

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLÓGICOS
BASADOS EN LA FUNCIÓN DE DENSIDAD DE
PROBABILIDAD GAMMA**

T E S I S

Como requisito para obtener el título de

Maestro en Ingeniería

(Hidráulica)

P r e s e n t a

J. Enedino Mendoza Facundo

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Óscar A. Fuentes Mariles



MÉXICO, D.F.

JUNIO DE 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Objetivos generales	2
1.2	Estructura del documento	2
2	ESCURRIMIENTO E HIDROGRAMAS	3
2.1	Introducción	3
2.2	Análisis de hidrogramas	3
2.2.1	El tiempo de concentración	6
2.3	Hidrograma unitarios	10
2.3.1	Hipótesis consideradas en el hidrograma unitario	10
2.3.2	Superposición de causas y efectos	11
2.3.3	Método de la Curva S	15
2.3.4	Método del hidrograma unitario instantáneo	18
2.4	Hidrograma unitario sintético	22
2.4.1	Método de Chow	23
2.4.2	Método de I – Pai Wu	27
2.4.3	Hidrograma unitario triangular	28
2.4.4	Hidrograma unitario adimensional	30
2.4.5	Hidrograma unitario sintético de Snyder	32
2.4.6	Hidrograma unitario sintético de Williams y Hann	35
2.4.6.1	Parámetros K y t p del modelo	36
2.4.6.2	Tiempos y Parámetros	37
2.4.6.3	Construcción del Hidrograma Unitario Sintético de Williams y Hann.	38
3	HIDROGRAMA UNITARIO INSTANTÁNEO GEOMORFOLÓGICO	39
3.1	Introducción	39
3.2	Leyes de Horton	40
3.2.1	Ley de numeros de cauces	41
3.2.2	Ley de longitudes de cauces	42
3.2.3	Ley de áreas de los cauces	43

3.3	Planteamiento general	44
3.4	Función de densidad de probabilidad de los tiempos de viaje	45
3.5	Función de densidad tipo exponencial	46
3.5.1	Convolución de funciones de densidad de probabilidad de tipo exponencial	47
3.5.2	Convolución de funciones de densidad de probabilidad tipo gamma	48
3.6	Probabilidad de que una gota siga una trayectoria dada	64
3.7	Hidrograma unitario instantáneo geomorfológico	66
4	EJEMPLO DE APLICACION	70
4.1	Antecedentes	70
4.2	Localización de la zona de estudio	70
4.2.1	Discretización de la cuenca utilizando Arc View mediante un MDE	73
4.2.2	Obtención de los parámetros de Horton	75
4.3	Estimación de parámetros	83
4.4	Resultados	85
5	CONCLUSIONES	93
6	BIBLIOGRAFIA	95

RESUMEN

La escasez de información de registros hidrométricos, en muchas cuencas ha creado la necesidad de relacionar la respuesta hidrológica con las características de la cuenca con sus propiedades geomorfológicas, es por eso que este trabajo está enfocado a hacer la recopilación de información de los métodos más nombrados y utilizados para obtener los hidrogramas unitarios de una cuenca en particular.

Además se hace la derivación del hidrograma unitario instantáneo geomorfológico con la función de distribución de probabilidad gamma, así como la parametrización en variables geomorfológicas de los parámetros de forma y escala, los cuales permiten estimar el hidrograma unitario instantáneo de la cuenca.

En este trabajo se realiza un ejemplo de aplicación para verificar la bondad que el método presentado en esta tesis para obtener el hidrograma unitario instantáneo geomorfológico ajustado a una función de distribución de probabilidad gamma es aceptable para su uso en cuencas no aforadas.

ABSTRACT

Hydrologists have devoted great effort in rainfall-runoff modeling, due in part to the scarce historic stream flow data in many watersheds in world. Some recent developments show great promise in furthering the engineering and scientific goal of hydrology.

A geomorphologic instantaneous unit hydrograph using gamma distribution function is presented in this work

An example is presented in order to the effectiveness of the method. The river Tesechoacan located in the south of México was used for the example.

1 INTRODUCCIÓN

La ocurrencia de lluvias intensas sobre una zona causa el aumento de los caudales en los cauces de las corrientes que constituyen la red de drenaje de una cuenca. Este aumento es conocido como avenida o crecidas. Las avenidas pueden provocar daños materiales en las márgenes de los ríos, y en ocasiones, la pérdida de vidas humanas.

Para implantar medidas de prevención o mitigación de los daños originados por las crecidas es necesario el conocimiento de la magnitud, la evolución, el tiempo y la probabilidad de ocurrencia de estos eventos.

Ante la relación causal entre precipitación y escurrimiento se han desarrollado modelos matemáticos para obtener valores del caudal en una sección transversal del cauce a partir de información de la precipitación en la zona. Estos modelos, conocidos como modelos precipitación-escurrimiento, se pueden utilizar con fines de simulación o de predicción de avenidas.

Con un modelo lluvia-escurrimiento se pueden obtener los caudales y los niveles en los cauces ante distintos escenarios de precipitación. Los caudales se pueden utilizar para diversos fines: evaluación de riesgos de inundación, mapas de riesgos, formulación de estrategias y ejecución de planes para la mitigación de daños, diseño de obras de infraestructura, diseño de obras hidráulicas, evaluación de efectos de distintas actividades en la cuenca, etc.

La simulación del escurrimiento de un río permite obtener caudales cuando los registros históricos son insuficientes. Los registros disponibles en el sitio se utilizan para la calibración del modelo matemáticos que hace la simulación. No siempre se dispone de una base de datos adecuada para la calibración y en algunas ocasiones sólo se cuenta con información imprecisa, reconstruida a partir de información indirecta. Es recomendable hacer análisis de sensibilidad de los resultados, lo que implica ejecutar el modelo varias veces.

1.1 Objetivos generales

El objetivo principal de este trabajo es obtener el hidrograma unitario instantáneo geomorfológico aplicando la función gamma, para los tiempos de viaje de las gotas de agua.

Adicionalmente se pretende comparar el método del hidrograma unitario geomorfológico con aquel que emplea una función de distribución exponencial

El desarrollo de esta comparación está ligada al entendimiento de la representación de los procesos y elementos que determinan la producción de la transferencia de escorrentía en la cuenca hidrográfica considerando los parámetros de Horton.

1.2 Estructura del documento

El documento se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se hace un resumen general de los conceptos básicos de lo que es el escurrimiento y los hidrogramas aplicados en un estudio hidrológico.

En este mismo capítulo se estudian los diferentes métodos que se aplican para obtener un hidrograma unitario.

En el capítulo 3 se hace un análisis de lo que es el hidrograma unitario instantáneo geomorfológico, así como el análisis y desarrollo de las convoluciones de la función de distribución de probabilidad de la función gamma.

En el capítulo 4 se desarrolla un ejemplo de aplicación, en el cual se explicará la metodología para obtener los parámetros de Horton que se requieren para obtener el HUIG GAMMA

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y comentarios que se obtuvieron en el transcurso de este trabajo.

2 ESCURRIMIENTO E HIDROGRAMAS

2.1 Introducción

El *escurrimiento* superficial se define como el agua proveniente de la precipitación que fluye sobre el terreno natural, y que conforme pasa el tiempo, se integra a las corrientes para ser conducida hacia ríos, lagos y en la mayoría de las ocasiones hasta el mar.

La estimación del escurrimiento a través de medidas de precipitación depende de la escala de tiempo considerada (Shaw, 1994). Para intervalos de tiempo del orden de horas, la relación lluvia-escurrimiento no es fácil de hallar, pero para intervalos de tiempo largos, se pueden obtener correlaciones estrechas entre estas dos fases del ciclo hidrológico. El tamaño de la cuenca también afecta estas relaciones: para cuencas pequeñas, con áreas de características similares la derivación de relaciones precipitación escurrimiento, puede ser un proceso simple; pero para grandes cuencas, con áreas de condiciones muy disímiles, éste puede ser un proceso muy complicado, que no siempre tiene éxito.

Existen en la literatura técnica varios modelos que intentan describir las relaciones lluvia escurrimiento. Los más conocidos son los modelos de Hidrograma unitario y el método racional para caudales máximos y la utilización de la curva de recesión combinada con precipitaciones para obtener caudales mínimos.

2.2 Análisis de hidrogramas

El hidrograma puede ser mirado como la expresión integral de las características fisiográficas y climáticas que gobiernan las relaciones entre lluvia y escurrimiento para una cuenca particular. Los factores climáticos que afectan la forma y el volumen del Hidrograma son: la intensidad y duración de la lluvia y su distribución espacial y temporal sobre la cuenca. Como aspectos fisiográficos de más influencia en el Hidrograma, se señalan: el área y la forma de la cuenca, la naturaleza de la red de drenaje, la pendiente de la cuenca y del cauce principal.

Un hidrograma puede presentar picos múltiples debido a posibles aumentos en la intensidad de la lluvia, a una sucesión continua de lluvias o a una no sincronización de las componentes del flujo.

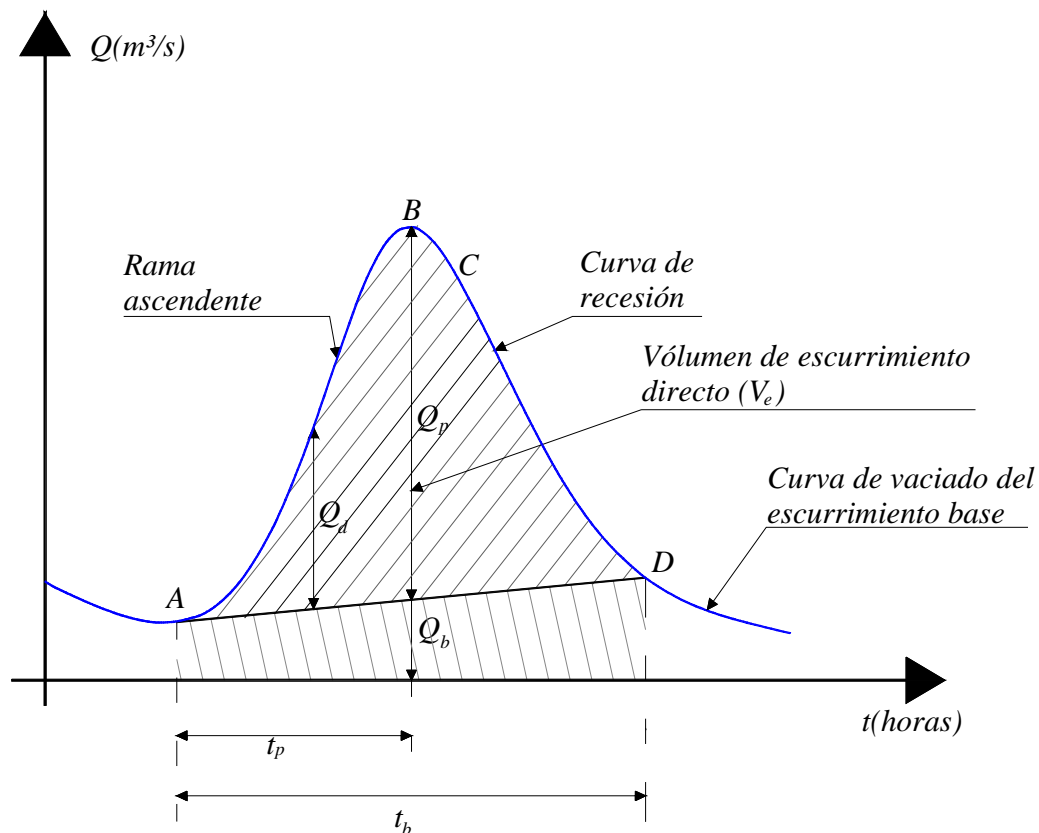


Figura 2.1 Forma típica de un hidrograma

Aunque la forma de cada hidrograma producido por cada tormenta varía, es posible identificar en el sus características principales de cada uno de ellos Figura 2.1

a) *Punto de levantamiento (A)*. Es donde la magnitud del gasto comienza a incrementarse por efecto de la lluvia. La ubicación de este punto dependerá desde luego, del tiempo en que el escurrimiento generado por la lluvia alcanza la sección donde se registra el hidrograma en cuestión.

b) *Pico (B)*. Es el gasto máximo producido por la tormenta. En muchos casos, se requiere conocer este valor con fines de diseño.

c) *Punto de inflexión (C)*. Es donde termina de reflejarse el flujo superficial, y a partir de donde solo se registra el escurrimiento subterráneo, que tarda mayor tiempo en abandonar la cuenca.

d) *Final del escurrimiento directo (D)*. Se le da este nombre al punto donde el escurrimiento registrado proviene ya solamente del flujo subterráneo. Normalmente se acepta que sea el punto de mayor curvatura de la curva de recesión (o de descenso) del hidrograma.

e) *Tiempo de pico (t_p)*. Es el tiempo que transcurre desde el punto de levantamiento hasta el correspondiente al pico del hidrograma.

f) *Tiempo base (t_b)*. Se le llama así al tiempo que transcurre entre el punto de levantamiento (punto A) hasta el correspondiente al final del escurrimiento directo. Corresponde a la duración del escurrimiento directo.

g) *Rama ascendente*. Es la curva de ascenso del hidrograma, comprendida entre el punto de levantamiento y el gasto máximo o pico.

h) *Rama descendente*. Es la curva del hidrograma, que parte desde el pico hasta el final del escurrimiento directo.

En los hidrogramas observados en ríos y arroyos se aprecia que el tiempo base de los mismos varía desde minutos hasta días, y el pico desde algunos litros por segundo hasta miles de metros cúbicos por segundo.

Debido a que los hidrogramas registrados en un cauce se componen del escurrimiento directo generado por la tormenta, y por el escurrimiento base, formado normalmente por agua proveniente de otras tormentas y del flujo subsuperficial, es difícil definir cual es el escurrimiento generado por una tormenta particular. Por ello es necesario separar el escurrimiento directo del escurrimiento base.

Lo anterior suele realizarse mediante los procedimientos siguientes Figura 2.2:

- Método de la línea recta.
- Método de la curva de vaciado.
- Método de correlación del tiempo de vaciado.
- Método del punto de mayor curvatura de la curva de recesión del hidrograma.

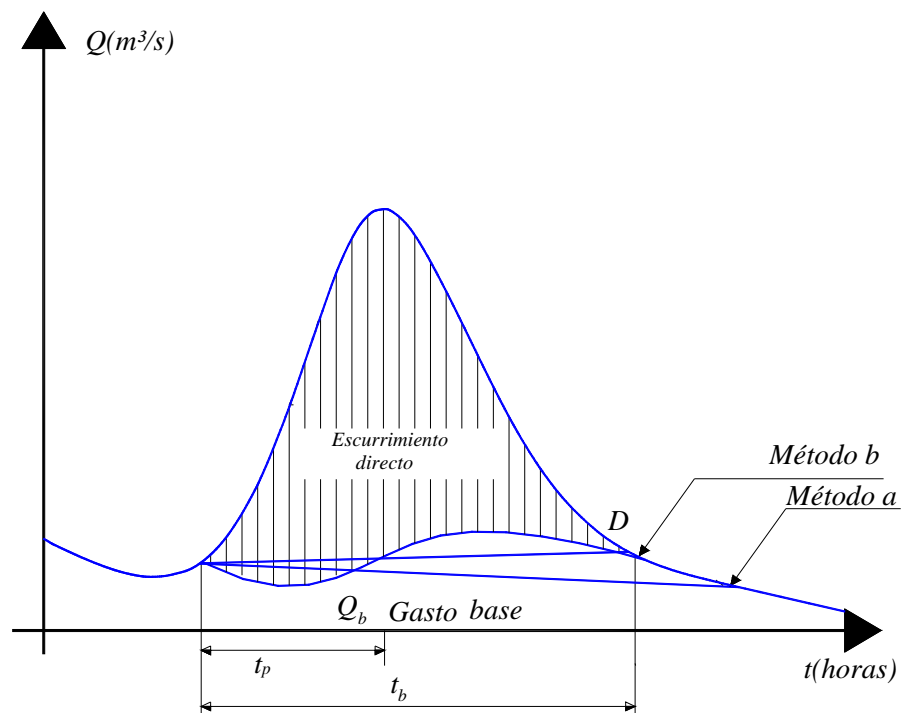


Figura 2.2 Representación de los métodos para separar el gasto base

Uno de los parámetros mas utilizados en un análisis de escurrimientos es el Tiempo de concentración.

2.2.1 El tiempo de concentración

El tiempo de concentración se puede definir como el tiempo que tarda una gota de agua en llegar de las partes más alejadas de la cuenca al sitio de salida de ella. El tiempo de concentración (T_c) es uno de los parámetros más importantes en los modelos lluvia – escurrimiento. La duración crítica de la lluvia debe asumirse como igual al tiempo de concentración, pues para duraciones menores que T_c , no toda el área de la cuenca contribuye; y para duraciones más grandes que T_c , no hay incremento en el área contribuyente; en cambio la intensidad de la lluvia de una frecuencia dada disminuye. Se asume que para duraciones menores que el tiempo de concentración, el efecto de la reducción en el área contribuyente es mayor que el del incremento en la intensidad de la lluvia. (Smith, Vélez, 1997). Es clara, entonces, la dependencia de este parámetro de variables morfométricas, tales como el área, pendiente de la cuenca, longitud del cauce principal, etc.

En la literatura técnica, existen diferentes maneras de definir el tiempo de concentración a partir de registros simultáneos de precipitación y caudal.

Ramser y Kirpich lo definen como el tiempo al pico T_p . Viessman (1977), como el tiempo comprendido entre el final de la precipitación efectiva y el final de la escorrentía superficial directa. Siendo este último valor el punto de inflexión de la hidrograma, después del caudal pico. Taylor (1952) define el tiempo de concentración como:

$$T_c = T_b - D \quad (2.1)$$

Témez (1978) lo explica como la diferencia entre el tiempo de finalización del hidrograma de escorrentía superficial directa y el tiempo de finalización de la precipitación efectiva.

Otras definiciones parten del tiempo de retraso, T_R . Este parámetro es el intervalo de tiempo entre el centro de gravedad del pluviograma de lluvia efectiva y el centro de gravedad de la hidrograma de escurrimiento superficial directo. Otros autores reemplazan el centro de gravedad de la hidrograma por el tiempo al pico, T_p .

Se ha definido el tiempo de concentración, con base en el tiempo de rezago T_R así:

$$T_c = T_b - T_r \quad (2.2)$$

Una última expresión para definirlo es

$$T_c = T_b - T_p \quad (2.3)$$

Hay numerosas expresiones para determinar el tiempo de concentración, T_c , desarrolladas en países con clima y morfología totalmente diferentes a las de nuestro país. Algunas expresiones que se usan en el análisis son las siguientes:

Témez (1978)

$$T_c = 0.3 \left(\frac{L}{S_o^{0.25}} \right)^{0.75} \quad (2.4)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.

L : longitud del cauce principal, en kilómetros.

S_o : diferencia de cotas entre los puntos extremos de la corriente sobre L , en %.

Williams (1922)

$$T_c = \frac{L A^{0.4}}{D S_o^{0.2}} \quad (2.5)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.

A : Área, en millas cuadradas.

L : distancia en línea recta desde el sitio de interés al punto más alto de la cuenca, en millas.

S_o : diferencia de cotas entre los puntos extremos de la cuenca dividida por L , en %.

D : diámetro de una cuenca circular, con área A , en millas.

Kirpich (1940)

$$T_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}} \quad (2.6)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas

L : longitud desde la estación de aforo hasta la divisoria, siguiendo el cauce principal en metros.

S_o : diferencia de cotas entre los puntos extremos de la corriente sobre L , en m/m.

Johnstone y Cross (1949)

$$T_c = 2.6 \left(\frac{L}{\sqrt{S_o}} \right)^{0.5} \quad (2.7)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.
 L : longitud del cauce principal, en kilómetros.
 S_o : pendiente del canal, en m/kilómetro.

California Culverts Practice(1942)

$$T_c = 0.01 \left(\frac{L^3}{H} \right)^{0.385} \quad (2.8)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.
 L : longitud del canal principal, en kilómetros.
 H : diferencia de cotas entre el punto de interés y la divisoria, en metros.

Giandiotti (1990)

$$T_c = \frac{4\sqrt{A} + 1.5L}{25.3\sqrt{L S_o}} \quad (2.9)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.
 A : área de la cuenca, en kilómetros cuadrados.
 L : longitud del cauce principal, en kilómetros.
 S_o : diferencia de cotas entre puntos extremos de la corriente sobre L , en m/m.

S.C.S - Ranser

$$T_c = 0.947 K^{0.385} \quad (2.10)$$
$$K = \sqrt{\frac{Lc^3}{H}}$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.
 Lc : distancia desde el sitio de interés al punto en el cual la corriente principal corta la divisoria, en kilómetros.
 H : diferencia de cotas entre puntos extremos de la corriente, en pies.

Linsley

$$T_c = C_t \left(\frac{L \bar{L}}{S_o^{0.5}} \right)^{0.35} \quad (2.11)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.

L : longitud de la cuenca, en millas.

\bar{L} : distancia desde el punto de interés al centro de gravedad de la cuenca, en millas.

S : diferencia de cotas entre puntos extremos de la corriente dividida por L , en %.

C_t : constante.

$C_t = 1.2$, en áreas montañosas.

$C_t = 0.72$, en zonas de pie de ladera.

$C_t = 0.35$, en valles.

Snyder

$$T_c = C_t (L \bar{L})^{0.3} \quad (2.12)$$

C_t , L y \bar{L} tienen el mismo significado anterior.

Bransby – Williams

$$T_c = \frac{FL}{A^{0.1} S_o^{0.2}} \quad (2.13)$$

T_c : tiempo de concentración, en horas.

F : 58.5, si el área está en kilómetros cuadrados.

A : área de la cuenca, en kilómetros cuadrados.

L : longitud del cauce principal, en kilómetros.

S_o : pendiente del canal, en m/km.

Pérez Monteagudo (1985)

$$T_c = \frac{L}{V_R} \quad (2.14)$$

L : longitud de la corriente principal.

V_R : velocidad por el cauce principal de la onda de creciente.

V_R : se expresa como:

$$V_R = 72 \left(\frac{AE}{L} \right)^{0.6} \quad (2.15)$$

V_R : Velocidad, en km/h.

AE : diferencia de cotas, en kilómetros, en el cauce principal, desde el punto más alto al más bajo.

2.3 Hidrograma unitarios

El hidrograma unitario, se define como el hidrograma de escurrimiento directo que se produce por una lluvia efectiva o en exceso de lámina unitaria, que cae uniformemente en la cuenca, durante un intervalo de tiempo llamado duración en exceso de.

El hidrograma unitario representa una función de transformación de las lluvias efectivas en escurrimiento directo. Este método fue desarrollado por Sherman en 1932

Para la representación conceptual del hidrograma unitario y su definición en una cuenca hidrográfica específica se han desarrollado múltiples teorías y procedimientos. Se consideran así los siguientes tipos de hidrogramas unitarios:

Hidrogramas Unitarios Empíricos obtenidos por distintos métodos con información simultánea de lluvia y caudales en la cuenca

Hidrogramas Unitarios Sintéticos donde los elementos característicos del HU se obtienen a partir de las características morfométricas de la cuenca mediante relaciones empíricas con base en las evidencias encontradas en análisis regionales.

Este es el caso de los hidrogramas de Zinder, Williams y Haan, SCS, Bratter, etc.

Hidrogramas unitarios Conceptuales, que se basan en una representación conceptual de la cuenca. Es el caso de los hidrogramas de Soch, Clark, Nash, Dooge y Laurenson. Algunos hidrogramas tratan de representar conceptualmente la estructura de la red de drenaje. Este es el caso de los hidrogramas geomorfoclimático, Boyle y la Función de ancho

2.3.1 Hipótesis consideradas en el hidrograma unitario

- Tiempo base constante

Para una cuenca dada, la duración total de escurrimiento directo o tiempo base, t_b , es la misma para todas las tormentas con la misma duración de lluvia efectiva, independiente del volumen total escurrido. El tiempo base se define como el tiempo que transcurre desde el punto de levantamiento hasta el final del escurrimiento

directo. Todo hidrograma unitario está ligado a una duración de la lluvia en exceso Figura 2.3.

- Linealidad o proporcionalidad

Las ordenadas de todos los hidrogramas de escurrimiento directo con el mismo tiempo base, son directamente proporcionales al volumen total de escurrimiento directo; es decir, al volumen total de lluvia efectiva. Como consecuencia, las ordenadas de dichos hidrogramas son proporcionales entre sí Figura 2.4.

2.3.2 Superposición de causas y efectos.

El hidrograma que resulta de un periodo de lluvia dado puede superponerse a hidrogramas resultantes de periodos de lluvia precedentes Figura 2.5.

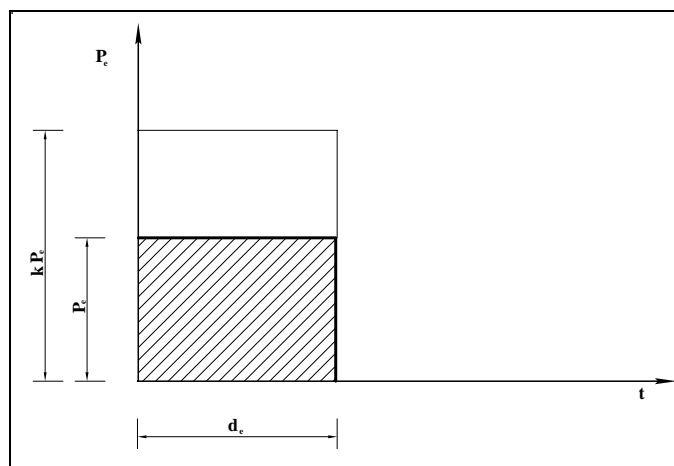


Figura 2.3 Tiempo base de un hidrograma.

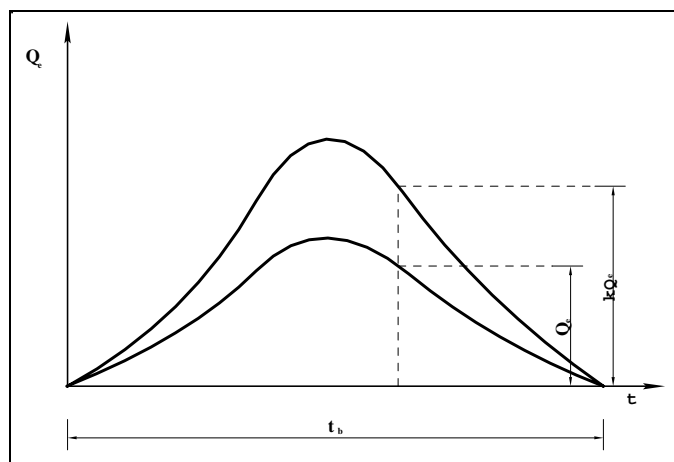


Figura 2.4 Ordenadas proporcionales del hidrograma.

