UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EFECTO CASIMIR ACÚSTICO PARA MATERIALES REALES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

LUIS IGNACIO REYES GALINDO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT

2005

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Efecto Casimir Acústico para Materiales Reales"

realizado por Luis Ignacio Reyes Galindo

con número de cuenta 099547484 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent
Propietario	Dra. Margarita Navarrete Montesinos
Propietario	Dra. Rocío Jáuregui Renaud
Suplente	Dr. Carlos Villarreal Luján
Suplente	Dr. Guillermo Monsivais Galindo

Consejo Departamental de Física

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

El Efecto Casimir Acústico para Materiales Reales

Luis Ignacio Reyes Galindo

Agradecimientos y demás...

Este trabajo es la conclusión de casi tres años de trabajo en el Instituto de Física de la UNAM como estudiante asociado. Mi primer temporada ahí fue en el Departamento de Física Experimental. Por esos meses agradezco al Dr. Efraín Chávez, particularmente por haberme continuamente permitido chismosear en todo tipo de actividades relacionadas con la Física Nuclear.

Tras ese período vivido en el error, fui sobornado, azuzado y finalmente convencido para cambiarme al Departamento de Estado Sólido, por mi eterno compañero de jüerga, jugarreta y -ocasionalmente- trabajo don Jeffrey E. Bárcenas Mosqueda. Desde los pantanos de Tabasco hasta el Cosmo Caixa de Barcelona; pocos son los afortunados de tener a un colabborador y amigo de esta calidad, y excentricidad.

A propósito, que nada de lo logrado, hecho y malecho hasta ahora hubiese sido ni ligeramente admisible bajo la tutela de otro asesor que no fuera el Dr. Raúl Esquivel Sirvent. Por la enorme paciencia y comprensión exhibida hacia nosotros dos, sendos Bribones Asociados, ofrezco mis más grandes agradecimientos. La libertad de trabajo que nos has dado me ha hecho adentrarme en el medio de la investigación formal de una forma que muchos envidiarían. Espero que el trabajo realizado sea siquiera suficiente para haber correspondido a los favores otorgados. Entonces, a mis dos compañeros de trabajo, Raúl y Jeff, reiteradas nanogracias. Las donas también ayudaron.

Nada hubiera sido posible sin el absoluto, entero e infinito apoyo de mi padre, madre y hermana. Gracias por el amor, el cariño y la prolongada Beca Reyes-Zermeño-Galindo. Todo lo bueno que se pueda decir sobre su hijo es debido a ustedes, y espero hacerlos orgullosos con este y futuros trabajos. Gracias por no haberme dejado claudicar. Gracias. Gracias. Gracias.

La lista de personas que han resultado importantes a lo largo de estos años, en ocasiones sumamente difíciles, es larga si mencionara las circunstancias particulares de cada una, y la brevedad es en ocasiones como esta necesaria y hasta virtuosa. Gracias a Karla, por todo, todo lo que me enseñaste. A mi hermano Hector por estar siempre ahí. Al C. Lic. Arturo Diaz, por largos años de amistad. A mi otro hermano, Rodrigo, gracias por regresar.

A la Buena Mascota, sin quien esta tesis hubiera resultado mucho menos atractiva. Por los momentitos playeros, y todos los demás, gracias.

Entrando a mi perodo UIC, hay personas muy importantes. Gracias a Super Mau, también conocido como El Exótico, por los buenos momentos y las largas pláticas. A Ms. Monk y Virgen, amigas en las buenas, las malas y las peores. A Fer y Mariví, Patylucas, la Lona, Gina y Cris. Amigas por siempre, unidas por el IQ.

He tenido el placer de conocer a numerosas personas del IFUNAM con quien he podido interactuar y de las cuales aprendí inmensidades. En especial agradezco al Dr. Eugenio Ley-Koo, por haberme enseñado el gusto por todo lo electromagnético, y por el trabajo matemático limpio. A mis revisores de tesis, Dr. Carlos Villarreal, Dra. Rocío Jáuregui, Dra. Margarita Navarrete y Dr. Guillermo Monsivais. Enormes gracias a la Dra. Cecilia Nóguez, por habernos aguantado... a los tres. Gracias a Ricardo por tu amistad.

En la categoría de “Varios” pero no por eso menos importantes. Gracias a Elisa y Natalia, Argentina y Taniux, a toda la familia Galindo.

Y finalmente, gracias a Lae, la Luna, fuente de inspiración para poetas, locos y combinaciones intermedias.

Contenido

Prólogo

La Chimæra era un ser mitológico terrible, con la mitad delantera del cuerpo de león y cabra, y la trasera como la de un dragón. Escupiendo fuego aterrorizó el reino de Lycia hasta que Belerofonte la derrotó, montado sobre el lomo de Pegaso. Así como la Chimæra incluía en su anatomía elementos de animales fantásticamente ajenos entre sí, el tema de este trabajo está formado por elementos de áreas tan diversas de la Física que quizá la misma Pallas Atena encontraría difícil explicar su conjunción. Para dar una idea al lector de lo que estoy hablando, he aquí un breve resumen del problema que trataré. Este trabajo tendrá como cuerpo al efecto Casimir, un resultado de la Electrodinámica Cuántica. Este efecto se transmutará al terreno de la Acústica, y una vez ahí se aplicarán conceptos nacidos del vientre de la Mecánica Clásica para extraer nuevos resultados, que posteriormente se transfigurarán en cuánticos otra vez. Si hasta ahora la repugnancia por tal pedacería no ha sido suficiente para ser ahuyentado, prosiga viajero en el camino de esta Tesis Quimérica. . .

Breve historia del Efecto Casmir y del Efecto Casimir acústico

So far as what there may be of a narrative in this book; and, indeed, as indirectly touching one or two very interesting and curious particulars [...] the foregoing chapter, in its earlier part, is as important a one as will be found in this volume; but the leading matter of it requires to be still further and more familiarly enlarged upon, in order to be adequately understood, and moreover to take away any incredulity which a profound ignorance of the entire subject may induce in some minds, as to the natural verity of the main points of this affair. I care not to perform this task methodically; but shall be content to produce the desired impression by separate citation of items, practically or reliably known to me [...]; and from these citations, I take it - the conclusion aimed at will naturally follow of itself.

***-Moby Dick or The Whale*, Herman Melville**

En 1948 Hendrik B. G. Casimir publicó un artículo de un par de páginas en una oscura revista holandesa, [1]. El artículo resolvía un problema (aparentemente) simple, herencia de otro (aparentemente) más complejo. El problema original estaba relacionado con la estabilidad de suspensiones de partículas hidrofóbicas en electrolitos acuosos diluídos. Uno de los modelos que describían una de tales sustancias suponía que las partículas suspendidas podían considerarse dos pequeñas placas paralelas conductoras.

Este problema llevó a Casimir a estudiar un sistema de dos placas paralelas y la posible interacción dipolar entre ellas. El estudio de este tipo de fuerzas no era nuevo. Las famosas fuerzas de van der Waals tienen el mismo origen: interacciones entre los momentos dipolares moleculares, aun para moléculas que no tienen un momento dipolar permanente. Inclusive, Casimir y London resolvieron ese mismo año un problema particular para fuerzas de van der Waals retardadas (esto es, considerando que la luz tiene una velocidad de propagación finita.)

El ahora famoso artículo de Casimir del '48 estudiaba específicamente el caso de dos placas infinitas y perfectamente conductoras colocadas en el vacío. Primero, calculó la densidad de energía asociada a las oscilaciones del campo electromagnético en el vacío cuántico ("energía del punto cero") en presencia de las placas, que funcionaban como una cavidad resonante limitando los valores admisibles de las longitudes de onda en el interior. Esta densidad la restó a la densidad de energía que tendría el espacio sin placas, que es la energía asociada al punto cero pero sin restricciones sobre las longitudes de onda. Como se verá más adelante, el calculo requirió de un método ingenioso, puesto que estrictamente las dos cantidades son infinitas. Casimir encontró que el resultado era un número finito y que equival ía a una fuerza atractiva entre las placas.

Si bien el artículo fue poco difundido, la mayoría de sus colegas cercanos lo conocieron. Entre ellos, Casimir recuenta en sus memorias como Pauli, con su característico y agrio sarcasmo, inicialmente desechó el resultado como una mera curiosidad matemática. [1] Fue sólo Neils Bohr quien resaltó la probable importancia del resultado que hacía explícita la realidad física de la energía del punto cero. En uno de sus últimos escritos, Casimir reconoce que él mismo nunca le ajudicó demasiada importancia al tema y que siempre lo consideró un resultado secundario a sus anteriores investigaciones sobre fuerzas retardadas entre moléculas, [2]. Casimir dedicó un par de artículos más al tema, y el llamado efecto Casimir fue de facto relegado al olvido.

En 1956, E. M. Lifschitz publicó un artículo, [3], que trataba sobre fuerzas intermoleculares de largo alcance. El problema que planteaba Lifschitz era muy parecido al que había tratado Casimir: encontrar una expresión para la fuerza entre entre dos semi espacios infinitos debido a la interacción entre sus momentos dipolares no permanentes. En este caso las placas no eran conductores perfectos, sino que estaban hechas de materiales con propiedades dieléctricas arbitrarias. Posteriormente se demostró que al tomar el límite de conductores perfectos en la expresión de Lifschitz, las fuerzas eran completamente iguales (ver por ejemplo, [4]). Esto era realmente sorprendente, puesto que el tratamiento de Lifschitz en ningún momento consideró explícitament el papel de las fluctuaciones del vacío, sino que calculaba las fuerzas retardadas clásicas entre moléculas debido a la existencia de momentos dipolares en ellas (mucho más tarde se encontraría que estos momento surgen precisamente por la acción de las fluctuaciones del vacío, dando -casi- fin a una larga discusión hermenéutica). Las diferencias entre estas dos teorías se profundizaban todavía más porque, en contraste con la deducción de Casimir, el artículo de Lifschitz era y sigue siendo famoso por su complicada metodología hasta el punto en que se dudó de la veracidad de los resultados. El mismo Lifschitz eliminó las referencias que había al tema en ediciones posteriores de los famosos libros de texto que coautoró, y lo colocó como un tema secundario en uno de los tomos menos consultados de la colección.

Si bien la fuerza de Casimir había sido deducida usando métodos estándares de mecánica cuántica, la realidad física del resultado no era nada evidente. Existen procedimientos de electrodinámica cuántica que explícitamente desechan las contribuciones de la energía del vacío argumentando que estas energías infinitas son físicamente inaceptables. En esos tiempos estos procedimientos eran ampliamante usados para evitar las aberrantes manipulaciones de infinitos que son la característica inequívoca de lo problemas modernos de fuerzas de Casimir. Claramente existía una necesidad de verificación experimental de cualquiera de los dos puntos de vista. [2] Sin embargo, la solución al problema no fue inmediata. La fuerza que Casimir calculó era de extremo corto alcance (escala micrométrica) y las dificultades experimentales para producir resultados confiables eran extraordinarias. Hasta hace apenas una década los experientos, que finalmente dieron la razón a Casimir, podían contarse como menos de una decena, [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Pero esta situación ha cambiado radicalmente en los últimos años con la explosión de la Física de la micro y nano escala. La popularidad de esta disciplina ha requerido un mejoramiento en las técnicas para manipulación y creación de dispositivos a las escalas donde las fuerzas de Casimir son medibles, con lo cual cada día se observa un acelerado incremento en el número de experimentos, y con cada vez más precisión.

Últimamente varios artículos han notado la gran importancia que estudiar estas fuerzas tiene para la nanotecnología, posiblemente el área de estudio científico de mayor crecimiento actual. Es un hecho que a escalas nanométricas las fuerzas de Casimir tienen efectos importantes, que podrían aparecer como fuerzas parasitarias al deformar nanoestructuras, colapsarlas

[1] "I mentioned already that in 1951 both Pauli and I attended the Bothe Conference in Heidelberg. During an excursion by boat on the Neckar I explained to him my results on Van der Wals forces and their relation to field fluctuations in empty space. He began by bluntly telling me it was all nonsense, but was obviously amused when I did not give in. Finally, after I had countered all his arguments, he agreed, and called me a real *Stehaufmanderl* - a toy known as "tumbler" in English. [...] It is a pleasant memory. The beautiful scenery of the Neckar valley slid quietly past, while we were sitting on deck discussing physics, and Pauli repeated over and over, "a true *Stehaufmanderl*". It was the last time he did not call me "Herr Direktor." "

-H. G. B. Casimir, ver [12].

[2] "The state of of the electromagnetic field of lowest possible energy, which we shall call the ground state or the vacuum state, is that in which there are no photons of any mode. This means that the energy in each mode is $\hbar\omega/2$, where ω is the frequency of the mode. Now, if we were to sum this ground-state energy over all of the infinite number of possible modes of ever-increasing frequency which exist even for a finite box, the answer would be infinity. This is the best symptom of the difficulties which beset quantum electrodynamics.

In the present case, for the vacuum state, the problem is easily fixed. Suppose we choose to measure zero point energy from a different zero point. ***Since there is no physical effect resulting from a constant energy, the result of any experiment we perform will be insensitive to the arbitrary choice of the zero point energy.*** [...]

For the present, we are safe in assigning the zero value to the vacuum-state energy density. ***Up to the present time no experiments that contradict this assumption have been performed.***

-R. P. Feynman (1965), ver [13].

totalmente o con efectos de adhesión incontrolables, [14, 15, 16, 17, 18]. Por lo tanto expertos en el área han hecho un llamado a encontrar maneras de modificar y controlarlas por varios y diversos métodos, casi siempre mediante el uso de materiales con características y arreglos específicos.

A pesar de los numerosos estudios teóricos sobre fuerzas de Casimir, estamos lejos de poder decir que tenemos un entendimiento sólido de las complejidades del problema, o que ya existe una comprensión heurística total. La fuerza de Casimir para una esfera es el caso más claro. El mismo Casimir propuso que una esfera perfectamente conductora se vería afectada por una fuerza que tendería a colapsarla usando la misma idea intuitiva que usaba para explicar la fuerza atractiva entre dos placas. Según este argumento, al igual que con las placas, la frontera esférica funciona como una cavidad resonante que limita los modos admisibles en el espacio interior de la esfera, mientras que afuera los modos son ilimitados. Por lo tanto, esta diferencia en el número de modos se conviertiría hipotéticamente en una menor densidad de energía en el interior que daría lugar a la atracción. Casimir propuso que esto podría explicar la estabilidad del electrón como partícula cuasi-puntual. Sin embargo, poco después Timothy Boyer calculó esta fuerza como repulsiva, cuando la misma interpretación nos sugeriría que los modos en el interior de la esfera también son menos[3] [19]. El cálculo de Boyer es muy tedioso y complicado (pero probadamente correcto), y al final los resultados son más una consecuencia matemática que la aplicación de conceptos físicos, algo común a muchos de los problemas tipo Casimir excepto los más simples. Hasta la fecha, el resultado de Boyer carece de una interpretación física adecuada.

