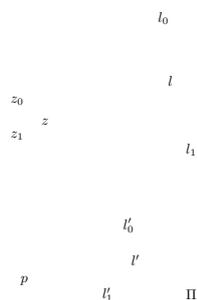


Figura 1.12: Proyección de l_0 y l_1 en Π .

Al parametrizar tales superficies utilizando las coordenadas (u, v) , tenemos que para la catenoide la fórmula es:

$$r_1(u, v) = \begin{cases} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sen v \\ u \end{cases}$$

mientras que para la helicoides:

$$r_2(u, v) = \begin{cases} \sinh u \sen v \\ -\sinh u \cos v \\ v \end{cases}$$

Por lo que, la homotopía que las une es

$$r(u, v, \alpha) = \cos \alpha r_1(u, v) + \sen \alpha r_2(u, v)$$

como se puede verificar directamente (véase la figura 1.13).

1.6. La ecuación de una superficie mínima

Ahora generalizaremos el problema de encontrar superficies mínimas. Si M es una superficie mínima dada como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

¿Existirá algún modo de identificar tales funciones cuya gráfica sea una superficie mínima?

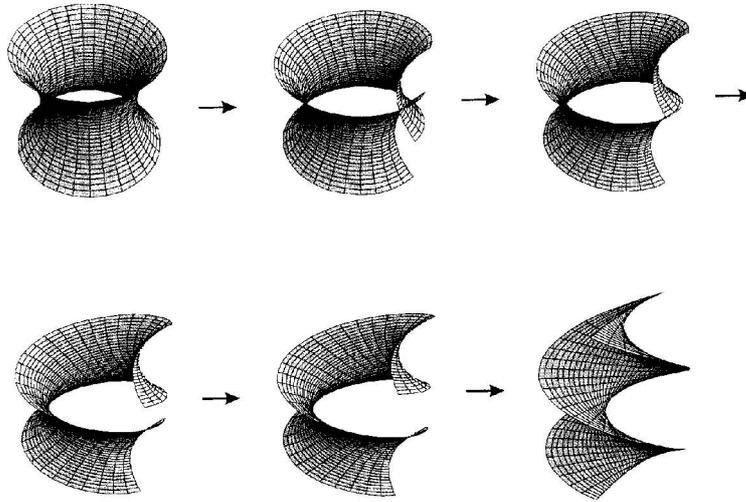


Figura 1.13: Homotopía entre la helicoides y la catenoide

Sea $\Omega_0 \subset \Omega$ un subconjunto compacto y consideremos la familia de funciones

$$z = f_t(x, y) = F(x, y, t)$$

con $f_0(x, y) = F(x, y, 0) = f(x, y)$ y $f_t(x, y) = f(x, y)$ para $(x, y) \in K^c$ donde $K = [-a, a] \times [-b, b] \subset \Omega_0$.

Si designamos por M_t a la gráfica de f_t , en tal caso el área de M_t está dada por

$$A(t) = \int_{\Omega_0} \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2} \, dx dy$$

La funcional $A : I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variable real. De este modo, para una superficie mínima tenemos necesariamente que $A'(0) = 0$.

Por un lado, tenemos las igualdades

$$A'(0) = \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2} \Big|_{t=0} dx dy,$$

$$\frac{d}{dt} \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2} \Big|_{t=0} = \frac{f_x F_x + f_y F_y t}{\sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}}$$

Como

$$\frac{f_x F_{xt}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) - \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} F_t$$

al evaluar la integral se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) dx dy &= \int_k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) dx dy \\ &= \int_{-a}^b \left(\int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) dx \right) dy \\ &= \int_{-b}^b -\frac{f_x F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \Big|_{x=-a}^{x=a} dy = 0 \end{aligned}$$

De manera análoga procedemos al integrar para el caso

$$\frac{f_y F_t}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

y uniendo ambos resultados, obtenemos que

$$A'(0) = - \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) \right] F_t dx dy$$

Como $A'(0) = 0$ y usando el lema fundamental del cálculo variacional encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) = 0$$

y calculado las derivadas indicadas llegamos a la igualdad

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0$$

A esta ecuación se le llama la **ecuación de superficie mínima**.

Si M es la superficie dada localmente por la gráfica de la superficie

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad z = f(x, y)$$

Demos ahora una expresión para la curvatura media de M . Sea $r = (x, y, f(x, y))$, entonces

$$\begin{aligned} r_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), & r_{yy} &= (0, 0, f_{yy}), & r_{xy} &= (0, 0, f_{xy}) \\ E &= 1 + f_x^2, & F &= f_x f_y, & G &= 1 + f_y^2 \\ n &= \frac{\Delta(2-f)}{\|\Delta(2-f)\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ L &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, & M &= \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, & N &= \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ H &= \frac{GL - 2MF + EN}{1 + f_x^2 + f_y^2} = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Si $H = 0$ obtenemos la ecuación de superficie mínima. De este modo hemos obtenido el siguiente resultado, que puede ser utilizado para definir una superficie mínima:

Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie, ésta superficie será mínima si su curvatura media H es cero.

Solución a la ecuación de superficie mínima. Superficies de Scherk

Tomemos $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. Al sustituir f en la ecuación de superficie mínima encontramos

$$(1 + \psi_y^2)\varphi_{xx} + (1 + \varphi_x^2)\psi_{yy} = 0$$

Por el método de separación de variables se tiene

$$-\frac{\varphi_{xx}}{1 + \varphi_x^2} = \frac{\psi_{yy}}{1 + \psi_y^2} = a$$

y

$$\psi_{yy} = a(1 + \psi_y^2)$$

Sean $z = \psi_y$ y $\dot{z} = \varphi_{yy}$, entonces $\dot{z} = a(1 + z^2)$ y $\frac{dz}{1+z^2} = a dy$. Consecuentemente

$$\psi = \int \tan(ay + d) dy = -\frac{1}{a} \ln \cos(ay + d) C_2$$

Del mismo modo, encontramos que $\phi(x) = \frac{1}{a} \ln(\cos(ax + b)) + c_1$, con b, c_1, C_2 y d constantes.

Por lo tanto,

$$z = f(x, y) = \frac{1}{a} \ln \frac{\cos(ax + b)}{\cos(ay + d)} + c$$

Tal función está bien definida en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |ax| < \pi/2, |ay| < \pi/2\}$. A la gráfica de tal superficie se le llama **superficie de Scherk** (véase figura 1.14).

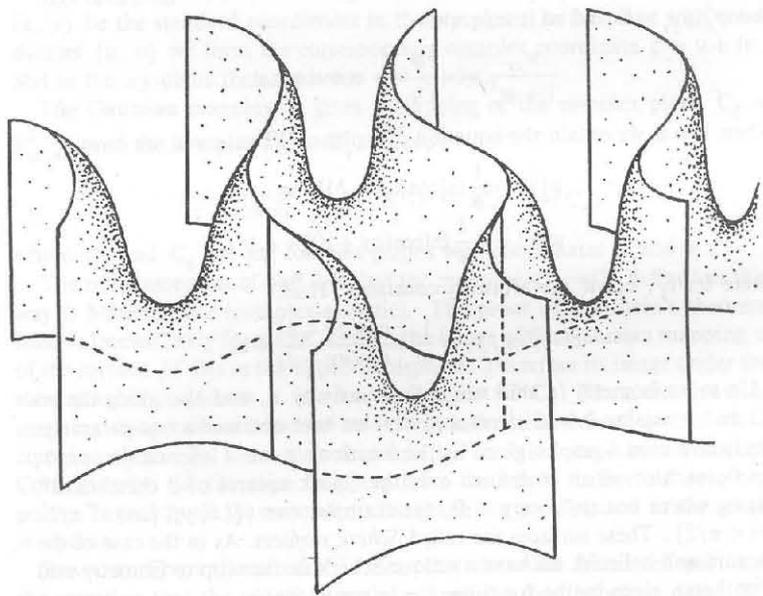


Figura 1.14: Superficie de Scherk.