Un ejemplo para aplicar el concepto del hidrograma unitario es el siguiente:

Supóngase que en una cuenca con área de 1,080 km², se conoce un hidrograma de escurrimiento total y el hietograma que lo produjo Figura 2.6.

Un método simple para separar el escurrimiento base del directo es trazar una línea recta horizontal a partir donde empieza la primera rama ascendente hasta donde corte la última rama (línea punteada de la Figura 2.6b, definiéndose con esto, el tiempo base; así mismo, se pueden ver los nuevos valores de los gastos, es decir, restando el gasto base a cada gasto registrado en el hidrograma; al hidrograma resultante se le denomina *hidrograma de calibración*(Figura 2.6b).

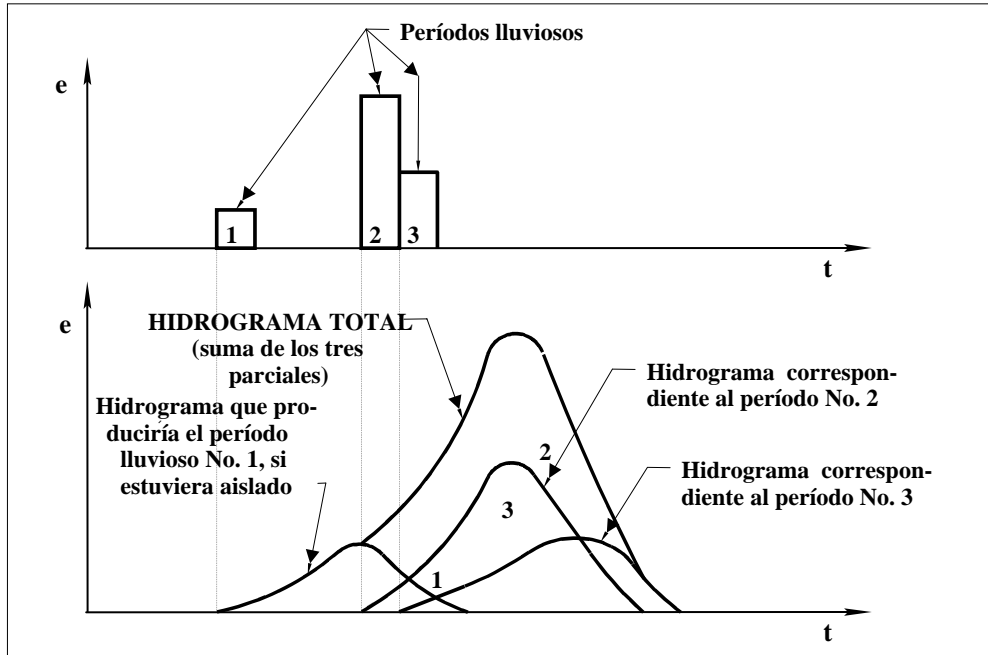


Figura 2.5 Superposición de hidrogramas.

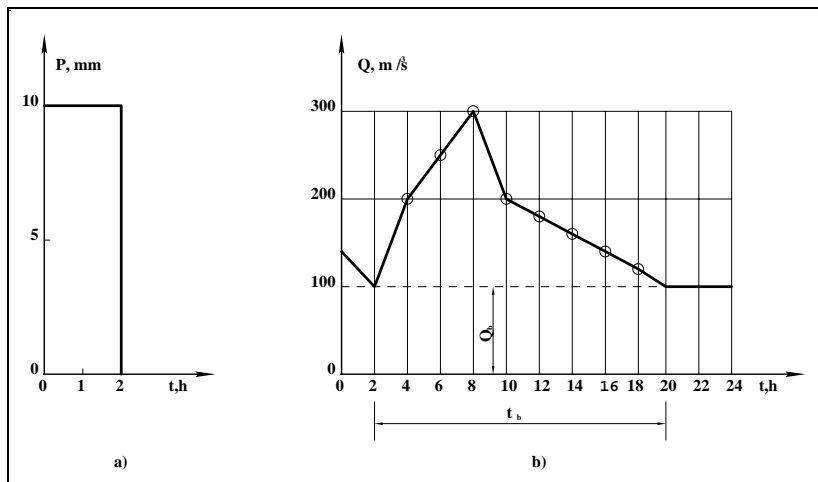


Figura 2.6 Hietograma e hidrograma total de una cuenca.

Con lo anterior se puede conocer, en primer lugar, el volumen de escurrimiento directo, y, en segundo, el tiempo base t_b . Por lo que en este ejemplo el volumen de escurrimiento directo resulta ser de:

$$V_e = \Delta t \sum_{i=1}^8 Q_i = (2)(3600)(100 + 150 + 200 + 100 + 80 + 60 + 40 + 20)$$
$$V_e = 5.4 \times 10^6 \text{ m}^3$$

y el tiempo base es de 18 h, como se observa en la Figura 2.6b.

Una vez calculado el volumen de escurrimiento directo, se determina la altura de lluvia efectiva, que para este ejemplo es de:

$$P_e = \frac{V_e}{A_c} = \frac{5.4 \times 10^6 \text{ m}^3}{1,080 \times 10^6 \text{ m}^2} = 0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm}$$

y la duración en exceso, como se puede apreciar en la Figura 2.6a, es de 2 h.

Aceptando las hipótesis de tiempo base constante y linealidad, un hidrograma unitario, es decir, un hidrograma directo producido por una lluvia de 1 mm de lámina y duración en exceso de 2 h, debe tener para este caso un tiempo base de 18 h y la misma forma que el hidrograma de la Figura 2.6b, pero con sus ordenadas reducidas a una quinta parte, ya que la altura de la lluvia efectiva fue de 5 mm. Entonces, dividiendo las ordenadas del hidrograma de escurrimiento directo de la Figura 2.6b entre 5 se obtiene el hidrograma unitario de la Figura 2.7 Hidrograma unitario para $d_e = 2 \text{ h}$.

Con este hidrograma unitario es posible determinar hidrogramas de escurrimiento directo para cualquier tormenta cuya duración de lluvia en exceso sea de 2 h. Supongamos que la tormenta representada por el hietograma de la

Figura 2.8a, tiene una duración en exceso de 2 h y una altura de precipitación efectiva de 10 mm: el hidrograma de escurrimiento directo que se producirá con esta tormenta se obtiene multiplicando las ordenadas del hidrograma unitario de la Figura 2.7 por 10 mm.

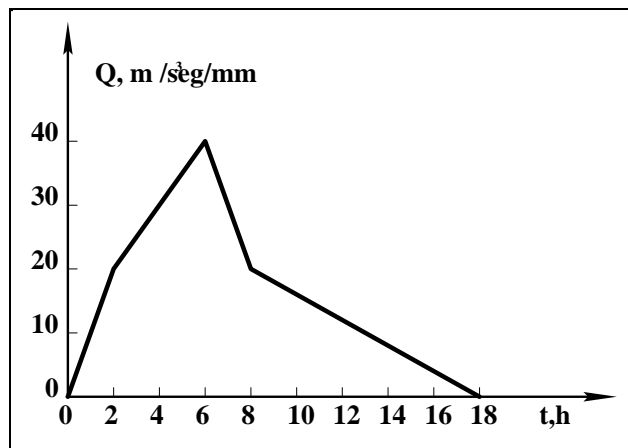


Figura 2.7 Hidrograma unitario para $d_e = 2 \text{ h}$.

Como es aceptado el principio de superposición de causas y efectos, el hidrograma unitario de la Figura 2.7 sirve para tormentas cuya duración en exceso sea múltiplo de 2 h. Supóngase que la tormenta de la figura 2.9a, que tiene una duración en exceso de 4h, puede considerarse compuesta por dos láminas de lluvia consecutivas, cada una con una duración en exceso de 2 h.

Aplicando el hidrograma unitario de la Figura 2.7 cada una de estas dos tormentas, sumando las ordenadas y, obviamente, defasando el segundo hidrograma 2 h del primero, se obtiene el hidrograma de escurrimiento directo producido por la tormenta completa, el cual se presenta en la

Figura 2.8b.

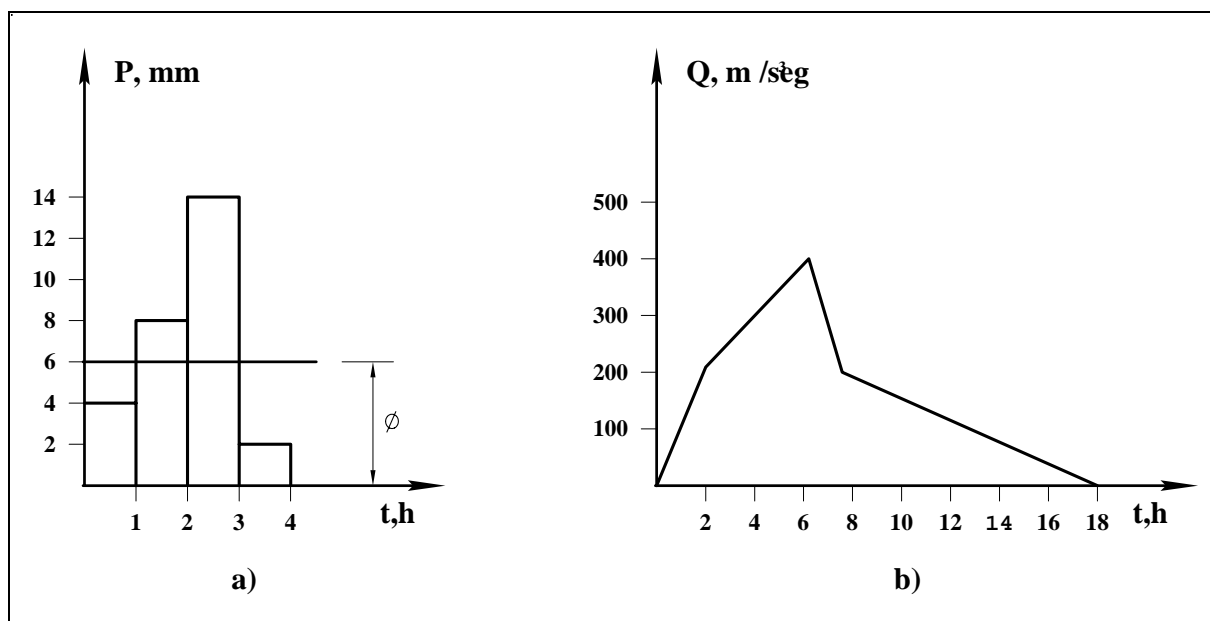


Figura 2.8 Hietograma e hidrograma.

Es necesario enfatizar que todo hidrograma unitario está necesariamente ligado a una duración en exceso y que si no se conoce la última, entonces el hidrograma unitario pierde completamente su significado.

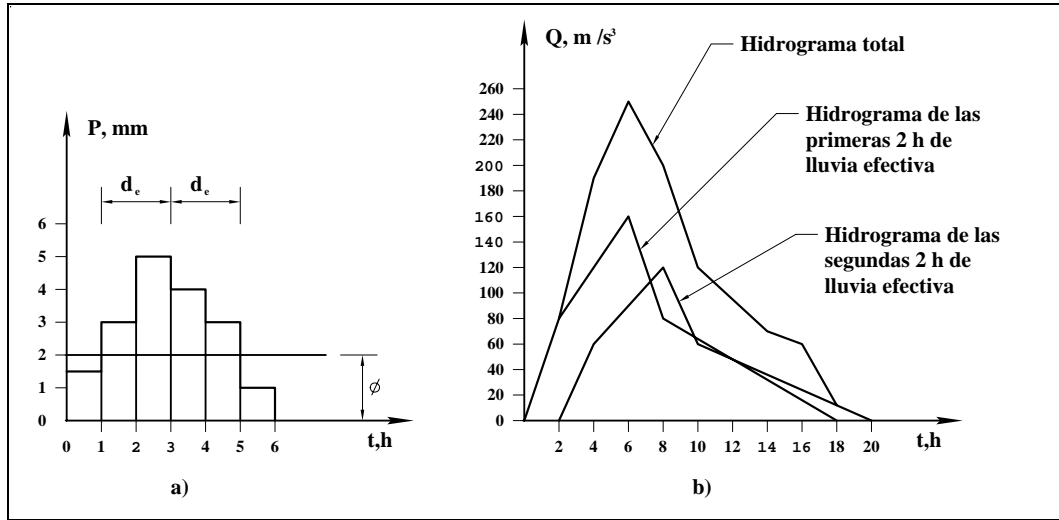


Figura 2.9 Hietograma e hidrograma.

2.3.3 Método de la Curva S

Para determinar hidrogramas de escurrimiento directo para tormentas con una duración en exceso d'_e es necesario emplear un hidrograma unitario para esta duración d'_e .

Si se tiene un hidrograma unitario para duración en exceso d_e y ocurre una tormenta de gran duración, se considera que esta formado por un número muy grande barras cada una con duración d_e y altura efectiva de precipitación de 1 mm Figura 2.10. De acuerdo con el principio de superposición de causas y efectos, se tendrá un hidrograma de escurrimiento directo similar al de la Figura 2.11.

Dado que la intensidad de la lluvia es, en este caso:

$$i = \frac{1 \text{ mm}}{d_e} \quad (2.16)$$

entonces, el gasto de equilibrio, Q_e , resulta:

$$Q_e = A i = A \frac{1 \text{ mm}}{d_e} \quad (2.17)$$

Nótese que la ecuación 2.17 es la fórmula racional, pero con un coeficiente de escurrimiento igual a uno en vista de que i es en este caso la intensidad de la lluvia efectiva.

El hidrograma de escurrimiento directo que se produce con la lluvia de la ecuación 2.16 se llama *curva S*. Esta curva es un hidrograma formado por la superposición de un número de hidrogramas unitarios desplazados un tiempo de varias veces hasta llegar al gasto de equilibrio Figura 2.10b.

Es común que al sumar las ordenadas de los hidrogramas unitarios no se llegue al gasto de equilibrio definido por la ecuación 2.17, sino que se presentan oscilaciones

en la parte superior de la curva S, como se muestra en la Figura 2.12 Oscilaciones en la curva S.

Esto ocurre para duraciones en exceso grandes, o cuando el hidrograma unitario no tuvo la precisión adecuada. Cuando se presenta este problema, conviene revisar la separación de gasto base que se hizo y la duración en exceso d_e , pues la proporción que guardan ambas variables se sale de lo común. Si en la revisión se encuentra que t_b y d_e son correctos, entonces será necesario suavizar la curva S. Para ello, se debe tomar en cuenta que:

-El tiempo de concentración t_c o el tiempo en que se alcanza el gasto de equilibrio es:

$$t_c = t_b - d_e \quad (2.18)$$

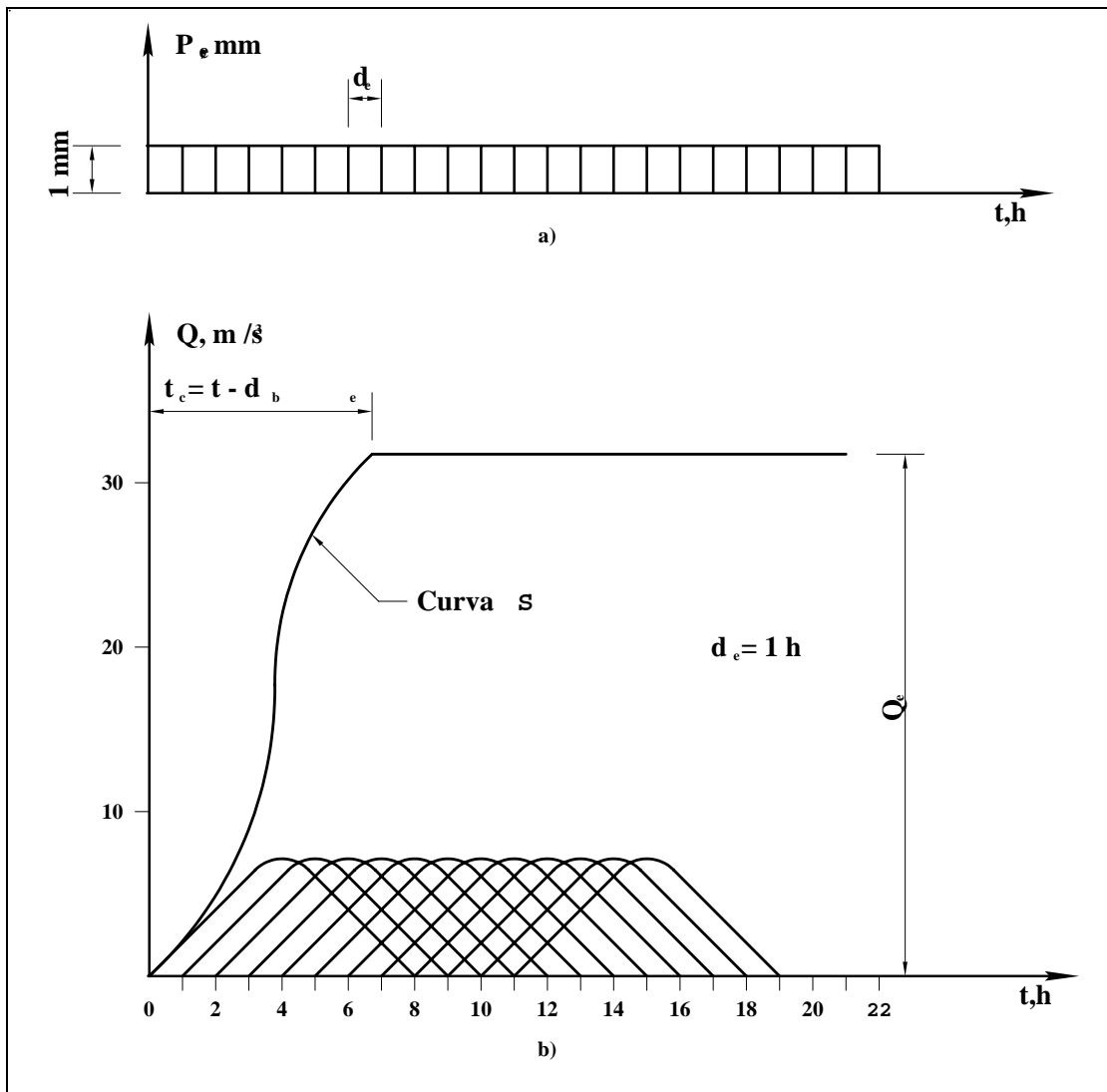


Figura 2.10 Curva S.

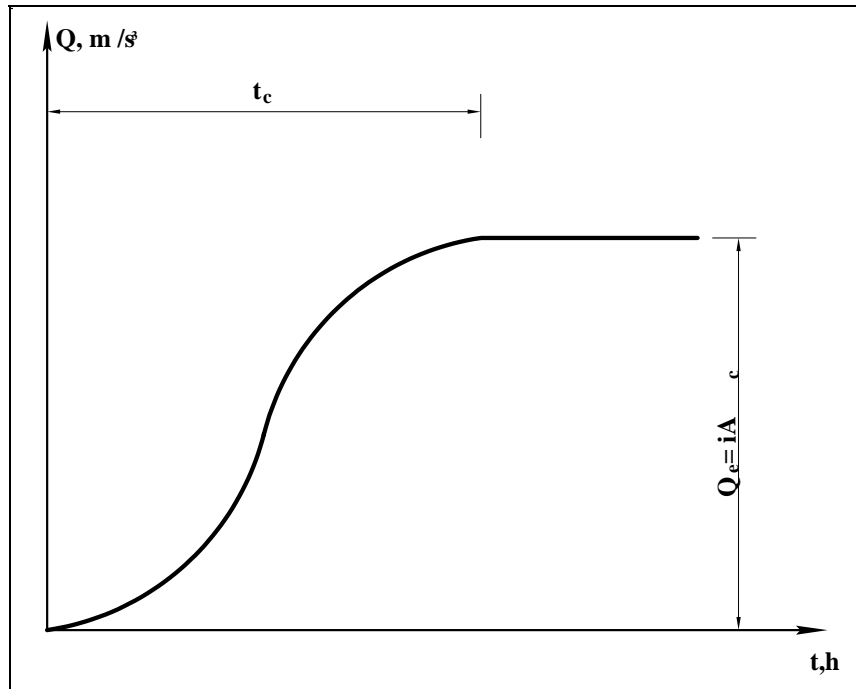


Figura 2.11 Tiempo de concentración t_c en la curva $Q - t$.

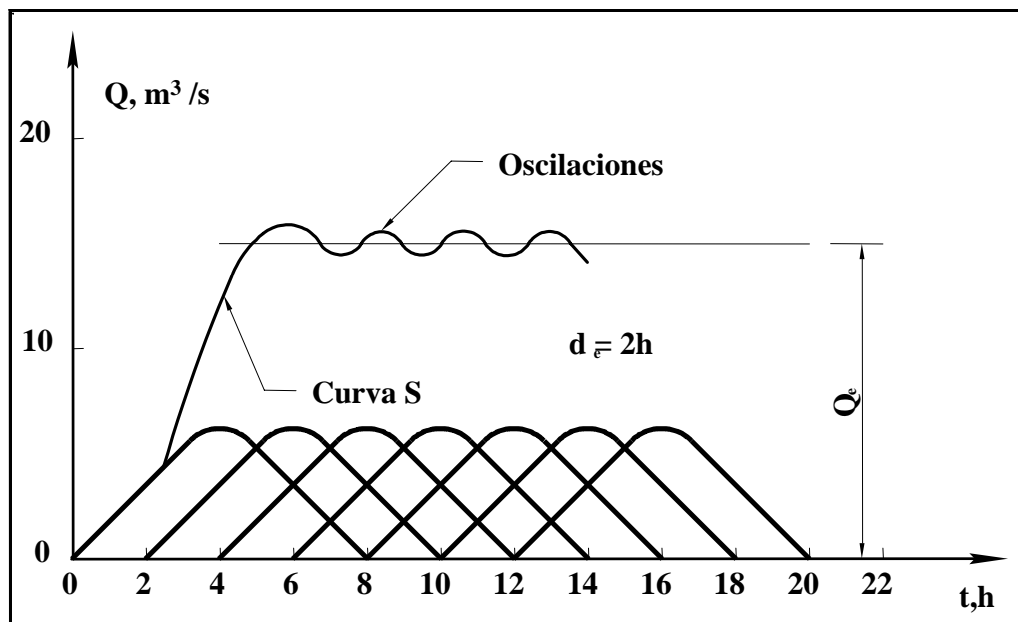


Figura 2.12 Oscilaciones en la curva S.

Donde:

- t_c tiempo de concentración (min).
- t_b tiempo base del hidrograma unitario (min).
- d_e duración en exceso (min).

-El gasto de equilibrio es el dado por la ecuación 2.17.

Si la curva S de la Figura 2.10b se desplaza d_e horas en el tiempo y las ordenadas de la curva desplazada se restan de la original, el resultado será el hidrograma unitario con el que se construyó la curva S. Si esta curva se desplaza d'_e horas en el tiempo y sus ordenadas se restan de la curva S original, se obtendría el hidrograma resultante de una lluvia con intensidad de $1/d'_e$ que cae durante d'_e horas Figura 2.13. Para que el hidrograma resultante sea unitario, la intensidad de la precipitación debe ser $1/d'_e$; entonces es necesario multiplicar sus ordenadas por d_e/d'_e . Con esto se obtiene un hidrograma unitario para una duración en exceso d'_e .

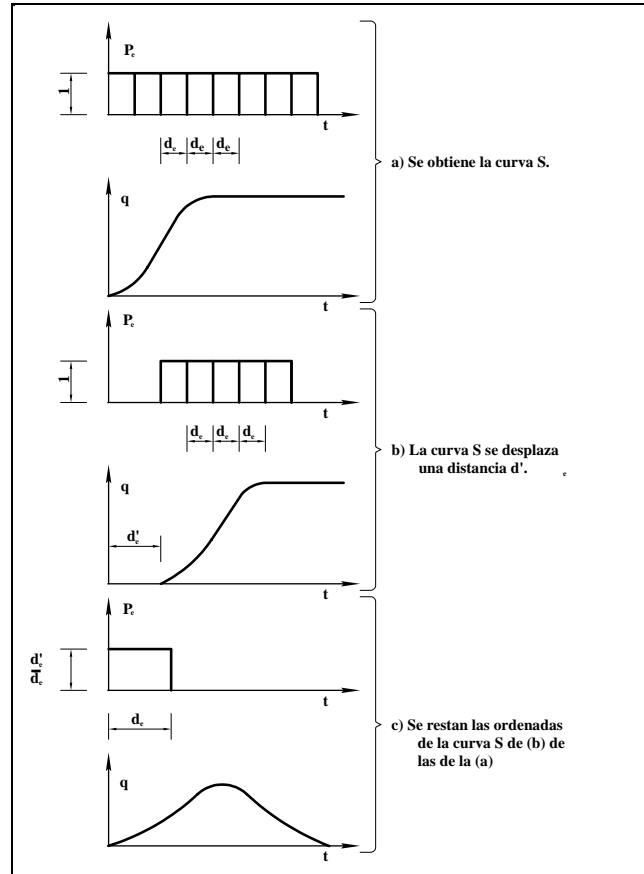


Figura 2.13 Defasamiento de la curva S.

2.3.4 Método del hidrograma unitario instantáneo

Si la duración de la lluvia se vuelve infinitesimal, el Hidrograma Unitario resultante recibe el nombre de Hidrograma Unitario Instantáneo (HUI). De acuerdo con la definición de Hidrograma Unitario, cada elemento infinitesimal de precipitación efectiva produce un hidrograma de escurrimiento directo igual al producto de ese elemento y el HUI. Usando el principio de superposición, el hidrograma de escurrimiento directo está dado por la integral de convolución.

Como:

$$Q(t) = \int_0^t U(w)P(t-w)dw \quad (2.19)$$

o escrita de otra forma:

$$Q(t) = \int_0^t U(t-w)P(w)dw \quad (2.20)$$

en donde P(t) y Q(t) son respectivamente, las funciones de entrada (precipitación neta) y respuesta (escorrentía directa), y U(t) es el HUI. El HUI puede ser visto como una respuesta a la excitación impulsiva, o como una función Kernel, de un sistema agregado, invariante y lineal. Cuando el HUI es conocido, el Hidrograma Unitario de duración específica puede obtenerse como:

$$U(T,t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t U(w)dw \quad (2.21)$$

en donde U(T,t) es el Hidrograma Unitario de T de horas de duración, y U(t) es el HUI. En la ecuación (2.21), se asume que t-T = 0, cuando t < T. La forma discreta de la ecuación puede ser escrita como:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^N U(T-i)P(t-i+1)dt \quad (2.22)$$

en donde N representa la memoria del sistema.

