



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

Simulación Numérica del Proceso de Laminado
Usando la Aproximación de Hitchcock

Tesis que para obtener el Título de Ingeniero Mecánico presenta

Jonathán Boanerge Pérez Navarrete

Director de Tesis:
Dr. Armando Ortiz Prado



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

NOMENCLATURA

μ	Coeficiente de Fricción
Δh	Cambio de Espesor de la Placa
h_f	Espesor Final
h_o	Espesor Inicial
r	Reducción
σ_1	Esfuerzo Principal en la dirección 1
σ_3	Esfuerzo Principal en la dirección 3
σ_y	Esfuerzo de cedencia del material para deformación uniforme
σ_o	Esfuerzo de cedencia del material para deformación biaxial
α	Ángulo de Mordedura
ν	Coeficiente de Poisson
E_r	Módulo de elasticidad de los rodillos
w	Ancho del material
p_r	Presión Radial
θ	Ángulo de Contacto
V_c	Variación de Carga Porcentual
V_{pr}	Variación de Máxima de Presión Radial
V_n	Variación del Ángulo Neutro

INDICE

Nomenclatura	i
Índice	ii
Prólogo	iii
Capítulo 1	
Antecedentes	
1.1 Introducción	5
1.2 Descripción del Proceso	6
1.3 Tipos de Laminación	7
1.4 Relaciones geométricas en el laminado	8
Capítulo 2	
Planteamiento del problema y solución	16
Capítulo 3	
Análisis de Resultados y Conclusiones	
3.1 Análisis de Resultados	27
3.2 Conclusiones	42
Bibliografía	44
Anexo 1	
Listado del programa <i>Laminación</i>	45
Anexo 2	
Listado del programa que considera rodillos indeformables	48
Anexo 3	
A.3.1 Método de Runge Kutta	51
A.3.2 Método del Trapecio	53

PRÓLOGO

El objetivo del presente trabajo es comparar la diferencia que existe entre la solución de Bland y Ford de la ecuación de Von Karman, que considera los rodillos de laminación como indeformables, y la solución de la misma incorporando la ecuación de Hitchcock para obtener el perfil de presión radial en función del ángulo de contacto. Ésta a diferencia de trabajos anteriores, como el de Alexander, considera un proceso iterativo una vez que la carga total ha sido obtenida (Alexander, 1972: 342-344), en ocasiones agregando el comportamiento elástico. En 1951 Ford demostró que tal efecto es despreciable, y de éste modo calcular teóricamente la influencia del aplastamiento de los rodillos, que se evalúa experimentalmente en tanto como un 15% (Shah, 1978: 160), esperando con ello, un resultado más realista a la solución del Método del Planchón.

Como se parte de una ecuación diferencial (Ecuación de Von Karman) se ha elegido para resolverla el método de Runge Kutta de 4o orden por ser de fácil uso, fácil de programar y dado que el intervalo de cálculo oscila alrededor de los 6° , es decir unos 0.1047 radianes, y el orden del error es de magnitud del orden de 0.001% del paso considerado en el intervalo, el programa se encuentra escrito en C++, dado que es un poderoso lenguaje de programación que permite el encapsulamiento al crear familias de funciones y permitir controlar el acceso a valores y funciones dentro del programa principal. Para la estimación de la carga mediante la aproximación de Hitchcock se hace uso de la integración numérica, éstos métodos requieren que el paso de muestreo de los datos sea equiespaciado por lo que si bien existen algoritmos desarrollados con el fin expreso de disminuir el número de iteraciones en un intervalo como es el caso de usar un paso adaptativo, extrapolación activa, el método de Heun o el procedimiento de Fehlberg (Redheffer, 1991: 600-640) se ha elegido así

mismo por su simplicidad y el tamaño del paso el Método del Trapecio.

En el primer capítulo se presentan los temas básicos entre los que se encuentra el Método de Runge Kutta, relaciones geométricas básicas en el laminado, el método del Planchón y la ecuación de Von Karman siendo éste el esqueleto sobre el que en el segundo capítulo se detalla la solución de la ecuación diferencial de Von Karman que considera en el rodillo un comportamiento elástico mediante la ecuación de Hitchcock, teniendo como punto de mayor interés el desarrollo del programa, *Laminación*, el que estructurado en pseudocódigo y los diagramas de flujo es factible de escribir no sólo en C++, sino en cualquier otro lenguaje que se desee. El listado del mismo se encuentra en el anexo uno. En el anexo número dos se presenta el programa que modela el proceso de laminación sin considerar la aproximación de Hithchcock y en el anexo tres se indican los métodos numéricos empleados en el desarrollo de los mismos.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 Introducción

Entre los diversos problemas a los que la ingeniería se ha enfrentado está la laminación, cuyo objetivo primordial es reducir el área de la sección transversal con el fin de producir perfiles de formas diversas a través de varios pasos de deformación, ejemplos de su aplicación son varillas, canaletas, cuadrado, solera, o bien placas. Es un proceso de conformado mecánico y de deformación volumétrica, cuya importancia es evidente, puesto que el laminado representa el 90% de los productos fabricados mediante procedimientos convencionales.

Los antecedentes más antiguos del proceso de laminación se remontan a 1550, cuando se obtienen las primeras hojas de metal laminado, que se caracterizan por tener un espesor uniforme a diferencia de las producidas anteriormente por forja. Es de suponer la rápida difusión del proceso usándose no sólo para ajustar el espesor de las hojas sino también para reducirlo. En principio el proceso no se aplicó al hierro, hubo de transcurrir más de un siglo para que esto ocurriera.

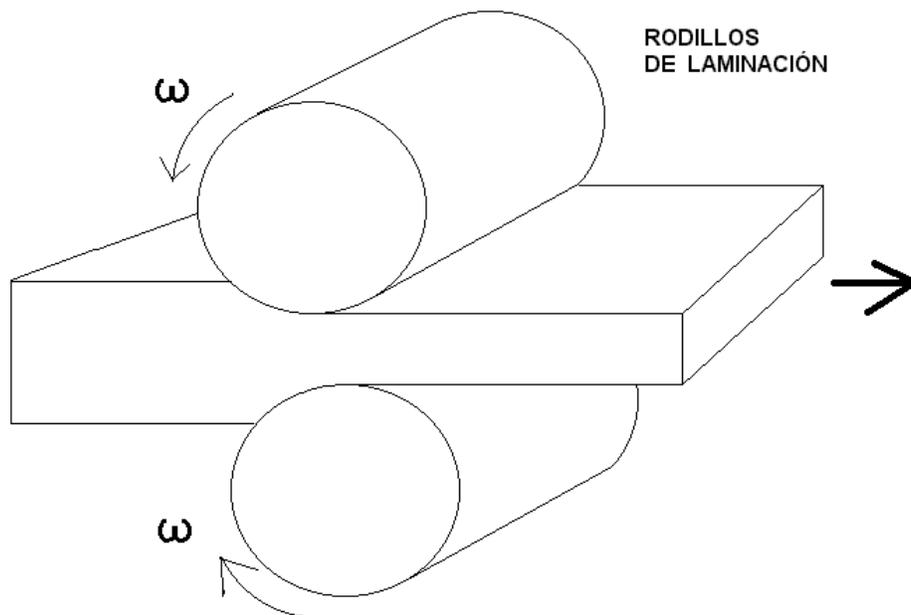
El verdadero nacimiento de la laminación se produce hasta 1783, cuando el inglés Henry Cort obtiene la patente británica No. 1351, la cual introduce los rodillos ranurados que se emplean en la manufactura de barras de hierro.

En 1925 Von Karman obtiene la ecuación que lleva su nombre y de la cual derivan todos los análisis de laminado a excepción del análisis propuesto por Orowan en 1943 mismo que se hizo en

coordenadas polares. Swift en los 30's dedicó su trabajo al comportamiento, a la medición y control de la deformación, mientras que en los 40's Lankford desarrolló el concepto de velocidad de deformación para expresar la anisotropía plástica.

1.2 Descripción del Proceso

La laminación consiste en la reducción de la sección transversal de un material, al hacerlo pasar entre dos rodillos cilíndricos que giran en sentido opuesto. Dichos cilindros producen la deformación plástica del material por medio de cargas de compresión y corte. Los de compresión se deben a que a medida que el material se va introduciendo entre los rodillos el espesor libre entre ellos va siendo cada vez menor, los esfuerzos cortantes se deben a que las fibras externas del material están sujetas a la fuerza de fricción de los rodillos.



Laminación
Figura 1.1

1.3 Tipos de Laminación

Se prefiere clasificar a la laminación como *laminación en caliente* y *laminación en frío*, aunque es más conveniente agrupar con base en las condiciones de flujo del metal durante el proceso.

a) Laminación en caliente; ésta se produce a una temperatura superior a la temperatura de recristalización del material de trabajo.

b) Laminación en frío; ésta se realiza a temperatura ambiente o un poco superior a ella. Entre sus ventajas se pueden mencionar:

- ❖ Buen acabado superficial
- ❖ Buen control dimensional

Desventajas

- ❖ Bajo porcentaje de reducción posible (Necesario recocido para aliviar tensiones por deformación plástica)

Por su parte la laminación en caliente presenta las siguientes características:

- ❖ Posibilidad de altos porcentajes de reducción
- ❖ Deficiente acabado superficial
- ❖ Menores cargas de deformación

Es en base a éstas características que se selecciona el mejor proceso para un producto dado y en muchos casos se hace uso de ambos. Por lo

regular en los primeros pasos de deformación lo que se requiere es de grandes reducciones, por lo que se realizan en caliente, y para el mejorar el acabado o dimensiones se hace laminado en frío.

1.4 Relaciones geométricas en el laminado

Al tener una deformación plástica el gasto volumétrico es igual a la entrada y a la salida:

$$b_0 h_0 v_0 = b_f h_f v_f \quad (1.1)$$

donde:

- b Ancho
- h espesor
- v Velocidad
- 0 Condición de entrada
- f Condición de salida

En el laminado de productos planos se puede considerar que el ensanchamiento es nulo, por lo tanto:

$$v_f = v_0 \left(\frac{h_0}{h_f} \right) \quad (1.2)$$

v_0 : Velocidad a la Entrada

v_f : Velocidad a la Salida

La reducción está definida como:

$$r = \left(\frac{h_0 - h_f}{h_f} \right) \quad (1.3)$$

La presión de laminado se aplica sobre el arco de contacto. Para el análisis se va a considerar la proyección de este en la dirección de laminado, esta nueva variable se considera como longitud del arco de contacto L_p .

$$R^2 = L_p^2 + \left(R - \frac{\Delta h}{2} \right)^2 \quad (1.4)$$

$$L_p = \left(R \Delta h - \frac{\Delta h^2}{4} \right) \quad (1.4.1)$$

R: Radio del rodillo

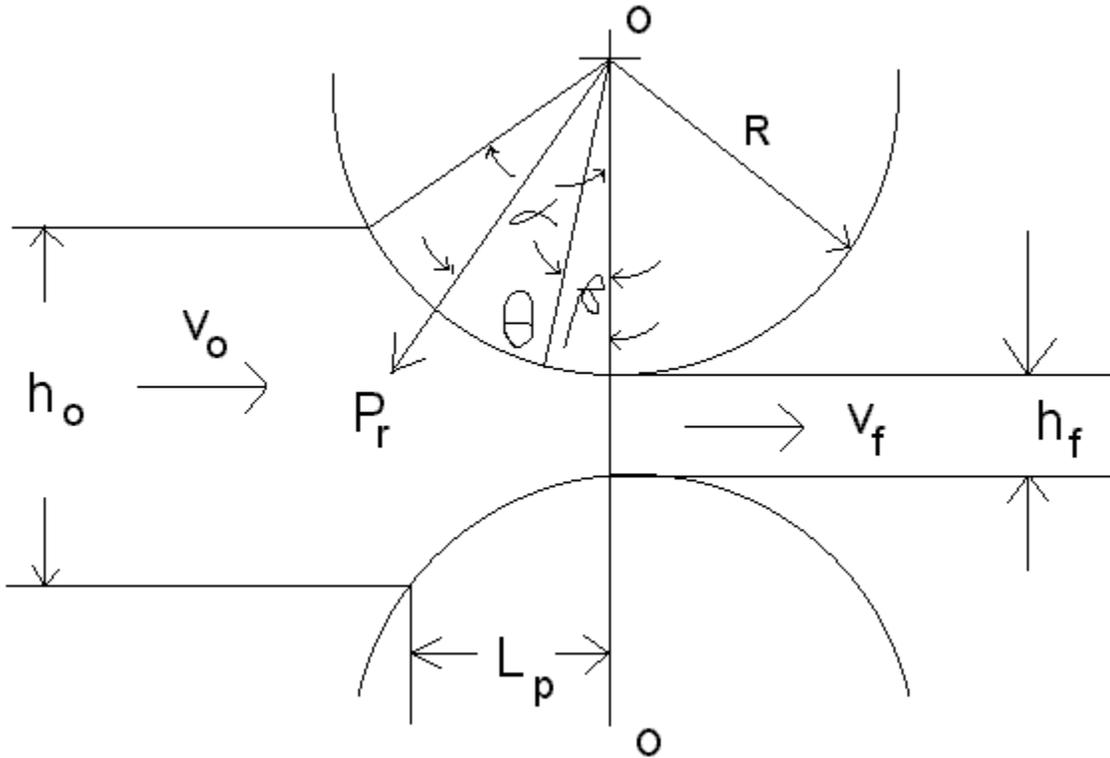
Como $\Delta h \ll R$ se simplifica a:

$$L_p = (R\Delta h)^{1/2} \quad (1.5.2)$$

Por tanto la carga de laminación será

$$P = \bar{p} b L_p \quad (1.6)$$

Donde \bar{p} es la presión promedio de laminación.



Fuerzas que actúan durante la laminación
Figura 1.2

El ángulo formado por el plano de entrada y el ángulo que contiene el eje de rotación de los rodillos, se denomina ángulo de mordedura α y está dado por:

$$\alpha = \arcsen \frac{L_p}{R} \quad (1.7)$$

La máxima reducción teórica posible que se puede obtener si se considera que la fuerza que provoca la entrada del material debe ser mayor y en el límite igual a la que se opone al paso de éste. De lo anterior y con base en la Figura 1.3 se tiene:

$$F \cos \alpha \leq P_r \sin \alpha \quad (1.8)$$

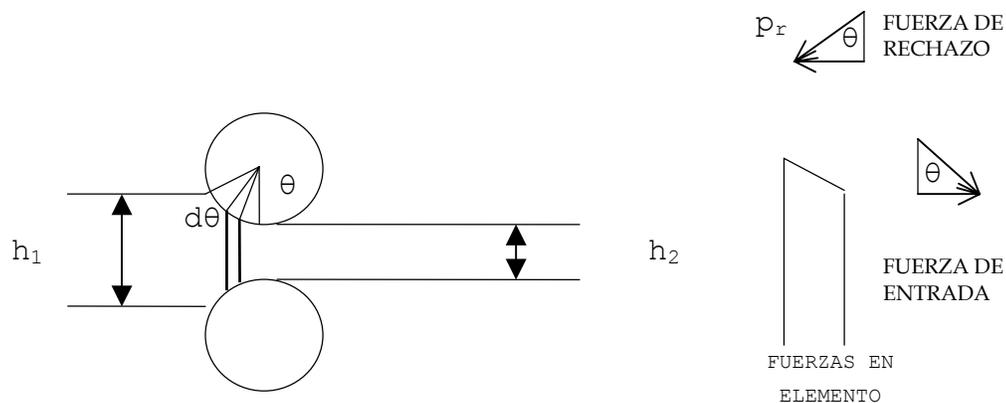
Donde:

F: Fuerza tangencial a la superficie del rodillo

P_R : Presión radial

$$F/P_r = \tan \alpha$$

La fricción existente entre los rodillos y el material durante el proceso de laminación es de gran importancia para el adecuado desarrollo de éste, basta decir que la entrada del material depende por completo del valor del coeficiente de fricción, si se realiza un balance de fuerzas en la dirección horizontal, se tiene que la fuerza de fricción tiene una componente que permite la entrada del material mientras la presión radial ejerce una fuerza para que éste entre en el claro de laminación (Figura 1.2).



Fuerza de Fricción
Figura 1.3

El balance queda $\mu p_r \cos \theta - p_r \sin \theta$, en el punto en que la fuerza de entrada ya no puede vencer la fuerza de rechazo se tiene que $\mu p_r \cos \theta_{\text{máx}} - p_r \sin \theta_{\text{máx}} = 0$, de donde:

$$\mu = \tan \theta_{\text{máx}} \quad (1.9)$$

Éste es el ángulo máximo de mordedura, mismo que determina la máxima reducción posible para un arreglo dado.

Por un lado, el coeficiente de fricción es una función compleja de la velocidad, temperatura, material, acabado de los rodillos, lubricante (refrigerante) empleado y material que se va a laminar; además varía punto a punto con respecto al arco de contacto. Todo esto hace sumamente complicada su correcta medición, por lo que en todas las teorías de laminación se toma a éste como constante.

Para laminado en frío con empleo de lubricante se estima que el valor de este varíe entre 0.05 y 0.10, mientras que para el laminado en caliente, es común considerar valores superiores a 0.20. Para condiciones sin deslizamiento como se tienen el caso del laminado de acero, con rodillos de éste mismo material, a una temperatura de 1100° y aplicando grafito coloidal disuelto en agua como lubricante, el coeficiente de fricción varía entre 0.20 a 0.40. Es de suma importancia el valor de dicho coeficiente, ya que limitará el ángulo de contacto máximo según: $\mu = \tan \theta_{\text{máx}}$, además el mínimo espesor de la hoja metálica que va ser producida será proporcional al coeficiente de fricción. Por último se tiene que un incremento del coeficiente de fricción redundará en un desplazamiento del punto neutro hacia la entrada y, por tanto, en un aumento de la carga y potencia demandada para el proceso. Aún cuando pudiera aplicarse para obtener el coeficiente de fricción, el resultado obtenido no será preciso, por lo que este procedimiento se descarta. El coeficiente de fricción relaciona la fuerza normal ejercida por dos superficies en contacto ejerciendo una fuerza normal (N) y la fuerza requerida (F) para mover esas dos superficies relativamente según:

$$F = \mu N \quad (1.10)$$

De lo anterior y mediante trigonometría se puede llegar a:

$$\Delta h_{\text{máx}} = \mu^2 R \quad (1.11)$$

De (1.10) se tiene que la máxima reducción está limitada por el coeficiente de fricción y el radio de los rodillos, lo cual justifica los grandes diámetros de éstos en el desbaste.

