UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Distintas Funciones entre Continuos y sus Hiperespacios.

M. en C. Félix Capulín Pérez

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

2006

Dedicatoria y Agradecimientos

.

Quiero dedicar principalmente este trabajo a tres personas, todas ellas mujeres. Cada cual, no menos importante una de la otra. Las voy a mencionar en orden de aparición.

La primera, es la mujer que me dio la vida, que sin titubéos daría la vida por mi y que con gran amor la llevo en mi corazón.

A mi madre

La segunda, es la mujer con la que comparto y compartiré todos los aspectos mi vida y que juntos creamos una nueva vida (Jesús), a esa gran mujer que se robo mi corazón.

A mi esposa

La Tercera, es la mujer a la que le debo mi vida, (ella sabe como) que guió una parte importante de mi vida y que su apoyo fue impresindible en este paraíso que son las matemáticas. Ella tiene un lugar especial en mi corazón.

A Beti (Isabel Puga)

.

Me parece que es el momento de dar gracias a dios, por permitirme culminar y comenzar una nueva etapa.

.

Cuando nos encontramos en estos momentos, es dificil expresar el enorme agradecimiento y cariño que se tiene hacia esta gran institución que es LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO. Gracias por permitirme ser parte de esta gran Universidad y que con mucho orgullo puedo decir: "Hecho en CU".

Quiero agradecer infinitamente el apoyo otorgado por la Dirección General de Estudios de Posgrado, UNAM, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, a la Facultad de Ciencias de la UNAM y al Instituto de Matemáticas de la UNAM. Quisiera también aprovechar el momento para dar gracias a los Profesores que revisaron y criticaron mi trabajo: Dra. Isabel Puga Espinosa, Dr. Raúl Escobedo Conde, Dra. Patricia Pellicer Covarrubias, Dr. Salvador García Ferreíra, Dr. Sergey Antonyan, Dr. W. J. Charatonik y al Dr. Mikhail Tkachenko.

Por último, permítanme decirlo así, para no excluir a nadie. Quiero compartir este gran logro con todas aquellas personas e instituciones, que de alguna u otra forma me han apoyado, han y están interviniendo tanto en mi vida personal como profesional.

INDICE GENERAL

Introducción

El presente trabajo está enmarcado en la Teoría de Continuos e Hiperespacios.

Uno de los problemas que abordamos en este trabajo es el de caracterizar a los continuos X para los cuales existen retracciones de $C(X)$ a X o de 2^X a X. Este problema tiene su punto de partida en 1970 cuando S. B. Nadler Jr. en [32] plantea el siguiente problema.
¿Bajo qué condiciones X es la imagen continua de 2^X o de $C(X)$?.

Por ejemplo ningún continuo que no sea arco-conexo puede ser la imagen continua de $C(X)$ o de 2^X ya que estos espacios son siempre arco-conexos.

Como caso particular, S. B. Nadler Jr. planteó el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un continuo X sea un retracto de 2^X o de $C(X)$.

Aún no se conocen condiciones que caractericen por completo a estos retractos.

Una de las principales aportaciónes en esta tesis es la siguiente:

Si un continuo X es retracto de $C(X)$, entonces X no es de tipo N. Donde intuitivamente ser de tipo N significa, tener un arco y dos sucesiones de arcos convergiendo a dicho arco. Donde intuitivamente cada uno de los elementos de una sucesión tiene forma semejante a "V" y los elementos de la otra sucesión, tiene la forma semejante a "Λ". En el capítulo 3 presentamos la demostración de este resultado.

La tesis está organizada de la manera siguiente:

En el primer capítulo presentamos definiciones de conceptos y resultados relacionados con los hiperespacios $C(X)$, 2^X y $F_2(X)$ de un continuo X.

En el capítulo 2, presentamos conceptos y resultados relacionados con dendroides.

Tanto en el capítulo 1 como en el 2 surgieron algunas preguntas cuya respuesta no encontramos en la literatura. Así que en esta tesis se encontrarán nuevas aportaciones al tema.

En el capítulo 3 presentamos la demostración del teorema siguiente: Si un continuo X es retracto de $C(X)$, entonces X no es de tipo N. Con una demostración similar, probamos un resultado relacionado con funciones promedio que generaliza a un Teorema de Bell y Watson [1, Teorema 3.5, p. 42]. Exponemos también, ejemplos que nos muestran que la propiedad ser de tipo N es necesaria, pero no suficiente. Más aún, damos ejemplos que nos muestran las propiedades no ser de tipo N (resp. no ser de tipo N generalizado) y ser uniformemente arco-conexo, aunque son ambas necesarias para que un continuo X sea retracto de $C(X)$, juntas no son suficientes.

En el capítulo 4 exponemos resultados que relacionan las propiedades tipo N, tipo N generalizado y propiedad de intersección doblada. Relacionamos también estas tres propiedades con la contractibilidad y la existencia de retracciones, selecciones y funciones promedio. Con esto damos respuesta a algunas preguntas que encontramos en la literatura y a otras planteadas por nosotros mismos.

El capítulo 5 está dedicado a responder preguntas sobre qué tipo de funciones preservan la selectibilidad y la no selectibilidad. Estas preguntas fueron planteadas por J.J. Charatonik en [8, Pregunta 14.15].

17 de abril de 2006

Capítulo 1

Continuos y sus Hiperespacios

En este capítulo se introducen algunas de las definiciones generales y teoremas sobre continuos y sus hiperespacios, que se utilizarán en el desarrollo del presente trabajo. Aunque al lo largo del mismo, se definirá también la herramienta correspondiente a cada uno de los capítulos.

Definición 1.1 Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. Un **subcontinuo** de un continuo X es un subespacio de X que también es un continuo. Si el espacio topológico tiene más de un punto se dirá que es no degenerado.

Existe una gran gama de continuos, por ejemplo los siguientes son subcontinuos de $\mathbb{R}^2$. Un **arco** I es homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$, una **curva cerrada simple** S es cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria, el **abanico de Cantor** C es el cono sobre el conjunto de Cantor, el **abanico armónico** A, es el cono sobre la sucesión armónica junto con su límite, al continuo F_ω se le suele llamar el punto peludo. Consiste de la unión numerable de arcos cuya sucesión de longitudes converge a 0. Véase la Figura 1, pag 2.

Muchos de los espacios con los que trabajaremos serán arco-conexos. Veamos que dice esta propiedad.

Definición 1.2 Un espacio topológico X es **arco-conexo** si para cualquier par de puntos a, $b \in X$, existe un arco contenido en X cuyos extremos son a y b.

Todos los subcontinuos de la Figura 1 son arco-conexos.

Sean X un espacio arco-conexo y $x, y \in X$, denotaremos por $\boldsymbol{xy}$ a cada arco que une a x con y. Como muchos de los continuos con los que trabajamos están contenidos en $\mathbb{R}^n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, denotaremos a tal arco por $\overline{\boldsymbol{xy}}$ si es rectilíneo.

Definamos el hiperespacio de un continuo X.

La colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X se denota por $\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}}$, y la colección de todos los subcontinuos de X se denota por $\boldsymbol{C(X)}$. En símbolos,

$\mathbf{2}^{\boldsymbol{X}} = \{A \subset X : \ A \text{ es cerrado y no vacío}\}$ y

$\boldsymbol{C(X)} = \left\{A \in 2^X : \ A \text{ es conexo}\right\}.$

Si X tiene métrica d, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola de radio epsilon con centro en x será denotada por $B_\varepsilon(x)$ y se define por

$\boldsymbol{B}_\varepsilon\boldsymbol{(x)} = \{y \in X : \ d(x, y) < \varepsilon\}.$

Por otro lado si $A \subset X$, la nube de radio epsilon alrededor de A denotada por $N_\varepsilon(A)$ se define como

$\boldsymbol{N}_\varepsilon\boldsymbol{(A)} = \cup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$

De esta manera, si A y B son elementos de 2^X se define el siguiente número

$\boldsymbol{H(A, B)} = \inf\{\varepsilon > 0 : \ A \subset N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset N_\varepsilon(A)\}.$

La función H es una métrica en 2^Xy por lo tanto en $C(X)$ (ver [33, Teorema 4.2, p. 53].

A H se le conoce como la **métrica de Hausdorff**.

Definición 1.3 Los espacios 2^X y $C(X)$ con la métrica de Hausdorff son llamados **hiperespacios** de X. En particular, $C(X)$ es llamado el **hiperespacio de subcontinuos de $\boldsymbol{X}$**.

Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son también continuos, la compacidad de estos hiperespacios es probada en [33, Teorema 4.13, pp. 59-61], más aún, 2^X y $C(X)$ son arco conexos, ver [21, Teorema 14.9, p. 113].

Gracias a que $C(X)$ es un continuo, también podemos hablar de

$$\boldsymbol{C(C(X))} = \{\mathcal{A} \subset C(X) : \ \mathcal{A} \text{ es conexo, cerrado y no vacío}\}.$$

Es claro que este espacio también es un continuo con la métrica de Hausdorff generada por H, que es denotada por $\mathbf{H}^2$.

Por otra parte se sabe que en un espacio métrico y compacto, toda sucesión tiene al menos una subsucesión convergente. Como consecuencia de esta afirmación y de la compacidad de $C(X)$ tenemos el siguiente resultado [33, Corolario 4.18, p. 61].

Teorema 1.4 *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, cada sucesión de subcontinuos de X tiene una subsucesión de subcontinuos que converge a un subcontinuo de X y por lo tanto cada sucesión convergente de subcontinuos de X tiene un subcontinuo de X como límite.*

Consideremos también los siguientes hiperespacios:

$\boldsymbol{F_2(X)} = \{\{x, y\} : \ x, y \in X\}$, y $\boldsymbol{F_1(X)} = \{\{x\} : \ x \in X\}$.
Este último espacio topológico es homeomorfo a X. Así pues X será identificado con $F_1(X)$. Note que en la forma está definido $C(X)$, X es un punto de $C(X)$, pero en algunos casos en lugar de decir $F_1(X) \subset C(X)$, abusaremos de la notación y diremos que $X \subset C(X)$ con el entendido de que se está usando $F_1(X)$ y no X. En su momento cuando se utilice este hecho se harán las aclaraciones pertinentes.

Sea $I = [0, 1]$. Entonces $C(I)$ es homeomorfo al triángulo Δ con su interior en el plano que tiene como vértices a los puntos del plano $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 1)$.

La regla de correspondencia del homeomorfismo $h : C(I) \to \Delta$ es como sigue: Para cada $[a, b] \in C(I)$, $[a, b] \xrightarrow{h} (a, b) \in \mathbb{R}^2$, donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. El lector puede ver en [21, Ejemplo 5.1, p. 33] una demostración de que h es efectivamente un homeomorfismo.

Con la misma regla de correspondencia se puede probar que $F_2(I)$ es homeomorfo al triángulo Δ, de esta manera $F_2(I)$ es homeomorfo a $C(I)$.

En los hiperespacios se puede hablar de un tipo especial de arco, llamado arco ordenado.

Definición 1.5 Sea X un continuo y sea $\mathcal{H} \subset 2^X$. Un **arco ordenado** en $\mathcal{H}$ es un arco $\mathcal{A}$ tal que para cualquier par de elementos A y B de $\mathcal{A}$ se tiene que $A \subset B$ ó $B \subset A$. Si H y K denotan los puntos extremos de un arco ordenado y $H \subsetneq K$ decimos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado en $\mathcal{H}$, desde H hasta K.

Graficamente un arco ordenado no lo podemos imaginar así

Con el fin de trabajar con límites de sucesiones en hiperespacios, definiremos los conceptos de límite inferior y límite superior.

Definición 1.6 Sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio topológico X. Definimos el Limite superior (*Limsup*) de la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ como el conjunto

$$\mathbf{Limsup}(\boldsymbol{C}_n) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X \mid \text{si } U \text{ es un abierto que contiene a } x, \text{ entonces} \\ U \cap C_n \neq \phi, \text{ para una infinidad de índices } n. \end{array} \right\}$$

y definimos el límite inferior ($Liminf$) como el conjunto

$$\mathbf{Liminf}(\boldsymbol{C}_n) = \left\{ \begin{array}{c} x \in X \mid \text{si } U \text{ es un abierto que contiene a } x, \text{ entonces} \\ U \cap C_n \neq \phi \text{ para toda } n \in \mathbb{N}, \text{ excepto para un conjunto} \\ \text{finito de índices.} \end{array} \right\}.$$

Claramente Liminf(C_n) $\subset$Limsup(C_n), y no es difícil probar que si $\{C_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces
Liminf(C_n) $\subset$Liminf(C_{n_k}) $\subset$Limsup(C_{n_k}) $\subset$Limsup(C_n).

Además si Liminf(C_n) =Limsup$(C_n) = C$, diremos que la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a C y escribiremos Lim$C_n = C$.

Esta definición de convergencia coincide con la convergencia respecto a la métrica de Hausdorff en el hiperespacio $C(X)$, véase [33, Teorema 4.11, p. 57].

Algunas consecuencias inmediatas son las siguientes.

Proposición 1.7 *Sean X un espacio topológicoy $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de subconjuntos de X*
i) Si Limsup$(H_n) = H$, Limsup$(G_n) = G$ y $H_n \subset G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $H \subset G$.
ii) Si Liminf$(H_n) = H'$, Liminf$(G_n) = G'$ y $H_n \subset G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $H' \subset G'$.
iii) Si $C_n = H_n \cup G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces
Limsup(C_n) =Limsup$(H_n)$$\cup$Limsup$(G_n)$.
iv) Si $C_n = H_n \cup G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces
Liminf(C_n) =Liminf$(H_n)$$\cup$Limsup$(G_n)$.

Demostración. Probaremos $i)$ ya que $ii)$ es análoga a $i)$. Sea $x \in H$, entonces para cada abierto $U \subset X$ con $x \in U$, $U \cap H_i \neq \phi$ para una infinidad de índices. Como $H_n \subset G_n$ se tiene que $U \cap G_i \neq \phi$ para una infinidad de índices. Así $x \in G$. Por lo tanto, $H \subset G$.

Prueba de $iii)$
$\supseteq$) Se sigue de $i)$ que Limsup(C_n) $\supset$Limsup(H_n) y Limsup(C_n) $\supset$Limsup(G_n). Por lo tanto, Limsup(C_n) $\supseteq$Limsup$(H_n)$$\cup$Limsup$(G_n)$.
$\subseteq$) Sea x $\in$Limsup(C_n). Si x $\notin$Limsup(H_n), entonces existe un abierto W que contiene a x tal que $W \cap H_n \neq \phi$ para un número finito de índices n. Sea U un abierto que contiene a x, entonces $U \cap W \cap H_n \neq \phi$ para un número finito de índices n. Por lo tanto $U \cap W \cap G_n \neq \phi$ para una infinidad de índices n. Lo cual implica que $U \cap G_n \neq \phi$ para una infinidad de índices n. Esto nos dice que x $\in$Limsup(G_n).

La prueba del inciso $iv)$ es semejante a la anterior. ■

Como un corolario de los incisos $i)$ y $ii)$ tenemos lo siguiente.

Corolario 1.8 *Sea X un espacio topológico. Si $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de subconjuntos de X tales que $LimH_n = H$, $LimG_n = G$ y $H_n \subset G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $H \subset G$.*

El siguiente resultado es muy usado en espacios métricos compactos cuando se requiere saber si Limsup(C_i) es un continuo.

Teorema 1.9 *[23, § 47. II, Teorema 6, p. 171] Sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico compacto. Si $Liminf(C_i) \neq \phi$, entonces Limsup(C_i) es un continuo.*

Otra forma de obtener el LimC_i, en espacios métricos es por medio de convergencia de sucesiones punto por punto de la siguiente manera.

Proposición 1.10 *Sean X un espacio métrico con métrica d, y $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Si $LimC_n$ existe, entonces*
$LimC_n = \left\{ x \in X \mid x = \underset{n\to\infty}{Lim} x_n \ con\ x_n \in C_n,\ para\ cada\ n \in \mathbb{N} \right\}.$

Demostración. $\supseteq$:Sean

$$A = \left\{ x \in X \mid x = \underset{n\to\infty}{\text{Lim}} x_n \text{ con } x_n \in C_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\},$$

$x \in A$ y U un conjunto abierto que contiene a x. Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $x_n \in U$. Es decir, U intersecta a C_n, para toda $N \in \mathbb{N}$ salvo un número finito. Por lo tanto, $x \in$ Liminf(C_n) =LimC_n.

$\subseteq$: Sea $x \in$LimC_n. Entonces, $x \in$Liminf(C_i). Si $\varepsilon_1 = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$, $B_{\varepsilon_1}(x) \cap C_n \neq \phi$. Sean $x_{N_1} \in B_1(x) \cap C_{N_1}$, y sea $x_n \in C_n$ para cada $n \leq N_1$. Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ con $N_2 > N_1$ tal que para toda $n \geq N_2$, $B_{\varepsilon_2}(x) \cap C_n \neq \phi$. Sean $x_{N_2} \in B_{\varepsilon_2}(x) \cap C_{N_2}$ y $x_n \in C_n \cap B_{\varepsilon_1}(x)$ para cada $N_1 < n < N_2$. En general para $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_m$, $B_{\varepsilon_m}(x) \cap C_n \neq \phi$. Sean $x_{N_m} \in B_{\varepsilon_m}(x) \cap C_{N_m}$ y $x_n \in C_n \cap B_{\varepsilon_{m-1}}(x)$ para cada $N_{m-1} < n < N_m$. Por construcción la sucesión (x_n) converge a x, ya que para cada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\varepsilon_{m-1}}(x) \subset B_\varepsilon(x)$ y para toda $n \geq N_{m-1,}$ $x_n \in B_{\varepsilon_{m-1}}(x)$. Así, $x \in A$. ■

En general, dado un continuo X, no es cierto que si una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($A_n \subseteq X$) converge a $B \subseteq X$, entonces $\mathrm{Lim}C(A_n) = C(B)$. Esto puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11 Consideremos a la circunferencia unitaria S^1, p un punto en S^1, y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos en S^1 definida de la siguiente manera: $A_n = p_n q_n$, donde $p \notin A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ *y* $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} p_n = \underset{n0\to\infty}{\mathrm{Lim}} q_n = p$. Esta sucesión así definida satisface que $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} A_n = S^1$, (ver Figura 4). Sea A un arco contenido en S^1 que contiene a p como punto medio, entonces A no es límite de arcos contenidos en los A_n. Por lo tanto la sucesión $\{C(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $C(S^1)$.

Sin embargo, si una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($A_n \subseteq X$) converge a $B \subseteq X$, entonces la igualdad $\mathrm{Lim}C(A_n) = C(B)$ es verdadera si B es un arco (Teorema 1.15).

Probaremos que la contención $\mathrm{Lim}C(B_n) \subseteq C(B)$ siempre es cierta.

Proposición 1.12 *Sean X un continuo, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subcontinuos de X y $A \in C(X)$. Si $LimB_n = A$. Entonces, $LimC(B_n) \subset C(A)$.*

Demostración. Sea $B \in$Lim$C(B_n)$. Entonces, por la Proposición 1.10 existe una sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $H_n \in C(B_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y Lim$H_n = B$. Así, por el Corolario 1.8, $B \subset A$. Es decir, $B \in C(A)$. Por lo tanto, Lim$C(B_n) \subset C(A)$. ■

Demostraremos que si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos que converge a un arco A, entonces sí se cumple que Lim$C(B_n) = C(A)$. Para ésto necesitaremos los siguientes dos resultados.

El siguiente teorema fue probado por T. J. Lee en [24, Lema 4, p. 123] cuando el espacio X es un dendroide. Sin embargo, la misma demostración que presenta T. J. Lee prueba que el resultado es cierto en la siguiente forma que es más general.

Lema 1.13 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos de X que convergen a un arco A en X. Si $p'q'$ es un subarco de A, entonces existen dos subsucesiones de puntos $\{p'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{q'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ con p'_{n_k} y q'_{n_k} en A_{n_k} convergiendo a p y a q respectivamente, tal que la sucesión de arcos $\{p'_{n_k}q'_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge al arco $p'q'$.*

Lema 1.14 *Sean X un espacio métrico compacto y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si toda subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a x. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \geq m$ tal que $x_{n_m} \notin B_\varepsilon(x)$. De esta manera podemos tomar la subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, para la cual ocurre que

$$\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \cap B_\varepsilon(x) = \phi. \qquad (1)$$

Por otra parte, como X es un espacio métrico compacto, entonces $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente. Por hipótesis tal subsucesión debe converger a x. Pero esto contradice (1). Esta contradicción prueba que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. ■

Teorema 1.15 *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de arcos de X convergiendo a un arco $A \in C(X)$. Entonces, $LimC(A_n) = C(A)$.*

Demostración. Probaremos primero que toda subsucesión convergente $\{C(A_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{C(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $C(A)$. La prueba de este hecho la haremos por contenciones. Observemos que la familia de subsucesiones convergentes de $\{C(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es no vacío ya que $C(C(X))$ es un espacio métrico compacto.
Sea $\{C(A_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $\{C(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Como $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A, entonces por la Proposición 1.12, Lim$C(A_{n_k}) \subseteq C(A)$. Para probar que Lim$C(A_{n_k}) \supseteq C(A)$, consideremos $p'q'$ un arco contenido en A. Entonces por el Lema 1.13, existe una subsucesión de arcos $\{p'_{n_{k_l}} q'_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ con $p'_{n_{k_l}} q'_{n_{k_l}} \subset A_{n_{k_l}}$ tal que $\text{Lim}_{l\to\infty} p'_{n_{k_l}} = p'$, $\text{Lim}_{l\to\infty} q'_{n_{k_l}} = q$ y $\text{Lim}_{l\to\infty} p'_{n_{k_l}} q'_{n_{k_l}} = p'q'$. Esto es equivalente a decir que $p'q' \in$Limsup$(C(A_{n_k}))$. Por lo que, $C(A) \subset$Limsup$(C(A_{n_k}))$ =Lim$C(A_{n_k})$. Por lo tanto, Lim$C(A_{n_k}) = C(A)$. Entonces, el Lema 1.14 garantiza que Lim$C(A_n) = C(A)$. ■

Capítulo 2

Dendroides

La finalidad de este capítulo es presentar definiciones y resultados relacionados con dendroides. Se incluyen algunos resultados que responden a preguntas que surgieron a lo largo de esta investigación.

Definición 2.1 Un continuo X es **unicoherente** si siempre que $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos de X se tiene que $A \cap B$ es conexo. Si cada subcontinuo de X tiene esta propiedad, entonces se dirá que X es **hereditariamente unicoherente.**

Definición 2.2 Un **dendroide** es un continuo arco-conexo y hereditariamente unicoherente.

En la Figura 1, pag 2, casi todos los continuos son dendroides excepto la circunferencia S.

Es fácil ver que dados dos puntos cualesquiera en un dendroide, el arco que los une es único.

Definición 2.3 Sea X un espacio métrico arco-conexo. Diremos que X es **uniformemente arco-conexo**, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in N$ tal que cada arco $ab = A$ contenido en X contiene k puntos $a = a_1, a_2, a_3, ..., a_k = b$ que dividen a A en subarcos $a_j a_{j+1}$ cada uno de ellos con diámetro menor que ε.

El abanico del Ejemplo 3.9, pag 42, no es uniformemente arco-conexo.

Definición 2.4 Sean X un dendroide y $p \in X$.
$a)$ Las **arco componentes** de $X \setminus \{p\}$, son las clases de equivalencia de la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$, si $x = y$ o si existe un arco en $X \setminus \{p\}$ que va de x a y.

