UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA SIMETRÍA EN EL ARTE A TRAVÉS DE LA HISTORIA

T E S I S

Q U E P A R A O B T E N E R E L T I T U L O D E :

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

C R I S T I N A A L V A R A D O V A L E N C I A

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

2005

INDICE

INTRODUCCIÓN

La simetría ha jugado un papel importante a través de la historia. Ha estado presente en la vida del hombre, y si éste llegase a desaparecer, la simetría seguiría allí, en la naturaleza.

La experiencia que como docente he adquirido en la Escuela Nacional Preparatoria, en el Colegio de Matemáticas, y el interés que desde hace tiempo tengo por el arte, me condujeron a desarrollar la presente tesis.

Esta investigación es una propuesta para un curso de Temas Selectos de Matemáticas. Creo que a la geometría se le ha dado poco énfasis, pues el actual programa de Temas Selectos de Matemáticas (materia optativa para estudiantes de área físico-matemáticas) se limita al álgebra, retomando conceptos que el estudiante de nivel medio superior, en algún momento trabajó: conjuntos y lógica, cálculo combinatorio y teorema del binomio, ecuaciones y desigualdades, y matrices.

Considero que el tema de la simetría, y en particular el tratamiento que se da en los siguientes tres capítulos, es una propuesta atractiva para los estudiantes de nivel bachillerato. Es una alternativa no sólo para los jóvenes de área físico-matemáticas, sino sobre todo y en particular para los que rehuyen y quieren evitar a toda costa las matemáticas, para aquellos que eligen el área de arte y humanidades pensando que se librarán de la asignatura.

Confío en que el enfoque que presento aquí podría ayudar a esos chicos a ver las matemáticas, en particular la geometría, desde otra perspectiva: sin fórmulas ni expresiones o lenguaje que les son difíciles de entender.

Es por eso que el primer capítulo inicia con una gran introducción a la simetría refiriéndome a ella, en el sentido estricto, como la proporción equilibrada de las partes de un todo y la armonía existente entre dichas partes. La simetría se encuentra presente desde en un copo de nieve hasta en una pintura rupestre. Se muestra una serie de configuraciones geométricas que aparecen en la naturaleza, tales como algunos tipos de plantas, crustáceos, insectos y cristales. La simetría bilateral, que se encuentra presente en organismos que tienen mitades derechas e izquierdas casi idénticas, es una característica de los organismos multicelulares, particularmente animales. La simetría radial, hace acto de presencia en la estrella de mar, la flor o en los ordenados gajos de cualquier naranja.

En el mundo orgánico es frecuente la simetría pentagonal (condición de un organismo que es divisible en diez partes similares por cinco planos). En el mundo inorgánico la simetría hexagonal, un ejemplo de ello son los cristales de nieve.

Expongo también cómo el hombre, en distintas civilizaciones, reproduce y crea formas geométricas, que se vuelven parte de su tradición y cultura social. A través del tiempo, el hombre siempre ha utilizado la idea de simetría para entender y crear orden, belleza y perfección. Por ejemplo, el famoso dibujo de los *Cuadernos* de Leonardo Da Vinci, o la simetría de las manos explotada por muchos artistas.

Surgen preguntas sobre el significado y el motivo por el cual se pintaron y grabaron las paredes rocosas de cuevas y refugios que fueron habitados por las sociedades humanas del pasado. Y las respuestas son que los seres humanos pintaron y grabaron en las superficies rocosas lo que la realidad emotivamente les causó, estimuló o provocó, haya sido el hambre, la sed, la enfermedad, la muerte o el miedo a la misma, así como también la ingestión de psicotrópicos, en combinación con los elementos y fenómenos naturales que observaron: la oscuridad, el sol, la luna, las estrellas, los eclipses, el agua, la lluvia, el frío, el viento, los terremotos, los animales, y también la relación con los seres humanos, la guerra, el sexo, la reproducción biológica y fertilidad, la Tierra, las plantas, las montañas, la noche, el día, etcétera.

Se supone que al principio el hombre usó los elementos antedichos como representaciones de sus dioses y de ciertos fenómenos físicos, pero más tarde se encontró que los usaba simplemente para producir armonía y ritmo, es decir, para producir belleza, para adornar, para decorar. Independientemente del origen y significación, usó formas específicas como la espiral, el círculo, el medio círculo cortado, la “S”, la línea ondulada, la línea en zig-zag, y la línea recta.

Aparecen imágenes de petrograbados y pinturas rupestres en el Estado de Coahuila y el norte de Sinaloa. Se considera que la región del Suroeste de los Estados Unidos, tiene la concentración más grande del arte rupestre de América.

Los autores de estas obras conocían de simetría, de proporción y de proyecciones especulares que se repiten en franjas tanto pintadas como grabadas.

La tradición de diseños Kolam de Tamil Nadu, India, viene de hace muchos siglos y actualmente sigue siendo una práctica común entre mujeres de la ciudad y de zonas rurales.

Y cómo olvidar que la geometría ha estado presente en la actividad diaria de los mayas: diseño de sus ciudades, las formas de sus edificios, cerámica y tejidos.

Y aunque cambien las culturas y creencias, y cambien los dioses y las formas de los templos, la estética simétrica perdura y ha sido elemento predominante del diseño en arquitectura. En la cerámica se utiliza la simetría radial. En la elaboración de edredones ya sea para uso o para decorar, se usa la simetría. Las culturas de las alfombras tienen una larga tradición del uso de la simetría. El estudio estético de las máscaras revela un interés por el equilibrio, el juego de simetría y de asimetría, entre muchos otros. En la búsqueda de otras alternativas dentro del arte se ha encontrado cómo combinar éste y la ciencia del diseño simétrico.

Junto con la textura, color, proporción y otros factores, la simetría desempeña un papel importante en la determinación de la estética de un objeto.

En el capítulo segundo, me concentro en hacer un análisis más específico sobre las simetrías aplicadas al plano. Tomo como punto de partida los movimientos de: traslación, rotación, reflexión y reflexión con deslizamiento, para generar una greca, los mismos que sirven de referencia para desarrollar un mosaico en el plano. Es decir, aplico lo que matemáticamente se define como simetría.

Los ejemplos de las grecas se tomaron de las ruinas arqueológicas de Mitla, en Oaxaca, México. Esta zona se caracteriza por contener en todo su conjunto, las siete grecas que se pueden generar siguiendo una línea recta.

La simetría puede hallarse, observarse, describirse y analizarse, generándonos con ello una experiencia estética de efectos emotivos y de sensibilidad en su percepción y conocimiento. En particular esos efectos se generaron en mí al contemplar por primera vez los mosaicos creados por los árabes en la Alhambra, en Granada, España. Y fueron precisamente aquellos los que me condujeron ha reconstruir dichos mosaicos aplicando las cuatro simetrías.

La formalización de todas esas regeneraciones, tanto de grecas como de mosaicos, viene especificada en el tercer capítulo.

Enuncio la definición de cada uno de los movimientos de simetría para cubrir una franja y para cubrir el plano. Hago una especificación sobre los grupos cristalográficos. Las simetrías aplicadas al plano se derivan de estudios previos que el químico ruso Fedorov hizo sobre los cristales. Primero en tercera dimensión considerando 230 grupos, y 17 grupos en el caso bidimensional después. De igual manera enuncio las bases sobre las cuales está apoyada la notación internacional de los grupos cristalográficos.

Me agrada apoyarme en muchas imágenes, pues creo que es una excelente herramienta para ayudar al estudiante a comprender mejor lo que realmente está sucediendo.

Las imágenes muestran cómo se generan las traslaciones, rotaciones, reflexiones y reflexiones con deslizamiento; además de la definición, las imágenes resaltan lo que es un polígono regular, un paralelogramo fundamental y un motivo generador; con imágenes muestro lo que son los ejes de simetría y los centros de los giros; las imágenes muestran las características de las siete grecas, así como las de los diecisiete grupos cristalográficos.

Siguiendo el algoritmo, y con mucho cuidado, se puede identificar el grupo cristalográfico al cual pertenece cualquier mosaico que llene el plano con polígonos regulares.

Finalmente doy una breve explicación sobre lo que significó la presencia de los árabes en España, la gran herencia que dejaron en ese país.

Y falta remarcar la inquietud que se ha generado en torno a los estudiosos de los mosaicos de la Alhambra, respecto a si existen todos los grupos cristalográficos. Hay quienes aseguran que sólo se encuentran trece de los diecisiete grupos cristalográficos, y por el contrario, están los que garantizan los diecisiete. Sin embargo, y de acuerdo con las investigaciones y análisis que desarrollé, sólo encontré dieciséis. Pues a mi juicio, de las dos imágenes que se dice pertenecen al grupo p3m1, una no lo contiene, y la otra, demasiado rebuscada, no cubre el plano, simplemente forma el motivo sin traslaciones. Las traslaciones son precisamente las que recubren el plano.

CAPÍTULO I

No existe nada que sea bueno o malo,
sino que es el pensamiento quien lo determina.
William Shakespeare, *Hamlet*

Para tratar el concepto de la belleza en matemáticas y su relación con la simetría, mostraré una serie de configuraciones geométricas que aparecen en la naturaleza: en algunos tipos de plantas, crustáceos, insectos y cristales. Expondré también cómo el hombre, en distintas civilizaciones, reproduce y crea formas geométricas, que se vuelven parte de su tradición y cultura social.

1. LA SIMETRÍA EN LA NATURALEZA

Generalmente el término simetría se aplica cuando existe una "buena proporción" entre las diversas partes que constituyen un todo. En ese sentido, la simetría se asocia a algún tipo de equilibrio en la manera en que distintos elementos se integran para formar un objeto, y se le suele relacionar con la belleza en las formas de la naturaleza y en el arte. La definición de simetría en matemáticas se tratará en el segundo capítulo.

Algunas formas geométricas que aparecen en la naturaleza nos inducen a reflexionar sobre los distintos tipos de simetría. Ejemplos de esto son los cristales de nieve, los pétalos de una orquídea, las hojas de un helecho, el centro de un girasol, un panal de abejas, la concha en espiral producida por un nautilo (molusco), etcétera. Aparecen aquí las simetrías bilateral, de rotación, de traslación y de reflexión (estas tres las explicaré en el segundo capítulo), y casi simetrías, de espiral. La simetría espiral tiene la particular virtud de ser la forma preferida por la naturaleza es adoptada en el mundo viviente en todo los niveles anatómicos y fisiológicos y existe en casi todas las formas estructurales del universo.

Cuando un objeto que es simétrico se transforma en otro que lo es menos, se está haciendo referencia a una ruptura de la simetría. La imagen del Nautilo muestra el perfil espiral que lo caracteriza, y los compartimentos regulares constituyen una ruptura de la simetría espiral. Lo mismo pasa con los cuernos del borrego cimarrón y la molécula de ADN.


Copo de nieve


Orquídea

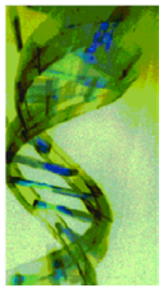

Hoja de un helecho


Centro de un girasol


Panal de abejas

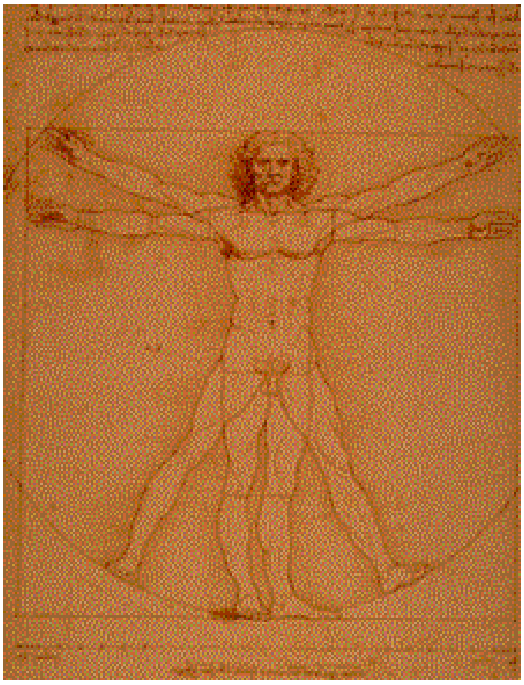

Caparazón de un Nautilo


Borrego cimarrón


Molécula de ADN

A través del tiempo, el hombre siempre ha utilizado la idea de simetría para entender y crear orden, belleza y perfección. El arquitecto Vitruvio, quien vivió varios siglos después que Euclides y parece haber pertenecido al primer periodo cristiano (no se tiene dato exacto), dijo que la simetría da concordancia a las proporciones del conjunto[1]. Tatarkiewicz escribió: "La división de opiniones se acentuó más en las artes visuales: la discusión trataba en problema de si la belleza existe en la escultura que se admira, o en la mente del espectador: si es la mente quien crea la belleza, o simplemente la descubre. La controversia produjo una terminología especial: se distinguía entre belleza objetiva, denominada *simetría*, y otro tipo de belleza denominada *euritmia,* que no requería que se dieran objetivamente unas buenas proporciones..."[2]

Leonardo Da Vinci (1452❸1519) patenta la influencia de las ideas de Vitruvio, acerca de medidas humanas, en su famoso dibujo tomado de sus *Cuadernos*.

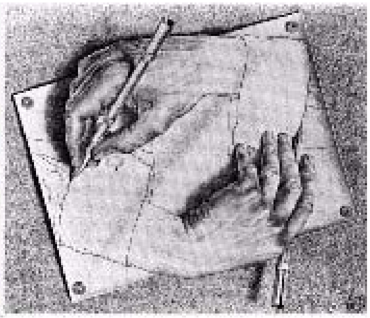

Proporciones humanas: el famoso dibujo de los *Cuadernos* de Leonardo Da Vinci.

[1] Dan Pedoe, La geometría en el arte. 1982. p. 15
[2] W. Tatarkiewicz, *Historia de seis ideas. Arte, belleza, forma, creatividad, mimesis, experiencia estética*. 1996. p. 235

Éste es la traslación de las medidas perfectas en un ser humano ideal, que puede inscribirse tanto en un círculo como en un cuadrado. Estas dos formas geométricas eran puestas en relación con la divinidad, puesto que se consideraban las más exactas y perfectas, por la correspondencia de sus partes con el todo y entre sí. Eso mismo era lo que se pretendía establecer respecto al cuerpo humano, considerándose que el origen de las medidas de todas las cosas podía encontrarse en las medidas corporales. Este cuadro se contempló por primera vez en 1511[3].

Otro ejemplo claro es la simetría de las manos que algunos artistas han utilizado como recurso expresivo.

Miguel Ángel presenta la mano de Adán a imagen y semejanza de la de su Creador.



Grabado del artista holandés Maurits Cornelius Escher.

Imagen creada por publicistas contemporáneos.

El tipo más familiar de simetría es la simetría bilateral conocida también como simetría de la imagen del espejo. Por ejemplo la letra T: cuando ésta se refleja a lo largo de un eje vertical (situado verticalmente a la mitad de la letra), aparece igual.

En biología, la simetría bilateral es una característica de los organismos multicelulares, particularmente animales. Un organismo simétrico bilateral es aquel que tiene mitades derechas e izquierdas casi idénticas.

La mayoría de los animales, incluyendo seres humanos, son casi simétricos bilaterales. Las excepciones son esponjas (ninguna simetría), equinodermos, que significa piel espinosa, como los erizos, y celentéreos, como las medusas (simetría radial: condición en la que un animal puede dividirse en dos mitades iguales por cualquiera de los diversos planos que pasan por el centro).

3 Genios de la Pintura (c), 1999, Ediciones Dolmen S.L., España.

Esponja

Medusa

Erizos

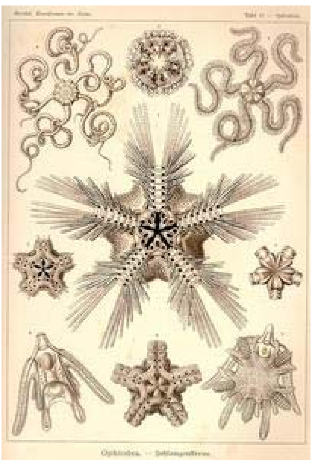
De hecho, si el hombre desapareciese o si la simetría no hubiese llegado a implantarse en él, ahí seguiría la simetría radial de la estrella de mar o la flor, y los ordenados gajos de cualquier naranja.

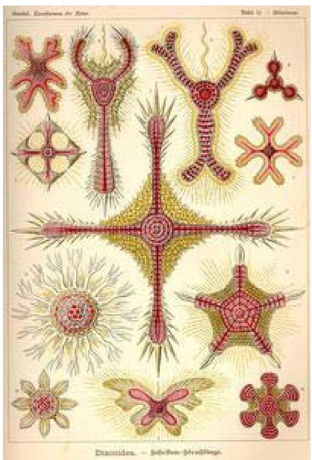
Las flores son notables por sus colores y su simetría cíclica. Las siguientes fotografías muestran un lirio con su simetría triangular, y la orquídea con simetría pentagonal, la más común entre las flores.

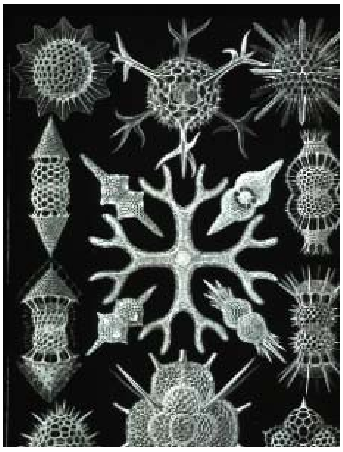
Lirio

Orquídea

La simetría también aparece con frecuencia entre los animales inferiores (unicelulares). Las figuras siguientes son ejemplos de radiolarios, su nombre lo deben a que sus finas prolongaciones del cuerpo o seudópodos se arreglan de manera radial y con ellas capturan su alimento y realizan desplazamientos verticales.

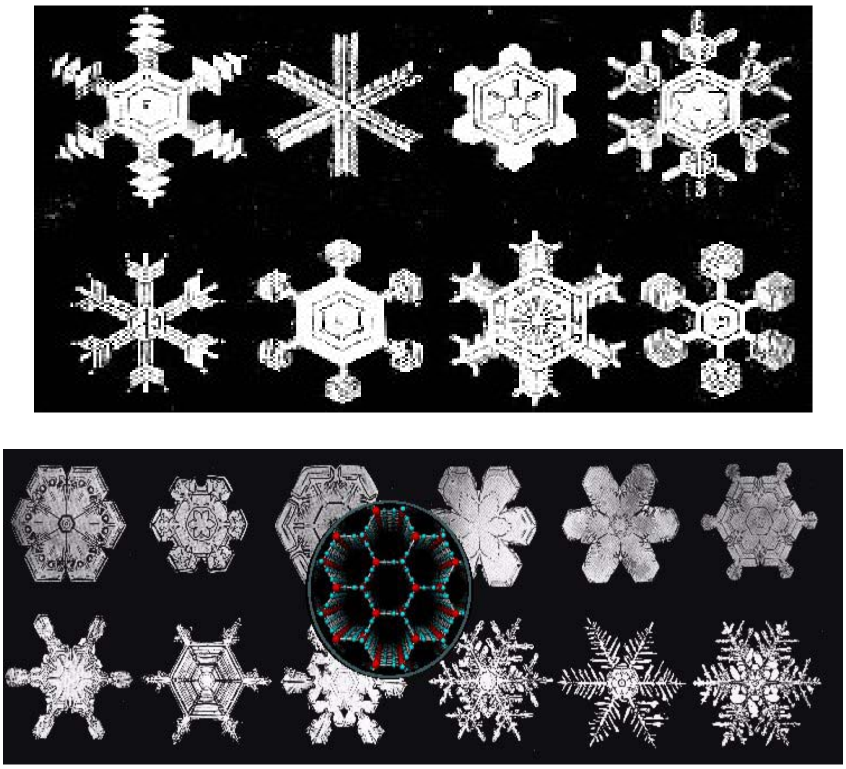






Las formaciones cristalinas de minerales nos recuerdan que mientras la simetría pentagonal se repite en el mundo orgánico, no la encontramos entre la naturaleza inorgánica. Por ejemplo, los cristales de nieve, se conocen por su simetría hexagonal, la razón de dicha simetría se halla en los enlaces entre átomos de hidrógeno y oxígeno para formar agua, y en las interacciones entre las moléculas de agua que cristalizan en hielo, interacciones que presentan ya la misma simetría que tendrán los cristales.

La figura muestra algunas de estas pequeñas maravillas del agua helada.



No hay dos cristales de nieve iguales pero la simetría de todos es la misma. La razón se encuentra en la estructura cristalina del hielo que tiene exactamente la misma simetría y la transmite a los cristales.

2. LA SIMETRÍA Y EL HOMBRE

Aunque en un principio fuese de forma intuitiva más que racional, el hombre comprende lo simétrico desde sus orígenes y ha sabido encontrar relaciones de simetría en los lugares más insospechados y concebir modos de explotarla o celebrarla.

SIMETRÍA EN LA PREHISTORIA

Las superficies de la roca, empleadas por los artistas humanos, preservan un expediente gráfico de la prehistoria en Europa, África, Asia, Australia y América.

El arte rupestre consiste en 2 categorías importantes: pictografías y petroglifos.

La pictografía es el uso de pigmentos. La supervivencia de pinturas antiguas es atribuible al uso de pigmentos minerales: manganeso, hematita, malaquita, yeso, limonita, arcillas y varios óxidos.

Los petroglifos se crean con la remoción de la roca, ya sea rasguñando, por el desgaste, picando, tallando, perforando, por medio de la incisión y esculpiendo.

El arte rupestre se caracteriza por su sencillez y complejidad, es cautivador y mágico, es una expresión de formas de ver el mundo, de maneras de pedir, de curar, de comunicar y de contar. De igual manera surgen las preguntas de qué significa y por qué se pintaron y grabaron las paredes rocosas de cuevas y abrigos y de frentes y bloques de lugares abiertos que fueron habitados por las sociedades humanas del pasado.

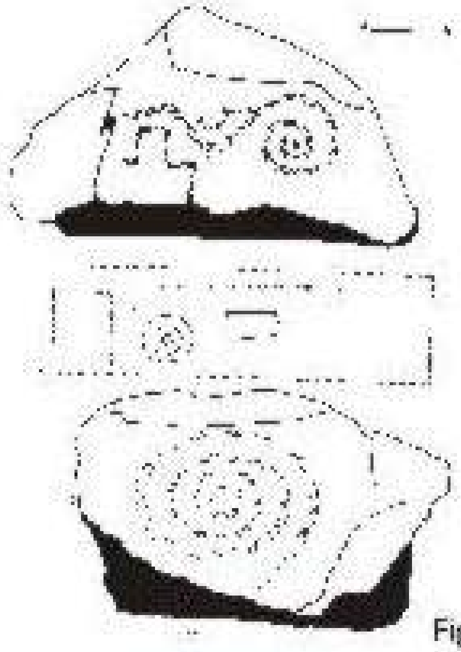
El arte rupestre como forma cultural o medio de trabajo es el resultado de la experiencia estética de su realizador debido a la realidad que lo rodea (necesidades de representación y conocimiento de la realidad)

Es decir, los seres humanos pintaron y grabaron en las superficies rocosas lo que la realidad emotivamente les causó, estimuló o provocó, haya sido el hambre, la sed, la enfermedad, la muerte o el miedo a la misma, así como también la ingestión de psicotrópicos, en combinación con los elementos y fenómenos naturales que observaron: la oscuridad, el sol, la luna, las estrellas, los eclipses, el agua, la lluvia, el frío, el viento, los terremotos, los animales, y también la relación con los seres humanos, la guerra, el sexo, la reproducción biológica y fertilidad, la Tierra, las plantas, las montañas, la noche, el día, etcétera.

Muy a menudo las formas específicas como antropomorfo, zoomorfo, fitomorfo, astromorfo, se ligan a su vez a toda clase de cosas: los antropomorfos a sexo, masculino, femenino, indeterminado, cazador, dios, etcétera, lo zoomorfo a mamífero, cuadrúpedo, coyote, venado o borrego cimarrón, animal sagrado, animal protector, etcétera, lo fitomorfo a fanerógamas, criptógamas, xerófitas, maíz, peyote, psicotrópicos, medicina, fertilidad, etcétera, y los astromorfos al sol, estrellas, luna, etcétera. Para los dibujos lineales rectos, curvos y combinados: cuadrados, rectángulos, triángulos, rombos, trapecios, zig-zags, cruces, puntos, círculos, círculos concéntricos, curvas, espirales, etcétera, a variadas y ricas interpretaciones, muchas veces de gran imaginación y fantasía relacionadas con toda clase de cosas: calendario, contadores, ideogramas, lenguaje, magia, religión, elementos naturales o simplemente con aspectos decorativos.

Cada una de estas formas, independientemente de sus conexiones a toda clase de cosas, objetos e incluso fenómenos, poseen componentes primarios geométricos.

Las figuras 1A y 1B muestran una serie de patrones lineales que se detectaron en los petroglifos y pinturas rupestres del norte de Sinaloa.



Figuras 1 A

Petrograbados del Norte de Sinaloa del sitio N8 II-20 "Cerro Caposoya". Su grafica muestra formas de representacion geometrica rectilinea, curvilinea y combinada (Tomado de Mendiola, 1994 p. 308)

Se supone que al principio el hombre usó los elementos antedichos como representaciones de sus dioses y de ciertos fenómenos físicos, pero más tarde se encontró que los usaba simplemente para producir armonía y ritmo, es decir, para producir belleza, para adornar, para decorar.

El pintor mexicano Adolfo Best Maugard (1891❸1964) identifica en el arte de todos los pueblos 7 elementos primarios y señala que las grecas y motivos ornamentales que se observan en las obras de arte indígena (azteca, maya, totonaca, etcétera.) combinadas con los elementos europeos y chinos, y sin perder su carácter y fuerza, formaron el arte colonial y el arte popular actual.

Estos 7 motivos, independientemente del origen y significación, se constituyen de las siguientes formas específicas. 1. Espiral, 2. Círculo, 3. El medio círculo cortado, 4. S o "curva de la belleza", 5. Línea ondulada, 6. Línea en zig-zag, y 7. Línea recta. Fig. 2

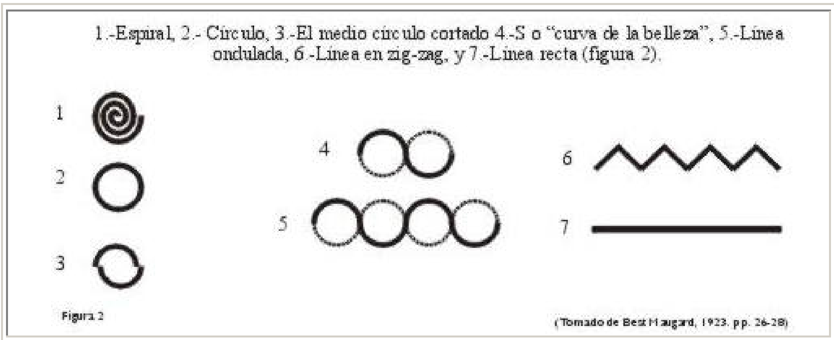


Fig. 2

Todos estos motivos en asociación por su misma forma específica (curvas, círculos y rectas) y combinados y/o mezclados, dan como resultado elementos abstractos tales como las grecas, círculos y cuadrados concéntricos. Fig. 3 y 4

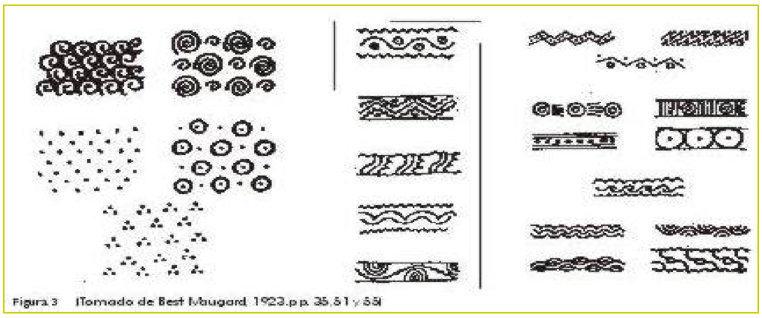


Fig. 3

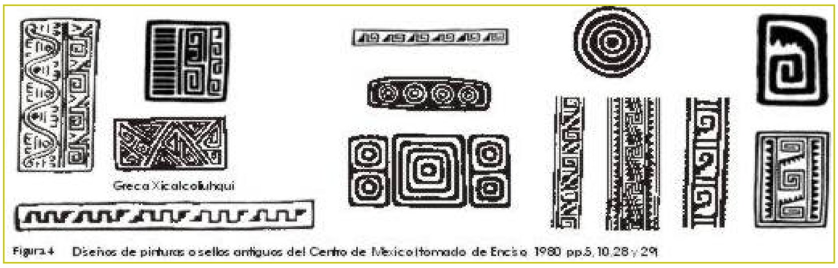
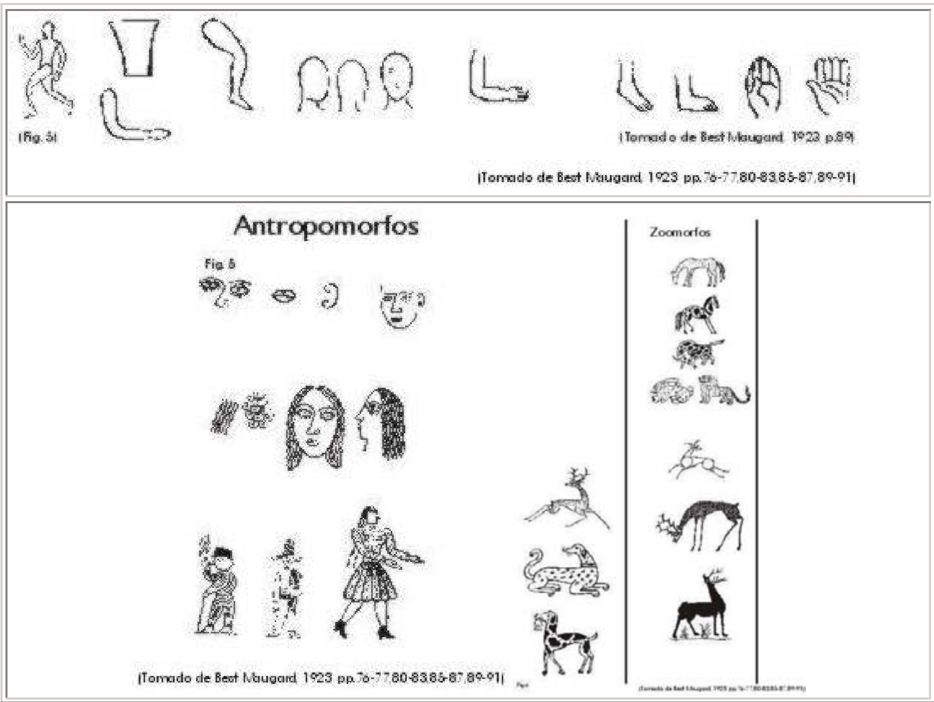


Fig. 4

Así también dando origen a los motivos naturalistas: antropomorfos, zoomorfos, fitomorfos, astromorfos, iglesias, casas y kioscos (Fig. 5❸9),



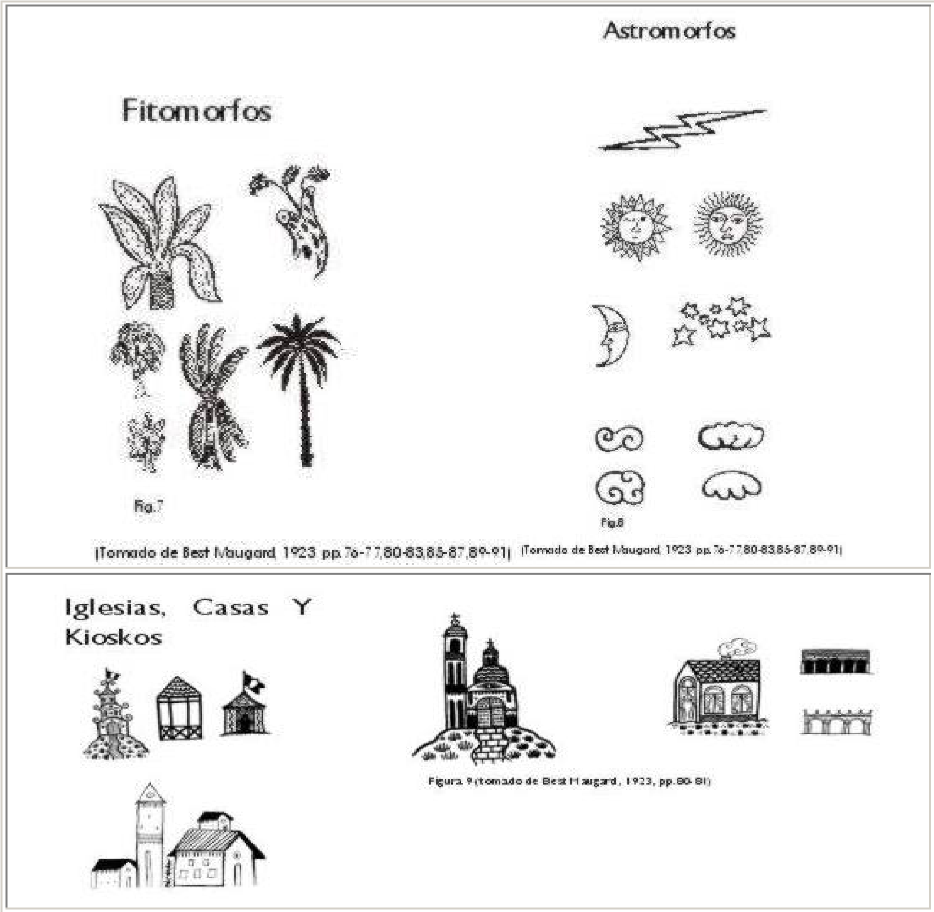


Fig. 5-9

entre otras formas que en su conjunto son materia prima para el arte mexicano. Fig. 10❸12

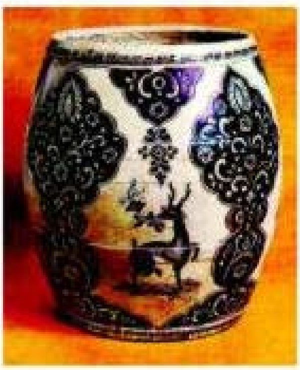


Figura 10A Macetón de cerámica de Talavera de la segunda mitad del siglo XVIII y perfiles están en gris. La figura zoomorfa (venado), así como las fitomorfas y tienen gran semejanza con las que presenta Best Maugard (op.cit)

Figura 10B Jarrón de Talavera de finales del siglo XVIII. Figura de mujer con abanico (las fotos se tomaron del libro de Peón Soler, Alejandra y Leonor Cortina 1973)

Fig. 10

Figura 11 Cerámica actual de Mata Ortiz, Chihuahua, elaborada por Héctor Gallegos y Graciela Martínez (foto tomada de Hills, Jim, 1999 p.71)

Fig. 11

Fig. 12

Las figuras 13 y 14 son ejemplos de patrones lineales en la gráfica de petrograbados de Coahuila.