El problema de las cantidades infinitas asociadas a fuerzas de Casimir es un problema recurrente. En un artículo reciente publicado por el grupo experimental de Harvard liderado por Federico Capasso (uno de los equipos de mayor renombre en experimentos de fuerzas de Casimir) [20], se hace uso de materiales exóticos (hydrogen switchable mirrors ó HSMs) que mediante manipulaciones simples pueden volverse transparentes a ciertos intervalos de frecuencias y luego regresarse a su estado original. Los autores mencionan que el propósito del artículo era proponer una forma de modificar la fuerza de Casimir sustancialmente mediante el uso de materiales de este tipo, ya que se esperaba una disminución significativa en la fuerza cuando el material era modificado para hacerce invisible. Para su sorpresa encontraron que aunque la fuerza sí disminuía, el decremento era mucho más pequeño que lo esperado, argumentándose que esto es debido a que el intervalo de "invisibilidad" (finito) es casi despreciable comparado con el espectro entero (infinito). El problema está lejos de tener una respuesta concreta convincente.

Por Larraza hablará el espíritu

Cuando el año pasado me fue propuesto como servicio social el realizar investigación en el efecto Casimir, el primer paso, de rigor, fue el estudio de las placas paralelas originales. Al comenzar una revisión de la literatura para la elección de un tema con miras a la escritura de la tesis de licenciatura, mi asesor sugirió la revisión de un artículo llamativo que ayudaría a familiarizarme un poco más con el problema. Este artículo se titulaba *An Acoustic Casimir Effect*, [21, 22, 23], y parecía interesante pues hacía una analogía acústica -completamente clásica- con el efecto Casimir original. Usando un campo de ruido de fondo blanco, dos placas paralelas dentro de un espacio cerrado se mostraban sujetas a una fuerza muy del estilo de Casimir. Pero existía una diferencia entre este caso y el original. Mientras que para conductores perfectos la fuerza es siempre atractiva, para el caso acústico podía ser atractiva o repulsiva según se escogieran las frecuencias límite supriores e inferiores del ruido de fondo. Surgió la idea de reproducir los cálculos para distintas frecuencias y ampliarlo para incluir materiales que no fueran reflectores acústicos perfectos. Adicionalmente, se pensó en utilizar el efecto Casimir acústico para demostrar la validez de un teorema comúnmente usado para aproximar resultados teóricos a experimentos reales en fuerzas de Casimir (teorema de Proximidad, o aproximación de Derjaguin).

La presente tesis es el resultado de esa investigación, que culminó con la rápida publicación de un artículo en el *Journal of the Acoustical Society of America*, [24]. Por un lado se tradujeron directamente técnicas ya utilizadas para el efecto Casimir electromagnético al caso acústico, lo cual permitió ampliar el número de casos en que se podría tratar el caso acústico teóricamente: mediante el uso de prácticamente cualquier material para la construcción de las placas. Este resultado era sustancial, considerando que las aplicaciones del efecto Casimir acústico, si bien no han sido explotadas, podrían ser relevantes en un futuro como concluye Larraza en el artículo citado. Pero difícilmente el caso acústico llegue alguna vez a

[3] En el interior de la "cavidad" esférica los modos son contables, mientras que en el exterior no lo son. Esto es, en el interior de la cavidad, la cardinalidad del número de modos es $\aleph_0$, mientras que la cardinalidad del número de modos en el exterior es $\aleph_1$.

tener tanta relevancia como el electromagnético.

La revisión final de nuestra publicación se mandó pocos meses antes de la aparición del artículo de Capasso et al. Al igual que en éste, la modificación de la fuerza como función de las frecuencias de corte es mencionada en nuestro artículo del *JASA*, aunque el punto no es tratado a profundidad. Sin embargo, es posible que del efecto Casimir acústico se pudieran extraer dividendos adicionales con respecto a este tema. La modificación del ruido de fondo en el caso acústico se realiza con facilidad, y podría ayudar a simular situaciones de interés práctico en el caso electromagnético, que en la práctica experimental podrían ser difíciles de realizar para este último. Además, los experimentos acústicos requieren de instrumentación fácilmente accesible y de mucho menor costo. Por lo tanto, no sólo es importante la aportación de la teoría de campo electromagnética al caso acústico, sino también la retroalimentación que pudiese surgir de practicar experimentos acústicos que nos dieran una mejor comprensión del efecto en general. Por lo tanto, la presente tesis tiene dos metas principales. En primer lugar, la extrapolación de la teoría de la impedancia generalizada previamente desarrollada para el caso electromagnético al caso acústico, y la exaltación del efecto Casimir acústico per se. Segundo, la reflección de las conclusiones acústicas al caso electromagnético y su aplicación al entendimiento fenomenológico (si es posible) del efecto Casimir generalizado.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En el primer capítulo se trata el Casimir electromagnético, presentando su deducción desde primeros principios hasta llegar a algunos de los desarrollos más recientes. He omitido las deducciones de algunos resultados: los que pueden encontrarse en cualquier libro de texto relacionado con el tema, o los que por su longitud no tienen cabida. El segundo capítulo trata del efecto Casimir acústico, y como se verá, con toda intención tiene una estructura completamente análoga a la del primero. El último capítulo expande nuestro artículo del *JASA*, y se enuncian algunos detalles que se han publicado desde entonces en el campo de estudio, además de algunas exploraciones con simulaciones numéricas sobre las ecuaciones propuestas.

El efecto Casimir Electromagnético

"Nature abhors a vacuum."
"Then we must fill the vacuum. That is the only thing to do."

-A Wind in the Door*, *Madeleine L'Engle

Deduciré aquí el resultado original de Casimir, siguiendo los mismos argumentos que en su artículo de 1948. Primero introduciré el problema de la cuantización del campo electromagnético siguiendo la formulación de la segunda cuantización de la mecánica cuántica. Después calcularé la fuerza de Casimir siguiendo el argumento original, tomado casi verbatim de [1] y que hace uso de la fórmula de Euler-McLaurin. Esta es la presentación que recibe el efecto Casimir en la mayor parte de las introducciones al tema, (ver por ejemplo, [25]).

Maxwell para principiantes

Empezamos por plantear las ecuaciones básicas del problema. Estas son, por supuesto, las ecuaciones de Maxwell para las densidades de carga y corriente ρ y $\vec{j}$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{4}$$

trabajando en el sistema cgs. c es la velocidad de la luz en metros sobre segundo. Suponemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son expresables en términos de un potencial escalar φ y un potencial vectorial $\vec{A}$,

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \tag{5}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell éstas son cumplidas directamente. Sin embargo, los potenciales no son únicos. Es directo demostrar que los potenciales modificados

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{6}$$

donde $\chi(\vec{r}, t)$ es una función arbitraria, también cumplen con las ecuaciones de Maxwell sin alterar el valor de $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Esta modificación a los potenciales originales es conocida como transformación de norma de segundo grado. El procedimiento común para encontrar una ecuación acoplada para los campos es el siguiente. El primer paso es sustituir $\vec{E}$ y $\vec{B}$ por sus expresiones en términos de $\vec{A}$ y φ en la segunda y la tercera ecuación de Maxwell. Trabajando en coordenadas cartesianas se usa la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{7}$$

y la llamada norma de Lorentz,

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = 0, \tag{8}$$

resultando en que la transformación de norma cumple la relación

$$\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi = -\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right). \tag{9}$$

Sustituyendo directamente en la segunda y tercera ecuación de Maxwell se obtienen las dos relaciones

$$\nabla^2\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}' = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{10}$$

$$\nabla^2\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi' = -4\pi\varphi. \tag{11}$$

Por el momento trabajaremos en el vacío clásico, es decir, un espacio libre de fuentes, con $\vec{j} = 0$ y $\rho = 0$.[4] Además, introducimos un caso trivial de la norma de Lorentz, conocida como la norma de Coulomb dada por

$$\nabla \cdot \vec{A}'(\vec{r}, t) = 0, \qquad \varphi'(\vec{r}, t) = 0, \tag{12}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición, lo cual finalmente resulta en la ecuación de onda para el vacío elecromagnético,

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0, \tag{13}$$

junto con las condiciones adicionales

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \qquad \varphi = 0. \tag{14}$$

La solución más general puede expresarse usando el teorema de Fourier como una combinación lineal de ondas planas monocromáticas

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \tag{15}$$

tal que

[4] La concepción clásica del vacío ofrece una fuente de estudio independiente por su propio mérito, desde un punto filosófico. Uno de los dividendos conceptuales más importantes de los estudios de Casimir, aunque no necesariamente imputable a él, fue la transformación del concepto del vacío físico como un estado completamente bien definido pero opuesto a la idea "natural" del vacío como un espacio donde no hay cuerpos físicos; ver [26].

$$\omega = |\vec{k}|\, c \equiv kc, \tag{16}$$

donde $\vec{k}$ es el vector de onda tridimensional, cuya dirección es la misma que el de la dirección de propagación de la onda, y con magnitud definida por la ecuación anterior. De los argumentos anteriores, puede demostrarse que se cumple la relación de ortogonalidad

$$\vec{A}_0 \cdot \vec{k} = 0. \tag{17}$$

Es conveniente introducir el vector de polarización $\vec{\varepsilon}$ como el vector unitario en la dirección de $\vec{A}_0$, con lo que los campos eléctrico y magnético finalmente toman la forma

$$\vec{E} = -2k\, |\vec{A}_0|\, \vec{\varepsilon}\, \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha), \tag{18}$$

$$\vec{B} = -2\, |\vec{A}_0|\, \vec{k} \times \vec{\varepsilon}\, \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \alpha). \tag{19}$$

Cuantización del campo electromagnético

La formulación de la segunda cuantización del campo electromagnético parte de la descripción del campo en términos de los potenciales como variables principales, y no de los campos mismos. Si el potencial se descompone en modos normales, puede demostrarse que la forma más general que puede tomar el campo es, [27],

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k},\sigma} N_k \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \tag{20}$$

N_k es un factor de normalización, $\vec{\varepsilon}$ el vector de polarización y las cantidades $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ las amplitudes asociadas a cada modo normal (en virtud del teorema de Fourier). El subíndice σ es 1 ó 2 y hace referencia a las dos posibles polarizaciones de la onda. El vector de onda $\vec{k}$ es perpendicular al de polarización, y determina la direción de propagación. Su magnitud está dada por

$$\omega^2 = c^2 k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{21}$$

Se ha usado la relación

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(0)\, e^{-i\omega t} \tag{22}$$

que es dictada por el cuarto postulado de la Mecánica Cuántica, y que resulta en la evolución temporal del operador,

$$\frac{d}{dt} \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t) = -i\, \omega_k \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t). \tag{23}$$

El procedimiento usual para encontrar los modos admisibles requiere que se defina un volumen de cuantización finito que después se hará tender a infinito. [5] Debido a la simetría del sistema, lo más adecuado es usar un cubo con volumen L^3. Entonces, el factor de normalización es, [27],

$$N_k = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{L^3 \omega_k} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

De la expresión para el potencial se obtiene las siguientes relaciones para los campos eléctrico y magnético,

[5] Este es formalmente el primer paso del llamado proceso de renormalización: obtener una cantidad finita (energía por unidad de volumen) a partir de la diferencia de dos cantidades infinitas (energía por unidad de volumen asociada al vacío, y asociada al sistema de placas).

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\sum_{\vec{k},\sigma}\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}\left(\frac{d}{dt}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\right)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{d}{dt}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\right)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right), \tag{25}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\sigma}\nabla\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\sigma}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}(t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right). \tag{26}$$

Si se insertan estas identidades en la expresión clásica para la energía asociada al campo electromagnético en el vacío clásico se obtiene

$$H = \frac{1}{8\pi}\int_V dV\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{8\pi}\int_V dV\left(\frac{1}{c^2}\left\|\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\times\vec{A}\right\|^2\right), \tag{27}$$

y el Hamiltoniano del sistema puede manipularse para finalmente expresarse como

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma}\frac{\omega_k^2}{4\pi c^2}N_k^2 L^3\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\sigma}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\right). \tag{28}$$

Apelando al segundo postulado de la Mecánica Cuántica, las amplitudes $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}$ y $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ se convierten ahora en operadores, lo cual explica por qué en la ecuación *(28)* puede *requerirse* que los dos sumandos se mantengan separados . El Hamiltoniano se convierte entonces en el operador

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}\right), \tag{29}$$

donde ahora $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ representa el operador Hermitiano adjunto de $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}$.

De aquí en adelante la descripción de los campos electromagnéticos se basa en la ya mencionada formulación de la mecánica cuántica conocida como de segunda cuantización, o como algunos textos sugieren, "formulación de los números de ocupación". Ésta fue inventada por Dirac para describir sistemas de muchos cuerpos que constan de partículas idénticas. Según esta formulación, se define el vector de estado de un sistema de n partículas idénticas usando el postulado básico que "un conjunto completo de operadores K que describe el comportamiento de una partícula, puede ser también usado para describir n partículas". Si a un operador K le corresponde el conjunto de eigenvalores K_m denotamos como N al operador que al actuar sobre el vector de estado arroja el eigenvalor n_m: el número de partículas a las cuales les corresponde el eigenvalor K_m. Además, suponemos como otro postulado fundamental que $\{K_i\}$ es un conjunto completo de operadores que conmutan. El vector de estado es un elemento del llamado "espacio de Fock", que es la suma directa (equivalente al producto directo si el número de índices es finito) de productos tensoriales de espacios de Hilbert individuales (ver [28]). El vector de estado

$$|n_1, n_2, n_3 ...\rangle$$

corresponde a un sistema tal que existen n_1 partículas con eigenvalor K_1, y en general n_i partículas con eigenvalor K_i. La teoría puede extenderse utilizando productos de espacios de Fock cada vez más extensos para incluir diversas clases de partículas, o para añadir más propiedades al sistema. Para nuestro caso, trabajaremos únicamente con fotones, y una cantidad de operadores mínima ($\hat{H}$, $\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$, $\hat{n}$). Nuestro vacío es entonces, *por definición*,

$$|\mathbf{0}\rangle \equiv |0,0,0,...\rangle, \tag{30}$$

el estado con cero partículas. Los demás estados se construyen usando los llamados operadores de creación y aniquilación, respectivamente escritos como $\hat{a}^{\dagger}$, $\hat{a}$. Sus efectos sobre un estado arbitrario son

$$\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \lambda_1|n+1\rangle \tag{31}$$

$$\hat{a}|n\rangle = \lambda_2|n-1\rangle \tag{32}$$

Para definir el álgebra de los operadores es necesario un paso más. Al aplicar sucesivamente dos operador de creación ó aniquilación a un estado ϕ, aplicándolos en orden inverso se llega al mismo estado, salvo por una constante de normalización,

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \varphi = \lambda \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger \varphi. \tag{33}$$

Puede demostrarse, [28], pg. 540, que los únicos valores admisibles para λ consistentes con el resto de la construcción anterior resultan ser

$$\lambda = \pm 1. \tag{34}$$

Por lo tanto, existen dos y sólo dos tipos de relaciones entre los operadores. Cuando $\lambda = 1$, tendremos las relaciones de conmutación

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger - \lambda \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger = 0 \tag{35}$$

y para $\lambda = -1$ las relaciones de anticonmutación

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \lambda \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger = 0. \tag{36}$$

El primer caso corresponde a las partículas conocidas como bosones, y las segundas a los fermiones, que en el esquema de la teoría cuántica de campo corresponden a partículas que obedecen las llamadas estadísticas de Bose-Einstein ó de Fermi-Dirac, respectivamente. Se sabe que las partículas asociadas al campo electromagnético, los fotones, son bosones. Por lo tanto, nos ocuparemos exclusivamente de las relaciones de conmutación. Definimos los operadores de creación/aniquilación para fotones $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$, $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ asociadas a un fotón con vector de onda $\mathbf{k}$ y espín σ. El álgebra de estos operadores es entonces,

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\right]_- = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'} \tag{37}$$

$$\left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}\right]_- = \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{a}_{\vec{k}'\sigma'}^\dagger\right]_- = 0 \tag{38}$$

La ecuación *(29)*, el Hamiltoniano del campo electromagnético, resulta idéntico al Hamiltoniano de n osciladores armónicos, uno por cada modo normal del campo (por cada $\mathbf{k}, \sigma$). Usando las relaciones de conmutación el Hamiltoniano tiene también la forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger + \frac{1}{2}\right) \equiv \sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_k \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right). \tag{39}$$

Los eigenvalores n del operador $\hat{n}$ corresponden al número de cuantos o fotones del campo cuando el sistema está en el estado $|n\rangle$. La “energía del punto cero” (energía del vacío) corresponde a la del estado $|n\rangle = |0\rangle$. Su energía en el espacio libre es

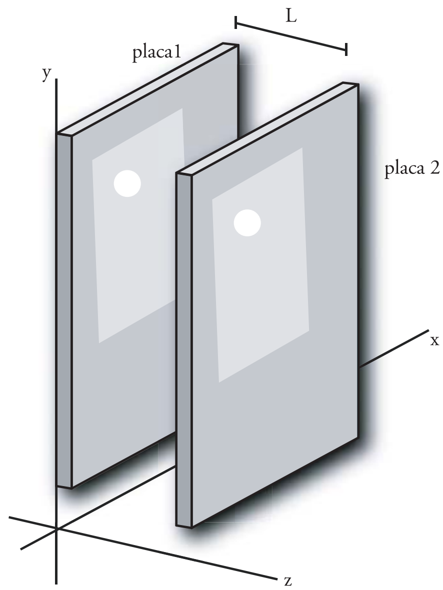
$$\hat{H}\ |0\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\sigma} \hbar\omega_k\ |0\rangle\,, \tag{40}$$

y como no hay restricciones sobre las longitudes de onda, ω corre de 0 a ∞ y su valor es infinito.

