



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MÉTODOS HIDRÁULICOS E HIDROLÓGICOS PARA EL  
TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES**

**T E S I S**

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRA EN INGENIERÍA  
(HIDRÁULICA)**

PRESENTA  
**ALICIA RAVELO GARCÍA**

DIRECTOR DE TESIS  
**DR. ÓSCAR ARTURO FUENTES MARILES**



MÉXICO D.F.

DE 2005



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



A mis padres Juan Ravelo y Lidia García, por los medios proporcionados para alcanzar mis metas, por su amor, dedicación, cariño, comprensión y por que son para mí un aliciente para seguir desarrollándome profesionalmente y también como ser humano.

A Isa, Lili y Mari gracias por ser mis hermanas y por todos los momentos bellos que hemos compartido, por todo lo que he aprendido junto a ustedes, por el cariño y confianza que han depositado en mí.

A Abraham por los buenos momentos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitir realizar unos de mis sueños.

Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por el apoyo brindado durante todo este tiempo.

Al Dr. Óscar Arturo Fuentes Mariles por el tiempo dedicado a este trabajo, también por su apoyo en mi formación académica, por aceptarme en su grupo de trabajo, por todo lo que he aprendido y por su gran calidad humana, que algunos nos falta.

Al Ing. Víctor Franco por su gran fortaleza y sinceridad.

A mis sinodales Dr. Ramón Domínguez, Dr. Jesús Gracia y al Dr. Carlos Escalante, por los comentarios sobre este trabajo.

A mis compañeros del Instituto de Ingeniería de la UNAM Ismene, Faus, Martín, Mino, Adrix, Rod, Edith, Mtro. Carrillo, Fidel, Gabriel, Miriam, Sr. Alex, José Luis Aragón, Alex, Susanita, José Luis, Pedrito, César, Pablo, Paula, Adriana Palma y Ricardo por los momentos compartidos.

A todas aquellas personas que no menciono pero que siempre han estado conmigo y que saben que siempre las llevo en mi corazón.

Olvidaba mencionar a ustedes que también son parte importante en mi vida y en mi familia Cecilio, Pipis, Rayito y Monita por la inocencia y amor que proyectan.

A ti Tomasito †, nunca te olvidare.

# AGRADECIMIENTOS

# ÍNDICE

<b>1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>Tránsito de avenidas</b>	<b>3</b>
2.1	Ecuaciones empleadas en el tránsito de avenidas en cauces	6
2.2	Ecuación de continuidad	7
2.3	Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	9
<b>3.</b>	<b>Métodos Hidráulicos</b>	<b>10</b>
3.1	Método de Sánchez y Fuentes	10
<b>4.</b>	<b>Métodos Hidrológicos</b>	<b>16</b>
4.1	Método de la Onda Cinemática	
4.1.1	Discretización de la onda cinemática	22
4.2.	Método de Muskingum	23
4.3	Método de Muskingum - Cunge	26
4.3.1	Requerimientos de solución del método de Muskingum - Cunge	31
4.4	Métodos para obtener los parámetros K y X	34
<b>5</b>	<b>Aplicaciones</b>	<b>42</b>
5.1	Método de Sánchez – Fuentes	43
5.2	Método de Muskingum	47
5.2.1	Desarrollo del método	48
5.3	Método de Muskingum – Cunge	59
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>66</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>68</b>
	<b>Apéndice A</b> Deducción de ecuaciones fundamentales	<b>69</b>
	<b>Apéndice B</b> Deducción de la ecuación de Muskingum-Cunge	<b>78</b>
	<b>Apéndice C</b> Listado del programa	<b>87</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

## INTRODUCCIÓN

México es afectado por diversos fenómenos meteorológicos que pueden producir condiciones extremas de precipitación o sequía.

El hombre a lo largo de su historia se ha establecido en lugares que le garantizan el suministro de agua necesaria para su subsistencia, pero esto le ha implicado riesgos de padecer inundaciones que amenacen su vida y propiedades.

Una inundación se puede producir cuando el gasto de la avenida supera la capacidad de conducción del cauce y su exceso escurre fuera del río en las llanuras cercanas y parte de estas se almacena en ellas.

Las inundaciones pueden ser pluviales cuando se presenta lluvia importante en la cuenca o fluvial por el desbordamiento del río. Otro tipo de inundaciones son debidas a la marea de tormenta (el ascenso del nivel medio del mar provocado por ciclones tropicales) o por la salida de un gran volumen de agua debido a la falla de un bordo de un río o una mala operación de obras hidráulicas.

De acuerdo al tiempo en que se forman las inundaciones pueden ser lentas (su duración es mayor a cuatro horas) o rápidas (menores a cuatro horas).

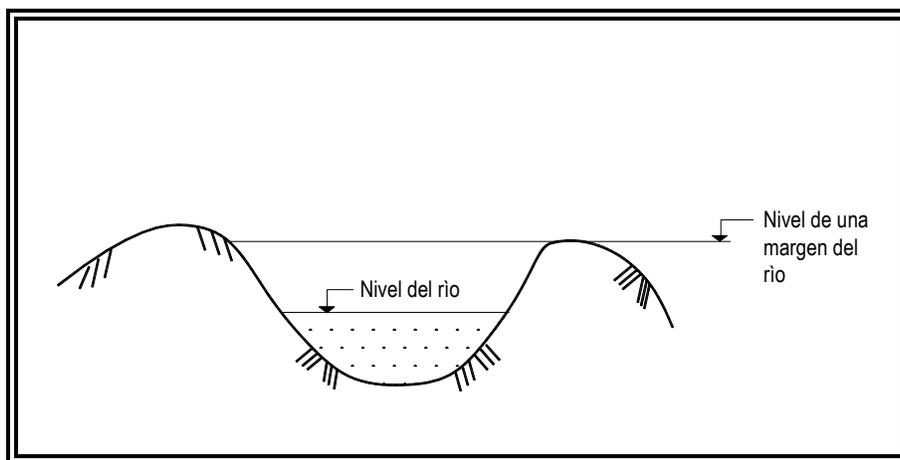


Figura 1.1 Nivel de las márgenes de un río.

Para evitar las inundaciones y disminuir sus efectos perjudiciales existen medidas de protección que pueden clasificarse en dos grupos:

1. *Medidas estructurales*: Consisten en obras construidas para evitar o reducir las inundaciones.
2. *No estructurales*: Se basan en reglamentos y acciones que no requieren de construcción de obras para disminuir las inundaciones. Algunas de ellas están dirigidas a reglamentos y a avisar con oportunidad a las poblaciones que se encuentran asentadas a las riveras de algún río de la ocurrencia de una avenida.

Para aprovechar los recursos hidráulicos disponibles y al mismo tiempo evitar daños causados por inundación, se debe realizar estudios de las avenidas. A partir de los cuales se planea, diseña, construye y se operan obras hidráulicas.

El objetivo de este trabajo es comparar los resultados de los tránsitos de avenidas en cauces de tipo hidráulico e hidrológico; también se pretende describir una metodología para calcular los parámetros del método de Muskingum  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de su tránsito ( $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ ) que mejores resultados proporcione.

El presente trabajo está integrado por 6 capítulos, en el primero se hace una descripción breve sobre el contenido de la tesis y el objetivo del trabajo.

En el capítulo 2 se describe el tránsito de avenidas, así como las técnicas que existen (métodos hidráulicos e hidrológicos) y las ecuaciones generales que intervienen en el tránsito (ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento).

El capítulo 3 se refiere a los métodos hidráulicos como el método de Sánchez y Fuentes.

Los métodos hidrológicos se describen en el capítulo 4 y en el capítulo 5 se presentan las aplicaciones de los métodos utilizados.

En el capítulo 6 se incluyen las conclusiones. Además se presentan tres anexos, en el A se describe y desarrollan las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y en el B se presenta el desarrollo de las ecuaciones del método de Muskingum-Cunge y en el apéndice C se presenta el cuerpo del programa.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCIÓN

México es afectado por diversos fenómenos meteorológicos que pueden producir condiciones extremas de precipitación o sequía.

El hombre a lo largo de su historia se ha establecido en lugares que le garantizan el suministro de agua necesaria para su subsistencia, pero esto le ha implicado riesgos de padecer inundaciones que amenacen su vida y propiedades.

Una inundación se puede producir cuando el gasto de la avenida supera la capacidad de conducción del cauce y su exceso escurre fuera del río en las llanuras cercanas y parte de estas se almacena en ellas.

Las inundaciones pueden ser pluviales cuando se presenta lluvia importante en la cuenca o fluvial por el desbordamiento del río. Otro tipo de inundaciones son debidas a la marea de tormenta (el ascenso del nivel medio del mar provocado por ciclones tropicales) o por la salida de un gran volumen de agua debido a la falla de un bordo de un río o una mala operación de obras hidráulicas.

De acuerdo al tiempo en que se forman las inundaciones pueden ser lentas (su duración es mayor a cuatro horas) o rápidas (menores a cuatro horas).

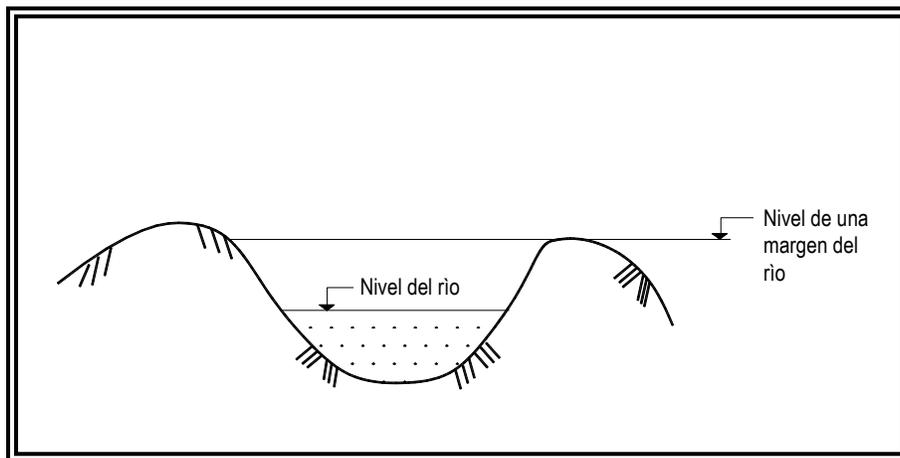


Figura 1.1 Nivel de las márgenes de un río.

Para evitar las inundaciones y disminuir sus efectos perjudiciales existen medidas de protección que pueden clasificarse en dos grupos:

1. *Medidas estructurales*: Consisten en obras construidas para evitar o reducir las inundaciones.
2. *No estructurales*: Se basan en reglamentos y acciones que no requieren de construcción de obras para disminuir las inundaciones. Algunas de ellas están dirigidas a reglamentos y a avisar con oportunidad a las poblaciones que se encuentran asentadas a las riveras de algún río de la ocurrencia de una avenida.

Para aprovechar los recursos hidráulicos disponibles y al mismo tiempo evitar daños causados por inundación, se debe realizar estudios de las avenidas. A partir de los cuales se planea, diseña, construye y se operan obras hidráulicas.

El objetivo de este trabajo es comparar los resultados de los tránsitos de avenidas en cauces de tipo hidráulico e hidrológico; también se pretende describir una metodología para calcular los parámetros del método de Muskingum  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de su tránsito ( $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ ) que mejores resultados proporcione.

El presente trabajo está integrado por 6 capítulos, en el primero se hace una descripción breve sobre el contenido de la tesis y el objetivo del trabajo.

En el capítulo 2 se describe el tránsito de avenidas, así como las técnicas que existen (métodos hidráulicos e hidrológicos) y las ecuaciones generales que intervienen en el tránsito (ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento).

El capítulo 3 se refiere a los métodos hidráulicos como el método de Sánchez y Fuentes.

Los métodos hidrológicos se describen en el capítulo 4 y en el capítulo 5 se presentan las aplicaciones de los métodos utilizados.

En el capítulo 6 se incluyen las conclusiones. Además se presentan tres anexos, en el A se describe y desarrollan las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y en el B se presenta el desarrollo de las ecuaciones del método de Muskingum-Cunge y en el apéndice C se presenta el cuerpo del programa.

## CAPITULO 2

# TRÁNSITO DE AVENIDAS

El cambio que sufre el hidrograma que se presenta a lo largo de un tramo de río o al propagarse por una presa se obtiene por métodos de tránsito de la avenida. Dicho cambio es tanto en forma como en desplazamiento en el tiempo.

Los procedimientos de tránsitos de avenidas se emplean para predecir la variación temporal y espacial de la avenida a través de un tramo de río o en un vaso de almacenamiento; es decir para encontrar un hidrograma de salida.

El tránsito de avenidas permite determinar la magnitud del gasto en un punto específico del curso del agua en un río o a la salida de una presa en un cierto tiempo.

Se define como tránsito de avenidas en cauces al cálculo de los gastos en una sección transversal específica de un río. Este procedimiento permite obtener la forma del hidrograma en distintas secciones transversales a lo largo de un cauce a partir de un hidrograma de entrada.

Los procedimientos de tránsitos de avenidas se utilizan para la predicción de avenidas, diseño de almacenamientos, simulación del movimiento del agua en cauces y presas, para estudios de aprovechamientos hidráulicos o bien para pronosticar inundaciones.

En general existen dos técnicas para el tránsito de avenidas en cauces

- 1.- Métodos Hidrológicos (o de almacenamiento)
- 2.- Métodos Hidráulicos (o de proceso)

1.- Los métodos hidrológicos utilizan la ecuación de continuidad y una relación entre el almacenamiento y el gasto de salida. En general son menos complicados que los hidráulicos. Ellos dependen de uno o más parámetros cuyos valores son particulares del tramo del río en estudio. La mayoría de estos métodos se plantean a partir de un hidrograma de entrada y otro a la salida del río.

En el río se aplica la ecuación de continuidad donde se relaciona el cambio en el almacenamiento con la diferencia entre el gasto en una sección aguas arriba y el gasto en una sección de aguas abajo; además es necesario asociar el almacenamiento y los gastos.

Los requerimientos computacionales y de información de los métodos hidrológicos son mínimos, pero sus resultados son limitados en exactitud y generalización. No toman en cuenta cambios de geometría de la sección ni efectos de remansos.

2.- Los métodos hidráulicos utilizan la ecuación de conservación de la masa y de conservación de cantidad de movimiento (ecuaciones de Saint-Venant) para describir el flujo de agua en un cauce. Las ecuaciones mencionadas comúnmente se resuelven con esquemas de diferencias finitas, con el método de las características o el método del elemento finito.

Entre otros programas de cómputo para el tránsito de avenidas hidráulico están

1. Hec Ras
2. Info Works River Simulation
3. Método de Sánchez - Fuentes

1.- El programa Hec-Ras (Hydrologic Engineering Center – River Analysis System), fue desarrollado por el cuerpo de Ingenieros por la Armada de Estados Unidos.

Este software surge de la versión Hec-2 la cual realiza análisis para flujo permanente y no permanente. Está diseñado para interactuar en múltiples aspectos hidráulicos, el sistema comprende el uso de graficas, componentes independientes de análisis hidráulicos, almacenamiento y manejo de datos y los resultados se presentan en forma grafica y tabular. Contiene tres componentes de análisis hidráulico unidimensional:

- a) Cálculo de perfiles de superficie de agua para flujo permanente
- b) Simulación en flujo permanente y no permanente
- c) Cálculo de transporte de sedimentos con fronteras móviles

El programa calcula los niveles de la superficie del agua de un flujo gradualmente variado. El sistema que maneja es un solo río o una red de ríos, puede manejar el régimen subcrítico, supercrítico y ambos.

El procedimiento de solución se basa en la ecuación de la energía unidimensional, la pérdida de energía mediante la formula de Manning y por los coeficientes de contracción y expansión. La ecuación de conservación de movimiento se utiliza cuando el flujo es rápidamente variado.

El programa Hec Ras básicamente consta de tres etapas; el ingreso de información básica (geometría y flujo), las corridas del programa y el análisis de resultados (con visualización).

2.- El programa Info Works River Simulation al igual que el software Hec Ras realiza análisis para flujo permanente y no permanente, tiene un gran proyección visual, se manejan datos topográficos (procesados con algún programa como Arc View, CivilCad ), una vez concentrada toda la información se procede a realizar los modelos digitales de elevación (MDE), que son generados de dos formas:

La primera es orientada a Interpolaciones Triangulares Irregulares (\*.TIN), con la desventaja de que estos modelos de terreno ocupan demasiada memoria en el disco duro del ordenador, pero con la ventaja de que precisa a detalle los accidentes topográficos. (Figura 2.1.)

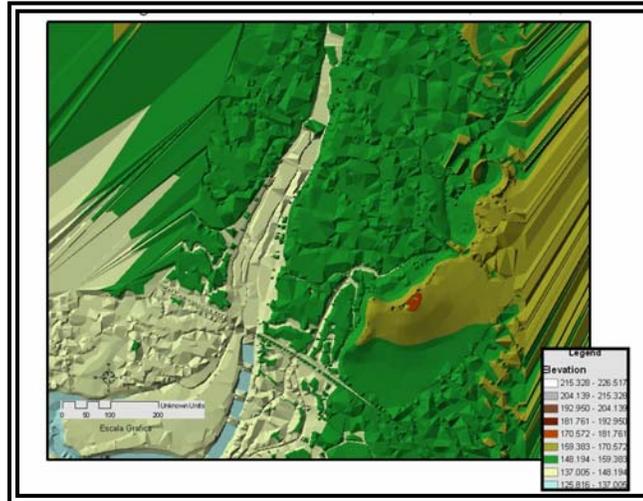


Figura 2.1 Modelo Digital de Elevaciones de un río, escala 1:4.500 en formato TIN

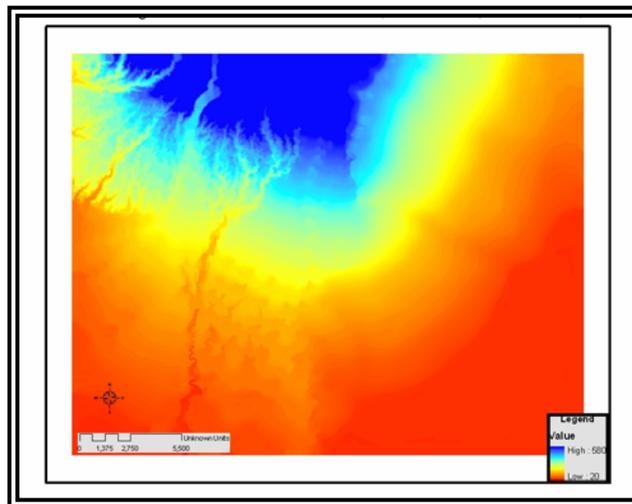


Figura 2.2 Modelo Digital de Elevación de un río, escala 1:50,000, formato GRD

La segunda forma ajustar es a través de las mallas regulares (\*.GRD), este tipo de modelos presentan la ventaja de ocupar mucho menos memoria que los anteriormente descritos, pero con la desventaja que no definen con precisión la configuración topográfica de la zona (figura 2.2). Para la elaboración de los modelos se emplea el Espacial Analyst y el 3D Analyst, extensiones propias del Arc View Gis.

Con los modelos digitales de elevación se procede al cálculo de los perfiles de flujo que se generan ante la presencia de la avenida.

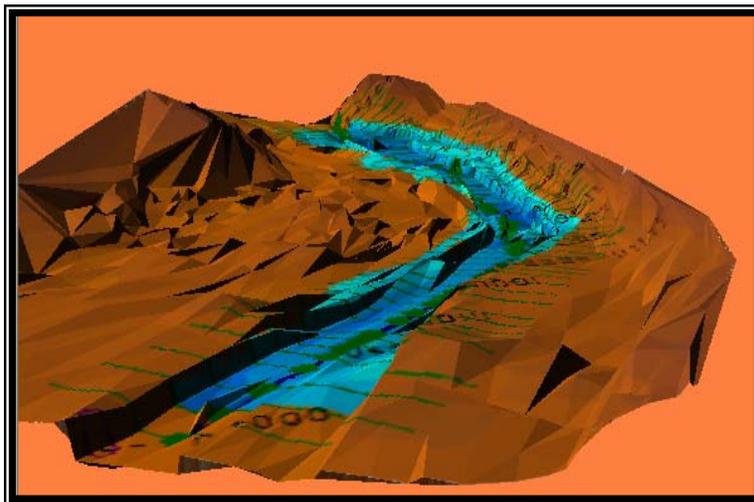


Figura 2.3 Modelo Digital de Elevación de un río, escala 1:1,000, formato TIN.

3.- El método de Sánchez y Fuentes se describe en el capítulo 3.

## 2.1 Ecuaciones empleadas en el tránsito de avenidas en cauces

El flujo en ríos es un fenómeno complicado; sin embargo se debe modelar para resolver distintos tipos de problemas de ingeniería, para ello se emplean las llamadas ecuaciones fundamentales de movimiento.

Las ecuaciones generales de movimiento de los fluidos son las ecuaciones de Navier-Stokes; de las cuales solo tiene solución para unos cuantos casos particulares; no obstante, se pueden establecer ecuaciones simplificadas de manera que describan al flujo no permanente en cauces con una adecuada aproximación.

Existen hipótesis que permiten describir el escurrimiento en cauces, estas son las hipótesis de Saint-Venant las cuales se describen a continuación.

1. El flujo es unidimensional.
2. La curvatura de las líneas de corriente y las aceleraciones verticales son pequeñas.
3. La distribución de presiones es hidrostática.
4. Las leyes de fricción y turbulencia usadas para flujo uniforme permanente son válidas para flujo no permanente.
5. La pendiente del fondo del cauce o canal es pequeña.
6. La densidad del agua es constante.

El flujo no permanente en cauces se describe con dos variables dependientes a lo largo del río, el tirante y gasto. Estas son función de las variables independientes espacio y tiempo.

Para estudiar al flujo no permanente se requieren dos ecuaciones fundamentales que pueden ser la relación *continuidad-cantidad de movimiento* o bien la de *continuidad-energía*.

Cuando las variables son continuas cualquiera de las dos relaciones puede ser utilizada ya que son equivalentes.

Cuando las variables del flujo son discontinuas los resultados que se obtienen al utilizar las dos relaciones son diferentes para este caso, la relación correcta son las ecuaciones *continuidad-cantidad de movimiento*.

La selección de la formulación más adecuada es muy importante pues en ella se basa el desarrollo de los modelos matemáticos y en función de este es el tipo de problemas que podrán resolverse.

Para obtener las ecuaciones fundamentales se toma en cuenta las hipótesis de Saint-Venant descritas anteriormente, su deducción se presenta empezando con la forma general de dichas ecuaciones.

En el apéndice A se presenta la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant.

## 2.2 Ecuación de continuidad usada en tránsito de avenidas hidrológicos

El principio de continuidad, que expresa la conservación de la masa, establece que la masa de fluido que entra a una región del espacio menos la que sale de la misma región es igual al cambio de masa fluida dentro de la región durante el mismo intervalo de tiempo.

La ecuación de continuidad (ecuación A1.11, apéndice A) cuando no existen gastos laterales puede expresarse como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} dx - \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

Se considera que el gasto  $Q$  solamente es función de  $x$  y que le área  $A$  es solamente función de  $t$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = dQ \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dt} \quad (2.3)$$

Si se hace  $A dx = dV$  siendo  $dV$  diferencial de volumen

Es función del tiempo, el área puede ser aproximada por

$$\frac{dV}{dt} = -dQ \quad (2.4)$$

Como  $dQ \approx \Delta Q = O - I$

donde

$I$  es el gasto de entrada al inicio del tramo  $dx$  y  $O$  es el gasto al final del tramo

La ecuación de continuidad queda como

$$\frac{dV}{dt} = I - O \quad (2.5)$$

donde:

- $I$  Gasto de entrada, en  $m^3/s$
- $O$  Gasto de salida, en  $m^3/s$
- $V$  Volumen de almacenamiento, en  $m^3$ ,
- $t$  Tiempo, en s

Por otra parte el cambio en el almacenamiento se tomará como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} \quad (2.6)$$

La ecuación 2.5 se puede expresar en diferencias finitas (Fuentes y Martínez, 1988) como

$$\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} = \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \quad (2.7)$$

donde:

- $\Delta t$  Intervalo de tiempo, en s
- $i, i+1$  Subíndices que representan los valores de las variables en el tiempo  $t = i\Delta t$  y  $t = (i+1)\Delta t$  respectivamente

Como la variable  $I$  que representa al gasto de entrada,  $\Delta t$  es conocida en todo tiempo y de las variables  $O$  y  $V$  se dispone de su valor en  $t = i\Delta t$ ; resulta conveniente escribir la ecuación 2.7 como:

$$I_i + I_{i+1} + \left[ \frac{2V_i}{\Delta t} - O_i \right] = \frac{2V_{i+1}}{\Delta t} - O_{i+1} \quad (2.8)$$

## 2.3 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de impulso y cantidad de movimiento, la cual explica el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, establece que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual a la variación en el tiempo del vector cantidad de movimiento que experimenta dicho cuerpo. La ecuación vectorial de la cantidad de movimiento es

$$F_p + F_r + F_c = \frac{\gamma}{g} \Sigma QV\beta \quad (2.9)$$

Al aplicar la ecuación no se debe olvidar que las fuerzas son externas al volumen de control y toman su signo en función de su proyección, los términos  $\Sigma\beta QV$  se consideran aplicados en dirección normal a las secciones que limitan al volumen de control, cada producto  $\beta QV$  es un vector con la dirección y sentido de  $V$  al pasar la sección que limita al volumen de control, además del signo que le corresponde según la dirección y sentido de  $V$ , cada término de la suma  $\Sigma\beta QV$  deberá afectarse por otro signo; positivo si  $\beta QV$  sale del volumen de control y negativo en caso contrario. En el apéndice A se presenta la deducción de esta ecuación.

