



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELADO DE UN FLUJO PULSADO,  
EN UN TUBO DE PAREDES ELÁSTICAS  
CON UN FLUIDO NO-NEWTONIANO.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO**

**P R E S E N T A:**

**JORGE ARMANDO OJEDA SANCHEZ.**



**DIRECTOR: DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE.**

**COASESOR: M.I. CARLOS ESCOBAR DEL POZO.**

**MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE DE 2005**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**“Son dos y solo dos las obligaciones de un hombre en esta vida, ser justo y ser feliz.”**

**Jorge Luís Borges.**

**Mis más sinceros agradecimientos:**

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por sus comentarios, sus consejos, su tiempo y sobre todo por su confianza.

Al M.I. Carlos Escobar del Pozo por su tiempo, sus consejos y su valiosa amistad.

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería UNAM, por brindarme los recursos necesarios para la realización de este trabajo.

A mi madre por su paciencia y cariño.

## Índice.

1	Introducción	4
	1.1 Generalidades.....	4
	1.2 Antecedentes.....	4
2	Análisis del Problema	8
	2.1 Modelo Físico.....	8
	2.2 Modelo Matemático.....	9
	2.2.1 Ecuaciones de Flujo No-Newtoniano.....	9
	2.2.2 Condiciones de Frontera.....	10
	2.3 Análisis de Orden de Magnitud.....	11
	2.4 Ecuaciones Adimensionales.....	12
	2.5 Deducción del Modelo Matemático.....	13
	2.6 Solución Cuasi-Estacionaria .....	15
3	Resultados	16
	3.1 Validación.....	16
	3.2 Presión .....	17
	3.3 Velocidad .....	24
	3.4 Esfuerzo Cortante.....	33
	3.5 Distribución del Radio Adimensional $\alpha$ .....	34
4	Conclusiones	45

## Nomenclatura

$a$	Radio adimensional del tubo flexible.
$E(t)$	Deformación.
$K$	Índice de consistencia. $\left[ \frac{kg\ s^{n-2}}{m} \right]$
$n$	Índice de potencia.
$P_a$	Presión arterial.
$P_v$	Presión venosa.
$Q$	Gasto volumétrico $[m^3]$
$Re$	Número de Reynolds. $Re = \frac{\rho U_c^{2-n} R_0}{K}$
$Wo$	Número de Womersley. $Wo = \left[ \frac{\rho U_c^{1-n} R_0^{n+1} \omega}{K} \right]^{1/2}$

## Símbolos Griegos.

$\alpha$	Coefficiente de elasticidad.
$\beta$	Parámetro de amplitud.
$\gamma$	Parámetro característico. $\gamma = \frac{Wo^2 \Pi}{Re \varepsilon}$
$\varepsilon$	Relación de esbeltez. $\varepsilon = \frac{R_0}{L}$
$\Psi$	Presión adimensional.
$\Phi$	Gasto volumétrico adimensional.
$\Pi$	Relación de presiones. $\Pi = \frac{2^{2/n} \Delta P^{1/n}}{\alpha^{1/n}} \frac{3n+1}{n}$
$\omega$	Frecuencia de pulsado $\left[ \frac{1}{seg} \right]$

## Resumen

En este trabajo se presenta un estudio numérico de un flujo pulsado en un tubo capilar de pared elástica, tomando en consideración que el fluido es no-newtoniano, caracterizado por la ley de potencia, con objeto de determinar la presión, perfiles de velocidad, esfuerzo cortante en la pared y la relación de deformación de la pared elástica.

Partiendo de las ecuaciones de gobierno del fenómeno, se realiza un análisis de orden de magnitud, definiendo con esto los siguientes parámetros adimensionales: el número de Reynolds,  $Re$ , el número de Womersley,  $Wo$ ; así como las escalas características del problema.

Posteriormente se presenta la deducción del modelo matemático, que describe el movimiento del fluido. Partiendo de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento se obtiene una ecuación en derivadas parciales para determinar la presión. Se llega a un modelo no lineal, que describe el comportamiento de la presión en función del índice de potencia  $n$  y del parámetro adimensional  $\gamma$ . Una vez obtenida la presión, se pueden conocer los perfiles de presión, campos de velocidad y esfuerzo cortante.

El modelo obtenido se resuelve mediante el método numérico de diferencias finitas (Apéndice A), para validar los resultados de presión se desarrolla una solución aproximada, considerando que los efectos temporales son despreciables. Los resultados obtenidos predicen la presión a diferentes tiempos y longitudes para diferentes índices de potencia, de estos resultados se puede obtener el campo de velocidad, el esfuerzo cortante en la pared y el comportamiento del radio adimensional de la pared elástica.

# 1 Introducción

## 1.1 Generalidades

En el presente trabajo se estudia el desplazamiento de la sangre en un vaso sanguíneo capilar, situación que puede denotarse como microcirculación. El flujo sanguíneo se caracteriza por medio de la ley de potencia, empleando índices de potencia menores a la unidad, ya que se le considera un fluido pseudoplástico [3]. Los capilares tienen un radio muy pequeño y la velocidad relativa en el capilar es menor que en el resto del sistema circulatorio, por lo tanto se tiene un número de Reynolds asociado al fenómeno muy pequeño.

La motivación de la presente tesis es el flujo en vasos sanguíneos con paredes elásticas, en especial los microvasos (metarteriolas, capilares y vénulas pequeñas). El objetivo es obtener un modelo matemático confiable, que pueda determinar la presión dentro del capilar, los perfiles de velocidad y el esfuerzo cortante en la pared. Puesto que el problema es muy complejo, este trabajo es una primera aproximación, ya que en el problema físico se presentan números de Womersley  $Wo \ll 1$  y de Reynolds  $Re \ll 1$ . La sangre se caracteriza por la ley de potencia ([1],[2]).

Para obtener una solución analítica se desarrolla una aproximación considerando que los términos temporales son despreciables, con el fin de comprobar los resultados obtenidos con la solución numérica. El modelo matemático se resolvió por un método numérico de diferencias finitas, obteniendo resultados de presión, campos de velocidad, esfuerzo cortante y la distribución del radio en la pared, a diferentes índices de potencia, tiempos y distancias longitudinales.

## 1.2 Antecedentes

La circulación sanguínea se puede dividir en: circulación periférica y circulación pulmonar. En general el sistema circulatorio periférico consta de arterias, arteriolas, metarteriolas, que se encargan de llevar la sangre limpia a los diferentes tejidos del cuerpo; en los capilares sanguíneos se lleva a cabo el intercambio de oxígeno, nutrientes, dióxido de carbono y desechos entre la sangre y las células. Vénulas pequeñas, vénulas y venas cumplen con la función de recolectar la sangre de los tejidos y llevarla al corazón. Fig. 1

En el sistema circulatorio las arterias se encargan de transportar sangre bajo una presión elevada a los tejidos, por lo que las paredes de las arterias son fuertes y permiten que la sangre fluya con rapidez. Las arteriolas son las últimas ramas del sistema arterial, entre la arteriola y el capilar existen tramos llamados metarteriolas o arteriolas terminales, las arteriolas tienen una pared muscular fuerte capaz de cerrar por completo el paso de sangre o permitir la dilatación de la sección transversal, con esto se obtiene la capacidad de alterar el flujo sanguíneo que llega a los capilares según las necesidades de oxígeno de los tejidos.

Los capilares tienen la función de intercambiar oxígeno, dióxido de carbono, líquidos, nutrientes, electrolitos, hormonas y otras sustancias entre la sangre y los tejidos. Para llevar a cabo esta función las paredes de los capilares son muy delgadas y permeables a las moléculas pequeñas. El sistema venoso, se compone de vénulas que se encargan de recoger la sangre de los capilares; gradualmente estas se unen para formar venas cada vez mayores. Las venas actúan como conductores para el transporte de la sangre desde los tejidos hasta el corazón, debido a que la presión en el sistema venoso es baja, las paredes de las venas son delgadas; sin embargo son musculares, lo que permite contraerse o expandirse para actuar como un reservorio controlable de sangre extra, en pequeña o en gran cantidad, dependiendo de las necesidades del organismo. Los principios básicos del sistema circulatorio son: el control de flujo sanguíneo, gasto cardíaco y presión arterial [4].

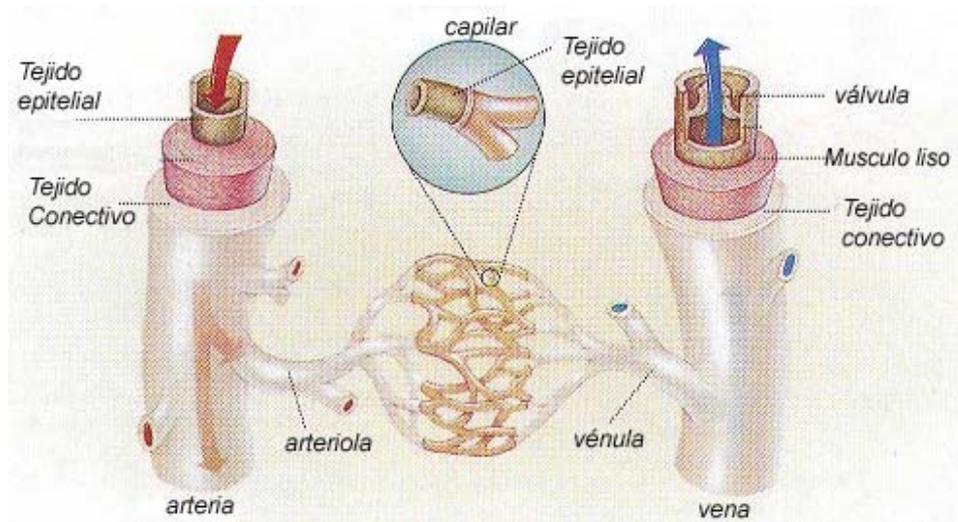


Figura 1: Estructura de arterias y venas

Los glóbulos rojos, glóbulos blancos y plaquetas están inmersos en el plasma. Éste se encarga de llevar nutrientes y proteínas; además sirve como lubricante para las células sanguíneas en los vasos más pequeños.

El flujo sanguíneo está controlado por los microvasos de cada tejido, éstos controlan las necesidades tisulares, como la disponibilidad de oxígeno y otros nutrientes. Los microvasos controlan de forma precisa el flujo sanguíneo local al nivel requerido de la actividad tisular.

Los principales factores que contribuyen al comportamiento del flujo de sangre son los siguientes: variación del área transversal de los vasos sanguíneos, variación del módulo de elasticidad de la pared con la presión y variación de la elasticidad de la aorta en la entrada de la bifurcación en la arteria femoral [5].

Debido a la importancia del comportamiento del flujo sanguíneo y su relación inmediata con enfermedades cardiovasculares, se han desarrollado muchos trabajos con respecto a la microcirculación. Algunos estudios analizan el comportamiento de la sangre bajo diferentes consideraciones físicas y teóricas.

Las propiedades de la sangre dependen de condiciones nutrimentales, de enfermedades y de condiciones hemodinámicas en los tubos elásticos, como la fuerza pulsante del corazón, la forma y el comportamiento mecánico y fisiológico de las paredes vasculares. El flujo de sangre tiene un comportamiento no permanente, la naturaleza cíclica crea condiciones pulsátiles en todas las arterias. El corazón expulsa y llena de sangre al sistema circulatorio en ciclos alternados, bombea sangre durante la presión sistólica, durante la presión diástolica la sangre no es bombeada, [6].

La sangre es una mezcla compleja de células, proteínas, lipoproteínas e iones, en la que nutrientes y desperdicios son transportados en un líquido llamado plasma. Los glóbulos rojos son pequeñas partículas que incrementan la viscosidad y afectan el comportamiento del fluido [6].

El plasma está constituido por un 90 % de agua y se considera como un fluido newtoniano. Pontrelli [7] asume que la sangre es un fluido no-newtoniano debido a la estructura deformable de los glóbulos rojos y a la naturaleza viscoelástica de la membrana.

Aproximadamente el 40% en volumen de la sangre son glóbulos rojos, por lo que en venas y arterias el flujo sanguíneo es considerado como fluido newtoniano debido a la escala de los glóbulos rojos. Los capilares tienen un diámetro de  $10 \mu m$ , dadas sus dimensiones y los efectos con la membrana interior el flujo es considerado como bifásico teniendo como consecuencia un comportamiento no newtoniano, por lo tanto presenta una viscosidad aparente, Ku [6].

Secomb [8], modela el comportamiento de los glóbulos rojos en un capilar, a diferentes tiempos y velocidades. La deformación del glóbulo rojo se debe a sus características elásticas. Reportan resultados de la deformación de los glóbulos rojos y espesor de la capa interior (glicocalyx) del capilar para diferentes tiempos y velocidades.

Schultz [5], reporta en arterias largas, mediciones de los perfiles de velocidad y presión en varios puntos del sistema de aortas de diferentes organismos vivos, incluyendo el ser humano. En sus mediciones los perfiles de velocidad en la aorta de un perro, son parabólicos y oscilan en la dirección radial, compara estas mediciones con las realizadas en seres humanos, en cuanto al comportamiento y desarrollo de los perfiles de presión y velocidad. En su desarrollo numérico emplea la teoría de la lubricación y un flujo sanguíneo axialsimétrico. En dicho desarrollo contempla los siguientes factores, el geométrico, la variación de la elasticidad y cambios en las ondas de velocidad. Estos factores los modifica para diferentes valores y condiciones de flujo sanguíneo. Los resultados obtenidos de estos tres factores los compara con datos experimentales con sustancias como la glicerina y mediciones realizadas en organismos vivos, reportando gráficas de presión y velocidad. Los perfiles de estos resultados son acoplados por la naturaleza elástica de las paredes de las aortas, considerando cambios en el área transversal, que varía a lo largo de la distancia de un área mayor a un área menor. Presenta datos experimentales a condiciones de flujo laminar, turbulento y los compara con datos experimentales.

En el trabajo de Ku [6], el flujo arterial normal es laminar con flujos secundarios en curvas y bifurcaciones. Las arterias son órganos vivos que pueden adaptarse al cambio de las condiciones hemodinámicas, como son el cambio en el flujo y la presión de la sangre. Un comportamiento anormal genera una respuesta biológica que puede producir enfermedades cardiovasculares. En este trabajo la elasticidad de la pared de la vena, viscosidad aparente, fuerzas de cuerpo y temperatura son consideradas como secundarias. Para condiciones de flujo pulsado utiliza el número adimensional de Womersley, siendo que para un número de Womersley muy pequeño reporta perfiles de velocidad parabólicos. Los resultados reportados son la velocidad y la presión con el fin de determinar el comportamiento del flujo sanguíneo a diferentes condiciones para conocer las posibles causas de los desórdenes cardiovasculares en diferentes vasos sanguíneos.

Middleman [9], presenta un desarrollo teórico para la red de capilares que transporta sangre a través del músculo esquelético y órganos. Considera que el flujo es laminar y newtoniano, las paredes de los capilares son elásticas. El problema lo analiza como cuasi-estacionario, por lo que obtiene un número de Womersley muy pequeño,  $Wo \ll 1$ ; este parámetro relaciona las fuerzas inerciales debidas al flujo pulsado, (frecuencia cardíaca) y las fuerzas viscosas. Middleman propone una relación lineal entre la presión,  $P(t)$ , y la deformación,  $E(t)$ , de la pared del capilar:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{\alpha} P(t)$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de elasticidad del capilar que es una propiedad del material y  $E(t)$  es la deformación unitaria del capilar,  $R$  es el radio del capilar que varía en el tiempo y  $R_0$  es el radio de referencia del capilar.

Middleman obtiene una expresión de la presión que depende del tiempo y el espacio, generando así un modelo no lineal. Reporta que la variación del gasto volumétrico cae a un nuevo estado de equilibrio, definido por la relación del coeficiente de elasticidad, radio del capilar y la presión, por lo que el fluido ocupa el volumen del desplazamiento del tubo. La viscosidad retrasa este movimiento, entre más viscoso sea el fluido más tardará en llegar a un estado de equilibrio.

Pontrelli [7] reporta que el corazón genera un flujo pulsado, las fluctuaciones son progresivamente

atenuadas debido a la elasticidad de las arterias. Asume un comportamiento newtoniano para el flujo en venas principales. Los modelos matemáticos consideran la relación entre esfuerzo de relajación de la pared y el esfuerzo provocado por el flujo de sangre, obteniendo como resultado la velocidad, el gasto y el cortante con una señal de presión pulsátil.

Misra y Ghosh [10] consideran la sangre como una mezcla compleja de células, que en su mayoría son eritrocitos suspendidos en un plasma que es una solución proteínica y que tiene un comportamiento newtoniano, presentan un modelo matemático para un flujo pulsado con tres fases. La primera fase es newtoniana, el centro del flujo es no newtoniano y como sólido en la tercera parte. Se considera un flujo axialsimétrico con una bifurcación con un cierto ángulo; no consideran los efectos de la pared elástica, se estudian el caso permanente y el no permanente el que modelan con una presión pulsada, presentan distribuciones del perfil de velocidad, resultados del flujo volumétrico para diferentes condiciones de flujo, así como la concentración de hematocritos para diferentes índices de viscosidad.

La teoría del modelo de Casson es aplicable para venas pequeñas, este modelo se aplica a la parte no newtoniana del fluido. Los resultados obtenidos por Misra y Gosh [10], son las estimaciones cuantitativas debidas a la variación de la viscosidad y el esfuerzo de cedencia, perfiles de velocidad, para un estado permanente, el gasto volumétrico y la variación de la interfase de la parte central con el tiempo y la fracción de hematocritos existentes para diferentes posiciones angulares de la bifurcación. Amar y Kerroum [1], estudian el flujo de sangre en tubos deformables. Consideran que la periferia es una suspensión libre de glóbulos rojos, un fluido newtoniano, y el centro es una suspensión de glóbulos rojos libres de plasma, el comportamiento de la parte central es descrita por la ley de potencia, como un fluido no newtoniano, con índices de potencia menores a la unidad. Se tratan números de Reynolds y de Womersley muy pequeños para las condiciones de flujo bifásico. Los perfiles de velocidad encontrados en la interfase tienen el mismo comportamiento que el fluido central. Los resultados finales que reportan en este trabajo, es un modelo matemático para diferentes condiciones de flujo, tanto de los índices de potencia como de los parámetros adimensionales, resultados del esfuerzo cortante para la situación de un tubo deformable.

El objetivo del presente trabajo es determinar un modelo matemático que determine los perfiles de presión dentro del vaso capilar de paredes elásticas, a partir de estos determinar el campo de velocidades, el esfuerzo cortante y la distribución del radio adimensional.

