



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**CÁLCULO DE CORRIENTES MARINAS INDUCIDAS POR
EL OLEAJE**

T E S I S

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
**MAESTRO EN INGENIERÍA
(HIDRÁULICA)**

PRESENTA

Abraham Alejandro Ávila Licona

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Óscar Arturo Fuentes Mariles



MÉXICO D.F.

JUNIO DE 2005



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A todas aquellas personas que dejaron una huella en mí... Pero en especial a mi familia, cimentación de mí ser, causante de mil momentos de alegría y hombro de mis penas.

Mis padres, Rufina y Martín.

Mis hermanos: Jaime, Rodrigo Azucena y Lupita

Con especial cariño a ti que me has estado conmigo y por ser mi amiga; *Alicia Ravelo García.*

A mis compañeros y amigos del Instituto de Ingeniería, UNAM., Adriana Rodríguez R., Faustino de Luna C., Martín Jiménez M., Juan Ansberto Cruz G., J. Enedino Mendoza F., Rodrigo García, Javier Carrillo S., Edith Vega S., Luís Aragón y Juan Gabriel López E.

A mis "cuates" de montañismo por compartir buenos momentos en las andanzas y por estar siempre allí en la soledad acompañada de la montaña: José Antonio Santiago "Bullet", Miguel Ángel García "Rural", Jorge Fernández "Yorch", Ismael Colomer "Isma", Álvaro Cuevas "Mostro", Gustavo Gutiérrez "Lic", Berenice, Lucía Vivero y Paty. Y como olvidar al buen amigo Said Navarte Ávila y Carlos Baeza Ramirez.

Un especial agradecimiento al Ing. Víctor Franco quien ha ido más allá de enseñar en las aulas una ecuación, sino por extenderme su sincera amistad.

Agradezco al Dr. Óscar Arturo Fuentes Mariles por dedicarle parte de su tiempo a la revisión de este trabajo pero principalmente por su apoyo en mi formación académica.

Al Instituto de Ingeniería por permitir desarrollarme y crecer académicamente y darme la oportunidad de realizarme profesionalmente, así como al CONACYT.

Son tantas personas que quisiera hacerles participe del alcance de esta meta que en estos momentos mi memoria me es insuficiente. A todos ustedes gracias por dejar una huella en mi vida.

*¿Qué es la vida? Un frenesí
¿Qué es la vida? Una ilusión,
y el mayor bien es pequeño;
que toda la vida es sueño,
y los sueños, sueños son.*

Calderón de la Barca, (1600-1681).



INDICE

I.	CONCEPTOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA MARÍTIMA	1
I.1.	PROPIEDADES DEL OLEAJE	1
I.1.1.	Características del oleaje	2
I.2.	TEORÍA LINEAL	5
I.2.1.	Propiedades cinemáticas del oleaje	8
I.3.	TEORÍA DEL OLEAJE DE AMPLITUD FINITA	12
I.3.1.	Teoría de Stokes	12
I.3.2.	Teoría de ondas Cnoidales	14
I.3.3.	Onda solitaria	16
I.3.4.	Teoría Trocoidal de Gerstner	18
I.4.	RANGO DE APLICACIÓN	20
II.	MODIFICACIONES DEL OLEAJE	23
II.1.	REFRACCIÓN	23
II.2.	DIFRACCIÓN	27
II.3.	REFLEXIÓN	29
III.	CORRIENTES MARINAS CERCANAS A LA PLAYA	33
III.1.	CORRIENTES MARINAS	33
III.1.1.	Corrientes oceánicas	34
III.1.2.	Corrientes por marea	34
III.2.	CORRIENTES CERCANAS A LA PLAYA	35
III.3.	ESFUERZOS DE RADIACIÓN	36
IV.	MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE CORRIENTES MARINAS INDUCIDAS POR EL OLEAJE	39
IV.1.	HISTORIA DEL ARTE	39
IV.2.	ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LAS CORRIENTES	42
IV.2.1.	Hipótesis	43
IV.2.2.	Condiciones de frontera	44
IV.2.2.1.	Condición de fondo	44
IV.2.2.2.	Condición cinemática para la superficie libre del agua	45
IV.2.2.3.	Condición dinámica para la superficie libre del agua	45



IV.2.3.	Ecuaciones que describen las corrientes marinas	46
IV.2.3.1.	Análisis de la ecuación de conservación de masa	46
IV.2.3.2.	Análisis de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento	51
IV.2.4.	Ecuaciones de movimiento basadas en la teoría lineal	58
V.	CASO DE ESTUDIO	63
V.1.	SELECCIÓN DEL SITIO DE ESTUDIO	63
V.2.	RECOPIACIÓN DE INFORMACIÓN	64
V.2.1.	Batimetría	64
V.2.2.	Oleaje ordinario	67
V.2.2.1.	Selección de información	67
V.2.2.2.	Análisis de información	75
V.3.	MEDICIONES DE CAMPO	75
V.3.1.	Velocidades	76
V.3.2.	Corrientes	82
V.4.	REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN DE OLEAJE	87
V.4.1.	Modelo matemático empleado	87
V.4.2.	Análisis de resultados	87
V.5.	CÁLCULO DE CORRIENTES MARINAS	88
VI.	CONCLUSIONES	97



INTRODUCCIÓN

El diseño de algunas obras marítimas requieren de la determinación del oleaje, corrientes marinas y del régimen de vientos al que estarán sujetas para obtener la forma, dimensión, niveles de operación, ubicación y su orientación.

El objetivo del presente trabajo es describir un modelo matemático para calcular las corrientes marinas que son inducidas por el oleaje en la proximidad de la línea de costa y verificar su bondad comparando los resultados de éste con mediciones de campo.

A continuación se presenta un resumen de cada uno de los capítulos de esta tesis.

En el **capítulo I** se abordan los conceptos fundamentales de Hidráulica Marítima que darán pauta a la comprensión de las corrientes marinas y algunas teorías que se han desarrollado para el análisis del oleaje.

Mientras que, en el **capítulo II** se describen las modificaciones que sufre el oleaje al acercarse a la línea de costa (*refracción*) así como cuando su viaje se ve interrumpido por un obstáculo (*difracción*) y las olas son devueltas al mar (*reflexión*).

El **capítulo III**, se dedica a las corrientes marinas que se presentan en la cercanía de la línea de costa.



En el *capítulo IV*, se presenta un modelo matemático para calcular las corrientes marinas inducidas por el oleaje; para tal objetivo se describen las ecuaciones fundamentales del movimiento del agua del mar.

En el *capítulo V* se incluye un ejemplo para obtener las corrientes marinas inducidas por el oleaje. Se hace su aplicación en las costas de Playa Mujeres, península de Yucatán; a través del modelo matemático presentado en éste trabajo y se comparan los resultados con respecto a mediciones realizadas durante el año de 2003.

Por último en el *capítulo VI* se plantean algunas conclusiones y recomendaciones. Además se indican las ventajas de utilizar esta herramienta y sus limitaciones.



Capítulo

I

CONCEPTOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA MARÍTIMA

I.1 PROPIEDADES DEL OLAJE

Una forma de la transferencia de la energía del viento al mar es el oleaje. Estas ondas u oleaje son transmitidas desde su lugar de origen hasta otros sitios y cuyas fuentes de origen son:

- ♣ Los cuerpos moviéndose en o cerca de la superficie.
- ♣ Los vientos (oleaje común, marea de tormenta).
- ♣ Los disturbios sísmicos (provocan los llamados “tsunamis”)
- ♣ La atracción solar y lunar (causan las mareas astronómicas).

En este trabajo sólo se hará referencia al oleaje formado por el viento.

El *fetch* es una longitud dentro de la zona donde el viento actúa (*figura I.1*), donde se generan ondas elementales cuya altura, frecuencia, celeridad y dirección son aleatorias dando lugar a una superficie de mar caótica, quien es conocida como *mar de viento* u *oleaje local* (se usa la palabra inglesa *sea* para describirlas).

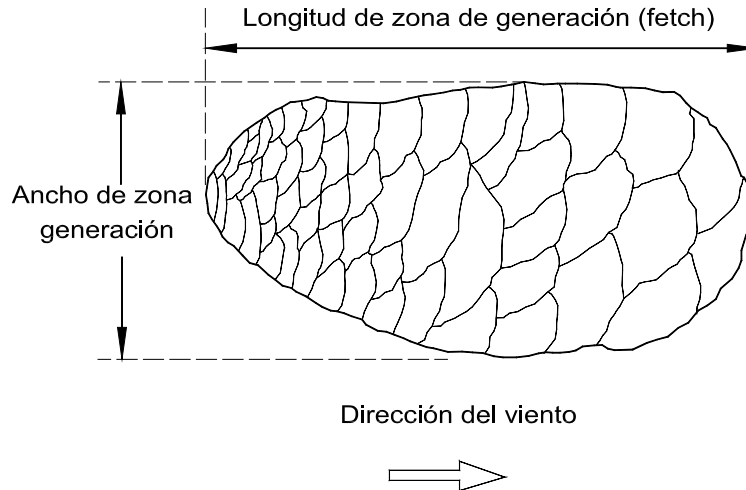


Figura I.1. Zona de generación de oleaje local

El oleaje que se propaga fuera de la zona de generación recibe el nombre de *oleaje distante* conocido comúnmente por la palabra inglesa *swell*.

I.1.1 Características del oleaje

Se entiende como *oleaje* al movimiento cíclico de ascenso y descenso de la superficie del mar.

La determinación de las propiedades de las olas depende de las siguientes consideraciones:

- a) Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) , donde x es medida en la dirección de propagación de la ola sobre la línea horizontal que representa el nivel del agua (NAT), suponiendo que no existe oleaje y es medida horizontal y perpendicularmente a x , finalmente z se establece verticalmente hacia arriba (figuras 1.2 y 1.3).

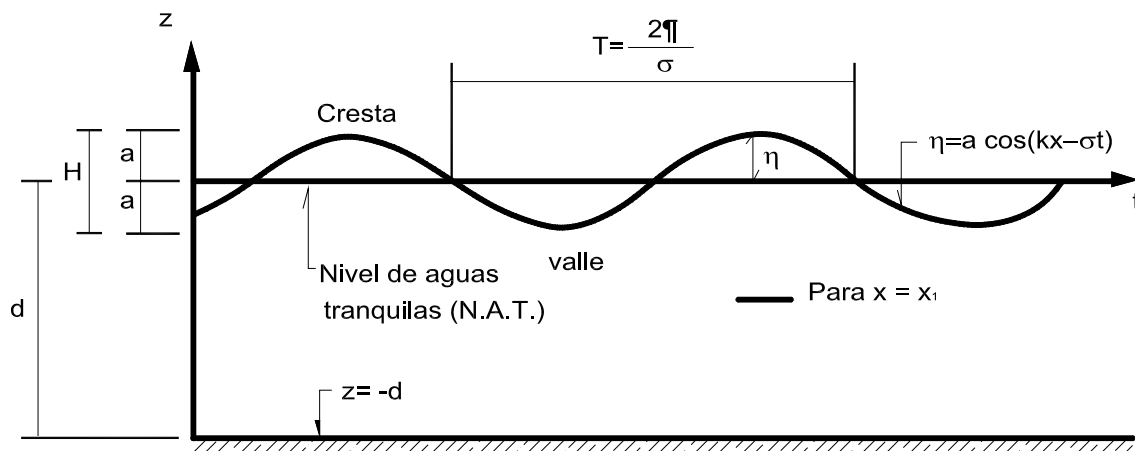


Figura I.2. Perfil del oleaje respecto a la distancia.

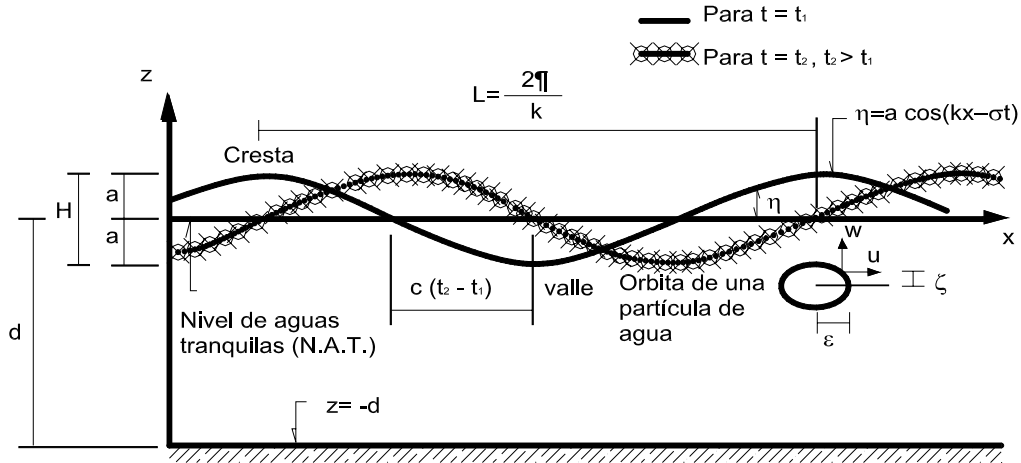


Figura I.3. Perfil del oleaje respecto al tiempo.

- b) La propagación de la ola se realiza bidimensionalmente en el plano $x-z$.
- c) Las olas se mantienen de forma estable y uniforme.
- d) El fondo es liso y horizontal.
- e) El agua es incompresible y no viscosa.
- f) El flujo es irrotacional.
- g) No existen corrientes cercanas al oleaje.

Con base en lo anterior se definen las principales características del oleaje utilizadas en este trabajo.

Nivel de aguas tranquilas (NAT) es el nivel del mar considerando que no existe oleaje.

Amplitud de la ola (a) es el máximo desplazamiento de la ola tanto aguas arriba como aguas abajo a partir del NAT.

Altura de la ola (H) es igual a la diferencia entre el máximo y mínimo desplazamiento del agua a partir del NAT, es decir $2a$.

Cresta es el punto que corresponde al máximo desplazamiento positivo. Por el contrario, el punto que corresponde al mínimo desplazamiento negativo es un **valle**.

Periodo (T); tiempo que transcurre para que se presenten dos crestas o valles consecutivos en un mismo punto, se relaciona con la frecuencia angular como $T = \frac{2\pi}{\sigma}$

Longitud de onda (L) es la distancia horizontal que existe entre dos crestas consecutivas o valles en un mismo tiempo.

Celeridad (C) es la velocidad de desplazamiento de la ola, es igual a $C = \frac{L}{T}$.



Frecuencia cíclica (f) es el recíproco del periodo, representa el número de olas que pasan por un punto fijo por unidad de tiempo.

Frecuencia angular (σ); es el recíproco del periodo multiplicado por dos veces π

Número de onda (k); es el recíproco de la longitud de onda multiplicado por dos veces π , o sea $k = \frac{2\pi}{L}$.

Elevación de la superficie libre (η) es la distancia vertical medida a partir del NAT a cualquier punto de la superficie libre.

Profundidad del agua (d) es la distancia vertical entre el fondo del mar y el NAT (en el fondo $z = -d$).

Orbita de la partícula describe la trayectoria de una partícula de agua con el oleaje.

Las definiciones anteriores son validas para una ola (water waves); sin embargo, en la naturaleza la forma de presentarse el oleaje rara vez es la misma una ola a la otra, aún más, ni tampoco se propagan en la misma dirección.

Las propiedades de la ola que se pueden medir son la **altura** y **periodo**, son cuantificables mediante el uso de aparatos o de la observación. Los registros de oleaje son del resultado de observaciones visuales. Sin embargo las alturas de olas observadas no corresponden a una altura de ola representativa, por lo que se recurre a métodos estadísticos y matemáticos como el de la *superposición de componentes* (análisis de Fourier y las técnicas espectrales para describir un estado de mar y así obtener una altura de ola conocida como **ola significativa**).

Debido a la gran aleatoriedad en los estados de mar se debe recurrir a técnicas estadísticas; sin embargo, en olas de gran magnitud y en aquellas que se propagan en aguas poco profundas se hacen más regulares que las de pequeña magnitud.

En resumen el oleaje es un fenómeno complicado y difícil de describir matemáticamente debido a las características tridimensionales y aleatoriedad, no-linealidad. Para abordar el fenómeno se han desarrollado algunas teorías las cuales para la finalidad que aquí se presenta solo se recurrirá a los resultados de estas teorías conocidas como **teoría de Airy (1845) o teoría lineal** la cual estudia ondas de pequeña amplitud y la **teoría de Stokes (1847)** estudia ondas de amplitud finita. Estas dos teorías describen el movimiento de las ondas con la suficiente aproximación para propósitos prácticos.



I.2 TEORIA LINEAL

Para una relación entre la altura de la ola H y la longitud de onda L , H/L de $1/50$ o menor, la teoría lineal puede ser empleada con precisión en la predicción de las propiedades cinemáticas de la ola.

La *teoría de Airy* presupone que en la ecuación de Bernoulli el término de la carga de velocidades es despreciable y que la pendiente de la superficie del agua es pequeña. Es por ello también conocida con el nombre de *teoría lineal*, *pequeña amplitud* o *primera aproximación*.

Las ondas de la teoría lineal tienen la característica de que las partículas de agua no viajan con la ola pero tienden a oscilar respecto a una posición media cuando la onda pasa por ella; por esta razón también se acostumbra a llamarlas *ondas oscilatorias*.

Una expresión matemática para describir el *desplazamiento de la superficie libre* y del *periodo de la ola* son; (McCormick 1973)

$$\eta = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right) \quad (I.1)$$

donde;

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{número de onda}) \quad (I.2)$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{frecuencia angular}) \quad (I.3)$$

Aunque en sentido estricto se puede considerar un ángulo de fase dentro del argumento de la función coseno (ecuación I.1) evaluado en las condiciones de frontera $t=0$ y $x=0$ cuyo resultado es una elevación distinta de cero; usualmente no se le considera.

Y

$$T = 2\pi \left[\frac{2\pi g}{L} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \right]^{-1/2}$$
$$T = \frac{1}{f}$$
$$T = \frac{2\pi}{\sigma} \quad (I.4)$$



donde $\tanh(\)$ es la tangente hiperbólica, f es la *frecuencia cíclica*, σ es la *frecuencia angular*, g es la *constante gravitacional* y d es la *profundidad del fondo*. Normalmente se considera que el periodo T no varía con el *tiempo t* y la *profundidad del agua d* ; sin embargo, esto no es verdadero para cuando las olas viajan distancias grandes. La ecuación I.4 puede ser reacomodada para obtener una expresión para la *longitud de onda*.

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (I.5)$$

En la ecuación anterior L se encuentra en ambos lados de la igualdad y para resolverla se recurrirá a algún método numérico o por medio de la gráfica mostrada en la *figura (I.4)*.

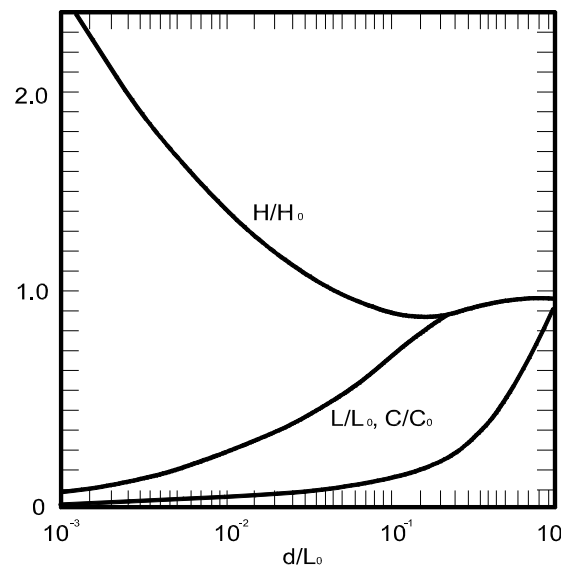


Figura I.4 Propiedades adimensionales de la ola en función de la relación profundidad de la agua y la longitud de onda para la predicción de la teoría lineal.

La *velocidad de fase o celeridad C* de una onda que viaja individualmente se puede calcular con la siguiente expresión, resultado de realizar el cociente entre las ecs. I.5 y I.4.

$$C = \frac{L}{T}$$

$$C = \frac{gT}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \quad (I.6)$$

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \quad (I.7)$$



Es interesante destacar que si d crece infinitamente, considerando $d/L > 0.5$ (aguas profundas), $\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \rightarrow 1$.

Y para estas condiciones se tendrá que;

$$C_0 = \sqrt{\frac{gL_0}{2\pi}} \quad (I.8)$$

Para otra circunstancias, donde $d/L < 0.04$ (aguas poco profundas)

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \rightarrow \frac{2\pi}{L}d$$

siendo para esta condición;

$$C = \sqrt{gd} \quad (I.9)$$

Por otro lado, retomando la ecuación I.5

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kd)$$

en cual para $\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \rightarrow 1$ (aguas profundas) por lo que resulta ser;

$$L_0 = \frac{g}{2\pi} T^2 \cong 1.56T^2 \quad (I.10)$$

donde el subíndice 0 representa la condición en aguas profundas.

Como podrá darse cuenta la altura de la ola H no aparece en ninguna de las ecuaciones tanto de la longitud de onda ni las de celeridad así como en las propiedades cinemáticas de éstas sino son función del periodo y la profundidad únicamente.

Por lo anterior tanto la longitud de onda como la celeridad decrecerán significativamente conforme la ola se acerca a la línea de costa. Teóricamente ambas características se aproximarán a cero en cuanto la profundidad d tienda a cero.



I.2.1 Propiedades cinemáticas del oleaje

Los componentes horizontal y vertical de la velocidad de las partículas del agua, u y w son:

$$u = \left(\frac{kg a}{\sigma} \right) \left(\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \right) \cos(kx - \sigma t) \quad (I.11)$$

$$w = \left(\frac{kg a}{\sigma} \right) \left(\frac{\sinh k(z+d)}{\cosh kd} \right) \sin(kx - \sigma t) \quad (I.12)$$

De acuerdo a las suposiciones de la teoría lineal los componentes de la aceleración son:

$$a_x \approx \frac{\partial u}{\partial t} = (kg a) \left(\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \right) \sin(kx - \sigma t) \quad (I.13)$$

$$a_z \approx \frac{\partial w}{\partial t} = (-kg a) \left(\frac{\sinh k(z+d)}{\cosh kd} \right) \cos(kx - \sigma t) \quad (I.14)$$

En las ecuaciones anteriores se observa que las componentes de aceleración están desfasadas 90° respecto a las de velocidad.

El desplazamiento horizontal y vertical de las órbitas de las partículas de agua respecto a su posición media está dada respectivamente por;

$$\xi = \int u dt = -a \left(\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh(kd)} \right) \sin(kx - \sigma t) \quad (I.15)$$

$$\zeta = \int w dt = a \left(\frac{\sinh k(z+d)}{\sinh(kd)} \right) \cos(kx - \sigma t) \quad (I.16)$$

Antes de continuar cabe mencionar tres partes que se destacan en las ecuaciones anteriores;

- (1) Una función de amplitud o número de onda o periodo.
- (2) Un término hiperbólico que considera su modificación con la profundidad.
- (3) Un término de fase que depende de la posición y el tiempo.

La presión debajo de la superficie libre del agua estará dada por;

$$p = -\gamma z + \gamma a K(kx - \sigma t) \quad (I.17)$$



Siendo K el factor de respuesta de presión, puede ser calculado a través de la siguiente expresión;

$$K = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)} \quad (I.18)$$

En sí, esta presión será la suma de la presión hidrostática más la presión dinámica.

La *energía cinética* (por unidad de longitud de cresta), resulta del movimiento de las partículas de fluido por efecto del oleaje y esta es;

$$E_c = \frac{\gamma a^2 L}{4} \quad (I.19)$$

La *energía potencial* (por unidad de longitud de cresta), debida a la diferencia en elevación de la superficie del agua es;

$$E_p = \frac{\gamma a^2 L}{4} \quad (I.20)$$

Tal y como fue derivada por McCormic (1973) y otros autores la *energía total* de una onda estará dada por;

$$E_T = E_p + E_c = \frac{\gamma a^2 L}{2} = \frac{\gamma H^2 L}{8} \quad (I.21)$$

La razón por la cual la energía es transmitida en la dirección de propagación del oleaje a través de un plano vertical es debido a la *potencia del oleaje*, la cual resulta ser;

$$P = \frac{\gamma a^2 g}{2\sigma} \frac{\cos^2(kx - \sigma)}{\cosh^2(kd)} \left(kd + \frac{\sinh(2kd)}{2} \right) \quad (I.22)$$

Cuando dos o más ondas de periodo o longitud similares se suman dan lugar a un conjunto de ondas tales que sus amplitudes entre ondas consecutivas disminuyen y aumentan desde un máximo hasta un mínimo dando con ello una apariencia de grupos o trenes de ondas (*figura I.5*).