$b)$El **grado de** p en X lo denotamos y definimos por $gr(p, X) =$número de arco componentes de X\{p}.
$c)$ En consideración con $b)$, si $gr(p, X) = n \geq 3$ llamamos a p punto de **ramificación**, donde n no necesariamente es un número natural, n puede ser también $\aleph_0$ o $2^{\aleph_0}$. Si $n = 2$ le llamaremos punto **ordinario** y si $n = 1$ le llamaremos punto **terminal o extremo.**

d) **O(X)** denota el conjunto de puntos ordinarios, **R(X)** denota el conjunto de puntos de ramificación y **E(X)** denota el conjunto de puntos extremos.

Entre los dendroides que más nos interesan están los abanicos.

Definición 2.5 Un **abanico** es un dendroide con exactamente un punto de ramificación. A tal punto le llamaremos el vértice del abanico. Un abanico X es un **n-odo simple** si $gr(v, X) = n \in N$, donde v es el vértice de X.

Ejemplo 2.6 Describiremos el siguiente dendroide en coordenadas cilíndricas. Esto es; las dos primeras coordenadas están en coordenadas polares y la tercera coordenada es la usual. Sean $v = (0,0,0)$, $p = (1,0,0)$, $q_m = (1, \frac{\pi}{2^m}, 0)$. **Definamos como** $A = (\bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{vq_m}) \cup \overline{vp}$ **. A este abanico se le conoce como el abanico armónico. Obviamente lo descripción se puede hacer en el plano. Lo definimos así, ya que lo necesitamos de esta manera en el Ejemplo 2.12, pag 17.**

Definición 2.7 Se dice que un dendroide X es **suave en** p si para cada $a \in X$ y para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en X con $a_n \to a$ ocurre que la sucesión de arcos pa_n converge al arco pa. Se dice que un dendroide X es **suave** si hay algún punto en el cual X es suave.

En [26, pp. 35-38] se caracteriza a los dendroides no suaves de la manera siguiente:

Un dendroide no es suave si y sólo si contiene subdendroides de tipo 1 o de tipo 2 que se definen como sigue (véase también [18, p. 194].)

El dendroide $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n}$ es un **dendroide del tipo 1** si:

1. $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} a_n = a$;

2. la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un dendroide L; y

3. existen un punto extremo s de L, distinto de a , y un conjunto abierto D que contiene a s tales que $C_s \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n) = \phi$, donde C_s es la componente de $D \cap L$ que contiene a s. Al punto p se le llama **punto de emanación de** Y.

Un dendroide $Y = (\bigcup_{n=1}^{\infty} sa_n) \cup sabt \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} tb_n)$,(donde $sabt$ es un arco que va de s a t que pasa primero por a y luego por b) es un **dendroide del tipo 2** si:

1. $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} a_n = a$, $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} b_n = b$;

2. $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} sa_n = sa$, $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} tb_n = tb$; y

3. $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(diam(sa_n \cap st)) = 0$ y $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(diam(tb_n \cap st)) = 0$.

El arco st es llamado **arco básico** de Y.

Con el fin de responder a una pregunta que se sugiere en [26, pp. 32], diremos lo que es un dendroide de tipo 4:

El dendroide $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n}$ es un **dendroide del tipo 4** si

1. $\operatorname{Lim} a_n = a$;

2. la sucesión de arcos $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un dendroide L; y

3. existe un punto extremo s de L, distinto de a, tal que Y no es localmente conexo en s y $s \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n$.

Note que tanto en los dendroides de tipo 1 como los dendroides de tipo 4, el punto p no necesariamente es un punto de ramificación como se puede apreciar en el dendroide de la Figura 6.

En [26, pp. 32] se prueba que un dendroide de tipo 1 es un dendroide de tipo 4. Muestran con un ejemplo que no todo dendroide de tipo 4 es de tipo 1, ver [26, Ejemplo p. 33]. Se cree que los dendroides planos de tipo 4 son de tipo 1. Nosotros probamos que al menos en los abanicos, no necesariamente planos, estos dos tipos coinciden. Esto lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.8 *Todo abanico del tipo 4 es un abanico del tipo1.*

Demostración. Sea $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n}$ un abanico del tipo 4. Sea s un punto extremo de L distinto de a tal que Y no es localmente conexo en s. Entonces, a partir de cierta $\varepsilon > 0$, cada abierto con diámetro menor que ε contenido en Y y que contiene a s no es conexo. Cada arco de la sucesión $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene al vértice v del abanico ya que de lo contrario $Y = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n}$ no sería un abanico. Por otra parte, $s \neq v$ ya que la sucesión $\{pa_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene al vértice y por hipótesis $s \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n$. Además $s \neq p$, $s \neq a$ y $s \neq a_n$ para toda n. Como X es métrico, existe un abierto V con $a \in V$ tal que $s \notin \overline{V}$ y como $a_n \to a$ entonces, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N$, $a_n \in \overline{V}$. De aquí, existe un abierto U conteniendo a s tal que a_n, v, p, $a \notin U$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De esta manera la componente C de $U \cap L$ que contiene a s es un arco semiabierto con un punto extremo en s, (ya que solo hay un punto de ramificación). Así, $C \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n) = \phi$. Por lo tanto, Y es de tipo 1.

A lo largo de este trabajo, utilizaremos los conceptos de contractibilidad en X, selectibilidad en $C(X)$ y retracciones de $C(X)$ en X.

Definición 2.9 Sea X un espacio topológico.

a) Decimos que X es **contraíble** si existe una función continua $H : X \times I \to X$ y un punto $p \in X$ tal que para cada $x \in X$ tenemos que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p$. A tal función se le suele llamar una **contracción**.

b) Sean X y Y dos continuos, y $f.X \to Y$ una función continua . Diremos que la función f es **monótona** si para cada $B \in C(Y)$, la imagen inversa de B es un continuo.

c) Sean X y Y dos continuos, y $f.X \to Y$ una función continua . Diremos que la función f es **confluente** si para toda $B \in C(Y)$, cada componente C de la imagen inversa de B es tal que, $f(C) = B$.

d) Sean X y Y dos continuos, y $f.X \to Y$ una función continua . Diremos que la función f es **débilmente confluente**, si para cada $B \in C(Y)$, existe

una componente C de la imagen inversa de B, tal que $f(C) = B$.
e) Diremos que X es **monótono contraíble**, si X es contraíble y para cada $t \in [0,1]$ la función H restringida al conjunto $X \times \{t\}$ es una función monótona.
f) Diremos que X es **confluente contraíble**, si X es contraíble y para cada $t \in [0,1]$ la función H restringida al conjunto $X \times \{t\}$ es una función confluente.
g) Diremos que X es **débilmente confluente contraíble**, si X es contraíble y para cada $t \in [0,1]$ la función H restringida al conjunto $X \times \{t\}$ es una función débilmente confluente.
h) Sea A un subconjunto cerrado de X. Una **retracción** de X en A es una función continua $r : X \to A$ que restringida a A es la identidad en A. Si existe tal función se dice que A es un retracto de X.
i) Una **selección** es una función continua $s : H \to X$ tal que $s(A) \in A$ donde $H \subseteq 2^X$.Decimos que X es selectible si existe una selección definida en $C(X)$. En particular una selección $C(X)$ es una retracción de $C(X)$ en X.

Uno de los conceptos que determinan la no contractibilidad en abanicos es el de $Q-punto$. Analizaremos esta propiedad en dendroides y en abanicos.

Definición 2.10 Un arco ab en X es **irreducible** entre dos conjuntos A y B si $ab \cap A = \{a\}$ y $ab \cap B = \{b\}$.

Definición 2.11 Sea X un dendroide. Diremos que $p \in X$ es un $\mathbf{Q-}$ **punto** si existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en X convergiendo a p tal que Limsup$(pp_n) \neq \{p\}$, y si $p_n q_n$ denota el arco irreducible entre p_n y Limsup(pp_n), entonces $q_n \to p$.

Observación. A partir de la definición, tenemos que si p es un Q-punto, entonces X no es localmente conexo en p, ya que de serlo, Limsup$(pp_n) = \{p\}$.

.

Los abanicos con $Q-$puntos que encontramos en la literatura, y otros más que analizamos, muestran únicamente al vértice como $Q-$punto. Dada esta observación planteamos la siguiente pregunta.

Si un abanico tiene un Q$-$punto $\boldsymbol{p}$ entonces ¿ es $\boldsymbol{p}$ necesariamente el vértice del abanico ?

El siguiente abanico responde negativamente a esta pregunta.

Ejemplo 2.12 En la descripción del abanico F (Figura 9) las dos primeras coordenadas estarán dadas en coordenadas polares: Sean $q_m = (1, \frac{\pi}{2^m}, 0)$, $h_m = (0, 0, \frac{1}{m})$, $p_m = (1, 0, \frac{1}{m})$ para cada $m \in N$ y para cada $n, m \in N$ sean $v_{n,m} = (\frac{1}{m}, \frac{3\pi}{2^{n+1}}, \frac{1}{m})$ y $s_{n,m} = (1, \frac{\pi}{2^n}, \frac{1}{m})$.
Además para $m \geq 2$, definamos

$p_m q_m = \overline{p_m h_m} \cup \overline{h_m s_{1,m}} \cup (\bigcup \{\overline{s_{n,m} v_{n,m}} \cup \overline{v_{n,m} s_{n+1,m}} \mid n+1 \leq m\}) \cup \overline{v_{m-1,m} q_m}$.

$$F = A \cup (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} p_m q_m),$$

donde A es el abanico armónico que se definió en 2.6.
Note que $\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} p_m = p$, Limsup$(pp_m) = A$ y el arco irreducible entre p_m y A, es el arco $p_m q_m$ que satisface que $\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} q_m = p$. Por lo tanto, p es un $Q-$punto de F con $p \neq v$. En este ejemplo se puede ver que v también es un $Q-$punto de F.

En la Figura 9, pag 18, sólo se muestra el arco $pq_6 \cup q_6 p_6$.

Una vez encontrado este ejemplo, se analizaron más abanicos con $Q-$puntos distintos al vértice del abanico. Notamos entonces, que el vértice también lo era. Por otra parte, hay abanicos en los cuales sólo el vértice es un $Q-$punto. Así planteamos la siguiente pregunta como problema abierto.

Sea X un abanico.
¿Si p es un $Q-$punto de X distinto del vértice, entonces será el vértice un $Q-$punto de X?

Por otra parte L. G. Oversteegen prueba en [36, Teorema 3.1, pp. 498, 499] que, en abanicos, la conexidad local en el vértice es equivalente a la llamada propiedad P^*; que a su vez, tiene relación con el concepto de $Q-$punto.

Veamos primero que dice la propiedad P^*.

Definición 2.13 Un abanico X con vértice v tiene la **propiedad P***, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a v, se cumple que $\text{Limsup}(vx_n) = \{v\}$.

Teorema 2.14*[36, Teorema 3.1, pp. 498, 499] Sea X un abanico con vértice v. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. X tiene la propiedad P^*.
2. X es localmente conexo en v.

Como consecuencia inmediata se tiene lo siguiente.

Corolario 2.15*Si X es un abanico localmente conexo en v, entonces v no es un Q-punto de X.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior.

El siguiente teorema muestra que si un abanico X es localmente conexo en el vértice entonces no solo el vértice no es $Q-$punto de X, si no que ningún otro punto de X es $Q-$punto. Dicho de otra manera, si hay $Q-$puntos, entonces el abanico no es localmente conexo en el vértice.

Teorema 2.16 *Si X es un abanico localmente conexo en el vértice v. Entonces, X no contiene Q-puntos.*

Demostración. Como X es localmente conexo en v, v no es un $Q-$punto (Corolario 2.15). Basta mostrar ahora que todo punto $p \neq v$ no es un $Q-$punto. Sean $p \in X$, $p \neq v$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergiendo a p. Probaremos primero que Limsup$(pp_n) = \{p\}$ ó Limsup$(pp_n) = A$, donde A es un arco con un extremo en v que contiene a p. Sea s un punto extremo de X tal que $p \in vs$. Ahora bien, si a partir de cierta n los puntos p_n están en el arco vs entonces Limsup$(pp_n) = \{p\}$. Podemos suponer que todos los p_n no están en vs y que $p_n v \cap vp = \{v\}$. Como X es localmente conexo en el vértice, existen conjuntos abiertos y conexos V_m que contienen a v tal que el $diam(\overline{V_m})$ es menor o igual que $\frac{1}{m}$. Por otra parte para cada m fija y cada $n \in N$, sea r_n^m el primer punto que está en el arco vp_n y en el conexo $\overline{V_m}$, moviéndonos del punto p_n hacia el vértice v . De esta manera para cada m fijo tengo una sucesión de arcos $\{r_n^m p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface lo siguiente:
$r_n^m p_n \subset pp_n$ para cada n y para cada m. Más aún, $r_n^m p_n \subset vp_n$. Por lo que si $A_m = \operatorname*{Limsup}_{n\in\mathbb{N}}(r_n^m p_n)$, entonces A_m es un subconjunto de limsup(vp_n) donde $v \notin A_m$ ya que $r_n^m p_n \subset X \backslash V_m$ para toda n. De aquí que $A_m \subset X \backslash V_m$ para cada m fija. Además como $p \in \operatorname*{Liminf}_{n\in\mathbb{N}}(r_n^m p_n)$, entonces A_m es un subcontinuo de $X \backslash V_m$ que no contiene al vértice v. Por lo tanto, A_m es un arco contenido en vs. Por otro lado para cada n fija la sucesión $\{r_n^m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a v. Por la conexidad local de X en v, los arcos vr_n^m estan contenidos en $\overline{V_m}$. Por lo tanto $\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} diam(vr_n^m) = 0$. Además $vp_n = vr_n^m \cup r_n^m p_n$ y $\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} r_n^m p_n = vp_n$.
Probaremos que Limsup$(vp_n) \subset vs$. Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que existe $x \in$Limsup$(vp_n) \backslash vs$. Como $v \notin$Limsup$(vp_n) \backslash vs$, entonces $x \neq v$, así podríamos encontrar un abierto W tal que $x \in W$ y $\overline{W} \cap vs = \phi$. De esta manera, como $x \in$Limsup(vp_n), entonces $W \cap vp_n \neq \phi$ para una infinidad de índices. Por tanto, existe una m tal que $V_m \cap \overline{W} = \phi$. De aquí y del hecho de que $x \in$Limsup(vp_n), se tiene que $W \cap r_n^m p_n \neq \phi$ para una infinidad de índices. Esto es, $x \in$Limsup$(r_n^m p_n)$, pero Limsup$(r_n^m p_n) \subset vs$. Por lo que $x \in vs$, lo cual es un contradicción, ya que se supuso que $x \notin vs$. Asì, Limsup$(vp_n) \subset vs$.
Por otra parte sabemos que el arco pv esta contenido en vs. Como Limsup$(vp_n) \subset vs$,se tiene según la Proposición 1.7 inciso iii), que Limsup$(pp_n) = vp \cup$Limsup$(vp_n) \subset vs$. Esto es, Limsup(pp_n) es un arco contenido en el arco vs con v como uno de sus extremos ya que $v \in$Limsup(pp_n). De esta manera los arcos $q_n p_n$ que son irreducibles entre Limsup(pp_n) y cada p_n satisfacen que $q_n = v$ para toda n. De aquí que la sucesión $\{q_n = v\}_{n\in\mathbb{N}}$ no

converge al punto p. Por lo que se concluye que p no puede ser un $Q-$punto.

Con este resultado damos una demostración alterna al siguiente resultado probado por L. G. Oversteegen en [37, Teorema 3.2, p. 393].

Teorema 2.17 *Si X es un abanico contraíble, entonces X no tiene $Q-$puntos.*

Demostración. Si X es contraíble entonces por [38, Teorema 6.1, p. 394], X es localmente conexo en el vértice y por el Teorema 2.16, X no tiene $Q-$puntos.

Una vez analizadas la propiedad P^*, conexidad local del abanico en el vértice y los $Q-$puntos en abanicos. Planteamos las siguientes preguntas como problemas abiertos.

Sean X un abanico y v el vértice del abanico.

¿ Si v no es $Q-$punto, entonces tendrá X la propiedad P^*?

o equivalentemente

¿ Si v no es $Q-$punto, entonces será X localmente conexo en v?

¿Si X no tiene $Q-$puntos, entonces será X localmente conexo en v?

Con el fin de generalizar el Teorema 2.16 probaremos tres resultados.

Lema 2.18 *Sea X un dendroide. Supongamos que $R(X)$ es un conjunto finito y $p \in X \backslash R(X)$. Si X es localmente conexo en cada punto de $R(X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que satisface*
i) $Limp_n = p$,
ii) para alguna $v \in R(X)$, $pp_n = pv \cup vp_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y
iii) $vp_n \cap vp_m = \{v\}$ si $n \neq m$,
entonces $Limsup(pp_n) \cap R(X) = \{v\}$ y $L =$Limsup(pp_n) es un arco con un extremo en v.

Demostración. Por $ii)$ y $iii)$ de la hipótesis y la Proposición 1.7 inciso $iii)$, $L = pv \cup$Limsup(vp_n). Más aún como v, p están en Limsup(vp_n). Entonces, $pv \subset$Limsup(vp_n).
Por lo tanto $L =$Limsup(vp_n) ....(*)

Supongamos que existe $u \in L \cap (R(X)\backslash\{v\})$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(u) \cap [(R(X)\backslash\{u\}) \cup \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{p\}] = \phi$. Por (*), $u \in$Limsup(vp_n). Así, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \in vp_{n_k}$ para cada n_k y $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u. Por lo tanto, toda vecindad abierta W de X con $\overline{W} \subseteq B_\varepsilon(u)$ y que contiene a u no puede ser conexo, ya que por hipótesis x_{n_j}, x_{n_k} están en distintos arcos, para $k \neq j$, y a partir de cierto momento los puntos x_{n_j} están en W y $v \notin W$. Contradiciendo el hecho de que X es localmente conexo en u.

Note también que, como $pv \subset$Limsup(vp_n), entonces $vp \cap R(X) = \{v\}$. Con la misma prueba que la dada del Teorema 2.16, concluímos que L es un arco con v como uno de sus extremos.

Lema 2.19 Sea X un dendroide. Supongamos que $R(X)$ es finito. Si X es localmente conexo en cada punto de $R(X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que satisface

$i)$ Lim$p_n = p$,

$ii)$ $pp_n \cap pp_m \neq \{p\}$ para toda $n \neq m$ y

$iii)$ $pp_n\backslash pp_m \neq \phi$, si $n \neq m$,

entonces existe un único $v \in R(X)$ tal que $pp_n = pv \cup vp_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ con $vp_n \cap vp_m = \{v\}$ para toda $n \neq m$.

Demostración. Por $ii)$ y $iii)$ de la hipótesis y del hecho de que $R(X)$ es finito, existe $v \in R(X)$ con $v \in pp_{n_k}$ para una infinidad de índices n_k y $vp_{n_k} \cap vp_{n_{k'}} = \{v\}$. Así, por la Proposición 1.7 inciso $iii)$, Limsup$(pp_{n_k}) = pv\cup$Limsup(vp_{n_k}) =Limsup(vp_{n_k}) ya que $pv \subset$Limsup(vp_{n_k}). Así, el Lema 2.18 garantiza que Limsup$(pp_{n_k}) \cap R(X) = \{v\}$. Sea $M = \{n_k \in \mathbb{N} |\ pp_{n_k} = pv \cup vp_{n_k}\ \}$. Consideremos la subsucesión $\{\ pp_{n_k}\}_{n_k\in M}$. Afirmamos que $\{ pp_{n_k}\}_{n_k\in M} = \{pp_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si no, existiría una subsucesión $\{pp_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{pp_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual cumpliría que $pp_{n_i} = pv' \cup v'p_{n_i}$ y $v'p_{n_i} \cap v'p_{n_j} = \{v'\}$. Por lo tanto, tendríamos que Limsup$(pp_{n_i}) = pv'\cup$Limsup$(v'p_{n_i})$ =Limsup$(v'p_{n_i})$.

Consideremos ahora los arcos pv y pv'.Nótese que por el Lema 2.18 no es posible $pv \subset pv'$ ni $pv' \subset pv$ así que, $pv\backslash pv' \neq \phi$ y $pv'\backslash pv \neq \phi$. Esto significa que los arcos pv' y pv forman un triodo, lo cual es imposible ya que $pv' \cap R(X) = \{v'\}$ y $pv \cap R(X) = \{v\}$. Por lo tanto, $pp_n = pv \cup vp_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ con $vp_n \cap vp_m = \{v\}$ para toda $n \neq m$.

Corolario 2.20 *Sea X un dendroide. Supongamos que $R(X)$ es finito. Si X es localmente conexo en cada punto de $R(X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que satisface*

$i)$ $Limp_n = p$,

$ii)$ $pp_n \cap pp_m \neq \{p\}$ para toda $n \neq m$ y

ii) $pp_n \backslash pp_m \neq \phi$ si $n \neq m$
Entonces Limsup$(pp_n) \cap R(X) = \{v\}$ y $L =$Limsup(pp_n) es un arco con un extremo en v.

Demostración. Por el Lema 2.19, se tiene que existe un único $v \in R(X)$ tal que $pp_n = pv \cup vp_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ con $vp_n \cap vp_m = \{v\}$ para toda $n \neq m$. Así por el Lema 2.18, $L =$Limsup(pp_n) es un arco con un extremo en v que contiene a p y Limsup$(pp_n) \cap R(X) = \{v\}$.

Así, el Teorema 2.16 se puede generalizar de la manera siguiente.

Teorema 2.21 *Sea X un dendroide. Si $R(X)$ es finito y X es localmente conexo en cada punto de $R(X)$, entonces X no tiene $Q-$puntos.*

Demostración. Note que, si p es un $Q-$punto entonces X no es localmente conexo en p. Por tanto como X es localmente conexo en cada $v \in R(X)$, v no es un $Q-$punto. Sean $p \notin R(X)$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a p. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada p_n está en diferentes arcos pp_n. Observemos que puede ocurrir $pp_n \cap pp_m = \{p\}$ para dos índices $n \neq m$, pero no puede pasar que
$pp_n \cap pp_m = \{p\}$,
$pp_n \cap pp_k = \{p\}$ y
$pp_k \cap pp_m = \{p\}$ si $n \neq m$, $n \neq k$ y $k \neq m$ ....(1)
ya que p no es un punto de ramificación.
Sean $J = \{m \in \mathbb{N} |\ pp_m \cap pp_1 \supsetneq \{p\}\}$ y $J^* = \mathbb{N} \backslash J = \{k \in \mathbb{N} |\ pp_k \cap pp_1 = \{p\}\}$.

Se sigue fácilmente que las subsucesiones $\{pp_m\}_{m \in J}$ y $\{pp_k\}_{k \in J^*}$ satisfacen $i)$, $ii)$ y $iii)$ del Corolario 2.20 para algún $v \in R(X)$ y $v' \in R(X)$ respectivamente, con $v \neq v'$. De lo anterior tenemos que

$$\text{Limsup}(pp_n) = \text{Limsup}(pp_m) \cup \text{Limsup}(pp_k) = vs \cup v's',$$

donde vs y $v's'$ son arcos que como $p \in vs \cap v's'$ están contenidos en el arco vv'. Así Limsup$(pp_n) = vv'$ con $p \in vv'$. Por lo tanto, el arco irreducible q_np_n entre p_n y el Limsup$(pp_n) = vv'$ es tal que $q_n = v$ o $q_n = v'$. Como $v \neq p$ y $v' \neq p$, entonces la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a p. Por lo que p no es un $Q-$punto.

El siguiente dendroide muestra que el inverso a este teorema no se cumple. Esto es, si X es un dendroide con $R(X)$ finito, no es cierto que el no haber $Q-$puntos implique que X sea localmente conexo en cada $p \in R(X)$.