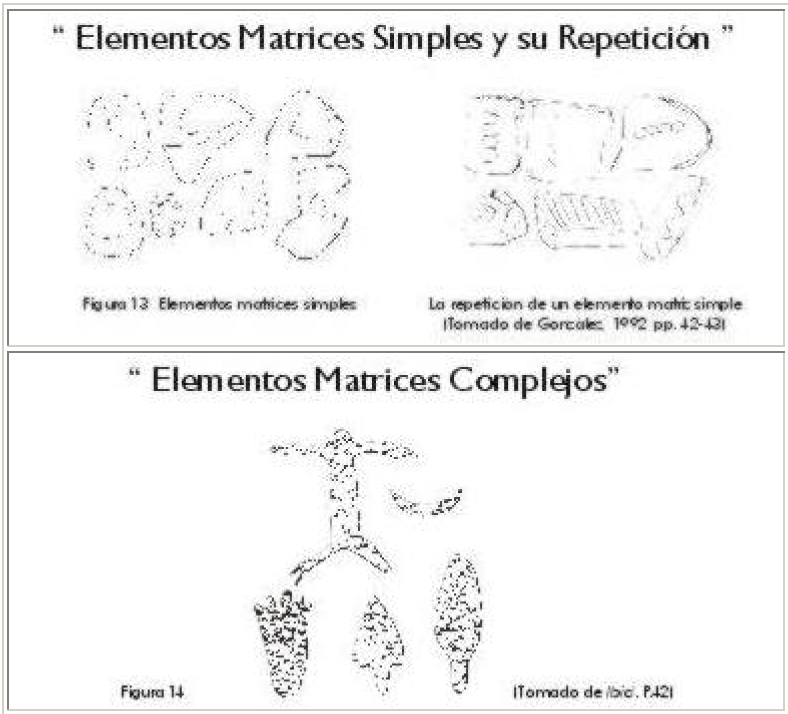


Fig. 13 y 14

Los elementos matrices simples se constituyen de líneas rectas que forman greca simple, espiral angular, zig-zags, cuadrado, triangulo, rectángulo, rombo, etcétera; líneas curvas de las que se desprenden curvas simples, círculos unitarios, círculos concéntricos, punta, espiral curvilínea, etcétera; y combinadas que son curvas y rectas unidas.

Las figuras 15, 16A, 16B y 16C, son ejemplos de patrones lineales en la gráfica de petrograbados y pinturas rupestres en el norte de Sinaloa.

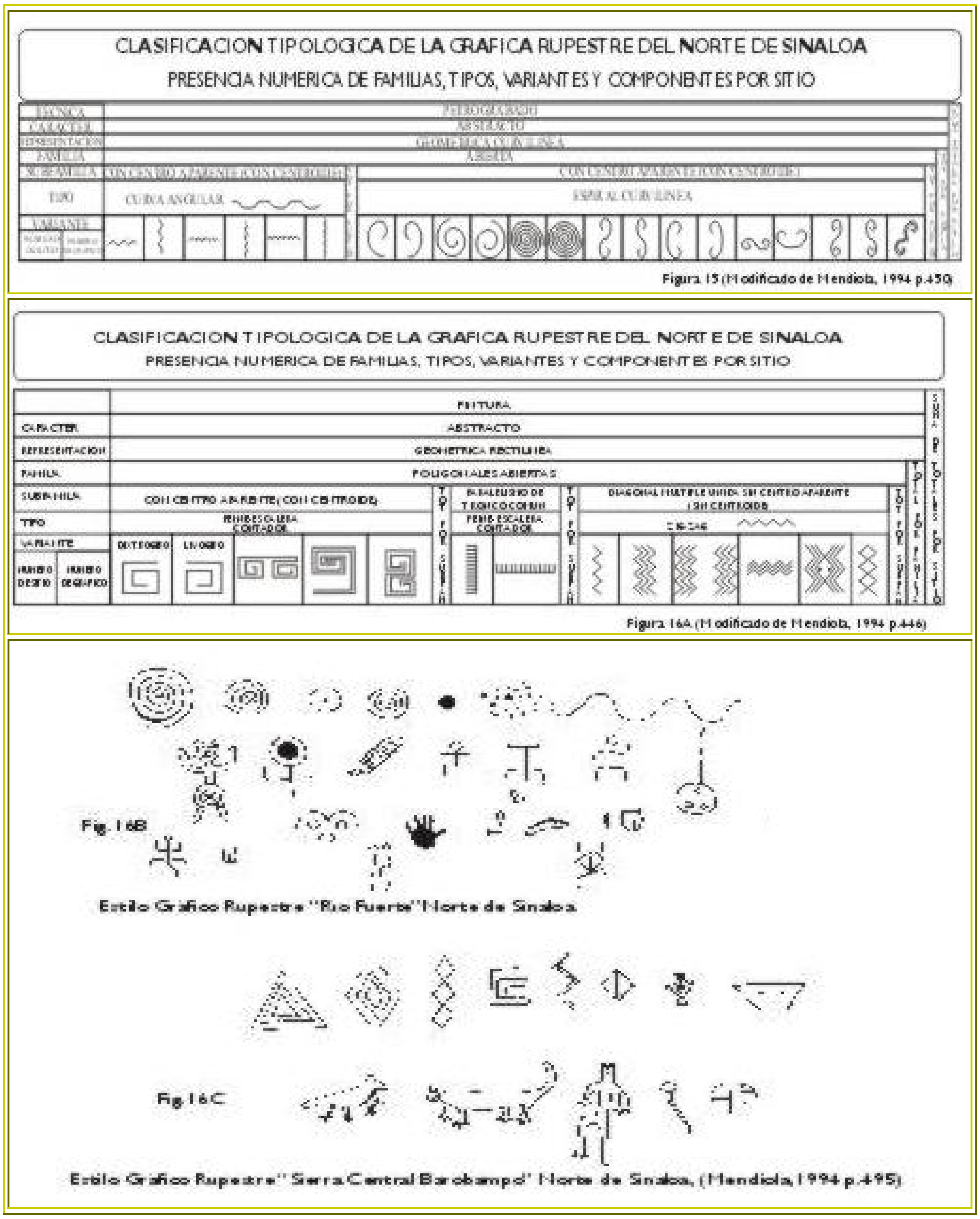


Fig. 15, 16A, 16B y 16C

La gráfica rupestre es una unidad que guarda equilibrio tanto geométrico como visual, lo cual habla de armonía y simetría.

El diseño del arte rupestre se combina con el tiempo, y está en correspondencia con las necesidades y cosmovisiones del grupo que lo produjo: cazadores, recolectores y agricultores

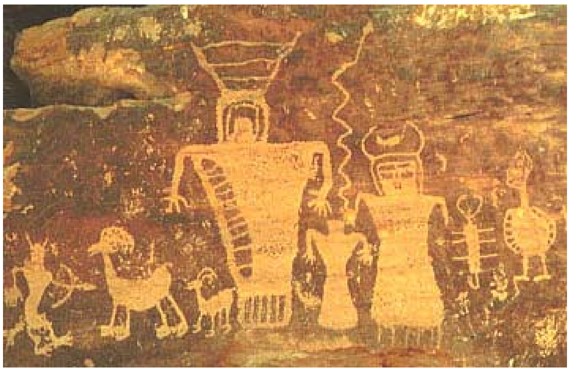
La simetría puede hallarse, observarse, describirse y analizarse, generándonos con ello una experiencia estética de efectos emotivos y de sensibilidad en su percepción y conocimiento. Y en ese proceso, las diversas interpretaciones dependerán también de los conocimientos, necesidades y situación de orden cultural del observador. Así se trate de una greca escalonada, círculo concéntrico, curva, o línea recta aislada o traslapada entre sí. Veamos algunos ejemplos:


Tejido andino anterior a la Conquista


Circulo concéntrico,
Costão da Caranha, Brasil

La región del Suroeste de los Estados Unidos, por ejemplo, tiene la concentración más grande del arte rupestre de América.

El estilo de la cultura de Fremont (en cuanto a arte rupestre es una de las más extensas de la meseta de Colorado) ofrece antropomorfos trapezoidales con espalda ancha con decoración elaborada. La estilización incluye la decoración del punto, la cabeza con forma de cubo, líneas rasgadas, los brazos con forma de franja, collares, tocados, líneas del torso y cancelación del contorno del cuerpo. Los elementos abstractos prominentes incluyen espirales, círculos concéntricos, líneas onduladas, círculos y puntos.

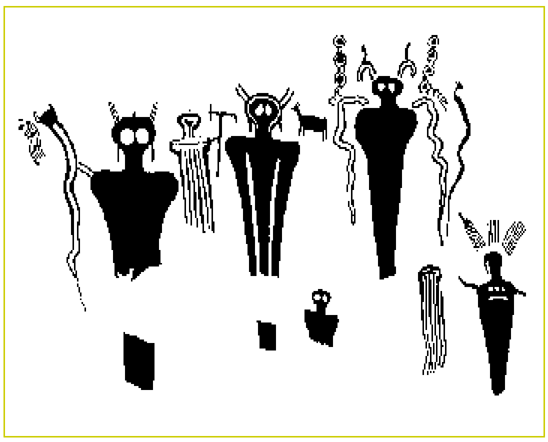
En la siguiente figura que representa a los lanzadores de lanza, encontrada cerca de las confluencias del río de Pecos y el Río Grande, se muestra una repetición que puede representar una tentativa de trasportar el movimiento (traslación).

Aunque las figuras o los adornos numerosos se repiten en diversas localizaciones, el significado exacto de las pinturas se entierra con la gente que las pintó.

El estilo de la Barranca de la Barrera (500 a.C.❸500 d.C.), en Utah, tiene formas humanas grandes con ojos y antenas de insecto y objetos extraños en las manos.

Dentro de esta pintura se encuentra un pequeño individuo que llama la atención por sus antenas.



Otro caso particular es el arte rupestre en Neuquen, Argentina, cuyos yacimientos se concentran en el norte y el oeste con mayor densidad, y al sur de la Cordillera de los Andes con más de una docena de localizaciones de pinturas. Este arte contiene un aspecto figurativo y otro espiritual, los cuales representan su sentir íntimo, religioso, mitológico y social, así como la extensión de un lenguaje a través de narraciones de cuentos, leyendas, canto y poesía.

Algunos de estos motivos, sobre todo los rectilíneos, son reproducidos en los tejidos que ejecutan las indias pehuenches del Alto Bíobío, en Chile. Los investigadores les atribuyen los trabajos de talla y pintura en las piedras.

Grabadas por percusión (petroglifos) o pintadas con pigmentos obtenidos de sustancias naturales (pictografías), la mayoría son piezas de arte abstracto que organizan el espacio y las formas de modo que hacen pensar en una gran complejidad de pensamiento y un avanzado desarrollo cultural. Los autores de estas obras conocían de simetría, de proporción y de proyecciones especulares que se repiten en franjas tanto pintadas como grabadas. Algunos motivos figurativos pueden identificarse con huellas de animales como guanacos (mamífero parecido a la llama, de lana apreciada), felinos o avestruces.



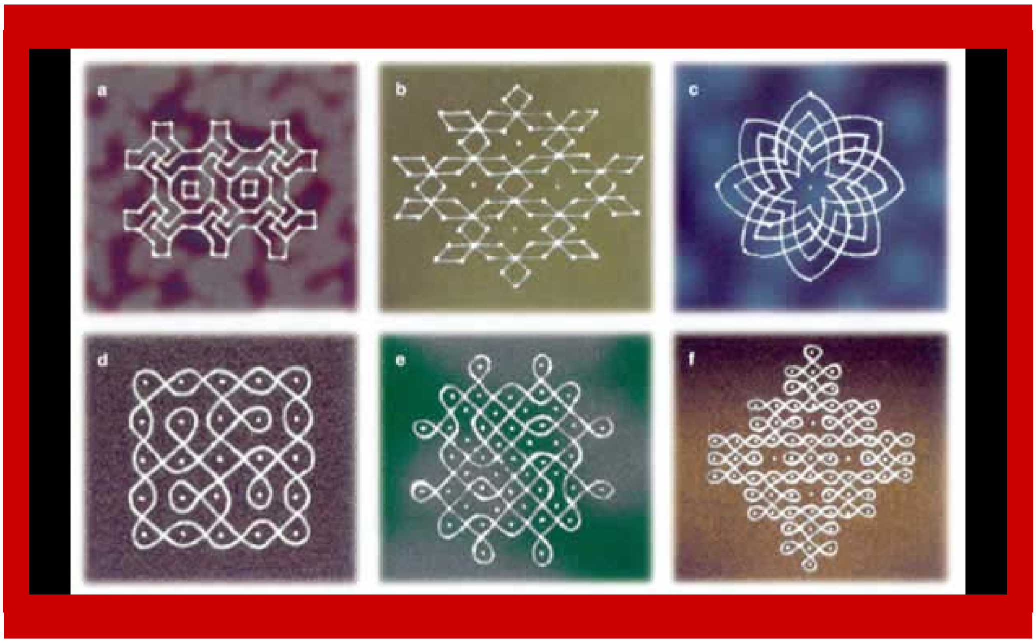

FIGURAS KOLAM

La tradición de diseños Kolam de Tamil Nadu, India, viene de hace muchos siglos y actualmente sigue siendo una práctica común entre mujeres de la ciudad y de zonas rurales, sin importar su grado de escolaridad.

Las figuras que se dibujan diariamente en las entradas de las casas son una parte importante de la cultura Tamil. Estas entradas decoradas fungen como fronteras entre el mundo exterior y el interior, las figuras, al mismo tiempo que guardan la casa, le dan la bienvenida al visitante. Esta tradición se transmite de madre a hija, la mujer enseña a la niña un cierto tipo de figuras y las técnicas para dibujarlas, le enseña qué figuras son adecuadas para todos los días y cuáles son para ocasiones especiales, rituales particulares o días festivos.

Los diseños Kolam, en su forma tradicional, son figuras hechas de líneas blancas o la combinación de éstas y puntos. Estas figuras semejan enrejados, laberintos o filigrana (trabajos de orfebrería hechos con hilos de oro y plata).

La mayoría de los diseños Kolam comienzan con un arreglo de puntos, este arreglo puede ser rectangular, triangular o hexagonal o bien una serie de radios que salen de un punto central. La figura se traza uniendo estos puntos o pasando alrededor de ellos. Así, los puntos siempre determinan de algún modo el trazo del dibujo.

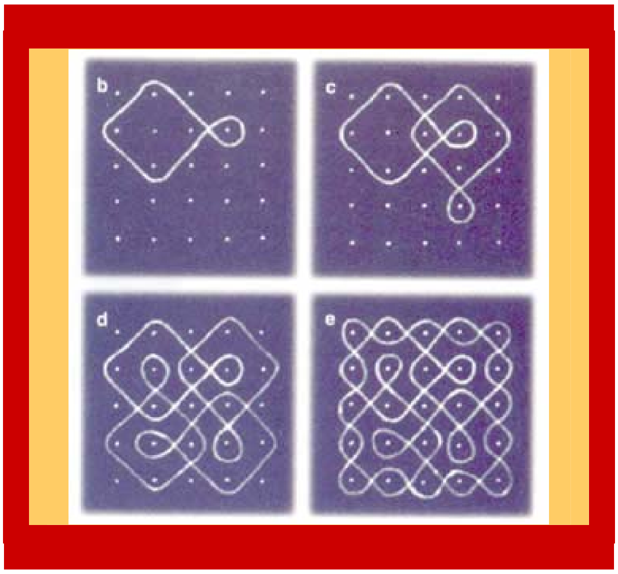


Las figuras a, b y c conectan los puntos entre sí, mientras que las curvas en d, e y f van alrededor de ellos. Las mujeres dibujan los diseños c, e y f usando curvas cerradas y continuas, sin embargo el diseño d no se dibuja con una curva continua. En estos diseños hay muchos tipos de simetrías: simetría sobre un eje horizontal, simetría sobre un eje vertical y simetrías de rotación alrededor de un punto central a 45° (c), 90° (d) y 180° (e)

Algunos diseños Kolam, hechos o no en un arreglo de puntos, están trazados con figuras elaboradas a base de una línea continua que acaba en el punto en el que empezó.

Estas figuras continuas y cerradas se asocian con los ciclos continuos de nacimiento, fertilidad y muerte y con los conceptos de continuidad, totalidad y eternidad.

Si se observan las figuras que pueden ser dibujadas como figuras cerradas y continuas veremos que no se dibujan en un solo trazo. La siguiente figura ilustra el caso.



Este diseño se hace transformando una unidad básica. La figura repite la unidad básica cuatro veces, cada unidad se rota 90° con respecto a la anterior. Finalmente otra curva continua y cerrada encierra las cuatro unidades básicas.

Todos los diseños Kolam tienen simetrías; simetrías sobre un eje horizontal, sobre un eje vertical o distintos tipos de simetrías de rotación. Algunas figuras Kolam forman familias, esto es, grupos de dibujos que tienen características comunes. En algunos casos las figuras más grandes de la familia se forman uniendo varias copias de las figuras más pequeñas; en otros, todos los miembros de la familia se derivan unos de otros en formas más complejas.

GEOMETRÍA MAYA

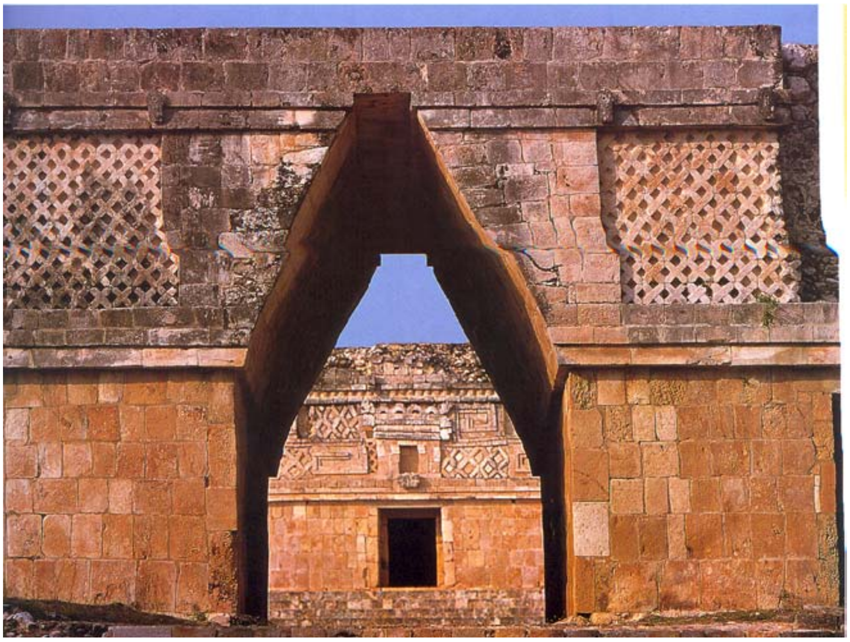
La geometría ha estado presente en la actividad diaria de los mayas: diseño de sus ciudades, las formas de sus edificios, cerámica y tejidos.

Los sacerdotes se encargan de difundir que mucho de su conocimiento viene del maíz. Es de la mazorca (fruto del maíz) de donde se deriva la forma de sus templos, de los granos surgen las escalinatas. Del maíz se obtienen otros conocimientos: la siembra, la caza, la limpia, etcétera, surgen así muchas de las cuentas del calendario.

Existen evidencias que los mayas planificaban sus pinturas, por ejemplo, la simetría que se observa en algunos murales de Cobá.

Calzada ceremonial del centro de Labná, Yucatán, México

Portal de edificio en estilo Chenes. Chicanna, Campeche, México, edificio II, portal central.



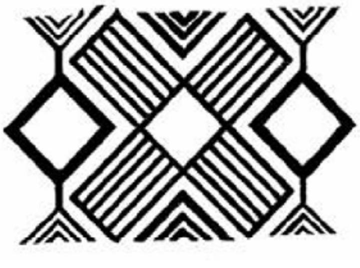
Entrada al patio interior del cuadrángulo de las Monjas. Uxmal, Yucatán, México, ala sur, clásico final, 900—910 d. C.

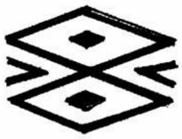
En la cerámica maya se reconocen cinco formas básicas: cántaro, cuenco, vaso, plato y vasija con boca restringida. Cada categoría se diferencia de la otra por su forma geométrica.

Los mayas utilizaban para su decoración curvas, curvas entrelazadas y curvas en espiral, figuras humanas, zoomorfas, flores, inscripciones y fechas.

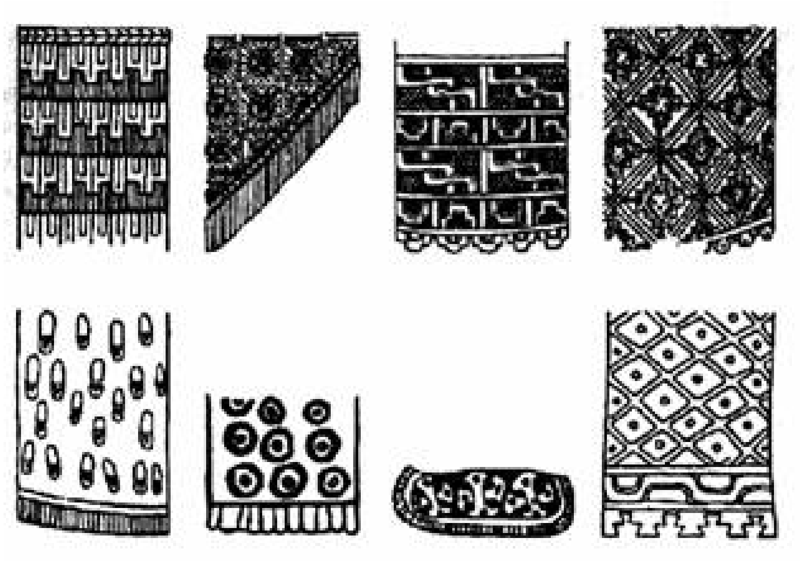
El concepto de curva parece haber existido con naturalidad, por ejemplo en el Popol Vuh versículo 651, registra "en la línea recta colocaron…", y en el idioma kekchi y chorti se encuentran expresiones para línea, alinear, fila, en fila, lado, orilla de, etcétera.

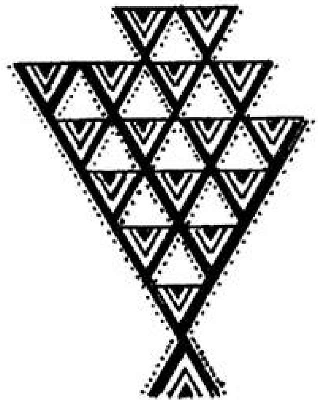
Es en los tejidos a donde se han transladado muchos de los diseños que se presentaban antes sólo en la cerámica. En los tejidos mayas Quichés se encuentra una amplia gama de mosaicos, tanto en los tejidos de uso personal como en los de uso doméstico, los mosaicos tienen diferentes interpretaciones.





faja Sunpamgo





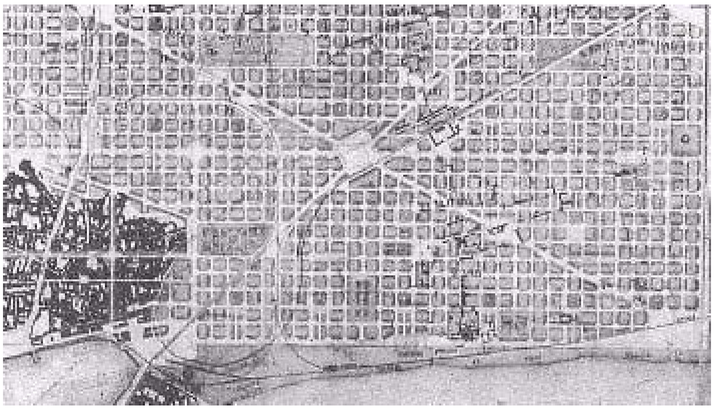
bandera, Santa Apolonia

De los dibujos que aparecen en los tejidos, se busca un elemento generador al cual se aplican diferentes operadores: traslación, reflexión, rotación. Con la composición de este elemento se desarrollan formas y la composición de formas desarrolla cadenas para luego formar mosaicos.

SIMETRÍA EN EL ARTE Y EN OFICIOS

La simetría bilateral se percibe a nuestro entorno en útiles que nosotros mismos construimos, muchas veces de forma inconsciente: pelotas de tenis o de fútbol, ventanas, carreteras, cuadrículas simétricas de calles y manzanas, aviones o canchas de básquetbol simétricos por diseño. Otras por necesidad: anteojos, pantalones, sillas o bicicletas.

La simetría funcional aparece en el diseño de carreteras y autopistas para dar un orden en la circulación, con los tréboles de cuatro hojas se pretende garantizar accesos y salidas en todas direcciones cuando dos autopistas se cruzan.



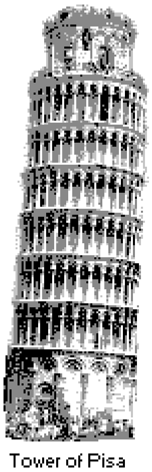
Cuadrículas simétricas de calles y manzanas

Arquitectura

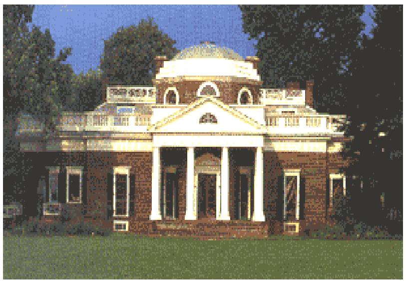
La construcción de templos y obras monumentales como las pirámides mayas o las del antiguo Egipto son un buen ejemplo de celebración de la simetría. Independientemente de su función ritual, astronómica, o funeraria, la proporción perfecta de esas obras marca la huella del arquitecto.

Y aunque cambien las culturas y creencias, y cambien los dioses y las formas de los templos, la estética simétrica perdura y ha sido elemento predominante del diseño en arquitectura, por ejemplo: la Torre de Pisa en Italia, obra que se inició en 1064 pero cuya construcción se prolongó hasta finales del siglo XII; Monticello, en Virginia, U. S. A., la casa de Thomas

Jefferson proyectada por él mismo; el Astródomo en Houston, Texas, primer estadio de béisbol construido en Estados Unidos; las pagodas chinas, edificios religiosos; l'opera House de Sydney, Australia, diseñada por Jørn Utzon y finalizada en 1973; las ventanas góticas del Monasterio Cisterciense de Rioseco, Valladolid, España; el Panteón de Paris, calificado como el primer ejemplo de la perfecta arquitectura, su arquitecto Jacques-Germain Soufflot lo construyó por 1764; y el Partenón en Grecia, comenzado en el 448 a.C. y concluido en 432 a.C.



Torre de Pisa, Italia


Monticello en Virginia

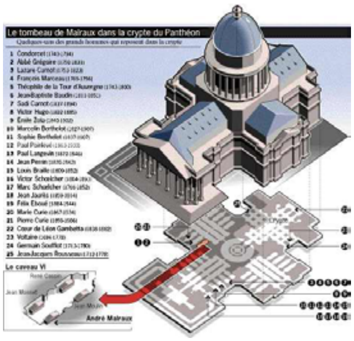

Pagoda china


Astródomo de Houston, Estados Unidos

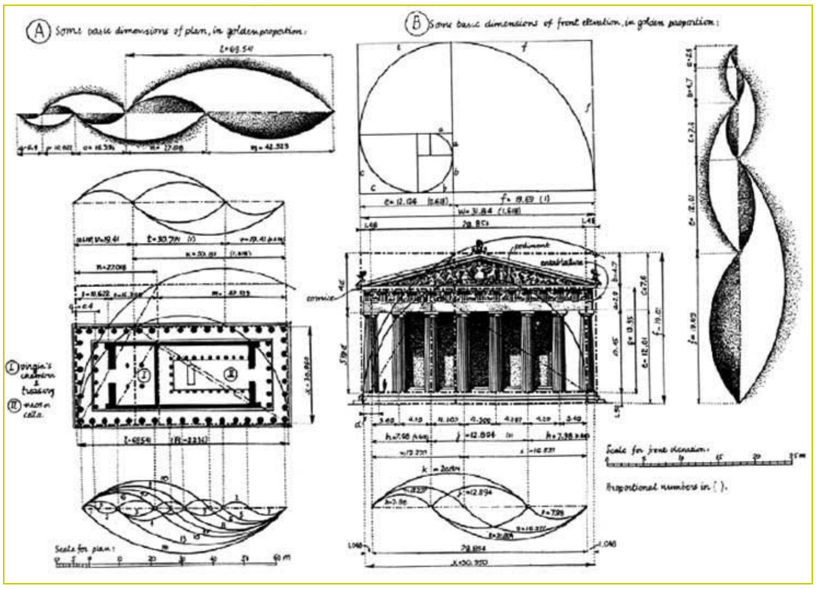

L'opera House en Sydney, Australia


Ventanas góticas del Monasterio Cisterciense de Rioseco, España

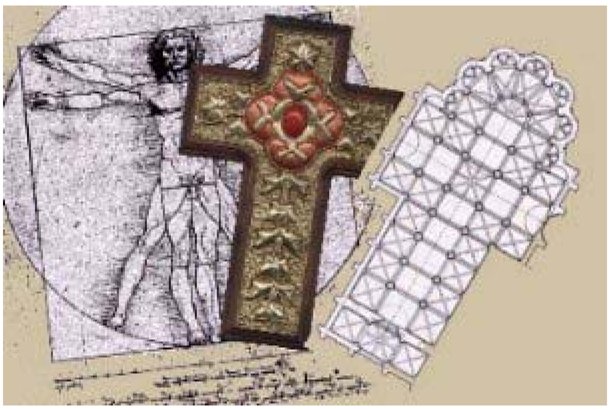

El Panteón de París




El Partenón en Grecia


Un análisis de proporciones en la planta y el alzado del Partenón

La simetría se utiliza en el diseño del plano del piso total de edificios, así como el diseño de los elementos individuales del edificio tales como puertas, ventanas, pisos, frisos (conjunto de elementos decorativos en forma de faja muy alargada) y ornamentación. En muchas fachadas se maneja la simetría bilateral, de hecho es en gran medida la forma más común de simetría en la arquitectura.