A la fecha existen diversos métodos analíticos, empíricos y experimentales a partir de los cuales se puede evaluar de forma aproximada la carga de laminación. Su exactitud está delimitada por las características particulares del proceso que se analice.

La ecuación más sencilla se deduce considerando el aplastamiento libre del material. Si se considera un 20% adicional por fricción se tiene:

$$P=1.2\sigma_0bL_p \quad (1.12)$$

y:

$$\sigma_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_y \quad (1.13)$$

donde:

σ_0 : Esfuerzo de cedencia para una condición biaxial de deformación

σ_y : Esfuerzo de cedencia a la deformación homogénea

Uno de los problemas de conformado mecánico que más se ha estudiado es la laminación. En éstos estudios se ha pretendido expresar las fuerzas y presiones que se generan durante el proceso, en función de variable geométricas y de la resistencia del material. Dada la variedad de casos que pueden presentarse esto ha dado lugar a soluciones complejas.

La ecuación diferencial de equilibrio para un material que se deforma entre rodillos es común a todas las teorías. Para desarrollarla se deberá cumplir que:

1. Se da deformación plana.
2. No existe deformación elástica de los rodillos .
3. La velocidad periférica de los rodillos es constante.
4. La dirección de la carga aplicada y los planos perpendiculares a ésta dirección definen las direcciones principales.
5. Los esfuerzos principales no varían dentro de éstos planos.
6. Los esfuerzos de fricción se incluyen dentro de la fuerza de equilibrio.

7. La fricción no influye en la distorsión interna del metal.
8. La fricción no influye en la orientación de las direcciones principales.
9. El proceso de laminado es simétrico.

Las condiciones mencionadas básicamente se cumplen para la laminación en frío. Para el caso de laminación en caliente no se podrá resolver la ecuación diferencial resultante, debido a la compleja dependencia que existe del esfuerzo de cedencia con respecto a la velocidad de deformación y temperatura, así mismo se complica la solución analítica al no poder justificar la simplificación de dicha ecuación, ya que los ángulos de mordedura son mucho mayores. En la Figura 16 se puede observar que al realizar un balance de fuerzas antes y después del punto neutro la única diferencia será el sentido, y por tanto, el signo de la fuerza de fricción.

Haciendo $\sum F_x = 0$.

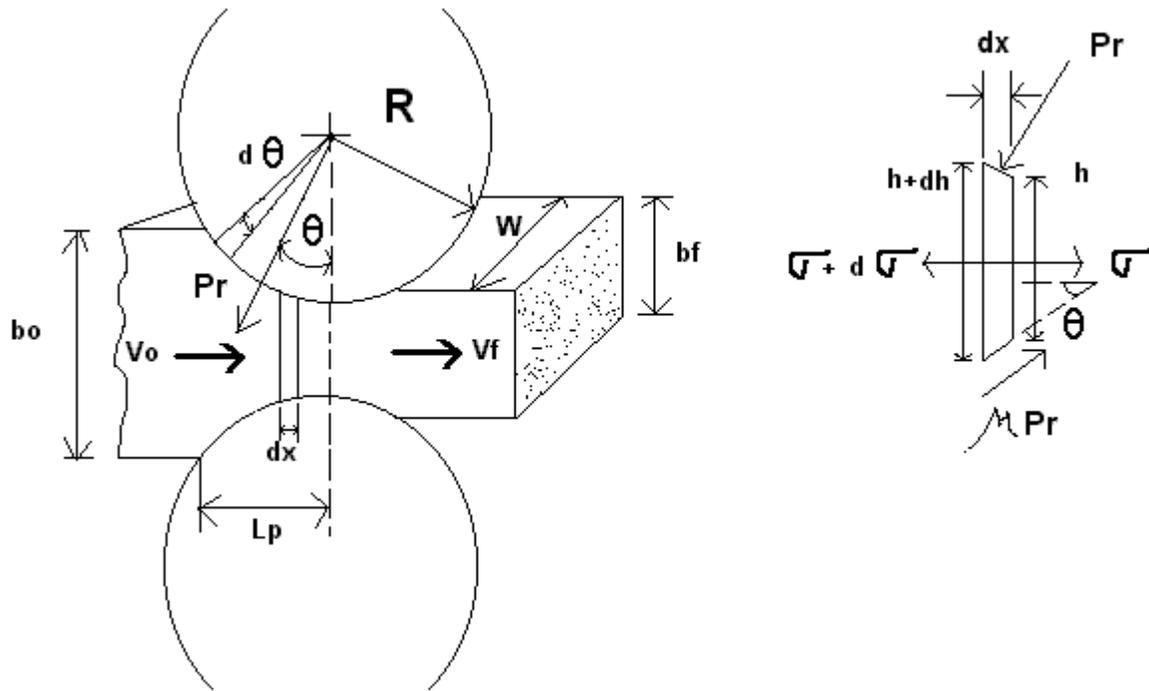
Variables empleadas:

P_R : Presión radial

σ_x : Esfuerzo longitudinal debido a la presencia del devanador o freno

α : Ángulo definido con respecto al ángulo de salida

x : Coordenada paralela al eje de laminación



Corte de la sección de la zona de deformación, mostrando los esfuerzos actuando en un elemento diferencial
 Figura 1.4

a) Carga debida a los esfuerzos longitudinales (considerar unidad de ancho).

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh) - \sigma_x h$$

b) Carga debida a la fuerza de fricción

μP_R - fuerza de fricción, su área de aplicación es:

$$A = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

$$\pm 2 \mu P_R \left(\frac{dx}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha - \text{Carga de fricción}$$

signo de las Figura 1.4:

+ Neutro a la salida

- Entrada a neutro

Por último se tiene la carga debida a la presión radial:

$P_R A$ Presión radial

Donde:

$$A = \frac{dx}{\cos\alpha}$$

$P_R \text{sen}\alpha$ - Proyección sobre el eje X

Fuerza con respecto a X debida a P_R : (Considerar dos rodillos)

$$2P_R \frac{dx}{\cos\alpha} \text{sen}\alpha$$

De lo anterior se tiene que $\sum F_x = 0$

$$(\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh) - \sigma_x h \pm 2 \mu P_R \left(\frac{dx}{\cos\alpha} \right) \cos\alpha + 2P_R \frac{dx}{\cos\alpha} \text{sen}\alpha = 0 \quad (1.14)$$

Desarrollando la ecuación anterior se llega a:

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x + dh d\sigma_x \pm 2 \mu P_R d\alpha + 2P_R \tan\alpha dx = 0 \quad (1.14.1)$$

despreciando el producto de diferenciales

$$dh d\sigma_x = 0$$

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x \pm 2 \mu P_R d\alpha + 2P_R \tan\alpha dx = 0 \quad (1.14.2)$$

Por otra parte:

$$\sigma_x dh + h d\sigma_x = d(\sigma_x h)$$

Colocando todos los términos en función de $R d\alpha$ (Coordenadas polares)

$$ds = R d\alpha$$

$$dx = R d\alpha \cos\alpha$$

$$\frac{dh}{2} = R d\alpha \text{sen}\alpha$$

Como:

$$\tan\alpha \cos\alpha = \text{sen}\alpha$$

De la ecuación (1.14.2)

$$\frac{d(\sigma_x h)}{d\alpha} = -2P_R R (\text{sen}\alpha \pm \mu \cos\alpha) \quad (1.15)$$

A esta última expresión se le conoce como ecuación de Von Karman, por ser el primero en desarrollarla (1925).

CAPÍTULO 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y SOLUCIÓN

Entre las muchas aproximaciones al proceso de laminación se encuentra el método del planchón cuyas limitaciones principales radican en considerar un campo de esfuerzo homogéneo para el elemento diferencial sobre la dirección vertical, así como condiciones de deformación plana, de la ecuación de Von Karman se puede obtener una solución directa para σ_x (Ec. 1.15), y así mismo obtener el perfil del ángulo de contacto (θ) vs la presión radial (P_r) que soporta el rodillo, lo que permite una aproximación al proceso de laminación más realista. Por lo anteriormente expuesto una notable mejora sería, desde luego, considerar el aplastamiento de los rodillos, que es el objetivo primordial del presente trabajo. Para esto primero se desarrollará la ecuación de Von Karman, hasta dejarla en términos de las variables de interés, posteriormente se realizará el diagrama de flujo, que se puede escribir en cualquier lenguaje que se desee (Para este proyecto se programará en C++) y se compararán los resultados punto por punto para su posterior análisis en las conclusiones.

Para modelar el proceso de laminación considerando el rodillo con un comportamiento elástico y posteriormente resolver numéricamente se parte de la ecuación de Von Karman :

$$d(\sigma_x h) = -2P_r R (\sin \alpha' \pm \mu \cos \alpha') d\alpha' \quad (1.15)$$

El espesor h se determina en función de la posición α :

Para cualquier α

$$h = h_f + dh$$

de la Figura 2.1:

$$\frac{\Delta h}{2} = R - R \cos \alpha$$

$$\Delta h = 2R(1 - \cos\alpha)$$

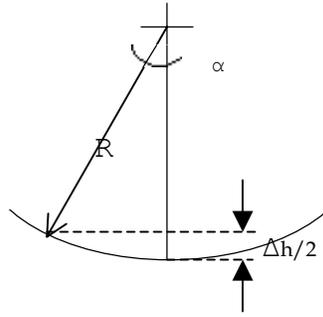


Figura 2.1

$$h = h_f + 4R \sin^2(\alpha/2) \quad (2.1)$$

Sustituyendo:

$$\frac{d(\sigma_x h)}{d\alpha} = -2P_R R(\sin\alpha \pm \mu \cos\alpha) d\alpha \quad (2.2)$$

$$\frac{d(\sigma_x h)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(\sigma_x \left(h_f + 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{d(\sigma_x h)}{d\alpha} = \left(h_f + 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{d\sigma_x}{d\alpha} + 4R \sigma_x \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (2.4)$$

Como $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

$$\frac{d(\sigma_x h)}{d\alpha} = \left(h_f + 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{d\sigma_x}{d\alpha} + 2R \sigma_x \sin\alpha \quad (2.5)$$

Se tiene que:

$$\left(h_f + 4R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \frac{d\sigma_x}{d\alpha} + 2R \sigma_x \sin\alpha = -2P_R R(\sin\alpha \pm \mu \cos\alpha) d\alpha \quad (2.6)$$

Desarrollando:

$$\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = \frac{-2R}{h_f + 4R \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} (P_R(\sin\alpha \pm \mu \cos\alpha) + \sigma_x \sin\alpha) \quad (2.7)$$

De la Figura 1.4 se puede establecer que:

$$P = P_R(1 \pm \mu \tan\alpha') \quad (2.8)$$

P: Presión de laminación

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_3 = -p$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_x - (-P) &= -\sigma_0 \\ -\sigma_x + P &= \sigma_0 \longrightarrow \sigma_0 + \sigma_x = P \quad (2.9) \end{aligned}$$

Puesto que σ_0 es un esfuerzo compresivo. También se tiene que:

$$P_r = \sigma_0 + \sigma_x / (1 \pm \mu \tan \alpha') \quad (2.10)$$

Usando el criterio de Von Mises: $\sigma_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y$ (1.12)

Finalmente:

$$\frac{d\sigma_x}{d\alpha} = \frac{-2R}{h_f + 4R \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_y + \sigma_x\right)}{(1 \mp \mu \tan \alpha)} (\operatorname{sen} \alpha \pm \mu \operatorname{cosen} \alpha) + \sigma_x \operatorname{sen} \alpha \right) \quad (2.11)$$

Donde el signo (-) que antecede a $\mu \operatorname{cosen} \alpha$ es para la ecuación que modela el comportamiento de la entrada al punto neutro, mientras que el signo (+) se aplica del punto neutro a la salida. Ésta será la ecuación básica a la que se agrega la ecuación de Hitchcock que considera el aplastamiento del rodillo.

Las grandes fuerzas necesarias para deformar el material durante el laminado provocan dos tipos fundamentales de deformación elástica en los rodillos. Primero, los rodillos tienden a flexionarse debido a que el material tiende a separarlos, mientras que el movimiento axial de los piñones está restringido; esto puede provocar variaciones de espesor a lo largo de la hoja, lo cual será compensado por el coronamiento del rodillo. Segundo, los rodillos se deforman en la región de contacto; por esta razón el radio en la zona de contacto se incrementa a un valor R' que se calcula con la siguiente expresión conocida como la ecuación de Hitchcock:

$$R' = R \left(1 + \frac{cP}{b \Delta h} \right) \quad (2.12)$$

Donde:

R': Radio de contacto

R: Radio del rodillo

P: Carga

c: Constante elástica del material del rodillo

$$c = 16 \left(\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \right) \quad (2.13)$$

donde:

ν : Coeficiente de Poisson

E: Módulo de elasticidad del material

Donde P representa la carga aplicada. Ésta expresión puede simplificarse si se considera P/b como la carga por unidad de ancho del producto laminado. De estas dos ecuaciones suponiendo que (2.11) tuviera solución tal que σ_x pudiera calcularse, y su vez P, además si (2.12) se usara recurrentemente para calcular un nuevo radio con un error porcentual fijo entre el radios calculado y el original que se fijó al 1% como máximo dado que al calcular la carga recursivamente dentro del claro de laminación la carga se incrementará progresivamente, y una valor mejorado hasta un 0.1% entre sucesivos radios, el que a su vez proporciona una nueva carga P, así sucesivamente hasta obtener el radio mejorado, esperando que los resultados obtenidos sean más cercanos al proceso real.

Afortunadamente (2.11) tiene solución por ser una ecuación diferencial ordinaria y de primer orden, de la forma:

$$\frac{d y(x)}{dx} = f(x, y)$$

La cual se resuelve a través del Método de Runge Kutta de 4o orden. Puesto que si bien es posible usar este método con algoritmos mejorados que reducen el número de pasos asegurando una gran precisión, como puede ser el método de Heun, o incluso versiones mejoradas del método de Runge Kutta, como el de Runge Kutta - Meerson estimando el error local, el método de Hamming u otros como los mencionados en la introducción. Su aplicación topa con la dificultad de usar un paso no variable para calcular la carga por unidad de ancho que se usa en la ecuación (2.12) puesto que el paso constante es una condición necesaria para usar cualquier método de integración numérica, se usa por tanto el método el del Trapecio, por ser de fácil cálculo, y de fácil programación, reduciendo líneas de código al no programar dos casos si en cambio se usara las reglas de Simpson (1/3 y 3/8) dado que se usan según si el intervalo de integración se divide en un número par o impar de segmentos, para una discusión a detalle de ambos métodos se refiere al anexo tres.

Es decir que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones necesarias para modelar el proceso de laminación.

$$1. \frac{d\sigma_x}{d\alpha} = \frac{-2R}{h_f + 4R \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_y + \sigma_x\right)}{(1 \mp \mu \tan \alpha)} (\operatorname{sen} \alpha \pm \mu \operatorname{cose} \alpha) + \sigma_x \operatorname{sen} \alpha \right)$$

$$2. P_r = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_y + \sigma_x}{1 \pm \mu \tan \alpha}$$

$$3. R' = R \left(1 + 16 \left(\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \right) \frac{P}{\Delta h b} \right)$$

Para hacer el programa que resolverá numéricamente el sistema se parte de la programación estructurada, a continuación se enlistan las acciones a ejecutarse y el orden en que las acciones deberán ser

ejecutadas, ésto se conoce como *seudocódigo*¹, y posteriormente cuatro diagramas de flujo que muestran gráficamente éstas relaciones:

1. Fijar valores de todas las variables y constantes de uso común (compartidas por todas las funciones del programa y cuyos valores pueden ser alterados por las mismas) a cero.
2. Lectura de valores del radio de los rodillos (R_0), espesor final de la lámina (h_f), espesor inicial de la lámina (h_0), esfuerzo de cedencia (s_y), número de puntos a inspeccionar en el ángulo de mordedura (N), coeficiente de fricción (μ), coeficiente de Poisson (ν), módulo de Young de los rodillos (E_r).
3. Elegir unidades de los valores leídos, de modo que la presión se pueda ingresar en Ksi, MPa, la diferencia entre los espesores en milésimas de pulgada y así, y obtener los resultados correctos.
4. Verificar que la elección de unidades sea la correcta.
5. Cambiar a unidades fundamentales para los cálculos.

6.

a) Cálculo del ángulo de mordedura

$$\alpha_f = \text{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Delta h}{R}} \right)$$

b) Cálculo del incremento angular

$$\text{Inc} = \alpha_f / N$$

7. Verificar que el valor del coeficiente de fricción sea correcto ($0 < \mu < 0.5$).
8. Desplegar los valores ingresados. (Para verificar que sean correctos).
9. Calcular k :

$$k = 16(1 - \nu^2) / \text{Pi} * E_r$$

(La función de Hitchcock se puede separar de la siguiente forma para colocar bajo una sola constante k todas los valores ya ingresados y permitir trabajar únicamente con las variables de interés y mejorar el desempeño:

¹ Es de notar que para la descripción y escritura del programa se usa una simbología diferente a la usada en el resto de la tesis, por no poder usarse en el mismo programa.

$$R' = R \left(1 + 16 \left(\frac{1 - \nu^2}{\pi E} \right) \frac{P}{\Delta h b} \right)$$

$$R' = R \left(1 + \frac{k}{\Delta h} \frac{P}{b} \right)$$

10. Al hallarse fuera del claro de laminación el valor del esfuerzo se evalúa como cero. (Esfuerzo de salida= $S_x = 0$, Esfuerzo de entrada= $S_x = 0$)
11. Es en este punto referido como A, en los diagramas de flujo donde la iteración del ciclo comienza, en éste punto se evalúa el valor del radio inicialmente como R_0 .
12. Se calcula el nuevo valor del ángulo de contacto con que se calculará S_x (Esfuerzo a la salida en la dirección x), P_r (Presión radial a la salida), S_x (Esfuerzo a la entrada) y P_r (Presión radial a la entrada), en el caso de salida incrementándolo y en la salida decrementándolo.
13. Una vez esto hecho para salir del ciclo de iteraciones en cada uno de los puntos del arco de contacto elegidos se verifica que el ángulo de mordedura haya sido cubierto en su totalidad, si esto no es así se va al punto identificado en los diagrama como B, si no se sale del programa.
14. Se calcula un valor mejorado del radio (R') por medio de la ecuación de Hitchcock. A partir del tercer valor se calcula la carga acumulada (usando el método del Trapecio) y de este modo el valor del radio mejorado.
15. Se calcula el valor de S_x y S_x mediante el método de Runge Kutta.
16. Se calcula el error porcentual entre radio calculado(n) y radio calculado (n+1). ($\%e_n$)
17. Se calcula el error porcentual entre radio calculado y radio original. ($\%e_0$)
18. Si no se cumple que $\%e_0 < 0.1\%$ y $\%e_n < 10\%$ se regresa al punto B donde una nueva iteración del segundo ciclo B, de modo que el valor R se mejora continuamente, si cualquiera de los dos criterios anteriores no se cumple entonces el segundo proceso iterativo termina, se despliegan los resultados obtenidos y se regresa al punto A, donde se calcula un nuevo valor hasta cubrir todo el ángulo de mordedura.