## 2 Análisis del Problema

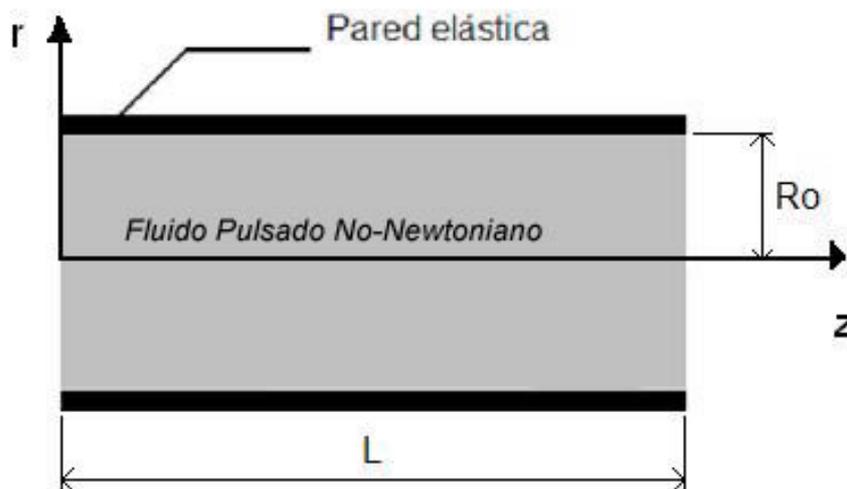
### 2.1 Modelo Físico

En el problema físico se tiene flujo de sangre pulsado en un capilar de pared elástica, el comportamiento del flujo sanguíneo se trata como un fluido no-newtoniano en vasos capilares pequeños. La señal de presión a la entrada del capilar tiene una amplitud pequeña, del orden de  $10^3 Pa$ , en los capilares el flujo pulsado es atenuado por el efecto de las paredes elásticas de las arterias, a la salida se tiene solamente la presión arterial. La viscosidad de la sangre es aproximadamente del orden de magnitud de  $10^{-3} Pa \cdot seg$ , y la frecuencia del pulsado es del orden de  $10^{-1} \frac{1}{seg}$ , por lo que se pueden obtener números de Reynolds y de Womersley menores a la unidad.

Los siguientes datos son característicos en microcirculación, [9], [4].

Longitud.	$L = 500 \mu m$
Diámetro promedio.	$D_0 = 5 \mu m$
Presión Arterial.	$P_a = 4669.56 Pa$
Presión Venosa.	$P_v = 1334.16 Pa$
Incremento de presión.	$\Delta P = 3335.4 Pa$
Coefficiente de elasticidad.	$\alpha = 7 \times 10^4 Pa$
Amplitud.	$A_p = 667.08 Pa$

El modelo físico simplificado se muestra en la figura 2.



En el presente trabajo se utiliza la ley de potencia también conocido como el modelo de Ostwald de Waele. La ley de potencia es uno de los modelos para un fluido no-newtoniano más sencillos para representar el flujo sanguíneo, la sangre como un fluido complejo tiene características pseudoplásticas [3], [11]; estos fluidos se modelan con índices de potencia menores a la unidad  $0 < n < 1$ , y para un índice de potencia igual a la unidad se tiene un fluido newtoniano y en este caso el factor de consistencia  $K$  es la viscosidad.

La ley de potencia es la siguiente:

$$\tau_{ij} = -K \varepsilon_{ij}^n \quad (1)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformación; que se define como

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

La ley de potencia en coordenadas cilíndricas (sólo para direcciones r y z), es la siguiente:

$$\tau_{rz} = -K \left[ \frac{d\bar{u}_r}{dz} + \frac{d\bar{u}_z}{dr} \right]^n, \quad (2)$$

donde  $n$  es el índice de potencia,  $\bar{u}_r$  y  $\bar{u}_z$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $r$  y  $z$ , respectivamente y  $K$  es el factor de consistencia que tiene las siguientes unidades  $MT^{n-2}L^{-1}$ .

## 2.2 Modelo Matemático

### 2.2.1 Ecuaciones de Flujo No – Newtoniano

El flujo sanguíneo se considera axialsimétrico, totalmente desarrollado, homogéneo, continuo y de una sola fase. La geometría se considera como un tubo de longitud  $L$ , de diámetro  $2R_0$ . La densidad de la sangre se considera como constante.

Las condiciones de frontera son la señal pulsada de la presión arterial a la entrada del tubo con una amplitud pequeña, a la salida del tubo se tiene la presión venosa y se considera la relación lineal de deformación de la pared propuesta por Middleman [9].

Las ecuaciones que caracterizan al movimiento del fluido son las siguientes:

**Ecuación de Continuidad.** La ecuación de continuidad para un flujo bidimensional, en coordenadas cilíndricas se puede escribir como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

**Ecuación de Cantidad de Movimiento.** Las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas, en las direcciones r y z, en su forma general son las siguientes.

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rr})}{\partial r} \right) - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \quad (4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} \right) - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (5)$$

donde  $\tau_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{zz}$  son los esfuerzos cortantes y se pueden definir mediante la ec.(1).

Sustituyendo la ec.(1) en las ecs. (4) y (5), se obtienen las ecuaciones de cantidad de movimiento para un fluido caracterizadas por la ley de potencia. Estas ecuaciones, en las direcciones  $r$  y  $z$  son las siguientes:

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right] \\ &= - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2^n K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} \right)^n \right] + K \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right] \\ &= - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} \right)^n \right] + 2^n K \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (7)$$

## 2.2.2 Condiciones de Frontera

Para la resolución de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, se tienen las siguientes condiciones de frontera. El problema se considera axialsimétrico; por lo tanto la condición  $r = 0$ , es la condición de simetría,  $\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} = 0$  y cuando  $r = 1$ ,  $\bar{u}_z = 0$  que es la condición de no deslizamiento. A la entrada del tubo en  $z = 0$ , las condiciones son la presión arterial, en  $z = L$ , al final del tubo, se tiene la presión venosa. Para un tiempo  $t = 0$ , la condición de frontera es la presión arterial. Lo anterior se puede escribir como:

en  $z = 0$  :

$$P = P_a + A_p \text{sen}(\omega t), \quad (8)$$

donde  $P_a$  es la presión arterial,  $A_p$  es la amplitud de la señal de presión,  $\omega$  es la frecuencia de pulsado.

en  $z = L$  :

$$P = P_v, \quad (9)$$

En  $t = 0$  :

$$P = P_a, \quad (10)$$

en  $r = 0$  :

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial r} = 0, \quad (11)$$

en  $r = 1$  :

$$\bar{u}_z = 0. \quad (12)$$

La relación que describe el carácter elástico de la pared es la siguiente:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{\alpha} P(t), \quad (13)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de elasticidad del capilar, que es una propiedad del material.

### 2.2.3 Análisis de Orden de Magnitud

Para obtener las relaciones principales entre las variables de interés con variables conocidas, así como escalas utilizadas para el análisis del problema, se realiza un análisis de órdenes de magnitud.

Las escalas utilizadas son las siguientes:

$$r \sim R_0, \quad z \sim L, \quad \bar{u}_z \sim U_c, \quad \bar{u}_r \sim V$$

$$P \sim P_a - P_v \equiv \Delta P, \quad t \sim \frac{1}{\omega}$$

Donde  $R_0$  es el radio del capilar y  $L$  es la longitud del tubo elástico,  $V$  es la velocidad característica en la dirección radial y  $\omega$  es la frecuencia de pulsado.

A partir de la ecuación de conservación de masa y empleando las relaciones anteriores se tiene que la velocidad radial es del siguiente orden de magnitud:

$$V \sim U_c \frac{R_0}{L}$$

donde  $U_c$  es la velocidad característica en la dirección axial,  $R_0$  es el radio del capilar y  $L$  es la longitud.

Realizando el mismo análisis a las ecs. de cantidad de movimiento, (6) y (7), en la dirección  $r$ , se llega a lo siguiente:

$$Wo^2 \varepsilon^2, \quad Re \varepsilon^3 \sim 1, \quad 2^n \varepsilon^{n+1}, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^{2n+2}$$

Términos Inerciales                      Términos de Presión,                      Términos Viscosos.

y para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $z$  se obtiene lo siguiente:

$$Wo^2, \quad Re \varepsilon \sim 1, \quad 1, \quad \varepsilon^{2n}, \quad 2^n \varepsilon^{n+1}$$

Términos Inerciales                      Términos de Presión,                      Términos Viscosos.

donde  $Wo$  es el número de Womersley, definido como  $Wo = \left[ \frac{\rho U_c^{1-n} R_0^{n+1} \omega}{K} \right]^{1/2}$ .  $Re$  es el número de

Reynolds definido de la siguiente manera:  $Re = \frac{\rho U_c^{2-n} R_0^n}{K}$ ; estos son números adimensionales para un

fluido caracterizado por la ley de potencia y  $\varepsilon$  es una relación de esbeltez definida como:  $\varepsilon = \frac{R_0}{L}$ .

La velocidad característica se define a partir de la ecuación de cantidad de movimiento en  $z$ , ec. (7), debido a que los términos viscosos (cambios de la componente de la velocidad en  $z$  en la dirección  $r$ ) son del mismo orden de magnitud que la fuerza de presión. Los efectos de la componente de velocidad, son menores que los cambios en la dirección radial. Entonces  $U_c$  es del orden de magnitud siguiente:

$$U_c \sim \left[ \frac{\Delta P R^{n+1}}{KL} \right]^{1/n} \quad (14)$$

## 2.4 Ecuaciones Adimensionales

Para que las ecuaciones sean adimensionales se utilizan los resultados del análisis de orden de magnitud. Los cambios de variables que se obtienen del orden de magnitud, son los siguientes:

$$\eta = \frac{r}{R_0 a}, \quad \zeta = \frac{z}{L}, \quad u_z = \frac{\bar{u}_z}{U_c}, \quad u_r = \frac{\bar{u}_r}{U_c} \frac{L}{R_0}$$

$$\psi = \frac{P - P_v}{P_a - P_v}, \quad \tau = \omega t, \quad a = \frac{r(t)}{R_0}.$$

Donde  $a$  es una relación de deformación del radio del capilar.

La ecuación de continuidad de forma adimensional queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u_r}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = 0 \quad (15)$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento para la dirección  $r$  y  $z$  son:

$$\begin{aligned} a W_0^2 \varepsilon^2 \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + \text{Re} \varepsilon^3 \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial \eta} + a u_z \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right] = \\ - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{2^n \varepsilon^{n+1}}{a^n} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( \frac{\partial u_r}{\partial \eta} \right)^n \right] - a \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + a \varepsilon^2 \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} W_0^2 \frac{\partial u_z}{\partial \tau} + \text{Re} \varepsilon \left[ \frac{u_r}{a} \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right] = \\ - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial \eta} + a \varepsilon^2 \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \right)^n \right] - 2^n \varepsilon^{n+1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \right)^n \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

y las correspondientes condiciones en la frontera de forma adimensional:

en  $\zeta = 0$  :

$$\psi = 1 + \beta \text{sen}(\tau), \quad (18)$$

donde  $\beta = \frac{A_p}{\Delta P}$

en  $\zeta = 1$  :

$$\psi = 0, \quad (19)$$

en  $\tau = 0$  :

$$\psi = 0, \quad (20)$$

en  $\eta = 0$  :

$$\frac{\partial u_z}{\partial \eta} = 0, \quad (21)$$

en  $\eta = 1$  :

$$u_z = 0. \quad (22)$$

## 2.5 Deducción del Modelo Matemático.

Tomando en consideración que en el problema real ,  $Wo \ll 1$ ,  $Re \ll 1$  y  $\varepsilon \ll 1$  , entonces las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento quedan de la siguiente manera:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial u_r}{\partial \eta} + \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} = 0 \quad (23)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \quad (24)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right)^n \right] \frac{1}{a^{n+1}} = 0 \quad (25)$$

Para determinar la velocidad se integra la ec.(25), utilizando las condiciones de frontera ecs.(21) y (22). Obteniendo entonces el perfil de velocidades siguiente:

$$u_z = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)^{1/n} \frac{a^{1+n}}{2^{1/n}} \frac{n}{n+1} \left( \eta^{\frac{1+n}{n}} - 1 \right). \quad (26)$$

El gasto volumétrico para un ducto circular se define como:

$$Q = \int_0^{R_0} 2\pi r u_z \overline{dr}, \quad (27)$$

y cambiando la ec.(27) a variables adimensionales, se tiene que:

$$Q = 2\pi R_0^2 a^2 U_c \int_0^1 u_z \eta d\eta. \quad (28)$$

Sustituyendo el perfil de velocidad ec.(26), en la ec. (28), e integrando, se tiene que el gasto adimensional se puede escribir como:

$$\Phi = -a^{\frac{3n+1}{n}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)^{1/n} \quad (29)$$

donde  $\Phi \equiv \frac{Q}{Q_R}$ ;  $Q_R = \frac{\pi R_0^2 U_c}{2^{1/n}} \frac{n}{3n+1}$  .  $Q_R$  representa el gasto de referencia y  $\Phi$  es un gasto adimensional.

La variable adimensional  $a$  se puede reescribir utilizando la ec. (13) de la siguiente forma:

$$a^2 = 2E(t) + 1 = 2\frac{P}{\alpha} + 1. \quad (30)$$

Sustituyendo la relación dada por la ec. (30), en el gasto adimensional, ec. (29), se tiene que:

$$\Phi = -\left(\frac{2}{\alpha}[\psi\Delta P + P_v] + 1\right)^{\frac{3n+1}{2n}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^{1/n}. \quad (31)$$

Por otro lado, en un tubo elástico, Middleman [9], demostró que en un balance de masa para un volumen de control deformable se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (32)$$

Usando las ecs. (30) y (32), se obtiene una relación entre la presión y el gasto:

$$\frac{2A_0}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (33)$$

Cambiando a variables adimensionales la ec. (33) y sustituyendo el gasto adimensional dado por la ec.(31), se obtiene una ecuación para determinar la presión:

$$\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (\Psi)^{\frac{3n+1}{2n}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \right)^{1/n} \right]. \quad (34)$$

En la ec.(34) se hizo el siguiente cambio de variable para la presión en su forma adimensional, puesto que la relación de presión esta dada por  $E(t) = \frac{P(t)}{\alpha}$ , el cambio de variable es el siguiente  $\Psi \equiv \frac{2}{\alpha}[\psi\Delta P + P_v] + 1$ , y el parámetro  $\gamma$  se define como:  $\gamma = \frac{W\sigma^2\Pi}{\text{Re}\varepsilon}$ , donde  $\Pi$  es una relación de presiones,  $\Pi = \frac{2^{2/n}\Delta P^{1/n}}{\alpha^{1/n}} \frac{3n+1}{n}$ .

Por lo tanto, las condiciones en la frontera en términos de la variable  $\Psi$  son las siguientes:

en  $\zeta = 0$  :

$$\Psi = \frac{2\Delta P}{\alpha} [1 + \beta \text{sen}(\tau)] + \frac{2P_v}{\alpha} + 1, \quad (35)$$

en  $\zeta = 1$  :

$$\Psi = \frac{2P_v}{\alpha} + 1, \quad (36)$$

en  $\tau = 0$  :

$$\Psi = \frac{2P_v}{\alpha} + 1. \quad (37)$$

La solución del modelo de la ec.(34), se hace por medio de un método numérico en diferencias finitas, que se explica en el apéndice A.

## 2.6 Solución Cuasi-Estacionaria

Para validar el modelo numérico se trata el caso de flujo cuasi-estacionario en un tubo de paredes elásticas, que se expresa matemáticamente mediante la ec. (34) despreciando los términos temporales.

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ (\Psi)^{\frac{3n+1}{2n}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \right)^{1/n} \right] = 0. \quad (38)$$

Realizando la integración de la ecuación (38) con respecto a  $\zeta$ , el resultado es:

$$\Psi = \left[ \left( \Psi_v^{\frac{3n+3}{2}} - \Psi_a^{\frac{3n+3}{2}} \right) \zeta + \Psi_a^{\frac{3n+3}{2}} \right]^{\frac{2}{3n+3}}, \quad (39)$$

donde  $\Psi_v$  es la presión adimensional en el extremo venoso y  $\Psi_a$  la presión adimensional en el extremo arterial.

Sustituyendo valores característicos de microcirculación en las condiciones de frontera ecs.(35) y (36), se obtienen los valores de las condiciones iniciales para iniciar las iteraciones la solución cuasi-estacionaria.

Para  $\zeta = 0$ .

$$\Psi_a = 1.1334137$$

Para  $\zeta = 1$ .

$$\Psi_v = 1.0381188$$

La solución de este modelo, se realiza discretizando la ec. (39), para resolver numéricamente por diferencias finitas y posteriormente compararla con la solución numérica.

### 3 Resultados

Los resultados obtenidos del modelo matemático ec.(34), son la presión, la velocidad y el esfuerzo cortante. Los resultados de velocidad y esfuerzo cortante están en términos de la presión,  $\Psi$ ; el índice de potencia,  $n$ ; y el parámetro  $a$ ; por lo que en éste último, está implícito el comportamiento elástico de la pared del tubo. La velocidad y el esfuerzo cortante se muestran a diferentes tiempos y distancias del tubo elástico.

#### 3.1 Validación

La validación del modelo numérico se realizó considerando que los términos temporales no son significativos para el problema, entonces resolviendo el modelo de la ecuación (39), se obtiene una solución que se compara con los resultados obtenidos de la solución numérica. Esta validación se hizo para diferentes índices de potencia  $n$ , y a continuación se muestran las gráficas y para  $n = 1$ , y  $n = 0.3$ , respectivamente.