Una interesante relación de simetría puede mostrarse en la simetría bilateral del Cristo humano que se traspasa a su cruz y de ésta a las plantas de sus catedrales.

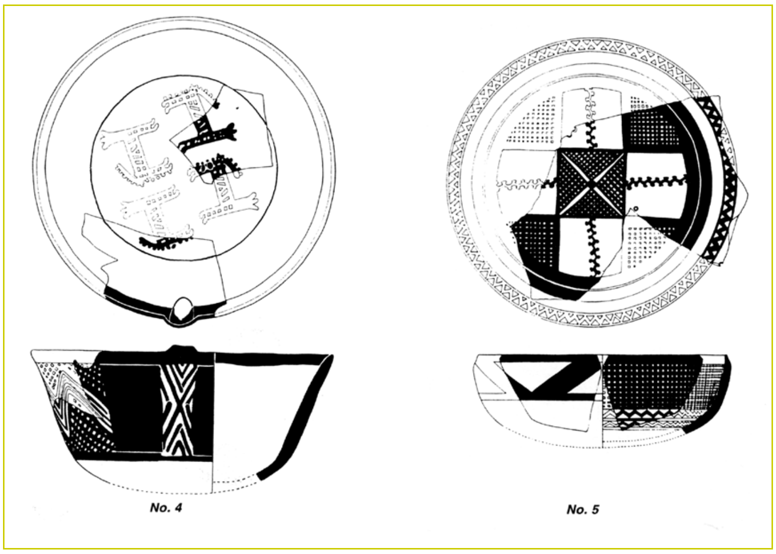
Si nos preguntáramos qué tienen en común el Astródomo con la bóveda extensa del Panteón, o una pagoda china con la casa de ópera de Sydney, la respuesta en primera instancia podría ser que lo que tienen en común es la "forma", pero la respuesta exacta sería "simetría". Cada par de estos edificios comparte una clase de simetría que los liga a pesar de sus diferencias temporales y culturales. Los autores observaron simetría.

Cerámica

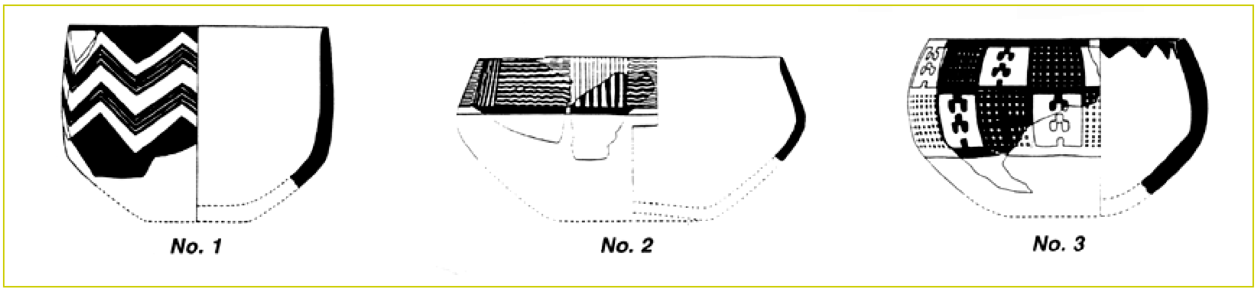
En la cerámica se utiliza la simetría radial. Las vasijas se crean a través de un eje central de simetría vertical. Se decoraba con zig-zag, triángulos y cuadrados horizontales en rojo y negro, líneas paralelas en zig-zags, líneas paralelas onduladas y filas paralelas horizontales de puntos.

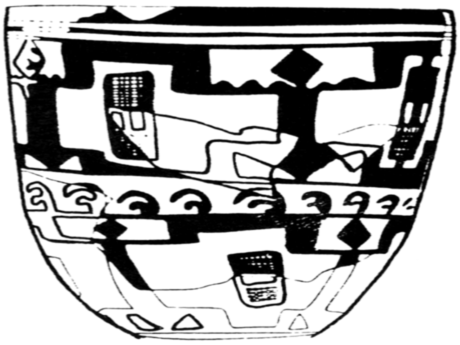
12th Century Persian Bowl

Alfarería persa



Cerámica de Irán





No. 26

No. 27

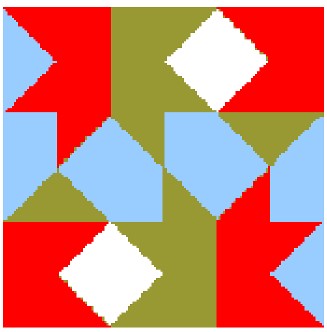
No. 28

No. 29

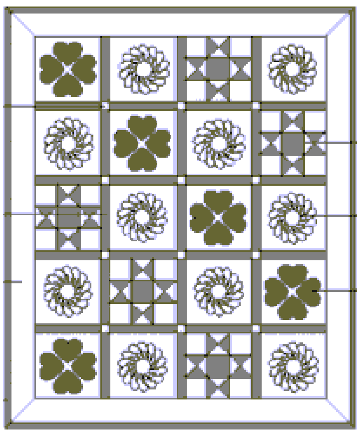
No. 30

Edredón

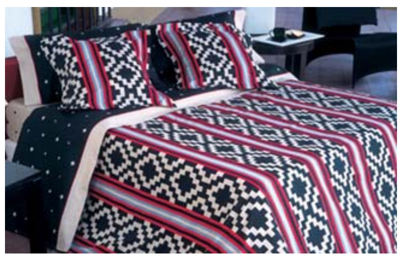
En la elaboración de algunos edredones ya sea para uso o para decorar, se aplica la simetría. Ya que generalmente se hacen con bloques cuadrados de tela, éstos a su vez se descomponen en bloques más pequeños en formas de triángulos.



Edredón diseñado con bloques



Edredones de utilería



Alfombras

Son pedazos de tela gruesa pesada, que se obtienen tejiendo lana, algodón, cáñamo, paja o materiales sintéticos.

Irán, Nepal y Turkmenistán son regiones donde las alfombras se hacen a mano.

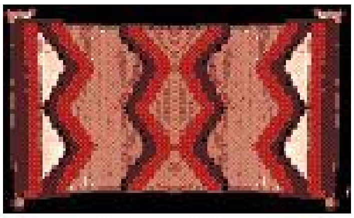
Las culturas tejedoras de alfombras tienen una larga tradición del uso de la simetría.

Los indios americanos de Navajo utilizaron diagonales en negrillas y adornos rectangulares.

En muchas mantas orientales se manejan patrones intrincados (enmarañados) con centros y fronteras reflejados.

En la mayoría de las mantas y alfombras se utiliza la simetría cuadrilátera (adornos reflejados a través de ejes horizontales y verticales)

Oriental Carpet



Navajo Serrate

Textiles chinos

Fragmento de textil antiguo copto egipcio de lana y lino

Kilim persa

Kilim Anatolia

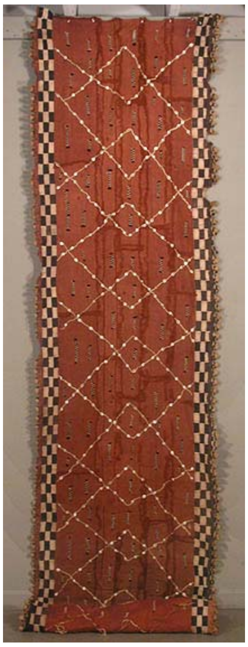
Turquía, tapicería egipcia de lana

Panel de lana del Cáucaso

Paño bordado del Congo

Tira de armadura de Ghana

Falda de Costa de Marfil



Falda de rafia del Congo

Paño de Malí

Cubierta bordada de la India

Manta de Marruecos

Blusa de mujer de Panamá

Lliclla de Perú

Lliclla de Perú

Máscaras

La máscara es una obra concebida para causar sentimientos de respeto, de temor, de terror, de valor y muchos más. Son representaciones de las emociones humanas en general.

Hay en las máscaras dos caracteres esenciales que ayudan a la comprensión de sus funciones respectivas. Las máscaras como institución asociadas a los ritos y a la práctica de la danza, es decir, las máscaras consagradas, y las máscaras profanas.

Existe una correlación absoluta entre la forma y la función. La forma evoluciona, el artista intenta reconciliar su arte con su tiempo. Las piezas revelan una voluntad de renovación de los temas tradicionales, pero el deseo de producir máscaras fuertes es fundamental en Costa de Marfil, por ejemplo. Estas obras alcanzan su objetivo cuando satisfacen el sentido estético más allá de la visión de un infinito espiritual, la belleza o el terror.

El estudio estético de estas máscaras variadas revela un interés por la abstracción, depuración de las formas, estructuraciones sabias, bordes, salientes, libre curso a la imaginación, potencia, equilibrio, juego de simetría y de asimetría, líneas evocadoras, juegos de volúmenes geométricos o redondeados, sacados, juegos de curvas.

Máscaras de Camerún

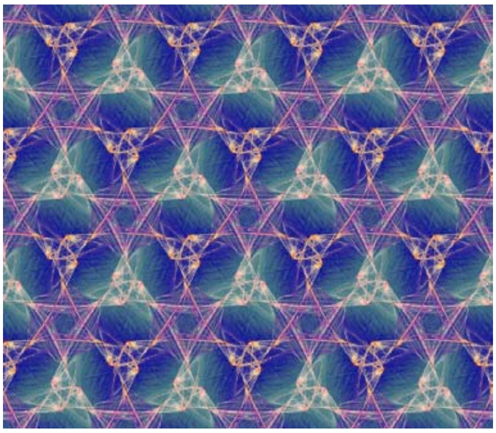
Máscara Ashanti (Ghana), relacionada con cultos a la fecundidad

Máscara Kanaga Dogsn (Malí), representa el mito de la creación

Máscara Bakwele (Congo), representa la unión de la familia

Arte Moderno

En la búsqueda de otras alternativas dentro del arte, se han encontrado nuevas y eficaces maneras de diseñar, colorear y realizar patrones simétricos atractivos, combinando el arte y la ciencia del diseño simétrico. Por ejemplo, el diseño y la realización artística de las siguientes imágenes de papel tapiz fueron creados y construidos con un paquete de software llamado *el prisma.*



La versión impresa de esta imagen fue exhibida en Granada, España, como parte de la exposición internacional *"Frontera entre el arte y la ciencia"*

El concepto de simetría se aplica al diseño de objetos de diferentes formas y tamaños: muebles, pinturas, máscaras, instrumentos musicales, tejidos, etcétera.

Junto con la textura, color, proporción y otros factores, la simetría desempeña un papel importante en la determinación de la estética de un objeto.

LA TEORÍA ALUCINÓGENA Y CREACIÓN DE PATRONES SIMBÓLICOS ABORÍGENES.

En el contexto de los estudios del arte rupestre indígena ha surgido una tesis que sugiere encontrar la procedencia y elección de patrones simbólicos dentro de un estado plenamente consciente, semiconsciente, inconsciente o incluso subconsciente y de estados de máxima espiritualidad.

Algunos estudios establecen la correspondencia entre el uso de drogas alucinógenas y las pinturas que realizan los indios Tukanos del territorio Vaupés, al noroeste del Amazonas.

Las drogas producen alucinaciones visuales que consisten en imágenes luminosas geométricas. Estas funcionan como banco de datos visuales a los cuales el aborigen les hace corresponder un patrón simbólico.
La siguiente tabla ilustra algunas imágenes luminosas geométricas (fosfenos) y su analogía con las representaciones ideográficas del arte rupestre de Punta del Este. En A se muestran los pictogramas que pudieran reproducir las visiones inducidas por la ingestión de alucinógenos. En B se ilustran diseños más complejos.

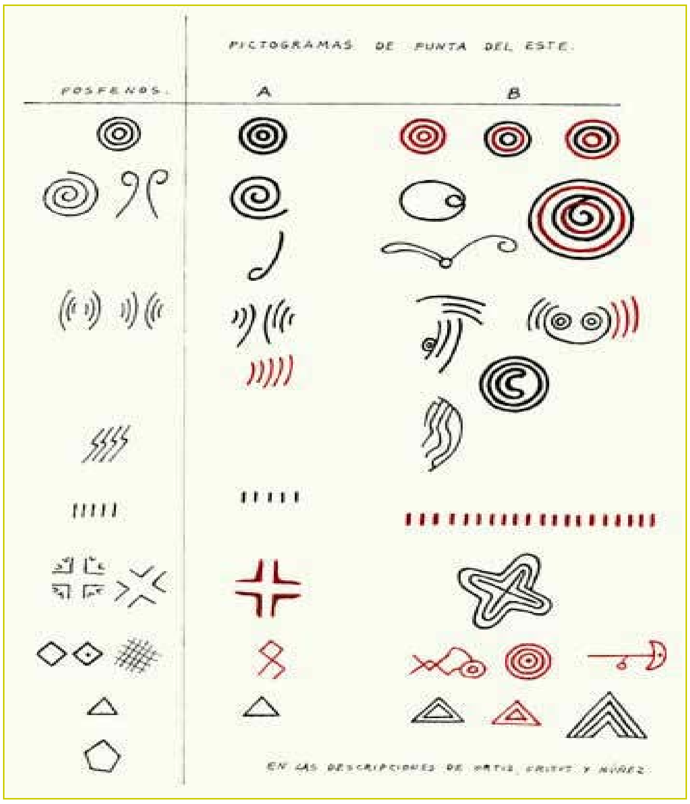


Tabla de fosfenos y su analogía con pictogramas de Punta del Este, Cuba

La figura que se presenta a continuación, muestra un conjunto rupestre de las paredes de la Cueva Número Uno de Punta del Este, Cuba. En ella se percibe un gran número de pequeños elementos brillantes, de forma geométrica, tales como estrellas, puntos o líneas que aparecen sobre un fondo oscuro, moviéndose como en un caleidoscopio. Algunas de estas formas simulan espirales, flores, plumas, o cristales, con una marcada simetría bilateral.

Pintura rupestre en la cueva número uno en Punta del Este, Cuba.

La sustitución de un patrón simbólico por otro (modalidad de composición simétrica bilateral) que se aprecia en Punta del Este, se explica con la sustitución de un alucinógeno por otro.

Las alucinaciones visuales inducidas por las drogas indígenas consisten en imágenes luminosas que respondan a dos categorías de fenómenos.

Por un lado, la persona recibe aquellos elementos brillantes geométricos. Por otro lado, la persona ve imágenes figurativas, imágenes pictóricas. Aparecen grandes manchas de colores que se mueven como nubes y de ellas emergen formas difusas que pueden ser interpretadas como gente o animales, o seres monstruosos.

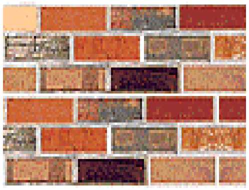
Algunos investigadores, en su afán por descubrir los motivos que llevaron a los aborígenes a utilizar determinados patrones simbólicos, han llegado a plantear que el arte y las religiones chamánicas de algunas tribus aborígenes (entre ellos los de Punta del Este, Cuba, y los indios Tukanos del territorio Vaupés, al noroeste del Amazonas) se relacionan estrechamente con el uso de drogas alucinógenas.

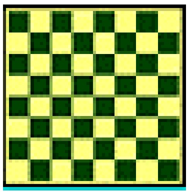
CAPÍTULO II

Dale limosna mujer
que no hay en la vida nada
como la pena de ser
ciego en Granada
Francisco A. De Icaza, Torre Bermeja

Es frecuente ver en los ornamentos arquitectónicos, que la figura total resultante que observamos se puede obtener repitiendo en una o varias direcciones un motivo más pequeño que forma parte del ornamento. Por ejemplo: el pavimento de ciudades, los ladrillos de un muro tanto en edificios civiles como religiosos, las losetas, los mosaicos y el papel tapiz de muchos hogares. Otros ejemplos, no necesariamente ornamentos, son el tablero de ajedrez, las celdas en un panal de abejas, etcétera.

Adoquines

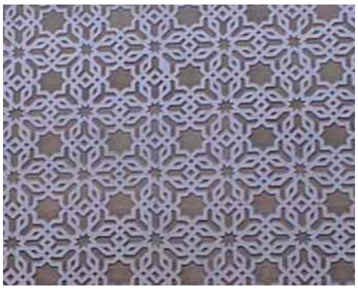

Ladrillos en un muro


El tablero de ajedrez


Celdas en un panal de abejas

Dichos ornamentos podemos detectarlos en grecas o franjas, o cubriendo todo el plano, mosaicos. La intención de este capítulo, es la de reconstruir precisamente grecas y mosaicos que ya existen, considerando un motivo, llamado motivo generador, al cual le aplicaré ciertos movimientos, conocidos como simetrías.


Detalles de balcones

Fachada y mosaico de dos casas respectivamente

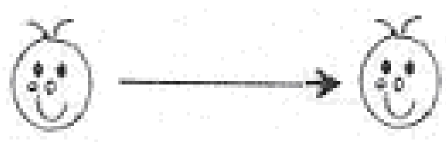
GRECAS

En este apartado mostraré 7 franjas diferentes siguiendo una dirección y una línea recta.

Para tal efecto requiero, antes que nada, formalizar matemáticamente la noción de simetría, que consiste en estudiar las transformaciones que dejan invariable el objeto en observación. Una *transformación* es una regla para realizar movimientos de objetos. Estos movimientos pueden ser *rígidos*: traslaciones, reflexiones, rotaciones y reflexiones con deslizamiento. Aunque el estudio de la simetría se estaba haciendo implícitamente dentro de las matemáticas por mucho tiempo, su estudio sistemático es más bien reciente. El primer matemático en señalar las transformaciones geométricas fue Felix Klein (1849❸1925), y desde entonces una gran variedad de trabajos se han dedicado a desarrollar esta idea.

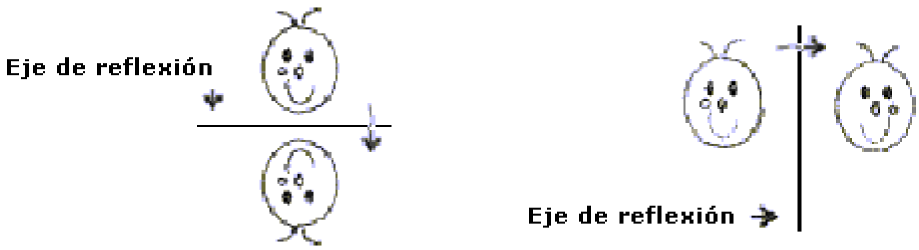
Requiero también de un motivo generador tal que tenga la forma de rectángulo o cuadrado (únicamente estas dos figuras en el caso de las franjas). Un *motivo generador* es la figura mínima necesaria, a la cual se puede aplicar los cuatro tipos de movimientos mencionados anteriormente, ya sea por separado o de forma combinada, para generar una greca. Veamos las características de los movimientos que dejan el motivo invariante:

Traslación



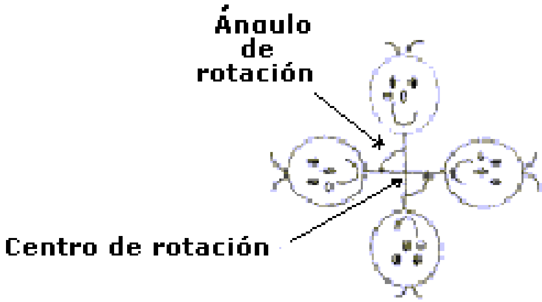
En el movimiento conocido como traslación, un motivo se resbala a lo largo de cierta dirección y cierta distancia. La franja no está limitada, es decir, que continúa indefinidamente tanto hacia la izquierda como a la derecha.

Reflexión



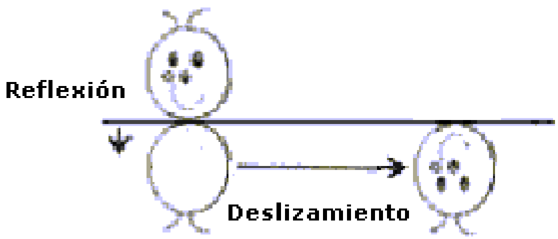
Los ejes de reflexión no son otra cosa que ejes de simetría y su función de espejo se llama reflexión. Las reflexiones pueden ser horizontales y verticales.

Rotación



Considerar un motivo y girarlo en torno a un punto fijo, llamado centro de rotación, y un ángulo de rotación, se conoce como rotación. En el caso particular de las franjas, los giros que se efectúan son de 180 grados.

Reflexión con deslizamiento

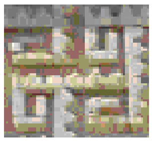
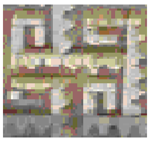
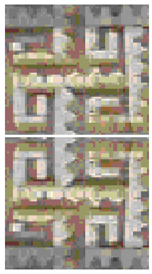
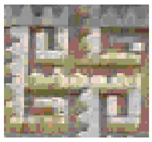


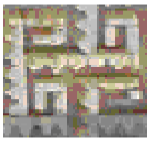
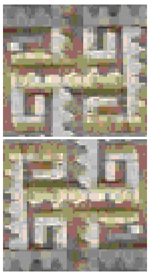
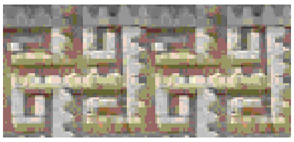
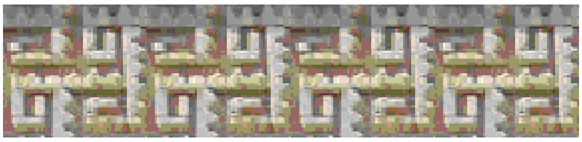
La reflexión con deslizamiento se genera reflejando el motivo respecto al eje horizontal y después desplazándolo.

Cabe señalar que en todos los ejemplos a que haré referencia, para las grecas primero y para los mosaicos después, tomaré en cuenta sólo los contornos y no distinguiré entre los distintos colores o tonos de gris que pueda tener el motivo generador.

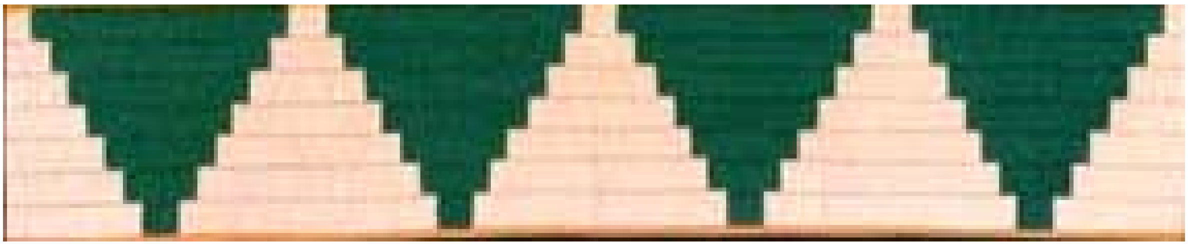
Las siete grecas a considerar se localizan en la zona arqueológica de Mitla, “Lugar de los muertos”, que fue el último centro prehispánico monumental construido en el área moderna oaxaqueña. Se encuentran distribuidas en el Grupo de las Columnas, en el Edificio D, o bien en el Grupo del Templo.

Detalle de greca en el Palacio de las Columnas en Mitla, Oaxaca, México.

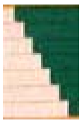
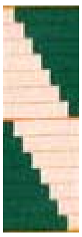
El motivo que originó el friso anterior es , si lo reflejo horizontalmente obtengo , si pego ambos motivos  no se asemeja al detalle original; ahora si la reflexión es vertical  y la uno con el motivo principal  tampoco se le parece; si por el contrario aplico un giro de 90° , y lo pego al motivo original  no coincide, lo mismo sucede al aplicar un giro de 180°

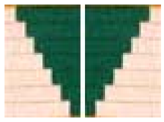
 que me lleva a  ;pero en cambio, si resbalo el motivo generador  y lo sigo trasladando  obtendré el friso original.

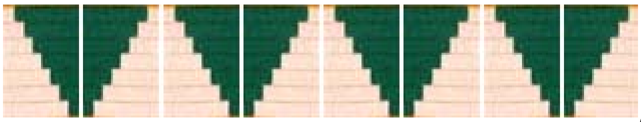
El friso puede obtenerse aplicando traslaciones al motivo principal.

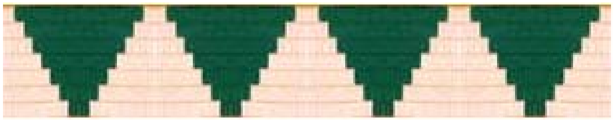


Greca de las ruinas arqueológicas en Mitla, Oaxaca, México

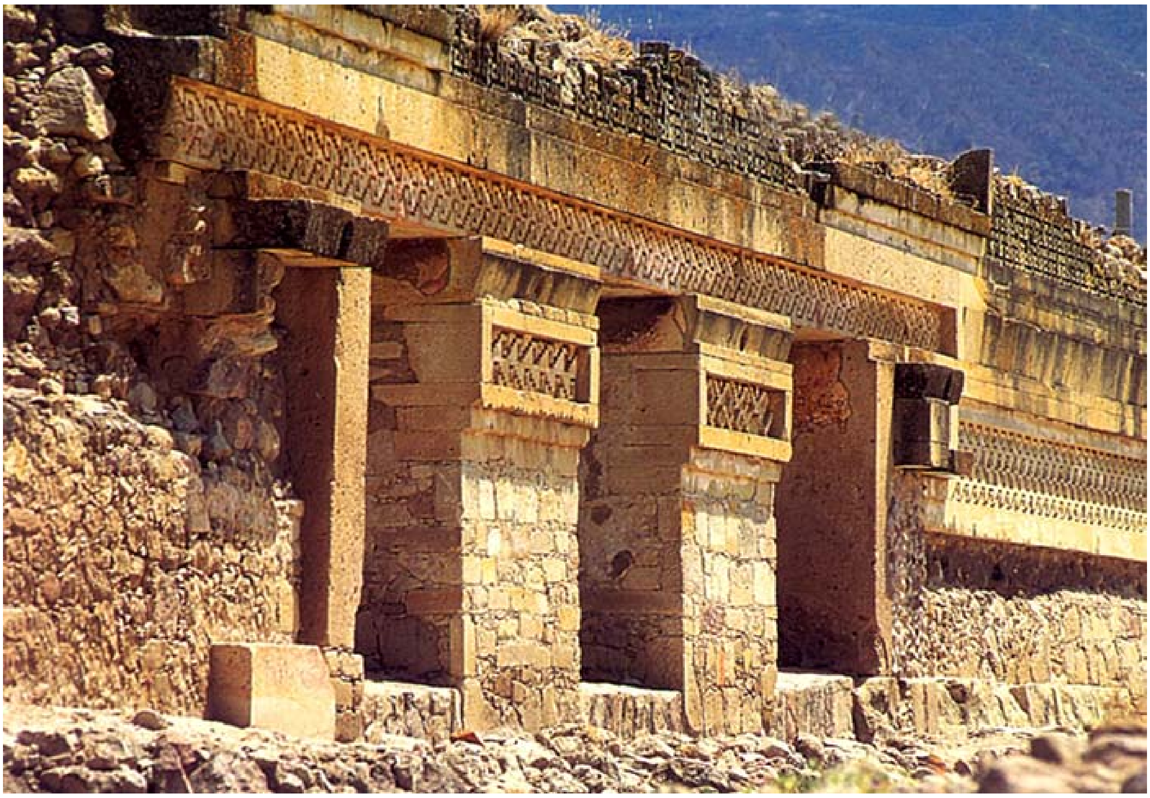
 si lo reflejo horizontalmente  y uno ambos , no obtengo parte del friso; si por otro lado giro 180°  obtengo ; en cambio si

aplico una reflexión vertical , y junto ambas piezas , y

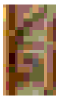
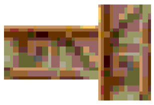
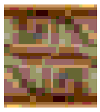
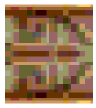
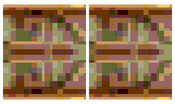
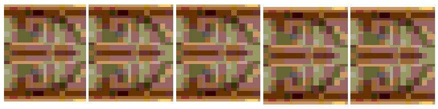
finalmente las traslado , se forma el

friso completo .

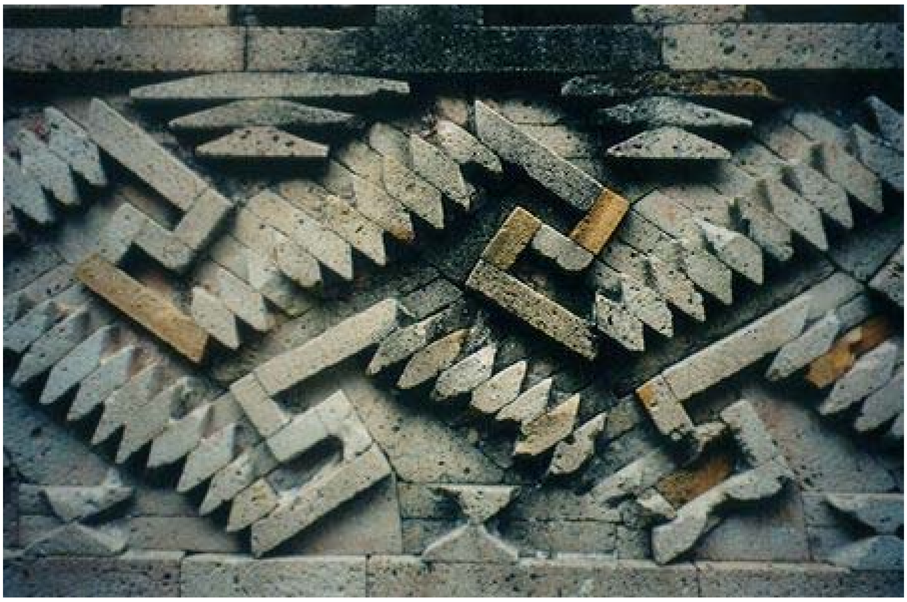
La figura se crea con reflexiones respecto al eje vertical y con traslaciones.