La ecuación 2.10 establece la forma diferencial del principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI1 \right) = gA(S_o - S_f) + gI2 \quad (2.10)$$

Eliminando de la ecuación 2.10  $gI1$  que la siguiente expresión

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gA(S_o - S_f) \quad (2.11)$$

A esta expresión se le conoce como ecuación dinámica (ecuación A.2.16, apéndice A)

## CAPITULO 3

# MÉTODOS HIDRÁULICOS

Los métodos hidráulicos para el tránsito de avenidas en cauces se obtiene a partir de las ecuaciones de Saint-Venant, ya que no existe una solución analítica para las ecuación, se utilizan procedimientos numéricos para su solución como son los esquemas de diferencias finitas tanto implícitos como explícitos, el método de las características o el método del elemento finito.

Estos métodos describen en forma precisa el proceso de tránsito tanto en el tiempo como en el espacio pero requieren de información detallada de rugosidades, geometría del cauce, condiciones de frontera y de técnicas numéricas un poco complejas; los principales factores que determinan la selección de un método para realizar un tránsito son los datos disponibles y la información de salida que se requiera, entre los métodos hidráulicos encontramos al siguiente.

### 3.1 Método de Sánchez y Fuentes

Este método considera como flujo unidimensional al movimiento del agua en el cauce natural; se limita al flujo en cauces y a volúmenes de control constantes en el espacio en los que solo se modifica el tirante hidráulico. El modelo matemático resuelve las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre en un cauce natural.

Las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre para cauces no prismáticos se describieron en el capítulo 2 que son la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y la ecuación de continuidad (apéndice A).

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} = B \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = - \left[ \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f \right] \quad (3.2)$$

donde:

- Y Elevación de la superficie del agua respecto a un plano horizontal de referencia (suma del tirante más la cota de plantilla), en m.
- A Área hidráulica, en m<sup>2</sup>

$V$	Velocidad media, en m/s
$B$	Ancho de la superficie libre, en m
$g$	Aceleración de la gravedad, en m/s <sup>2</sup>
$S_f$	Pendiente de la línea de energía, adimensional
$X$	Distancia longitudinal, en m
$T$	Tiempo en s

Para representar en diferencias finitas a las ecuaciones 3.1 y 3.2 se toman en cuenta los volúmenes de control mostrados en la siguiente figura 3.1

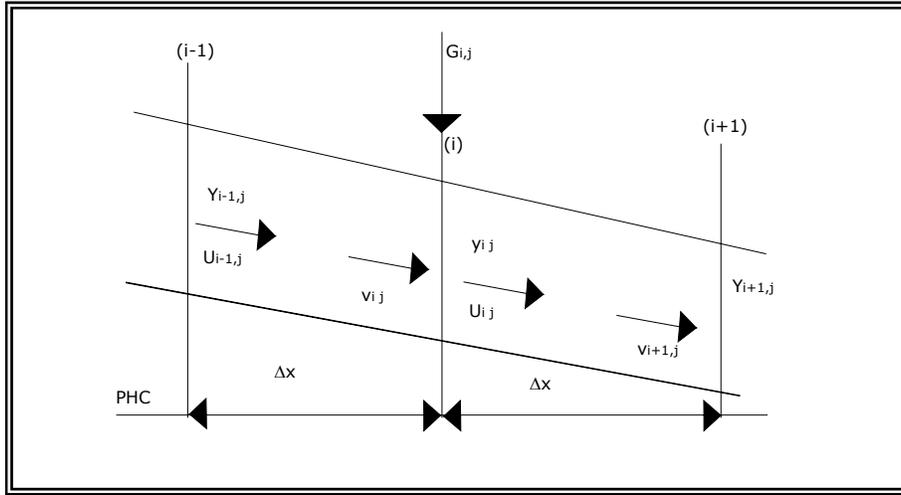


Figura 3.1 Secciones a lo largo del cauce.

Debido a que las elevaciones y velocidades varían con el tiempo y la posición, los distintos términos de las ecuaciones 3.1 y 3.3 se escriben en diferencias finitas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \cong \frac{\theta}{\Delta x_i} (Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x_i} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (3.3)$$

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{V_{i+1,j+1} + U_{i,j+1}}{2g\Delta x_i} (V_{i+1,j} - U_{i,j}) \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \cong \frac{1}{2g\Delta t} [(U_{i,j+1} + V_{i+1,j+1}) - (U_{i,j} + V_{i+1,j})] \quad (3.5)$$

$$S_f \cong \frac{1}{4} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| (U_{i,j+1} + V_{i+1,j+1}) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} \cong \frac{A_{i+1,j}V_{i+1,j+1} - A_{i,j}U_{i,j+1}}{\Delta x_i} \quad (3.7)$$

$$B \frac{\partial Y}{\partial t} \cong \frac{B_{i+1,j} + B_{i,j}}{4\Delta x_i} [(Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1}) - (Y_{i+1,j} + Y_{i,j})] \quad (3.8)$$

donde:

$\theta$  Es un factor de peso que sirve para calcular promedios ponderados en el tiempo con la finalidad de mejorar la aproximación de las derivadas temporales.

Sustituyendo las ecuaciones 3.7 y 3.8 en la ecuación 3.1 y las ecuaciones 3.3 a 3.8 en la 3.3 se obtiene:

$$A_{i,j}U_{i,j+1} - A_{i+1,j}V_{i+1,j+1} = F_{i,j} (Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1} - Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (3.9)$$

$$C_{i,j}U_{i,j+1} - C_{i,j}V_{i+1,j+1} = Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j+1} + D_{i,j} \quad (3.10)$$

donde:

$$F_{i,j} = \frac{\Delta x_i}{4\Delta t} (B_{i+1,j} + B_{i,j}) \quad (3.11)$$

$$C_{i,j} = \frac{U_{i,j} - V_{i+1,j}}{2g\theta} - \frac{\Delta x_i}{2g\theta\Delta t} - \frac{\Delta x_i}{4\theta} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| \quad (3.13)$$

$$D_{i,j} = \frac{1-\theta}{\theta} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) - \frac{\Delta x_i}{2g\theta\Delta t} (U_{i,j} + V_{i,j}) \quad (3.13)$$

Las ecuaciones 3.9 y 3.10 forman un sistema lineal no homogéneo en  $U_{i,j+1}$  y  $V_{i+1,j+1}$  cuya solución se escribe como:

$$U_{i,j+1} = P_{i,j}Y_{i+1,j+1} + Q_{i,j}Y_{i,j+1} + R_{i,j} \quad (3.14)$$

$$V_{i,j+1} = S_{i,j}Y_{i+1,j+1} + T_{i,j}Y_{i,j+1} + W_{i,j} \quad (3.15)$$

En estas expresiones:

$$P_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} + \frac{A_{i+1}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.16)$$

$$Q_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} + \frac{A_{i+1,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.17)$$

$$R_{i,j} = \frac{D_{i,j}A_{i+1,j}}{C_{i,j} + (A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}(Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.18)$$

$$S_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}}{(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.19)$$

$$T_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{C_{i,j}A_{i,j} + A_{i+1,j}} + \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (3.30)$$

$$W_{i,j} = \frac{D_{i,j}A_{i+1,j}}{C_{i,j} + (A_{i,j} + A_{i+1,j})} + \frac{F_{i,j}(Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.31)$$

Cuando la relación de continuidad se establece en la sección  $i$  (figura 3.1), se obtiene:

$$A_{i,j}U_{i,j+1} + \theta G_{i,j+1} + (1-\theta)G_{i,j} = A_{i,j}V_{i+1,j+1} \quad (3.33)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.16 y 3.17 en la 3.33 se obtiene la ecuación:

$$T_{i-j}Y_{i,j-1} + (Q_{i,j} - S_{i-1,j})Y_{i,j+1} + P_{i,j}Y_{i+1,j+1} = W_{i-1,j} - R_{i,j} + \frac{1}{A_{i,j}}(\theta G_{i,j+1} + (1-\theta)G_{i,j}) \quad (3.33)$$

Esta ecuación se plantea en las secciones intermedias. Cuando el flujo es subcrítico el número de Froude es menor que uno, se requiere una ecuación adicional en cada uno de los extremos del río.

La ecuación 3.33 junto con las de las secciones correspondientes a sus extremos, forman un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal, cuyas incógnitas son las elevaciones  $Y_i$  en la etapa de cálculo  $j+1$ . Una vez obtenidas las elevaciones, las velocidades de llegada ( $V_{i,j+1}$ ) y de partida ( $U_{i,j+1}$ ) se calculan las ecuaciones 3.14 y 3.15.

En las secciones inicial y final deben fijarse las condiciones de frontera, las cuales se determinan de acuerdo con el problema en estudio. Por ejemplo, para el caso particular de flujo subcrítico la condición de frontera aguas arriba se obtiene de la manera siguiente:

En la primera sección ( $i=1$ ) propone como condición que el gasto de ingreso es conocido de modo que el gasto ( $G_1$ ) promedio es igual al de salida  $A_{1,j}U_{1,j+1}$  esto es:

$$Q_{i,j}Y_{1,j} + P_{i,j}Y_{1,j} = -R_{1,j} + \frac{1}{A_{i,j}}(\theta G_{i,j+1} + (1-\theta)G_{i,j}) \quad (3.34)$$

Como condición de frontera aguas abajo se considera una elevación de la superficie libre conocida, sea  $Y_{f1}$ , las velocidades del último tramo son las siguientes.

$$U_{M-1,j+1} = P_{M-1,j}Y_F + Q_{M-1,j}Y_{M-1,j} + R_{M-1,j} \quad (3.35)$$

$$V_{M-1,j+1} = S_{M-2}Y_{M-1,j+1} - T_{M-2,j}Y_{M-2,j+1} + W_{M-2,j} \quad (3.36)$$

Sí proponemos la ecuación de continuidad en la penúltima sección ( $i=M-1$ ) se tiene:

$$3T_{M-2,j}Y_{M-2,j+1} + (Q_{M-1,j} - S_{M-2,j})Y_{M-1,j} = W_{M-2,j} - R_{M-1,j} - \frac{1}{A_{M-1}}[\theta G_{M-1,j+1} + (1-\theta)G_{M-1,j}] - P_{M-1,j}Y_F \quad (3.37)$$

Para asegurara que la descarga de esta sección sea con una elevación del agua mayor o igual a la mínima, la asociada al tirante crítico  $y_{cj}$  para el instante  $j$  se emplea la siguiente ecuación.

$$\frac{A_{cj}}{B_{cj}} = \frac{V_{Mj}}{g} \quad (3.38)$$

donde:

- $A_{cj}$  área correspondiente al tirante crítico, en  $m^3$
- $B_{cj}$  ancho de la superficie libre correspondiente al tirante crítico, en m
- $V_{mj}$  velocidad de entrada m/s en la sección  $M$  para el instante  $j$

$Y_F$  queda definido de la siguiente manera.

$$Y_F = \begin{cases} y_f + Z_F & \text{sí } y_F > y_{cj} \\ y_{cj} + Z_F & \text{sí } y_F \leq y_{cj} \end{cases} \quad (3.39)$$

---



---

donde :

$Z_F$  Elevación del fondo de la sección  $i=M$ , en m

$Y_F$  Es el tirante conocido de la sección, en m

El cálculo se lleva a cabo de la siguiente manera:

Para obtener las elevaciones del agua en la etapa de cálculo se forma un sistema de ecuaciones lineales, en la cual se deben considerar los siguientes puntos:

1. Sección aguas arriba del tramo en estudio ( $i=1$ ), se debe utilizar la ecuación de condición de frontera aguas arriba, es la ecuación 3.34.
2. Para la secciones intermedias ( $i=1,3,\dots,L-1$ ), se utiliza la ecuación 3.33.
3. Secciones aguas abajo del tramo ( $i+1=L$ ) se toma en cuenta la condición de frontera aguas abajo, ecuación 3.37.
4. Las ecuaciones que se obtiene en los incisos a, b y c forman un sistema de  $M-1$  ecuaciones lineales tridiagonal, cuyas incógnitas son las elevaciones  $Y_{i,j+1}$  (para  $i=1,3,\dots,M-1$ ).
5. Una vez resuelto el sistema, las velocidades de llegada ( $V_{i,j+1}$ ) y de partida ( $U_{i,j+1}$ ) se determinan a partir de las elevaciones  $Y_{i,j+1}$  utilizando las ecuaciones 3.14 y 3.15.

Una de las ventajas del esquema Sánchez-Fuentes es que permite definir el comportamiento del cauce en la parte final, al existir una condición de frontera en la extremo de aguas abajo. Además permite representar de mejor forma condiciones de frontera y considerar la posibilidad de transitar simultáneamente los afluentes y el cauce principal, logrando tener una simulación cercana a la realidad.

En el capítulo 5 se presenta un ejemplo y el anexo B se incluye un listado del programa de cómputo en QBasic de este método.

## CAPITULO 4

# MÉTODOS HIDROLÓGICOS

Cuando en un tramo de un cauce se presenta una onda de avenida, los hidrogramas a su inicio (entrada) y al final (salida) de un tramo, puede ser como se muestra en la figura 4.1.

Se supone que la pérdida o ingreso de agua a lo largo del tramo en estudio son despreciables. Cuando las corrientes naturales tienen una gran resistencia y capacidad de almacenamiento altas; la onda de avenida se modifica de manera significativa.

En la figura 4.1 se muestra el pico de la creciente que se disminuye y demora. Según la ecuación 2.5, la diferencia entre las ordenadas de los hidrogramas de flujo de entrada y de salida, representada por las áreas sombreadas en la figura 4.1 es igual a la tasa de almacenamiento en el tramo

$$\frac{dV}{dt} = I - O \quad (4.1)$$

donde:

- $\frac{dV}{dt}$  Es el cambio en el almacenamiento durante el periodo  $\Delta t$   
 $I$  Es el flujo de entrada promedio durante  $\Delta t$   
 $O$  Es el flujo de salida promedio durante  $\Delta t$

El valor de  $\frac{dV}{dt}$  es positivo cuando el almacenamiento aumenta, y negativo cuando disminuye.

Esta ecuación que es la de continuidad constituye la base para un procedimiento hidrológico de tránsito en el cual  $dt$  se conoce como periodo de tránsito.

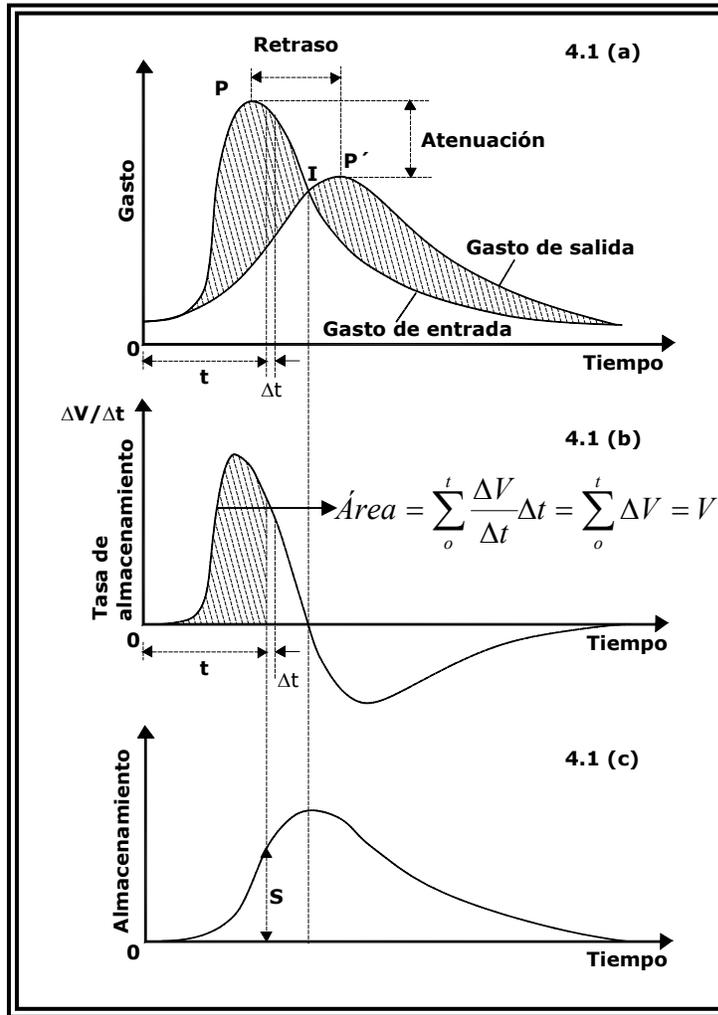


Figura 4.1. Relación entre el gasto de entrada y de salida así, como el almacenamiento de un tramo de un canal al presentarse una avenida.

La tasa de almacenamiento puede dibujarse contra el tiempo, como se muestra en la figura 4.1 b, en la cual puede verse que el almacenamiento aumenta antes del momento para el cual el flujo de entrada es igual al de salida y decrece a partir de ese momento. El área acumulada por debajo de la curva de almacenamiento-tasa representa el volumen de almacenamiento en un tiempo  $t$  después del inicio de la crecida.

Al dibujar la relación entre este volumen con respecto al tiempo puede obtenerse una curva de almacenamiento-volumen, como se muestra en la figura 4.1 c, esta curva tiene un pico que representa el máximo volumen de almacenamiento, el cual ocurre cuando el flujo de entrada es igual al de salida.

Si el almacenamiento se relaciona contra el gasto de salida se tendrá una curva que tomará la forma de un lazo, como el que se muestra en la figura 4.2, según la cual el almacenamiento para un gasto determinado en la parte ascendente o decreciente de la crecida será mayor o menor que el

almacenamiento correspondiente a la condición de flujo permanente  $\left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0\right)$ , para el cual la relación almacenamiento - gasto de salida se representa mediante la curva punteada, que está casi en la posición media de las dos ramas del lazo.

El almacenamiento en un tramo del cauce para flujo no permanente  $\left(\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0\right)$ , depende o esta en función de los gastos de entrada y de salida y también de las características geométricas e hidráulicas del cauce y sus estructuras de control.

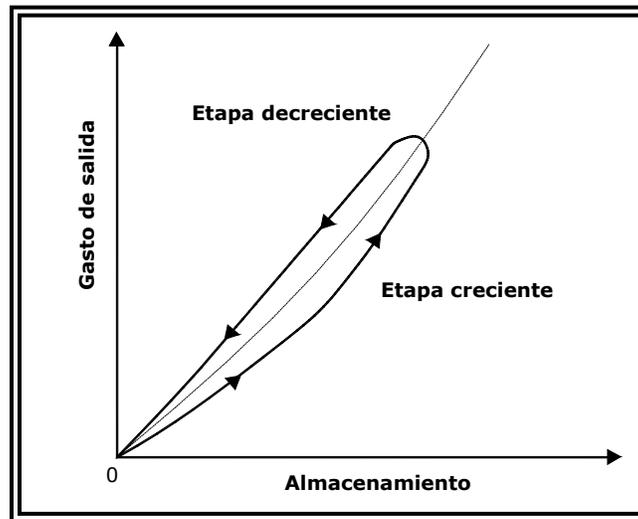


Figura 4.2. Relación almacenamiento-gasto de salida.

La aproximación hidrológica al problema del tránsito de una avenida se basa en la relación almacenamiento-gasto descrita anteriormente, se supone que los efectos dinámicos del flujo son insignificantes y que el almacenamiento es una función valuada del gasto, esta suposición implica que el flujo cambia muy lentamente con respecto al tiempo, por consiguiente, los efectos debidos a pendientes superficiales anormales, que modifican el gasto y cambian el almacenamiento en el tramo del un río, son insignificantes.

Este procedimiento es aproximadamente correcto para corrientes ordinarias con pendientes pequeñas, cuando se dibuja el almacenamiento contra el gasto, el lazo resultante a menudo es angosto y puede ajustarse una curva promedio para representar el almacenamiento como una función valuada del gasto; si el lazo es ancho, puede reproducirse mediante una relación de línea única utilizando un ajuste como el que se utiliza en el método de Muskingum, en el cual el ajuste es posible si varían los valores de  $K$  y  $X$ .

Las corrientes que tengan pendientes empinadas, los efectos dinámicos del flujo son pronunciados y no pueden ignorarse, en consecuencia, el método hidrológico para el tránsito de avenidas para este tipo de corrientes puede no ser satisfactorio.

En este trabajo de se describen 3 métodos que se utilizan en la práctica que son:

- Método de la Onda Cinemática
- Método de Muskingum
- Método de Muskingum-Cunge

#### 4.1 Ecuación de la onda cinemática

La derivación de la ecuación de la onda cinemática se basa en el principio de conservación de masa dentro de un volumen de control, este principio se basa en la diferencia que hay entre el gasto de salida y el gasto de entrada en un intervalo de tiempo y es equilibrado por un correspondiente cambio en volumen.

En forma diferencial la ecuación A.1.11 puede escribirse como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.3)$$

En términos de diferencias finitas se puede escribir así

$$(Q_2 - Q_1)\Delta t + (A_2 - A_1)\Delta x = 0 \quad (4.2)$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (ecuación A.2.12) contiene la inercia local, inercia convectiva, gradiente de presión (debido al gradiente del tirante hidráulico), fricción (pendiente de fricción) y la gravedad.

$$\left(\frac{1}{g}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u}{g}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} + S_f - S_o + \frac{iu}{gh} = 0 \quad (4.4)$$

En la derivación de la ecuación de la onda cinemática se desprecian los términos  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  y queda  $S_f = S_o$  llegando a una condición. Por lo tanto en flujo uniforme es estrictamente un equilibrio de la fricción y gravedad y son excluidos de la fórmula de la onda cinemática la inercia local y convectiva y gradiente de presión.

En otras palabras una onda cinemática es una onda simplificada que no incluye estos términos y procesos.

En canales abiertos el flujo uniforme se describe por la ecuación de Manning o la de Chezy.

La ecuación de Manning es

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S_f^{1/2} \quad (4.5)$$

La ecuación de Chezy es

$$Q = CAR^{1/2} S_f^{1/2} \quad (4.6)$$

Nótese que en flujo no uniforme, la pendiente de fricción es usada en las ecuaciones 4.5 y 4.6 en lugar de la pendiente del canal.

El radio hidráulico está dado

$$R = \frac{A}{P} \quad (4.7)$$

donde

$R$  es el radio hidráulico  
 $A$  área hidráulica  
 $P$  perímetro mojado

Sustituyendo  $R$  en la ecuación 4.5 se tiene que

$$Q = \frac{1}{n} \frac{S_f^{1/2}}{P^{2/3}} A^{5/3} \quad (4.8)$$

Asumiendo las simplificaciones que  $n$ ,  $S_f$  y  $P$  son constantes, esto puede ser el caso de un canal ancho en donde  $P$  se asume que es independiente del área hidráulica. La ecuación 4.8 puede escribirse como

$$Q = \alpha A^\beta \quad (4.9)$$

donde

$\beta$  y  $\alpha$  son parámetros de la relación descarga-área definidos como

$$\alpha = \frac{1}{n} \frac{S_f^{1/2}}{P^{2/3}} \quad (4.10)$$

$$\beta = \frac{5}{3} \quad (4.11)$$

en la ecuación 4.9 se deriva  $Q$  con respecto al área

$$\frac{dQ}{dA} = \beta \frac{Q}{A} = \beta V \quad (4.12)$$

donde

$V$  es la velocidad media del flujo

Multiplicando las ecuaciones 4.3 y 4.12, aplicando la regla de la cadena, la ecuación de la onda cinemática se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left( \frac{dQ}{dA} \right) \frac{\partial Q}{\partial A} = 0 \quad (4.13)$$

o, de esta manera

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + (\beta V) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0} \quad (4.14)$$

La ecuación 4.13 o 4.14 describen el movimiento de ondas cinemáticas en la naturaleza. Ondas en las que el gradiente de presión y la inercia pueden ser despreciadas.

La ecuación 4.13 es una ecuación diferencial de primer orden, por lo que las ondas cinemáticas viajan con una celeridad de onda  $\frac{dQ}{dA}$  o  $(\beta V)$  y estas no se atenúan.

La atenuación de la onda solo puede ser descrita por ecuaciones diferenciales de segundo orden.

La ausencia de la atenuación de la onda puede ser explicada recurriendo a algunos argumentos matemáticos.

donde

$\frac{dQ}{dA}$  Es la celeridad del flujo no permanente

$Q$ , puede remplazarse por  $dx/dt$  por lo que en la ecuación 4.13 es la ecuación de aplicación, queda:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \left( \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.15)$$

que es igual a la derivada total  $dQ/dt$  donde el lado derecho de la ecuación 4.13 es cero, para los siguientes gastos  $Q$  en tiempos constantes para el tránsito de la onda con una celeridad  $dQ/dA$ .