La forma del Hamiltoniano, sin embargo, debe ser una fuente de alegría y bienestar para el lector, puesto que es bien conocida y estudiada hasta el hartazgo en cualquier curso de mecánica cuántica. El campo electromagnético se comporta como un conjunto de osciladores armónicos, a los cuales podemos asociar *cuantos* ó “partículas" energéticas: fotones. El vacío se *define* ahora sin ambiguedad como el estado base con $|n\rangle = |0\rangle$. Este estado tiene un campo eléctrico con valor esperado cero, $\langle 0|\vec{E}|0\rangle = 0$, pero puede demostrarse que su dispersión no es siempre cero, $\langle 0|\vec{E}^2|0\rangle = 0$. Que el valor esperado del campo eléctrico sea cero es debido a la coexistencia de fotones con fases tal que se anulan entre si. Entonces, el vacío ya no es ese estado completamente estático aborrecido por la naturaleza aristotélica, sino un espacio virtualmente vacío, pero continuamente fluctuante.

El Evangelio según San Casimir

La siguiente figura presenta el arreglo del sistema que describió Casimir; dos placas de lados a, colocadas a una distancia L una de la otra y perpendiculares entre si. Por el momento consideraremos que las placas son conductores perfectos (lo cual también implica que la distancia de penetración de las ondas es estrictamente cero). La susceptibilidad magnética es igual a la unidad.



El eje z se ha elegido como perpendicular al plano de las placas, para ser consistentes con la notación de la literatura. Las condiciones a la frontera están ya implícitamente planteadas: dentro de un conductor las cargas se reacomodan para que el campo eléctrico sea siempre cero, por lo que las condiciones a la frontera para el campo eléctrico son

$$\vec{E}(z=0) = \vec{E}(z=L) = 0. \tag{41}$$

Supondremos que la solución es una superposicón de ondas planas. Queremos calcular la energía del punto cero para este sistema usando la ecuación *(40)*. A diferencia del espacio libre las longitudes de onda no pueden tomar cualquier valor arbitrario, sino que deben ser consistentes con las condiciones a la frontera. El problema es similar al de una guía de ondas cuadrada semi infinita, [29]. La componente de $\vec{k}$ sobre el eje z está restringida por la condición

$$k_z = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \infty \tag{42}$$

mientras que k_x y k_y pueden tomar cualquier valor positivo. La densidad de energía E_p adentro de las placas es entonces la suma sobre todas las componentes que se transforman en integrales sobre las componentes continuas,

$$E_p = \frac{\hbar c}{2}\frac{L^2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\infty dk_x dk_y\left(\sqrt{k_x^2+k_y^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{k_x^2+k_y^2+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\right). \tag{43}$$

El primer sumando corresponde a $n=0$, que tiene sólo una polarización, mientras que el segundo sumando incorpora ya las dos polarizaciones. Por otro lado, la energía del vacío está dada por una triple integral,

$$E_v = \frac{\hbar c}{2} \frac{L^2 d}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dk_x dk_y dk_z \; 2\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\,. \tag{44}$$

Usando la sustitución $k_\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, se tiene el elemento de área (en el espacio de las $\vec{k}$)

$$dk_x dk_y = 2\pi k_\| dk_\|. \tag{45}$$

La diferencia entre las densidades del espacio libre y del espacio con placas, por unidad de área, se expresa entonces como

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta E}{L^2} = E_p - E_v = \frac{\hbar c}{2} \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty dk_\| \; k_\| \left(k_\| + 2\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_\|^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} - \frac{2L}{2\pi} \int_0^\infty dk_z \sqrt{k_\|^2 + k_z^2} \right). \tag{46}$$

El truco de renormalización entra en este momento: primero se introduce el "cambio de variable" $k_z = \frac{n\pi}{L}$, donde n es por supuesto continua. El lector cuidadoso sentirá ahora cierta incomodidad, puesto que ya anteriormente se había utilizado esta sustitución en *(42)* diciendo que n era un nuúmero natural. Estrictamente, este es un truco matemático injustificado, puesto que a priori no estamos tratando de la misma variable "n" en la suma y la integral. Supongamos, empero, que podemos realizar impunemente este abuso de notación, tal como lo propuso Casimir. De lo contrario entramos en la dificultad de no tener una manera de restar (comparar) dos cantidades verdaderamenta infinitas. Por conveniencia adoptamos también el cambio de nombre de variable $k_\| = z$ para simplificar visualmente la notación, con lo cual la ecuación se convierte en

$$\frac{\hbar c}{2\pi} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \int_0^\infty dz \; z \left(\frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{z^2 + n^2} - \int_0^\infty dn \sqrt{z^2 + n^2} \right). \tag{47}$$

Definimos la función

$$E(n) \equiv \int_0^\infty dz \; z \sqrt{z^2 + n^2}, \tag{48}$$

con lo que se tiene finalmente, intercambiando el orden de integración y suma,

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{2\pi} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 \left(\frac{1}{2} E(0) + \sum_{n=1}^{\infty} E(n) - \int_0^\infty dn \; E(n) \right). \tag{49}$$

El problema es ahora extraer un resultado física y matemáticamente aceptable de estas relaciones, ya que estrictamente la ecuación anterior no está bien definida a causa de las cantidades infinitas involucradas. El procedimiento usual se basa en el siguiente hecho empírico: para materiales reales, a frecuencias suficientemente altas los cuerpos se vuelven escencialmente invisibles a los fotones. Damos la vuelta a que el límite de integración superior sea infinito introduciendo una *función de corte* $f(n)$ en base a este argumento puramente físico. La forma de ésta es irrelevante, siempre que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Un ejemplo particularmente elegante es usar como función de corte una exponencial negativa, que lleva a la aparición de la función zeta de Riemann [27, 30]. Pero aquí usaré la llamada función de Heaviside (o escalón) dada por

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \le \Lambda \\ 0, & \text{si } x > \Lambda. \end{cases}$$

Las integrales para $E(n)$ se modifican insertando la función de corte en el integrando,

$$E(n) = \int_0^\infty dz \; z\sqrt{z^2 + n^2} \longrightarrow \int_0^\infty dz \; f(z) z \sqrt{z^2 + n^2} = \int_0^\Lambda dz \; z \sqrt{z^2 + n^2} = \frac{1}{3} \left(n^2 + \Lambda^2 \right)^{3/2} - n^3 \Big). \tag{50}$$

La ecuación *(49)* así modificada puede evaluarse usando la siguiente identidad, conocida como la fórmula de Euler-Maclaurin para series infinita. De esta es posible extraer la relación, [31, 32],

$$\frac{1}{2}S(0)+\sum_{n=1}^{\infty}S(n)-\int_0^{\infty}dn\;S(n)=-\frac{E'(0)}{6\cdot 2!}+\frac{E^{(3)}(0)}{30\cdot 4!}+\dots \tag{51}$$

Ahora es evidente la razón por la cual se introdujo el injustificado abuso de notación con respecto a n. Aplicándola a $E(n)$ dentro de $\mathcal{E}$ y evaluando término a término para los primeros sumandos de la serie se observa

$$E^{(1)}(0)=0$$
$$E^{(3)}(0)=2,$$

y dado que

$$\lim_{\Lambda\to\infty}E^{(m)}=0,\qquad si\; m>3,$$

$\mathcal{E}$ es finalmente

$$\mathcal{E}=\frac{\hbar c}{2\pi}\left(\frac{\pi}{a}\right)^3\left(-\frac{2}{30\cdot 4!}\right)=-\frac{\pi^2\hbar c}{720\,L^3}. \tag{52}$$

Como dato curioso, los coeficientes de la expansión dada por la ecuación de Euler-Maclaurin están relacionados con los números de Bernoulli, que también surgen en la formulación mediante la función zeta. La fuerza de Casimir por unidad de área es

$$F_C=-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial a}=-\frac{\pi^2\hbar c}{240\,L^4}. \tag{53}$$

Es posible deducir este mismo resultado considerando no las diferencias en densidades de energía, sino la presión de radiación sobre las placas, [33]. Presento el argumento básico porque, como se verá más adelante, el efecto Casimir acústico empieza con un planteamiento paralelo a esta formulación. Primero, partimos de que un fotón en el vacío tiene asociado un momento lineal $\frac{1}{2}\hbar\vec{k}$. Además, se sabe que en general una onda incidente sobre una superficie a un ángulo θ perfectamente reflejada ejerce una presión de radiación que es

$$\frac{F}{A}=2u\cos^2\theta, \tag{54}$$

donde u es la densidad de energía del campo incidente, que es dimensionalmente equivalente al momento por unidad de volumen. A cada modo de frecuencia ω le corresponde entonces una presión

$$P(\omega)=2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)V^{-1}\cos^2\theta, \tag{55}$$

donde el factor $1/2$ adicional es consecuencia de que hay ondas viajando en ambas direcciones asociadas a un mismo modo del vacío. Expresando $\cos\theta$ en términos de las componentes de $\vec{k}$, se llega a una expresión igual para la fuerza de Casimir que la obtenida en la deducción usando la densidad de energía.

Sobre la temperatura

Aunque no se ha hecho explícito, el cálculo desarrollado en la sección anterior es válido cuando la temperatura del sistema es el cero absoluto, es decir, el estado de mínima energía. El artículo de Lifschitz, además de desarrollar la teoría para materiales reales, la extiende para temperaturas distintas de cero (llamadas en la literatura *temperaturas finitas*). Por lo tanto, la fuerza de Casimir es estrictamente también función de la temperatura del sistema:

$$F_C = F_C(T, L), \tag{56}$$

y la fuerza de Casimir arriba calculada es en estos términos

$$F_C(0, L) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240\, L^4}. \tag{57}$$

La conexión entre la fuerza de Casimir a temperatura cero y la fuerza a temperatura finita puede hacerse mediante la famosa Ley de Radiación de Planck, que asocia a una cavidad resonante hecha de un material perfectamente absorbente (y por lo tanto reflejante) una distribución espectral definida para el campo electromagnético como función de la temperatura del sistema. Ver, por ejemplo, [4, 34].

El efecto Casimir para materiales reales

El efecto Casimir en su versión original se formuló con idealizaciones que no son aplicables a ningún material real. Aunque en una primera aproximación cualquier metal puede tratarse como un conductor perfecto, en realidad la conductividad es muy grande, pero finita. El primero en considerar un arreglo similar para materiales reales fue Lifschitz en 1956, [3]. El trabajo de Lifschitz se enfocó en encontrar la fuente de fuerzas entre cuerpos dieléctricos descargados que no eran explicables por medio de fuerzas de Van der Waals simples. El resultado final fue una teoría que modelaba estas fuerzas como tipo Van der Waals retardadas ($\propto \frac{1}{r^7}$), y no retardadas ($\propto \frac{1}{r^6}$). Una de las principales características de la teoría de Lifschitz es que las fuerzas dependían únicamente de las propiedades macroscópicas de los cuerpos, y no de las interacciones intermoleculares. Esto hace que este modelo sea aplicable a una amplia gama de materiales si se conocen sus propiedades macroscópicas (i.e. susceptibilidades, permitividades), que pueden adicionalmente ser medidas de forma simple para la mayoría de los materiales, o calculadas por modelos macroscópicos simples. En el límite de conductores perfectos, tanto la teoría de Casimir como la de Lifschitz convergen al mismo resultado. Esta equivalencia es hasta cierto punto sorprendente, ya que las dos teorías tienen interpretaciones físicas muy distintas:

a) La fuerza de Casimir surge cuando los cuerpos materiales modifican los modos electromagnéticos admisibles del punto cero del espacio libre, y esto se traduce en una modificación de la densidad de energía: la fuerza surge de modificar las condiciones del espacio.

b) Las fuerzas de Lifschitz se deben a que las oscilaciones del punto cero, intrínsecas al espacio, producen fluctuaciones estocásticas del campo electromagnético, que a su vez producen momentos dipolares en los cuerpos materiales y/o corrientes superficiales que dan lugar a fuerzas macroscópicas: la fuerza surge porque las fluctuaciones intrínsecas al espacio modifican el estado electromagnético de las superficies materiales, causando una interacción entre ellos.

Aunque las teorías ya han sido mostradas equivalentes, las interpretaciones tan distintas aun son fuente de debate (para una revisión bibliográfica exhaustiva y relativamente reciente, ver [35]).

Impedancias en fuerzas de Casimir

El método de Casimir se basa en que los modos admisibles de las oscilaciones del vacío son bien definidos (condiciones de Dirichlet) para un conductor perfecto. Cuando el material que compone las fronteras no tiene una conductividad estrictamente infinita, las condiciones a la frontera ya no se pueden definir simplemente como de Dirichlet, debido a que las ondas penetran dentro del material y el campo eléctrico toma una forma más compleja. La distancia de penetración dependerá de la interacción radiación/materia que a su vez está relacionada con las propiedades del material, y con la frecuencia de los fotones incidentes. Por ejemplo, un fotón de baja frecuencia penetrará relativamente poco en el material antes de ser absorbido o reflejado, mientras que a altas frecuencias la distancia de penetración puede ser tan alta que traspase al material. La frontera se vuelve "difusa" debido a la dependencia de la distancia de penetración con la frecuencia.