Ejemplo 2.22 Descripción del ejemplo: Sean $v = (0, 0)$, $p = (1, 0)$, $q = (\frac{1}{2}, 0)$, $r = (\frac{1}{2}, -1)$ y $p_n = (1, \frac{1}{n})$ para cada $n \in N$. Definamos un continuo

K de la siguiente manera $K = \overline{qr} \cup \overline{vp} \cup (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{vp_n})$. K no tiene $Q - puntos$, q es punto de ramificación, pero K no es localmente conexo en q (ver Figura 10).

El siguiente ejemplo muestra que no podemos generalizar el Teorema 2.21 al caso en que $R(X)$ no es finito.

Ejemplo 2.23 (Figura 11)Descripción del ejemplo. Sean $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$, $r = (0, 1)$, $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $p_n = \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$, $s_n = \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ y $r_n =$

$\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ para cada $n \in N$. Definamos el dendroide $H = \overline{pr} \cup \overline{pq} \cup (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\overline{a_n s_n} \cup \overline{s_n r_n} \cup \overline{r_n p_n}))$. Claramente $R(H) = \{a_{\mathrm{n}} :\mathrm{n}\geq 2\}$ y H es localmente conexo en a_n, para cada n$\geq$2.

p es un $Q-$punto ya que la sucesión $\{p_n\}$ converge al punto p, $\mathrm{Limsup}(pp_n) = pr$ y el arco irreducible $q_n p_n$ entre p_n y el $\mathrm{Limsup}(pp_n)$ es tal que $q_n = p$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto p.

Los conceptos de continuo de "tipo N" y "tipo N-generalizado"se utilizan en este trabajo para determinar entre otras cosas la no existencia de retracciones de $C(X)$ en X. El concepto de continuo de tipo N fue introducido en 1978 por L. G. Oversteegen para probar la no contractibilidad de continuos, ver [35, Corolario 2.2, p. 839].

Definición 2.24 Sean X un continuo, p y $q \in X$. Diremos que X **es de tipo** N **entre los puntos** p y q si se satisface lo siguiente: existen un arco A=pq, 2 sucesiones de arcos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ contenidas en X donde $A_i = p_i p_i'$, $B_i = q_i q_i'$ y puntos $p_i'' \in B_i \setminus \{q_i, q_i'\}$, $q_i'' \in A_i \setminus \{p_i, p_i'\}$ para $i \in N$, tales que:

1. $A = \underset{i\to\infty}{Lim} A_i = \underset{i\to\infty}{Lim} B_i$

2. $p = \underset{i\to\infty}{Lim} p_i = \underset{i\to\infty}{Lim} p_i' = \underset{i\to\infty}{Lim} p_i''$,

3. $q = \underset{i\to\infty}{Lim} q_i = \underset{i\to\infty}{Lim} q_i' = \underset{i\to\infty}{Lim} q_i''$,

4. cada arco en X que une a q_i con q_i' debe contener a p_i'',

5. cada arco en X que une a p_i con p_i' debe contener a q_i''.

Si X es de tipo N entre dos puntos, diremos simplemente que X es de tipo N.

Intuitivamente X es de tipo N si contiene "algo parecido" al siguiente subconjunto.

Ejemplo 2.25 Mostraremos dos continuos Z y W que son de tipo N (Figura 13, pag 28). El continuo Z es conocido como escoba doble. Lo describiremos en coordenadas cartesianas como sigue. Sean $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $p_n = (-1, -\frac{1}{n})$, $q_n = (1, \frac{1}{n})$. Consideremos ahora los siguientes segmentos de rectas $A = \overline{pq}$, $A_n = \overline{qp_n}$ y $B_n = \overline{pq_n}$ para cada $n \in N$. Entonces Z es el conjunto

$$Z = A \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n).$$

El continuo W está descrito como sigue: Sean $a = (0, 0)$, $b = (0, 1)$,
$a_i = (1/i, 1)$, $b_i = (-1/i, 1)$ y $c_i = (-1/i, 0)$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Denotemos por S_i al conjunto
$S_i = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 1/i,\ y \geq 1\ \}$ que une los puntos a_i y b_i para $i = 1, 2, 3, \ldots$.
Entonces,

$$W = \overline{\boldsymbol{ab}} \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} (\overline{\boldsymbol{aa}_i} \cup S_i \cup \overline{\boldsymbol{b}_i \boldsymbol{c}_i})).$$

Note también que el continuo del Ejemplo 2.23 es un continuo de tipo N.

Note que para el continuo W las sucesiones de arcos $\{a_i a_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$, $\{ac_i\}_{i=1}^{\infty}$ junto con el arco ab, forman una sucesión de tipo N.

Definición 2.26 Se dirá que un espacio X es de tipo N generalizado entre los puntos p y q, si existen un continuo K, con p y $q \in K$, dos sucesiones de arcos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ contenidas en X, donde $A_i = p_i p_i'$, $B_i = q_i q_i'$ y para cada i, puntos $p_i'' \in B_i \setminus \{q_i, q_i'\}$ y $q_i'' \in A_i \setminus \{p_i, p_i'\}$ tales que:

1. $p = \underset{i \to \infty}{Lim} p_i = \underset{i \to \infty}{Lim} p_i' = \underset{i \to \infty}{Lim} p_i''$,

2. $q = \underset{i \to \infty}{Lim} q_i = \underset{i \to \infty}{Lim} q_i' = \underset{i \to \infty}{Lim} q_i''$,

3. cada arco en X que une a q_i con q_i' debe contener a p_i'',

4. cada arco en X que une a p_i con p_i' debe contener a q_i'' y

5. $K = \underset{i \to \infty}{Lim} p_i q_i'' = \underset{i \to \infty}{Lim} q_i'' p_i' = \underset{i \to \infty}{Lim} q_i p_i'' = \underset{i \to \infty}{Lim} p_i'' q_i'$.

.

Nótese que los continuos de tipo N son de tipo N generalizado, pero no necesariamente ser de tipo N generalizado implica ser de tipo N, incluso en abanicos esto no pasa; el Ejemplo 2.29 muestra este hecho.

Cabe notar que en el caso particular en que X es un dendroide, las condiciones 4 y 5 (3 y 4) en la Definición 2.24 (Definición 2.26) están de más, pués los arcos que unen a los puntos p'_n y p_n son únicos. Por tanto cualquier arco que contenga a p'_n y a p_n deben contener en forma natural a q''_n.

La siguiente propiedad, muy semejante a las anteriores, fue introducida por T. Maćkowiak en [27] para determinar la selectibilidad de ciertos dendroides.

Definición 2.27 Sean X un continuo y A, B subcontinuos de X tales que $B \subseteq A$. Diremos que B es un **conjunto de doblez** de A, si existen dos sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X tales que:

1. $A_n \cap A'_n \neq \phi$ para cada n,

2. $A = \underset{n\to\infty}{Lim} A_n = \underset{n\to\infty}{Lim} A'_n$ y

3. $B = \underset{n\to\infty}{Lim}(\ A_n \cap A'_n)$.

Diremos que X tiene la **propiedad de intersección doblada** si para cada subcontinuo A de X, la intersección de todos los conjuntos de doblez de A es no vacía.

T. Maćkowiak probó en [27, Corolario, p. 548],el siguiente teorema, uno de los más importantes resultados para probar la no selectibilidad de algunos dendroides.

Teorema 2.28 *Cada dendroide selectible tiene la propiedad de intersección doblada.*

Observación: En el artículo [8] la definición de continuo tipo N gene ralizado [8, p. 78] es la misma que la nuestra, excepto que el inciso **v)** de [8] que dice $K = \underset{i\to\infty}{\mathrm{Lim}} q_i q'_i = \underset{i\to\infty}{\mathrm{Lim}} p_i p'_i$ lo cual es más débil. Sin embargo con esa definición, los resultados en [8, Proposición 141] que coinciden con nuestro Teorema 4.1 y Teorema 4.21 no resultan ser verdaderos como puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.29 Descripción de un abanico $Y \subset R^{\mathbf{2}}$ que muestra que la definición de tipo N-generalizado que aparece en [8] no satisfacen el Teorema 4.1 y el Corolario 4.21. Consideremos las coordenadas de cada punto, en coordenadas polares.
Sean $p = (0,0)$, $a_n = (\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{\pi}{2^n})$, $b_m = (\frac{1}{m}, \pi)$,

$a_{n,m} = ((\frac{1}{2^{n-1}})(1+\frac{1}{m}), \frac{\pi}{2^n})$, y $p_{n,m} = (\frac{1}{(m)(2^n)}, \frac{3\pi}{2^{n+2}})$, para cada m, $n \in N$,

$F_\omega = \cup\{\overline{pa_n}|\ n \in N\}$ y para cada $m \in N$ fijo, sea

$pb_m = \overline{b_m a_{1,m}} \cup \bigcup\{\ \overline{a_{n,m}p_{n,m}} \cup \overline{p_{n,m}a_{n+1,m}}\ |\ n \in N\} \cup \{p\}$

así $Y = F_\omega \cup \bigcup\{pb_m | m \in N\}$ (Ver Figura 14).

Es fácil ver que el abanico Y satisface solo los primeros cuatro puntos de la definición 2.26, tomando como $K = F_\omega$, $q = a_1$, $p = p_i$, $p'_i = b_i$, $q_i = a_{1,2i-1}$ y $q'_i = a_{1,2i}$ para cada $i \in N$. Además satisface el inciso v) de [8], descrito arriba. Sin embargo, sólo el conjunto $\{p\}$ es un conjunto de doblez de K, y Y tiene la propiedad de intersección doblada. Más aún Y es selectible, ver [2, Ejemplo 3.10, p. 367].

El concepto de suavidad a pares es estudiado en [37] para determinar la no contractibilidad en abanicos.

Definición 2.30 Sean X un dendroide, r un punto de X y $\{r_n^1\}_{n=1}^\infty$, $\{r_n^2\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de puntos cada una de ellas convergiendo a r. Diremos que $\{\boldsymbol{r}_n^1\}_{n=1}^\infty$ **domina** a $\{\boldsymbol{r}_n^2\}_{n=1}^\infty$ si dada una sucesión $\{s_n^1\}_{n=1}^\infty$ que converge a otro punto s, con la propiedad de que la sucesión de arcos $\{r_n^1 s_n^1\}_{n=1}^\infty$ converge al arco rs, existe una sucesión $\{s_n^2\}_{n=1}^\infty$ que converge a s tal que la sucesión de arcos $\{r_n^2 s_n^2\}_{n=1}^\infty$ converge al arco rs.
Si para cada punto s de un dendroide X y para cada sucesión $s_n^1 \to s$, el límite de la sucesión de arcos $r_n^1 s_n^1$ no es un arco, entonces diremos que la sucesión $\{r_n^1\}_{n=1}^\infty$ domina a todas las sucesiones $\{r_n^2\}_{n=1}^\infty$.

Definición 2.31 Diremos que un dendroide es **suave a pares** siempre que dado un par de sucesiones convergiendo a un punto en común, alguno de lo dos elementos del par domina al otro.

Definición 2.32 Sea X un continuo. Diremos que X contiene un **zig-zag,** si existe un arco ab cuatro sucesiones de puntos $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ tales que la sucesión de arcos $\{a_n b_n \cup b_n c_n \cup c_n d_n\}_{n=1}^\infty$ converge al arco ab y cada sucesión de arcos $\{a_n b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n c_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{c_n d_n\}_{n=1}^\infty$ convergen también al arco ab.

En abanicos se conocen una serie de proposiciones equivalentes a la contractibilidad. En la lista siguiente, nosotros aportamos dos nuevas condiciones que son las condiciones 2) y 3).

Teorema 2.33 *Sea X un abanico, entonces las siguientes proposiciones son*
equivalentes:
(1) X es contraíble.
(2) X es localmente conexo en el vértice, X no es de tipo N y X es suave a pares.
(3) X no contiene $Q-$puntos, X tiene la propiedad de intersección doblada

y X es suave a pares.
(4) X no contiene $Q-$puntos, X no es de tipo N y X es suave a pares.
(5) X no contiene $Q-$puntos, X no contiene zig zag y X es suave a pares.
(6) X es monótono contraíble. (Ver definición 2.9 inciso e)
(7) X es confluente contraíble. (Ver definición 2.9 inciso f)
(8) X es débilmente-confluente contraíble. (Ver definición 2.9 inciso g)

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) La conexidad local en el vértice se sigue de [38, Teorema 6.1, p. 394]. De [35, Corolario 2.2, p. 839], obtenemos que X no es de tipo N. Para demostrar que X es suave a pares, aplicamos [17, Teorema 2.4, p. 82].

(2) $\Rightarrow$ (3) Por el Teorema 2.16, X no contiene $Q-$puntos, y como X no es de tipo N, se sigue de [25, Teorema 2] que X tiene la propiedad de intersección doblada.

(3) $\Rightarrow$ (4) Como X tiene la propiedad de intersección doblada. Entonces, X no es de tipo N.

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (1) son demostradas por L. G. Oversteegen en [37, Teorema 3.4, p. 393].

Capítulo 3

Retracciones de C(X) sobre X

Desde que S. B. Nadler Jr. en 1970 planteó en [32] el problema de caracterizar a los continuos X que son la imagen continua de $C(X)$ a X o de 2^X, han surgido diversas respuestas parciales a dicho problema. Como $C(X)$ y 2^X son espacios arco-conexos, ningún continuo que no sea arco-conexo puede ser la imagen continua de estos. Posteriormente S. B. Nadler Jr restringe el problema al caso particular de caracterizar a los continuos que son retractos de 2^X o de $C(X)$.

No se conocen condiciones que caractericen por completo a estos retractos. Por ejemplo, se sabe que si X es un dendroide suave, entonces existen retracciones de $C(X)$ sobre X. De hecho, en este caso existen selecciones para $C(X)$, ver [39].

Cuando X es localmente conexo se tiene lo siguiente:

Sea X un continuo localmente conexo. Entonces X es un retracto de 2^X si y sólo si X es un retracto absoluto ver [30, p. 413] o [32, Teorema 6.4, p. 270].

Un continuo localmente conexo, 1-dimensional X es un retracto de 2^X si y sólo si X es una dendrita, ver [30, p. 413] o [32, Teorema 6.4, p. 270].

Por lo tanto, el problema abierto se encuentra en aquellos continuos que no son suaves y no son localmente conexos. Sin embargo hay resultados parciales y ejemplos que se pueden consultar en [32], [34] y[31]. En [19] y en [20] A. Illanes construye un ejemplo de un continuo X que es un retracto de $C(X)$ pero no de 2^X, J. T. Goodykoontz muestra en [16, p. 122] que si un continuo uno dimensional es un retracto de 2^X o de $C(X)$, entonces es un dendroide. Posteriormente en [6] se prueba que, con las mismas hipótesis, el espacio es un dendroide uniformemente arco conexo.

En este capítulo demostraremos uno de los principales teoremas de la tesis (Teorema 3.8) **Si existe una retracción de $C(X)$ sobre X, entonces X no es de tipo N.**

Este teorema se realizó conjuntamente con el Dr. W. J. Charatonik de la Universidad de Missouri-Rolla, Estados Unidos.

Se prueba también que X no es de tipo N en cualquiera de los siguientes casos.

i) **Si existen retracciones de** $F_2(X)$ **sobre** X.

ii) **Si** X **admite funciones promedio. (Ver definición 3.1)**

iii) **Si** X **admite retracciones de** 2^X **sobre** X.

Por otra parte damos un ejemplo que muestra que el resultado inverso a 3.8 no es verdadero.

Damos también un ejemplo de un dendroide X **que es la imagen continua de C(X) pero no es un retracto de C(X)** por ser de tipo N.

Sabemos que si para un dendroide X, existen retracciones de $C(X)$ en X, entonces X es uniformemente arco-conexo. (véase [6, Teorema 3.1, 3.3, pp. 9 y 10])

Damos un ejemplo de un dendroide X uniformemente arco-conexo (véase 3.20) que no es de tipo N, para el cual no existen retracciones de C(X) en X

Con este ejemplo mostramos que dos de las condiciones necesarias que se conocen para que existan retracciones de $C(X)$ en X aún juntas, no son suficientes.

Más aún, damos un ejemplo de un dendroide X uniformemente arco-conexo que no es de tipo N generalizado para el cual no existen retracciones de C(X) en X.

Definición 3.1 Una función **promedio** es una función continua $m : X \times X \to X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $m((x,x)) = x$ para cada $x \in X$.

2. $m((x,y)) = m((y,x))$ para cada $x,\ y \in X$.

Observación. Nótese que si r es una retracción de $\mathbf{2}^X$ sobre X, entonces $r|_{F_2(X)} : F_2(X) \to X$ es una función promedio. Por lo que, si X no admite funciones promedio entonces no hay retracciones de $\mathbf{2}^X$ sobre X.

También sabemos que una retracción $r : F_2(X) \to X$ define una función promedio $m : X \times X \to X$ de la siguiente manera: $m(x,y) = r(\{x,y\})$, y viceversa, toda función promedio $m : X \times X \to X$ define una retracción $r : F_2(X) \to X$ de la misma manera.

Los siguientes resultados serán utilizados en este capítulo.

Teorema 3.2 *Sea X un continuo 1-dimensional. Si existe una retracción de $C(X)$ ó de 2^X a X, entonces X es un dendroide uniformemente arco-conexo. (ver [6, Teorema 3.1, 3.3, pp. 9 y 10])*

Definición 3.3 Se dice que un espacio topológico X es **conexo entre dos subconjuntos** A y B si no hay un subconjunto abierto-cerrado F tal que $A \subset F$ y $F \cap B = \phi$. Un subconjunto C de un espacio X separa a A y B (ó C es un separador entre A y B) si $X \backslash C$ no es conexo entre A y B, en otras palabras si hay dos subconjuntos M y N tales que $X \backslash C = M \cup N$, $(cl_X(M) \cap N) \cup (M \cap cl_X(N)) = \phi$, $A \subset M$ y $B \subset N$(ver [23, § 46, II, p. 154]).

El siguiente espacio topológico X (ver Figura 15) tiene la topología heredada de $\mathbb{R}^2$.

$$X = pq \backslash \{q\} \cup D \cup xy \backslash \{x\}.$$

Donde D es un disco sin su frontera. El disco D es un separador entre los conjuntos $pq \backslash \{q\}$ y $xy \backslash \{x\}$. X no es conexo entre $pq \backslash \{q\}$ y $xy \backslash \{x\}$. Debido a que si $F = pq \backslash \{q\} \cup D$, entonces $pq \backslash \{q\} \subset F$ y $F \cap xy \backslash \{x\} = \phi$.

.

Teorema 3.4[**?**, § 57, II, Teorema 2, p. 438] *Sea X un continuo localmente conexo y unicoherente. Sean F_0 y F_1, dos conjuntos cerrados y ajenos de X y para cada $j = 0, 1$ sea $p_j \in F_j$. Entonces, existe un continuo localmente conexo C separador entre p_0 y p_1, que es ajeno a $F_0 \cup F_1$.*

Definición 3.5 Una $\boldsymbol{\theta}$ **− curva** en el plano consiste de tres arcos L_0, L_1 y L_2, teniendo cada par de arcos en común exactamente los extremos o puntos finales de cada arco.

Teorema 3.6 *[23, § 61. II, Teorema 2, p. 511] ($\theta - curva$) Si C es una $\theta -$curva, entonces $R^2 \backslash C = D_0 \cup D_1 \cup D_2$, donde $Fr(D_j) = L_j \cup L_{j+1}$ (módulo*

3) y el conjunto D_2 junto con los discos D_0 y D_1 son las componentes de $R^2 \backslash C$. Donde $D_j = L_j \cup L_{j+1} \cup int(L_j \cup L_{j+1})$ Para $J = 0, 1$.

Proposición 3.7 Sea X un continuo. Si $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subcontinuos de X, $A \in C(X)$ y $Lim B_n = A$. Entonces, $C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))$ es compacto.

Demostración. Probaremos que $C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))$ es cerrado; esto es, probaremos que:

$$C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n)) = \overline{C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))}.$$

Nótese que $\overline{C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))} = \overline{C(A)} \cup \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))} = C(A) \cup \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))}$.

Demostraremos que

$$\overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))} \subset C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n)).$$

Sea $H \in \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))}$. Supongamos que

$$H \in \overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))} \backslash (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n)).$$

Entonces, existe una sucesión $(H_n)_{n=1}^{\infty} \subset (\bigcup_{i=1}^{\infty} C(B_i))$ tal que $Lim\,(H_n) = H$. Afirmamos que no puede haber una infinidad de H_n contenidos en un solo $C(B_i)$ ya que de ser así H estaría contenido en $C(B_i)$ por la compacidad de $C(B_i)$. Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $H_n \in C(B_{i_n})$ y para cada $i_n \neq i_m$, $H_n \neq H_m$. De esta manera como $H_n \subset B_{i_n}$, $Lim H_n = H$, y $Lim B_{i_n} = A$, se tiene que $H \subset A$. Por lo tanto, $H \in C(A)$. De aquí que

$$\overline{(\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))} \subset C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n)).$$

Por ello $C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))$ es un conjunto cerrado de $C(X)$, en consecuencia $C(A) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} C(B_n))$ es compacto.

Para la demostración del Teorema 3.8 requeriremos la siguiente notación: Sean w, w^* puntos de X y $T = ww^*$ un arco contenido en X. Denotemos por $wT = \{wt \subset T \mid t \in T\}$. Por lo tanto wT es un arco ordenado en $C(X)$ cuyos extremos son $\{w\}$ y T. En esta parte utilizaremos $X \subset C(X)$ en lugar de $F_1(X) \subset C(X)$ por razones de no complicar la notación. De esta manera, si escribimos $A \subset X$, estamos diciendo realmente que $A \subset F_1(X)$, obviamente estamos incluyendo el caso cuando se escriba $x \in X$, que es equivalente a $\{x\} \in F_1(X)$.

Teorema 3.8 *Sea X un continuo. Si existe una retracción de $C(X)$ sobre X, entonces X no es de tipo N.*

Demostración. Sea $r : C(X) \to X$ una retracción. Como $C(X)$ es arco-conexo y r es una función continua y suprayectiva, entonces X es arco-conexo. Supongamos que X es un continuo de tipo N (utilizaremos la notación de la Definición 2.24). Sea $A = pq \in C(X)$.
Sea C la componente de $r^{-1}(p) \cap C(A)$ que contiene a $\{p\}$.

Afirmación: $C \cap qA \neq \phi$. (1)

Supongamos que $C \cap qA = \phi$. $(*)$
Sea C_i la componente de $r^{-1}(p_i'') \cap C(B_i)$ que contiene a p_i''. Como cada C_i es un elemento del espacio métrico compacto $C(C(A) \cup (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} C(B_i)))$, entonces la sucesión $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión (C_{i_j}) que converge a un continuo T (según la Proposición 3.7) contenido en $r^{-1}(p) \cap C(A)$. Como $p \in T$, (ya que $p_{i_j}'' \in C_{i_j}$), entonces T es un subcontinuo de C.
Ahora supongamos que para una cantidad infinita de índices i, $C_i \cap (q_iB_i \cup q_i'B_i) \neq \phi$. Como $(q_iB_i \cup q_i'B_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a qA, entonces $T \cap qA \neq \phi$, pero $T \subset C$. Así $C \cap qA \neq \phi$, contradiciendo (*).
De esta manera, a excepción de un número finito de índices $k \in N$, se tiene que
$C_k \cap (q_kB_k \cup q_k'B_k) = \phi - - - - - - - - - - - -$ (2)
Sea k alguno de los índices para el cual se satisface (2). Sean
$L = q_kB_k \cup q_k'B_k$,
$E = r^{-1}(p_k'') \cap C(B_k)$ y
$Z = E \cup L$.

Probaremos que la componente K de Z que contiene a $p_k'' \in Z\backslash L$ no intersecta a L. Consideremos dos casos:

$1^{er} caso: K \nsubseteq E$. Entonces $K \cap E$ es un subconjunto cerrado del continuo K y $p_k'' \in K \cap E$. Por lo tanto, la componente K' de $K \cap E$ que contiene a p_k'' intersecta a la cerradura del conjunto $K\backslash E$ ([33, Teorema 5.6, p. 74]) y como $K\backslash E \subset Z\backslash E \subset L$ tenemos que $K' \cap L \neq \phi$.