Como observamos el hidrograma unitario obtenido en el subcapítulo 2.3 no toma en cuenta la variación temporal de la precipitación en el lapso igual a la duración de la lluvia efectiva. Para superar esta limitación, se han desarrollado métodos que, apoyados en el principio del hidrograma unitario, permiten que la variación de la precipitación sea tomada en cuenta para cualquier intervalo de tiempo. A estos métodos se les llama del hidrograma unitario instantáneo.

Considérense los hietogramas de lluvia efectiva mostrados en la Figura 2.14. Se observa que tanto la altura total de la lluvia efectiva como la duración en exceso, en este caso $d_e = 14$ h, es igual en los tres hietogramas; por lo tanto, si se tiene un hidrograma unitario para esta duración en exceso, se obtendrían los respectivos hidrogramas unitarios de escurrimiento directo. Sin embargo, en este caso los tres hidrogramas resultarían exactamente iguales, lo que no sucede en la realidad.

Sea el hidrograma unitario para duración en exceso d_e mostrado en la Figura 2.15a. Si se presenta una tormenta, como la de la Figura 2.15b, con varios períodos lluviosos, cada uno de ellos de duración en exceso d_e , entonces, de acuerdo con el principio de superposición de causas y efectos, los hidrogramas producidos por cada barra del hietograma serán los mostrados en las Figura 2.15c, d y e; entonces el hidrograma de la tormenta completa será el mostrado en la Figura 2.15f.

Si U_i es la i -ésima ordenada del hidrograma unitario Figura 2.15a, y P_j es la j -ésima lluvia del hietograma Figura 2.15b, las ordenadas Q_i del hidrograma Figura 2.15f, son en este caso:

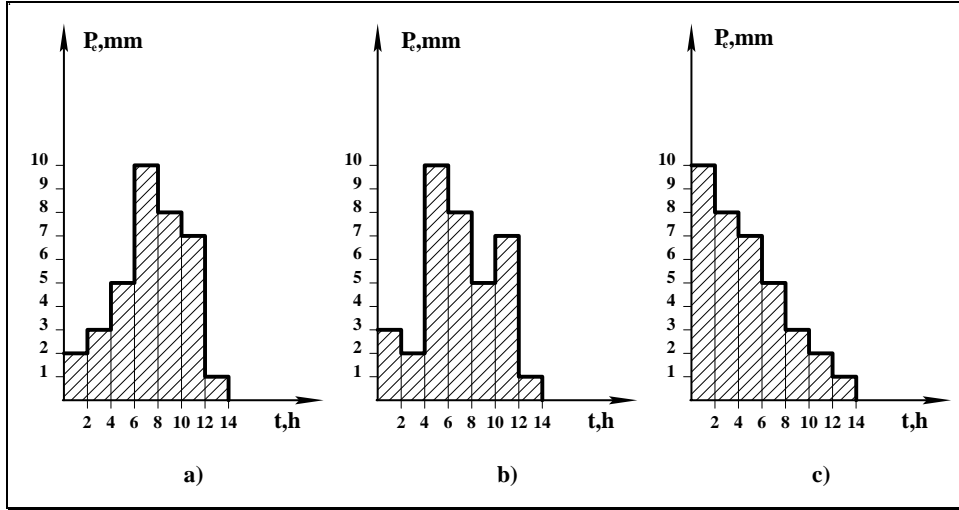


Figura 2.14 Hietogramas de lluvia efectiva.

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= P_1 U_1 \\
 Q_2 &= P_1 U_2 + P_2 U_1 \\
 Q_3 &= P_2 U_3 + P_3 U_1 \\
 Q_4 &= P_2 U_3 + P_3 U_2 \\
 Q_5 &= P_3 U_3
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

En general, la k -ésima ordenada del hidrograma, Q_k , es:

$$Q_k = \sum_{j=1}^k P_j U_{k-j+1}
 \tag{2.24}$$

Considérese el problema inverso, es decir, en el que se conoce el hidrograma Figura 2.15f y la precipitación Figura 2.15b, se desea obtener un hidrograma unitario como el de la figura 2.15a. El sistema de ecuaciones 2.23 sigue siendo válido; este sistema se puede escribir como:

$$P \{U\} = \{Q\}
 \tag{2.25}$$

Donde

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ 0 & P_3 & P_2 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}$$

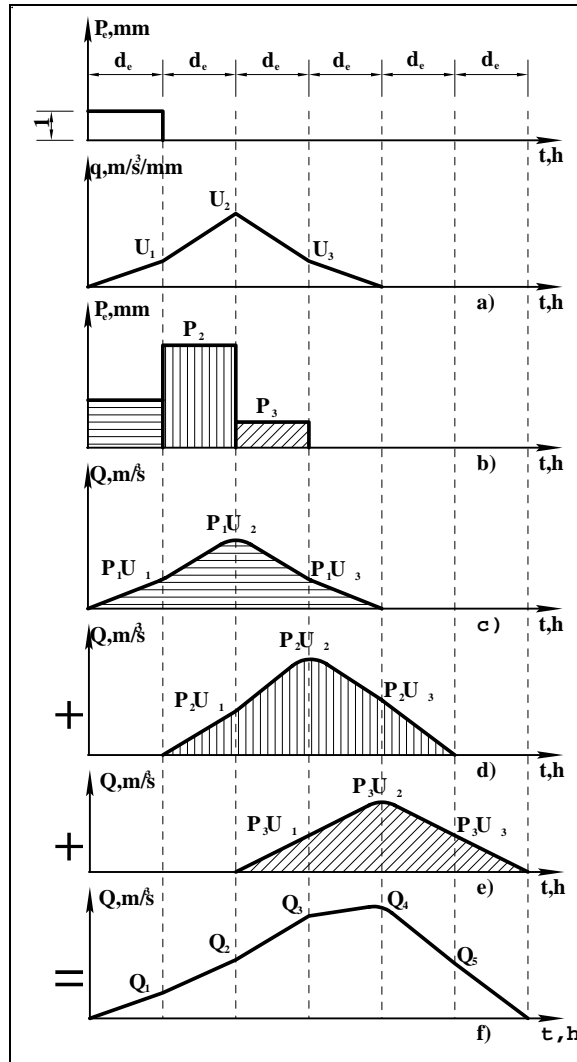


Figura 2.15 Hidrograma unitario instantáneo.

La incógnita es entonces el vector $\{U\}$; sin embargo, en el sistema 2.23 se tienen cinco ecuaciones con tres incógnitas, por lo que el sistema es indeterminado y no existen valores de $\{U\}$ que satisfagan simultáneamente las cinco ecuaciones. Así, para tener una solución del sistema 2.25 es necesario aceptar un cierto error en cada una de los componentes de $\{U\}$; naturalmente, es deseable que dicho error

sea el mínimo posible. Se puede demostrar que el mínimo error en los valores de $\{U\}$ ocurre, si la ecuación 2.25 se multiplica por la matriz transpuesta de P :

$$P^T P \{U\} = P^T \{Q\} \quad (2.26)$$

Lo que en este caso resultaría:

$$\begin{bmatrix} P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1P_2 + P_2P_3 & P_1P_3 \\ P_1P_2 + P_2P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 & P_1P_2 + P_2P_3 \\ P_1P_3 & P_1P_2 + P_2P_3 & P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 \\ P_1Q_2 + P_2Q_3 + P_3Q_4 \\ P_1Q_3 + P_2Q_4 + P_3Q_5 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

El sistema de ecuaciones 2.27 es ya un sistema determinado, con una solución única. Esta solución proporciona el valor del vector $\{U\}$. Nótese que en el caso del hidrograma unitario instantáneo, siempre debe especificarse la duración en exceso, que es la duración de las barras del hietograma de la figura 2.15b. También al calcular el área bajo la curva del hidrograma unitario debe ser igual al área de la cuenca.

Asimismo, véase por ejemplo la ecuación 2.23, en todos los casos el número de ordenadas del hidrograma final N_Q está ligado con el número de barras del hietograma N_p y al número de ordenadas del hidrograma unitario N_U por medio de la ecuación

$$N_Q = N_p + N_U - 1 \quad (2.28)$$

Con esta ecuación es posible saber de antemano el número de ordenadas que tendrá el hidrograma unitario y, por lo tanto, el orden de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (2.26 y 2.27).

También conviene hacer notar que, bajo ciertas circunstancias, la solución de sistemas como el 2.27 produce algunas ordenadas negativas del hidrograma unitario en la curva de reacción. Aunque existen procedimientos de optimación que evitan este tipo de problemas, desde el punto de vista práctico es suficiente obligar a que dichas ordenadas sean nulas, corrigiendo en consecuencia el volumen del hidrograma unitario pero respetando el valor del pico.

2.4 Hidrograma unitario sintético

La determinación de HU para una duración dada, en una cuenca particular, depende de la existencia simultánea de registros de precipitación y caudal, que no siempre están disponibles. Se han desarrollado técnicas que relacionan características morfométricas de la cuenca (área, perímetro, pendiente, etc) con características del hidrograma unitario (tiempo al pico, caudal pico, tiempo base, etc). Estas relaciones se conocen con el nombre de *hidrogramas unitarios sintéticos*. La mayoría de ellas son empíricas, obtenidas con base en datos de varias cuencas.

Las hidrogramas unitarias sintéticas pueden ser de tres tipos (Chow, 1994):

- 1) Las que relacionan las características de la hidrógrama (caudales, tiempos al pico, tiempo base, etc.) con las características de la cuenca. De este tipo son la de Snyder (1938) y la de Gray (1961).
- 2) Aquéllas basadas en hidrogramas unitarias adimensionales: la del Soil Conservation Service y la de William y Hann.
- 3) Las basadas en modelos de almacenamiento de la cuenca: Clark (1943)

Muchos son los métodos o modelos de hidrogramas unitarios sintéticos reportados en la literatura; ninguno de ellos ha sido desarrollado para las condiciones hidrológicas propias de un país. Sin embargo, esta metodología (los hidrogramas unitarios sintéticos) es extensivamente usada en Nuestro País. Los modelos del hidrograma unitario sintético más utilizados son:

2.4.1 Método de Chow

Fue deducido basándose en el concepto de hidrogramas unitarios e hidrogramas unitarios sintéticos y considera que el caudal pico del escurrimiento directo de una cuenca puede calcularse como el producto de la lluvia en exceso por el caudal pico de un hidrograma unitario, y es aplicable a cuencas no urbanas con una superficie menor de 25 km².

Su desarrollo demanda, como paso preliminar, determinar la cobertura vegetal y el tipo de suelo de la zona de estudio. Para esto último se deberá tomar como guía la clasificación que se detalla:

Tipo A: (Eskurrimiento mínimo). Incluye gravas y arenas de tamaño medio, limpias y mezcla de ambas.

Tipo B: Incluye arenas finas, limos orgánicos e inorgánicos, mezclas de arena y limo.

Tipo C: Comprende arenas muy finas, arcillas de baja plasticidad, mezclas de arena, limo y arcilla.

Tipo D: (Eskurrimiento máximo). Incluye principalmente arcillas de alta plasticidad, suelos poco profundos con subhorizontes casi impermeables cerca de la superficie.

El autor propone la siguiente expresión:

$$Q_{máx} = A X Y Z \quad (2.29)$$

Siendo A el área de la cuenca en Km². Las restante variables que intervienen son estimadas como se describe a continuación:

- Factor de escurrimiento X , en cm/h

$$X = \frac{P_e}{d} \quad (2.30)$$

Donde P_e es la precipitación en exceso, en cm

$$P_e = \frac{(P - (508/N) + 5.08)^2}{P + (2032/N) - 20.32} \quad (2.31)$$

P es la precipitación de la tormenta, en cm

$$P = I d \quad (2.32)$$

I es la intensidad de la tormenta, en cm/h; d es la duración de la tormenta en horas; y , N es el número de escurrimiento, en función del tipo de suelo y cobertura vegetal Tabla 2.1. Según esta tabla el uso de la tierra o cobertura vegetal: Bosque natural, condición de la superficie: Ralo, baja transpiración; y , tipo de suelo: el Tipo A; lo cual el valor de N sería 68.

Tabla 2.1 Valores de N para diferentes tipos de suelo y usos de la tierra (cobertura)

USO DE LA TIERRA O CUBIERTA	CONDICIÓN DE LA SUPERFICIE	TIPO DE SUELO			
		A	B	C	D
Bosques (sembrados y cultivados)	Ralo, baja transpiración	45	66	77	83
	Normal, transpiración media	36	60	73	79
	Espeso o alta transpiración	25	55	70	77
Caminos	De tierra	72	82	87	89
	Superficie dura	74	84	90	92
Bosques Naturales	Muy ralo o baja transpiración	56	75	86	91
	Ralo, baja transpiración	46	68	78	84
	Normal, transpiración media	36	60	70	76
	Espeso, alta transpiración	26	52	62	69

HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLOGICOS BASADOS EN LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAMMA.

USO DE LA TIERRA O CUBIERTA	CONDICIÓN DE LA SUPERFICIE	TIPO DE SUELO			
		A	B	C	D
	Muy espeso, alta transpiración	15	44	54	61
Descanso (sin cultivo)	Surcos rectos	77	86	91	94
USO DE LA TIERRA O CUBIERTA	CONDICIÓN DE LA SUPERFICIE	TIPO DE SUELO			
		A	B	C	D
Cultivo de surco	Surcos rectos	70	80	87	90
	Surcos en curvas de nivel	67	77	83	87
	Terrazas	64	73	79	82
Cereales	Surcos rectos	64	76	84	88
	Surcos en curvas de nivel	62	74	82	85
	Terrazas	60	71	79	82
Leguminosas (sembrada con maquinaria o al voleo) o potrero de rotación.	Surcos rectos	62	75	83	87
	Surcos en curvas de nivel	60	72	81	84
	Terrazas	57	70	78	82
Pastizal	Pobre	68	79	86	89
	Normal	49	69	79	84
	Bueno	39	61	74	80
	Curvas de nivel, pobre	47	67	81	88
	Curvas de nivel, normal	25	59	75	83
	Curvas de nivel, bueno	6	35	70	79
Potrero (permanente)	Normal	30	58	71	78
Superficie impermeable		100	100	100	100

Además según los mapas del Plan Hidráulico de Hoja correspondientes a Cubierta Vegetal y Uso Actual del Suelo, nos indica que la zona de nuestro estudio corresponde a bosques naturales y cultivos anuales, respectivamente.

- Factor climático Y

$$Y = 2.78 \frac{P_s}{P_b} \quad (2.33)$$

Donde: P_b es la precipitación en la estación base en cm, P_s es la precipitación en la estación en estudio (dentro de la cuenca), en cm.

- Factor de reducción del pico Z

Si $0.05 < d/t_p < 0.40$
Entonces

$$Z = 0.73 (d/t_p)^{0.97} \quad (2.34)$$

Si $0.40 < d/t_p < 2.00$
Entonces

$$Z = 1.89(d/t_p)^{0.23} - 1.23 \quad (2.35)$$

Donde t_p es el tiempo de retraso en horas

$$t_p = 0.00505(L/\sqrt{J})^{0.64} \quad (2.36)$$

J es la gradiente geométrica / hidráulica del tramo en estudio, en %.
Finalmente reduciendo variables, se llegó a la siguiente expresión:

$$Q_p = \frac{0.278 P_e A}{d_e} Z \quad (2.37)$$

El tiempo de retraso obtenido para las cuencas mencionadas anteriormente, se calcula como:

$$t_r = 0.005 \left[\frac{L}{\sqrt{S}} \right]^{0.64} \quad (2.38)$$

donde

t_r tiempo de retraso (h).

L longitud del cauce principal (m).

S pendiente (porcentaje).

Para aplicar este método es conveniente tener los datos de precipitación en forma de curvas $i-d-T_r$. De esta forma, para el periodo de retorno seleccionado para el diseño, se calculan los picos correspondientes a varias duraciones y se escoge el mayor.

2.4.2 Método de I – Pai Wu

Se basa en el modelo lineal propuesto por Nash para la obtención de hidrogramas unitarios, el mismo que asimila una cuenca a un sistema de recipientes lineales iguales, con el mismo coeficiente de almacenaje, colocados en serie.

La estimación del caudal máximo $Q_{m\acute{a}x}$ en m^3/s , se lo hace con:

$$Q_{m\acute{a}x} = \frac{2.78 A P e}{t_m} f(n, t_m) \quad (2.39)$$

En la expresión, A es el área de la cuenca en Km^2 , Pe corresponde al valor obtenido con el método de Chow y viene en cm , t_m es el tiempo de pico en horas,

$$T_m = 4660 A^{1.085} L^{-1.233} J^{-0.668} \quad (2.40)$$

Donde; L es la longitud del cauce principal desde su nacimiento hasta el sitio de interés en m , J es el gradiente geométrico/hidráulico del tramo en estudio, en %.

Y $f(n, t_m)$ representa la función que relaciona a n y t_m .

$$f_{(n, t_m)} = \frac{(n-1)^n e^{(1-n)}}{\Gamma(n)} \quad (2.41)$$

Siendo n el número de recipientes lineales con la misma capacidad de conducción, Γ la función gamma (programa 5250 de la casio FX-880P) de n y e es la base de los logaritmos neperianos.

$$n \cong 4 \frac{tm}{K_1} \quad (2.42)$$

$$K_1 = 19300 A^{0.937} L^{-1.074} J^{-1.473} \quad (2.43)$$

K_1 el coeficiente de almacenaje.

2.4.3 Hidrograma unitario triangular

Mockus desarrolló un hidrograma unitario sintético de forma triangular, como se muestra en la Figura 2.17.

De la geometría del hidrograma unitario, el gasto de pico se obtiene como:

$$q_p = \frac{0.555 A}{t_p} \quad (2.44)$$

donde

q_p gasto de pico ($m^3/s/mm$).

A área de la cuenca (km^2).

t_p tiempo de pico (h).

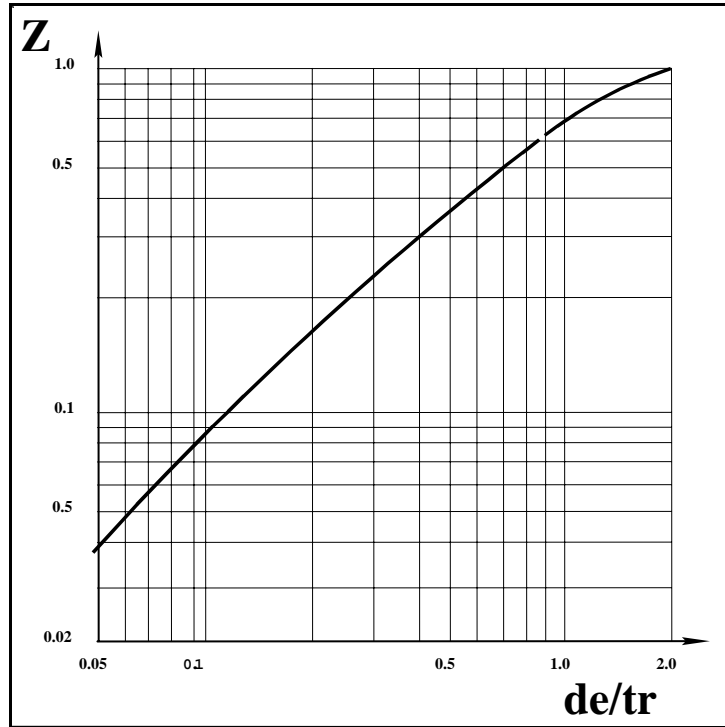


Figura 2.16 Factor de reducción de pico.

Del análisis de varios hidrogramas, Mockus concluye que el tiempo base t_b y el tiempo de pico t_p se relacionan mediante la expresión

$$t_b = 2.67 t_p \quad (2.45)$$

De la Figura 2.17, el tiempo de pico se expresa como

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r \quad (2.46)$$

donde

- tp tiempo de pico (h).
- de duración en exceso (h).
- tr tiempo de retraso (h).

El tiempo de retraso se estima mediante el tiempo de concentración t_c (usando alguna de las ecuaciones para este caso, principalmente la ecuación 2.6) como:

$$t_r = 0.6 t_c \quad (2.47)$$

o bien con la ecuación 2.38.

Además, la duración en exceso con la que se tiene mayor gasto de pico, se puede calcular aproximadamente como

$$d_e = 2\sqrt{t_c} \quad (2.48)$$

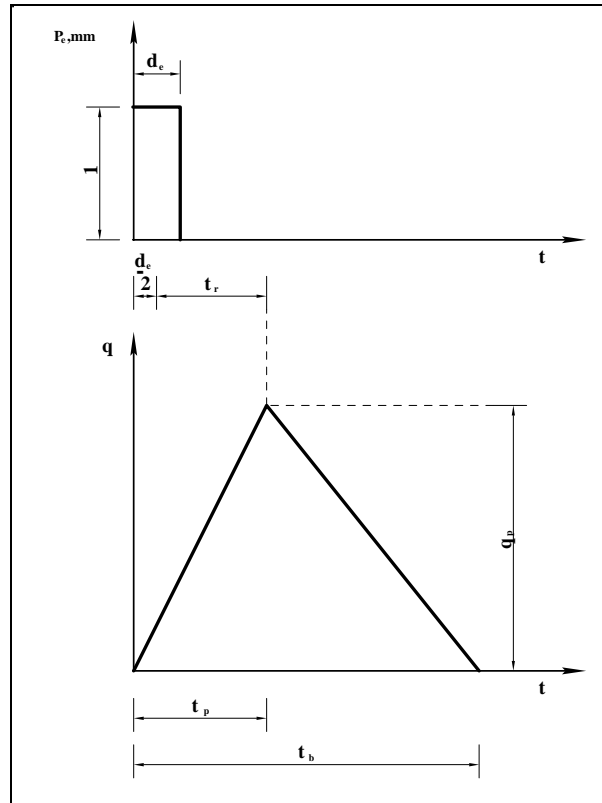


Figura 2.17 Hidrograma unitario triangular.

para cuencas grandes; o bien, $d_e = t_c$ para las pequeñas. De las ecuaciones anteriores, finalmente se obtiene que:

$$q_p = \frac{0.208 A}{t_p} \quad (2.49)$$

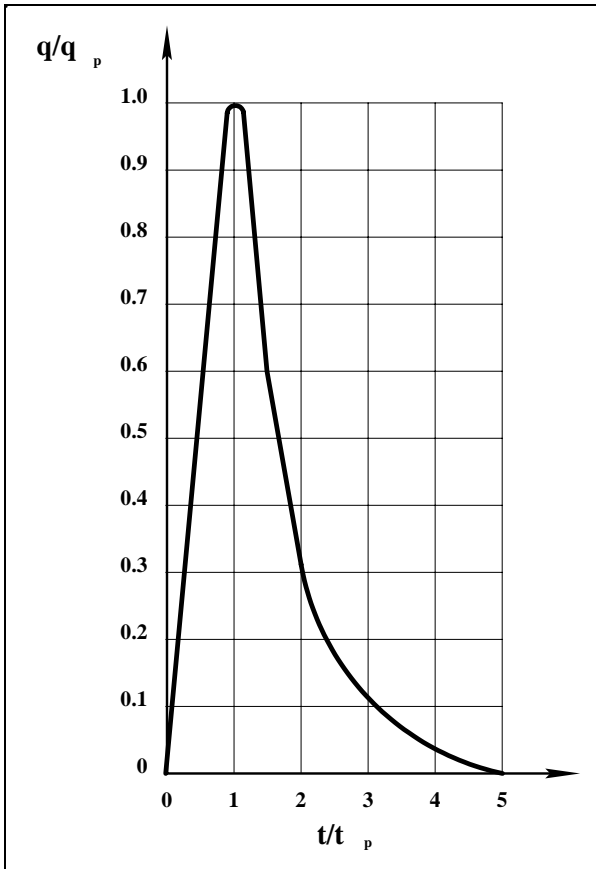
$$t_p = \sqrt{t_c} + 0.6 t_c \quad (2.50)$$

Con las ecuaciones 2.45, 2.46 y 2.50 se calculan las características del hidrograma unitario triangular.

2.4.4 Hidrograma unitario adimensional

Para propósitos prácticos es suficiente con las características de un hidrograma unitario triangular; sin embargo, si la extensión de la curva de recesión del hidrograma afecta el diseño, puede usarse un hidrograma curvilíneo.

Este modelo puede mejorar la definición de la forma del hidrograma utilizando los resultados obtenidos por el Soil Conservation Service de los EUA, sintetizados en la figura 2.18, 2.18a. Para aplicar el método solo se necesita calcular el gasto y el tiempo pico. El gasto pico se obtiene con la ecuación 2.49.



t/t_p	q/q_p
0	0
0.1	0.03
0.3	0.19
0.4	0.31
0.6	0.66
0.7	0.82
0.8	0.93
0.9	0.99
1.0	1.00
1.10	0.99
1.20	0.93
1.30	0.86
1.50	0.68
1.70	0.46
1.90	0.33
2.20	0.21
2.60	0.11
3.2	0.04
5.0	0

Figura 2.18 Hidrograma unitario adimensional.

Cabe señalar que en el hidrograma unitario adimensional se puede modificar el tiempo base y que esto dependerá de la experiencia que tenga el ingeniero en el manejo de estas.

En la Figura 2.18a se muestra una manera de ajuste de este hidrograma a un relación de $t/t_p = 4$.