### 4.1.1 Discretización de la ecuación de la onda cinemática

La ecuación 4.13 o 4.14 es una ecuación diferencial parcial no-lineal de primer orden la cual describe el cambio en el tiempo y espacio de la descarga  $Q$ . esta es no-lineal debido a que la celeridad de la onda  $\beta v$  (o  $dQ/dA$ ) varia con la descarga. La no-linealidad, sin embargo usualmente es y por lo tanto la ecuación 4.14 puede también ser resuelta en un modo lineal considerando que la celeridad de la onda es constante.

La solución de la ecuación 4.14 se puede obtener a través de métodos analíticos o numéricos, siendo la solución numérica lineal la más sencilla. Para este propósito, es necesario solucionar un esquema numérico en el cual se discretice la ecuación 4.14 en el plano  $xt$  (figura 4.3).

### Orden de exactitud de los esquemas numéricos

El orden de precisión de un esquema numérico mide la habilidad del esquema para representar las condiciones de la ecuación diferencial. En general, el orden superior de exactitud del esquema es el que mejor sea capaz de reproducir las cualidades de la ecuación diferencial. Las diferencias finitas hacia delante y hacia atrás tienen una aproximación de primer orden, discretización de primer orden de error. Las diferencias centrales tienen una exactitud de segundo orden con discretización de segundo orden de error.

En conexión con la solución numérica de la ecuación 4.14, los esquemas de primer-orden crean difusión y dispersión numérica, mientras que los esquemas de segundo-orden crean únicamente dispersión numérica. Un esquema de tercer-orden no crea ni dispersión y difusión numérica. La difusión y la dispersión son causadas por el tamaño de la malla y no necesariamente están relacionadas al problema físico.

El esquema numérico de segundo orden de aproximación, la discretización de la ecuación 4.14 siguiendo un esquema lineal de segundo orden (usando diferencias central en espacio y tiempo), (figura 4.4).

$$\frac{(Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1})}{2} - \frac{(Q_{i+1}^n + Q_i^n)}{2} + \beta V \frac{(Q_{i+1}^n - Q_i^{n+1})}{2} - \frac{(Q_i^n - Q_i^{n+1})}{2} = 0 \quad (4.16)$$

donde:

$\beta V$  ha sido considerando constante (modo lineal), lo que lleva a:

$$Q_{i+1}^{n+1} = C_0 Q_i^{n+1} + C_1 Q_i^n + C_2 Q_{i+1}^n \quad (4.17)$$

en donde

$$C_0 = \frac{C-1}{1+C} \quad (4.18)$$

$$C_1 = 1 \quad (4.19)$$

$$C_2 = \frac{1-C}{1+C} \quad (4.20)$$

donde:

C es numero de Courant, definido como:

$$C = \beta V \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.21)$$

El número de Courant es la proporción física de la celeridad de la onda  $\beta V$  con la celeridad de la malla  $\Delta x/\Delta t$ . El número de Courant es un concepto fundamental en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas.

## 4.2 Método de Muskingum

El método de Muskingum para el tránsito de avenidas se desarrolló en el año de 1930 cuando se realizaba un proyecto de protección contra inundaciones en la cuenca del río Muskingum, Ohio.

Este método es el más usado en el tránsito hidrológico en canales, se ha realizado numerosas aplicaciones en los Estados Unidos y en casi todo el mundo.

El método de Muskingum se basa en la ecuación diferencial de almacenamiento ecuación 2.5 en lo siguiente se usa S en lugar de V.

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (4.22)$$

En un canal el almacenamiento esta en función del gasto de entrada y del gasto de salida. Esto esta en contraste con un embalse ideal, en el cual el almacenamiento solamente es función del gasto de salida. En el método de Muskingum, el almacenamiento es una función lineal del flujo de entrada y de salida:

$$S = K[XI + (1-X)O] \quad (4.23)$$

donde:

S Volumen de almacenamiento en m<sup>3</sup>/s

$I$	Gasto de entrada en m <sup>3</sup> /s
$O$	Gasto de salida en m <sup>3</sup> /s
$K$	Es una constante de tiempo o coeficiente de almacenamiento en $h$
$X$	Factor de peso, adimensional

La ecuación 4.23 fue desarrollada en 1938 y ha sido la más usada desde entonces. Es esencialmente una generalización del concepto de almacenamiento lineal.

Los parámetros  $K$  y  $X$  para el tránsito de avenidas, se relacionan las características del flujo y del cauce.

Para derivar la ecuación 4.22 para el tránsito de Muskingum es discretizada en el plano  $xt$ , como se muestra en la siguiente ecuación

$$\frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{O_1 + O_2}{2} = \frac{S_2 - S_1}{2} \quad (4.24)$$

La ecuación 4.23 es expresada en intervalos de tiempo 1 y 2

$$S_1 = K[XI_1 + (1 - X)O_1] \quad (4.25)$$

$$S_2 = K[XI_2 + (1 - X)O_2] \quad (4.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.24 y 4.26 en la ecuación 4.25 y resolviendo para  $O_2$  se obtiene

$$O_2 = C_0I_2 + C_1I_1 + C_2O_1 \quad (4.27)$$

Siendo  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  los coeficientes de tránsito definidos en términos de  $\Delta t$ ,  $K$  y  $X$  como siguientes ecuaciones.

$$C_0 = \frac{(\Delta t / K) - 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.28)$$

$$C_1 = \frac{(\Delta t / K) + 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.29)$$

$$C_2 = \frac{2(1 - X) - (\Delta t / K)}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.30)$$

Siendo  $(C_0 + C_1 + C_2) = 1$ , los coeficientes de tránsito pueden ser interpretados como coeficiente de peso.

El parámetro  $K$  se interpreta como el tiempo de viaje de la onda de flujo aguas arriba y hacia aguas abajo del cauce, por lo tanto  $K$  se considera parte de la interpretación o concertación del tránsito.

El parámetro  $X$  se considera parte del almacenamiento en el tránsito, para un evento de flujo dado, el efecto de almacenamiento es reducir el flujo máximo y extender el tiempo base del hidrograma, por consiguiente se usa como un difusor y para atenuar las características del hidrograma al final de tramo de río; está en función del flujo y de las características del cauce que causan la difusión del escurrimiento.

En el método de Muskingum,  $X$  se interpreta como un factor de peso y se restringe en un rango de 0 a 0.5. Cuando los valores de  $X$  son más grandes que 0.5 esto produce una ampliación en el hidrograma (difusión negativa), que no corresponde a la realidad.

Con  $K = \Delta t$  y  $X = 0.5$  las condiciones de flujo son tales que el hidrograma de salida tiene la misma forma que el hidrograma de entrada, pero este es trasladado aguas abajo en un tiempo igual a  $K$  para  $X=0$ ; por lo que el tránsito con el método de Muskingum se reduce a un tránsito lineal de almacenamiento.

En el método de Muskingum los parámetros  $K$  y  $X$  son determinados por una calibración usando registros de escurrimientos.

Para un tramo de canal dado se requerirán hidrogramas simultáneos medidos de entrada y de salida, para lo cual se procederá a realizar una calibración prueba-error. Los valores de  $K$  y  $X$  determinados con este procedimiento son válidos únicamente para un tramo de río y un evento de escurrimiento usado en la calibración.

Para otros tramos de río o para otros eventos de escurrimiento (de diferentes magnitudes), en el mismo tramo de río; los parámetros determinados no son válidos.

### 4.3 Método de Muskingum - Cunge

Es una variable del método de Muskingum que permite incorporar gastos laterales (entrada o salida) o conocer los hidrogramas en varias secciones transversales. En el apéndice B se deduce las ecuaciones de este método.

Se basa en las ecuaciones de continuidad (A.1.11).

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = qL \quad (4.31)$$

Y en la ecuación de conservación de movimiento (A.2.16) cuando se desprecian  $\frac{v}{g} \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$  o sea en

$$S_f = S_o - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.32)$$

Combinando las ecuaciones 4.31 y 4.32 se llega a la expresión de Miller y Cunge (B.38).

$$\mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + CqL = \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4.33)$$

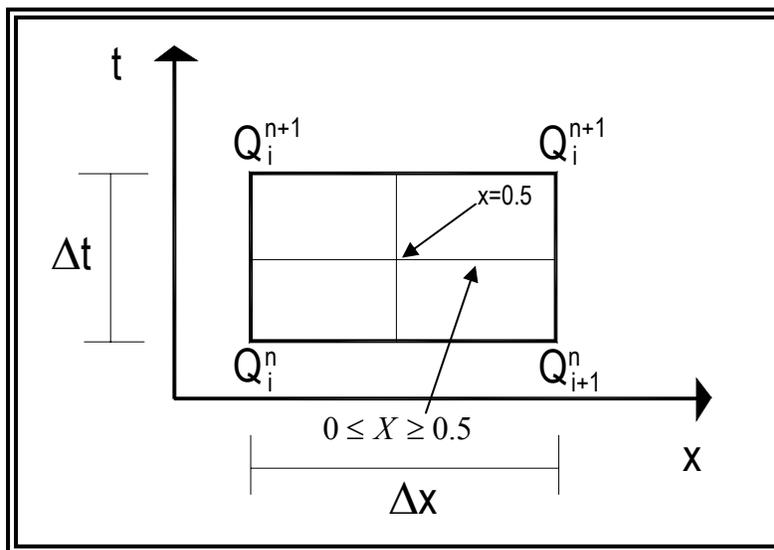


Figura 4.3 Discretización espacio-tiempo empleada en el método de Muskingum - Cunge.

En el apéndice B se demuestra que la ecuación 4.33 puede ser resuelta en forma aproximada por la siguiente ecuación de diferencias finitas.

Los coeficientes de tránsito son:

$$C_0 = \frac{(\Delta t / K) - 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.34)$$

$$C_1 = \frac{(\Delta t / K) + 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.35)$$

$$C_2 = \frac{2(1 - X) - (\Delta t / K)}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.36)$$

$$C_3 = \frac{2(\Delta t / K)}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (4.37)$$

Como se puede ver, las ecuaciones 4.34 a 4.36 son las mismas que las utilizadas en el método de Muskingum.

Se puede observar que para  $X=0.5$ , la ecuación 4.34 a 4.36 que son los coeficientes del tránsito, se reducen a la solución de la ecuación lineal de la onda cinemática de segundo orden.

Para  $X=0.5$  y  $C=1$

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} = \beta V \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.38)$$

Que es el número de Courant

La ecuación de tránsito es de tercer orden de aproximación, esto es, la solución numérica es igual a la solución analítica de la ecuación de la onda cinemática.

Para  $X=0.5$   $C \neq 1$ , esta es de segundo orden de precisión, presentándose únicamente dispersión numérica.

Para  $X < 0.5$  y  $C \neq 1$  ésta es de primer orden presentándose tanto la difusión como la dispersión numérica.

Para  $X < 0.5$  y  $C=1$ ; ésta es de primer orden, presentándose únicamente difusión numérica.

Esta relación se resume en la siguiente tabla.

Parámetro X	Parámetro C	Orden de precisión	Difusión numérica	Dispersión numérica
0.5	1	3	No	No
0.5	$\neq 1$	2	No	Si
<0.5	$\neq 1$	1	Si	Si
<0.5	1	1	Si	No

Tabla 4.1 Propiedades numéricas del Muskingum -Cunge

En la práctica, la difusión numérica puede ser usada para simular la difusión física del actual hidrograma. Expandiendo la función discreta  $Q(j\Delta x, n\Delta x)$  en series de Taylor mediante una malla de puntos  $(j\Delta x, n\Delta x)$ , el coeficiente de la difusión numérica del esquema de Muskingum es derivado. (ecuación B.58).

$$\nu = c\Delta x \left( \frac{1}{2} - x \right) \quad (4.39)$$

donde

$\nu$  Es coeficiente de difusión numérico del esquema del Muskingum.

Esta ecuación revela lo siguiente:

- 1.- Para  $X=0.5$  no hay difusión numérica a pesar de que hay dispersión numérica para  $C \neq 1$ .
- 2.- Para  $X>0.5$ , el coeficiente de difusión numérica es negativo esto es, amplificación numérica, el cual explica el comportamiento del método de Muskingum para este rango de valor de  $X$ .
- 3.- para  $\Delta x=0$ , el coeficiente de difusión es cero, que es un caso trivial.

Una ecuación para  $X$  puede obtenerse igualando la difusibilidad hidráulica (Sí en B.39 se considera  $S_0 = S_f$ ).

$$\nu = \frac{Q_0}{2TS_0} = \frac{q_0}{2S_0} \quad (4.40)$$

Resultando la siguiente expresión para  $X$

$$X = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{q_0}{S_0 c \Delta x} \right) \quad (4.41)$$

Con  $X$  calculada por la ecuación 4.39, el método de Muskingum es llamado como *Método de Muskingum-Cunge*. Usando la ecuación 4.41, el parámetro de tránsito  $X$  puede ser calculado como una función de las siguientes propiedades físicas y numéricas.

- a) Longitud del tramo de río,  $\Delta x$
- b) Descarga por unidad de ancho del canal,  $q_0$
- c) Celeridad de onda cinemática,  $c$
- d) Pendiente del fondo del canal,  $S_0$

En la ecuación 4.41 se observa que fue derivada igualando la difusión física y numérica y no se calcula por dispersión. Por lo tanto, el orden de simulación de la onda de difusión propiamente con el método de Muskingum-Cunge, es necesario optimizar la difusión numérica con la ecuación 4.41, mientras se minimiza la dispersión numérica (manteniendo el valor de  $C$  cercano a 1).

Una única característica del método de Muskingum-Cunge, es la independencia de la malla del hidrograma de salida calculado, la cual establece separadamente de otra solución lineal de la onda cinemática resultando la difusión y dispersión numérica no controlada (método convexo).

Si la dispersión numérica se minimiza, el flujo de salida calculado aguas abajo del tramo del canal deberá ser esencialmente el mismo, independientemente de cuantas secciones sean empleadas en el cálculo. Esto es porque  $X$  es función de  $\Delta x$  y los coeficientes del tránsito  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  varían con la longitud del río.

El valor de  $C$  es el número de Courant

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.42)$$

La malla de difusibilidad es definida como la difusibilidad numérica para el caso de  $X=0$  de la ecuación 4.38. La malla de difusibilidad es

$$v_g = \frac{c\Delta x}{2} \quad (4.43.)$$

Si en la ecuación 4.41 se considera

$$D = \frac{q_0}{S_0 c \Delta x} \quad (4.44)$$

Se tiene

$$X = \frac{1}{2}(1 - D) \quad (4.45)$$

Las ecuación 4.44 y 4.45 significan que para valores muy pequeños de  $\Delta x$ ,  $D$  puede ser mayor que 1, resultando valores negativos de  $X$ , de hecho, para las características de longitud de sección

$$\Delta x_c = \frac{q_0}{S_0 c} \quad (4.46)$$

La celda de número de Reynolds es  $D=1$  y  $X=0$ , por lo tanto en el método de Muskingum-Cunge, en tramos de longitud más cortos los valores de  $X$  serán negativos. Esto se contrasta con el método clásico de Muskingum, en el cual  $X$  es restringido en un rango de 0 - 0.5.

En el clásico método de Muskingum-Cunge; sin embargo,  $X$  es interpretado en un momento correspondiente de congruencia o como un factor de correspondencia de difusión. Por lo tanto los valores negativos de  $X$  son completamente posibles. Esta característica permite el uso de tramos cortos, que podrían hacer posible si  $X$  fuera restringido a valores negativos.

La sustitución de las ecuaciones 4.42 y 4.45 en las ecuaciones 4.34 a la 4.37 conducen a las expresiones de los coeficientes de tránsito en términos de Courant y en número de celdas de Reynolds.

$$C_0 = \frac{-1 + C + D}{1 + C + D} \quad (4.47)$$

$$C_1 = \frac{1 + C - D}{1 + C + D} \quad (4.48)$$

$$C_2 = \frac{1 - C + D}{1 + C + D} \quad (4.49)$$

$$C_3 = \frac{2C}{1 + C + D} \quad (4.50)$$

El cálculo de los parámetros de escurrimiento  $C$  y  $D$  ecuaciones 4.42 y 4.44 pueden ser mostradas de diversas formas. La celeridad de onda puede ser calculada por

$$c = \beta V \quad (4.51)$$

o por

$$c = \left( \frac{1}{T} \right) \frac{dq}{dy} \quad (4.52)$$

Teóricamente estas dos ecuaciones son las mismas.

Para la aplicación práctica, si una curva elevación–descarga y la geometría de una sección transversal están disponibles, la ecuación 4.45 se utiliza en lugar la ecuación 4.44, ya que la ecuación 4.45 cuenta directamente con la forma de la sección transversal.

En la ausencia de la curva elevación-descarga y datos de la sección transversal, la ecuación 4.44 puede ser empleada para estimar la celeridad del hidrograma.

Con la ayuda de las ecuaciones 4.42 y 4.44, los parámetros de tránsito puede ser basados con las características del flujo. Los cálculos puede proceder de forma lineal y no lineal, en el modo lineal los parámetros del tránsito se basan en referencia de los valores del flujo y mantienen a lo largo un constante tiempo de cálculo.

La selección de la referencia del flujo lleva a aplicaciones prácticas, cualquier parámetro o valores de gasto pico pueden ser usadas como flujo de referencia. Los valores de gasto pico tiene la desventaja de que pueden ser rápidamente determinados, aunque una mejor aproximación puede ser obtenida empleando un valor promedio.

El modo lineal de cálculo es referido como un parámetro-constante del método de Muskingum-Cunge, distinguido de un parámetro-variable del método de Muskingum-Cunge, en el cual los parámetros de tránsito pueden variar con el flujo. El método de parámetro-constante es parecido al método de Muskingum, con la diferencia de que los parámetros de tránsito están basados en mediciones de gasto y características del canal en lugar de datos históricos de flujo.

### 4.3.1 Requerimientos de solución

Cuando se usa el método de Muskingum-Cunge, se debe tomar con cuidado para garantizar que los valores de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  sean lo suficientemente pequeños para aproximarlos a la forma del hidrograma

Para suavizar el ascenso de los hidrogramas se recomienda utilizar un valor mínimo

$$\frac{t_p}{\Delta t} = 5 \quad (4.53)$$

Esta condición usualmente resulta en hidrogramas en donde el tiempo base esta discretizado en al menos de 15 a 25 puntos, considerados adecuados para el tránsito de Muskingum.

A diferencia de la resolución temporal  $\Delta t$ , no se ha definido un criterio para la resolución espacial  $\Delta x$ . Un criterio se da a conocer por la experiencia en base de los números de Courant y celdas de Reynolds.

En la literatura se encuentran métodos para obtener la resolución espacial como los propuestos por Koussis, así como el de Weinmann y Laureson. En este trabajo se emplea el criterio de precisión para la resolución espacial propuesta por Ponce y Theurer (*Journal del ASCE Junio de 1982, pp 747-757*)

Ellos llevaron acabo un análisis de difusión de Muskingum. Los experimentos numéricos que realizaron fueron de forma sencilla lo que esto hizo que establecieran un criterio del límite superior de los intervalos espaciales ( $\Delta x$ ) para conservar la precisión. Con la experiencia computacional mostraron que para calcular valores grandes en los intervalos espaciales ( $\Delta x$ ), hay una tendencia de gastos negativos.

Los resultados que obtuvieron de los experimentos numéricos indican que para la condición  $C_2 \geq \xi$  la precisión se conserva en donde  $C_2$  es uno de los coeficientes de tránsito y  $\xi$  es un número real.

Esto lleva a un límite superior para  $\Delta x$  que esta representado por la siguiente ecuación

$$\Delta x \leq \frac{1}{k} (\Delta x_C + \Delta x_D) \quad (4.54)$$

En la aplicación practica se recomienda usar un valor de  $\xi=0.33$  para el cual  $K=2$ , las cantidades de  $\Delta x_C$  y  $\Delta x_D$  son definidas en términos de las características del canal y de la cuadrícula (malla).

donde

$$\Delta x_C = c\Delta t \quad (4.55)$$

Siendo  $c$  la celeridad de onda,  $\Delta t$  es el intervalo temporal.

Por otro lado

$$\Delta x_C = \frac{Q}{BS_0 c} \quad (4.56)$$

donde

- $Q$  gasto de flujo en  $m^3/s$
- $B$  Ancho del canal en  $m$
- $C$  Celeridad en  $m/s$

Sustituyendo la ecuación 4.54 y 4.55 en la ecuación 4.42 queda de la siguiente forma

$$\Delta x \leq \frac{1}{2} \left( c\Delta t + \frac{Q}{BS_0 c} \right) \quad (4.57)$$

Despejando

$$2 \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{Q}{BS_0 \Delta x} \quad (4.58)$$

Recordando que

$$D = \frac{Q}{BS_0 \Delta x} = (1 - 2x) \quad (4.59)$$

Por lo que

$$2 - (1 - 2x) \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.60)$$

Simplificando, finalmente se obtiene la siguiente expresión matemática

$$1 + 2x \leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.61)$$

Esta ecuación la podemos representar gráficamente como se muestra en la figura 4.4.

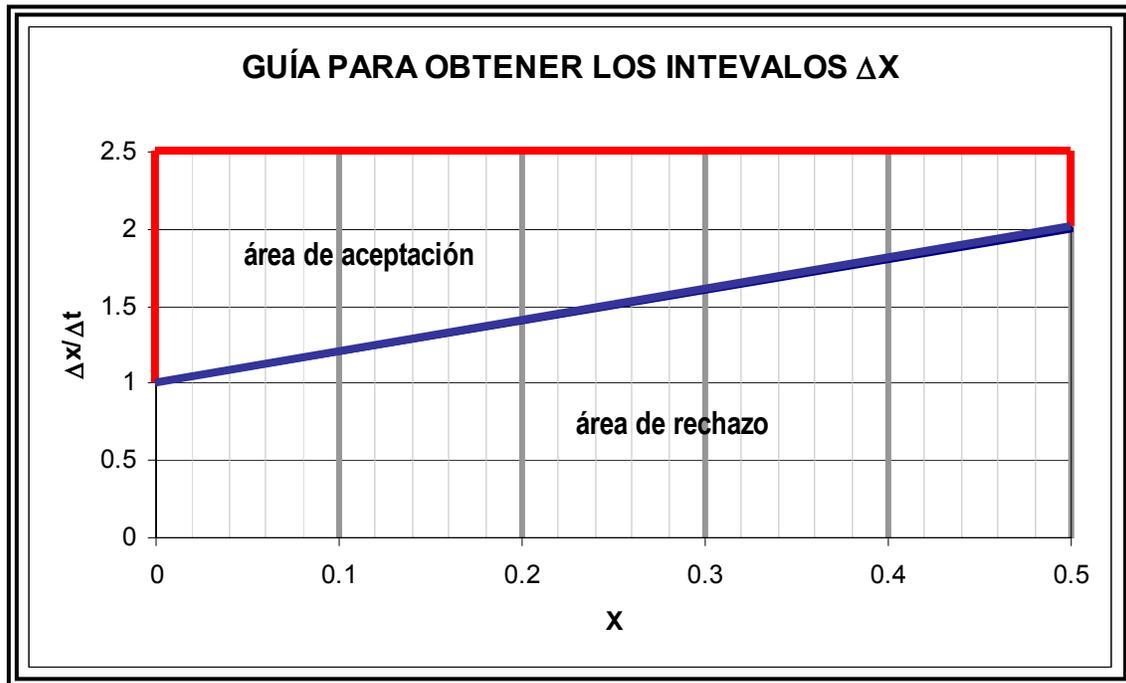


Figura 4.4

## 4.4 Métodos para obtener los parámetros K y X

Para conocer el valor de  $K$  y  $X$  existen diferentes métodos, a continuación se describen varios de ellos.

### A) Para información escasa

Cuando no se tienen datos suficientes  $X$  se toma entre 0 y 0.2 y  $K$  se hace igual al tiempo entre los gastos de pico de los hidrogramas de entrada y de salida del tramo de río o bien se estima (Linsley et al, 1958), a partir de

$$K \cong 0.014 \frac{L^{1.6}}{H^{0.6}} \quad (4.62)$$

donde:

$H$  desnivel entre las dos secciones de los extremos del tramo del río, en km

$L$  longitud del tramo del río, en km

### B) Método de calibración tradicional

Se aplica cuando se dispone de una avenida que haya sido medida (aforada) en los extremos del tramo de interés del río. El procedimiento de calibración es el siguiente:

- 1) Se divide el hidrograma de entrada y salida en intervalos de tiempo  $\Delta t$ , a partir de un tiempo inicial común
- 2) Se calcula el almacenamiento con la ecuación

$$S_{i+1} = \left[ \frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} \right] \Delta t + S_i = (\bar{I} - \bar{O}) \Delta t + S_i \quad (4.63)$$

- 3) Se supone un valor de  $X$
- 4) Se calcula  $Y$  como

$$Y = XI + (1 - x)O \quad (4.64)$$

- 5) Se dibujan los valores de  $S_{i+1}$  (paso 2) y los de  $Y$  (paso 4) para la  $X$  supuesta, ver figura 4.5
- 6) Se observa si los puntos se ajustan a una recta, si no es así, se supone otra  $X$  y se va al paso 2

Una vez seleccionado el valor adecuado de  $X$ , la constante  $K$  resulta ser igual a la pendiente de la recta de ajuste, ver figura 4.5.