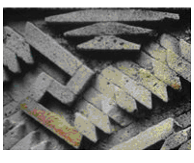
Grupo del Sur en Mitla, Oaxaca, México

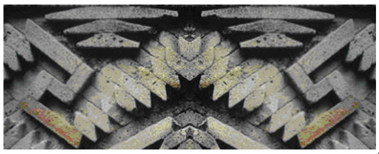
El motivo generador  reflejado verticalmente  no se asemeja al friso ; si giro 90°  se genera , lo mismo pasa si aplico un giro de 180° , obtendré ; en cambio si reflejo horizontalmente  y lo uno con el patrón principal  y después lo traslado  finalmente resultará .

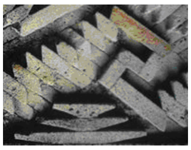
El friso se obtiene reflejando el motivo original respecto al eje horizontal y trasladando.

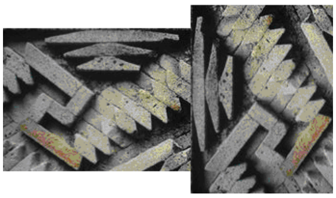
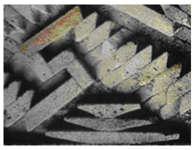


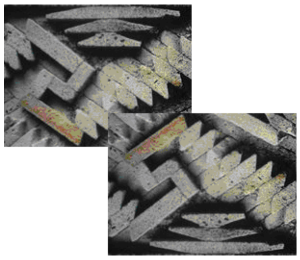
Detalle de greca en el Patio de Mosaicos en Mitla, Oaxaca, México

Considerando el detalle  y reflejado respecto al eje vertical

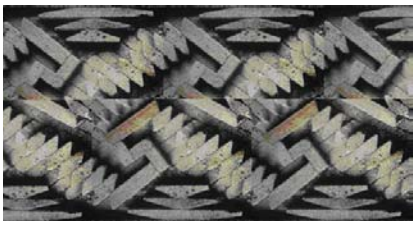
 se obtiene , no se parece; girando 180°

 resulta , al igual que un giro de 90° , tendría

; si lo reflejo horizontalmente  el resultado

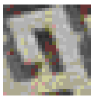
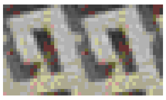
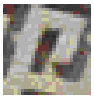
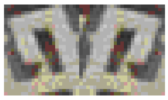
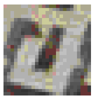
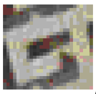
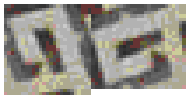
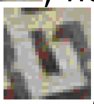
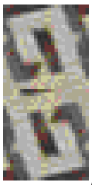
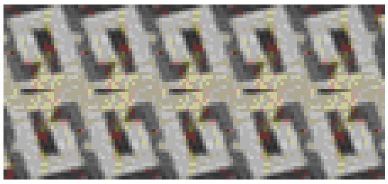
es , y si al mismo tiempo resbalo esa reflexión 

se le parece un poco más. Ahora aplicaré traslaciones

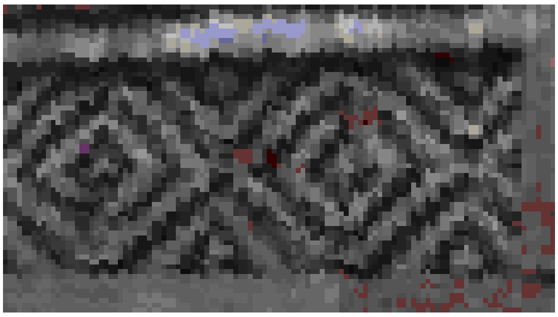
 y obtendré el friso completo.

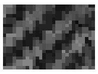
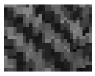
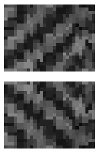
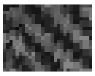
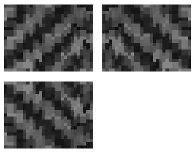
La imagen se obtiene haciendo una reflexión respecto al eje horizontal y resbalándola, posteriormente aplicando traslaciones.

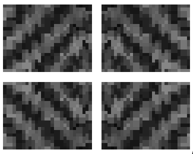
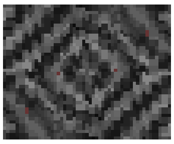
Detalle de friso en Mitla, Oaxaca, México

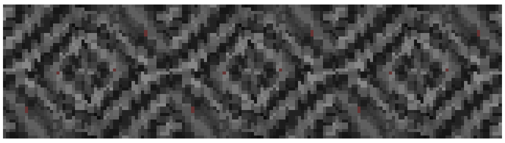
El patrón generador  trasladado  genera sólo una parte del friso; si hago una reflexión vertical  resulta ; necesito hacer otra prueba, reflejar horizontalmente  produce ; pero qué pasaría si aplico una rotación de 90° , no tendría éxito ; si por el contrario aplico un giro de 180° , obtendría la otra mitad que faltaba al trasladar el motivo , es decir .

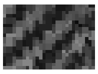
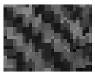
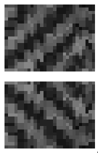
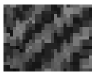
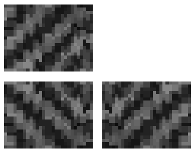
La combinación de traslaciones más rotaciones de 180° dan como resultado el friso. Pero, ¿obtendría el mismo friso si aplico primero la rotación y después la traslación?, además, ¿por qué hasta el momento en todos los casos utilizo las traslaciones, independientemente de los otros movimientos?, ¿alteraría la figura original si cambio el orden de los movimientos en cualquiera de los frisos anteriores?, ¿por qué en mis intentos sólo aparecen giros de 90° y 180°?

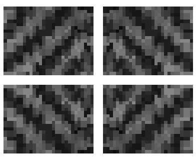
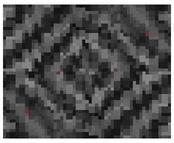

Detalle de greca en el Grupo de la Iglesia en Mitla, Oaxaca, México

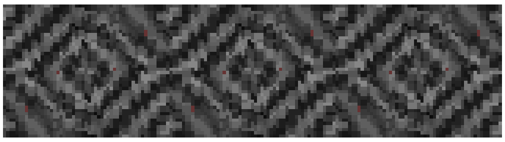
Si al motivo  lo reflejo horizontalmente , obtengo  (aclaro que no hago la unión de los dos motivo, porque quiero que se note lo que va a pasar). Si el motivo reflejado lo giro 180° , resulta , y si a su vez lo reflejo nuevamente respecto al eje horizontal, aparece

, en otra imagen . Aplicando traslaciones

. Pero el friso se puede obtener también

reflejando  respecto al eje horizontal  para obtener , y el motivo así obtenido reflejarlo verticalmente  resultando  y

aplicando nuevamente una reflexión horizontal  que como lo mencioné anteriormente, es igual a . Trasladándolo

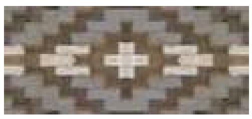
.

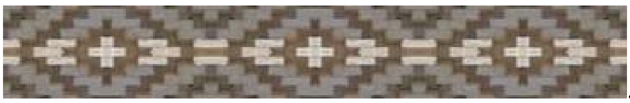
Aplicando reflexión horizontal, rotación de 180°, reflexión horizontal y traslación, es como se genera el friso. Otra manera de generarlo es aplicando reflexión horizontal, después reflexión vertical, luego otra reflexión horizontal y finalmente traslación.

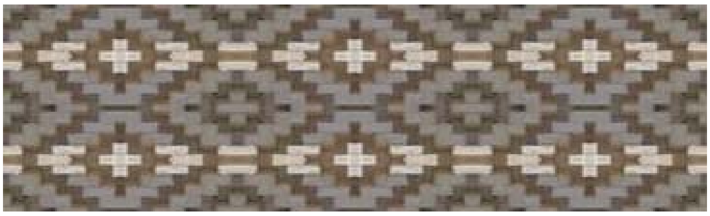
Patio de las Grecas en Mitla, Oaxaca, México

Por último voy a considerar el patrón  que reflejo verticalmente

, unidos  . A este nuevo motivo lo giro 180 grados

, que al unirlo con la reflexión se forma . Aplicando traslaciones para finalizar se genera

.

Para que la greca quede como la original, es decir más ancha, habría que pegar otra como la que obtuve .

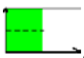
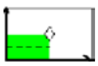
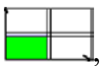
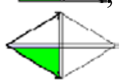
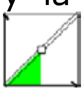
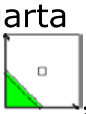
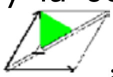
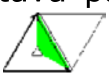
Aplicando reflexiones verticales y giros de 180 grados se forma el motivo que al trasladarlo generará la greca final.

MOSAICOS

La introducción anterior fue con el propósito de darse una idea de lo que significa trasladar, girar, reflejar y reflejar con deslizamiento.

Los ejemplos que utilicé hacen referencia a que el friso se repite en una dirección dada, siguiendo una línea recta. Pero lo que me interesa analizar realmente es ver cómo puedo cubrir todo el plano si ahora ese motivo o cualquier otro, se repite hacia la izquierda, hacia la derecha, hacia arriba y hacia abajo.

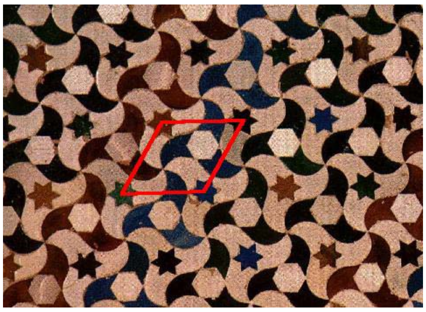
En otras palabras, lo que persigo al aplicar esos movimientos, es generar una especie de tapiz que cubra todo el plano, repitiendo motivos generadores y cuidando que éstos queden bien ajustados sin huecos entre ellos ni superponiéndose unos con otros. Las figuras que cumplen estos requisitos se conocen como mosaicos o teselaciones.

Los motivos generadores a considerar pueden ser: un romboide completo  y la mitad diagonal  de él; las dos mitades, longitudinal  y transversal , y las tres cuartas partes ,  y , de un rectángulo; la mitad longitudinal  y la cuarta parte  de un rombo; la cuarta  y la octava parte  y , de un cuadrado; la tercera , la sexta ,  y , y la doceava parte  de un hexágono.

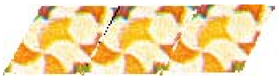
Los mosaicos que voy a reproducir se localizan en el palacio de la Alhambra, de Granada, España. Y al final de cada reproducción doy un ejemplo de arte prehistórico, de arte moderno, y un diseño de M. C. Escher considerado como un genio de la simetría y de las figuras imposibles.

p1

Alcoba lateral del Patio de Arrayanes



Para cubrir el plano considero el motivo  y aplico traslaciones

 , y contrariamente a los frisos, extenderé el patrón a lo

largo del plano  .

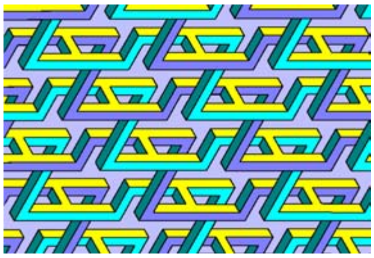
Hay que recordar que no estoy considerando colores, sino la forma. ¿Por qué sólo el movimiento que se aplicó fue traslación? Porque si reflejo

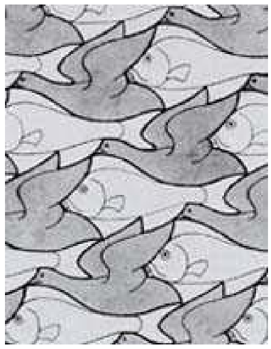
horizontalmente resulta  , después si aplico una reflexión vertical

, luego si doy un giro de 180°  o de 90° 
encuentro que ninguno de los resultados es satisfactorio.

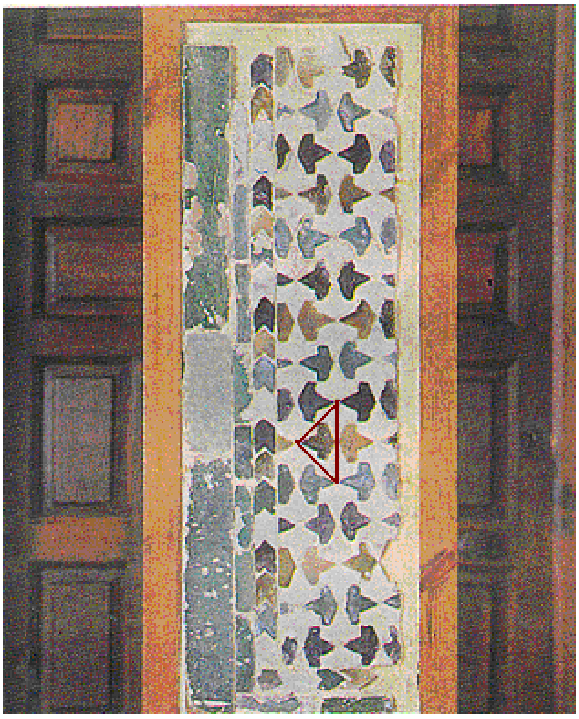
Los movimientos que apliqué fueron únicamente traslaciones tanto hacia arriba como hacia la derecha. Ejemplos de lo anterior son:

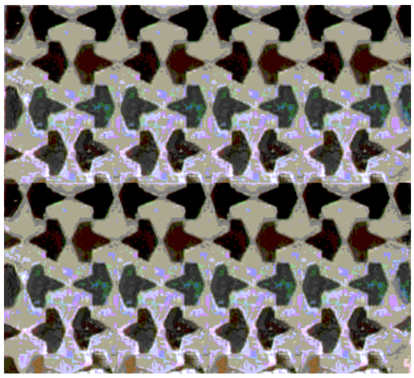

Pintura rupestre en cueva (Paleolítico)

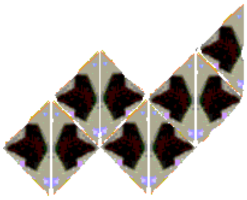
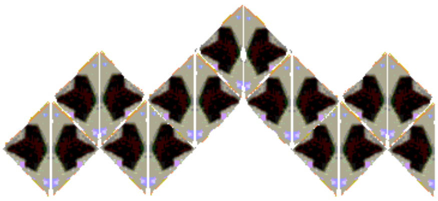
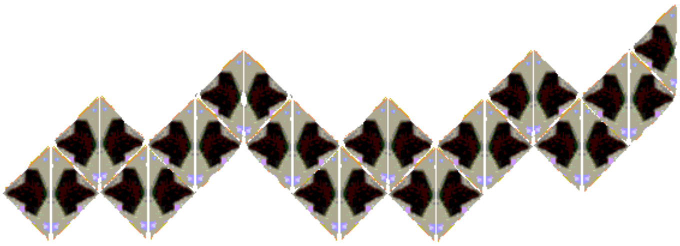

Diseñador Juan Locke

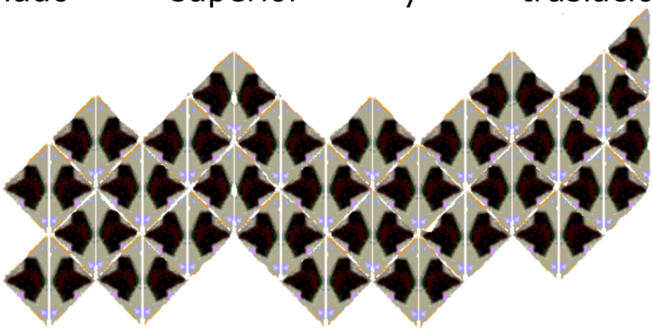

"Pez y Paloma", **Escher**

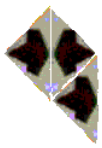
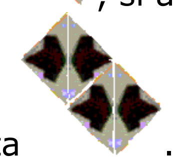
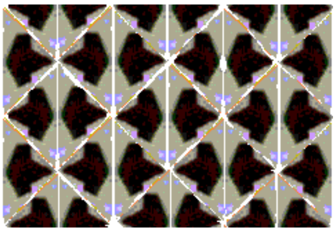
cm


Baño del Palacio de Comares



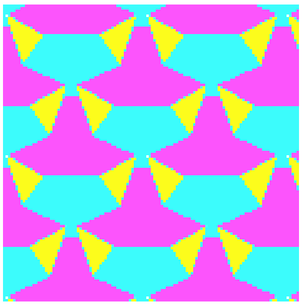
Para generar este mosaico considero  como el motivo generador, al cual aplicaré 2 movimientos: reflejo sobre el eje vertical  para obtener un rombo, y una reflexión con deslizamiento (paralela al eje vertical) , resultando así . Ahora se me ocurre tomar este nuevo patrón y repetir la acción anterior (reflexión vertical y reflexión con deslizamiento), es decir  y . Aplicando el mismo criterio  y .

Entonces para cubrir el plano, además tengo que aplicar traslaciones hacia el lado superior y traslaciones hacia la derecha .

Otra opción es aplicar los movimientos al motivo original, con la excepción de que la reflexión con deslizamiento se haga hacia abajo , si a ésta última la reflejo nuevamente respecto al eje vertical resulta . Ahora para llenar el plano considero al rombo  únicamente y empiezo a trasladar hacia arriba y abajo .

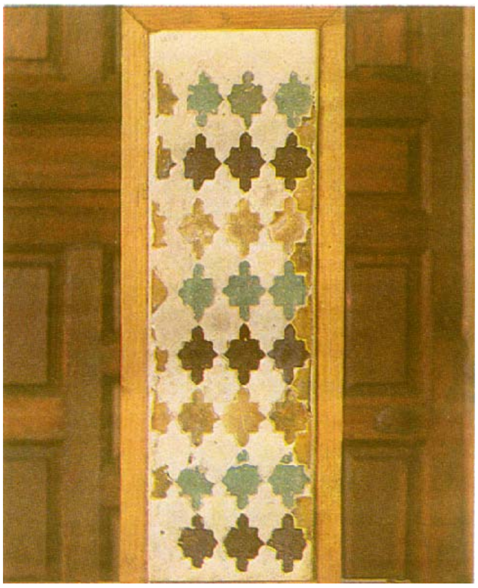
Para generar el plano anterior aplico reflexiones verticales, reflexiones con deslizamiento (cuyo eje es paralelo a las reflexiones verticales) y traslaciones. Ejemplos de lo anterior son:


Arte del Neolítico

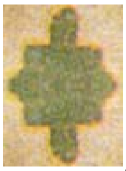
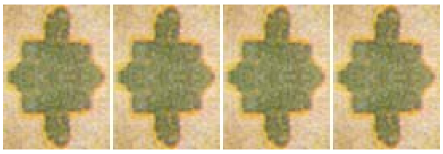
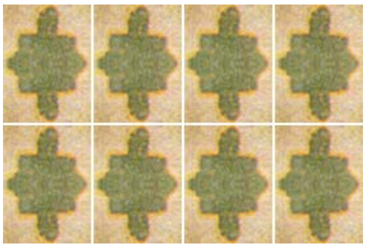
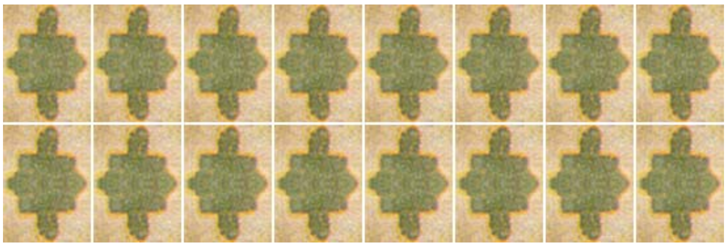
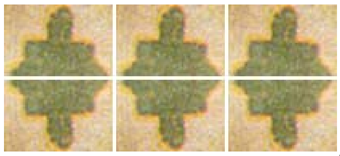
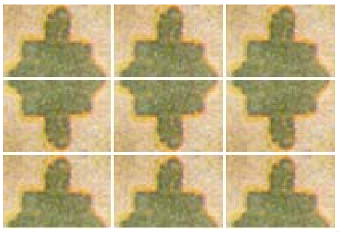
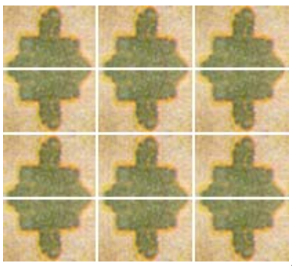

Diseño moderno


M. C. Escher

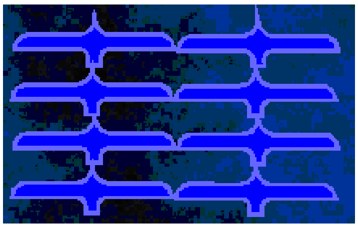
pm



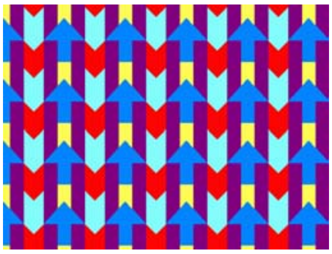
Alicatado. Arte nazarí; s. XIV-XV. La Alhambra.

Para generar el siguiente mosaico, el motivo  lo reflejo respecto al eje horizontal y después aplico una traslación, es decir, primero , , y luego , nuevamente reflejo horizontalmente  y traslado  (recuérdese que no considero colores). Pero el mismo mosaico lo puedo construir de la siguiente manera: primero traslado , después reflejo , luego vuelvo a reflejar , y repito la acción , y así puedo seguir hasta el infinito.

Finalmente aplico traslaciones. Si se ha notado, los movimientos que utilizo no necesariamente tienen que llevar un orden. Además en muchos de los mosaicos que estoy considerando son evidentes los movimientos, por tal motivo estaría de más considerar movimientos absurdos. Los mismos movimientos generan lo siguiente:



Palacio de Mitla, periodo Pre-colombino



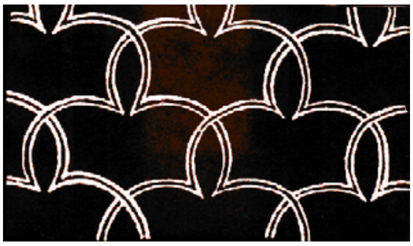
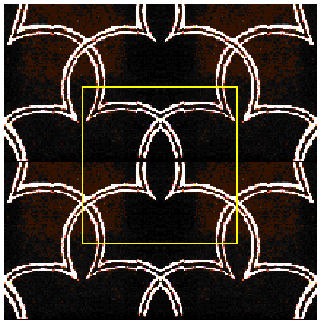
Diseño moderno

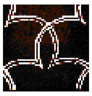
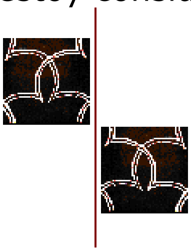
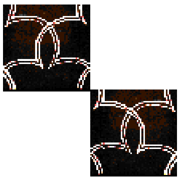
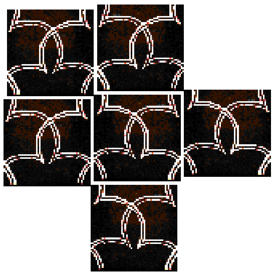
M. C. Escher

pg

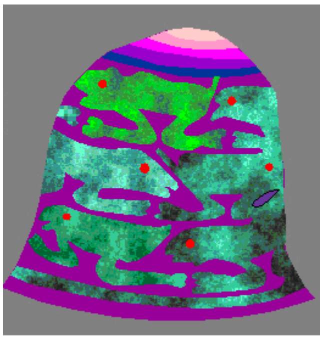
Pintura. Puerta del Vino

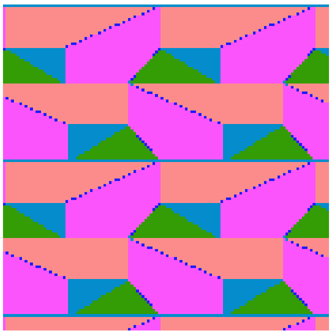
En la imagen anterior aun se alcanzan a apreciar los pigmentos sobre el muro. La siguiente trata de hacer una interpretación de lo que está plasmado.

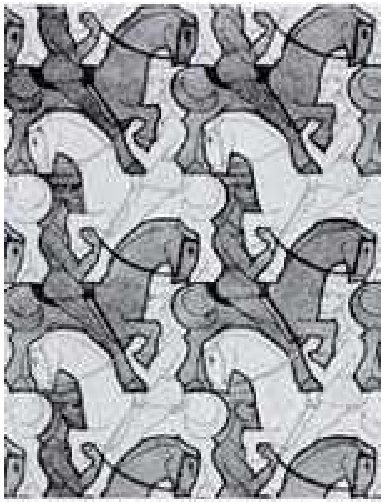
 

Voy a considerar el motivo  para aplicarle una reflexión con deslizamiento, tomando como línea de reflexión una recta vertical, la cual no estoy considerando como eje de simetría , es decir,  y  igual a . Cuando aplico traslaciones hacia arriba y hacia la derecha resulta  que de esa manera se va cubriendo el plano .

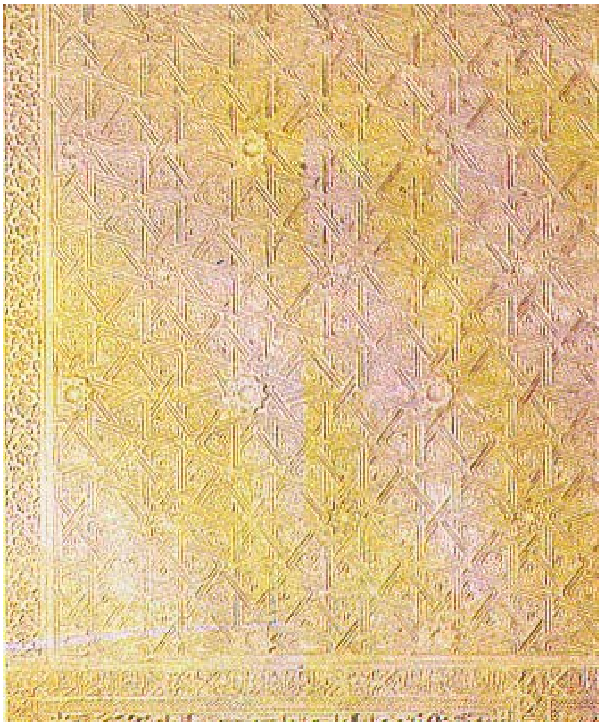
Un mosaico como el anterior se genera haciendo reflexiones con deslizamiento y traslaciones. Otros mosaicos con las mismas características son los siguientes:

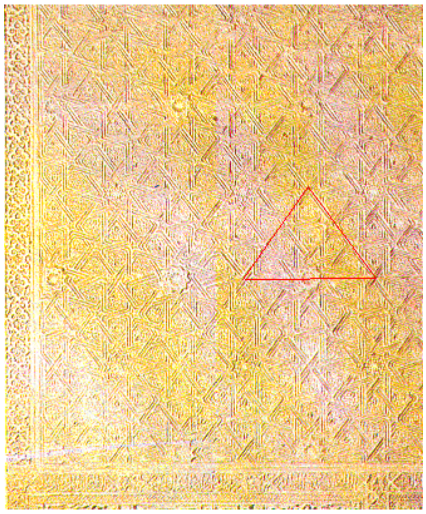

Ornamento de arte africano

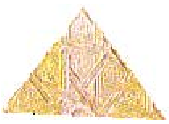

Diseño moderno


"Jinetes", Escher

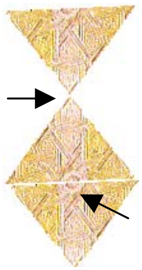
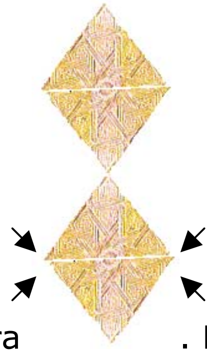
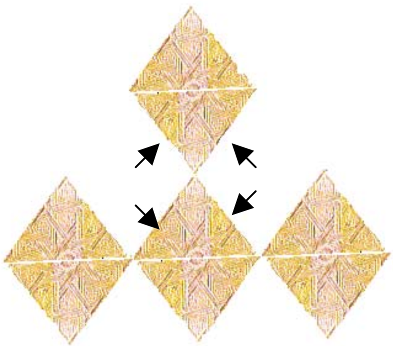
p2

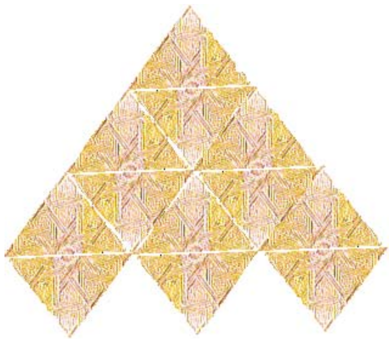

Generalife



Si reflejo sobre el eje horizontal al motivo , resulta un hueco entre los dos motivos , esto se debe a que estoy considerando la mitad de un romboide (cuyos lados contiguos son desiguales y dos de sus ángulos mayores que los otros). Ahora bien, cuando aplico una rotación de 90°

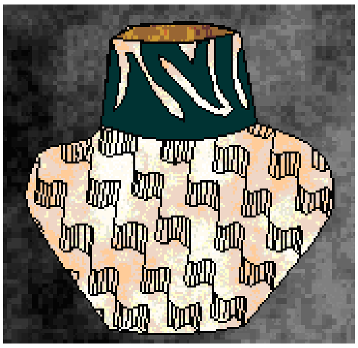
 el resultado no es bueno, pero al intentar una de 180°  el resultado se asemeja más. Lo cual significa que hay diferencia entre la reflexión horizontal anterior y la rotación de 180°.

Aplicando otra rotación de 180° , y una tercera . Los resultados de los giros dependen del centro de rotación, por ejemplo, los centros que consideré son los que están marcados con flecha en la primera imagen, pero también se vale tomar como centros de rotación aquellos que están marcados en la segunda. De esta manera puedo obtener . Para rellenar los huecos voy a aplicar otras

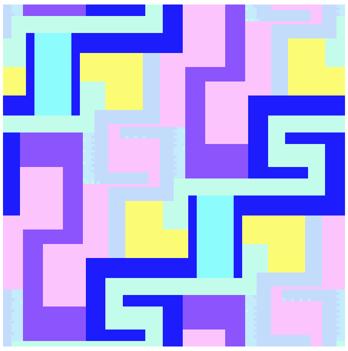
rotaciones de 180° cuyos centros están indicados .

Para seguir abarcando el plano aplico traslaciones.

Las aplicaciones correspondientes son giros de 180° y traslaciones. Las siguientes imágenes se generaron con los mismos movimientos:



Odzaki, Grecia,
alrededor 6100-5800 a. C.(Neolítico

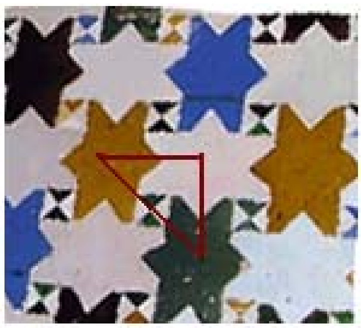


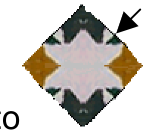
Diseño moderno

M. C. Escher

cmm

El Mexuar o cámara del consejo

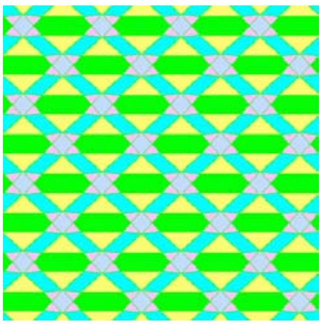


Al aplicar una reflexión vertical a  obtengo , esto es  la mitad de un rombo. Y una reflexión horizontal a este resultado generará el rombo completo  . Después, un giro de 180° con centro marcado por la flecha resulta  . Aplicando las ya conocidas traslaciones, queda

 . Nótese que la parte del mosaico que tomé para remarcar el patrón a considerar, la llevé a 45 grados para verla "derecha"; de cualquier manera el resultado es el mismo.