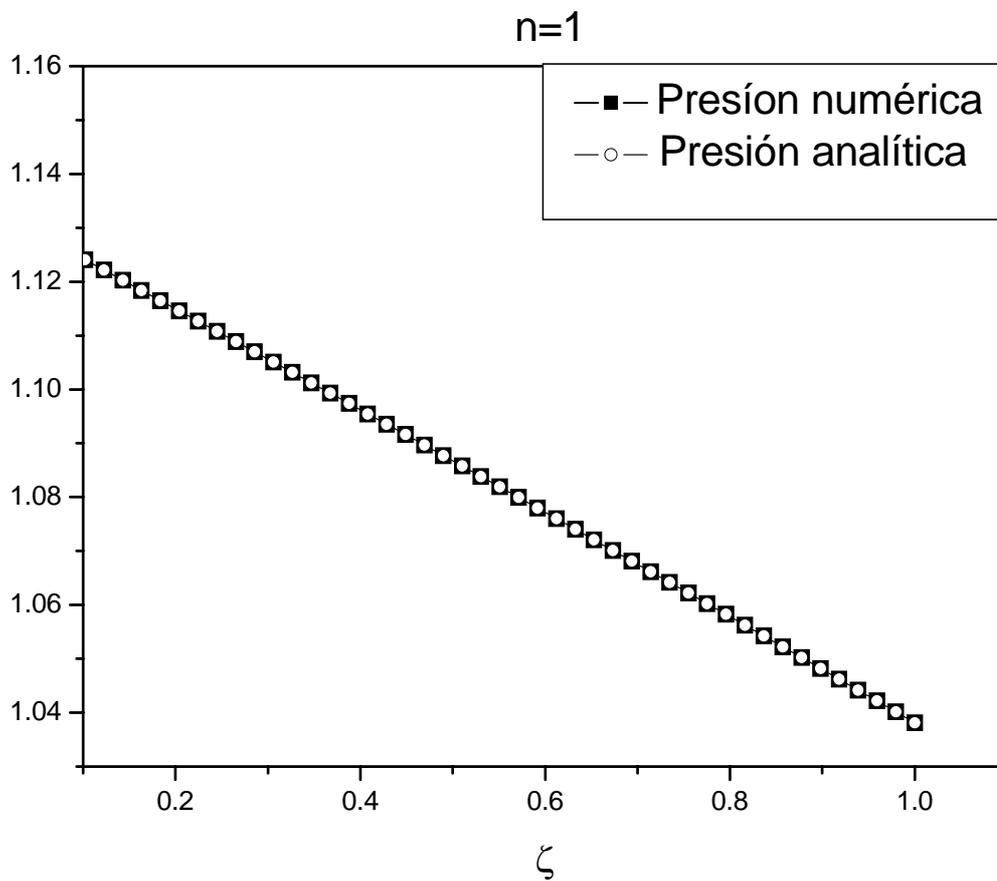


Figura 3: Comparación analítico-numérico.  $n = 1$

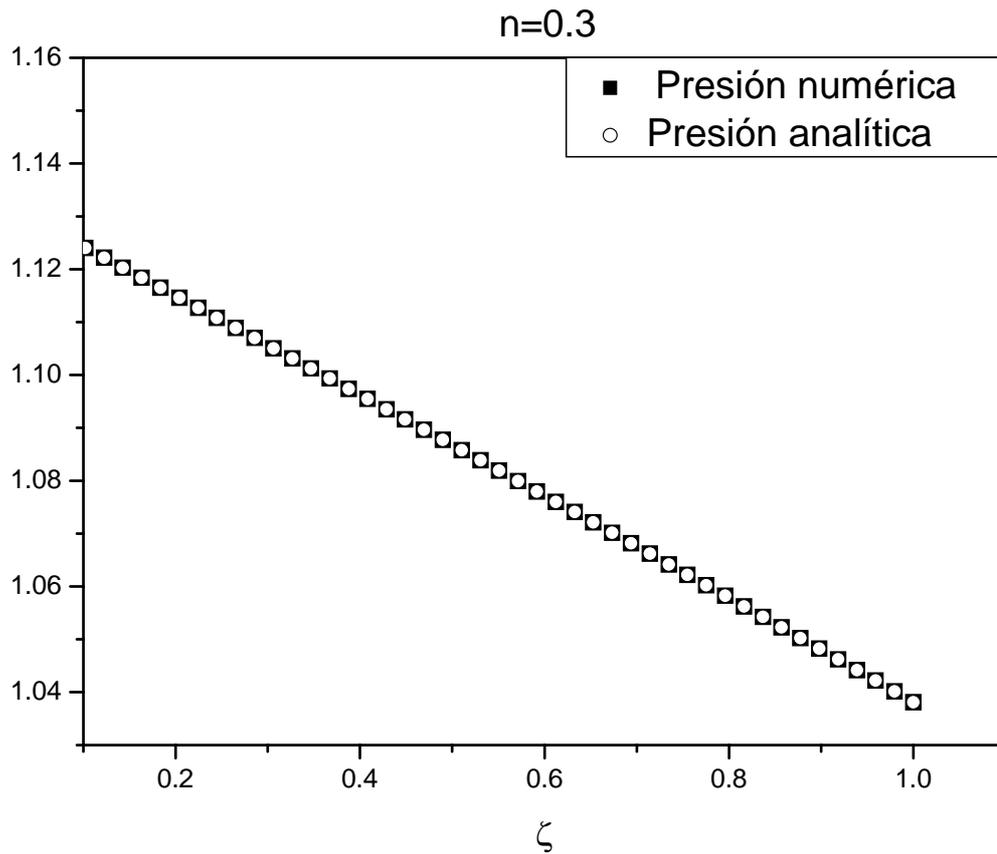


Figura 4: Comparación analítico-numérico.  $n = 0.3$

Los resultados del modelo considerado, donde los efectos temporales son despreciables, coinciden con los resultados obtenidos en la solución numérica por lo tanto el modelo numérico y el método de solución son correctos.

### 3.2 Presión.

En el conjunto de figuras 5 - 10, se presentan los resultados de la presión en el tubo de pared elástica, en un ciclo completo de pulsado, para un valor característico de  $\gamma = 1E-7$ . Las gráficas comprenden el comportamiento pulsado para diferentes tiempos y distancias, así como para diferentes valores del índice de potencia  $n$ , siendo con  $n = 1$  un fluido newtoniano. En el desarrollo de la presión a lo largo del tubo, se aprecia que el efecto pulsátil se amortigua conforme se avanza en la distancia. En la fig. 5 se aprecia la caída de presión a lo largo del tubo de pared elástica.

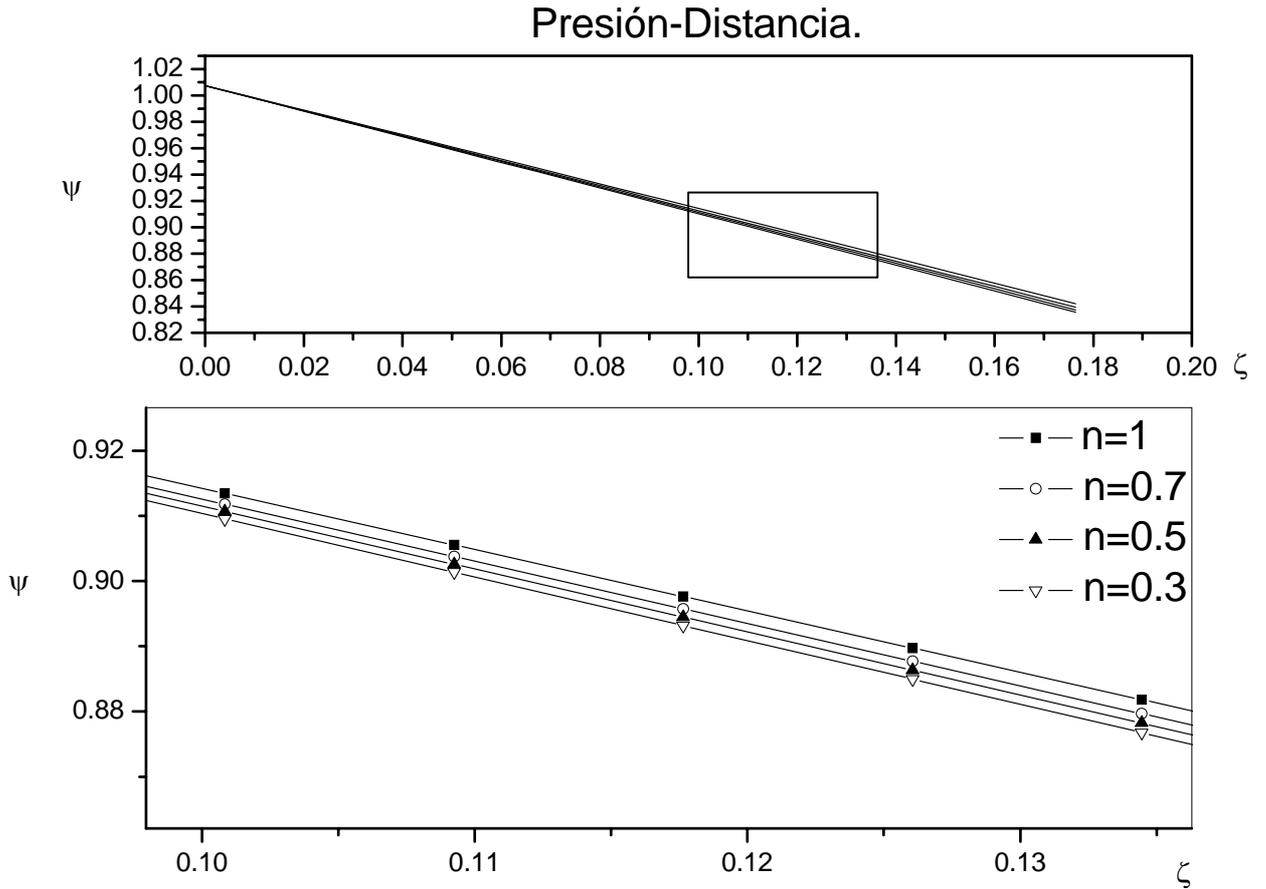


Figura 5: Presión distancia.  $\tau=2\pi$

De la fig. 5, se puede apreciar que las diferencias de los valores de presión son muy pequeños a una distancia cercana a la entrada del tubo, para diferentes índices de potencia, conforme se avanza en la distancia las diferencias se van haciendo aun mas grandes.

En la siguiente fig. 6, para  $n=1$ , se observa como se atenúa el efecto pulsado a lo largo del ciclo. Se puede apreciar que el efecto pulsátil se amortigua rápidamente a la entrada del tubo.

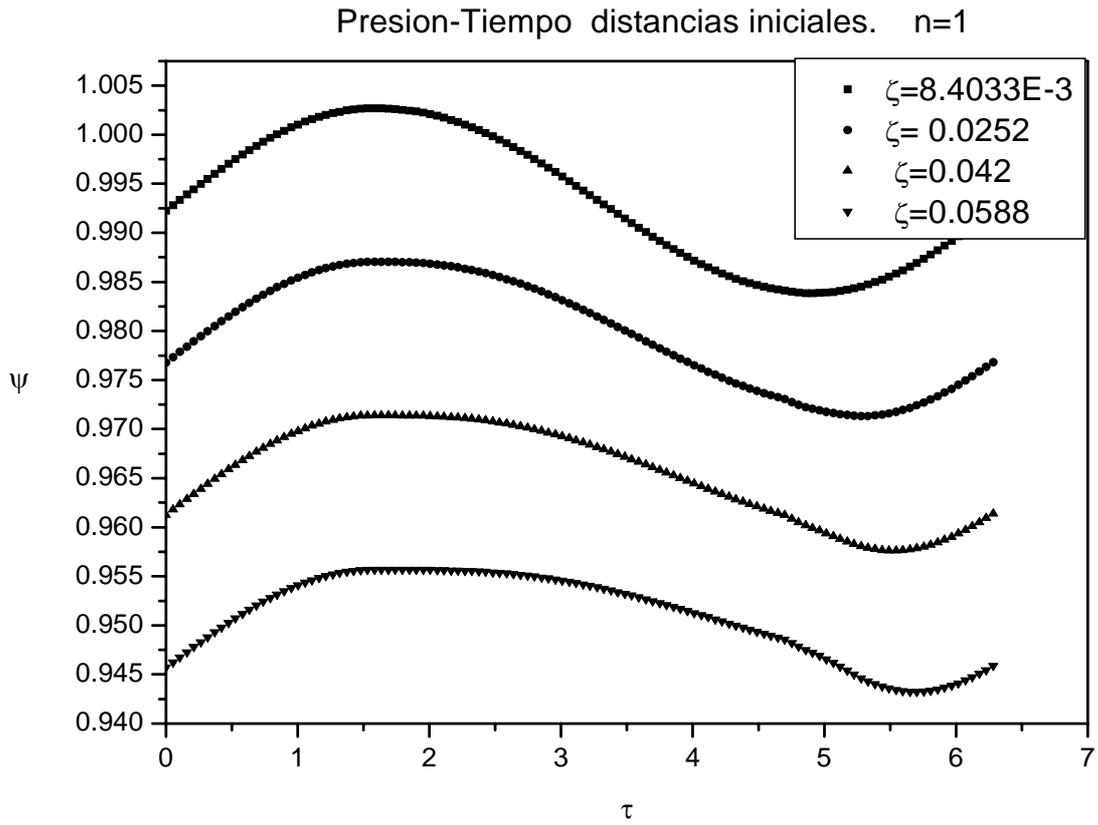


Figura 6: Presión tiempo distancias iniciales  $n=1$

Para un índice de potencia  $n=1$ , se aprecia que para distancias muy pequeñas el efecto pulsátil se va atenuando.

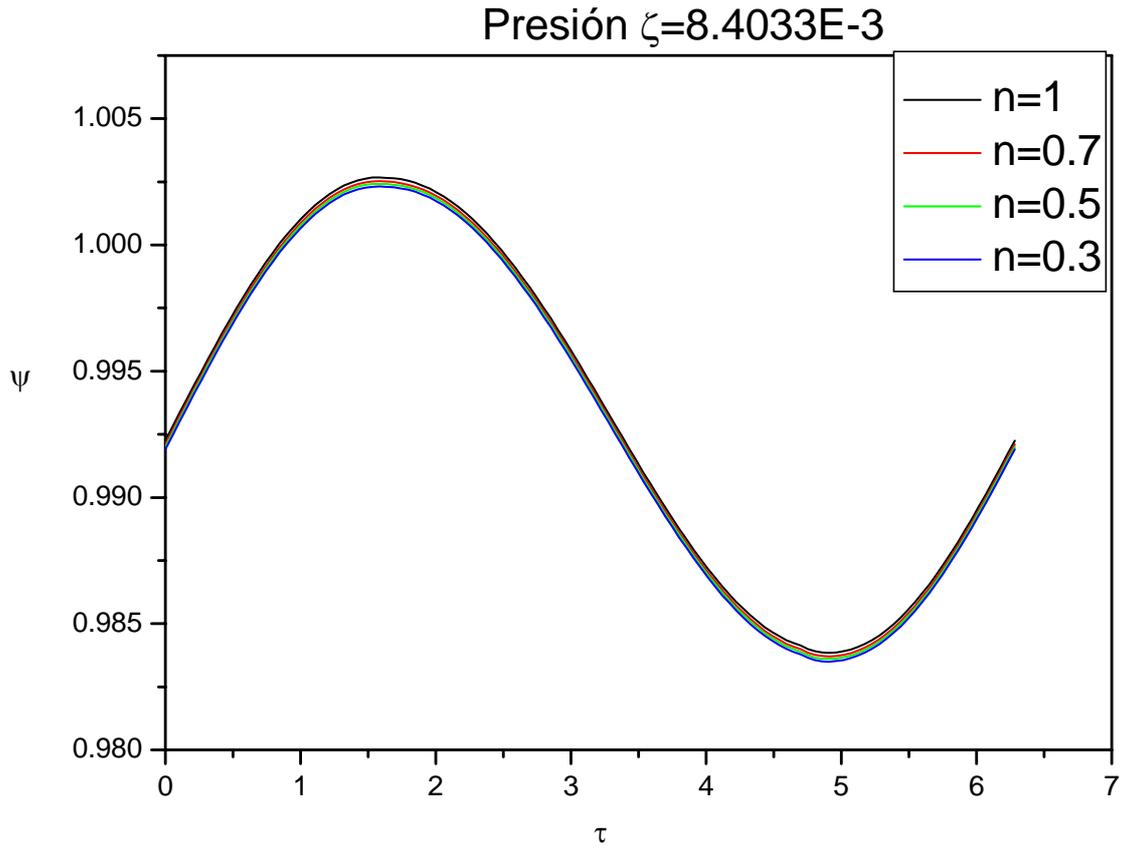


Figura 7: Presión- tiempo  $\zeta=8.4033E-3$

En la fig 7., se aprecia el comportamiento pulsado, para una distancia cercana a la entrada del tubo.

En la fig 8., se aprecian las diferencias entre índices de potencia, la diferencia en la amplitud y el desfase de la señal de presión.

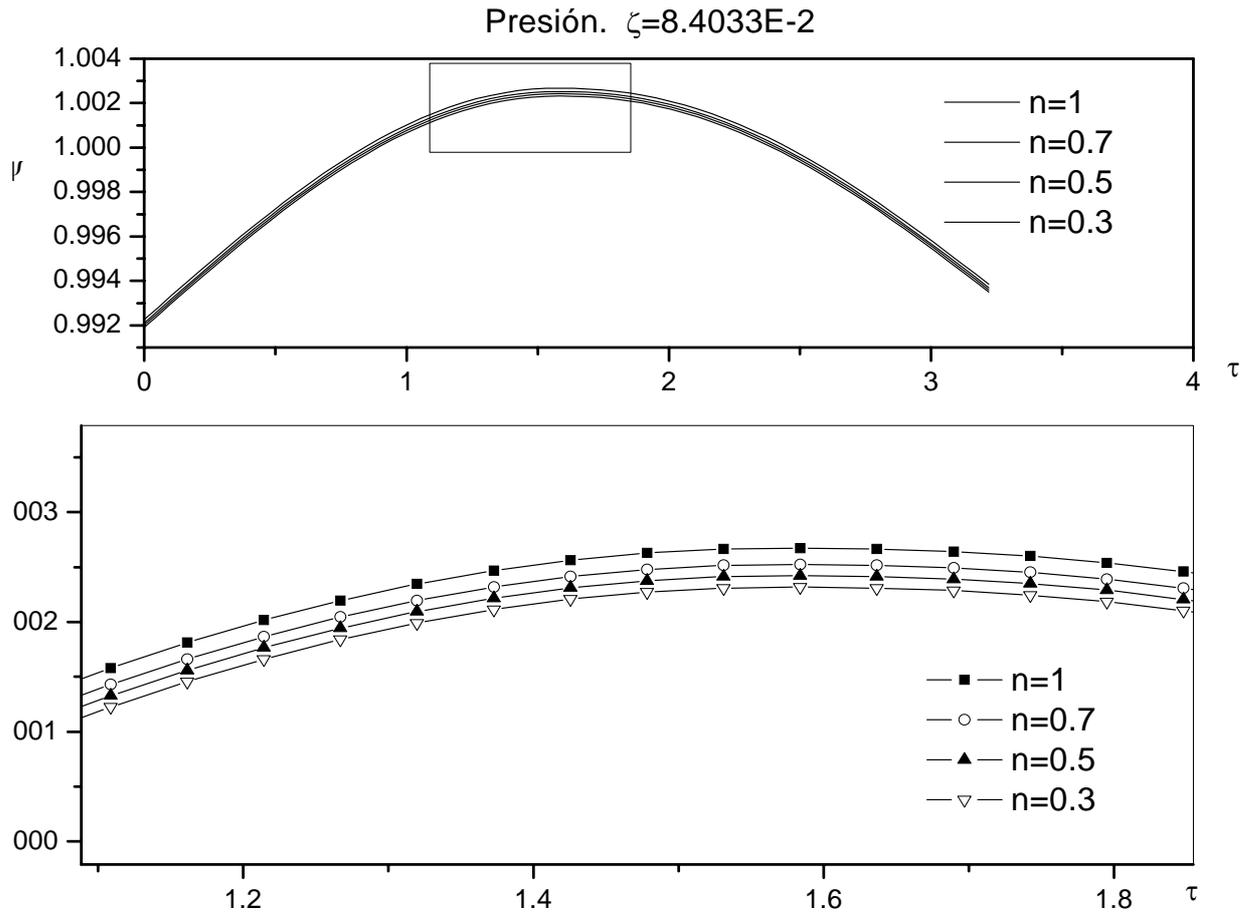


Figura 8: Presión – tiempo  $\zeta= 8.4033E-3$

En las figuras 9 y 10 los siguientes resultados se observan diferencias más grandes entre índices de potencia, a distancias  $\zeta = 0.5$  y  $\zeta = 0.99$ , donde el efecto pulsátil se atenúa completamente.