Tal superficie puede ser extendida para todo \mathbb{R}^2 . Para ello hay que notar que las rectas paralelas al eje z que pasan por los puntos con coordenadas $x = \pm\pi/2$ y $y = \pm\pi/2a$ son fronteras de la superficie y por el resultado de reflexión de Schwartz podemos extender la superficie.

1.6.1. Generalización del problema

Sea $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ una hipersuperficie definida mediante la ecuación $V^{n-1} : x^n = f(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})$ donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave, siendo D un dominio acotado.

Estudiamos la funcional de área

$$S(f) = \int_D \sqrt{|\det A|} dx^1 dx^2 \cdots dx^{n-1}$$

donde $A = (g_{ij})$ la métrica de V^{n-1} heredada por el espacio ambiente.

Lo primero que hacemos será traducir el lagrangiano $L = \sqrt{|\det A|}$ en términos de f .

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial L}{\partial f_{x^i}^j} = 0$$

Ya que $n = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}$ siendo $G = x^n - f((x^1, x^2, \dots, x^{n-1}))$, entonces

$$\nabla G = (-f_{x^1}, -f_{x^2}, \dots, -f_{x^{n-1}}, 1)$$

y consecuentemente,

$$\|\nabla G\| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}$$

Por lo tanto, el vector normal a V^{n-1} está dado por

$$n = \left(\frac{-f_{x^1}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}}, \frac{-f_{x^2}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}}, \dots, \frac{-f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}} \right)$$

como se muestra en la figura 1.15.

De esta forma, el ángulo θ entre e_n y $n(p)$ satisface que

$$\cos \theta = \langle e_n, n(p) \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}}$$

De los cursos de cálculo se sabe que si $d\tau^{n-1}$ es la forma de volumen en V^{n-1} , entonces el área está dada por

$$S(f) = \int_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2} dx^1 dx^2 \cdots dx^{n-1}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial L}{\partial f_{x^i}^j} = 0$$

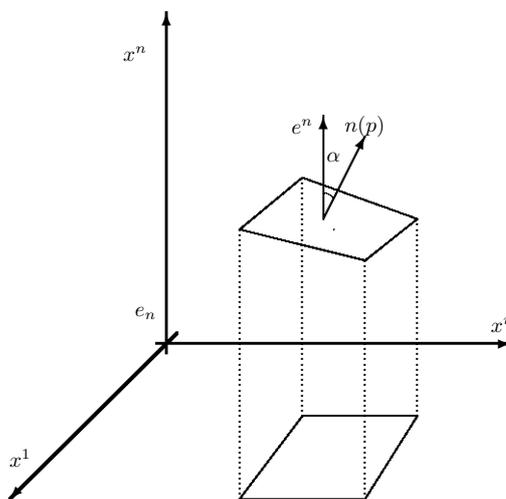


Figura 1.15: Vector normal a la gráfica de una función .

con $L = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2}$, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial f^1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial f_{x^i}} = \frac{f_{x^i}}{\sqrt{1 + \sum f_{x^i}^2}} = 0$$

Por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ostrogradsky) son

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f_{x^i}}{\sqrt{1 + \sum f_{x^i}^2}} \right) = 0$$

De aquí que las superficies que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (Ostrogradsky), se llaman las **extremales** de $S(f)$ y se denominan también **superficies mínimas**.

Hagamos el ejemplo para el caso $n = 3$. En las coordenadas x, y, z las ecuaciones Euler-Lagrange (Ostrogradsky) se transforman en:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0$$

llamada la ecuación de superficie mínima.

Si $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie suave, la curvatura media de V^{n-1} es $H = 0$ si y sólo si, en un entorno en cada uno de sus puntos la superficie V^{n-1} se puede representar en forma de gráfica de una función extremal para la funcional del área.

La demostración consiste en comparar $H = \text{tr}(A^{-1}Q)$ y las ecuaciones de Euler-Lagrange de la funcional del área para $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

El problema que hemos analizado es de tipo local. Existe un caso donde se plantea una solución global del problema, llamado el **Problema de Bernstein**:

¿Existe una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación de superficie mínima y que esté definida en todo el plano?

Claramente las funciones lineales satisfacen positivamente la pregunta. Pero, ¿serán las únicas?

La respuesta es afirmativa.

Antes necesitaremos enunciar los siguientes hechos:

1. Sea M^2 una superficie con una métrica $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ con E, F, G cuyos coeficientes son funciones analíticas. En tal caso existe un cambio de coordenadas $(x, y) \rightarrow (u, v)$ en la variedad tal que la nueva métrica se escribe $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Tales coordenadas son llamadas coordenadas isotermas (**Teorema de Bers-Beltrami**. Véase Dubrovin et al. [5] y Palmas-Reyes [14]).
2. La aplicación de Gauss $n : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ preserva ángulos para las superficies mínimas. Además, la imagen directa de M , es decir, la gráfica de f .
3. La proyección estereográfica $\Pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ preserva ángulos.

De este modo definimos la siguiente composición

$$\Pi_N \circ n \circ r : \mathbb{C} \rightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

como se muestra en la figura 1.16.

La composición obtenida es una aplicación $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la cual es entera. Además, es acotada porque la imagen $n(M)$ está en la parte superior de \mathbb{S}^2 .

Por el Teorema de Liouville tal aplicación es constante y por lo tanto la aplicación de Gauss también es constante.

Esto significa que M solo tiene un vector normal constante n y por lo tanto M es un plano. Esto prueba la afirmación.

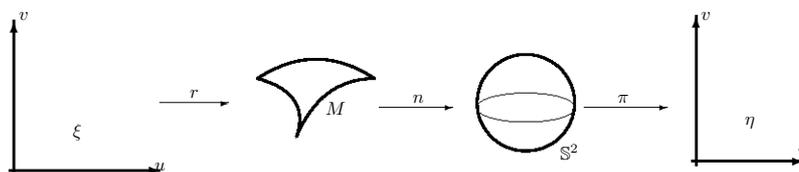


Figura 1.16: Composición $\Pi_N \circ n \circ r$.

1.7. Coordenadas Isotermas

Sean $x = x(p, q)$, $y = y(p, q)$ y $z = z(p, q)$ las ecuaciones que definen paramétricamente una superficie bidimensional en \mathbb{R}^3 . Para tal superficie la métrica es $ds^2 = E(dp)^2 + 2Fdpdq + G(dq)^2$. Mediante cambios locales de coordenadas (p, q) en la superficie la métrica ds^2 puede ser llevada a una forma conforme. Más precisamente, el resultado que Bers y Beltrami demostraron:

Sean, E, F y G funciones reales y analíticas de (p, q) reales. Se pueden definir entonces en la superficie nuevas coordenadas locales (reales) u y v en las cuales la métrica ds^2 adopta la forma $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Estas coordenadas se llaman **isotermas** o **conformes**.

La demostración se omite y el lector interesado la puede ver en Dubrovin *et al.*[5] o en Palmas-Reyes [14].