Inicialmente, se realizaron varios intentos por modelar las fuerzas tipo Casimir entre dieléctricos considerando las fuerzas intermoleculares, lo cual dio resultados parcialmente correctos. Lifschitz introdujo una filosofía distinta, al enfocarse en las propiedades macroscópicas de los materiales en cuestión, es decir, la res-puesta promedio de un ensemble estadístico de moléculas. La fuerza (por unidad de área) de Lifschitz entre dos placas semi infinitas con permitividades ϵ_1 y ϵ_2, separadas por un espacio de ancho L con permitividad ϵ_3, es

$$F(L) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_1^\infty dp\, p^2 \int_0^\infty d\xi\, \xi^3 \epsilon_3^{3/2} \left(G_1(\xi,p)^{-1} + G_1(\xi,p)^{-1} \right), \tag{58}$$

donde

$$G_1(\xi,p) = \frac{\epsilon_3 s_1 + \epsilon_1 \epsilon_3 s_2 p + \epsilon_2 p}{\epsilon_3 s_1 - \epsilon_1 \epsilon_3 s_2 p - \epsilon_2 p}\, e^{2\xi p \sqrt{\epsilon_3} L/c} - 1$$

$$G_2(\xi,p) = \frac{s_1 + s_2 p + p}{s_1 - s_2 p - p}\, e^{2\xi p \sqrt{\epsilon_3} L/c} - 1.$$

Aquí ξ es una frecuencia imaginaria tal que $\xi = i\omega$. p, s_1 y s_2 son las componentes del vector momento paralela y perpendiculares a las placas, con $K_j^2 = k^2 + \epsilon_j(i\xi)\xi^2/c^2$, ó explícitamente, $K_3 = \sqrt{\epsilon_3}\xi p/c$ y $K_{1,2}^2 = \epsilon_3^2 \xi^2 s_{1,2}^2/c^2$. La deducción original de estos resultados es bastante complicada. Aunque sus predicciones concordaban con las mediciones experimentales, partía de principios carentes de una interpretación física clara, por lo que muchos autores buscaron métodos alternativos más evidentes, hasta llegar al mismo resultado usando métodos similares al planteamiento de Casimir, [33].

Basándose en esta línea de trabajos Mochan et al., [36], encontraron una expresión para la fuerza entre dos placas con propiedades dieléctricas arbitrarias. En esta formulación, las propiedades materiales del medio y de las placas son imbuídas en los coeficientes de reflectividad $r_{j=1,2}^{\alpha=s,p}$ de cada placa (1, 2), y para cada polarización (s, p) con respecto al medio. Los coeficientes a su vez se determinan usando las *impedancias superficiales generalizadas*. Estas impedancias se *definen* como

$$Z_j^\alpha \equiv \frac{E_{j\parallel}^\alpha}{B_{j\parallel}^\alpha}, \tag{59}$$

i.e., las razones entre las componentes de los campos eléctrico y magnético, salientes de la superficie material. El subíndice α hace referencia a las posibles polarizaciones, $\alpha = s, p$ (perpendiculares y paralelas al plano de incidencia, respectivamente), y j a la distinción entre placas, ó 0 para una onda en el vacío (espacio entre as placas) $j = 0, 1, 2$. Las reflectividades son entonces

$$r_j^s = \frac{Z_j^s - Z_0^s}{Z_j^s + Z_0^s}, \qquad r_j^p = \frac{Z_0^p - Z_j^p}{Z_j^p + Z_0^p}. \tag{60}$$

El uso de impedancias generalizadas obedece a la formulación de Lifschitz en que es un coeficiente relacionado con las propiedades macroscópicas de los materiales que componen las placas. Además, como se verá más adelante, el concepto de impedancia es tan general que se puede extrapolar a situaciones muy variadas. Una de tales aplicaciones es de hecho el corazón de este trabajo.

Antes de proceder vale la pena definir la notación que se usará adelante, basada en el trabajo arriba citado. Se definen los vectores de onda del vacío como $\vec{q}\pm = (\vec{Q}, \pm k)$ donde $\vec{Q}$ es la componente del vector paralela a la superficie y $\pm k$ la componente perpendicular tal que $q \equiv \omega/c$, siendo ω la frecuencia de la onda y c la velocidad de la luz.

Nuestro sistema está formado por dos placas infinitas perpendiculares al eje z. Sus superficies se definen geométricamente como $z_1 = 0$, $z_2 = L$.

Primero analizaremos las impedancias de una onda en el vacío. Al trabajar con con el formalismo de las polarizaciones s y p es necesario establecer el llamado plano de incidencia, que es por definición paralelo al vector de propagación. Escojamos por simplicidad el plano $z = 0$. Se define una onda con polarización s como aquella que está polarizada linealmente perpendicular al plano de incidencia. Así mismo, la polarización p corresponde a una polarización lineal paralela al plano de incidencia. Usando la notación arriba planteada para las componentes del vector de onda, para este arreglo particular, las ondas tienen la forma explícita,

$$\vec{E}_s(\vec{r},t) = (0, E'_y, 0)e^{i(Qx\pm kz)}e^{-i\omega t} \equiv (0, E_y, 0), \tag{61}$$

$$\vec{E}_p(\vec{r},t) = (E'_x, 0, E'_z)e^{i(Qy\pm kz)}e^{-i\omega t} \equiv (E_x, 0, E_z), \tag{62}$$

El signo de k se escoge apropiado para describir una onda entrante a la superficie (negativo para la placa 1, positivo para la 2). Insertando estas ecuaciones en la Ley de Inducción de Faraday-Henry-Lenz, ec. *(1)*, para una onda con polarización s obtenemos la ecuación

$$\nabla \times \vec{E}_s = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\vec{B} = iq\vec{B}. \tag{63}$$

Desarrollamos el rotacional y obtenemos

$$\nabla \times \vec{E}_s = det\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\left(\partial_z E_y\right)\hat{x} + \left(\partial_x E_y\right)\hat{z}. \tag{64}$$

Trabajando componente a componente, de la ecuación *(63)* encontramos, para la placa 1

$$iqB_x = \partial_z E_y = ikE_y, \tag{65}$$

$$iqB_y = 0, \tag{66}$$

$$iqB_z = \partial_x E_y = iQE_y. \tag{67}$$

Por lo tanto, para una onda con polarización s,

$$E_{||} = E_y, \quad B_{||} = B_x. \tag{68}$$

Entonces,

$$Z_0^s = \frac{E_{||}}{B_{||}} = \frac{E_y}{E_y\frac{k}{q}} = \frac{q}{k}. \tag{69}$$

Para una onda con polarización p, notamos que el vector magnético es siempre perpendicular al plano de incidencia,

$$\hat{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{||\vec{k}\times\vec{E}||} = det\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ Q & 0 & k \\ E_x & 0 & E_z \end{vmatrix} \Big/ ||\vec{k}\times\vec{E}|| = \hat{y}. \tag{70}$$

Apliquemos entonces al vector magnético la ecuación de Ampère-Maxwell sin corrientes para el espacio libre, ec. *(3)*,

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{71}$$

La ecuación anterior toma exactamente la misma forma que la ecuación *(63)*, y por lo tanto,

$$\frac{B_{||}}{E_{||}} = \frac{B_y}{E_y \frac{k}{q}} = \frac{q}{k} = \frac{1}{Z_0^p} \qquad \Rightarrow \qquad Z_0^p = \frac{k}{q}. \tag{72}$$

El análisis realizado es válido para la placa 1 (localizada en z=0). Para la placa 2, la onda entrante desde el vacío se propaga en dirección contraria, y por lo tanto la componente k tiene signo contrario, al igual que las impedancias. Entonces, el procedimiento anterior lleva a que en el caso general, son válidas las condiciones

$$\begin{aligned} iqE_y(0^+) &= -Z_1^s \partial_z E_y(0^+) \\ iqE_y(L^-) &= +Z_2^s \partial_z E_y(L^-) \\ \\ iqB_y(0^+) &= -Z_1^s \partial_z B_y(0^+) \\ iqB_y(L^-) &= +Z_2^s \partial_z B_y(L^-) \end{aligned} \tag{73}$$

Análogamente a como se procedió para ondas en en vacío, los mismos argumentos llevan a que en la interfase de las placas las impedancias resultan ser (ver [36])

$$Z_j^s = \frac{q}{k_a} \qquad Z_j^s = \frac{q}{\epsilon_a k_a}, \tag{74}$$

donde k_a es la componente normal a la superficie para un medio con respuesta dieléctrica $\epsilon_a(\omega)$.

Las funciones de Green y la densidad de estados: solución para materiales reales

Como se mencionó anteriormente, el problema al tratar con materiales reales es que los modos admisibles en el interior de las placas no pueden establecerse por medios simples. Sin embargo, varios métodos se han inventado que son relativamente directos. Uno de ellos se basa en encontrar la densidad de modos por medio de la función de Green del sistema. La función de Green que buscamos es la asociada al operador de Helmholtz (que es el caso particular de los estados estacionarios de la ecuación de onda unidimensional)

$$\nabla^2 + k^2. \tag{75}$$

Empecemos con la polarización s. Si $E_y^<$ y $E_y^>$ son las soluciones generales de la ecuación de onda unidimensional en el espacio entre las placas, consistentes con las condiciones a la frontera electromagnéticas en $z = 0$ y $z = L$, ec. *(60)* y *(73)*, sus expresiones explícitas son

$$E_y^<(z) = e^{-ikz} + r_1^s e^{ikz}, \tag{76}$$

$$E_y^>(z) = e^{ik(z-L)} + r_2^s e^{-ik(z-L)}. \tag{77}$$

La función de Green del sistema asociada a la ecuación de Helmholtz homogénea, construída explícitamente está dada por (ver [37])

$$G_{k^2}^E(z, z') = \frac{E_y^<(z_<) E_y^>(z_>),}{W} \tag{78}$$

donde $z_<$ y $z_>$ son respectivamente el mayor y menor de z y z' y W es el Wronskiano, definido por

$$det \left| \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n \\ \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \dots & \psi_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \dots & \psi_n^{(n)} \end{pmatrix} \right|, \tag{79}$$

con $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ las soluciones linealmente independientes del sistema, y $\psi^{(n)}$ la n-ésima derivada. La densidad de modos ρ (total) del sistema se define como la "función de peso" (weight function) tal que al integrar sobre todas las frecuencias esto resulta en la suma sobre el conjunto M de todas las eigenfrecuencias del sistema (o integral, si el espectro es continuo),

$$\int \rho \, dE = \sum_{m \in M} E_m.$$

Identificamos la parte imaginaria de la función de Green como proporcional a la densidad de estados del sistema mediante

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} Im \left[G_{00}(E) \right], \tag{80}$$

donde G_{00} es la traza de la matriz asociada (ver Apéndice C para la derivación de la igualdad). La función de Green del lado derecho es la función asociada al sistema entero, que para nuestro caso consta de varias partes. Primero está

$$\rho^s_{k^2} = \rho^s_{k^2 \; elec} + \rho^s_{k^2 \; mag} \tag{81}$$

que es la densidad asociada a la polarización s, a su vez la suma de la parte eléctrica, desarrollada anteriormente, y la parte magnética. La parte magnética es simplemente proporcional a la eléctrica y puede derivarse usando los mismos métodos. La densidad de modos asociados a la polarización s es entonces, [32],

$$\rho^s_{k^2} = -\frac{1}{2\pi} Im \left[G^E_{k^2}(z,z') + G^B_{k^2}(z,z') \right] = \frac{1}{2\pi \tilde{k}} \; Re \left[\frac{1 + r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^\alpha r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}} \right], \tag{82}$$

Nótese el factor $\frac{1}{2}$, debido a que aún falta tomar en cuenta la polarización p. Debe adicionalmente realizarse la sustitución $\tilde{k} = k + i0^+$: esto asegura que se mantenga el principio de causalidad (ver [38]). Para calcular la contribución de p simplemente se realizan las sustituciones $B_x \to -E_x$ y $E_y \to B_y$. El resultado es exactamente la ecuación *(82)*, pero con la sustitución de todos los índices, $s \to p$. La función de Green total es la suma de las soluciones correspondientes a cada polarización. La densidad total es

$$\rho_{k^2} = \underbrace{\rho^s_{k^2 \; elec} + \rho^s_{k^2 \; mag}}_{\rho^s_{k^2}} + \underbrace{\rho^p_{k^2 \; elec} + \rho^p_{k^2 \; mag}}_{\rho^p_{k^2}}. \tag{83}$$

La fuerza se calcula sumando el flujo de momento a través de la superficie de las placas, ec.*(55)*. En el espacio k^2, un fotón está caracterizado por un momento en la dirección z igual a $p_z = \pm \hbar k$ y una velocidad $v_z = \pm ck/q$. El signo $+$ corresponde a un fotón incidente sobre la placa 2, y el signo $-$ sobre la placa 1, y en ambos casos resulta en una contribución de momento $\hbar c k^2/q$ a la placa 2. Para encontrar la presión total del interior sobre la placa 2, debemos integrar los momentos sobre todas las Q, k e insertar las densidades de estados $\rho^\alpha_{k^2}$ obtenida, además del número de ocupación fotónico, $f(k) = N(k) + 1/2$,

$$\sum_{s,p} \int Q dQ dk \, \hbar c \frac{k^2}{q} f(k) \rho^\alpha_{k_2}. \tag{84}$$

Sustituyendo $r_j^\alpha \to 0$ y reflejando la dirección de propagación, $z \to -z$, se obtiene el flujo desde el exterior. Entonces, sumando ambos flujos se obtiene la fuerza total,

$$F(L) = \mathcal{A} \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty dQ \; Q \int_{q \geq 0} dk \; \frac{\tilde{k}^2}{q} \; Re \left[\frac{r_1^s r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^s r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}} + \frac{r_1^p r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}}{1 - r_1^p r_2^\alpha e^{2i\tilde{k}L}} \right]. \tag{85}$$

El cálculo usualmente se hace en el espacio rotado (espacio de Wick) haciendo una integral de contorno que va de iQ a 0 y luego a ∞. Las oscilaciones bruscas del integrando dificultan la integración real usando métodos computacionales, y en general las fuerzas no tienen una expresión cerrada. En el límite cuando $|r| \to 1$, la densidad de estados se convierte en una suma de deltas de Dirac (peine de Dirac) y se recuperan el resultado para conductores perfectos.

Conceptos básicos de Acústica

Give me to hold all sounds, (I madly struggling cry,)
Fill me with all the voices of the universe
Endow me with their throbbings, Nature's also,
The tempest, waters, winds, operas and chants, marches
and dances,
Utter, pour in, for I would take them all!

-Proud Music of the Storm [fragmento], Walt Whitman

El propósito fundamental de la Acústica es describir ondas de compresión propagándose en medios materiales. Escencialmente lo que se busca es una ecuación de estado que describa al medio perturbado. La perspectiva es generalmente macroscópica, y el medio de propagación *par excelence* es gaseoso (ó líquido). Esto hace que la Termodinámica clásica y la Física Estadística asociada a ella sean componentes importantes de la teoría. En especial la teoría cinética y sus resultados sobre el comportamiento de los gases juega un papel importante, aunque no único (en general cuando hable sobre éstos debe sobreentenderse que la Acústica se puede extrapolar a la propagación de ondas de compresión en *cualquier* cuerpo material).