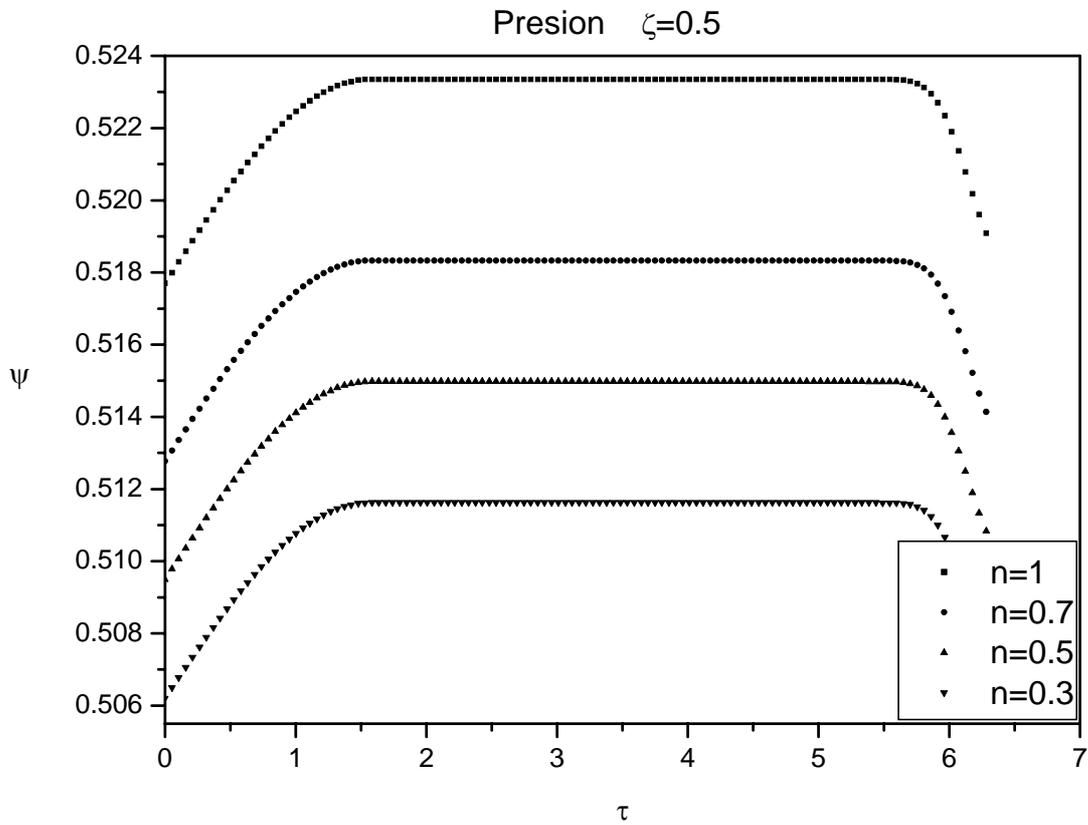


Figura 9: Presión – tiempo  $\zeta=0.5$

Las diferencias entre índices de potencia son mayores, tienden a ser más pequeños conforme se avanza en la distancia longitudinal  $\zeta$ . En la fig. 10 los valores iniciales de la presión son menores que una distancia de  $\zeta=0.5$

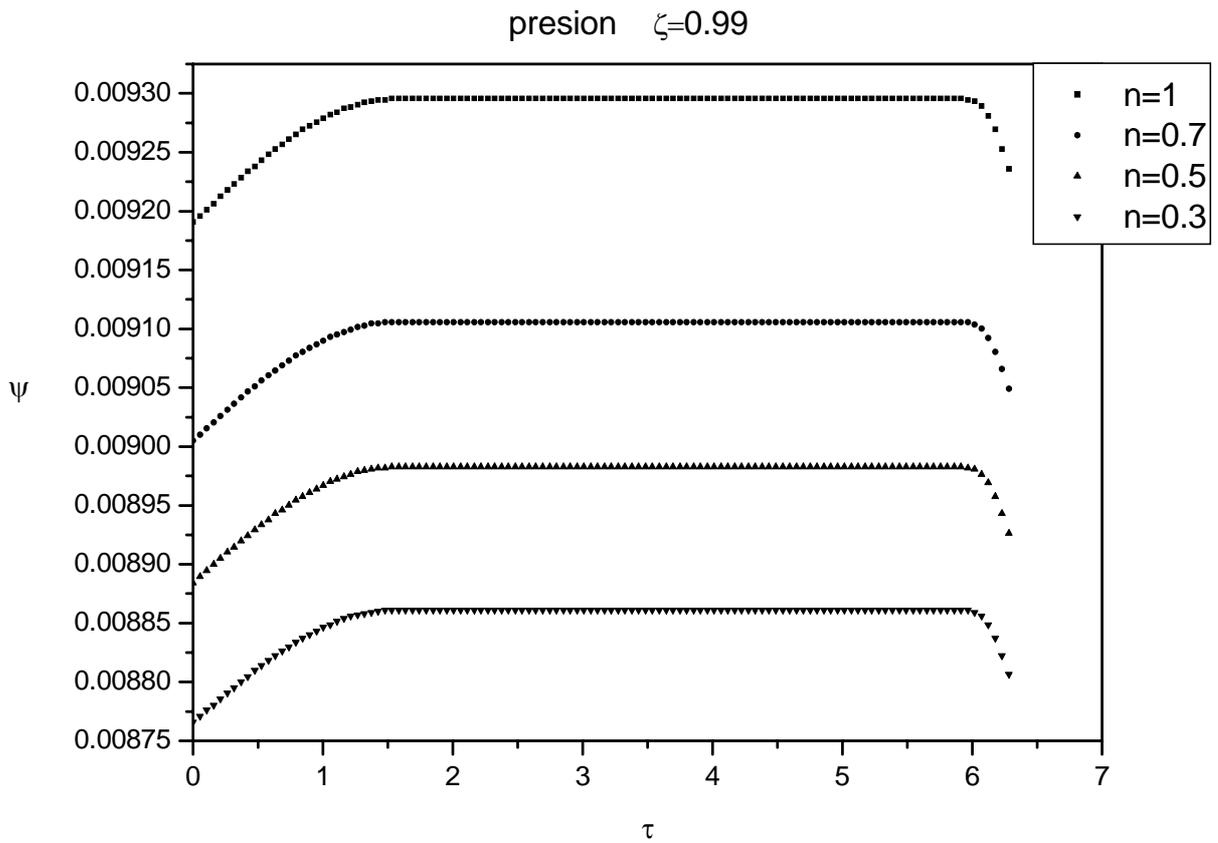


Figura 10: Presión – tiempo  $\zeta=0.99$

De las gráficas anteriores, se observa que el comportamiento del flujo pulsado, se atenúa a lo largo de la distancia; es decir a la salida del tubo el efecto es amortiguado completamente para diferentes índices de potencia y las diferencias son mayores con los valores iniciales de la presión.

### 3.3 Velocidad

A partir de los resultados numéricos de la presión, los perfiles de velocidad se obtienen con la ec.(26); se presentan resultados con la distancia radial, diferentes tiempos e índices de potencia. Los tiempos graficados son de  $\pi/4$  y  $\pi$ ; las gráficas son las siguientes:

En la fig. 11, se observa el aumento en el valor de la velocidad conforme se avanza en la distancia longitudinal  $\zeta$ .

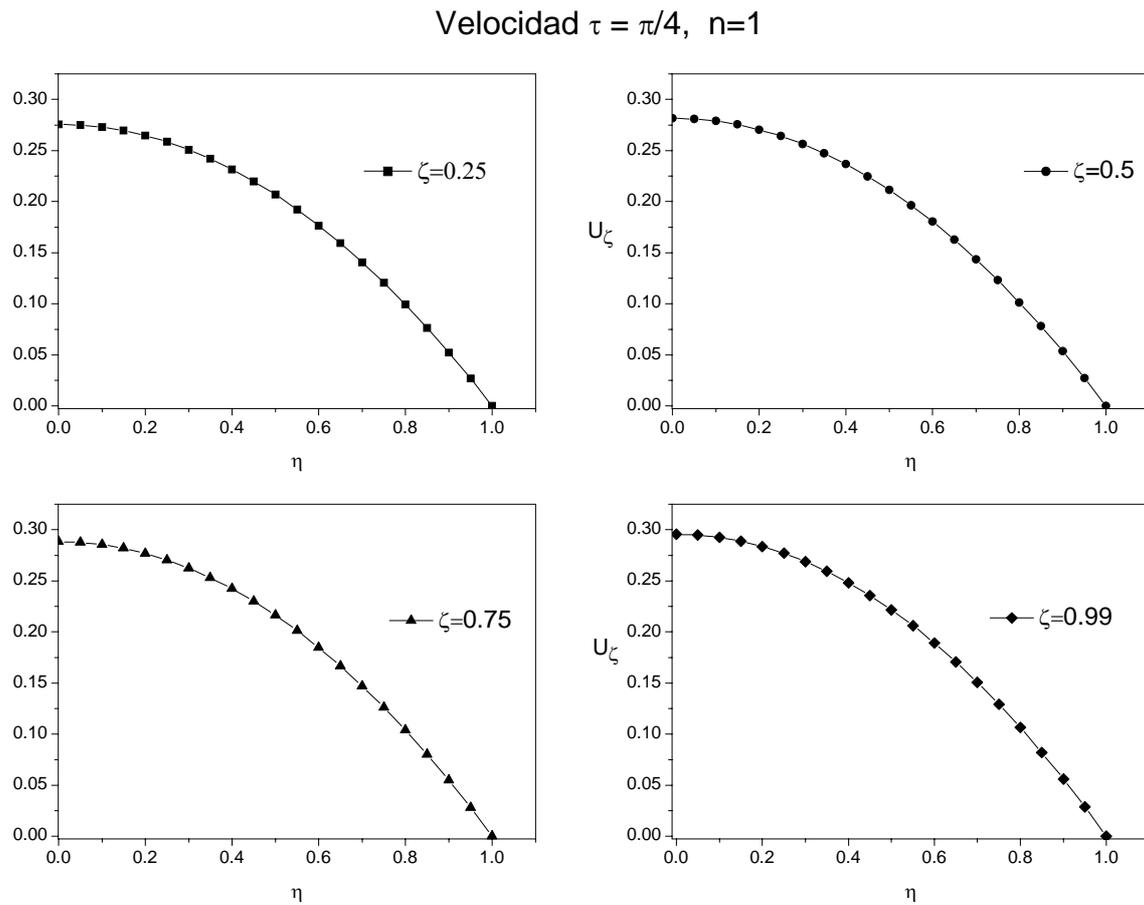


Figura 11: Velocidad  $\tau=\pi/4$ ,  $n=1$

Velocidad  $\tau = \pi$ ,  $n=1$

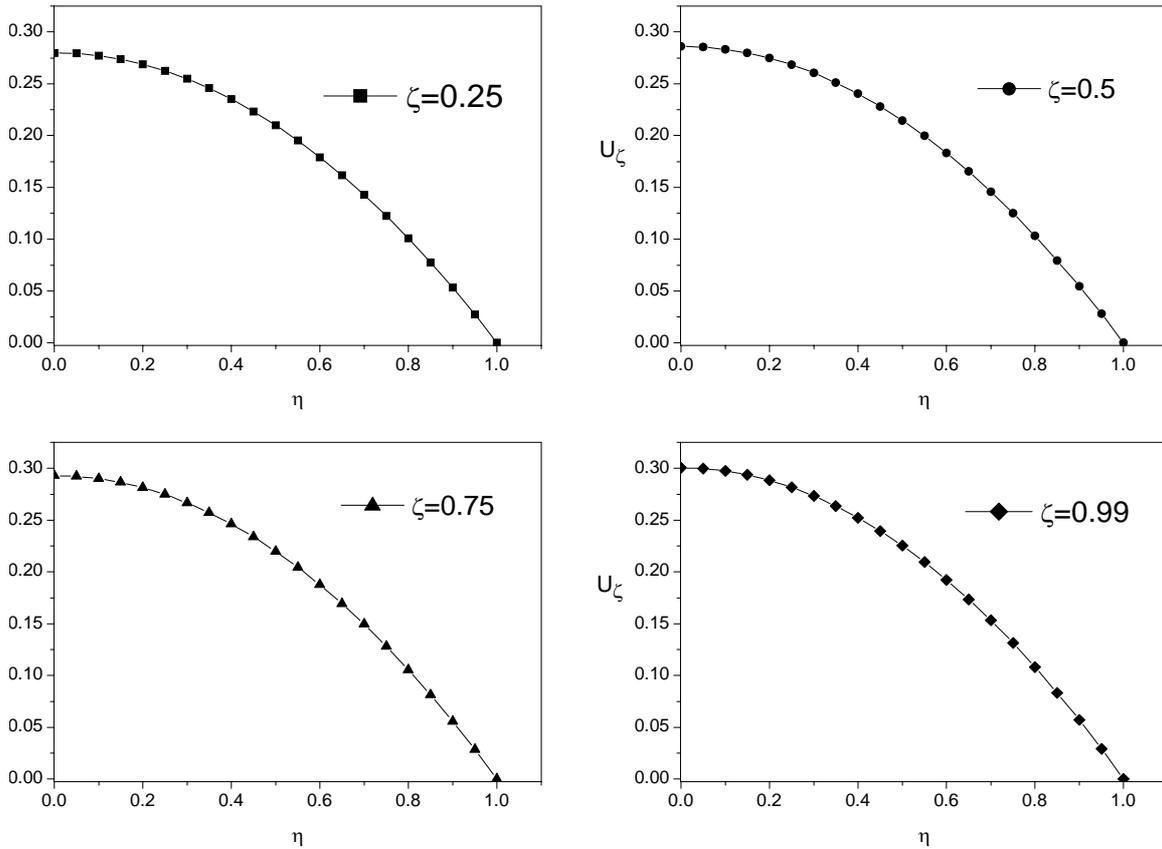


Figura 12: Velocidad  $\tau=\pi$ ,  $n=1$

De las figuras anteriores, figs. 11 y 12 , se pueden apreciar diferencias entre los perfiles de velocidad a diferentes tiempos; la característica principal es el aumento de la velocidad conforme se avanza en la longitud del tubo, esta característica se presenta también en resultados posteriores para índices de potencia menores.

Este aumento de la velocidad es debido a que los gastos volumétricos tanto a la entrada como a la salida deben de ser iguales, por el principio de conservación de masa. En resultados posteriores de la distribución del radio adimensional,  $\alpha$ , se aprecia que a una distancia,  $\zeta$ , muy pequeña, es mayor la relación de deformación de la pared que a la salida; entonces se tiene un área mayor a la entrada que a la salida del tubo. De esta manera la velocidad a la entrada será menor que la de salida. Para la velocidad inicial con  $\eta=0$  , no se aprecian grandes diferencias.

Las siguientes gráficas y son para un índice de potencia de  $n=0.7$ . Las diferencias en los valores iniciales de velocidad son menores que para  $n=1$ , este comportamiento se observa para tiempos de  $\pi$  y  $\pi/4$ .

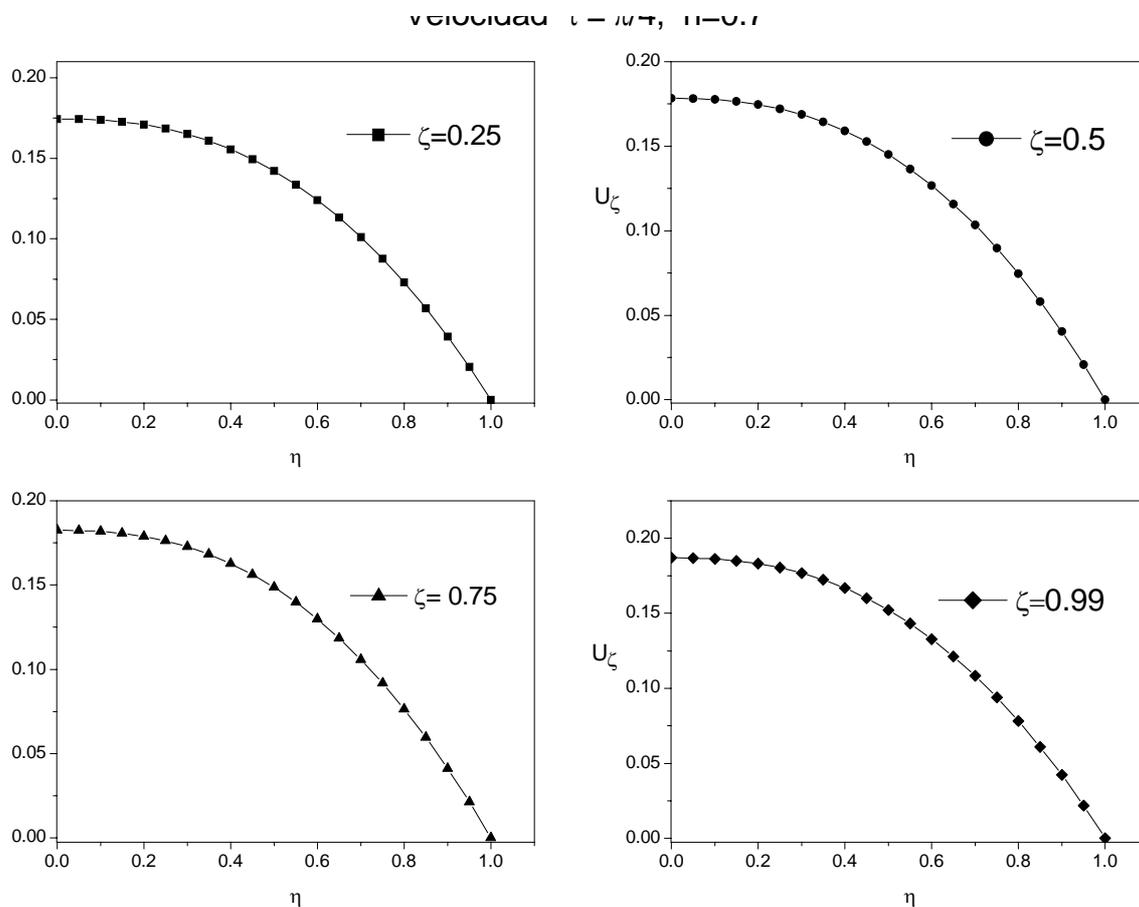


Figura 13: Velocidad  $\tau=\pi/4, n=0.7$

La influencia del índice de potencia se observa en la disminución de los valores de la velocidad inicial conforme disminuye el índice de potencia  $n$ , en resultados posteriores se observa este mismo comportamiento. Para  $\pi/4$  y  $\pi$  se observa un aumento de la velocidad conforme se avanza en la distancia longitudinal  $\zeta$ .