$2^{do} caso: K \subset E$. Tomamos $K' = K$.
En ambos casos obtenemos un continuo K' contenido en E que contiene al punto p_k'' tal que $K' \cap L \neq \phi$. Por otra parte K' debe estar contenido en C_k. Esto implicaría que $C_k \cap L \neq \phi$, contradiciendo lo que se supuso en (2).
Lo anterior prueba que Z no es conexo entre L y p_k'' por lo que el cerrado $C(B_k)\backslash Z$ separa al disco $C(B_k)$ entre L y p_k''. Como $C(B_k)$ es unicoherente y localmente conexo entonces, por Teorema 3.4 existe un subcontinuo localmente conexo $H \subset C(B_k)\backslash Z$ que también separa a $C(B_k)$ entre L y p_k''.
Ahora el punto p_k'' corta al arco $q_k q_k'$ en dos subarcos B y B' donde $q_k \in B$ y $q_k' \in B'$ cada uno de los cuales une a p_k'' con L. Entonces, podemos elegir puntos $x \in H \cap B$ y $x' \in H \cap B'$. Sean R y R' subarcos de B y B' respectivamente cuyos puntos extremos son x, q_k y x', q_k' respectivamente. La unión $Y = H \cup R \cup R'$ es un continuo localmente conexo.
Por otra parte

$$H \subset C(B_k)\diagdown Z \subset C(B_k)\diagdown E = C(B_k)\diagdown \left[r^{-1}(p_k'') \cap C(B_k)\right] \subset C(X)\diagdown r^{-1}(p_k'').$$

Esto implica que $H \cap r^{-1}(p_k'') = \phi$ lo cual es equivalentea decir $p_k'' \notin r(H)$.Más aún $R \cup R' \subset q_k q_k \diagdown \{p_k''\}$ de aquí, $r(R \cup R') \subset q_k q_k' \diagdown \{p_k''\}$ ya que r es una retracción. Todo lo anterior implica que $r(R \cup R')$ no contiene a p_k''.
Además $q_k, q_k' \in (R \cup R') \subset Y$, así $q_k, q_k' \in r(Y) \subset X$ y $r(Y)$ es un continuo localmente conexo, debido a que la conexidad local entre continuos es preservada bajo funciones continuas. Pero los continuos localmente conexos son arco conexos, por tanto $r(Y)$ es arco conexo. En particular cada arco en $r(Y)$ que contiene a q_k y a q_k' debería de contener a p_k'' por (5) de la Definición 2.24. Pero esto es imposible porque $p_k'' \notin r(Y)$. Esta contradición prueba que $C \cap qA \neq \phi$.
Sea D la componente de $r^{-1}(q) \cap C(A)$ que contiene a q. Entonces

$$pA \cap D \neq \phi \qquad (3)$$

La demostración de (3) es similar a la demostración de arriba intercambiando q por p y reemplazando B_i, C, p, p''_i, q, q_i y q'_i por A_i, D, q, q''_i, p, p_i y p'_i respectivamente.

Como $p \neq q$, entonces $r^{-1}(p) \cap r^{-1}(q) = \phi$.
Como $C(A)$ es un espacio normal existe un conjunto abierto U de $C(A)$ tal que $C \subset U \subset C(A)$ y $\overline{U} \cap D = \phi$. Sea V la componente de U que contiene a C. Como $C(A)$ es localmente conexo se sigue de [33, Ejercicio 5.22, p. 74] que V es un conjunto abierto y por [33, Teorema 8.26, p. 132], V es arco conexo. Como $V \subset \overline{U}$ y $\overline{U} \cap D = \phi$, $(D \cap pA) \setminus V \neq \phi$. Sea $w \in (D \cap pA) \setminus V$ y α un arco contenido en V que une a p con $z \in qA \cap C$. Sea $\Delta = pA \cup qA \cup A$. El lector podrá verificar que existen puntos a y b en $\alpha \cap \Delta$ tales que si α_{ab} es el subarco de α cuyos extremos son a y b, entonces $\Delta \cup \alpha_{ab}$ es una $\theta-$curva y α_{ab} separa a q de w en $C(A)$, lo cual contradice que q y w están en la componente D de $C(A) \cap r^{-1}(q)$.

El siguiente dendroide no es de tipo N y no es uniformemente arco conexo. Entonces por [6, Teorema 3.1, 3.3, pp. 9 y 10]) no admite retracciones de $C(X)$ sobre X, mostrando así que el inverso del teorema anterior no se cumple.

Ejemplo 3.9 (Figura 17) En este ejemplo describiremos un abanico X con las propiedades que mencionamos arriba. Aunque X es un subespacio del plano euclideano, lo describiremos como subconjunto de R^3.
Para puntos p, $q \in R^3$, denotemos por $\overline{pq}$ el segmento rectilineo que une a p con q.
Consideremos
$a = (0,0,0)$, $L_1 = \{(0,y,0) : 0 \leq y \leq 1\} \subset R^3$. Sean $w_n = (0, 1/2^n, 0)$ y $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Para cada $z \in \overline{w_n w_{n+1}}$ definamos $z^* \in \overline{w_n w_{n+1}}$, tal que $d(z, w_n) = d(z^*, w_{n+1})$.

$$\mathbb{L}_2 = \{(0,0,z) : 0 \leq z \leq 1\}.$$

Sean $p_j^n = (1/j, 0, 1/n)$ y $q_j^n = (1/j, 1, 1/n)$, para cada fijo y $j \in \{n, n+1, n+2, n+3, ..., 2n-1\}$ y sea $p_n = (0,0,1/n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Nótese que $\{p_j^n\}_{j=n}^{2n-1}$ y $\{q_j^n\}_{j=n}^{2n-1}$están contenidos en el plano

$$\mathbb{P}_n = \{(x, y, 1/n) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definamos

$$L_n = \overline{p_n^n q_n^n} \cup \overline{q_n^n p_{n+1}^n} \cup \overline{p_{n+1}^n q_{n+1}^n} \cup \overline{q_{n+1}^n p_{n+2}^n} \cup \overline{p_{n+2}^n q_{n+2}^n} \cup ... \cup \overline{q_{2n-1}^n p_n}.$$

Así, $L_n \subset P_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sea

$$X' = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n).$$

El abanico X es el espacio cociente $X'/\sim$ obtenido de definir la siguiente relación de equivalencia: Sean y_1, $y_2 \in X'$, $y_1 \sim y_2$ si y sólo si y_1, $y_2 \in L_2 \cup W$ o y_1, $y_2 \in L_1$ y $y_1 = y_2^*$ donde y_2^* es como se definió arriba. El espacio cociente $X = X'/\sim$ es como en la Figura 17, pag 42.
La dendrita F_ω (ver pag 2) es un abanico cuyo vértice a tiene orden infinito. No es difícil ver que $X = F_\omega \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n)$, donde $a = (0, 0, 0)$ es el vértice de F_ω y para cada $n \in \mathbb{N}$,
1. W_n es un arco, donde uno de sus puntos extremos es a.
2. $\mathrm{Lim} W_n = F_\omega$.
3. $W_n \cap W_m = \{a\}$ si $n \neq m$.
4. W_n "da vueltas" a F_ω, $2n$ veces (véase la Figura 17).
Se puede observar fácilmente que X es un continuo que no es de tipo N. Para demostrar que no hay retracciones de $C(X)$ en X, probaremos que X no es uniformemente arcoconexo y aplicaremos el Teorema 3.2. En la figura se han dibujado los arcos W_1, W_2 y W_3 y se distinguen por el grosor de las líneas.
Denotemos por w_n^m los puntos en W_n, $m = 1, 2, 3, ..., n$ los cuales están marcados por un punto $\bullet$ en la Figura 17 y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n^m = b$, donde b es un extremo del primer arco de F_ω. Cada w_n^m es un punto extremo de dos arcos $A_n^m = w_n^m u_n^m$ y $B_n^m = w_n^m v_n^m$, $(m = 1, 2, ..., n)$ donde u_n^m y $v_n^m \epsilon W_n$ son marcados con un cuadrito $\square$ en la Figura 17 y $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^m = a = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^m$. Los arcos A_n^m y B_n^m están ambos contenidos en W_n, si suponemos que el diámetro del arco ab es 1 y dado que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^m = ab = \lim\limits_{n\to\infty} B_n^m$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(diam\ A_n^m) = 1 = \lim\limits_{n\to\infty}(diam\ B_n^m)$. Elijamos $\varepsilon > 0$ tal que necesitemos al menos cuatro puntos en cada arco A_n^m y B_n^m, $m = 1, ..., n$. Sean a_k puntos en el arco W_n tales que cada subarco $a_k a_{k+1}$ tenga diámetro menor que ε (aquí estamos usando la notación definición 2.3. Entonces necesitaremos al menos $2n(4) = 8n$ puntos $\{a_1, a_2, ..., a_{8n}\}$ en el arco W_n, para que cada subarco $a_k a_{k+1} \subset W_n$ tenga diámetro menor que ε. Esto prueba que X no es uniformemente arcoconexo.

También el inverso al Teorema 3.2 no se satisface para $C(X)$, basta con pensar en un dendroide uniformemente arcoconexo que sea de tipo N. Así por el Teorema 3.8 no hay retracciones de $C(X)$ sobre X.

Ejemplo 3.10 Para ilustrar esto último consideremos el siguiente ejemplo: la escoba doble Z del ejemplo 2.25 es de tipo N y uniformemente arcoconexo.

Si en el Teorema 3.5, intercambiamos $C(X)$ por $F_2(X)$ tenemos que todos los pasos de la demostración siguen siendo válidos. En efecto, esto es gracias a que, para un arco I, $C(I)$ y $F_2(I)$ son homeomorfos. De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.11 *Si X es un continuo de tipo N, entonces no hay retracciones de $F_2(X)$ sobre X.*

Otro problema clásico que se ha desarrollado en la Teoría de Continuos es el de encontrar condiciones para la existencia de funciones promedio en espacios topológicos. Si recordamos la observación posterior a la Definición 3.1, el teorema anterior nos da una condición necesaria para la existencia de funciones promedio, y como consecuencia también, una condición necesaria para la existencia de retracciones de 2^X sobre X.. Así, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.12 *Si X es continuo de tipo N, entonces X no admite funciones promedio.*

Demostración. Si X admite una funcion promedio, entonces por la observación anterior podemos definir una retracción de $F_2(X)$ sobre X. Pero, esto implica según el teorema anterior que X no es de tipo N.

Corolario 3.13 *Si X es un continuo de tipo N, entonces no existen retracciones de 2^X sobre X.*

El resultado anterior también se sigue de que no hay retracciones de $C(X)$ sobre X, si X es de tipo N

Por otra parte, también el inverso al Teorema 3.2 no se satisface para 2^X, basta con pensar en un dendroide uniformemente arcoconexo que sea de tipo N. Así por el Corolario 3.13 no hay retracciones de 2^X sobre X.

Bajo la siguiente definición podemos enunciar el Teorema 3.15

Definición 3.14 Sea (X, d) un espacio métrico y compacto. Diremos que una función continua f entre dos subespacios de X es
$\varepsilon - cercana\ a\ la\ identidad$, si para cada x, $d(x,\ f(x)) <\varepsilon$. Diremos que una sucesión de arcos $\{a_nb_n\}$ converge fuertemente a un arco $A = ab$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe n' tal que para cada $n \geq n'$ existe una función $h_n : ab \longrightarrow a_nb_n$, ε-cercana a la identidad tal que $h_n(a) = a_n$ y $h_n(b) = b_n$.
En la definición no son lo mismo que a_nb_n converja fuertemente a ab y que a_nb_n converja fuertemente a ba

El siguiente teorema probado por Bell y Watson en [1, Teorema 3.5, p.42] se sigue del Corolario 3.12.

Teorema 3.15 *Sea (X, d) un continuo. Sean $A = ab$ un arco en X y cuatro sucesiones de arcos contenidos en X,*
$\{a_nc_n\}$, $\{a_nd_n\}$, $\{c_nb_n\}$ y $\{f_nb_n\}$. Supongamos que
1. cada sucesión converge fuertemente a A.
2. Para toda n, cada subcontinuo que contiene a c_n y d_n contiene a a_n y cada subcontinuo que contiene a e_n y f_n contiene a b_n. Entonces X no admite funciones promedio.

Demostracion. Las hipótesis implican que X es un continuo de tipo N. Así por el Corolario , X no admite funciones promedio.

Consideremos ahora las siguientes definiciones.

Definición 3.16 Sea (X, d) un continuo. a) Una **cadena** en X, es una colección finita $C = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que $U_i \cap U_j \neq \phi$, si y solo si $|i - j| \leq 1$. Si $C = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es una cadena en X, entonces los miembros de C son llamados **eslabones** de C, U_i es llamado el i-ésimo eslabón de C. Si C es una cadena en X y $max\{diam(U_i), 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon$. Entonces, diremos que C es un **ε-cadena** en X. Diremos que el continuo X es **encadenable** si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon - cadena$ cubriendo a X.
b) Se dice que un punto p de un continuo encadenable X es un **punto final**, si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon - cadena$ que cubre a X y p está en el primer eslabón de la $\varepsilon - cadena$.
c) Se dice que dos puntos a, b *son* dos **puntos finales** opuestos, si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon - cadena$ que cubre a X donde a está en el primer eslabón de la $\varepsilon - cadena$ y b está en el último eslabon de la $\varepsilon -$cadena.

A los continuos encadenables también se les conoce como continuos de tipo arco.

Definición 3.17 Sean X un continuo y A un subcontinuo X de tipo arco el cual tiene un punto final a. Diremos que una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subcontinuos de X es una sucesión doblada con respecto al punto a si ésta satisface las siguientes condiciones: hay dos sucesiones de subcontinuos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de A_n tales que E_n, $F_n \subset A$ y
1. $A_n = E_n \cup F_n$, y
2. $\underset{n\to\infty}{Lim}(E_n \cap F_n) = \{a\}$, $\underset{n\to\infty}{Lim}E_n = \underset{n\to\infty}{Lim}F_n = A$.

El siguiente teorema fue probado por Kawamura y Tymchatyn en [22,Teorema 2.2, p. 99] para determinar otro tipo de continuos que no aceptan funciones promedio.

Teorema 3.18 Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si X contiene un subcontinuo A, de tipo arco con dos puntos finales opuestos a y b, y existen dos sucesiones dobladas $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ con respecto a a y a b respectivamente, entonces X no admite funciones promedio.

El Corolario 3.12 es similar a este teorema pero no requiere la hipótesis de que X sea hereditariamente unicoherente. Sin embargo nosostros requerimos que el subcontinuo A de tipo arco sea exactamente un arco, que es un caso particular de un continuo de tipo arco. Note que el Corolario 3.12 y el Teorema 3.18 coinciden cuando el espacio X es un dendroide.

Daremos ahora un dendroide W de tipo N que es la imagen continua de $C(W)$ y que no es un retracto de $C(W)$. En efecto existe una función continua y suprayectiva $F : C(W) \to W$. Sin embargo ya que W es de tipo N, por el Teorema 3.8 no existen retracciones de $C(W)$ en W. En particular, ser de tipo N no es un impedimento para que un espacio X sea la imagen continua de $C(X)$.

Ejemplo 3.19 Consideremos el dendroide W del Ejemplo 2.25. Sea d_n el punto medio del conjunto S_n Para cada $n \in N$ y sea $\pi : W \to \{(0, y) : y \in R\}$ definida como $\pi(x, y) = (0, y)$, para cada (x,y)$\in W$.
Definamos ahora una función $f : C(W) \to C(A)$ donde A es el abanico armónico determinado (bajo la misma notación del Ejemplo 2.25) por el siguiente conjunto $A = ab \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} ad_n$.

Sea $C \in C(W)$. Si $C \subseteq ac_n$, entonces $f(C) = \pi^{-1}(\pi(C)) \cap ad_n$. Note que si $C \subseteq ad_n$ entonces definimos $f(C) = \pi^{-1}(\pi(C)) \cap ad_n = C$. Si $C \subseteq A$, entonces definimos $f(C) = C$. Si $C = H \cup K$ con $H \subseteq A$ y $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in M} d_{n_i}c_{n_i}$, donde

$M \subset N$ y $K \cap d_{n_i}c_{n_i} \neq \phi$ para cada $i \in M$, definimos $f(C) = H \cup \bigcup_{i \in M} ad_{n_i}$. En esencia esta función es como una reflexión"de la familia $\{ad_n : n \in N\}$ como subconjunto del semiplano dado por la desigualdad $x \geq 0$ a la famillia $\{d_nc_n : n \in N\}$ subconjunto del semiplano dado por la desigualdad $x \leq 0$, la cual es un función continua.

De hecho, esta función, es una retracción de $C(W)$ en $C(A)$.

Ahora definamos una función $g : C(A) \to A$. Definamos un orden parcial en A de la siguiente manera. Sea $p = a$. Entonces $x \leq_p y$, si $xp \subseteq yp$.
Si $C \subseteq ad_n$, entonces $g(C) = x \in C$ donde $x \leq_p y$, para toda $y \in C$. Así, si $C = \{x\}$, entonces $g(C) = \{x\}$. Por último si $a \in C$, entonces $g(C) = a$.
Esta función es una selección en $C(A)$ y por lo tanto una retracción de $C(A)$ en A.

Finalmente, si para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$, identificamos los puntos de la forma $(0,t) \in A$ con los puntos $(0, 1-t) \in A$ respectivamente, entonces el espacio cociente, que le llamaremos $W,'$ es homeomorfo al espacio W. De esta manera, si h es la función de identificación de A en W' y H es el homeomorfismo entre W y W' tenemos que $F = H \circ h \circ g \circ f$ es una función continua que tiene como dominio $C(W)$ y como imagen W.

Por otra parte, los Ejemplos 3.10 y 3.9 muestran que las propiedades de ser uniformemente arcoconexo y no ser de tipo N son independientes una de la otra. Como independientemente cada una de estas propiedades no implican la existencia de retracciones de $C(X)$ sobre X, nos planteamos la siguiente pregunta; la cual está encaminada a dar condiciones para la existencia de retracciones de $C(X)$ sobre X.

¿Si X es un dendroide uniformemente arco conexo y no es tipo N, entonces existen retracciones de $C(X)$ a X ?

El siguiente dendroide nos muestra que la respuesta a la pregunta anterior es negativa.

Ejemplo 3.20 Descripción del dendroide Y (Figura 18). Consideremos el espacio Z del ejemplo 2.25 y sea A' el subarco de A cuyos puntos extremos son $-b = (-\frac{1}{2}, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0)$. Ahora identifiquemos los puntos de la forma

$-x = (-t, 0)$ con los puntos $x = (t, 0)$ para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Entonces Y es la imagen de Z bajo el mapeo cociente g dada por la identificación anterior. Y es el dendroide de la Figura 18, pag 48.

Note que Y tiene las propiedades requeridas. Es decir, Y no es de tipo N y es uniformemente arco conexo.

Afirmación: **El dendroide $\boldsymbol{Y}$ del ejemplo 3.20 no acepta retracciones de $\boldsymbol{C(Y)}$ en $\boldsymbol{Y}$.**

La demostración se hará en tres pasos:

Paso 1. Demostraremos que $\boldsymbol{Y}$ no es contraíble.

Paso 2. Demostraremos que $\boldsymbol{C(Y)}$ es contraíble.

Paso 3. Aplicamos el Teorema .

.

Teorema 3.21 *[23, § 54 VI Teorema 3, p. 371] La contractibilidad es preservada bajo retracciones. Esto es, si X es un espacio contraíble y existe una retracción de X a un subespacio A de X, entonces A es contraíble.*

Para probar el primer paso, usaremos la siguiente definición y enunciaremos algunos teoremas auxiliares, que permitirán decir de manera inmediata por qué Y no es contraíble.

En la Definición 3.22 y el Teorema 3.23, p, p_i, p'_i, p''_i, q, q_i, q'_i, q''_i son como en la definición 2.24

Definición 3.22 Sea X un continuo de tipo N entre p y q. Se dice que (X, g, Y) tiene la propiedad $(*)$ si Y es un continuo hereditariamente unicoherente y $g : X \to Y$ es una función continua tal que
a) $g(p) \neq g(q)$,
b) $g(p_i q''_i) \cap g(q''_i p'_i) = \{g(q''_i)\}$ y
c) $g(q_i p''_i) \cap g(p''_i q'_i) = \{g(p''_i)\}$.

Se dice que un espacio X es **contraíble con respecto a** Y siempre que cada función $f : X \to Y$ sea homotópica a una función constante.

Teorema 3.23 *[15, Teorema 1, p. 121] Sean X y Y dos continuos y $g : X \to Y$ una función continua. Si (X, g, Y) tiene la propiedad $(*)$, entonces para cada función $f : X \to Y$ homotópica a la función g tenemos que $g(p)$, $g(q) \in f(pq) \subset f(X)$.*

Como una consecuencia, de este teorema tenemos que si (X, g, Y) satisface la propiedad $(*)$, entonces X no es contraíble con respecto a Y. Así por [23, §54, VI, Teorema 2, p. 374] Y no es contraíble .

Paso 1. Veamos que el dendroide Y del ejemplo 3.20 no es contraíble. En efecto, si Z, g y Y son como en el Ejemplo 3.20, entonces (Z, g, Y) satisface la propiedad $(*)$ ya que Z es de tipo N, g es la función de identificación y al ser Y un dendroide, es hereditariamente unicoherente. Así, por el Teorema 3.23, Y no es contraíble.

Paso 2. Para probar que $C(Y)$ es contraíble, definiremos el siguiente conjunto

$$\Lambda_0(X) = \left\{ \begin{array}{c} \text{arcos ordenados en } C(X) \text{ que} \\ \text{unen a un elemento de } F_1(X) \text{ con } X \end{array} \right\} \subset C(C(X)).$$

Utilizaremos el siguiente teorema para probar que $C(Y)$ es contraíble. Es decir, definiremos una función continua del espacio Y en $\Lambda_0(Y)$.

Teorema 3.24 *[21, Teorema 78.8, p. 398]Para un continuo X, las si guientes proposiciones son equivalentes:*
(a) $C(X)$ es contraíble.
(b) Hay una función continua $\alpha : X \to \Lambda_0(X)$.

Por comodidad, pensaremos que el dendroide Y está contenido en $\mathbb{R}^3$ y es homeomorfo al siguiente dendroide al que también llamaremos Y.

Sean $o = (0,0,0)$, $p = (-1,0,0)$, $q = (1,0,0)$, $r = (0,1,0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = (0,0,\frac{1}{2^{3n-2}})$, $r_n = (0,1,\frac{1}{2^{3n-1}})$, $w_n = (0,0,\frac{1}{2^{3n}})$, $q_n = (1,0,\frac{1}{2^{3n-2}})$, $a_n = (0,0,-\frac{1}{2^{3n-2}})$, $b_n = (0,1,-\frac{1}{2^{3n-1}})$, $z_n = (0,0,-\frac{1}{2^{3n}})$, $p_n = (-1,0,-\frac{1}{2^{3n-2}})$.

Sea $\boldsymbol{T = \overline{pq} \cup \overline{or}}$.

Consideremos ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, los siguientes arcos:

$\boldsymbol{l}_n = \overline{qz_n} \cup \overline{z_nb_n} \cup \overline{b_na_n} \cup \overline{a_np_n}$ y

$\boldsymbol{L}_n = \overline{pw_n} \cup \overline{w_nr_n} \cup \overline{r_ns_n} \cup \overline{s_nq_n}$.