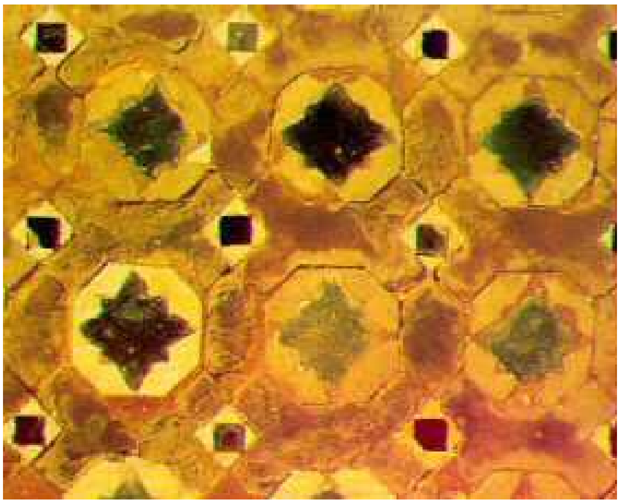
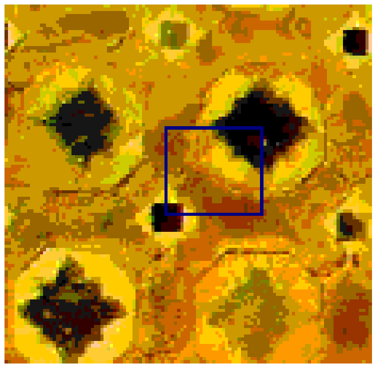
Se usaron reflexiones verticales y horizontales, giros de 180° y traslaciones para crear el mosaico. Más ejemplos de esto son:


Arte del Neolítico


Diseño moderno

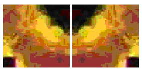
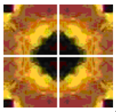

M. C. Escher

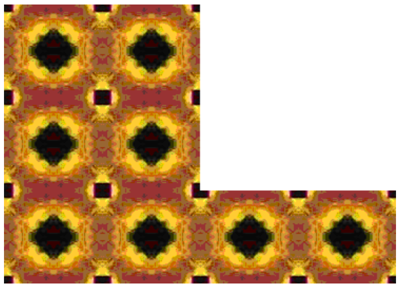
pmm

Procedente del pasillo entre la Sala de la Barca y el Salón de Embajadores

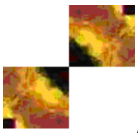
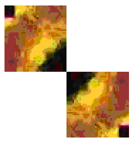
Tomando el motivo principal  y reflejándolo vertical y horizontalmente

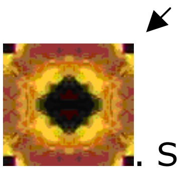
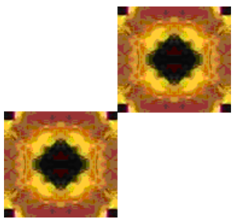
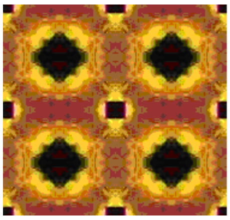
(no importa el orden) se genera  y , es decir, un cuadrado

. Trasladando hacia arriba y hacia la derecha .

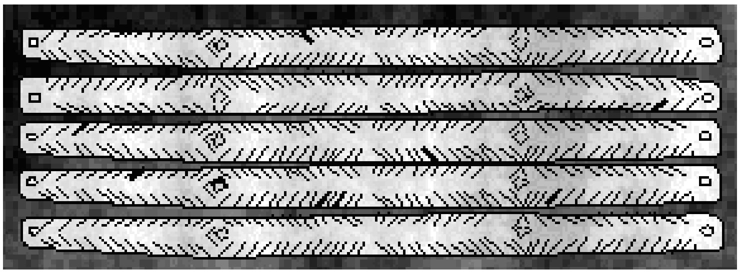
¿Qué pasaría si en lugar de aplicar reflexiones aplico rotaciones de 180°?

 girando 180° con el centro indicado por la flecha (el centro de rotación puede estar en el centro, en cualquiera de las esquinas y a la mitad de los lados como se vio anteriormente en el análisis del segundo mosaico)

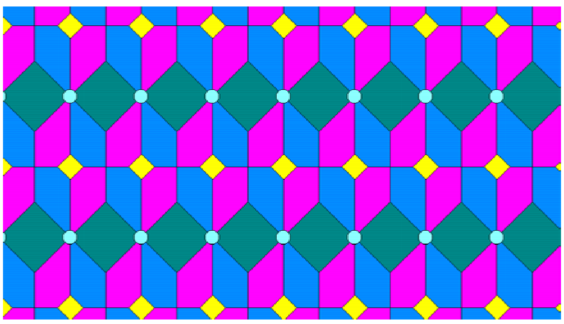
, si a su vez este motivo completo gira nuevamente 180° 

resulta . Si al nuevo motivo lo giro 180° una  y otra vez , con este procedimiento puedo llenar el plano. Lo que es equivalente a las traslaciones.

Hay dos caminos para generar un mosaico como el anterior, el primero es aplicando dos reflexiones, vertical y horizontal, más las traslaciones hacia arriba y a la derecha. El segundo camino es girando 180° más las traslaciones. Se puede decir que un giro de 180° es lo mismo que una reflexión vertical más una reflexión horizontal. Otros ejemplos de lo anterior son:



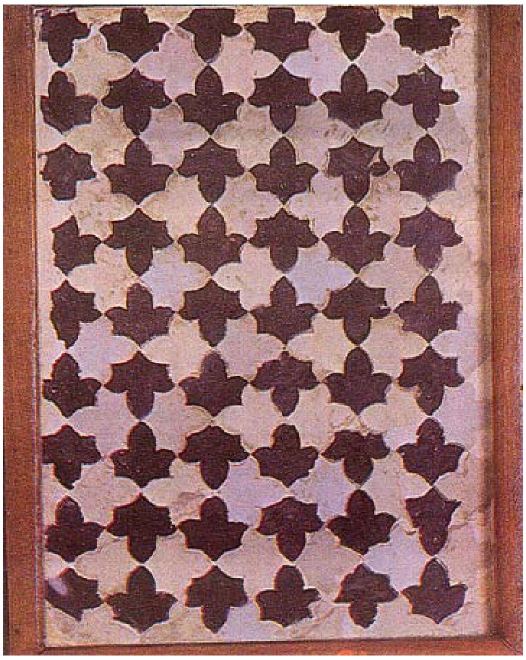
Mezin, USSR, alrededor de 12000 a C

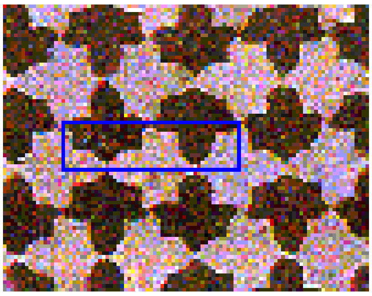


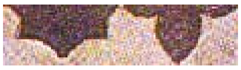
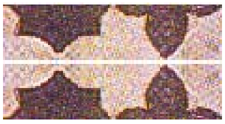
Diseño moderno

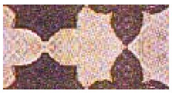
M. C. Escher

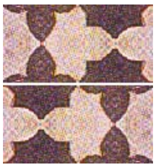
pmg

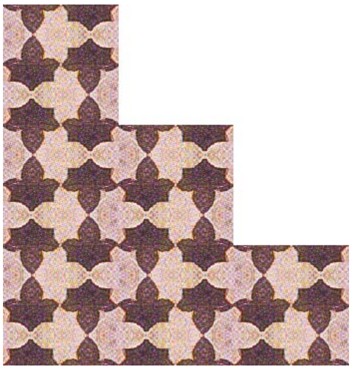

Sala de la Barca



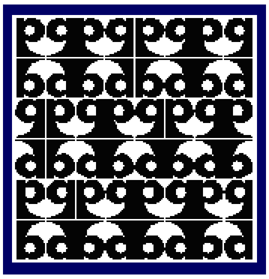
Al motivo principal  lo reflejo horizontalmente 

para obtener un rectángulo  . Tomando como centro de giro el

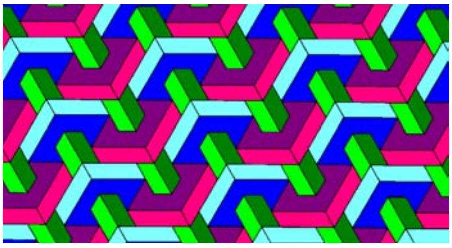
que marca la flecha, aplico una rotación de 180°  . Aplico traslaciones hacia arriba y a la derecha para crear el mosaico

 .

Reflexiones horizontales y giros de 180°, más traslaciones son los movimientos necesarios para generar imágenes como:



Arte del Neolítico

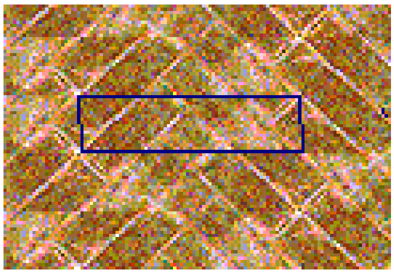


Diseño moderno

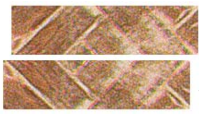
M. C. Escher

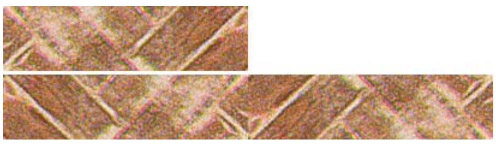
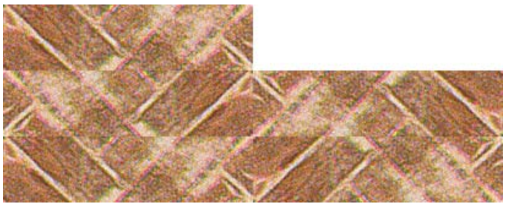
pgg

Espina de pez. Bóveda de la Puerta del Vino



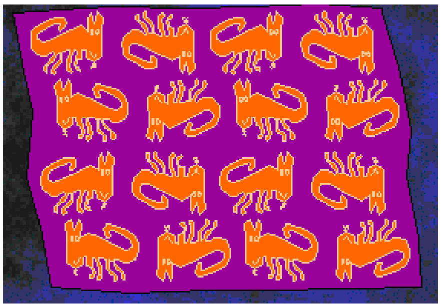
Para que pueda apreciarse, hice una extensión del motivo principal

 al cual aplicaré una reflexión con deslizamiento (cuya línea de reflexión es horizontal)  → 

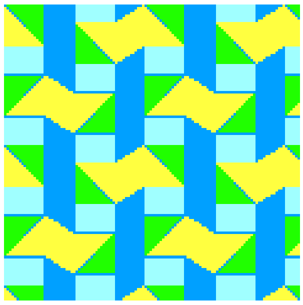
y enseguida un giro de 180° ; repitiendo el proceso resulta . Para llenar el plano aplico

traslaciones .

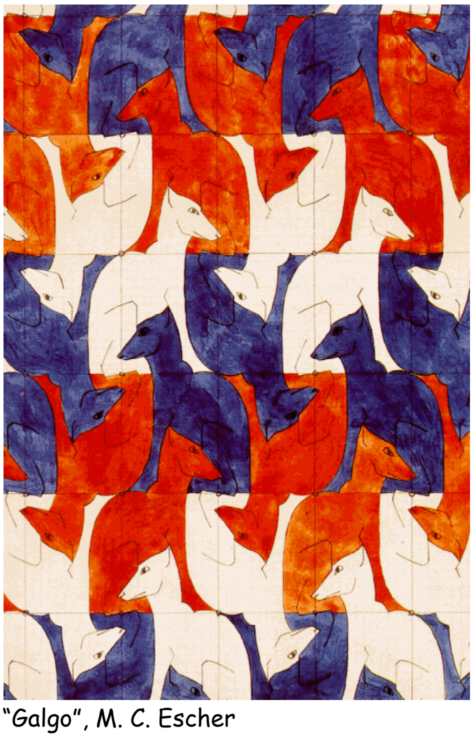
Los movimientos son una reflexión con deslizamiento, una rotación de 180° y traslaciones hacia arriba y a la derecha. Ejemplos de lo anterior son:



Arte pre-Colombino, Perú

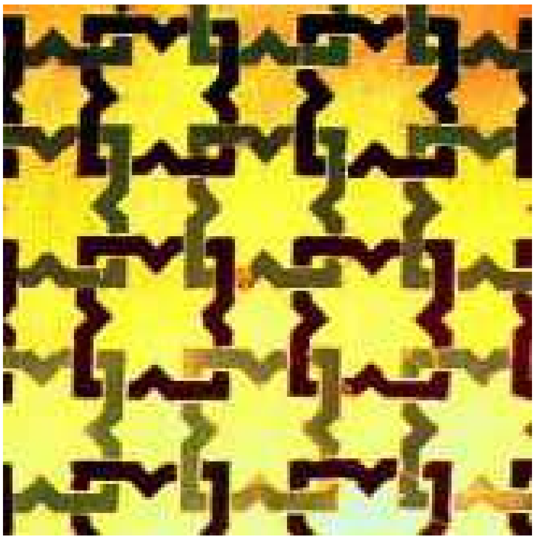


Diseño moderno

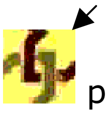


"Galgo", M. C. Escher

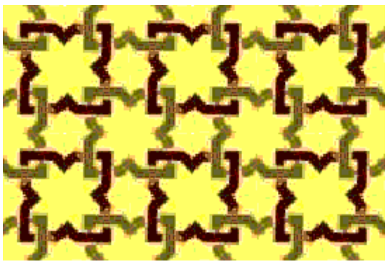
p4

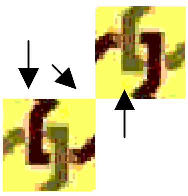
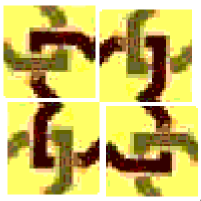


Pabellón Norte del Generalife

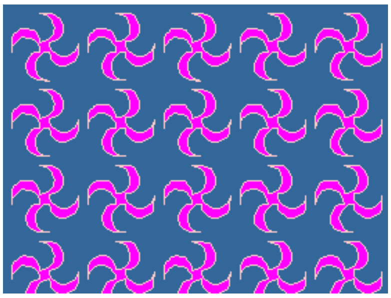
Para construir el mosaico basta con aplicar tres giros de 90° al motivo principal  para generar un cuadrado, primero  ,segundo 

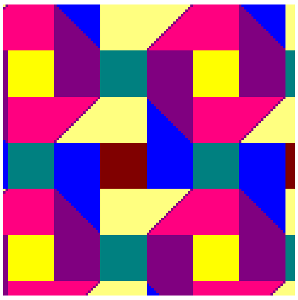
y tercero . Trasladando hacia arriba y a la derecha genero

.

Este mosaico puede construirse también aplicando rotaciones de 180° con centros en las flechas  , , finalmente se aplican las traslaciones.

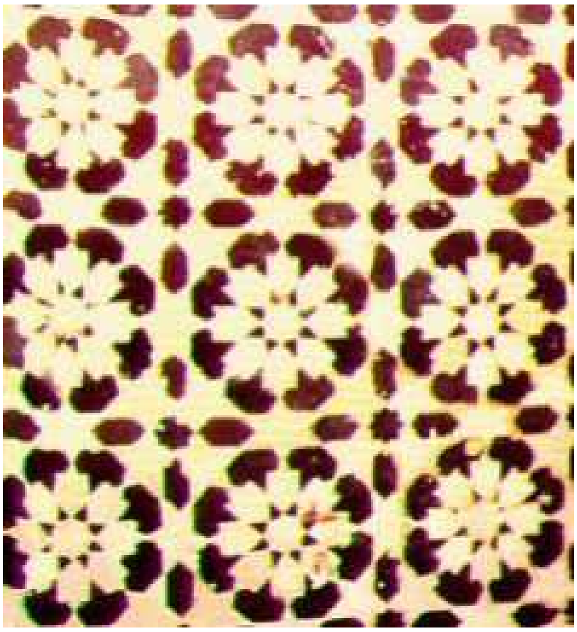
Giros de 90° grados y traslaciones, o rotaciones de 180° y traslaciones. Los siguientes ejemplos tienen esas características.

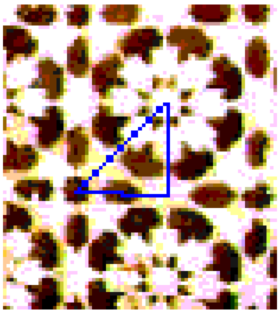

Arte étnico africano

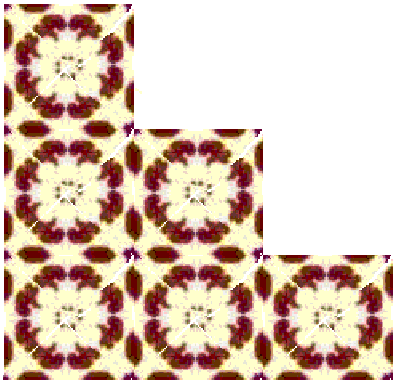

Diseño contemporáneo


"Reptiles", Escher

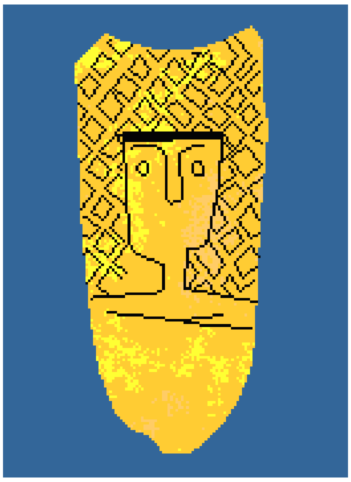
p4m

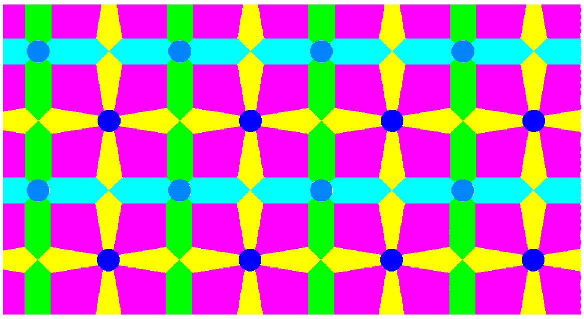

Torre de la Cautiva

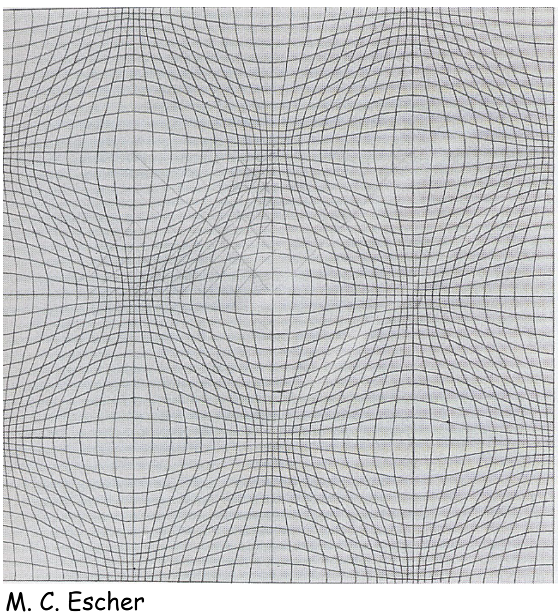


Tomando  aplico una reflexión vertical , y este motivo lo giro 90° con centro en la flecha, primero , después  y luego . Trasladando resulta .

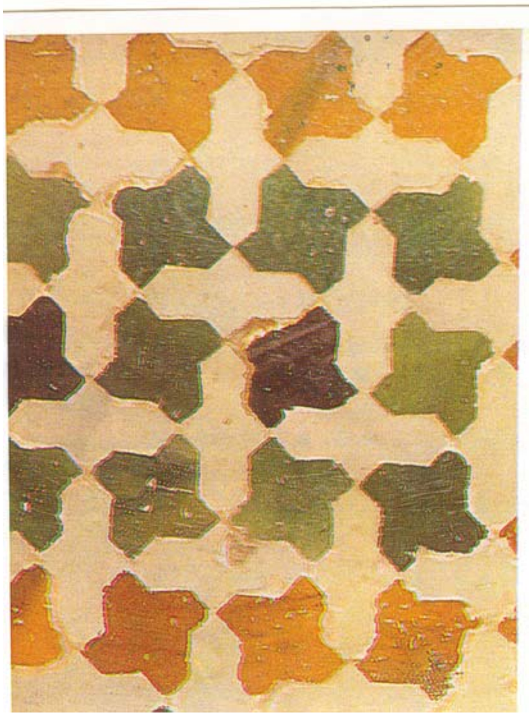
El mosaico se genera con reflexiones verticales, horizontales o diagonales, con giros de 90°, más traslaciones. Los ejemplos de este tipo de mosaicos son:


Arte del Neolítico

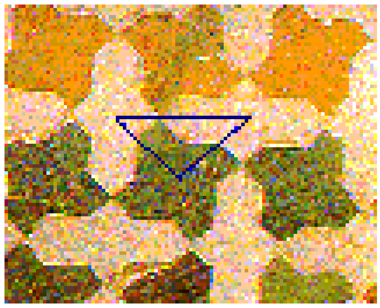

Diseño inglés

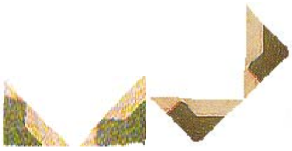
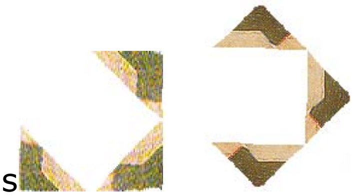
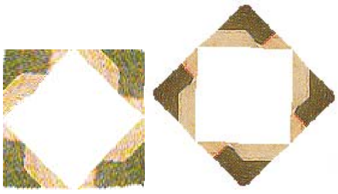
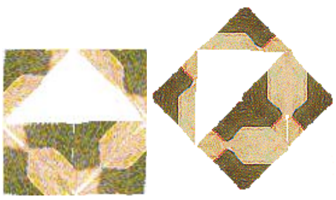
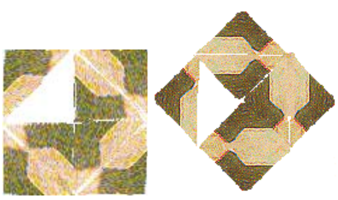
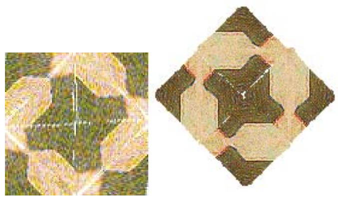

M. C. Escher

p4g

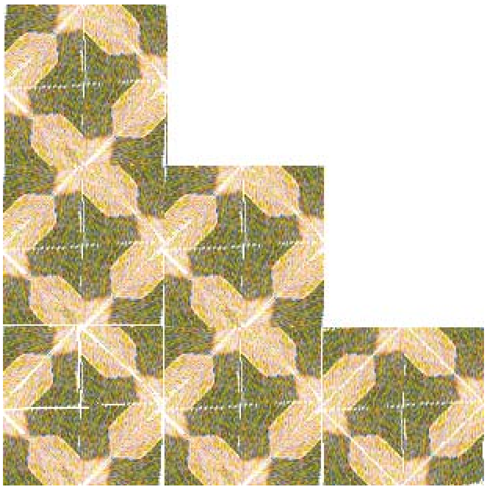
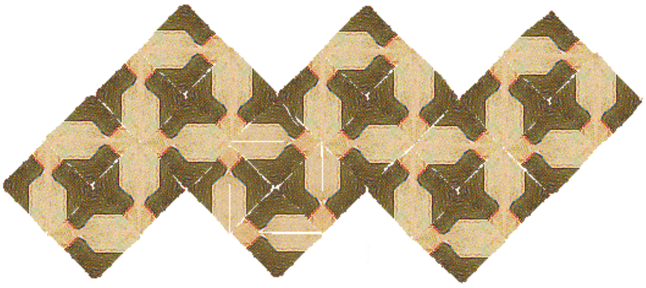


Torre de las Damas

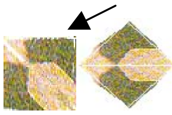


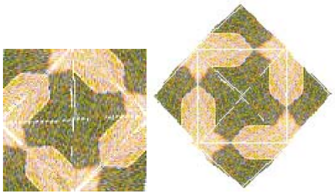
A  lo voy a girar 90° sucesivamente hasta cerrar una vuelta, es decir,  primero, después  y luego . Posteriormente reflejo cada giro para rellenar el espacio y tener un cuadrado, esto es, , ,  y .

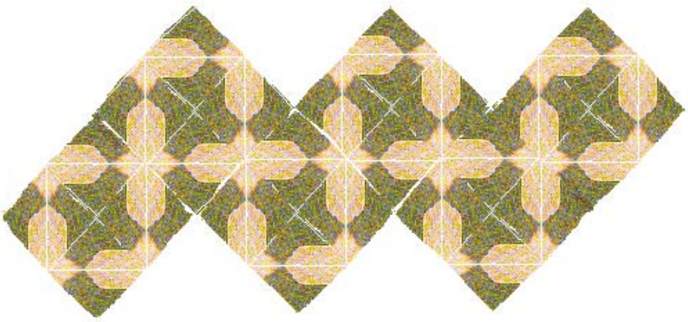
Finalmente con traslaciones creamos el plano

Pude haber hecho también el caso contrario: a  reflejarlo

horizontalmente  y después girarlo 90° con centro en la flecha

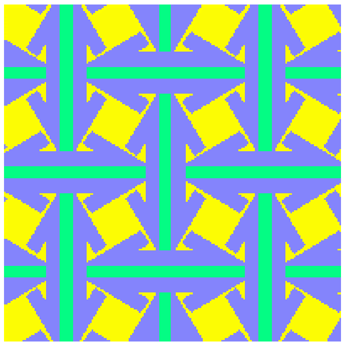
 . Y luego trasladarlo

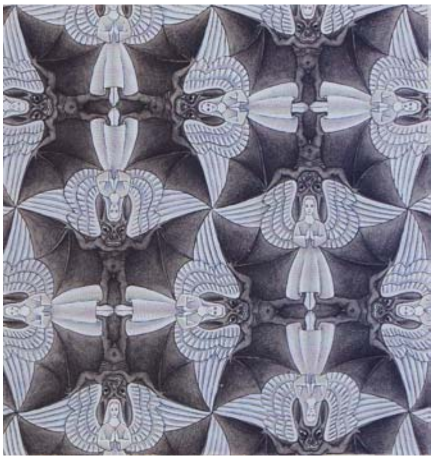


.

En este mosaico también se aplican giros de 90°, reflexiones y traslaciones. ¿Será que éste es igual al caso anterior? En al capítulo III mencionaré las características de uno y otro. Pero mientras llegamos a ese punto, se recomienda hacer un análisis minucioso para darse una idea intuitiva de lo que pasa. Por ejemplo, estudiar los siguientes mosaicos:


Arte del Neolítico


Cairo, Egipto


"Angeles y Demonios", Escher

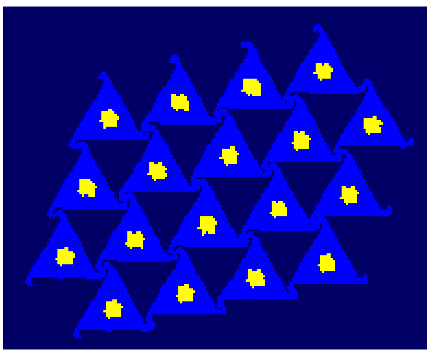
p3

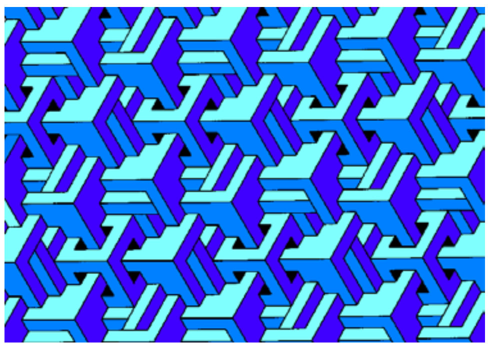


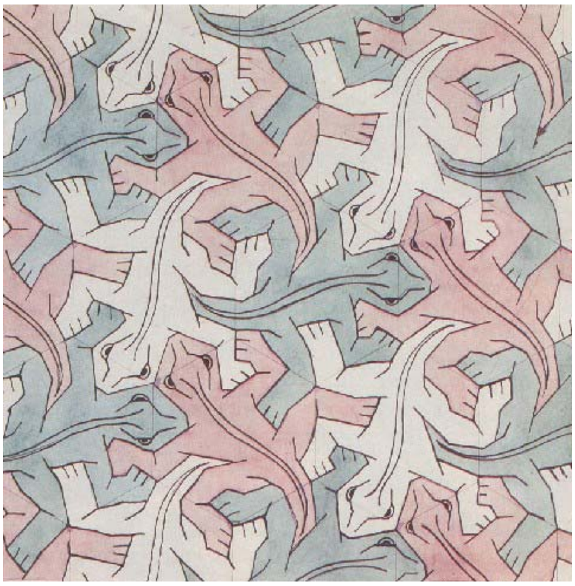
Primer tepidarum, junto a la pila que determina el fugidarium del baño de Comares

Para crear este mosaico considero  ← , y en esta ocasión voy a aplicar una rotación de 120° , apoyándome en la flecha que indica el centro de giro, esto es,  ; girando nuevamente 120°  , obtengo . Trasladando hacia arriba y a la derecha  genero el mosaico .

Rotaciones de 120° más traslaciones son los movimientos aplicados. Además del centro marcado con la flecha azul, puede considerarse también cualquiera de los otros tres ángulos. Las incógnitas ahora son, por qué el ángulo de 120° y no otro. Todas las dudas hasta aquí más las que vienen se aclararán en el siguiente capítulo. Ejemplos:

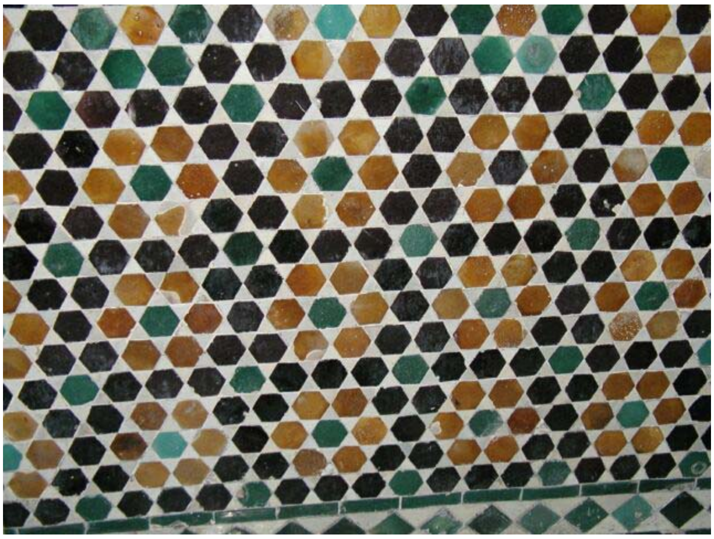

Ornamento del arte primitivo


Diseño moderno

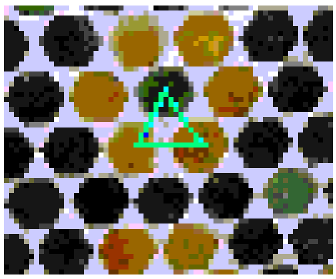


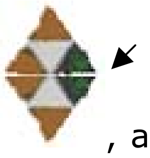
"Los lagartos" de M. C. Escher

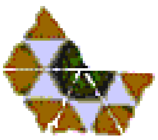
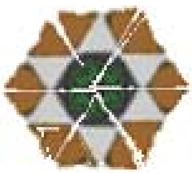
p3m1

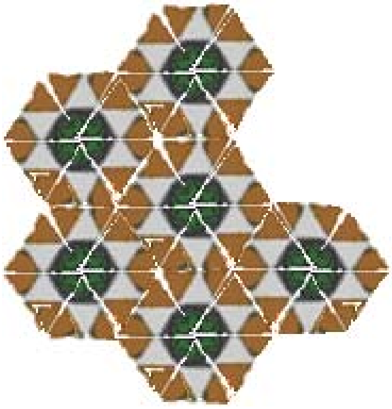


Alicatado. Arte nazarí, La Alhambra.