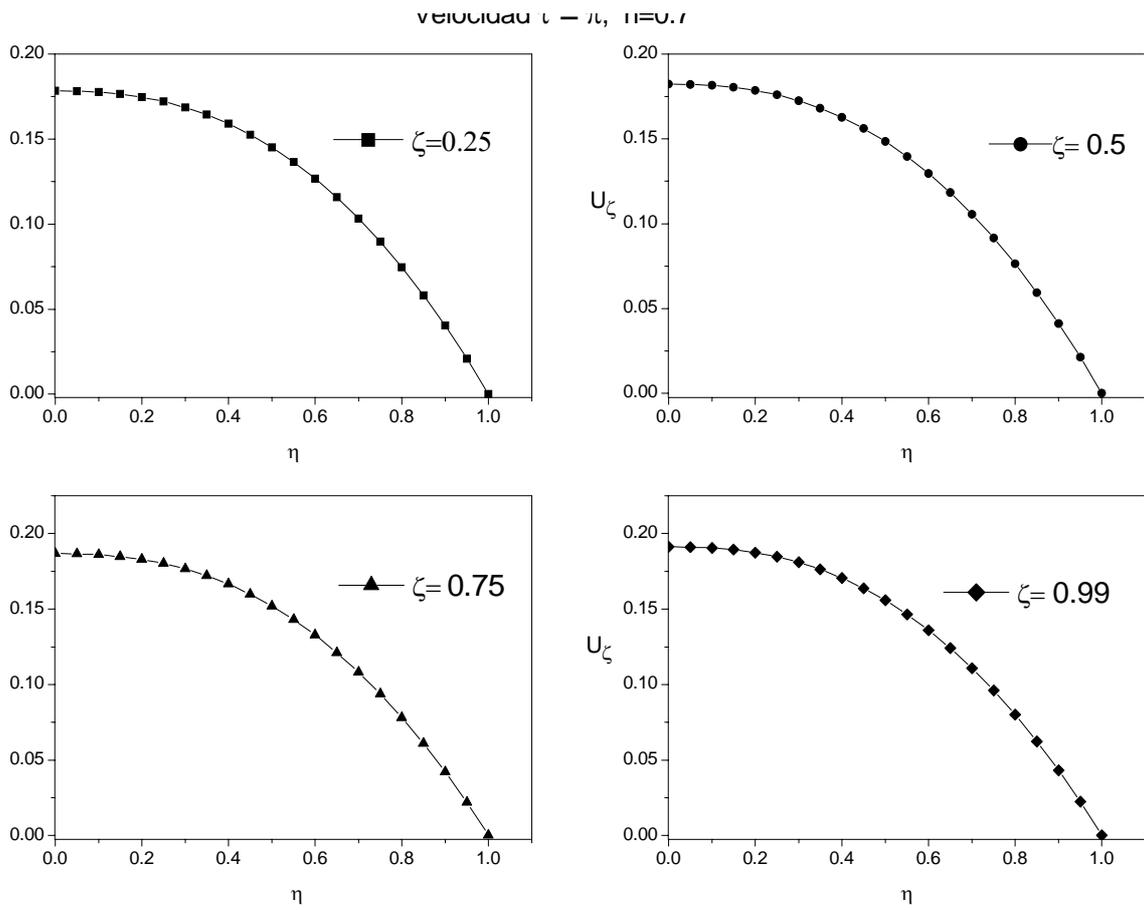


Figura 14: Velocidad  $\tau=\pi$ ,  $n=0.7$

En las siguientes figuras 15, 16, 17, 18 con los índices de potencia de  $n=0.5$  y  $n=0.3$ , se conserva el aumento de la velocidad a una distancia media y final del tubo elástico, y la disminución de las velocidades iniciales.

velocidad  $\tau = \pi/4$ ,  $n=0.5$

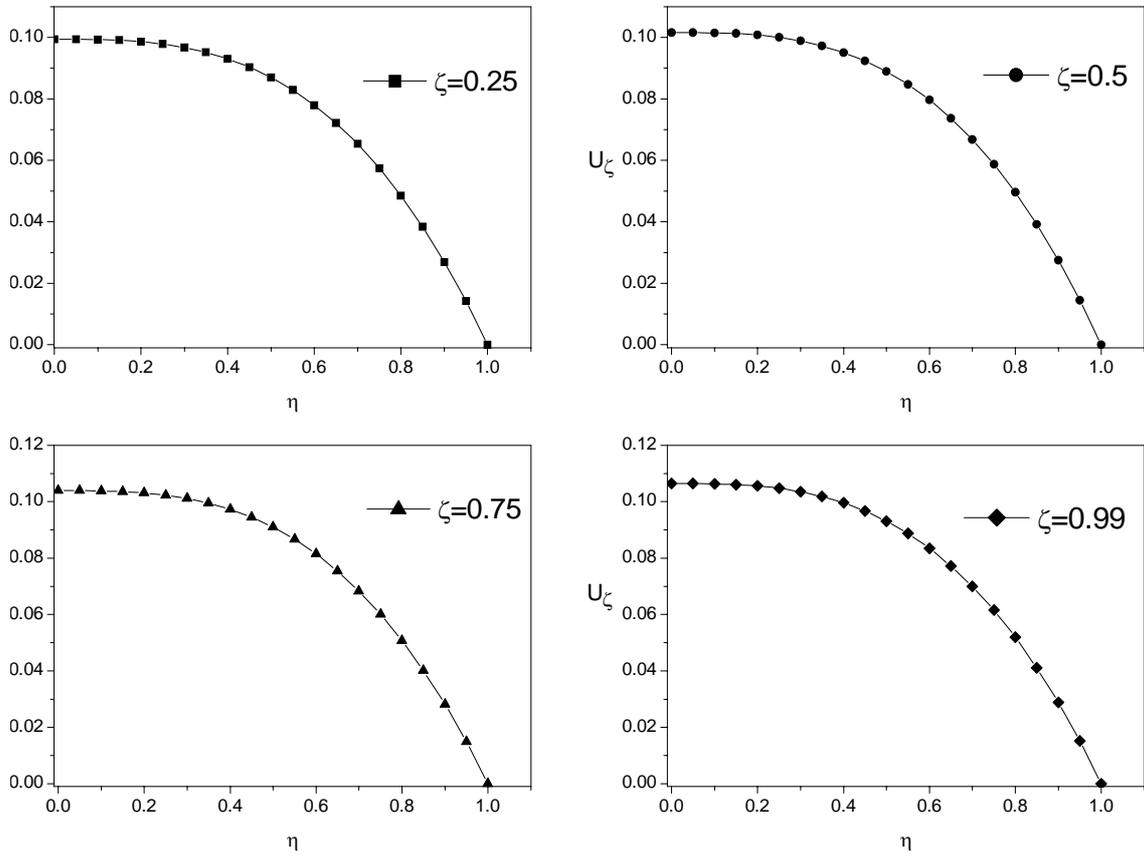


Figura 15: Velocidad  $\tau=\pi/4$ ,  $n=0.5$

Para un tiempo de  $\pi$ , se conserva este efecto en comparación con el caso de  $n=0.3$  y la forma del perfil de velocidades es más uniforme, conforme se avanza en la longitud.

En la fig. 15, se aprecia un cambio en la forma del perfil de velocidades, es más uniforme y a una distancia radial  $\eta=0.3$ , el valor de la velocidad permanece casi constante.

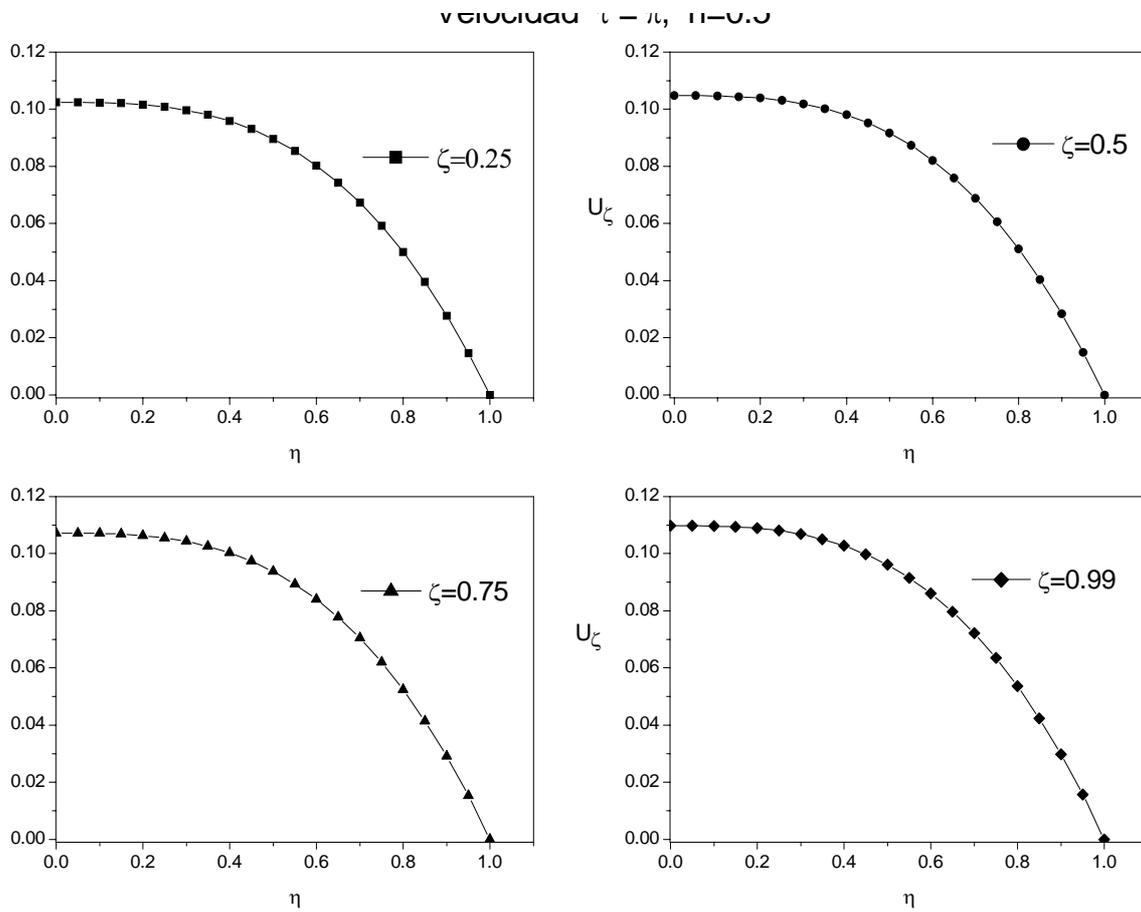


Figura 16: Velocidad  $\tau=\pi, n=0.5$

En los siguientes resultados para un índice de potencia  $n=0.3$ , el perfil de velocidades cambia su perfil para este índice de potencia.

La influencia del índice de potencia  $n$ , se aprecia en los valores iniciales y a lo largo de la distancia. Para  $n=0.3$ , conforme disminuye el índice de potencia, disminuye el valor inicial de los perfiles de velocidad; siendo un valor muy pequeño comparado con un índice de potencia  $n=1$ .

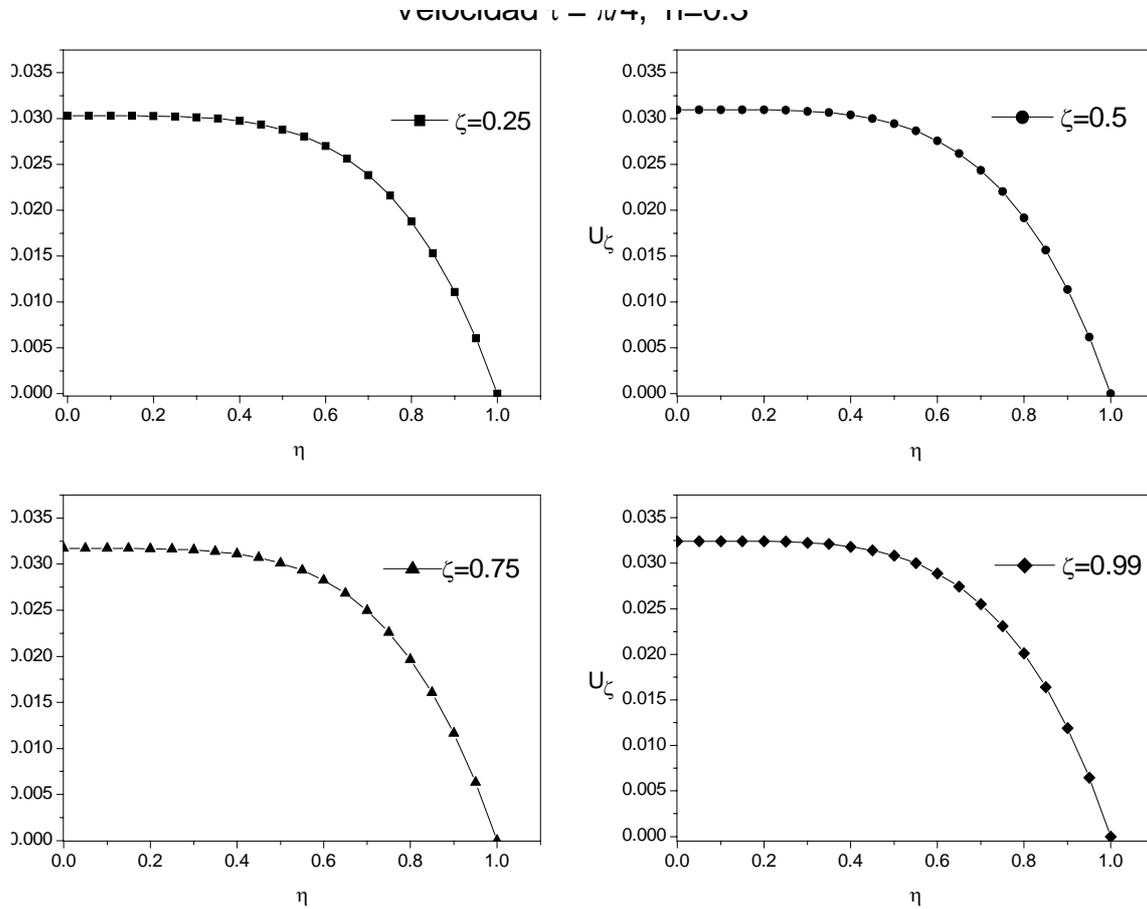


Figura 17: Velocidad  $\tau=\pi/4$ ,  $n=0.3$

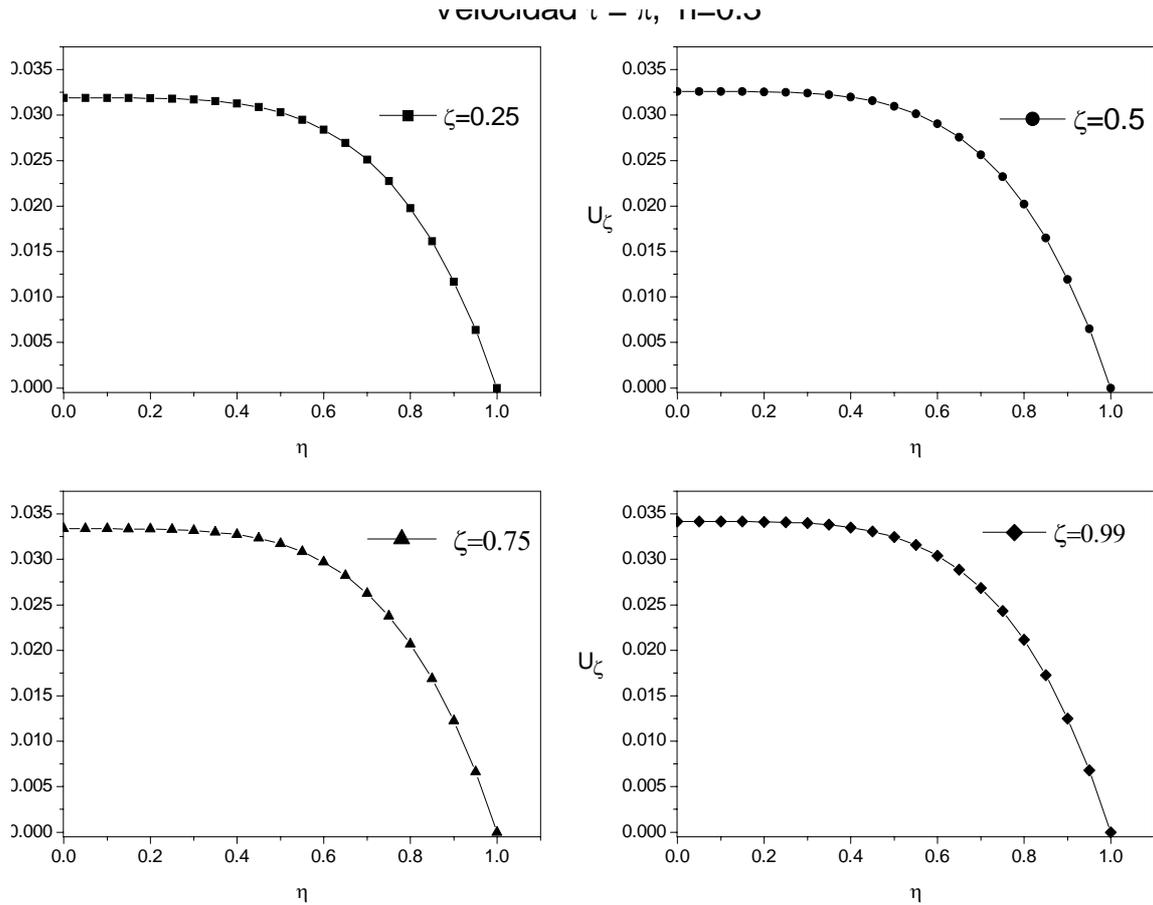


Figura 18: Velocidad  $\tau = \pi$ ,  $n = 0.3$

Conforme el índice de potencia disminuye, el valor de la velocidad decae más rápido en la distancia radial; para  $n=1$  el perfil de velocidades de las figs. 11 y 12, el perfil es parabólico. Para un índice de potencia de  $n=0.3$ , el valor inicial de la velocidad es menor que para  $n=1$  y se puede apreciar también un cambio en la forma del perfil de velocidades, en las figs. 17 y 18, el valor de la velocidad permanece casi constante hasta un valor de  $\eta=0.5$ , después el valor de la velocidad disminuye.

Los perfiles de velocidad presentan una oscilación conforme pasa el tiempo, debido al flujo pulsado.

En la fig. se aprecia este efecto para una distancia  $\zeta=0.1$

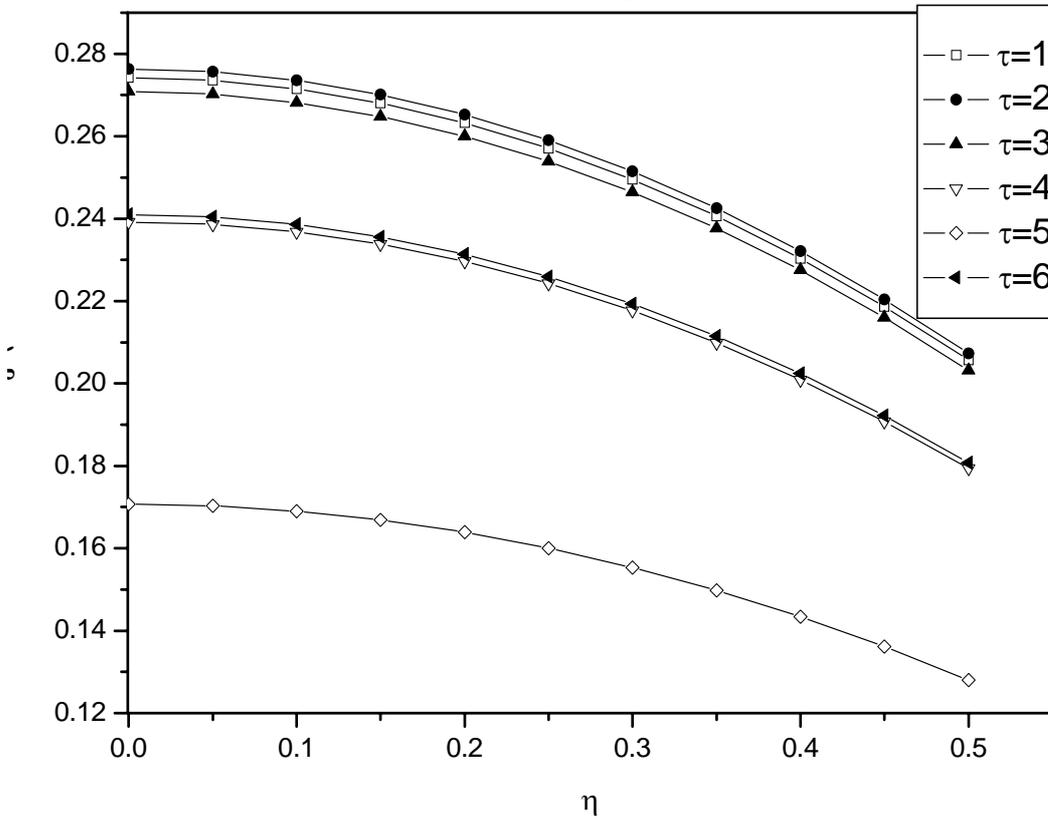


Figura 19: Velocidad  $\zeta=0.1, n=1$

El efecto pulsado permanece hasta un tiempo  $\tau=5$ , para el final del ciclo, el valor de la velocidad disminuye.