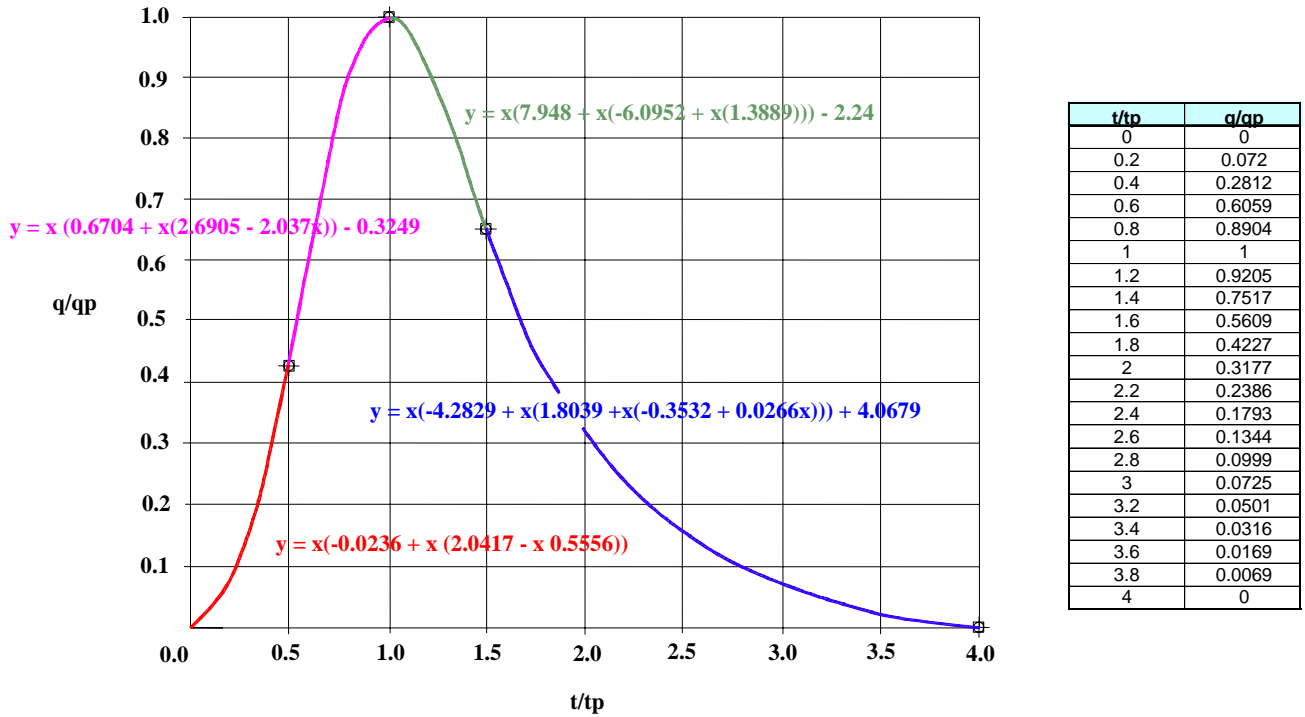


Figura 2.19a Hidrograma unitario adimensional t/tp=4.

Para obtener un hidrograma unitario a partir de la figura 2.18, 2.18a para una cuenca en particular, basta multiplicar las ordenadas por el gasto de pico q_p de la ecuación 2.49 y las abscisa por el tiempo de pico de la ecuación 2.46. Por otra parte conocido el hidrograma unitario sintético se debe calcular la lluvia efectiva, con el número de escurrimiento y multiplicar dichas ordenadas del hidrograma unitario por ese valor y obtener el hidrograma de escurrimiento directo.

2.4.5 Hidrograma unitario sintético de Snyder

El modelo de Snyder fue desarrollado a partir de una serie de estudios sobre cuencas cuyas áreas oscilan en un rango de entre 10 y 10000 millas cuadradas en los Montes Apalaches de Estados Unidos, para una duración de lluvia efectiva igual a $T L / 5.5$, donde TL es el tiempo de rezago.

El modelo pretende derivar un Hidrograma Unitario, a partir de algunas características físicas de la cuenca, para ser aplicado en las cuencas donde no se posea registro de caudal.

Tiempo de retraso. El modelo emplea como definición de tiempo de retraso, (TL), el tiempo comprendido entre el centroide del hidrograma de precipitación efectiva y el pico del Hidrograma de escurrimiento directo correspondiente.

Snyder asume que el retraso es constante para una cuenca, ya que depende de algunas de sus características físicas y no está determinado por el tipo de lluvia o sus variaciones.

El tiempo de retraso se calcula usando la siguiente expresión:

$$T_L = \frac{L_c^{0.8} (S+1)^{0.7}}{1900 S_c^{0.5}} \quad (2.51)$$

En donde:

T_L : tiempo de retraso en horas.

L_c : longitud del canal principal en pies.

S : factor de retención o almacenamiento calculado en términos del número de curva, CN

S_c : pendiente de la cuenca en porcentaje.

Para las cuencas en donde se obtienen tiempos de rezago mayores que el tiempo de concentración, se recomienda utilizar la siguiente expresión

$$T_L = 0.6 T_C \quad (2.52)$$

Siendo T_C el tiempo de concentración en horas.

Duración de la lluvia seleccionada por Snyder. Snyder consideró lluvias que estuvieran de acuerdo con el tamaño de la cuenca, definiendo para ellas una duración de 1/5.5 veces el tiempo al pico de la cuenca, es decir:

$$t_s = \frac{T_L}{5.5} \quad (2.53)$$

Donde t_s es la duración de la lluvia efectiva en horas.

Caudal pico. El modelo propone calcular el caudal pico por milla cuadrada, u_p , como:

$$U_p = C_p \frac{640}{T_L} \quad (2.54)$$

Donde:

u_p : caudal pico del Hidrograma Unitario por unidad de área, en $\text{pie}^3 / \text{s.mi}^2$,

C_p : coeficiente.

T_L : tiempo de rezago.

El coeficiente C_p depende de la topografía de la cuenca y se recomienda, por ejemplo, para cuencas pendientes utilizar $C_p = 0.8$

Cuando el Hidrograma Unitario Sintético corresponda a una precipitación efectiva cuya duración coincide con la dada por la ecuación 2.53, es decir, t_s , el caudal pico del Hidrograma Unitario por unidad de área puede calcularse con la ecuación 2.54.

Sin embargo, esta situación es difícil que se presente en la práctica, y si la duración es diferente a t_s , el caudal pico por unidad de área puede calcularse como:

$$U_p = C_p \frac{640}{[T_L + (T - t)/4]} \quad (2.55)$$

En donde T es la duración (en horas) de la precipitación efectiva a la cual se le va a calcular el Hidrograma Unitario Sintético.

Una vez obtenido el caudal pico por unidad de área de la cuenca, el caudal pico total se obtiene como:

$$U_p = u_p A \quad (2.56)$$

En donde:

A: es el área de la cuenca en mi^2

U_p : es el caudal pico del Hidrograma Unitario Sintético, en $pie^3 /s/pul$.

Tiempo pico. Es el tiempo en que se presenta la máxima concentración de escorrentía directa puede calcularse como:

$$T_p = \frac{T}{2} + T_L \quad (2.57)$$

En donde:

T_p : es el tiempo al pico, en horas.

T: es la duración de la lluvia, en horas.

T_L : es el tiempo de retraso, en horas.

Estos tiempos se grafican en la Figura 2.20, que representa el Hidrograma Unitario Sintético de Snyder.

Duración de la escorrentía superficial. Para el cálculo del tiempo base del Hidrograma Unitario, se propone la siguiente ecuación:

$$t_b = 3 + 3 \frac{T_L}{24} \quad (2.58)$$

Donde:

t_b : es el tiempo base en días, con T_L , en horas.

Esta ecuación da una estimación razonable del tiempo base para cuencas grandes, pero produce valores excesivamente altos para cuencas pequeñas. En éstas, el tiempo base puede calcularse, en forma aproximada, como 3 a 5 veces el tiempo al pico.

Esquematación de la hidrograma. El Cuerpo de Ingenieros de los EE.UU. introdujo después de los estudios de Snyder dos ecuaciones adicionales a este modelo, con el objeto de obtener otros cuatro puntos del Hidrograma Unitario Sintético de Snyder, que facilitan su definición. Estas ecuaciones son:

$$W_{50} = \frac{770}{u_p^{1.08}} \quad W_{75} = \frac{440}{u_p^{1.08}} \quad (2.59)$$

En donde:

u_p : es el caudal pico por unidad de área en $\text{pie}^3 / \text{s mi}^2$.

W_{50} : es el intervalo de tiempo en horas, correspondiente al 50% del caudal pico.

W_{75} : es el intervalo de tiempo en horas, correspondiente al 75% del caudal pico.

Como se puede ver en la Figura 2.20, cada intervalo de tiempo se ubica en la curva de tal forma que su tercera parte quede a la izquierda de la vertical que pasa por el pico del Hidrograma Unitario, y las otras dos terceras partes, a la derecha de dicha línea

El punto C en la Figura 2.20 se obtiene con las ecuaciones 2.56 y 2.57. El punto F se obtiene con la ecuación 2.58. Los puntos A, B, D y E se obtienen con las ecuaciones 2.59.

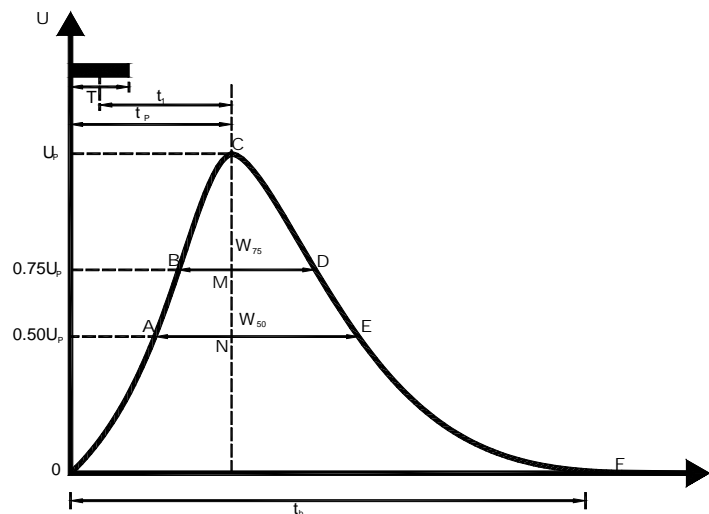


Figura 2.20 Hidrograma unitario sintético de Snyder

El autor es muy claro al advertir que “el modelo tal como se dedujo, solo es válido para las cuencas que fueron objeto de su estudio y que la aplicación del mismo a cuencas de otros sitios debe ser precedida por la deducción de los coeficientes C_t y C_p , y quizás hasta de las mismas ecuaciones” (Snyder, 1938).

2.4.6 Hidrograma unitario sintético de Williams y Hann

A principios de la década del setenta, Jimmy R. Williams y Roy W. Hann propusieron un modelo para calcular el Hidrograma Unitario Sintético producido por una lluvia instantánea en una cuenca, a partir de sus principales características geomorfológicas, como son el área, la pendiente del canal principal y la relación largo-ancho

Las características geomorfológicas de la cuenca están representadas en el modelo mediante dos coeficientes, que son la constante de recesión, K , y el tiempo al pico, T_p .

El Hidrograma Unitario Sintético desarrollado por Williams y Hann puede expresarse en forma adimensional, dividiendo las abscisas y las ordenadas por el tiempo al pico, t_p , y el caudal pico, U_p , respectivamente, aunque también pueden aplicarse con unidades de caudal, U , y tiempo, t .

Las ecuaciones propuestas por Williams y Hann para la determinación de la forma de su Hidrograma Unitario Sintético son las siguientes:

$$T = 0.133 T_c \quad (2.60)$$

$$U = U_p \left(\frac{t}{T_p} \right)^{n-1} \exp \left[(1-n) \left(\frac{t}{T_p} - 1 \right) \right] \quad \text{Para } t \leq t_0 \quad (2.61)$$

$$U = U_0 \exp \left(\frac{t_0 - t}{K} \right) \quad \text{Para } t_0 < t \leq t_1 \quad (2.62)$$

$$U = U_1 \exp \left(\frac{t_1 - t}{3K} \right) \quad \text{Para } t > t_1 \quad (2.63)$$

Según las tres ecuaciones anteriores, el Hidrograma Unitario Sintético de Williams y Hann queda bien determinado de la siguiente manera:

La ecuación 2.60 es aplicable a la curva de concentración, es decir, hasta el punto de inflexión, t_0 , de la rama decreciente Figura 2.21.

Las ecuaciones 2.62 y 2.63 conforman la curva de recesión. La ecuación 2.62 solo es válida entre los puntos t_0 y t_1 , los cuales están separados una distancia igual a dos veces la constante de recesión, $2K$, Figura 2.21.

2.4.6.1 Parámetros K y t_p del modelo.

En el modelo de Williams y Hann, los parámetros K y T_p fueron determinados mediante análisis de regresión, realizados sobre una muestra de 34 cuencas localizadas en diversos lugares de los EE.UU, cuyas áreas oscilan entre 0.5 y 25 millas cuadradas. Dichos análisis arrojaron como resultado las siguientes ecuaciones:

$$K = 270.0 A_c^{0.231} S_{CP}^{-0.777} \left(\frac{L_c}{W_c} \right)^{0.124} \quad (2.64)$$

$$T_p = 4.63 A_c^{0.422} S_{CP}^{-0.46} \left(\frac{L_c}{W_c} \right)^{0.133} \quad (2.65)$$

en donde: A_c es el área de la cuenca en mi^2 , S_{CP} es la pendiente media del canal principal en pies/milla, L_c/W_c es la relación largo ancho de la cuenca, K es la constante de recesión en horas y T_p es el tiempo al pico en horas.

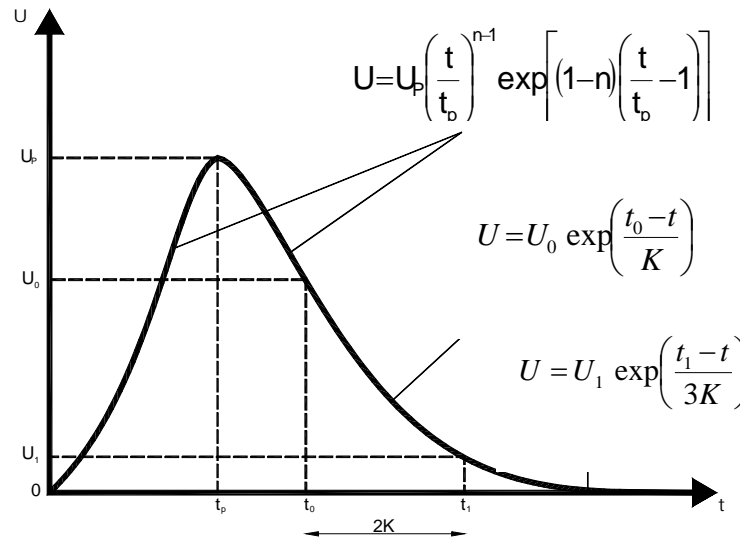


Figura 2.21 Hidrograma Unitario Instantáneo de Williams y Hann

2.4.6.2 Tiempos y Parámetros.

La determinación de los tiempos t_0 y t_1 y de los parámetros n y B es necesaria para la obtención del Hidrograma Unitario Sintético. Estos tiempos y parámetros fueron deducidos por Williams y Hann; las expresiones obtenidas son las siguientes:

$$t_0 = T_p \left[1 + \frac{1}{(n-1)^{1/2}} \right] \quad (2.66)$$

El punto t_1 está localizado a una distancia igual a dos veces la constante de recesión de la cuenca, ($2K$), contada a partir de t_0 , es decir:

$$t_1 = t_0 + 2K \quad (2.67)$$

En la literatura, n es conocido como el parámetro de forma del Hidrograma Unitario Sintético de Williams y Hann, y se puede encontrar con la siguiente expresión:

$$n = 1 + \left(\frac{1}{2(K/T_p)} + \left(\frac{1}{4(K/T_p)^2} + \frac{1}{(K/T_p)} \right)^{1/2} \right)^2 \quad (2.68)$$

El coeficiente B actúa más como un parámetro de conversión de unidades que como un parámetro de significado físico. Se puede hallar resolviendo numéricamente una ecuación integral derivada por Williams y Hann. Sin embargo, el valor de B también se puede encontrar gráficamente en función de K y T_p usando una gráfica desarrollada por los mismos autores. Existe igualmente una gráfica para determinar el valor de n , en función también de K y T_p , pero en este caso se recomienda mejor usar la ecuación 2.68.

El caudal pico se calcula como:

$$U_p = \frac{B A_c}{T_p} \quad (2.69)$$

2.4.6.3 Construcción del Hidrograma Unitario Sintético de Williams y Hann.

Para construir el Hidrograma Unitario Sintético de Williams y Hann, se siguen los siguientes pasos:

Se calculan las constantes de recesión, K , y el tiempo al pico, T_p , con las ecuaciones 2.64 y 2.65, respectivamente.

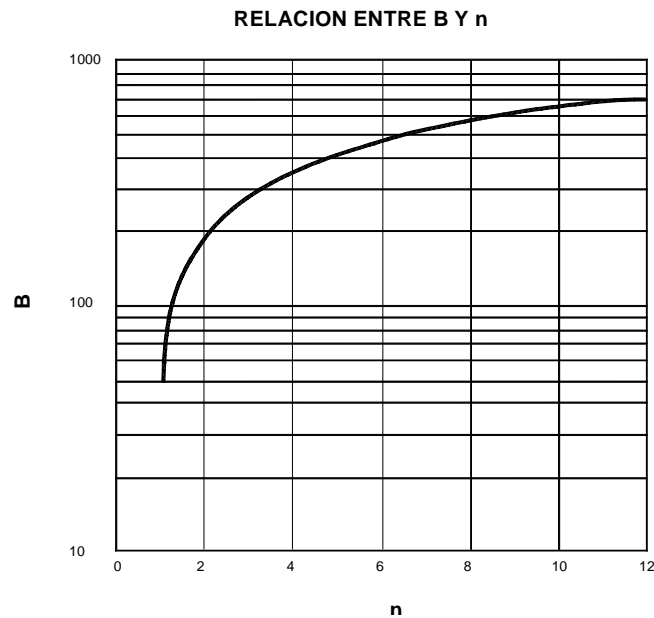


Figura 2.22. Valores de los parámetros B y n .

Se calcula el parámetro n utilizando la ecuación 2.68; y el parámetro B usando la Figura 2.22.

Se calculan el tiempo t_0 con la ecuación 2.66; y el tiempo t_1 , con la ecuación 2.67.

Se calcula el caudal pico, U_p , en pie^3/s , con la ecuación 2.69.

Se discretizan las abscisas en intervalos ΔT . El intervalo debe ser tal que la duración, T , de la lluvia a la que se le va a aplicar el Hidrograma Unitario Sintético sea múltiplo entero de ΔT . $T = n \Delta T$.

Se obtienen las ordenadas del Hidrograma Unitario Sintético, U_t , reemplazando cada abscisa, t , en las ecuaciones 2.61, 2.62 y 2.63. El Hidrograma Unitario Instantáneo, tiene dimensiones de pie^3/s /pul para los caudales y de horas para los tiempos.

3 HIDROGRAMA UNITARIO INSTANTÁNEO GEOMORFOLÓGICO

3.1 Introducción

La morfología comprende el estudio de las formas superficiales; en ese sentido la geomorfología pretende cuantificar determinados rasgos propios de la superficie terrestre.

La cuenca funciona como un gran receptor de las precipitaciones y las transforma en escurrimientos. La transferencia se realiza con pérdidas y es una función bastante complicada de numerosos factores, (entre ellos están el clima y la configuración del terreno). Los índices y magnitudes físicas de la cuenca que expresan términos simples, los valores medios de ciertas características del terreno, son condicionantes de su régimen hidrológico.

La acción de diferentes factores físicos de la cuenca en la transformación de la precipitación en escurrimiento se puede establecer en forma intuitiva, aunque existe la dificultad en plantear las influencias por parámetros que representen su influencia de la manera más precisa. A la fecha se ha comprobado la influencia que determinados índices tienen en las respuestas hidrológicas de una cuenca y por ello, son puntos de partida de los análisis y determinaciones cuantitativas, entre tales parámetros cabe citar el área, su forma, pendiente y elevación media, las características de su red de drenaje y las del cauce principal.

Por otra parte, aunque se han desarrollado ciertas relaciones útiles, aun los resultados son más bien cualitativos que cuantitativos, debido a un gran número de factores, los cuales se pueden resumir en los siguientes apartados:

- ❖ La determinación precisa de los parámetros físicos de una cuenca están gobernados por la disposición cartográfica, en cuanto a sus escalas y calidad.
- ❖ Para determinados parámetros, sus definiciones son todavía arbitrarias, existiendo la posibilidad de que aun no se hayan logrado las definiciones más convenientes.
- ❖ Las relaciones entre las características físicas de la cuenca, que son prácticamente estáticas y sus respuestas hidrológicas, que son altamente aleatorias, son muy complejas.

El carácter hidrológico de una cuenca tiende a formar sus características físicas, recíprocamente aceptando tal interrelación, se puede pensar en predecir la respuesta hidrológica de una cuenca, a partir de ciertos parámetros físicos fácilmente determinables, esto último constituye una de las aplicaciones más importantes de la geomorfología, es decir, se utiliza para hacer medidas de similitud geométrica entre cuencas, especialmente entre sus redes de ríos.

3.2 Leyes de Horton

Robert E. Horton (1945) desarrolló un sistema para ordenar las redes de los ríos y derivó algunas leyes al relacionar el número y la longitud de los ríos de diferente orden. El sistema de ordenamiento de ríos de Horton, levemente modificada por Strahler (1964) enuncia lo siguiente:

Las corrientes reconocibles más pequeñas se designan como de orden 1; normalmente estas corrientes fluyen sólo durante épocas de lluvias. Cuando dos corrientes de orden 1 se unen, resulta una corriente de orden 2 hacia aguas abajo, en general cuando dos corrientes del mismo orden resulta una corriente de orden: $i+1$

Por otro lado, si una corriente de orden i se encuentra con otra de orden $i+1$, la corriente de orden mayor prevalece hacia aguas abajo. Por consiguiente el orden de la cuenca es el mismo del río a su salida y será el mayor orden en la cuenca. En la Figura 3.1 se muestra un ejemplo del sistema.

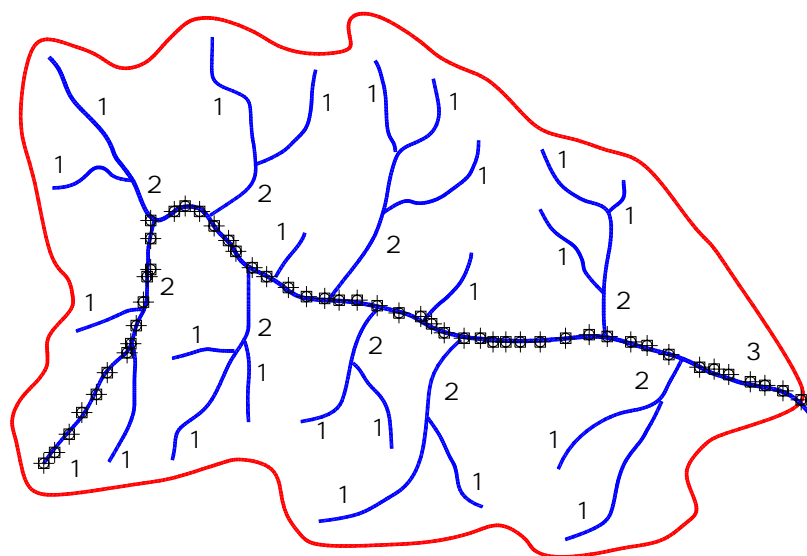


Figura 3.1 Delineación de ordenes de cauces.

El orden de la corriente principal será un indicador de la magnitud de la ramificación y de la extensión de la red de drenaje dentro de la cuenca.

La determinación de la corriente principal, se lleva a cabo desde el punto de salida de la cuenca hacia aguas arriba, siguiendo a la corriente de mayor orden hasta encontrar una bifurcación de dos corrientes de igual orden, entonces la rama o cauce que tenga una mayor área de cuenca será seleccionado; a partir de tal punto el proceso se repite hasta terminar en un tributario de orden 1.

Para valuar el orden de corriente se requiere lógicamente de un plano topográfico de la cuenca que incluya tanto las corrientes perennes como las intermitentes, para lo cual se recomienda a una escala 1:50000.

3.2.1 Ley de numeros de cauces

Horton (1945) introdujo el concepto de relación de bifurcación (RB) o relación de números n_i de corrientes de orden i y el número n_{i+1} de corriente de orden $i+1$.

Además, encontró empíricamente que esta relación es relativamente constante de un orden a otro:

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} = R_B \quad (3.1)$$

La relación de bifurcación varía entre 3.0 y 5.0 (Strahler, 1964) para cuencas en las cuales las estructuras geológicas no distorsionan el modelo del drenaje. El valor mínimo teórico posible es 2.0 y difícilmente se alcanza en condiciones naturales y en general el valor promedio es del orden 3.5

Tomando en cuenta que la relación de bifurcación es una propiedad adimensional y que los sistemas de drenaje en materiales homogéneos tienden a mostrar similitud geométrica, no es sorprendente que tal parámetro muestre pequeñas variaciones de una región a otra. Las observaciones anteriores condujeron a Horton a postular la Ley de numero de cauces.

$$N_i = R_B^{\Omega-i} \quad (3.2)$$

donde:

N_i es el numero de corrientes de orden i .

R_B es la relación de bifurcación y

Ω es el número de orden de la corriente principal.

3.2.2 Ley de longitudes de cauces

El promedio de longitud de los ríos de cada orden, L_i , puede calcularse midiendo la longitud de cada una de las corrientes. Horton propuso la ley de longitudes de río en la cual, las longitudes promedio de ríos de órdenes sucesivos están relacionados por medio de la relación de longitudes, R_L :

$$\frac{\bar{L}_{i+1}}{\bar{L}_i} = R_L \quad (3.3)$$

Para cuencas naturales los valores de R_L varían entre 1.5 y 3.5

El promedio de las longitudes de las corrientes para cada orden i esta dada por:

$$\bar{L}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} L_{ij} \quad (3.4)$$

En forma similar que en la ley de números de corrientes, Horton sugirió la ley de las longitudes de los cauces, es decir:

$$\bar{L}_i = \bar{L}_1 (R_L)^{i-1} \quad (3.5)$$

Siendo, \bar{L}_i la longitud promedio de los cauces de orden i .

3.2.3 Ley de áreas de los cauces

Utilizando un raciocinio similar, Horton propuso la ley de áreas de cauces para relacionar las áreas promedio \bar{A}_i que se drenan por los cauces de ordenes sucesivos

$$\frac{\bar{A}_{i+1}}{\bar{A}_i} = R_A \quad (3.6)$$

En cuencas naturales se han observado valores de R_A de 3 a 6
Siendo el promedio de las áreas de las corrientes de cada orden:

$$\bar{A}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_i} A_{ij}}{N_i} \quad (3.7)$$

Donde A_{ij} es el área que contribuye al escurrimiento de una corriente de orden i y no el área que drena directamente a la corriente de orden i , únicamente.

En realidad, las leyes de Horton indican una progresión geométrica de número, longitud y área de las corrientes de una cuenca y por lo tanto, gráficamente las leyes corresponden a las relaciones lineales entre el número de orden y los logaritmos del número de cauce.