Entonces el dendroide $\boldsymbol{Y}$ queda definido como

$$\boldsymbol{Y = T} \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{L}_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{l}_n\Big).$$

Consideremos las siguientes funciones proyección de Y en el triodo T, $\boldsymbol{\pi}_1 : Y \to T$ y $\boldsymbol{\pi}_2 : Y \to T$, definidas como siguen: $\boldsymbol{\pi_1(x,y,z) = (x,0,0)}$ y $\boldsymbol{\pi_2(x,y,z) = (0,y,0)}$.

Dado un punto de la forma $(x,0,z) \in (\overline{pw_n} \cup \overline{s_nq_n}) \cup (\overline{qz_n} \cup \overline{a_np_n})$, definimos su **simétrico** como sigue: $\boldsymbol{s(x,0,z)} \in \overline{s_nq_n}$, si $(x,0,z) \in \overline{ps_n}$ o $\boldsymbol{s(x,0,z)} \in \overline{pw_n}$ si $(x,0,z) \in \overline{s_nq_n}$ o $\boldsymbol{s(x,0,z)} \in \overline{a_np_n}$ si $(x,0,z) \in \overline{qz_n}$ o $\boldsymbol{s(x,0,z)} \in \overline{qz_n}$ si $(x,0,z) \in \overline{a_np_n}$ y $\boldsymbol{\pi}_1(s(x,0,z)) = (-x,0,0)$.

Si $(0,y,z) \in (\overline{s_nr_n} \cup \overline{r_nw_n}) \cup (\overline{z_nb_n} \cup \overline{b_na_n})$, definimos su **simétrico** $\boldsymbol{s(0,y,z)} \in \overline{r_nw_n}$ si $(0,y,z) \in \overline{s_nr_n}$ ó $\boldsymbol{s(0,y,z)} \in \overline{s_nr_n}$ si $(0,y,z) \in \overline{r_nw_n}$ y $\boldsymbol{\pi}_2(s(0,y,z)) = (0,y,0)$.

Si $(x,0,0) \in \overline{pq}$ definimos su **simétrico** $\boldsymbol{s(0,y,z)} \in \overline{pq}$ como $s(x,0,0) = (-x,0,0)$ y si $(0,y,0) \in \overline{or}$, entonces su **simétrico** es él mismo.

Definamos también los siguientes puntos:

u_n es igual al punto medio del arco $\overline{ps_n}$, d_n es igual al punto medio del arco $\overline{qa_n}$, $c = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$ y $d = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. Obtenemos así, los siguientes límites

$\underset{n\to\infty}{Lim} a_n = \underset{n\to\infty}{Lim} z_n = \underset{n\to\infty}{Lim} s_n = \underset{n\to\infty}{Lim} w_n = o$, $\underset{n\to\infty}{Lim} r_n = \underset{n\to\infty}{Lim} b_n = r$, $\underset{n\to\infty}{Lim} q_n = q$, $\underset{n\to\infty}{Lim} p_n = p$, $\underset{n\to\infty}{Lim} u_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\ s(d_n) = c$ y $\underset{n\to\infty}{Lim} d_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\ s(u_n) = d$.

Si x y y están en un mismo arco rectilíneo $A \subset Y$, y si existe $y_x \in A$ tal que $d(x, y) = d(x, y_x)$ con $y \neq y_x$, diremos que y_x es el **reflejo** de y con respecto a x.

Consideremos también los siguientes conjuntos:

Para cada $\tau \in [-1, 0]$, sean $A^\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{pt_n}$ y $B^\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{q\tau_n}$ tales que $t_n \in ps_n$, $\tau_n \in q_n w_n$, $\pi_1(t_n) = (\tau, 0, 0) = -\pi_1(\tau_n)$, y $\mathfrak{B}_\tau = A^\tau \cup B^\tau$.

Para cada $\xi \in [0, 1]$, sean $C^\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{s_n\xi_n}$ y $D^\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{a_n\zeta_n}$ tales que $\pi_2(\xi_n) = (0, \xi, 0) = \pi_2(\zeta_n)$, $\xi_n \in \overline{s_n r_n}$, $\zeta_n \in \overline{a_n b_n}$, y $\mathfrak{C}_\xi = C^\xi \cup D^\xi$.

Para cada $\sigma \in [0, 1]$, sean $E^{1-\sigma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{r_n\sigma_n}$ y $F^{1-\sigma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{b_n\varsigma_n}$ tales que $\pi_2(\varsigma_n) = (0, 1-\sigma, 0) = \pi_2(\sigma_n)$, $\sigma_n \in \overline{r_n w_n}$ y $\varsigma_n \in \overline{b_n z_n}$ y $\mathfrak{D}_{1-\sigma} = E^{1-\sigma} \cup F^{1-\sigma}$.

Para cada $\beta \in [0, 1]$, sean $G^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{w_n\beta_n}$ y $H^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{z_n\gamma_n}$ tales que $\pi_1(\beta_n) = (\beta, 0, 0) = -\pi_1(\gamma_n)$, $\beta_n \in \overline{w_n q_n}$, $\gamma_n \in \overline{z_n p_n}$ y $\mathfrak{E}_\beta = G^\beta \cup H^\beta$.

Construcción de la función $\alpha : X \to \Lambda_0(X)$. Denotaremos por $A_x = \alpha(x)$

Si $x \in \overline{or}$ entonces A_x tendrá la siguiente forma.

$A_x = \left\{\overline{xt} \mid t \in \overline{xr}\right\} \cup \left\{\overline{xr} \cup \overline{xt} \mid t \in \overline{xo}\ \right\} \cup \{\overline{or} \cup \overline{ot} \cup \overline{os(t)} | t \in \overline{op}\}$
$\cup \{T \cup \mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1, 0]\} \cup \{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0, 1]\}$
$\cup \{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0, 1]\} \cup \{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0, 1]\}$.

Si $x \in \overline{po}$ consideremos dos casos:

Caso 1. $x \in \overline{pc}$.

$A_x = \left\{\overline{tt_x}|\ t \in xp\right\} \cup \left\{\overline{pp_x} \cup p_x t|\ t \in p_x r\right\}$
$\cup \left\{pr \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\} \cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\right\} \cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi|\ \xi \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\right\} \cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta|\ \beta \in [0,1]\right\}$.

Caso 2. $x \in \overline{co}$.

$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{xo}\right\} \cup \left\{\overline{o_x o} \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{or}\right\}$
$\cup \{o_x r \cup ot|\ t \in \overline{os(o_x)}\} \cup \left\{\overline{o_x s(o_x)} \cup \overline{or} \cup \overline{o_x t} \cup \overline{s(o_x)s(t)}|\ t \in \overline{o_x, p}\right\}$
$\cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\right\} \cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi|\ \xi \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\right\} \cup \left\{T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta|\ \beta \in [0,1]\right\}$.

Si $x \in \overline{oq}$ la definición de A_x es similar al caso anterior.

Ahora definamos los arcos ordenados para $x \in pq_n \backslash \{p\}$.

Primero consideremos el caso en que $x = u_n$.

$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{u_n p}\right\} \cup \left\{\overline{ps_n} \cup s_n t|\ t \in s_n q_n\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup pt|\ t \in pr\right\} \cup \left\{q_n r \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi|\ \xi \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta|\ \beta \in [0,1]\right\}$.

Si $x \in u_n s_n \backslash \{u_n\}$, entonces

$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{xs_n}\right\} \cup \left\{\overline{s_{n_x} s_n} \cup s_n t|\ t \in s_n s(s_{n_x})\right\}$
$\cup \left\{s_{n_x} s(s_{n_x}) \cup \overline{s_{n_x} t} \cup \overline{s(s_{n_x})s(t)}|\ t \in \overline{s_{n_x} p}\right\} \cup \left\{q_n p \cup pt|\ t \in pr\right\}$
$\cup \left\{q_n r \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\} \cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi|\ \xi \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta|\ \beta \in [0,1]\right\}$.

Si $x \in \overline{s_n r_n}$, entonces

$A_x = \left\{xt|\ t \in xs(x)\right\} \cup \left\{xs(x) \cup xt \cup s(x)s(t)|\ t \in xp\right\}$
$\cup \left\{q_n p \cup pt|\ t \in pr\right\} \cup \left\{q_n r \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi|\ \xi \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\right\}$
$\cup \left\{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta|\ \beta \in [0,1]\right\}$.

Si $x \in \overline{r_n w_n}$, entonces

$A_x = \{xt |\ t \in xs(x)\} \cup \{xs(x) \cup xt \cup s(x)s(t) |\ t \in xq\}$
$\cup \{q_n p \cup pt |\ t \in pr\} \cup \left\{q_n r \cup \overline{ot} |\ t \in \overline{oq}\right\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Si el punto $x \in \overline{w_n s(u_n)}$, entonces el arco

$A_x = \left\{\overline{t_x t} |\ t \in \overline{xw_n}\right\} \cup \{\overline{w_{n_x} w_n} \cup w_n t |\ t \in w_n s(w_{n_x})\}$
$\cup \{s(w_{n_x}) w_{n_x}) \cup \overline{s(w_{n_x}) t} \cup \overline{w_{n_x} s(t)} |\ t \in \overline{s(w_{n_x}) p}\} \cup \{q_n p \cup pt |\ t \in pr\}$
$\cup \left\{q_n r \cup \overline{ot} |\ t \in \overline{oq}\right\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Si $x \in \overline{s(u_n) q_n}$, entonces

$A_x = \{\overline{tt_x} |\ t \in \overline{s(u_n) q_n}\} \cup \{\overline{q_n q_{n_x}} \cup q_{n_x} t |\ t \in q_{n_x} r\}$
$\cup \left\{q_n r \cup \overline{ot} |\ t \in oq\right\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{[p,q_n] \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Para el caso cuando $x \in pu_n$, vamos a determinar para cada $n \in \mathbb{N}$, un homeomorfismo Γ_n entre el arco $\overline{pu_n}$ y el arco pq_n, $\Gamma_n : \overline{pu_n} \to pq_n$ tal que $\Gamma_n(p) = p$ y $\Gamma_n(u_n)=q_n$. Si $x \in \overline{pu_n}$, $y \in \overline{pu_m}$ con $\pi_1(x) = \pi_1(y)$, entonces $\pi_i(\Gamma_n(x)) = \pi_i(\Gamma_m(y))$, $i = 1$ o $i = 2$.

$A_x = \left\{\overline{tt_x} |\ t \in \overline{xp}\right\} \cup \{\overline{pp_x} \cup p_x t |\ t \in p_x \Gamma_n(x)\}$
$\cup \{p\Gamma_n(x) \cup pt |\ t \in pr\} \cup \{\Gamma_n(x) r \cup \overline{ot} |\ t \in oq\}$
$\cup \{\Gamma_n(x) r \cup \overline{oq} \cup \mathfrak{B}_\tau | \tau \in [-1,0]\}$
$\cup \{\Gamma_n(x) p \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$
$\cup \{\Gamma_n(x) p \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{\Gamma_n(x) p \cup T \cup \mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Debido a que el continuo X tiene cierta simetría entre los arcos pq_n y los arcos qp_n, definimos A_x si $x \in qp_n$,de manera simétrica a como se hizo para los puntos $x \in pq_n$.

Así, hemos asignado para cada $x \in X$, un arco A_x.

Para probar la continuidad de α mostraremos que para cada $x \in X$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, entonces $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$. Esta última desigualdad es equivalente a probar que $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$ y $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. Probaremos entonces que para cada $C \in A_x$, existe $K \in A_y$ tal que $H(C,K) < \varepsilon$ y para cada $K \in A_y$, existe $C \in A_x$ tal que $H(K,C) < \varepsilon$.

Consideremos el conjunto $A = \{s_n | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{w_n | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_n | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{o\}$.

Consideraremos varios casos dependiendo de la elección de $x \in Y$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Caso 1. $\boldsymbol{x \in \overline{or} \setminus \{o\}}$. Observemos primero que para ε, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $y \in pq_n \cup qp_n$ y $d(x,y) < \delta_0$, entonces $H(pq_n \cup qp_n, T) < \varepsilon$. Sea $0 < \delta < min\{\varepsilon, d(x,A), \delta_0\}$, por demostrar que si $d(x,y) < \delta$, entonces $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$.
Sea $y \in Y$ tal que $d(x,y) < \delta$. Consideremos los subcasos **i)** y **ii).**

i) Si $y \in \overline{or}$ y $C \in A_x$. Basta considerar cuando $o \notin C$ y $o \in C$.

Si $o \notin C$, y $C = \overline{xt}$ con $t \in \overline{xr}$. Si $C \subset \overline{xy}$, entonces definmos $K = \{y\}$ o si $\overline{xy}$ está contenido en C o en $\overline{yt}$, definimos $K = \overline{yt}$ o bien si $C = \overline{rt}$ con $t \in \overline{xo}$ y $y \in \overline{tr}$, entonces definimos $K = C$ y por último si $y \in \overline{to}$, entonces definimos $K = \overline{yr}$.

Si $o \in C$, entonces definimos $K = C$ ya que $y \in C$.

Por lo tanto $H(C,K) < \varepsilon$ en todos los casos. De esta manera $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$. De forma análoga se prueba que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

ii) $y \notin T$. Entonces, $y \in pq_n \cup qp_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Pensemos sin pérdida de generalidad que $y \in pq_n$. Más aún, por la elección de la δ, $y \in \overline{s_n r_n} \cup \overline{r_n w_n}$. Supongamos que $y \in \overline{s_n r_n}$. Consideraremos los casos **a), b), c) y d).**

a) Si $C = xt$ con $t \in \overline{xr}$, definimos $K = \overline{yz} \subset s_n r_n$ con $\pi_2(z) = t$.

b) Si $C = \overline{rt}$ con $t \in \overline{xo}$, definimos $K = \overline{zs(z)}$, donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$, $t \in \overline{op}$, definimos $K = zs(z) \subset pq_n$,donde $\pi_1(z) = t = -\pi_1(s(z))$

d) Si $\{p,q\} \subset C$ definimos $K = C \cup pq_n$.

Es fácil ver que en todos los casos $H(C,K) < \varepsilon$. Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.

Probemos ahora que, $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. Para $K \in A_y$, se analizarán los casos siguientes.

a) Si $K = \overline{yz} \subset \overline{yr_n}$ (puede ser $z = y$), definimos $C = \overline{xt}$, donde $\pi_2(z) = t$.

b) Si $K \subset ys(y)$, definimos $C = \overline{rx}$.

c) Si $K = zs(z)$ con $z \in \overline{ys_n}$, definimos $C = \overline{rt}$ con $t \in \overline{xo}$ y $\pi_2(z) = t$.

d) Si $K = zs(z)$ con $z \in \overline{s_n p}$, definimos $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$, donde $\pi_1(z) = t = -\pi_1(s(z))$

e) Si $K \subset T \cup pq_n$, definimos $C = T$.

f) Si $K = T \cup pq_n \cup H$,donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau | \ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi | \ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} | \ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta | \ \beta \in [0,1]\}$. Entonces definimos $C = T \cup H$.

Por lo tanto $H(K,C) < \varepsilon$ en todos los casos.

Por lo que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$, así $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$.

Caso 2. $x = o$. Elijamos $\delta < min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}, \delta_0\}$, donde δ_0 es como en el Caso 1. Sea y tal que $d(x,y) < \delta$.

Consideraremos los casos **i), ii), iii)** y **iv)**

i) $y \in \overline{or}$. Aquí basta considerar los casos en que $C = \overline{ot}$ con $t \in \overline{or}$ o $\overline{or} \subset C$.

Si $C = \overline{ot} \subset \overline{oy}$, entonces definimos $K = \{y\}$ y $K = \overline{yt}$ si $\overline{oy} \subset \overline{ot}$.

Si $\overline{or} \subset C$, definimos $K = C$. Así $H(C,K) < \varepsilon$ en ambos casos.

Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.

De manera análoga podemos probar que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

ii) Si $y \in \overline{op} \setminus \{o\}$. Consideremos los casos **a), b)** y **c).**

a) Si $C = \overline{ot} \subset \overline{or}$, entonces definimos $K = \overline{o_y t}$.

b) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$, entonces definimos $K = \overline{or} \cup \overline{o_y s(o_y)}$, si $\overline{or} \cup \overline{o_y s(o_y)} \nsubseteq C$.

c) Si $\overline{or} \cup \overline{o_y s(o_y)} \subset C$, entonces definimos $K = C$. Así $H(C, K) < \varepsilon$ en todos los casos. De manera análoga podemos probar que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. Similarmente si $y \in \overline{oq} \setminus \{o\}$, y $C \in A_x$, la construcción de K es similar a la anterior.

Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$ y $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

iii) Si $y \in \overline{s_n r_n}$ consideraremos los siguientes casos.

a) Si $C = \overline{ot} \subset \overline{or}$, entonces definimos $K = \overline{yz} \subset \overline{s_n r_n}$, donde $\pi_2(z) = t$.

b) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$ con $t \in \overline{op}$, entonces $K = zs(z) \subset pq_n$, donde $\pi_1(z) = t = \pi_1(z)$

c) Si $\{p, q\} \subset C$, entonces definimos $K = pq_n \cup C$. Así $H(C, K) < \varepsilon$, para todos los casos.

Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.

Probemos que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. Para $K \in A_y$, se analizarán los casos siguientes:

a) Si $K = \overline{yz} \subset \overline{yr_n}$, entonces definimos $C = \overline{ot}$ donde $\pi_2(z) = t$.

b) Si $K = yz$ con $z \in \overline{r_n w_n}$, entonces definimos $C = \overline{or}$.

c) Si $K = zs(z)$ con $z \in \overline{s_n p}$, entonces definimos $C = \overline{or} \cup ts(t)$, donde $\pi_1(z) = t = \pi_1(s(z))$.

d) Si $K = pq_n \cup M$ con $M \subset T$, entonces definimos $C = T$.

e) Si $K = T \cup pq_n \cup H$, donde

$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$, entonces definimos $C = T \cup H$.

Por lo tanto, $H(K,C) < \varepsilon$ en todos los casos.

Así $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. De manera similar podemos probar lo anterior si $y \in \overline{r_n w_n}$.

iv) Si $y \in \overline{ps_n}$ determinamos los siguientes casos:

a) Si $C = \overline{ot} \subset \overline{or}$, entonces definimos $K = s_{n_y} z$ donde $\pi_2(z) = t$.

b) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$ con $t \in \overline{op}$, entonces definimos $K = zs(z_n)$ (z puede ser igual y) donde $\pi_1(z) = t$.

c) Si $\{p,q\} \subset C$, entonces definimos $K = pq_n \cup C$. Así $H(C,K) < \varepsilon$ en los tres casos. Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.

Para probar que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$, sea $K \in A_y$.

a) Si $K = \overline{z_y z}$ con $z \in \overline{ys_n}$, entonces definimos $C = \{o\}$.

b) Si $K = o_y z$ con $z \in \overline{s_n r_n}$, entonces definimos $C = \overline{ot}$ donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $K = o_y s(z)$ con $z \in \overline{r_n w_n}$, entonces definimos $C = \overline{or}$.

d) Si $K = o_y s(o_y) \cup zs(z)$ con $z \in \overline{o_y p}$, entonces definimos $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$, donde $\pi_1(z) = t = \pi_1(s(z))$.

e) Si $K = pq_n \cup M$ con $M \subset T$, entonces $C = T$.

f) Si $K = T \cup pq_n \cup H$,donde $H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$. Entonces definimos $C = T \cup H$. Por lo tanto $H(K,C) < \varepsilon$ en todos los casos.

Por lo tanto, $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$. De manera similar podemos probar lo anterior si $y \in \overline{w_n q_n}$.

Así, $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$, si $x = o$.

Supongamos ahora que $x \in \overline{co} \setminus \{c, o\}$.
Definamos $0 < \delta < min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, d\left(x, A\right), \frac{d(x,c)}{2}, \delta_o\right\}$, donde δ_o es como en el Caso 1. Sea y tal que $d(x, y) < \delta$. Consideraremos los siguientes casos.

i) $y \in \overline{po}$.

a) Si $C \in A_x$ es tal que $C = \overline{tt_x}$con $t \in \overline{xo}$, entonces definimos $K = \overline{aa_y}$ donde $0 < d(a, t) < \delta$ ó $0 < d(a_y, t_y) < \delta$.

b) Si $C = o_x t$ con $t \in \overline{or}$, entonces definimos $K = \overline{o_y t}$.

c) Si $C = \overline{or} \cup \overline{o_x o} \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{os(o_x)}$, entonces definimos $K = \overline{or} \cup \overline{o_y o} \cup \overline{oa}$ con $a \in \overline{os(o_y)}$.

d) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$ con $t \in \overline{o_x p}$, entonces definimos $K = C$ si $o_y \in C$ ó $K = \overline{o_y s(o_y)} \cup \overline{or}$ si $o_y \notin C$.

e) Si $p, q \in C$, entonces $C = K$. Así $H\left(C, K\right) < \varepsilon$ para todos los casos. Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H\left(A_y\right)$. De manera similar se puede probar que $A_y \subset N_\varepsilon^H\left(A_x\right)$.

ii) $y \notin T$. Entonces $y \in pq_n \cup qp_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $y \in pq_n$. Más aún $y \in \overline{u_n s_n}$ por la elección de la δ.

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{xo}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = o_x t$ con $t \in \overline{or}$, entonces definimos $K = s_{n_y} z$, donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $C = \overline{or} \cup \overline{o_x o} \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{os(o_x)}$, entonces definimos $K = s_{n_y} z$ donde $\pi_1(z) = t$.

d) Si $C = \overline{or} \cup \overline{ts(t)}$ con $t \in \overline{o_x p}$, entonces definimos $K = zs(z)$, donde $\pi_1(z) = t$.

e) Si $p, q \in C$, entonces definimos $K = C \cup pq_n$ y $H\left(C, K\right) < \varepsilon$ para

todos los casos.
Similarmente se definen los arcos, si $y \in qp_n$.

Por lo tanto, $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.

Ahora probaremos que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

a) si $K = \overline{zz_y}$ con $y \in \overline{ys_n}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in \overline{s_n r_n}$, entonces definimos $C = o_x t$, donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in r_n w_n$, entonces definimos $C = o_x r$.

d) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in w_n s(s_{n_y})$, entonces definimos $C = o_x r \cup \overline{ot}$, donde $\pi_1(z) = t$.

e) Si $K = s_{n_y}s(s_{n_y}) \cup \overline{s_{n_y}z} \cup \overline{s(s_{n_y})s(z)}$ con $z \in \overline{s_{n_y}p}$, entonces $C = tt_x \cup \overline{or}$, donde $\pi_1(z) = t$.

f) Si $K = pq_n \cup M$ con $M \subset T$, entonces definimos $C = T$.

g) Si $K = T \cup pq_n \cup H$, donde

$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$ $\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$. Entonces definimos $C = T \cup H$. Por lo tanto, $H(K,C) < \varepsilon$ en todos los casos. Similarmente podemos garantizar la continuidad para $y \in qp_n$.

Así, $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

De lo anterior, $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$, si $x \in co \setminus \{c, o\}$.

Supongamos que $x = c$. Sean $0 < \delta < min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, d(x,A), \frac{1}{4}, \delta_1\right\}$ donde si $y \in pq_n \cup qp_n$ y $d(x,y) < \delta_1$, entonces $H(pq_n, T) < \varepsilon$ y $H(qp_n, T) < \varepsilon$ y además $d(q_n, \Gamma_n(y)) < \delta_1$. Sea y tal que $d(x,y) < \delta$. Consideremos los si guientes casos.

i) $y \in \overline{pc}$

a) Sea $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{pc}$, entonces definimos $K = \overline{tt_y}$ si $y \in \overline{tc}$ y si $y \in \overline{tp}$,entonces $K = \overline{xx_y}$.

b) Si $o \in C$, entonces definimos $K = C$.
Así, en ambos casos se tiene que $H(C, K) < \varepsilon$.