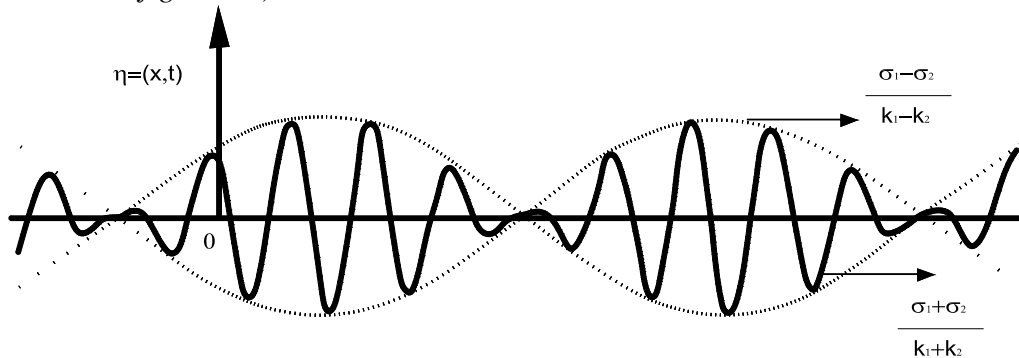


Figura I.5. Suma de dos ondas sinusoidales de igual amplitud y frecuencia aproximadamente igual



La velocidad con que se desplaza el centro del grupo o bien la envolvente del tren de ondas se conoce como *velocidad de grupo*, que es menor o igual a la celeridad de las ondas que forman el grupo y es representada por;

$$C_g = \frac{C}{2} \left\{ 1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)} \right\} = nC \quad (I.23)$$

Cuando un grupo de ondas viaja desde aguas profundas, esto es $d > L/2$, éste puede ser calculado mediante la siguiente expresión;

$$C_g = \frac{C}{2} \quad (\text{aguas profundas}) \quad (I.24)$$

En aguas poco profundas ($d \leq L/25$), sin embargo, las ondas permanecen estacionarias con respecto a la envolvente del grupo; entonces

$$C_g = C \quad (\text{aguas poco profundas}) \quad (I.25)$$

La presencia de funciones hiperbólicas en las ecuaciones que describen las características del oleaje hace de especial interés estudiar dos casos límite:

1.- El primero, es aquel cuando la longitud de la onda es pequeña en comparación con la profundidad del agua por consiguiente kd es grande. A tal condición se le llama de *aguas profundas* y para fines prácticos se presenta cuando la profundidad relativa es $d > L/2$.

2.- El segundo caso corresponde a una longitud de la ola grande comparada con la profundidad del agua, como consecuencia se tiene que kd es pequeña, a esta condición se le conoce como *aguas poco profundas* presentándose cuando $d \leq L/25$.

Por lo anterior se realiza una serie de simplificaciones en las funciones hiperbólicas involucradas en las ecuaciones de las características del oleaje, se presentadas en la *tabla I.1*

Función	Aguas profundas	Aguas poco profundas
$\tanh(kd)$	1	kd
$\sinh(kd)$	∞	kd
$\cosh(kd)$	∞	1
$\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh(kd)}$	e^{kz}	1
$\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh(kd)}$	e^{kz}	$\frac{1}{kd}$
$\frac{\sinh k(z+d)}{\cosh(kd)}$	e^{kz}	$k(k+d)$
$\frac{\sinh k(z+d)}{\sinh(kd)}$	e^{kz}	$\frac{1+z}{d}$

Tabla I.1. Valor de algunas funciones hiperbólicas para aguas profundas y poco profundas.

Ondas estacionarias.- Aquellas en las cuales las crestas no se mueven horizontalmente aunque si se pueden cambiar periódicamente formándose y desapareciendo (figura I.6).

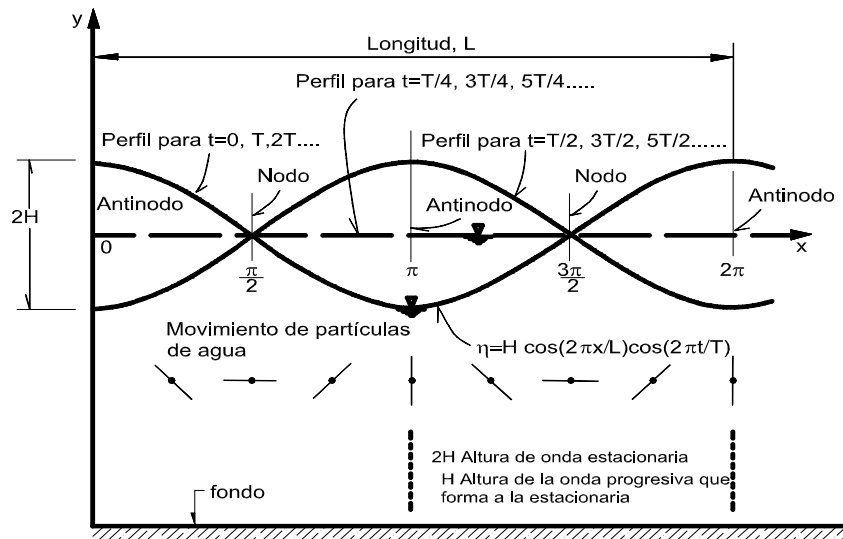


Figura I.6. Ondas estacionarias (clapotis)

Este tipo de ondas son el resultado de la suma de dos ondas progresivas de igual amplitud y longitud que viajan en sentido opuesto en la misma dirección con igual celeridad en valor absoluto, fenómeno que se trata en el estudio de la *reflexión*. En aguas poco profundas, lagos o interior de puertos existen oscilaciones estacionarias de largo periodo.

I.3 TEORÍAS DEL OLAJE DE AMPLITUD FINITA

El limitante de la teoría lineal se debe a que solo puede predecir perfiles sinusoidales, la amplitud del oleaje no es tan pequeña comparada con su longitud y deben considerarse términos no lineales en los desarrollos matemáticos de este, los cuales la teoría lineal no considera.

El manejo de las ecuaciones que describen las características de las ondas es más complicado y de acuerdo a la profundidad relativa (d/L) además de la relación de profundidad con la altura de ola se recomienda la aplicación de una teoría de oleaje específica.

I.3.1 Teoría de Stokes

Stokes (1847-1880) presentó una teoría de ondas considerando que el medio en el cual viajan es irrotacional y utiliza desarrollos en series para representar las propiedades del oleaje. La precisión de esta teoría depende del número de términos que se deseen manejar en la serie, por ejemplo la *teoría de Stokes de primer orden* es idéntica a los resultados obtenidos con la *teoría lineal* mientras que en la *teoría de Stokes de segundo orden* se mejora la precisión en la determinación del perfil de oleaje y además la *velocidad de transporte de masa* y la *condición de rompiente* del mismo. Las teorías de Stokes de tercer y orden superior tienen aún mejor precisión en la predicción de los perfiles del oleaje pero para nuestros propósitos la teoría de segundo orden es satisfactoria.

Las ondas obtenidas con la teoría de Stokes para varios ordenes de aproximación dan perfiles más angostos en las crestas y más planos en los valles que aquellos obtenidos con la teoría de pequeña amplitud lo cual parece ser más cercano a lo que realmente se observa en el mar (*figura I.7*).

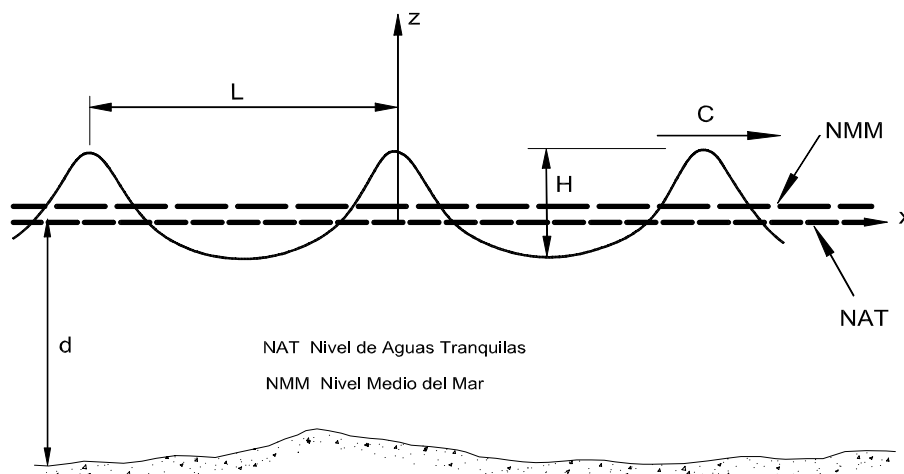


Figura I.7. Perfil del oleaje de la teoría no lineal.

La trayectoria de las partículas sobre un ciclo completo no es una curva cerrada, existe un desplazamiento horizontal de las partículas de agua después de que ha transcurrido un periodo completo. En la *figura I.8* se aprecia la trayectoria de las partículas de agua.

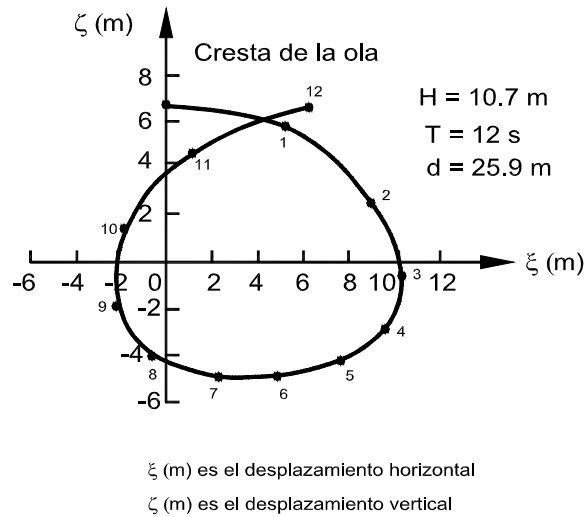


Figura I.8. Diagrama típico de una órbita de una partícula de agua.

Se llama *velocidad de transporte de masa* al desplazamiento horizontal neto realizado en un ciclo completo del oleaje dividido entre el periodo de éste la cual se calcula con la siguiente expresión, para aguas intermedias;

$$\bar{U}(z) = \left(\frac{\pi H}{L} \right)^2 \frac{C}{2} \frac{\cosh 2k(d+z)}{\sinh^2(kd)} \quad (I.26)$$

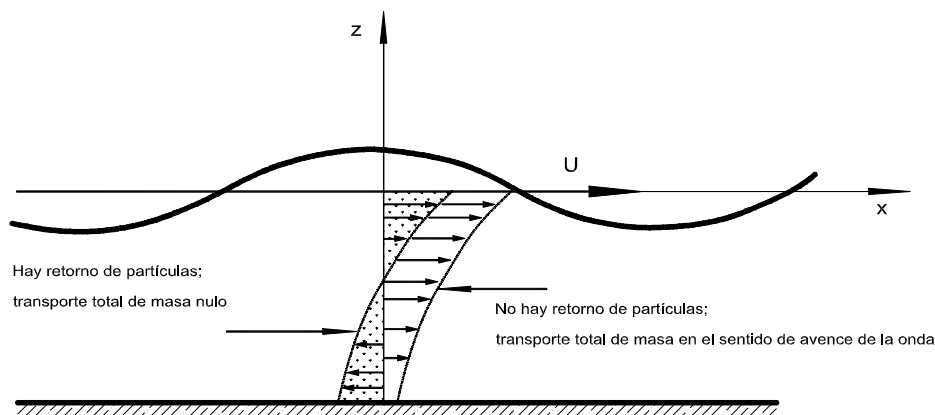


Figura I.9. Transporte de masa

La deducción de las expresiones para calcular las características del oleaje parten de la ecuación del potencial y de desarrollos en series lo que permite de acuerdo al orden de



términos incluidos en estas establecer un conjunto de ecuaciones de los parámetros del oleaje para el orden escogido, en ellos aparecen términos de $\cos 2\pi n \left(\frac{z}{L} - \frac{t}{T} \right)$, donde $n=0,1,2,3,\dots$

La ecuación de potencial que parte la teoría de segundo orden y mayores es ;

$$\phi = \left(\frac{ag}{\sigma} \right) \left(\frac{\cosh(z+d)}{\cosh kd} \right) \text{sen}(kx - \sigma t) \quad (I.27)$$

Sin profundizar en la demostración, el *perfil del oleaje en aguas intermedias* (ec. general) que describe la teoría de segundo orden de Stokes se obtiene con la siguiente ecuación;

$$\eta = \frac{H}{2} \cos(kx - \sigma t) + \left[\frac{\pi H^2}{4L} \left(1 + \frac{3}{2 \text{senh}^2(kd)} \right) \right] \cos[2(kx - \sigma t)] \quad (I.28)$$

El primer término de la derecha, ecuación I.28, es la expresión que se emplea para calcular el perfil del oleaje con la teoría lineal (ecuación I.1) mientras que el segundo simplemente es una *corrección* de dicha teoría.

Las expresiones matemáticas que describen tanto las características como las propiedades cinemáticas del oleaje siguen el mismo comportamiento, es decir un término con el que se calculan éstas empleando la teoría lineal y un factor de corrección de la misma.

I.3.2 Teoría de ondas cnoidales

Cuando la profundidad del agua decrece aproximadamente $d/L = 0.1$ (aguas someras) la teoría de Stokes ya no es valida, pero sí lo es la *teoría cnoidal* desarrollada por Korteweg y De Vries en 1895. El nombre *cnoidal* proviene del empleo de las funciones *cn* de las funciones elípticas de Jacobi.

El perfil de la superficie del oleaje y celeridad son características que se pueden obtener directamente con esta teoría, sin embargo las características cinemáticas requieren de tediosos cálculos. Este perfil o particularmente la *relación de la altura de la ola*, a_0/H , se considera confiable para determinar otras propiedades cinemáticas.

La celeridad de la onda cnoidal esta dada por;

$$C = \left(\sqrt{gd} \right) \left[1 + \frac{H}{dk^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right) \right] \quad (I.29)$$



donde k es un parámetro o modulo elíptico comprendido entre 0 y 1 el cual no tiene un significado físico, $K(k)$ y $E(k)$ son la primera y segunda integrales elípticas de k perfectas de Jacobi y g aceleración gravitacional.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k \operatorname{sen}^2(x)}} \quad (I.30)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k \operatorname{sen}^2(x)} dx \quad (I.31)$$

Los valores de estas integrales se encuentran representados en gráficas (Silvestre, Coastal Engineering I) los cuales dependen de la relación HL^2/d^3 , parámetro llamado de *Ursell*.

La celeridad dada en la ecuación I.29 se encuentra entre dos límites, el primero representado por una onda senoidal para relaciones H/d muy pequeñas y el segundo que se encuentra representado por la onda solitaria para relaciones H/d muy largas, es decir;

Cuando $k^2 = 0$ esto es:

$$C = (\sqrt{gd}) \left(1 - \frac{2\pi d^2}{3L^2} \right)$$

la ecuación I.29 se aproxima a la celeridad obtenida con la teoría lineal.

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} = \sqrt{gd \left(1 - \frac{4\pi d^2}{3L^2} \right)} \quad (I.32)$$

Para $k^2 = 1$ la celeridad de esta teoría se aproxima a la celeridad que se obtiene con la teoría de la onda solitaria con un margen de error del 2%.

Por otro lado el *perfil de la superficie libre* del agua esta dada por;

$$\eta = z_t + H \operatorname{cn}^2 \left(2K(k) \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (I.32)$$

$$z_t = \frac{16d}{3L^2} K(k) [K(k) - E(k)] + 1 - \frac{H}{d} \quad (I.33)$$

donde el primer termino de la ecuación I.33 representa la relación de altura de la ola, $\operatorname{cn}(\)$ es la función coseno elíptico; de los argumentos $K(k)$ y $\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right)$.

La *Longitud* de onda esta dad por;

$$L = \sqrt{\frac{16d^3}{3H}} kK(k) \quad (I.34)$$

Mientras que *periodo* se calcula con la ecuación I.35

$$T = \sqrt{\frac{d}{g}} \sqrt{\frac{16z_t}{3H}} \frac{d}{z_t} \frac{kK(k)}{1 + \frac{H}{z_t k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{E(k)}{K(k)} \right)} \quad (I.35)$$

Y la *presión*

$$p = \lambda(\eta - z) \quad (I.36)$$

La condición límite de rompiente de las ondas cnoidales es $H_{m\acute{a}x} = 0.73d$

I.3.3 Onda solitaria

La onda solitaria es un caso especial de la teoría cnoidal cuando k se aproxima a la unidad, la cual básicamente es un disturbio que se propaga casi sin alteración sobre una gran distancia a velocidad constante y puede verse como un fenómeno aislado, descubierto y estudiado por Russell en 1938 (*figura 1.10*).

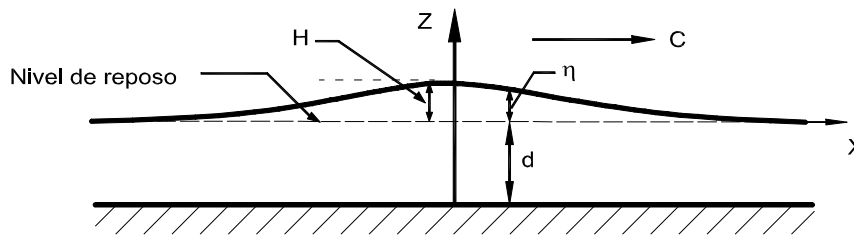


Figura I.10. Onda solitaria

Como se puede notar en la figura I.10 la altura de la ola H es ahora la distancia vertical entre el nivel de reposo y la cresta de la ola además no hay un periodo en este caso, por lo que la ola es tratada como un evento aislado.

El análisis con la teoría de la onda solitaria permite estudiar a las olas cercanas a la costa y además a los tsunamis.



La onda solitaria posee las siguientes características:

Elevación de la superficie libre

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - Ct) \right] \quad (I.39)$$

donde C es la celeridad o velocidad de fase. Al realizar una comparación de las expresiones de las ecuaciones I.1, I.28 y I.39 se puede observar que la diferencia entre la onda solitaria y la onda periódica radica en un término trigonométrico que indica periodicidad mientras que la función hiperbólica indica un fenómeno aislado.

La expresión para determinar la *velocidad de fase* es:

$$C = \sqrt{g(d + H)} \quad (I.40)$$

Energía por unidad de longitud de ancho

$$E \approx \gamma d^3 \left(\frac{4H}{3d} \right)^{3/2} \quad (I.41)$$

El volumen de agua en la onda por unidad de longitud de ancho sobre el nivel medio del mar.

$$\forall = 2 \int_0^{\infty} \eta dx = 4d^3 \sqrt{\frac{H}{3d}} \quad (I.42)$$

La *condición límite o de rompiente*, derivada por Laitone es $H_{m\acute{a}x} = 0.732d$

Por otro lado, después de que la ola rompe la energía de la ola es transformada en *turbulencia* y disipada en calor.

La *presión* por debajo de la onda solitaria es:

$$p = \rho g(\eta - z) \quad (I.43)$$

La presión en cualquier punto en el agua es simplemente la presión hidrostática.

I.3.4 Teoría trocoidal de Gerstner

La forma de una onda de Gerstner (1802) es una trocoide; es decir, la trayectoria que describe un punto fijo de un disco que rota a lo largo de una línea recta (*figura I.11*).

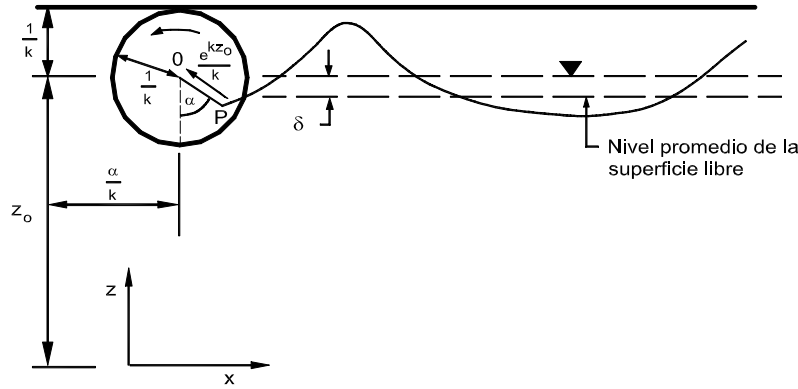


Figura I.11. Generación de una onda trocoidal

A pesar de algunas diferencias respecto a las ondas reales y que no es usada para calcular las propiedades cinemáticas, por la simplicidad de su forma, es muy empleada para propósitos prácticos.

En la onda trocoidal las partículas de agua tienen un movimiento de rotación y otro de translación. El segundo de ellos se realiza describiendo una órbita circular. El radio de esta órbita disminuye exponencialmente de acuerdo a la profundidad.

La posición instantánea (ξ, ζ) de una partícula respecto al centro (x_0, y_0) de la trayectoria es:

$$\xi = x_0 + \frac{1}{k} e^{kz_0} \text{sen}(kx_0 - \sigma t) \quad (I.44)$$

$$\zeta = z_0 - \frac{1}{k} e^{kz_0} \text{cos}(kx_0 - \sigma t) \quad (I.45)$$

El perfil de la ola puede ser dibujado considerando

$$z_0 = z_s$$

y variando x_0 para un tiempo fijo $t = t_1$

La distancia entre z_s y el nivel de aguas tranquilas es



$$\delta = \frac{1}{2k} e^{2kz_s} \quad (I.46)$$

Para esta teoría se pueden plantear dos expresiones en términos del parámetro α para describir superficies de presión constante como;

$$kz = kz_0 - e^{kz_0} \cos \alpha \quad (I.47)$$

$$kx - \sigma t = \alpha + e^{kz_0} \operatorname{sen} \alpha \quad (I.48)$$

las cuales también son trocoides. La presión a lo largo de una de estas superficies está dada como;

$$p = \rho g \left(z_s - z_0 + \frac{1}{2} \rho C^2 e^{2kz_0} - e^{2kz_s} \right) \quad (I.49)$$

La celeridad está dada por

$$C = \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2} \quad (I.50)$$

la cual es semejante a la de la teoría lineal para aguas profundas.

La altura de la ola está dada como

$$H = \frac{2}{k} e^{kz_s} \quad (I.51)$$

de esta ecuación y para $z_s = 0$ se tiene la esbeltez máxima.

$$\frac{H}{L} = \frac{1}{\pi} = 0.3183$$

Stokes demostró que la vorticidad $\omega = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ es pequeña y que la viscosidad debe existir en el movimiento.



I.4 RANGO DE APLICACIÓN DE LAS TEORÍAS DE ONDAS PROGRESIVAS

Para conocer el intervalo de aplicación de las teorías de oleaje (véase figura I.12) se emplean varios criterios

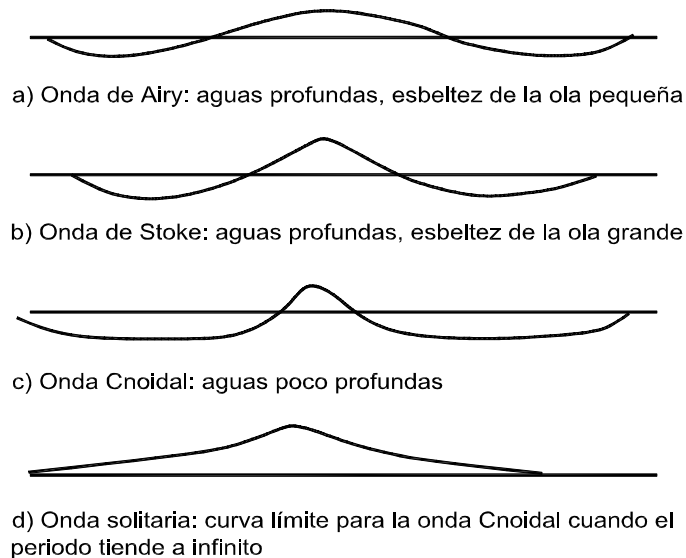


Figura I.12. Perfiles de ola

El criterio más elemental consiste en calcular el parámetro de Ursell

$$U = \frac{HL^2}{d^3} \quad (I.52)$$

Y se señala que para $U \ll 1$ es aplicable la teoría de Stokes y que para $U \approx 1$ es conveniente ondas cnoidales.

Otro criterio se refiere a la figura I.13, donde se indican las regiones aproximadas, en función de los valores de $\frac{d}{H}$ y $\frac{d}{L}$ en la cual las teorías descritas son aplicables.