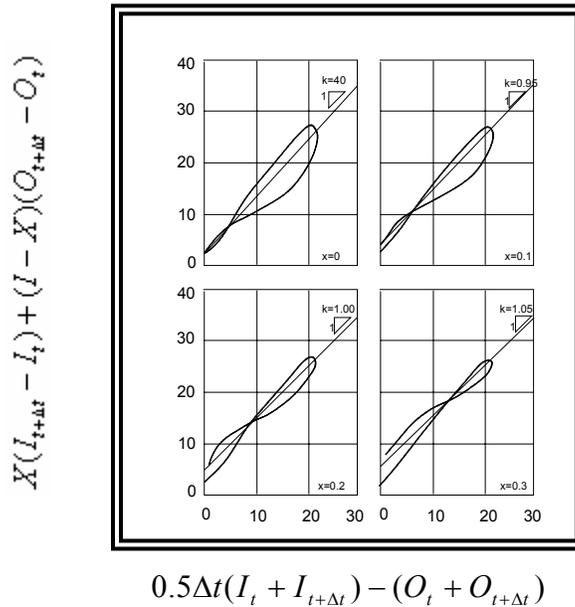


Figura 4.5 Relación entre el volumen almacenado y los gastos

### C) Método de calibración de Overton

Se utiliza cuando se conoce el gasto pico y el tiempo en que se presenta, para los hidrogramas de entrada y de salida al tramo del río.

Para encontrar los parámetros  $K$  y  $X$ , Overton deduce dos expresiones donde supone que el hidrograma de entrada tiene la forma de un triángulo isósceles y que  $K$  es menor al tiempo pico de este hidrograma (Viessman, 1977). Las ecuaciones son las siguientes.

$$K = 1.41(T_p - t_p) \quad (4.65)$$

$$X = 0.71 - \frac{t_p}{K} \left( \frac{I_p - O_p}{I_p} \right) \quad (4.66)$$

donde :

- $t_p$  tiempo de pico del hidrograma de entrada al tramo del río
- $T_p$  tiempo de pico del hidrograma de salida del tramo del río
- $I_p$  gasto pico del hidrograma de entrada al tramo del río
- $O_p$  gasto pico del hidrograma de salida del tramo del río

### C) Método de mínimos cuadrados de los errores de los gastos de salida

Para minimizar la suma de los errores de la estimación de los gastos de salida, de la ecuación de Muskingum

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + C_2 O_1 \quad (4.67)$$

Dado que  $C_0 + C_1 + C_2 = 1$

Al despejar  $C_2$

$$C_2 = 1 - C_0 - C_1 \quad (4.68)$$

Sustituyendo la ecuación 4.68 en 4.67

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + (1 - C_0 - C_1) O_1 \quad (4.69)$$

Desagrupando la ecuación anterior

$$O_2 = C_0 I_2 + C_1 I_1 + O_1 - C_0 O_1 - C_1 O_1 \quad (4.70)$$

Agrupando  $C_0$  y  $C_1$

$$O_2 - O_1 = C_1 (I_1 - O_1) + C_0 (I_2 - O_1) \quad (4.71)$$

Realizando los siguientes cambios de variable en la ecuación

$$Z_j = O_2 + O_1 \quad (4.72)$$

$$Y_j = I_1 - O_1$$

$$W_j = I_2 - O_1$$

Se encuentra

$$Z_j = C_1 Y_j + C_0 W_j \quad (4.73)$$

Al minimizar la suma de los cuadrados de los errores la ecuación

$$S = \sum (C_1 y_j + C_0 w_j - Z_j)^2 \quad (4.74)$$

Para encontrar los coeficientes que mejor se ajusten a la ecuación 4.73, se realiza una minimización de ella.

De la ecuación 4.74 se deriva parcialmente con respecto a  $C_0$  y  $C_1$  y se igualan a cero.

$$\frac{\partial S}{\partial C_0} = 0; \frac{\partial S}{\partial C_1} = 0 \quad (4.75)$$

Ahora derivando con respecto a  $C_0$  e igualando a cero

$$\frac{\partial S}{\partial C_0} = 2\Sigma(C_0 y_i + C_1 w_i - Z_i)(y_i) = 0 \quad (4.76)$$

Que puede escribirse

$$\frac{0}{2} = \Sigma(C_0 y_i^2 + \Sigma(C_1 w_i y_i) - \Sigma(Z_i y_i)) \quad (4.77)$$

$$0 = \Sigma(C_0 y_i^2) + \Sigma(C_1 w_i y_i) - \Sigma(Z_i y_i) \quad (4.78)$$

Despejando  $\Sigma(Z_i y_i)$

$$\Sigma(Z_i y_i) = C_0 \Sigma y_i^2 + C_1 \Sigma(w_i y_i) \quad (4.79)$$

Derivando parcialmente con respecto a  $C_1$  e igualando a cero

$$\frac{\partial S}{\partial C_1} = 2\Sigma(C_0 y_i + C_1 w_i - Z_i)(w_i) = 0 \quad (4.80)$$

Por lo que

$$0 = 2\Sigma(C_0 y_i + C_1 w_i - Z_i)(w_i)$$

$$\frac{0}{2} = \Sigma(C_0 y_i w_i + \Sigma(C_1 w_i^2) - \Sigma(Z_i w_i)) \quad (4.81)$$

$$0 = \Sigma(C_0 y_i w_i) + \Sigma(C_1 w_i^2) - \Sigma(Z_i w_i) \quad (4.82)$$

Despejando  $\Sigma(Z_i w_i)$

$$\Sigma(Z_i w_i) = C_1 \Sigma y_i w_i + C_1 \Sigma(w_i^2) \quad (4.83)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas por el método de Cramer encontramos el valor de  $C_1$  y  $C_0$

$$C_0 = \frac{\sum w_i^2 \sum (y_i z_i) - \sum (y_i w_i) \sum (w_i z_i)}{\sum y_i^2 \sum w_i^2 - \sum (y_i w_i)^2} \quad (4.84)$$

$$C_1 = \frac{\sum y_i^2 \sum (w_i z_i) - \sum (y_i z_i) \sum (y_i w_i)}{\sum y_i^2 \sum w_i^2 - \sum (y_i w_i)^2} \quad (4.85)$$

conocidos  $C_1$  y  $C_0$  se obtiene

$$C_2 = 1 - C_0 - C_1 \quad (4.86)$$

Por otra parte, al sumar las ecuaciones 4.84 y 4.85 y simplificando

$$C_0 + C_1 = \frac{\Delta t}{K - Kx + 0.5\Delta t} \quad (4.87)$$

Al restar las ecuaciones 4.84 y 4.85 y simplificando se llega a la siguiente expresión matemática

$$C_0 - C_1 = \frac{2Kx}{K - Kx + 0.5\Delta t} \quad (4.88)$$

Despejando  $K - Kx + 0.5 \Delta t$  de la ecuación 4.87

$$K - Kx + 0.5\Delta t = \frac{\Delta t}{C_0 + C_1} \quad (4.89)$$

Despejando  $K - Kx + 0.5 \Delta t$  de la ecuación 4.88

$$K - Kx + 0.5\Delta t = \frac{2Kx}{C_0 - C_1} \quad (4.90)$$

Al igualar las ecuaciones 4.89 y 4.88 y despejando  $Kx$

$$Kx = \frac{C_1 - C_0}{C_0 - C_1} \frac{\Delta t}{2} \quad (4.91)$$

Si se sustituye la ecuación 4.91 en la ecuación 4.89

$$K - \frac{C_1 - C_0}{C_0 + C_1} \frac{\Delta t}{2} + 0.5\Delta t = \frac{\Delta t}{C_0 + C_1} \quad (4.92)$$

Simplificando se llega a

$$K = \frac{1 - C_0}{C_0 + C_1} \Delta t \quad (4.93)$$

Al despejar X de la ecuación 4.91

$$X = \frac{C_1 - C_0}{C_0 - C_1} \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{K}$$

Sustituyendo la ecuación 4.91, resulta la ecuación para calcular X

$$X = \frac{C_1 - C_0}{1 - C_0} \frac{1}{2} \quad (4.94)$$

#### D) Método de Muskingum – Cunge

$$Q_{j+1}^{n+1} = C_0 Q_j^{n+1} + C_1 Q_j^n + C_2 Q_{j+1}^n + C_3 Q_L \quad (4.95)$$

Sea las ecuaciones 4.47 a 4.50

$$C_0 = \frac{-1 + C + D}{1 + C + D} \quad (4.96)$$

$$C_1 = \frac{1 + C - D}{1 + C + D} \quad (4.97)$$

$$C_2 = \frac{1 - C + D}{1 + C + D} \quad (4.98)$$

$$C_3 = \frac{2C}{1 + C + D} \quad (4.99)$$

donde

$$C = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.100)$$

$$D = \frac{Q}{BS_0 c \Delta x} \quad (4.101)$$

Si

$$c = \sqrt{gh} \quad (4.102)$$

Sí

$$2 - 2X + \frac{\Delta t}{K} = 1 + C + D \quad (4.103)$$

$$2 - 2X - \frac{\Delta t}{K} = 1 - C + D \quad (4.104)$$

Al sumar las ecuaciones 4.103 y 4.104

$$4 - 4X = 2 + 2D \quad (4.105)$$

Al dividir entre 2

$$2 - 2X = 1 + D \quad (4.106)$$

Despejando  $D$

$$D = 1 - 2X \quad (4.107)$$

Despejando  $X$

$$X = \frac{1 - D}{2} \quad (4.108)$$

Al multiplicar por (-) la ecuación 4.104

$$-2 + 2X + \frac{\Delta t}{K} = -1 + C - D \quad (4.109)$$

Sumando las ecuaciones 4.107 y 4.108

$$2 \frac{\Delta t}{K} = 2C \quad (4.110)$$

Dividiendo entre 2

$$\frac{\Delta t}{K} = C \quad (4.111)$$

Despejando K

$$K = \frac{\Delta t}{C} \quad (4.112)$$

Obtenidas  $K$  y  $X$  se puede encontrar  $Q$  con la siguiente ecuación

$$Q = DBS_o \frac{\Delta t}{K} \Delta x \quad (4.113)$$

## CAPITULO 5

### APLICACIONES

En este capítulo se presentan algunos ejemplos sobre los métodos de Muskingum y Muskingum-Cunge (métodos hidrológicos) y el de Sánchez – Fuentes (método hidráulico).

El método de Muskingum puede emplearse cuando en la práctica no se tienen secciones transversales del río y se cuenta con hidrogramas de entrada y de salida, los cuales sirven para encontrar los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de tránsito  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .

En el caso del método de Muskingum y el de Muskingum – Cunge se propone una relación lineal entre los gastos de entrada y salida con el volumen de agua almacenado en un tramo del río.

El método de Muskingum – Cunge no son necesarios los hidrogramas de entrada y a la salida del tramo de río en estudio. En el método de Muskingum - Cunge se puede conocer el hidrograma de salida en otras secciones del río no solo al final Además se considera gastos laterales de entrada o salida.

Para encontrar los valores de los parámetros de los métodos hidrológicos y los coeficientes de tránsito se presentan varios métodos que fueron descritos en el capítulo 4; en este trabajo se utilizó un Método de Mínimos cuadrados de los errores de la estimación de los gastos de salida.

Los métodos hidráulicos como se mencionó en el capítulo 3 requieren de información de detalle como es la rugosidad, geometría del cauce, condiciones de frontera. Existen programas de cómputo cuya adquisición puede ser difícil o los resultados que se obtienen con ellos se pueden considerar como un producto de caja negra por lo tanto sus resultados deben ser tomados con precaución, por esta razón en este trabajo se utilizó el método de Sánchez –Fuentes.

A continuación se describe cada aplicación.

## 5.1 Método de Sánchez - Fuentes

Para realizar el tránsito hidráulico se utilizó el esquema de Sánchez – Fuentes el cual se aplicó al programa TRAVECM que considera el tránsito de avenidas en un cauce en una sección trapecial y tres posibles pendientes de fondo. Además permite obtener los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  del método de Muskingum.

A continuación se describe la aplicación del método.

El programa permite efectuar el tránsito de una avenida en un río y al mismo tiempo en sus afluentes, como todos los métodos hidráulicos el programa requiere como datos de entrada información sobre la geometría, coeficiente de rugosidad y la pendiente del río, además es necesario definir las fronteras del flujo, lo cual indica establecer las condiciones del flujo aguas arriba y aguas abajo, por ejemplo el hidrograma de entrada en sección aguas arriba es conocido mientras que aguas abajo de la última sección se mantiene un tirante constante y en cualquier sección se puede incluir un gasto lateral ya sea de entrada o salida que puede variar con el tiempo (hidrograma).

En la figura 5.1 se muestra la parte del programa donde se observa las características hidráulicas que utiliza el programa.



```

File Edit View Search Run Debug Calls Options Help
TRAVECM.BAS
KG = NIT - 1
'
'NUMERO DE TRAMOS
READ NTRA
DATA 3
'LONGITUD MÁXIMA DE CADA SEGMENTO
READ DXM
DATA 100
'ELEVACION SUPERIOR
READ ELESUP
DATA 20
FOR J = 1 TO NTRA
  READ ANCHO(J), TALUD(J), LON(J), PEND(J)
NEXT J
DATA 15,0,2000,0.000596
DATA 15,0,2000,0.000596
DATA 15,0,2000,0.000596
'
READ SENT, SSAL
'DATA 1,21
'DATA 21,41
'DATA 41,60
DATA 1,60
'
F1=Help Enter=Display Menu Esc=Cancel Arrow=Next Item | 00041:044
  
```

The screenshot shows a DOS-style command prompt window with a blue background. The title bar reads 'File Edit View Search Run Debug Calls Options Help' and 'TRAVECM.BAS'. The main text area contains a series of commands and data entries for a hydraulic program. A white bracket on the right side of the code groups the lines from 'FOR J = 1 TO NTRA' to 'DATA 15,0,2000,0.000596' with the label 'Características hidráulicas'. The status bar at the bottom shows 'F1=Help Enter=Display Menu Esc=Cancel Arrow=Next Item | 00041:044'.

Figura 5.1 características hidráulicas que utiliza el programa, Sánchez – Fuentes.

En la figura 5.2 se observa las características del hidrograma de entrada que se transita utilizando el programa.

```

File Edit View Search Run Debug Calls Options Help
TRAVECM.BAS
VIEW (100, 350)-(496, 455), 1, 2
WINDOW (-5, 0)-(200, 100)
READ QP, TP, TB, QB } Características del hidrograma
'DATA 50, 1500, 9000, 10 de entrada.
MASC = QP / TP
MDES = -QP / (TB - TP)
GAIU = QB
'
' *** (5) INICIA CALCULO EN EL TIEMPO ***
'
DO
' *** REvisa SI TERMINO EL CALCULO DE " CALENTAMIENTO " ***
IF KK <= IC THEN 660
'*** SE DA EL GASTO EN LA SECCION INICIAL ***
PRINT "GASTO ": ' INPUT QE(1, J1)
IF KT < TP THEN
<Shift+F1=Help> <F6=Window> <F2=Subs> <F5=Run> <F8=Step> | N

```

Figura 5.2 características del hidrograma de entrada.

Una vez que se tienen todos los datos utilizados por el programa, se realiza el tránsito y se obtiene el hidrograma de salida, así como un archivo de resultados. En la figura 5.3 se observa la pantalla de resultados del programa TRAVECM, así como también el hidrograma de entrada cuyas características se describen en la figura 5.2, el hidrograma de salida transitado, el tirante, gasto y velocidad de cada sección, también la opción de calcular los parámetros K, X y los coeficientes de tránsito  $C_1$ ,  $C_2$  Y  $C_3$ .

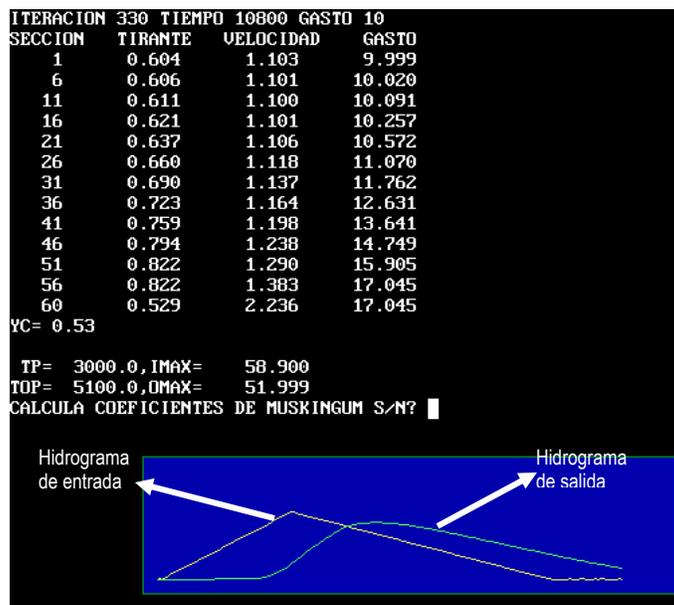


Figura 5.3 Pantalla de resultados del programa TRAVECM.

Si se desea calcular los coeficientes de Muskingum y los parámetros  $K$  y  $X$ , el programa cuenta con esta opción, basta con poner "S" en caso de que se deseé calcularlos y "N" en caso contrario. Si se escoge la opción "S" el programa TRAVECM calcula los coeficientes de tránsito así como los parámetros  $K$ ,  $X$  y el hidrograma de salida hidrológico e hidráulico.

En la figura 5.4 se presenta la pantalla de resultados del programa donde se observa el tirante obtenido para cada sección así como la velocidad y el gasto, los hidrogramas transitados (hidráulico e hidrológico), los coeficientes tránsito y los parámetros  $K$  y  $X$ .

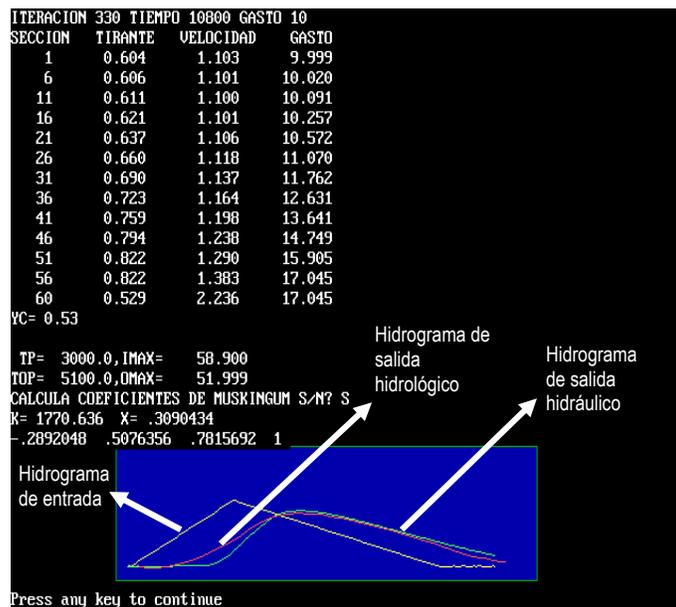


Figura 5.4 Resultados del tránsito utilizando el método de Sánchez – Fuentes (hidráulico) y el método de Muskingum (hidrológico)

Al finalizar el tránsito el programa arroja un archivo de salida con los resultados los cuales son los hidrogramas de salida (hidráulico e hidrológico), la suma de los errores, los parámetros y coeficientes de tránsito que se observan en la figura 5.5.

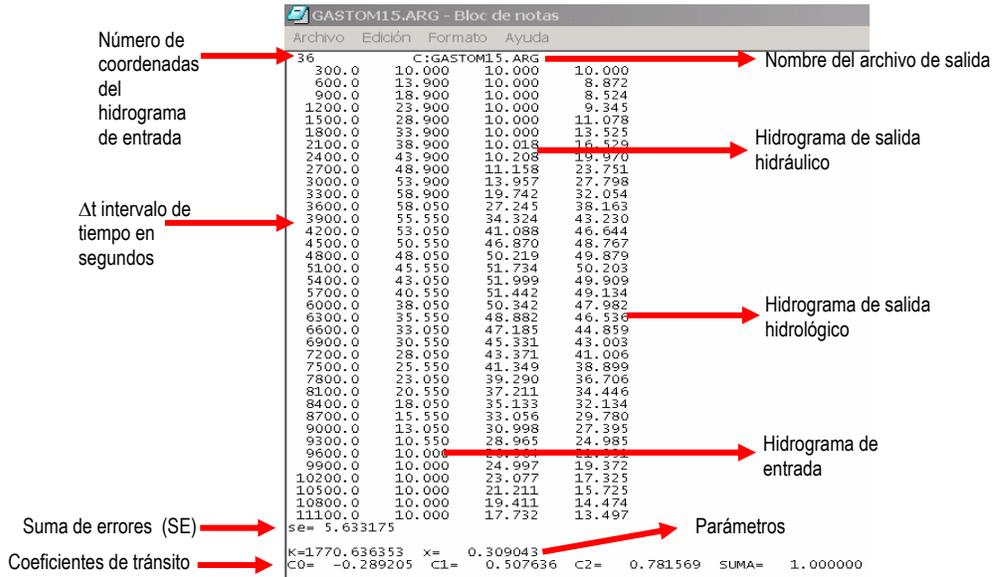


Figura 5.5 Archivo de resultados.

## 5.2 Método de Muskingum

En la aplicación de este método se utilizó un programa de cómputo TRAVECM escrito en lenguaje QBasic para obtener los parámetros K, X y los coeficientes de tránsito  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .

El programa utiliza el método de mínimos cuadrados de la suma de los errores de la estimación de los gastos de salida para calcular los parámetros y los coeficientes, en la tabla 5.1 se presentan los datos utilizados en el programa.

CASO 1	B=5						
	NUM.	QP	TP	TB	QB	L	S
1	60	1500	9000	10	6000	0.000596	
2	60	3000	9000	10			
3	60	4500	9000	10			
4	110	3000	18000	10			
5	35	3000	4500	10			
CASO 2	B=10						
	NUM.	QP	TP	TB	QB	L	S
1	60	1500	9000	10	6000	0.000596	
2	60	3000	9000	10			
3	60	4500	9000	10			
4	110	3000	18000	10			
5	35	3000	4500	10			
CASO 3	B=15						
	NUM.	QP	TP	TB	QB	L	S
1	60	1500	9000	10	6000	0.000596	
2	60	3000	9000	10			
3	60	4500	9000	10			
4	110	3000	18000	10			
5	35	3000	4500	10			

Tabla 5.1 Datos utilizados.

## 5.2.1 Desarrollo del método

El método se aplicó a tres casos en donde varía el ancho y cada uno de estos tiene 5 subcasos en los cuales varían las condiciones de los hidrogramas de entrada, estos datos se muestran en la tabla 5.1

Se realizaron simulaciones con el programa TRAVECM para cada subcaso y el resultado que se obtuvo se comparó con el método tradicional y después con el método de la onda cinemática, a continuación se explica el procedimiento utilizado.

1. Con dos hidrogramas (uno de entrada y otro de salida) cuyas características hidráulicas se muestran en la figura 5.6 para cada subcaso, se realizó el tránsito y se obtuvieron los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de tránsito  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  utilizando el programa de TRAVECM (**método de mínimos cuadrados de la suma de los errores de la estimación de los gastos de salida**). Para verificar la bondad de los resultados obtenidos con el programa se comparan estos con los obtenidos con el método de calibración tradicional.

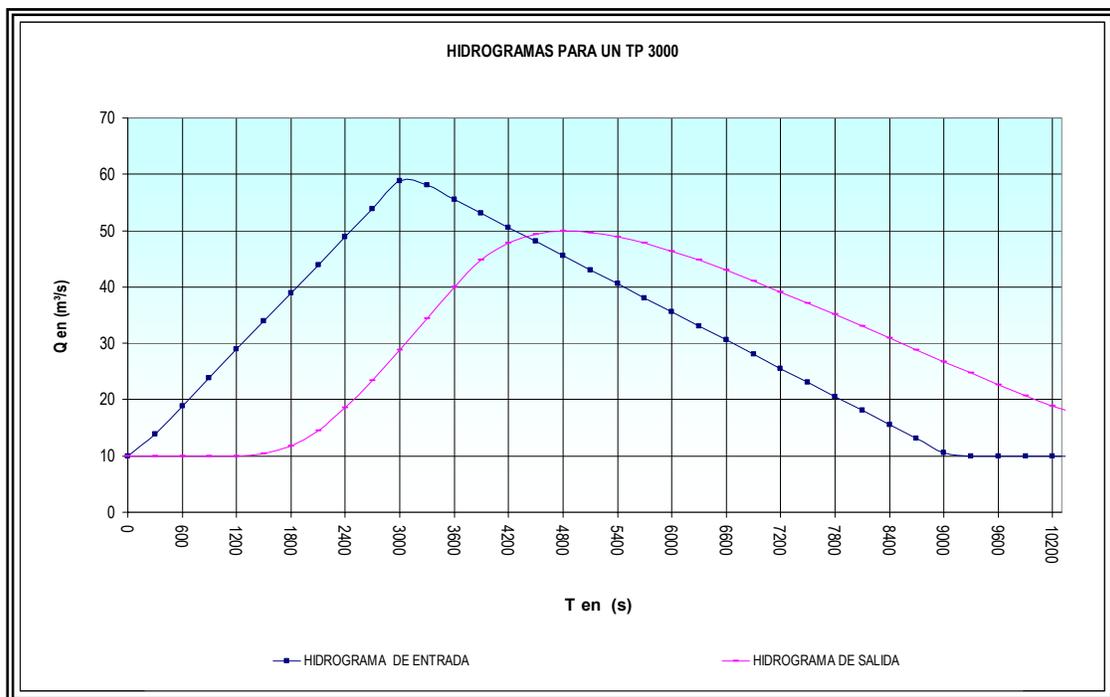


Figura 5.6 Hidrogramas de entrada y de salida que pertenece al caso 1.2.