### 3.4 Esfuerzo Cortante

El esfuerzo cortante se define a partir de la ley de potencia. Utilizando el cambio de variables propuesto, se tiene el esfuerzo cortante adimensional de la siguiente manera:

$$\tau_{rz} = -\frac{kUc^n}{R_0a^n} \left( \frac{\partial U_\xi}{\partial \eta} \right)^n. \quad (40)$$

En el término  $\frac{kUc^n}{R_0a^n}$ , se sustituye la ec.(14) que es la velocidad característica en la dirección  $\zeta$ , este término se simplifica quedando de la siguiente manera,  $\frac{\Delta P R_0}{KL}$ , que tiene unidades de  $\frac{N}{m^2}$ ; este término se considera como un esfuerzo cortante de referencia. Sustituyendo el radio adimensional  $\alpha$ , ec. (30), y realizando la derivada de la velocidad, ec. (26), sustituyendo dicha derivada en la ec. (40) se tiene el esfuerzo cortante adimensional, el esfuerzo adimensional es el siguiente:

$$T_{\eta\zeta} = -\frac{a}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right). \quad (41)$$

La influencia del índice de potencia  $n$  esta implícito en el gradiente de presión. Las figs. 20 -25 obtenidas del esfuerzo cortante son las siguientes para diferentes índices de potencia  $n$ , y diferentes distancias  $\zeta$ .

Para  $n=1$ :

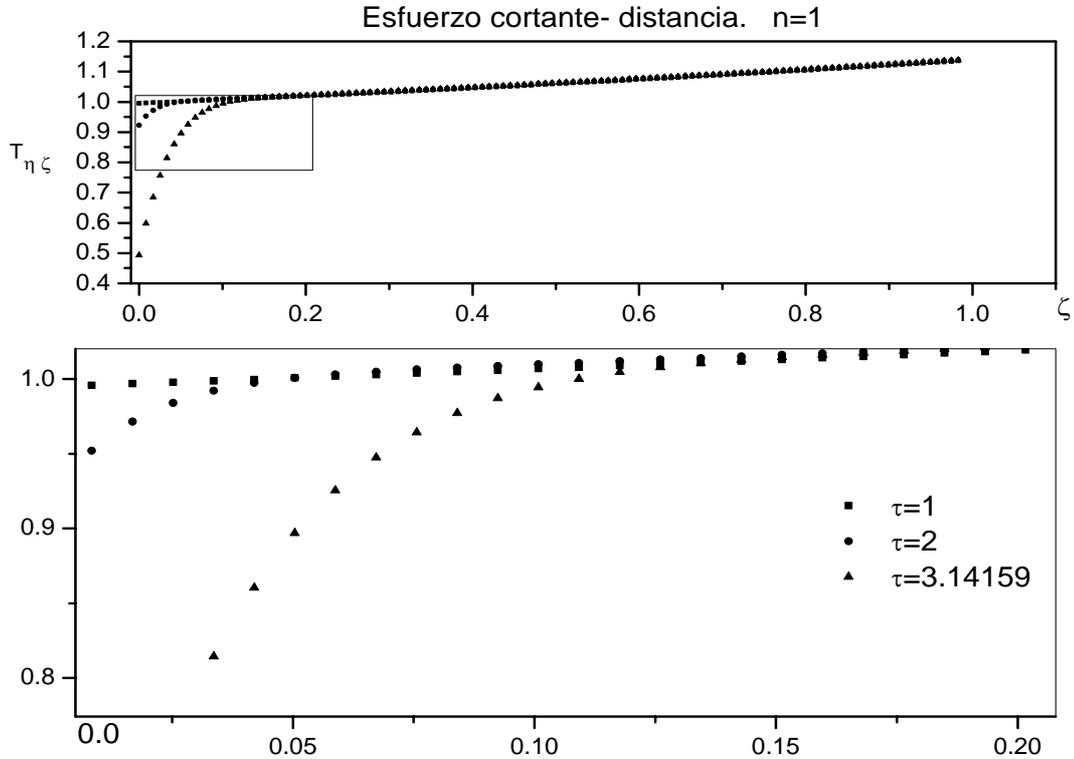


Figura 20: Esfuerzo cortante – distancia.  $n=1$

En la fig. 21 se puede apreciar que el comportamiento del esfuerzo cortante es oscilatorio. Para los tiempos  $4 \leq \tau \leq 2\pi$ , se observa que el esfuerzo cortante regresa a un valor cercano a 1, por lo tanto, el carácter oscilatorio es debido al flujo pulsado.

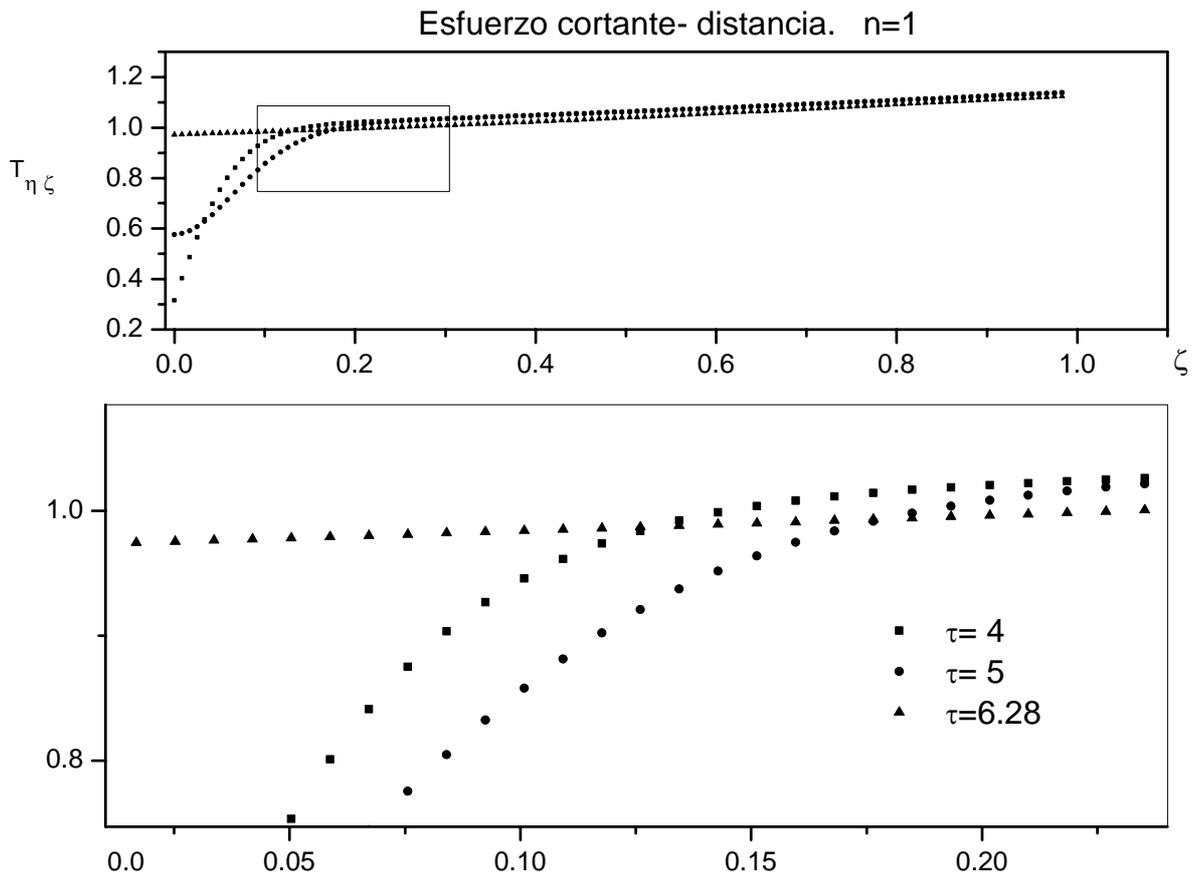


Figura 21: Esfuerzo cortante- distancia. n=1

Los resultados obtenidos para los diferentes índices de potencia presentan el mismo comportamiento oscilatorio. En las figs. 22 y 23 del índice de potencia  $n=0.3$ , se aprecia el efecto de la disminución en el esfuerzo cortante para un tiempo  $\tau=\pi$ .

Para  $n = 0.3$ , se muestran las siguientes gráficas que muestran la relación de esfuerzo cortante contra distancia.

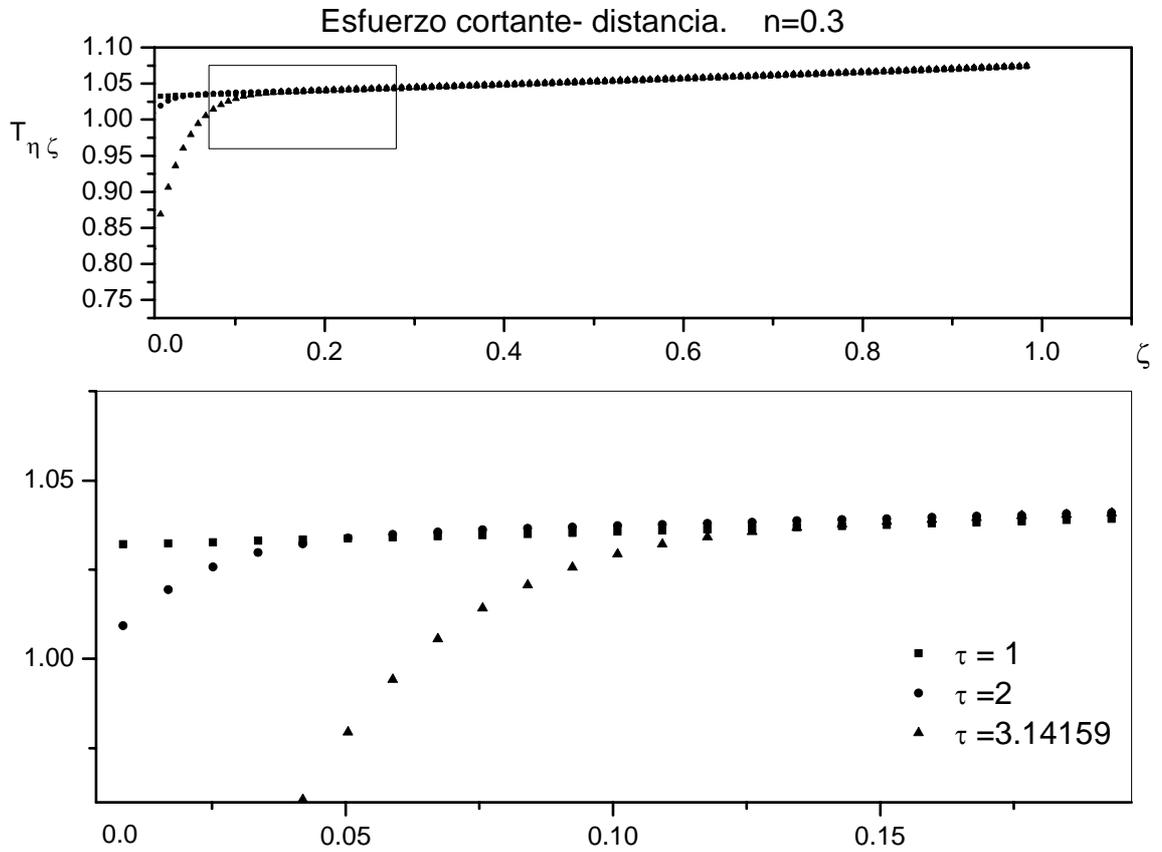


Figura 22: Esfuerzo cortante – distancia.  $n=0.3$

En la fig. 22 se aprecia que para un ciclo en el tiempo, se tienen dos ciclos del esfuerzo cortante, conservando la característica de presentar un aumento en el valor inicial del esfuerzo.

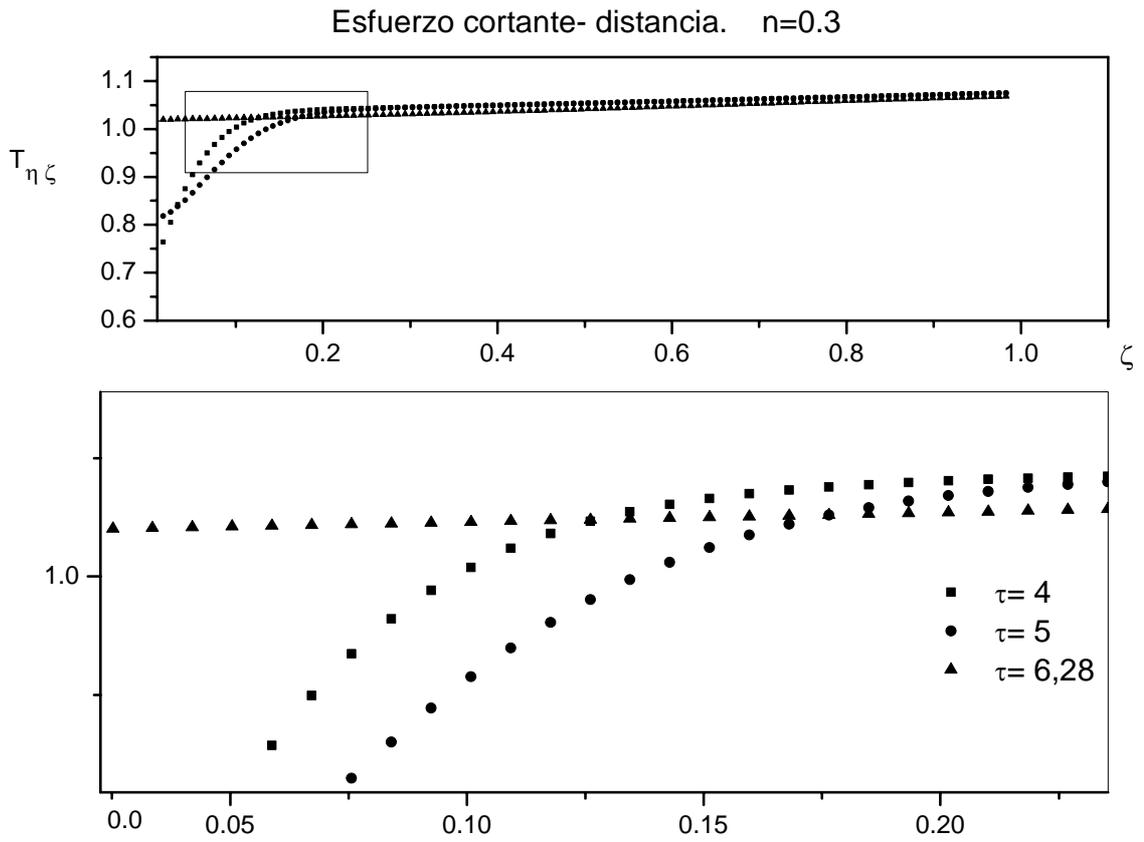


Figura 23: Esfuerzo cortante – distancia.  $n=0.3$

En la fig. 23 se observa una disminución del valor del esfuerzo cortante para un tiempos menores a  $\pi$ .