Por lo que estas relaciones se calculan graficando los valores de N_i , \bar{L}_i y \bar{A}_i en una escala logarítmica contra el orden del río en una escala lineal. Las relaciones R_B , R_L y R_A se calculan utilizando las pendientes de las rectas. Es decir:

$$\text{Log} N_u = a + bu \quad (3.8)$$

donde:

$$R_B = \log^{-1} b \quad (3.9)$$

y b debe ser calculado en valor absoluto, de igual forma para obtener tanto R_L y R_A

3.3 Planteamiento general

Varios investigadores han realizado estudios para relacionar las características de hidrogramas con los parámetros de las redes de ríos, Rodríguez-Iturbe y Valdés (1979); fueron los primeros en introducir el concepto del hidrograma unitario instantáneo geomorfológico; Gupta, Waymare y Wang, (1980) apoyaron el concepto.

Gupta (1980) demostró que el HUIG de una cuenca es igual a la función de densidad de probabilidad del tiempo de viaje T_B a la salida de la cuenca, de una gota de agua que cae en ésta aleatoriamente con distribución espacial uniforme.

El análisis de Rodríguez-Iturbe y Valdés se enfocó en el viaje de una gota de agua, a través de una cuenca. A lo largo del viaje, la gota va teniendo transiciones, de corrientes de menor a mayor orden. Una transición se define como un cambio de estado, donde el estado i es el orden de la corriente donde la gota se encuentra viajando.

Para fines del análisis, el viaje de una gota se rige por las siguientes hipótesis:

- 1.-Para una gota que cae en una ladera, su estado correspondiente es e_i , donde i es el orden de la corriente asociada.
- 2.-Del estado e_i necesariamente se pasa al estado r_j correspondiente.
- 3.-De un estado r_j se puede pasar a cualquier estado r_k , si $k > j$.
- 4.-Necesariamente se pasa por r_n y de ahí, con probabilidad de 1 al estado $n+1$, el cual es el orden de la cuenca.

El conjunto de reglas define un conjunto finito de trayectorias que puede seguir una gota hasta alcanzar la salida de la cuenca. El tiempo que una gota requiere para encontrar una corriente después de caer en una ladera es muy pequeña en comparación con el tiempo que permanece en él, por lo que se despreciará el tiempo e .

Así, por ejemplo, para una cuenca de orden 3, las trayectorias posibles son:

$S_1 = r_1 \longrightarrow r_2 \longrightarrow r_3 \longrightarrow \text{Salida.}$

$S_2 = r_1 \longrightarrow r_3 \longrightarrow \text{Salida.}$

$S_3 = r_2 \longrightarrow r_3 \longrightarrow \text{Salida.}$

$S_4 = r_3 \longrightarrow \text{Salida.}$

Con tales condiciones la función de distribución de probabilidad del tiempo de escurrimiento de una gota hasta la salida de la cuenca, esta dada por:

$$P(T_B \leq t) = \sum_{S_i \in S} P(T_{S_i} \leq t) P(S_i) \tag{3.10}$$

Donde:

T_B es el tiempo de viaje a la salida de la cuenca.

T_{S_i} es el tiempo de viaje de una trayectoria particular S_i .

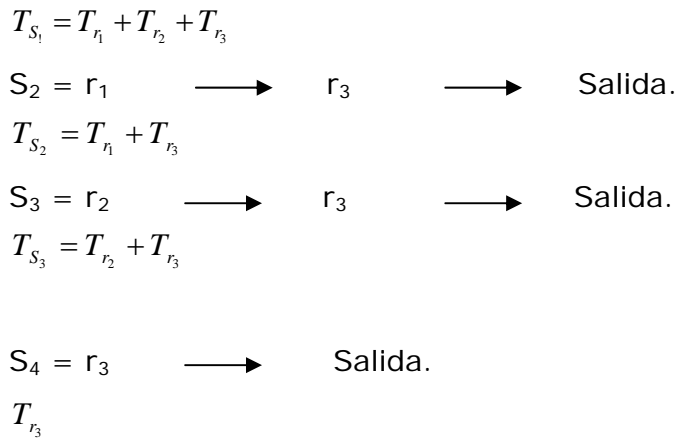
$P(S_i)$ es la probabilidad de que una gota tome una trayectoria S_i .

S es el conjunto de todas las trayectorias posibles que una gota puede tomar después de caer en la cuenca.

3.4 Función de densidad de probabilidad de los tiempos de viaje

El tiempo de viaje T_{S_i} en una trayectoria en particular, es igual a la suma de los tiempos de viaje de los elementos de esa trayectoria. Así, para las trayectorias de una cuenca de orden 3, como la que se mostró anteriormente, se tendrán cuatro trayectorias posibles, es decir:

$S_1 = r_1 \longrightarrow r_2 \longrightarrow r_3 \longrightarrow \text{Salida.}$



Dada la cantidad de laderas y corrientes de orden dado, y sus diversas propiedades, los diversos tiempos son tomados como variables aleatorias con funciones de densidad de probabilidad $f_{T_{r_i}}(t)$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad del tiempo de viaje total de una trayectoria T_s estará dada por la convolución de las funciones de densidad de cada tramo de la trayectoria, esto es:

$$f_{T_s}(t) = f_{T_{r_1}}(t) * f_{T_{r_2}}(t) * \dots * f_{T_{r_{n+1}}}(t) \quad (3.11)$$

Por ejemplo, para una cuenca de orden tres, la función de distribución de probabilidad de los tiempos de escurrimiento será:

$$P(T_B \leq t) = P(T_{S_1} \leq t)P(S_1) + P(T_{S_2} \leq t)P(S_2) + P(T_{S_3} \leq t)P(S_3) \quad (3.12)$$

Donde, las probabilidades de los tiempos de escurrimiento de cada una de las trayectorias se obtienen realizando sus respectivas convoluciones.

3.5 Función de densidad tipo exponencial

Rodríguez-Iturbe y Valdés (1979) consideran que el tiempo de viaje de una gota en una corriente de orden ω , obedece a una función de densidad tipo exponencial, dada por:

$$f_{T_{\omega}}(t) = K_{\omega} e^{(-K_{\omega}t)} \quad (3.13)$$

donde $\frac{1}{K_{\omega}}$ es un tiempo promedio de escurrimiento y sugieren que K_{ω} puede expresarse como:

$$K_{\omega} = \frac{V}{\bar{L}_{\omega}}; \quad K_1 = \frac{V}{\bar{L}_1}; \quad K_2 = K_1 R_L^{-1}; \quad K_3 = K_1 R_L^{-2} \quad (3.14)$$

Donde V es una velocidad característica, que se supone igual en cualquier parte de la cuenca, en cualquier tiempo dado, e igual a la velocidad de pico para cualquier evento dentro de la cuenca. Esta velocidad se puede calcular mediante el cociente de la longitud del cauce principal entre el tiempo de concentración, sin embargo se deberá realizar un análisis de las velocidades que se han presentado en la corriente en estudio.

3.5.1 Convolución de funciones de densidad de probabilidad de tipo exponencial

De acuerdo a Rodríguez-Iturbe y Valdez convolucionar esta función significa encontrar el tiempo de viaje que una gota puede llevarse hasta la salida de la cuenca y que esta dependerá de la probabilidad asignada a la ruta que esta tome.

Convolución de dos fdp.

A continuación se muestran la convolución de dos funciones de densidad de probabilidad.

Sustituyendo las funciones de densidad exponencial como la de la expresión 3.13 en la ecuación 3.14

$$f_i * f_j = k_i e^{-k_i t} * k_j e^{-k_j t} \quad (3.15)$$

Para convolucionar la ecuación 3.15, se reacomodó ésta en una integral de convolución, resultado la siguiente expresión,

$$f_i * f_j = k_i k_j \int_0^t e^{-k_j(t-\tau)} e^{-k_i(\tau)} d\tau \quad (3.16)$$

donde * significa convolución

Reordenando y completando la integral 3.16

$$f_i * f_j = \frac{k_i k_j}{(k_i - k_j)} e^{-k_i t} \int_0^t e^{(k_i - k_j)\tau} (k_i - k_j) d\tau$$

Resolviendo la integral y evaluándola.

$$f_i * f_j = \frac{k_i k_j}{(k_i - k_j)} e^{-k_i t} [e^{k_i t - k_j t} - 1]$$

Finalmente la convolución de dos funciones de densidad de los tiempos de viaje estará dada por la siguiente expresión:

$$f_i * f_j = \frac{k_i k_j}{(k_i - k_j)} (e^{k_j t} - e^{-k_i t}) \quad (3.17)$$

Análogamente se obtienen las convoluciones para tres, cuatro y cinco funciones de densidad de los tiempos de viaje.

3.5.2 Convolución de funciones de densidad de probabilidad tipo gamma

La Derivación del Hidrograma Unitario Instantáneo Geomorfológico (HUIG) Gamma (HUIGG), en el cual el HUIG desarrollado por Rodríguez-Iturbe y Váldez (1979) es modificado en la distribución de probabilidad de los tiempos de viaje en las corrientes que componen la red de drenaje, adoptando la distribución gamma en lugar de la exponencial.

Considérese la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \end{cases} \quad (3.18)$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y k deben ser tales que el área total situada debajo de la curva sea igual a 1. Para valuar k , se debe efectuar el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{x}{\beta} \Rightarrow x = y\beta \\ dx = dy\beta$$

La cual se sustituye en la expresión 3.18, resultando

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} kx^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx &= \int_0^{\infty} k(y\beta)^{\alpha-1} e^{-y} (dy\beta) = k\beta \int_0^{\infty} (y\beta)^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= k\beta \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} \beta^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ \int_0^{\infty} kx^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx &= k\beta^{\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \end{aligned}$$

La integral así obtenida depende de α exclusivamente y define la conocida función gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad \text{para } \alpha > 0$$

y por lo tanto

$$k = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

De esta forma la función de densidad de probabilidad gamma queda definida de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.19)$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$

Asiendo algunos cambios de variable para simplificar la expresión 3.19

$$\begin{aligned} x &= t \\ \lambda &= \frac{1}{\beta} \\ \alpha &= k \\ f_T(t) &= \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Considérese una cierta cantidad que llega a la entrada de un sistema (*cuena*) entre los tiempos τ y $\tau + d\tau$, por ejemplo, si $I(\tau)$ es la intensidad de precipitación en mm/hora y dt es un intervalo de tiempo infinitesimal medido en horas, entonces $I(\tau)d\tau$ es la profundidad de precipitación en *mm* que entra al sistema en este intervalo. Por otro lado, el escurrimiento directo que se presenta en un tiempo posterior $t - \tau$ como resultado de una entrada es $I(\tau)u(t - \tau)d\tau$ en forma general se puede representar como:

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (3.21)$$

O bien;

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t)*h(t) \quad (3.22)$$

Expresión conocida como *integral de convolución*, que es la ecuación fundamental para la solución de sistemas lineales en una escala continua de tiempo.

En la figura 3.2 se muestra la convolución de dos funciones.

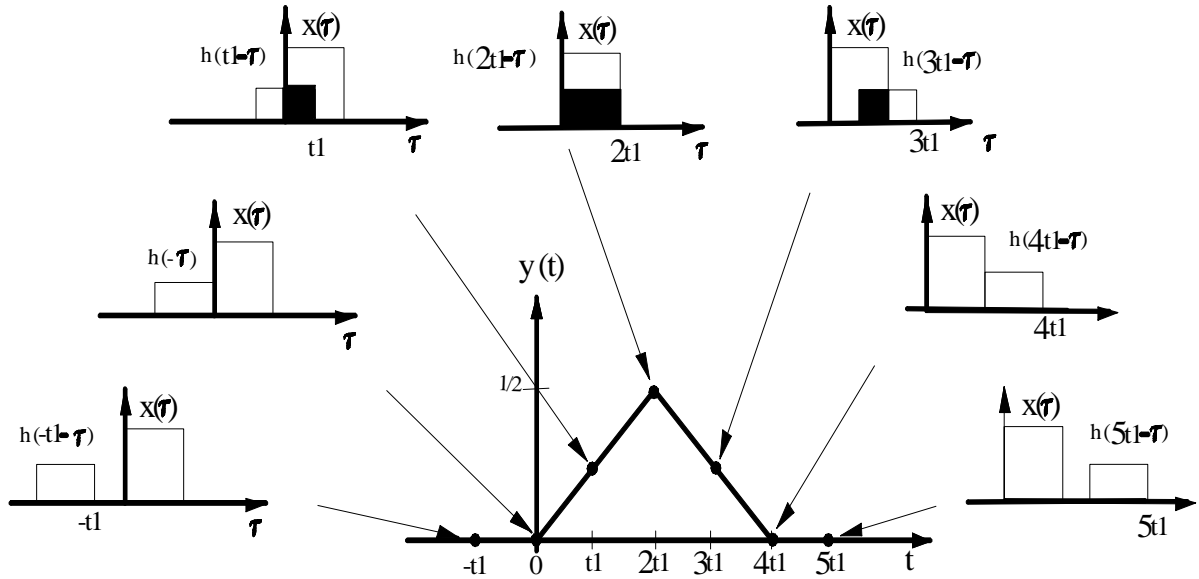


Figura 3.2 Ejemplo grafico de una convolución.

Convolución de dos funciones de densidad de probabilidad gamma

A continuación se muestran la convolución de dos funciones de densidad de probabilidad.

Sustituyendo las funciones de densidad de probabilidad gamma como la de la expresión 3.20 en la ecuación 3.21

$$f_i * f_j = \frac{\lambda_i^k t^{k_i-1} e^{-\lambda_i t}}{\Gamma(k_i)} * \frac{\lambda_j^k t^{k_j-1} e^{-\lambda_j t}}{\Gamma(k_j)}$$

$$f_i * f_j = \int_0^t \left(\frac{\lambda_i^k \tau^{k_i-1} e^{-\lambda_i \tau}}{\Gamma(k_i)} \right) \left(\frac{\lambda_j^k (t-\tau)^{k_j-1} e^{-\lambda_j (t-\tau)}}{\Gamma(k_j)} \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
 f_i * f_j &= \frac{\lambda^{k_i} \lambda^{k_j}}{\Gamma(k_i) \Gamma(k_j)} \int_0^t \tau^{k_i-1} e^{-\lambda_i \tau} (t-\tau)^{k_j-1} e^{-\lambda_j(t-\tau)} d\tau \\
 f_i * f_j &= \frac{\lambda^{k_i} \lambda^{k_j}}{\Gamma(k_i) \Gamma(k_j)} \int_0^t \tau^{k_i-1} e^{-\lambda_i \tau} (t-\tau)^{k_j-1} e^{-\lambda_j t} e^{\tau \lambda_j} d\tau \\
 f_i * f_j &= \frac{\lambda^{k_i} \lambda^{k_j}}{\Gamma(k_i) \Gamma(k_j)} e^{-\lambda_j t} \int_0^t \tau^{k_i-1} (t-\tau)^{k_j-1} e^{(\lambda_j - \lambda_i) \tau} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Según Gradshteyn y Ryzhin (1980), pp. 318

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) u^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu + \nu; \beta u) \tag{3.24}$$

Para $\Re \mu > 0$ y $\Re \nu > 0$

Donde $B(\mu, \nu)$ es una integral de Euler conocida como función Beta, la cual se puede expresar de la siguiente manera (Handbook of mathematical functions, pp. 258)

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu) \tag{3.25}$$

para nuestro caso $\mu = k_j$ y $\nu = k_i$, por lo tanto la expresión resulta ser;

$$B(k_j, k_i) = \frac{\Gamma(k_j) \Gamma(k_i)}{\Gamma(k_j + k_i)} \tag{3.26}$$

y ${}_1F_1(\nu; \mu + \nu; \beta u)$ es conocida como función hipergeométrica degenerada (Table of integrals, serie, and products; I.S. Gradshteyn and products; pp1058)

$${}_1F_1(v; \mu + v; \beta u) = \theta(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) 3!} + \dots \quad (3.27)$$

haciendo una analogía:

$$\begin{aligned} \alpha &= k_i \\ \gamma &= k_j + k_i \\ z &= (\lambda_j - \lambda_i)t \end{aligned}$$

Sustituyendo 3.24, 3.26 y 3.27 en 3.23

$$f_i * f_j = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_i)\Gamma(k_j)} e^{-\lambda_j t} \left[\frac{\Gamma(k_j)\Gamma(k_i)}{\Gamma(k_j + k_i)} t^{k_j+k_i-1} \theta(k_i, k_j + k_i, (\lambda_j - \lambda_i)t) \right]$$

Finalmente la convolución de dos funciones de densidad de probabilidad gamma resulta ser:

$$f_i * f_j = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j t} t^{k_j+k_i-1} \theta(k_i, k_j + k_i, (\lambda_j - \lambda_i)t) \quad (3.28)$$

Convolución de tres funciones de densidad de probabilidad gamma

$$f_i * f_j * f_l = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j t} t^{k_j+k_i-1} \theta(k_i, k_j + k_i, (\lambda_j - \lambda_i)t) * \frac{\lambda_l^{k_l} t^{k_l-1} e^{-\lambda_l t}}{\Gamma(k_l)}$$

$${}_1F_1(v; \mu + v; \beta u) = \theta(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) 3!} + \dots$$

Haciendo una similitud:

$$\begin{aligned} \alpha &= k_i \\ \gamma &= k_j + k_i \\ z &= (\lambda_j - \lambda_i)t \end{aligned}$$

$$f_i * f_j * f_l = \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \left(1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) 3!} + \dots\right)^* d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \left(1 + \frac{k_i}{k_j + k_i} \frac{(\lambda_j - \lambda_i) \tau}{1!} + \frac{k_i}{k_j + k_i} \frac{(k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2 \tau^2}{2!} + \dots\right)^* d\tau$$

$$f_i * f_j * f_l = \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} (1)^* \frac{\lambda_l^{k_l} (t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l (t - \tau)}}{\Gamma(k_l)} d\tau + \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \left(\frac{k_i}{k_j + k_i} \frac{(\lambda_j - \lambda_i) \tau}{1!}\right)^* \frac{\lambda_l^{k_l} (t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l (t - \tau)}}{\Gamma(k_l)} d\tau + \dots$$

Primer término de la serie

$$T_1 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l)} e^{-\lambda_l t} \int_0^t \left[\tau^{k_j + k_i - 1} (t - \tau)^{k_l - 1} e^{(\lambda_l - \lambda_j) \tau} \right] d\tau + \dots$$

La integral es de la forma 3.24

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) \mu^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu + \nu; \beta u)$$

Para $\Re \mu > 0$ y $\Re \nu > 0$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu)$$

Para nuestro caso $\mu = k_l$ y $\nu = k_i + k_j$, por lo tanto la expresión 3.25 resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_l)\Gamma(k_i + k_j)}{\Gamma(k_l + k_i + k_j)}$$

$$T_1 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_i) \Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j t} \left[\frac{\Gamma(k_l) \Gamma(k_i + k_j)}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} t^{k_l + k_j + k_i - 1} \theta(k_i + k_j, k_j + k_i + k_l, (\lambda_l - \lambda_j) t) \right]$$

Finalmente la integral resulta:

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} e^{-\lambda_j t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} t^{k_l + k_j + k_i - 1} \theta(k_i + k_j, k_j + k_i + k_l, (\lambda_l - \lambda_j) t) \right]$$

Para el segundo término de la serie la integral queda definida como sigue:

$$T_2 = \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \left(\frac{k_i}{k_j + k_i} \frac{(\lambda_j - \lambda_i) \tau}{1!} \right)^* \frac{\lambda_l^{k_l} (t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l (t - \tau)}}{\Gamma(k_l)} d\tau$$

$$T_2 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i) \Gamma(k_l)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{1!} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)}{\left(\frac{k_i}{k_j + k_i} \right)} \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \tau^* \frac{(t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l (t - \tau)}}{\Gamma(k_l)} d\tau$$

$$T_2 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i) \Gamma(k_l)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{1!} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)}{\left(\frac{k_i}{k_j + k_i} \right)} e^{-\lambda_j t} \int_0^t \tau^{k_j + k_i + 1 - 1} * e^{(\lambda_l - \lambda_j) \tau} * (t - \tau)^{k_l - 1} d\tau *$$

Nuevamente la integral es la forma 3.24

$$\int_0^t x^{\nu-1} (t-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) t^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; \beta t)$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu)$$

para nuestro caso $\mu = k_l$ y $\nu = k_i + k_j + 1$, por lo tanto la expresión resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_l) * \Gamma(k_i + k_j + 2)}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)}$$

$$T_2 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i) \Gamma(k_l)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{\left(\frac{k_i (k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \right)} \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} e^{-\lambda_l t} \frac{\Gamma(k_l) * \Gamma(k_i + k_j + 2)}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)} t^{k_l + k_j + k_i + 2 - 1} * \theta(k_i + k_j + 2, k_j + k_i + k_l + 2, (\lambda_l - \lambda_j) t)$$

Finalmente la integral resulta:

$$T_2 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)} k_i (k_i + 1) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} e^{-\lambda_l t} t^{k_l + k_j + k_i + 2 - 1} \theta(k_i + k_j + 2, k_j + k_i + k_l + 2, (\lambda_l - \lambda_j) t)$$

Haciendo:

$$n = k_i + k_j$$

$$\Gamma(k_i + k_j + 1) = \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$$

$$T_2 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} * e^{-\lambda_j t} * k_i}{1!} \left[\frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_i + 1)} t^{k_i + k_j + k_i + 1 - 1} \theta(k_i + k_j + 1, k_j + k_i + k_l + 1, (\lambda_l - \lambda_j) t) \right]$$

Para el tercer término de la serien la integral queda definida como sigue:

$$T_3 = \int_0^t \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \left(\frac{k_i(k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \right) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2 \tau^2}{2!} * \frac{\lambda_l^{k_l} (t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l(t - \tau)}}{\Gamma(k_l)} d\tau$$

$$T_3 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l)} \left(\frac{k_i(k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \right) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} \int_0^t e^{-\lambda_j \tau} \tau^{k_j + k_i - 1} \tau^2 * (t - \tau)^{k_l - 1} e^{-\lambda_l(t - \tau)} d\tau$$

$$T_3 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l)} \left(\frac{k_i(k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \right) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} e^{-\lambda_l t} \int_0^t \tau^{k_j + k_i + 2 - 1} * (t - \tau)^{k_l - 1} e^{(\lambda_l - \lambda_j)\tau} d\tau$$

Nuevamente la integral es la forma 3.24

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) \mu^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; \beta u)$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} = B(\nu, \mu)$$

para nuestro caso $\mu = k_l$ y $\nu = k_i + k_j + 2$, por lo tanto la expresión resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j + 2) = \frac{\Gamma(k_l) * \Gamma(k_i + k_j + 2)}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)}$$

$$T_3 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j}}{\Gamma(k_j + k_i)} \frac{\lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l)} \left(\frac{k_i(k_i + 1)}{(k_j + k_i)(k_j + k_i + 1)} \right) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} e^{-\lambda_l t} \frac{\Gamma(k_l) * \Gamma(k_i + k_j + 2)}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)} t^{k_i + k_j + k_i + 2 - 1} * \theta(k_i + k_j + 2, k_j + k_i + k_l + 2, (\lambda_l - \lambda_j) t)$$

Finalmente la integral resulta:

$$T_3 = \frac{\lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l}}{\Gamma(k_l + k_i + k_j + 2)} k_i(k_i + 1) \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^2}{2!} e^{-\lambda_l t} t^{k_i + k_j + k_i + 2 - 1} \theta(k_i + k_j + 2, k_j + k_i + k_l + 2, (\lambda_l - \lambda_j) t)$$

Simplificando la función; la convolución de tres funciones queda de la siguiente manera.

$$f_i * f_j * f_l = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} e^{-\lambda_i t} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_l + m)} t^{k_i + k_j + k_l + m - 1} (k_i)_m \frac{(\lambda_j - \lambda_l)^m}{m!} \theta(k_i + k_j + m, k_j + k_i + k_l + m, (\lambda_l - \lambda_j) t) \right] \quad (3.29)$$

Siempre y cuando

$$(k_i)_0 = 1$$

Por lo tanto para $m > 0$

$$(k_i)_m = (k_i)_{m-1} (k_i + m - 1)$$

Convolución de cuatro funciones de distribución de probabilidad gamma.

$$f_i * f_j * f_l * f_n = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} e^{-\lambda_i t} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_l + m)} t^{k_i + k_j + k_l + m - 1} (k_i)_m \frac{(\lambda_j - \lambda_l)^m}{m!} \theta(k_i + k_j + m, k_j + k_i + k_l + m, (\lambda_l - \lambda_j) t) \right] \frac{\lambda_n^{k_n} t^{k_n - 1} e^{-\lambda_n t}}{\Gamma(k_n)}$$

Siempre y cuando

$$(k_i)_0 = 1$$

Por lo tanto para $m > 0$

$$(k_i)_m = (k_i)_{m-1} (k_i + m - 1)$$

$$= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_l + m)} \tau^{k_i + k_j + k_l + m - 1} (k_i)_m \frac{(\lambda_j - \lambda_l)^m}{m!} \theta(k_i + k_j + m, k_j + k_i + k_l + m, (\lambda_l - \lambda_j) \tau) \right] * (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_l) \tau}$$

Para $m=0$

$$f_i * f_j * f_l * f_n = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_l)} \tau^{k_i + k_j + k_l - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_l)^0}{0!} e^{(\lambda_n - \lambda_l) \tau} * \theta(k_i + k_j, k_j + k_i + k_l, (\lambda_l - \lambda_j) \tau) \right]$$

$$= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_i + k_j + k_l)} \tau^{k_i + k_j + k_l - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_l)^0}{0!} e^{(\lambda_n - \lambda_l) \tau} \left(1 + \frac{k_i + k_j}{k_j + k_i + k_l} \frac{(\lambda_l - \lambda_j) \tau}{1!} \right) \right]$$

$$\left[\frac{k_i + k_j}{k_j + k_i + k_l} \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)^2 \tau^2}{2!} + \dots \right]$$

Primer término de la serie cuando $m=0$

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} \tau^{k_l + k_j + k_i - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \right]$$

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \int_0^t \left[\tau^{k_l + k_j + k_i - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \right] d\tau$$

La integral es de la forma 3.24

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) u^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu+\nu; \beta u)$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} = B(\nu, \mu)$$

para nuestro caso $\mu = k_n$ y $\nu = k_l + k_j + k_i$, por lo tanto la expresión 3.25 resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j)}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j)} \tau^{k_n + k_l + k_j + k_i - 1} * \theta(k_l + k_i + k_j, k_n + k_l + k_i + k_j, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

Finalmente la integral resulta:

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j)} \tau^{k_n + k_l + k_j + k_i - 1} \theta(k_l + k_i + k_j, k_n + k_l + k_i + k_j, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

Segundo término de la serie

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} \tau^{k_l + k_j + k_i - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \left(\frac{k_i + k_j}{k_j + k_i + k_l} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)\tau}{1!} \right) \right]$$