El uso de estas coordenadas es de mucha utilidad en el estudio de las superficies mínimas.

Sea una superficie M parametrizada con coordenadas isotermas $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. En tal caso definimos la cantidad

$$\Delta r = \nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2}$$

como el Laplaciano de r .

Se afirma que el vector $\Delta^2 r$ es perpendicular a la superficie M .

Ya que las coordenadas (u, v) son isotermas, tenemos

$$0 = \langle r_u, r_v \rangle, \quad \langle r_u, r_u \rangle = \langle r_v, r_v \rangle = \lambda$$

De aquí, $\langle r_{uu}r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle$ y $\langle r_u, r_{vv} \rangle = \langle r_{uv}, r_u \rangle$. Éstas se obtienen derivando las primeras ecuaciones respecto a u y a v respectivamente. Sumando miembro a miembro estas igualdades se tiene que $\langle \Delta^2 r, r_u \rangle = 0$.

De igual modo obtenemos que $\langle \Delta^2 r, r_v \rangle = 0$.

Se definen los armónicos a los radio vectores $r(u, v)$ que satisfacen la igualdad $\Delta^2 r = 0$.

Si M es una superficie parametrizada por $r(u, v)$ con métrica $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ y curvatura media H Entonces

$$\Delta^2 r = \lambda H n$$

Si M es una superficie mínima, entonces $\Delta^2 r = 0$, es decir, tal parametrización $r(u, v)$ es armónica.

Para comprobarlo, observemos que de la cadena de igualdades

$$\langle \Delta^2 r, n \rangle = \langle r_{uu}, n \rangle + \langle r_{vv}, n \rangle = b_{11} + b_{22}$$

y de las formas fundamentales

$$G = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(QG^{-1}) = \left(\frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda} \right)$$

Consecuentemente, $\Delta^2 r = 2\lambda H n$.

Particularmente, si M es una superficie mínima entonces $H = 0$ y por lo tanto $r(u, v)$ es una parametrización armónica.

Esto termina la prueba.

1.8. Vectores y operadores complejos

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con coordenadas (u, v) . En tal caso sabemos que la base del espacio tangente $T_p M$ es $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ y que la base del espacio dual $(T_p M)^*$ en el punto $p \in M$ es $\{du_p, dv_p\}$. Más aún

$$du_p \left(a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \right) = a \quad \text{y} \quad dv_p \left(a \frac{\partial}{\partial u} + b \frac{\partial}{\partial v} \right) = b$$

La discusión anterior puede ser llevada al caso cuando se tiene una variable compleja en lugar de variables reales.

Sea $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica dada por $f(u, v) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$.

Si $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$, definimos en el dominio D los operadores de derivación

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (\varphi + i\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right),$$

lo cual indica que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$, forma una base de $T_p D$ para todo $p \in D$. Del mismo modo, para todo $p \in D$ definimos

$$\begin{aligned} dz_p &= du + i dv \\ d\bar{z}_p &= du - i dv \end{aligned}$$

para $p \in D$. Entonces $\{dz_p, d\bar{z}_p\}$ forma una base de $(T_p M)^*$

Diremos que una función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica con respecto a z en D si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Sea la función $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. El **Laplaciano** de la función f denotado como ∇^2 o como Δf se define mediante la igualdad

$$\nabla^2 = \Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Sea $r(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$ la parametrización de una superficie mínima M , donde $z = u + iv$, siendo las funciones u y v conformes. Tenemos que

$$\frac{\partial x^k}{\partial z} = \frac{x_u^k - i x_v^k}{2}$$

Sea

$$\varphi = \frac{\partial r}{\partial z},$$

entonces

$$\varphi^2 = \sum_{k=1}^3 (x_z^k)^2 = |r_u|^2 - |r_v|^2 - 2i\langle r_u, r_v \rangle$$

Pero, en virtud de que $|r_u| = |r_v|$ y de que $\langle r_u, r_v \rangle = 0$ por ser conformes, se tiene que

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = 0$$

Además se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\nabla^2 r}{4} = 0$$

De lo anterior se concluye que φ es una función analítica, es decir, las funciones

$$\varphi^k = \frac{\partial x^k}{\partial z}$$

son analíticas.

Por esto, la minimalidad de una superficie es equivalente a que su radio vector sea armónico. Resumiendo esta discusión se tiene el siguiente resultado.

Si M es una superficie con parametrización $r(u, v)$ y $\varphi = \frac{\partial r}{\partial z}$ satisface $\varphi^2 = 0$ con $z = u + iv$, entonces, el que M sea mínima es equivalente a que φ sea analítica.

De lo anterior deducimos que

$$x^k(z, \bar{z}) = c_k + 2\operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z \varphi^k dz \right)$$

siendo c_k una constante compleja.

Mostramos ahora otras propiedades de la aplicación de Gauss utilizando la herramienta que se ha desarrollado.

Tenemos lo siguiente:

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie mínima. Entonces la aplicación de Gauss n es una isometría que preserva la orientación de M .

Sea $(dn)_p : T_p M \rightarrow T_{n(p)} \mathbb{S}^2$ la diferencial de la aplicación de Gauss y sea $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ la métrica conforme en M .

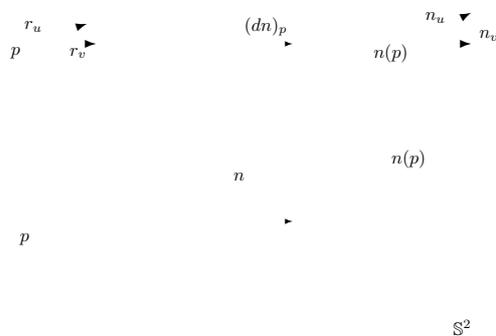


Figura 1.17: Geometría de la aplicación de Gauss.

Sabemos que $|r_u|^2 = |r_v|^2 = \lambda$ y que $\langle r_u, r_v \rangle = 0$. Así que basta probar que n_u y n_v son perpendiculares y que tienen la misma longitud (veáse la figura 1.17).

Como $\langle n, n \rangle = 1$, entonces al derivar respecto a u , se obtiene $\langle n_u, n \rangle = 0$ y que $\langle n_{uu}, n \rangle + \langle n_u, n_u \rangle = 0$.

Análogamente se obtiene que $\langle n_v, n \rangle = 0$ y que $\langle n_{vv}, n \rangle + \langle n_v, n_v \rangle = 0$.

Esto implica que

$$|n_u|^2 = \langle n_u, n_u \rangle = -\langle n_{uu}, n \rangle$$

y que

$$|n_v|^2 = \langle n_v, n_v \rangle = -\langle n_{vv}, n \rangle.$$

Por otro lado, se obtiene también que $\langle n_u, n_v \rangle = -\langle n_{uv}, n \rangle$, que $\langle n, r_v \rangle = 0$ y $\langle n, r_u \rangle = 0$.

Por lo tanto, al utilizar las ecuaciones para los coeficientes de la segunda forma se tiene $\langle n_u, r_u \rangle = -\langle n, r_{uu} \rangle = b_{11}$ y $\langle n_u, r_v \rangle = -\langle n, r_{uv} \rangle = b_{12}$.