Una ecuación de estado primeriza debe plantearse en términos de cantidades físicas que sean medibles de forma directa y con relativa facilidad. En Acústica, las dos propiedades físicas del medio que están a la alcance del experimentador son la presión del medio p y la velocidad (local) del fluido $\vec{v}$. Variables adicionales pueden incluir las cantidades comúnmente asociadas a las ecuaciones termodinámicas propias de un gas, como temperatura, densidad, compresibilidad y demás. Debido a que de todas las variables asociadas a la propagación de ondas acústicas, la presión es la que más fácilmente puede medirse, suele buscarse una ecuación de estado que resulte en una función que describa la presión del medio. Resumiendo, la Acústica tiene como propósito fundamental encontrar una ecuación de estado de la forma

$$p = p(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

donde las x pueden ser cualquier variable asociada al estado del sistema. Lo más común al introducir el tema de ondas acústicas es plantear la búsqueda de una ecuación de estado que relacione las variables de campo *densidad*, *entropía específica*, *presión* y *velocidad* como funciones del tiempo. El estado ambiente (sin perturbaciones) normalmente es descrito por las variables $(p_0, \rho_0, \vec{v}_0)$, mientras que el sistema perturbado está descrito por las variables

$$p = p_0 + p' \qquad \rho = \rho_0 + \rho' \tag{86}$$

Se toma como punto de partida dos resultados primitivos: la *ecuación de conservación de la masa* y la *ecuación de Euler para fluidos* [6]. Éstas y los teoremas de compresibilidad son las relaciones materiales básicas para construir la Acústica desde principios básicos. Aquí sólamente se presentará la construcción general del tema, refiriendo al lector con mayor interés a la literatura apropiada.

Al respecto sólo queda un punto que evidenciar. Para la mayoría de los casos basta hacer una aproximación lineal a la presión en función de las demás variables, llamada *aproximación acústica*. Esta expansión es bastante buena en la praxis, pero no es una teoría universalmente válida. El resultado de hacer esta aproximación son las *ecuaciones acústicas lineales*

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}' = 0 \tag{87}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p' \tag{88}$$

$$p' = c^2 \rho' \qquad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_0 \tag{89}$$

además del requisito termodinámico de que c^2 sea siempre positiva, donde $\vec{v}$ es la velocidad local del fluido, c es la velocidad de la onda y ρ densidad de masa del fluido en reposo. De las ecuaciones anteriores se obtiene finalmente la *ecuación de onda acústica*

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \tag{90}$$

La anterior deducción surge de la aplicación de elementos de mecánica de fluidos en un marco puramente Newtoniano (de hecho, el mismo Newton aportaba ampliamante al tema cuando no estaba ocupado tirándose frutos prohibidos sobre la cabeza para encontrar teorías más ambiciosas). Hasta ahora los conceptos principales de la dinámica del fluido acústico se han basado en el concepto de fuerzas (disfrazadas como presiones) y velocidades. Una formulación alternativa es mediante el uso de la teoría del potencial (estudio de funciones armónicas), donde en lugar de trabajar con cantidades vectoriales el elemento a analizar es un escalar conocido como el potencial de velocidad. Si a la ecuación de Euler le aplicamos el operador rotacional

$$\nabla \times \left(\rho \frac{\partial}{\partial t} + \rho\, \vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{v} = \nabla \times (-\nabla p) \tag{91}$$

de la relación general $\nabla \times \nabla = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{v}\,\right) = 0. \tag{92}$$

Como las ondas acústicas son de compresión (longitudinales), $\nabla \times v(\vec{0}) = 0$, y entonces para $\vec{v}$,

$$\vec{v} = \nabla \Phi \qquad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{93}$$

lo cual resulta de linealizar la ecuación de Euler, ec. *(91)*. Utilizando nuevamente la ecuación de continuidad se obtiene una segunda ecuación de onda,

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{94}$$

[6] La ecuación que describe los esfuerzos en un fluido viscoso es la ecuación de Navier-Stokes. Si la viscosidad es cero, se obtiene la ecuación de Euler, i.e. el uso de la ecuación de Euler es una simplificación que es aplicable a fluidos con efectos de viscosidad despreciables.

El potencial acústico es una cantidad que no tiene una interpretacón física directa [7], pero que en ocasiones es matemáticamente más simple de manipular que trabajar con un campo vectorial como el de velocidades.

Ya que se tiene la ecuación diferencial que describe al sistema, la solución del problema dependerá de las condiciones a la frontera que se impongan. En general, para una ecuación de segundo grado la solución está determinada completamente por dos condiciones, que pueden ser dos valores de la función, de su derivada o una de cada tipo para dos puntos del espacio/tiempo. Si se especifican dos valores de la función estas se llaman *condiciones a la frontera de Dirichlet*. Si se especifican dos valores de la derivada de la función estos se conocen como *condiciones a la frontera de Neumann*.

Una solución particular es la ecuación de onda plana. Para encontrar las soluciones es necesario definir un vector de propagación $\vec{n}$. Las condiciones a la frontera en este caso son de Dirichlet, y se plantean estableciendo que el potencial es constante para cualquier plano perpendicular a $\vec{n}$. Si tomamos un sistema de referencia ortrogonal con uno de los vectores paralelo a $\vec{n}$, un punto en el espacio se define por medio de la transformación

$$(x, y, z) \Longrightarrow (s, Y, Z),$$

donde s es la componente a lo largo de $\vec{n}$, Y y Z son las componentes de los vectores que generan el plano perpendicular a la normal, el plano tangente. Esta rotación de los ejes de referencia es válida siempre y cuando se esté tratando un espacio isotrópico. Entonces, la ecuación de onda, en ambas representaciones, se reduce a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{95}$$

que puede descomponerse en

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0. \tag{96}$$

La solución general está dada por

$$p = f(t + s/c) + g(t - s/c), \tag{97}$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Las soluciones de $\vec{v}$ están dadas por

$$\vec{v} = (\rho c)^{-1}\left(f(t + s/c) + g(t - s/c)\right)\vec{n}.$$

Las relaciones acústicas fundamentales son entonces

$$\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\rho c}p \qquad \rho' = \frac{p}{c^2} \qquad T' = p\left(\frac{T\beta}{\rho c_p}\right)_0. \tag{98}$$

El factor de proporcionalidad ρc es llamado la *impedancia característica del medio*.

[7] ...en el sentido de, por ejemplo, el fisicalismo de Rudolph Carnap que requiere que cualquier cantidad física bien definida deba ser "directamente" medible en el laboratorio. El *potencial escalar* es un constructo matemático que no es posible medir (en el sentido fisicalista), y que se construye cuando encontramos una cantidad física σ que obedece la relación $\nabla \times \sigma = 0$, donde ∇ es el operador nabla usual. Aplicando cálculo vectorial cartesiano básico, es directo demostrar que para cualquier cantidad que obedezca esta relación, existe una función escalar $\theta(\vec{r})$ (aunque no única; ver la sección de electromagnetismo), tal que $\sigma = \nabla\theta$. Por lo tanto, aunque el potencial no puede medirse en el laboratorio, se construye de tal forma que su gradiente sea siempre una cantidad medible. En general, una función potencial es una función armónica que satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2\theta = 0$. En mecánica cuántica, es casi una regla que trabajar con campos puede llevar a deducciones erroneas, mientras que trabajar con potenciales da los resultados correctos. El efecto Aharanov-Bohm es un ejemplo particularmente ilustrativo; ver Greiner, QM: Special Chapters.

Impedancia acústica

La universalidad del concepto de impedancia para cualquier teoría de campo es una de los elementos cruciales de esta tesis, lo cual ya se habrá sospechado a partir de su mención justamente al final de los primeros capítulos. Como se verá más adelante, el símil entre impedancia acústica específica e impedancia electromagnética permitirá que relaciones válidas dentro del marco de la electrodinámica sean traducidos directamente al caso acústico. Acerca del concepto de impedancia, J. A. Stratton dedica en su conocido libro de texto sobre electromagnetismo una sección para discutir este tema, sobre la cual dice, [39]

En nuestro mundo, en el cual todo es variedad, es recomfortante cuando en ocasiones descubrimos rasgos de unidad, y resulta tentador especular sobre su significancia. Para la mente sin entrenamiento apropiado, un conjunto de pesas vibrantes colgando de una red de resortes parecería tener poco en común con un sistema de bobinas y condensadores de carga. Sin embargo, el circuito puede ser diseñado de tal forma que su evolución y la de las vibraciones del sistema mecánico puedan ser modeladas por el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales. Entre ambos existe una relación uno a uno. La corriente reemplaza a la velocidad, y el voltaje a la fuerza; la masa y la elasticidad del resorte son representadas por la inuctancia y la capacitancia. Parecería ser que la "realidad absoluta", si nos atrevemos a pensar en la posibilidad de algo así, implica una propiedad inercial de la cual masa e inductancia sólo son nombres o representaciones.

*Cualquiera que sea la significancia filosófica de estas equivalencias mecánica, eléctrica ó química, los fíisicos han hecho buen uso de ellas para facilitar sus propias investigaciones. [...] No sólo han sido los métodos sino también los conceptos de circuitos eléctricos los cuales se han extendido a otras ramas de la Física. Sin duda, el concepto más importante ha sido el de **impedancia**, que relaciona voltaje y corriente tanto en amplitud como en fase. Esta idea se ha aplicado en Mecánica para expresar la razón entre fuerza y velocidad, y en Hidrodinámica, sobre todo en Acústica, para medir la razón entre la presión y el flujo.*

[Traducción del autor]

Impedancia acústica específica

En la sección anterior presenté la ecuación de segundo grado que describe a un sistema acústico entero, cuando las suposiciones para la derivación de la ecuación son plausibles (fluido no viscoso, aproximación lineal). La solución particular está determinada por las condiciones a la frontera (de Dirichlet) que se impongan. Una forma de plantear las condiciones a la frontera es deducir el valor del campo del fluido sobre una superficie.

Definimos a $\vec{n}_s$ como el vector normal a la superficie S, $\vec{v}_s$ es la velocidad local del fluido y $\vec{x}(t))_s$ es el vector de posición de una partícula adyacente a la superficie. Suponemos que la superficie es impenetrable, y entonces la partícula adyacente a un tiempo t los seguirá siendo a un tiempo $t + \delta t$. Para fluidos con viscosidad despreciable y fuera de la capa de frontera viscosa, el fluido puede desplazarse lateralmente, pero tendrá la misma velocidad normal a la superficie que la superficie misma, si ésta está en movimiento. Aquí suponemos la incompresibilidad del fluido, y esto se expresa formalmente como

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_s = \vec{v}_s \cdot \vec{n}_s = v_n, \tag{99}$$

con $\vec{v}_s$ la velocidad de la superficie. Si la superficie es estacionaria $\vec{v} \cdot \vec{n}_s = 0$, y de la ecuación anterior y las ecuaciones acústicas lineales se tiene

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_s = \nabla p \cdot \vec{n}_s = 0. \tag{100}$$

Un primer resultado obtenible a partir del análisis en la frontera es el de la reflexión y transmisión de ondas. Supongamos una superficie rígida plana parametrizada por $x = 0$, tal que $\vec{n}_s = \vec{e}_x$, $\vec{e}_x$ el vector unitario sobre el eje x. Imaginemos una onda plana incidente cuyo vector de velocidad $\vec{n}_I$ está sobre el plano $x - y$ (i. e. no tiene componente z). La onda es descrita por las ecuaciones

$$p = f(t - c^{-1}\vec{n}_I \cdot \vec{x}), \qquad \vec{v}_I = \frac{\vec{n}_I}{\rho c}\, p_I. \tag{101}$$

Si θ es es el ángulo que forma el vector de velocidad con el plano, el vector unitario de velocidad puede descomponerse en las componentes

$$\vec{n}_I = \vec{e}_x \sin\ \theta - \vec{e}_z \cos\ \theta. \tag{102}$$

Es un hecho empírico que una onda que incide sobre una superficie rígida es reflejada, y entonces la solución del sistema está compuesta por la suma de dos funciones de onda p_I y p_R, que son la onda incidente y la reflejada. Las condiciones a la frontera sobre p, $\partial p/\partial x = 0$, resultan en la relación

$$p_R(x, y, z, t) = p_I(-x, y, z, t), \tag{103}$$

que es equivalente a $\theta = \theta'$, donde θ' es el ángulo entre la onda reflejada y la superficie. Una onda plana que además tiene frecuencia constante tiene además una presión total

$$p_I + p_R = 2\ \cos(ky\cos\theta)\ f(t - c^{-1}x\ \sin\theta). \tag{104}$$

Existe un concepto que relaciona de manera mucho más general las ondas incidente y reflejada, llamado *impedancia acústica específica*, que inclusive puede extenderse a superficies penetrables (porosas) y no rígidas. La única restricción es la suposición que la presión reflejada es una función lineal de la presión incidente. Se define la impedancia acústica específica como

$$\left(\frac{\hat{p}}{\hat{v}}\right)_S \equiv Z_s(\omega) = \rho\, c\, \zeta(\omega)) \tag{105}$$

donde $\hat{p}$ y $\hat{v}$ son las amplitudes complejas de ondas monocromáticas de frecuencia ω. La función $\zeta(\omega)$ es un número adimensional que es la razón de la impedancia específica sobre la impedancia característica $Z_c = \rho\, c$.

Deducción del efecto Casimir acústico

The relations of things remain unchanged by whatever system. By the word things is to be understood any object of thought, that is, any thought upon which any other thought is employed, with an apprehension of distinction. The relations of these remain unchanged; and such is the material of our knowledge.

-On Life*, *Percy Bysshe Shelley

En el primer capítulo, se mencionó al final de la deducción de la fuerza de Casimir una interpretación alternativa del fenómeno la cual propone que la fuerza puede ser considerada como originándose debido a la transmisión de momento $\hbar\vec{k}/2$ asociado a un fotón virtual en el estado base. Esto significa que al vacío podemos asociarle un campo de radiación de fondo cuyo efecto neto es observable a través de la presión que ejerce contra los cuerpos inmersos en él. Larraza *et al.* propusieron el siguiente experimento como una analogía a este "campo de fondo": sustituir el campo electromagnético por un campo de presión acústica, usando el mismo arreglo de placas paralelas. Las placas se introducen en un contenedor acústico dentro del cual también se colocan los instrumentos de medición (balanza analítica) y varios compresores acústicos que proveen un campo de banda ancha entre dos frecuencias límite. El espectro se supone plano para todas las frecuencias entre los límites y el campo idealmente es homogeneo e isotrópico.

Teoría del efecto Casimir acústico

Los capítulos 2 y 3 trataron de la forma que toman las ecuaciones fundamentales que describen un campo electromagnético y acústico, respectivamente. Las ecuaciones de onda electromagnética *(13)* y acústica *(90)* tienen exactamente la misma forma, excepto con una respectiva constante c que representa la velocidad de la onda en el medio. Matemáticamente, las soluciones deben ser equivalentes, la única diferencia siendo que para el caso electromagnático por tratarse de una onda transversal, la onda tiene dos polarizaciones (grados de libertad de oscilación), mientras que para el caso acústico la onda es longitudinal (en la misma dirección que el vector de propagación) y sólo hay una polarización.