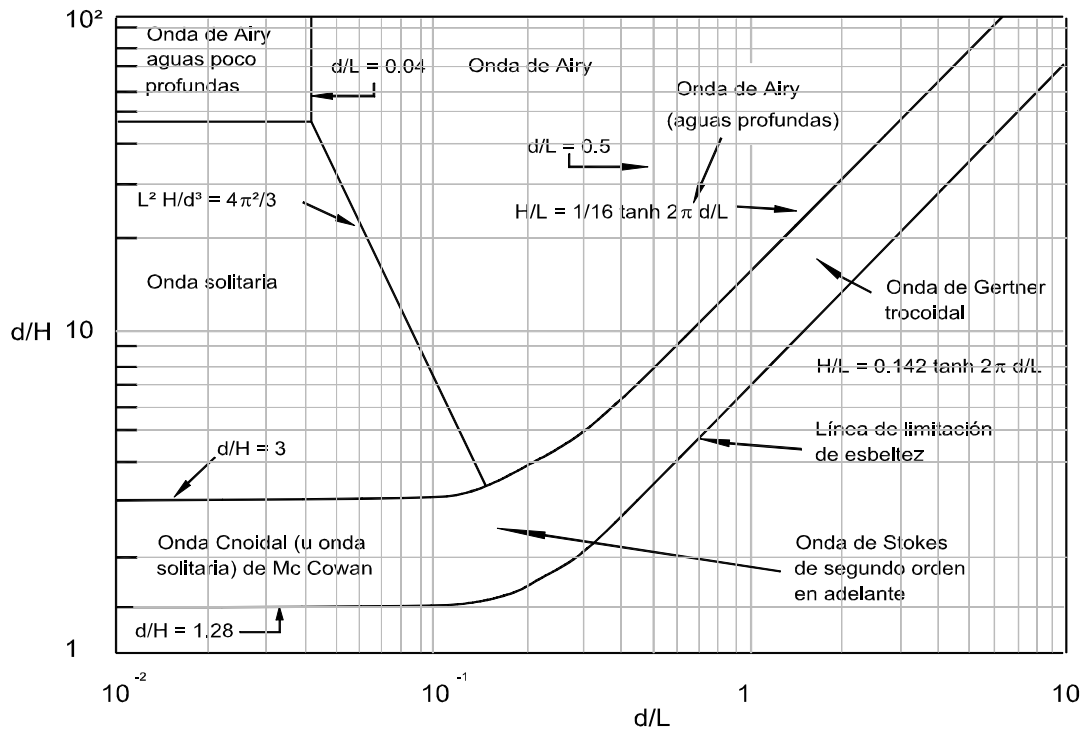


Figura I.13. Regiones de d/H y d/L de aplicación de teorías del oleaje.



Capítulo
II
MODIFICACIONES DEL
OLEAJE

II.1 REFRACCIÓN

Considérese una ola propagándose a una playa cuya batimetría es paralela a la línea de costa, como se muestra en la *figura II.1*, donde el punto *A* indica el primer contacto de la cresta de ola con una curva batimétrica (límite de aguas profundas) en un tiempo *t*. De resultados anteriores sabemos que esta curva batimétrica se encuentra a una profundidad d_o que es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de onda, esto es;

$$d_o = \frac{L_o}{2} \tag{II.1}$$

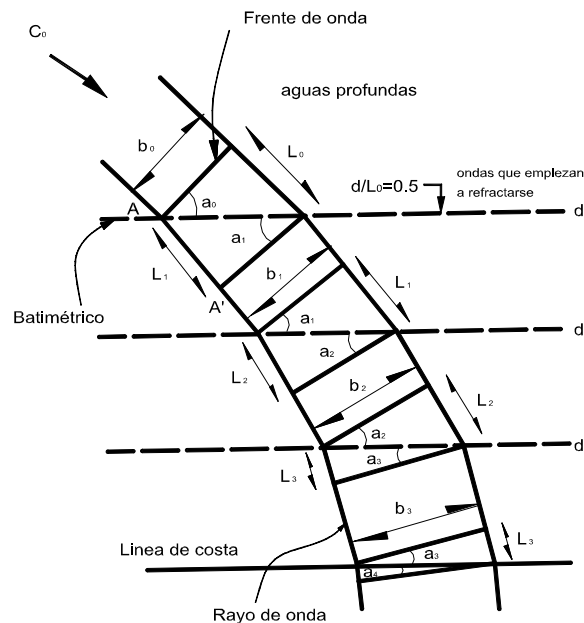


Figura II.1 Refracción de las ondas sobre fondo con batimétricas rectas y paralelas.



El punto A viaja desde un punto alejado (aguas profundas) de la línea de costa, su celeridad C disminuye de acuerdo al decrecimiento de la profundidad. El valor de C para cualquier profundidad puede obtenerse de gráficas deducidas a partir de la teoría lineal donde se presenta cómo la celeridad decrece hasta que el periodo de la ola T permanece sin cambio, la longitud de ola L también decrece un cierto porcentaje tal y como se puede observar en tales resultados. De esta manera para el tiempo t' el punto A ha viajado hasta la posición A' y a si sucesivamente. Los puntos A y A' así como cualquier otro punto que se encuentre en la cresta del frente de ola experimentará la misma desaceleración. Por lo anterior la desaceleración de un frente de ola es debido a un cambio de dirección inducido por las curvas batimétricas conocido como **refracción**.

El fenómeno de la refracción obedece la *ley de Snell* (figura II.2) la cual se deducirá a continuación.

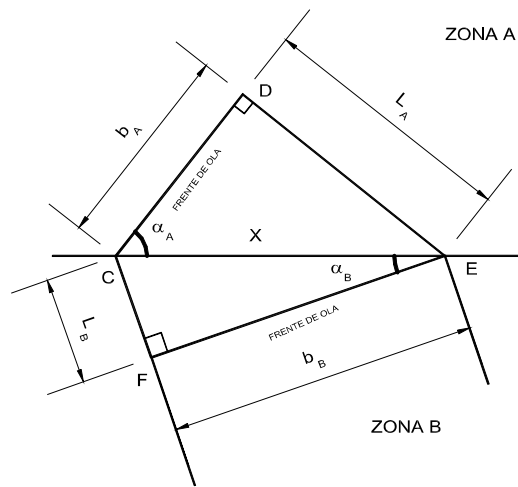


Figura II.2. Refracción de un frente de ola.

En la figura II.2 la línea CD representa un frente de ola en el medio A , el cual con la línea CE (frontera entre los medios A y B) forman un ángulo α_A . Para un tiempo igual al periodo del oleaje, el punto D del frente de onda llega al punto E mientras C avanza hasta el punto F ; la distancia CF es menor que DE por encontrarse el frente FE en una zona de menor celeridad. La línea FE corresponde al frente de onda refractado la cual forma un ángulo α_B con la línea CE .

Las líneas ortogonales a los frentes de onda, CF y DE , son conocidas como **rayos de onda**.

Del triángulo CDE se obtiene;

$$x = \frac{L_A}{\text{sen} \alpha_A} \tag{II.2}$$



$$b_A = x \cos \alpha_A \quad (II.3)$$

y del triángulo CEF

$$x = \frac{L_B}{\text{sen} \alpha_B} \quad (II.4)$$

$$b_A = x \cos \alpha_A \quad (II.5)$$

Al igualar las ecs. II.2 y II.4 se obtiene:

$$\frac{L_A}{\text{sen} \alpha_A} = \frac{L_B}{\text{sen} \alpha_B} \quad (II.6)$$

De acuerdo a la definición de celeridad, $L_A = C_A T$ y $L_B = C_B T$, la ec. II.6 toma la forma de la ec conocida como **ley de Snell**.

$$\frac{L_A}{\text{sen} \alpha_A} = \frac{L_B}{\text{sen} \alpha_B} \quad (II.7)$$

Por otro lado, si se divide la ec. II.3 entre la ec. II.5 se obtiene la relación entre anchos de frente de onda;

$$\frac{b_A}{b_B} = \frac{\cos \alpha_A}{\cos \alpha_B} \quad (II.8)$$

La altura de la ola refractada H es estimada en base a la ley de conservación de flujo de energía. Considérese la *razón o flujo de energía* en la dirección de propagación del oleaje por unidad de longitud de cresta (Wiegel, 1964).

$$\bar{P} = \frac{nE}{T} \quad (II.9)$$

donde T es el periodo de la ola, E es la energía total de la ola por unidad de longitud de cresta, n es la relación de velocidad de grupo C_0 y la celeridad de la ola $\left(\frac{C_0}{C}\right)$.

$$E = \frac{\gamma H^2 L}{8} \quad (II.10)$$

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kd}{\text{senh}(2kd)} \right) \quad (II.11)$$

siendo γ el peso específico del agua, L la longitud de onda, d la profundidad y k el número de onda.

De acuerdo a la ley de conservación del flujo de la energía, el flujo de energía entre los rayos de la zona A es igual al que se tiene en la zona B ;



$$\overline{P}_A b_A = \overline{P}_B b_B \quad (II.12)$$

Al sustituir las ecs. II.10 y II.11 en la ec. II.12 resulta:

$$n_A \frac{\gamma H_A^2 L_A}{8T} b_A = n_B \frac{\gamma H_B^2 L_B}{8T} b_B \quad (II.13)$$

Despejando la altura de la ola en la zona B , H_B :

$$H_B = \sqrt{\frac{n_A C_A}{n_B C_B}} \sqrt{\frac{b_A}{b_B}} H_A$$

la expresión anterior puede ser representada como;

$$H_B = K_S K_R H_A \quad (II.14)$$

donde;

$$K_S = \sqrt{\frac{n_A C_A}{n_B C_B}} \quad (II.15)$$

es el *coeficiente de aguas someras o de someramiento* el cual depende de la profundidad y el periodo o longitud de la ola.

$$K_R = \sqrt{\frac{b_A}{b_B}} \quad (II.16)$$

es el *coeficiente de refracción* el cual tiene que ver con el cambio en la dirección del oleaje.

El análisis de la refracción de la ola se desarrolla con mayor detalle en el *Shore Proteccion Manual* of the U.S. Army (1973).

A K_S también se le puede representar de la siguiente forma

$$K_S = \frac{H}{H_0}$$

donde H_0 es la altura de ola que se presentaría en aguas profundas cuando no ha sido refractada, esto es, $\alpha_0 = 0$. Los valores del coeficiente de aguas poco profundas puede obtenerse directamente de figuras que relacionan la altura de ola.

por otro lado, si se sustituye la ecuación II.8 en la ecuación II.16 se obtiene;

$$K_R = \sqrt{\frac{\cos \alpha_A}{\cos \alpha_B}} \quad (II.17)$$

Para comenzar a conocer las alturas de olas refractadas por las curvas batimétricas es común ubicar a la zona A en aguas profundas, es decir los subíndices de las propiedades de la ola serán 0 y no A , las cuales serán las condiciones iniciales de cálculo.

II.2 DIFRACCIÓN

Cuando el viaje de las olas es interrumpido por un obstáculo como lo es un rompeolas o una isla la energía de éstas se transfiere a las aguas en calma, llamadas *zona de sombra*, protegidas por el obstáculo reflejada en ondas curvas alrededor de la barrera. Este fenómeno es llamado *difracción del oleaje* (figura II.3).

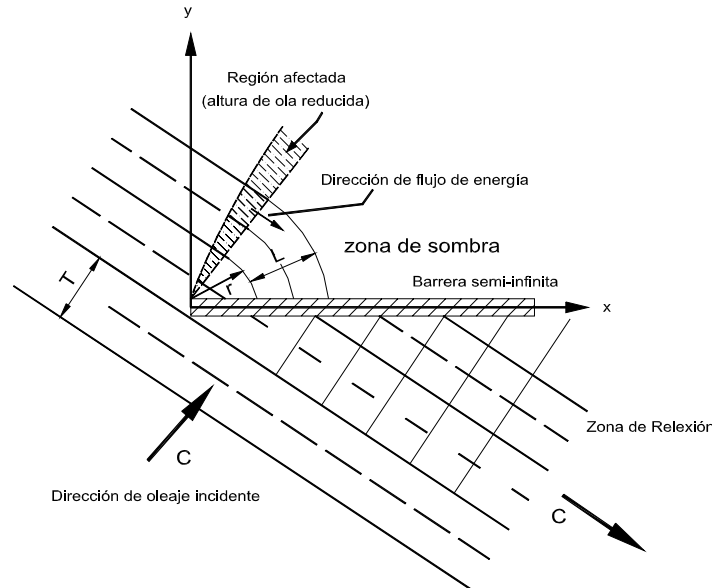


Figura II.3. Difracción del oleaje

El análisis de este fenómeno se puede hacer bajo las condiciones simplistas.

- 1.- La profundidad del agua d es uniforme.
- 2.- La teoría lineal es aplicable.

Considerando al eje z perpendicular al plano xy (saliendo del papel) y asumiendo que el fluido es irrotacional. Para tal caso la ecuación de continuidad para un flujo incompresible se encuentra expresada por la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (II.18)$$

donde ϕ es el potencial de flujo.

Considerando las condiciones de frontera en el fondo del mar, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=-d} = 0$ y asumiendo la siguiente expresión como una solución de la ecuación II.18.

$$\phi(x, y, z, t) = AF(x, y) \cosh k(h + z) e^{i\sigma t} \quad (II.19)$$

Substituyendo la ecuación II.19 en la II.18 se obtiene la siguiente expresión;

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0 \quad (II.20)$$

Ecuación conocida como ecuación de Helmholtz, donde F es una función compleja cuyo modulo es el coeficiente de difracción, x y y son las coordenadas de un sistema ortogonal de referencia y k es el número de onda que depende tanto del período del oleaje como de la profundidad de la zona en estudio. La solución de esta ecuación diferencial requiere de las condiciones de frontera del sitio en estudio.

La ecuación de la difracción se ha resuelto analíticamente para algunos casos particulares considerando que las barreras impermeables están situadas en aguas profundas y que detrás de ellas el oleaje puede continuar infinitamente.

Por lo tanto la relación entre las alturas de ola difractada (H_D) y la incidente H esta dada por:

$$\frac{H_D}{H} = |F(x, y)| = K_d \quad (II.20)$$

Partiendo de estas soluciones se han desarrollado ábacos y tablas para estudiar el fenómeno de la difracción de modo aproximado los cuales se pueden consultar en libros especializados.

Para conocer la difracción del oleaje atrás de una barrera semi-infinita se debe calcular el coeficiente de difracción (ecuación II.20) el cual es función del ángulo de incidencia θ , el ángulo entre la barrera y la línea que parte del extremo de la barrera (morro) con la dirección deseada β y la relación r/L siendo r el radio vector al punto p deseado y L la longitud de la ola incidente, véase la figura II.4.

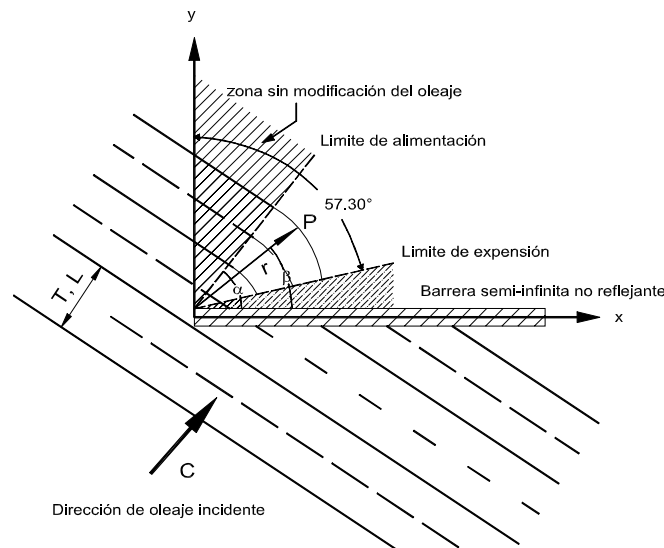


Figura II.4. Ángulos de interés para el cálculo de K_d y límites de alimentación y expansión (Wiegel)

Al incidir el oleaje en el morro de un rompeolas (obstáculo) existe una zona donde el oleaje no es modificado, limitada por el límite de alimentación y una línea ortogonal al frente de oleaje. La difracción del oleaje se presenta en la zona comprendida entre el límite de expansión y alimentación (figura II.4)..

El *límite de expansión* es un recta tangente al morro el cual forma un ángulo de 57°31' con la perpendicular a él mientras que el *límite de alimentación* queda definido por la línea tangente al morro, colineal a las ortogonales de la ola incidente (figura II.4).

II.3 REFLEXIÓN

Cuando una ola que no ha roto golpea con una barrera vertical su energía es parcialmente absorbida por la barrera, si ésta es porosa, mientras que la energía que no fue absorbida será reflejada, *reflexión*.

Bajo las condiciones ideales de que el obstáculo es vertical, plano y con rugosidad despreciable (liso) y además el frente de ola que incide en éste se dice que se produce una *reflexión perfecta* la cual se manifiesta por ondas estacionarias, clapotis. Para analizar este fenómeno se debe considerar la situación representada por la figura II.5.

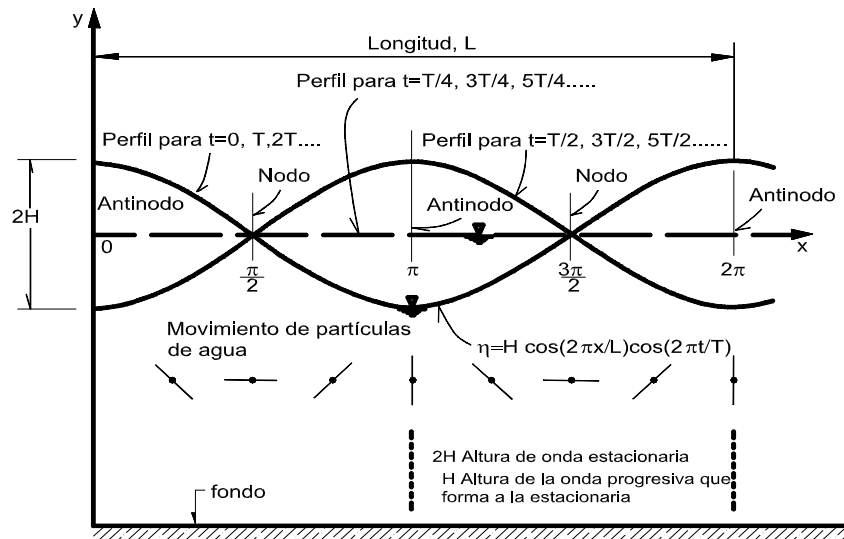


Figura II.5. Onda estacionaria (clapotis). Shore Protection Manual

En tal situación se presenta un oleaje que es interrumpido por la barrera, suponiendo que se cumple la teoría lineal éste se encontrará representado por la expresión;

$$\eta^+ = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) \tag{II.21}$$



Mientras que el oleaje reflejado se encontrará descrito por la expresión;

$$\eta^- = \frac{H}{2} \cos(kx + \omega t) \quad (II.22)$$

La única diferencia que existe entre las ecuaciones II.21 y II.22 es el signo del termino de tiempo el cual desfasa la función coseno.

Si sumamos las ecuaciones anteriores de acuerdo a la propiedad de superposición de la teoría lineal, resulta;

$$\begin{aligned} \eta &= \eta^+ + \eta^- \\ &= 2 \left(\frac{H}{2} \right) \cos(kx) \cos(\omega t) \\ &= \left(\frac{H_r}{2} \right) \cos(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (II.23)$$

La cual describe una *onda estacionaria* donde H_r es el doble de la altura de la ola incidente H . La onda estacionaria no tiene celeridad debido a que la celeridad del oleaje incidente y la reflejada se cancelan, sin embargo la longitud de onda L no se altera.

Este tipo de fenómeno es muy importante en el diseño de las áreas de navegación de un puerto ya que por la boca se introducen las olas difractadas que pueden ser reflejadas por muros y muelles provocándose el fenómeno de *resonancia* el cual puede afectar a las embarcaciones.

Para estimar la altura de la ola reflejada H_r se deberá conocer el coeficiente de reflexión, determinados algunos valores de éste para diferentes estructuras con pendientes del paramento variado, véase la tabla II.1.

$$K_r = \frac{H_r}{H} \quad (II.24)$$

donde; H_r es la altura de ola reflejada y H es la altura de ola incidente

Tabla II.1. Coeficientes de reflexión.

ESTRUCTURA	K_r
Muros verticales o cuasi-verticales	0.8-1
Estructuras con taludes	0.4-0.8
Estructuras con bloques de concreto	0.2-0.4
Terraplenes	0.3-0.5
Playas	0.1-0.2



Cabe mencionar que si el ángulo del oleaje incidente no es normal al paramente de un obstáculo éste será reflejado con un ángulo igual al incidente, véase la figura II.6.

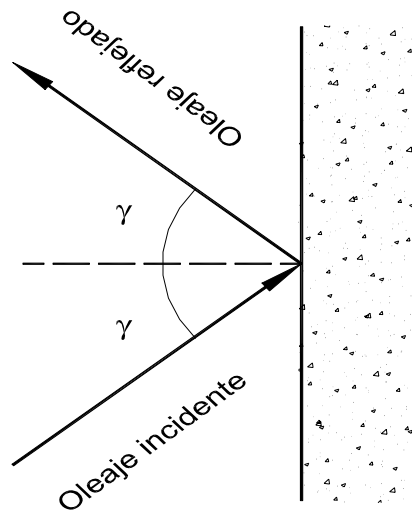


Figura II.6. Reflexión del oleaje.





CORRIENTES MARINAS CERCANAS A LA PLAYA

III.1 CORRIENTES MARINAS

Al desplazamiento de una masa de agua con velocidad y dirección es a lo que se le denomina *corrientes marinas*.

Algunos autores han dividido el estudio de las corrientes en *oceánicas*, *de marea* y *cercanas a la playa*. En este trabajo se comentarán algunos aspectos importantes de los dos primeros fenómenos dándole mayor énfasis a aquellas que se producen en la zona de resaca, corrientes cerca de la costa (*nearshore currents*).

Cabe hacer mención que la zona de resaca, *surf zone*, se encuentra comprendida entre la batimétrica cero y la línea de rompientes, *figura III.1*.

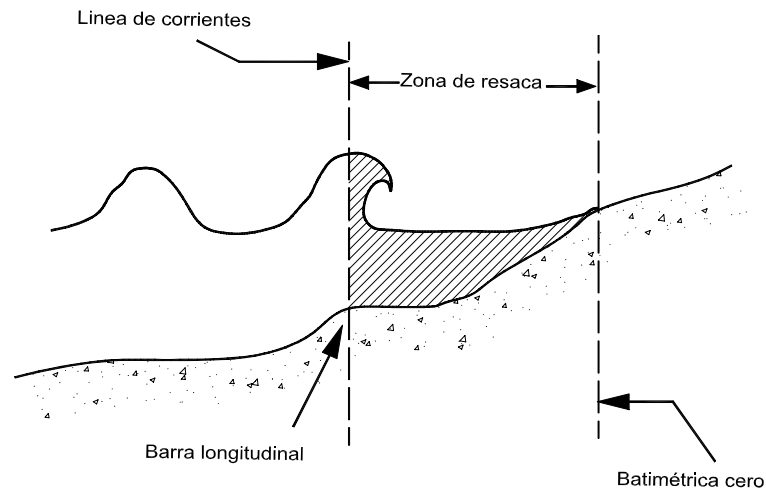


Figura III.1. Zona de resaca.



III.1.1 Corrientes oceánicas

En el océano existen corrientes de dirección y velocidad casi constante en el transcurso del año originadas principalmente por viento además de densidad de las masas de agua, la cual es función de la temperatura y salinidad de las mismas.

Este tipo de corrientes se clasifican como *corrientes de dirección*, *corrientes de gradiente o de densidad* y en *corrientes de compensación* de acuerdo a los mecanismos de generación

El viento arrastra las moléculas de agua superficiales quienes por rozamiento actúan sobre aquellas más profundas dependiendo de la intensidad y persistencia éste. La dirección de este tipo de corrientes coincide con lo llamados vientos alisios y contralisios logrando con ello identificar corrientes oceánicas en el globo terráqueo.

Por otro lado, de acuerdo a la temperatura de las masas de agua las corrientes se clasifican como calientes o frías basando su importancia fundamental en el hecho de que determinan ciertos comportamientos biológicos.

La influencia de las corrientes oceánicas sobre las regiones costeras es relativamente pequeña en comparación los otros dos tipos de corrientes.

III. 1.2 Corrientes por marea

Este tipo de corrientes ocasionalmente tienen un importante influencia en regiones cercanas a las costas principalmente donde la comunicación con el mar se encuentra relativamente restringida como lo es en estuarios, entradas a puertos, desembocaduras entre otras. Ellas se encuentran inducidas por los movimientos horizontales del agua debido al movimiento de la marea, por tal razón los periodos de estas corrientes corresponden a los periodos de las mareas, diurnas o semi-diurnas, dependiendo de la marea astronómica. Encontrándose subdivididas en:

- *Corrientes rotatorias*; Su rumbo cambia de acuerdo a la rosa de los vientos, en un u otro sentido, mientras progresa la marea.
- *Corrientes pendulares*; Se presenta cuando el sentido de la corriente cambia según el estado de la marea, *flujo* cuando ésta crece hacia adentro de la zona en estudio y *reflujo* cuando ésta desciende hacia mar adentro.
- *Corrientes hidráulicas*; Se presentan debido al represamiento de las aguas provocado por una especial configuración de la costa.



Sus características cambian de un lugar a otro debido a que dependen de la topografía de la costa, la configuración del fondo marino así como del tipo de marea, por lo que es recomendable hacer mediciones de campo para conocerlas.

III.2 CORRIENTES CERCANAS A LA PLAYA

En aguas poco profundas se lleva a cabo un movimiento de material suelto debido principalmente a este tipo de corrientes y al oleaje, por tal razón la importancia de las corrientes producidas por el oleaje radica fundamentalmente en el hecho de que son las que originan y regulan, en su mayor parte, el movimiento de los sedimentos costeros.