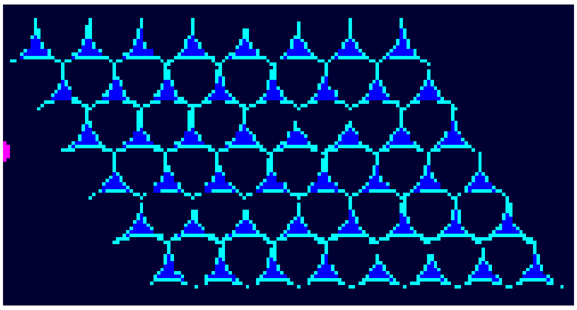
Al motivo  lo reflejo horizontalmente  para obtener , a este nuevo motivo lo giro con un ángulo de 120° hasta cerrar el ciclo, es decir,

 → , y  para generar . Posteriormente

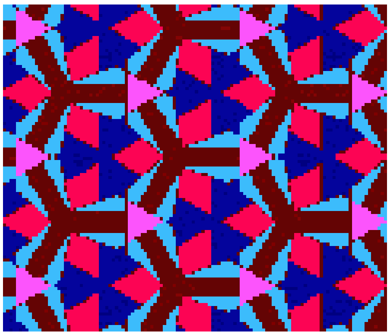
aplico traslaciones para cubrir el plano  .

Nuevamente hago hincapié en que no me estoy basando en el color sino en los contornos.

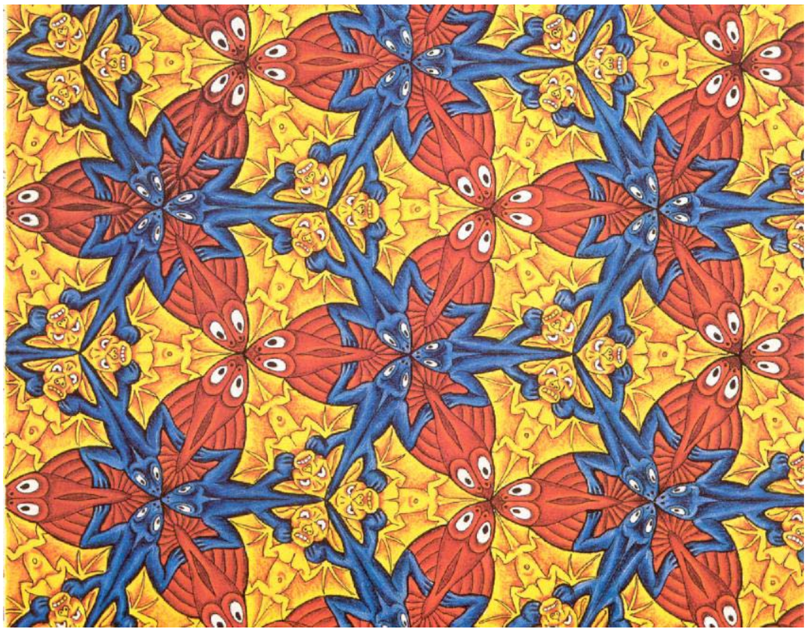
Para crear un mosaico como el anterior basta con aplicar reflexiones, rotaciones de 120° y traslaciones. Más ejemplos de lo anterior son:



Arte primitivo



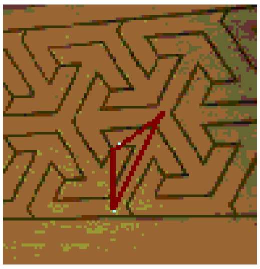
Diseño moderno



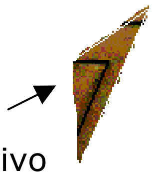
M. C. Escher

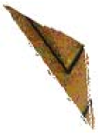
p31m

Pintura. Bóveda de la Puerta del Vino

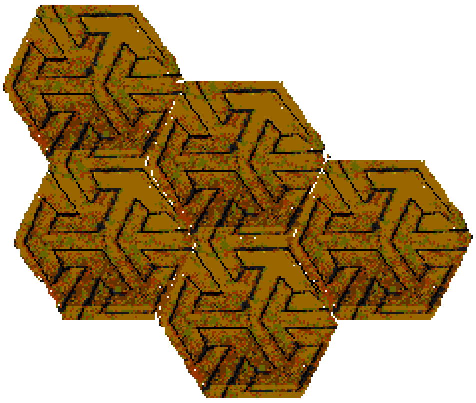


La tercera imagen muestra a detalle lo que no se puede apreciar en la primera debido a la erosión.

Entonces, considerando el motivo  voy a aplicarle dos rotaciones de 120° con centro de giro indicado por la flecha, es decir,  y

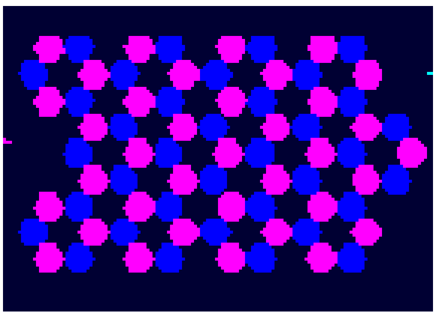
 para construir   un triángulo equilátero;

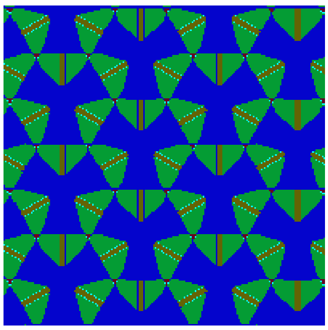
ahora aplico una reflexión horizontal para obtener  un rombo. Si repito el procedimiento desde las rotaciones de 120°  y , obtengo un hexágono . Finalmente aplicando traslaciones hacia arriba y a la derecha cubro todo el plano



.

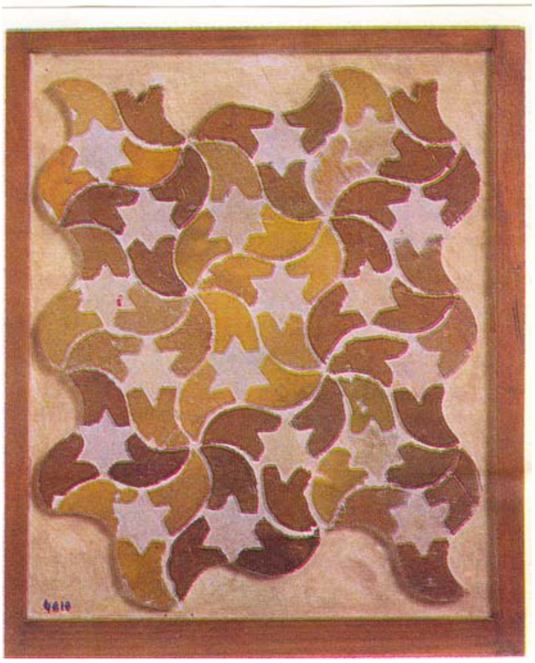
Aplicando giros de 120°, reflexiones y traslaciones al motivo principal, se genera el mosaico. Otros ejemplos como el anterior son:


Diseño primitivo

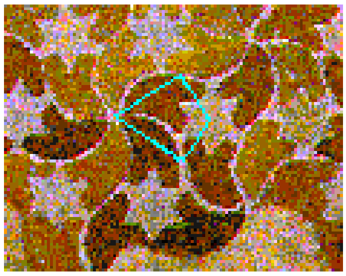

Diseño moderno

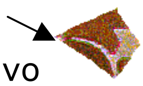
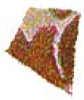
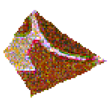
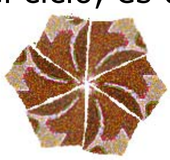
M. C. Escher

p6

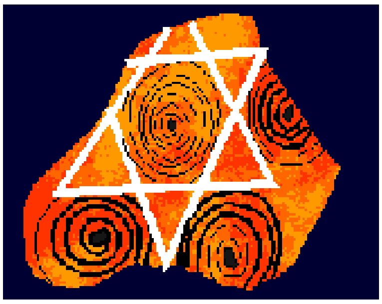


Alicatado. Arte nazarí. La Alhambra.

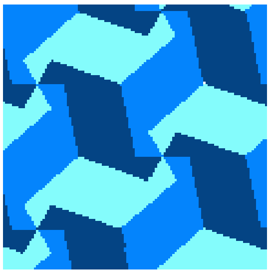


Al motivo  lo voy a girar 60° hasta cerrar el ciclo, es decir, , , ,  y  para obtener un hexágono . Si a su vez aplico las traslaciones, abarco todo el plano  .

Para crear este mosaico basta con aplicar giros de 60° más traslaciones. Otros ejemplos son:



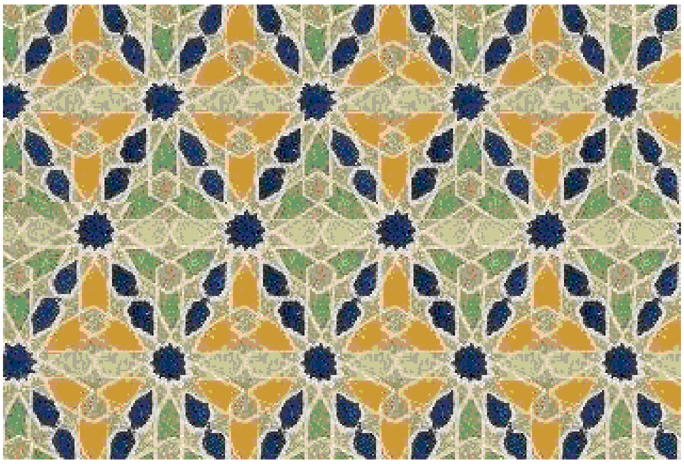
Butmir, alrededor de 4000 a. C.



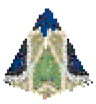
Diseño moderno

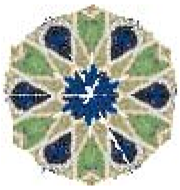
M. C. Escher

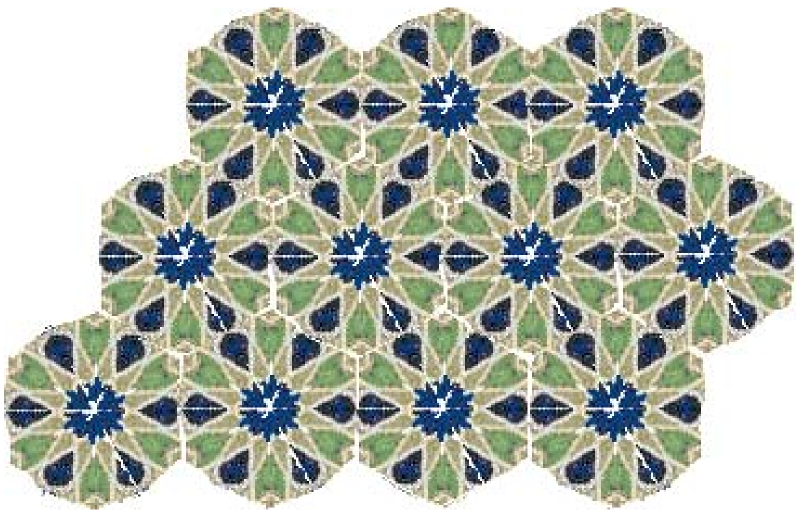
p6m



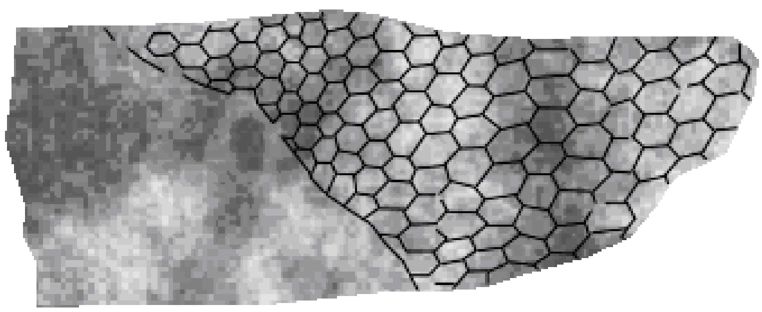
Sala de los Reyes o de la Justicia (lado oriente del patio de los Leones)

Reflejando , obtengo . Al resultado le aplico rotaciones de 60° hasta cerrar el ciclo, tomando como centro de rotación el que indica la flecha, esto es,  ,  ,  ,  y  . Obteniendo así

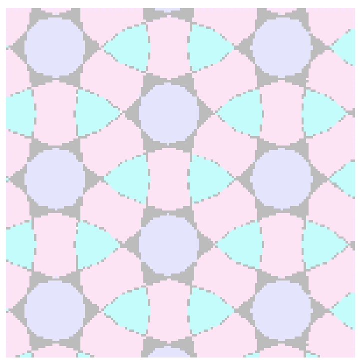
 un hexágono. Y finalmente aplico traslaciones

 .

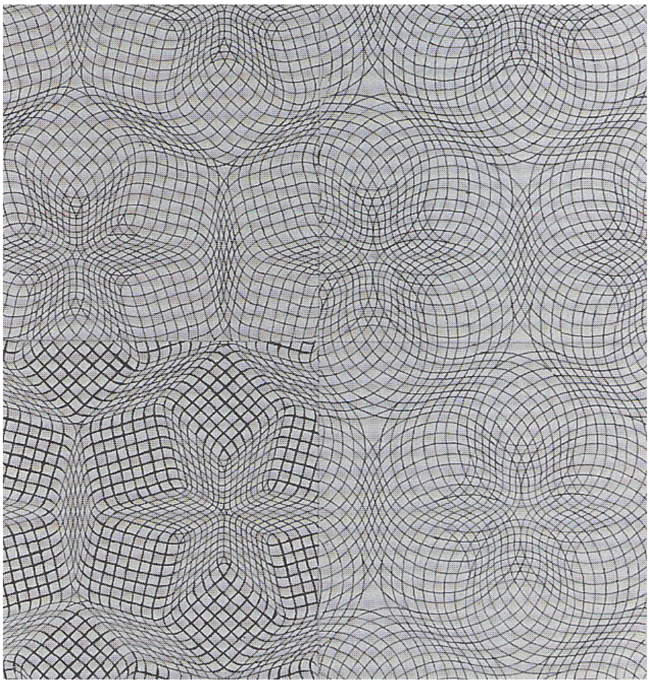
Los movimientos necesarios para crear un mosaico como el anterior son reflexiones, rotaciones de 60° y traslaciones. Más ejemplos son:



Arte paleolítico en Rusia (10000 a. C.)



Diseño moderno



M. C. Escher

La intención de aplicar estos movimientos es ver de cuántas maneras se pueden combinar para construir los mosaicos. Cuidando siempre que los motivos no queden traslapados ni separados.

Y surgen otras preguntas: ¿Se pueden aplicar todos los movimientos en un solo mosaico?, ¿Por qué he aplicado únicamente giros de 180°, 120°, 90° y 60°?, ¿En qué me baso para tomar los centros de rotación?, etcétera.

CAPÍTULO III

La composición de los templos
depende de la simetría,
y la simetría de la proporción
Vitruvio, (III.1)

En el presente capítulo utilizaré ciertas representaciones gráficas que expliquen un poco más a detalle lo que traté de expresar en la sección anterior.

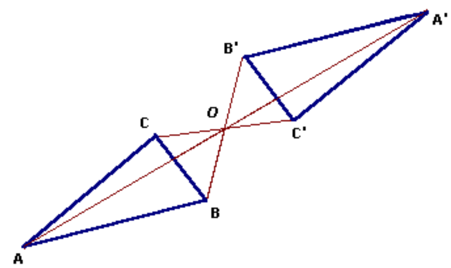
Lo primero que hay que recordar es que una greca es una banda plana que se rellena periódicamente repitiendo un motivo una y otra vez sólo en una dirección y siguiendo una línea recta. Por otro lado, un mosaico es una composición con losetas que reproduce un paisaje o una figura. Las losetas rellenan el plano de forma periódica, sin dejar huecos ni traslaparse entre sí, siguiendo dos direcciones.

Para lograr lo anterior se siguen cuatro estrategias que se conocen como movimientos en el plano:

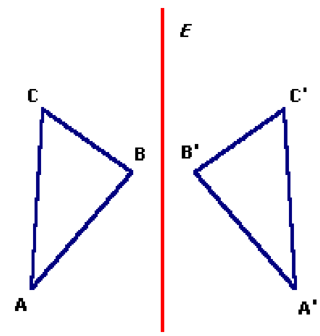
i. Traslación. Es como si la nueva loseta que añadimos fuera una anterior desplazada a una nueva posición sin giros de ningún tipo.
ii. Rotación. La nueva loseta surge por el giro de una anterior con centro en algún punto determinado y con un ángulo concreto.
iii. Reflexión. Cada loseta nueva es la imagen especular de una anterior, con un eje de simetría dado.
iv. Reflexión con deslizamiento. Se trata de una reflexión seguida de una traslación en la dirección del eje de reflexión.

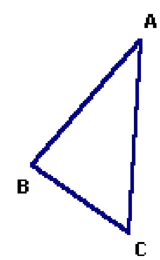
Estas estrategias conservan las distancias, es decir que el tamaño y la forma de la loseta original no cambian con los movimientos. La traslación y la rotación por ser movimientos directos conservan la orientación; y los dos últimos por ser movimientos inversos, invierten la orientación.

¿Pero qué significa eso de conservar la orientación?



En la figura anterior se conserva la orientación, ya que al girar 180 grados el triángulo ABC con centro en *O*, coincidirá con el triángulo A'B'C'. En cambio en la siguiente figura:





si se gira 180 grados el triángulo ABC, , no coincide con el triángulo A'B'C'. (Propongo se intente con cualquiera de los otros dos ángulo para hacer la comprobación).

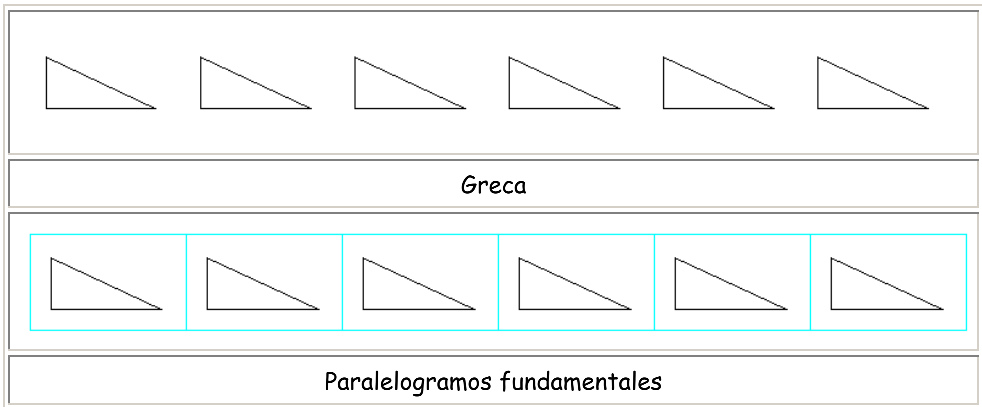
Para que el triángulo ABC coincida con su simétrico, tendríamos que sacarlo del plano, desarmarlo y volver a construirlo sobre la otra cara. Es por eso que se dice que en las reflexiones no se conserva la orientación.

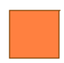
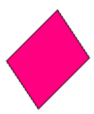
Este asunto de conservar o no la orientación es importante porque cada loseta puede tener dibujos asimétricos que hagan variar la composición.

GRECAS

Greca 1

La primera greca está generada por una traslación que continúa indefinidamente tanto hacia la izquierda como a la derecha.



Otra cuestión que surge es ¿qué es un paralelogramo fundamental?. Hay que recordar que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos entre sí, como el cuadrado , el rectángulo , el rombo  y el romboide  (cuyos lados contiguos son desiguales y dos de sus ángulos mayores que los otros dos).

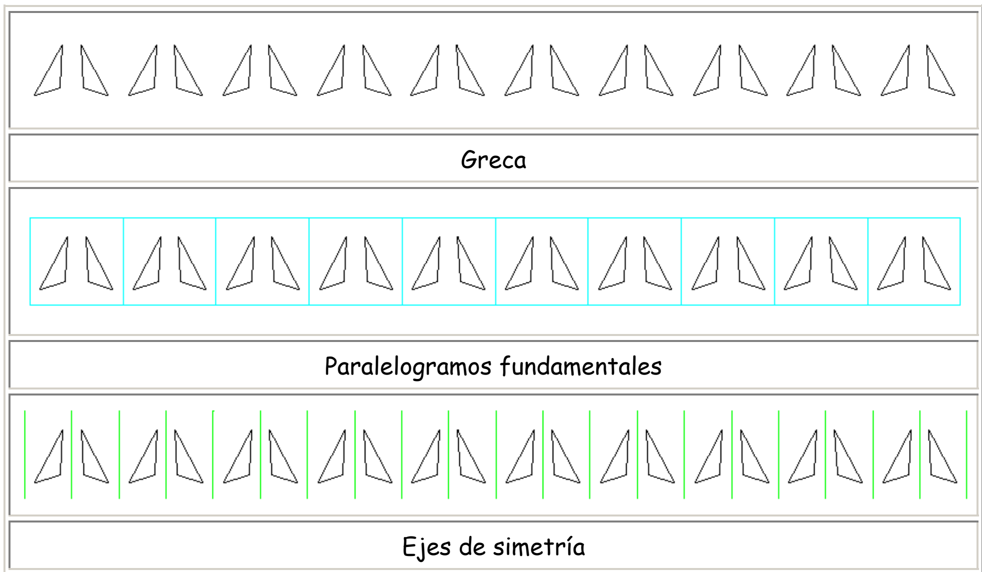
Por lo tanto, el paralelogramo fundamental es aquel paralelogramo que contenga elementos distinguidos tales como ejes de simetría o centros de giro del ángulo (es decir el punto a partir del cual se va a aplicar la rotación). Para rellenar una banda con un solo tipo de paralelogramo, tiene que ser con cuadrados o rectángulos únicamente. Y aunque éstos se pueden escoger de muchas maneras, siempre voy a tomar un paralelogramo fundamental de tal forma que sus lados sean lo más pequeños posible.

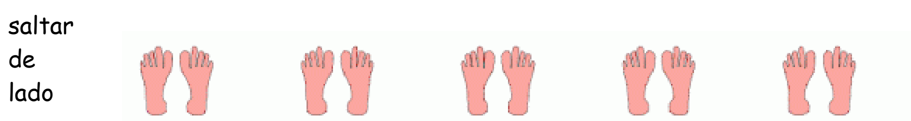
El esquema siguiente da otro ejemplo de lo que se está realizando.

saltar
en un
pie

Greca 2

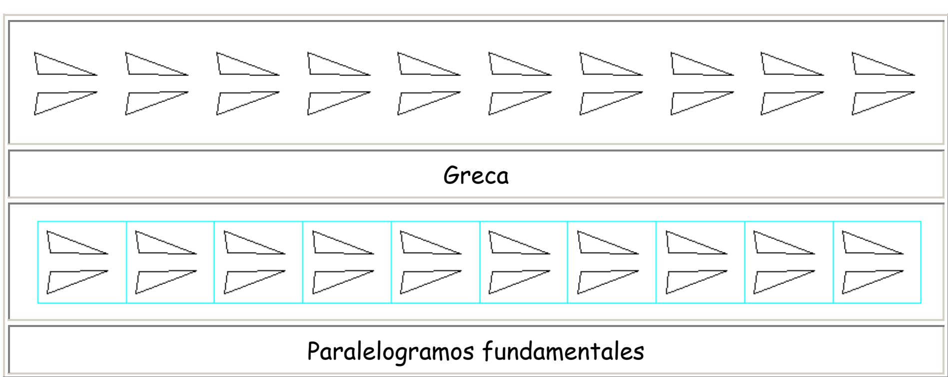
En la segunda greca los movimientos fueron reflexión respecto al eje vertical y traslaciones.

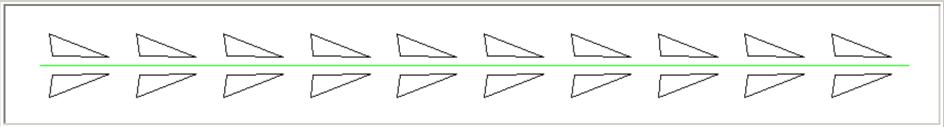




Greca 3

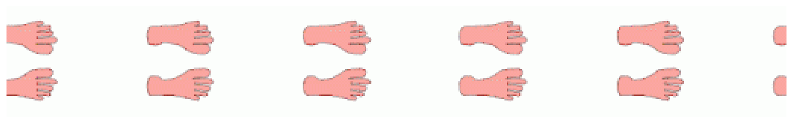
Se aplican reflexiones horizontales y traslaciones.





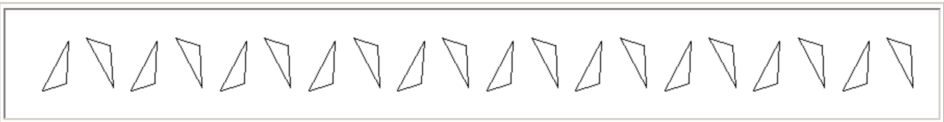
Ejes de simetría

saltar
en
dos
pies

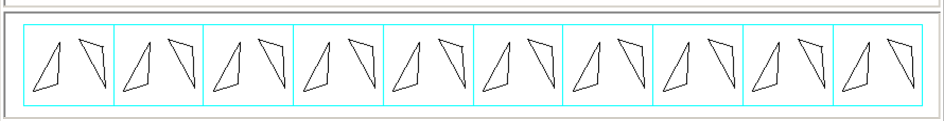


Greca 4

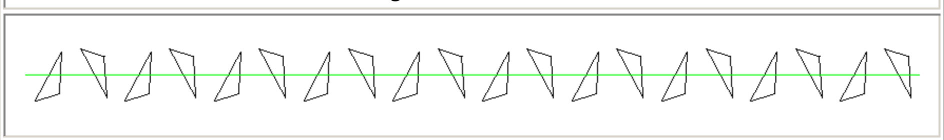
Se aplica una reflexión con deslizamiento y traslaciones.



Greca

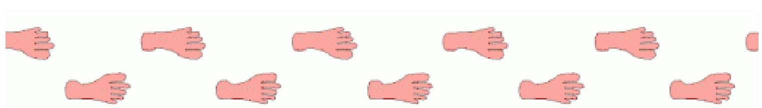


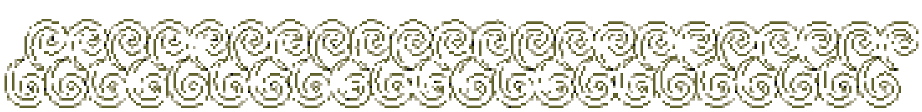
Paralelogramos fundamentales



Eje de simetría con deslizamiento

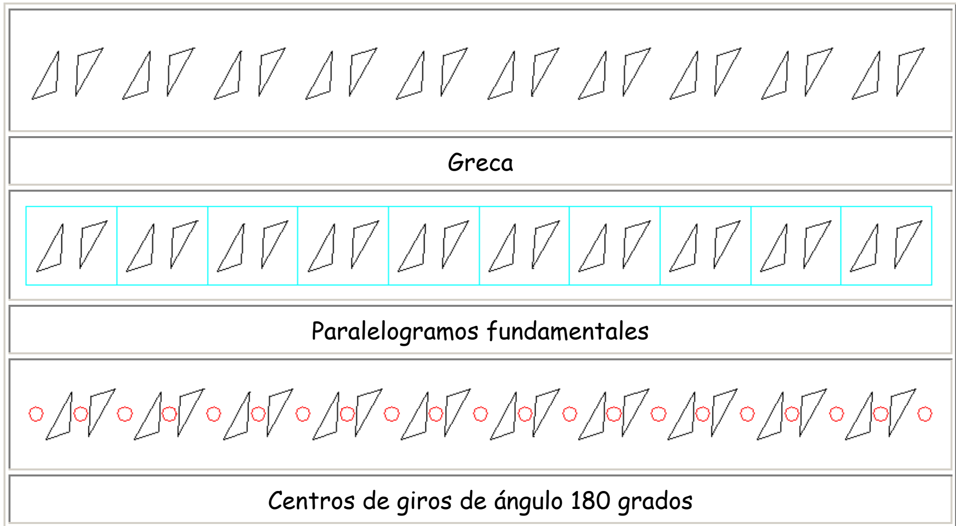
caminar





Greca 5

Rotaciones de 180 grados y traslaciones.

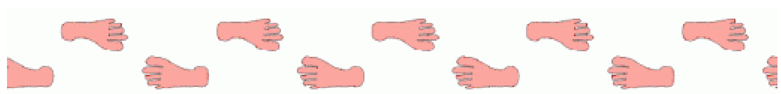


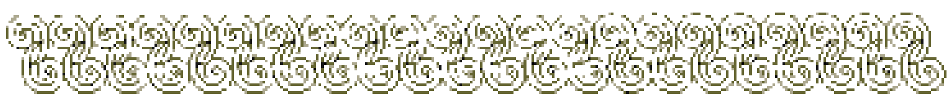
Greca

Paralelogramos fundamentales

Centros de giros de ángulo 180 grados

saltar en un pie girando

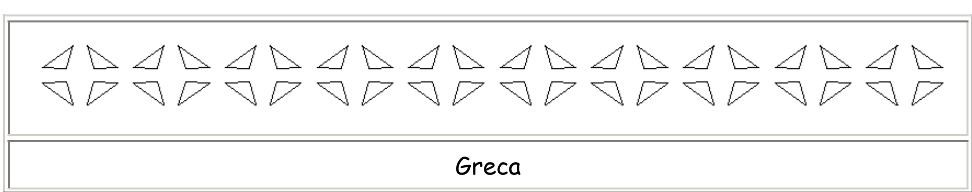




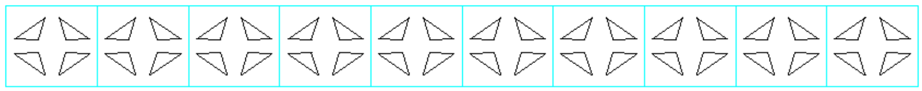
Hago la aclaración de que en las grecas son válidas únicamente las rotaciones de 180 grados. Recordemos que las traslaciones se generan en una sola dirección y en el sentido opuesto sobre una sola línea, es decir, al dar medias vueltas se está avanzando tanto a la izquierda como a la derecha.

Greca 6

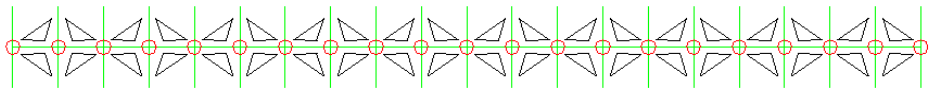
Reflexión horizontal, rotación de 180 grados y traslaciones. Otra opción es reflexión horizontal, reflexión vertical, reflexión horizontal y traslaciones.