Recordamos la ecuación *(54)*, que es válida en general para cualquier campo. Se define la *intensidad acústica* como

$$\vec{I} \equiv P\vec{v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}\rho\nabla\Phi, \qquad (106)$$

donde Φ es el potencial de velocidad y ρ la densidad de masa del fluido en reposo. Puede demostrarse (ver [40], [41]) que la intensidad acústica cumple la ecuación de continuidad de la energía

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{I} = 0, \qquad (107)$$

donde w es la densidad de energía de la onda definida por medio de la densidad Lagrangiana L como

$$L = -\frac{1}{2}\rho\left(\nabla\cdot\nabla\Phi - \rho\kappa\,\partial_t\Phi\right), \qquad w = \partial_t\Phi\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_t\Phi\right)} - L. \tag{108}$$

La intensidad acústica representa entonces el flujo total de energía de la onda. Recordamos que la presión que la onda ejerce al incidir sobre una superficie está dada por

$$P = \frac{2I}{c}\cos^2\theta, \tag{109}$$

donde θ es el ángulo de incidencia de la onda con respecto a la normal de la superficie. Se define además la intensidad espectral como $dI = I_\omega d\omega$. Si queremos trabajar en el espacio de números de onda $|k| = \omega/c$, escribimos

$$dI = I_\omega d\omega = I_k d^3k = I_k 2\pi k^2 dk, \tag{110}$$

por lo que

$$I_k = \frac{I_\omega}{4\pi k^2}\frac{dk}{d\omega} = \left(\frac{cI_\omega}{4\pi}\right)\frac{1}{k^2}. \tag{111}$$

La presión acústica puede entonces escribirse como

$$P = \left(\frac{I_k}{2\pi}\right)\int\cos^2\theta(\vec{k})dk_x dk_y dk_z. \tag{112}$$

Esta será la ecuación básica para encontrar la presión sobre las dos placas del sistema de Larraza. Como la superficie de las placas es perpendicular al eje z, el coseno del ángulo θ puede escribirse en término de una onda incidente con vector de onda $\vec{k} = k_x, k_y, k_z$ como

$$\cos\theta = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \tag{113}$$

La presión es entonces

$$P = \left(\frac{I_k}{2\pi}\right)\int\frac{k_z^2}{\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)^2}dk_x dk_y dk_z. \tag{114}$$

Cambiando a coordenadas polares e integrando azimutalmente la presión es

$$P = I_k\int_0^{\pi/2}d\theta\ \sin\theta\cos^2\theta\int_{k_1}^{k_2}dk = \frac{I_k}{3}\left(k_2 - k_1\right) = \frac{I}{3c}. \tag{115}$$

Esta presión es la ejercida sobre las caras exteriores de las placas. Para calcular la presión interior, debemos tomar en cuenta las condiciones a la frontera y sustituir la integral sobre k_z por una suma,

$$k_z = \frac{\pi n}{L} \equiv nk_o\ ,\ n = 0, 1, 2 ... \quad\Longrightarrow\quad \frac{L}{\pi}\int dk_z \longmapsto \sum_n \tag{116}$$

Usando coordenadas cilíndricas, para simplificar la integración sobre k_x y k_y, la presión interior se calcula integrando sobre toda una esfera de radio k_2 y restando la contribución debida a una esfera con radio k_1 (que resulta más simple que integrar de k_1 a k_2),

$$P_{in} = k_o^3 I_\omega\sum_{n=1}^{[k_2/k_0]}n^2\int_0^{\sqrt{k_2^2 - n^2k_o^2}}\frac{\kappa\,d\kappa}{(\kappa^2 + n^2k_o^2)^2} - (k_2 \longrightarrow k_1). \tag{117}$$

$[k_j/k_o]$ es el máximo entero mayor o igual a k_j/k_o (i.e. el máximo n que cumple con las condiciones a la frontera). La presión total sobre las placas es por supuesto la diferencia entre la presión interna y la externa, $\mathcal{F} = P_{in} - P$, que después de hacer las integrales correspondientes y manipular las expresiones algebráicamente es

$$\mathcal{F} = \frac{\pi I_\omega}{2d}\left(N_2 - N_1 - \frac{N_2(N_2+1)(2N_2+1)}{6(k_2 d/\pi)^2} + \frac{N_1(N_1+1)(2N_1+1)}{6(k_1 d/\pi)^2} - \frac{2d(k_2-k_1)}{3\pi},\right) \tag{118}$$

con $N_j = [k_j L/\pi]$. Los parámetros de importancia aquí son las frecuencias límite (representadas por las ks) del espectro de banda ancha. Al contrario de la fuerza de Casimir electromagnética que es siempre atractiva, la acústica puede ser atractiva o repulsiva, según se escojan los cortes. Cuando en la ecuación *(118)* $k_1 \to 0$, $k_2 \to \infty$,

$$\lim_{\substack{k_1\to 0\\ k_2\to\infty}} \mathcal{F}(L) = -\frac{\pi I_\omega}{4L}. \tag{119}$$

Entonces, cuando las frecuencias límite son las mismas que el "campo de fondo" de la energía del punto cero, la fuerza también es siempre atractiva. Que la fuerza sea inversamente proporcional a la separación de las placas y no a la cuarta potencia es consecuencia de la diferencia en las polarizaciones.

Materiales reales

Las cosas cambian cuando el material del que están hechas las placas no es un reflector perfecto. Esto no necesariamente significa que el material es absorbente, sino que quizá parte de la energía se pierde parcialmente en una onda transmitida, si el ancho de la placa es finito. El problema es escencialmente el mismo que para el Casimir EM: es imposible realizar la suma directa sobre los modos al no poderse, en general, especificar condiciones a la frontera de Dirichlet. De nuevo se usa el método de las funciones de Green para encontrar los eigenvalores del sistema y así poder realizar la suma/integral.

Primero, recordamos la ecuación fundamental para el potencial acústico, ec. *(94)*. Si suponemos soluciones armónicas, ésta se reduce a la ecuación de Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -k_z^2 \Phi. \tag{120}$$

Por definición, k_z^2 son los eigenvalores del operador ∂_z^2. Sea φ_n la eigenfunción corrrespondiente al eigenvalor λ_n. De las expresiones para la velocidad local del fluido y la presión en términos del potencial acústico, ec. *(93)*, la componente normal del tensor de esfuerzo correspondiente al n-ésimo eigenvalor se escribe como, [42],

$$w_n = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi n}{\partial t}\right)^2 + k_z^2 \Phi n^2\right]. \tag{121}$$

Sumando sobre todas las n e integrando sobre todos los valores de k_z^2 se encuentra la componente normal total, tomando en cuenta que sólo los eigenmodos contribuyen a w,

$$w = \int d(k_z^2) \sum_n \delta(k_z^2 - \lambda_n) w_n. \tag{122}$$

Usando la siguiente identidad (ver [31])

$$\frac{1}{k_{z+}^2 - \lambda_n} = \frac{1}{k_z^2 - \lambda_n} - i\pi\delta(k_z^2 - \lambda_n) \tag{123}$$

con $k_{z^+} = \lim_{\eta \to 0} k_z^2 + i\eta$ la ecuación *(122)* se reescribe como

$$w = -\frac{1}{\pi}\int d(k_z^2)\, Im\left[\sum_n \frac{1}{k_{z+}^2 - \lambda_n} w_n\right]. \tag{124}$$

El término entre los paréntesis cuadrados corresponde a la representación espectral de la función de Green del sistema y de su derivada, expandidas en términos de las eigenfunciones del operador de Helmholtz $\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2$ (ver [43])

$$G_{\mathcal{L}}(z, z') + \partial_z^2 G_{\mathcal{L}}(z, z') = \sum_n \frac{1}{k_{z+}^2 - \lambda_n} w_n. \tag{125}$$

Así, finalmente puede identificarse como la densidad de modos acústica del sistema $\mathcal{D}_{k_z^2}$ la expresión

$$\mathcal{D}_{k_z^2} = -\frac{1}{\pi} Im\left[G(z, z') + \partial_z^2 G(z, z')\right] \tag{126}$$

La función de Green total debe estar compuesta por dos términos, G_p debido al campo de presión y otro G_v debido al campo de velocidades. Ambas funciones son deducibles del mismo campo de potencial por medio de las ecuaciones acusticas fundamentales, ecuación *(93)*. Esto se observa explícitamente en la ecuación *(121)*. Entonces, la densidad de estados total es

$$\mathcal{D}_{k_z^2} = -\frac{1}{\pi} Im\left[G_p(z, z') + G_v(z, z')\right]. \tag{127}$$

Esto es completamente analogo al caso electromagnético donde la densidad de estados es la suma de la función de Green eléctrica más la función de Green magnética, [32]. En los dos casos ambas funciones son funciones de un mismo potencial escalar y relacionadas por ecuaciones constitutivas. Por lo tanto, sólo se requiere construir una de las funciones, y la otra es expresable en términos de ésta. La función de Green para el potencial de velocidades puede encontrarse de forma explícita fácilmente usando la definición estándar

$$G_{k^2}(z,z') = \frac{\Phi_<(z_<)\Phi_>(z_>)}{W}$$

donde W es el Wronskiano. Las soluciones particulares Φ consistentes con las condiciones a la frontera (en términos de los coeficientes de reflectividad) están dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_<(z) &= e^{-ik_z z} + r_1 e^{ik_z z}\\ \Phi_>(z) &= e^{ik_z(z-L)} + r_2 e^{-ik_z(z-L)}\end{aligned} \qquad (128)$$

con $z_<$, $z_>$ el mayor y menor de z y z' respectivamente. Sustituyendo la ecuación *(128)* en la ecuación *(126)* obtenemos una expresión para la densidad de estados

$$\mathcal{D}_{k_z^2} = \frac{1}{2\pi k_z} Re\left[\frac{1+r_1r_2e^{ik_zL}}{1-r_1r_2e^{ik_zL}}\right].$$

Esta densidad fue elaborada para integración dentro del espacio k_z^2, sin embargo como se verá más adelante es de interés la densidad para el espacio k_z. Ésta se obtiene fácilmente a partir de la densidad par k_{z^2} como

$$\mathcal{D}_{k_{z^2}} = \mathcal{D}_{k_z} d(k_{z^2}) = 2k_z\mathcal{D}_{k_z} \qquad (129)$$

por lo que la densidad buscada es

$$\mathcal{D}_{k_z} = \frac{1}{\pi} Re\left[\frac{1+r_1r_2e^{ik_zL}}{1-r_1r_2e^{ik_zL}}\right].$$

Insertamos la densidad de estados en la expresión para la presión total, ec. *(117)*, para obtener

$$P_{in} = \frac{I_k}{4\pi}\int dk_x dk_y dk_z\ \mathcal{D}_{k_z}\frac{k_z^2}{k^4}. \qquad (130)$$

Cuando $r \to 1$ (límite de conductores perfectos) la densidad de estados tiende a un peine de Dirac

$$\lim_{r_1,r_2\to 1}\mathcal{D}_{k_z} = \frac{k_0}{\pi}\sum_n \delta(k_z - nk_0), \qquad (131)$$

con $k_0 = \pi/L$ con lo cual la integral sobre k_z se convierte en una suma sobre n y se recupera el resultado de Larraza.

$$P_{in} = \frac{k_0^3 I_\omega}{2\pi}\int dk_x dk_y \sum_n \frac{n^2}{(k_x^2+k_y^2+n^2k_0^2)^2} \qquad (132)$$

Para el caso de reflectividades generales, la fuerza unitaria ($P_{in} - P_{out}$) puede generalizarse a una forma particularmente simple,

$$\mathcal{F} = \frac{I_\omega}{2\pi^2} Re\left[\int dk_x dk_y dk_z\ \frac{k_z^2}{k^4}\left(\frac{1}{\xi-1}\right)\right] \qquad (133)$$

con $\xi = (r_1r_2exp\,(2ik_zL))^{-1}$. Aun cuando la expresión parece simple, los parámetros con los que se pueden jugar son muchos. Por un lado, r_1 y r_2 no son constantes en general, sino que pueden ser funciones dependientes de la frecuencia, lo cual hace para un modelo mucho realista, y a la posibilidad de inclusión de materiales muy generales: materiales absorbentes, porosos, elasticos, etc. Además, mediante el uso del concepto de impedancia, puede inclusive tratarse el caso de medios de propagación distintos con propiedades también arbitrarias, como por ejemplo el caso de medios viscoelásticos.

Reflectividad e impedancia acústica

La relación entre el coeficiente de reflectividad r y la impedancia acústica específica del medio $Z_s(\omega)$ está dada por la ecuación

$$r = \frac{Z_s(\omega)\cos\theta - \rho c}{Z_s(\omega)\cos\theta + \rho c}. \tag{134}$$

θ es el ángulo de incidencia de la onda. La impedancia del medio ρc toma el lugar que en el caso electromagnético realizaba la impedancia del vacío, mientras que la impedancia específica es equivalente a las impedancias superficiales. Un vistazo a la ecuación anterior y la comparación con la ecuación *(60)* simplemente reafirma lo que se ha dicho constantemente a lo largo del trabajo: la impedancia es un concepto general que aparece a lo largo y ancho de variadísimas ramas de la Física, y del cual podemos extraer muchos resultados. Así mismo, la impedancia acústica es una cantidad directamente medible.

El papel de las frecuencias límite del ancho de banda

Uno de los efectos más interesantes de este modelo se ve al manipular las frecuencias límite del ruido de banda ancha. Para hacer un símil totalmente equivalente al efecto Casimir EM, sería imperativo que las frecuencias límite fueran 0 é ∞: la energía del punto cero del vacío funciona como un campo de radiación de fondo con una frecuencia de corte infinita. Por supuesto, en el caso acústico alcanzar ambos límites es imposible, lo cual marca una diferencia importante. Más adelante se propone que para el caso electromagnético sí es posible manipular la frecuencia lımite más baja, ω_2, metiendo las placas dentro de una cavidad resonante lo cual introduce un límite en la cota máxima de las longitudes de onda admitidas (que es inversamente proporcinal a la frecuencia). De hecho, la mayoría de los esquemas de normalización incluyen un procedimiento así, ver por ejemplo, [27]. El efecto neto de introducir una frecuencia inferior distinta de cero es decrecer la fuerza sin cambiar su forma como función de la distancia, lo cual introduce una posible técnica para manipular las fuerzas de Casimir, y como se mencionó anteriormente, esto podría resultar de sumo interés tecnológico en un futuro próximo.

También se estudió el caso en que la frecuencia máxima es finita (cota sobre el mínimo de la longitud de onda), el cual es irrealizable en el caso EM. Cuando esto sucede, se observa que la fuerza puede ser tanto atractiva como repulsiva, donde la fuerza oscila entre valores negativos y positivos conforme se manipula ω_2. En el estudio de otras fuerzas "tipo Casimir" se han reportado fuerzas con estas mismas características cuando se introducen los equivalentes a estos límites.

El Teorema de Proximidad

Uno de los puntos de mayor controversia respecto a los experimentos de fuerzas de Casimir es en relación con las incertidumbres reportadas es la aplicación del llamado *Teorema de Proximidad* ó *Aproximación de Derjaguin*, [44], la cual dice que

> *"la fuerza entre dos superficies suaves como función de la distancia entre ellas es proporcional al potencial de interacción $\mathcal{E}$ por unidad de área, donde el factor de proporcionalidad es 2π por el recíproco de la raiz cuadrada de la cuadratura Gaussiana de la función de separación en el punto más cercano entre las superficies."*

La mayoría de los experimentos realizados hasta la fecha que miden la fuerza de Casimir lo hacen entre una esfera y una placa, y no entre dos placas, por lo cual es necesario hacer la comparación teórica aplicando el teorema de proximidad. Este arreglo es usado debido a la dificultad de mantener dos planos perfectamente paralelos a las escalas usadas (micrómetros y menores), mientras que para la placa/esfera únicamente es necesario conocer la distancia de máximo acercamiento. Varios autores han señalado la necesidad de estudiar este punto más a fondo antes de declarar incertidumbres del orden del 1 por ciento, como actualmente se reportan en algunos trabajos.