Este tipo de corrientes son función de diversos y complejos procesos que influyen en su formación, esquemáticamente la corriente resultante u puede expresarse como una superposición de las componentes interrelacionadas, es decir;

$$u = u_w + u_t + u_a + u_o + u_i \quad \text{III.1}$$

donde u_w es la corriente debido a la rompiente de la ola, u_t es la corriente por marea, u_a es la corriente causada por el viento, u_o y u_i son las corrientes oscilatorias debido al oleaje de viento y oleaje por infragravedad. Al movimiento de olas largas con periodos de 30 sec a varios minutos frecuentemente contribuyen con una porción substancial de energía en la zona de resaca, a este tipo de movimientos son llamados *oleaje por infragravedad (infragravity wave)*.

Siendo las corrientes locales debido a la rompiente y viento las que tienen mayor influencia en las corrientes totales cercanas a la zona de resaca en costas abiertas (Hubertz, 1986). Las corrientes debidas al oleaje y viento son importantes en el transporte y dispersión de sedimentos y contaminantes en la cercanía de la costa mientras que las corrientes de marea tienen su mayor influencia en bahías, estuarios.

D. W. Johnson en su tratado estableció la existencia de corrientes paralelas a la costa y de resaca o retorno como aquellas inducidas por el oleaje, siendo éstas el medio del transporte litoral de sedimento. En el mismo libro externó la importancia del fenómeno de transporte de masa derivado de la teoría del oleaje de amplitud finita para comprender la generación de corrientes a lo largo de la línea de costa y de resaca.

En 1950, Inman y Shepard realizaron observaciones de campo en la costa frente al Instituto de Oceanografía de la Universidad de California, de dichas observaciones propusieron el concepto de *Sistema de corrientes cercanas a la playa (figura III.2)*.

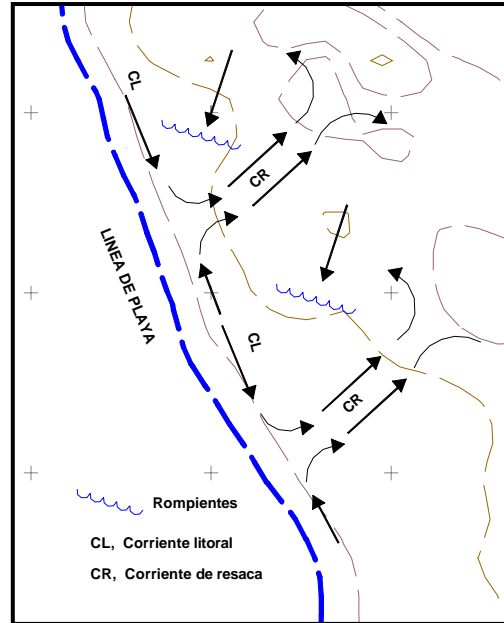


Figura III. 2 Sistema de circulación de corrientes cercanas a la playa

El esquema de la *figura III.2* está constituido por dos tipos de corrientes, una de ellas aproximadamente paralela a la playa y con el mismo sentido del oleaje llamada corriente litoral (*longshore current*) y la segunda dirigida hacia el mar cuasi-normal a la playa conocida como corriente de resaca (*rip current*). Esta última avanza hasta una zona mar adentro en donde se dispersa y vuelve hacia la playa arrastrada por la ola mientras que aún cuando la corriente litoral tiene pequeñas componentes en sentido contrario ésta presenta una tendencia principal.

El 1961, Longhet-Higgins y Stewart introdujeron el concepto de *esfuerzos de radiación* y lo aplicaron para analizar varios problemas del oleaje tales como la interacción oleaje-corrientes. Desde finales de los 60's la aplicación del concepto de esfuerzos de radiación ha sido extendido a fenómenos como corrientes de resaca, corrientes a lo largo y cercanas a la costa entre otras.

III.3 ESFUERZOS DE RADIACIÓN

La superficie del agua induce un momentum M en la dirección de la propagación del oleaje, cuyo valor está dado por;

$$M = \frac{1}{2} \rho a^2 \sigma \coth kh = \frac{\bar{E}}{c} \quad \text{III.2}$$

donde ρ es la densidad del agua del mar, $a = H/2$ es la amplitud de la ola, σ la frecuencia angular, T el periodo, h la profundidad del agua, k el número de ola, L es la



longitud de onda a cierta profundidad, C la celeridad a la profundidad dada y \bar{E} es la energía total de la ola por unidad de área. Cuando la propagación de un tren de olas se ve interrumpido por un obstáculo o por la rompiente de la misma, ésta se refracta en la superficie del obstáculo, ocasionando que la dirección del momentum sea cambiado. Por este medio el oleaje induce una fuerza hidrodinámica sobre el obstáculo cuya magnitud es igual a la razón de cambio del momentum y explicada en términos de esfuerzo de radiación, el cual es dimensionalmente equivalente al flujo de momento y esta definido el exceso de flujo de momento inducido por la existencia del movimiento de la ola.

Esfuerzos que se encuentran descritos por las siguientes expresiones matemáticas, las cuales se comentaran con más detalle en el capítulo IV.2.3.2.

$$S_{xx} = \bar{E} \left(n \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad III.3$$

$$S_{xy} = \bar{E} \left(\frac{1}{2} n \operatorname{sen} 2\theta \right) \quad III.4$$

$$S_{yy} = \bar{E} \left(n \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad III.5$$

donde θ representa la dirección de propagación del oleaje, ángulo de avance de las olas respecto al eje x y \bar{E} es la energía del oleaje (ec. II.10), es decir;

$$\bar{E} = \rho g \frac{H^2}{8} \quad III.6$$

n es el factor de grupo expresado por la ecuación (II.11):

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad III.7$$





Capítulo
IV
MODELO MATEMÁTICO PARA
EL CÁLCULO DE
CORRIENTES MARINAS
INDUCIDAS POR EL OLEAJE

IV. 1 HISTORIA DEL ARTE

Cuando el oleaje rompe y pasa a la *zona de resaca* “surf” (figura IV. 1) se inducen corrientes marinas a lo largo y perpendicular a la línea de costa, además el nivel medio del mar sufre una modificación en su elevación.

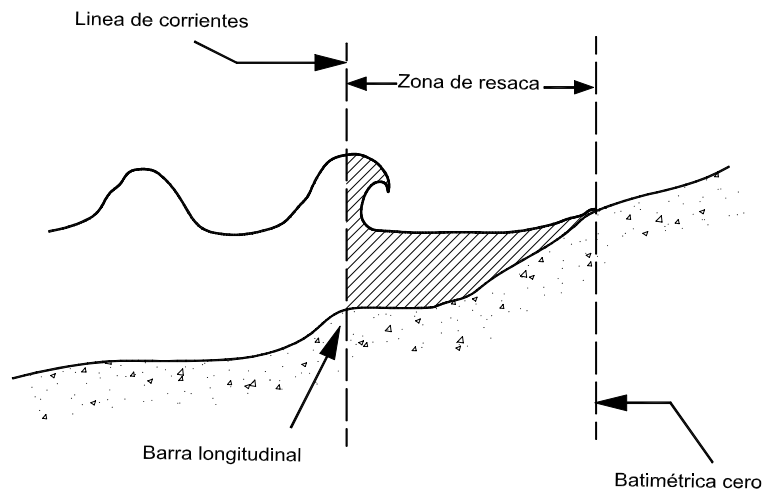


Figura VI.1. Zona de resaca.



Se ha demostrado que la distribución de velocidades en el plano vertical no es uniforme y dada la dificultad para tratar este fenómeno se han desarrollado modelos en dos dimensiones (2-D) los cuales están regidos por tres ecuaciones fundamentales; ecuación de continuidad y las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento. En ellas está implícito el oleaje. Las ecuaciones mencionadas son las siguientes (Coastal Engineering Manual).

$$\frac{\partial(Ud)}{\partial x} + \frac{\partial(Vd)}{\partial y} = 0 \quad IV.1$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} + F_{bx} + L_x + R_{bx} + R_{sx} \quad IV.2$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} + F_{by} + L_y + R_{by} + R_{sy} \quad IV.3$$

donde

U es la velocidad promedio de la corriente transversal a la línea de costa.

V es la velocidad promedio de la corriente paralela a la línea de costa.

F_{bx}, F_{by} son los componentes de la fricción de fondo, transversal y paralela a la costa.

R_{bx}, R_{by} son los componentes de la fuerza debido al oleaje, transversal y paralelo a la costa.

R_{sx}, R_{sy} son los componentes de la fuerza inducida por el viento, transversal y paralelo a la costa.

Estas ecuaciones consideran la influencia del oleaje y el viento, gradiente de presión debido al variación del nivel medio del mar, fricción del fondo y el mezclado lateral de la corriente.

Birkemeir y Dalrymple (1975) presentaron un modelo numérico en dos dimensiones, el cual usa las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento además está en función de las velocidades medias horizontales (U, V) y el nivel medio de la superficie libre de desplazamiento $\bar{\eta}$. Las ecuaciones generales son:



$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial(Ud)}{\partial x} + \frac{\partial(Vd)}{\partial y} = 0 \quad IV.4$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\rho d} \left[\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \tau_{bx} - \tau_{sx} \right] \quad IV.5$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\rho d} \left[\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \tau_{by} - \tau_{sy} \right] \quad IV.6$$

donde;

$\bar{\eta}$ es la elevación de la superficie media del agua debido a ascenso y descenso del oleaje.

h es la profundidad del sitio sin considerar el efecto del oleaje.

$d = h + \bar{\eta}$ es la profundidad total

τ_{by}, τ_{sy} son los esfuerzos cortantes en la dirección x e y

S_{xx}, S_{xy} son los componentes de los esfuerzos de radiación.

ρ es la densidad del agua de mar

En este modelo se hace uso del concepto de esfuerzos de radiación. Para solucionar dichas ecuaciones se empleó un esquema numérico de diferencias finitas sin embargo, no consideran los términos de aceleraciones convectivas no lineales y mezclado lateral.

Otro modelo en dos dimensiones desarrollado para estimar las corrientes marinas fue el propuesto por Ebersole y Dalrymple en el año de 1980 el cual considera las aceleraciones convectivas no lineales y el mezclado lateral cuyas ecuaciones fundamentales son las siguientes:

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial(Ud)}{\partial x} + \frac{\partial(Vd)}{\partial y} = 0 \quad IV.7$$

$$\frac{\partial(Ud)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U^2d) + \frac{\partial}{\partial y}(UVd) = -gd \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left[\tau_{bx} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + d \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right] \quad IV.8$$

$$\frac{\partial(Vd)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(UVd) + \frac{\partial}{\partial y}(V^2d) = -gd \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left[\tau_y + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + d \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \right] \quad IV.9$$

Las variables que están involucradas en las ecuaciones anteriores son las mismas que las del modelo anterior.



Al igual que el modelo anterior se emplearon los concepto de esfuerzos de radiación la solución de las ecuaciones fue mediante un esquema numérico en diferencias finitas.

En 1982 Watanabe presentó un modelo numérico para simular las corrientes marinas y en 1985 Watanabe y Maruyama resolvieron las ecuaciones del esfuerzo de radiación y fricción de fondo empleando la ecuación de pendiente suave la cual considera la variable tiempo. En 1988 introdujo las ecuaciones fundamentales y el esquema numérico para conocer las corrientes inducidas por el oleaje.

La ecuación de continuidad esta dada por la expresión IV.7 mientras que las ecuaciones de movimiento del agua están descritas por las siguientes ecuaciones;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + F_x - M_x + R_x + g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = 0 \tag{IV.10}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + F_y - M_y + R_y + g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} = 0 \tag{IV.11}$$

donde

- R son los esfuerzos de radiación en las direcciones x y y
- F es la fricción de fondo en las direcciones x y y
- M es la mezcla lateral de masa de agua en las direcciones x y y

Este modelo considera los términos de esfuerzos de radiación así como la fricción de fondo, el cual se soluciona por medio de un esquema numérico en diferencias finitas explícitas.

En general, los modelos de cálculo de corrientes marinas inducidas por el oleaje están en función de los esfuerzos de radiación, fricción de fondo y del mezclado lateral.

IV.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LAS CORRIENTES

Aunque el oleaje de la teoría lineal no origina transporte de masa, sin embargo, desarrolla una variación espacial de la cantidad de movimiento que da lugar a corrientes y cambios de la elevación media del mar.

Para encontrar las ecuaciones básicas de las corrientes mediante la teoría lineal se requieren de varias hipótesis y de establecer algunas condiciones de frontera.



IV.3.1 HIPÓTESIS

- a) El flujo es potencial, por ello la velocidad se plantea en términos de la función potencial ϕ como;

$$v = \nabla \phi \quad IV.12$$

- b) Los términos cuadráticos de velocidad son pequeños. Por lo tanto;

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0 \quad IV.13$$

- c) El componente de la velocidad vertical en el fondo del mar es nula

$$(w)_{z=-h} = 0 \quad IV.14$$

- d) Debido al carácter oscilatorio del oleaje, la elevación de la superficie libre se puede escribir como una función periódica del tipo;

$$\zeta = a \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) \quad IV.15$$

donde;

$$k_x = k \cos \alpha$$

$$k_y = k \sin \alpha$$

α representa la dirección de avance del oleaje (figura IV.2), σ corresponde a la frecuencia angular.

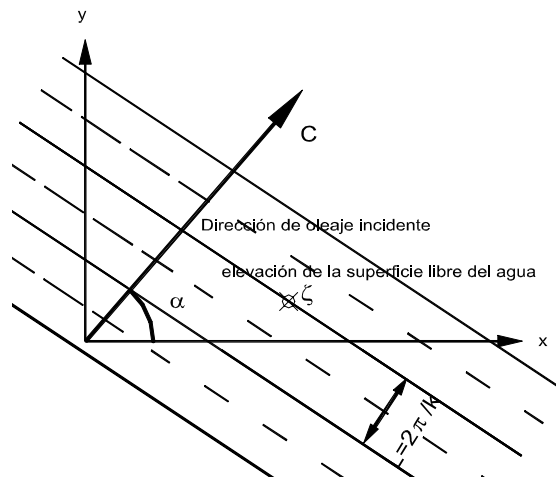


Figura IV.2 Propagación de la ola en la dirección α



e) La función ϕ varía cíclicamente la cual se expresa en la forma siguiente

$$\phi = \phi(x, y, z, t) = Z(z)f(x, y, t) \quad IV.16$$

donde;

$$f(x, y, t) = \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t)$$

IV.2.2 CONDICIONES DE FRONTERA

Para encontrar el potencial ϕ y la presión p que cumplen con las ecuaciones de Laplace y la ecuación de Bernoulli se requieren de tres condiciones de frontera; *condición de fondo*, *condición cinemática para la superficie libre* y *condición dinámica para la superficie libre*.

IV.2.2.1 Condición de fondo

Para dicha condición se considera que el fondo marino se encuentra en función de x y y , es decir;

$$z = -h(x, y) \quad IV.17$$

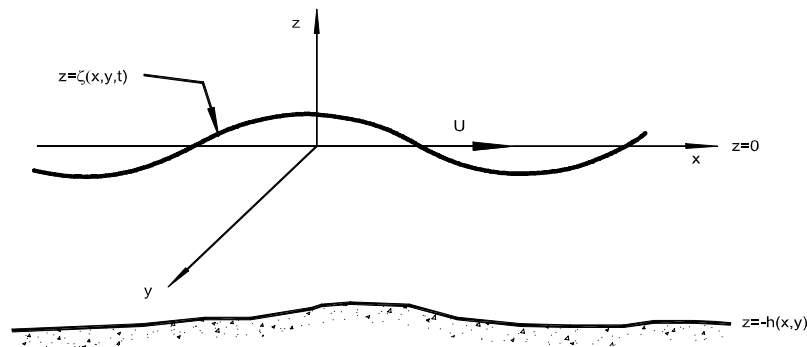


Figura IV.3 Condiciones de frontera en la superficie libre y en el fondo.

Considerando a b como la profundidad a partir del nivel medio del mar más la sobre elevación debida al oleaje, dada por;

$$b = h(x, y) + z \quad IV.18$$

Expresión que considera la sobre elevación debida al oleaje, cuya derivada total respecto a t es igual a;

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$



o bien;

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x}u + \frac{\partial b}{\partial y}v + \frac{\partial b}{\partial z}w$$

ecuación que al escribir las velocidades en términos de la función potencial resulta ser;

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

que al considerar la ecuación IV.18 se obtiene;

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{IV.19}$$

dado que $\frac{db}{dt} = 0$ y $\frac{\partial b}{\partial z} = 1$. La ecuación IV.45 es válida para $z = -h(x, y)$.

IV.2.2.2 Condición cinemática para la superficie libre del agua

Para la superficie libre, figura IV.3, se propone;

$$z = \zeta(x, y, t)$$

cuya derivada total respecto a t es;

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \tag{IV.20}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{IV.21}$$

valida para $z = \zeta(x, y, t)$

IV.2.2.3 Condición dinámica para la superficie libre del agua

Se encuentra descrita por la ecuación de Bernoulli, donde para la superficie libre resulta que $p = 0$ y $z = \zeta$ de tal forma que se encuentra definida por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi \cdot \nabla \phi) + g\zeta = 0 \tag{IV.22}$$



IV.2.3 ECUACIONES QUE DESCRIBEN LAS CORRIENTES MARINAS

Para encontrar las ecuaciones fundamentales que describen las corrientes que se inducen debido al oleaje se debe apoyar de dos ecuaciones fundamentales que describen el movimiento de los fluidos como lo son: La *ecuación de conservación de masa* (ecuación de continuidad) y la *ecuación de cantidad de movimiento* las cuales deben ser integradas respecto a la profundidad.

Para ello se considera la regla de Leibnitz (Protter y Morrey, 1964) para la derivada bajo el signo de la integral, la cual establece que para una función $f(z, \alpha)$ y $-h \leq \alpha \leq \zeta$ se cumple;

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-h}^{\zeta} f dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dz + f(\zeta, \alpha) \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - f(-h, \alpha) \frac{\partial h}{\partial \alpha} \quad IV.23$$

IV.2.3.1. ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA

Al considerar que q es un escalar y que además es igual a 1 se obtiene la expresión para el balance de masa (*Ecuación de continuidad*) Cuando no existe creación o destrucción de masa dentro del volumen de control.

$$\nabla \cdot (\rho q) v + \frac{\partial}{\partial t} (\rho q) = 0$$

si $q = 1$, entonces;

$$\nabla \cdot (\rho) v + \frac{\partial}{\partial t} (\rho) = 0 \quad IV.24$$

Al desarrollar el operador nabra en coordenadas cartesianas se puede escribir;

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v + \frac{\partial}{\partial z} \rho w + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \quad IV.25$$

A continuación se integra la ecuación anterior con respecto a la profundidad resulta;

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \rho w dz = 0 \quad IV.26$$



Desarrollando la integral del cuarto sumando resulta;

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz + \rho w_{z=\zeta} - \rho w_{z=-h} = 0 \quad IV.27$$

Ahora aplicando la regla de Leibnitz a cada uno de los sumandos de la ecuación anterior se obtiene;

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho dz - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho (\zeta - (-h)) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \rho (\zeta + h) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad IV.28$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \rho u dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad IV.29$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \rho v dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz - \rho v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \rho v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad IV.30$$

donde;

$u_{z=\zeta}$ es la velocidad en la dirección x en la superficie libre

$v_{z=\zeta}$ es la velocidad en la dirección y en la superficie libre

$u_{z=-h}$ es la velocidad en la dirección x en el fondo del mar

$v_{z=-h}$ es la velocidad en la dirección y en el fondo del mar

Considerando las condiciones de frontera para el fondo y cinemáticas de la superficie libre, véase el apartado IV.2.2.1

$$\frac{\partial h}{\partial x} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{d\phi}{dy} + \frac{d\phi}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

las cuales se pueden escribir de la siguiente manera;

$$w_{z=-h} = -u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad IV.31$$



$$w_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad IV.32$$

Sustituyendo las ecuaciones IV.28 a la IV.32 en la ecuación IV.27 resulta;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h) - \rho \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz - \rho v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \rho v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \\ \rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \rho \left(-u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad IV.33$$

Simplificando;

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz = 0 \quad IV.34$$

El interés que atañe es el valor promedio en el tiempo, se considera dicho promedio para cada término de la expresión anterior la cual se expresa de la siguiente manera;

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho v dz} = 0 \quad IV.35$$

Se considerará que las velocidades u y v representan una velocidad media de flujo U y V más una debida al oleaje u' y v' es decir;

$$u = U + u' \quad IV.36$$

$$v = V + v' \quad IV.37$$

Sustituyendo dichas velocidades en la ecuación IV.35 se tiene;

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} \rho(U + u') dz} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} \rho(V + v') dz} = 0 \quad IV.38$$

Para obtener los valores promedio también se emplea la regla de Leibnitz, solo que ahora las derivadas de los límites de integración son nulas, ya que la del período T respecto a t es cero, y por lo tanto en este caso equivale a intercambiar los operadores derivada e integral.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \rho(\zeta + h) dt = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\zeta + h) dt = \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) \quad IV.39$$



Se debe notar que debido a la corriente y al oleaje el promedio temporal de $\bar{\zeta}$ no es nulo.

$$\begin{aligned} \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho(U + u') dz} &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho(U + u') dz dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho(U) dz dt + \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho(u') dz dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho U (\bar{\zeta} + h) dt + \int_0^T \int_{-h}^{\zeta} \rho(u') dz dt \end{aligned}$$

dadas las condiciones cinemáticas de las velocidades media del flujo de corriente y de la debida al oleaje la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma;

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho(U + u') dz} = \rho U (\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} \quad IV.40$$

Realizando un análisis similar para la dirección y se obtiene la siguiente expresión;

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho(V + v') dz} = \rho V (\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho v' dz} \quad IV.41$$

Las ecuaciones IV.40 y IV.41 permiten calcular el flujo de masa por unidad de ancho tanto en la dirección x como en la y .

Por otro lado la ecuación IV.40 se puede escribir de la siguiente manera;

$$\tilde{M}_x = \hat{M}_x + M_x \quad IV.42$$

donde;

$$\tilde{M}_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho(U + u') dz} \quad IV.42-a$$

$$\hat{M}_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho U dz} = \rho U (\bar{\zeta} + h) \quad IV.42-b$$

$$M_x = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} \quad IV.42-c$$

Análogamente la ecuación IV.41 se puede escribir;

$$\tilde{M}_y = \hat{M}_y + M_y \quad IV.43$$

donde;



$$\tilde{M}_y = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho(V + v') dz \quad IV.43-a$$

$$\hat{M}_y = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho V dz = \rho V(\bar{\zeta} + h) \quad IV.43-b$$

$$M_y = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} \rho v' dz \quad IV.43-c$$

Al sustituir las ecuaciones IV.39, IV.42 y IV.43 en la ecuación IV.38 se obtiene,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{M}_x + M_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\hat{M}_y + M_y) = 0} \quad IV.44$$

La ecuación anterior corresponde a la ecuación de conservación de la masa (continuidad) integrada en la vertical.

Cuando se expresa al valor medio con la profundidad de $(U + u)'$ y $(V + v)'$ como \tilde{U} y \tilde{V} respectivamente, por lo que si se sustituyen en la ecuación IV.42-a y IV.43-a se obtiene que,

$$\tilde{M}_x = \rho \tilde{U}(\bar{\zeta} + h) \quad IV.45$$

$$\tilde{M}_y = \rho \tilde{V}(\bar{\zeta} + h) \quad IV.46$$

Al sustituir las ecuaciones IV.42-b y IV.43-b en las expresiones IV.42 y IV.43, luego de ordenar los términos se obtiene;

$$\tilde{U} = U + M_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad IV.47$$

$$\tilde{V} = V + M_y / [\rho(\bar{\zeta} + h)] \quad IV.48$$

Donde las literales M representan la masa que atraviesa una sección transversal de ancho unitario en la unidad de tiempo o bien, corresponde a un flujo de masa por unidad de ancho.



IV.2.3.2 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Para este análisis considérese las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en dos direcciones x y y cuya función potencial es $\Omega = -gz$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad IV.49$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad IV.50$$

La ecuación IV.49 puede ser escrita de una forma similar si se considera que;

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Reacomodando

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad IV.51$$

De acuerdo a la ecuación de continuidad para un flujo incompresible;

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = 0$$

El cuarto sumando es nulo, por lo que resulta;

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad IV.52$$

Se multiplica la ecuación anterior por ρ y sustituir dicha expresión en la ecuación IV.49 así como factorizar se obtiene finalmente;

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw) = 0} \quad IV.53$$

Del mismo modo que se realizó este procedimiento se dedujo para la ecuación IV.50, la cual se muestra a continuación;

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (p + \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho vw) = 0} \quad IV.54$$



Cabe destacar que el primer sumando de las ecuaciones IV.53 y IV.54 representan el cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento en las direcciones x y y

Ecuaciones que deben ser integradas con respecto a la profundidad, por lo que a continuación se integra la ecuación IV.53 con respecto a z .