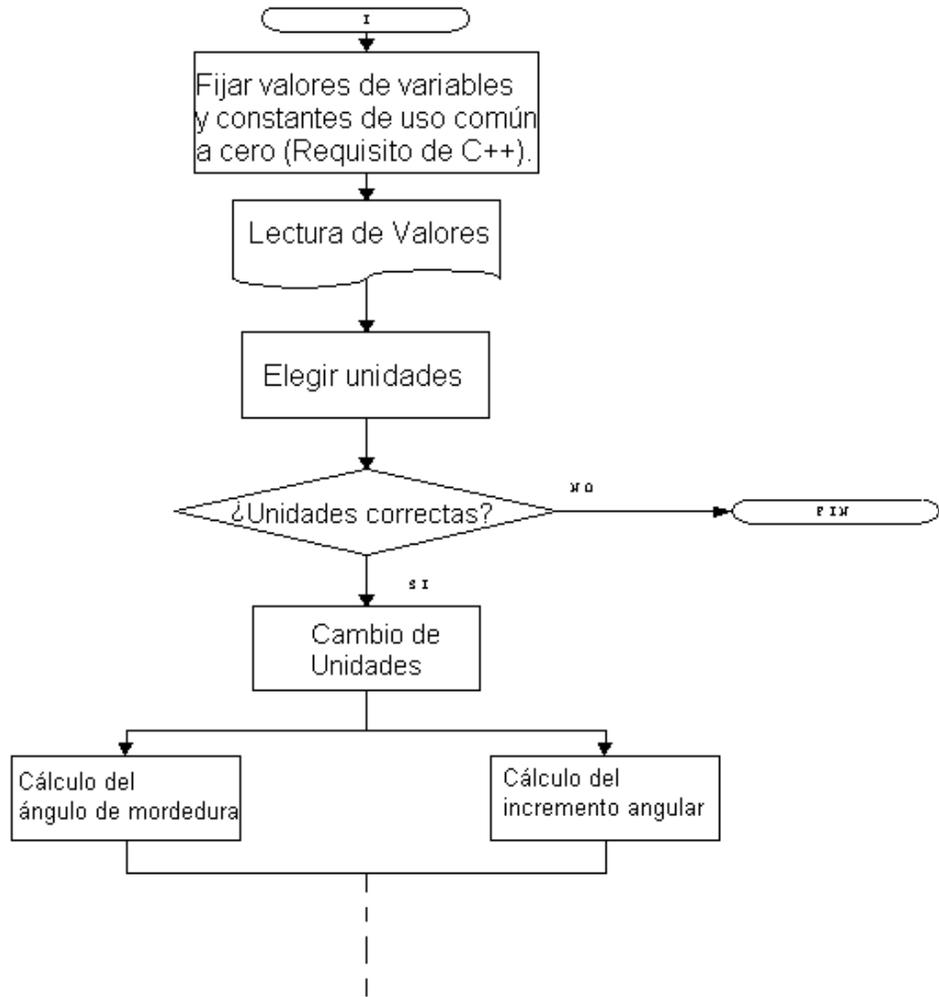


Figura 2.2

Diagrama de Flujo del Inicio al punto A (Parte 1)

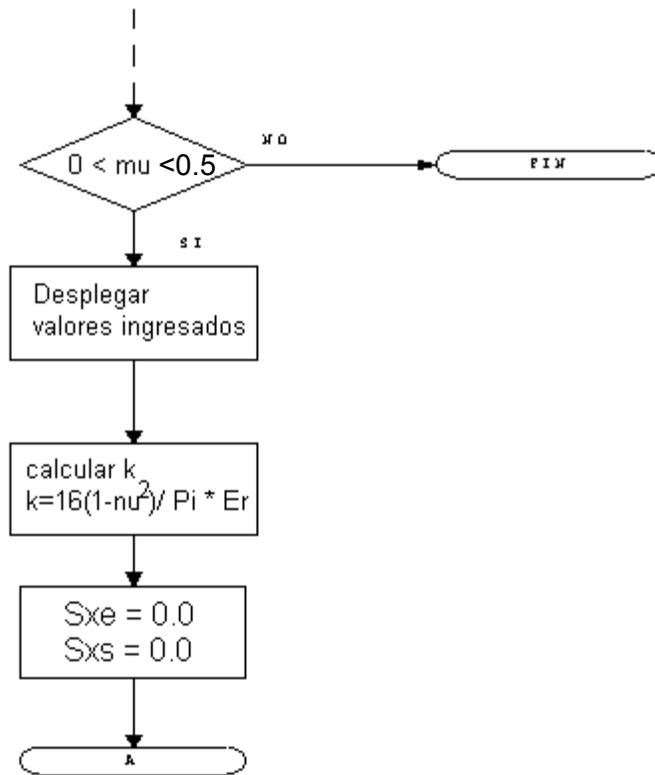


Figura 2.3

Diagrama de Flujo del Inicio al punto A (Parte 2)

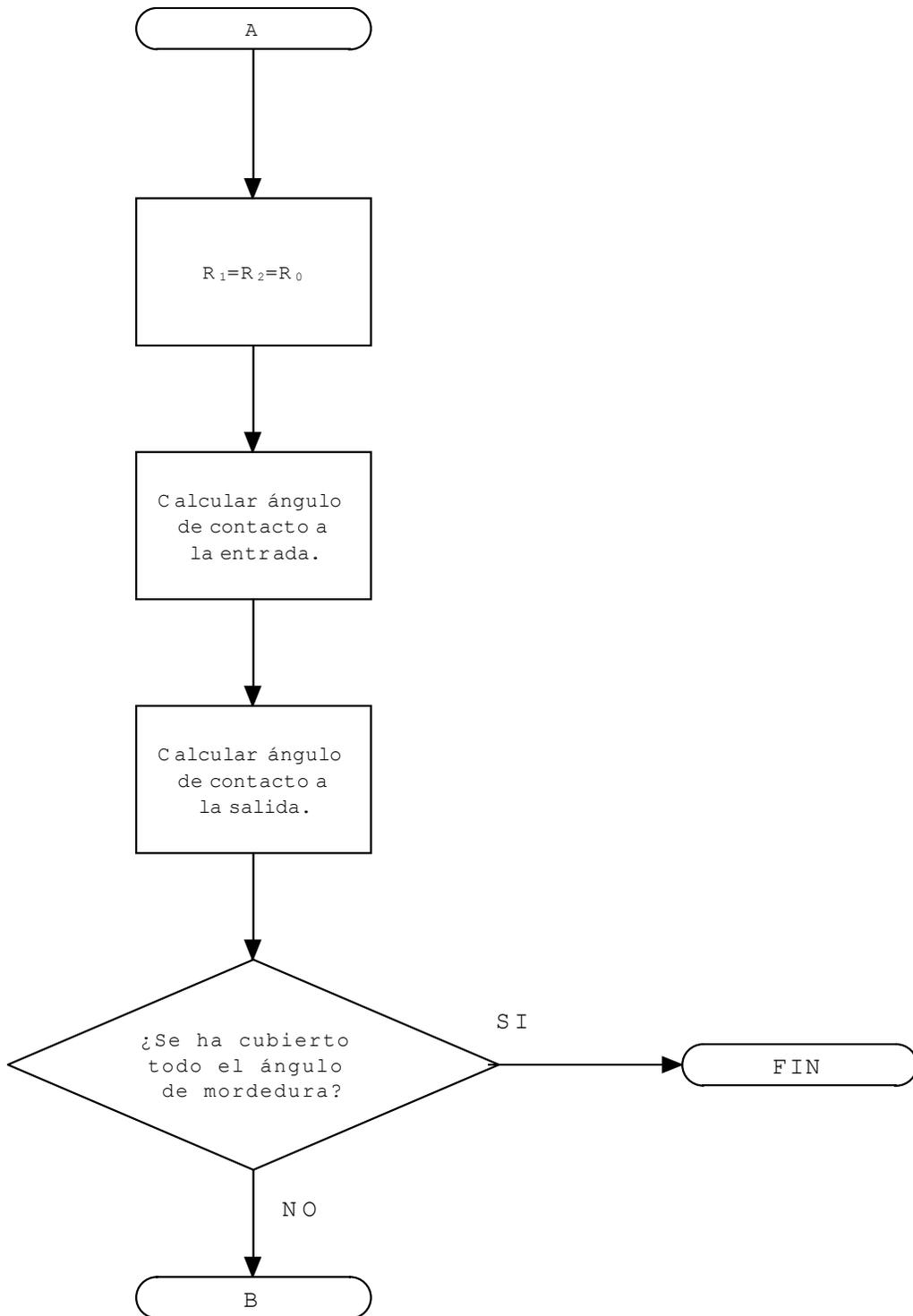


Figura 2.4
Diagrama de Flujo del punto A al punto B

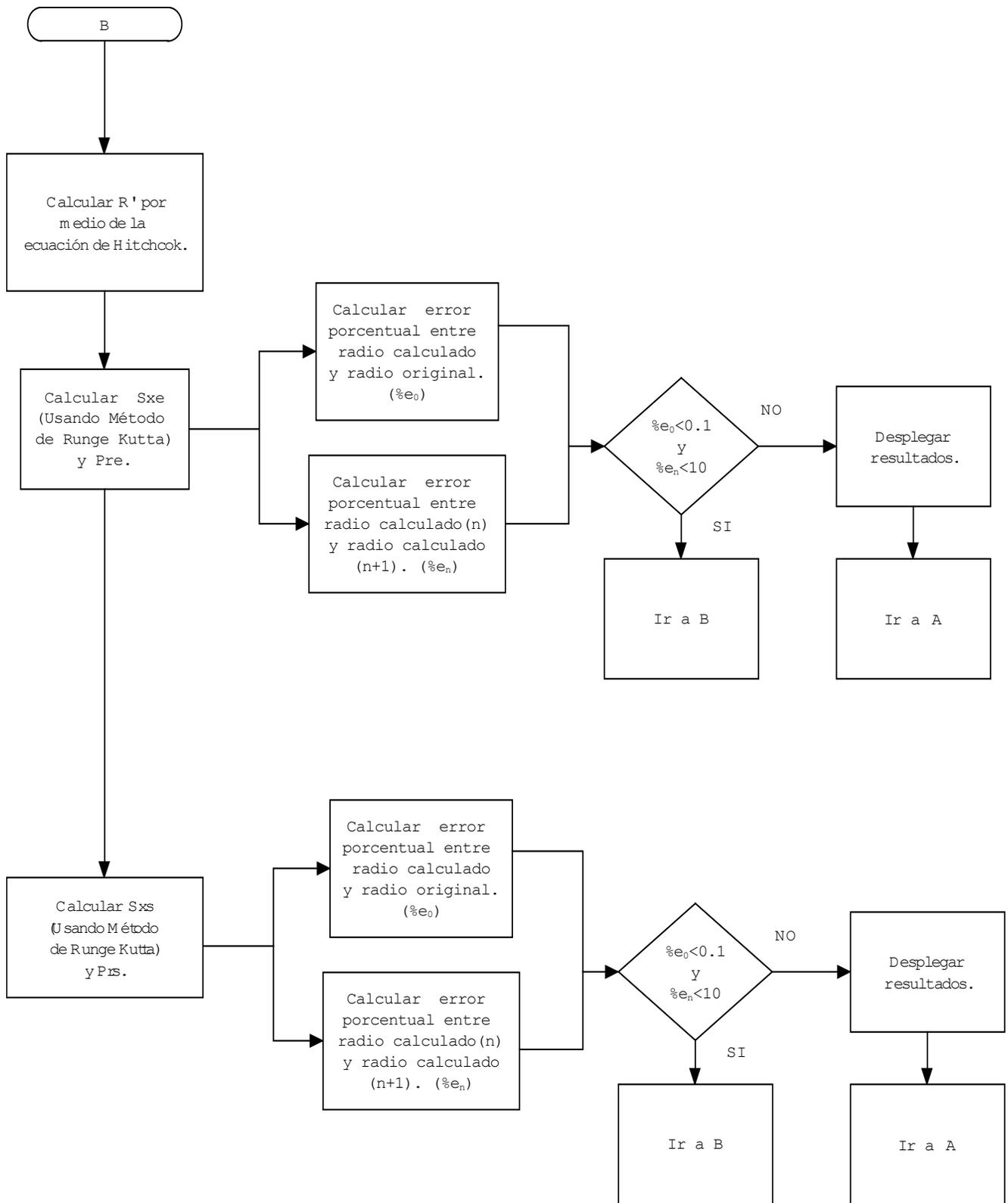


Figura 2.5

Diagrama de Flujo del punto B al Punto A

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

3.1 Análisis de Resultados

El listado del programa propuesto llamado *Laminación*, que considera la aproximación de Hitchcock para calcular la carga a lo largo de cada punto del arco de contacto se encuentra en el anexo número uno y considerando los rodillos deformables en el anexo número dos. Las diferencias entre ambos modelos se pueden apreciar claramente de las curvas que muestran el comportamiento en ambos casos y que permiten dar una idea más clara del perfil de la Presión Radial en función del Ángulo de Contacto que se muestran a continuación.

Las condiciones de evaluación fueron; un espesor inicial $h_0 = 5$ mm, reducciones (r) del orden de 2.5%, 5%, 10%, 20%, cuatro valores para el coeficientes de fricción $m = 0.1, 0.15, 0.2, 0.3$, cuatro radios diferentes $R = 100$ mm, 200 mm, 400 mm, 600 mm un coeficiente de poisson de $1/3$, un esfuerzo de cedencia de 200 MPa, se usaron 250 puntos de inspección, un Módulo de Young de 210 GPa y finalmente un caso especial en el cual se especifica claramente las condiciones de laminación se analiza lo que sucede cuando el módulo de Young toma los valores de 100 GPa, 210 GPa y 400 GPa para el modelo que considera rodillos deformables.

La fórmula para calcular la variación entre ambos modelos se da por:

$$\%V_x = \left| \frac{X_H - X_R}{X_H} \right| \times 100$$

Donde:

X: Variable de interés

H: Hitchcock

R: Rodillo Indeformable

Reducción del 2.5%

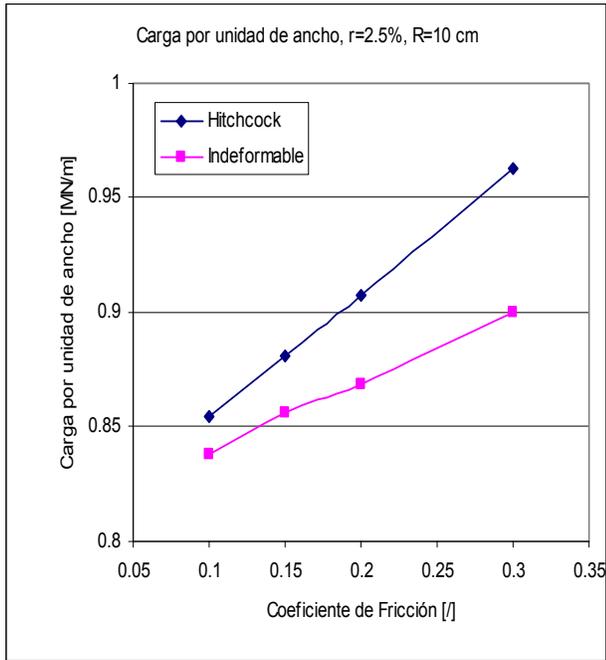


Figura 3.1.a

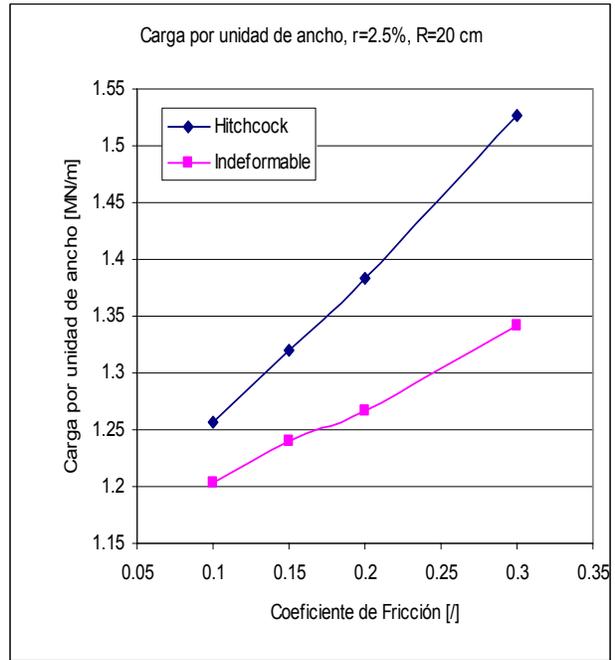


Figura 3.1.b

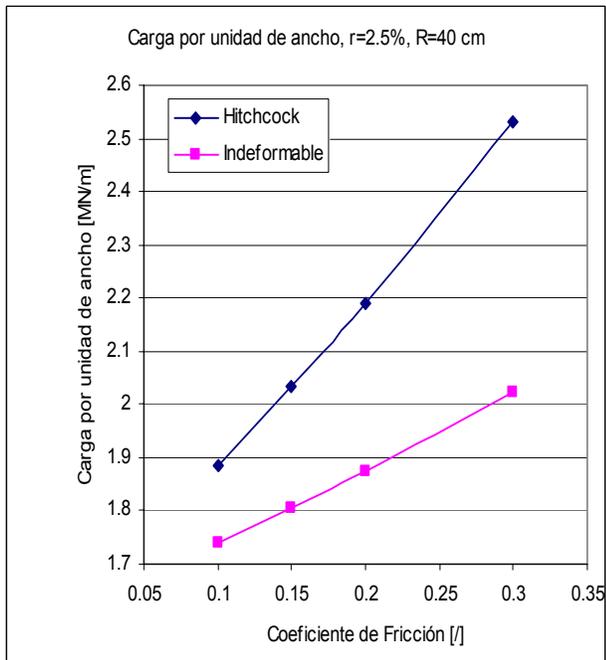


Figura 3.1.c

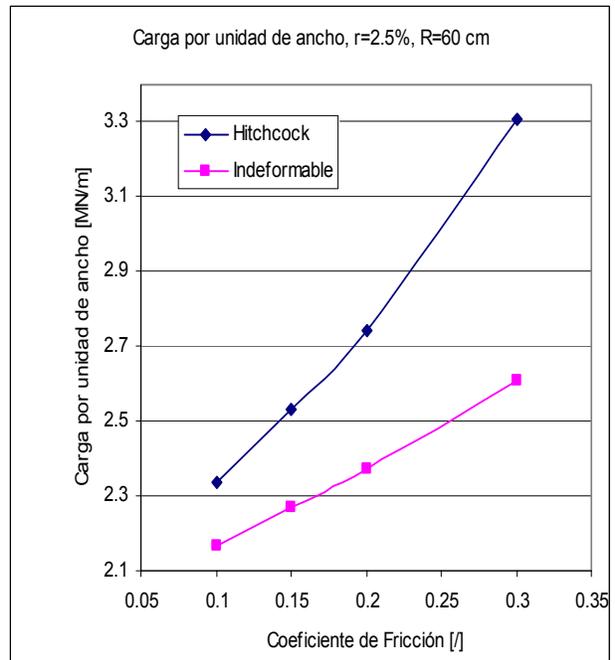


Figura 3.1.d

Reducción del 2.5%

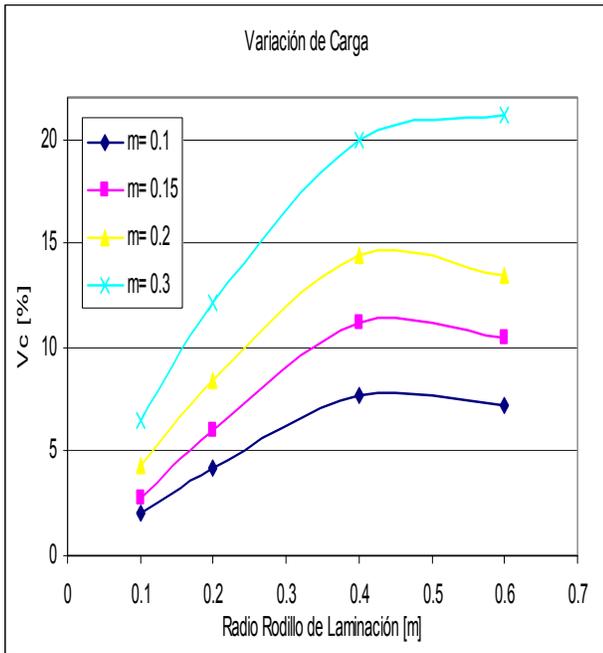


Figura 3.1.e

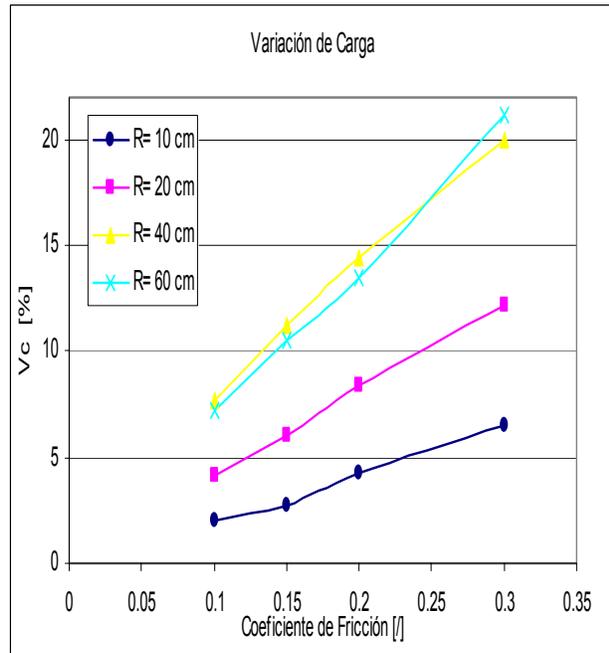


Figura 3.1.f

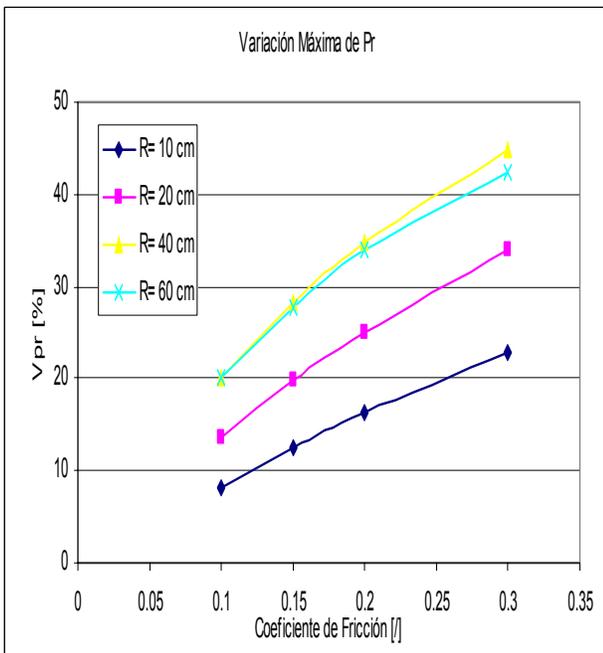


Figura 3.1.g

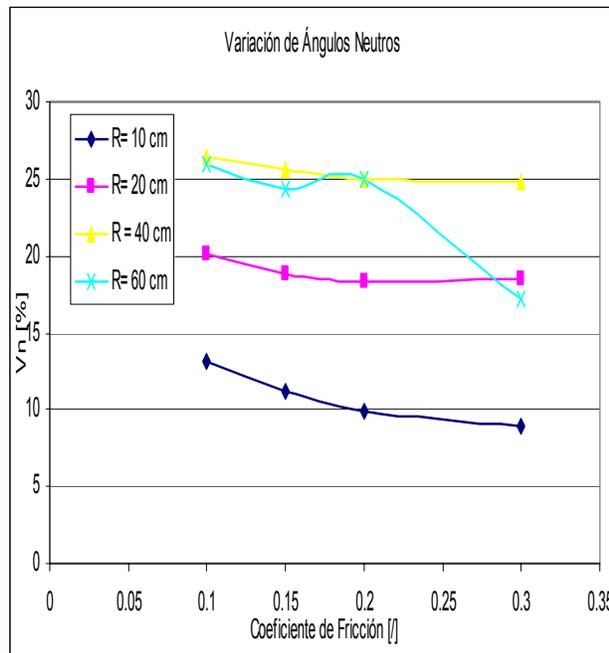


Figura 3.1.h

Reducción del 5%

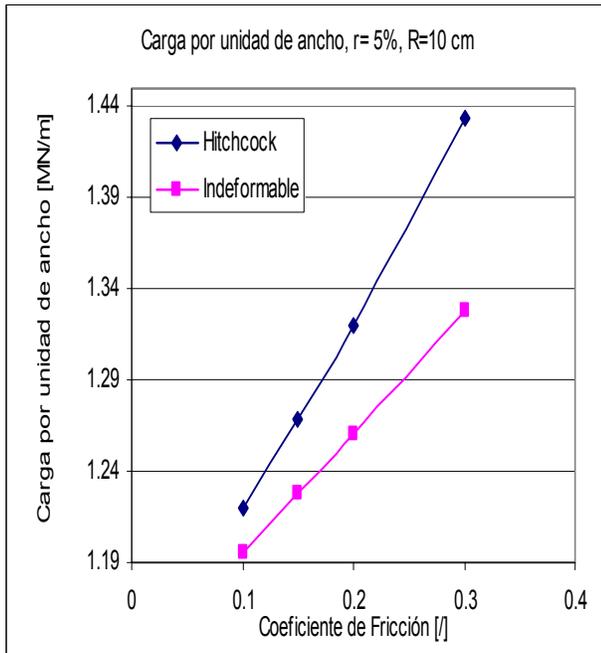


Figura 3.2.a

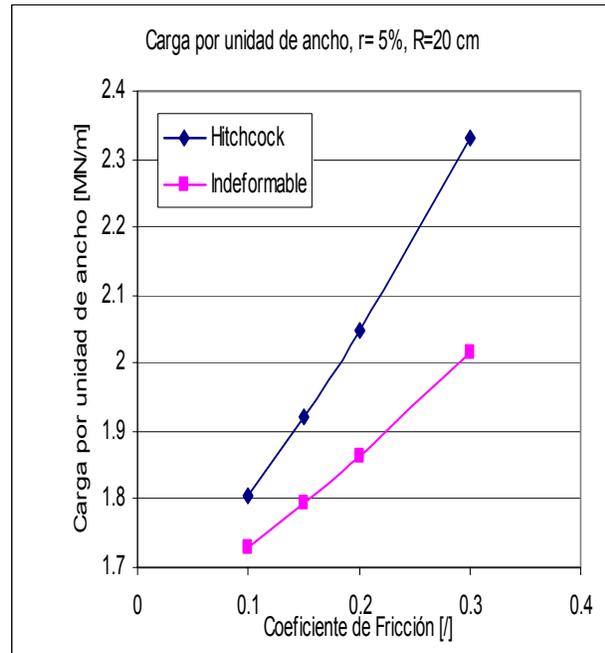


Figura 3.2.b

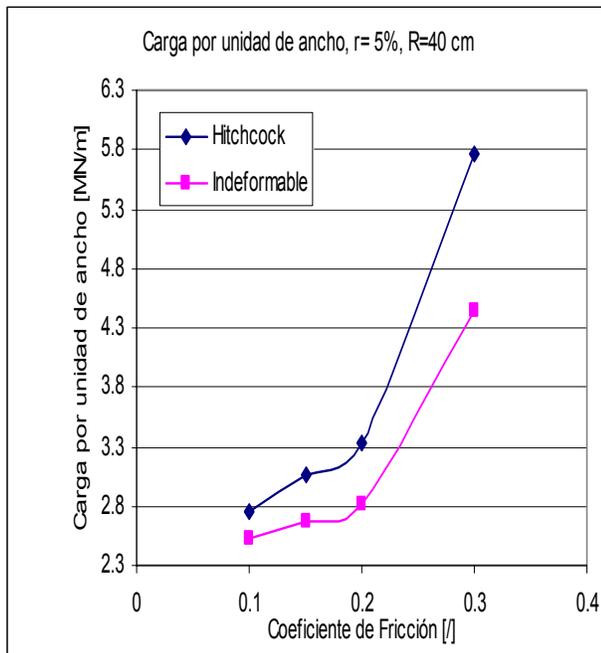


Figura 3.2.c

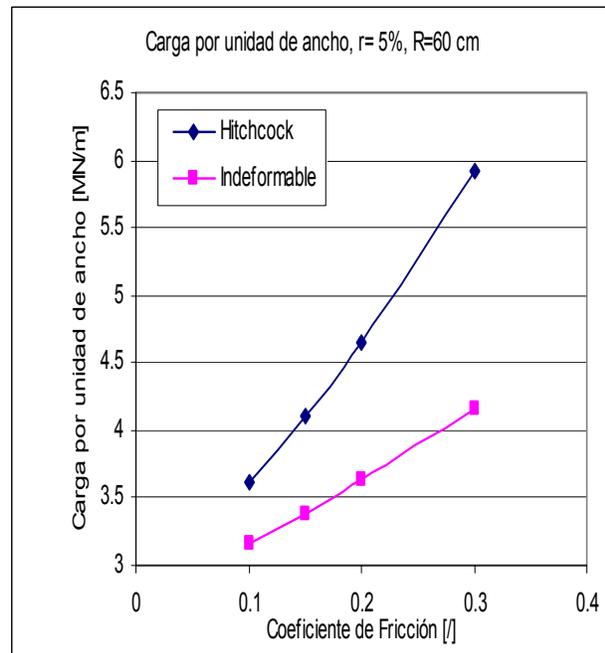


Figura 3.2.d

Reducción del 5%

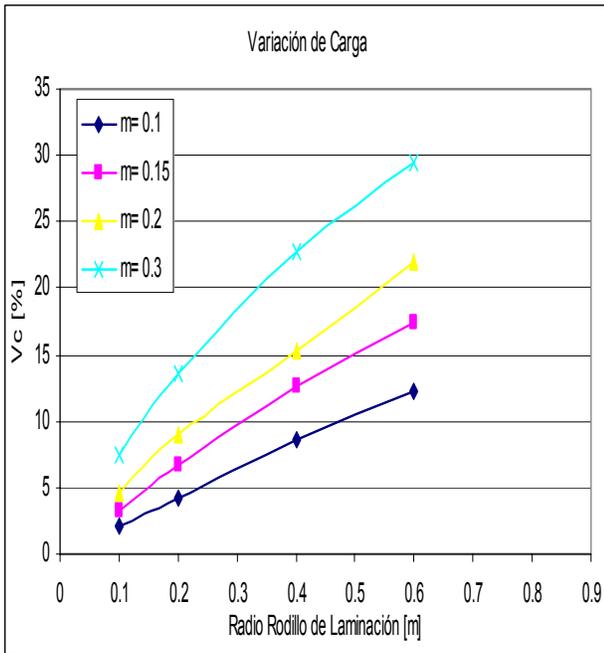


Figura 3.2.e

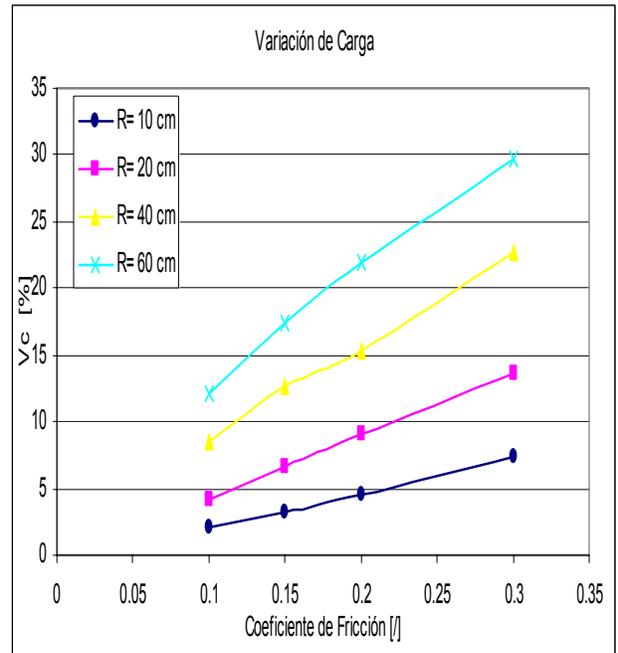


Figura 3.2.f

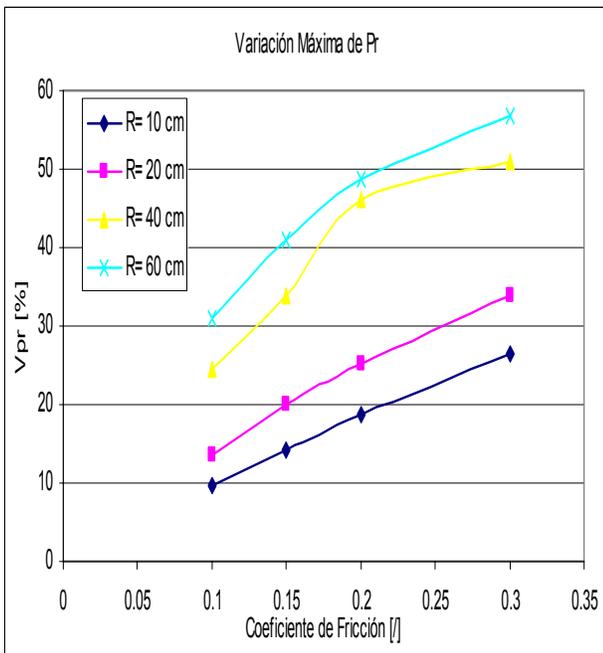


Figura 3.2.g

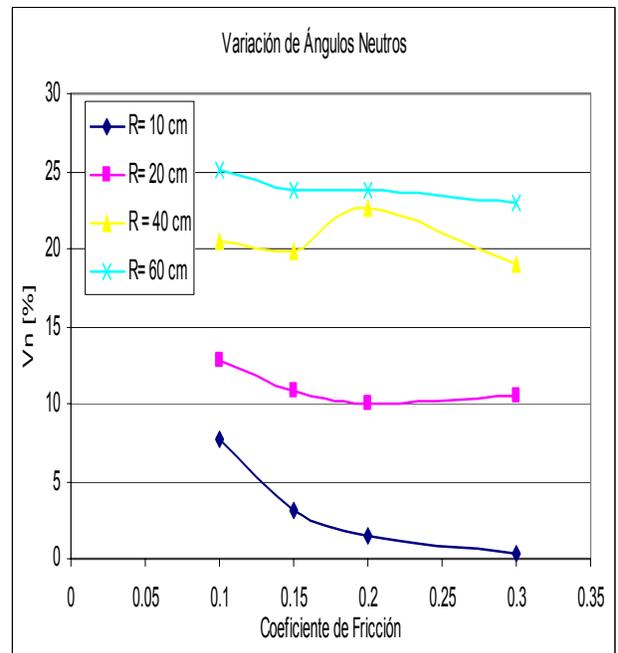


Figura 3.2.h

Reducción del 10%

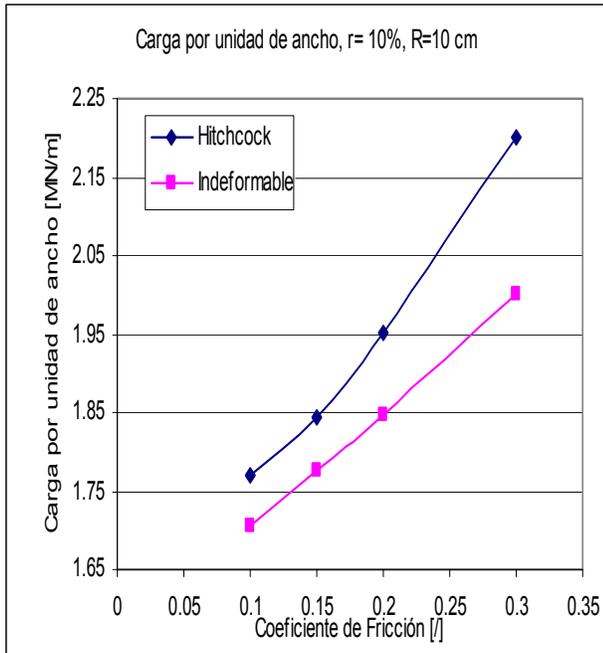


Figura 3.3.a

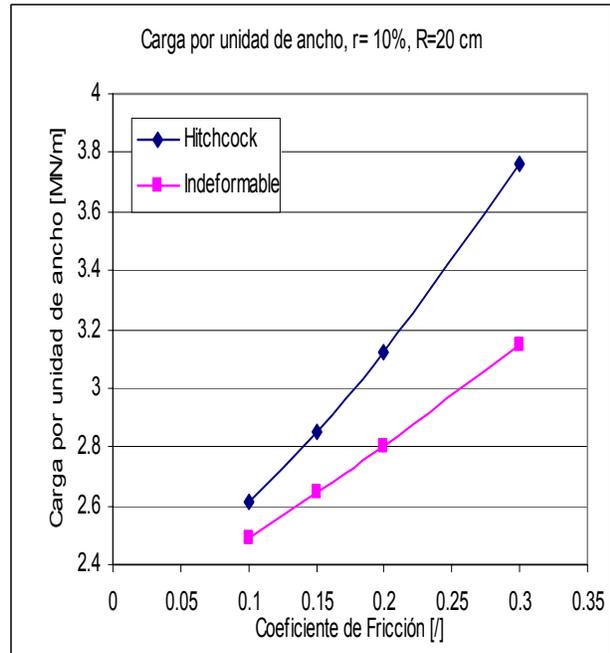


Figura 3.3.b

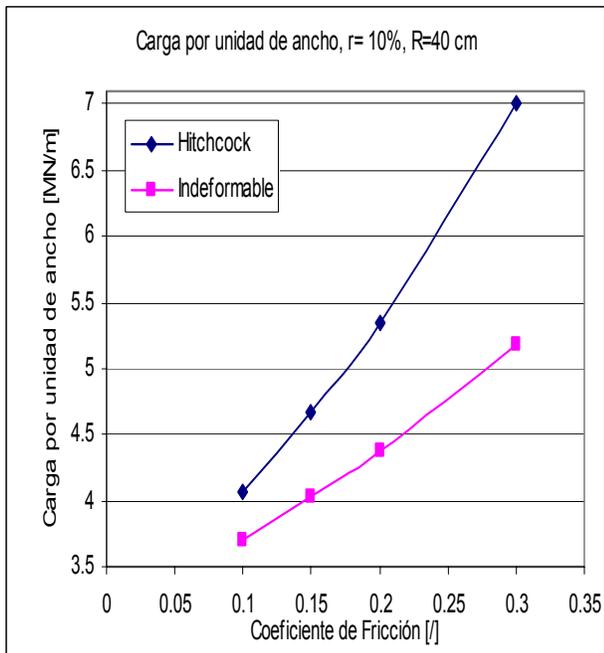


Figura 3.3.c

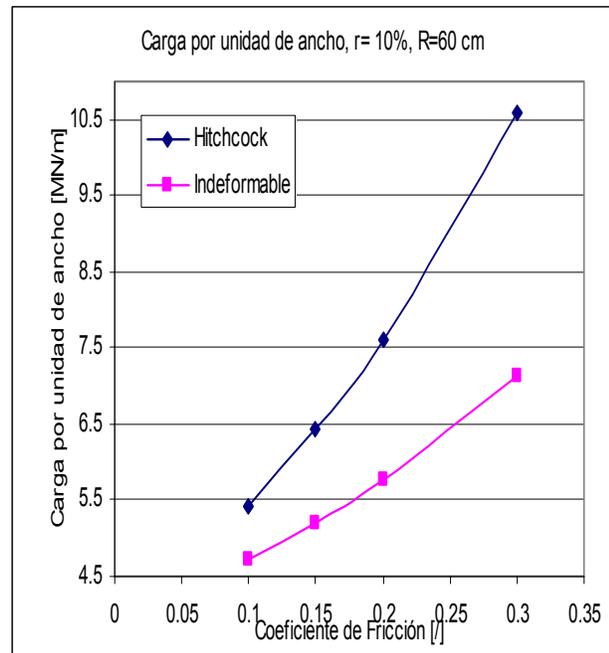


Figura 3.3.d

Reducción del 10%

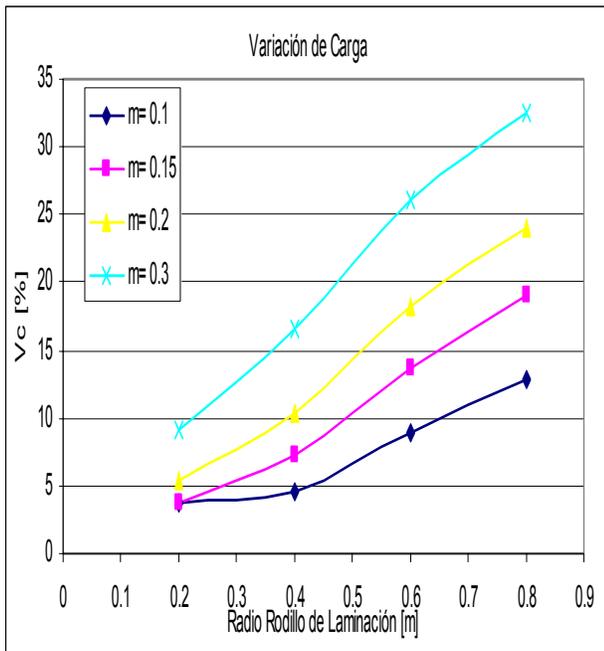


Figura 3.3.e

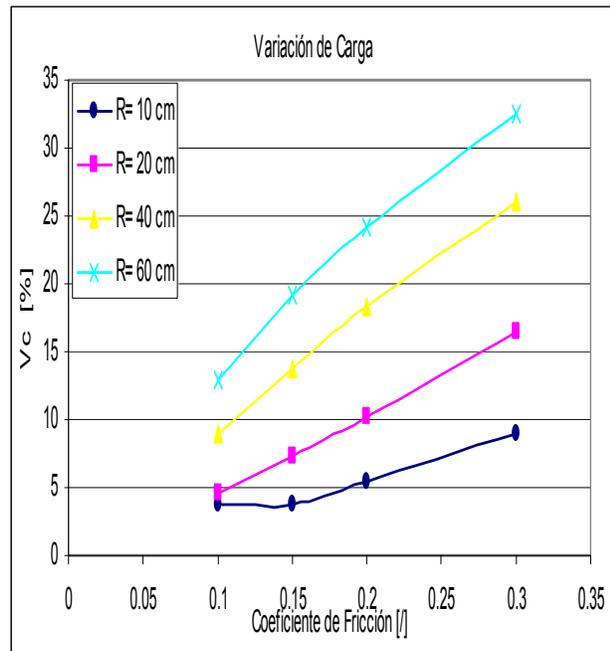


Figura 3.3.f

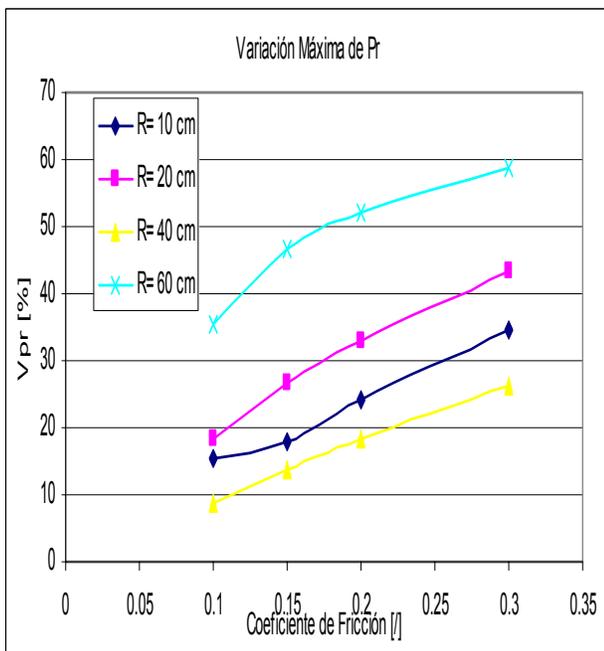


Figura 3.3.g

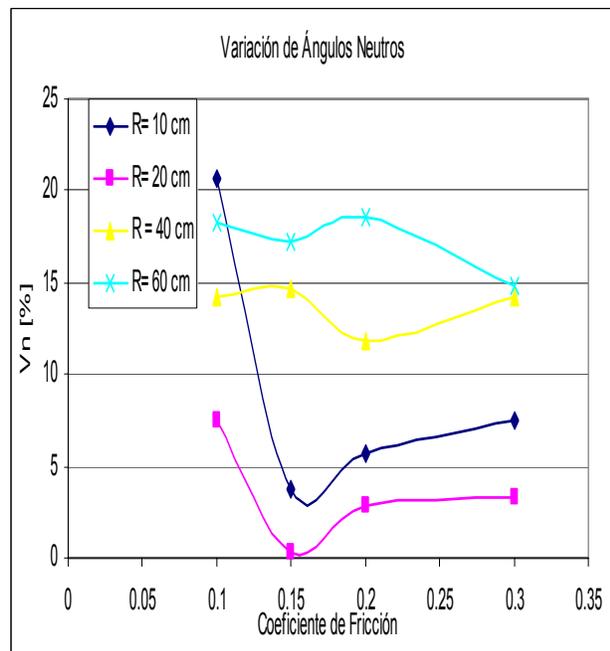


Figura 3.3.h

Reducción del 20%

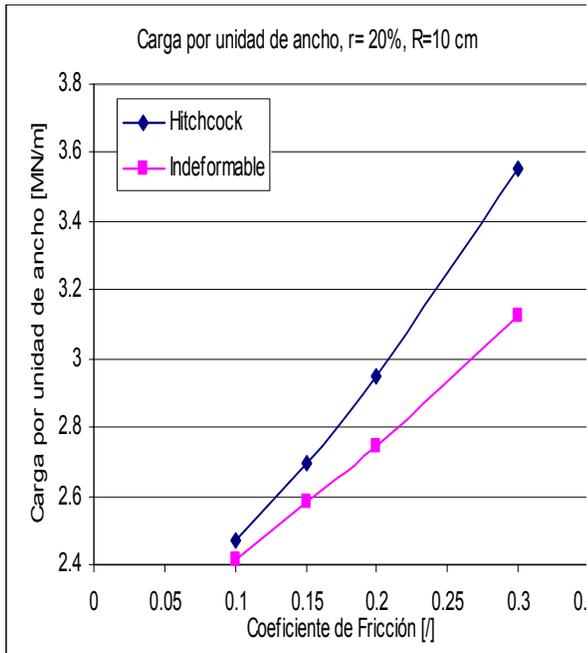


Figura 3.4.a

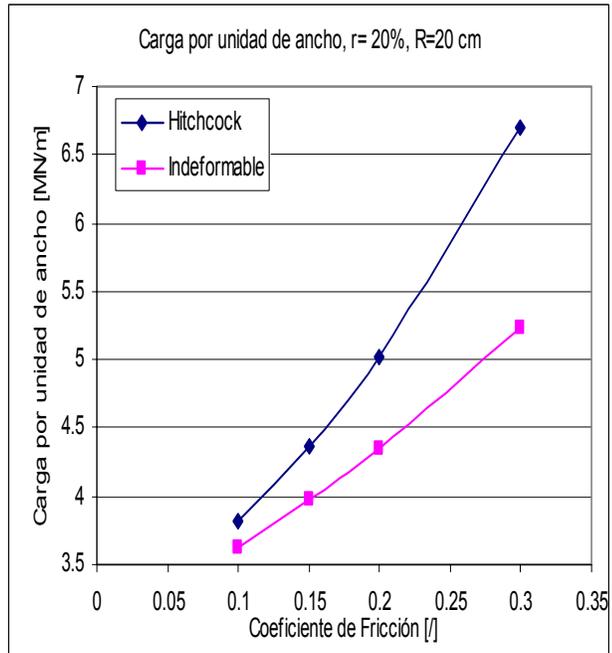


Figura 3.4.b

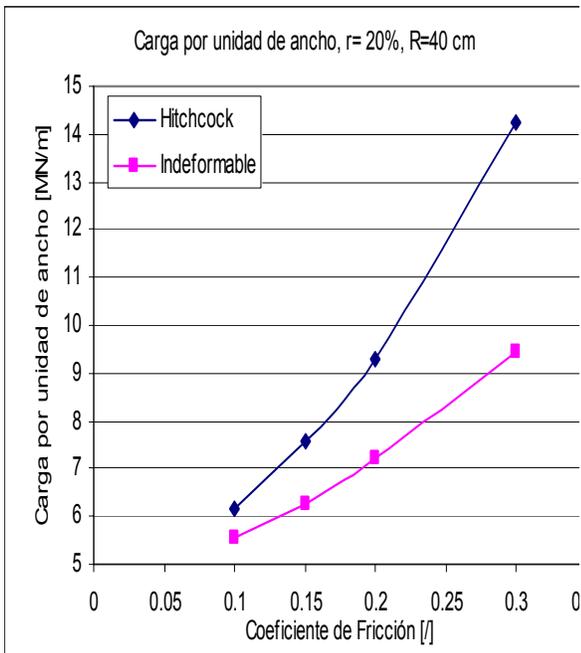


Figura 3.4.c

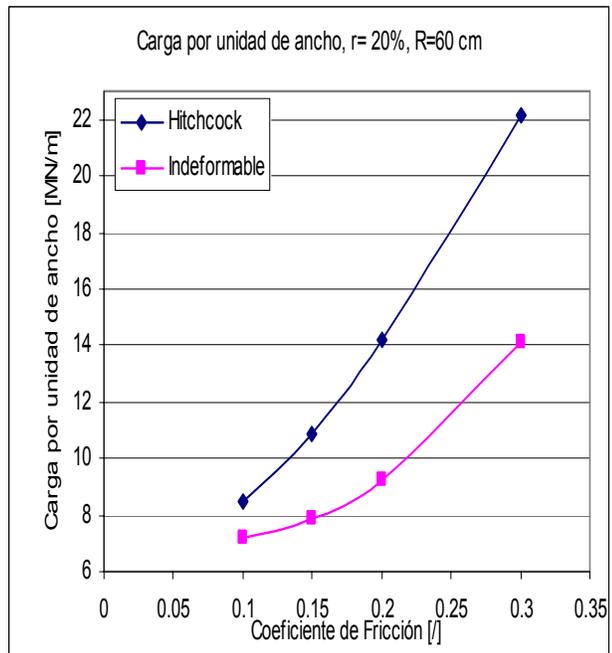


Figura 3.4.d

Reducción del 20%

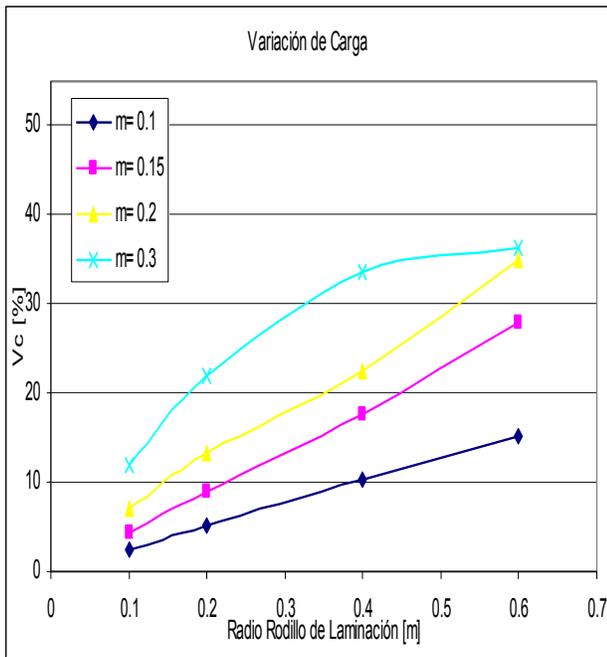


Figura 3.4.e

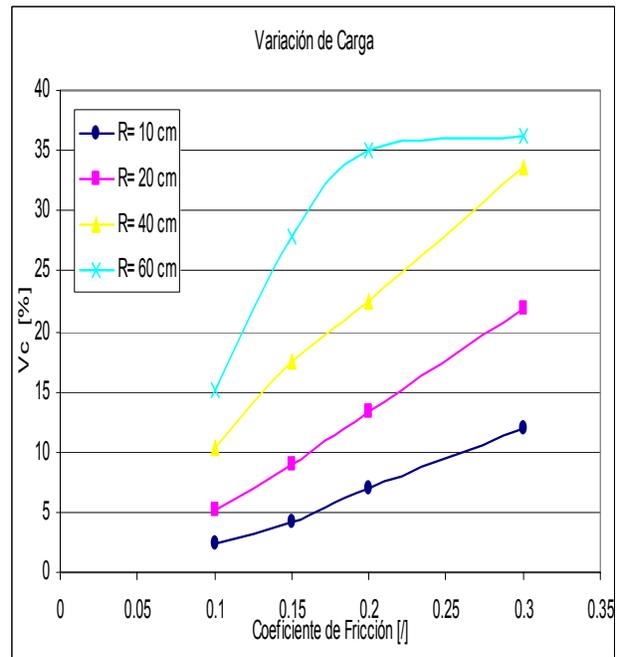