Greca

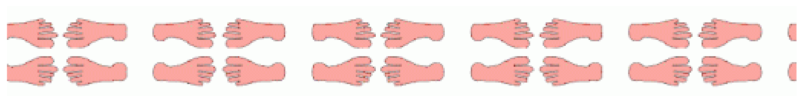


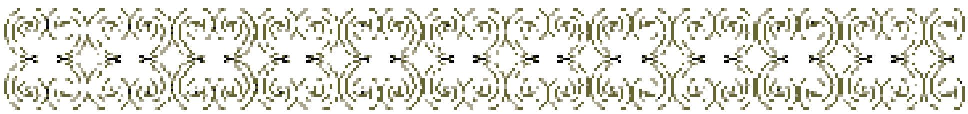
Paralelogramos fundamentales



Centros y ejes de simetría

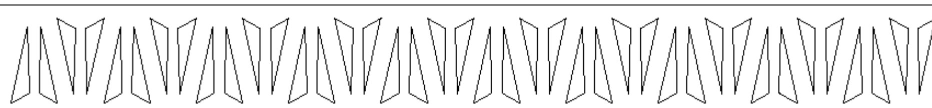
saltar
girando



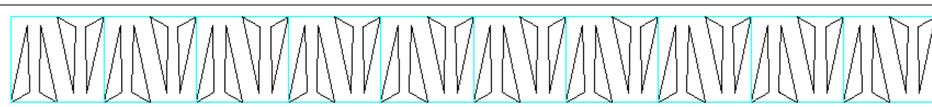


Greca 7

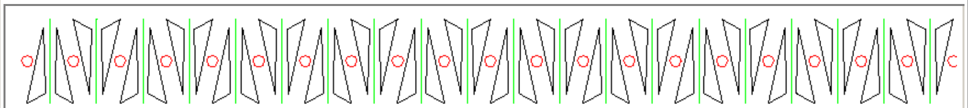
Reflexión vertical, rotación de 180 grados y traslaciones.



Greca

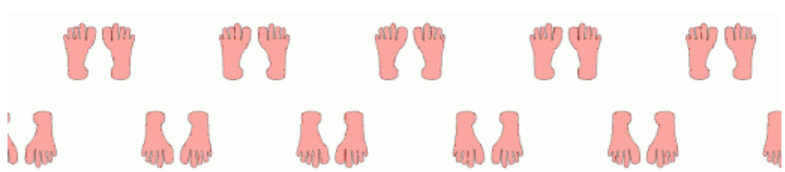


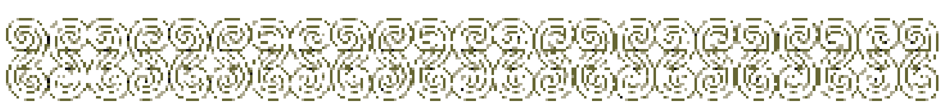
Paralelogramos fundamentales



Centros y ejes de simetría

saltar
de lado
girando

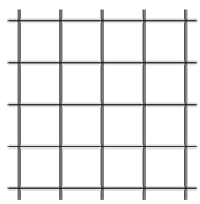




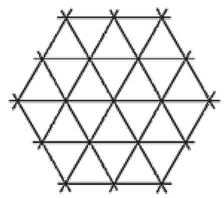
MOSAICOS

Antes de hacer el análisis de los mosaicos, surgen unas preguntas que quiero aclarar: ¿qué formas pueden tener las losetas de los mosaicos?, ¿con cuántos tipos de losetas se puede cubrir una pared?

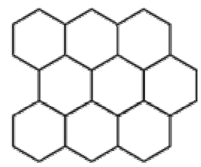
Los mosaicos más sencillos son los polígonos regulares[4] que forman las rejillas de la siguiente tabla. Son sencillos no sólo por estar formados por un solo tipo de loseta, sino también por el hecho de presentar una estructura repetitiva muy clara.



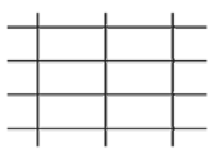
rejilla cuadrada



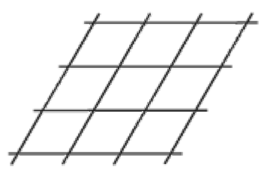
rejilla triangular



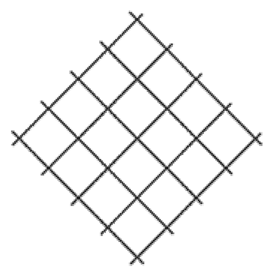
rejilla hexagonal



rejilla rectangular



rejilla romboidal



rejilla oblicua (cuadrado)

¿Recuerdan las traslaciones que apliqué a todos los mosaicos?, pues la finalidad de eso era cubrir todo el plano con la loseta principal por medio de desplazamientos en dos direcciones: hacia arriba (y abajo, su contrario) y a la derecha (y a la izquierda, su contrario). Esto lo puedo ejemplificar imaginando una mica transparente con una rejilla cuadrada la cual se puede deslizar hasta hacer coincidir otra vez con la rejilla cuadrada del papel.

---

[4] El polígono, figura plana limitada por al menos tres rectas, toma diferentes formas según el número de lados. Un polígono regular tiene todos sus lados y ángulos iguales entre sí "Polígonos regulares." *Enciclopedia® Microsoft® Encarta 2001.* © 1993-2000 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

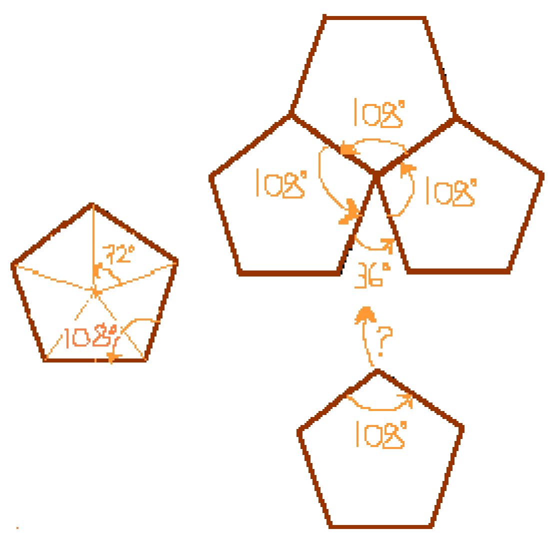
Con los giros sucede lo mismo. Ahora la mica se puede girar alrededor de un punto clavando un alfiler, éste impide el movimiento de traslación.

Si por ejemplo elijo el centro de giro como alguno de los vértices de la rejilla triangular, una rotación de un sexto de vuelta hace coincidir otra vez la figura de la mica con la de la página. Repitiendo seis veces la rotación regreso a la posición original. Cualquier otra rotación que tenga esta propiedad se obtiene repitiendo varias veces el giro. Esto me recuerda que tengo que aclararles por qué únicamente se aplican giros de 60, 90, 120 y 180 grados. Pero antes de entrar a detalle, sólo quiero remarcar que el centro de giro puede elegirse ya sea clavando el alfiler en los vértices, en la mitad de cada uno de los lados o en los centros de los triángulos equiláteros, cuadrados, rectángulos, rombos, romboides y hexágonos.

Si se observa, en todos los mosaicos del capitulo II aparecen formas regulares como triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos (como los de la tabla anterior), pero ninguno presenta losetas regulares de cinco lados, es decir, pentágonos, o más.

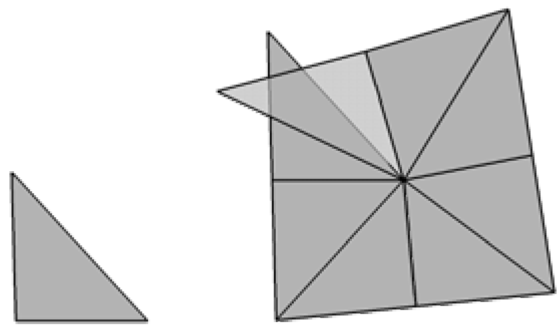
Pues bien, esto se debe a que el plano no puede cubrirse usando sólo pentágonos. En otras palabras, no podemos construir un mosaico tal que al hacer girar el pentágono (con centro en uno de los vértices) un ángulo de 108 grados vuelva a coincidir consigo mismo.

La siguiente figura lo explica mejor:



Existe una restricción que no permite deformaciones ni la utilización de varios tipos de figuras, o la combinación de éstas. Ya que las posibilidades de la primera son infinitas y la segunda hace que el problema escape de cualquier cálculo.

La forma del triángulo, por ejemplo, en un tapiz es importante. Si considero el siguiente triángulo y lo giro para que cubra todo el muro, queda lo siguiente:

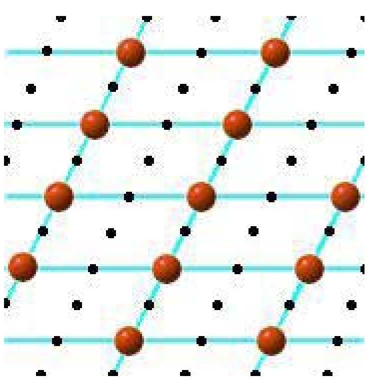


¿Qué sucedió?

El triángulo tomado como región fundamental no es un triángulo equilátero, y al intentar cubrir el plano termino la vuelta traslapando los motivos.

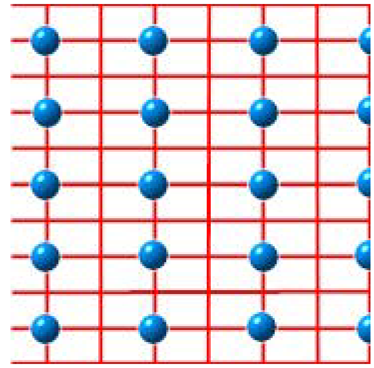
Para continuar con las rejillas y las rotaciones, me gustaría retomar las reflexiones y analizar su relación.

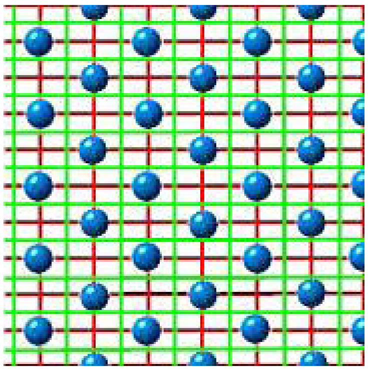
Si un motivo tiene una reflexión, entonces la rejilla tiene que ser rombal, rectangular o cuadrada. Si tiene una rotación de 90°, entonces el enrejado debe ser cuadrado. Pero si tiene una rotación de 60° o una rotación de 120°, el enrejado debe ser hexagonal. No hago mención del triangulo equilátero porque esta implícito en el rombo.



Un enrejado romboidal tiene traslaciones, y rotaciones de 180°, pero no tiene reflexiones ni reflexiones con deslizamiento.

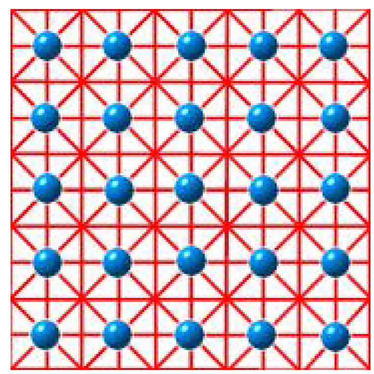
Las rejillas rectangulares tienen traslaciones, giros de 180° y reflexiones. No existen las reflexiones con deslizamiento.

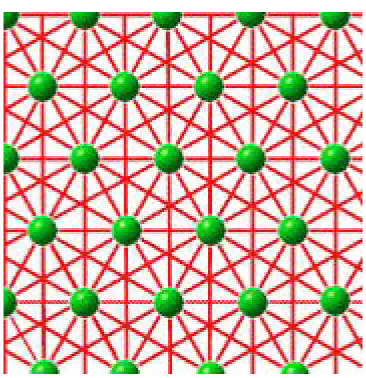




El enrejado rombal tiene traslaciones, giros de 60, 120 y 180 grados, reflexiones y reflexiones con deslizamiento.

La rejilla cuadrada tiene traslaciones, rotaciones de 90° y 180°, reflexiones y reflexión con deslizamiento.





Y las rejillas hexagonales tienen traslaciones, rotaciones de 60°, 120° y 180°, reflexiones y reflexiones con deslizamiento.

Como ya había mencionado, la manera más fácil de analizar una imagen es localizar puntos clave como los de la rotación y líneas de simetría, porque los movimientos de rotación tienen centro de giro y los ejes de reflexión tienen presente la simetría. Esos puntos clave se pueden detectar con las rejillas.

Grupos Cristalográficos

Algunas investigaciones indican que desde los tiempos del hombre de Pekín, hace aproximadamente 360 000 años, el hombre ya mostraba fascinación por los cristales. Cuando se observa un cristal en bruto, éste claramente se distingue de una roca común y corriente por sus colores, sus brillos, pero sobre todo por sus formas. Sus caras son prácticamente planas y su cuerpo presenta simetrías.

En el espacio los átomos y moléculas, que determinan la forma de un cristal, se unen como piezas de rompecabezas.

Los cristales tienen las mismas características que todos los mosaicos considerados en el capítulo anterior. Sólo que mientras los mosaicos están diseñados por el hombre para cubrir paredes planas, los cristales han sido diseñados por la naturaleza para llenar el espacio de tres dimensiones.

El conjunto de movimientos que se aplican para generar un mosaico cristalino se conoce como grupo cristalográfico.

Fueron los químicos quienes mostraron interés por clasificar los grupos cristalográficos en tres dimensiones, primero, y los grupos de mosaicos planos, después. El químico ruso Fedorov, en 1885, fue el primero en enumerar los grupos cristalográficos. Para el caso tridimensional resultan 230 grupos, y en 1891, resultan 17 grupos en el caso bidimensional.

El símbolo que representa a cada uno de los mosaicos del segundo capítulo, corresponde a la notación internacional de cristalografía que se utiliza para identificar cada uno de los 17 grupos de simetría.

La notación cristalográfica consiste en cuatro símbolos que identifican el paralelogramo fundamental (que es elegido como tal por conveniencia), el grado más alto del giro[5], y otras simetrías fundamentales.

Por ejemplo, se usa ***p*** si el paralelogramo fundamental es primitivo, este se toma de tal manera que sus cuatro vértices sean centros de giro de orden máximo. Y se usa ***c*** si el paralelogramo es centrado, es decir, que resulte ser un rombo, una de sus diagonales es un eje de simetría y no aparecen giros de orden mayor que dos.

---

[5] Recuérdese que en párrafos anteriores comenté sobre la restricción con respecto a los giros. Esto está en relación con el grado más alto del giro, es decir, el giro de 60° es de orden 6, el giro de 90° es de orden 4, el giro de 120° es de orden 3, y el giro de 180° es de orden 2.

El segundo símbolo es un número que indica el orden máximo de los giros, este puede ser **1, 2, 3, 4** ó **6**. El giro de orden 1 representa una vuelta de 360°, en otras palabras, da una vuelta completa y el motivo queda idéntico.

El tercer símbolo, **m, g** o **1**, indica si hay eje de simetría de reflexión o de simetría de reflexión con deslizamiento perpendicular a uno de los lados del paralelogramo fundamental. Así *m* indica que hay un eje de simetría de la reflexión, *g* que no hay eje de simetría de reflexión pero sí de simetría de reflexión con deslizamiento y *l* indica que no existe ninguno de los dos.

El cuarto símbolo, **m, g** o **1**, indica si hay eje de simetría de reflexión o de simetría de reflexión con deslizamiento que forma un ángulo con uno de los lados del paralelogramo fundamental, el mismo que consideremos para el tercer símbolo. Donde el ángulo depende del número del segundo símbolo: 0 grados si el orden es 1, 180 grados si el orden es 2, 120 grados si el orden es 3, 90 grados si el orden es 4, y 60 grados si el orden es 6.

A continuación describiré los 17 grupos de simetría. Apoyándome en figuras que representan los paralelogramos fundamentales. Así como en las grecas consideré un cuadrado o un rectángulo como paralelogramo fundamental para rellenar una banda, en los mosaicos usaré además del cuadrado y el rectángulo, rombos y romboides. Y no olvidemos que el paralelogramo a considerar debe tener sus lados lo más pequeños posible y contener ejes de simetría o centros de rotación.

Los *ejes de simetría* están marcados con doble línea continua para indicar la reflexión, y con una línea punteada se remarca la reflexión con deslizamiento; el *centro* de la rotación se representa con un rombo para el giro de 180°, con un triángulo equilátero para el giro de 120°, con un cuadrado para el giro de 90°, y con un hexágono para el giro de 60°.

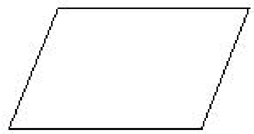
En la tercera figura aparece el motivo generador. El motivo generador, es la parte mínima a la cual se le aplican cualquiera de los cuatro movimientos del plano (o la combinación de éstos) para formar el paralelogramo fundamental.

Finalmente, en cada grupo se muestra un ejemplo de mosaico acompañado de la figura que contiene los ejes de simetría y/o los centros de rotación que lo generaron.

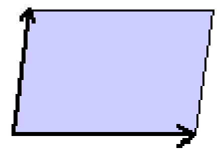
Grupos con centros de orden 1 (sin rotaciones)

En estos grupos no aparecen giros, y se distinguen unos de otros por cómo estén situados los ejes de simetría y de simetría con deslizamiento, si es que los hay. Los centros de los giros no sirven para definir el paralelogramo fundamental, hay que valerse de los ejes de simetría existentes para obtener ya sea un rombo o un rectángulo.

p1

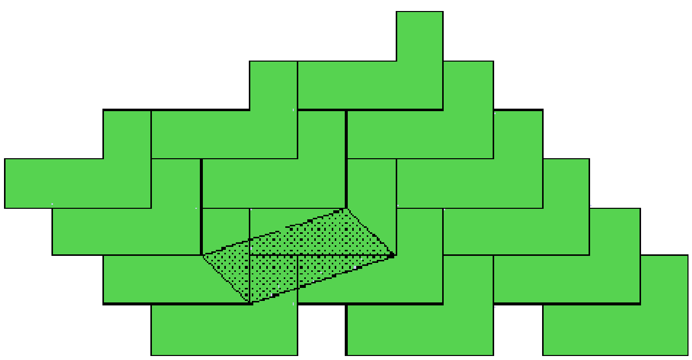


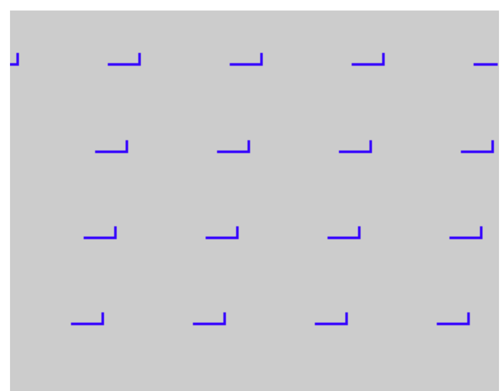
Simetrías



Generador

Este grupo cristalográfico no contiene giros y tampoco reflexiones ni reflexiones con deslizamiento. Un ejemplo de una figura con este grupo de simetría es:



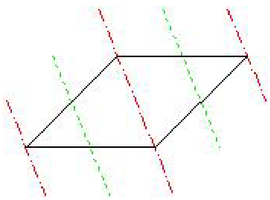


Donde se puede marcar un paralelogramo fundamental.

cm

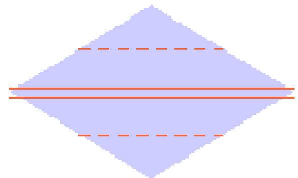
Aparecen ejes de simetría de las reflexiones (marcados con doble línea continua) así como los ejes de simetría de las reflexiones con deslizamiento (marcados con línea punteada). El paralelogramo fundamental puede ser un rombo.

a.



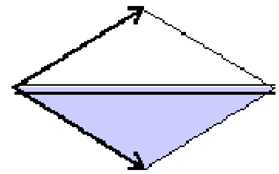
Paralelogramo fundamental

b.



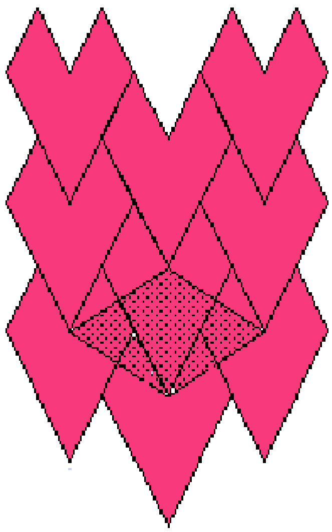
Simetrías (ejes)

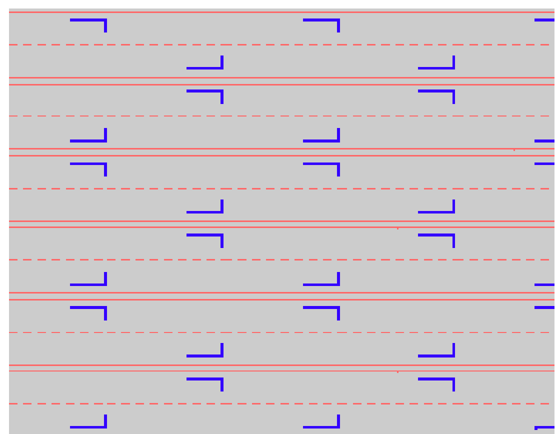
c.



Generador

Un eje de simetría de una reflexión puede ser también eje de simetría de una reflexión con deslizamiento. Pero en este caso particular un eje de simetría con deslizamiento no tiene por qué ser un eje de simetría.

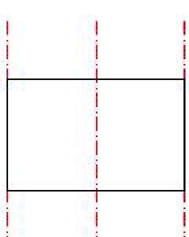




En las figuras anteriores se ven los trazos de los ejes de simetría y un paralelogramo fundamental.

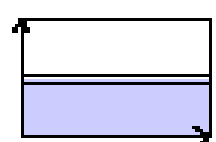
pm

En el grupo pm, los ejes de simetría de la reflexión son los mismos que los ejes de simetría de la reflexión con deslizamiento. El paralelogramo fundamental es un rectángulo como el siguiente:



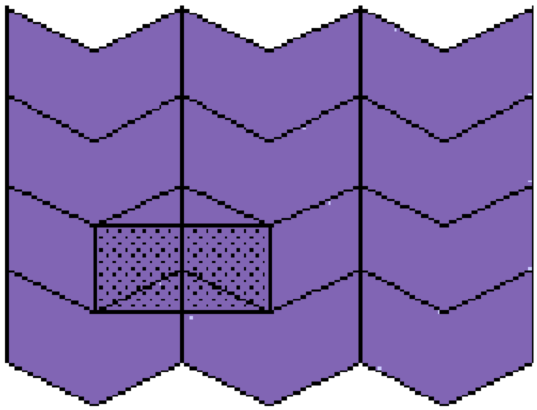
Paralelogramo fundamental

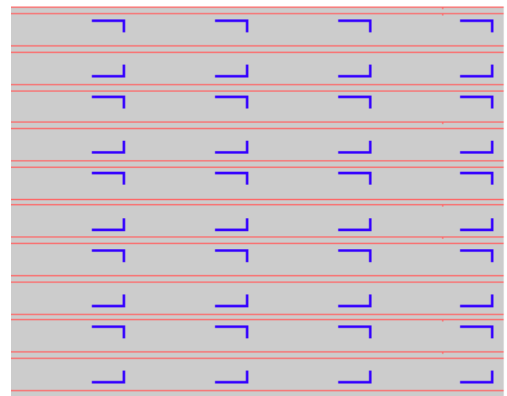
Simetrías (ejes)



Generador

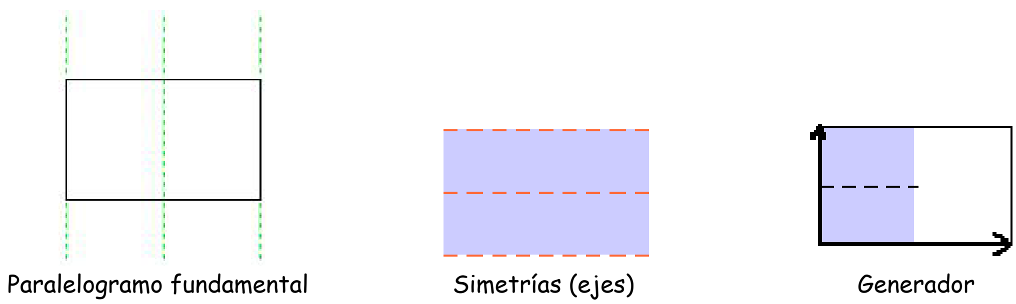
La figura con este grupo cristalográfico es la que se muestra a continuación, donde se remarca el paralelogramo y los ejes.



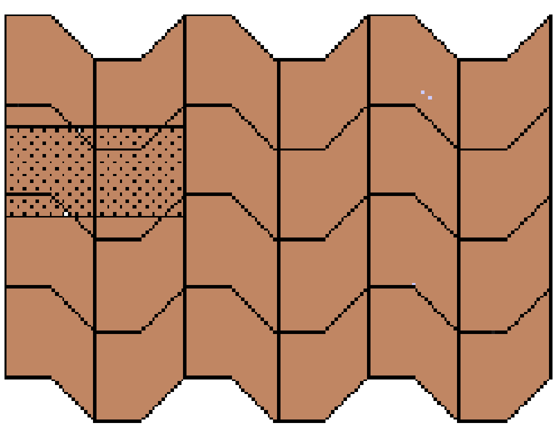


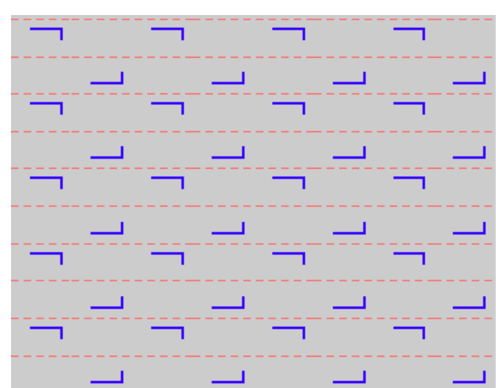
pg

En este caso no existen rotaciones ni ejes de simetría, lo único que se observa son los ejes de simetría de la reflexión con deslizamiento. El rectángulo representa el paralelogramo fundamental,



que a la vez se aprecia en la siguiente figura.

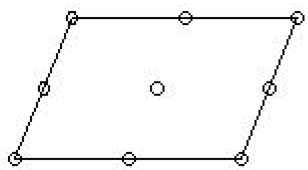


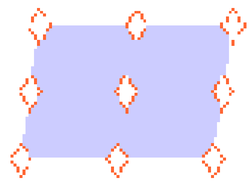


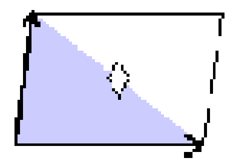
Grupos con centros de orden 2 (rotaciones de 180°, sin rotaciones de 90° y 60°)

Los grupos cristalográficos que contienen sólo centros de orden dos pueden ser de cinco tipos distintos.

El paralelogramo fundamental puede ser en principio lo más general posible. Aparecerán centros de giros de 180° en los vértices del paralelogramo, en su centro y en los puntos medios de sus lados, los cuales están marcados con rombos.

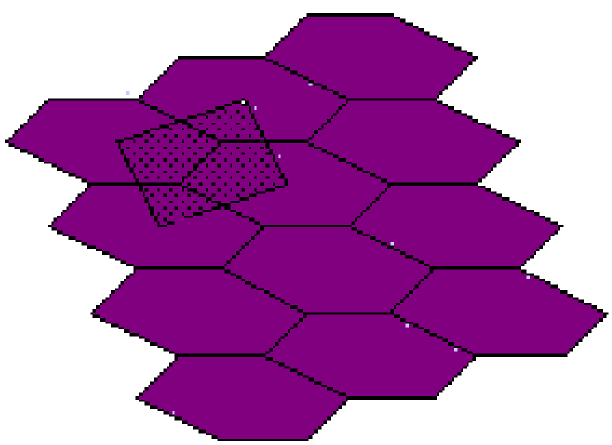

Paralelogramo fundamental

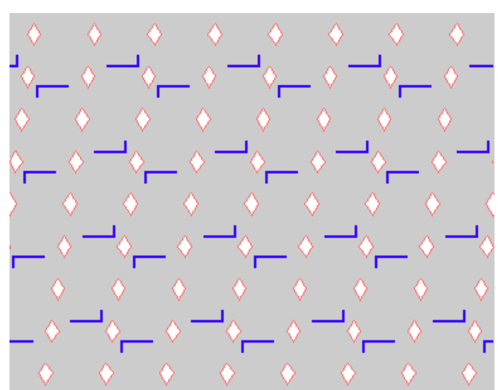

Simetrías (centros de giros)


Generador

p2

Este grupo contiene giros de orden máximo dos y no contiene reflexiones ni reflexiones con deslizamiento. Un ejemplo es:

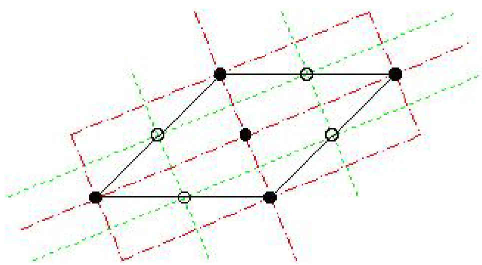




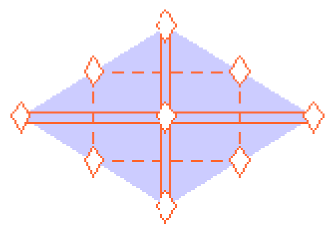
Si el grupo contiene giros y reflexiones se obtienen tres tipos distintos.
El primer caso es aquel en que aparecen reflexiones y contienen al menos dos ejes de simetría perpendiculares entre sí. Cuando esto ocurre podemos encontrar dos tipos de grupos cristalográficos, según estén situados los centros de los giros de 180 grados: *cmm* y *pmm.*

cmm

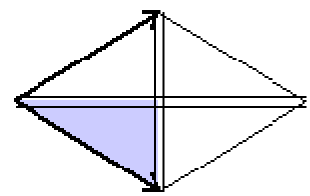
En este caso existen dos ejes de simetría perpendiculares entre sí y hay centros de giros de 180 grados que no pertenecen a ningún eje de simetría. El paralelogramo fundamental es un rombo. En la figura siguiente está representado junto con los centros de giro y los ejes de simetría (doble línea continua). También se marcan los ejes de simetría de reflexión con deslizamiento (línea punteada).



Paralelogramo fundamental

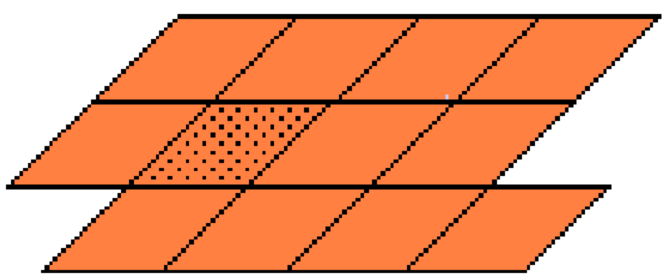


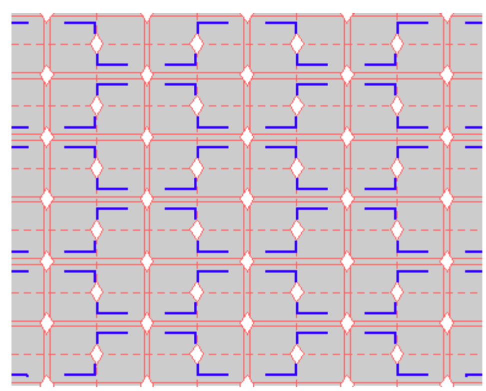
Simetrías (ejes y centros)



Generador

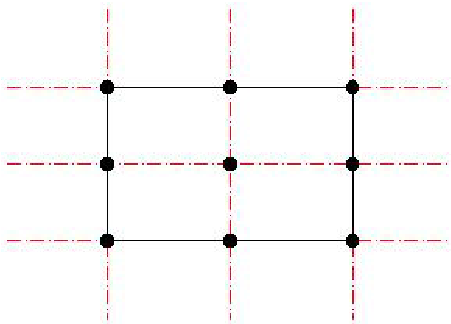
Se observa que por los centros de los giros que están en los vértices del rombo y el que está en el centro del rombo, pasan ejes de simetría de las reflexiones. Pero por los centros de los giros que están en los puntos medios de los lados del rombo pasan los ejes de simetría de las reflexiones con deslizamiento. Una figura con este grupo de simetría es la siguiente, que muestra el paralelogramo fundamental y los ejes de simetría.