La diferencia de escalas entre el efecto Casimir Acústico y el caso electromagnético hace posible que en el primero sí sea posible realizar los experimentos con placas paralelas, como lo mostró Larraza. El experimento acústico puede llevarse a cabo entre una esfera y una placa ó entre dos placas con la misma facilidad, pudiendose comparar los dos casos y arrojando luz sobre el rango de validez del Teorema de Proximidad. La energía libre por unidad de área en el caso acústico se obtiene de la generalización de los resultados anteriores simplemente como (ver ***Apéndice A***)

$$\mathcal{E} = \frac{I_\omega}{4\pi^2} \int dk_x dk_y dk_z \, \frac{k_z}{k^4} Re \left[ln(1 - r_1 r_2 e^{2ik_z zL}) \right] . \qquad (135)$$

La fuerza por unidad de área entre esfera y plano es entonces

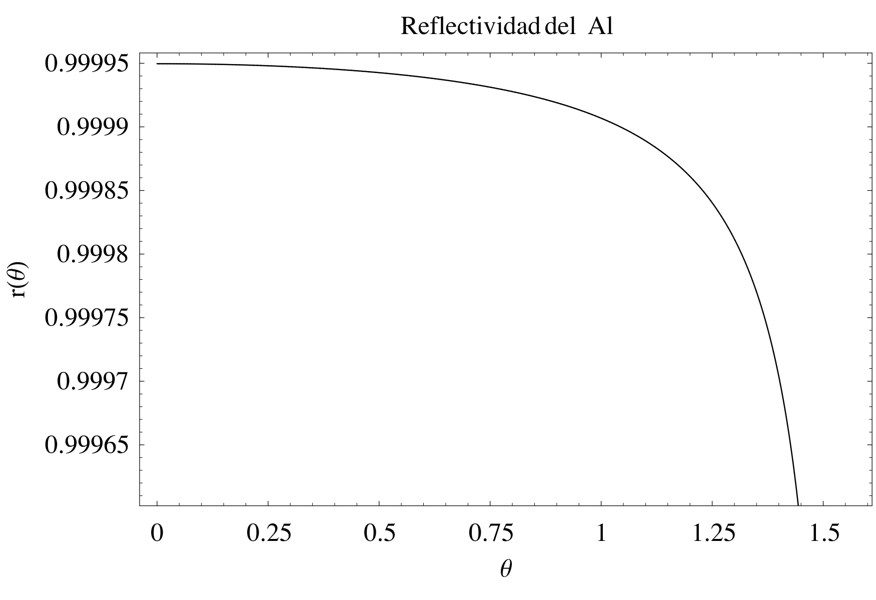
$$\mathcal{F}_{sp} = \frac{I_\omega R}{2\pi} \int dk_x dk_y dk_z \, \frac{k_z}{k^4} Re \left[ln(1 - r_1 r_2 e^{2ik_z zL}) \right] . \qquad (136)$$

Exploraciones numéricas

Now does my project gather to a head
My charms crack not, my spirits obey, and time
Goes upright with his carriage. How's the day?

-The Tempest, Act V.1 , William Shakespeare

La motivación inicial de este trabajo fue examinar cuidadosamente el artículo de Larraza. Por ejemplo, dado que en éste se suponen materiales reflectores perfectos, se procedió a analizar el mismo sistema pero usando datos reales para calcular la reflectividad del Aluminio del cual estaban formadas las placas en el experimento de Larraza. Para esto se graficó el coeficiente de reflectividad del aluminio como función del ángulo de incidencia, y se supuso que en el rango de frecuencias usado la reflectividad no depende fuertemente de la frecuencia. Se tomaron los valores $\rho c = 429 N/s \cdot m^3$ para aire a 1 atm y 0 grados C, $Z_{Al} = 1.7 \times 10^6 N/s \cdot m^3$. La siguiente figura presenta el resultado.

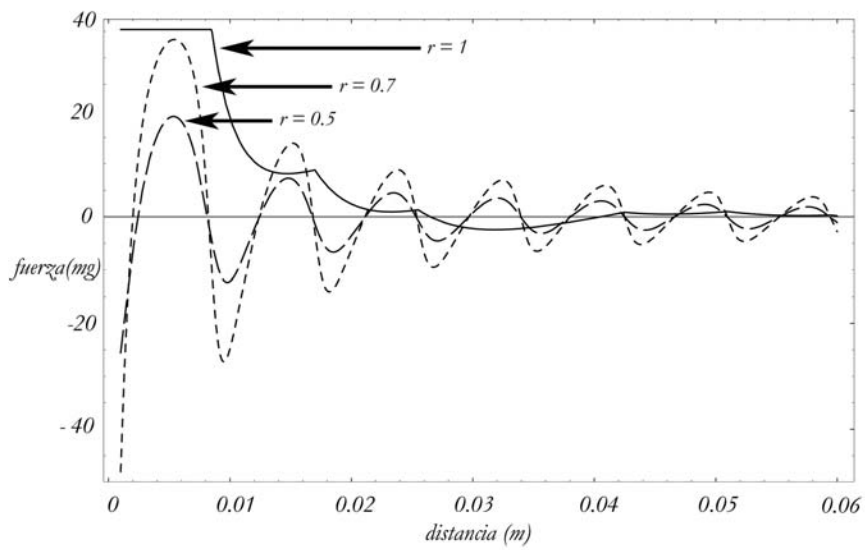


Puede observarse que aunque la reflectividad no es constante, difiere de la unidad en menos de una milésima parte en el intervalo de 0 a $\pi/2$ radianes. Al calcular la fuerza de Casimir usando esta reflectividad, no hay una diferencia significativa entre este caso, y el ideal de Larraza, por lo que se concluye que la aproximación es apropiada.

Otros materiales

Usando las deducciones del capítulo anterior se calculó la fuerza de Casimir acústica para el sistema de placas paralelas de Larraza suponiendo que estaban compuestas de materiales con reflectividades significativamente más bajas, utilizando simulaciones en *FORTRAN* . Se supuso que la reflectividad era constante, es decir, no dependiente de la frecuencia, ó del ángulo de incidencia.

Los resultados para reflectividades $r = 0.7, 0.5$ se muestran en la siguiente figura, comparadas con la fuerza para un reflector perfecto (r=1). Se supuso el mismo ancho de banda de frecuencias utilizado por Larraza et al. , $\delta\omega = [5kHz, 15kHz]$.

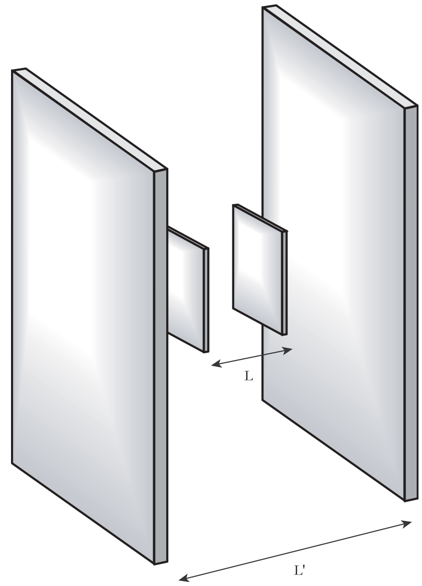


El efecto de disminuir la reflectividad es reducir la magnitud de la fuerza, pero manteniendo la forma general de la fuerza como función de la distancia. Las oscilaciones entre zonas donde la fuerza es repulsiva y atractiva es muy característica de las fuerzas tipo Casimir, excepto en el caso electromagnético. La aparición de zonas donde la fuerza se vuelve repulsiva contrasta con el efecto electromagnético, para el cual la fuerza es siempre atractiva. Esto se debe a la finitud del ancho de banda; la gráfica de la fuerza se suaviza al hace el límite superior de $\delta\omega$ cada vez más grande, y en el límite las oscilaciones desaparecen y se observa una fuerza siempre atractiva. Jugando con el límite superior pueden manipularse las zonas atractivas/repulsivas, mientras que si se aumenta el límite inferior el resultado es disminuir la fuerza.

En el Casimir EM, resulta imposible manipular la frecuencia superior del “ancho de banda" del espectro, pero hay una forma bastante simple de manipular el límite inferior. Recordando que

$$\omega = \frac{c}{k}, \qquad (137)$$

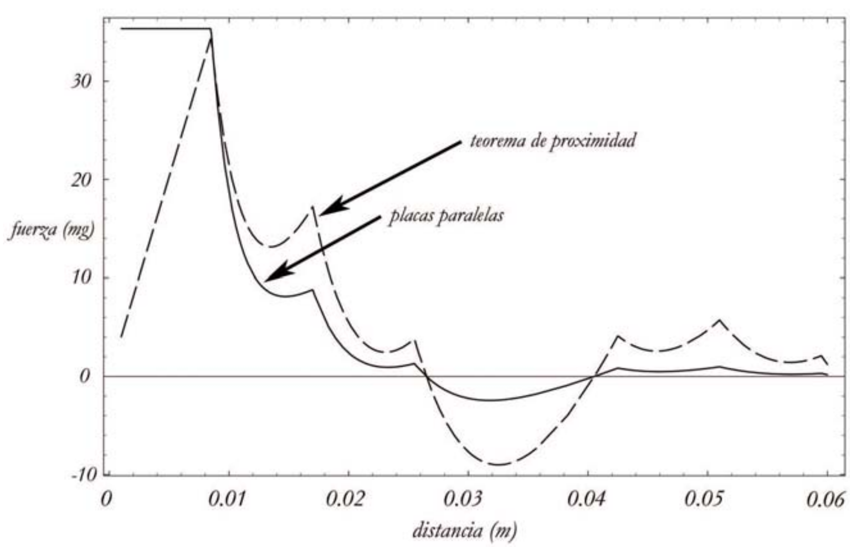
obtenemos un límite inferior sobre la frecuencia si podemos lograr que k alcance un valor máximo finito. Si el sistema de placas paralelas se inserta en medio de otras dos placas paralelas como se muestra en la siguiente figura



Para el sistema original, $k < L'$, y por lo tanto se tiene que para la frecuencia, $\omega > c/L$. Recordemos que en la introducción se mencionó la importancia actual de las investigaciones dirigidas a la manipulación de las fuerzas parasitarias de Casimir en MEMs. Un arreglo de este tipo podría utilizarse para atenuar los posibles efectos de fuerzas que colapsaran un MEM.

El Teorema de Proximidad

También se calculó la fuerza para un reflector perfecto y se comparó con la fuerza calculada usando el teorema de proximidad. La siguiente figura presenta los datos obtenidos.



Puede observarse que la aproximación es bastante buena para distancias menores a 1 cm, y que inclusive la gráfica de la fuerza aproximada mantiene la forma general de la fuerza calculada exactamente, incluyendo los cambios de signo. Sin embargo, tampoco puede decirse que los resultados son extremadamente precisos, por lo que podemos concluir que, por lo menos en el caso acúsico, sería incorrecto comparar la fuerza medida entre una placa y un plano con la fuerza teórica entre dos placas.

La versatilidad del método de impedancias generalizadas se puso a prueba en el cálculo de un caso de interés práctico, al calcularse la fuerza entre una placa ($r = 1$) y una interfase agua/aire (pressure release surface, $r = -1$) donde se encontró una fuerza siempre atractiva. Esto se nota inmediatamente analizando la ecuación *(133)* con $r_1 r_2 = -1$,

$$\mathcal{F} = -\frac{I_\omega}{2\pi^2} Re \left[\int dk_x dk_y dk_z \left(\frac{k_z^2}{k^4}\right) \left(\frac{1}{1+e^{-i2k_zL}}\right) \right]. \tag{138}$$

El primer término entre paréntesis es siempre positivo. El segundo término puede manipularse para obtener

$$\frac{1}{1+e^{-i2k_zL}} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \tan\left(k_z L\right), \tag{139}$$

por lo que la parte real de la integral es estrictamente positiva, que con el signo negativo exterior da el resultado antes mencionado, una fuerza siempre atractiva para cualquier valor de las frecuencias límite del ancho de banda.

Conclusiones

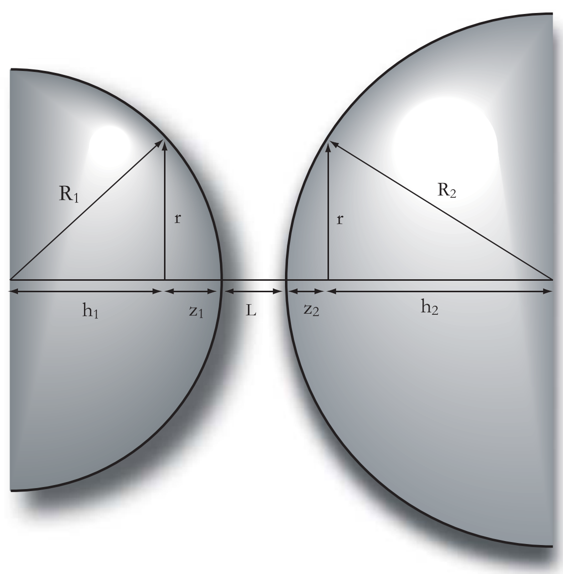
La aparición de las oscilaciones en el cambio de signo que se observan en las figuras anteriores es típica de todos los efectos tipo Casimir (e.g. el efecto Casimir electrónico), menos, irónicamente, del efecto Casimir original. Ya se dijo que las oscilaciones aparecen cuando el límite inferior de las frecuencias es distinta de cero, pero que en el efecto EM es imposible cambiar el límite inferior de las frecuencias. Aunque se propone el sistema de dos placas exteriores a las dos placas originales para disminuir la fuerza, sucede algo desafortunado. Es ahora bien sabido, como lo verificó experimentalmente Capasso en el parcialmente fallido experimento de los HSMs, que las mayores contribuciones a la fuerza de Casimir vienen de las regiones de baja frecuencia del espectro del "campo de radiacioń de fondo". Entonces, la idea de las placas externas podría funcionar sólo de manera parcial.

En cuanto al Teorema de Proximidad, la verificación experimental aún no se ha llevado a cabo, aunque el estudio teórico del problema sí, pero parcialmente: he reiterado que la fuerza de Casimir es sumamante susceptible al arreglo geométrico del sistema y que en general resulta imposible preveer como una variación geométrica sobre el sistema influenciaría los resultados. Se observó que por lo menos en el caso acústico, las variaciones resultan bastante sustanciales, y eso en el caso ideal. Actualmente los experimentos en el Casimir EM de mayor precisión se llevan a cabo entre placas y esferas, y se reportan incertidumbres menores al 1%. Ha surgido un amplio debate sobre si estas desviaciones son auténticas precisamente porque hasta ahora nunca se han logrado realizar experimentos entre placas paralelas con desviaciones menores al 15%, y por lo tanto la comparación entre placa/placa y esfera/placa, por lo menos experimentalmente, no existe. Por lo tanto, la realización del experimento acústico propuesto podría resultar sumamente relevante.

Para finalizar, menciono que a partir de un artículo que apareció antes del nuestro en *JASA*, se ha planteado la posibilidad de otro tipo de efecto Casimir acústico, debido a la interacciones de fonones en los cuerpos materiales [45].