Figura 3.4.f

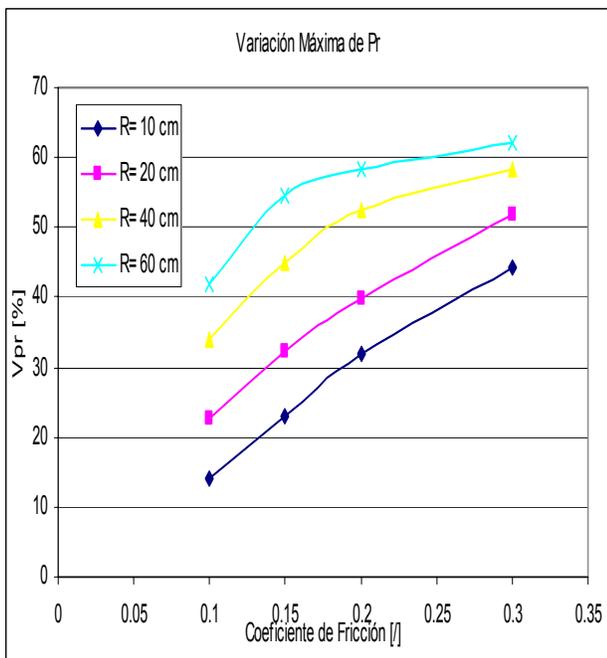


Figura 3.4.g

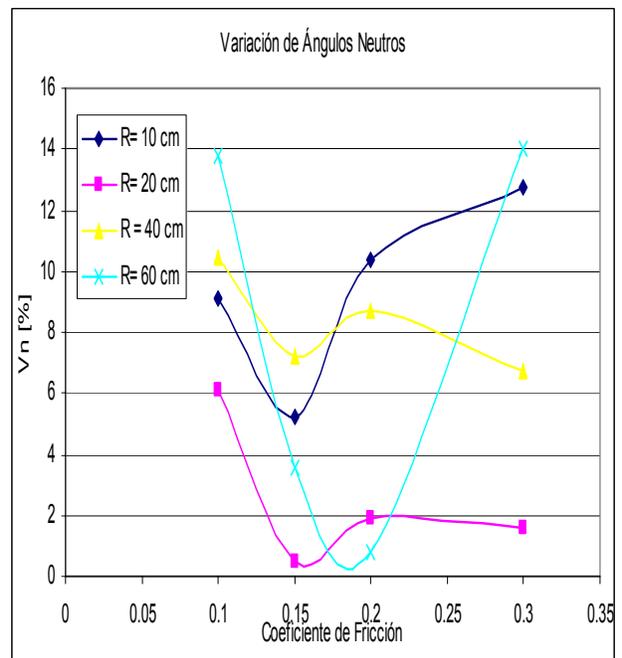
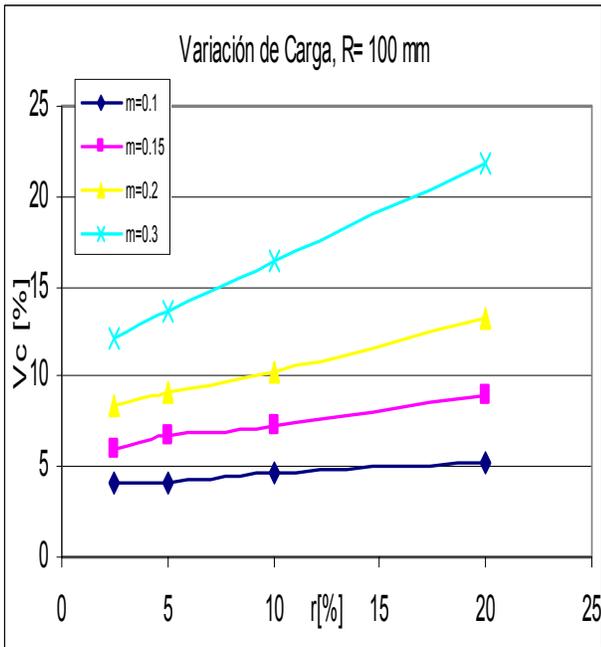


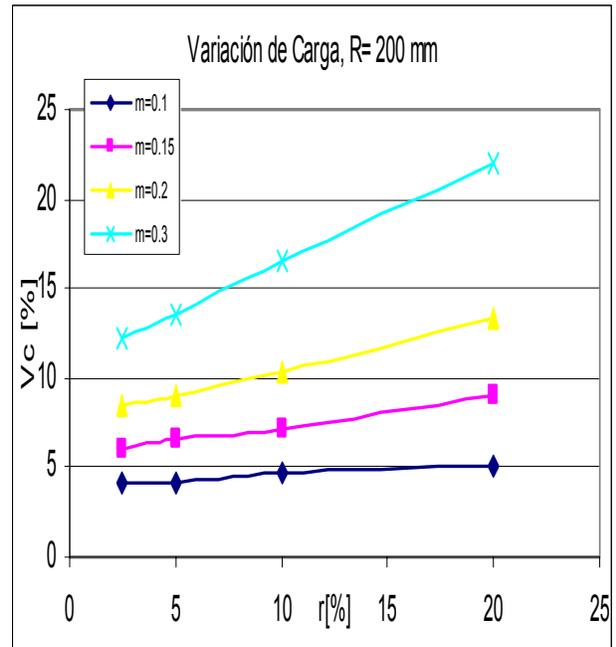
Figura 3.4.h

Variación de Carga según la reducción



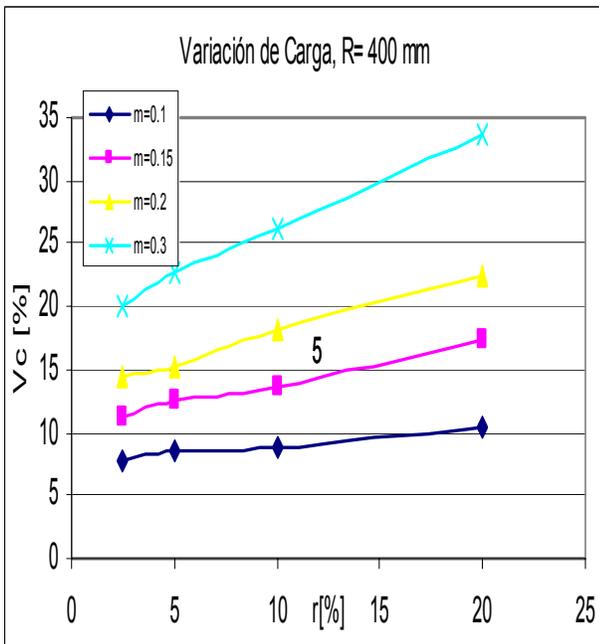
R= 100mm

Figura 3.5.a



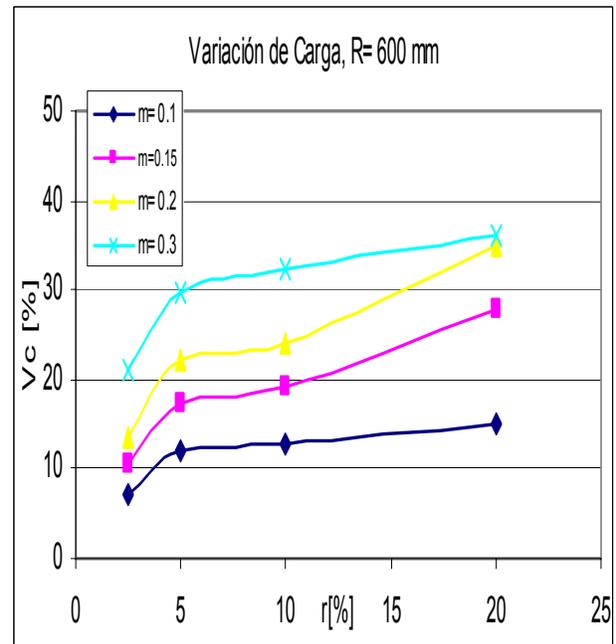
R= 20 mm

Figura 3.5.b



R= 400 mm

Figura 3.5.c



R= 600 mm

Figura 3.5.d

Curvas Típicas

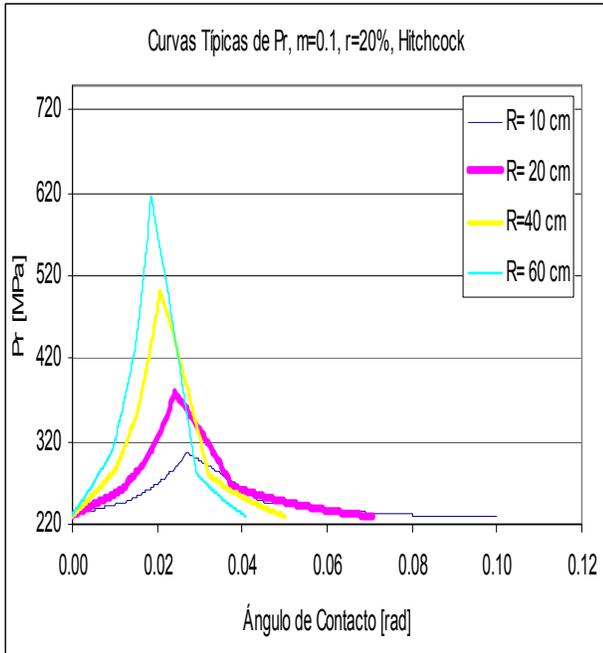


Figura 3.6.a

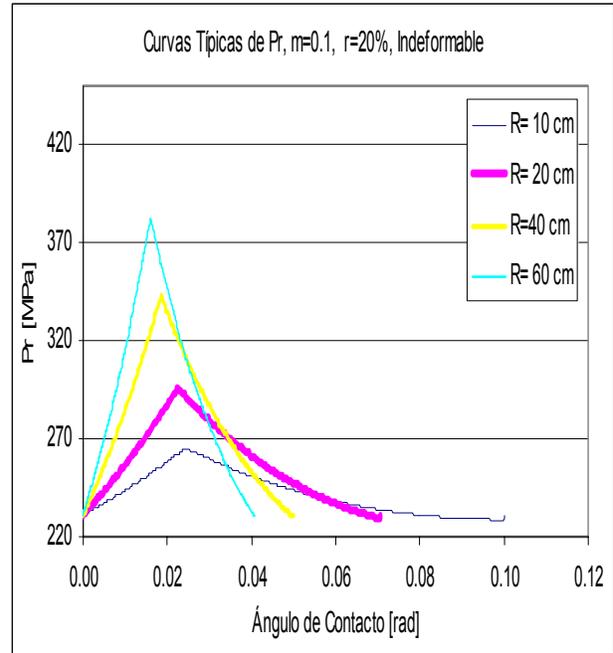


Figura 3.6.b

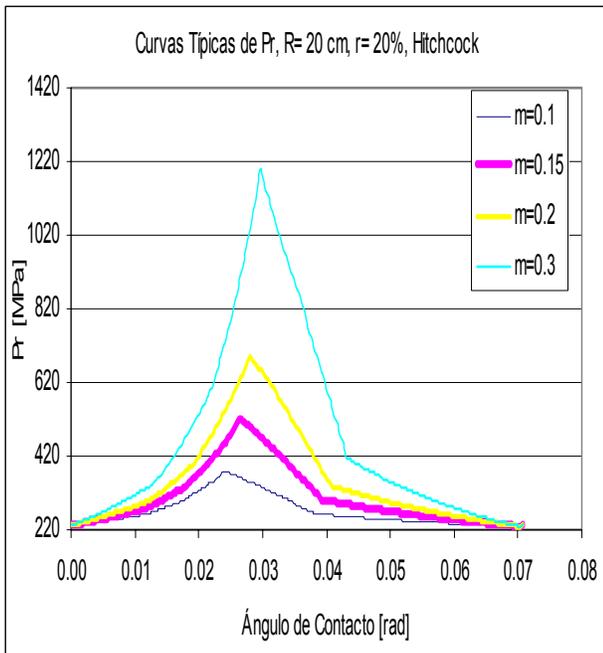


Figura 3.6.c

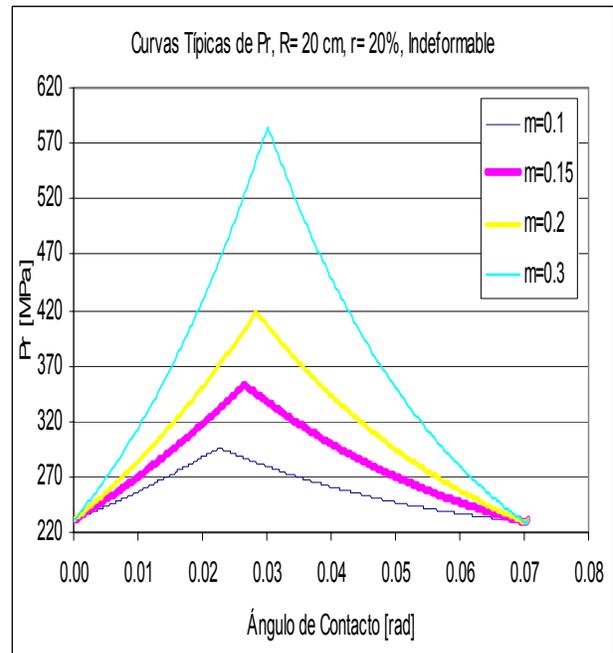


Figura 3.6.d

Variación de la carga según el Módulo de Young

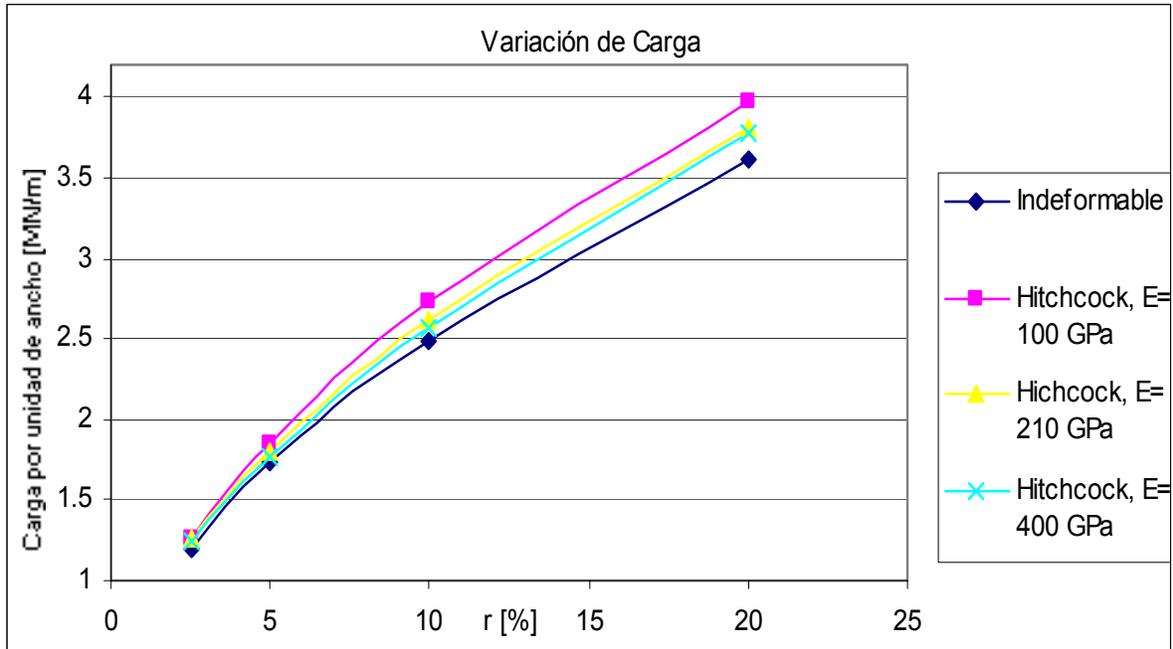


Figura 3.7

Angulo de Contacto

Como se puede apreciar en las gráficas inciso 3.1.h, 3.2.h, 3.3.h 3.4.h, la variación del ángulo de contacto es muy amplia y no se puede apreciar ninguna tendencia clara. De haberla ésta depende de varios factores, es decir que sería una función compleja de todos los parámetros de evaluación $f(R_0, R, E, \nu, P, m, r)$. Este resultado muestra en forma consistente que el modelo se comporta de forma tal que en ocasiones la presión radial a la entrada es mayor su crecimiento y en otras la salida, así como que al no presentar un patrón reconocible no se puede hablar de error sistemático en el modelo sino de resultados consistentes con la solución de la Ecuación de Von Karman y la Ecuación de Hitchcock.

Carga

De la carga (Figura a, b, c, d de la 3.1 a la 3.4) se observa que ésta aumenta según se incrementa el radio de los rodillos de laminación, lo que es más fácil de apreciar en la Figura 3.6.a, cabe señalar que ya se esperaba éste comportamiento (Ec. 1.12), y según se incrementa el coeficiente de fricción (Figura 3.6.c). Éste mismo