De este modo, se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} n_u &= -\frac{b_{11}}{\lambda}r_u - \frac{b_{12}}{\lambda}r_v \\ n_v &= -\frac{b_{12}}{\lambda}r_u - \frac{b_{22}}{\lambda}r_v \\ |n_u|^2 &= -\langle n_{uu}, n \rangle = \frac{b_{11}^2}{\lambda} + \frac{b_{12}^2}{\lambda} \\ |n_v|^2 &= -\langle n_{vv}, n \rangle = \frac{b_{12}^2}{\lambda} + \frac{b_{22}^2}{\lambda} \\ \langle n_u, n_v \rangle &= -\langle n_{uv}, n \rangle = \frac{b_{11}b_{12}}{\lambda} + \frac{b_{12}b_{22}}{\lambda} \end{aligned}$$

La curvatura media H es entonces

$$H = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda}.$$

Ya que M es mínima, se tiene que $b_{11} = -b_{22}$ y de este modo $|n_v|^2 = |n_u|^2$ y $\langle n_u, n_v \rangle = 0$ lo que termina la prueba.

Observamos que si $(dn)_p : T_pM \rightarrow T_{n(p)}\mathbb{S}^2$ es la diferencial de la aplicación de Gauss, entonces en las bases respectivas $\{r_u, r_v\}$ y $\{n_u, n_v\}$, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix}$$

lo que implica que la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix}}{\lambda^2}.$$

Debido a que M es una superficie mínima, se tiene que $K < 0$ y ya que $\lambda^2 > 0$, se sigue que

$$\det \begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} < 0,$$

lo cual implica que la orientación dada por el sistema $\{r_u, r_v, n\}$ es la misma que la del sistema $\{n_u, n_v, -n\}$. Más aún, hemos probado que el área del cuadrilátero formado en T_pM es igual al área de su imagen directa en $T_{n(p)}\mathbb{S}^2$ multiplicada por $-K$.

De los cursos básicos de variable compleja, se conoce el siguiente resultado. La proyección estereográfica de la esfera desde el polo norte n ,

$$\Pi_N : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

preserva ángulos entre vectores tangentes

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie mínima definida por un radio vector $r = r(u, v)$ y $\varphi = \frac{\partial r}{\partial w}$ satisfaciendo $\varphi^2 = 0$ con $w = u + iv$. Entonces la aplicación de Gauss está dada por la igualdad

$$n = \frac{[\varphi, \bar{\varphi}]}{|\varphi|^2}$$

Si escribimos $[r_u, r_v] = (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$ donde

$$\begin{aligned} \Delta^1 &= y_u z_v - y_v z_u = \text{Im} [(y_u - iy_v)(z_u + iz_v)] \\ &= 4 \text{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3) \\ \Delta^2 &= 4 \text{Im}(\varphi_3 \bar{\varphi}_1) \\ \Delta^3 &= 4 \text{Im}(\varphi_1 \bar{\varphi}_2) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} [r_u, r_v] &= 4 \text{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3, \varphi_3 \bar{\varphi}_1, \varphi_1 \bar{\varphi}_2) \\ &= 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_3 \end{vmatrix} \\ &= 2[\varphi, \bar{\varphi}] \end{aligned}$$

Como $|r_u|^2 = |r_v|^2 = \lambda$ y $\langle r_u, r_v \rangle = 0$ se sigue que

$$|[r_u, r_v]| = |r_u|^2 = |r_v|^2 = \lambda = \frac{|r_u|^2 + |r_v|^2}{2} = 2|\varphi|^2$$

y consecuentemente,

$$n = \frac{[\varphi, \bar{\varphi}]}{|\varphi|^2}$$

lo que termina la prueba.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ y $\Pi_N : \{\mathbb{S}^2 \setminus N\} \rightarrow \mathbb{C}$ es la proyección estereográfica desde el polo norte N definida mediante $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$, en virtud del resultado anterior se tiene que la composición

$$\xi = \Pi_N \circ n \circ r : \mathbb{C} \rightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

dada en coordenadas mediante

$$\begin{aligned}x &= \frac{2 \operatorname{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3)}{|\varphi|^2} \\y &= \frac{2 \operatorname{Im}(\varphi_3 \bar{\varphi}_1)}{|\varphi|^2} \\z &= \frac{2 \operatorname{Im}(\varphi_1 \bar{\varphi}_2)}{|\varphi|^2}\end{aligned}$$

es analítica.

La aplicación ξ definida arriba tiene la forma:

$$\xi = \frac{2 \operatorname{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3) + 2i \operatorname{Im}(\varphi_3 \bar{\varphi}_1)}{|\varphi|^2 - 2 \operatorname{Im}(\varphi_1 \bar{\varphi}_2)}.$$

Por otro lado, el numerador de tal expresión es

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3) + 2i \operatorname{Im}(\varphi_3 \bar{\varphi}_1) &= \frac{1}{i} (\varphi_2 \bar{\varphi}_3 + i\varphi_3 \bar{\varphi}_1 - \varphi_3 \bar{\varphi}_2 - i\varphi_1 \bar{\varphi}_3) \\&= \varphi_3(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) - \bar{\varphi}_3(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = (\varphi_1 - i\varphi_2)(\varphi_1 + i\varphi_2) + \varphi_3^2 = 0$$

implica que

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Im}(\varphi_2 \bar{\varphi}_3) + 2i \operatorname{Im}(\varphi_3 \bar{\varphi}_1) &= \varphi_3(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2) + \bar{\varphi}_3 \frac{\varphi_3^2}{(\varphi_1 - i\varphi_2)} \\&= \frac{\varphi_3 [(\bar{\varphi}_1 + i\bar{\varphi}_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) + |\varphi_3|^2]}{\varphi_1 - i\varphi_2} \\&= \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} [|\varphi|^2 - 2 \operatorname{Im}(\varphi_1 \bar{\varphi}_2)]\end{aligned}$$

Definimos las funciones

$$g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}, \quad f = \varphi_1 - i\varphi_2$$

Claramente, la función f es una función analítica, mientras que g es meromorfa.

En otras palabras,

$$\varphi = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \varphi_3 = fg$$

Como las funciones φ_1, φ_2 y φ_3 son analíticas, entonces el producto fg^2 es una función analítica.

Al par de funciones complejas $g, f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ obtenidas, siendo f analítica, g meromorfa y fg^2 analítica, les llamaremos la **representación de Weierstrass** de la superficie mínima generada por las funciones φ_1, φ_2 y φ_3 .

De este modo hemos demostrado el siguiente resultado:

Sea la pareja de funciones (f, g) es una representación de Weierstrass en un dominio $U \subset \mathbb{C}$ para una superficie mínima y sean $\varphi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2)$, $\varphi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2)$ y $\varphi_3 = f(g)$ como antes. Entonces la aplicación de U en \mathbb{R}^3 dada por

$$x^k(w, \bar{w}) = c_k + 2\operatorname{Re} \left(\int_{w_0}^w \varphi_k dw \right), \quad K = 1, 2, 3$$

determina una superficie mínima regular inmersa en \mathbb{R}^3 , siendo $(\varphi)^2 = \sum_{k=1}^3 \varphi_k^2$.

De manera recíproca, sean (u, v) son coordenadas conformes en M y supongamos que $U \subset \mathbb{C}$ está provista de coordenadas complejas $w = u + iv$. Sea $r(u, v)$ el radio vector de M y $\varphi = \frac{\partial r}{\partial w} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Poniendo $f = \varphi_1 - i\varphi_2$ y $g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$ obtenemos la representación de Weierstrass de una superficie mínima M con dominio $U \subset \mathbb{C}$. La función g es una aplicación de Gauss de la superficie mínima M , si sobre \mathbb{S}^2 las coordenadas están dadas por la proyección estereográfica Π_N desde el polo norte N .