Ahora consideremos $K \in A_y$ con $y \in \overline{pc}$
a) Si $K = \overline{zz_y}$ con $x \in \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = zz_x$ o si $x \notin \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = \overline{yy_x}$.

b) Si $K = \overline{pp_y} \cup \overline{p_y z}$ con $z \in \overline{p_y o}$, entonces definimos $C = \overline{po}$.

c) Si $o \in K$, entonces definimos $C = K$. Así $H(K, C) < \varepsilon$.

ii) $y \in \overline{co}$. Consideremos los siguientes casos:

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{pc}$, entonces definimos $K = \overline{xx_y}$ si $t_x \in \overline{yc}$ y $K = t_x\overline{(t_x)_y}$ si $t_x \in \overline{yo}$.

b) Si $C = pt$ con $t \in \overline{or}$, entonces definimos $K = o_y t$.

c) Si $C = pr \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{os(o_y)}$, entonces definimos $K = o_y r \cup \overline{ot}$.

d) Si $C = pr \cup \overline{os(o_y)} \cup \overline{s(o_y)t}$ con $t \in \overline{s(o_y)q}$, entonces definimos $K = o_y r \cup \overline{os(o_y)} \cup \overline{s(o_y)t} \cup \overline{o_y s(t)}$.

e) Si $\{p, q\} \subset C$, entonces definimos $K = C$.
Así $H(C, K) < \varepsilon$ en todos los casos.

Ahora para $y \in \overline{co}$ consideramos los casos siguientes

a) Si $K = \overline{zz_y}$ con $z \in \overline{co}$,entonces definimos $C = z_y(z_y)_x$ si $p \in \overline{zz_y}$, y si no $C = \overline{yy_x}$.

b) Si $K = o_y z$ con $z \in \overline{or}$, entonces definimos $C = pz$.

c) Si $K = o_y r \cup \overline{oz}$ con $z \in \overline{os(o_y)}$, entonces definimos $C = pr \cup oz$.
d) Si $K = \overline{o_y s(o_y)} \cup \overline{or} \cup \overline{o_y z} \cup \overline{s(o_y)s(z)}$ con $z \in \overline{o_y p}$, entonces definimos $C = T$.

e) Si $\{p,q\} \subset K$, entonces definimos $C = K$.
Así, $H(K,C) < \varepsilon$ en todos los casos.

iii) Si $y \in \overline{pu_n}$ consideraremos los siguientes casos.

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{pc}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y} \subset \overline{ps_n}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = pt$ con $t \in \overline{or}$, entonces definimos $K = pz \subset pr_n$, donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $C = pr \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{o\pi_1(\Gamma_n(y))}$, entonces definimos $K = pz$, con $z \in \overline{w_n\Gamma_n(y)}$ y $\pi_1(z) = t$.

d) Si $\{p,q\} \subset C$, entonces definimos $K = p\Gamma_n(y) \cup C$.
Así $H(C,K) < \varepsilon$ en todos los casos.

Por otra parte, para y :

a) si $K = \overline{zz_y}$ con $z \in \overline{py}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = pz$ con $z \in \overline{s_nr_n}$, entonces definimos $C = pt$ donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $K = pz$ con $z \in \overline{r_nw_n}$, entonces definimos $C = pr$ donde $\pi_2(z) = t$.

d) Si $K = pz$ con $z \in \overline{w_n\Gamma_n(y)}$, entonces definimos $C = pr \cup \overline{ot}$, donde $\pi_1(z) = t$.

e) Si $K = p\Gamma_n(y) \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = T$.

f) Si $K = T \cup p\Gamma_n(y) \cup H$, donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$, entonces definimos $C = T \cup H$.

Por lo tanto, $H(K, C) < \varepsilon$ en todos los casos.

Similarmente podemos garantizar la continuidad para $y \in qp_n$.

iv) $y \in u_n s_n$.

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{co}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y} \subset \overline{ps_n}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = pt$ con $t \in \overline{or}$, entonces definimos $K = s_{n_y}z \subset pr_n$, donde $\pi_2(z) = t$

c) Si $C = pr \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{oq}$, entonces definimos $K = s_{n_y}z \subset s_{n_y}s(s_{n_y})$ donde $\pi_1(z) = t$.

d) Si $\{p, q\} \subset C$ entonces $K = pq_n \cup C$.
Así $H(C, K) < \varepsilon$ en todos los casos.

Por otra parte para y tenemos los siguientes casos:

a) Si $K = \overline{zz_y}$ con $z \in \overline{ys_n}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in \overline{s_n r_n}$, entonces definimos $C = pt$ donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in \overline{r_n w_n}$, entonces definimos $C = pr$.

d) Si $K = s_{n_y}z$ con $z \in \overline{w_n s(s_{n_y})}$, entonces definimos $C = pr \cup \overline{ot}$, donde $\pi_1(z) = t$.

e) Si $K = s_{n_y}s(s_{n_y}) \cup \overline{zs_{n_y}} \cup \overline{s(s_{n_y})s(z)}$ con $z \in \overline{s_{n_y}p}$, entonces definimos $C = T$.

f) Si $K = pq_n \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = T$.

g) Si $K = T \cup pq_n \cup H$, donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1, 0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0, 1]\} \cup$
$\{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0, 1]\} \cup$
$\{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0, 1]\}$, entonces definimos $C = T \cup H$.

Por lo tanto, $H\left(K,C\right) < \varepsilon$ en todos los casos.

Similarmente podemos garantizar la continuidad para $y \in qp_n$.
De lo anterior $A_y \subset N_\varepsilon^H\left(A_x\right)$ y $A_x \subset N_\varepsilon^H\left(A_y\right)$. Así, $H^2\left(A_x, A_y\right) < \varepsilon$, si $x = c$.

Ahora bien, si $x \in \overline{pc}\backslash\{p,c\}$, existe $\delta' > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(pq_n, T) < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $n \geq N$. Sea $\delta'' < d(x, pq_N)$.
Sea $0 < \delta < \frac{min}{8}\left\{\varepsilon, d\left(x,p\right), d\left(x,c\right), \delta', \delta''\right\}$. Supongamos ahora que $x \in \overline{pc}\backslash\{p,c\}$. Si $d\left(x,y\right) < \delta$. Entonces consideremos los siguientes casos:

i) $y \in \overline{pc}$.

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{xp}$, entonces definimos $K = \{y\}$ si $t \in \overline{xy}$ y, si no, $K = \overline{tt_y}$.

b) Si $C = \overline{pt}$ con $t \in \overline{p_x o}$, entonces definimos $K = C$ si $\overline{py} \subset \overline{px}$ ó $K = \overline{pp_y}$ si $\overline{px} \subset \overline{py}$.

c) Si $o \in C$ entonces $K = C$. Así $H(C,K) < \varepsilon$ en todos los casos.

De la misma manera se puede probar que para cada $K \in A_y$ existe $C \in A_x$ tal que $H(K,C) < \varepsilon$.

Recordemos que para cada $y \in \overline{pu_n}\backslash\{p\}$ y para cada n determinamos el punto $\Gamma_n(y) \in pq_n$, entonces $\Gamma_n(y)$ tiene las siguientes posibilidades: $\Gamma_n(y) \in \overline{w_n q_n}$ ó $\Gamma_n(y) \in \overline{r_n w_n}$ o $\Gamma_n(y) \in \overline{s_n r_n}$ ó $\Gamma_n(y) \in \overline{ps_n}$.

ii) $y \in \overline{pu_n}\backslash\left\{u_n\right\}$.

1. $\Gamma_n(y) \in \overline{w_n q_n}$.

a) Si $C = tt_x$ con $t \in \overline{xp}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = pt$ con $t \in p_x r$, entonces definimos $K = pz \subset pr_n$ donde $\pi_1(z) = t$ o donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $C = pr \cup \overline{ot}$ con $t \in \overline{o\pi_1\left(\Gamma_n(y)\right)}$, entonces definimos $K = pz \subset p\Gamma_n(y)$ donde $\pi_1(z) = t$.

d) Si $C = pr \cup \overline{ot}$ con $\pi_1\left(\Gamma_n(y)\right) \in C$, entonces definimos $K = C \cup \overline{p\Gamma_n(y)}$.
Por lo tanto, $H(C, K) < \varepsilon$.

2. $\Gamma_n(y) \in \overline{r_n w_n}$

a) Si $C = tt_x$ con $t \in \overline{xp}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y}$ donde $\pi_1(z) = t$.
b) Si $C = pt$ con $t \in p_x r$, entonces definimos $K = pz \subset pr$ donde $\pi_1(z) = t$ o donde $\pi_2(z) = t$ dependiendo en donde se encuentre z.

c) Si $pr \subset C$, entonces definimos $K = C \cup p\Gamma_n(y)$.

3. Si $\Gamma_n(y) \in \overline{s_n r_n}$.

a) Si $C = \overline{tt_x}$ con $t \in \overline{xp}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = pt$ con $t \in p_x\pi_2\left(\Gamma_n(y)\right)$, entonces definimos $K = pz \subset p\Gamma_n(y)$ donde $\pi_2(z) = t$.

c) Si $p\pi_2\left(\Gamma_n(y)\right) \subset C$, entonces definimos $K = C \cup p\Gamma_n(y)$.

4. $\Gamma_n(y) \in \overline{ps_n}$.

a) Si $C = \overline{tt_x}$con $t \in \overline{xp}$, entonces definimos $K = \overline{zz_y}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $C = \overline{pt}$ con $t \in \overline{p_x\pi\left(\Gamma_n(y)\right)}$, entonces definimos $K = \overline{p\Gamma_n(y)}$.

c) Si $p\pi_1\left(\Gamma_n(y)\right) \subset C$, entonces definimos $K = C \cup p\Gamma_n(y)$.

Por otra parte, para y y

1'. $\Gamma_n(y) \in \overline{w_n q_n}$ tenemos lo siguiente.

a) Si $K = \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = pz$ con $z \in p_y r_n$, entonces definimos $C = pt$, donde $\pi_1(z) = t$ o $\pi_2(z) = t$ dependiendo en donde se encuentre z.

c) Si $K = pz$ con $z \in \overline{r_n w_n}$, entonces definimos $C = pr$.

d) Si $K = pz$ con $z \in \overline{w_n \Gamma_n(y)}$, entonces definimos $C = pr \cup \overline{ot}$ donde $\pi_1(z) = t$.

e) Si $K = p\Gamma_n(y) \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = pr \cup M$.

f) Si $K = T \cup p\Gamma_n(y) \cup H$,donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1, 0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0, 1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0, 1]\}$
$\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0, 1]\}$. Entonces, definimos $C = T \cup H$.
Por lo tanto, $H(K, C) < \varepsilon$ en todos los casos.

2'. $\Gamma_n(y) \in \overline{r_n w_n}$

a) Si $K = \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = pz$ con $z \in p_y r_n$, entonces definimos $C = pt$ donde $\pi_1(z) = t$ o $\pi_2(z) = t$ dependiendo la posición de z.

c) Si $K = pz$ con $z \in \overline{r_n \Gamma_n(y)}$, entonces definimos $C = pr$.

d) Si $K = p\Gamma_n(y) \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = pr \cup M$.

e) Si $K = T \cup p\Gamma_n(y) \cup H$,donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1, 0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0, 1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0, 1]\}$
$\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0, 1]\}$. Entonces, definimos $C = T \cup H$.
Por lo tanto, $H(K, C) < \varepsilon$ en todos los casos.

3'. Si $\Gamma_n(y) \in \overline{s_n r_n}$

a) Si $K = \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$, donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = pz$ con $z \in p_y\Gamma_n(y)$, entonces definimos $C = pt$ donde $\pi_1(z) = t$ o donde $\pi_2(z) = t$

c) Si $K = p\Gamma_n(y) \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = p\pi\left(\Gamma_n(y)\right) \cup M$.

d) Si $K = T \cup p\Gamma_n(y) \cup H$,donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$
$\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$. Entonces definimos $C = T \cup H$.
Por lo tanto, $H\left(K, C\right) < \varepsilon$ en todos los casos.

4'. Si $\Gamma_n(y) \in \overline{ps_n}$.
a) Si $K = \overline{zz_y}$, entonces definimos $C = \overline{tt_x}$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $K = \overline{pz}$ con $z \in \overline{p_y\Gamma_n(y)}$, entonces definimos $C = pt$ donde $\pi_1(z) = t$.

c) Si $K = p\Gamma_n(y) \cup M$, con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces definimos $C = pt \cup M$.
Así, $H\left(K, C\right) < \varepsilon$ en todos los casos.
Por lo que $A_y \subset N_\varepsilon^H\left(A_x\right)$ y $A_x \subset N_\varepsilon^H\left(A_y\right)$.
Por lo tanto $H^2\left(A_x, A_y\right) < \varepsilon$, si $x \in \overline{pc} \backslash \{p, c\}$.

Sea $x = p$ y $0 < \delta < min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}, \delta'''\right\}$ (donde δ''' es tal que $\Gamma_n(z) \in B_{\delta'''}(p)$ para toda $n \in \mathbb{N}$). Sea y tal que $d(x,y) < \delta$, entonces tenemos los siguientes casos:

i) $y \in T$.

a) Si $C = \overline{pt}$ con $t \in \overline{pp_y}$, entonces definimos $K = \overline{pp_y}$.

b) Si $\overline{pp_y} \subset C$, entonces definimos $K = C$. En ambos casos $H(K, C) < \varepsilon$.

Probemos ahora que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.

a) Si $K = \overline{zz_y}$ con $z \in \overline{yp}$, entonces definimos $C = \overline{pz_y}$.

b) Si $p \in K$, entonces $C = K$.

ii) Supongamos ahora que $y \in pq_n$. Observemos primero que por la elección de δ se cumple que $d(x, z_y) < \delta$ y $d(x, \Gamma_n(y)) < \delta$

a) Si $C = \overline{pt}$, y $t \in p\pi_1(\Gamma_n(y))$ entonces definimos $K = z_y z$ donde $\pi_1(z) = t$.

b) Si $\pi_1(\Gamma_n(y)) \in C$ entonces definimos $K = p\Gamma_n(y) \cup C$. En estos casos $H(C, K) < \varepsilon$.

Probemos ahora que $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$.
a) Si $K = \overline{zz_y}$, con $z \in \overline{y\Gamma_n(y)}$, entonces $C = \overline{p\pi_1(z)}$.

b) Si $K = \overline{p\Gamma_n(y)} \cup M$ con $M = pt \subset pr$ o $M = pr \cup ot \subset T$, entonces $C = M$.

c) Si $K = T \cup \overline{p\Gamma_n(y)} \cup H$,donde
$H \in \{\mathfrak{B}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_\xi |\ \xi \in [0,1]\} \cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$ $\cup \{\mathfrak{B}_0 \cup \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{D}_0 \cup \mathfrak{E}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$. Entonces definimos $C = T \cup H$. Por lo que $H(K, C) < \varepsilon$ en todos los casos.
Así, $A_y \subset N_\varepsilon^H(A_x)$ y $A_x \subset N_\varepsilon^H(A_y)$.
Por lo tanto $H^2(A_x, A_y) < \varepsilon$, si $x = p$.

Por último si $x \in pq_n$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \cap (\bigcup_{n \neq m} pq_m \cup T) = \phi$. En estos casos la continuidad es inmediata.
Por lo tanto α es continua. Lo que demuestra que $C(Y)$ es contraíble.

Nuestro continuo es un dendroide que no es de tipo N, pero sí es de tipo N generalizado. Así que es natural preguntarse:

Si $\boldsymbol{X}$ es un dendroide uniformemente arco-conexo y no es de tipo $\boldsymbol{N}$ generalizado, entonces

¿Existirán retracciones de $\boldsymbol{C(X)}$ sobre $\boldsymbol{X}$?

El siguiente dendroide K muestra que la respuesta es también negativa.

Ejemplo 3.25 Descripción del dendroide K. Consideremos el espacio Z del Ejemplo 2.25 y sea A' el subarco de A cuyos puntos extremos son $-b = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$ y $b = (\frac{1}{2}, 0, 0)$. Al igual que en el Ejemplo 3.20, identifiquemos los puntos de la forma $-x = (-t, 0, 0)$ con los puntos $x = (t, 0, 0)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Definamos la proyección $\pi_0 : Z \to \overline{pq}$ como $\pi_o(x, y) = (x, 0, 0)$. Si $(t, y, 0) \in \overline{qp_n}$, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$, identifiquemos los puntos de esta forma con su simétrico $s(t, y, 0)$, bajo la proyección π_0. Entonces, K es la imagen de Z bajo el función cociente h, dado por la identificación anterior. De esta manera K es homeomorfo al dendroide de la figura 19, al cual denotaremos con la misma letra.

Note que K no es de tipo N generalizado y es uniformemente arco-conexo.

Afirmación **El dendroide** K **del Ejemplo 3.25 no acepta retracciones $\boldsymbol{C(K)}$ a** K**.**

La demostración es similar a la anterior y también se hará en tres pasos. Probaremos que:

1. **$\boldsymbol{K}$ no es contraíble.**
2. **$\boldsymbol{C(K)}$ es contraíble y**
3. **Aplicamos el Teorema 3.21.**

1. En efecto si Z, h y K son como en el Ejemplo 3.25,. Entonces (Z, h, K) satisface la propiedad $(*)$ y por el Teorema 3.23, K no es contraíble.

2. Definiremos una función continua del espacio K sobre $\Lambda_0(K)$ y al final usaremos el Teorema 3.24.

Por comodidad, pensemos al dendroide K en $\mathbb{R}^3$ definido de la siguiente manera: L_n, T, o, p, q, c, d, r, s_n, r_n, w_n, u_n, p_n y q_n son como en el Ejemplo 3.20. Aquí b_n es el punto medio del arco $\overline{qp_n}$, $z_n = (0, 1, -\frac{1}{2^{3n}})$ y d_n es igual al punto medio del arco $\overline{qb_n}$.

Consideremos ahora los siguientes triodos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{T}_n = \overline{qp_n} \cup \overline{b_n z_n}.$$

El dendroide K queda definido como

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{T} \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{L}_n) \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n).$$

Al igual que en el ejemplo anterior c0onsideremos las si
guientes funciones proyección de K en el triodo T, $\boldsymbol{\pi}_1 : K \to T$ y $\boldsymbol{\pi}_2 : K \to T$, definidas como siguen: $\boldsymbol{\pi_1(x, y, z) = (x, 0, 0)}$ y $\boldsymbol{\pi_2(x, y, z) = (0, y, 0)}$.

Dado un punto de la forma $(x, 0, z) \in (\overline{ps_n} \cup \overline{w_n q_n}) \cup (\overline{qb_n} \cup \overline{b_n p_n})$, definimos su **simétrico** $\boldsymbol{s(x, 0, z)} \in \overline{w_n q_n}$ si $(x, 0, z) \in \overline{ps_n}$ o $\boldsymbol{s(x, 0, z)} \in \overline{ps_n}$ si $(x, 0, z) \in \overline{w_n q_n}$ o $\boldsymbol{s(x, 0, z)} \in \overline{b_n p_n}$ si $(x, 0, z) \in \overline{qb_n}$ o $\boldsymbol{s(x, 0, z)} \in \overline{qb_n}$ si $(x, 0, z) \in \overline{b_n p_n}$, como aquel punto que satisface $\boldsymbol{\pi}_1(s(x, 0, z)) = (-x, 0, 0)$.

Si $(0, y, z) \in (\overline{s_n r_n} \cup \overline{r_n w_n}) \cup \overline{z_n b_n}$, definimos su **simétrico** $\boldsymbol{s(0, y, z)} \in \overline{r_n w_n}$ si $(0, y, z) \in \overline{s_n r_n}$ o $\boldsymbol{s(0, y, z)} \in \overline{s_n r_n}$ si $(0, y, z) \in \overline{r_n w_n}$ o
$\boldsymbol{s(0, y, z) = (0, y, z)} \in \overline{\boldsymbol{z_n b_n}}$ como aquel punto que satisface $\boldsymbol{\pi}_2(s(0, y, z)) = (0, y, 0)$.

Si $(x, 0, 0) \in \overline{pq}$ definimos su **simétrico** $\boldsymbol{s(x, 0, 0)} \in \overline{pq}$ como $s(x, 0, 0) = (-x, 0, 0)$ y si $(0, y, 0) \in \overline{or}$, su **simétrico** es él mismo.

Obtenemos así, los siguientes límites

$$\underset{n\to\infty}{Lim} b_n = \underset{n\to\infty}{Lim} s_n = \underset{n\to\infty}{Lim} w_n = o,\ \underset{n\to\infty}{Lim} r_n = \underset{n\to\infty}{Lim} z_n = r,\ \underset{n\to\infty}{Lim} q_n = q,$$
$$\underset{n\to\infty}{Lim} p_n = p,\ \underset{n\to\infty}{Lim} u_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\ s(d_n) = c \text{ y } \underset{n\to\infty}{Lim} d_n = \underset{n\to\infty}{Lim}\ s(u_n) = d.$$

Si x y y están en un mismo arco rectilíneo $A \subset K$, y si existe $y_x \in A$ tal que $d(x,y) = d(x,y_x)$ con $y \neq y_x$, diremos que y_x es el **reflejo** de y con respecto a x.

Usaremos algunos de los conjuntos definidos anteriormente junto con otros que definiremos a continuación:

Para cada $\tau \in [-1,0]$, B^τ es como en el Ejemplo 3.20, $H^\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{pt_n}$, donde $\pi_1(t_n) = (\tau,0,0)$. Definamos $\mathfrak{I}_\tau = B^\tau \cup H^\tau$

Para cada $\xi \in [0,1]$, sean $C^\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{s_n\xi_n}$ y $S^\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{b_n\zeta_n}$ tales que $\pi_2(\xi_n) = (0,\xi,0) = \pi_2(\zeta_n)$, $\overline{s_n\xi_n} \subset \overline{s_n r_n}$ y $\overline{b_n\zeta_n} \subset \overline{b_n z_n}$, así $\mathfrak{S}_\xi = C^\xi \cup S^\xi$.

Para cada $\sigma \in [0,1]$, sea $E^{1-\sigma}$ como en el Ejemplo 3.20 y $F^{1-\sigma} = S^{1-\sigma}$.

Para cada $\beta \in [0,1]$, sean $G^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{w_n\beta_n}$ y $R^\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{b_n\gamma_n}$ tales que $\pi(\beta_n) = (\beta,0,0) = -\pi(\gamma_n)$, $\beta_n \in \overline{w_n q_n}$. Definamos así para cada $\beta \in [0,1]$, $\mathfrak{K}_\beta = G^\beta \cup R^\beta$.

Donde t_n, ξ_n, y $\beta_n \in pq_n$ y ζ_n y $\gamma_n \in qp_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Establecido lo anterior, definamos la función $\alpha : K \to \Lambda_0(K)$; esto es, asignemos a cada punto $x \in K$ un arco ordenado que va de $\{x\}$ a K, que denotaremos también por A_x.

También será necesario considerar varios casos dependiendo donde esté colocado el punto $x \in K$.

Si $x \in \overline{or}$ entonces A_x tendrá la siguiente forma:

$$A_x = \left\{\overline{xt} \mid t \in \overline{xr}\right\} \cup \left\{\overline{xr} \cup \overline{xt} \mid t \in \overline{xo}\right\} \cup \{\overline{or} \cup \overline{ot} \cup \overline{os(t)} | t \in \overline{op}\}$$
$$\cup \{T \cup \mathfrak{I}_\tau | \ \tau \in [-1,0]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi | \ \xi \in [0,1]\}$$
$$\cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} | \ \sigma \in [0,1]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta | \ \beta \in [0,1]\}.$$

Si $x \in \overline{po}/\{p\}$ consideremos dos casos: $x \in \overline{pc}$ ó $x \in \overline{co}$.