2. Se empleó el método de Muskingum utilizando el método de calibración tradicional para obtener los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de tránsito. Así mismo con el programa TRAVECM se obtienen los parámetros, los coeficientes y con estos automáticamente realiza el tránsito y se obtienen los hidrogramas (hidráulico e hidrológico).

3. Posteriormente se grafican los resultados y se comparan a través de la suma de los errores por mínimos cuadrados para los dos métodos (tabla 5.2).

	CASO 1 TRADICIONAL ANCHO 5 SE	CASO 1 TRAVECM ANCHO 5 SE	CASO 2 TRADICIONAL ANCHO 10 SE	CASO 2 TRAVECM ANCHO 10 SE	CASO 3 TRADICIONAL ANCHO 15 SE	CASO 3 TRAVECM ANCHO 15 SE
1	4.744650	2.27600	6.14487	3.897550	7.349612	5.220464
2	3.959285	1.26667	4.74034	1.842042	5.499484	2.377287
3	3.650602	1.37881	4.31131	1.926877	4.842456	2.298336
4	5.189190	2.56436	6.57205	3.402087	7.994949	3.824504
5	2.714804	0.61206	3.35033	1.085921	3.795703	1.579336

Tabla 5.2 Comparación de resultados del método tradicional y el programa TRAVECM mediante la suma de errores (SE).

En la tabla 5.2 se presentan los resultados de la aplicación del método tradicional y del programa TRAVECM. Se obtuvo la suma de errores (SE) para cada uno de los casos, en la que se puede ver que hay una diferencia significativa entre los dos métodos. Para el caso 1.1 el cual se realizó con el método tradicional con un ancho de canal de 5 m, la suma de sus errores fue de 4.744650 y la del caso 1.1 utilizando el programa TRAVECM la suma de errores fue de 2.27600, lo cual demuestra que el programa TRAVECM dio mejor resultado respecto al tradicional.

Del análisis realizado anteriormente, el método con la menor suma de errores fue el programa TRAVECM; por otro lado se realizó otra comparación utilizando los resultados obtenidos con el programa TRAVECM y los obtenidos con el método de la onda cinemática, los cuales se muestran en la tabla 5.3.

	CASO 1 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 5 SE	CASO 1 TRAVECM ANCHO 5 SE	CASO 2 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 10 SE	CASO 2 TRAVECM ANCHO 10 SE	CASO 3 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 15 SE	CASO 3 TRAVECM ANCHO 15 SE
1	4.083000	2.27600	5.14439	3.897550	5.880139	5.220464
2	3.022900	1.26667	2.75585	1.842042	2.485036	2.377287
3	2.885389	1.37881	2.84745	1.926877	2.60143	2.298336
4	9.041000	2.56436	7.25338	3.402087	6.82163	3.824504
5	1.167000	0.61206	1.03360	1.085921	1.933546	1.579336

Tabla 5.3 Comparación de la suma de los errores del método de onda cinemática y TRAVECM mediante la suma de errores (SE)

En la comparación de los resultados se observa que la suma de los errores del método de la onda cinemática es mayor que la suma de errores del programa TRAVECM en cada uno de los subcasos, lo cual quiere decir que los resultados obtenidos con el programa TRAVECM son satisfactorios y que si se utiliza el método tradicional o el método de la onda cinemática se debe tener cuidado con sus resultados.

Algunos de los inconvenientes que se encontraron al emplear el método de la onda cinemática fue al aplicar la ecuación 4.21 la cual utiliza una velocidad; en la literatura técnica dice que esta debe ser la *velocidad media*, pero sin embargo esta recomendación es escueta, ya que al aplicar la ecuación 4.21 se debe de contar con la velocidad media; para la aplicación del método de la onda cinemática no se contaba con ésta, por lo tanto se obtuvo por tanteos hasta que el hidrograma transitado se ajustara al hidrograma de salida medido, además también se calculó con el  $Q_b$  y con el  $Q_p$ , las velocidades obtenidas resultaron por debajo del valor que se obtuvo por tanteos, lo cual quiere decir que no es confiable su aplicación ya que se debe tener la certeza de cual debe ser la velocidad que se debe aplicar en la ecuación 4.21, además de que también influye en los resultados el valor que se tome con respecto a las rugosidad del canal.

	CASO 1 TRADICIONAL ANCHO 5			CASO 1 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 5			CASO 1 TRAVECM ANCHO 5			CASO 2 TRADICIONAL ANCHO 10			CASO 2 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 10			CASO 2 TRAVECM ANCHO 10			CASO 3 TRADICIONAL ANCHO 15			CASO 3 ONDA CINEMÁTICA ANCHO 15			CASO 3 TRAVECM ANCHO 15									
	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2	C0	C1	C2				
1	C0	-0.2521	C0	-0.7391	C0	-0.3228	C0	-0.38199	C0	-0.7391	C0	-0.32604	C0	-0.43799	C0	-0.7647	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336	C0	-0.28336
	C1	0.4992	C1	1.0000	C1	0.4895	C1	0.64068	C1	1.0000	C1	0.47277	C1	0.68364	C1	1.0000	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678	C1	0.40678
	C2	0.7530	C2	0.7391	C2	0.8333	C2	0.72131	C2	0.7391	C2	0.85327	C2	0.75434	C2	0.7647	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658	C2	0.87658
2	C0	0.2525	C0	-0.7266	C0	-0.3264	C0	-0.42225	C0	-0.7778	C0	-0.45346	C0	-0.43941	C0	-0.7910	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292	C0	-0.55292
	C1	0.4990	C1	1.0000	C1	0.5143	C1	0.68711	C1	1.0000	C1	0.64183	C1	0.68333	C1	1.0000	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874	C1	0.72874
	C2	0.7535	C2	0.7266	C2	0.8122	C2	0.73514	C2	0.7778	C2	0.81163	C2	0.75609	C2	0.7910	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418	C2	0.82418
3	C0	-0.2220	C0	-0.7391	C0	-0.2411	C0	-0.44274	C0	-0.7391	C0	-0.327876	C0	-0.43971	C0	-0.7778	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839	C0	-0.38839
	C1	0.4623	C1	1.0000	C1	0.4211	C1	0.71145	C1	1.0000	C1	0.50655	C1	0.68326	C1	1.0000	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540	C1	0.55540
	C2	0.7561	C2	0.7391	C2	0.8200	C2	0.73129	C2	0.7391	C2	0.821327	C2	0.75645	C2	0.7778	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299	C2	0.83299
4	C0	-0.2390	C0	-0.7391	C0	-0.2018	C0	-0.34624	C0	-0.7391	C0	-0.288335	C0	-0.43874	C0	-0.7910	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546	C0	-0.36546
	C1	0.4796	C1	1.0000	C1	0.3929	C1	0.596130	C1	1.0000	C1	0.475608	C1	0.68348	C1	1.0000	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811	C1	0.53811
	C2	0.7594	C2	0.7391	C2	0.8089	C2	0.75011	C2	0.7391	C2	0.812727	C2	0.75260	C2	0.7910	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734	C2	0.82734
5	C0	-0.2401	C0	-0.7778	C0	-0.3968	C0	-0.56117	C0	-0.7778	C0	-0.52281	C0	-0.46996	C0	-0.7778	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671	C0	-0.57671
	C1	0.5040	C1	1.0000	C1	0.5740	C1	0.87511	C1	0.0000	C1	0.69453	C1	0.73541	C1	1.0000	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803	C1	0.72803
	C2	0.7361	C2	0.7778	C2	0.8228	C2	0.68606	C2	0.7778	C2	0.82828	C2	0.73456	C2	0.7778	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868	C2	0.84868

Tabla 5.4 Comparación de coeficientes de tránsito del método tradicional, onda cinemática y TRAVECM.

En la tabla 5.4 se presentan los resultados de los coeficientes de tránsito que se obtuvieron al realizar el tránsito en cada uno de los métodos así como los hidrogramas para cada uno de los subcasos.

En las figuras 5.7, 5.8 y 5.9 se presentan los hidrogramas transitados de cada método, los que se comparan con respecto al hidrograma de salida medido, la finalidad de esta comparación se hace con el fin de ver cual de los hidrogramas transitados es el que mejor se ajusta al hidrograma medido, se hace para comprobar que los resultados obtenidos con el programa TRAVECM son confiables con respecto a los resultados de los otro métodos.

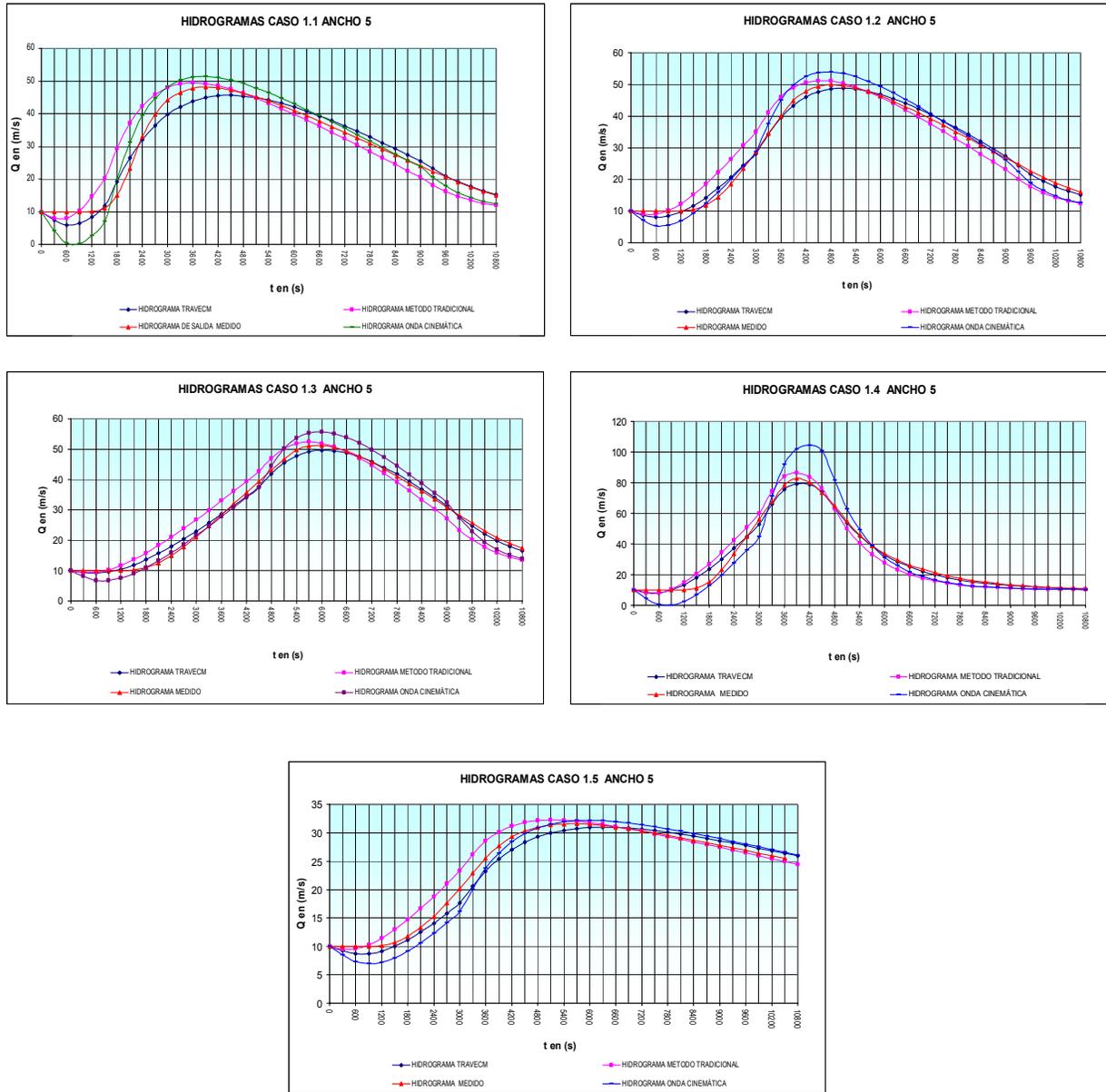


Figura 5.7 Comparación de hidrogramas de salida del método tradicional, método de la onda cinemática y TRAVECM caso 1 ancho 5m

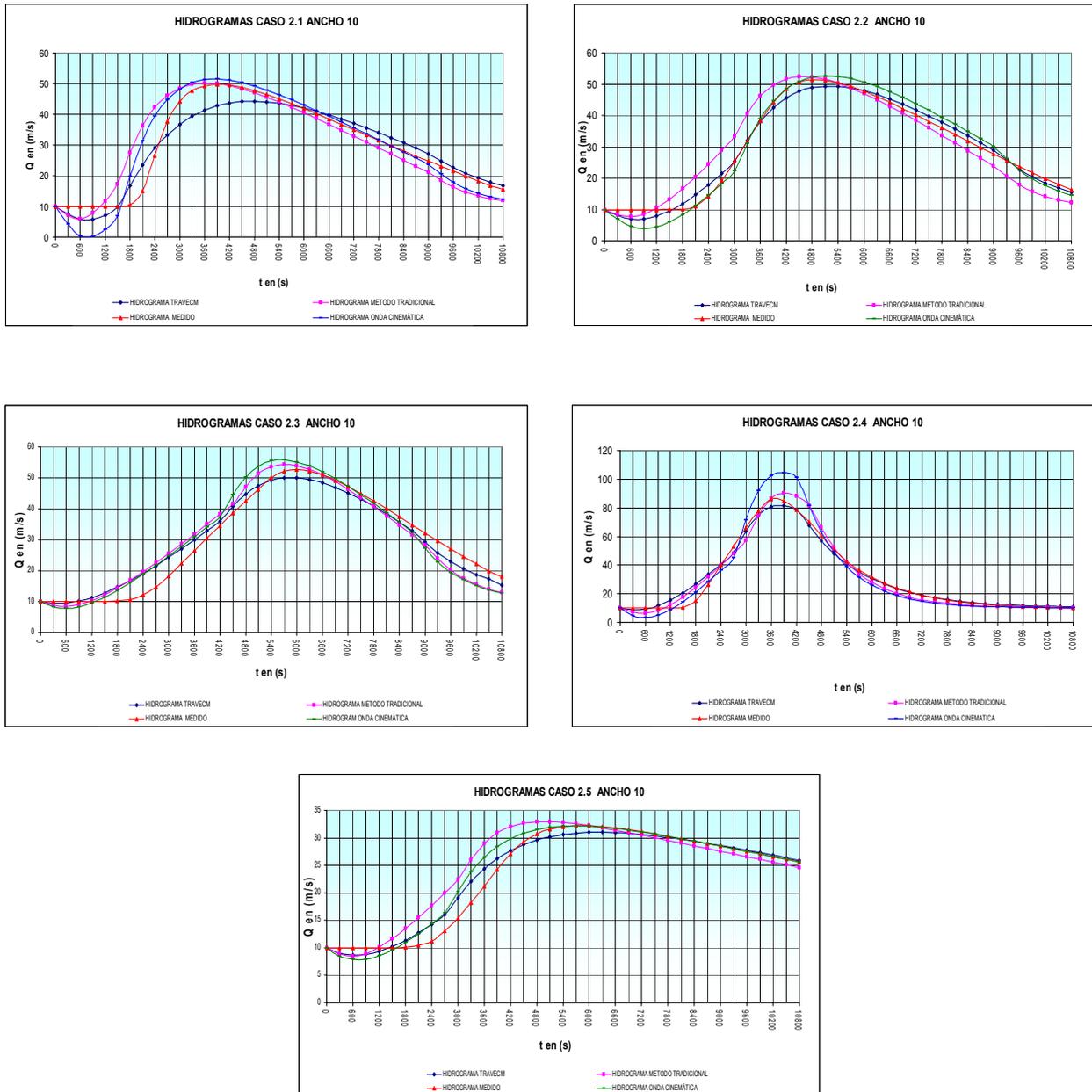


Figura 5.8 Comparación de hidrogramas de salida del método tradicional, método de la onda cinemática y TRAVECM caso 2 ancho 10 m

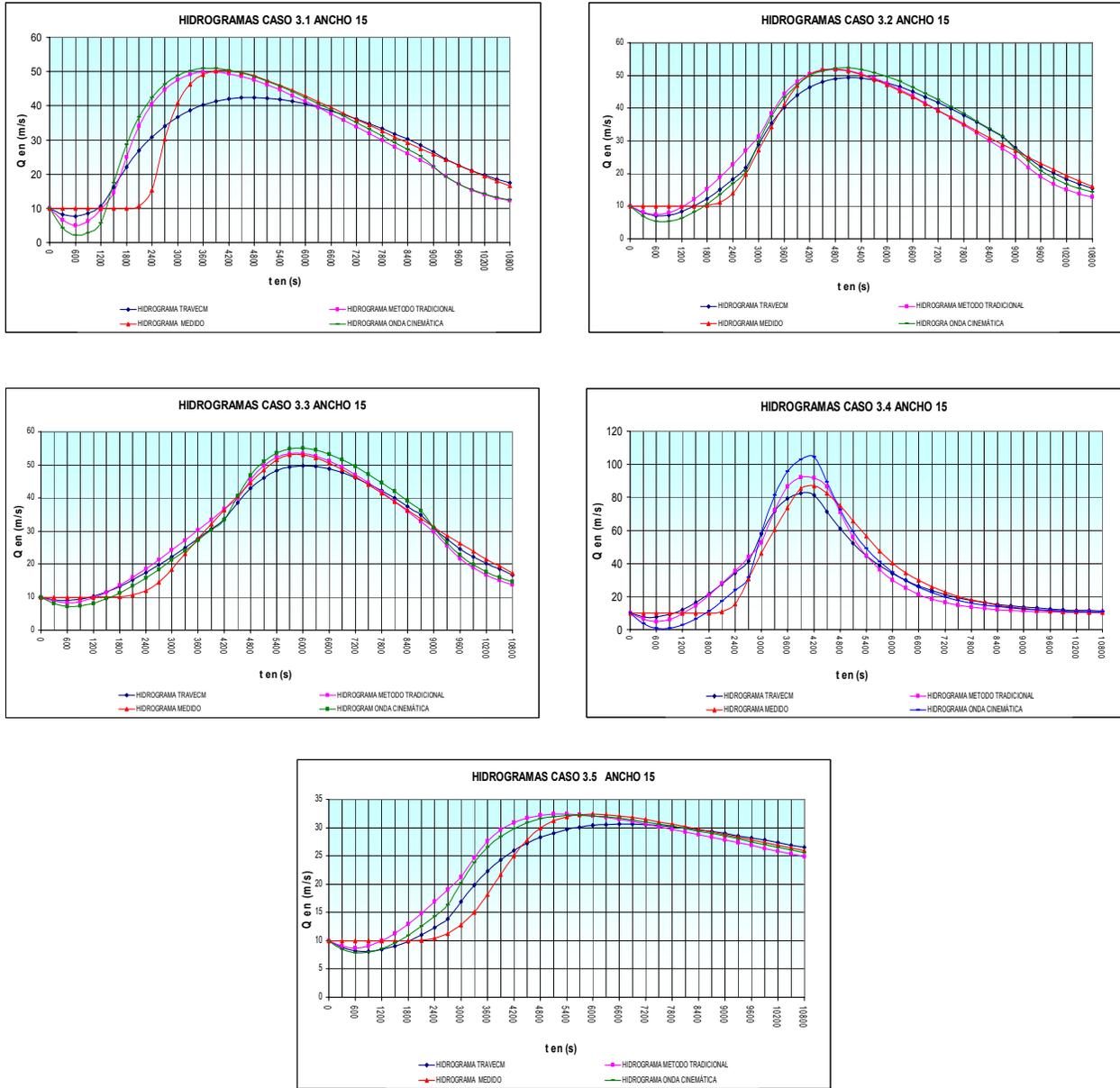


Figura 5.9 Comparación de hidrogramas de salida del método tradicional, método de la onda cinemática y TRAVECM caso 3 ancho 15 m

Como se mencionó en el capítulo 4 los parámetros  $K$  y  $X$  representan las características geométricas del cauce. Se calcularon éstos parámetros con el método tradicional, método de Overton y con el programa TRAVECM, en la tabla 5.5 se presentan los resultados de los parámetros  $K$  y  $X$  que se obtuvieron con los métodos mencionados.

		MÉTODO TRADICIONAL		PROGRAMA TRAVECM		MÉTODO DE OVERTON	
CASO 1	ANCHO 5	K	X	K	X	K	X
		TP 1500 QP 60	1520.700	0.3	2380.3704	0.307	2961.0000
	TP 3000 QP 60	1524.300	0.3	2118.5098	0.3169	2538.0000	0.5293
	TP 4500 QP 60	1524.990	0.28	2068.6672	0.2668	2115.0000	0.4212
	TP 3000 QP 110	1544.520	0.29	1886.8112	0.2474	1269.0000	0.1548
	TP 3000 QP 35	1409.970	0.3	2364.3474	0.3475	3807.0000	0.6338
CASO 2	ANCHO 10	K	X	K	X	K	X
		TP 1500 QP 60	1602.6600	0.37	2711.2690	0.3012	2961.0000
	TP 3000 QP 60	1610.9400	0.39	2314.8501	0.3768	2538.0000	0.5609
	TP 4500 QP 60	1610.7600	0.4	2229.5632	0.3142	2115.0000	0.4738
	TP 3000 QP 110	1616.1900	0.35	2063.8330	0.2965	1269.0000	0.2360
	TP 3000 QP 35	1491.8700	0.46	2660.4502	0.3997	3384.0000	0.6427
CASO 3	ANCHO 15	K	X	K	X	K	X
		TP 1500 QP 60	1756.0800	0.39	3119.5027	0.2689	3384.0000
	TP 3000 QP 60	1770.3900	0.39	2649.7744	0.4127	2961.0000	0.5912
	TP 4500 QP 60	1773.4200	0.39	2493.9963	0.3399	2588.0000	0.5224
	TP 3000 QP 110	1763.6100	0.39	2372.5571	0.3309	1692.0000	0.3680
	TP 3000 QP 35	1661.3400	0.41	3125.7993	0.4138	3807.0000	0.6556

Tabla 5.5 Comparación de  $K$  y  $X$  por el método Tradicional, TRAVECM y método de Overton

Posteriormente los resultados obtenidos de  $K$  y  $X$  se graficaron con respecto a una línea a  $45^\circ$  para saber cual de los métodos se ajusta a las características del cauce; en forma general se observa en las figuras 5.10, 5.11 y 5.12 que los resultados del método tradicional y el programa TRAVECM son los que mejor se ajustan a dicha línea, lo cual significa que sus valores son muy parecidos no importando el ancho de la sección.

En cuanto al método de Overton sus valores no se acercan a la línea, lo que representa que sus valores son diferentes a los obtenidos por el programa TRAVECM o el método tradicional y entre el método tradicional y el programa TRAVECM los resultados que mejor se ajustaron a la línea fueron los del programa TRAVECM, lo cual quiere decir que la aplicación de este método es confiable.