A continuación damos ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 , describiendo su dominio de definición y el par de funciones analíticas que hacen una representación de Weierstrass para cada caso.

1. La catenoide:

$$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

2. La helicoides:

$$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{i}{z^2}.$$

3. La superficie de Scherk:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = \frac{4}{1 - z^4}.$$

4. La superficie de Enneper:

$$U = \mathbb{C}, \quad g(z) = z, \quad f(z) = 1.$$

1.9. Conclusión

En este capítulo mostramos que las superficies mínimas tienen una curvatura media igual a cero y que éstas son las únicas con esa cualidad. Esto nos llevó a la Ecuación de Bernstein y en consecuencia, mostramos que las superficies mínimas satisfacen esta ecuación. Vimos una solución de esta ecuación, cuya superficie es la llamada superficie de Scherk. Mostramos que las únicas superficies mínimas regladas son la helicoides y el plano. Que las superficies mínimas tienen una parametrización que satisface la ecuación de Laplace y en consecuencia, que éstas aceptan una representación compleja.

Capítulo 2

Medida de una superficie estable

2.1. Introducción

En este capítulo analizaremos y demostraremos el resultado de Barbosa y do Carmo, para lo que definiremos la segunda variación I e introduciremos los conceptos de estabilidad e inestabilidad de una superficie mínima. Emplearemos el operador de Laplace y definiremos lo que es una función propia y un valor propio. Enunciaremos el resultado de Schwarz y definiremos un campo de Jacobi. Todo ello de tal manera que podamos deducir el teorema de Barbosa y do Carmo.

2.2. Estabilidad

A continuación estudiaremos la estabilidad de las superficies mínimas, para lo cual demostraremos lo siguiente:

Si $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie mínima, $D \subset M^2$ una región y n la aplicación de Gauss en M^2 . Si el área de la región esférica $n(D) \subset \mathbb{S}^2$ es menor que 2π , entonces D es estable.

Antes de mostrar que la anterior afirmación es cierta, es conveniente enunciar algunos resultados que nos serán de utilidad.

Sean, N un campo normal unitario en M , $\Delta_M T = \nabla_M^2$ el **operador laplaciano** en M y K la curvatura de Gauss. Sea $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $u = 0$ en ∂D . De este modo se define el campo vectorial normal $V = uN$ en \bar{D} . El campo V se dice ser también una **variación normal** de la región \bar{D} .

La segunda variación de la funcional del área está dada por

$$I(V, V) = \int_{\bar{D}} u(-\nabla^2 u + 2Ku) dM$$

donde dM es el elemento del área inducida por la métrica g_{ij} .

Por otro lado, si $I(V, V) > 0$ para toda variación normal v , entonces se dice que D es una **región estable** de M . En caso contrario, Si $I(V, V) < 0$ para alguna variación normal V , se dice que D es una **región inestable**.

En adelante, si W^2 es una región de una superficie M de dimensión dos inmersa en \mathbb{R}^3 , el operador $\Delta_W = \nabla_W^2$ denotará el Laplaciano en W en la métrica (g_{ij}) de M .

Se define al conjunto

$$H(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C_D^\infty, f(\partial D) = 0\}$$

como el **espacio de funciones reales suaves** con dominio en D que se anulan en la frontera.

Un concepto importante en este trabajo es el de valor propio y función propia, los cuales se definen de la siguiente manera:

Un número real λ que satisface

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

para alguna función $u \in H(D)$ lo llamamos **valor propio** en D asociado a la **función propia** u .

A continuación se define el espacio de funciones propias asociadas a la variación.

Llamaremos **espacio de funciones propias** de la variación. al conjunto

$$P_\lambda(D) = \{u \in H(D) \mid \nabla^2 u + \lambda u = 0\}$$

Por otro lado, es bien sabido que los valores propios en $D \subset W$ satisfacen las relaciones de orden

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots$$

Vale pena recordar que la métrica \langle, \rangle está definida por la forma cuadrática g_{ij} mediante $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ y que el gradiente de una función f en tal métrica está dada por

$$(\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

El conjunto

$$H^1(D) = \{u \in H(D) \mid u^2, \|\text{grad } u\|^2 \in (I_D)\}$$

Para toda $u \in H^1(D)$ se cumple

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\bar{D}} \|\text{grad } u\|^2 dW}{\int_{\bar{D}} u^2 dW}$$

La igualdad se alcanza si y sólo si, $u \in P_{\lambda_1}(D)$.

Si $\tilde{D} \subset D$, entonces $\tilde{\lambda}_1 \geq \lambda_1$, donde $\tilde{\lambda}_1$ es el primer valor propio asociado a \tilde{D} y λ_1 es el correspondiente a D . La igualdad se alcanza si y sólo si, $\tilde{D} = D$.

Aquí, dW es el elemento de área inducido por la métrica (g_{ij}) en D .

Para corroborarlo, vemos que si $u \in H^1(\tilde{D})$, entonces podemos extender a u en todo D de la siguiente manera:

$$u(p) = \begin{cases} u(p) & \text{si } p \in \tilde{D} \\ 0 & \text{si } p \in D \setminus \tilde{D} \end{cases}$$

Consecuentemente, $H^1(\tilde{D}) \subset H^1(D)$.

Lo anterior, junto con la cota de λ_1 , obtenemos

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \frac{\int_{\tilde{D}} \|\text{grad } u\|^2 dW}{\int_{\tilde{D}} u^2 dW} = \frac{\int_{\bar{D}} \|\text{grad } u\|^2 dW}{\int_{\bar{D}} u^2 dW}$$

Ya que $H^1(\tilde{D}) \subset H^1(D)$, se tiene que $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$.

Por otro lado, sea $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1$ y si $\tilde{u} \in P_{\tilde{\lambda}_1}(\tilde{D})$. Ahora definimos la función $u \in H^1(D)$ mediante la regla de correspondencia

$$u(p) = \begin{cases} \tilde{u}(p) & \text{si } p \in \tilde{D} \\ 0 & \text{si } p \in D \setminus \tilde{D} \end{cases}$$

De esta manera

$$\lambda_1 \int_{\bar{D}} u^2 dW = \int_{\bar{D}} \|\text{grad } u\|^2 dW$$

y por el lema 2.2 necesariamente $u \in P_{\lambda_1}(D)$. En consecuencia, u es analítica en D y $D \setminus \tilde{D}$ no tiene puntos interiores.

Si $\nabla_W^2 u + \lambda u = 0$ y $u \in H(D)$, entonces $\lambda = \lambda_1$ si y sólo si, $u \neq 0$ en D .

Si asumimos que $\lambda = \lambda_1$ y que $u = 0$. Un Teorema de la Teoría de ecuaciones diferenciales parciales elípticas nos indica que si $u(p) = 0$ con $p \in D$, entonces u cambia de signo en D . En virtud de esto, se puede afirmar que existe un $D' \subset D$ tal que $u|_D$ satisface la ecuación diferencial $\nabla_W^2 u + \lambda u = 0$ y $u|_{\partial D'} = 0$

$$\int_{\bar{D}'} \|\text{grad } u\|^2 dW = - \int_{\bar{D}'} u \nabla_W^2 u dW = \lambda_1 \int_{\bar{D}} u^2 dW$$

En virtud del resultado anterior, el primer valor propio λ'_1 en D' satisface $\lambda'_1 < \lambda_1$. Por otro lado, debido al Lema 2.2 $\lambda'_1 \geq \lambda_1$ y por la segunda parte del mencionado resultado $D = D'$. Tal contradicción proviene del hecho que $u \neq 0$.