A continuación en las figs. 24 y 25 se presentan resultados del esfuerzo cortante contra el tiempo, para los índices de potencia  $n=1$  y  $n=0.3$

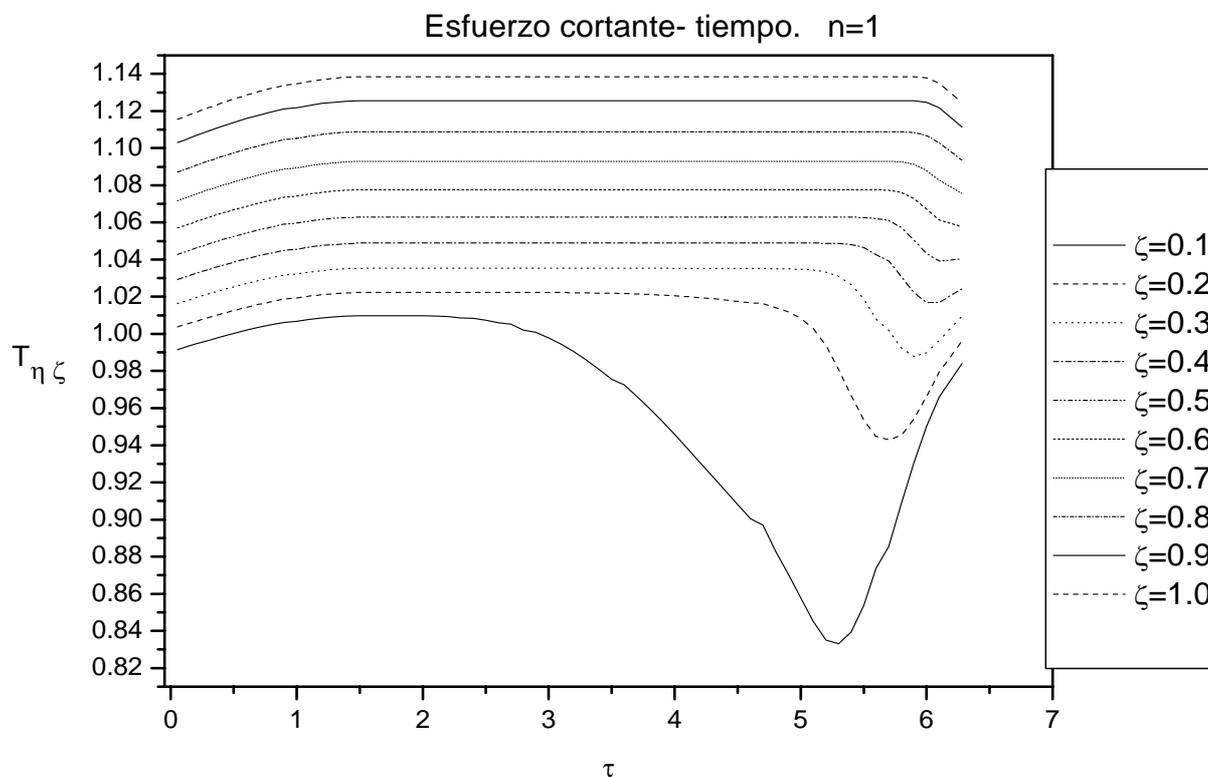


Figura 24: Esfuerzo cortante – tiempo.  $n=1$

Se observa que la oscilación del esfuerzo se va atenuando conforme se avanza en la distancia, llegando a un valor último a la salida del tubo. La influencia del índice de potencia se observa en la fig. 25, para  $n=0.3$

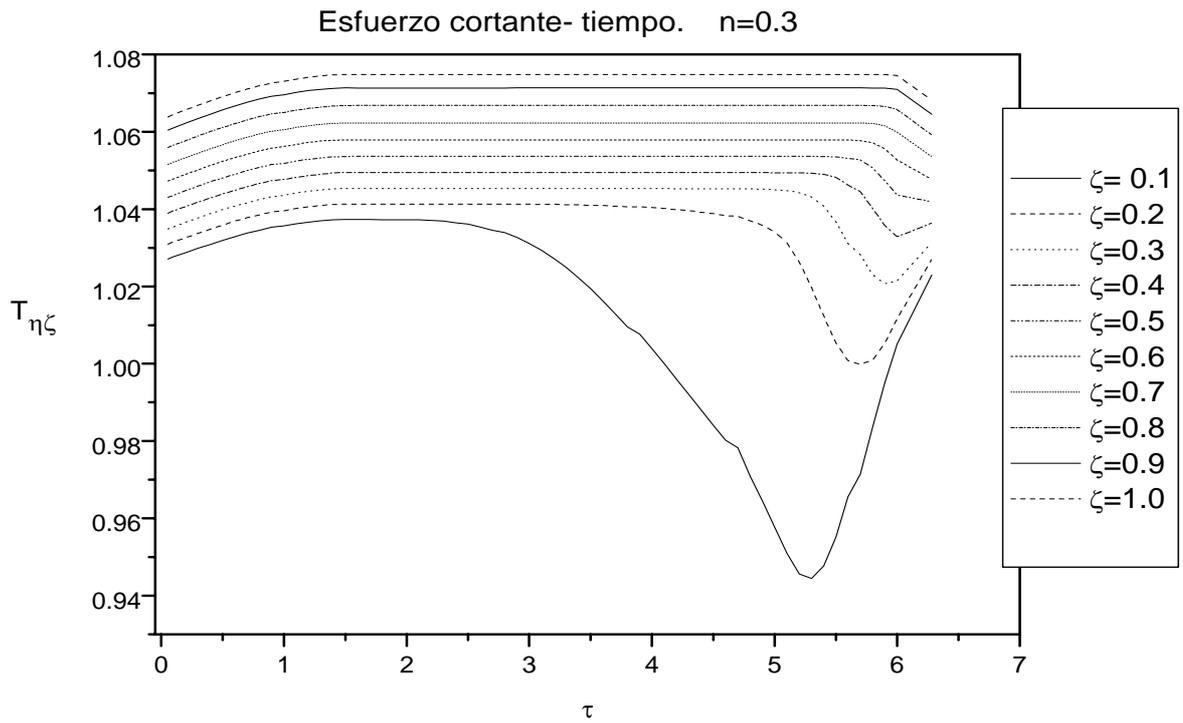


Figura 25: Esfuerzo cortante – tiempo.  $n=0.3$

Puesto que el comportamiento de la presión con respecto al tiempo es oscilatorio, como se observa en la fig. 7, el comportamiento del esfuerzo cortante es oscilatorio, y se atenúa debido a la pared elástica. Las diferencias entre cada uno de los índices de potencia, es la variación de los valores del esfuerzo en el ciclo, con  $n=0.3$  el esfuerzo cortante tiende a un valor menor que al de un índice de  $n=1$ , por lo que se aprecia una influencia de este índice.

### 3.5 Distribución del Radio Adimensional $\alpha$ .

De las variables adimensionales,  $\alpha$  representa la relación entre radios y esta variable se relaciona con la presión por medio de la ec.(30). En las siguientes figuras 26 - 31 se muestran para los índices de potencia  $n=1$ ,  $n=0.3$ , su variación con respecto a la distancia y el tiempo.

Para  $n=1$ .

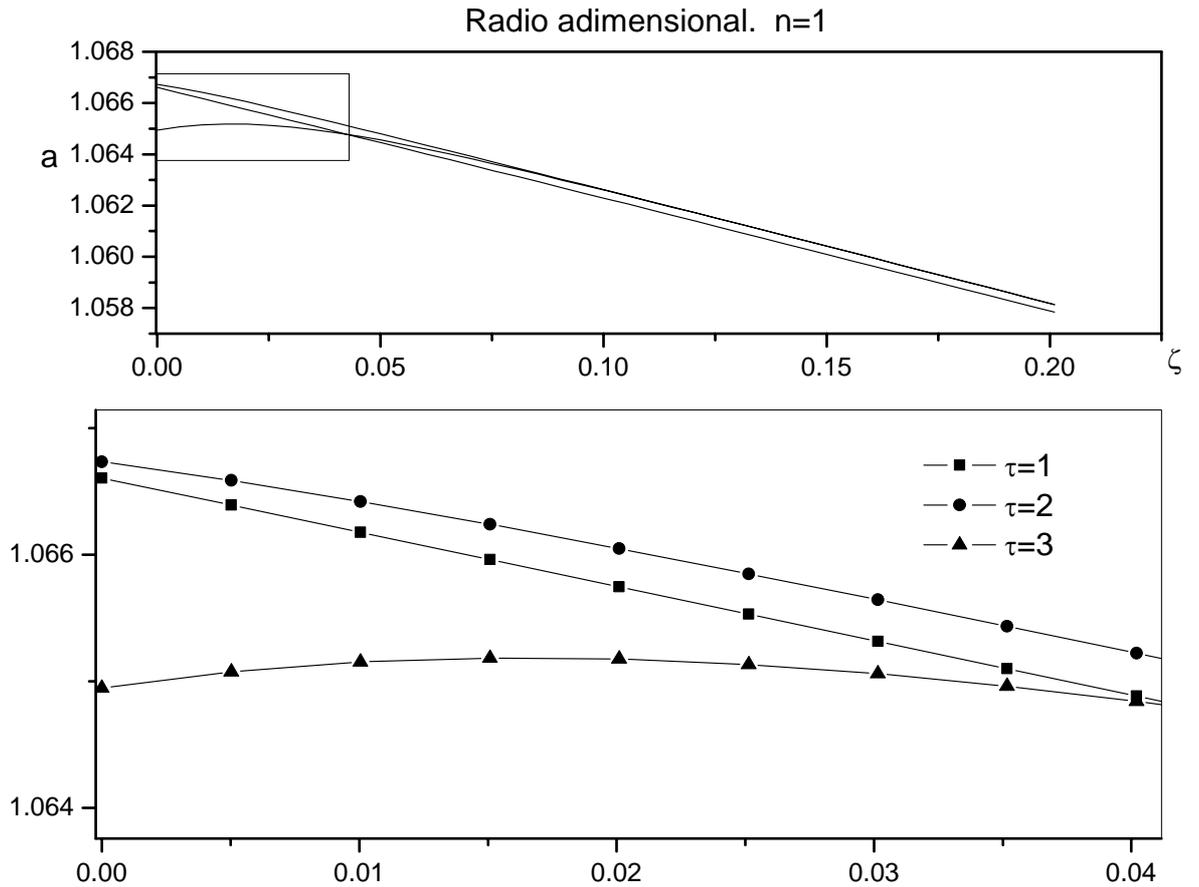


Figura 26: Radio adimensional – distancia.  $n=1$

En las figs. 26 y 27 se observa que para la deformación del radio del tubo flexible,  $\alpha$ , presenta un comportamiento oscilatorio para diferentes tiempos, para un ciclo de pulsado el valor de  $\alpha$  es menor que para un tiempo  $\tau=1$ .

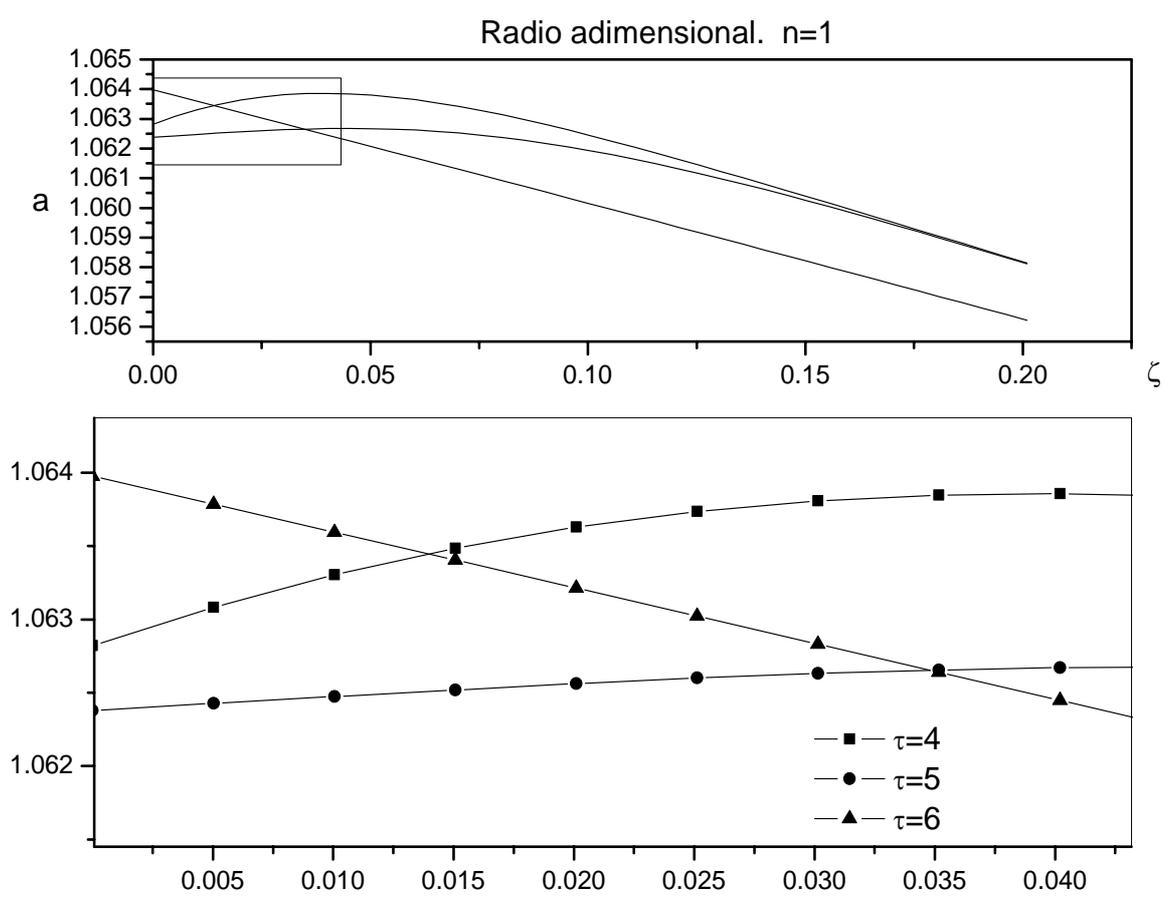


Figura 27: Radio adimensional – distancia. n=1

Se observa que el valor de  $\alpha$  oscila para diferentes tiempos y se presenta una caída en el valor de esta variable a lo largo de la distancia. Este comportamiento se puede interpretar como una atenuación del movimiento de la pared elástica.

Para el índice de potencia de  $n=0.3$ , se tienen las siguientes gráficas.

Para  $n=0.3$ .

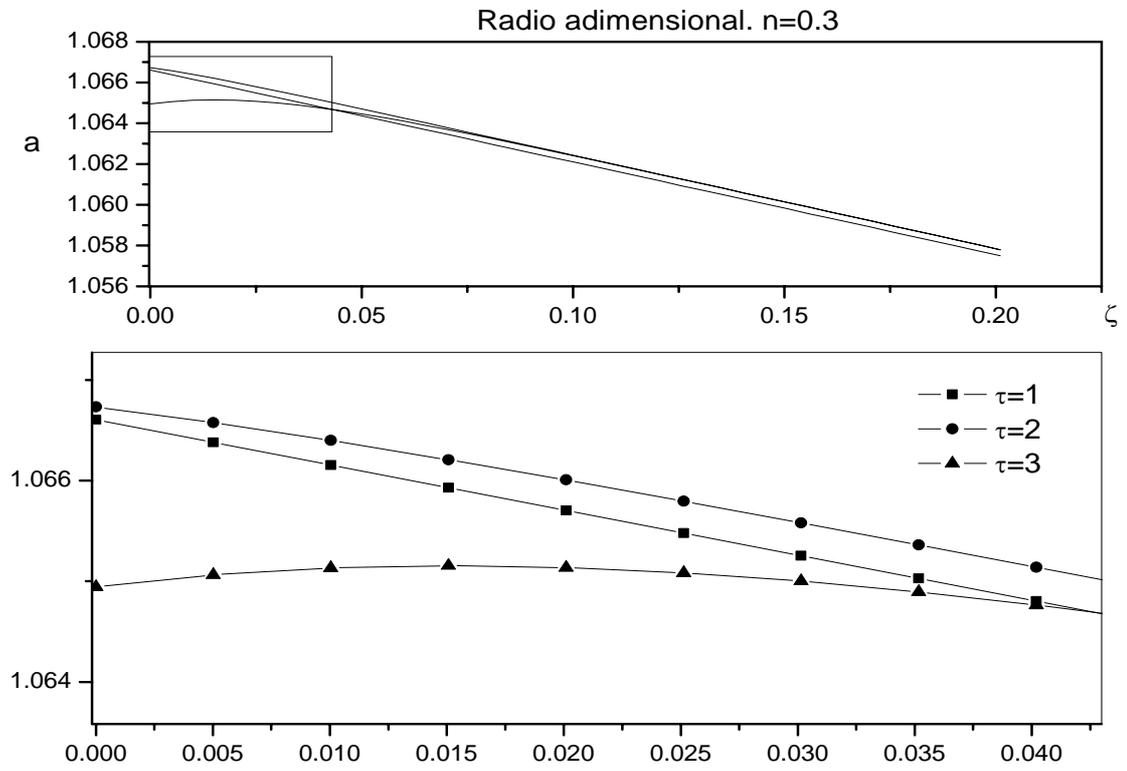


Figura 28: Radio adimensional – distancia.  $n=0.3$

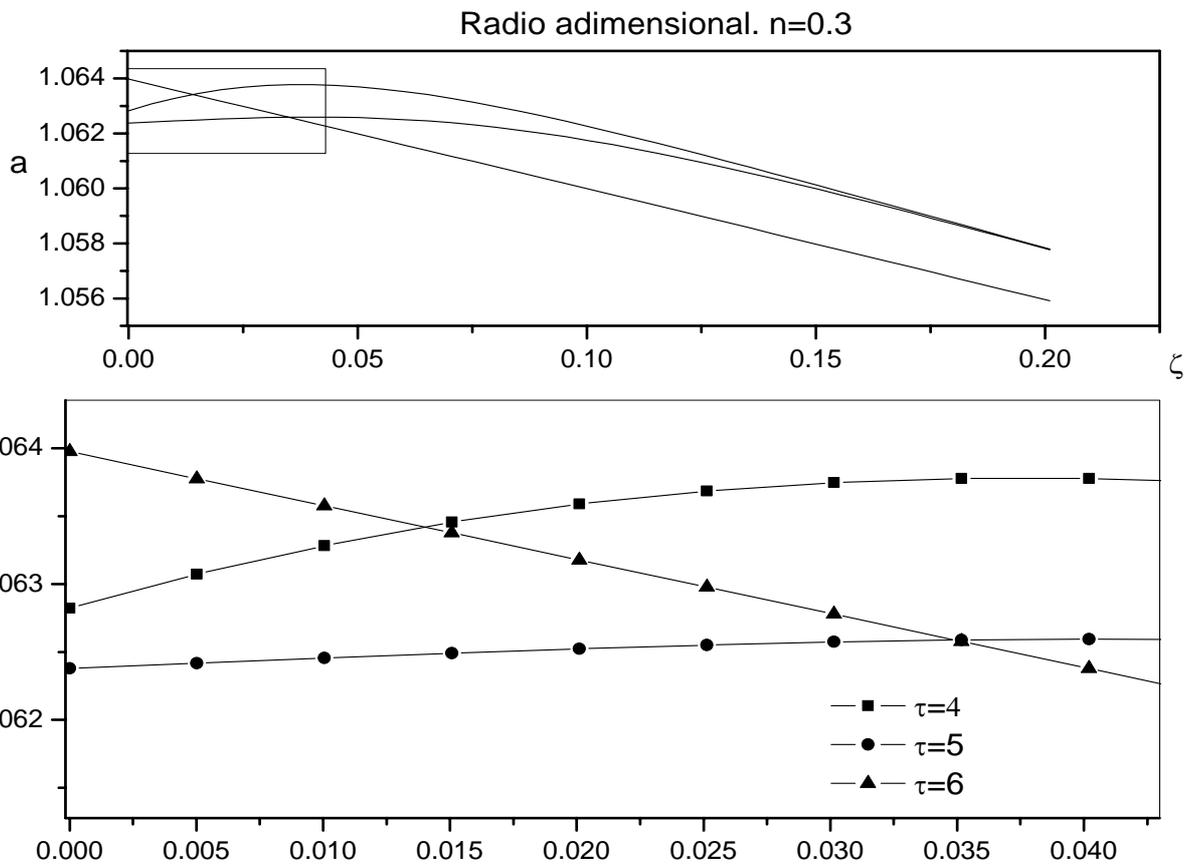


Figura 29: Radio adimensional – distancia.  $n=0.3$

Para los índices de potencia  $n=1$  y  $n=0.3$  no se observan diferencias en los valores de  $\alpha$  para un ciclo de pulsado.

Las siguientes gráficas muestran el parámetro  $\alpha$  con la variación con respecto al tiempo.