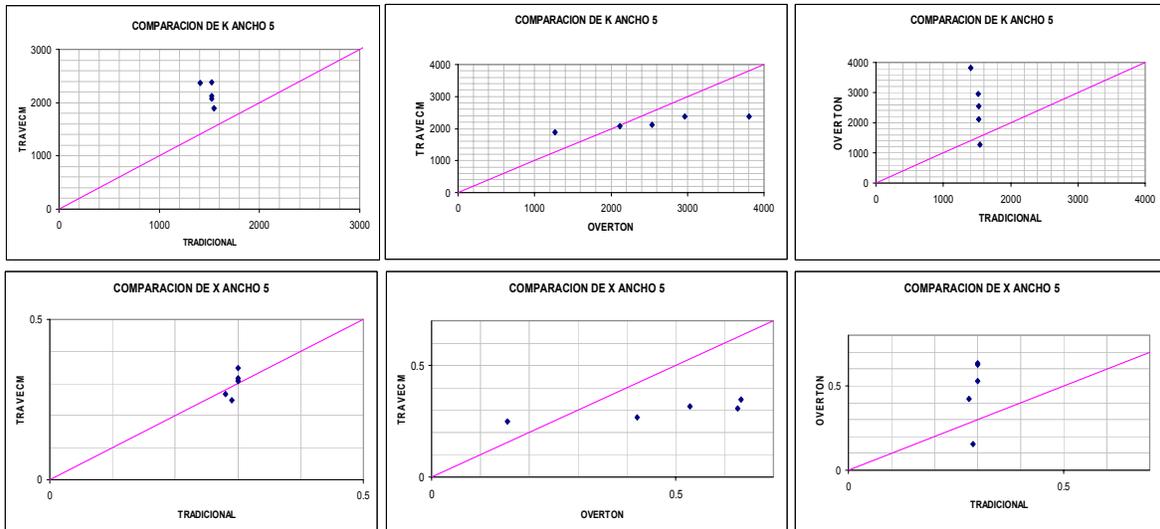


Figura 5.10 Comparación de K y X con respecto a cada uno de los métodos para un ancho de 5 m

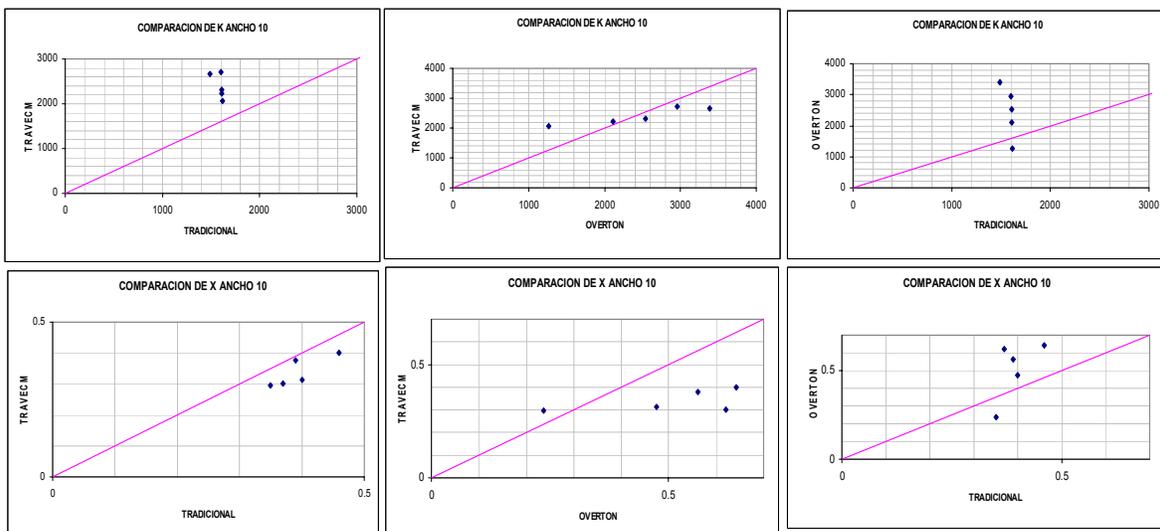


Figura 5.11 Comparación de K y X con respecto a cada uno de los métodos para un ancho de 10 m

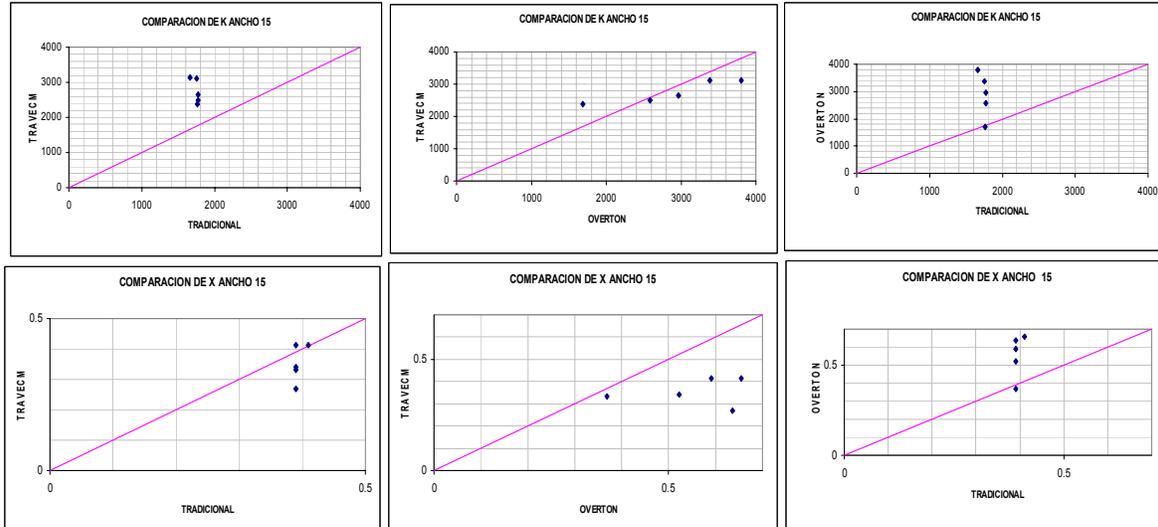


Figura 5.12 Comparación de K y X con respecto a cada uno de los métodos para un ancho de 15 m

## Comparación de los casos 4 y 5

Otras de las comparaciones que se realizaron fueron entre los casos 4 y 5 para un ancho de 5m, la cual consistió en lo siguiente:

- Se efectuó el tránsito en los dos casos, en los cuales se obtuvieron los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$  para cada uno.
- Los coeficientes del tránsito del caso 5 se utilizaron para realizar el tránsito en el caso 4 y así obtener el hidrograma de salida transitado para después compararlo con el hidrograma de salida del caso 4 en el cual se realizó el tránsito con sus propios parámetros.
- Una vez obtenidos los hidrogramas de salida transitados, éstos se compararon con el hidrograma de salida medido, y el que mejor se ajustó a éste fue el hidrograma transitado del caso 4 en el que se utilizaron sus propios parámetros para realizar el tránsito.
- Para el caso 5 se hizo lo mismo sólo que se utilizaron los parámetros del caso 4.

- El resultado que se presenta en la figura 5.13 se observa que el hidrograma de salida transitado del caso 4 es el que mejor se ajusta al hidrograma de salida medido, por lo que el hidrograma de salida transitado en el que se utilizó los parámetros del caso 5 no se ajusta dicho hidrograma. Con respecto a la figura 5.14 el análisis es similar al de la figura 5.13.
- También se obtuvo la suma de los errores para cada uno de los casos, en la tabla 5.6 se observa los resultados obtenidos.

CASO	SE
4	5.241
5	1.446

**Tabla 5.6 Resultado de SE de la comparación del caso 4 y 5**

En la tabla 5.7 se presenta la suma de errores que se obtuvo al realizar el tránsito en los casos 4 y 5 con sus propios parámetros.

CASO	SE
4	2.564
5	0.612

**Tabla 5.7 Resultado de la SE del caso 4 y 5**

Por medio de las tablas 5.6 y 5.7 podemos comparar los resultados obtenidos, con los cuales se puede verificar que la suma de errores (SE) que se obtuvo en el caso 4 y 5 en donde se utilizaron los coeficientes del caso 4 para realizar el tránsito en el caso 5 y los del caso 5 en el 4, es mayor que la suma de errores que se obtuvo realizando el tránsito en los casos 4 y 5 con sus propios parámetros.

La comparación se realizó con la finalidad de saber si es conveniente calcular los coeficientes de tránsito de un cauce cada vez que se tengan diferentes hidrogramas. Con los hidrogramas de las figuras 5.13 y 5.14 y los resultados obtenidos se llega a la conclusión que es conveniente calcular los coeficientes de tránsito cuando se tiene diferentes hidrogramas ya que se puede obtener un hidrograma de salida sobre estimado lo cual repercute en el diseño de la obra en cuestión de costo.

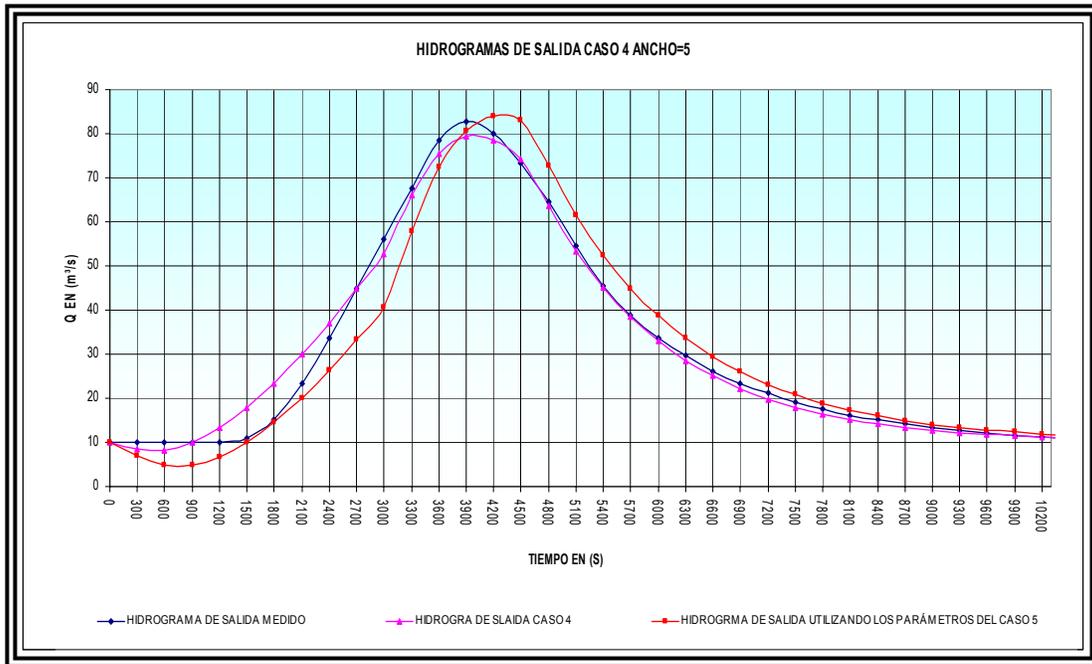


Figura 5.13 Comparación de hidrogramas de salida caso 4

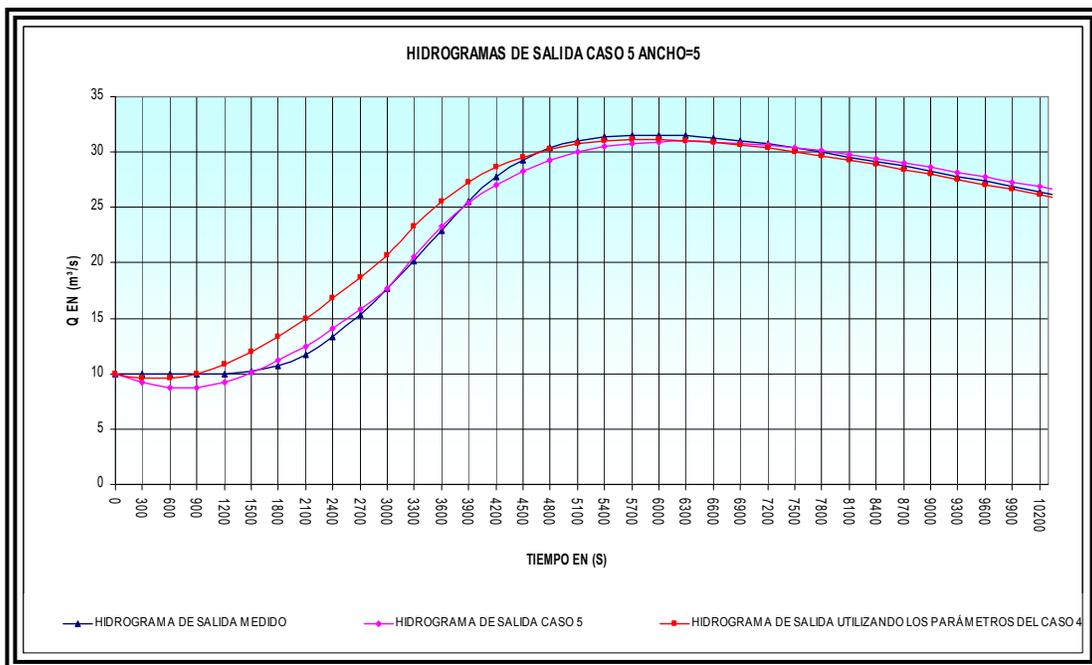


Figura 5.14 Comparación de hidrogramas de salida caso 5

### 5.3 Método de Muskingum - Cunge

En el método de Muskingum se determina  $K$  y  $X$  utilizando hidrogramas (de entrada y de salida medidos), en el método de Muskingum – Cunge estos parámetros son calculados con las expresiones propuestas por Cunge ecuaciones 4.36 y 4.40, de este modo los parámetros pueden relacionarse con las características hidráulicas del río.

Cuando se dispone de un hidrograma de entrada, se utiliza el método de Muskingum – Cunge. Cuando se tiene solamente un gasto dado y un tirante se pueden encontrar los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de tránsito ( $C_0, C_1, C_2, C_3$ );  $C_3$  considera el gasto lateral que entra o sale en cualquier sección del río.

En este trabajo se realizó lo siguiente:

Se tienen 3 casos, en cada uno el ancho varía (5, 10 y 15 m). Se realizaron dos tránsitos en cada caso; el primer tránsito realizado se hizo en un tramo de río el cual se secciono en tres partes (secciones 1-21, 21-41 y 41-61), y el segundo tránsito se efectuó en una sola sección que abarca el tramo del río sección 1-61), realizado los tránsitos se obtuvo como resultado los parámetros  $K$ ,  $X$  y los coeficientes de tránsito.

En la siguiente tabla se presenta los resultados obtenidos utilizando el programa TRAVECM.

CASO 1	ANCHO 5	SECCION	Qp	K	X	SE
		1-21	58.9	679.8193	0.0287	0.961
		21-41	53.8	666.7748	0.0847	0.634
		41-61	50.54	543.6915	0.3836	0.403
		1-61	58.9	2118.5098	0.3169	1.266
CASO 2	ANCHO 10	SECCION	Qp	K	X	SE
		1-21	58.9	698.8237	0.1833	1.015
		21-41	55.15	698.5567	0.2517	0.809
		41-61	52.33	614.1149	0.4508	0.550
		1-61	58.9	2314.85	0.376	1.842
CASO 3	ANCHO 15	SECCION	Qp	K	X	SE
		1-21	58.9	763.974	0.253	1.126
		21-41	55.5	764.902	0.335	0.908
		41-61	52.91	692.452	0.485	0.700
		1-61	58.9	2649.774	0.4127	2.377

Tabla 5.8 Resumen de resultados utilizando el programa TRAVECM.

Para saber con que gasto se deben calcular los parámetros  $K$  y  $X$  cuando solo se tiene un hidrograma, se realizó lo siguiente.

- Se propuso un tirante ( $y_n$ ), el cual se utilizó para calcular el área, perímetro y radio hidráulico en cada una de las secciones, después se utilizó la fórmula de Manning para calcular el gasto, el cual debe ser igual al  $Q_p$ .
- Obtenidos los tirantes ( $y_n$ ) correspondientes para cada  $Q_p$  del hidrograma de entrada de cada una de las secciones se prosiguió a calcular la celeridad, el número de Courant (C), la celda del número de Reynolds (D), los parámetros K y X, coeficientes de tránsito ( $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ) y la suma de errores (SE) para cada caso.
- Este procedimiento se realizó para cada uno de los casos en donde se calcularon los parámetros K y X utilizando las siguientes relaciones de gastos

1	$Q_p$
2	$Q_p(1/4)$
<b>3</b>	<b><math>Q_p(1/2)</math></b>
4	$Q_p(3/4)$

- Encontrados los parámetros K y X se realiza el tránsito en cada sección y se obtiene la suma de errores (SE) en cada caso y se escoge el caso que menor suma de errores obtuvo.
- La relación **3** que representa a  **$Q_p(1/2)$**  fue la que menor suma de errores obtuvo para los 3 casos.

Para saber cual es el gasto que se debe considerar para calcular los parámetros y los coeficientes de tránsito se utiliza la siguiente expresión

$$Q = \frac{Q_p}{2} \quad (5.1)$$

Se presentan los resultados en la tabla 5.9 y en las figuras 5.15, 5.16 y 5.17 se presentan los hidrogramas obtenidos de los tránsitos para cada caso.

CASO 1	ANCHO 5	SECCIÓN	Qmed	K	X	SE
		1-61	29.45	1072.728	0.3527	7.282
		1-21	29.45	357.5619	0.05828	3.003
		21-41	26.9	368.4526	0.08422	2.546
		41-61	25.27	376.1391	0.1012	1.464
CASO 2	ANCHO 10	SECCIÓN	Qmed	K	X	SE
		1-61	29.45	1370.072	0.4059	6.449
		1-21	29.45	456.6906	0.2178	2.395
		21-41	27.58	466.1327	0.2304	2.167
		41-61	26.17	473.7811	0.2399	1.955
CASO 3	ANCHO 15	SECCIÓN	Qmed	K	X	SE
		1-61	29.45	1561.212	0.4285	6.933
		1-21	29.45	520.4075	0.2857	2.437
		21-41	27.75	529.9587	0.2944	2.244
		41-61	26.45	537.7568	0.3011	1.598

Tabla 5.9 Resumen de resultados obtenidos utilizando Qp/2 método Muskingum-Cunge.

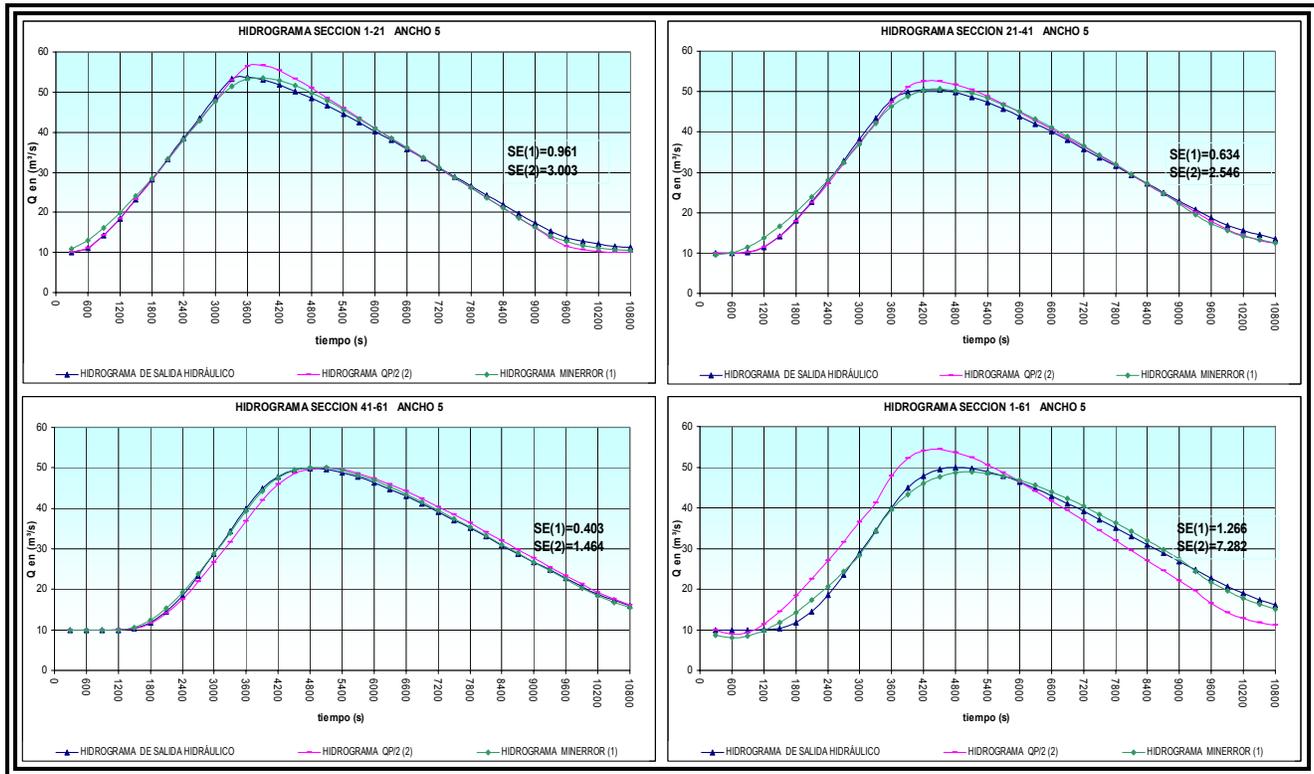


Figura 5.15 Hidrogramas de salida, secciones 1-21, 21-41, 41-61 y 1-61 caso 1, método Muskingum-Cunge.

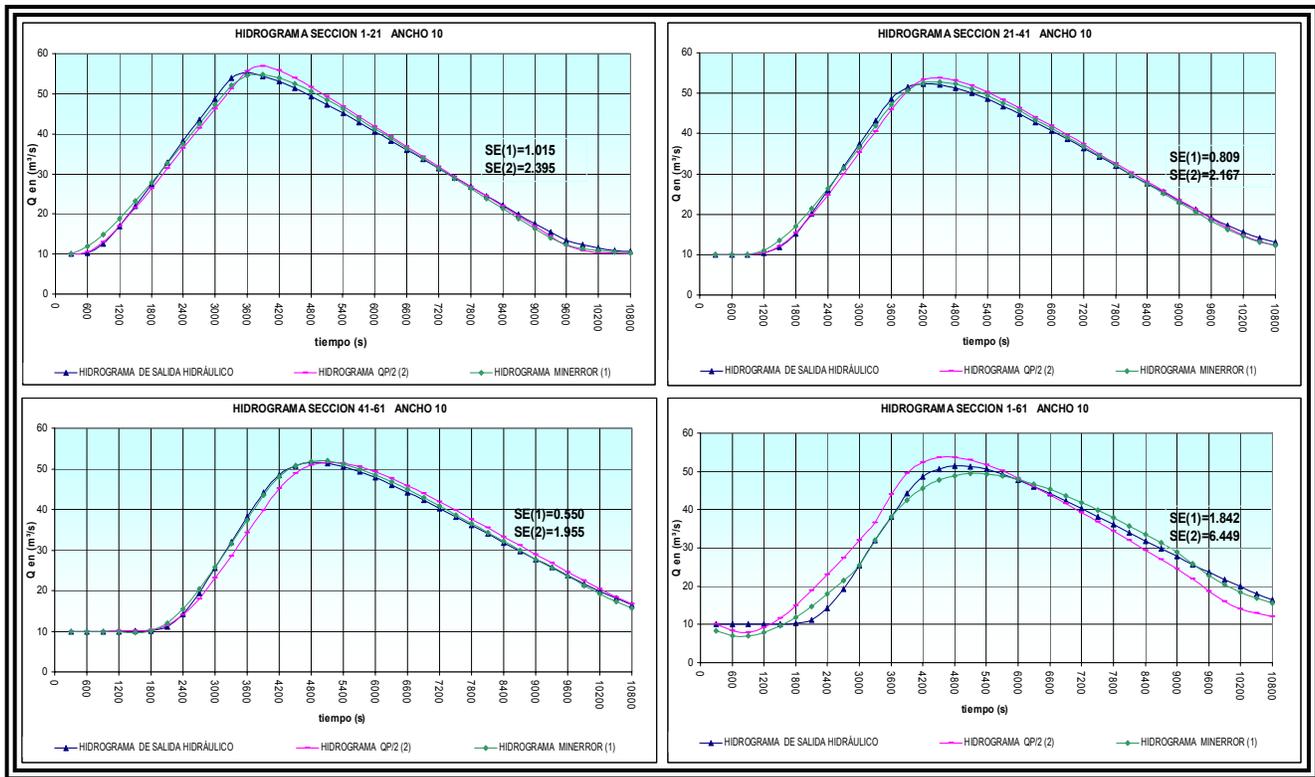


Figura 5.16 Hidrograma de salida, secciones 1-21, 21-41, 41-61 y 1-61 caso 2, método Muskingum-Cunge.

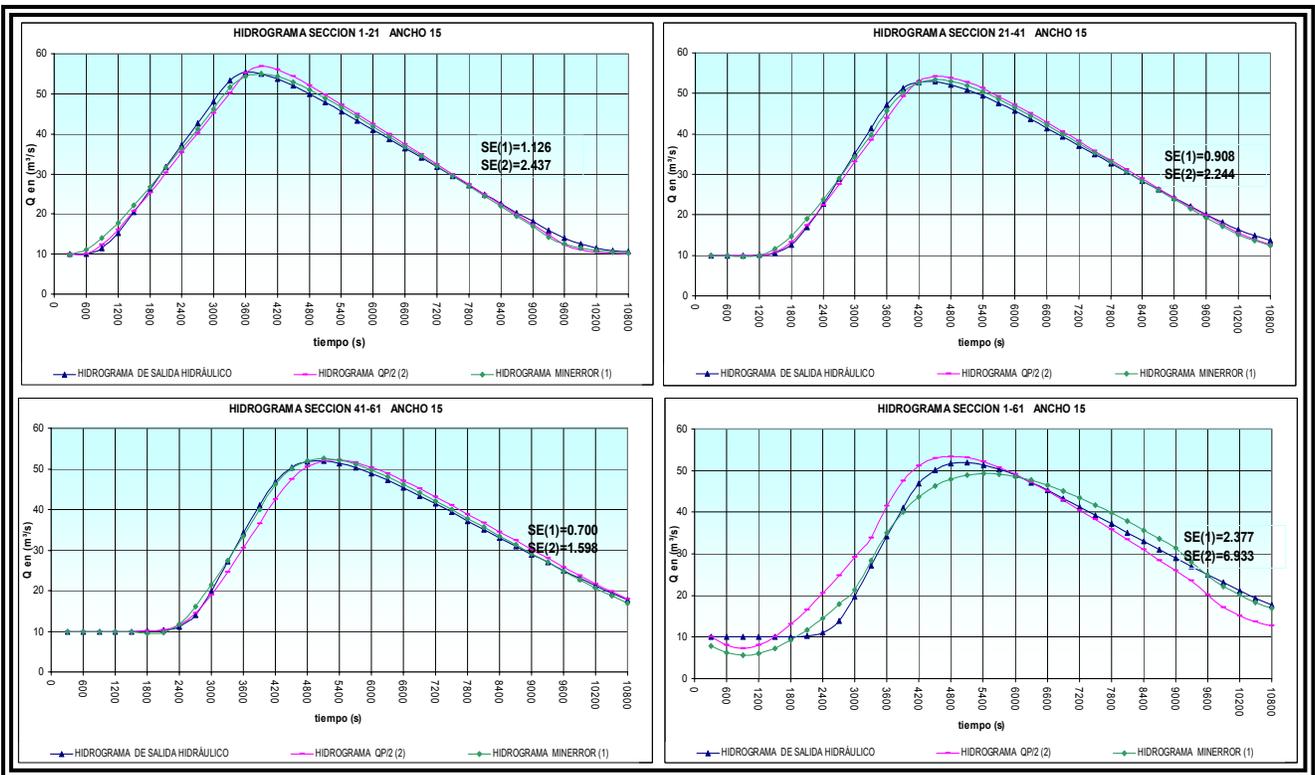


Figura 5.17 Hidrograma de salida, secciones 1-21, 21-41, 41-61 y 1-61 caso 3, método Muskingum-Cunge.