Si $x \in \overline{pc}$,

$A_x = \{\overline{tt_x}|\ t \in xp\} \cup \{\overline{pp_x} \cup p_x t|\ t \in p_x r\}$

$\cup \left\{pr \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Si $x \in \overline{co}$,
$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{xo}\right\} \cup \left\{\overline{o_x o} \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{or}\right\}$

$\cup\{o_x r \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{os(o_x)}\} \cup \{\overline{o_x s(o_x)} \cup \overline{or} \cup \overline{o_x t} \cup \overline{s(o_x)s(t)}|\ t \in \overline{o_x p}\}$

$\cup \{T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\} \cup \{T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Si $x \in \overline{oq}/\{q\}$ la definición de A_x es similar al caso anterior.

Ahora definamos los arcos ordenados para $x \in pq_n \backslash \{p\}$,

Primero consideremos el caso en que $x = u_n$.
$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{u_n p}\right\} \cup \{\overline{ps_n} \cup s_n t|\ t \in s_n q_n\}$

$\cup \{pq_n \cup pt|\ t \in pr\} \cup \left\{q_n r \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{oq}\right\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Si $x \in \overline{u_n s_n}$, $A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in x s_n\right\} \cup \{\overline{s_{n_x} s_n} \cup s_n t|\ t \in s_n s(s_{n_x})\}$

$\cup\{s_{n_x} s(s_{n_x}) \cup \overline{s_{n_x} t} \cup \overline{s(s_{n_x}) s(t)}|\ t \in \overline{s_{n_x} p}\} \cup \{q_n p \cup pt|\ t \in pr\}$

$\cup\{q_n r \cup \overline{ot}| t \in \overline{oq}\} \cup \{\overline{pq_n} \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Si $x \in \overline{s_n w_n}$,
$A_x = \{xt|\ t \in xs(x)\} \cup \{xs(x) \cup xt \cup s(x)s(t)|\ t \in xp\}$

$\cup \left\{q_n p \cup \overline{pt}|\ t \in pr\right\} \cup \{q_n r \cup \overline{ot}|t \in \overline{oq}\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Si el punto $x \in \overline{w_n s(u_n)}$ entonces
$A_x = \left\{\overline{t_x t}|\ t \in \overline{x w_n}\right\} \cup \{\overline{w_{n_x} w_n} \cup w_n t|\ t \in w_n s(w_{n_x})\}$

$\cup\{s(w_{n_x})w_{n_x}) \cup s(w_{n_x})t \cup \overline{w_{n_x} s(t)}|\ t \in \overline{s(w_{n_x})p}\}$

$\cup \{q_n p \cup pt|\ t \in pr\} \cup \{q_n, r \cup \overline{ot}|t \in \overline{oq}\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Si $x \in \overline{s(u_n)q_n}$ entonces
$A_x = \left\{\overline{t t_x}|\ t \in \overline{s(u_n)q_n}\right\} \cup \{\overline{q_n q_{n_x}} \cup q_{n_x} t|\ t \in q_{n_x} r\}$

$\cup\{q_n r \cup \overline{ot}|t \in \overline{oq}\} \cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau |\ \tau \in [-1,0]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{pq_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Para el caso en que $x \in \overline{pu_n}$, utilizaremos de igual manera a la función lineal $\Gamma_n : \overline{pu_n} \to pq_n$ que se definió en la página 48. Así

$A_x = \left\{\overline{tt_x} |\ t \in \overline{xp}\right\} \cup \{\overline{pp_x} \cup p_x t |\ t \in p_x \Gamma_n(x)\}$

$\cup \{p\Gamma_n(x) \cup pt |\ t \in pr\} \cup \{\Gamma_n(x) r \cup \overline{ot} |\ t \in \overline{oq}\}$

$\cup \{\Gamma_n(x) r \cup oq \cup \mathfrak{I}_\tau | \tau \in [-1,0]\}$

$\cup \{p\Gamma_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi |\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup \{p\Gamma_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma} |\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup \{p\Gamma_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta |\ \beta \in [0,1]\}$.

Falta definir los arcos cuando $x \in \mathbb{T}_n$.

Primero describamos para cada $n \in \mathbb{N}$, el siguiente arco ordenado de $\{q\}$ a $\mathbb{T}_n$ que denotaremos por

$$q\mathbb{T}_n = \{qt | t \in qz_n\} \cup \{qz_n \cup b_n t | t \in \overline{b_n p_n}\}$$

y definamos un homeomorfismo $F_n : \overline{qd_n} \to q\mathbb{T}_n$ de tal manera que $F_n(q) = \{q\}$, $F_n(d_n) = \mathbb{T}_n$, y si $y' \in \mathbb{T}_n$, $y \in \mathbb{T}_m$ con $\pi_1(y') = \pi_1(y)$. Entonces $\pi_i(F_n(x)) = \pi_i(F_m(y))$, $i = 1$ o $i = 2$.

Usando la notación anterior, determinemos los A_x para cada $x \in \mathbb{T}_n$.

Si $x \in \overline{qd_n}$, consideremos dos casos:

Caso 1. $x \in \overline{c_n^1 d_n}$, donde c_n^1 es el punto tal que $F_n(c_n^1) = qz_n$

$A_x = \left\{\overline{tt_x} |\ t \in \overline{xq}\right\} \cup \{\overline{qq_x} \cup q_x t |\ t \in q_x z_n\}$

$\cup \{qz_n \cup \overline{b_n t} |\ t \in \overline{b_n F_n(x)}\} \cup \{\overline{qz_n} \cup \overline{b_n F_n(x)} \cup qt |\ t \in qr\}$

$\cup\{qz_n \cup \overline{b_nF_n(x)} \cup qr \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{op}\} \cup \{qz_n \cup \overline{b_nF_n(x)} \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\}$

$\cup\{qz_n \cup \overline{b_nF_n(x)} \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup\{q, z_n \cup b_nF_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup\{qz_n \cup \overline{b_nF_n(x)} \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Caso 2. $x \in \overline{qd_n}$.
$A_x = \left\{\overline{tt_x}|\ t \in \overline{xq}\right\} \cup \{\overline{qq_x} \cup q_xt|\ t \in p_xF_n(x)\}$

$\cup\{qF_n(x) \cup qt|\ t \in qr\} \cup \{qF_n(x) \cup qr \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{op}\}$

$\cup\{qF_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau|\ \tau \in [-1,0]\}$

$\cup\{qF_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1]\}$

$\cup\{qF_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1]\}$

$\cup\{qF_n(x) \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Si $x \in \overline{d_nb_n}$,
$A_x = \left\{\overline{t_xt}|\ t \in \overline{xb_n}\right\} \cup \left\{\overline{b_{n_x}b_n} \cup \overline{b_nt}|\ t \in \overline{b_nz_n}\right\}$

$\cup\overline{\{b_{n_x}b_n} \cup \overline{b_nz_n} \cup \overline{b_nt}|\ t \in \overline{b_ns(b_{n_x})}\}$

$\cup\{\cup\overline{b_nz_n} \cup \overline{b_ns(b_{n_x})} \cup \overline{b_{n_x}t} \cup \overline{s(b_{n_x})s(t)}|\ t \in \overline{b_{n_x}q}\}$

$\cup\{\mathbb{T}_n \cup qt|\ t \in qr\} \cup \left\{\mathbb{T}_n \cup qr \cup \overline{ot}|\ t \in \overline{op}\right\}$

$\cup\{\mathbb{T}_n \cup T \cup \mathfrak{I}_\tau|\tau \in [-1,0]\} \cup \{\mathbb{T}_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_\xi|\ \xi \in [0,1\}$

$\cup\{\mathbb{T}_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^{1-\sigma}|\ \sigma \in [0,1\}$

$\cup\{\mathbb{T}_n \cup T \cup \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{S}_1 \cup E^0 \cup \mathfrak{K}_\beta|\ \beta \in [0,1]\}.$

Si $x \in \overline{b_nz_n}$,
$A_x = \left\{\overline{xt}|\ t \in \overline{xz_n}\right\} \cup \left\{\overline{xz_n} \cup \overline{x,t}|\ t \in \overline{xb_n}\right\}$

$$\cup\{\overline{b_n z_n}\cup\overline{b_n t}\cup\overline{b_n s(t)}|\ t\in\overline{b_n q}\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup qt|\ t\in qr\}$$

$$\cup\left\{\mathbb{T}_n\cup qr\cup\overline{ot}|\ t\in\overline{op}\right\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_\tau|\tau\in[-1,0]\}$$

$$\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_\xi|\ \xi\in[0,1\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_1\cup E^{1-\sigma}|\ \sigma\in[0,1\}$$

$$\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_1\cup E^0\cup\mathfrak{K}_\beta|\ \beta\in[0,1]\}\,.$$

Si el punto $x\in\overline{b_n s(d_n)}$, entonces el arco A_x se define de manera similar al caso en que $x\in d_n b_n$.

Si $x\in\overline{s(d_n)p_n}$, entonces
$A_x=\{\overline{tt_x}|\ t\in\overline{s(d_n)p_n}\}\cup\{\overline{p_n p_{n_x}}\cup p_{n_x}t|\ t\in p_{n_x}z_n\}$

$$\cup\left\{p_n z_n\cup\overline{b_n t}|\ t\in\overline{b_n q}\right\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup qt|\ t\in qr\}$$

$$\cup\left\{\mathbb{T}_n\cup qr\cup\overline{ot}|\ t\in\overline{op}\right\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_\tau|\tau\in[-1,0]\}$$

$$\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_\xi|\ \xi\in[0,1\}\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_1\cup E^{1-\sigma}|\ \sigma\in[0,1\}$$

$$\cup\{\mathbb{T}_n\cup T\cup\mathfrak{I}_0\cup\mathfrak{S}_1\cup E^0\cup\mathfrak{K}_\beta|\ \beta\in[0,1]\}\,.$$

De esta manera hemos definido para cada $x\in K$ un arco ordenado A_x.

La continuidad de la función se prueba de manera semejante al Ejemplo 3.20.

Por lo tanto, usando el Teorema 3.24, $C(K)$ es contraíble.

Note que en ambos casos, los dendroides K y Y no tienen la propiedad de intersección doblada Lo que hace pensar que si un espacio X acepta retracciones de $C(X)$ sobre X, entonces X debe tener la propiedad de intersección doblada. Este problema aparece en la literatura como un problema abierto.

Capítulo 4
Interrelaciones

Las propiedades ser selectible,ser de tipo N o de tipo $N-$generalizado, selectibilidad y tener la propiedad de intersección doblada están muy relacionadas entre sí.

Dedicamos este capítulo a determinar en que tipos de continuos una propiedad implica a la otra. Además, construimos ejemplos que dan respuesta a preguntas planteadas en diversos artículos y a algunas planteadas por nosotros.

Por otra parte dichas propiedades están relacionadas con la existencia de retracciones de $C(X)$ sobre X, con la existencia de retracciones de 2^X sobre X, con la selectibilidad, con la contractibilidad de espacios, y con la existencia de funciones promedio. Por mencionar algunos resultados:

Los continuos contraíbles no son de tipo N [35].

Los dendroides selectibles tiene la propiedad de intersección doblada [27].

Los abanicos contraíbles tienen la propiedad de intersección doblada [25].

No hay funciones promedio si el espacio tiene dos sucesiones dobladas con respecto a dos puntos p y q respectivamente (ver Definición 3.17). En este capítulo, se probarán algunos resultados en esta dirección.

4.1. Continuos de Tipo N y Propiedad de Intersección Doblada

Como puede observarse, la propiedad de intersección doblada y no ser de tipo N (generalizado) son muy parecidas. Es natural plantearse en que tipos de continuos estas propiedades implican una a la otra.

Sabemos por ejemplo, que lo siguiente siempre se cumple en continuos en general.

Teorema 4.1 *Sea X un continuo. Si X tiene la propiedad de intersección doblada, entonces X no es de tipo $N-$ generalizado.*

Demostración. Supongamos que X es de tipo N-generalizado. Sean p, q y K como en la Definición 2.26. Los conjuntos $\{p\}$ y $\{q\}$ son conjuntos de doblez de K. Así la intersección de los conjuntos de doblez de K es vacía. Por lo tanto, X no tiene la propiedad de intersección doblada.

Corolario 4.2 *Sea X un continuo. Si X tiene la propiedad de intersección doblada, entonces X no es de tipo N.*

Demostración. Se sigue de que todo continuo de tipo N es de tipo $N-$ generalizado.

T. J. Lee en [24, Ejemplo 7, p.126] da un ejemplo de un dendroide que no es de tipo N, pero no tiene la propiedad de intersección doblada, probando con esto que el inverso al Corolario 4.2 no es válido en dendroides.

Por otra parte T. J. Lee en [24, Teorema 5, p.124] demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4.3 *Un continuo X no es de tipo N si y sólo si para cada arco A en X, la intersección de todos los conjuntos de doblez de A es no vacía.*

Como se puede observar, el teorema anterior muestra una condición más débil que la propiedad de intersección doblada ya que solamente utiliza arcos.

Los resultados de esta sección tienen como fin el de encontrar en que tipos de continuos ser de tipo N (generalizado), y tener la propiedad de intersección doblada son equivalentes

Debido a que el dendroide de T. J. Lee dado en [24, Ejemplo 7, p.126] tiene 2 puntos de ramificación, él plantea la siguiente pregunta en [24].

¿Existirá un abanico que no sea de tipo N y que no tenga la propiedad de intersección doblada?

En el siguiente ejemplo construimos un abanico (plano) que no es de tipo N y no tiene la propiedad de intersección doblada. De esta manera la respuesta a dicha pregunta es afirmativa.

Ejemplo 4.4 Descripción del abanico W'
Para la descripción de este abanico usaremos las notaciones de la Definición 2.26, del Ejemplo 2.12 y del abanico dado en 2.25. Sea W como en el Ejemplo 2.25. El abanico $W' = W/\sim$ es el espacio cociente obtenido de definir la siguiente relación de equivalencia en W.
Sean $z_1,\ z_2 \in W$. $z_1 \sim z_2$ si y sólo si $z_1 = z_2$ o $z_1,\ z_2 \in ab$ y $z_1 = z_2^*$ o $z_1, z_2 \in W = \{w_n |\ n = 1, 2, 3, ..\} \cup \{a\}$, donde w_n fue definido en el ejemplo 3.9 como un punto en R^3 aquì no hay problema si los pensamos en R^2, ya que la tercera coordenada es 0. El espacio cociente $W' = W/\sim$ es el espacio que es homeoemorfo al espacio de la Figura 20, pag 80, que también llamamos W'.

El lector puede ver fácilmente que W' no es de tipo N. Por otra parte, los conjuntos $\{a\}$ y $\{b\}$ son conjuntos de doblez de F_ω, ya que si $A_i = ab_i$, $A_i' = b_ic_i$, $A = F_\omega$ y $B = \{b\}$, entonces $\{A_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A_i'\}_{n=1}^{\infty}$ y B satisfacen los incisos 6), 7) y 8) en la Definición 2.27. Por lo tanto, $B = \{b\}$ es un conjunto de doblez de F_ω. Por otro lado, si $A_i = c_ia$, $A_i' = ac_{i+1}$, $A = F_\omega$ y $B = \{a\}$, entonces $\{A_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A_i'\}_{n=1}^{\infty}$ y B satisfacen los incisos 6), 7) y 8) en la Definición 2.27. Así, $B = \{a\}$ es un conjunto de doblez de F_ω. Por tanto, la intersección de los conjuntos de doblez de F_ω es vacía. De todo lo anterior, el abanico W' no tiene la propiedad de intersección doblada.

(ver Figura 21, pag 83).
En la Figura 21 sólo se muestra un arco $vb_{\boldsymbol{m}} \cup b_{\boldsymbol{m}} d_{\boldsymbol{1m}}$.
No es muy difícil ver que los conjuntos $\{a_1\}$ y $\{v\}$ son conjuntos de doblez del triodo $T = \overline{va_1} \cup \overline{va_2} \cup \overline{va_3}$. Por lo tanto, la intersección de los conjuntos de doblez de T es vacía. Así, H no tiene la propiedad de intersección doblada. Por último, H no es de tipo $N-$generalizado ya que no hay forma que se cumplan las condiciones de la Definición 2.26. Por lo tanto, H es un abanico que no tiene la propiedad de intersección doblada.

Por otra parte T. J. Lee demuestra el siguiente resultado ([25, Teorema 1, p.])

Teorema 4.7 *Sea X un abanico. Si X no es de tipo N y X no tiene $Q-$puntos, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada*

Observemos que los abanicos dados en 4.4 y en 4.6 tienen Q- puntos y no son localmente conexos en el vértice. Así el inverso al teorema anterior no se cumple.

En el siguiente Teorema probamos que si el abanico es localmente conexo en el vértice, entonces la propiedad de intersección doblada es equivalente a no ser de tipo N.

Teorema 4.8 *Sea X un abanico localmente conexo en el vértice. Entonces X tiene la propiedad de intersección doblada si y sólo si X no es de tipo N.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Corolario 4.2
$\Longleftarrow$) Como X es localmente conexo en el vértice, por el Teorema 2.16, X no tiene $Q-$puntos y por el Teorema 4.7, X tiene la propiedad de interseción doblada.

Como corolario podemos enunciar lo siguiente.

Corolario 4.9*Sea X un abanico localmente conexo en el vértice. Las si guientes proposiciones son equivalentes:*
1. X no es de tipo N.
2. X no es de tipo N y no tiene $Q-puntos$.
3. X tiene la propiedad de intersección doblada.
4. X no es de tipo N generalizado.

Los Teoremas 4.12 y 4.19 relacionan la propiedad de intersección doblada y no ser de tipo N en casos más generales.

Lema 4.10 [24, Lema 1, p. 122] Sean X un continuo y B un conjunto de doblez de $A \in C(X)$. Si las sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen las condiciones de la Definición 2.27, entonces para cada $p \in A \backslash B$ y para cada par de sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p_n \in A_n \backslash A'_n$ y $p'_n \in A'_n \backslash A_n$ y $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} p_n = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Lim}} p'_n = p$ se tiene que existe un punto $a \in B$ y una sucesión de puntos $a_{n_k} \in A'_{n_k} \cap A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que $\underset{k\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, a_{n_k} = a$ y $a_{n_k} \in$

$I(p_{n_k}, p'_{n_k}) \subset A'_{n_k} \cup A_{n_k}$, donde $I(p_{n_k}, p'_{n_k})$ es algún continuo irreducible entre p_{n_k} y p'_{n_k}.

Se sabe que si un continuo es hereditariamente unicoherente entonces el continuo irreducible $I(p_{n_k}, p'_{n_k})$ es único. Si además, el continuo es un dendroide entonces $I(p_{n_k}, p'_{n_k})$ es el único arco que une a p_{n_k} con p'_{n_k}.

De aquí en adelante usaremos la siguiente notación.

$$L(X) = \{x \in X |\ X \text{ es localmente conexo en } x\}.$$

Lema 4.11*Sean X un continuo hereditariamente unicoherente. Si $K \in C(X)\backslash F_1(X)$ y B es un conjunto de doblez de K, entonces $K \cap L(X) \subset B$.*

Demostración. Sea $K \in C(X)\backslash F_1(X)$. Supongamos que B es un conjunto de doblez de K tal que $(K \cap L(X))\backslash B \neq \phi$. Sea $v \in (K \cap L(X))\backslash B$. Como B es un conjunto de doblez de K existen sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ como en la Definición 2.27. Como $(K \cap L(X))\backslash B \subset K\backslash B$, entonces $v \in K\backslash B$ y por el Lema 4.10 para cada par de sucesiones $v_n \in A_n\backslash A'_n$ y $v'_n \in A'_n\backslash A_n$ con $\underset{n\to\infty}{Lim} v_n = \underset{n\to\infty}{Lim} v'_n = v$, existe un punto $b \in B$ y puntos $b_{n_k} \in A'_{n_k} \cap A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que $\underset{k\to\infty}{Lim}\, b_{n_k} = b$ y $b_{n_k} \in I(v_{n_k}, v'_{n_k}) \subset A'_{n_k} \cup A_{n_k}$, donde $I(v_{n_k}, v'_{n_k})$ es el único continuo irreducible entre p_{n_k} y p'_{n_k}. Por otra parte, como $v \in K \cap L(X)$, existe un abierto y conexo W que contiene a v tal que $\overline{W} \cap B = \phi$. Dado que $\underset{n\to\infty}{Lim} v_n = \underset{n\to\infty}{Lim} v'_n = v$ y $\underset{k\to\infty}{Lim}\, b_{n_k} = b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N$, $b_{n_k} \notin \overline{W}$ y $v_{n_k}, v'_{n_k} \in W$. Note que $\overline{W}$ es un subcontinuo de X hereditariamente unicoherente que contiene a v_{n_k}, v'_{n_k} para cada $k \geq N$. Para cada $k \geq N$, sea $\mathbb{I}_{n_k}$ el continuo irreducible en $\overline{W}$ que contiene a v_{n_k}, v'_{n_k}. Por estar contenido en $\overline{W}$, $\mathbb{I}_{n_k}$ no contiene a b_{n_k}. Esto es, $\mathbb{I}_{n_k} \neq I(v_{n_k}, v'_{n_k})$, lo cual contradice que X es hereditariamente unicoherente. Por lo tanto, $(K \cap L(X)) \subset B$.

En los siguientes teoremas, $\mathbb{A}$ denota al conjunto

$$\mathbb{A} = \{A \in C(X) |\ A \text{ es un arco en } X\}.$$

Teorema 4.12 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si para cada $K \in C(X)\backslash(A \cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$ y para cada $A \in A$ la* *intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía. Entonces, X tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Como cada $K \in C(X)\backslash(\mathbb{A} \cup F_1(X))$ satisface $K \cap L(X) \neq \phi$, entonces por el Lema 4.11, cada conjunto de doblez B de K contiene a $K \cap L(X)$. Por tanto, la intersección de los conjuntos de doblez de K es no vacía, y como para cada $A \in \mathbb{A}$ la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía, se tiene que X tiene la propiedad de intersección doblada.

En el teorema anterior, no basta con pedir que para cada

$$K \in C(X)\backslash(\mathbb{A} \cup F_1(X)),\ K \cap L(X) \neq \phi,$$

para que X tenga la propiedad de intersección doblada. Como puede observarse en los continuos Z y W del Ejemplo 2.25.

Por otra parte, si únicamente pedimos la condición de que para cada $K \in C(X)\backslash(F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$, obtenemos que X es localmente conexo. Para probar esto, utilizaremos el Lema 4.14 [33, Ejercicio 5.22, p. 84].

Primero necesitaremos la definición de conexo en pequeño.

Definición 4.13 Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Diremos que X es **conexo en pequeño** en el punto p, si para todo conjunto abierto U existe una vecindad abierta y conexa V contenida en U y que contiene a p.

Note que si X es localmente conexo en un punto p, entonces X es conexo en pequeño en p. Se sabe que si X es conexo en pequeño en todos sus puntos, entonces X es localmente conexo. Ver [33, Ejercicio 5.22].

Lema 4.14 *Sean X un continuo y $F = \{x \in X |\ X$ no es localmente conexo en $x\}$. Si $F \neq \phi$, entonces existe un subcontinuo K no degenerado contenido en F.*

Demostración. Probaremos primero que el conjunto $N = \{x \in X |\ X$ no es conexo en pequeño en $x\} \neq \phi$,si $F \neq \phi$. Supongamos que $N = \phi$. Esto es, $X\backslash N = X = \{x \in X |\ X$ es conexo en pequeño en $x\}$. Por lo tanto, X es localmente conexo, pero esto contradice el hecho de que $F \neq \phi$. Así, $N \neq \phi$. Aplicando el Corolario 5.13 de [33], existe un subcontinuo K no degenerado contenido en N. Como $N \subset F$, entonces $K \subset F$.