Recíprocamente, asúmase que $u \neq 0$. Si $u_1 \in P_{\lambda_1}(D)$ entonces

$$\int_{\bar{D}} u \nabla_W^2 u_1 dW = - \int_{\bar{D}} \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle dW = \int_{\bar{D}} u_1 \nabla_W^2 u dW$$

De lo anterior, se tiene que

$$(\lambda - \lambda_1) \int_{\bar{D}} u u_1 dW = 0$$

Por la primera parte de la prueba $u_1 \neq 0$ y por lo tanto $\lambda = \lambda_1$, como habíamos afirmado.

Si ahora, D es un dominio en M , $u \in H(D)$ $\tilde{u} = u|_{\bar{D} \cap S}$ donde

$$S = \{p_1, p_2, \dots, p_l \mid K(p_i) = 0\}$$

y $V = uN$ es un campo normal en M . Entonces V es un campo de Jacobi, si y solo si,

$$\Delta_S \tilde{u} + 2\tilde{u} = 0$$

Más aún,

$$I(V, V) = - \int_{\bar{D} \cap S} (\tilde{u} \Delta_S \tilde{u} + 2\tilde{u}) dS$$

Por el resultado anterior, si M es una superficie mínima y $n(p)$ es la aplicación de Gauss, entonces se tiene

$$\langle dn_p(\xi), dn_p(\eta) \rangle = -K(p) \langle \xi, \eta \rangle$$

donde K es la curvatura de Gauss. En tal caso,

$$\nabla^2 = -K\nabla_S^2$$

En virtud de que

$$-\nabla^2 u + 2Ku = 0$$

entonces

$$K\nabla_S^2 u + 2Ku = 0$$

y como $K \neq 0$ en S entonces $\nabla^2 u + 2u = 0$ en $S \cap \bar{D}$, pero $\tilde{u} = u|_{S \cap \bar{D}}$.

Además

$$I(V, V) = - \int_{\bar{D}} u(-\Delta u + 2Ku) dM$$

y sustituyendo la misma cantidad encontramos finalmente

$$I(V, V) = - \int_{\bar{D} \cap S} \tilde{u} \Delta_S \tilde{u} + 2\tilde{u}^2 dS$$

con $dS = -KdM$.

A continuación se enuncia y demuestra un resultado que se debe a Schwarz, el cual es importante para este trabajo.

Sean, $D \subset M$ y $n : M \rightarrow \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss tal que n restringido a \bar{D} es una aplicación cubriente en $n(\bar{D}) \subset \mathbb{S}^2$. Si el primer valor propio λ_1 del Laplaciano ∇_S^2 en $n(D)$ satisface ser menor que 2, entonces D es inestable.

Lo anterior puede verificarse si consideramos $u \in P_{\lambda_1}(n(D))$, entonces $\nabla_S^2 u + \lambda_1 u = 0$ y $u|_{\partial(n(D))} = 0$.

Como $n(D)$ es una aplicación cubriente, entonces $n(\partial D) = \partial(n(D))$. La función $f = u \circ n : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $\nabla_S^2 f + \lambda_1 f = 0$ en $\bar{D} \cap S$ además de que $f > 0$ en D y $f|_{\partial D} = 0$.

Ahora definimos $V = fN$ y $\tilde{f} = f|_{\bar{D} \cap S}$. Entonces

$$I(V, V) = - \int_{\bar{D} \cap S} (\tilde{f} \nabla_S^2 \tilde{f} + 2\tilde{f}^2) dS = \lambda_1 \int_{\bar{D} \cap S} \tilde{f}^2 dS - 2 \int_{\bar{D} \cap S} \tilde{f}^2 dS$$

Por hipótesis, $\lambda_1 < 2$ y por lo tanto, para el campo normal dado V se tiene que $I(V, V) < 0$, lo que nos indica que D es inestable.

Consideremos la aplicación $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la regla $u(x, y, z) = z$. Definamos también el conjunto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z > 0\}$. En tal caso $u|_H > 0$ y $u(\partial H) = 0$. Por el Lema 2.2 se deduce que $\lambda_1(H) = 2$ y con la

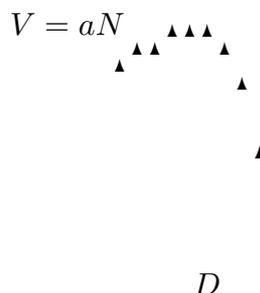


Figura 2.1: Aplicación de Gauss.

ayuda del Teorema de Schwarz 2.2 se sigue que si la aplicación de Gauss es inyectiva y $D \subset M$ es un dominio tal que $n(D)$ cubre un hemisferio, entonces D es inestable.

Ahora bien, si M es una superficie mínima:

1. Sea $D \subset M$ una región de M y N un campo vectorial normal a M . Diremos que el campo uN con $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo de Jacobi si y solo si u satisface la ecuación diferencial

$$-\nabla^2 u + 2Ku = 0$$

2. Una frontera ∂D de un dominio $D \subset M$ se llama *frontera conjugada* si existe un campo de Jacobi no cero tal que se anula en ∂D . Más aún, si no existe $D' \subset D$ con $D' \neq D$ tal que $\partial D'$ es una frontera conjugada, la frontera de D , es decir, ∂D , es llamada la primera frontera conjugada. La multiplicidad de una frontera conjugada ∂D es el número de campos de Jacobi linealmente independientes en \bar{D} que se anulan en ∂D .

La multiplicidad de una primera frontera conjugada en una inmersión mínima $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es igual a 1.

Sea el conjunto

$$\mu = \{u : D \subset M \rightarrow \mathbb{R} \mid -\nabla^2 u + 2Ku = 0, u|_{\partial D} = 0\}$$

donde $D \subset M$ de tal forma que ∂D es la primera frontera conjugada. Definimos la transformación lineal $\varphi(u) = u(p)$ donde $p \in D$ está fijo. Se afirma que $u(p) = 0$ solamente si $u = 0$. De lo contrario, si $u(p) = 0$ siendo $u \neq 0$, está función cambiaría de signo y ∂D no sería la primera frontera conjugada. Como $\ker \varphi = \{0\}$ se tiene que φ es inyectiva, Por lo tanto es un isomorfismo, lo que significa que \mathbb{R} es isomorfo al conjunto μ y $\dim \mu = 1$. Esto acaba la prueba.

Ahora sí, tenemos todos los elementos necesarios para demostrar la primera afirmación hecha en este capítulo.

Primero asumiremos que $D \subset M$ no es estable para conseguir una contradicción.

Si D no es estable, esto implica que el $I(V, V) \leq 0$ para algún $V = aN$ donde $a : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave que satisface $a(\partial D) = 0$. En virtud del Teorema del Índice de Morse (véase Smale [16]), existe un dominio $D' \subset D$ tal que $\partial D'$ es una primera frontera conjugada. De este modo, se deduce que hay un campo de Jacobi $J = uN$, tal que $J|_{\partial D'} = 0$ donde $u \in C_D^\infty$ cumple la relación $-\nabla^2 u + 2Ku = 0$, siendo u una función positiva y $u|_{\partial D'} = 0$, como lo muestra la figura 2.2.