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} \frac{k_i + k_j}{k_j + k_i + k_l} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \int_0^t \tau^{k_l + k_j + k_i + 1 - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau}$$

La integral es de la forma 3.24

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) u^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu + \nu; \beta u)$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu)$$

Para nuestro caso $\mu = k_n$ y $\nu = k_l + k_j + k_i + 1$, por lo tanto la expresión 3.25 resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i)} \frac{k_i + k_j}{k_j + k_i + k_l} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)}$$

$$t^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1 - 1} * \theta(k_l + k_i + k_j + 1, k_n + k_l + k_i + k_j + 1, (\lambda_n - \lambda_l)\tau)$$

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} (k_i + k_j) \frac{(\lambda_n - \lambda_l)}{1!} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)} t^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1 - 1}$$

$$\theta(k_l + k_i + k_j + 1, k_l + k_i + k_j + 1, (\lambda_n - \lambda_l)\tau)$$

De acuerdo a los resultados anteriores cuando $m=0$ la serie se simplifica de la siguiente manera:

$$= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + n)} t^{k_n + k_l + k_j + k_i + n - 1} (w)_n \frac{(\lambda_n - \lambda_l)^n}{n!} \theta(k_l + k_i + k_j + n, k_n + k_l + k_i + k_j + n, (\lambda_n - \lambda_l)\tau) \right]$$

Haciendo

$$w = k_l + k_j$$

$$w_0 = 1$$

Por lo tanto para $m > 0$

$$(w)_n = (w)_{n-1} (w + n - 1)$$

Para $m=1$ la serie queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} \tau^{k_l + k_j + k_i + 1} (t - \tau)^{k_n - 1} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \right] \\
 &= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} \tau^{k_l + k_j + k_i + 1} (t - \tau)^{k_n - 1} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \left(1 + \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)\tau}{1!} \right) \right. \\
 &\quad \left. \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{k_i + k_j + 1 + 1}{k_j + k_i + k_l + 1 + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)^2 \tau^2}{2!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Primer término de la serie

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_j + k_i + 1)} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{-\lambda_n t} \int_0^t \tau^{k_l + k_j + k_i + 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} d\tau$$

La integral es de la forma:

$$\int_0^t x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} e^{\beta x} dx = B(\mu, \nu) \mu^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu; \mu + \nu; \beta u)$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu)$$

Para nuestro caso $\mu = k_n$ y $\nu = k_l + k_j + k_i + 1$, por lo tanto la expresión 3.25 resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} e^{-\lambda_n t} (k_i)_0 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^0}{0!} \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)} \tau^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1}$$

$$\theta(k_l + k_i + k_j + 1, k_n + k_n + k_i + k_j + 1, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

$$T_1 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{-\lambda_n t} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1)} t^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1} *$$

$$\theta(k_l + k_i + k_j + 1, k_n + k_l + k_i + k_j + 1, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

Segundo término m=1

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} e^{-\lambda_n t} \left[\frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} \tau^{k_l + k_j + k_i + 1 - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau} \right]$$

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} e^{-\lambda_n t} \int_0^t \tau^{k_l + k_j + k_i + 1 - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau}$$

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} e^{-\lambda_n t} \int_0^t \tau^{k_l + k_j + k_i + 1 - 1} (t - \tau)^{k_n - 1} e^{(\lambda_n - \lambda_i)\tau}$$

$$B(\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} = B(\nu, \mu)$$

para nuestro caso $\mu = k_n$ y $\nu = k_l + k_j + K_i + 1 + 1$, por lo tanto la expresión 3.25 resulta ser;

$$B(k_l, k_i + k_j) = \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1 + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + 1)}$$

Sustituyendo en la fórmula

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \frac{\lambda_n^{k_n}}{\Gamma(k_n)} \frac{1}{\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1)} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} \frac{k_i + k_j + 1}{k_j + k_i + k_l + 1} \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} e^{-\lambda_n t} \frac{\Gamma(k_n)\Gamma(k_l + k_j + k_i + 1 + 1)}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + 1)} \tau^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1 - 1} \theta(k_l + k_i + k_j + 1 + 1, k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + 1, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

$$T_2 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} e^{-\lambda_n t} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + 1)} t^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1 - 1} (k_i + k_j + 1) \frac{(\lambda_l - \lambda_j)}{1!} \theta(k_l + k_i + k_j + 1 + 1, k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + 1, (\lambda_n - \lambda_i)\tau)$$

Resumiendo para $m=1$ se llega que la serie se simplifica de la siguiente manera:

$$= \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} e^{-\lambda_n t} (k_i)_1 \frac{(\lambda_j - \lambda_i)^1}{1!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + n)} t^{k_n + k_l + k_j + k_i + 1 + n - 1} (w)_n \frac{(\lambda_n - \lambda_i)^n}{n!} \theta(k_l + k_i + k_j + 1 + n, k_n + k_l + k_i + k_j + 1 + n, (\lambda_n - \lambda_i)\tau) \right]$$

Si siguiendo con el mismo procedimiento para $m = 2, 3, 4, \dots, \infty$, la cuarta convolución queda de la siguiente manera:

$$f_i * f_j * f_l * f_n = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} e^{-\lambda_n t} \sum_{m=0}^{\infty} (k_i)_m \frac{(\lambda_n - \lambda_l)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (w)_n \frac{(\lambda_n - \lambda_l)^n}{n!} \left[\frac{1}{\Gamma(k_n + k_l + k_i + k_j + m + n)} t^{k_n + k_l + k_i + k_j + m + n - 1} \theta \left(\begin{matrix} k_l + k_i + k_j + m + n, k_n + k_l + k_i + k_j + m + n \\ n, (\lambda_n - \lambda_l)\tau \end{matrix} \right) \right] \quad (3.30)$$

Convolución de cinco funciones de distribución de probabilidad gamma.

Por inducción matemática se concluye que para convolucionar n funciones de distribución de probabilidad gamma se obtiene una expresión que contiene n-2 sumatorias hasta infinito anidadas.

Por lo tanto las convoluciones para 5 y 6 funciones de probabilidad quedarían de la siguiente manera.

Para 5 funciones y haciendo:

$$sum5 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} \lambda_q^{k_q} e^{-\lambda_q t} \sum_{m=0}^{\infty} (k_i)_m \frac{(\lambda_n - \lambda_l)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (w)_n \frac{(\lambda_q - \lambda_n)^n}{n!}$$

Lo cual da como resultado lo siguiente

$$f_i * f_j * f_l * f_n * f_q = suma5 * \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_q + k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q)} t^{k_q + k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q - 1} (Y)_n \frac{(\lambda_q - \lambda_n)^q}{q!} \theta \left(\begin{matrix} k_l + k_i + k_j + m + n + q, k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q \\ n, (\lambda_q - \lambda_n)\tau \end{matrix} \right) \right] \quad (3.31)$$

Siempre y cuando

$$(k_i)_0 = 1$$

Por lo tanto para $m > 0$

$$(k_i)_m = (k_i)_{m-1} (k_i + m - 1)$$

Y

Haciendo

$$w = k_i + k_j$$

$$w_0 = 1$$

Por lo tanto para $n > 0$

$$(w)_n = (w)_{n-1} (w + n - 1)$$

$$Y = k_i + k_j + k_L$$

$$Y_0 = 1$$

Por lo tanto para $q > 0$

$$(Y)_q = (Y)_{q-1}(Y + q - 1)$$

Convolución de seis funciones de distribución de probabilidad

Haciendo:

$$sumas6 = \lambda_i^{k_i} \lambda_j^{k_j} \lambda_l^{k_l} \lambda_n^{k_n} \lambda_q^{k_q} \lambda_p^{k_p} e^{-\lambda_p t} \sum_{m=0}^{\infty} (k_i)_m \frac{(\lambda_n - \lambda_l)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (w)_n \frac{(\lambda_q - \lambda_n)^n}{n!} \sum_{q=0}^{\infty} (Y)_q \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^q}{q!}$$

Entonces la convolución quedaría de la siguiente manera.

$$= sumas6 * \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_p + k_q + k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q + p)} t^{k_p + k_q + k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q + p - 1} (r)_p \frac{(\lambda_p - \lambda_q)^p}{p!} \theta(k_q + k_l + k_i + k_j + m + n + q + p, k_p + k_q + k_n + k_l + k_i + k_j + m + n + q + p, (\lambda_p - \lambda_q)t) \right] \quad (3.32)$$

Haciendo

Siempre y cuando

$$(k_i)_0 = 1$$

Por lo tanto para $m > 0$

$$(k_i)_m = (k_i)_{m-1}(k_i + m - 1)$$

Haciendo

$$w = k_i + k_j$$

$$w_0 = 1$$

Por lo tanto para $n > 0$

$$(w)_n = (w)_{n-1}(w + n - 1)$$

$$Y = k_i + k_j + k_L$$

$$Y_0 = 1$$

Por lo tanto para $Q > 0$

$$r = k_i + k_j + k_L + k_N$$

$$r_0 = 1$$

Por lo tanto para $p > 0$

$$(r)_p = (r)_{p-1}(r+p-1)$$

Por lo tanto para $p > 0$

$$(r)_p = (r)_{p-1}(r+p-1)$$

3.6 Probabilidad de que una gota siga una trayectoria dada

La probabilidad $P(S)$ de que una gota siga una trayectoria S determinada, esta dada por la expresión:

$$P(S) = \theta_i P_{ij} P_{jk} \dots P_{r\Omega} \quad (3.33)$$

donde θ_i es la probabilidad de que la gota caiga en la ladera adyacente a una corriente de orden i y P_{rj} es la probabilidad de transición de una corriente de orden r a una de orden j .

Tales probabilidades son función de la geomorfología y de la geometría de la cuenca hidrográfica, su interpretación física se muestra en las siguientes expresiones.

$$\theta_i = \frac{\text{área total que drena directamente a las corrientes de } i}{\text{área total de la cuenca}} \quad (3.34)$$

$$P_{ij} = \frac{\text{No. de } r_i \text{ que drenan a las } r_j}{\text{No. total de } r_j} \quad (3.35)$$

A partir del ordenamiento de redes de Strahler y de las leyes de Horton, θ_i y P_{rj} pueden ser calculadas aproximadamente mediante las siguientes expresiones.

$$P_{ij} = \frac{(N_i - 2N_{i+1})E(j, \Omega)}{\sum_{k=i+1}^{\Omega} E(k, \Omega)N_i} + \frac{2N_{i+1}}{N_i} \delta_{i+1,j} \quad (3.36)$$

donde $\delta_{i+1,j} = 1$ si $j=i+1$ y 0 en caso contrario.

$E(i, \Omega)$ señala el número promedio de los enlaces interiores de orden i en una red finita de orden Ω . Un enlace interior es un segmento de la red de corrientes, entre dos uniones sucesivas o entre la salida y la primera unión aguas arriba.

$$E(i, \Omega) = N_i \prod_{j=2}^i \frac{(N_{j-1} - 1)}{2N_j - 1}, \quad i=2,3,\dots, \Omega \quad (3.37)$$

La probabilidad de que una gota caiga en un área de orden ω , puede ser aproximada utilizando la expresión general:

$$\theta_{\omega} = \frac{N_{\omega}}{A_{\Omega}} \left[\bar{A}_{\omega} - \sum_{j=1}^{\omega-1} \bar{A}_j \left(\frac{N_j P_{j\omega}}{N_{\omega}} \right) \right], \quad \omega=2,3,\dots, \Omega \quad (3.38)$$

y para el caso de $\omega=1$,

$$\theta_1 = \frac{N_1 \bar{A}_1}{A_{\Omega}}$$

Las probabilidades que se presentan tanto θ_i como de P_{ij} , son las ecuaciones generales que se emplean en obtener dichas probabilidades para cualquier orden de la cuenca que se este estudiando, sin embargo se pueden calcular las probabilidades particulares a partir de los parámetros geomorfológicos de Horton.

3.7 Hidrograma unitario instantáneo geomorfológico

Con lo que se ha estudiado, se puede definir al hidrograma unitario geomorfológico como la función de densidad de probabilidades de T_B , esto es:

$$h_B(t) = \sum_{s \in S} f_{T_{r_i}}(t) * \dots * f_{T_{r_\Omega}}(t) P(s) \quad (3.39)$$

donde $f_{T_{r_i}}(t)$ es la función de probabilidad de T_{r_i} .

La ecuación 3.39 físicamente representa la transición de una gota a través de una trayectoria específica hasta llegar a la salida de la cuenca y el valor que nos indica es la probabilidad de que se presente ésta, por ello para que la ecuación 3.39 represente un HUIG deberá ser multiplicada por el área de la cuenca y convolucionarla con un hidrograma unitario con una duración de lluvia en exceso d . La duración dependerá del zona geográfica que se este estudiando.

Sin embargo su complejidad llevo a Rodríguez-Iturbe y Valdés (1979) a realizar algunas simplificaciones, por lo que sugirieron utilizar un hidrograma unitario de forma triangular cuyo gasto de pico Q_p y tiempo de pico T_p fueron obtenidos con regresiones ajustadas a la solución analítica de la ecuación 3.40 Y 3.41 y están dados por las ecuaciones:

$$q_p = \frac{1.31}{L_\Omega} R_L^{0.43} V \quad \text{en } hrs^{-1} \quad (3.40)$$

$$t_p = \frac{0.44 L_\Omega}{V} \left(\frac{R_B}{R_A} \right)^{0.55} R_L^{-0.38} \quad \text{en horas} \quad (3.41)$$

donde L_Ω es la longitud en km de la corriente de mayor orden, V la velocidad de al tiempo de pico en m/s, q_p gasto de pico en 1/h, y t_p tiempo de pico en h.

Una de las dificultades del hidrograma unitario geomorfológico es la velocidad de pico. Cuando se expresa en función de la intensidad de la lluvia efectiva y de la

duración puede ser eliminada de las ecuaciones. De este modo, se puede escribir que

$$q_p = \frac{0.871}{\prod_i^{0.4}} \quad (3.42)$$

$$t_p = 0.585 \prod_i^{0.4} \quad (3.43)$$

donde

$$\prod_i = \frac{L_\Omega^{2.5}}{i_r A_\Omega R_L \alpha_\Omega^{1.5}} \quad (3.44)$$

$$\alpha_\Omega = \frac{1}{nb_\Omega^{2/3}} S_\Omega^{1/2} \quad (3.45)$$

donde i_r es la intensidad de lluvia efectiva media y n es el coeficiente de rugosidad de la formula de Manning. Además b_Ω y S_Ω son el ancho y pendiente del cauce de mayor orden respectivamente.

Suponiendo un hidrograma unitario triangular q_p y t_p y convolucionando con una intensidad de lluvia efectiva de una tormenta uniforme rectangular de intensidad i_r y duración t_r se obtienen las expresiones siguientes de gasto de pico y gasto del hidrograma

$$\frac{Q_p}{Q_e} = t_r q_p \left(1 - \frac{t_r q_p}{4} \right) \quad t_r \leq t_c \leq t_B \quad (3.46)$$

$$Q_p = Q_e = i_r A \quad t_r = t_c \quad (3.47)$$

donde t_B es el tiempo base del hidrograma unitario instantáneo, el cual se igual al tiempo de concentración de la cuenca.

Sustituyendo 3.44 y 3.45 en las dos ecuaciones anteriores se llega a

$$Q_p = 2.42 \frac{i_r A \Omega t_r}{\prod_i^{0.4}} \left(1 - \frac{0.218 t_r}{\prod_i^{0.4}} \right) \quad (3.48)$$

El tiempo del gasto de pico propuesto por Rodríguez-Iturbe es

$$T_p = 0.585 \prod_i^{0.4} + 0.75 t_r \quad (3.49)$$

Las expresiones anteriores son muy útiles. Ellas dependen de datos geomorfológicos y de clima.

Para establecer el hidrograma unitario geomorfológico es conveniente puntualizar varios aspectos referentes a la cuenca.

Al conjunto de cauces que transportan la lluvia no infiltrada en una cuenca hacia la parte más baja de la misma se le llama *sistema de drenaje* de la cuenca. A cada cauce que forma parte del sistema de drenaje se le denomina *corriente*.

En el sistema de drenaje de una cuenca, se les llama *fuentes* a los puntos más altos de las corrientes de las partes más elevadas de la cuenca y *salida* al punto más bajo de todas las corrientes de la cuenca. En los puntos donde dos corrientes se juntan para formar una se le dice *nodo*.

Para su estudio, las corrientes de una sistema de drenaje pueden ser numeradas u ordenadas de acuerdo con el esquema de Strahler que se resume en los tres pasos siguientes:

Las corrientes que se originan en una fuente son de primer orden.

Cuando se unen dos corrientes de orden i , se crea una corriente de orden $i+1$.

Cuando dos corrientes de ordenes distintos se juntan, la corriente inmediata aguas abajo retiene el orden mayor de las dos corrientes que se unieron.

En la figura 1 se presnta una cuenca donde se han numerado las corrientes de acuerdo con es esquema de Strahler.

Sean Ω el mayor orden de las corrientes de la cuenca, N_i el número de corrientes de orden i en la cuenca, L_{ij} la longitud de la j -ésima corriente de orden i , \bar{L}_i la longitud media de la corriente de orden i , A_{ij} el área que drena hacia la j -ésima corriente de orden i (no es el área que drena directamente a la j -ésima corriente de orden i), \bar{A}_i es la media de las áreas que drenan hacia la corriente de orden i .

4. EJEMPLO DE APLICACION

4.1 Antecedentes

En México la información de origen hidrometeorológica es escasa debido al costo elevado que implica instrumentar las cuencas y mantener en operación esa infraestructura. Los registros históricos de lluvia y escurrimiento no son continuos en la mayoría de los casos, e inclusive llegan a ser escasos por ser recientes.

Ante la necesidad de conocer la respuesta hidrológica de las cuencas con fines de diseño de diversas obras de ingeniería, surgen algunos métodos que, basados en la morfología de la cuenca, más que en datos medidos de lluvia, sirven para obtener hidrogramas de diseño [Rodríguez-Iturbe y Valdés, 1979; Gupta, 1980]. Para la aplicación de este tipo de modelo se requiere contar con una serie de datos geomorfológicos de la cuenca.

Todos los datos geomorfológicos necesarios pueden ser obtenidos de cartas topográficas o de ser posible de modelos digitales de elevación.

4.2 Localización de la zona de estudio

La cuenca que se utilizó para obtener el hidrograma unitario instantáneo geomorfológico con la función de distribución de probabilidad gamma (HUIGG) es la del río Tesechoacan, afluente del río Papaloapan, que se localiza aproximadamente entre las longitudes 96 y 98 grados y entre las latitudes 16 y 19 grados. Esta subcuenca pertenece a la región hidrológica número 28 de la clasificación elaborada por la extinta Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos. En la figura 4.1 se presenta la cuenca.

**LOCALIDAD
VILLA AZUETA**



Figura 4.1 Cuenca del río Tesechoacan

La elección de esta cuenca se debe a que en ella existe una estación hidrométrica (Azueta) figura 4.1, que cuenta con un periodo de registros de niveles confiables que datan desde 1948 a la fecha.

Para obtener sus parámetros se hizo uso de las cartas topográficas, siguiendo el la metodología del diagrama de flujo que se muestra en la figura 4.2

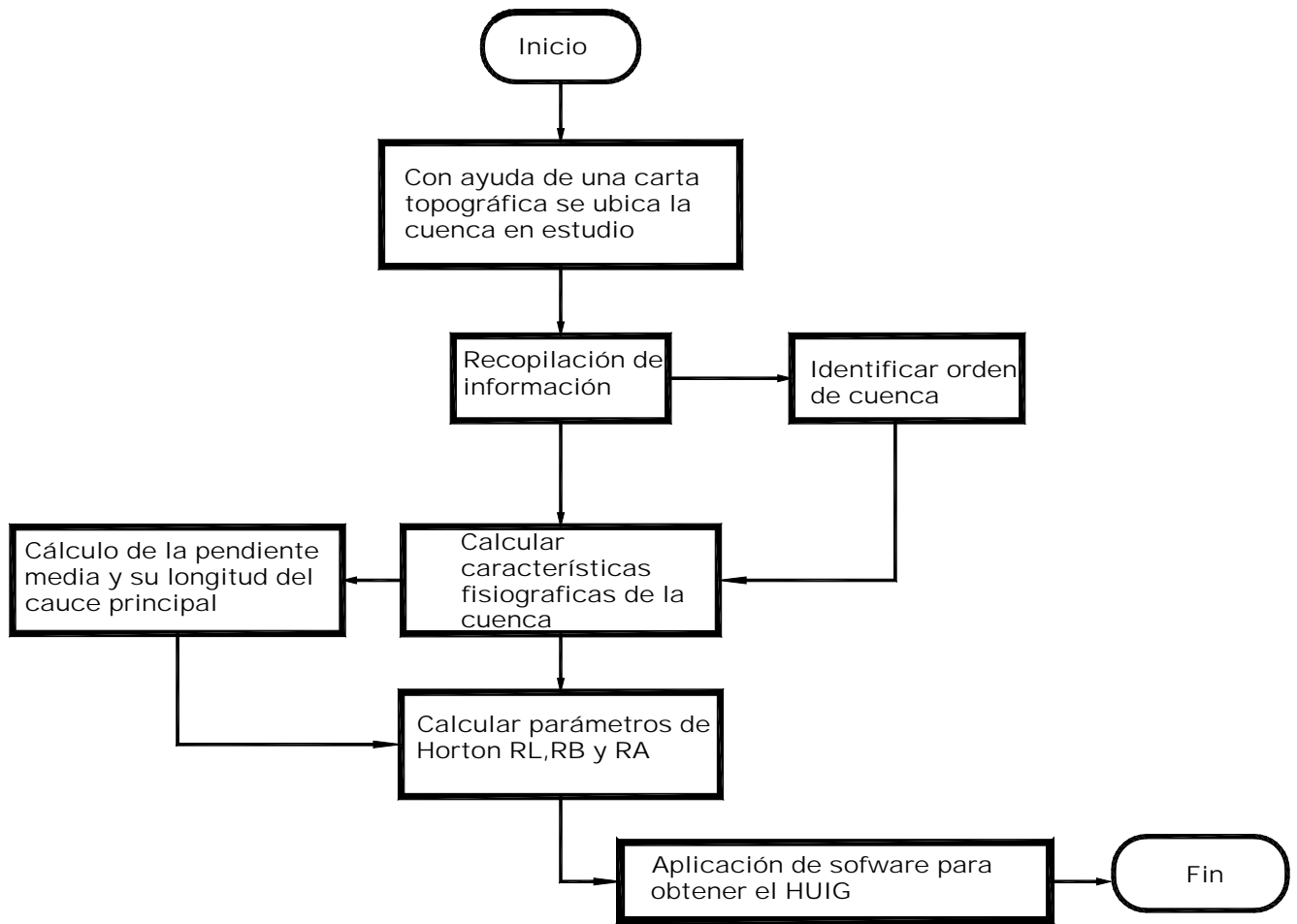


Figura 4.2 Diagrama de flujo que se sigue para obtener los parámetros geomorfológicos

Siguiendo la metodología del diagrama anterior se procedió a obtener los parámetros que serán necesarios para el ejemplo.

Con la ayuda de una carta se procedió a delimitar el parteaguas de la cuenca figura 4.3

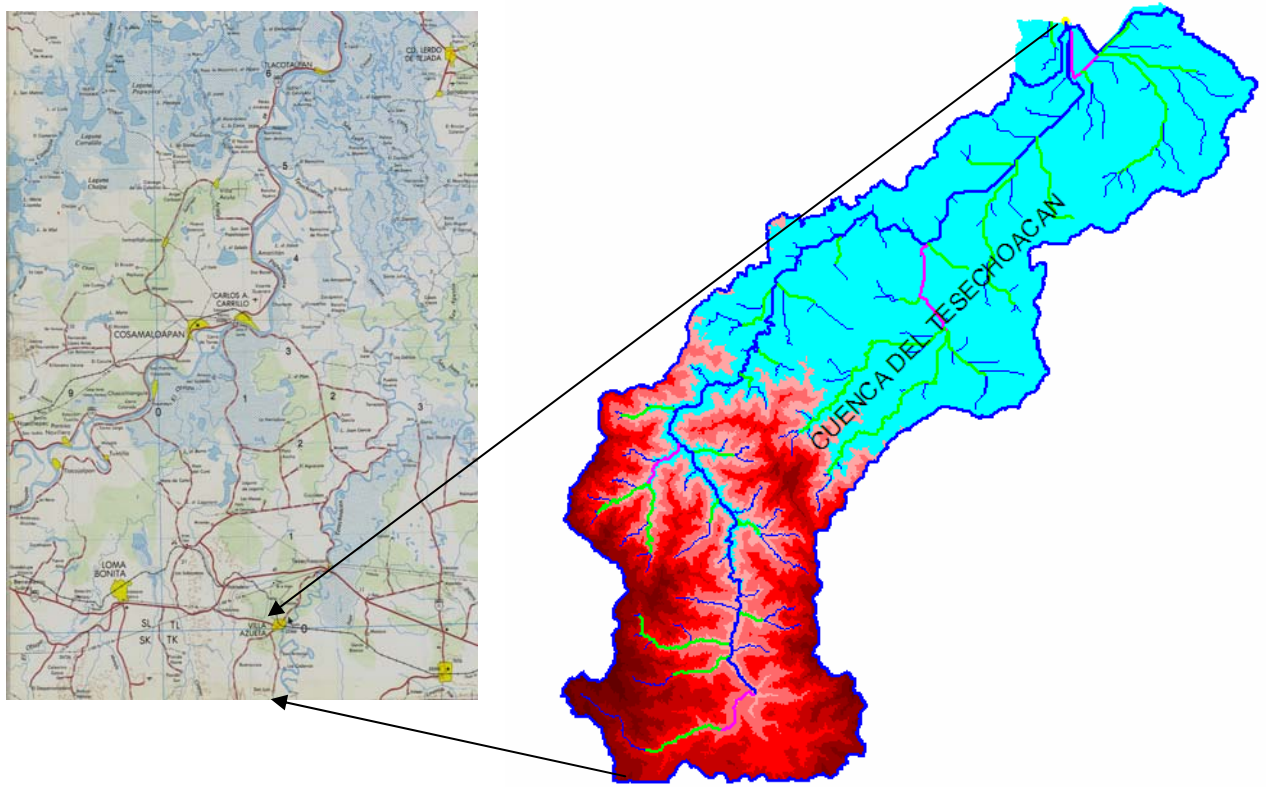


Figura 4.3 Ubicación de la zona de estudio en una carta topográfica.

4.2.1 Discretización de la cuenca utilizando Arc View mediante un MDE

Se subdividen las subcuencas de orden 1 en toda la cuenca en estudio tal y como se muestra en la figura 4.4 a las cuales se les determina su área y longitud de sus cauces.