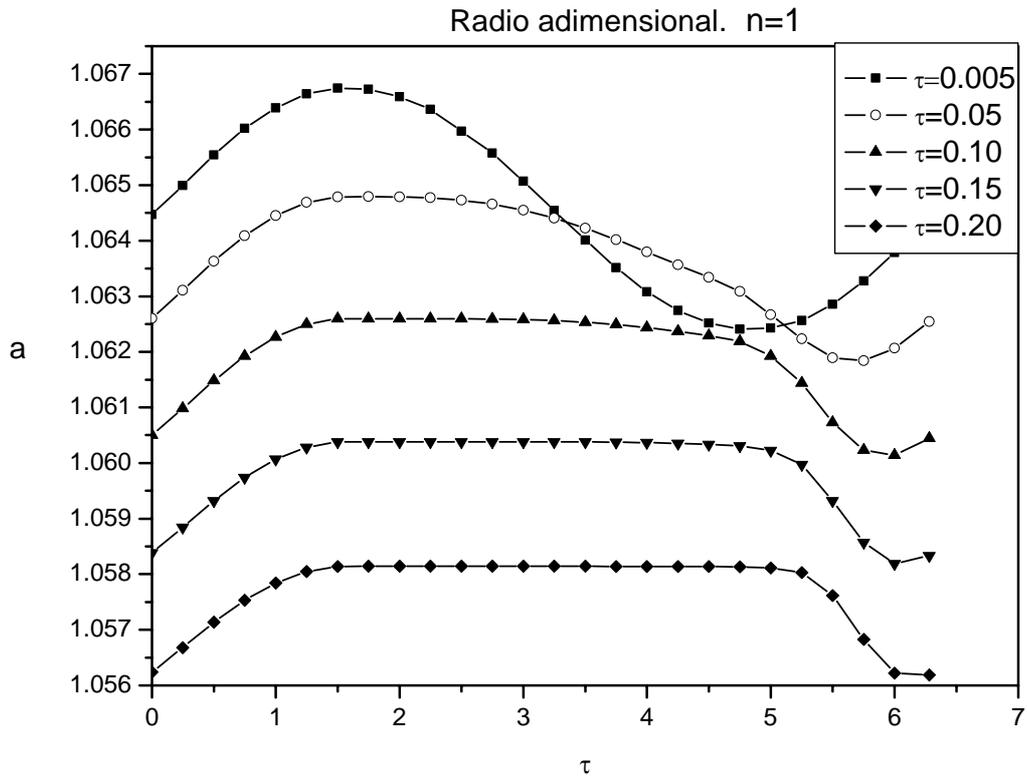


Figura 30: Radio adimensional – tiempo.  $n=1$

En los valores iniciales del parámetro  $\alpha$ , las diferencias entre índices de potencia son muy pequeñas, de las figs. 30 y 31, se observa que la deformación de la pared elástica se atenúa conforme pasa el tiempo, a distancias muy pequeñas.

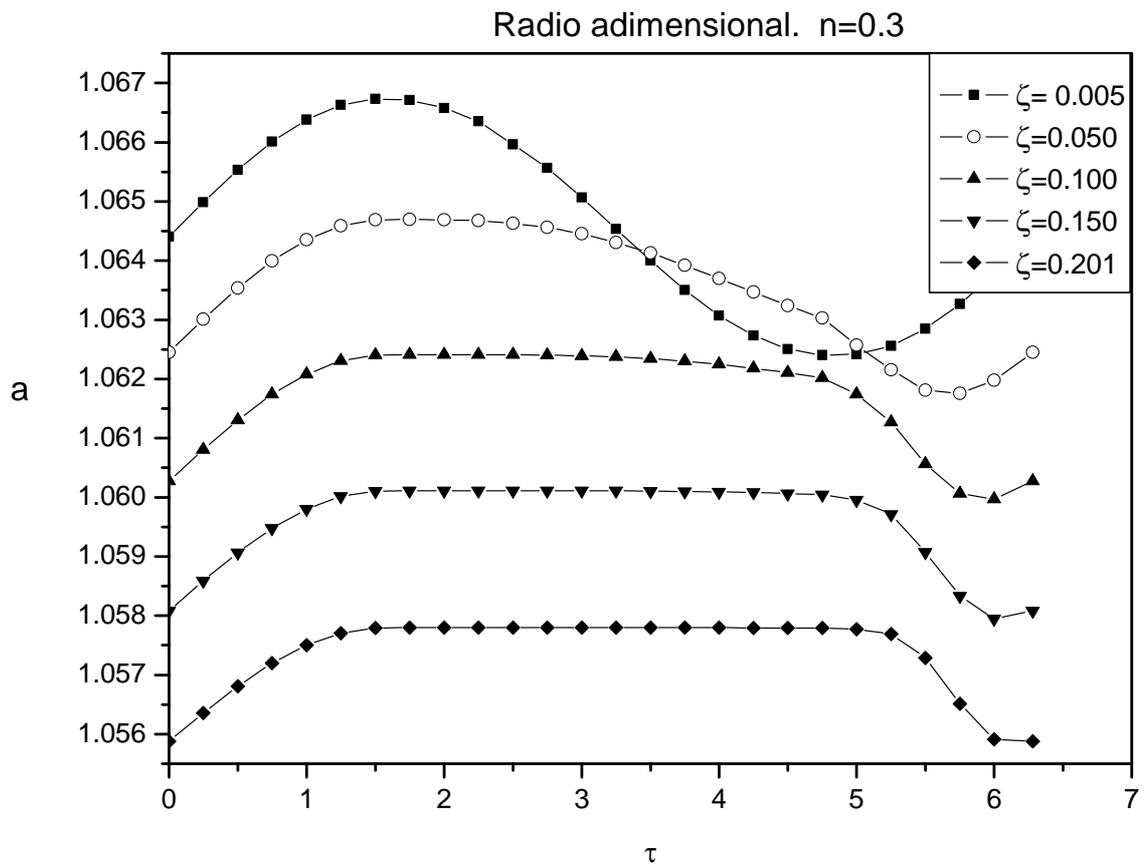


Figura 31: Radio adimensional – tiempo.  $n=0.3$

La diferencia en los valores de  $\alpha$ , en las figs. 30 y 31, es muy pequeña. La influencia del índice de potencia con valores menores a la unidad, el valore de  $\alpha$  es menor. A una distancia muy pequeña el valor de  $\alpha$  disminuye, la deformación de la pared elástica se va atenuando conforme pasa el tiempo. A la entrada del tubo se observa una valor de  $\alpha$  mayor que a la salida, por lo que se tiene un área mayor a la entrada del tubo.

## 4 Conclusiones.

En los resultados de presión-distancia se observa que para las caídas de presión, las diferencias son muy pequeñas para diferentes índices de potencia. En el desarrollo de la presión a lo largo del tiempo; a la entrada, a la mitad y al final del tubo, se aprecian diferencias entre índices de potencia. A la entrada del tubo las amplitudes de la señal de presión disminuyen para índices menores a la unidad, además de presentar un defasamiento en la señal de presión. A la mitad y al final del tubo el efecto oscilatorio se atenúa por completo, y aumentan las diferencias de los valores de presión para distintos índices de potencia. Se observa que conforme el índice de potencia disminuye el valor de la presión también disminuye, para un mismo tiempo y una misma distancia.

El efecto de la señal pulsada de presión se atenúa por la presencia de la pared elástica, este efecto se aprecia en las figs. 30 y 31. Este resultado coincide con la solución no permanente para un fluido no-newtoniano que reportan Misra y Ghosh. [10]. En los resultados de la distribución del radio adimensional  $\alpha$ , se aprecia que existe un valor mayor a la entrada del tubo que a la salida, por lo tanto el área transversal es mayor a la entrada con respecto a la salida. El valor a la entrada del radio adimensional, al igual que la presión, disminuye conforme el índice de potencia decrece. Para cualquier valor de  $n$ , se tiene una deformación uniforme a partir de  $\zeta=0.2$ . El periodo de oscilación del radio adimensional es la mitad del periodo de la señal de presión.

Los valores de velocidad, para cualquier valor de  $n$  aumentan en la dirección axial. Esto se debe a que el área de la entrada del tubo es mayor que el área de salida, obedeciendo el principio de conservación de masa. El índice de potencia tiene una fuerte influencia en la velocidad; en las figs. 11 y 18 se observa que al decrecer el índice de potencia la velocidad disminuye. Para un fluido newtoniano el perfil de velocidad es parabólico, al disminuir el índice de potencia el perfil se hace más uniforme. Debido al carácter de flujo pulsado se presentan oscilaciones en la velocidad, estos resultados coinciden con los reportados por Schultz [5].

El esfuerzo cortante para distancias menores a  $\zeta=0.1$  aumenta al disminuir el índice potencia. El período de oscilación del esfuerzo cortante es igual al periodo de oscilación de la relación de radios, esto coincide con lo reportado por Pontrelli [7]. El esfuerzo cortante se atenúa al avanzar en la dirección axial y para una  $\zeta > 0.4$  el esfuerzo cortante es constante.

En la validación del modelo numérico, se consideró el problema estacionario. En las figs. 3 y 4 se observa que la solución analítica y la numérica son prácticamente iguales, por lo que se puede decir que el método numérico describe correctamente el problema físico.

En un futuro se continuará con el estudio de la microcirculación; pretendiendo encontrar factores determinantes para el desarrollo de soluciones para enfermedades cardiovasculares, alteraciones en la red de arteriolas o capilares. Con este tipo de estudios se quiere abordar problemas como aneurismas, endurecimiento de las paredes de los vasos sanguíneos, la interacción de los glóbulos rojos con la transferencia de oxígeno a los tejidos, predicciones del valor del esfuerzo cortante para diferentes condiciones cerca de la pared elástica.

## Apéndices

### Apéndice A

A continuación se describe el método numérico empleado en la solución de la ec. (34).

Se tiene el problema de conducción transitorio bidimensional que se describe mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \quad (42)$$

Con sus correspondientes condiciones en la frontera e iniciales.

Para eliminar la dependencia en el tiempo, se discretiza el término temporal de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{\Pi_i^{n+1} - \Pi_i^n}{\Delta \tau},$$

y se refiere las derivadas espaciales al tiempo  $n+1$ . Entonces la ec.(42) se expresa como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\theta_i - \Pi_i^n}{\Delta \tau} \quad (43)$$

donde  $\theta_i = \Pi_i^{n+1}$ .

Para la solución a la ec.(43) se plantea un cambio en el tiempo de la variable  $\theta$ ; definiendo el cambio de la variable, en un tiempo ficticio, de la siguiente forma:

$$\delta \theta = \theta - \theta_a \quad (44)$$

En la ec.(43) se agrega una derivada en el tiempo ficticio y se sustituye  $\theta$  usando la ec.(44). Se tiene que:

$$\delta \theta + \Delta t_f \left( -\frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} + \frac{\delta \theta}{\alpha \Delta \tau} \right) = R \quad (45)$$

donde  $R = \Delta t_f \left( \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\Pi}{\Delta \tau} \right)$ .

Entonces se hace una separación del término izquierdo de la siguiente manera:

$$\left( 1 - \Delta t_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( 1 - \Delta t_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta \theta + \frac{\Delta t_f}{\alpha \Delta \tau} \delta \theta = R \quad (46)$$

siendo  $\frac{\Delta t_f}{\alpha \Delta \tau} \delta \theta < 1$

Definiendo la siguiente variable  $\Xi = \left( 1 - \Delta t_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta \theta$ , se tiene lo siguiente:

$$\left( 1 - \Delta t_f \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\Delta t_f}{\alpha \Delta \tau} \right) \Xi = R \quad (47)$$

La ec.(46) se resuelve simultáneamente con la siguiente ecuación:

$$\Xi = \left( 1 - \Delta t_f \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta \theta$$

Cuando cumpla que  $\frac{\delta \theta}{\Delta t_f} < \text{tolerancia}$ , entonces  $\theta_a$  sera igual a  $\theta$ , el nuevo valor de  $\theta$  se convierte en

$\theta_a$ , para iniciar el método iterativo. Una vez discretizando este par de ecuaciones se resuelven mediante un par de matrices tridiagonales.

## Apéndice B.

Código Fuente Programa Fortran 90.

```
!*****
!
! PROGRAM: nonewtonfas
!
! PURPOSE: Obtener los valores de presion en un capilar.
!
!*****
program nonewtonfas
implicit none
! Variables
integer (kind=4) i,mi,iter,itermax
integer (kind=4) t,tmax,titermax
parameter(mi=240,tmax=240)
real(kind=8) tiempo(tmax),aux(mi)
real(kind=8) x(mi),psi(tmax,mi),teta(mi)
real(kind=8) dpspsi(tmax,mi),dteta(mi)
real(kind=8) dx,dx2,dt,dtf,tol
real(kind=8) gama,n,taux,pot,RE
! Body of nonewtonfase
!*** Definición de parámetros ***
tol=0.000001d0
itermax=300000
titermax=10000
gama=0.0000001d0
n=0.5d0
RE=0.001d0
!*** Definición de malla espacial ***
do i=1,mi
x(i)=(dfloat(i-1)/dfloat(mi-1))*1.0d0 !
end do
dx=x(2)
dx2=dx*dx
!*** Definición de malla temporal ***
do t=1, tmax
tiempo(t)=(dfloat(t-1)/dfloat(tmax-1))*6.28d0
end do
dt=tiempo(2)
pot=((3.d0*n)+3.d0)/2.d0
!*** INICIALIZAR LAS VARIABLES ***
!*** condiciones iniciales ***
do i=1, mi
psi(1,i)=((((1.038118857d0**(pot))-(1.133413714d0**(pot))))*x(i)+(1.133413714d0**pot)**(1.d0/pot)
teta(i)=((((1.038118857d0**(pot))-(1.133413714d0**(pot))))*x(i)+(1.133413714d0**pot)**(1.d0/pot)
end do
!*** RUTINA QUE RESUELVE PSI(T,X)
do t=2, tmax
!*** RUTINA QUE RESUELVE TETA(X) ***
do i=1, mi
aux(i)=psi(t-1,i)
end do
```

```

taux=tiempo(t)
do iter=1, itermax
dtf=1.d0*dx2*RE
call rutinamet(x,dx,t,taux,dt,dtf,gama,n,aux,teta,dteta)
write(*,*) maxval(dteta/dtf) !,maxval(dteta)
if (maxval(dteta/dtf)<tol) then
goto 10
end if
end do
10 continue
do i=1,mi
psi(t,i)=teta(i)
end do
!***
end do
!***
!*** ESCRITURA DEL RESULTADO ***
call salida(psi,mi,tmax,x,tiempo)
!***
!***
end program nonewtonfas

```

Subrutinas.

```

subroutine rutinamet(x,dx,t,tiempo,dt,dtf,gama,n,psia,teta,dteta)
!*** Variables ***
implicit none
integer(kind=4) MI,i,tmax
parameter (MI=120,tmax=120)
real(kind=8) dx,dt,dtf,t
real(kind=8) gama,n
real(kind=8) res(MI),teta(MI),dteta(MI),psia(MI)
real(kind=8) x(MI),tiempo
real(kind=8) ai(MI),bi(MI),ci(MI),ri(MI),tetai(MI)
real(kind=8) dtetax(MI),d2tetax(MI)
real(kind=8) termuno(MI),termdos(MI)
!*** ***
!*** Definir el residuo ***
do i=2, MI-1
dtetax(i)=(teta(i+1)-teta(i-1))/(2.d0*dx)
d2tetax(i)=(teta(i+1)-(2.d0*teta(i))+teta(i-1))/(dx*dx)
termuno(i)=(((3.d0*n)+1)/2.d0)*dtetax(i)*dtetax(i)/teta(i)
termdos(i)=(n*gama/dt)*(teta(i)-psia(i))*(teta(i)**((-3.d0*n)-1.d0)/(2.d0*n))*(abs(dtetax(i))**(-1.d0/n))*dtetax(i)
!*** residuo ***
res(i)=d2tetax(i)+termuno(i)-termdos(i)
end do
!*** condición extremo arterial ***
bi(1)=1.d0
ci(1)=0.d0
ri(1)=1.133413714d0+(0.019d0*sin(tiempo))-teta(1)
!*** condición extremo venoso ***
ai(MI)=0.d0
bi(MI)=1.d0
ri(MI)=1.038118857d0-teta(MI)
do i=2, MI-1

```

```

ai(i)=-dtf*(1.d0/(dx**2.d0))
bi(i)=1.d0+dtf*(2.d0/(dx**2.d0))
ci(i)=-dtf*(1.d0/(dx**2.d0))
ri(i)=res(i)*dtf
end do
call TRI(ai,bi,ci,ri,tetai,MI)
do i=1, mi
dteta(i)=tetai(i)
end do
do i=1, mi
teta(i)=teta(i)+dteta(i)
end do
end subroutine rutinamet
subrutina de salida
subroutine salida(psi,mi,tmax,x,tiempo)
implicit none
! ****declaracion de variables****
integer (kind=4) mi,tmax
integer (kind=4) i,t
real (kind=8) psi(tmax,mi),tiempo(tmax),x(mi)
! ***** out *****
open(unit=10,file='prueban=1.0.txt')
do t=1,tmax
do i=1,mi
write(10,102) tiempo(t),x(i),psi(t,i) ;102 format(3e18.8)
end do
end do
close(unit=10)
end subroutine
subrutina matriz
!*****
SUBROUTINE TRI(A,B,C,R,U,N)
IMPLICIT REAL*8(a-h,o-z)
PARAMETER(NMAX=1000)
DIMENSION GAM(NMAX),A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
IF (B(1).EQ.0.d0) PAUSE 'SINGULAR MATRIZ'
BET=B(1)
U(1)=R(1)/BET
DO 11 k=2,N
GAM(k)=C(k-1)/BET
BET =B(k)-A(k)*GAM(k)
IF(BET.EQ.0.d0) PAUSE 'MATRIZ SINGULAR'
U(k)=(R(k)-A(k)*U(k-1))/BET
11 CONTINUE
DO 12 k=N-1,1,-1
U(k)=U(k)-GAM(k+1)*U(k+1)
12 CONTINUE
RETURN
END
!*****

```

## Bibliografía.

- [1] Amar, H. Kerroum, M. Zeggwagh, G., *Modélisation de la contrainte pariétale puor un écoulement pulsé de fluide diphásique en conduite déformable de faible diamètre.* Biomécanique, Serie II b, 1998, pp.197-204
- [2] Bird B. R., *Fenomenos de Transporte.*, Primera Edición. Editorial Reverté, México 2004
- [3] Huang, C. R., *Characterization of Thixotropic Fluids*, pp.3-17, en: Cheremisinoff, *Encyclopedia of Fluids Mechanics, Rheology and Non-Newtonian Fluids*, Vol. 7, Gulf Publishing Company,1988
- [4] Guyton, C. A., *Tratado de Fisiología Médica.*, Primera Edición. Editorial Interamericana - McGraw-Hill, México 1997
- [5] Schultz D. L., *Pressure and Flow in large arteries.*, *Cardiovascular Fluid Dynamics*,Academic Press, 1972.
- [6] Ku,N. D., *Blood Flow in Arteries.*, *Annual Review of Fluid Mechanics*,Vol. 29 pp.399-344,1997
- [7] Pontrelli, G., *Pulsatile Blood Flow in a Pipe.*, *Computers and Fluids*, Vol.27,1998, pp.367-380.
- [8] Secomb, T. W., Hsu, R., Pries, A. R., *Motion of red blood cells in a capillary with an Endothelial surface layer: effect of flow velocity.*, *Microcirculation*,Vol. 9,2002 pp. 189-196
- [9] Middleman, S. *An Introduction to Fluid Mechanics. Principles of Analysis and Design.*, Jhon Wiley & Sons,1998.
- [10] Misra J. C., Ghosh S.K., *Flow of a Casson fluid in a narrow tube with side branch.*, *International Journal of Engineering Science.*,Vol. 38, 2000, pp.2045-2077
- [11] Fung, Y. C., *Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues.*, Second Edition, Springer, 1993.
- [12] Beebe J. D., *Physics and Applications of Microfluids in Biology.*, *Annual Review Biomedic Engineering*, Vol.4, 2002, pp.261-286