Bajo estas condiciones, construimos una función $f : n(\bar{D}') \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in H^1(n(D'))$ y

$$\int_{n(\bar{D}')} \|\text{grad } f\|^2 dS \leq 2 \int_{n(\bar{D}')} f^2 dS$$

En virtud de toda la discusión anterior se tiene que

$$\lambda_1(n(\bar{D}')) \leq 2$$

Por otro lado, es un hecho conocido que dentro de todos los dominios esféricos de área igual el que minimiza el primer valor propio es la *gorra esférica*

Así, sea C una gorra esférica con

$$\text{rea } C = \text{rea}(n(\bar{D}')) < 2\pi$$

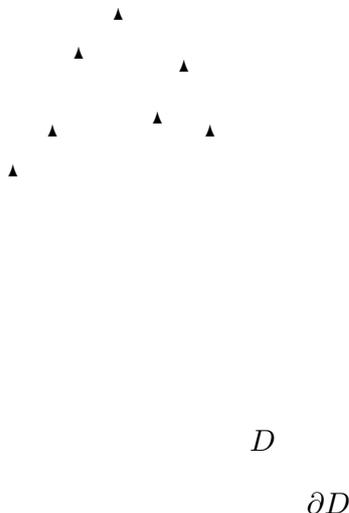


Figura 2.2: Construcción del Campo de Jacobi.

Si H es un hemisferio se tiene que $\lambda_1(H) = 2$, por toda la discusión anterior, podemos garantizar la siguiente desigualdad:

$$\lambda_1(n(\bar{D}')) \geq \lambda_1(C) > 2$$

lo cual contradice la primer desigualdad y por lo tanto conduce a una contradicción al suponer que \bar{D}' es inestable.

Notese que la curvatura k es cero en sólo puntos aislados de M , debido a la anti-analiticidad de la aplicación de Gauus n . A tales puntos les llamaremos de *ramificación*. La aplicación n se dirá un cubriente ramificado en una vecindad de cada uno de estos puntos y el número de ramas es llamado *multiplicidad de la rama* en el punto. Por la compacidad de \mathbb{S}^2 , sólo existe un número finito de puntos ramificados.

Por otro lado, si p no es un punto de ramificación, entonces n es un difeomorfismo local y tiene multiplicidad uno.

Sean $q \in n(\bar{D}')$ y el conjunto

$$n^{-1}(q) \cap \bar{D}' = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n_q}\}$$

siendo α_i la multiplicidad de p_i .

Se define la función $f : n(D') \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la regla de correspondencia

$$f(q) = \sum_{i=1}^{n_q} \alpha_i u(p_i)$$

Ya que $u > 0$ en D' y $u(\partial D') = 0$, la función f es positiva en D' y $f(\partial n(D')) = 0$ (véase la figura 2.3).

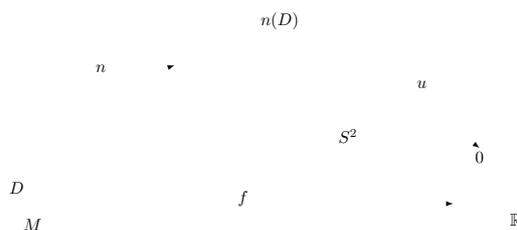


Figura 2.3: Construcción de la función f .

De ahora en adelante $u = 0$ fuera de \bar{D}' y a tal extensión se le seguirá llamando, sin pérdida de generalidad, igualmente u .

La función f es continua en $n(\bar{D}')$.

La afirmación anterior es cierta, pues si $q \in n(\bar{D}')$, entonces existe una vecindad de q $U \subset S^2$ de tal forma que

$$n^{-1}(U) = \cup_{j=1}^{n_q} U_j$$

donde $U_k \cap U_l = \emptyset$ para $k \neq l$, donde $U_j \subset M$ $J = 1, 2, \dots, n_q$ son las componentes conexas de $n^{-1}(U)$ siendo además $n^{-1}(q) = \{p_1, p_2, \dots, p_{n_q}\}$.

Vale la pena notar que

$$n|_{U_i \setminus \{p_i\}}$$

es un cubriente de $U \setminus \{q\}$ y denotamos por $\alpha_i \geq 1$ la multiplicidad del cubriente.

Ahora definimos las funciones $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ mediante las reglas de correspondencia:

$$f_i(\tilde{q}) = \begin{cases} \alpha_i u(p_i) & \text{si } \tilde{q} = q \\ \sum_{j=1}^{\alpha_i} u(\tilde{p}_j^i) & \text{si } \tilde{q} \neq q \end{cases}$$

donde $n^{-1}(q) \cap U_i = \{\tilde{p}_1^i, \tilde{p}_2^i, \dots, \tilde{p}_j^i\}$.

Observamos que claramente

$$f|_{U_i} = \Sigma f_i$$

Para demostrar la continuidad de f demostraremos la continuidad de cada f_i . Para ello, podemos suponer que la vecindad U inicialmente escogida es normal. Sea L un rayo geodésico que parte de q hasta la frontera ∂U . Ya que n es un cubriente, se puede definir una inversa local de la aplicación de Gauss, dada por

$$n_{ij}^{-1} : U \setminus L \rightarrow U_i$$

donde $f_i|_{U \setminus L} = \Sigma_j u \circ n_{ij}^{-1}$. La figura 2.4 ilustra esto.

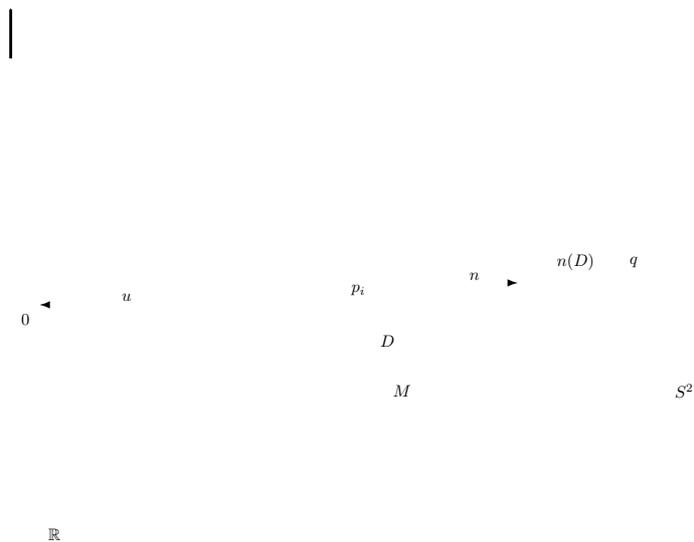


Figura 2.4: Continuidad de la función f .

Ya que $u = 0$ fuera de D' cada f_i es continua en $U \setminus L$. En virtud de que L es arbitraria, se sigue que f_i es continua en $U \setminus \{q\}$. Para una elección adecuada de L se tiene que

$$\lim_{\tilde{q} \rightarrow q} \Sigma u \circ n_{ij}^{-1} = \alpha_i n(p_i)$$

lo que demuestra la continuidad de f_i y termina la prueba de este resultado.

Sea $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ el conjunto de valores en $n(\bar{D}')$ imagenes de los puntos ramificados en \bar{D}' y consideréense

$$B_\epsilon^1, B_\epsilon^2, \dots, B_\epsilon^m$$

discos geodésicos centrados en q_i de radio ϵ que no se intersectan como lo muestra la figura 2.5.



Figura 2.5: Construcción de T_ϵ .