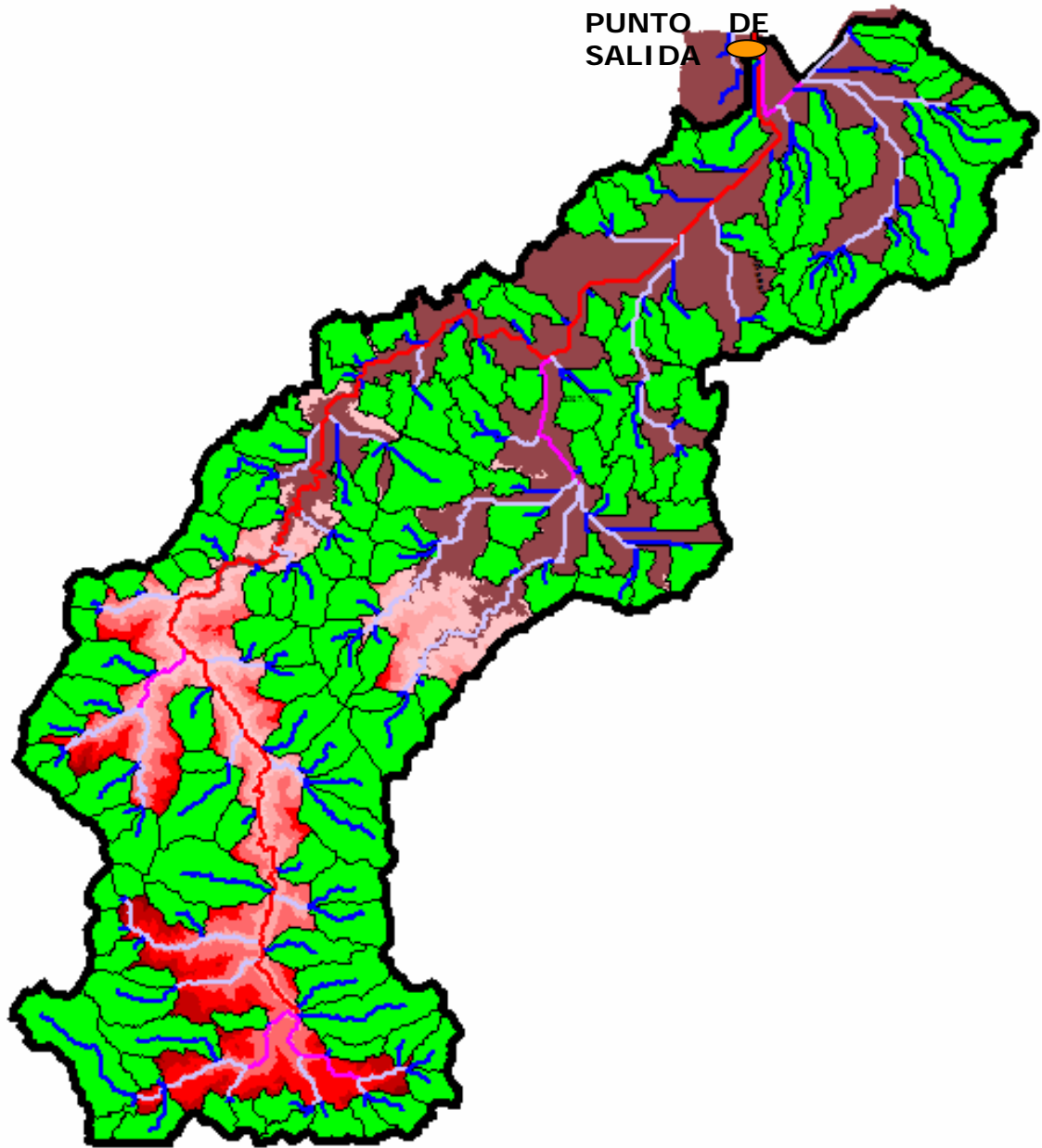


Figura 4.4 Delimitación de las subcuencas de orden 1.

De la misma manera se procede para la cuenca de orden 2 hasta la de mayor orden que es la cuenca propia.

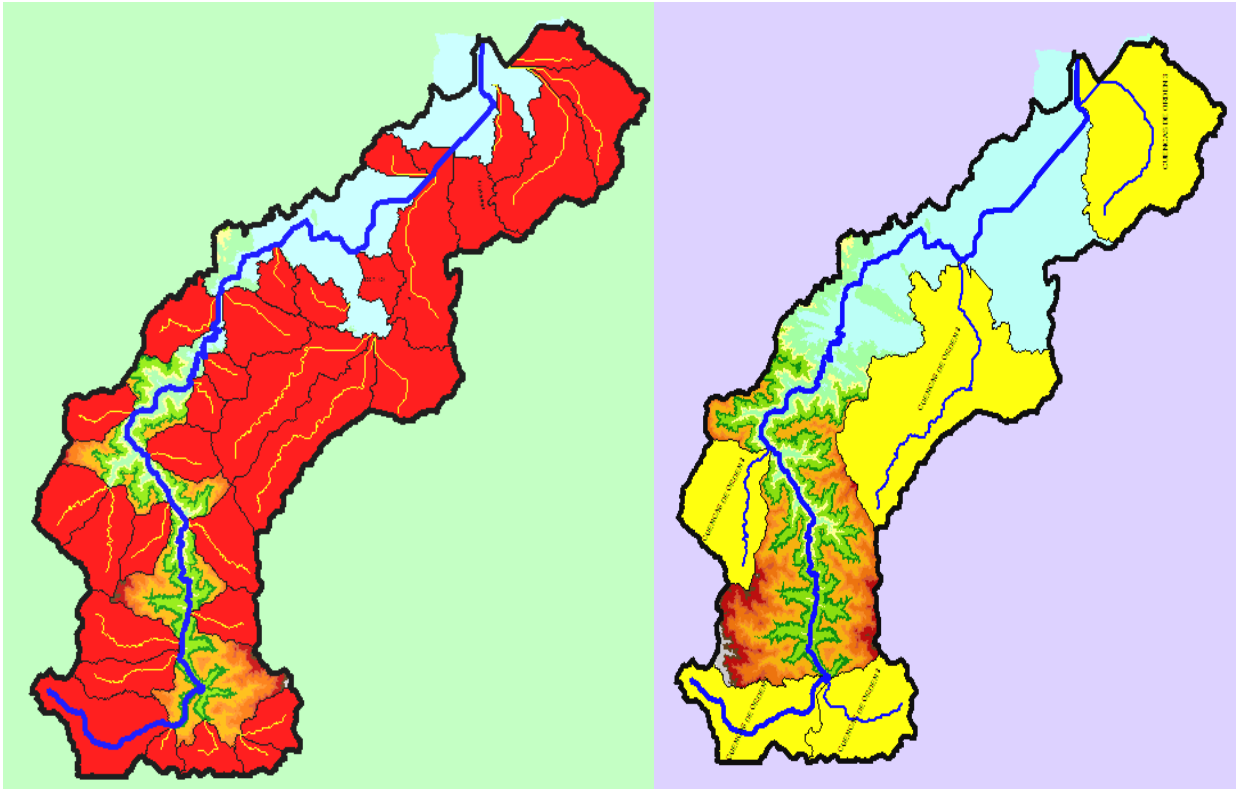


Figura 4.5 Delimitación de las subcuencas de orden 2 y 3.

4.2.2 Obtención de los parámetros de Horton

En la tabla 4.1 se muestran los datos de áreas y longitudes de las subcuencas para las diferentes órdenes.

Tabla 4.1 Valores de áreas y perímetros de las subcuencas

ORDEN	N° DE CORRIENTE	AREA(km²)	LONGITUD (kms)
1	1	6.69	3.3
1	2	4.5	2.75
1	3	2.94	2.53
1	4	13.44	7.08
1	5	16.91	8.28

HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLOGICOS BASADOS EN LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAMMA.

ORDEN	N° DE CORRIENTE	AREA(km²)	LONGITUD (kms)
1	6	17.97	5.87
1	7	15.19	5.67
1	8	28.8	8.08
1	9	23.9	4.55
1	10	26.09	4.58
1	11	32.8	7.6
1	12	29.13	8.4
1	13	14.49	4.53
1	14	16.75	9.11
1	15	6.4	3.12
1	16	9.05	3.54
1	17	10	5.9
1	18	5.77	3.91
1	19	46	15.5
1	20	63.8	12.17
1	21	10.55	5.01
1	22	11.84	5.02
1	23	7.73	4.55
1	24	45	10.78
1	25	30.5	10
1	26	32.68	10.2
1	27	32.42	8.98
1	28	20.41	5.72
1	29	13.45	6.8
1	30	15.57	4.63
1	31	10.73	4.46
1	32	10.44	3.67
1	33	6.67	3.33
1	34	16.66	5.78
1	35	8.19	4.17
1	36	9.21	4.5
1	37	14.55	3.94
1	38	7.17	4.32
1	39	16.79	5
1	40	39.24	10.05
1	41	4.39	3.26
1	42	11.23	4.34
1	43	30.13	8
1	44	9.07	4.1
1	45	28.09	7.49
1	46	8.33	5.62
1	47	12.31	5.75
1	48	13.27	5.15
1	49	14.74	7.15
1	50	9.03	5.49

HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLOGICOS BASADOS EN LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAMMA.

ORDEN	N° DE CORRIENTE	AREA(km²)	LONGITUD (kms)
1	51	24.18	9.55
1	52	37.16	11.16
1	53	9.69	4.71
1	54	10.08	4.09
1	55	13.54	4.2
1	56	45.21	9.94
1	57	3.84	2.99
1	58	7.11	3.95
1	59	7.2	4.49
1	60	5.17	2.92
1	61	14.11	4.73
1	62	6.81	3.53
1	63	26.79	10.68
1	64	38.78	11.43
1	65	10.11	4.67
1	66	23.14	6.07
1	67	32.11	8.02
1	68	9.04	6.51
1	69	8.71	4.22
1	70	4.13	3.8
1	71	13.94	5
1	72	19.55	9.13
1	73	5.35	3.18
1	74	39.31	10.9
1	75	17.35	6.21
1	76	21.81	6.52
1	77	5.07	4.31
1	78	6.19	3.56
1	79	13.44	5.92
1	80	13.1	5.22
1	81	10.33	5.1
1	82	10.66	5.31
1	83	6.3	3.56
1	84	4.68	3.29
1	85	9.23	5.45
1	86	11.78	6.2
1	87	9.17	5.55
1	88	28.35	12.34
1	89	23.87	9.68
1	90	10.95	4.14
1	91	16.65	6.16
1	92	16.35	6.79
1	93	98.7	10.65
1	94	21.73	9.88
1	95	22.24	9.51

HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLOGICOS BASADOS EN LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD GAMMA.

ORDEN	N° DE CORRIENTE	AREA(km²)	LONGITUD (kms)
1	96	18.22	9.01
1	97	46.48	12
1	98	72.5	13.96
1	99	55.12	10.72
1	100	19.16	5.69
1	101	10.06	3.46
1	102	26.69	7.2
1	103	25.93	8.27
1	104	43.22	12.07
1	105	18.3098	5.241
1	106	33.2888	13.5321
1	107	25.5885	12.6745
1	108	46.736	14.3888
1	109	41.6578	12.2365
1	110	11.9844	4.7308
1	111	39.6817	10.279
1	112	19.8436	10.9637
1	113	26.0534	6.8734
1	114	13.0084	3.8792
1	115	21.6401	6.8518
1	116	20.411	7.8472
1	117	42.8837	10.1678
1	118	46.7912	10.1805
1	119	32.4124	8.5433
1	120	26.7028	9.0731
1	121	28.6821	9.6602
1	122	11.4328	3.772
1	123	72.8599	14.76
1	124	45.6184	12.7001
1	125	39.1963	12.5643
SUMA=	1	2666.1831	872.2493
2	1	82.57	18.56
2	2	55.53	11
2	3	64.18	11.19
2	4	61.67	15.51
2	5	46.41	13.49
2	6	97.99	22.29
2	7	94.85	19.09
2	8	146.32	23.68
2	9	74.09	14.48
2	10	82.03	15.1
2	11	53.42	12.37
2	12	35.15	10.29
2	13	68.43	14.7
2	14	112.52	19.43

	ORDEN	N° DE CORRIENTE	AREA(km²)	LONGITUD (kms)
	2	15	113.33	15.43
	2	16	80.88	13.56
	2	17	25.44	7.99
	2	18	129.4	24.25
	2	19	83.09	13.5
	2	20	225.67	46.17
	2	21	322.85	55.44
	2	22	150.48	17
	2	23	14.92	20.45
	2	24	163.95	29.1
	2	25	81.1733	19.6499
	2	26	463.4832	42.7878
	2	27	117.4245	22.6952
SUMA=	2	27	3047.251	549.2029
	3	1	313.89	24
	3	2	312.56	40.66
	3	3	130.75	17.72
	3	4	298.14	29
	3	5	1137.46	76
	3	6	598.2723	48.2328
SUMA=	3	6	2791.0723	235.6128
	4	1	5116	239
SUMA=	4	1	5116	239

Obtenida esta información se procesa para determinar los valores de los parámetros de Horton RA, RB, Y RL con los que se determinaran los HUIGG.

En la tabla 4.6 se tienen los valores anteriores.

Tabla 4.2 Resumen de características fisiográficas de las subcuenca

ORDEN	N° DE CORRIENTES	SUMA DE AREAS (km ²)	SUMA DE LONGITUDES (km)	PROMEDIO DE AREAS (km ²)	PROMEDIO DE LONGITUDES (km)
1	125	2666.18	872.25	21.33	6.98
2	27	3047.25	549.20	112.86	20.34
3	6	2791.07	235.61	465.18	39.27
4	1	5116.00	239.00	5116.00	239.00

Tabla 4.3 Obtención del coeficiente para obtener la relación de bifurcación

Orden (u)	(Nu)	log(Nu)	(u) ²	(u)(log(Nu))
1	125	2.09691001	1	2.09691001
2	27	1.43136376	4	2.86272753
3	6	0.77815125	9	2.33445375
4	1	0	16	0
10		4.30642503	30	7.29409129
			a=	2.8125919
			b=	0.69439426

Tabla 4.4 Obtención del coeficiente para obtener la relación de áreas

orden (u)	Au	(Au)	log(Au)	(u) ²	(u)(log(Au))
1.00	2666.18	21.33	1.33	1.00	1.33
2.00	3047.25	112.86	2.05	4.00	4.11
3.00	2791.07	465.18	2.67	9.00	8.00
4.00	5116.00	5116.00	3.71	16.00	14.84
10.00			9.76	30.00	28.27
				a=	0.50
				b=	0.78

Tabla 4.5 Obtención del coeficiente para obtener la relación de longitudes

Orden (u)	Lu	(Lu)	log(Lu)	(u) ²	(u)(log(Lu))
1.00	872.25	6.98	0.84	1.00	0.84
2.00	549.20	20.34	1.31	4.00	2.62
3.00	235.61	39.27	1.59	9.00	4.78
4.00	239.00	239.00	2.38	16.00	9.51
10.00			6.12	30.00	17.76
				a=	0.31
				b=	0.49

Tabla 4.6 Resumen de parámetros de Horton obtenidos en la cuenca

PARAMETROS DE HORTON	RANGOS	PARAMETROS OBTENIDOS
RB	3 A 5	4.95
RA	3 A 6	5.96
RL	1.5 A 3	3.08

Obtenido los parámetros anteriores se procede a obtener las velocidades y pendiente del cauce principal de la cuenca.

Tabla 4.7 Resumen de parámetros de Horton obtenidos en la cuenca

COTA SUPERIOR (m)	COTA INFERIOR (m)	LONGITUD (m)	Si (adimensional)	Li/Si ^{1/2} (adimensional)
3000.00	2900.00	865.70	0.12	2547.13
2900.00	2800.00	2731.20	0.04	14273.49
2800.00	2700.00	1301.10	0.08	4693.17
2700.00	2600.00	935.60	0.11	2861.77
2600.00	2500.00	1133.80	0.09	3817.73
2500.00	2400.00	1098.40	0.09	3640.33
2400.00	2300.00	1664.00	0.06	6787.81
2300.00	2200.00	1252.40	0.08	4432.15
2200.00	2100.00	1784.70	0.06	7539.59
2100.00	2000.00	1633.80	0.06	6603.87
2000.00	1900.00	769.50	0.13	2134.58
1900.00	1800.00	1001.00	0.10	3167.02
1800.00	1700.00	801.00	0.12	2266.99
1700.00	1600.00	1244.30	0.08	4389.22
1600.00	1500.00	4085.80	0.02	26116.54
1500.00	1400.00	1531.50	0.07	5993.43
1400.00	1300.00	1216.70	0.08	4244.00
1300.00	1200.00	2717.60	0.04	14167.01
1200.00	1100.00	6679.90	0.01	54595.26
1100.00	1000.00	4786.20	0.02	33112.06
1000.00	900.00	5753.40	0.02	43640.21
900.00	800.00	4678.50	0.02	32000.73
800.00	700.00	9426.50	0.01	91522.04
700.00	600.00	7549.00	0.01	65589.47
600.00	500.00	2704.30	0.04	14063.14
500.00	400.00	7792.80	0.01	68792.37

COTA SUPERIOR (m)	COTA INFERIOR (m)	LONGITUD (m)	Si (adimensional)	Li/Si ^{1/2} (adimensional)
400.00	300.00	12640.40	0.01	142115.43
300.00	200.00	13321.10	0.01	153748.23
200.00	100.00	17277.40	0.01	227100.23
100.00	80.00	58484.50	0.00	3162613.89
80.00	48.00	60224.00	0.00	2612639.01
	SUMA	239086.10		6821207.94

PERFIL DEL RÍO TESECHOACAN

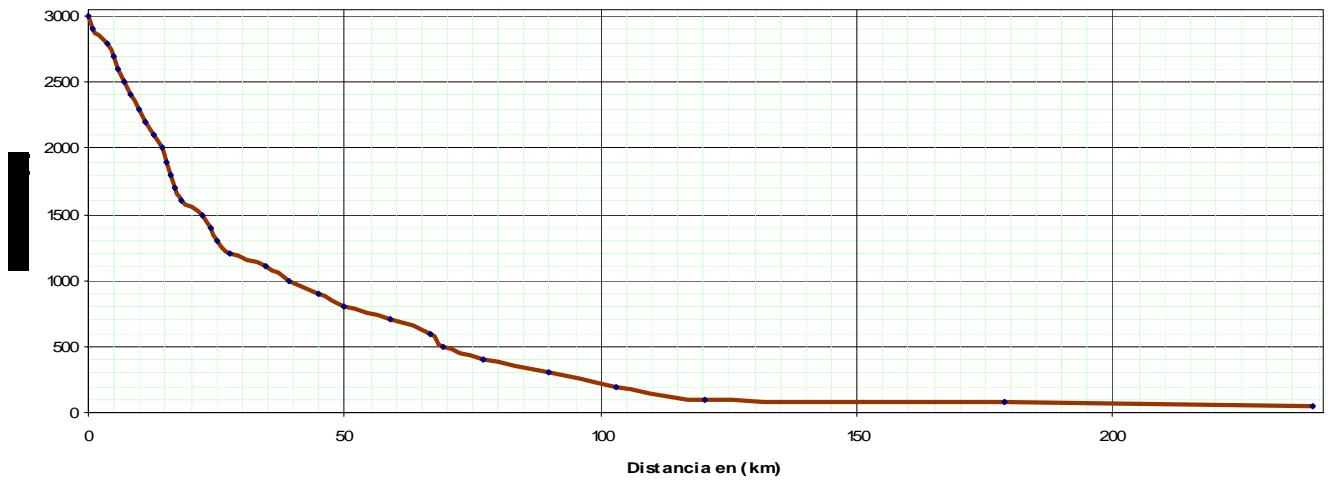


Figura 4.6 Perfil del cauce principal.

Cálculo de la pendiente

Para obtener la pendiente del cauce principal se aplica la ecuación de Schwarz Taylor

$$S = \left(\frac{L}{\frac{l_1}{\sqrt{s_1}} + \frac{l_2}{\sqrt{s_2}} + \dots + \frac{l_n}{\sqrt{s_n}}} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$S = \left(\frac{239086.10}{682120.95} \right)^2 = 0.001229$$

El cálculo del tiempo de concentración se puede obtener de las ecuaciones referidas a este término que se presentaron en el capítulo 2, para este caso se aplicó la ecuación de Kirpich ecuación 2.6, por lo tanto el tiempo de concentración es.

$$T_c = 0.000325 \frac{239.086^{0.77}}{0.001229^{0.385}} = 59.4233 \text{ hrs.}$$

De acuerdo a los datos antes calculados la velocidad promedio del cauce es

$$V = \frac{239086}{59.4233 \cdot 3600} = 1.1176 \text{ m/s}$$

4.3 Estimación de parámetros

Mediante ajustes realizadas y utilizando la definición estadística de los parámetros de distribución gamma, se llegó a las siguientes fórmulas.

La media de la función de distribución gamma está dada como:

$$\mu = \int_0^{\infty} t \frac{\lambda_{\omega}^{k_{\omega}} t^{k_{\omega}-1} e^{-\lambda_{\omega} t}}{\Gamma(k_{\omega})} dt \quad (4.2)$$

Cuya solución es:

$$\mu = \frac{k_{\omega}}{\lambda_{\omega}} \quad (4.3)$$

Como la varianza σ^2 está dada como

$$\sigma^2 = \bar{t}^2 - \mu^2 \quad (4.4)$$

Para la función de densidad gamma

$$\bar{t}^2 = \int_0^{\infty} t^2 \frac{\lambda_{\omega}^{k_{\omega}} t^{k_{\omega}-1} e^{-\lambda_{\omega} t}}{\Gamma(k_{\omega})} dt = \frac{(k_{\omega} + 1)k_{\omega}}{\lambda_{\omega}^2} \quad (4.5)$$

Por lo que

$$\sigma^2 = \frac{(k_{\omega} + 1)k_{\omega}}{\lambda_{\omega}^2} - \frac{k_{\omega}^2}{\lambda_{\omega}^2} = \frac{k_{\omega}^2 + k_{\omega} - k_{\omega}^2}{\lambda_{\omega}^2} = \frac{k_{\omega}}{\lambda_{\omega}^2} \quad (4.6)$$

Así, la desviación estándar de esta función es

$$\sigma = \frac{\sqrt{k_{\omega}}}{\lambda_{\omega}} \quad (4.7)$$

Al despejar λ_{ω} y k_{ω} de las ecuaciones 4.3 y 4.7 resulta

$$\lambda_{\omega} = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (4.8)$$

y que

$$k_{\omega} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (4.9)$$

Generalizando para todos los órdenes de corriente (exceptuando los de orden mayor) de acuerdo a Díaz-Granados quedaron de la siguiente manera.

$$\lambda_i = \frac{\mu_{Ti}}{\sigma_{Ti}^2} \quad k_i = \frac{\mu_{Ti}^2}{\sigma_{Ti}^2} \quad (4.10)$$

Donde el subíndice i indica el orden de la cuenca ($i = 1 \dots \Omega$), μ_T y σ_T son la media y la desviación estándar del tiempo de viaje, respectivamente y estos valores se pueden encontrar mediante la ecuación 4.11.

$$\mu_{Ti} = \frac{L_i}{V} \quad \sigma_{Ti} = \frac{\sigma_{Li}}{V} \quad (4.11)$$

Una vez obtenido las variables de la ecuación 4.11 para todas las ordenes de los ríos

Los parámetros de escala y forma son modificados por los factores a y b de la ecuación 4.12.

$$a = \left(\frac{R_L}{R_B} \right)^2 \left(\frac{1}{10} \right) \quad a = \left(\frac{R_L}{R_A} \right)^2 \left(\frac{1}{R_B} \right) \quad (4.12)$$

Donde **a** es el número que afecta a los λ_i y **b** el que modifica a los k_i

Para el cálculo de los parámetros de último orden se utilizaron las siguientes ecuaciones:

$$\lambda_{\Omega} = s_{\Omega} (R_A + R_B) \frac{e^v}{R_B} \quad (4.13)$$

$$k_{\Omega} = \left(\frac{v}{R_L} \right)^2 \ln(R_A) \exp^{\frac{R_B}{10R_A}} \quad (4.14)$$

Donde s_{Ω} es la pendiente del canal de orden mayor (medida hasta el sitio de interés) y v es la velocidad media del cauce principal.

4.4 Resultados

Los resultados obtenidos se presentan en las siguientes gráficas

En la figura 4.7 se presenta el hidrograma unitario geomorfológico, calculado con la función exponencial.

HIDROGRAMA UNITARIO GEOMORFOLÓGICO CALCULADO CON LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

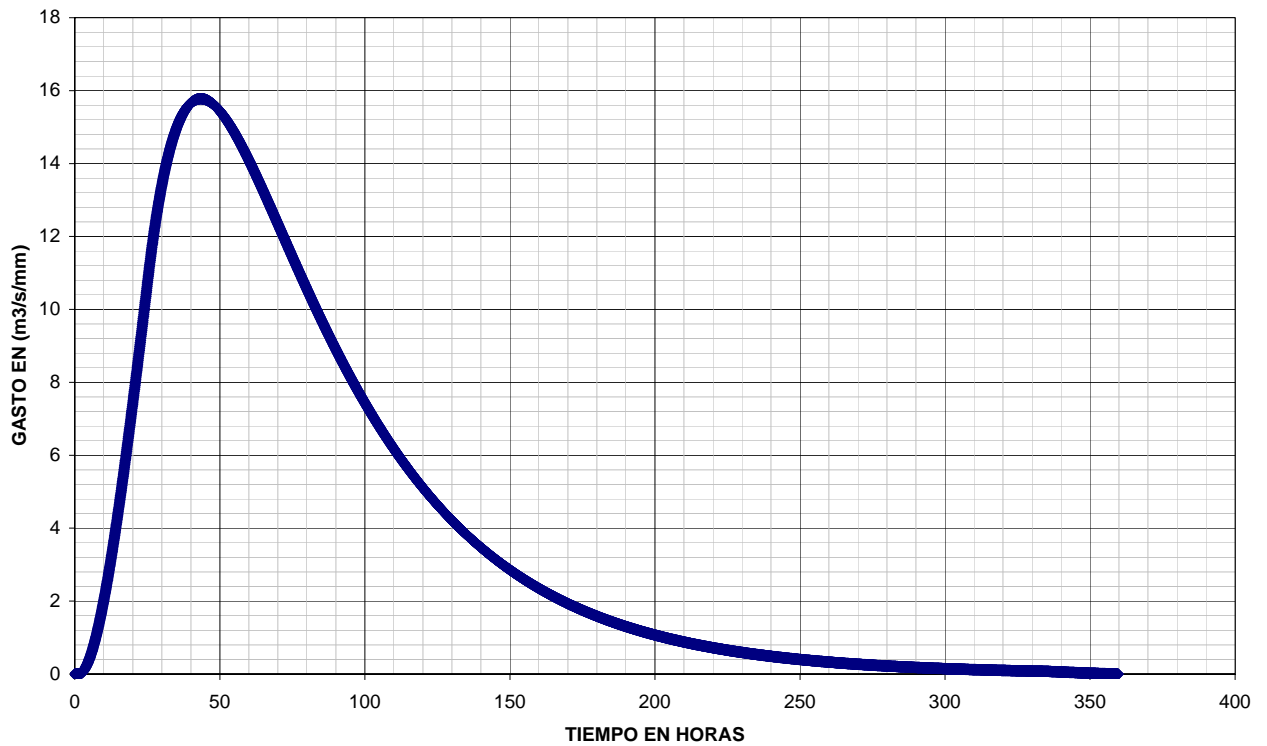


Figura 4.7 HUIG con la FDP exponencial.