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\rho uw) dz = 0 \quad IV.55$$

Desarrollando la cuarta integral resulta;

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho u dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) dz + \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) dz + \rho u_{z=\zeta} w_{z=\zeta} - \rho u_{z=-h} w_{z=-h} = 0 \quad IV.56$$

Apoyándose de la regla de Leibnitz se integran cada una de las integrales anteriores, esto es;

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} \rho u dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial t} \quad IV.57$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz - (p_{z=\zeta} + \rho u^2_{z=\zeta}) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (p_{z=-h} + \rho u^2_{z=-h}) \frac{\partial h}{\partial x}$$

La ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión (IV.58), considerando que la presión en la superficie libre del agua es cero, es decir $p_{z=\zeta} = 0$, dado que solo se considera presión hidrostática.

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho u^2) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz - \rho u^2_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (p_{z=-h} + \rho u^2_{z=-h}) \frac{\partial h}{\partial x} \quad IV.58$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz - \rho (uv)_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \rho (uv)_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} \quad IV.59$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones IV.57 a la IV.58 en la ecuación IV.56 se obtiene;

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz - \rho u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \rho u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz - \rho u^2_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (p_{z=-h} + \rho u^2_{z=-h}) \frac{\partial h}{\partial x} +$$



$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz - \rho(uv)_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \rho(uv)_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} + \rho u_{z=\zeta} w_{z=\zeta} - \rho u_{z=-h} w_{z=-h} = 0 \quad IV.60$$

La ecuación IV.60 se puede escribir de la siguiente forma después de reacomodar cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz + \rho u_{z=\zeta} \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial t} - u_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w_{z=\zeta} \right) + \\ + p_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho u_{z=-h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial y} - w_{z=-h} \right) = 0 \end{aligned} \quad IV.61$$

Retomando las condiciones de frontera para el fondo y cinemáticas para la superficie libre del agua, ecuaciones IV.31 y IV.32 la ecuación anterior resulta;

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p + \rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz + p_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0} \quad IV.62$$

Cabe mencionar que la primera integral de la ecuación anterior corresponde al cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento unitario en la dirección x integrada en la vertical.

Debido al cambio de posición en el tiempo con respecto al eje z de la superficie libre del agua en un punto dado se considera un valor promedio en el tiempo de la presión en el fondo, quien se puede calcular de acuerdo a la siguiente ecuación;

$$\bar{p}_{z=-h} = \rho g(\bar{\zeta} + h) \quad IV.63$$

de modo que;

$$\bar{p}_{z=-h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 \right) - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad IV.64$$

Al considerar el valor promedio en el tiempo de las integrales de la ecuación IV.62 y además sustituyendo la ecuación IV.63 en ésta, finalmente resulta:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\zeta} \rho u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (p) dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\zeta} (\rho u^2) dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 \right) - \rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = 0} \quad IV.65$$



Donde el primer sumando representa al cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento unitario promedio integrada en la vertical.

Ya antes se había comentado que si se considera que las velocidades u y v corresponden a la velocidad de la corriente más la formada por el oleaje, véase las ecuaciones IV.36 y IV.37, las integrales de la ecuación IV.65 se pueden escribir de la siguiente manera;

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (U + u') dz} = \rho U (\bar{\zeta} + h) + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} \quad IV.66$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u^2) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho (u' + U)^2) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho (u')^2) dz} + 2U \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho (u')^2) dz} + \rho U^2 (\bar{\zeta} + h) \quad IV.67$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho (u' + U)(v' + V) dz}$$

desarrollando los paréntesis se tiene;

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' v' dz} + V \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz} + U \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho v' dz} + UV \rho (\bar{\zeta} + h) \quad IV.68$$

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente manera al considerar las ecuaciones IV.40, IV.42-c y IV.43-c

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u dz} = \tilde{M}_x \quad IV.69$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u^2) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho (u')^2) dz} + 2UM_x + \rho U^2 (\bar{\zeta} + h) \quad IV.70$$

$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' v' dz} + VM_x + UM_y + UV \rho (\bar{\zeta} + h) \quad IV.71$$

por otro lado los dos últimos sumandos de la ecuación IV.70 se puede escribir de la siguiente manera;

$$\rho U^2 (\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = UU \rho (\bar{\zeta} + h) + 2UM_x \quad IV.72$$



Dada la ecuación IV.47 la ecuación anterior se puede escribir;

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = (\tilde{U} - M_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)])U\rho(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x \quad IV.73$$

Ecuación que puede ser escrita de la siguiente manera de acuerdo a las ecuaciones IV.42-b y IV.42

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = (\tilde{U} - M_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)])(\tilde{M}_x - M_x) + 2UM_x$$

Desarrollando los paréntesis de la ecuación anterior resulta;

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \tilde{U}\tilde{M}_x - M_x\tilde{M}_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)] - \tilde{U}M_x - M_x^2 / [\rho(\bar{\zeta} + h)] + 2UM_x$$

Sustituyendo \tilde{U} dada por la ecuación IV.47 y U mediante las ecuaciones IV.42 y IV.42-b se obtiene;

$$\begin{aligned} \rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \tilde{U}\tilde{M}_x - M_x\tilde{M}_x / [\rho(\bar{\zeta} + h)] - \frac{\tilde{M}_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)}M_x + \frac{M_x^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)}M_x + \\ + 2\left(\frac{\tilde{M}_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)} - \frac{M_x}{\rho(\bar{\zeta} + h)}\right)M_x \end{aligned}$$

La cual finalmente simplificando resulta;

$$\rho U^2(\bar{\zeta} + h) + 2UM_x = \rho\tilde{U}\tilde{M}_x - \frac{M_x^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.74$$

Por otra parte, de la ecuación IV.71 se tiene la siguiente igualdad;

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = U(\rho V(\bar{\zeta} + h) + M_y) + VM_x$$

De la cual realizando un análisis semejante así como reduciendo y ordenando términos se obtiene finalmente;

$$VM_x + UM_y + UV\rho(\bar{\zeta} + h) = \tilde{U}\tilde{M}_y - \frac{M_x M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.75$$

Al sustituir las ecuaciones IV.74 y IV.75 en las ecuaciones IV.70 y IV.71 respectivamente se obtienen las siguientes ecuaciones;

$$\int_{-h}^{\bar{\zeta}} (\rho u^2) dz = \int_{-h}^{\bar{\zeta}} (\rho (u')^2) dz + \tilde{U}\tilde{M}_x - \frac{M_x^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.76$$



$$\overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho uv) dz} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} + \tilde{U}\tilde{M}_y - \frac{M_x M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.77$$

Sustituyendo las ecuaciones IV.69, IV.76 y IV.77 en la ecuación IV.65

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{U}\tilde{M}_x + \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u'^2 + p) dz} - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_x^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{U}\tilde{M}_y + \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} - \frac{M_x M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \right] = -\rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \end{aligned} \quad IV.78$$

Cuya ecuación puede ser escrita de forma abreviada de la siguiente manera;

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{U}\tilde{M}_x + S_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{U}\tilde{M}_y + S_{xy}) = T_x \quad IV.79$$

donde;

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho u'^2 + p) dz} - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_x^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.80$$

$$S_{xy} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u'v' dz} - \frac{M_x M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.81$$

$$T_x = -\rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} \quad IV.82$$

El producto $\tilde{U}\tilde{M}_x$ es una velocidad multiplicada por un flujo de masa por unidad de ancho, por otro lado si se realiza el análisis dimensional del producto anterior se demostraría que corresponde a un esfuerzo por unidad de ancho, por lo que los términos S_{xx} y S_{xy} son conocidos como **esfuerzos de radiación**, los cuales se encuentran relacionados con el flujo de cantidad de movimiento.

De acuerdo a la idea anterior donde cada uno de los sumandos de la ecuación IV.79 corresponden a un esfuerzo, se considera que la acción del viento sobre la superficie libre del agua agrega el esfuerzo tangencial τ_{vx} y además que el rozamiento con el fondo del mar causa un esfuerzo τ_{fx} que se opone al movimiento, por tal razón a éste de le antecede un signo negativo, por lo que la ecuación IV.54 queda;



$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_x + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{U} \tilde{M}_x + S_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{U} \tilde{M}_y + S_{xy}) = T_x + \tau_{vx} - \tau_{fx} \quad IV.83$$

Al realizar un análisis similar para la ecuación IV.54, el cual representa el análisis en la dirección del eje y se obtiene;

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_y + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{V} \tilde{M}_x + S_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{V} \tilde{M}_y + S_{yy}) = T_y \quad IV.84$$

donde;

$$S_{yx} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} \rho u' v' dz} - \frac{M_x M_y}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.85$$

$$S_{yy} = \overline{\int_{-h}^{\zeta} (\rho v'^2 + p) dz} - \frac{1}{2} \rho g (\bar{\zeta} + h)^2 - \frac{M_y^2}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \quad IV.86$$

$$T_y = -\rho g (\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} \quad IV.87$$

Como en el caso de la dirección x se considerarán las acciones del fondo τ_{fy} y viento τ_{vy} para esta dirección de tal forma que la ecuación IV.84 resulta ser finalmente;

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_y + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{V} \tilde{M}_x + S_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{V} \tilde{M}_y + S_{yy}) = T_y + \tau_{vy} - \tau_{fy} \quad IV.88$$

Los términos T_x y T_y físicamente representan a la fuerza horizontal por unidad de área que levanta la superficie libre del agua $\bar{\zeta}$, nótese que de acuerdo a las ecuaciones IV.81 y IV.86 $S_{xy} = S_{yx}$.

Las ecuaciones IV.83 y IV.88 representan el balance total de cantidad de movimiento por unidad de área.

Si se sustituyen las ecuaciones de la presión y de la velocidad orbital de las partículas de la teoría lineal en las ecuaciones IV.80 a la IV.82 se obtiene;

$$S_{xx} = \bar{E} \left(n \cos^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad IV.89$$

$$S_{xy} = \bar{E} \left(\frac{1}{2} n \operatorname{sen} 2\theta \right) \quad IV.90$$



$$S_{yy} = \bar{E} \left(n \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{2} (2n - 1) \right) \quad IV.91$$

donde θ representa la dirección de propagación del oleaje, ángulo de avance de las olas respecto al eje x y \bar{E} es la energía del oleaje, es decir;

$$\bar{E} = \rho g \frac{H^2}{8} \quad IV.92$$

n es el factor de grupo expresado por la siguiente ecuación;

$$n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{senh} 2kh} \right) \quad IV.93$$

El viento que actúa alrededor de 10 m sobre la superficie libre del agua con componentes W_x y W_y ejercen una fuerza de fricción en ambas direcciones (Safaie, 1984) las cuales pueden ser estimados mediante las siguientes ecuaciones;

$$\tau_{vx} = \rho k W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad IV.94$$

$$\tau_{vy} = \rho k W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad IV.95$$

donde k es un coeficiente de fricción del orden de 0.01

Por otro lado, el esfuerzo cortante debido a la fricción del fondo puede ser aproximado en términos del coeficiente C de la fórmula de Chezy de la siguiente forma;

$$\tau_{fx} = \rho \frac{g}{C^2} U \sqrt{U^2 + V^2} \quad IV.96$$

$$\tau_{fy} = \rho \frac{g}{C^2} V \sqrt{U^2 + V^2} \quad IV.97$$

IV.2.4 ECUACIONES DE MOVIMIENTO BASADAS EN LA TEORÍA LINEAL

Cuando se emplean algunos términos y definiciones de la teoría lineal se tiene la ventaja de hacer algunos términos nulos de las ecuaciones de movimiento, finalidad que se persigue y se muestra a continuación.

Por lo que;



$$M_x = \int_{-h}^{\zeta} \rho u' dz \quad IV.98$$

donde u' es la componente vertical de la velocidad orbital de las partículas de agua. De acuerdo con la definición de promedio temporal y tomando en cuenta a u' se obtiene;

$$M_x = \frac{1}{T} \frac{\rho g k_x a}{\sigma \cosh(kh)} \int_{-h}^{\zeta} \cosh(k(z+h)) dz \int_0^T \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) dt$$

puesto que;

$$\int_0^T \cos(k_x x + k_y y - \sigma t) dt = - \left[\frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y - \sigma t) \right]_0^T =$$

$$= - \frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y - 2\pi) + \frac{1}{\sigma} \text{sen}(k_x x + k_y y) = 0$$

Del resultado anterior se deduce que;

$$M_x = 0 \quad IV.99$$

de manera similar resulta que;

$$M_y = 0 \quad IV.100$$

Por lo que de las ecuaciones IV.47 y IV.48 se puede establecer las siguientes igualdades;

$$\tilde{U} = U \quad IV.101$$

$$\tilde{V} = V \quad IV.102$$

Por lo que las ecuaciones IV.45 y IV.46 resultan se escritas de la siguiente forma;

$$\tilde{M}_x = \rho U (\bar{\zeta} + h) \quad IV.103$$

$$\tilde{M}_y = \rho V (\bar{\zeta} + h) \quad IV.104$$

Ahora, si se sustituyen las ecuaciones IV.99, IV.100, IV.103 y IV.104 en la ecuación IV.44 se obtiene;

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho (\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} \rho U (\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial y} \rho V (\bar{\zeta} + h) = 0 \quad IV.105$$

Considerando flujo incompresible y que la profundidad h no cambia con el tiempo, se obtiene que;



$$\boxed{\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} U(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial y} V(\bar{\zeta} + h) = 0} \quad IV.106$$

Ecuación de continuidad que se aplica en el modelo matemático de corrientes marinas inducidas por el oleaje.

Al sustituir las ecuaciones IV.47, IV.82, IV.99 y IV.103 en la ecuación IV.83 se obtiene;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho U(\bar{\zeta} + h) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho U U(\bar{\zeta} + h) + S_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho U V(\bar{\zeta} + h) + S_{xy}] + \\ + \rho g(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \tau_{vx} - \tau_{fx} \end{aligned} \quad IV.107$$

desarrollando la primera deriva parcial de la ecuación anterior resulta;

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho U(\bar{\zeta} + h) = U \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + \rho(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial U}{\partial t}$$

Al sustituir la ecuación anterior en la ecuación IV.107 y además desarrollando la segunda y tercera deriva de ésta resulta;

$$\begin{aligned} U \frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{\zeta} + h) + U \frac{\partial}{\partial x} \rho U(\bar{\zeta} + h) + U \frac{\partial}{\partial y} \rho V(\bar{\zeta} + h) + \rho(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial U}{\partial t} + \rho(\bar{\zeta} + h) U \frac{\partial U}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} S_{xx} + \rho(\bar{\zeta} + h) U \frac{\partial}{\partial y} V + \frac{\partial}{\partial y} S_{xy} + \rho g(\bar{\zeta} + h) \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} = \tau_{vx} - \tau_{fx} \end{aligned}$$

Nótese que los tres primeros sumandos corresponden a la ecuación IV.105 por lo cual desaparecen de la ecuación anterior. Además al dividir entre $\rho(\bar{\zeta} + h)$ se obtiene finalmente;

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} + \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \left[\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} (\tau_{vx} - \tau_{fx})} \quad IV.108$$

Al realizar un análisis similar a partir de la ecuación IV.88 se obtiene que;

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} \left[\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right] = \frac{1}{\rho(\bar{\zeta} + h)} (\tau_{vy} - \tau_{fy})} \quad IV.109$$



La solución de las ecuaciones IV.106 (ecuación de continuidad), IV.108 y IV.109 (ecuaciones de conservación de movimiento) permiten conocer las corrientes inducidas por el oleaje, cabe aclarar que lo que se obtiene en realidad es el cambio de la velocidad de ésta con respecto al tiempo o mejor dicho la aceleración de ésta.

Solución que se realiza mediante aproximaciones de diferencias finitas, para la cual se emplean celdas de mallas de distintos tamaños ubicando en el centro de éstas a la elevación de la superficie libre del agua y en los extremos a la velocidad del agua en las direcciones x e y (figura IV.4)

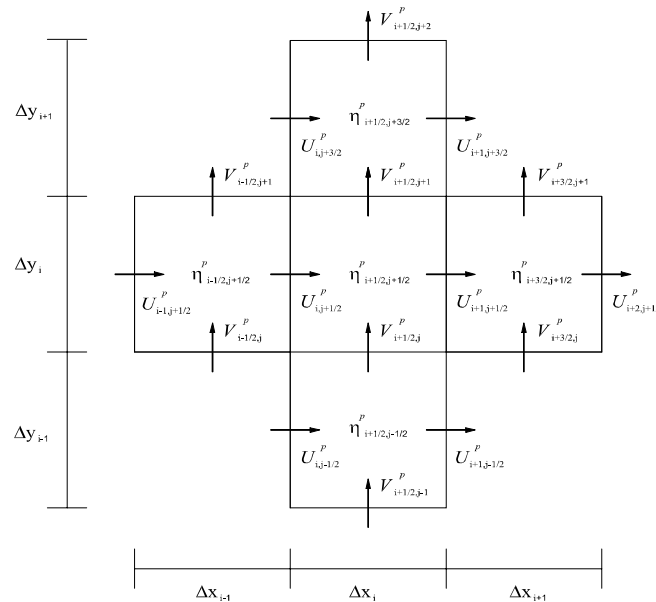


Figura IV.4 Ubicación de variables independientes.

Por otro lado mediante la solución de un sistema lineal que se obtiene al plantear una ecuación lineal con cinco incógnitas en cada una de las celdas que conforman la malla se construye dicho sistema, obteniendo con ello las elevaciones de la superficie libre del agua para posteriormente calcular a partir de estas las velocidades, cabe resaltar que en este modelo matemático se consideran los esfuerzos de radiación de las olas, el flujo por viento y la fricción de fondo.

Por quedar fuera de los alcances de este trabajo no se desarrollan las soluciones de las ecuaciones en cuestión mediante la solución de un programa de cómputo desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.





V.1 SELECCIÓN DEL SITIO DE ESTUDIO

Con el propósito de mostrar la aplicación del modelo matemático expuesto en el capítulo IV de este trabajo, es conveniente realizar un ejemplo que muestre una metodología práctica además de que indique sus ventajas y limitantes de emplear esta herramienta.

El sitio en donde se realizó la aplicación del modelo es a *Playa mujeres*, municipio de Isla Mujeres, localizada en la parte noreste de la península de Yucatán, en el estado de Quintana Roo, frente al mar Caribe, entre los $86^{\circ} 48'$ de longitud oeste y los $21^{\circ} 4'$ de latitud norte.

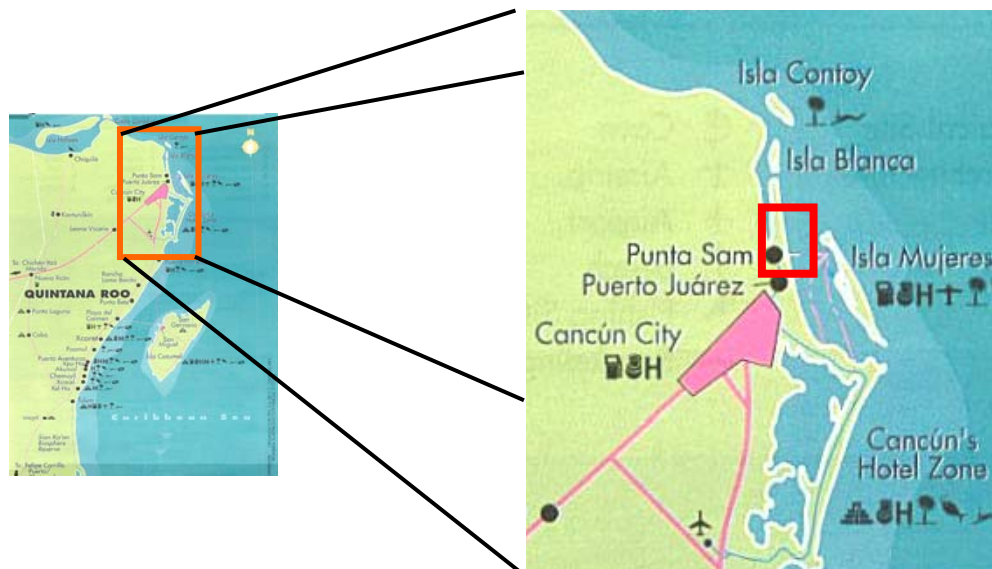


Figura V.1. Localización de la zona de estudio.



V.2 RECOPIACIÓN DE INFORMACIÓN

V.2.1 BATIMETRÍA

Se cuenta con la batimetría de la zona en estudio, información recabada de portulanos de la zona, los cuales se listan a continuación:

S. M. 923 Bahía de Mujeres. Portulano escala 1:17,500 editado por la Secretaría de Marina a través de la Dirección General de Oceanografía Naval. Último levantamiento en 1996, actualmente en revisión.

S. M. 924 Isla Mujeres a Isla Cozumel. Portulano escala 1:100,000 editado por la Secretaría de Marina a través de la Dirección General de Oceanografía Naval. Último levantamiento en 1993 y última revisión en agosto de 1996.

Los planos anteriores fueron escaneados para obtener puntos X, Y, Z con los cuales se forman los archivos de datos que requieren los modelos numéricos.

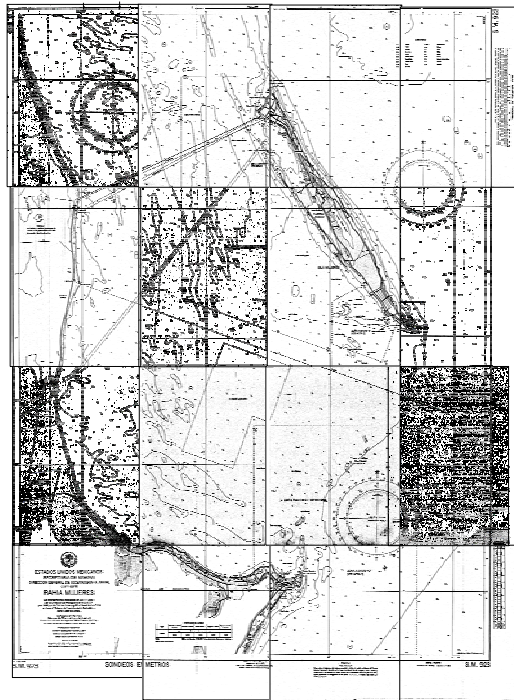


Figura 2. Imagen del portulano escala 1:175,000.

Posteriormente se capturaron en un archivo de computo las tríadas de coordenadas de varios puntos, como los que se muestran en la *figura 3*. Información que fue empleada para generar la batimetría de la zona, *figura 4*, y por ende la malla requerida del modelo matemático.



Figura 3. Tríada de coordenadas de algunos puntos de la zona en estudio.

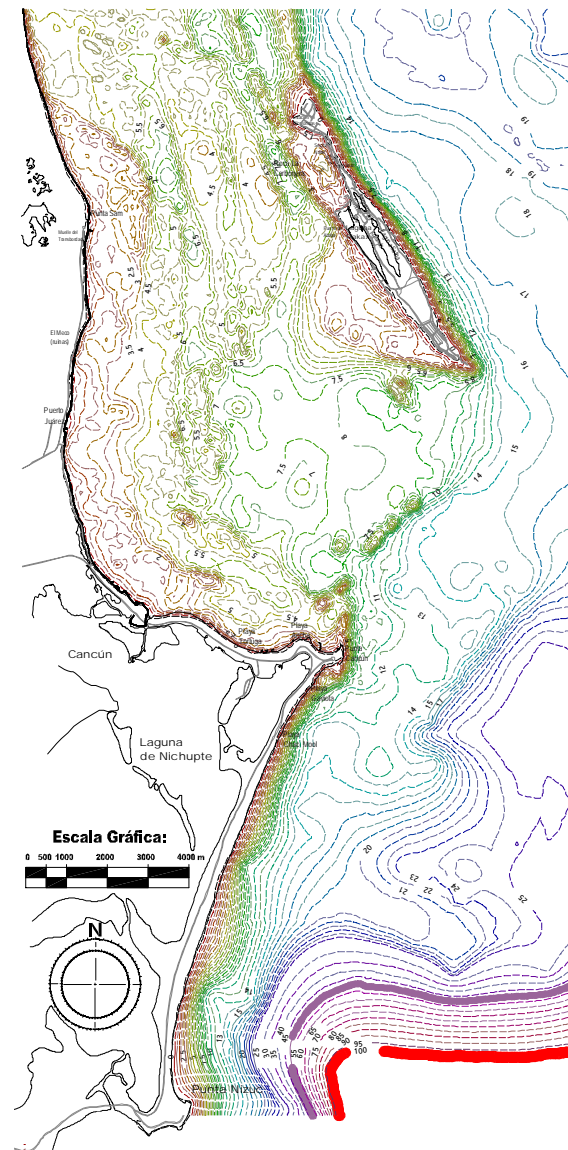


Figura 4. Batimetría calculada de la zona de estudio.