resultado se presenta considerando los rodillos indeformables (Figuras 3.6.b y 3.6.d), pero éstos resultados son más acusados al considerar el aplastamiento de los rodillos como se ve de la variación de carga, que crece al incrementarse tanto el radio como el coeficiente de fricción, siendo más notorio el efecto que tiene el coeficiente de fricción que el incremento del radio, esto es fácil de apreciar si consideramos que para estas mismas Figuras (3.6.a., 3.6.b, 3.6.c y 3.6.d) y en conjunto con las Figuras 3.4.e y 3.4.f de las que se desprende que para un incremento del 600% ($R_i=100$ mm, $R_f= 600$ mm) del radio la variación de carga es del orden del 15% en tanto que para una variación del coeficiente de fricción del 300% la variación de carga es del orden del 23% según el modelo propuesto.

Es de importancia primordial hacer notar que estos resultados reflejan las suposiciones del modelo ya que la variación de carga (Figuras 3.1.e, 3.2.e, 3.3.e y 3.4.e) predice un incremento de la carga si se mantiene fijo el coeficiente de fricción y el radio de los rodillos de laminación se incrementa lo que no está en contra de los resultados experimentales en tanto que el incremento de la carga con el incremento del coeficiente de fricción no refleja una realidad física, presentando una gran variación para $\mu=0.4$ (Rowe, 1986: 223, 224) en tanto que para valores bajos del coeficiente de fricción, esto es resultado de suponer un coeficiente de fricción con un valor constante sobre todo el arco de laminación en tanto que en el arco existe una zona de no deslizamiento cerca del punto neutro a la entrada y la salida zonas de deslizamiento por lo que la deformación no se puede considerar homogénea dando una forma más redondeada a la colina de fricción y dado que al alcanzarse el esfuerzo cortante máximo que el material puede soportar este fluye debajo de la superficie de los rodillos.