Apéndice A: demostración geométrica del Teorema de Proximidad

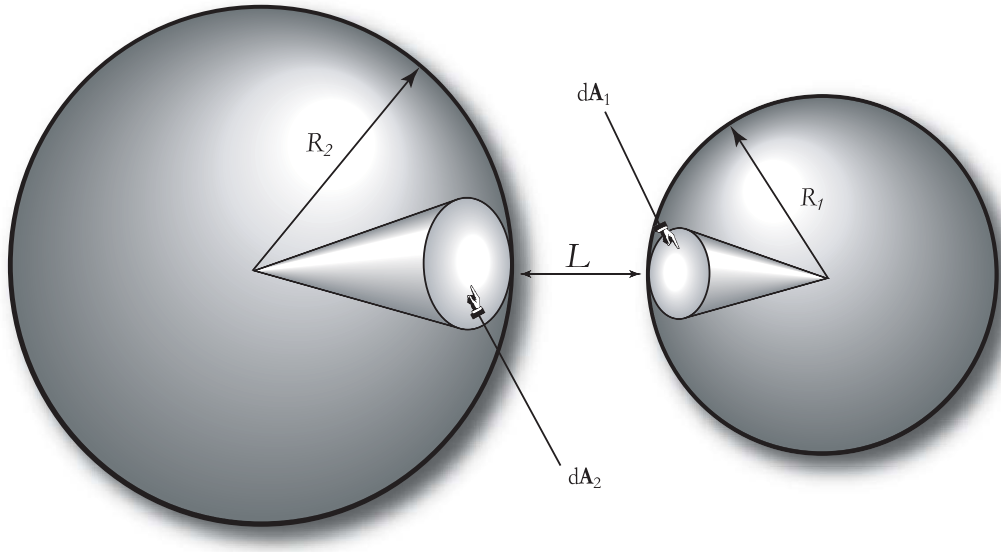
Se presenta aquí una demostración simple del teorema. Para ello consíderese un sistema como el de la siguiente figura, formado por dos esferas de radio R_1 y R_2 separadas en su punto más próximo por una distancia L y tal que R_1,$R_2 >> L$.



Suponemos que la fuerza total entre las esferas depende del área de contacto entre ellas, y que dada un área total A_1 para la esfera 1, la fuerza por unidad de área para la segunda esfera depende únicamente de la distancia entre ellas, tal que

$$\frac{dF}{dA} = f(z). \tag{140}$$

La siguiente figura esquematiza la geometría.



Del diagrama se observa que, utilizando el teorema de Pitágoras,

$$R_1^2 = r^2 + (R_1 - z_1)^2 = r^2 + R_1^2 - 2R_1 z + z_1^2. \qquad (141)$$

Ahora bien, como estamos suponiendo que localmente la superficie semeja a un plano, esto se traduce en que $z_1 \cong 0$, y por lo tanto de *(141)*, a primer orden se tiene que

$$\begin{aligned} r^2 &\cong 2R_1 z_1, \\ r^2 &\cong 2R_2 z_2, \end{aligned} \qquad (142)$$

donde la segunda ecuación surge en completa analogía con la primera puesto que las suposiciones para la segunda esfera son las mismas. Entonces, $z \cong L + \frac{1}{2} r^2 (R_1^{-1} + R_2^{-1})$. El elemento de área sobre la esfera se puede aproximar como

$$dA = 2\pi r\, dr \cong 2\pi (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}\, dz = 2\pi \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) dz \qquad (143)$$

Aplicando esta aproximación,

$$F = 2\pi \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \int_H^\infty f(z)\, dz = 2\pi \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) u(H), \qquad (144)$$

con $u(L)$ siendo la energía de interacción por unidad de área. La fuerza entre una esfera de radio R y un plano ($R \to \infty$) es entonces

$$F(L) = 2\pi R\, u(L). \qquad (145)$$

donde $\mathcal{E}$ es la energía libre del sistema y R es el radio de la esfera, resultado que es válido si $L/R << 1$, aunque aún no existe un resultado definitivo sobre que tan grande tiene que ser la razón L/R para que la aproximación arroje resultados correctos.

Apéndice B: programa para calcular la fuerza de Casimir acústica entre dos placas paralelas

Para compilar el código se utilizó Absoft FORTRAN90 para Mac OSX 10.3, con las librerías IMSL adicionales.

```
module VARIABLE
INTEGER IRULE,caso
REAL*8::A,B,ERRABS,ERREST,ERREL
REAL*8:a0,af,dela,pi,RESULT,l
Integer::n,nl,tol
end module variable

program acoustic
use variable
implicit none
REAL*8::X,Y
EXTERNAL F,G,dtwoqd
pi=3.1415925d0
A=90.0001000d0
B=390.d0
open(unit=30,file="fuerza.dat",status="unknown")

ERRABS=0.000000d0
ERREL=0.00001000d0
IRULE=6
a0=.01
af=1.
dela=.01

do l=a0,af,dela
write(*,*) l
CALL dtwodq(F,A,B,G,H,ERRABS,ERREL,IRULE,RESULT,ERREST)
write(30,*) l,RESULT
end do

END
```

```
FUNCTION F(X,Y)
use variable
implicit none
complex*8::kz,ii,xsi
real*8::F,X,Y,r1,r2
r1=.8d0
r2=.8d0
ii=cmplx(0.d0,1.d0)
kz=SQRT(X**2-y**2)
xsi=r1*r2*exp(ii*2.d0*kz*L)
F=real(Y*kz/((X**3)*(xsi-1.d0)))
RETURN
END

REAL FUNCTION G(X)
REAL*8 X
G=.01d0
RETURN
END

REAL FUNCTION H(X)
REAL*8 X
H=10.d0
RETURN
END
```

Apéndice C: relación entre la función de Green y la densidad de estados

Para un sistema con un Hamiltoniano H bien definido, tal que ψ_m son sus eigenfunciones normalizadas con eigenvalores correspondientes E_m, se define la densidad de estados como, [46]

$$D(E) \equiv \sum_m \delta\left(E - E_m\right). \tag{146}$$

La densidad de estados proyectada sobre un estado particular $|\sigma_0\rangle$ (ó densidad de estados local) se define de la manera usual,

$$n_0(E) \equiv \sum_m \left(|\langle\sigma_0|\psi_m\rangle|^2\,\delta\left(E - E_m\right)\right). \tag{147}$$

La función de Green retardada se define como

$$G(E + i\epsilon) \equiv \frac{1}{E + i\epsilon + H}, \tag{148}$$

A la energía E se le suma una cantidad infinitesimal imaginaria $i\epsilon$ para mantener el principio de causalidad. El número ϵ es estrictamente positivo, lo cual significa que al definir el infinitesimal se está haciendo uso implícito del límite "por la izquierda"

$$G(E) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{E + i\epsilon + H}. \tag{149}$$

tomando el papel usual de la función escalón en la definición de la función de Green. Para encontrar la relación entre las funciones de Green y la densidad de estados, considérese el elemento diagonal de matriz

$$G_{00}(E) = \langle\sigma_0|G(E)\sigma_0\rangle$$

Dado que suponemos que las ψm forman una base completa ortogonal, usamos el operador identidad $1 = \sum_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$, e insertándolo en la ecuación anterior se llega a

$$\begin{aligned} G_{00}(E) &= \sum_m \langle\sigma_0|\psi_m\rangle\langle\psi_m|G(E)|\sigma_0\rangle = \sum_m \langle\sigma_0|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\frac{1}{E + i\epsilon - H}|\sigma_0\rangle \\ &= \sum_m |\langle\sigma_0|\psi_m\rangle|^2\,\frac{1}{E + i\epsilon - E_m} \\ &= \sum_m |\langle\sigma_0|\psi_m\rangle|^2\,\frac{(E - E_m) - i\epsilon}{(E - E_m)^2 + \epsilon^2}. \end{aligned} \tag{150}$$

Ahora, hacemos uso de la siguiente identidad para la función delta, [46],

$$\delta(E - E_m) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\epsilon}{(E - E_m)^2 + \epsilon^2}, \tag{151}$$

por lo que

$$n_0(E) = -\frac{1}{\pi} Im \left[G_{00}(E) \right]. \tag{152}$$

A su vez, es directo demostrar que la densidad de estados total corresponde a la traza de la matriz, ya que

$$D(E) = \sum_m n_m(E) = -\frac{1}{\pi} Im Tr G(E) \tag{153}$$

Para encontra las fuerzas de Casimir, primero debe calcularse una suma del tipo $E_{total} = \sum_m E_m$, donde m son todos los eigenvalores admisibles al sistema. Esta suma pude a su vez expresarse como una integral del tipo $E_{total} = \int D(E) dE$. Por lo tanto, si se conoce la función de Green del sistema, se tiene una fórmula para realizar la suma mediante integrales. Si por otro lado se puede construir la función de Green para un sistema, aun cuando no se puedan definir los modos directamente, se puede usar esta fórmula para hacer la integral.

Bibliografía

[1] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc. Netherlands Aka. Wetenschapen*, 51:793--795, 1948.

[2] H. B. G. Casimir. *On the history of the so-called Casmir effect*, volume 1-D of *Comments on modern Physics*. Overseas Publishers Association, 2000.

[3] E. M. Lifschitz. The theory of molecular attractive forces between solids. *Soviet Physics JETP*, 2:73--83, 1956.

[4] J. Schwinger, Lester L. DeRaad Jr., and Kimball Milton. Casimir effect in dielectrics. *Annals of Physics*, 115:1--23, 1978.

[5] A. Lambrecht and S. Reynaud. *Euro. Phys. J.*, D8:309, 2000.

[6] G. Carugno, Z. Fontana, R. Onofrio, and C. Rizzo. *Physical Review D*, 55(6591), 1997.

[7] M. J. Sparnaay. *Nature*, 180:334, 1957.

[8] B. W. Harris, F. Chen, and U. Mohideen. Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces. *Physical Review A*, 62(052109-1), 2000.

[9] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Physical Review Letters*, 78(10):5--8, January 1997.

[10] U. Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm. *Physical Review Letters*, 81(21):4549--4552, November 1998.

[11] C. I. Sukenik, M. G. Boshier, D. Cho, V. Sandoghar, and E. A. Hinds. Measurement of the Casimir-Polder force. *Physical Review Letters*, 70(5), February 1993.

[12] Hendrik Brugt Gerhard Casimir. *Haphazard Reality*. Harper & Row Publishers, 1st edition, 1983.

[13] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. International series in pure and applied Physics. McGraw-Hill Book Company, 1st edition, 1965.

[14] E. Buks and M. L. Roukes. Metastability and the Casimir effect in micromechanical systems. *Europhysics Letters*, 54(2), April 2001.

[15] F. Michael Serry, Dirk Walliser, and G. Jordan Maclay. The anharmonic Casimir oscillator (ACO) --- the Casimir effect in a model microelectromechanical system. *Journal of Micromechanical Systems*, 48(4):193--205, December 1995.

[16] F. Michael Serry, Dirk Walliser, and G. Jordan Maclay. The role of the Casimir effect in the static deflection and stiction of membrane strips in microelectromechanical systems (MEMS). *Journal of Applied Physics*, 84(5):2501--, September 1998.

[17] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop, and Federico Capasso. Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force. *Science*, 291:1941--1944, 2001.

[18] Y. P. Zhao, L. S. Wang, and T. X. Yu. Mechanics of adhesion in MEMs - a review. *J. Adhesion Sci. Technolog.*, 17(4):519--546, 2003.

[19] Timothy H. Boyer. Quantum-electromagnetic zero-point energy of a conducting spherical shell and the Casimir model for a charged particle. *Physical Review*, 174(5):1764--1776, 1968.

[20] Davide Iannuzzi, Mariangela Lisanti, and Federico Capasso. Effect of hydrogen-switchable mirrors on the Casimir force. *PNAS*, 101(12):4019--4023, March 2004.

[21] Andrés Larraza, Christopher D. Holmes, Robert T. Susbilla, and Bruce Denardo. An acoustic Casimir effect. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103:276, 1998.

[22] Andrés Larraza and Bruce Denardo. An acoustic Casimir effect. *Physics Letters A*, 248:151--155, 1998.

[23] Andrés Larraza. A demonstration apparatus for an acoustic analog to the Casimir effect. *Am. J. Phys.*, 67:1028, 1999.

[24] Jeffrey E. Bárcenas Mosqueda, Raul P. Esquivel-Sirvent, and Luis I. Reyes Galindo. Acoustic Casimir pressure for arbitrary media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 116(12):717--720, August 2004.

[25] R. Robinett. *Quantum Mechanics: Classical Results, Modern Systems and Visualized Examples*. Oxford University Press, 1st edition, 1996.

[26] S.E. Rugh, H. Zinkernagel, and T.Y. Cao. The Casimir effect and the interpretation of the vacuum. *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, 30(1):111--139, 1999.

[27] Walter Greiner. *Quantum Mechanics: Special Chapters*. Theoretical Physics. Springer-Verlag New York, 1st edition, 2001.

[28] Eugen Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., 3rd edition, 1998.

[29] Walter Greiner. *Classical Electrodynamics*. Theoretical Physics. Springer-Verlag New York, 1st edition, 1998.

[30] E. Elizalde and A. Romeo. Essentials of the Casimir effect and its computation. *American Journal of Physics*, 59:711--719, 1991.

[31] G. Arfken and H. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Harcourt Academic Press, 5th edition, 2001.

[32] G. Plunien, B. Müller, and W. Greiner. The Casimir effect. *Physics Reports*, 134(2 & 3):87--193, 1986.

[33] Peter W. Milonni. *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press, Los Alamos, New Mexico, 1st edition, 1994.

[34] Timothy H. Boyer. Temperature dependence of Van der Waals forces in classical electrodynamics with classical electromagnetic zero-point radiation. *Physical Review A*, 11(5):1650--1663, 1975.

[35] S. K. Lamoreaux. Resource letter CF-1: Casimir force. *American Journal of Physics*, 67(10):850--861, 1999.

[36] W. L. Mochán, C. Villareal, and R. Esquivel-Sirvent. On Casimir forces for media with arbitrary dielectric properties. *Revista Mexicana de Física*, 48(4), 2002.

[37] Gabriel Barton. *Elements of Green's functions and propagation*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 1st edition, 1989.

[38] Harald J. W. Müller-Kirsten. *Electrodynamics: an introduction including quantum effects*. World Scientific Publishing Company, 1st edition, 2004.

[39] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Companies, 1941.

[40] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, New York, 1987.

[41] Philip M. Morse and K. Uno Ingard. *Theoretical Acoustics*. International series in pure and applied Physics. McGraw-Hill Book Company, 1st edition, 1968.

[42] C.P. Lee and T.G. Wang. Acoustic radiation pressure. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94:1099--1109, 1993.

[43] A. Gonis. *Materials Science*. Theoretical Materials Research Society, 2000.

[44] B. V. Derjaguin and I. I. Abrikosova. *Veštnik Akad. Nauk. SSSR*, 6:125, 1951.

[45] Oliver Bschorr. The force between two parallel rigid plates due to the radiation pressure of phonons. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(6):3730--3731, 1999.

[46] Giussepe Grosso and Giuseppe Pastori Parravicini. *Solid State Physics*. Academic Press, 2000.

[47] Allan D. Pierce. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. The Acoustical Society of America, 2 edition, 1989.

Este trabajo fue escrito, evidentemente en una Mac, usando plain TEX con el paquete de macros adicionales E-plain. La fuente usada en el texto es Adobe Garamond Pro, en su versión Open Type, convertida a métricas de TEX usando el programa otf2tfm. La fuente de las ecuaciones es la Computer Modern, original de Donald Knuth. Ningún fotón virtual fue lastimado o perjudicado durante la escritura de este texto, según los estándares de la Asociación Interamericana para la Protección de Particulas Epistemológicamente Infundadas.