V.2.2 OLEAJE ORDINARIO

Determinar las condiciones ordinarias de oleaje tiene como principal objetivo estudiar la recuperación o pérdida de playas, pues ello constituye al mecanismo fundamental de la conformación a largo plazo de éstas. En especial, interesan las condiciones estacionales de oleaje normal, ya que estas condicionan los perfiles característicos de las playas.

V.2.2.1 SELECCIÓN DE INFORMACIÓN

Se determinaron las características de oleaje local (sea) y el distante (swell) mediante:

El resumen anual (S&S), Tablas V.1 y V.2. Información referente a las publicaciones denominadas “Atlas of Sea and Swell charts” tanto del “Northeastern Pacific Ocean” como del “North Atlantic Ocean”, ambas editadas por la U.S. Navy Oceanographic office, Washington, D.C. y que obedece a observaciones visuales del estado de mar, realizadas desde embarcaciones durante un periodo de diez años.

Además del empleo de la información de la OWS (Ocean Wave Statistics). Información editada por el Laboratorio Nacional de Física, Ministerio de Tecnología de la Gran Bretaña y contienen datos estadísticos del oleaje, estimados visualmente por barcos voluntarios que navegaron en las rutas establecidas en todo el mundo durante los años de 1953 a 1961. Con dicha información se obtuvieron, para diferentes direcciones y en diferentes épocas del año los resultados de las *tablas V.3 a la V.10*: Resumen anual (OWS).



Dirección	Frecuencia	Observ.	Tiempo (h)	Rangos (m)	Rangos %	Observ.	Tiempo (h)	Hs
				1.06	68.94	205.9130	154.1767	0.7308
N	0.0522	516.5570	223.6360	2.74	24.63	132.9710	55.0682	0.6746
				4.3	6.44	34.5590	14.3910	0.2769
				1.06	46.74	998.4270	418.2112	0.4954
NE	0.1600	1584.3030	671.0956	2.74	23.83	493.1160	213.2286	0.6529
				4.3	4.43	92.7600	39.6557	0.1905
				1.06	67.67	1925.3280	746.1556	0.7173
E	0.2821	2793.0270	1102.6271	2.74	29.32	788.4680	323.3093	0.8034
				4.3	3.00	211.2170	33.1618	0.1290
				1.06	73.94	1319.8500	510.9888	0.7838
SE	0.1810	1791.6640	691.1266	2.74	22.93	416.6230	158.4993	0.6283
				4.3	3.13	55.1880	21.6375	0.1346
				1.06				
S				2.74				
				4.3				
				1.06				
SW				2.74				
				4.3				
				1.06				
W				2.74				
				4.3				
				1.06				
NW	0.0069	68.2200	28.1596	2.74	100.00	68.2200	28.1596	2.7400
				4.3				
Calmas	0.3179	3147.2300	1142.2757					
Total	1.0000	9901.0000	3858.9208					

Tabla V.1 SWELL (anual)



Direc.	Frecuencia	Observ.	Tiempo (h)	Rangos (m)	% Rangos	Observ.	Tiempo (h)	Hs
				0.60	11.44	89.801	37.3954	0.0686
N	0.0612	750.5880	326.8906	1.65	86.43	644.0800	282.5379	1.4261
				3.00	5.11	16.7070	6.9573	0.1533
				0.60	53.03	1580.4440	629.9685	0.3182
NE	0.2364	2900.9720	1187.9788	1.65	44.68	1255.8130	530.8117	0.7372
				3.00	2.29	64.7150	27.2000	0.0687
				0.60	58.39	2721.5150	1056.6929	0.3503
E	0.3741	4590.1180	1809.8464	1.65	39.99	1798.8090	723.7134	0.6598
				3.00	1.63	69.7960	29.4398	0.0489
				0.60	52.02	1532.1300	596.8406	0.3121
SE	0.2380	2920.2500	1147.2729	1.65	45.71	1324.1600	524.4336	0.7542
				3.00	2.27	63.9610	25.9999	0.0681
				0.60	100.00	286.3300	109.9093	0.6000
S	0.0233	286.3300	109.9096	1.65				
				3.00				
				0.60				
SW				1.65				
				3.00				
				0.60				
W				1.65				
				3.00				
				0.60				
NW	0.0063	77.4600	31.9737	1.65	100.00	77.4600	31.9737	1.6500
				3.00				
Calmas	0.0604	742.2700	287.1996					
Total	1.0000	12268.0000	4901.0750					

Tabla V.2 SEA (anual)



DIRECCIÓN NE
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	5.31	12.16	14.09	5.69	0.48	0.39	0.10	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	38.32
7	0.39	0.77	3.38	3.86	2.22	1.06	0.00	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	11.87
9	0.29	0.10	0.48	0.58	1.06	0.48	0.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.57
11	0.00	0.00	0.10	0.10	0.29	0.29	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.07
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10
21	0.00	0.00	0.10	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20
>21	0.19	0.68	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.97
total	6.28	13.11	18.25	10.33	4.05	2.22	1.16	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	56.29

Tabla V.3. Resumen anual

DIRECCIÓN E
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	12.35	21.41	29.91	8.30	1.54	0.17	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	80.47
7	0.39	1.35	1.72	9.46	2.89	1.93	0.39	0.39	0.19	0.19	0.00	0.00	0.00	24.90
9	0.00	0.19	0.96	2.89	2.32	0.39	0.19	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	7.13
11	0.00	0.00	0.39	0.19	0.58	0.00	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.35
13	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00	0.19	0.00	0.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.77
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19
21	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.19
>21	0.00	0.39	0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.58
total	13.12	29.34	39.17	21.03	7.33	3.28	0.96	0.97	0.19	0.19	0.00	0.00	0.00	115.58

Tabla V.4. Resumen anual



DIRECCIÓN SE
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	5.69	9.55	17.47	6.08	0.39	0	0	0	0	0	0	0	0	39.18
7	0.39	1.16	3.86	6.95	2.7	1.06	0.39	0.1	0	0	0	0	0	16.61
9	0.1	0.1	1.25	2.03	1.06	0.1	0.29	0.19	0.1	0	0	0	0	5.22
11	0	0.1	0.29	0.39	0.1	0.19	0	0.19	0	0	0	0.1	0	1.36
13	0	0.1	0	0.19	0	0.29	0.1	0	0	0	0	0	0	0.68
15	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1
21	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1
>21	0.1	0.39	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.68
total	6.48	11.4	23.16	15.64	4.25	1.64	0.78	0.48	0.1	0	0	0.1	0	64.03

Tabla V.5. Resumen anual

DIRECCIÓN S
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	1.16	6.56	4.25	2.32	0.19	0.19	0	0	0	0	0	0	0	14.67
7	0.19	0.77	2.7	1.35	0.19	0.19	0	0	0	0	0	0	0	5.39
9	0	0.19	0.58	0.77	0.19	0.39	0	0.19	0	0	0	0	0	2.31
11	0	0.19	0	0.39	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0.77
13	0	0	0.19	0	0.19	0.77	0	0	0	0	0	0	0	1.15
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
>21	0	0.19	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.38
total	1.35	7.9	7.91	4.83	0.95	1.54	0	0.19	0	0	0	0	0	24.67

Tabla V.6. Resumen anual



DIRECCIÓN SW
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	1.16	2.9	3.19	0.97	0.19	0.1	0	0	0	0	0	0	0	8.51
7	0.1	0.19	0.77	1.06	0.19	0	0	0.1	0	0	0	0	0	2.41
9	0	0.1	0.58	0.48	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	1.26
11	0	0	1	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0.2
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0	0.1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
>21	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1
total	1.26	3.19	4.74	2.51	0.38	0.3	0	0.1	0	0.1	0	0	0	12.58

Tabla V.7. Resumen anual

DIRECCIÓN W
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	1.16	1.16	2.7	0.58	0.19	0.19	0	0	0	0	0	0	0	5.98
7	0.19	0.19	0.19	2.32	0.58	0.77	0	0	0.19	0	0	0	0	4.43
9	0	0	0	0	0.39	0.19	0.39	0	0	0	0	0	0	0.97
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
>21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
total	1.35	1.35	2.89	2.9	1.16	1.15	0.39	0	0.19	0	0	0	0	11.38

Tabla V.8. Resumen anual



DIRECCIÓN NW
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	1.54	2.61	2.8	1.06	0.58	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	8.79
7	0	0.29	1.35	2.03	1.35	0.19	0.1	0	0	0	0	0	0	5.31
9	0.1	0.1	0.48	0.29	0.77	0.77	0.29	0.1	0.1	0	0	0	0	3
11	0	0	0	0.1	0.39	0	0	0	0	0	0.1	0.19	0	0.78
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0.1
21	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1
>21	0.1	0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2
total	1.84	3	4.73	3.48	3.09	1.06	0.49	0.2	0.1	0	0.1	0.19	0	18.28

Tabla V.9. Resumen anual

DIRECCIÓN N
(tiempo de acción en días)

H(m)	0.25	0.375	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75	3.25	3.75	4.25	4.75	5.25	6.25	TOTAL
T(s)														
5	1.54	5.79	5.6	1.35	0.39	0	0.19	0	0	0	0	0	0	14.86
7	0	0.19	2.12	2.12	1.74	1.74	0.39	0	0	0	0	0	0	8.3
9	0	0.19	0.19	1.16	1.35	0.19	0.19	0	0	0	0	0	0	3.27
11	0	0	0.39	0.39	0	1.16	0	0	0	0	0	0	0	1.94
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0.19
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0.39	0	0.39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.78
>21	0	0.19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.19
total	1.93	6.36	8.69	5.02	3.48	3.28	0.77	0	0	0	0	0	0	29.53

Tabla V.10. Resumen anual



	ANUAL	PRIMAVERA	VERANO	OTOÑO	INVIERNO	SUMA
	Tiempo de acción	Tiempo de acción	Tiempo de acción	Tiempo de acción	Tiempo de Acción	
DIRECCION	(días)	(días)	(días)	(días)	(días)	(días)
N	29.53	5.64	2.26	11.18	11.6	30.68
NE	56.25	12.7	7.04	23.02	15.3	58.06
E	115.61	26.34	34.22	29.9	24.4	114.86
SE	63.98	23.89	16.66	10	12.5	62.99
S	24.71	8.09	8.17	3.01	4.8	24.07
SW	12.56	1.88	4.87	2.26	3.3	12.31
W	11.39	3.39	2.78	1.94	3.2	11.31
NW	18.25	3.85	1.82	3.88	9.1	18.65
TOTAL	332.28	85.78	77.76	85.19	84.2	332.93
CALMAS	32.96	6.21	14.26	5.82	5.79	32.08
TOTAL	365.24	91.99	92.02	91.01	89.99	365.01

Tabla V.11. Resumen anual y por estaciones (OWS).

Finamente en la tabla V.12 se presenta un resumen de las condiciones de oleaje ordinario consideradas, las cuales como se indica en ésta, fueron la dirección y el tiempo de acción en días.

Condición de oleaje	Dirección	T (en s)	H ₀ (en m)	Tiempo de acción (en días)
Ordinario	Este	5	0.750	29.91
Ordinario	Este	5	0.375	21.41
Ordinario	Sureste	5	0.750	17.47
Ordinario	Noreste	5	0.750	14.09
Ordinario	Noreste	5	0.375	12.16
Ordinario	Sureste	5	0.375	9.55
Ordinario	Este	7	1.250	9.46
Ordinario	Sureste	7	1.250	6.15
Ordinario	Noreste	5	1.250	5.69

Tabla V.12. Resumen anual y por estaciones (OWS).



V.2.2.2 ANÁLISIS DE INFORMACIÓN.

a) Datos de S&S

De las tablas V.1 y V.2 se observa que en el promedio anual el oleaje predominante proviene del **E** y en segundo lugar el correspondiente a la dirección **SE**.

b) Datos de OWS

Del resumen anual de las tablas V.3 a la V.10 se observa que el oleaje predominante proviene del **E** y luego el correspondiente a la dirección **SE**.

De la comparación de los resultados obtenidos con las dos fuentes de información se puede afirmar que son consistentes en términos generales, pues ambos coinciden en el predominio de la dirección principal del oleaje y también en la de segunda importancia.

Por lo anterior se propone emplear los resultados obtenidos con el OWS, esto debido a que se considera que es la fuente más relevante y que sus valores parecen más apegados a la realidad pues las alturas del oleaje son más pequeñas, característico de la zona en donde se realizó la aplicación del modelo.

V.3 MEDICIONES DE CAMPO

Las mediciones en campo de las velocidades de las corrientes permiten tener parámetros de comparación con respecto a los resultados que se obtengan al realizar simulaciones con el modelo matemático presentado en capítulos anteriores.

Es por ello que en año de 2003 se realizaron tres campañas de medición en distintas épocas del año.

Además de medir las velocidades de las corrientes marinas en sitios de interés se midió el transporte de sedimentos tanto de fondo como en suspensión, marea y algunas características del oleaje como lo es, H altura y T periodo de ola así como la dirección de incidencia.



V.3.1 VELOCIDADES

La finalidad de esta actividad es obtener los valores de las velocidades de corriente más representativas en la zona de estudio.

Las velocidades fueron obtenidas mediante un molinete, propiedad de la UNAM.

El equipo utilizado para la medición de las corrientes es el que se describe a continuación:

a) Molinete

marca: Rossbach
modelo: 631-r
n° serie: 72814

b) Audífonos

marca: ashidavox
st-900
10kΩ each

c) un estuche de varillas graduadas (4 piezas c/u con base)

Este equipo fue calibrado oportunamente, en las instalaciones del Laboratorio de Hidráulica de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por parte del personal del Instituto de Ingeniería que participó en este estudio.

El modelo que se obtuvo de estas calibraciones para diferentes condiciones experimentales es el siguiente:

$$y = 0.0101 x + 0.0117$$

donde

y velocidad, en m/s
x número de pulsaciones en t=70 s

Se obtuvieron los siguientes datos en campo.



VELOCIDADES				
Punto	X (m)	Y (m)	Z (msnm)	Vel. (m/s)
1	519,816	2,350,726	-3.7	0.39
2	519,543	2,351,354	-5.0	0.39
3	519,661	2,351,055	-5.0	0.39
4	520,034	2,350,257	-3.8	0.39
5	519,459	2,351,557	-5.0	0.39
6	519,519	2,351,199	-1.5	0.39
7	519,434	2,351,468	-1.4	0.39
8	520,567	2,348,711	-1.5	0.41
9	519,825	2,350,307	-0.9	0.41
10	519,706	2,350,677	-1.1	0.41
11	520,665	2,348,342	-1.2	0.41
12	520,319	2,349,104	-1.3	0.41
13	519,869	2,350,175	-1.0	0.41
14	519,925	2,350,017	-1.2	0.41
15	519,773	2,350,441	-1.1	0.41
16	520,658	2,348,251	-1.1	0.41
17	520,631	2,348,395	-1.2	0.41
18	520,500	2,348,789	-1.1	0.41
19	520,045	2,349,724	-2.0	0.41
20	520,002	2,349,822	-1.0	0.41
21	520,601	2,348,532	-1.2	0.42
22	520,414	2,348,912	-2.2	0.42
23	520,113	2,349,566	-1.0	0.42
24	519,619	2,350,930	-1.1	0.42
25	520,147	2,349,424	-1.1	0.42

Tabla V.13. Datos obtenidos en campo (Marzo de 2003) para la determinación de las velocidades de corriente

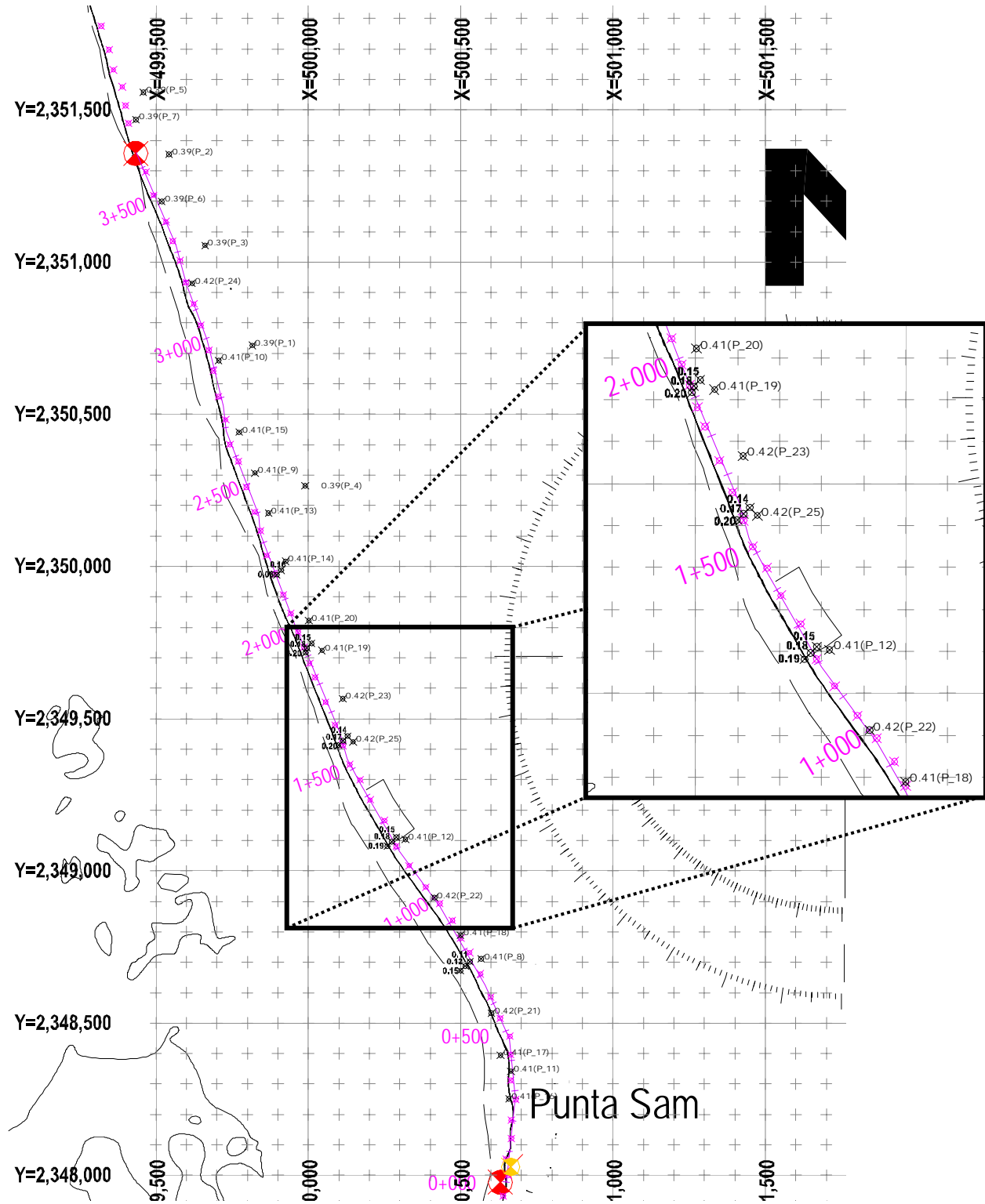


Figura V.5. Ubicación de los puntos donde se midió velocidad.



Tabla V.14. Datos obtenidos en campo (junio de 2003) para la determinación de las velocidades de corriente

# de Equipo	Hora (hh:mm)	Profundidad (m)	No. Vueltas	Tiempo (s)	Velocidad (m/s)
1	12:00	0.50	5	23.02	0.1733
	12:03	0.50	8	33.87	0.1816
	12:06	0.50	6	32.92	0.1593
	12:09	0.50	20	77.11	0.1925
Promedio					0.1767
1	13:20	0.50	30	106.35	0.2038
Promedio					0.2038
1	13:23	1.00	30	111.3	0.1975
Promedio					0.1975
1	13:28	1.20	28	107.02	0.1936
Promedio					0.1936
2	12:00	1.00	8	33.15	0.1840
	12:03	1.00	7	28.22	0.1871
	12:06	1.00	10	42.18	0.1820
	12:10	1.00	30	117.5	0.1905
Promedio					0.1859
3	12:00	1.20	30	117.11	0.1909
	12:05	1.20	35	121.32	0.2071
	12:10	1.20	20	77.11	0.2071
Promedio					0.2017



En la siguiente figura se muestra la ubicación del sitio donde se realizaron las lecturas.

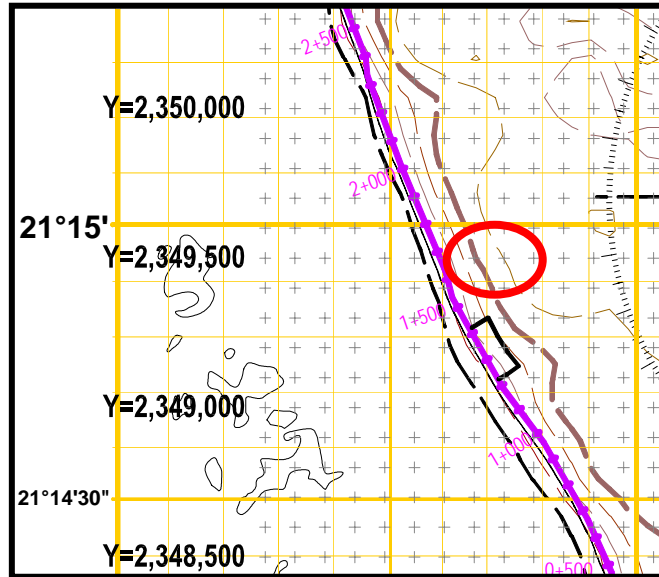


Figura V.6. Ubicación del sitio donde se tomaron los datos necesarios para la obtención de las velocidades de corriente.

Tabla V.15.- Registro de las mediciones de velocidad con micromolinete del día 20 de noviembre del 2003.

Lugar	Coordenadas		No. De Vueltas	Tiempo de medición (seg)	Profundidad (m)	Velocidad (m/s)
	X	Y				
Vertice II SEMARNAT	519686	2350687	14	60	1.0	0.1803
	519689	2350685	17	60	1.3	0.2045
	519863	2350152	18	60	1.0	0.2133
	519863	2350152	20	60	1.0	0.2320
	519895	2350021	18	60	1.0	0.2133
	519895	2350021	21	60	1.0	0.2420

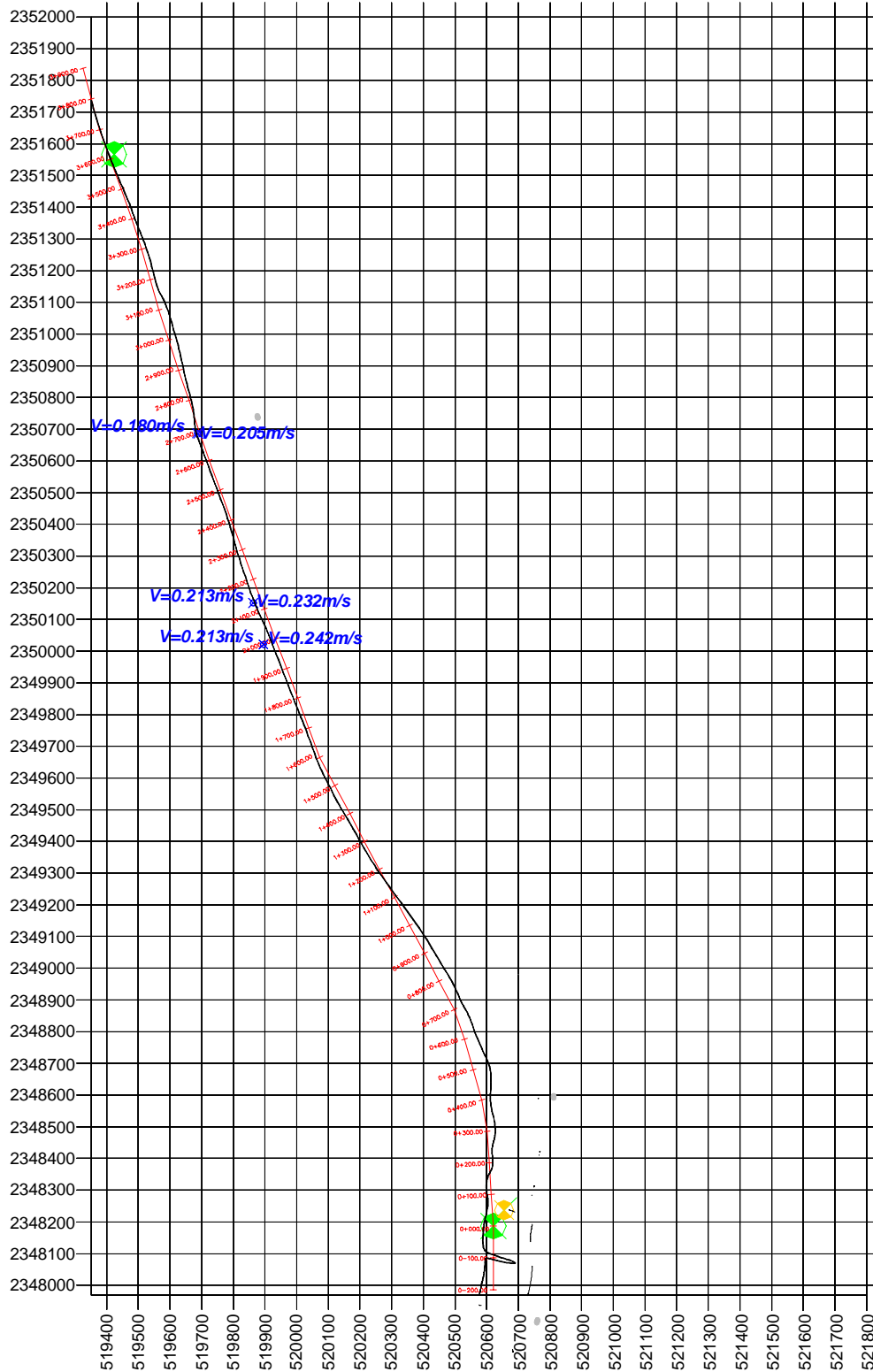


Figura V.7. - Localización de los sitios donde se midieron velocidades

**V.3.2 CORRIENTES**

Se realizaron mediciones en 12 trayectos, utilizando una cruceta con una y dos boyas. Los resultados de forma resumida se presentan en la **tabla V.16**.