Siguiendo con el mismo procedimiento hecho para la función exponencial se obtuvo el hidrograma unitario geomorfológico aplicando una FDP tipo Gamma.

En la figura 4.8 se muestra el resultado obtenido con esta FDP.

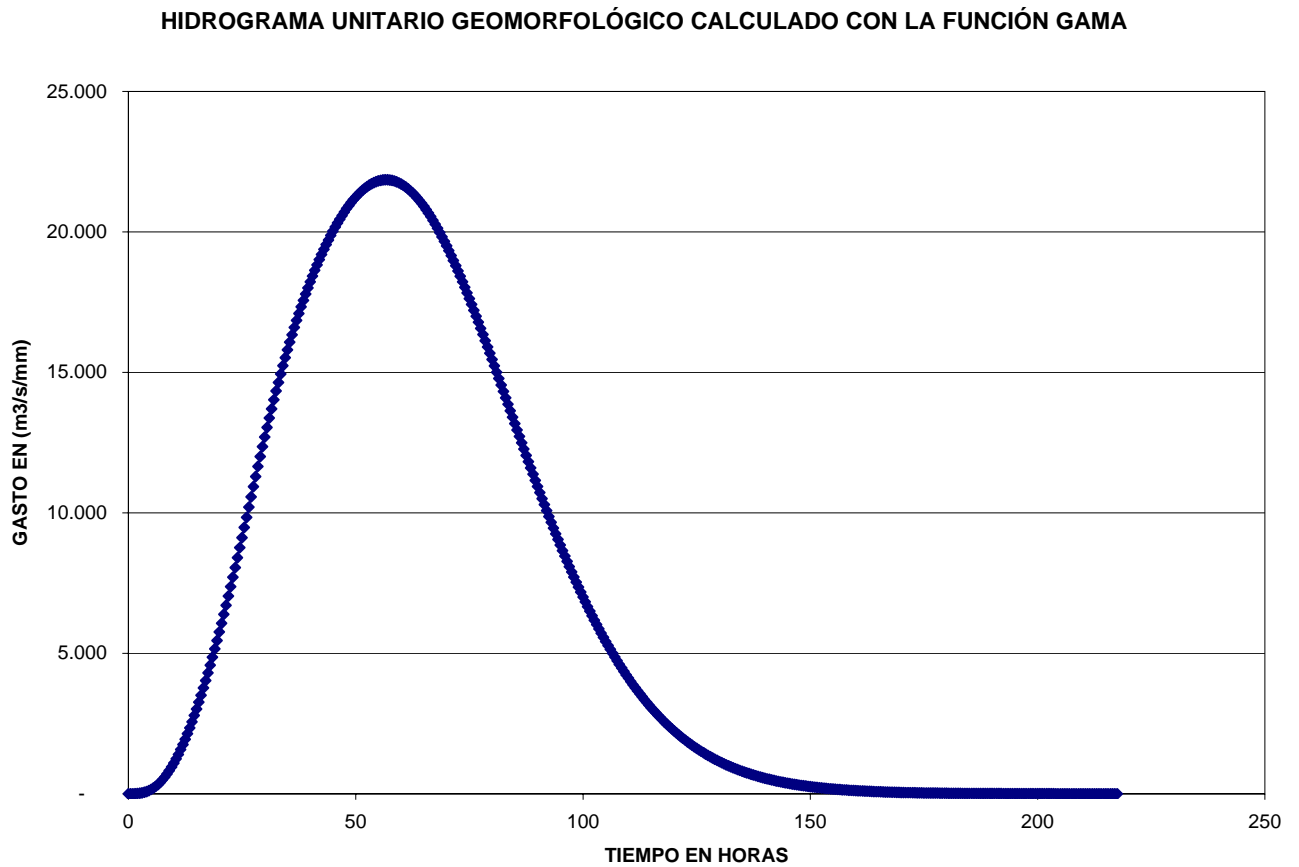


Figura 4.8 HUIG con la FDP gamma.

En la figura 4.9 se muestra la comparación de estos hidrogramas

COMPARACIÓN DE HIDROGRAMAS UNITARIOS GEOMORFOLÓGICOS

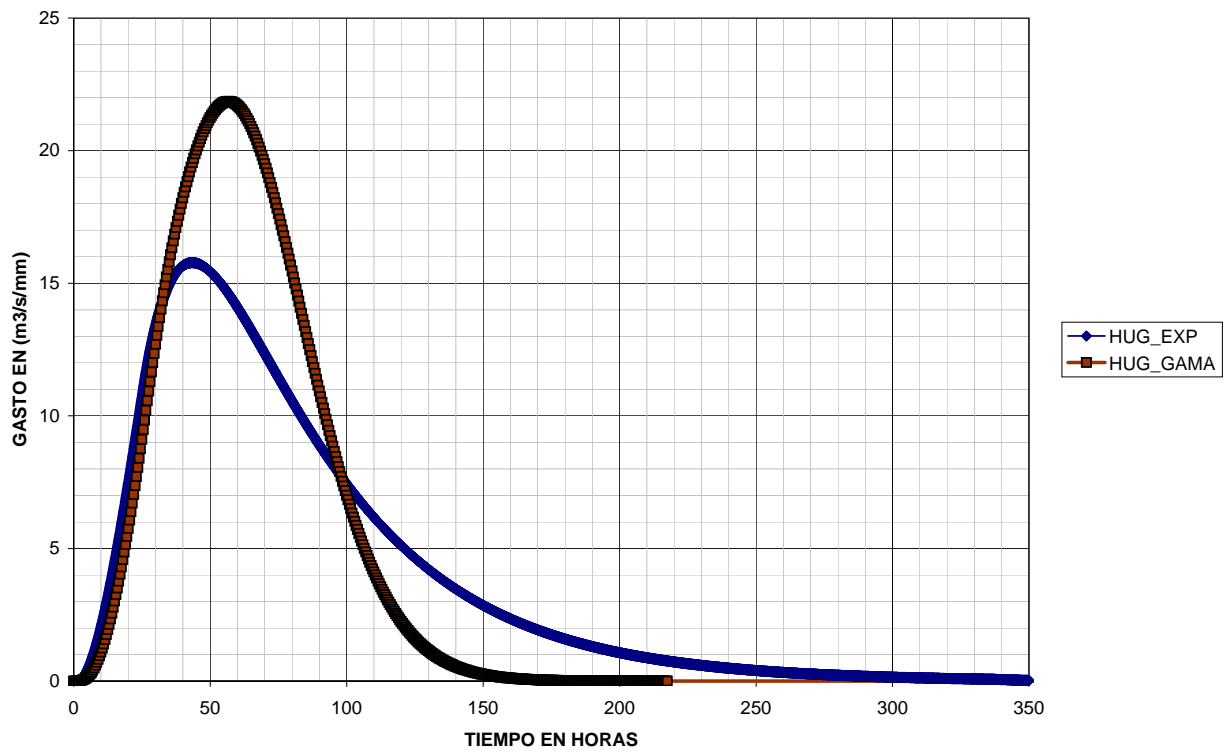


Figura 4.9 comparación HUIG con la FDP gamma y la exponencial.

Para obtener el hidrograma de escurrimiento directo y compararlo con el hidrograma medido en la estación Azueta, se tomaron los datos de precipitación pluviográfica de las estaciones aledañas al parteaguas de la cuenca del río Tesechoacan.

En la figura 4.10 se muestra la distribución de estas estaciones

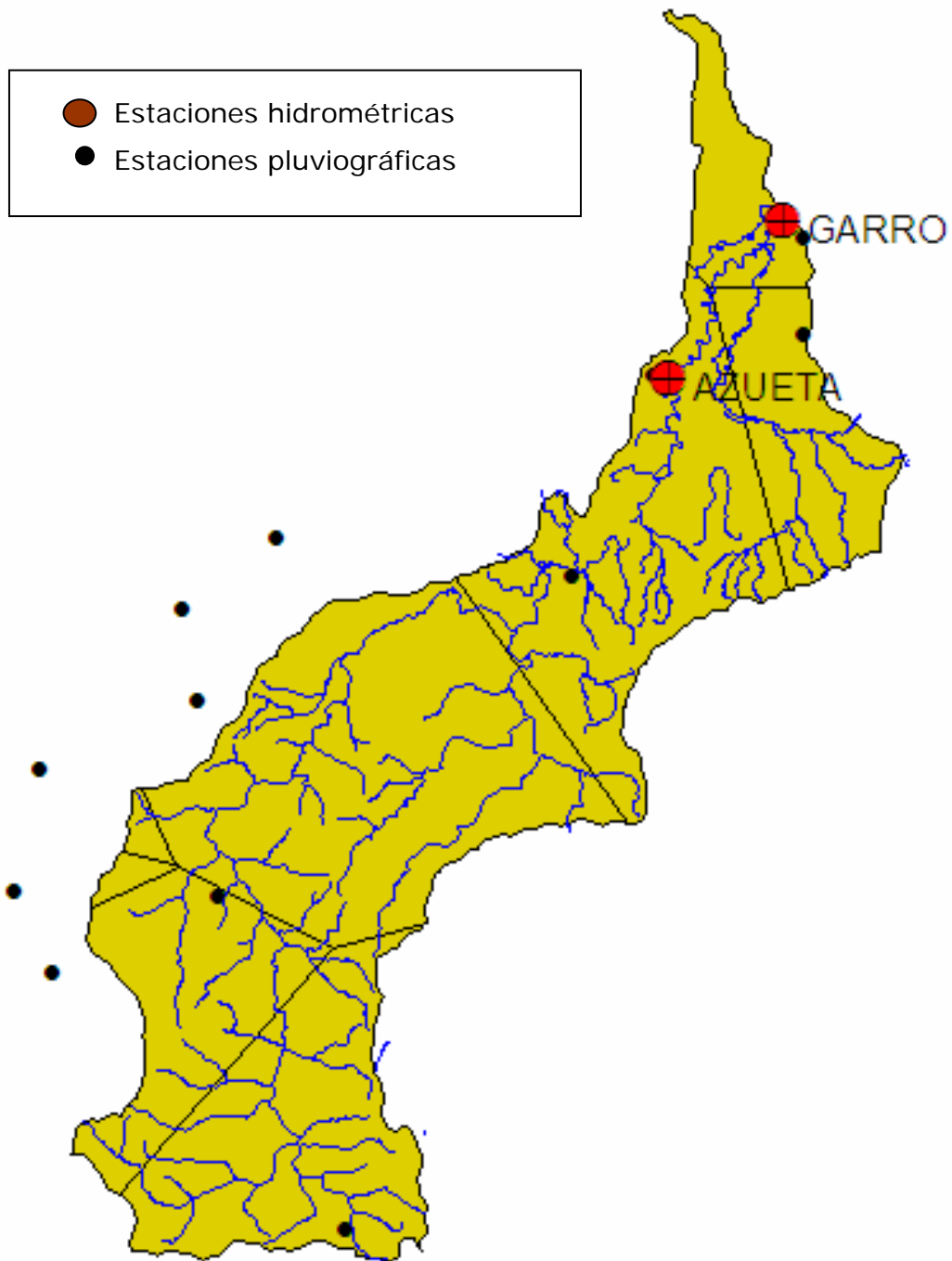


Figura 4.10 distribución de estaciones pluviométricas y hidrométricas

De acuerdo a la distribución de las estaciones pluviográficas, y aplicando el criterio de los polígonos de Thiessen, se obtuvo la precipitación media de la cuenca.

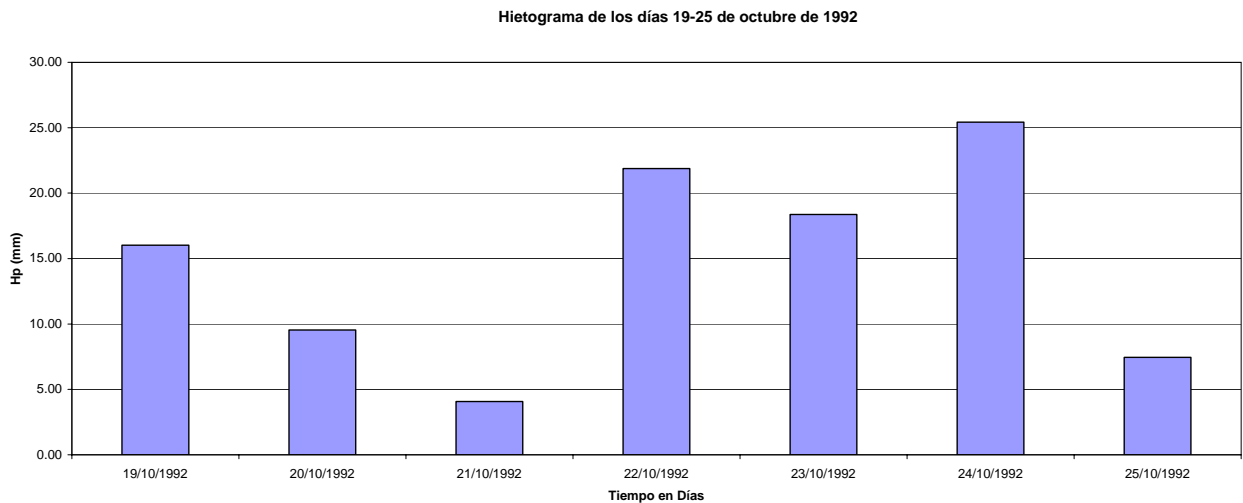


Figura 4.11 hietograma de lluvia media calculado de la cuenca

Del hidrograma de la avenida se separa el gasto base y se calcula el volumen de escurrimiento directo, cuyo valor es

$$V_e = 119134368 \text{ m}^3$$

Además el área de la cuenca es

$$A_c = 5116 \times 10^6 \text{ m}^2$$

calculando la lluvia efectiva

$$h_{pe} = \frac{V_e}{A_c} = \frac{119134368}{5116000000} = 0.02328 \text{ m} \cong 23 \text{ mm}$$

El hietograma de lluvia efectiva que resulto de este análisis es como el que se muestra en la figura 4.12

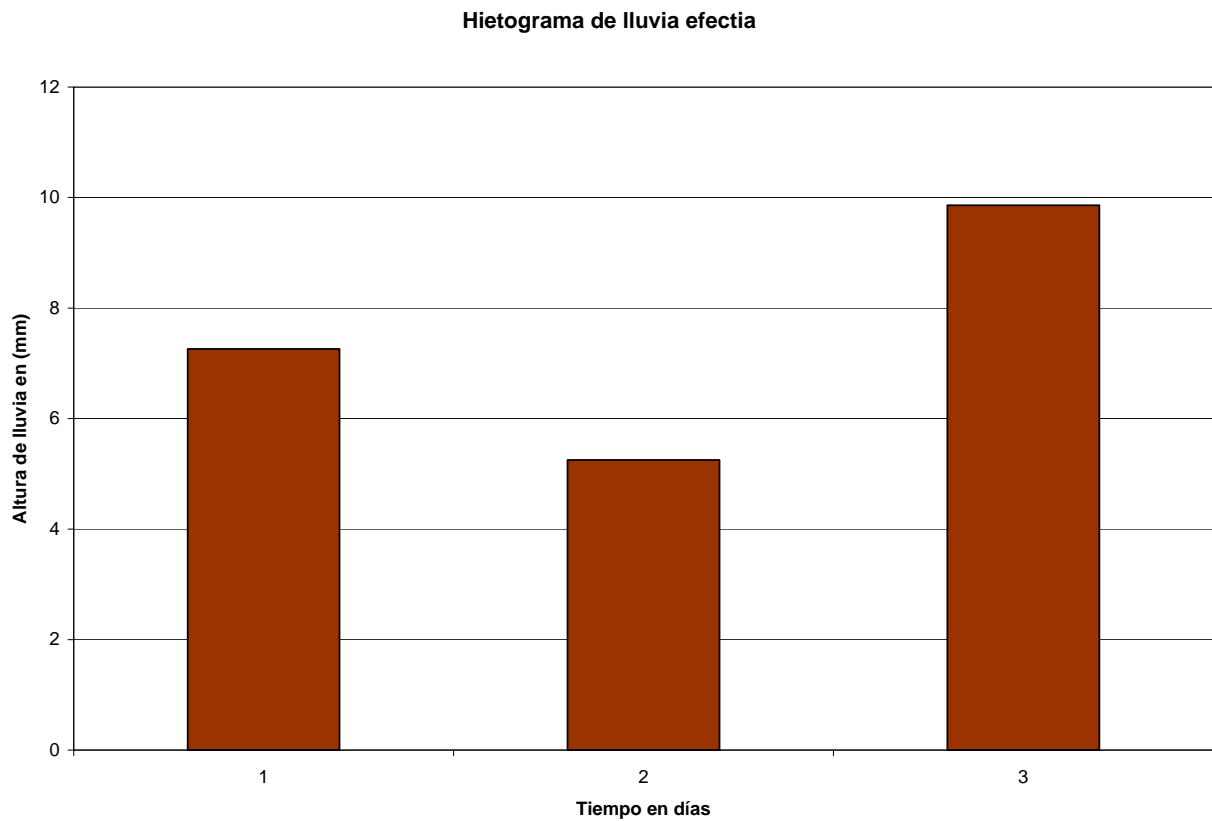


Figura 4.12 hietograma de lluvia efectiva

Para obtener el escurrimiento directo, se hizo uso de los hidrogramas unitarios geomorfológicos antes calculados.

El resultado se muestra en la figura 4.13

Comparacion de hidrogramas de escurrimiento directo calculados con diferentes fdp

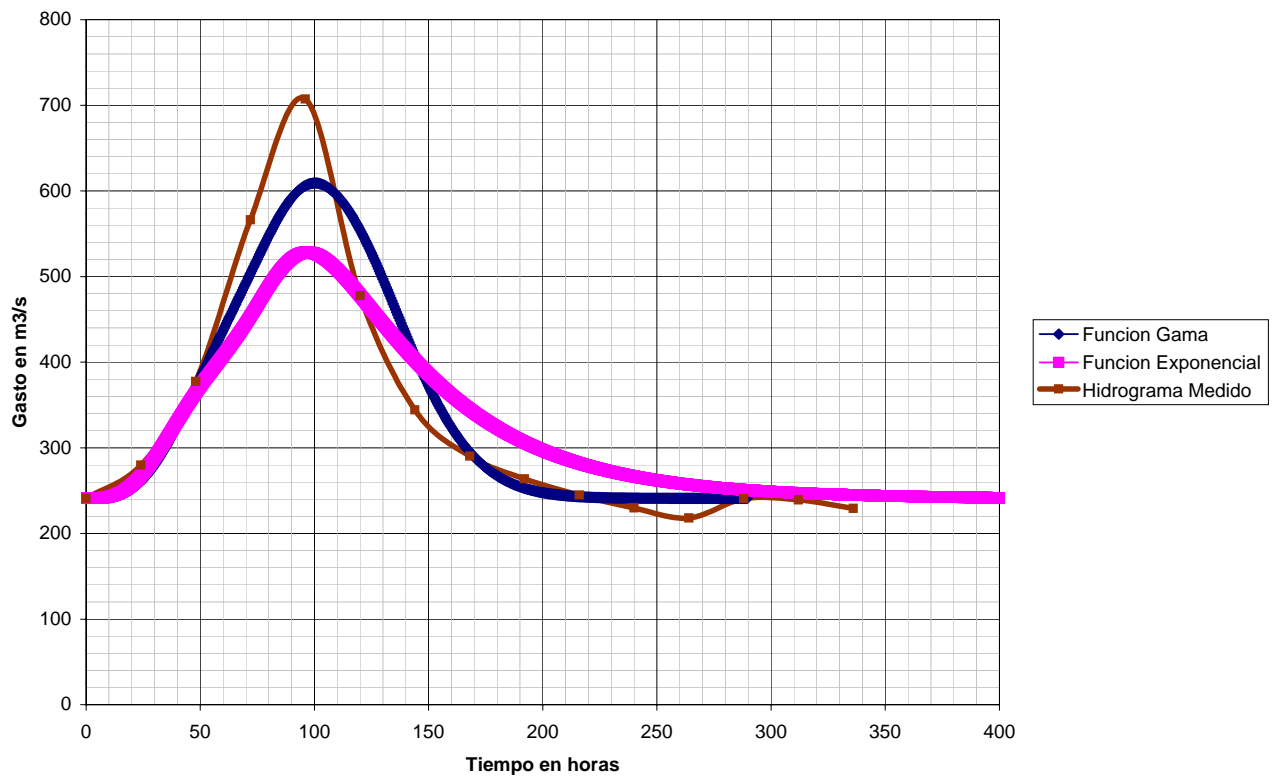


Figura 4.13 Comparación de hidrogramas de escurrimiento calculados y medido

5 CONCLUSIONES

1. A diferencia de los métodos de hidrogramas adimensionales la teoría del *HUIG* toma en cuenta una mayor información de la cuenca considerada por medio de los parámetros de Horton; es a través de éstos que se consigue la interrelación entre las características geomorfológicas con la respuesta hidrológica de la cuenca. En este caso se considera la distribución de la red de drenaje (R_B), la longitud promedio y área promedio para cada orden de las corrientes mediante R_L y R_A respectivamente, además de tomar en cuenta la velocidad y pendiente media.
2. Cuando alguno o incluso los tres parámetros geomorfológicos R_B , R_L ó R_A no se encuentran dentro de los rangos propuestos por Horton, posiblemente se llegase a la decisión de que el método no se aplique; sin embargo, lo que se recomienda es la verificación de cada uno de las corrientes ya que uno de los problemas es la escala a la que se encuentra la carta topográfica con la que se esta delimitando la cuenca en estudio, llegando a despreciar algunas corrientes además hay que tener en cuenta que una corriente de orden mayor a n termina hasta encontrar una corriente de igual o mayor orden, del mismo modo que para las áreas de cada tributario, esto es, bajo el criterio de que una corriente de orden 1 no puede ser mucho más grande que una corriente de orden 2 y así sucesivamente.
3. Debido a que los parámetros geomorfológicos se obtuvieron de una serie de análisis en cuencas con pendientes de mediana a altas, la red de drenaje tiene características tales que se hace posible la aplicación de la metodología descrita, pero en otros casos ello no se cumple, por ejemplo cuencas con pendiente pequeña, por lo que se recomienda ajustar la red de drenaje con base en lo anotado en el punto 2 lo que implica modificar la estructura y la geomorfología y por ende la respuesta hidrológica de la cuenca en estudio.
4. En cuencas cuya pendiente media del cauce principal es muy pequeña, como es el caso de las cuencas bajas de los ríos Tuxpan, Pánuco, Grijalva entre otras, los parámetros de Horton no se encuentran dentro del rango recomendado, pero se ha encontrado que para cuencas de este tipo el rango de aplicación es más amplio. Al realizar el cálculo del *HUIG* con los parámetros calculados en esas cuencas, se observan resultados congruentes con los eventos observados, por ello, se recomienda ampliar el rango de los parámetros geomorfológicos propuesto por Horton, sugerencia que se deja para estudios posteriores para el caso de cuencas de planicie.
- 5.- En este trabajo se desarrollo las convoluciones de la función gamma hasta orden 6.
- 6.-se obtuvieron los desarrollos matemáticos para encontrar la manera adecuada de evaluar los parámetros de forma y escala que el *HUIGG* necesita para evaluarse.
- 7.- En este caso la velocidad al igual que en la función exponencial juega un papel importante en la determinación de los tiempos promedios de viaje de las gotas.

8.- Se observó en el ejemplo de este trabajo que los tiempos picos de los hidrogramas tanto exponencial como el de la función gamma prácticamente coincidieron en el escurrimiento directo.

9.- Al comparar los resultados obtenidos con el HUI real se puede decir que se logran buenas aproximaciones

10.- En esta tesis se comprueba que el HUIGG aproxima lo suficiente a la respuesta hidrológica.

11.- Es importante continuar con esta investigación para encontrar una relación clara entre la geomorfología de una cuenca y su hidrología. Cuando se logre este objetivo se estará dando un gran paso en el avance de la ingeniería hidrológica.

6 BIBLIOGRAFÍA

Mario Díaz-Granados O., et. al; El Hidrograma Unitario Geomorfológico Gama Derivación y Estimación de Parámetros

Bras, R. L. Hydrology: An introduction to hydrologic science. Capítulo 12: concepts of fluvial geomorphology.

Caamaño Nelli, G. Y C.M. Dasso. 1983. Geomorfología aplicada a sistemas hidrológicos lineales.

Verificación y comparación de Hidrogramas Unitarios Instantáneos de base geomorfológica. En: Memorias IX Congreso Nacional del Agua. Argentina.

Nash, J. E. 1957. the form of the instantaneous unit hydrograph. International Association for Scientific

hydrologic Assemblée Générale de Toronto. Tomo III, 114-121.

Rodríguez-Iturbe, I. Y J. B. Valdés. 1979. The geomorphologic Structure of the hydrologic response. Water

Resources Research. 15(6):1409-1420.

Rodríguez-Iturbe, I., M. González-Sanabria y R. L. Bras 1982, the geomorphoclimatic theory of the instantaneous unit hydrograph. Water Resources Research. 18(4):877 -886.

Rosso, R. 1984. Nash model relation to Horton order ration Water Resources, research 20(7):914-920.

Patricia M. López, Rafael S. Seoane. Un enfoque probabilístico para la estimación del parámetro de escala del modelo de Nash. Ingeniería Hidráulica en México. Vol. XIV, Núm. 2, págs. 5 -10 mayo-agosto de 1999.

Vigía K. Gupta, Ed Waymire C.T. Wang. A Representation of an Instantaneous Unit Hydrograph From

Geomorphology. Water Resources Research, 16(5): 815-862