Definimos

$$T_\epsilon = n(\bar{D}') \setminus n(\partial D') \setminus \cup_{t=1}^m B_\epsilon^t$$

Existen $R_{ij} \subset T_\epsilon$ conjuntos abiertos ajenos y simplemente conexos tales que

1. Si $q \in R_{ij}$, entonces $n^{-1}(q) \cap D'$ tiene j elementos.
2. $\bar{T}_\epsilon = \cup_{ij} \bar{R}_{ij}$
3. $n^{-1}(R_{jk} = \cup_{l=1}^j R_{jkl}$ donde R_{jkl} son abiertos ajenos por pares. Además, $n|_{R_{jkl}}$ es un difeomorfismo sobre R_{jk} .

Verifiquémoslo:

Si

$$T_j = \{q \in T_\epsilon \mid n^{-1}(q) \cap D' \text{ tiene } j \text{ elementos}\}$$

la aplicación de Gauss n es un difeomorfismo en $n^{-1}(T_\epsilon) \cap D'$, de lo que se sigue que T_j es abierto. Sean T_{jk} con $k = 1, 2, \dots, n_j$ las componentes conexas de T_j . Si T_{jk} no es simplemente conexo, es posible cortar a lo largo de curvas para obtener conjuntos R_{jk} que si lo son.

Por construcción, $\bar{T}_\epsilon = \cup \bar{R}_{jk}$. Llamémosle R_{jkl} a las componentes conexas de $n^{-1}(R_{jk}) \cap D'$. De lo anterior, n es un cubriente.

Si $U \subset M$ es un conjunto abierto, con n un difeomorfismo $\|d(u \circ n^{-1})\|_S^2 = \frac{-1}{K} \|du\|^2$

Sea e_1, e_2 un sistema ortonormal en un punto y W_1, W_2 un sistema en el espacio dual y $dn = (h_{ij})$ la segunda forma fundamental. Como es mínima $h_{11} + h_{22} = 0$ y $h_{12} = h_{21}$. Además sea $du = \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 = (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.

$$dn = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \quad (dn)^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix}$$

$$du \circ dn^{-1} = \frac{1}{k} (\alpha_1 \quad \alpha_2) \begin{pmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{k} (\alpha_1 h_{22} - \alpha_2 h_{12} - \alpha_1 h_{21} - \alpha_2 h_{11})$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|d(u \circ n^{-1})\|_S^2 &= \frac{1}{k^2} [(\alpha_1 h_{22} - \alpha_2 h_{12})^2 + (-\alpha_1 h_{21} - \alpha_2 h_{11})^2] \\ &= \frac{1}{k^2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (h_{22}^2 + h_{11}^2) \\ &= -\frac{1}{k} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ &= -\frac{1}{k} \|du\|^2 \end{aligned}$$

Por el resultado anterior, se tiene la aplicación $n_{jkl} = n|_{R_{jkl}}$ la cual es invertible con inversa $n_{jkl}^{-1}: R_{jkl} \rightarrow R_{jk}$. Por continuidad, la podemos extender hasta \bar{R}_{jk} . Observemos que $f|_{\bar{R}_{jk}} = \sum_l u \circ n_{jkl}^{-1}$ con $l = 1, \dots, j$. Como es diferenciable en \bar{D}' y \bar{R}_{jk} no tiene puntos de ramificación, f es diferenciable en \bar{R}_{jk} .

Con lo siguiente, se termina la prueba del resultado principal de este capítulo (2.2).

$$\int_{\bar{D}'} \|\text{grad}f\|^2 dS \leq 2 \int_{\bar{D}'} f^2 dS$$

Basta demostrar

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{T}_\epsilon} \|df\|^2 dS \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\bar{T}_\epsilon} f^2 dS$$

Desarrollando el lado izquierdo de la desigualdad, encontramos que

$$\begin{aligned} \int_{\bar{T}_\epsilon} \|df\|^2 dS &= \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} \|df\|^2 dS = \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} \left\| \sum d(u \circ n_{ikl}^{-1}) \right\|^2 dS \\ &= \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} \sum_l \|d(u \circ n_{jkl}^{-1})\|^2 + I \end{aligned}$$

donde

$$I = \sum_{jk} \int 2 \sum_{r < s} \langle d(u \circ n_{jkr}^{-1}), d(u \circ n_{jks}^{-1}) \rangle dS, \quad r, s = 1, \dots, j$$

por el Lema anterior y debido a que $dS = -KdM$, tenemos:

$$\sum_l \int_{\bar{R}_{jk}} \|d(u \circ n_{jkl}^{-1})\|^2 dS = \sum_l \int_{\bar{R}_{jkl}} \|du\|^2 dM$$

y sea el conjunto

$$D_\epsilon = n^{-1}(\cup_t B_\epsilon^t)$$

esto implica que $\overline{D'} \setminus D_\epsilon = \cup \bar{R}_{jkl}$

$$\int_{\bar{T}_\epsilon} \|df\|^2 dS = \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} \|df\|^2 dM + I = \int_{\overline{D'} \setminus D_\epsilon} \|du\|^2 dM + I$$

Por otro lado

$$\int_{\bar{T}_\epsilon} f^2 dS = \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} \left(\sum_l u \circ n_{jkl}^{-1} \right)^2 dS = \sum_{jkl} \int_{\bar{R}_{jk}} (u \circ n_{jkl}^{-1})^2 dS + \Pi$$

donde

$$\Pi = \sum_{jk} \int_{\bar{R}_{jk}} 2 \sum_{r < s} (u \circ n_{jkr}^{-1} \circ u \circ n_{jks}^{-1}) dS \quad r, s = 1 \dots, j$$

$$2 \int_{\bar{T}_\epsilon} f^2 dS = -2 \sum_{jkl} \int_{\bar{R}_{jkl}} \sum K u^2 dM + 2\Pi = - \int_{D' \setminus D_\epsilon} 2K u^2 dM + 2\Pi$$

Capítulo 3

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un análisis de la estabilidad de superficies mínimas utilizando el formalismo de la geometría diferencial, mostrando que la relación entre matemáticas y física es indisoluble. Se ha analizado la estabilidad de las superficies mínimas, utilizando los principios establecidos por Barbosa y do Carmo.

Como vimos, es necesario aprender toda esta herramienta matemática para aprender física, ya que ésta nos permitirá comprender de mejor manera los fenómenos físicos. La relación entre física y matemáticas es indisoluble porque sin el uso de las matemáticas no se pueden comprender los fenómenos físicos. Por ejemplo, sin la geometría diferencial, no podríamos comprender la nueva visión de la mecánica o la relatividad general. Es por ello, que las matemáticas y la física mantienen una relación indisoluble.

Si no estudiamos geometría diferencial, no podemos entender las superficies mínimas y en consecuencia no podemos entender ciertos sistemas mecánicos y las construcciones de naves y edificios serían difíciles de estudiar y no podríamos trabajar con ellas y mejorarlas consistentemente.

Mencionamos que Barbosa y do Carmo no solamente han publicado este teorema como criterio de estabilidad de las superficies mínimas. La actividad en este área es intensa, en la cual han publicado otros resultados sobre este tema.

El lector interesado en el tema y que quiera seguir desarrollándolo, puede tomar esta tesis como punto de partida.

Aquí demostramos el teorema de Barbosa y do Carmo, para lo cual, utilizamos el laplaciano, sus valores y funciones propios, los campos de Jacobi, el principio de Schwarz y finalmente la segunda variación, que en otros textos

se conoce como índice.