Tabla V.16. Registro de las trayectorias medidas en el mes de marzo de 2003

TRAYECTORIAS DE CORRIENTES								
Hora	No. Trayectoria	X (m)	Y (m)	Tiempo	Distancia (m)	Vel. (m/s)	Prom. Vel. (m/s)	Azimut (° ' ")
	TRAY 1	519,942	2,349,911					
		519,889	2,350,119	5.14	214.6	0.70	0.70	345° 42' 17.26"
	TRAY 2	519,824	2,350,661					
		519,803	2,350,408	2.00	253.9	2.12		364° 44' 41.61"
11:40	TRAY 3	519,782	2,350,442					
		519,776	2,350,477	2.00	35.5	0.30		350° 16' 20.72"
		519,757	2,350,517	4.00	44.3	0.37		334° 35' 32.22"
		519,754	2,350,548	6.00	31.1	0.26		354° 28' 20.86"
		519,744	2,350,586	8.00	39.3	0.33	0.31	345° 15' 23.17"
12:10	TRAY 4	519,530	2,351,180					
		519,524	2,351,207	2.00	27.7	0.23		347° 28' 16.29"
		519,512	2,351,241	4.00	36.1	0.30		340° 33' 35.87"
		519,502	2,351,276	6.00	36.4	0.30		344° 03' 16.57"
		519,492	2,351,305	8.00	30.7	0.26	0.27	340° 58' 27.82"
14:25	TRAY 5	520,693	2,348,040					
		520,688	2,348,089	2.00	49.3	0.41		354° 10' 25.17"
		520,692	2,348,131	4.00	42.2	0.35		365° 26' 25.20"
		520,690	2,348,181	6.00	50.0	0.42		357° 42' 33.80"
		520,685	2,348,221	8.00	40.3	0.34	0.38	352° 52' 29.94"
14:50	TRAY 6	520,601	2,348,613					
		520,582	2,348,660	2.00	50.7	0.42		337° 59' 19.38"
		520,569	2,348,707	4.00	48.8	0.41		344° 32' 19.62"
		520,545	2,348,747	6.00	46.6	0.39		329° 02' 10.47"
		520,534	2,348,782	8.00	36.7	0.31	0.38	342° 33' 10.12"
16:00	TRAY 7	520,216	2,349,322					
		520,204	2,349,358	2.20	37.9	0.29		341° 33' 54.18"
		520,193	2,349,385	4.00	29.2	0.27		337° 50' 01.15"
		520,181	2,349,415	6.00	32.3	0.27		338° 11' 54.93"
		520,164	2,349,445	8.00	34.5	0.29	0.28	330° 27' 40.38"

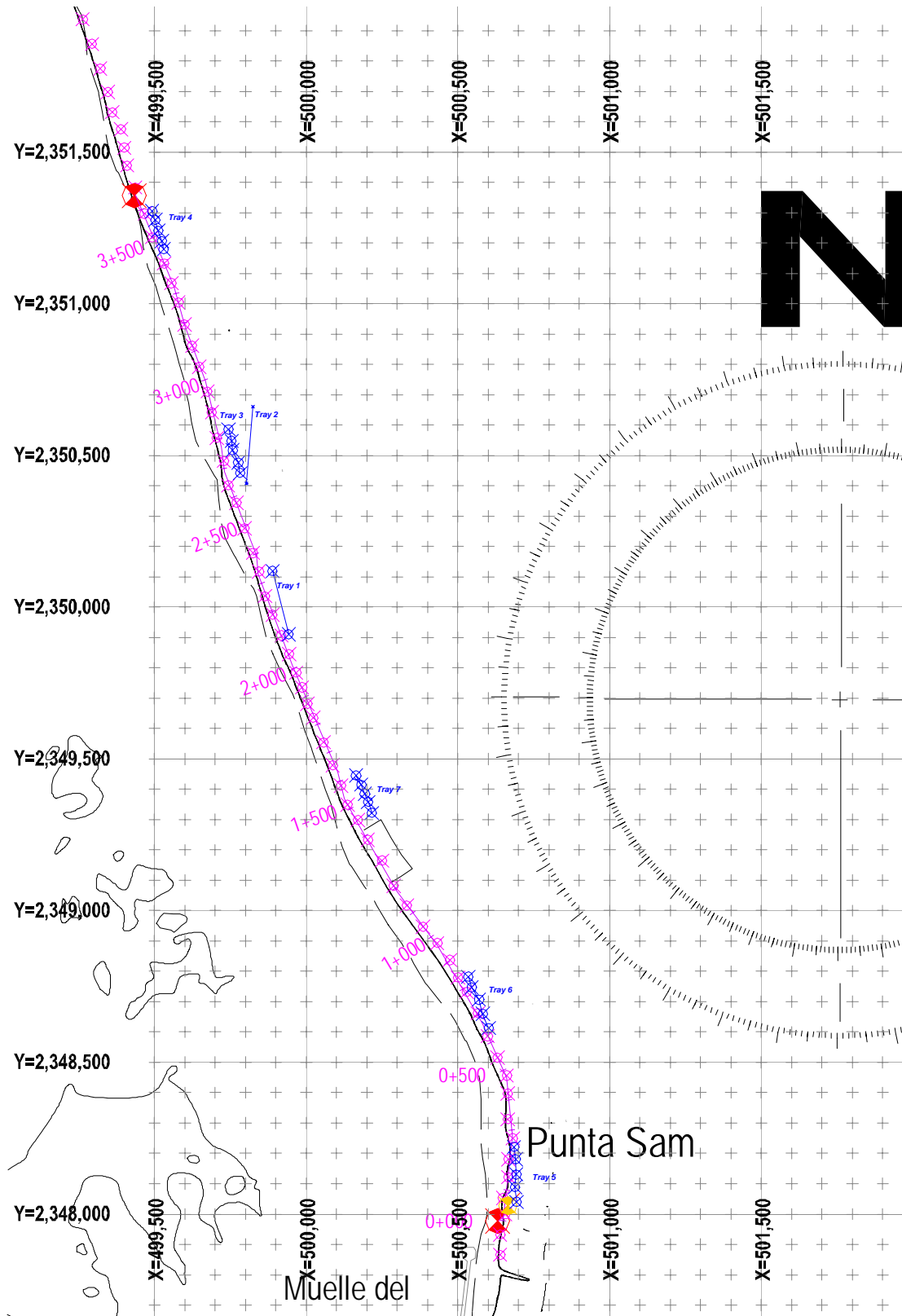


Figura V.8.- Ubicación de las trayectorias que se obtuvieron en el mes de marzo de 2003.



Tabla V.17. Registro de las trayectorias (resumen) medidas en el mes de junio de 2003.

Trayectoria	Promedio de velocidad (m/s)
1	0.32
2	0.16
3	0.45
4	0.35
5	0.29
6	0.32
7	0.27
8	0.31
9	0.28
10	0.20
11	0.27
12	0.37

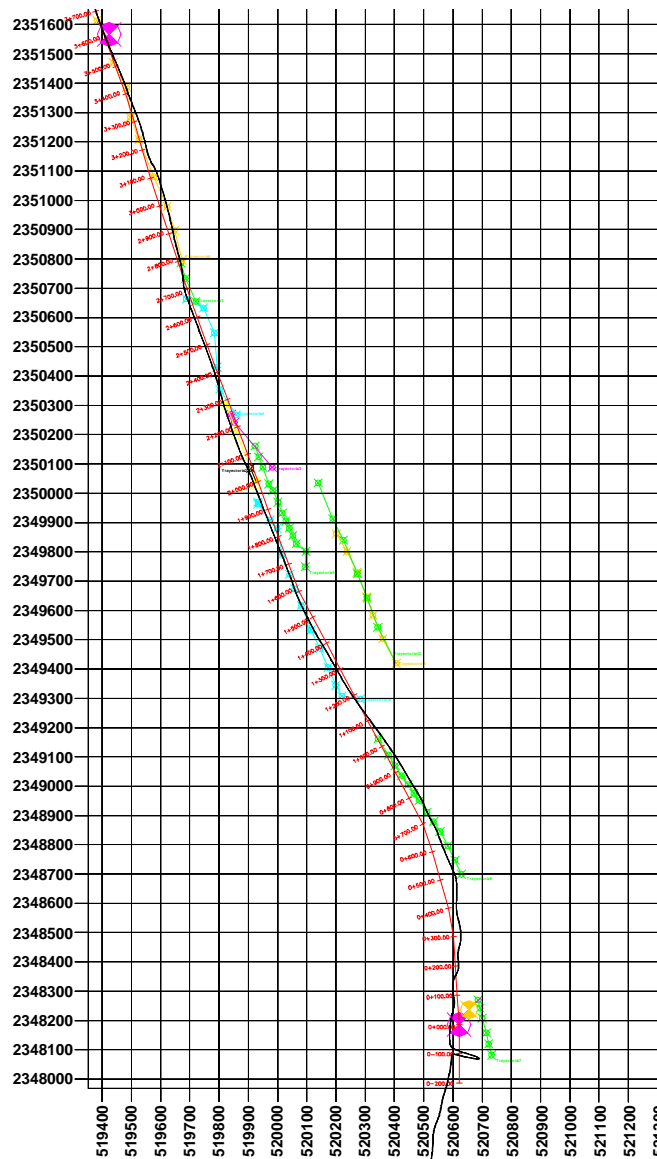


Figura V.9. Esquema de localización de los sitios en donde se registraron las trayectorias durante el mes de noviembre de 2003.



Tabla V.18. Trayectorias de corrientes registradas en el mes de noviembre del 2003.

Hora (hh:mm)	No. Trayectoria	X (m)	Y (m)	Tiempo (mm)	Distancia (m)	Vel. (m/s)	Prom. Vel. (m/s)	Azimut (° ' '')
10:39	1	519661	2350834	0.00				
10:41		519660	2350812	1.59	22.0	0.23		362°36' 09.22"
10:43		519667	2350794	1.41	19.3	0.23		338°44' 58.18"
10:45		519671	2350777	1.25	17.5	0.23		346°45' 34.13"
10:47		519676	2350756	1.39	21.6	0.26		346°36' 27.01"
10:49		519677	2350738	1.39	18.0	0.22		356°49' 12.61"
10:51		519683	2350717	1.39	21.8	0.26		344°03' 16.57"
10:53		519692	2350695	1.60	23.8	0.25	0.24	337°45' 03.51"
11:30	2	519854	2350246	0.00				
11:32		519855	2350227	1.27	19.0	0.25		356°59' 13.96"
11:34		519856	2350203	1.48	24.0	0.27		357°36' 50.60"
11:36		519857	2350184	1.35	19.0	0.23		356°59' 13.96"
11:38		519858	2350167	1.33	17.0	0.21	0.24	356°38' 00.74"
14:50	3	519648	2351080	0.00				
14:52		519622	2351135	1.74	60.8	0.58		334°41' 55.04"
14:54		519626	2351159	1.33	24.3	0.30		369°27' 44.36"
14:57		519602	2351205	2.14	51.9	0.40		332°26' 49.88"
15:00		519590	2351255	1.93	51.4	0.44		346°30' 15.36"
15:02		519575	2351293	1.52	40.9	0.45		338°27' 32.49"
15:04		519550	2351332	1.54	46.3	0.50	0.45	327°20' 20.71"

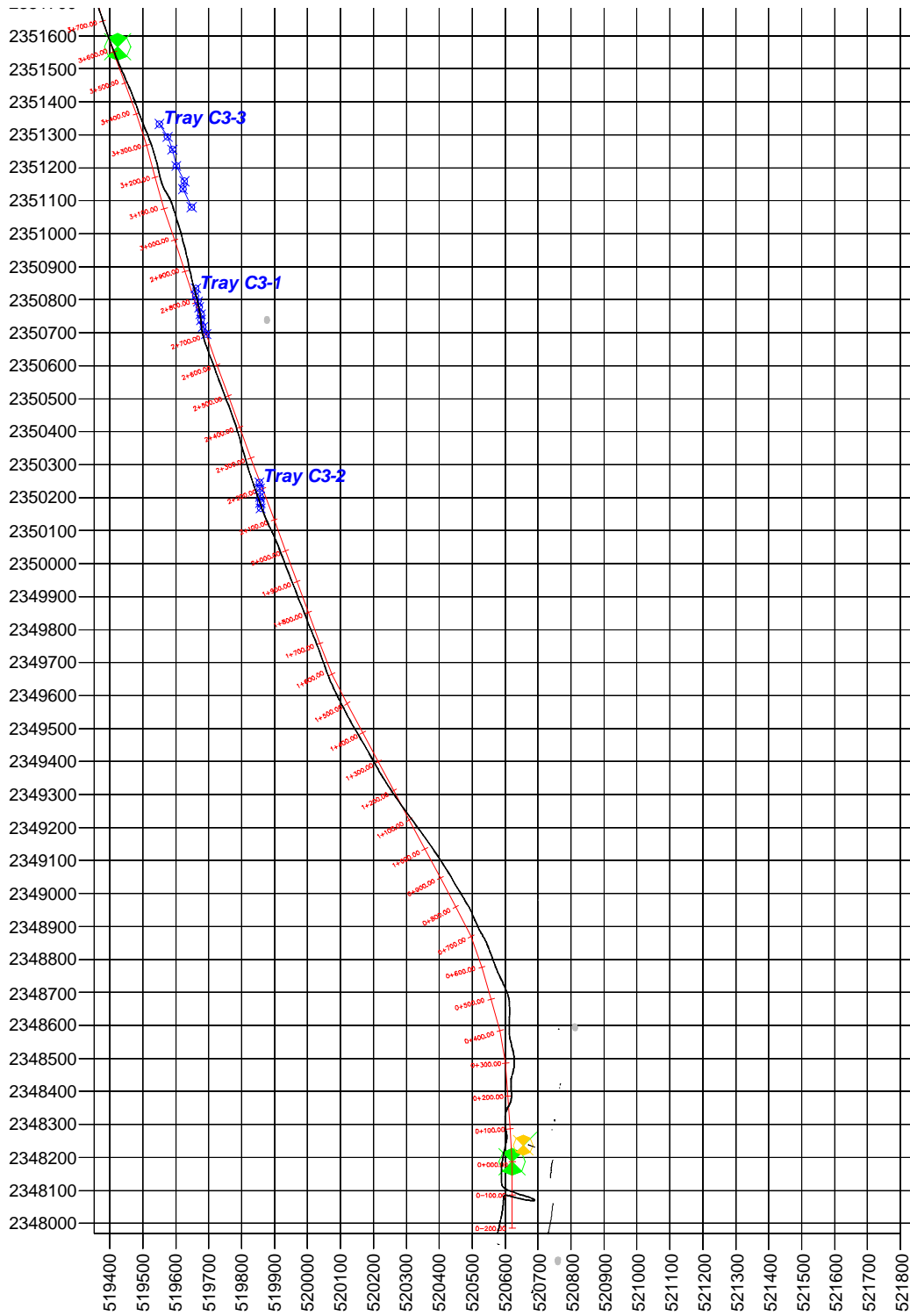


Figura V.10. Trazo de la trayectorias obtenidas en campo en el mes de noviembre de 2003.



V.4 REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN DE OLAJE.

V.4.1 Modelo matemático empleado

Como la batimetría del fondo marino cercano a la zona de estudio es muy irregular, los métodos convencionales de refracción del oleaje mostraron que los rayos de onda se cruzan dando lugar a zonas cáusticas por lo que para obtener el oleaje en aguas bajas fue necesario el uso de un modelo numérico para el cálculo de la difracción y refracción de oleaje. Se empleó un método desarrollado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. Con él se obtuvieron las modificaciones que sufre el oleaje al propagarse desde aguas profundas hasta la costa para las direcciones predominantes que son NE, SE y E (según se observa en la *tabla V.12*).

En la *tabla V.19* se presentan las distintas opciones calculadas y las características de cada una de ellas.

Tabla V.19. Características de oleaje calculadas.

Condición de oleaje	Dirección	T (en s)	H ₀ (en m)	Tiempo de acción (en días)
Ordinario	Este	5	0.750	29.91
Ordinario	Este	5	0.375	21.41
Ordinario	Sureste	5	0.750	17.47
Ordinario	Noreste	5	0.750	14.09
Ordinario	Noreste	5	0.375	12.16
Ordinario	Sureste	5	0.375	9.55
Ordinario	Este	7	1.250	9.46
Ordinario	Sureste	7	1.250	6.15
Ordinario	Noreste	5	1.250	5.69

Los resultados obtenidos con el modelo matemático del cálculo de la difracción y refracción del oleaje proveniente de aguas profundas corresponden a las alturas de oleaje y dirección del mismo para cada una de las opciones presentadas en la *tabla V.19*.

V.4.2 Análisis de resultados

Se observa que Isla Mujeres ofrece una protección natural ante los efectos de oleaje en la zona de playa frente a ella (zona de estudio).

El oleaje llega amortiguado por lo que las alturas de ola en la zona son pequeñas para condiciones ordinarias. También se nota que las direcciones de oleaje que son más desfavorables en la zona de interés son las provenientes de la dirección SE; sin embargo, aún para esta condición el oleaje es reducido.



IV.5 CALCULO DE CORRIENTES MARINAS

Para las condiciones de oleaje ordinario que tiene mayor tiempo de acción en el lugar (Tabla V.20) se calcularon las corrientes inducidas por el oleaje con el modelo propuesto en este trabajo. Los resultados son puestos en figuras para mostrar los vectores de velocidad de las corrientes marinas y en tablas para considerar la magnitud de las velocidades, se encontró que las máximas se presentan al norte de la zona de interés.

Altura de ola H_0 (m)	Periodo T (s)	Dirección	Tiempo de acción (días)
0.75	5	E	29.91
0.375	5	E	21.41
0.75	5	SE	17.47
0.75	5	NE	14.09

Tabla V.20. Características de oleaje calculadas.

Las velocidades obtenidas fueron pequeñas y la velocidad promedio es del orden de 0.05 m/s (5 cm/s).

De acuerdo con valores reportados en otros estudios, la velocidad a partir de la cual la arena fina, similar a la que se ubica en la zona del desarrollo turístico, inicia su movimiento en el agua y es transportada a partir de 0.46 m/s. Por lo que en el sitio es poco probable que exista un transporte litoral de gasto sólido significativo en condiciones de oleaje ordinario ya que como se observa en las siguientes tablas, las velocidades son menores a este valor en frente y a lo largo de la zona de estudio.



Figura V.11. DIRECCIÓN SURESTE. $H_0=0.75$ m. $T=5$ s. (17.47 días)

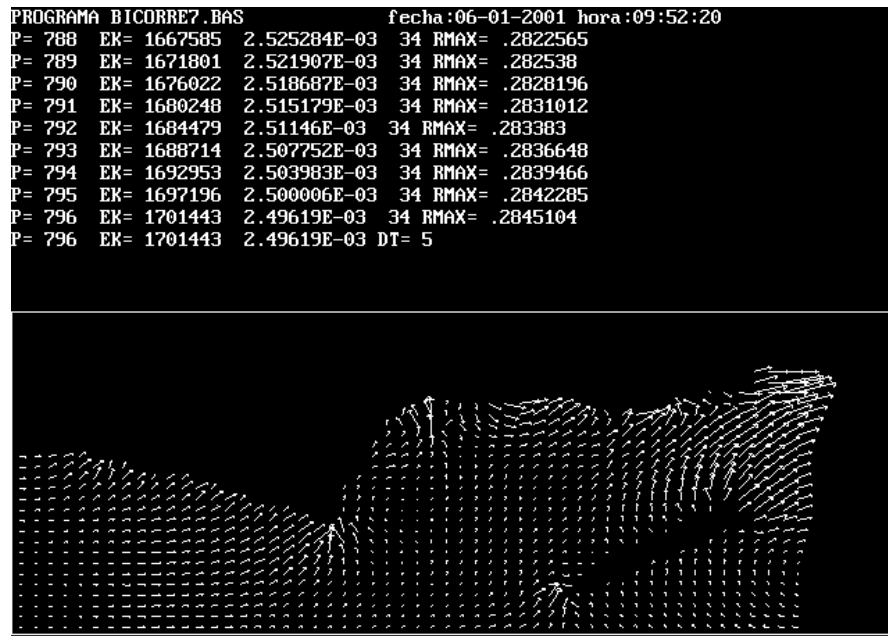


Figura V.12. DIRECCIÓN ESTE. $H_0=0.75$ m. $T=5$ s. (29.91 días)

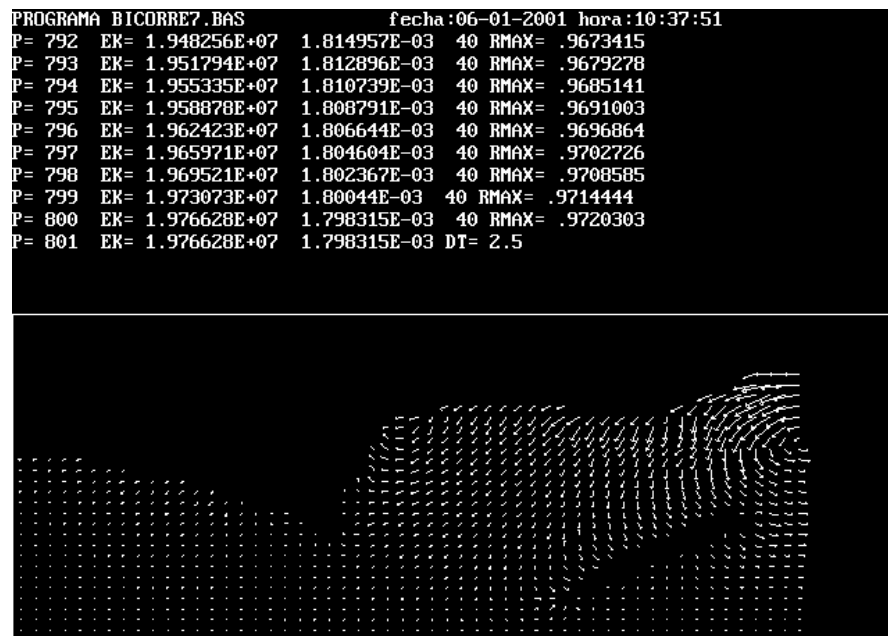


Figura V.13. DIRECCIÓN NORESTE. $H_0=0.75$ m. $T=5$ s. (14.09 días)

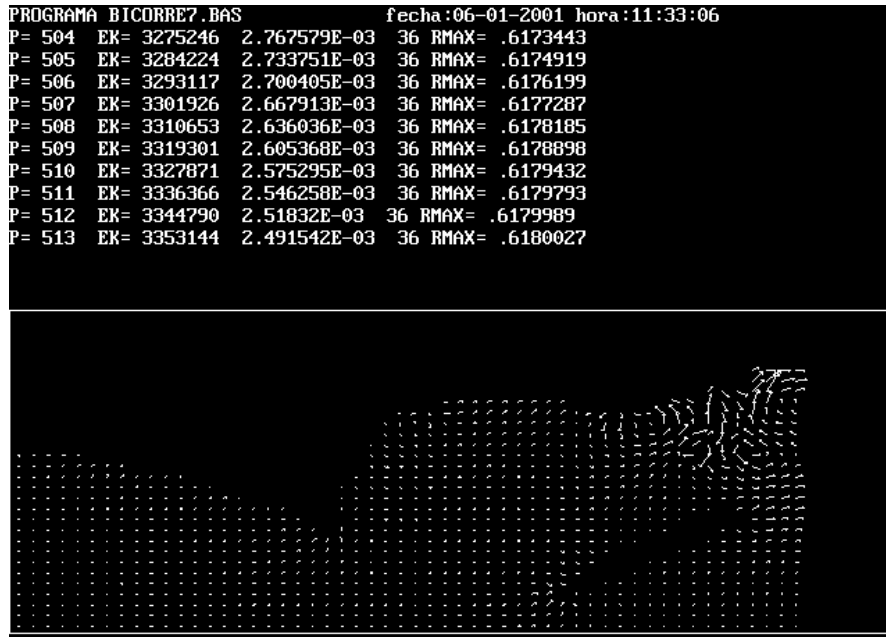


Figura V.14. DIRECCIÓN ESTE. H0=0.375 m. T=5 s. (21.41 días)

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	PUNTA	46	47	48	49	50	51	52	53	54			
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	SAM	100	101	102	103	104	105	106	107	108			
128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	
182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	
236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	
290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	
344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	
398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	
452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	
506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	
560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	
614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	
668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	
722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	ISLA MUJERES	748	749	750	751	752	753	754	755	756				
776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	
830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	
PUNTA	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918			
CANCUN	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972
992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	
1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	

Figura V.15. Numeración de las celdas de las cuales se presentan los resultados del cálculo de corrientes.