Teorema 4.15 Sea X un continuo. Si para cada $K \in C(X)\backslash F_1(X)$, $K \cap L(X) \neq \phi$, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Supongamos que X no es localmente conexo. Entonces debe de existir un punto $p \in X$ tal que X no es localmente conexo en p. Esto es, el conjunto F del Lema 4.14 es no vacío, por lo tanto, existe un subcontinuo K no degenerado de X contenido en F. Es decir, $K \cap L(X) = \phi$ lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto X es localmente conexo.

De esta manera tenemos en el contexto de continuos la siguiente equivalencia:

Corolario 4.16 *Sea X un continuo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si para cada $K \in C(X) \backslash F_1(X)$, $K \cap L(X) \neq \phi$.*

El teorema anterior da lugar también a una nueva caracterización de dendritas.

Corolario 4.17 *Un continuo hereditariamente unicoherente X es una dendrita si y sólo si $K \cap L(X) \neq \phi$ para todo $K \in C(X) \backslash F_1(X)$.*

Demostración. La prueba se sigue de la definición de dendrita y de los Teoremas 4.16 y [23, § 57, III, Corolario 8, p . 442].

Corolario 4.18 *Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si para cada $K \in C(X) \backslash (A \cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$ y X no es de tipo N. Entonces, X tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. La condición: "Para cada $A \in \mathbb{A}$ la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía"es equivalente a que X no es de tipo N. (Teorema 4.3)

El abanico del Ejemplo 2.29 tiene la propiedad de intersección doblada. Por lo tanto, no es de tipo N, pero cada $K \in C(F_\omega) \backslash (\mathbb{A} \cup F_1(X))$ satisface $K \cap L(X) = \phi$. Con esto probamos que el inverso a este corolario no es cierto.

Corolario 4.19 Sea X un dendroide. Si $R(X) \subset L(X)$ y X no es de tipo N, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.

Demostración. Como X no es de tipo N, entonces por el Teorema 4.3 basta probar que para todo $K \in C(X) \backslash (\mathbb{A} \cup F_1(X))$ la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía. Sea $K \in C(X) \backslash (\mathbb{A} \cup F_1(X))$. Entonces, K debe contener un triodo simple. Esto es, $K \cap R(X) \neq \phi$, pero $R(X) \subset L(X)$. Por lo tanto, $K \cap L(X) \neq \phi$. Así por el Lema 4.11, la intersección de sus conjuntos de doblez es no vacía. Por aquí, X tiene la propiedad de intersección doblada.

Note que la condición, para cada $K \in C(X) \backslash (\mathbb{A} \cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$ no necesariamente implica que $R(X) \subset L(X)$.El dendroide del Ejemplo 2.2 muestra este hecho. También se puede ver que en el dendroide del Ejemplo 2.2 y en el abanico del Ejemplo 2.29 no necesariamente $R(X) \subset L(X)$ a pesar de que ambos tienen la propiedad de intersección doblada.

Como corolario obtenemos de manera más sencilla el Teorema 4.8 que ya probamos anteriormente en el cual se utilizó el concepto de $Q-$punto.

Corolario 4.20 Sea X un abanico localmente conexo en el vértice. Si X no es de tipo N, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.

Demostración. Sea v el vértice del abanico. Como $\{v\} = R(X) \subset L(X)$ y X no es de tipo N, entonces por el Corolario 4.20, X tiene la propiedad de intersección doblada.

4.2. Selectibilidad y Continuos de Tipo N

La selectibilidad está estrechamente relacionada con los conceptos de tipo N (generalizado) y la propiedad de intersección doblada..

Por ejemplo podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4.21 S*i un dendroide X es de tipo N generalizado entonces no es selectible y no es suave.*

Demostración. Por el Teorema 4.1, X no tiene la propiedad de intersección doblada, por el Teorema 2.28, X no es selectible y por [39, Teorema 2, p. 1043], X no es suave.

Para la definición de suavidad ver la Definición 2.7.

Se conocen dendroides (con más de un punto de ramificación) que tienen la propiedad de intersección doblada pero que no son selectibles. Véase [27].

A partir de esto, y del hecho de que los abanicos no selectibles encontrados en la literatura son de tipo N, J. J. Charatonik plantea en [8, Pregunta 3,16, p. 368] la siguiente pregunta.

¿Existirá un abanico X no selectible el cual no es de tipo N ?

El Ejemplo 4.4 responde afirmativamente a la pregunta anterior como veremos enseguida.

El lector podrá observar que una vez que se conoce un ejemplo, se puede dar una familia infinita de abanicos con esta propiedad.

Ya probamos anteriormente que el abanico W del Ejemplo 4.4 no es de tipo N, pero es de tipo N generalizado. Por lo tanto no tiene la propiedad de intersección doblada. Así por el Teorema 2.28, W no es selectible.

Como el abanico W es de tipo N-generalizado, es natural plantearse las siguiente pregunta.

¿Existirá un abanico no selectible el cual no es de tipo N-generalizado?

Un ejemplo que responde afirmativamente a esta pregunta es el abanico del Ejemplo 4.6.

Observemos finalmente con estas respuestas que la propiedad de intersección doblada es muy fuerte incluso en abanicos, que son dendroides relativamente"sencillos.

4.3. Propiedad de Intersección doblada Vs. Retracciones, Contracciones y Funciones Promedio

Como se observó en el Teorema 2.28 la selectibilidad en un continuo implica la propiedad de intersección doblada. Ahora queremos determinar en qué casos, la existencia de retracciones de $C(X)$ en X, la existencia de retracciones de 2^X en X, la existencia de funciones promedio en X y la contractibilidad de X implican la propiedad de intersección doblada, problemas que ya han sido planteados en la literatura y que enunciamos en seguida.

Sea X un continuo.

¿Si existen retracciones de $\mathbf{2^X}$ sobre $\boldsymbol{X}$, entonces $\boldsymbol{X}$ tiene la propiedad de intersección doblada ?[3, **Pregunta 5.19, p. 19**].

¿Si existen retracciones de $\boldsymbol{C(X)}$ sobre $\boldsymbol{X}$, entonces $\boldsymbol{X}$ tiene la propiedad de intersección doblada ?[3, **Pregunta 5.19, p. 19**].

¿ Si $\boldsymbol{X}$ admite funciones promedio entonces $\boldsymbol{X}$ tiene la propiedad de intersección doblada ?[3, Pregunta 3.27, p. 12].

¿ Si un dendroide X es contraíble, entonces X tiene la propiedad de intersección doblada?[24, p. 126].

Los siguientes teoremas dan respuesta parcial a estas preguntas,

Teorema 4.22 *Sea X un continuo y supongamos que se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:*
a) Existen retracciones de $C(X)$ en X.
b) Existen retracciones de 2^X sobre X.

c) X acepta funciones promedio.
d) X es contraíble.
Entonces para cada arco $A \in C(X)$, la intersección de todos los conjuntos de doblez de A es no vacía.

Demostración. Cada una de las propiedades a), b), c) o d) implican que X no es de tipo N. Para esto, véase el Teorema 3.8, el Corolario 3.12, el Corolario 3.13 y [35, Corolario 2.2, p. 839], respectivamente. Por el Teorema 4.3 se concluye que para cada arco arco $A \in C(X)$ la intersección de todos los conjuntos de doblez de A es no vacía.

El inciso d) del Corolario anterior aparece demostrado en [35, Corolario 2.2, p. 839]

Corolario 0.1 ***Corolario 4.***Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Supongamos que para cada $K \in C(X)\setminus(\mathbb{A}\cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$. Entonces X tiene la propiedad de intersección doblada si se satisface alguna de las condiciones siguientes:*
a) Existen retracciones de $C(X)$ sobre X.
b) Existen retracciones de 2^X sobre X.
c) X admite funciones promedio.
d) X es contraíble.

Demostración. Demostración. Cada una de las propiedades a), b), c) ó d) implican que X no es de tipo N. Para esto, véase el Teorema 3.8, el Corolario 3.12, el Corolario 3.13 y [35, Corolario 2.2, p. 839], respectivamente. Como por hipótesis $K \in C(X)\setminus(\mathbb{A}\cup F_1(X))$, $K \cap L(X) \neq \phi$, entonces por el Corolario 4.18, X tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Corolario 4.23 *Sea X un dendroide. Supongamos que $R(X) \subset L(X)$. Entonces X tiene la propiedad de intersección doblada si se satisface alguna de las condiciones siguientes:*
a) Existen retracciones de $C(X)$ sobre X.
b) Existen retracciones de 2^X sobre X.
c) X admite funciones promedio.
d) X es contraíble.

Demostración. Cada una de las propiedades a), b), c) ó d) implican que X no es de tipo N. Para esto, véase el Teorema 3.8, el Corolario 3.12, el Corolario 3.13 y [35, Corolario 2.2, p. 839], respectivamente. Como $R(X) \subset$

$L(X)$, entonces por el Corolario 4.18, X tiene la propiedad de intersección doblada.

Como caso particular, en abanicos tenemos lo siguiente.

Corolario 4.24 *Sea X un abanico localmente conexo en el vértice, X tiene la propiedad de intersección doblada si X satisface alguna de las condiciones siguientes:*
a) Existen retracciones de $C(X)$ sobre X.
b) Existen retracciones de 2^X sobre X.
c) X admite funciones promedio.

Demostración. Como $R(X) = \{v\} \subset L(X)$, entonces este resultado se sigue del corolario anterior.

Corolario 4. 25 *Sea X un abanico contraíble. Entonces X tiene la propiedad de intersección doblada.*

Demostración. Se sigue de que todo abanico contraíble es localmente conexo en el vértice [38].

Este último corolario fue probado por T. J. Lee [25], aquí resulta corolario a nuestros resultados.

Por otro lado el Ejemplo 2.29 muestra un abanico que a pesar de tener la propiedad de intersección doblada y ser selectible, no es localmente conexo en el vértice.

Capítulo 5

Funciones

Definición 5.1 Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua.

1. Se dirá que f es una función **abierta**, si para cada conjunto abierto U de X, $f(U)$ es un conjunto abierto en Y.

2. Se dirá que f es un función **ligera,** si las componentes de la imagen inversa de cada punto q de Y tienen un sólo punto.

En 1978 T. Maćkoviak en [27] dió ejemplos que muestran que las funciones abiertas entre dendroides no preservan la no selectibilidad. Los dendroides mostrados por Maćkoviak no son abanicos. Dió también ejemplos de abanicos que muestran que las funciones monótonas (ver Definición 2.9 inciso b) no preservan la sectibilidad.

Por otra parte se sabe que tanto las funciones abiertas como las monótonas son funciones confluentes. Ver [33, Teorema 13.14 y Teorema13.15 p.p. 284, 285]

Debido a que los dendroides presentados por T. Maćkoviak no son necesariamente abanicos y las funciones confluentes (ver definición 2.9 inciso c) entre esos dendroides no son ligeras, J. J. Charatonik, W. J. Charatonik y S. Miklos en [8, Pregunta 14.15] plantean las siguientes preguntas:

¿Es la selectibilidad y la no selectibilidad invariante entre aba nicos, bajo funciones:

$a)$ **abiertas y ligeras?**
$b)$ **abiertas?**
$c)$ **confluentes y ligeras?**

Se obtuvieron las siguientes respuestas:

1) **Las funciones de los incisos** $a)$, $b)$ **y** $c)$ **no preservan la no selectibilidad.**

2) **Las funciones del inciso** $c)$ **no preservan la selectibilidad.**

Construiremos tres abanicos $\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y'}$ y $\boldsymbol{Z}$, y dos funciones $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y'}$ y $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{Y'}\to\boldsymbol{Z}$, tales que $\boldsymbol{X}$ no es selectible, $\boldsymbol{Y'}$ es selectible, $\boldsymbol{Z}$ no es selectible y tanto $\boldsymbol{f}$ como $\boldsymbol{g}$ son confluentes y ligeras. Probando así, que ni la no selectibilidad ni la selectibilidad son preservadas entre abanicos bajo funciones confluentes y ligeras.

Descripción de los abanicos $\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y'}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{Z}\subset\mathbb{R}^3$. Consideremos las dos primeras coordenadas de cada punto de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas polares.
Sea $c_n=(1,\frac{\pi}{2},\frac{1}{2^n})$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\mathbf{Y'}=Y\times\{0\}$$

donde Y es el abanico del Ejemplo 2.29 y

$$\boldsymbol{X}=Y'\cup\bigcup\{\overline{pc_n}|n\in\mathbb{N}\}.$$

Para definir el abanico Z, consideremos primero un homeomorfismo h entre los arcos $\overline{pa_1}$ y $\overline{pa_2}$ del abanico Y', tal que $h(p)=p$ y $h(a_1)=a_2$. Ahora definamos la siguiente relación de equivalencia en Y'. Sean $x,y\in Y'$, $x\sim y$ si y sólo si $y=h(x)$ ó $x=y$. Sea

$$\boldsymbol{Z}=Y'/\sim$$

el espacio cociente de Y' bajo esta relación de equivalencia.

Determinemos ahora las propiedades que satisfacen cada uno de los abanicos antes descritos. X es de tipo N, ya que de la familia de arcos $\{\overline{pc_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y de la familia de arcos $\left\{\overline{b_m a_{1,m}}\cup\overline{a_{1,m}p_{1,m}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ podemos obtener alternadamente una sucesion de tipo N, que converge al arco $\overline{pa_1}$. De aquí X no tiene la propiedad de intersección doblada y por lo tanto, X no es selectible [Teorema 2.28]

Note que Y' no es de tipo N. J. J. Charatonik probó en [2, Ejemplo 3.10. p 367, 368] que Y es selectible.

Por otra parte, Z es de tipo N, ya que de la familia de arcos
$\left\{\overline{b_m a_{1,m}}\right\}\cup\bigcup\{\ \overline{a_{n,m}p_{n,m}}\cup\overline{p_{n,m}a_{n+1,m}},\ n=1,2\}$ podemos obtener una sucesión de tipo N, que converge al arco $\overline{pa_1}$ y entonces al igual que X, Z no es selectible.

Definamos ahora a las funciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$.
Definamos $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \mathbf{Y}'$ bajo la siguiente regla de correspondencia: $f(x, y, z) = (x, y, 0)$, que es la proyección en el plano $\mathbb{R}^2$. Tal función es **continua**. Además f es **ligera**, ya que para cada $y \in Y$, $\#(f^{-1}(y)) \leq \chi_0$ y f es **confluente** porque si $K \in C(X)$ con $K \cap (\bigcup \overline{pa_n} \cup \bigcup \overline{pb_m}) \neq \phi$ entonces $f^{-1}(K)$ tiene una sola componente. Por lo tanto, $f(f^{-1}(K)) = K$ y si $K \subset \overline{pa_1} \backslash \{p\}$ entonces $f^{-1}(K) = \bigcup K_i$ que por definición de f, $.f(K_i) = K$.

La función $\boldsymbol{g} : \mathbf{Y}' \to \boldsymbol{Z}$ es la función de identificación antes descrita bajo la relación de equivalencia en Y'. Esto es, $g(y) = h(y)$ si $y \in pa_1$ y $g(y) = y$ si $y \notin \overline{pa_1}$. Las funciones de identificación son continuas. Por lo tanto g es **continua**. Además $\#(g^{-1}(y)) \leq 2$ para toda $z \in Z$. De esta manera, g es una función **ligera.** Más aún si $H \in C(Z)$ con $H \subset \overline{pa_2} \backslash \{p\}$, entonces $g^{-1}(H) = H \cup H'$, donde $H' = h^{-1}(H)$. Por lo tanto $g(H) = H$ y $g(h^{-1}(H)) = h(h^{-1}(H)) = H$. Por otra parte si $p \in H$, entonces $g^{-1}(H)$ tiene una sola componente y como tal se tiene $g(g^{-1}(H)) = H$. Así g es **confluente**. Con esto queda demostrado que las funciones confluentes y ligeras no preservan la selectibilidad ni la no selectibilidad.

.

Ahora probaremos que la no selectibilidad no es preservada bajo funciones abiertas y ligeras. Para esto, construiremos un abanico no selectible $\boldsymbol{W}$, una función $\boldsymbol{G : W \to Y'}$ **abierta y ligera.** Por un lado sabemos que Y' es selectible.
Descripción de $\boldsymbol{W}$:
Por comodidad, en esta parte, expresaremos cada punto $\overline{x} \in Y'$ en coordenadas cartesianas $(x, y, 0)$.
Sean

$$C_1 = \{(x, y, 0)|\ x \geq 0\},$$
$$C_2 = \{(x, y, 0)|\ x < 0\}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$Y'_n = \left\{(x, y, \frac{1}{n}y)|\ (x, y, 0) \in Y' \cap C_1\right\},$$

$$Y''_n = \left\{(x, y, -\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}y)|\ (x, y, 0) \in Y' \cap C_2\right\}\ y$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}'_n \cup \mathbf{Y}''_n.$$

Definimos

$$\boldsymbol{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \boldsymbol{Y}_n \cup \mathbf{Y}' .$$

De la familia de arcos $\{\overline{b_m a_{1,m}} \cup \overline{a_{1,m} p_{1,m}}|\ m \in \mathbb{N}\}$ junto con la familia de arcos $\{(0, y, \frac{1}{n}y)|\ (0, y, 0) \in \overline{pa_1},\ n \in \mathbb{N}\}$ podemos extraer una sucesión de tipo N, que converge al arco $\overline{pa_1}$. Así W no es selectible.
La función $\boldsymbol{G : W \to Y'}$ está definida como sigue. $G(x, y, z) = (x, y, 0)$, que como proyección es una función continua. Si U es un conjunto abierto en W, entonces para cada n fijo, si $U'_n = U \cap Y_n$, entonces
$U'_n = \{(x, y, \frac{1}{n}y)|\ (x, y, 0) \in U_n \cap C_1\} \cup \{(x, y, -\frac{1}{n}x + \frac{1}{n}y)|\ (x, y, 0) \in U_n \cap C_2\}$, donde U_n es un abierto de Y'. Por tanto, $G(U) = G(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U'_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ que es un conjunto abierto en Y'. Con esto queda demostrado que las funciones abiertas (ligeras) no preservan la no selectibilidad entre abanicos.
Agradezco la colaboración del Dr. Alejandro Illanes M. del Instituto de Matématicas de la UNAM en la obtención de este último ejemplo.

De esta manera sigue abierto el problema de determinar si las funciones abiertas ó abiertas y ligeras preservan selectibilidad entre abanicos.

Lista de símbolos

Bibliografía

[1] -M. Bell and S. Watson, *Not all Dendroids Have a Mean*, Houston J. Math. **22** (1996), 39–50.

[2] -J. J. Charatonik, *Conditions Related to Selectibility,* Mathematica Balkanica. V. 5. **Fasc. 4** (1991) 359–372.

[3] -J. J. Charatonik, *Selected Problem in ContinuumTheory*, Preprint

[4] -J. J. Charatonik, *Contractibility and Continuous Selections*, Fundamenta Mathematicae. **CVIII** (1980), 109–118.

[5] -J. J. Charatonik, *On Acyclic Curves a Survey of Results and Problems*, Boletín de la Sociedad Matematica Mexicana (3) Vol. **1** (1995), 1-39.

[6] -J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski and J. R. Prajs, *Hyperspace Retractions for curves*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **370** (1997), 1–34.

[7] -J. J. Charatonik, T. J. Lee and K. Omiljanowski, *Interrelations Between Some Noncontractibility Conditions*. Rendicoti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II Tomo **XLI** (1992), 31–54.

[8] -J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S.Miklos, *Confluent Mapping of Fans,* Dissertattiones Math. **301** (1990), 1-86.

[9] -J. J. Charatonik and Z. Grabowski, *Homotopically Fixed Arcs and the Contractibility of Dendroids*, Fundamenta Mathematicae. **C** (1978), 229-237.

[10] -J. J. Charatonik and A. Eberhart, *On Contractible Dendroids*, Colloquium Mathematicum. Vol. **XXV**. Fas 1 (1972), 89–98.

[11] -J. J. Charatonik and A. Eberhart, *On Smooth Dendroids,*

[12] -J. J. Charatonik and W. J. Charatonik, *Dendrites.* Aportaciones Matemáticas XXX Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana **22** (1998) 227–253.

[13] -J. J. Charatonik and A. Illanes, *Mapping Preserving Noncontractibility, Preprint.*

[14] -T. Czuba, *R-continua and Contractibility of Dendroids.* Bulletin de L 'academie Polonaise des Science. Ser. des sei. Math. Vol.**XXCVII**, N_o 3-4 (1979),, 299–308.

[15] -T. Czuba, *A New Class of non Contractible Continua.* General Topology and its relations to modern Analysis and Algebra VI Proc. Six Prague topological Symposium 1986 (1988) 121–123.

[16] -J. T. Goodykoontz, Jr., *Some Retractions and Deformation Retractions on* 2^X *and* $C(X)$, Topology Appl. **21** (1985), 121–133.

[17] -B. G. Graham, *On Contractible Fans.*, Fundamenta Mathematicae **CXI** (1981), 77–93.

[18] -Weakly Monotone Images of Smooth dendroids are smooth, Houston Journal Math.14 (1988), 191-200.

[19] -A. Illanes, *A Continuum* X *Which is a Retract of* $C(X)$ *but not of* 2^X, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 199–200.

[20] -A. Illanes, *Two Examples Concerning Hyperspace Retraction*, Topology Appl. **29** (1988), 67–72.

[21] - A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces*, M. Dekker, New York and Basel, 1999.

[22] - K. Kawamura and E. D. Tymchatyn, *Continua Which Admit no Mean*, Colloq. Math**.** **71** (1996), 97–105.

[23] -K. Kuratowski, *Topology,* Vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.

[24] -T. J. Lee, *Bend Intersection Property and Dendroids of Type N*, Period. Math. Hungar. **23** (1991), 121–127.

[25] -T. J. Lee, *Every Contractible Fan Has Bend Intersection Property*, Bull, Polish. Acad. Sci. Math. **36** (1988), 413-417.

[26] -S. Macías A., *La Estructura de los Dendroides Suaves,* Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 10, Sociedad Matemática Mexicana, 1993

[27] -T. Maćkowiak, *Continuous Selections for $C(X)$*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), 547–551.

[28] -T. Maćkowiak, Dissertationes Mathematicae CLVIII, *Continuous Mapping on Continua.*

[29] -T. Maćkowiak, *Contractible and Nonselectible Dendroids*. Bull, Polish. Acad. Sci. Math. **33** N_o 5-6 (1988), 321-324.

[30] -S. B. Nadler, Jr., *Inverse Limits and Multicoherence*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 411–414.

[31] -S. B. Nadler, Jr., A *Characterization of Locally Connected Continua by Hyperspace Retraction*. Proc. Amer. Math. Soc, **67** (1977), 167–176.

[32] -S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets* , M. Dekker, New York and Basel, 1978.

[33] -S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory,* M. Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[34] -S. B. Nadler, Jr and L. E. Ward, Jr, *Concerning Continuous Selections*, Proc, Amer. Math Soc **25** (1970),369-374.

[35] -L. G. Oversteegen, *Non-contractibility of Continua*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **26** (1978), 837–840.

[36] -L. G. Oversteegen, *Fans and Embedding in the Plane*. Pacific Journal of Mathematics, Vol. **83** N_o 2 (1979), 495–503.

[37] -L. G. Oversteegen, *Internal Characterizations of Contractibility for Fans*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.. **5** (1979), 391-395.

[38] -L. G. Oversteegen, *Every Contractible fan is Locally connected at Its Vertex. Transactions of the American* Mathematical Society. Vol. **260.** N_o 2 (1980), 379–402.

[39] -L. E. Ward, Jr., *Rigid selections and smooth dendroids*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. **19** (1971), 1041–1044.

[40] -M. Wojdyslawski, *Rètractes absolus et hyperespaces des continus,* Fund. Math. **32** (1939), 184–192.