Después en una segunda sección se presenta la variación porcentual de carga según la reducción que predice nuestro modelo, de éstas gráficas (Figuras 3.5.a, 3.5.b, 3.5.c, y 3.5.d) cabe mencionar

que su crecimiento viene dado al incrementar la reducción y el radio, como se explicó en el párrafo anterior el incremento de la carga con el coeficiente de fricción es resultado de suponer un coeficiente constante de fricción. Es de notar un comportamiento aproximadamente lineal en la variación de carga según la reducción para tres de los cuatro radios considerados ($R=100$ mm, 200 mm, 400 mm, 600 mm), es de notar que hay puntos con valores muy cercanos lo que no refleja en forma alguna un error sino una variación del modelo que predice una carga mayor y que para algunos valores predice una carga tal que la variación de carga es semejante.

Experimentalmente la carga debida al aplastamiento de los rodillos oscila alrededor de un 15% (Shah, 1978: 160), valor que es rápidamente superado a medida que se incrementa la reducción (llegando a un máximo de 36.256 % para la máxima reducción considerada del 20%, coeficiente de fricción de 0.3 y un radio de 60 cm, Gráficas 3.4.e y 3.4.f).

Curvas Típicas

En una tercera sección (Figuras 3.6) se presenta comparativamente el comportamiento típico de las curvas con rodillos indeformables y usando la aproximación de Hitchcock, en las gráficas puede notarse que el efecto en el modelo para el aplastamiento del rodillo es más notorio en el incremento en la presión radial y en consecuencia en la carga con el coeficiente de fricción que con el incremento en el radio, y finalmente en una cuarta y última sección (Figura 3.7) se muestra el efecto que tiene sobre la carga el cambio en el módulo de Young, del valor típico del acero de 210 GPa, como era se puede preveer la carga crece con la disminución en la rigidez del material, que nos representa rodillos más flexibles, y puede esperarse por los resultados analizados anteriormente (Figuras 3.6.a, 3.6.b, 3.6.c, 3.6.d) que este efecto se hará paulatinamente más notorio al incrementar tanto el radio como coeficiente de fricción.

3.2 Conclusiones

El presente trabajo tiene como finalidad la solución numérica de la ecuación de Von Karman previa a las simplificaciones de Bland y Ford, añadiendo a ello, el comportamiento más preciso de éste modelo - desarrollado mediante el método del planchón - la ecuación de Hitchcock para modelar el fenómeno considerando los rodillos elásticos. Pero para que éste tenga representatividad se compara con el resultado que se obtendría de considerar los rodillos indeformables.

El programa *Laminación*, escrito en C++, como se mencionó en el prólogo, no tiene la importancia que posee el desarrollo del programa estructurado al final del capítulo dos porque del pseudocódigo y los diagramas de flujo puede ser escrito en cualquier lenguaje que se desee.

Como se mencionó en el prólogo se esperaba que el presente trabajo sirviera para modelar en forma más precisa, dentro de las suposiciones del modelo, el proceso de laminación mediante el Método del Planchón, considerando un comportamiento elástico de los rodillos. En el caso considerado la carga se incrementa si se incrementa el radio (Gráficas 3.6.a y 3.6.b) y el coeficiente de fricción (Gráficas 3.6.c y 3.6.d), sobre todo éste último, también al reducir el Módulo de Young, como era de esperar que sucediera en un modelo que tomara en cuenta la resistencia del material, pero la variación es muy grande en el modelo que describe el proceso de laminación usando la aproximación de Hitchcock para evaluar la carga recursivamente sobre el arco de contacto.

Al usar durante el proceso de cálculo de presión radial la aproximación de Hitchcock la variación de carga entre este modelo y la solución de la ecuación de Von Karman el que considera rodillos

indeformables presenta una amplitud muy grande, alcanza un máximo de 36.2559% ($R= 60$ cm, $r= 20\%$, $m= 0.3$) y un mínimo de 2.0223% ($R= 10$ cm, $r= 2.5\%$, $m= 0.1$), la que para una condición dada de laminación se incrementa con el aumento del radio, la reducción y el coeficiente de fricción siendo más notorio el efecto de éste último en la variación de carga. La propia solución con o sin aproximación de Hitchcock adolece del error inherente a las suposiciones que se hacen para llegar a la ecuación de Von Karman (Método del Planchón), como es el caso de suponer un coeficiente de fricción constante siendo que en el arco de contacto existe deslizamiento a la entrada y a la salida, siendo el punto neutro el único sobre tal arco en el que no existe deslizamiento. De lo anteriormente expuesto se puede apreciar que la variación será mayor si se incrementa la reducción, el radio o el coeficiente de fricción para una condición de laminación en la que dos de estos tres parámetros se mantengan constantes, por lo la utilidad del para la evaluación real del modelo se restringe a casos en los que se definiera un intervalo para el radio de laminación, la reducción y el coeficiente de fricción en el que la variación de carga no sea superior a un porcentaje que debe de definirse experimentalmente, por ejemplo el radio y la reducción se fijan y se permite que varíe el coeficiente de fricción y de los resultados obtenidos analizar en que intervalo es válido el modelo.

Por lo que la hipótesis de que éste modelo tendría mayor precisión se ha comprobado en intervalos en definidos para cada caso, fuera de los que se sobrestima la presión radial y la carga de laminación. Siendo este el siguiente paso en el desarrollo del presente modelo, cotejar según los resultados teóricos el comportamiento experimental en para que se definan los intervalos de validez del modelo, dado que su comportamiento es mejor al predecir mayores cargas mientras que la simple solución numérica de la ecuación de Von Karman arroja resultados inferiores.

BIBLIOGRAFÍA

- Alexander, J. M., On the theory of rolling. Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 326, University Printing House, Cambridge, 1972.
- Anton, Howard y Bivens, Davis Stephen, Calculus. John Wiley & Sons, USA, 2002.
- Ayres, Frank, Jr., Ecuaciones Diferenciales. McGraw-Hill, México, 1991.
- Anton, Howard y Bivens, Davis Stephen, Calculus. John Wiley & Sons, USA, 2002.
- Dieter, George E., Mechanical Metallurgy. Singapore National Printers Ltd., Singapore, 1986.
- Grossman, Stanley I., Calculus. Academic Press, USA, 1989.
- Reddheffer, Ray y Poor, Dan, Differential Equations. Buttler & Turner Publishers, United States, 1991.
- Rowe, Geoffrey W., Principles of Industrial Metalworking Process. Buttler & Turner Ltd., England, 1986.
- Shah, S. N., Lahoti, G. D. y Altan, T., Computer-Aided of Deformations and Temperatures in Strip Rolling. Journal of Engineering for Industry, Transactions of ASME, Vol. 100, United States of America, May 1978.
- Thomsen, Erich G., Yung, Charles y Kobayashi, Shiro, Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing. Mc Millam Company, United States of America, 1965.

ANEXO 1

Listado del programa propuesto, *Laminación*, en C++, que considera la aproximación de Hitchcock.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>

class Laminacion
{
int iter;
double R,hf,h0,deltah,angmor,sigma0,mu,sigmay,nu,Er,inc,inter1,inter2,pr,prE,prS,qw;
char posicion;
public:
Laminacion();
double Centilesimas (void);
void DatosLaminacion (void);
double EcOrowan (double alf, double sigmax, double r);
void Laminar (void);
};
Laminacion::Laminacion()
/*función inicilizadora*/
iter=0;
R=hf=h0=deltah=angmor=sigma0=mu=sigmay=nu=Er=inc=inter1=inter2=pr=qw=0.0;
posicion='E';
}
double Laminacion::Centilesimas(void)
/*funcion de asignación de valor*/
double value; int unidades;
printf("\n OPRIMA C PARA [cm], M PARA [mm], P PARA [MPa], G PARA [GPa],K PARA [ksi],\n");
printf("U PARA [in] Y L PARA [in x10-3]. PUEDEN SER MAYUSCULAS O MINUSCULAS.\n");
unidades=getche(); unidades=toupper(unidades);
printf("\nDE EL VALOR SOLICITADO EN LAS UNIDADES SELECCIONADAS: ");scanf("%lf",&value);
switch(unidades)
{
case 'C' : value=value/100.0; break;
case 'M' : value=value/1000.0; break;
case 'P' : value=1000000.0*value; break;
case 'K' : value=6894733.3*value; break;
case 'U' : value= 0.0254*value; break;
case 'L' : value=25.4*value; break;
case 'G' : value=1000000000.0*value; break;
default: {printf("\nNO ELIGIO ADECUADAMENTE UNIDADES. FIN DE PROGRAMA."); printf("\nPRESIONE ENTER.");
getche(); abort();}
}
return(value);
}
void Laminacion::DatosLaminacion(void)
{
clrscr();/*función de recolección de datos*/
printf("\n\n");
printf("\t *****SOLUCION DE LA ECUACION DE VON KARMAN*****\n");
printf("\t TOMANDO EN CUENTA LA DEFORMACION DE LOS RODILLOS\n");
printf("\t PROPUESTA POR HITCHCOK\n");
printf("INTRODUZCA LOS DATOS QUE SE PIDEN A CONTINUACION...\n\n");
printf("**RADIO DE LOS RODILLOS*\n");
R=Centilesimas();
printf("\n*DISTANCIA MINIMA EN EL ARCO DE LAMINACION*\n");
hf=Centilesimas();
printf("\n*ESPESOR INICIAL DE LA LAMINA*\n");
h0=Centilesimas(); deltah=h0-hf; inter1=deltah/(4.0*R);
inter2=sqrt(inter1); angmor=2.0*asin(inter2);
printf("\n*VALOR DEL ESFUERZO DE CEDENCIA DEL MATERIAL DE LA PLACA*\n");
sigmay=Centilesimas();
printf("\n*VALOR DEL COEFICIENTE DE FRICCION, (0,1) *\n");
scanf("%lf",&mu);
```

```

if((mu>0)&&(mu<0.5))==0){printf("\nVALOR INCORRECTO. VALOR VALIDO SOLO ENTRE 0 Y 1. FIN DE
PROGRAMA.OPRIMA ENTER\n"); getch(); abort();};
sigma0=2.0*sigmay/sqrt(3.0);
printf("\nPUNTOS DE INSPECCION SOBRE EL CLARO DE LAMINACION. MENOS DE 2000*\n");
scanf("%d",&iter);
if(iter>2000){printf("\nVALOR INCORRECTO. VALOR VALIDO SOLO MENOR DE 2000. FIN DE PROGRAMA.OPRIMA
ENTER\n"); getch(); abort();};
inc=angmor/(double)iter;
printf("\n*COEFICIENTE DE POISSON DEL MATERIAL DE LOS RODILLOS*\n");
scanf("%lf",&nu);
printf("\n*MODULO DE YOUNG DEL MATERIAL DE LOS RODILLOS*\n");
Er=Centilesimas();
clrscr();
printf("RADIO DE LOS RODILLOS (cm):%lf\n",R*100.0);
printf("DISTANCIA MNIMA EN EL ARCO DE LAMINACION(cm):%lf\n",hf*100.0);
printf("ESPESOR INICIAL DE LA LAMINA(cm):%lf\n",h0*100.0);
printf("ANGULO DE MORDEDURA (RADIANES):%lf\n",angmor);
printf("ESFUERZO DE CEDENCIA DEL MATERIAL DE LA PLACA(MPa):%lf\n",sigmay/1000000.0);
printf("COEFICIENTE DE FRICCION:%lf\n",mu);
printf("COEFICIENTE DE POISSON DE RODILLOS:%lf\n",nu);
printf("MODULO DE YOUNG DE RODILLOS(GPa):%lf\n",Er/1000000000.0);
printf("PUNTOS DE INSPECCION:%d\n",iter);
printf("PRESIONE ENTER PARA CONTINUAR\n");
getche();
clrscr();
}
double Laminacion::EcOrowan(double alf, double sigmax, double r)
/*Ecuación de Orowan*/
double ppn,deri,a,b,c,d,j,k;
if (posicion=='E')ppn=-1.0;
else ppn=1.0;
j=sin(alf/2.0);
//printf("EL VALOR DE sen(alf/2.0):%lf",j);
k=j*j;
a=hf+(4.0*r*k);
b=sigma0+sigmax;
//printf("EL VALOR DE sigma0+sigmax:%lf",b);
c=sin(alf)+(ppn*mu*cos(alf));
//printf("EL VALOR DE sin(alf)+(ppn*mu*cos(alf)):%lf",c);
d=1.0-(ppn*mu*tan(alf));
pr=b/d;
qw=1.0/(a-hf);
if (posicion=='E')prE=pr;
else prS=pr;

//printf("EL VALOR DE pr:%lf",pr);
deri=2.0*(r/a)*((b*c/d)-sigmax*sin(alf));
return(deri);
}
void Laminacion::Laminar(void)
{
double u1,u2,u3,u4,u5,v1,v2,v3,v4,v5,Sxe,Sxs,pre,pe,prs,ps,x,y,R1,R2,R1n,R2n,e,f,g,w,z,t,s;
double pi=3.1415926535;
double PRE[2001]={0.0},PRS[2001]={0.0};
int i,j,cont;
DatosLaminacion();
e=16.0*(1-(nu*nu));
f=pi*Er;
g=e/f;
//printf("Valor de la Constante:%E",g);
//printf("Es decir 1/Constante =%lf",1/g);
//getche();
//clrscr();
printf("\nNo.PASO\tESFUERZO ENTRADA-NEUTRO\t PRESION RADIAL\n");
printf("
\t[MPa]
\t
\t[MPa]\n");
PRE[0]=PRS[0]=sigmay;
pe=ps=pre=prs=0.0;
for(j=1,x=angmor-inc,y=inc;y<=angmor;x=x-inc,y=y+inc,j++)
{
R1=R2=R;
cont=1;
//printf("El valor radio R es: %lf",R1);
do

```

```

{
R1n=R1;
posicion='E';/*Método de Runge Kutta*/
u1=EcOrowan(x,Sxe,R1n);
u2=EcOrowan(x-(inc/2.0),Sxe-(inc/2.0*u1),R1n);
u3=EcOrowan(x-(inc/2.0),Sxe-(inc/2.0*u2),R1n);
u4=EcOrowan(x-inc,Sxe-(inc*u3),R1n);
Sxe=Sxe-inc*((u1/6)+(u2/3)+(u3/3)+(u4/6));
u5=EcOrowan(x,Sxe,R1n);
PRE[j]=pr;
for(i=0,i<=j;i++);
pre+=PRE[i];
pe=((2*pre)-PRE[0]-PRE[j])*(inc/2.0);
R1=R1n*(1+g*qw*R1n*pe);/*Aproximación de Hitchcok*/
w=(R1-R1n)/R1n;
t=(R1-R)/R;
//printf("PASO\tITERACION\tR1\tSxe\n");
//printf("%d\t%d\t%lf\t%lf\n",j,cont,R1,Sxe);
/*printf("\nu1=%lf",u1);
printf("\nu2=%lf",u2);
printf("\nu3=%lf",u3);
printf("\nu4=%lf",u4);
getche();
cont++;*/
}while((fabs(w)>=0.001)&&(fabs(t)<=0.005));

//cont=1;
do{
R2n=R2;
posicion='S';/*Método de Runge Kutta*/
v1=EcOrowan(y,Sxs,R2n);
v2=EcOrowan(y+(inc/2.0),Sxs+(inc/2.0*v1),R2n);
v3=EcOrowan(y+(inc/2.0),Sxs+(inc/2.0*v2),R2n);
v4=EcOrowan(y+inc,Sxs+(inc*v3),R2n);
Sxs=Sxs+inc*((v1/6)+(v2/3)+(v3/3)+(v4/6));
v5=EcOrowan(y,Sxs,R2n);
PRS[j]=pr;
for(i=0,i<=j;i++);
prs+=PRS[i];
ps=((2*prs)-PRS[0]-PRS[j])*(inc/2.0);
R2=R2n*(1+g*qw*R2n*ps);/*Aproximación de Hitchcok*/
/*z=(R2-R2n)/R2n;
s=(R2-R)/R;
/*printf("\n%d\n%d\t%lf\t%lf",j,cont,R2,Sxs);
printf("\nv1=%lf",v1);
printf("\nv2=%lf",v2);
printf("\nv3=%lf",v3);
printf("\nv4=%lf\n",v4);
getche();
cont++;*/
//}while((fabs(z)>=0.001)&&(fabs(s)<=0.01));
printf("%d\t%lf\t%lf\n",j,prE/1000000.0, prS/1000000.0);