Tabla V.21. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: ESTE, H0=0.375 m, T=5 s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	0.0165	0.0027	0.0167	156	0.0182	0.1543	0.1554
85	0.0184	0.0006	0.0184	157	0.0145	-0.1807	0.1813
86	0.0188	-0.0009	0.0188	158	0.1540	-0.0365	0.1583
87	0.0184	-0.0013	0.0185	159	0.0683	0.2831	0.2912
88	0.0178	-0.0004	0.0178	160	0.1096	0.3150	0.3336
89	0.0175	0.0016	0.0176	161	0.0610	0.0475	0.0773
90	0.0183	0.0017	0.0184	162	0.0374	0.0311	0.0487
91	0.0192	0.0015	0.0192	188	0.0136	0.0013	0.0137
92	0.0198	0.0007	0.0199	189	0.0114	-0.0056	0.0127
93	0.0200	0.0003	0.0200	190	0.0069	0.0000	0.0069
94	0.0203	-0.0015	0.0203	191	0.0069	-0.0015	0.0071
95	0.0196	-0.0045	0.0201	203	0.0024	-0.0017	0.0029
100	0.0292	0.0022	0.0293	204	0.0082	-0.0033	0.0089
101	0.0308	-0.0037	0.0310	205	0.0157	0.0005	0.0157
102	0.0299	0.0195	0.0357	206	0.0077	0.0012	0.0078
103	0.0399	-0.0038	0.0401	207	-0.0056	0.0047	0.0073
104	0.0458	0.0004	0.0458	241	0.0083	-0.0019	0.0085
105	0.0670	0.3178	0.3248	242	0.0026	-0.0084	0.0088
106	0.1332	0.4383	0.4581	243	-0.0057	-0.0206	0.0214
107	0.1100	0.0719	0.1314	294	0.0053	-0.0009	0.0053
108	0.0796	0.0337	0.0864	295	0.0015	-0.0076	0.0077
136	0.0192	0.0000	0.0192	296	-0.0083	-0.0282	0.0294
137	0.0197	-0.0011	0.0197	347	0.0032	0.0002	0.0032
138	0.0195	0.0145	0.0243	348	0.0003	-0.0048	0.0048
139	0.0241	0.0003	0.0241	349	-0.0036	-0.0080	0.0088
140	0.0237	0.0003	0.0237	401	0.0000	-0.0018	0.0018
141	0.0248	0.0004	0.0248	402	-0.0020	-0.0067	0.0070
142	0.0263	0.0003	0.0263	455	-0.0019	-0.0023	0.0029
143	0.0269	0.0006	0.0269	456	-0.0023	-0.0045	0.0050
144	0.0256	0.0004	0.0256	508	-0.0021	-0.0003	0.0022
145	0.0241	0.0004	0.0241	509	-0.0028	-0.0022	0.0036
146	0.0229	-0.0031	0.0231	562	-0.0028	-0.0004	0.0028
147	0.0207	0.0000	0.0207	563	-0.0030	-0.0020	0.0035
148	0.0204	-0.0010	0.0204	616	-0.0025	0.0010	0.0027
149	0.0209	-0.0067	0.0219	617	-0.0020	-0.0011	0.0023
150	0.0187	-0.0091	0.0208	670	-0.0024	0.0033	0.0041
151	0.0130	0.0083	0.0154	671	-0.0001	0.0077	0.0077
152	0.0147	0.0139	0.0203	724	-0.0026	0.0037	0.0045
153	0.0175	0.0067	0.0188	725	-0.0046	0.0046	0.0065
154	0.0156	-0.0162	0.0225	778	-0.0013	0.0022	0.0026
155	0.0053	0.0003	0.0053	779	-0.0027	0.0093	0.0097

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s

v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s

mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Tabla V.22. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: ESTE, $H_0=0.750$ m, $T=5$ s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	0.0476	0.0070	0.0482	156	0.0214	0.0184	0.0282
85	0.0521	-0.0013	0.0521	157	-0.0385	-0.0582	0.0698
86	0.0518	-0.0076	0.0524	158	0.1199	-0.0232	0.1221
87	0.0482	-0.0088	0.0490	159	0.1777	0.1073	0.2076
88	0.0439	-0.0050	0.0441	160	0.2631	0.0211	0.2639
89	0.0412	0.0032	0.0413	161	0.2746	0.0981	0.2916
90	0.0430	0.0038	0.0432	162	0.2560	0.0916	0.2719
91	0.0449	0.0011	0.0450	188	0.0275	0.0279	0.0392
92	0.0454	-0.0064	0.0458	189	0.0351	0.0260	0.0437
93	0.0410	-0.0065	0.0415	190	0.0314	0.0016	0.0314
94	0.0366	-0.0045	0.0369	191	0.0206	0.0016	0.0207
95	0.0341	-0.0056	0.0345	203	0.0393	0.0010	0.0393
100	0.0503	0.0247	0.0560	204	0.0460	-0.0008	0.0460
101	0.0632	0.0211	0.0666	205	0.0576	0.0007	0.0576
102	0.0745	0.0218	0.0776	206	0.0563	0.0018	0.0563
103	0.0793	-0.0024	0.0794	207	0.0396	0.0029	0.0397
104	0.0779	-0.0015	0.0779	241	0.0184	0.0318	0.0367
105	0.0904	0.0268	0.0943	242	0.0244	0.0324	0.0406
106	0.2222	0.0006	0.2222	243	0.0255	0.0900	0.0936
107	0.3162	0.1137	0.3360	294	0.0138	0.0267	0.0300
108	0.2296	0.0988	0.2500	295	0.0161	0.0316	0.0355
136	0.0422	0.0116	0.0438	296	0.0319	0.0630	0.0707
137	0.0446	0.0125	0.0464	347	0.0119	0.0220	0.0250
138	0.0484	0.0179	0.0516	348	0.0137	0.0305	0.0334
139	0.0504	-0.0004	0.0504	349	0.0175	0.0284	0.0334
140	0.0514	-0.0013	0.0514	401	0.0123	0.0222	0.0254
141	0.0583	-0.0013	0.0584	402	0.0125	0.0320	0.0344
142	0.0665	-0.0007	0.0665	455	0.0132	0.0202	0.0241
143	0.0712	0.0008	0.0712	456	0.0111	0.0215	0.0241
144	0.0683	0.0006	0.0683	508	0.0131	0.0178	0.0221
145	0.0648	0.0008	0.0648	509	0.0143	0.0192	0.0239
146	0.0641	-0.0327	0.0720	562	0.0130	0.0213	0.0250
147	0.0541	-0.0151	0.0562	563	0.0165	0.0222	0.0277
148	0.0455	-0.0057	0.0459	616	0.0104	0.0219	0.0242
149	0.0443	-0.0062	0.0448	617	0.0220	0.0438	0.0490
150	0.0437	-0.0120	0.0454	670	0.0057	0.0163	0.0173
151	0.0381	0.0017	0.0381	671	0.0003	0.0281	0.0281
152	0.0365	0.0176	0.0405	724	0.0011	0.0098	0.0098
153	0.0386	0.0295	0.0486	725	-0.0109	0.0112	0.0156
154	0.0437	0.0246	0.0501	778	0.0008	0.0047	0.0048
155	0.0314	0.0009	0.0314	779	-0.0042	0.0185	0.0189

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s

v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s

mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Tabla V.23. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: NORESTE, H0=0.375 m, T=5 s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	0.0176	-0.0003	0.0176	156	-0.0073	0.1081	0.1083
85	0.0178	-0.0010	0.0178	157	-0.1412	0.0596	0.1532
86	0.0174	-0.0004	0.0174	158	-0.2524	0.3208	0.4082
87	0.0172	0.0003	0.0172	159	-0.1752	0.1991	0.2652
88	0.0173	0.0011	0.0174	160	-0.0936	-0.0229	0.0964
89	0.0179	0.0023	0.0180	161	-0.0020	-0.0878	0.0879
90	0.0189	0.0044	0.0194	162	0.0001	0.0178	0.0178
91	0.0208	0.0080	0.0223	188	0.0030	0.0261	0.0263
92	0.0248	0.0136	0.0282	189	0.0104	-0.0078	0.0130
93	0.0330	0.0061	0.0336	190	0.0025	-0.0010	0.0027
94	0.0369	0.0006	0.0369	191	0.0044	-0.0013	0.0046
95	0.0376	-0.0042	0.0378	203	-0.0338	-0.0001	0.0338
100	0.0409	-0.0019	0.0410	204	-0.0268	0.0019	0.0269
101	0.0374	-0.0058	0.0378	205	-0.0236	-0.0009	0.0237
102	0.0296	-0.0053	0.0301	206	-0.0185	0.0019	0.0186
103	0.0186	0.0027	0.0187	207	-0.0256	0.0075	0.0266
104	0.0093	0.0043	0.0103	241	-0.0211	0.0632	0.0666
105	0.0053	0.1621	0.1622	242	-0.0002	0.0436	0.0436
106	-0.2106	-0.1296	0.2473	243	-0.0089	0.1195	0.1198
107	0.0772	-0.0908	0.1192	294	-0.0213	0.0503	0.0546
108	0.0992	0.0209	0.1013	295	-0.0130	0.0967	0.0976
136	0.0196	-0.0024	0.0197	296	0.0410	0.3262	0.3288
137	0.0186	0.0000	0.0186	347	-0.0026	0.0412	0.0413
138	0.0198	0.0069	0.0210	348	0.0126	0.0810	0.0820
139	0.0236	-0.0002	0.0236	349	0.0434	0.1051	0.1137
140	0.0244	-0.0001	0.0244	401	0.0189	0.0552	0.0583
141	0.0248	0.0004	0.0248	402	0.0328	0.0997	0.1049
142	0.0247	0.0006	0.0247	455	0.0316	0.0531	0.0618
143	0.0239	0.0007	0.0239	456	0.0296	0.0702	0.0762
144	0.0220	0.0009	0.0220	508	0.0369	0.0386	0.0534
145	0.0181	0.0020	0.0182	509	0.0422	0.0507	0.0660
146	0.0110	0.0414	0.0429	562	0.0432	0.0471	0.0639
147	0.0182	0.0123	0.0220	563	0.0517	0.0543	0.0750
148	0.0245	0.0033	0.0247	616	0.0360	0.0381	0.0524
149	0.0272	-0.0071	0.0281	617	0.0538	0.0749	0.0922
150	0.0243	-0.0022	0.0244	670	0.0222	0.0161	0.0274
151	0.0241	-0.0056	0.0248	671	0.0005	-0.0006	0.0008
152	0.0189	0.0081	0.0205	724	0.0093	0.0070	0.0117
153	0.0189	0.0028	0.0192	725	0.0005	-0.0008	0.0009
154	0.0136	-0.0463	0.0483	778	-0.0006	0.0037	0.0038
155	-0.0077	-0.0033	0.0084	779	-0.0039	0.0036	0.0053

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s
v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s
mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Tabla V.24. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: NORESTE, H0=0.750 m, T=5 s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	-6.1420	-0.9695	6.2181	156	-4.2267	-1.9029	4.6354
85	-6.6387	-0.3598	6.6485	157	-7.5021	-5.0121	9.0224
86	-6.7313	-0.2292	6.7352	158	-4.0071	-4.2291	5.8260
87	-6.7877	-0.1387	6.7891	159	-4.8564	-3.4269	5.9437
88	-6.8057	-0.1156	6.8067	160	-10.4271	-6.0529	12.0566
89	-6.8191	-0.0409	6.8193	161	-10.6179	-6.3133	12.3531
90	-6.8027	0.1206	6.8037	162	-8.9858	-2.9048	9.4437
91	-6.7294	0.5044	6.7483	188	-4.6818	-2.4863	5.3010
92	-6.4782	1.1697	6.5829	189	-5.2839	-2.4262	5.8143
93	-5.8044	0.9140	5.8759	190	-4.7860	-0.0672	4.7864
94	-5.3585	0.7193	5.4066	191	-3.2333	-0.0998	3.2349
95	-5.0870	0.2422	5.0927	203	-5.2021	-0.2787	5.2096
100	-7.9197	-2.9105	8.4376	204	-5.4516	-0.3095	5.4604
101	-8.8538	-3.6343	9.5706	205	-5.3907	-0.3757	5.4038
102	-9.7676	-3.9522	10.5369	206	-4.8928	-0.4754	4.9158
103	-9.0608	-0.5094	9.0751	207	-3.7883	-0.6784	3.8485
104	-6.7349	-0.2593	6.7399	241	-3.1337	-2.1052	3.7752
105	-6.1035	1.6230	6.3156	242	-2.9589	-1.5058	3.3200
106	-17.2011	-5.7126	18.1249	243	-2.4565	-0.6562	2.5427
107	-15.1499	-5.9870	16.2900	294	-2.1896	-1.5638	2.6907
108	-12.5109	-2.7749	12.8149	295	-1.7636	-1.0885	2.0725
136	-6.0662	-1.5906	6.2713	296	-1.4954	-0.7722	1.6830
137	-6.5072	-2.0983	6.8371	347	-1.6615	-1.2515	2.0801
138	-7.3178	-2.3110	7.6740	348	-1.3226	-1.0641	1.6975
139	-7.5132	-0.0240	7.5133	349	-0.8279	-0.5063	0.9704
140	-7.1636	-0.0911	7.1641	401	-1.0807	-0.8654	1.3845
141	-6.9809	-0.1171	6.9819	402	-0.6996	-0.6006	0.9221
142	-6.9050	-0.1315	6.9063	455	-0.6506	-0.5363	0.8432
143	-6.8616	-0.1440	6.8631	456	-0.3265	-0.2635	0.4196
144	-6.9012	-0.1432	6.9027	508	-0.5923	-0.4609	0.7505
145	-7.1034	0.1909	7.1059	509	-0.3670	-0.3097	0.4803
146	-7.5190	4.1655	8.5957	562	-0.3608	-0.3336	0.4914
147	-6.5630	1.6597	6.7696	563	-0.2382	-0.2445	0.3414
148	-5.8245	0.7606	5.8739	616	-0.1937	-0.2435	0.3111
149	-5.7993	0.0836	5.7999	617	-0.2153	-0.3749	0.4324
150	-5.9775	-0.2418	5.9824	670	-0.0632	-0.1617	0.1736
151	-6.1775	-0.7134	6.2185	671	0.0277	-0.1869	0.1889
152	-6.3425	-1.3756	6.4900	724	0.0350	-0.1280	0.1327
153	-6.4389	-2.4873	6.9026	725	0.1276	-0.1052	0.1654
154	-6.6705	-3.2267	7.4099	778	0.0526	-0.0896	0.1039
155	-5.4442	-0.6389	5.4816	779	0.0864	-0.1577	0.1798

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s

v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s

mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Tabla V.26. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: SURESTE, H0=0.375 m, T=5 s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	0.0098	0.0020	0.0099	156	0.0146	0.0122	0.0190
85	0.0109	0.0011	0.0109	157	0.0358	0.0228	0.0425
86	0.0114	-0.0003	0.0114	158	0.0200	0.0163	0.0258
87	0.0114	-0.0021	0.0116	159	0.0239	0.0122	0.0268
88	0.0107	-0.0067	0.0126	160	0.0371	0.0146	0.0398
89	0.0073	-0.0057	0.0093	161	0.0381	0.0139	0.0406
90	0.0043	0.0004	0.0043	162	0.0366	0.0089	0.0377
91	0.0048	0.0001	0.0048	188	0.0077	0.0008	0.0078
92	0.0046	0.0007	0.0046	189	0.0067	-0.0033	0.0074
93	0.0044	0.0020	0.0048	190	0.0044	-0.0003	0.0044
94	0.0051	0.0023	0.0055	191	0.0039	-0.0011	0.0040
95	0.0063	-0.0009	0.0063	203	0.0060	-0.0012	0.0062
100	-0.0053	0.0133	0.0144	204	0.0051	-0.0020	0.0055
101	0.0031	0.0093	0.0098	205	0.0122	-0.0041	0.0129
102	0.0087	0.0144	0.0168	206	0.0290	-0.0028	0.0291
103	0.0130	0.0003	0.0130	207	0.0370	-0.0019	0.0371
104	0.0117	0.0001	0.0117	241	0.0039	0.0013	0.0041
105	0.0134	-0.0013	0.0135	242	0.0018	-0.0052	0.0055
106	0.0446	0.0158	0.0473	243	-0.0032	-0.0205	0.0208
107	0.0323	0.0151	0.0357	294	0.0007	0.0033	0.0034
108	0.0297	0.0097	0.0312	295	-0.0005	-0.0007	0.0009
136	0.0101	0.0003	0.0101	296	-0.0052	-0.0151	0.0159
137	0.0100	0.0008	0.0100	347	-0.0003	0.0034	0.0034
138	0.0100	0.0049	0.0111	348	-0.0014	0.0025	0.0028
139	0.0105	-0.0002	0.0105	349	-0.0022	0.0024	0.0033
140	0.0093	-0.0006	0.0093	401	-0.0002	0.0034	0.0034
141	0.0093	-0.0007	0.0093	402	-0.0002	0.0038	0.0038
142	0.0110	-0.0014	0.0111	455	0.0004	0.0035	0.0035
143	0.0170	-0.0012	0.0171	456	0.0005	0.0032	0.0033
144	0.0222	-0.0005	0.0222	508	0.0009	0.0041	0.0042
145	0.0215	-0.0009	0.0215	509	0.0013	0.0036	0.0038
146	0.0209	-0.0145	0.0255	562	0.0015	0.0053	0.0055
147	0.0129	-0.0022	0.0131	563	0.0027	0.0045	0.0052
148	0.0087	0.0024	0.0090	616	0.0015	0.0059	0.0061
149	0.0088	0.0003	0.0088	617	0.0043	0.0086	0.0097
150	0.0101	-0.0080	0.0129	670	0.0005	0.0054	0.0054
151	0.0094	-0.0188	0.0210	671	-0.0002	0.0070	0.0070
152	0.0030	-0.0095	0.0099	724	-0.0012	0.0043	0.0045
153	-0.0002	0.0143	0.0143	725	-0.0045	0.0043	0.0062
154	0.0078	0.0432	0.0439	778	-0.0011	0.0021	0.0024
155	0.0161	0.0008	0.0162	779	-0.0033	0.0092	0.0097

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s

v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s

mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Tabla V.27. DIRECCIÓN PREDOMINANTE: SURESTE, H0=0.750 m, T=5 s

NUM. CELDA	u	v	mod V	NUM. CELDA	u	v	mod V
84	0.0195	0.0050	0.0201	156	0.0348	0.0044	0.0351
85	0.0229	-0.0001	0.0229	157	0.0925	0.0258	0.0960
86	0.0232	-0.0041	0.0235	158	0.0591	0.0158	0.0612
87	0.0213	-0.0045	0.0217	159	0.0848	0.0223	0.0877
88	0.0194	-0.0069	0.0206	160	0.1166	0.0391	0.1230
89	0.0152	0.0057	0.0162	161	0.1173	0.0420	0.1245
90	0.0186	0.0041	0.0191	162	0.1115	0.0291	0.1153
91	0.0209	-0.0039	0.0213	188	0.0172	0.0081	0.0190
92	0.0183	-0.0059	0.0193	189	0.0192	-0.0009	0.0192
93	0.0143	-0.0056	0.0153	190	0.0174	-0.0008	0.0175
94	0.0103	-0.0029	0.0107	191	0.0170	-0.0021	0.0171
95	0.0086	-0.0060	0.0105	203	0.0341	-0.0030	0.0342
100	0.0048	0.0247	0.0251	204	0.0411	0.0003	0.0411
101	0.0203	0.0188	0.0277	205	0.0471	-0.0019	0.0471
102	0.0320	0.0341	0.0468	206	0.0616	0.0004	0.0616
103	0.0426	0.0003	0.0426	207	0.0637	0.0021	0.0638
104	0.0388	-0.0003	0.0388	241	0.0048	0.0176	0.0183
105	0.0442	-0.0135	0.0462	242	0.0073	0.0010	0.0074
106	0.1428	0.0444	0.1495	243	-0.0007	-0.0477	0.0477
107	0.1049	0.0469	0.1149	294	-0.0034	0.0188	0.0191
108	0.0960	0.0318	0.1011	295	-0.0031	0.0211	0.0214
136	0.0226	0.0000	0.0226	296	0.0007	0.0365	0.0365
137	0.0227	0.0045	0.0231	347	-0.0022	0.0156	0.0158
138	0.0252	0.0226	0.0338	348	-0.0014	0.0243	0.0243
139	0.0315	-0.0001	0.0315	349	0.0041	0.0322	0.0325
140	0.0315	-0.0008	0.0315	401	0.0033	0.0194	0.0196
141	0.0352	0.0002	0.0352	402	0.0070	0.0330	0.0337
142	0.0397	-0.0003	0.0397	455	0.0086	0.0198	0.0216
143	0.0465	0.0030	0.0466	456	0.0090	0.0241	0.0258
144	0.0423	0.0002	0.0423	508	0.0102	0.0183	0.0209
145	0.0383	-0.0018	0.0383	509	0.0131	0.0202	0.0241
146	0.0413	-0.0334	0.0532	562	0.0129	0.0236	0.0269
147	0.0305	-0.0157	0.0343	563	0.0182	0.0240	0.0302
148	0.0204	-0.0034	0.0206	616	0.0114	0.0241	0.0267
149	0.0198	-0.0085	0.0216	617	0.0238	0.0448	0.0507
150	0.0173	-0.0058	0.0182	670	0.0066	0.0175	0.0188
151	0.0183	-0.0154	0.0239	671	0.0002	0.0254	0.0254
152	0.0126	-0.0020	0.0128	724	0.0011	0.0106	0.0107
153	0.0113	0.0296	0.0316	725	-0.0116	0.0117	0.0165
154	0.0251	0.0706	0.0750	778	0.0007	0.0039	0.0040
155	0.0359	0.0007	0.0359	779	-0.0060	0.0211	0.0219

u componente horizontal en dirección norte de la velocidad de la corriente en m/s

v componente horizontal en dirección este de la velocidad de la corriente en m/s

mod v = $\sqrt{u^2 + v^2}$ magnitud de la velocidad en m/s



Para determinar las condiciones geométricas así como la ubicación y orientación de algunas estructura marítimas (por ejemplo una escollera), es necesario contar con las herramientas que estimen el régimen de oleaje y de las corrientes que genera.

La mayoría de los métodos de cálculo se basan en hipótesis que en la práctica son difíciles de cumplir por lo que existe desconfianza en sus resultados y pueden dar lugar a errores en los diseños y operación .

En el presente trabajo se comentó y discutió las ecuaciones que describen las corrientes marinas inducidas por el oleaje, se utilizó la teoría lineal. Teoría de oleaje que si bien, no considera el transporte de masa, se logran estimaciones adecuadas.

El modelo matemático de corrientes requiere de la batimetría de la zona cercana a la línea de playa.

En las campañas de medición que se realizaron en la zona de estudio se pudo observar que en los sitios en donde se midieron las velocidades, se verificó que eran cercanas a las calculadas con el modelo matemático propuesto.

Las velocidades medidas fueron aproximadas a los 0.20 m/s la cual es menor a la velocidad incipiente de transporte del material de la playa, por lo que se puede decir que no hay un transporte litoral importante para las condiciones ordinarias del oleaje (fuera de la temporada ciclónica).





BIBLIOGRAFÍA

COMPENDIO DE HIDRÁULICA MARÍTIMA. FUENTES Mariles Óscar y SÁNCHEZ Bribiesca José Luis. Instituto de Ingeniería, UNAM. 1985

OCEAN WAVE ENERGY CONVERSIÓN. McCORMICK Michael E.

WATER WAVE MECHANICS FOR ENGINEERS AND SCIENTIST. DEAN R. Dalrymple. 1991

COASTAL ENGINEERING. HORIKAWA, Kiyoshi. 1978

INGENIERÍA DE COSTAS. FRIAS V. Armando et. al. Editorial Limusa, Asociación Mexicana de Ingeniería Portuaria.

TESIS CONSULTADAS

PROPAGACIÓN DEL OLEAJE EN LA PROXIMIDAD DE LA COSTA. FUENTES Mariles Óscar. División de estudio de Posgrado, UNAM.,1996