En la figura 5.15, 5.16 y 5.17 se observan los hidrogramas de salida transitados que se obtuvieron con el programa TRAVECM (hidrograma hidráulico y hidrograma minerror) y el hidrograma de salida transitado que se obtuvo utilizando la expresión 5.1, se puede observar diferencia de errores que se obtuvieron realizando el tránsito seccionando el río y sin dividirlo.

En la tabla 5.7 se observa el resultado de la SE para cada uno de los casos, se nota que la SE es mayor en los tramos donde no se secciono el río y en los casos donde sí se dividió la SE fue menor. La ventaja de realizar el tránsito por tramos es que se puede ingresar y egresar gastos laterales cuantas veces sea necesario a diferencia de realizar el tránsito sin dividir el tramo en estudio.

También se realizó el tránsito con gastos laterales ( $Q=5$  y  $Q=-5$ ) para las secciones 1- 21, 21- 41 y 41- 61 para el caso 1, empleando el programa TRAVECM, en la figura 5.18 y 5.19 se presentan los hidrogramas que se obtuvieron y en la tabla 5.8 se pueden ver los resultados de los coeficientes.

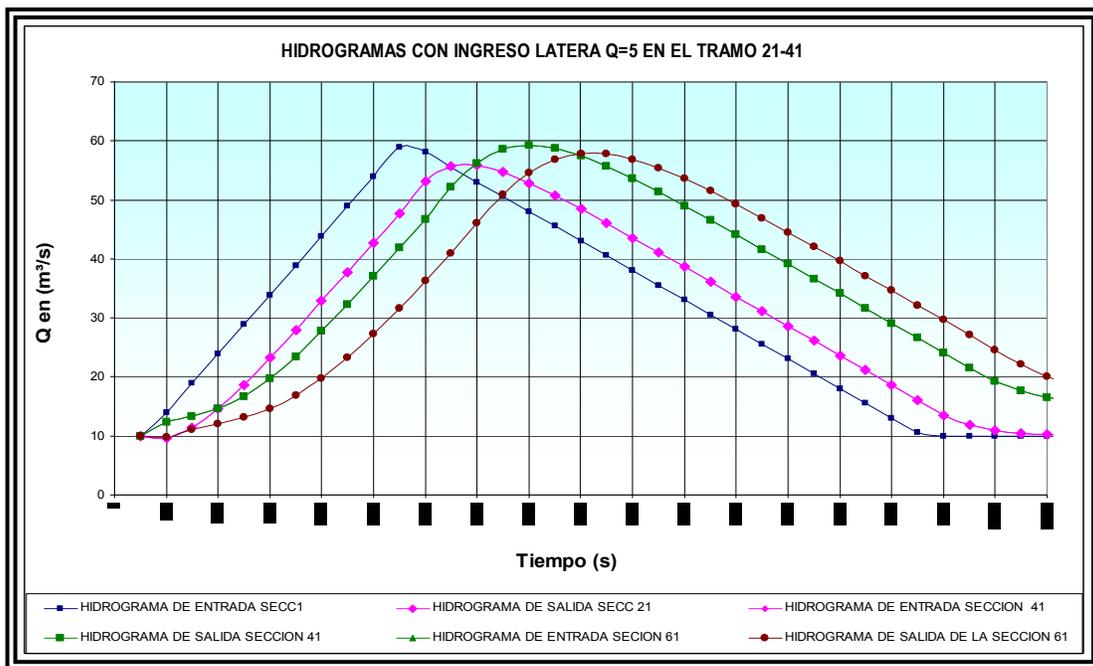


Figura 5.18 Hidrograma con ingreso lateral en el tramo 21-41 para  $Q=5$  m³/s, método Muskingum-Cunge

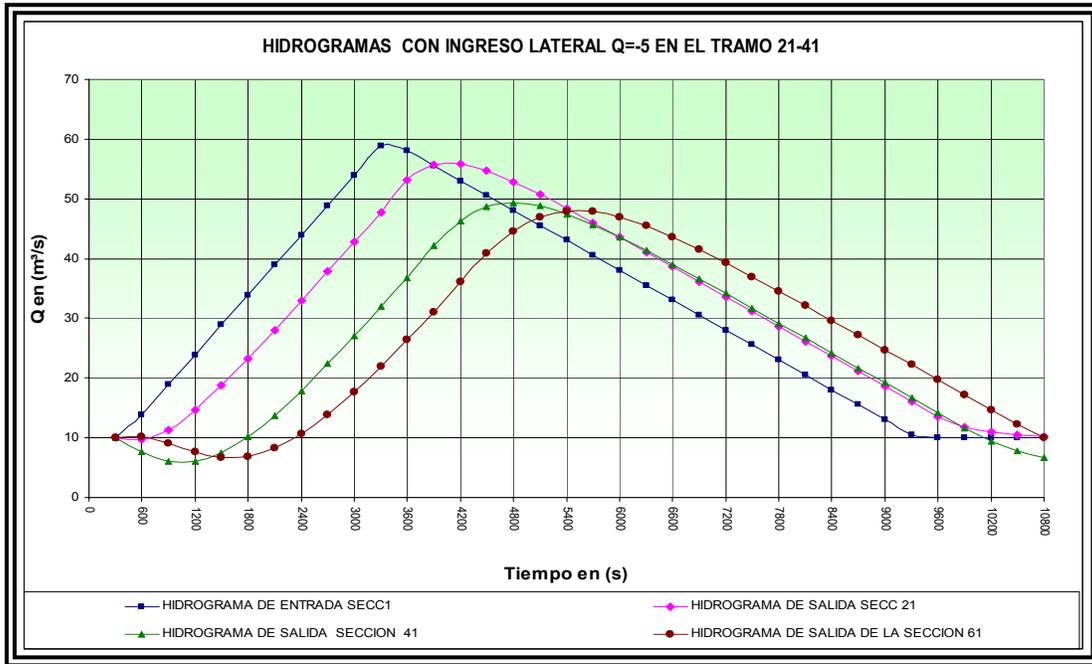


Figura 5.19. Hidrograma con ingreso lateral en el tramo 21-41 para  $Q=-5 \text{ m}^3/\text{s}$ , método Muskingum-Cunge.

COEFICIENTES DE TRÁNSITO	
PARA $Q=5$ Y $Q=-5$	
TRAVECM	
C0	-0.077818
C1	0.560408
C2	0.517410
C3	0.482600

Tabla 5.8 Coeficientes de tránsito.

En la figura 5.20 se presentan los hidrogramas que se obtuvieron al aplicar el gasto lateral  $Q=-5$  en los tres tramos.

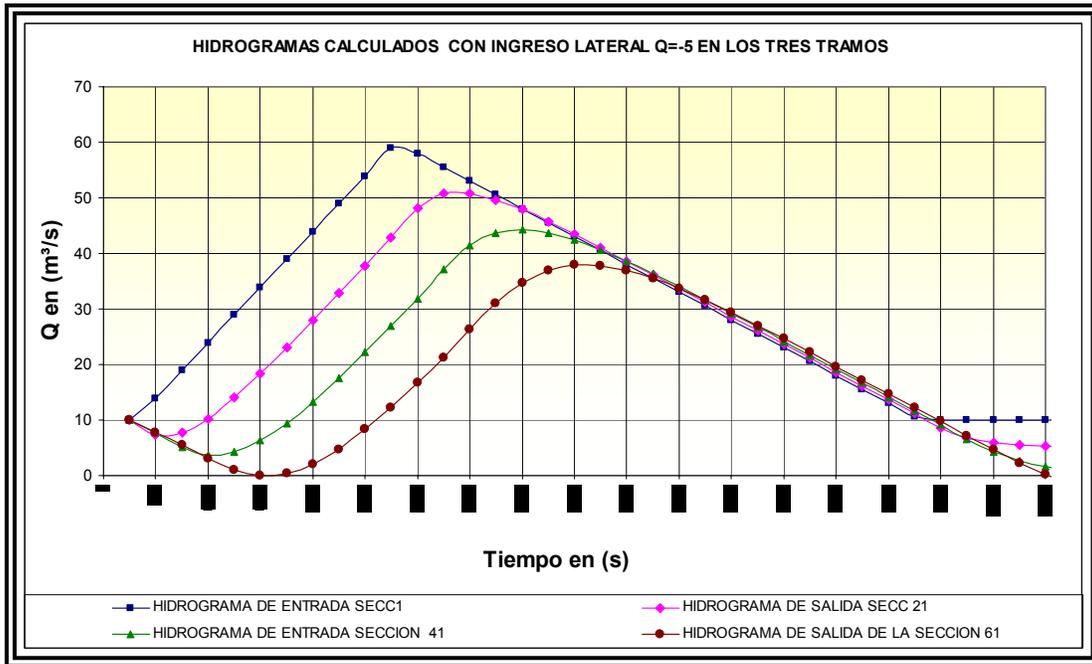


Figura 5.20 Hidrograma con ingreso lateral en los tres tramos para  $Q=-5 \text{ m}^3/\text{s}$ , método Muskingum-Cunge.

## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES

En el capítulo 5 se presentó la aplicación de varios casos utilizando el método de Muskingum, el método de la onda cinemática, Muskingum – Cunge y el método de Sánchez – Fuentes, los tres primeros son métodos hidrológicos y el último es un método hidráulico.

El método de Sánchez – Fuentes su aplicación es sencilla en comparación con programas de cómputo que existen para realizar el tránsito de avenidas hidráulico, este método tiene la ventaja de transitar un sistema de ríos tributarios y también cuando el río presenta bifurcaciones.

A diferencia de otros programas de otros programas (Hec-Ras e Info Works), a este método se le puede modificar su programación cuando se desea incluir algún caso particular, los cálculos de los tránsitos se realizan en flujo subcrítico.

En la aplicación de método de Muskingum se utilizó el programa de cómputo TRAVECM escrito en lenguaje QBasic el cual calcula los parámetros K, X y los coeficientes de tránsito  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y la suma de los errores, el método utilizado en el programa para calcular éstos fue el método de mínimos cuadrados de la suma de los errores de la estimación de los gastos de salida que es el método propuesto.

Se realizaron varios ejemplos con el programa TRAVECM, con el método de Muskingum y Muskingum – Cunge, método de onda cinemática para verificar la bondad de la aplicación del método utilizado en el programa los resultados obtenidos se compararon con los resultados del método tradicional y el método de la onda cinemática.

Con esta comparación se puede verificar que el método con la menor suma de errores en sus resultados la obtuvo el programa TRAVECM.

También se obtuvieron los parámetros  $K$  y  $X$ , con el método propuesto, el método Muskingum, el método de Overton y Muskingum – Cunge, en donde los resultados obtenidos se compararon y se dibujaron con respecto a un línea a  $45^\circ$  para saber cual de los métodos se ajusta a las características hidráulicas del cauce; los resultados del programa TRAVECM y el método tradicional son los que mejor se ajustan a la línea, mientras que los resultados del método de Overton son mayores a los obtenidos por los otros dos métodos y se alejan de la línea.

Para saber si los resultados de programa TRAVECM o los del método de Overton son los que se ajustan a las características hidráulicas de cauce se escoge el que menor suma de errores tenga. En este caso el método que menor suma de errores tuvo en sus resultados fue el programa TRAVECM.

Otras de las aplicaciones que se hicieron en los casos 4 y 5 fue realizar el tránsito en cada uno de estos y obtener sus coeficientes de tránsito  $C_0$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , los coeficientes obtenidos para el caso 5 se utilizaron para realizar un tránsito en el caso 4, después el hidrograma de salida medido del caso 4 se comparó con el hidrograma de salida transitado, ocupando los coeficientes de tránsito del caso 5 y con el hidrograma de salida transitado ocupando los coeficientes de tránsito del caso 4.

Esto se hizo para saber si es conveniente calcular los coeficientes de tránsito en el mismo río cada vez que se tengan diferentes hidrogramas a transitar y si es necesario realizar un solo tránsito o varios.

En la comparación que se realizó con los hidrogramas obtenidos de los casos 4 y 5, se recomienda que cada vez que se tengan diferentes hidrogramas a transitar se deberá realizar el tránsito para cada uno de estos y calcular sus parámetros para diferentes  $Q_p$ , utilizando las mismas características hidráulicas y geométricas del río, ya que si solo se utilizan los coeficientes de un determinado hidrograma para realizar el tránsito de varios hidrogramas en un río, se puede obtener como resultado un hidrograma sobre estimado lo que puede ocasiona que la obra de protección seleccionada sea más costosa o se tomen decisiones equivocadas.

El método de Muskingum – Cunge se puede aplicar cuando se tiene un hidrograma de entrada y también si se tiene gastos de ingreso y egreso.

Cuando solo se tiene un hidrograma a transitar y se requiere conocer los parámetros  $X$  y  $K$ , estos se pueden determinar por medio de las ecuaciones 4.108 y 4.112; para cuando se desee calcular el gasto para poder determinar los parámetros se utiliza la expresión 5.1 ya que su aplicación obtuvo menor error en comparación con las otras relaciones realizadas, también se observó que es mejor realizar el tránsito seccionando el río, ya que se tiene menor error, de lo contrario si no se secciona y se realiza el tránsito tomando el tramo de río como una sola sección el error que se obtiene es mayor; otras de las ventajas que se tiene seccionando el río es que se pueden incluir ingresos y egresos laterales.

## APÉNDICE A

### A.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Se considera un volumen de control en un plano  $x, t$  definido entre las secciones  $x_1$  y  $x_2$ ; se conocen los valores en el tiempo  $t_1$ , y se desean calcular en el tiempo  $t_2$ .

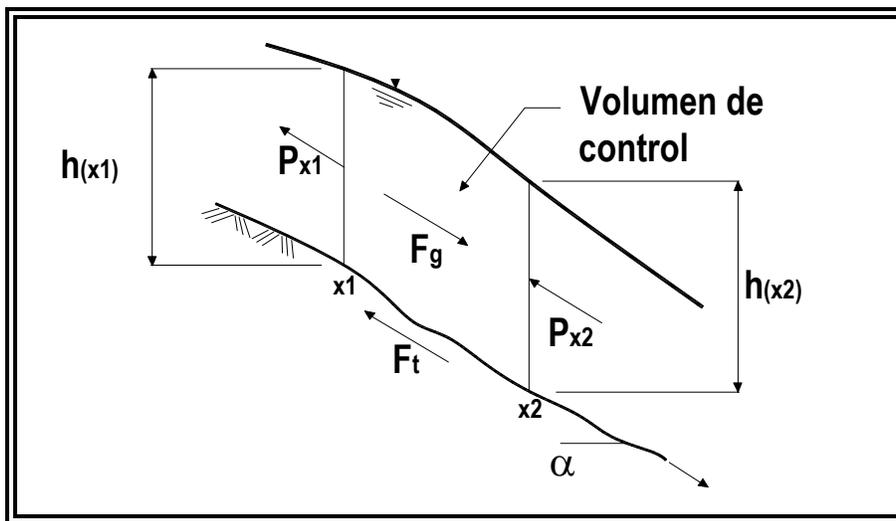


Figura A.1.1 Volumen de control (corte longitudinal)

El principio de conservación de la masa aplicado a un volumen de control de la figura A.1.1 establece que la cantidad de flujo de masa hacia el volumen de control es igual al cambio de almacenamiento en el mismo entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ . La cantidad de masa que entra por el flujo hacia el volumen de control es

$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho UA)_{x_1} - (\rho UA)_{x_2}] dt \quad (A.1.1)$$

donde

$\rho$  Densidad del agua

- $U$  Velocidad media de la sección
- $A$  Área de la sección transversal
- $X$  Indica la sección a una distancia  $x_1$  a  $x_2$
- $(\rho UA)_{x_1}$  Es el flujo de masa por la sección  $x$  en la unidad de tiempo

El cambio de almacenamiento de la masa de líquido dentro del volumen de control entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_1} - (\rho A)_{t_2}] dt \quad (\text{A.1.2})$$

La relación integral que define la conservación de masa o ecuación de continuidad en caso de que se considere la densidad constante esta dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dt + \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] dt = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

### Forma diferencial

La versión conservativa acepta que las variables dependientes de las ecuaciones A.1.3 y de la ecuación

$$\int_{x_1}^{x_2} (Q_{t_2} - Q_{t_1}) dx = \int_{t_1}^{t_2} [(U^2 A)_{x_1} - (U^2 A)_{x_2}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(II)_{x_1} - (II)_{x_2}] dt + g \int_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} I_2 dx dt + g \int_{t_1 x_1}^{t_2 x_2} A(S_0 - S_f) dx dt \quad (\text{A.1.4})$$

Sean continuas y derivables que se pueden escribir, por expansiones en series de Taylor.

$$\begin{aligned} (A)_{t_2} &= (A)_{t_1} + (\partial A / \partial t) \Delta t + (\partial^2 A / \partial t^2) \Delta t^2 / 2! + \dots \\ (Q)_{x_2} &= (Q)_{x_1} + (\partial Q / \partial x) \Delta x + (\partial^2 Q / \partial x^2) \Delta x^2 / 2! + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1.5})$$

De la primera expresión tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \right\} dx \quad (\text{A.1.6})$$

Si  $\Delta t$  tiende a cero y se integra en el tiempo se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (\text{A.1.7})$$

Como los términos de orden dos en adelante son pequeños comparados con  $-\partial A / \partial t$ , a partir de la expansión en serie de  $(Q)_{x_2}$

$$\int_{t1}^{t2} [(Q)_{x2} - (Q)_{x1}] dt = \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt \quad (A.1.8)$$

La ecuación A.1.3 queda de la siguiente forma

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (A.1.9)$$

Haciendo sustituciones se obtiene

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (U^2 A)}{\partial x} \right] dt dx = -g \int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \left[ \frac{\partial II}{\partial x} - I_2 - A(S_0 - S_f) \right] dt dx \quad (A.1.10)$$

Para que las integrales A.1.3 y A.1.10 sean validas en todo el plano  $(x,t)$ , los integrandos deben ser nulos, de la ecuación A.1.9 se obtiene la versión diferencial de la ecuación de continuidad que es la siguiente:

$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$	(A.1.11)
---	----------

## A.2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El principio de conservación de la cantidad de movimiento aplicado al volumen de control de la figura A.1.1 establece que el cambio de cantidad de movimiento dentro del volumen, entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es igual a la suma de la cantidad de movimiento neta que entra al volumen con el flujo, más la integral de las fuerzas externas que actúan sobre él.

La cantidad de movimiento se define como el producto de la masa por la velocidad, la cantidad de movimiento que entra con el flujo será entonces  $\rho UAU = \rho U^2 A$ .

La cantidad de movimiento neta que entra al volumen de control entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  es

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ (\rho U^2 A)_{x_1} - (\rho U^2 A)_{x_2} \right] dt \quad (A.2.1)$$

La cantidad de movimiento contenida en el volumen de control de la figura A.1.1 en cualquier instante  $t$  es  $\int_{x_1}^{x_2} [\rho UA] dx$  y el cambio de la cantidad de movimiento dentro del volumen de control, entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  será

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} \left[ (\rho UA)_{t_2} - (\rho UA)_{t_1} \right] dx \quad (A.2.2)$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control en la dirección  $x$  son:

La *Presión* es resultante de las fuerzas aplicadas en las fronteras  $x_1$  y  $x_2$  del volumen de control de la figura A.2.1 aceptando la hipótesis de distribución hidrostática de presiones en la vertical, la fuerza de presión que actúa en cualquier sección  $x$  del volumen de control es

$$P_x = g \int_0^{h(x)} \rho [h(x)\eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (A.2.3)$$

donde

- $\eta$  es una altura a partir del fondo del canal
- $\sigma$  es el ancho del canal a la altura  $\eta$

El impulso debido a la fuerza de presión que actúa en la dirección  $x$  es la integral en el tiempo de la resultante de las fuerzas en las secciones  $x_1$  y  $x_2$ .

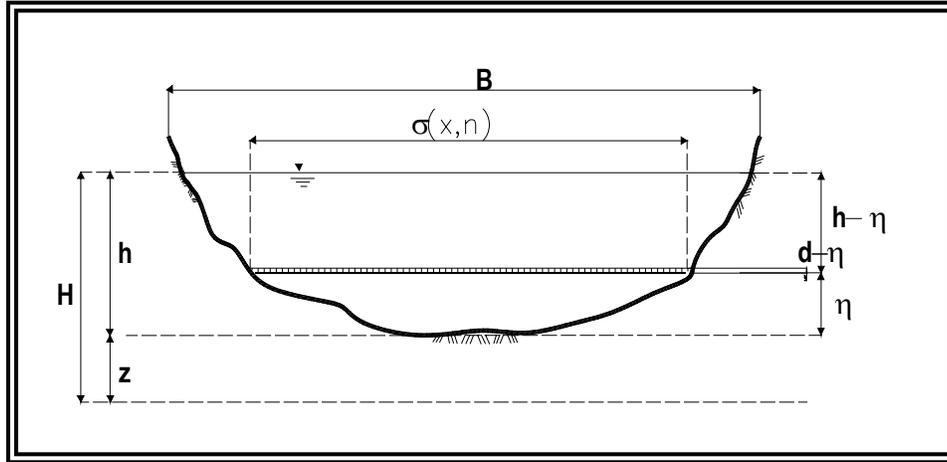


Figura A.2.1 Sección transversal

$$\int_{t1}^{t2} (P_{x1} - P_{x2}) dt = \rho g \int_{t1}^{t2} [(II)_{x1} - (II)_{x2}] dt \quad (A.2.4)$$

donde

$II$  se define con la integral siguiente

$$II = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (A.2.5)$$

Cuando un canal no es prismático, existe una fuerza adicional de presión debida al cambio de geometría del canal

$$V_x = \rho g \int_{x1}^{x2} \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left[ \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right]_{ho} d\eta dx \quad (A.2.6)$$

$(\partial \sigma / \partial x) d\eta dx$  Es el incremento del área hidráulica  $A$  a una altura  $ho$  medida desde el fondo del canal, en una longitud infinitesimal  $dx$  en la dirección  $x$ ,  $dA = d\sigma d\eta = (\partial \sigma / \partial x) d\eta dx$ , y  $[h(x) - \eta]$  es la distancia vertical de la superficie libre al centroide del elemento de área  $\sigma d\eta$ , por lo tanto la fuerza que actúa en el volumen de control debido al cambio de geometría de la sección entre los tiempo  $t_1$  a  $t_2$  es la siguiente

$$\int_{t1x1}^{t2x2} V_x dx dt = \rho g \int_{t1x1}^{t2x2} \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left[ \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right]_{ho} d\eta dx dt = \rho g \int_{t1x1}^{t2x2} I_2 dx dt \quad (A.2.7)$$

donde

12 se define con la siguiente integral

$$I2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left[ \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right]_{ho} d\eta \quad (A.2.8)$$

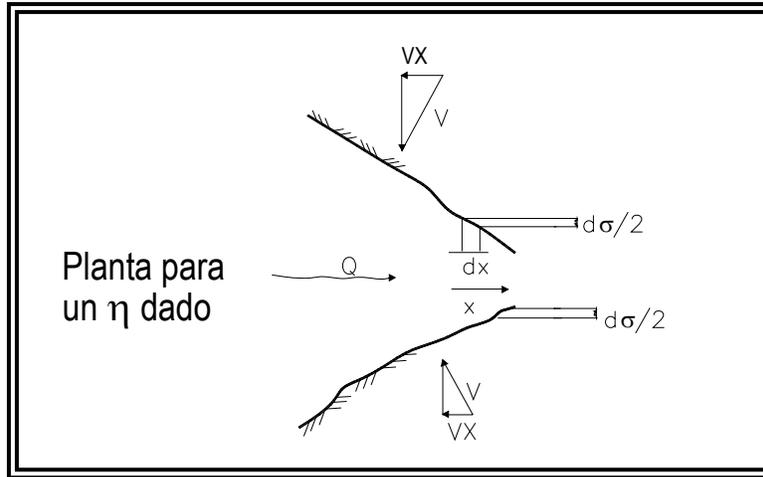


Figura A.2.2 Fuerza por cambio de ancho

Se hace notar que para un canal prismático, sea la forma de su sección transversal,  $\sigma(x, h_0) = cte$ , y por tanto  $I2=0$ . se debe considerar que  $\partial \sigma / \partial x$  debe ser pequeño, que el cambio de ancho sea gradual para que las curvaturas de las líneas de corriente se puedan considerar despreciable, y no se violen las hipótesis de Saint-Venant.