if((j%20)==0)
{
printf("\nPRESIONE ENTER PARA CONTINUAR");
getche();
clrscr();
printf("\nNo.PASO      ESFUERZO ENTRADA-NEUTRO      PRESION RADIAL\n");
printf("          [MPa]          [MPa] \n");
}
}
getche();
}
void main(void)
{
Laminacion Lamina;
Lamina.Laminar();
}

```

ANEXO 2

Listado del programa propuesto en C++, que no considera la aproximación de Hitchcock, es decir los rodillos son indeformables.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <ctype.h>

class Laminacion
{
int iter;
double R,hf,h0,deltah,angmor,sigma0,mu,sigmay,nu,Er,inc,inter1,inter2,pr,prw;
char posicion;
public:
Laminacion();
double Centilesimas (void);
void DatosLaminacion (void);
double EcOrowan (double alf, double sigmax, double r);
void Laminar (void);
};
Laminacion::Laminacion()
{/*función inicilizadora*/
iter=0;
R=hf=h0=deltah=angmor=sigma0=mu=sigmay=nu=Er=inc=inter1=inter2=pr=prE=prS=0.0;
posicion='E';
}
double Laminacion::Centilesimas (void)
{/*funcion de asignación de valor*/
double value; int unidades;
printf("\n OPRIMA C PARA [cm], M PARA [mm], P PARA [MPa], G PARA [GPa],K PARA [ksi],\n");
printf("U PARA [in] Y L PARA [in x10-3]. PUEDEN SER MAYUSCULAS O MINUSCULAS.\n");
unidades=getche(); unidades=toupper(unidades);
printf("\nde EL VALOR SOLICITADO EN LAS UNIDADES SELECCIONADAS: ");scanf("%lf",&value);
switch(unidades)
{
case 'C' : value=value/100.0; break;
case 'M' : value=value/1000.0; break;
case 'P' : value=1000000.0*value; break;
case 'K' : value=6894733.3*value; break;
case 'U' : value= 0.0254*value; break;
case 'L' : value=25.4*value; break;
case 'G' : value=1000000000.0*value; break;
default: {printf("\nNO ELIGIO ADECUADAMENTE UNIDADES. FIN DE PROGRAMA."); printf("\nPRESIONE ENTER.");
getche(); abort();}
}
return(value);
}
void Laminacion::DatosLaminacion (void)
{
clrscr();/*función de recolección de datos*/
printf("\n\n");
printf("\t *****SOLUCION DE LA ECUACION DE VON KARMAN*****\n");
printf("\t TOMANDO EN CUENTA LA DEFORMACION DE LOS RODILLOS\n");
printf("\t PROPUESTA POR HITCHCOK\n");
printf("INTRODUZCA LOS DATOS QUE SE PIDEN A CONTINUACION...\n\n");
printf("**RADIO DE LOS RODILLOS*\n");
R=Centilesimas();
printf("\n*DISTANCIA MINIMA EN EL ARCO DE LAMINACION*\n");
hf=Centilesimas();
printf("\n*ESPESOR INICIAL DE LA LAMINA*\n");
h0=Centilesimas(); deltah=h0-hf; inter1=deltah/(4.0*R); inter2=sqrt(inter1); angmor=2.0*asin(inter2);
printf("\n*VALOR DEL ESFUERZO DE CEDENCIA DEL MATERIAL DE LA PLACA*\n");
sigmay=Centilesimas();
printf("\n*VALOR DEL COEFICIENTE DE FRICCION, (0,1)*\n");
scanf("%lf",&mu);
```

```

if((mu>0)&&(mu<0.5))==0){printf("\nVALOR INCORRECTO. VALOR VALIDO SOLO ENTRE 0 Y 1. FIN DE
PROGRAMA.OPRIMA ENTER\n"); getch(); abort();};
sigma0=2.0*sigmay/sqrt(3.0);
printf("\nPUNTOS DE INSPECCION SOBRE EL CLARO DE LAMINACION*\n");
scanf("%d",&iter); inc=angmor/(double)iter;
printf("\nCOEFICIENTE DE POISSON DEL MATERIAL DE LOS RODILLOS*\n");
scanf("%lf",&nu);
printf("\nMODULO DE YOUNG DEL MATERIAL DE LOS RODILLOS*\n");
Er=Centilesimas();
clrscr();
printf("RADIO DE LOS RODILLOS (cm):%lf\n",R*100.0);
printf("DISTANCIA MINIMA EN EL ARCO DE LAMINACION(cm):%lf\n",hf*100.0);
printf("ESPESOR INICIAL DE LA LAMINA(cm):%lf\n",h0*100.0);
printf("ANGULO DE MORDEDURA (RADIANTES):%lf\n",angmor);
printf("ESFUERZO DE CEDENCIA DEL MATERIAL DE LA PLACA(MPa):%lf\n",sigmay/1000000.0);
printf("COEFICIENTE DE FRICCION:%lf\n",mu);
printf("COEFICIENTE DE POISSON DE RODILLOS:%lf\n",nu);
printf("MODULO DE YOUNG DE RODILLOS(GPa):%lf\n",Er/1000000000.0);
printf("PUNTOS DE INSPECCION:%d\n",iter);
printf("PRESIONE ENTER PARA CONTINUAR\n");
getche();
clrscr();
}
double Laminacion::EcOrowan(double alf, double sigmax, double r)
/*Ecuación de Orowan*/
double ppn,deri,a,b,c,d,j,k;
if (posicion=='E') ppn=-1.0;
else ppn=1.0;
j=sin(alf/2.0);
//printf("EL VALOR DE sen(alf/2.0):%lf",j);
k=j*j;
a=hf+(4.0*r*k);
b=sigma0+sigmax;
//printf("EL VALOR DE sigma0+sigmax:%lf",b);
c=sin(alf)+(ppn*mu*cos(alf));
//printf("EL VALOR DE sin(alf)+(ppn*mu*cos(alf)):%lf",c);
d=1.0-(ppn*mu*tan(alf));
pr=b/d;
if (posicion=='E') prE=pr;
else prS=pr;
//printf("EL VALOR DE pr:%lf",pr);
deri=2.0*(r/a)*((b*c/d)-sigmax*sin(alf));
return(deri);
}
void Laminacion::Laminar(void)
{
double u1,u2,u3,u4,u5,v1,v2,v3,v4,v5,Sxe,Sxs,x,y,R1,R2,R1n,R2n,e,f,g,w,z,t,s;
double pi=3.1415926535;
int j,cont;
DatosLaminacion();
e=16.0*(1-(nu*nu));
f=pi*Er;
g=e/f;
//printf("Valor de la Constante:%E",g);
//printf("Es decir 1/Constante =%lf",1/g);
//getche();
//clrscr();
printf("\nNo.PASO\tESFUERZO ENTRDA-NEUTRO\t PRESION RADIAL\n");
printf("
\t[MPa]
\t
[MPa]\n");
Sxs=Sxe=0.0;
for(j=1,x=angmor-inc,y=inc;y<=angmor;x=x-inc,y=y+inc,j++)
{
R1=R2=R;
cont=1;
//printf("El valor radio R es: %lf",R1);
do
{
R1n=R;
posicion='E';/*Método de Runge Kutta*/
u1=EcOrowan(x,Sxe,R1n);
u2=EcOrowan(x-(inc/2.0),Sxe-(inc/2.0*u1),R1n);
u3=EcOrowan(x-(inc/2.0),Sxe-(inc/2.0*u2),R1n);
u4=EcOrowan(x-inc,Sxe-(inc*u3),R1n);

```


ANEXO 3

A.3.1 Método de Runge Kutta

Puesto que el proceso de laminado se puede modelar mediante la ecuación de Von Karman (Ec. 1.14), es conveniente que se resuelva por dos caminos diferentes ésta ecuación diferencial, en caso de que exista una antiderivada (o Primitiva), se puede llegar a una solución analítica ya sea completando diferenciales (Separación de variables, reducción, etc.) o sustituyendo variables que permitan una solución (como la de Clairault), el caso especial de la ecuaciones diferenciales lineales es único pues cada una de las raíces del polinomio en el operador derivada ($P(D)=b_0+b_1D+b_2D^2+\dots$) contiene el valor del exponente al que se eleva la base de los logaritmos naturales e. Para resolver una ecuación diferencial también se pueden usar series de potencias, como puede ser un método numérico como el de Runge-Kutta. Éste método se basa en el desarrollo de la serie de Taylor haciendo algunos ajustes (Ayres, 1991: 186-189):

Sea $y=g(x_0)$, para (x_0, y_0)

$$y = g(x_0) + (x-x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2g''(x_0) + \frac{1}{6}(x-x_0)^3g'''(x_0) + \dots \quad (\text{A.3.1})$$

$y' = g'(x_0) = f(x, y)$, derivando sucesivamente:

$$y'' = g''(x_0) = \frac{d}{dx}f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{A.3.2})$$

$$y''' = g'''(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (\text{A.3.3})$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + f \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \quad (\text{A.3.3.1})$$

Y así sucesivamente. Se adopta la notación

$p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$, cuyos valores en el punto (x_0, y_0)

se designan por un subíndice 0. Y calculando para $x=x_0+h$.

$$\bar{y} = y_0 + hf_0 + \frac{1}{2}h^2(p_0 + f_0q_0) + \frac{1}{6}h^3(r_0 + p_0q_0 + 2f_0s_0 + f_0q_0^2 + f_0^2t_0) + \dots \quad (\text{A.3.4})$$

Agregando términos cada vez más complejos se obtiene una mayor precisión en el valor estimado (\bar{y}) a un incremento h .

Al conocer $f(x, y)$ como la derivada de la función en un punto, es fácil extrapolar linealmente a un paso h , un \bar{y} según:

$$\bar{y} = y + k = y + hf(x, y) \quad (\text{A.3.5})$$

Se sabe así mismo que para obtener en el caso general una solución particular de una familia de ecuaciones diferenciales se tiene que:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx \quad (\text{A.3.6})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} k = \bar{y} - y_0 &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \\ &= hf_0 + \frac{1}{2}h^2(p_0 + f_0q_0) + \frac{1}{6}h^3(r_0 + p_0q_0 + 2f_0s_0 + f_0q_0^2 + f_0^2t_0) + \dots \quad (\text{A.3.7}) \end{aligned}$$

Supóngase que se conocen los valores y_0, y_1, y_2 de $x_0, x_1 = x_0 + \frac{1}{2}h, x_2 = x_0 + h$, entonces por la regla de Simpson se tiene que:

$$k = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \approx \frac{h}{6} [f(x_0, y_0) + 4f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_1) + f(x_0 + h, y_2)] \quad (8)$$

Realmente sólo se conoce y_0 , pero aproximando y_1 y y_2 .

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0) = y_0 + \frac{1}{2}hf_0 \quad (9)$$

$$y_2 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (10)$$

$$k \approx \frac{h}{6} [f_0 + 4f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0 + h, y_0 + hf))] \quad (11)$$

Que puede simplificarse a $k_1 = hf_0, k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1), k_3 = hf(x_0 + h, y_0 + k_2), k_4 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1)$ por lo que:

$$k \approx \frac{1}{6} (k_1 + 4k_4 + k_3) \quad (12)$$

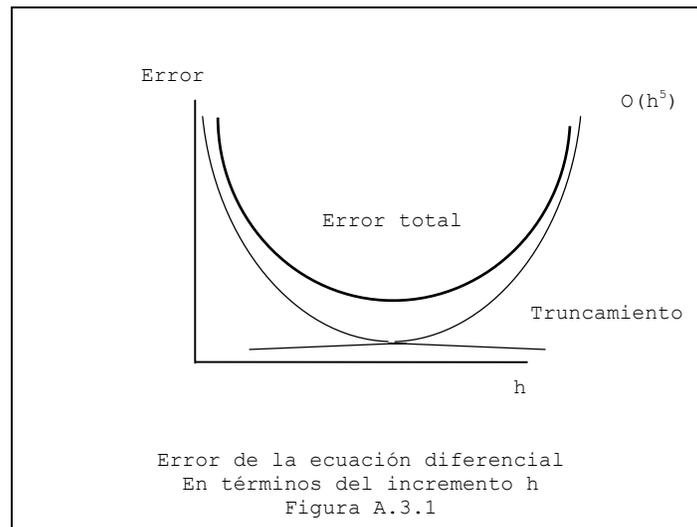
Como puede verse el valor obtenido es un valor truncado de \bar{y} por lo que el error está dado en potencias al cubo de h.

El método de Runge-Kutta tiene las siguientes mejoras al método para hacerlo más preciso:

$$k_1=hf_0, \quad k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_1\right), \quad k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_2\right), \quad k_4=hf(x_0+h, y_0+k_3)$$

$$k \approx \frac{1}{6} (k_1+2k_2+2k_3+k_4) \quad (13)$$

El orden del error de éste método es de $h^5, O(h^5)$, teniendo en cuenta que todo proceso numérico adolece de un error inherente de truncamiento según el número de cifras significativas que se tomen en cuenta.



A.3.2 Método del Trapecio

El uso de la integración numérica se basa en aquellas que no poseen una antiderivada o primitiva y por lo tanto no se les puede aplicar el Teorema fundamental del cálculo para evaluar una integral definida, sin embargo puede de ser de gran importancia evaluar tales integrales, todas las técnicas que lo hacen se conocen como integración numérica.

Considérese el problema de evaluar

$$\int_a^b f(x)dx$$

si se sabe que una integral definida se puede expresar como una suma de Riemann (Grossmann, 1989: 512-517):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

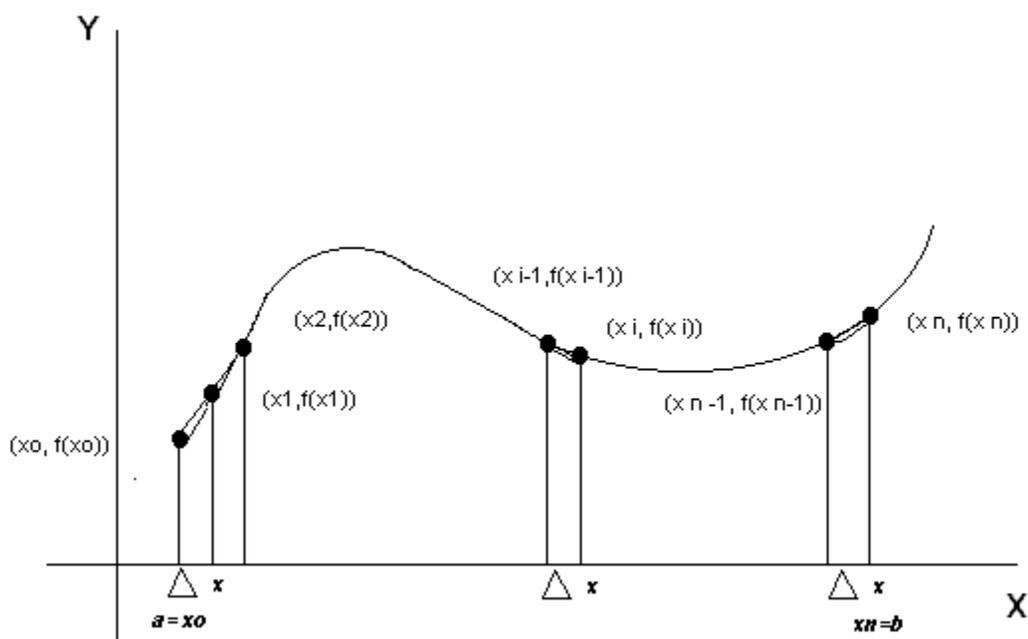


Figura A.3.2

Sea f como se muestra en la Figura A.3.2 y sea una partición del intervalo $[a, b]$ de puntos equiespaciados

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$, como puede verse el área debajo de la curva

se puede aproximar por la suma de n trapezoides.

Un trapezoide típico se ilustra en la siguiente Figura

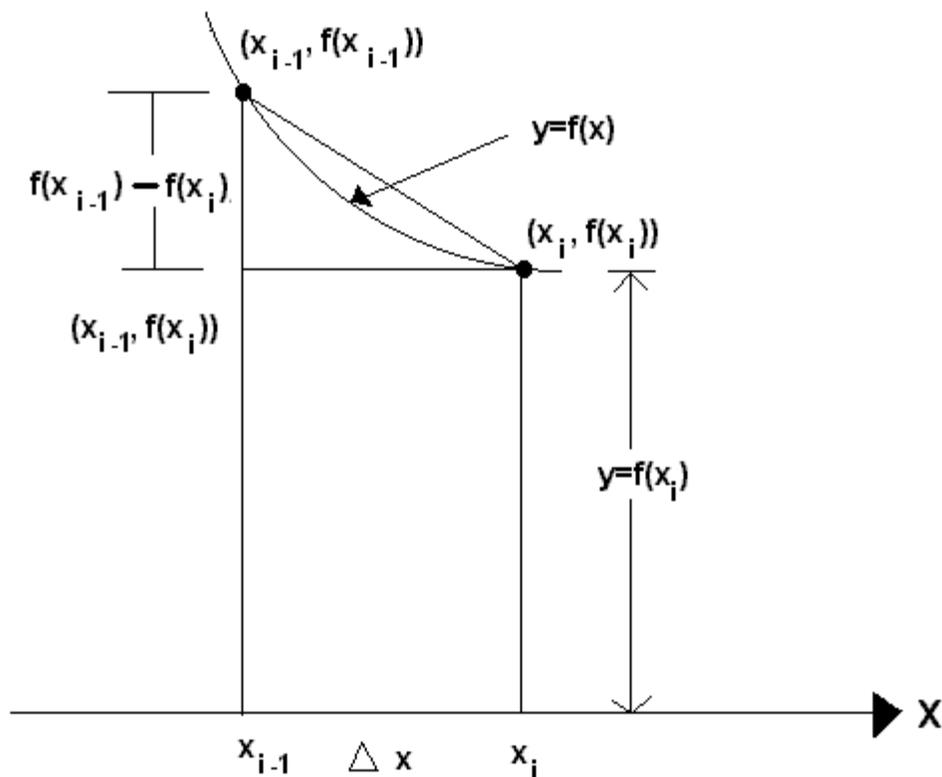


Figura A.3.3

El área del trapezoide es el área del rectángulo más el área del triángulo, el área del rectángulo es $f(x_i)\Delta x$, y el área del triángulo es $\frac{1}{2} [f(x_{i-1})-f(x_i)]\Delta x$, por lo que

$$\begin{aligned} \text{Área de un trapezoide} &= f(x_i)\Delta x + \frac{1}{2} [f(x_{i-1})-f(x_i)]\Delta x \\ &= \frac{1}{2} [f(x_{i-1})+f(x_i)]\Delta x \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \text{Suma de las áreas de los trapezoides}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [f(x_0)+f(x_1)]\Delta x + \frac{1}{2} [f(x_1)+f(x_2)]\Delta x + \dots \\ &\quad \frac{1}{2} [f(x_{n-2})+f(x_{n-1})]\Delta x + \frac{1}{2} [f(x_{n-1})+f(x_n)]\Delta x \end{aligned}$$

o

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \Delta x [f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+ \dots +2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Que se conoce como la Regla del Trapecio (Anton, 2002: 565).

Es de notar que puede ser escrita como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+ \dots +2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Durante el proceso de integración se presentan dos errores inherentes a éste proceso el **error de discretización**, en el que se incurre al realizar la aproximación a la curva mediante líneas rectas en un número discreto o finito de puntos. El otro es el **error de redondeo**, en el que se incurre al acumular todas aquellas cifras decimales no consideradas en cada cálculo. Como sucedía con el método de Runge Kutta, el error se reduce al disminuir el tamaño del paso, pero el error de redondeo aumenta, en algún punto existe un punto medio en el cual éste error se minimiza, el error de discretización viene dado por

$$\varepsilon_T \leq \frac{(b-a)^3 K_2}{12n^2}$$

En n subintervalos suponiendo que $f'(x)$ y $f''(x)$ existen en $[a,b]$, en el que K_2 es el máximo valor de $f''(x)$ en $[a,b]$.