En general la fuerza dada por la ecuación A.2.7 es pequeña comparada con la de la presión hidrostática dada por la ecuación A.2.4.

La gravedad es la fuerza debida a la componente de peso del agua, contenida en el volumen de control de la figura A.1.1 en dirección del eje del canal; cualquier instante se calcula como

$$Fg = \rho g \int_{x1}^{x2} S_0 A dx \quad (A.2.9)$$

donde

$S_0 = -\partial Z / \partial x = \text{Sen } \alpha \approx \tan \alpha$ , es la pendiente del fondo del cauce.

La resistencia al flujo es conocida como fuerza de fricción, se aplica al volumen de control considerando los esfuerzos cortantes en el fondo y las márgenes del canal; se expresa de forma similar a la ecuación A.2.9, mediante la pendiente de fricción  $S_f$  equivalente a la pendiente de la línea de energía

necesaria para vencer la resistencia al flujo debida a la rugosidad del fondo y las márgenes, entonces la fuerza debida a la resistencia al flujo o fricción que actúa sobre el volumen de control es

$Fr = \rho g \int_{x1}^{x2} [S_f A] dx$  Como  $Fg$  y  $Fr$  actúa en direcciones opuestas, la combinación de ambas en el intervalo de  $t_1$  a  $t_2$ , expresada en la dirección  $x$ , es

$$\int_{t1}^{t2} (Fg - Ff) dt = \rho g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} A (S_0 - S_f) dx dt \quad (A.2.10)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones A.2.1, A.2.4, A.2.7, A.2.9 al aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento resulta

$$\int_{x1}^{x2} (Q_{t2} - Q_{t1}) dx = \int_{t1}^{t2} [(U^2 A)_{x1} - (U^2 A)_{x2}] dt + g \int_{t1}^{t2} [(II)_{x1} - (II)_{x2}] dt + g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} I_2 dx dt + g \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} A (S_0 - S_f) dx dt \quad (A.2.11)$$

Que es la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en forma integral para canales de cualquier sección transversal.

Las ecuaciones A.2.10 y A.2.11 describen el flujo transitorio a superficie libre, las ecuaciones son por lo tanto válidas para cualquier volumen de control en el plano  $(x,t)$  y para fenómenos en los cuales pueden presentarse discontinuidades en las variables.

### Forma diferencial

Haciendo  $U=Q/A$  en la ecuación A.1.10 y ordenando términos se tiene

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gII \right) = gA(S_0 - S_f) + gI^2 \quad (A.2.12)$$

La ecuación A.2.12 establece en forma diferencial el principio de conservación de la cantidad de movimiento, cuyas variables sean continuas y tengan derivadas continuas.

Las ecuaciones diferenciales de continuidad y cantidad de movimiento están descritas de forma divergente de las ecuaciones diferenciales parciales; si ambas ecuaciones están igualadas a cero, se cumple la derivada total de las funciones vectoriales de masa y cantidad de movimiento es nula en un contorno cerrado en el plano  $(x,t)$ ; si la divergencia de una función es nula la función se conserva en su volumen de control, cuando los términos del lado derecho de la ecuación A.2.12 son diferentes de cero, la cantidad de movimiento no se conserva, a estos términos suelen dárseles la interpretación de fuentes o sumideros de cantidad de movimiento.

Para la versión no conservativa de la ecuación A.2.12 se tiene que evaluar la derivada de  $I1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + (gI1) = g \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (A.2.13)$$

La regla de Leibniz permite la diferenciación de un integral definida (Wylie 1982), si se considera que  $\sigma(x, h) = B(x)$  y que la integral de  $\sigma d\eta$  es igual al área de la sección, al aplicar la regla nos queda lo siguiente:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + (gI1) = g \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^{h(x)} [\sigma(x, \eta) d\eta + g] \int_0^{h(x)} [(h(x) - \eta) \left[ \frac{\partial B}{\partial x} \right]_{h=cte} d\eta \quad (A.2.14)$$

El último término es igual al dado por la ecuación A.2.8

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + (gI1) = gA(x) \frac{\partial h}{\partial x} + gI2 \quad (A.2.15)$$

Sustituyendo la ecuación A.2.12 queda

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_o) = 0} \quad (A.2.16)$$

Eliminando  $gI1$  ya no es posible escribir esta ecuación en la forma de la ecuación A.2.12 por lo que ya no se puede obtener divergencia nula, en sentido estricto esto significa que ya ni se conserva la cantidad de movimiento, esto en si implica un error, por esta razón en la ecuación A.2.16 ya no se habla de conservación de cantidad de movimiento, a esta expresión se le denomina ecuación dinámica.

$$S_o - v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x} = S_f \quad (A.2.17)$$

y si la pendiente del fondo se considera  $S_o = -\frac{\partial z}{\partial x}$ , sustituyendo en la ecuación A.2.16 queda de la siguiente forma

$$-\frac{\partial z}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x} = S_f \quad (A.2.18)$$

Sí se hace  $z+h=y$ , la ecuación A.2.18 que de la siguiente forma

$$-\frac{\partial y}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial x} = S_f \quad (\text{A.2.19})$$

## APÉNDICE B

### DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MUSKINGUM – CUNGE

Si la regla de Leibnitz se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, z) dz + f(b, z) \frac{\partial b}{\partial x} - f(a, z) \frac{\partial a}{\partial x} \quad (B.1)$$

En forma diferencial el área se escribe como

$$A = \int_0^h \xi(x, z) dz \quad (B.2)$$

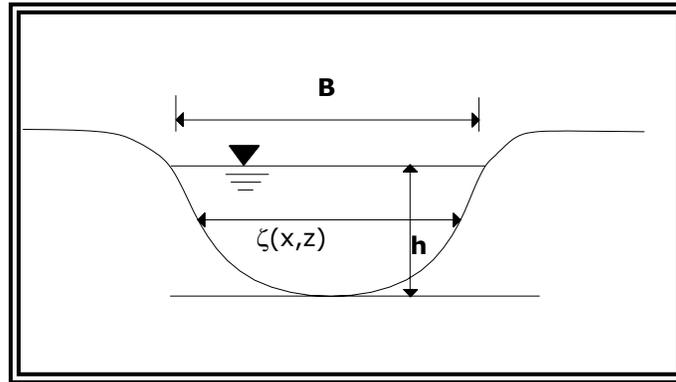


Figura B.1 Sección transversal de un río.

Derivando parcialmente la ecuación A.3.2 con respecto a  $t$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h(x)} \xi(x, z) dz = \quad (B.3)$$

Resolviendo la ecuación B.3 y apoyándose en la regla de Leibnitz

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} \xi(x, z) dz + \xi(h, z) \frac{\partial h}{\partial t} - \xi(0, t) \frac{\partial 0}{\partial t} \quad (B.4)$$

Simplificando

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 + B \frac{\partial h}{\partial t} \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B \frac{\partial h}{\partial t} \quad (B.6)$$

Sustituyendo la ecuación B.6 en la B.11

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (B.7)$$

Al dividir entre B y ordenando

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{q}{B} \quad (B.8)$$

Despejando  $\frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{q}{B} - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (B.9)$$

De la ecuación de cantidad de movimiento, ( A.2.12 ) se puede escribir

$$S_f = S_o - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (B.10)$$

Sí en la ecuación B.10 se despreciaron  $\frac{\partial v}{\partial t}$  y  $\frac{\partial v}{\partial x}$  queda

$$S_f = S_o - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (B.11)$$

$$Q = K S_f^{1/2} \quad (B.12)$$

$$S_f = Q^2 K^{-2} \quad (B.13)$$

$$K \frac{Q}{S_f^{1/2}} \quad (B.14)$$

Derivando con respecto a  $x$  la ecuación B.9

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (B.15)$$

Sustituyendo la ecuación B.13 en la ecuación B.11

$$Q^2 K^{-2} = S_o - \frac{\partial h}{\partial x} \quad (B.16)$$

Despejando  $\frac{\partial h}{\partial x}$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = S_o - Q^2 K^{-2} \quad (B.17)$$

Derivando con respecto a  $t$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} = -2K^{-2} Q \frac{\partial Q}{\partial t} + 2Q^2 K^{-3} \frac{\partial K}{\partial t} \quad (B.18)$$

Se sabe que sí

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dK}{dh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (B.19)$$

Y por otro lado

$$\frac{dK}{dh} = \frac{dK}{dA} \frac{dA}{dh} = B \frac{dK}{dA} \quad (B.20)$$

$$\frac{dA}{dh} = B$$

Sustituyendo la ecuación B.14 en B.20

$$\frac{dK}{dh} = B \frac{d}{dA} \left( \frac{Q}{S_f^{1/2}} \right) \quad (B.21)$$

$$\frac{dK}{dh} = \frac{B}{S_f^{1/2}} \frac{dQ}{dA} = \frac{B}{S_f^{1/2}} C \quad (B.22)$$

Al sustituir la ecuación B.22 en la B.19

$$\frac{dK}{\partial t} = \frac{B}{S^{1/2}} C \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{B.23})$$

Al considerar la ecuación B.14 y la ecuación B.23 en la ecuación B.18

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} = - \frac{2Q}{\left(\frac{Q^2}{S_f}\right)} Q \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q^2}{\left(\frac{Q^3}{S_f^{3/2}}\right)} \frac{B}{S_f^{1/2}} C \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{B.24})$$

simplificando

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} = \frac{-2S_f}{Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{S_f BC}{Q} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{B.25})$$

Al sustituir la ecuación B.9

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} = -2S_f \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2S_f BC}{Q} \left[ \frac{q}{B} - \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} \right] \quad (\text{B.26})$$

Igualemos las ecuaciones B.15 y B.26

$$-\frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -2S_f \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2S_f C q}{Q} - \frac{2S_f C}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{B.27})$$

Al multiplicar por  $-\frac{Q}{2S_f}$

$$\frac{Q}{2BS_f} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = Q \frac{\partial Q}{\partial t} - Cq - C \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Ordenando

$$\frac{Q}{2BS_f} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Cq = Q \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{B.28})$$

Si

$$\mu = \frac{Q}{2BS_f} \quad (B.29)$$

entonces la ecuación queda de la siguiente forma

$$\mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Cq = Q \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (B.30)$$

Por otra parte, de la ecuación A.1.11 dice

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q$$

Si

$$\frac{\partial A}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (B.31)$$

$$\frac{dA}{dQ} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (B.32)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{dQ}{dA} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dQ}{dA} q \quad (B.33)$$

Despejando  $\frac{\partial Q}{\partial t}$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -C \frac{\partial Q}{\partial x} + Cq \quad (B.34)$$

Al derivar parcialmente con respecto a  $x$  ( $C$  y  $q$  son constantes).

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (B.35)$$

Despejando  $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\frac{1}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \quad (B.36)$$

Al sustituir la ecuación B.27 en la B.30

$$\mu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + Cq = \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (B.37)$$

$$-\frac{\mu}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + Cq = \frac{\partial Q}{\partial t} + C \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (B.38)$$

Resolviendo la ecuación B.38 por diferencias finitas y basándose en la figura B.2

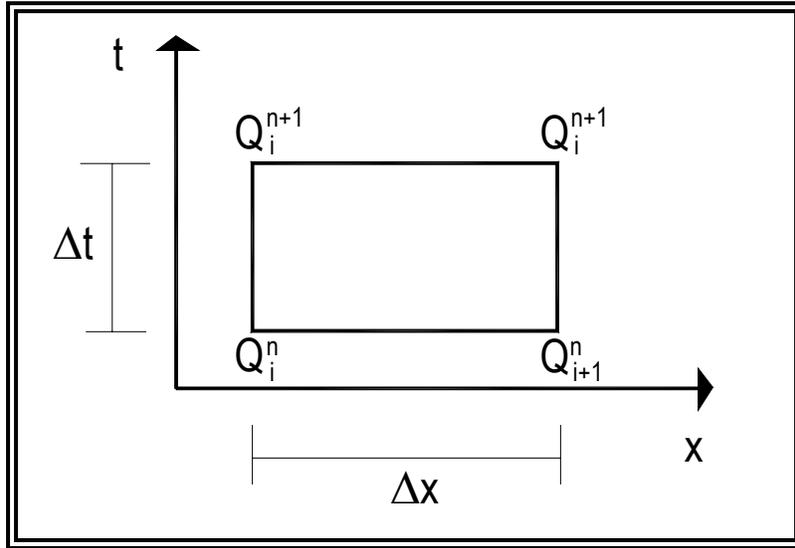


Figura B.2 Discretización espacio-tiempo

$$-\frac{\mu}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \approx -\frac{\mu}{C} \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{i+1} - \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_i \right] \quad (B.39)$$

De la ecuación B.39 se puede escribir en diferencias finitas como

$$-\frac{\mu}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \approx -\frac{\mu}{C} \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i+1}^n}{\Delta t} - \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \right] \quad (B.40)$$

Factorizando

$$-\frac{\mu}{C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} \approx -\frac{\mu}{C} \frac{1}{\Delta x \Delta t} [Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n + Q_i^n] \quad (B.41)$$

Por otro lado escribiendo en diferencias finitas  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2} \right] \quad (B.42)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1}}{2} - \frac{Q_{i+1}^n + Q_i^n}{2} \right] \quad (B.43)$$

Sustituyendo B.41, B.42 y B.43 en B.40 se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{C} \frac{1}{\Delta x \Delta t} [Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1} - Q_{i+1}^n + Q_i^n] + C q_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{Q_i^{n+1} + Q_{i+1}^{n+1}}{2} - \frac{Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2} \right] + \\ &\frac{C}{\Delta x} \left[ \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{2} + \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{2} \right] \end{aligned} \quad (B.44)$$

Factorizando y simplificando

$$\begin{aligned} \left( \frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right) Q_i^{n+1} &= \left( -\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right) Q_i^n + \left( \frac{2\mu}{C\Delta x} - 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right) Q_{i+1}^n + \\ &\left( \frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 - \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right) Q_{i+1}^n + 2Cq \end{aligned} \quad (B.45)$$

Al dividir entre  $\left( \frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \right)$  la ecuación final es la de Muskingum - Cunge

$$\boxed{Q_i^{n+1} = C_0 Q_i^{n+1} + C_1 Q_i^n + C_2 Q_{i+1}^n + C_3 Q_L} \quad (B.46)$$

Siendo

$$C_0 = \frac{\frac{2\mu}{C\Delta x} - 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}} \quad (B.47)$$

$$C_1 = \frac{-\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}} \quad (B.48)$$

$$C_2 = \frac{\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 - \frac{C\Delta t}{\Delta x}}{\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}} \quad (B.49)$$

$$C_3 = \frac{2C}{\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}} \quad (B.50)$$

$$Q_L = \bar{q} \quad (B.51)$$

Sí se elimina el gasto lateral y se iguala el denominador de las expresiones B.48 a B.50 con los de los coeficientes de Muskingum tradicional (ecuaciones 4.28 a 4.30)

$$2(1 - X) + \frac{\Delta t}{K} = -\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x} \quad (B.52)$$

Se puede establecer que

$$\frac{\Delta t}{K} = \frac{C\Delta t}{\Delta x} \quad (B.53)$$

$$2(1 - X) = -\frac{2\mu}{C\Delta x} + 1 \quad (B.54)$$

En donde

$$K = \frac{\Delta x}{C} \quad (B.55)$$

$$X = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{C\Delta x} \quad (B.56)$$

Al despejar C de la ecuación B.55

$$C = \frac{\Delta x}{K} \quad (B.57)$$

Y de B.56 se puede escribir que

$$\mu = \left( X - \frac{1}{2} \right) C\Delta x \quad (B.58)$$

Por otra parte, al tomar en cuenta B.57 y B.58 en las expresiones B.47 a B.50 se llega a

$$C_0 = \frac{(\Delta t / K) - 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (B.59)$$

$$C_1 = \frac{(\Delta t / K) + 2X}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (B.60)$$

$$C_2 = \frac{2(1 - X) - (\Delta t / K)}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (B.61)$$

$$C_3 = \frac{2(\Delta t / K)}{2(1 - X) + (\Delta t / K)} \quad (B.62)$$

## APÉNDICE C

### LISTADO DEL PROGRAMA

```
CLS
READ M, DT, QMAX
DATA 150,300,300
M10 = M * 10
DIM X(M10), Y(M10), Z(M10), II(M10), OO(M10), I(M10), O(M10)
'A$ = "a:TR_TE_PU.TXT"
'A$ = "a:TR_BI_GR.TXT"
'A$ = "a:TR_TA_PN.TXT"
'A$ = "a:TR_PI_GA.TXT"
'A$ = "a:GASTOM11.DAT"
A$ = "C:GASTOMM1.DAT"
"'A$ = "a:TR_PU_GA.TXT"
'A$ = "E:ALICIA22.DAT"
'A$ = "E:GASTOMM2.DAT"
'A$ = "C:GASTOMM1.DAT"
AR$ = LEFT$(A$, 10) + ".MES"
OPEN "I", #1, A$
OPEN "O", #2, AR$
PRINT #2, "MUSKDIF4.BAS"; AR$; DATE$; TIME$
INPUT #1, M, A$
M1 = M - 1
MM1 = M1
TMAX = M1 * DT
IMAX = 0
FOR I = 1 TO M
  INPUT #1, II(I), OO(I)
  PRINT I; II(I); OO(I)
  I(I) = II(I); O(I) = OO(I)
  IF II(I) > IMAX THEN
    IMAX = II(I)
  END IF
NEXT I
CLOSE #1
,
DTN = DT
KT = DT / DTN
,
'PARA WINDOW
WWH = INT(IMAX * 1.2)
WWV = INT(M * 1.2)
,
GOSUB 1000
STOP
END
500 FOR J = 0 TO M1
  IF TP <= DT * J THEN EXIT FOR
  NEXT J
  IF J > M1 THEN J = J - 1
  J2 = J - 1
  TT2 = TP - J2 * DT
```

```

PENI = (II(J) - II(J2)) / DT
IP = PENI * TT2 + II(J2)
PEN0 = (OO(J) - OO(J2)) / DT
OP = PEN0 * TT2 + OO(J2)
'PRINT DT * J2; TP; DT * J; II(J2); IP; II(J)
'PRINT DT * J2; TP; DT * J; OO(J2); OP; OO(J)
'INPUT ; HHH
RETURN
1000 '
MM1 = M1
TMAX = M1 * DTN
,
FOR I = 1 TO M1
  I1 = I + 1
  X(I) = I(I1) - O(I)
  Y(I) = I(I) - O(I)
  Z(I) = O(I1) - O(I)
NEXT I
SXX = 0: SXY = 0: SYY = 0
SXO = 0: SYO = 0: SXZ = 0
SYZ = 0
FOR I = 1 TO M1
  SXX = SXX + X(I) * X(I)
  SXY = SXY + X(I) * Y(I)
  SXZ = SXZ + X(I) * Z(I)
  SYY = SYY + Y(I) * Y(I)
  SYZ = SYZ + Y(I) * Z(I)
NEXT I
CA = SXX
CB = SXY
CC = SYY
CD = SXZ
CE = SYZ
DE = CA * CC - CB * CB
DC = CD * CC - CE * CB
DD = CA * CE - CB * CD
C = DC / DE
D = DD / DE
Z = (D - C) * .5 * DTN / (D + C)
K = DTN / (D + C) - DTN * .5 + Z
X = Z / K
PRINT C; D; 1 - C - D; X; K; K / 3600
PRINT "MUSKDIF4.BAS"; AR$; DATE$; TIME$
PRINT USING "K=#####.#### X=##.####"; K; X
' C; D; 1 - C - D; X; K; K / 3600
'LPRINT "MUSKDIF4.BAS"; AR$; DATE$; TIME$
'LPRINT USING "K=#####.#### X=##.####"; K; X
,
,
C2 = K - K * X + .5 * DTN
C0 = (-K * X + .5 * DTN) / C2
C1 = (K * X + .5 * DTN) / C2
C3 = DTN / C2
C2 = (K - K * X - .5 * DTN) / C2
PRINT USING "C0=##.#### C1=##.#### C2=##.#### C0+C1+C2=##.#### C3=#####.####"; C0; C1; C2; C0 + C1 + C2; C3
'LPRINT USING "C0=##.#### C1=##.#### C2=##.#### C0+C1+C2=##.####"; C0; C1; C2; C0 + C1 + C2
SCREEN 12

```

```

VIEW (100, 350)-(495, 455), 1, 2
'WINDOW (0, 100)-(WWH, WWV)
WINDOW (0, 0)-(WWV, WWH)
KH = 1
OO(0) = I(0)
PRINT #2, USING "#### ###.### ###.### ###.###"; 0; I(0); O(0); OO(0)
FOR I = 2 TO M
  I2 = I - 1
  OO(I) = C0 * I(I) + C1 * I(I2) + C2 * OO(I2)
  'IF OO(I) > QMAX THEN OO(I) = QMAX
  PRINT #2, USING "#### ###.### ###.### ###.###"; I; I(I); O(I); OO(I)
  LINE (I2, I(I2))-(I, I(I)), 14
  IF KH = 20 THEN
    LOCATE 4, 1
    KH = 0
  END IF
  KH = KH + 1
NEXT I
KK = 0
SE = 0
FOR I = 2 TO M STEP KT
  I2 = I - 1
  KK = KK + 1
  LINE (I2, OO(I2))-(I, OO(I)), 12
  'LINE (I2 * 10, II(I2))-(KK * 10, II(I)), 14
  LINE (I2, O(I2))-(I, O(I)), 15
  SE = SE + (OO(I2) - O(I2)) ^ 2
  ' PRINT I2; OO(I2); O(I2); OO(I2) - O(I2); (OO(I2) - O(I2)) ^ 2; SE
  ' LPRINT I2; OO(I2); O(I2); OO(I2) - O(I2); (OO(I2) - O(I2)) ^ 2; SE
NEXT I
SE = SQR(SE / KK)
' PRINT "SE="; SE
' LPRINT "SE="; SE
LOCATE 4
PRINT "SE="; SE; "DTN="; DTN; " ARCHIVO:"; AR$
'LPRINT "SE="; SE; "DTN="; DTN; " ARCHIVO:"; AR$
PRINT "MUSKDIF4.BAS"; AR$; DATE$; TIME$
PRINT USING "K=#####.### X=###.###"; K; X
PRINT USING "C0=##### C1=##### C2=##### C0+C1+C2=##### C3=#####.###"; C0; C1; C2; C0 + C1
+ C2; C3
PRINT "SE="; SE; "DTN="; DTN; "ARCHIVO:"; AR$
PRINT #2, USING "K=#####.### X=###.###"; K; X
PRINT #2, USING "C0=##### C1=##### C2=##### C0+C1+C2=##### C3=#####.###"; C0; C1; C2; C0 +
C1 + C2; C3
PRINT #2, "SE="; SE; "DTN="; DTN; "ARCHIVO:"; AR$
CLOSE #2
END

```

## **BIBLIOGRAFÍA**

### **Hidrológica Aplicada**

Ven Te Chow  
Mc Graw Hill, 1994

### **Fundamentos de hidrológica de superficie**

Francisco Javier Aparicio  
Limusa, 1997

### **Enginnering Hydrology Principles and Practices**

Victor Miguel Ponce  
Collage of Engineering

### **Flujo No Permanente en Rios**

Capitulo 6 del Manual de Ingeniería de Ríos #574  
Moisés Berezowsky Verduzco  
Series del Instituto de Ingeniería

### **Hidráulica de Canales**

Capitulo 5 del Manual de Ingeniería de Ríos #614  
Jaime E. Camargo Hernández  
Series del Instituto de Ingeniería

### **Hidráulica de Canales Abiertos**

Ven Te Chow  
Mc Graw Hill, 1994

### **Manual de Diseño de Obras Civiles, capitulo 16 (métodos numéricos)**

Moisés Berezowsky, Óscar Fuentes, Ramón Domínguez  
Comisión Nacional de Electricidad, 1983

### **Propagación de Avenidas**

Carlos Cruichshank  
Documentación de la Comisión del Plan Nacional Hidráulico. México 1982

**Introducción a los Métodos Numéricos Aplicados a la Hidráulica**

Óscar Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

**Hydrology for Engineers and Planners**

Hjelmfelt A., Cassidy J.

The Iowa State University 1976.

**Hydrology for Engineers**

Linsley R., Kohler M.

Mc Graw Hill

**Introduction to Hydrology**

Viessman W., Knapp J., Lewis G.

Harper and Row 1972

**Reflexiones sobre las inundaciones en México**

Ramón Domínguez, Martín Jiménez

Centro Nacional de Prevención de Desastres. 1994

**Escurrecimientos en ríos y volúmenes de inundación por desbordamiento**

Óscar Fuentes, Marco Antonio Salas

Centro Nacional de Prevención de Desastres. 1996