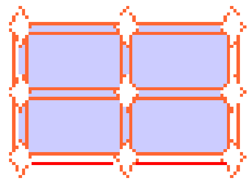


pmm

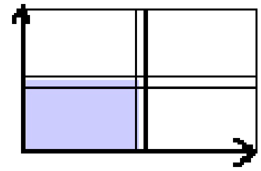
En este grupo existen dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, pero a diferencia con el caso anterior, todos los centros de los giros de 180 grados pertenecen a algún eje de simetría de la reflexión. El paralelogramo fundamental en este caso es un rectángulo. En la figura siguiente está representado dicho rectángulo junto con los centros de giro y los ejes de simetría.



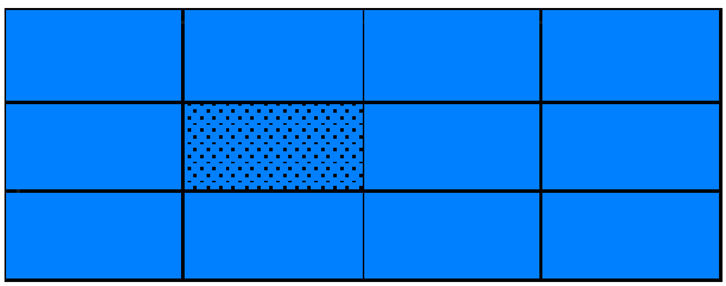
Paralelogramo fundamental

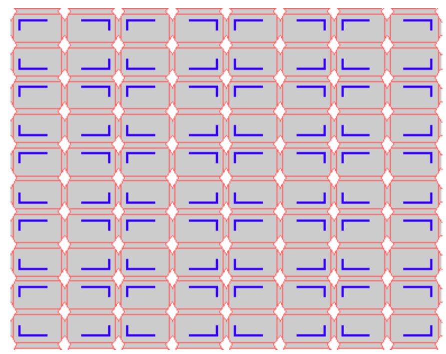


Simetrías (ejes y centros)



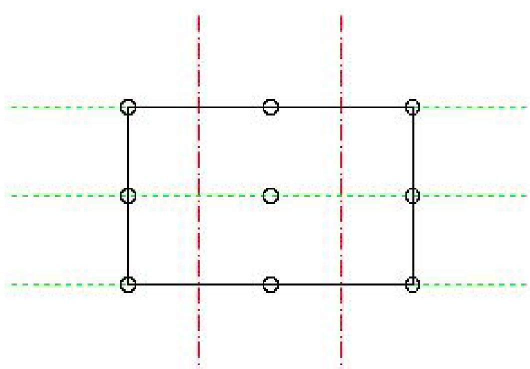
Generador



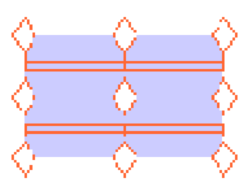


pmg

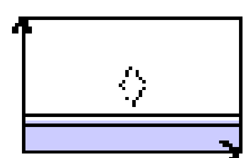
Este grupo cristalográfico contiene giros de 180 grados. Hay ejes de simetría, pero todos son paralelos entre sí. Lo cual indica que no se trata de ninguno de los dos casos anteriores. Aquí el paralelogramo fundamental es un rectángulo. La figura siguiente representa dicho rectángulo con los ejes de simetría de las reflexiones y los ejes de simetría de las reflexiones con deslizamiento.



Paralelogramo fundamental

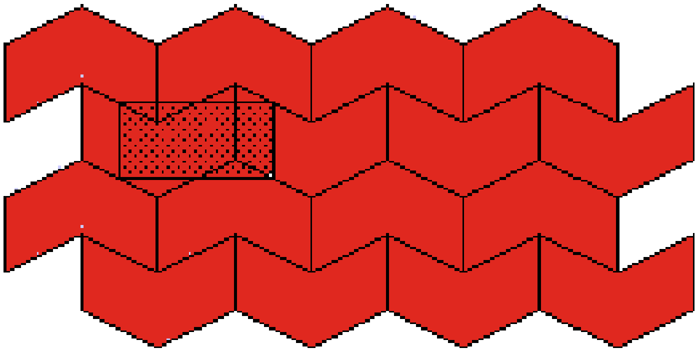


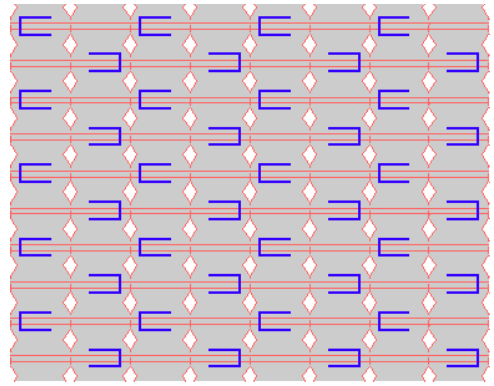
Simetrías (ejes y centros)



Generador

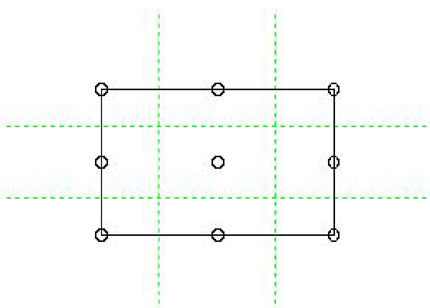
Se observa que todos los centros de los giros de 180 grados están fuera de los ejes de simetría. Una figura cuyo grupo de simetría es *pmg* es la siguiente.



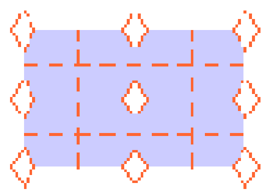


pgg

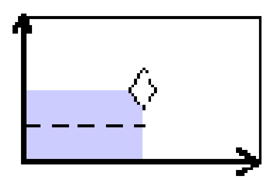
Por último queda estudiar el caso del grupo *pgg* en el que no aparecen reflexiones pero sí hay reflexiones con deslizamiento. En este caso el paralelogramo fundamental es un rectángulo, como el de la figura siguiente, donde se representan los ejes de simetría de la reflexión con deslizamiento.



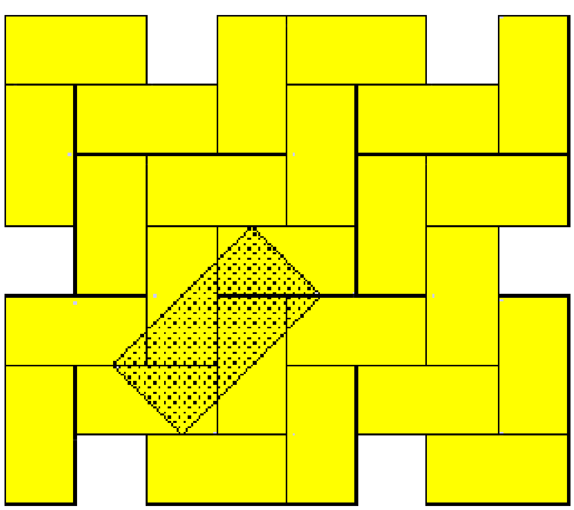
Paralelogramo fundamental

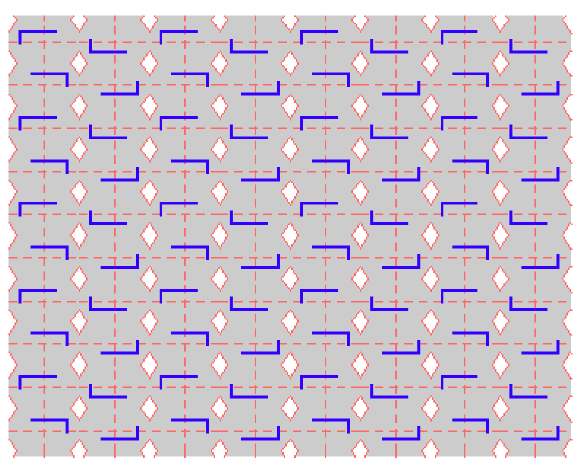


Simetrías (ejes y centros)



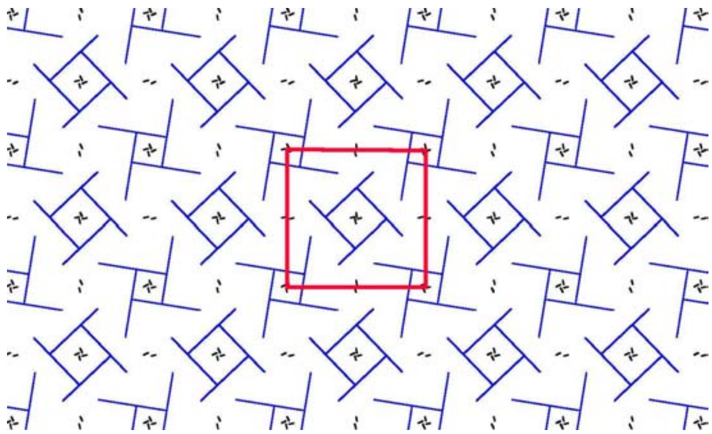
Generador





Grupos con centro de orden 4 (rotaciones de 90°)

En este grupo es posible que aparezcan giros de orden 2, es decir, rotaciones de 180°, como lo muestra la siguiente figura:

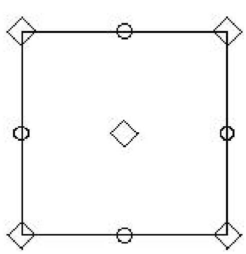


Y el paralelogramo va a ser siempre un cuadrado. Aparecen centros de giros de 90° en los vértices y en el centro del cuadrado (denotados con cuadrados), y hay centros de giros de 180° en los puntos medios de los lados del cuadrado (marcados con rombos).

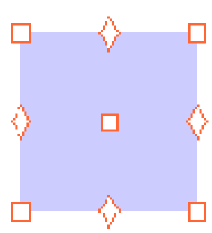
Si un grupo cristalográfico plano contiene giros de 90°, entonces va a ser de uno de los tres tipos que detallo a continuación.

p4

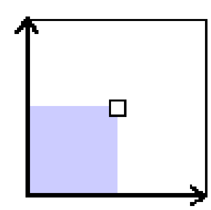
Este grupo tiene giros de 90°, pero no contiene reflexiones ni reflexiones con deslizamiento. Un ejemplo es el siguiente.



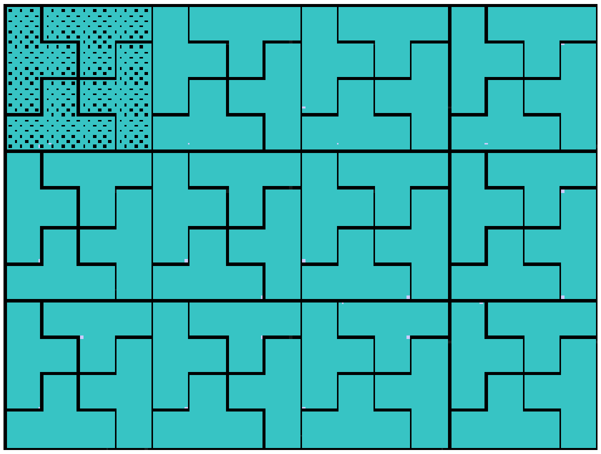
Paralelogramo fundamental

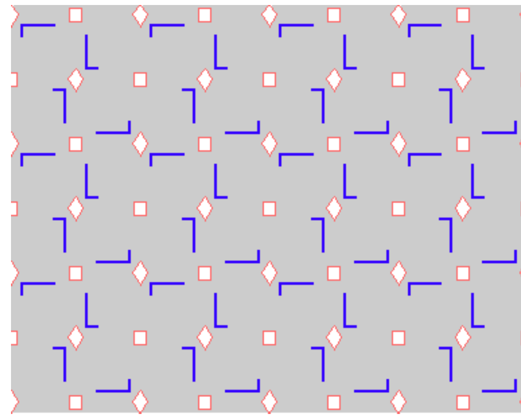


Simetrías (centros)



Generador

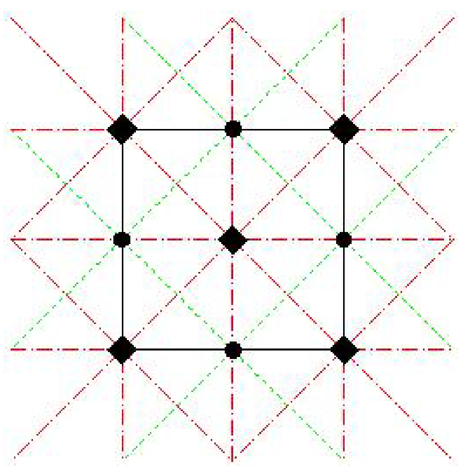




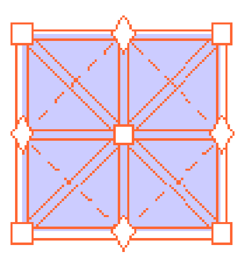
Si el grupo tiene giros de 90° y ejes de simetría, se obtienen dos posibilidades, según estén situados los centros de los giros y los ejes de simetría.

p4m

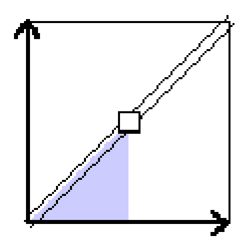
Este grupo cristalográfico está determinado por contener giros de 90° y simetrías, de tal forma que todos los centros de los giros (ya sean de 90° ó 180°) pertenecen a algún eje de simetría. De las siguientes figuras, la primera representa un paralelogramo fundamental con los centros de los giros (de 90° y 180°) y los ejes de simetría (doble línea). También están marcados algunos ejes de simetría con deslizamiento (línea punteada).



Paralelogramo fundamental

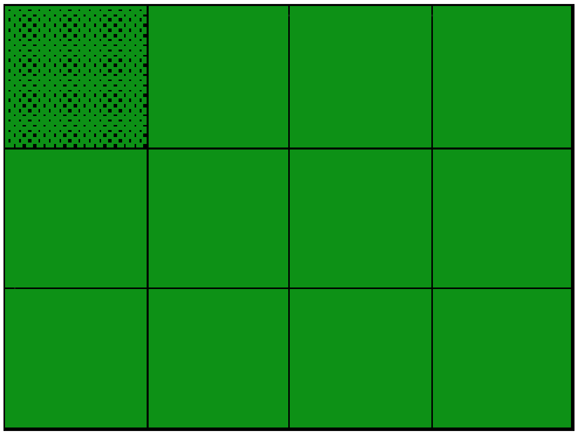


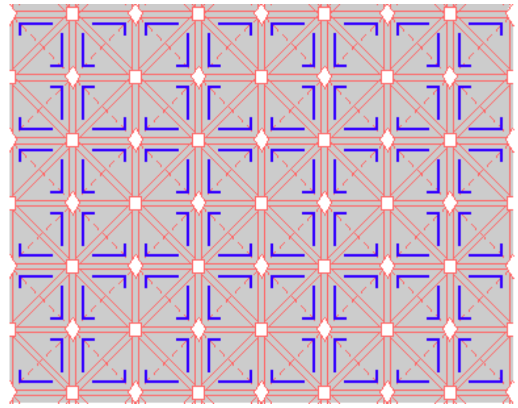
Simetrías (ejes y centros)



Generador

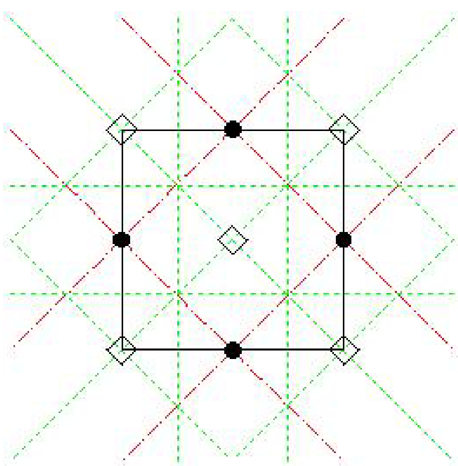
La siguiente figura tiene con grupo de simetría p4m. En la cual se marca el paralelogramo fundamental.



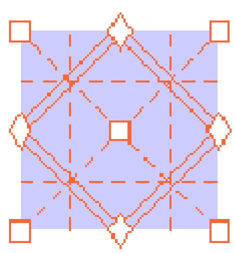


p4g

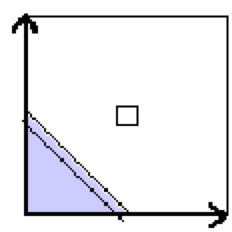
En este caso se tienen giros de 90° y simetrías cuyos ejes de reflexión pasan por los centros de giros de 180° pero no por el centro de 90°. En la primera figura se representa un paralelogramo fundamental con los centros de los giros de 180° y los ejes de simetría, junto con algunos ejes de simetría con deslizamiento.



Paralelogramo fundamental

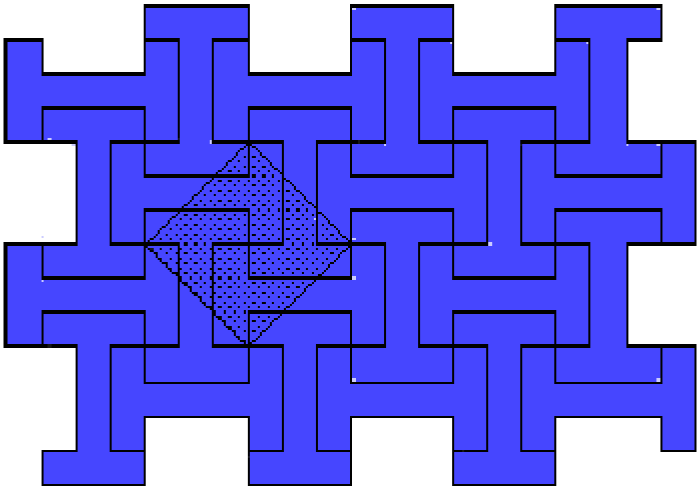
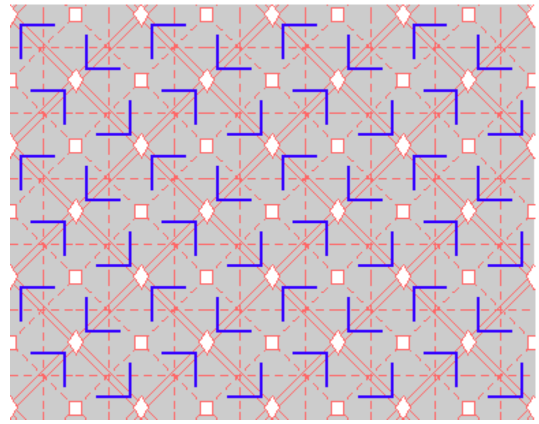


Simetrías (ejes y centros)



Generador

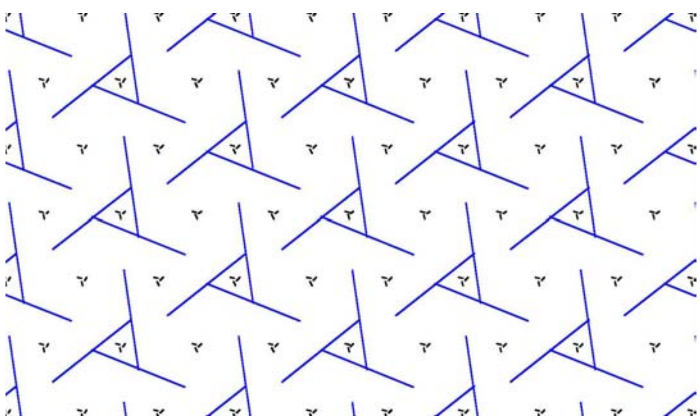
Un ejemplo es el siguiente, en el que se traza un paralelogramo fundamental.

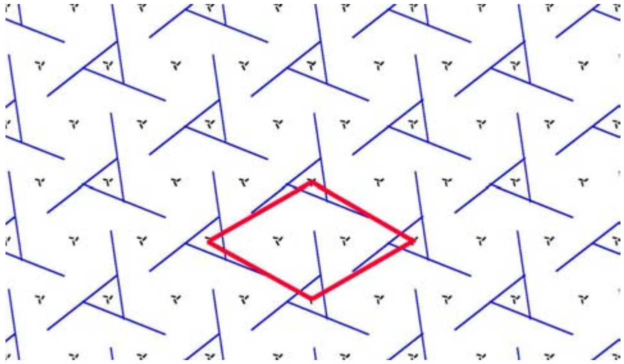
Grupos con centro de orden 3 (rotaciones de 120°)

Si el grupo tiene giros de orden mayor que tres, el orden de estos giro no puede ser cuatro y la única posibilidad es que sea seis, es decir, si los giros son mayores que 120°, éstos no pueden ser de 90° pero sí de 60°. Si el orden máximo de los giros que aparece es tres (giros de 120°), entonces encontramos tres tipos distintos de grupos cristalográficos.

Los centros de los giros de 120° aparecen distribuidos en el siguiente ejemplo.



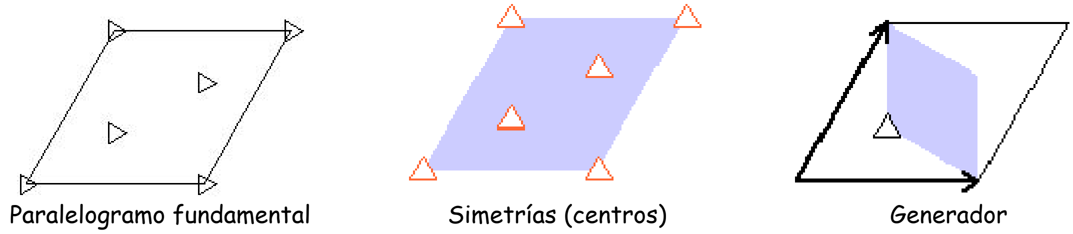
En este caso se va a escoger un paralelogramo fundamental de tal manera que los vértices sean centros de rotaciones de 120°.



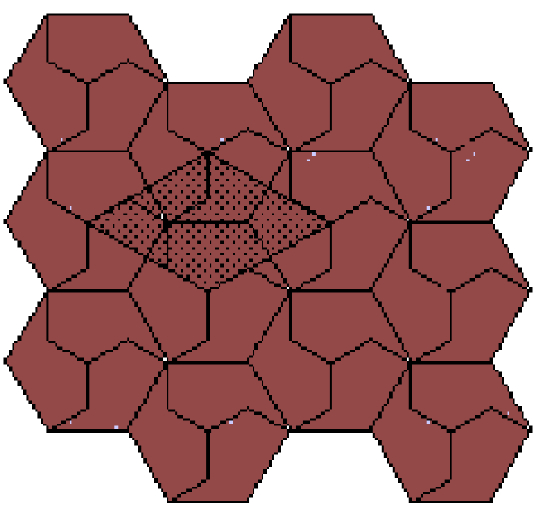
Se observa que cualquier paralelogramo fundamental que se escoja ha de ser un rombo, formado por dos triángulos equiláteros, cuyos cuatro vértices son centros de giros de 120°, y aparecen además dos centros de rotación de 120° en el interior del rombo, que vienen siendo los centros de los dos triángulos equiláteros que forman el rombo.

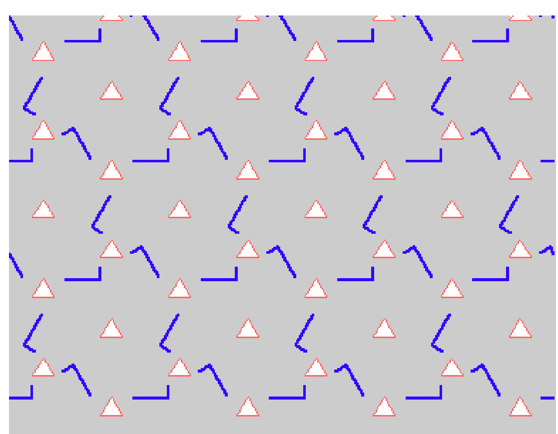
p3

Este grupo se caracteriza por tener únicamente rotaciones de 120°, no existen reflexiones ni reflexiones con deslizamiento.



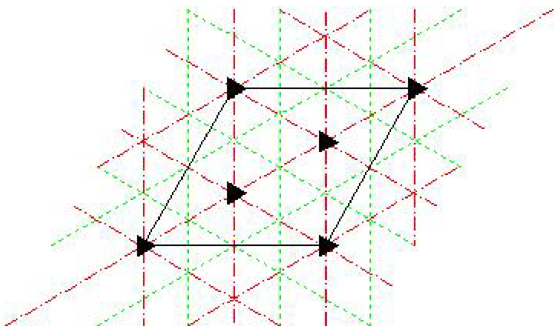
Las dos figuras siguientes corresponden al grupo cristalográfico *p3.*

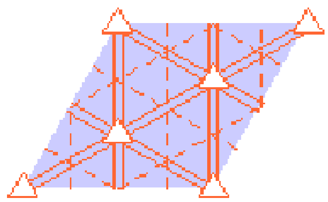


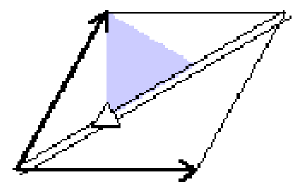


p3m1

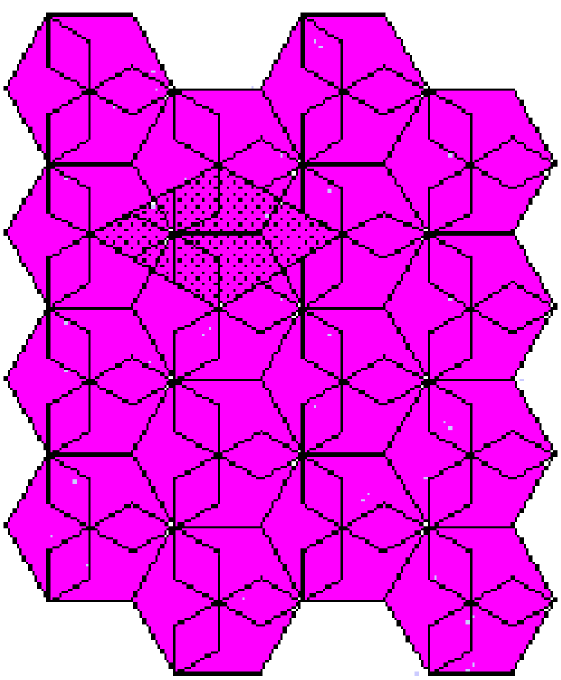
Este grupo de simetría está determinado por las siguientes condiciones: existen rotaciones de 120° y reflexiones, y todos los centros de los giros están en alguno de los ejes de simetría. La primera figura representa un paralelogramo fundamental con los centros y los ejes de simetría (marcados con línea segmentada). También están marcados algunos ejes de simetría con deslizamiento (marcados con línea punteada).

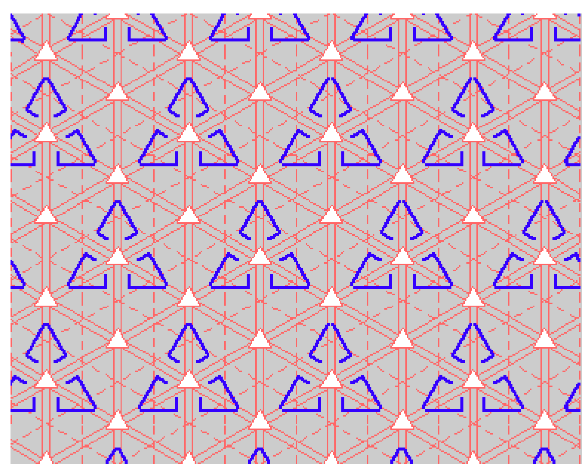

Paralelogramo fundamental


Simetrías (ejes y centros)


Generador

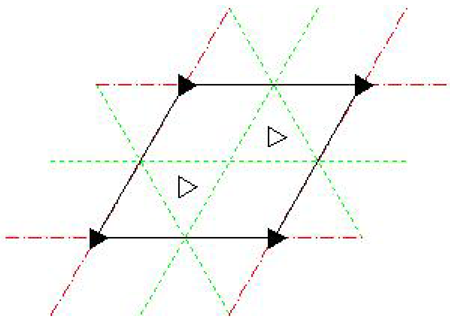
Obsérvese que por cada centro de giro de 120° pasa al menos un eje de simetría. La figura siguiente es un ejemplo del grupo de simetría *p3m1.*



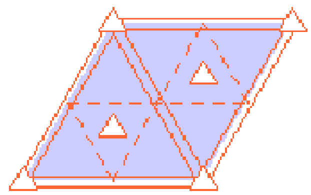


p31m

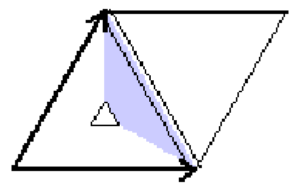
Este grupo de simetría está determinado por reflexiones y por rotaciones de 120° cuyos centros de giro son tales, que algunos no están en los ejes de simetría. La primera figura representa un paralelogramo fundamental con los centros y los ejes de simetría (línea segmentada). Y con línea punteada, están marcados algunos ejes de simetría con deslizamiento.



Paralelogramo fundamental

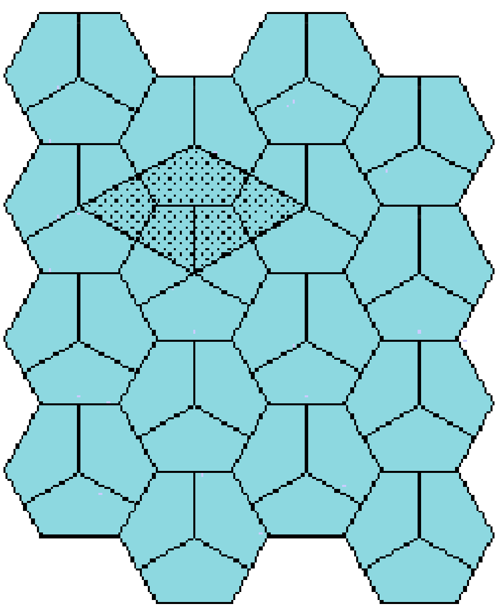


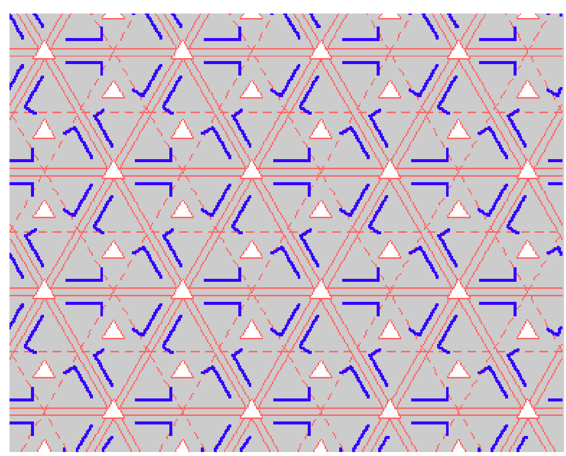
Simetrías (ejes y centros)



Generador

Obsérvese que los cuatro vértices del paralelogramo fundamental están en algún eje de simetría, pero por los dos centros de giro de 120° correspondientes a los centros de los triángulos equiláteros que forman el rombo no pasa ningún eje de simetría. Las figura siguientes tienen como grupo de simetría a *p31m.*

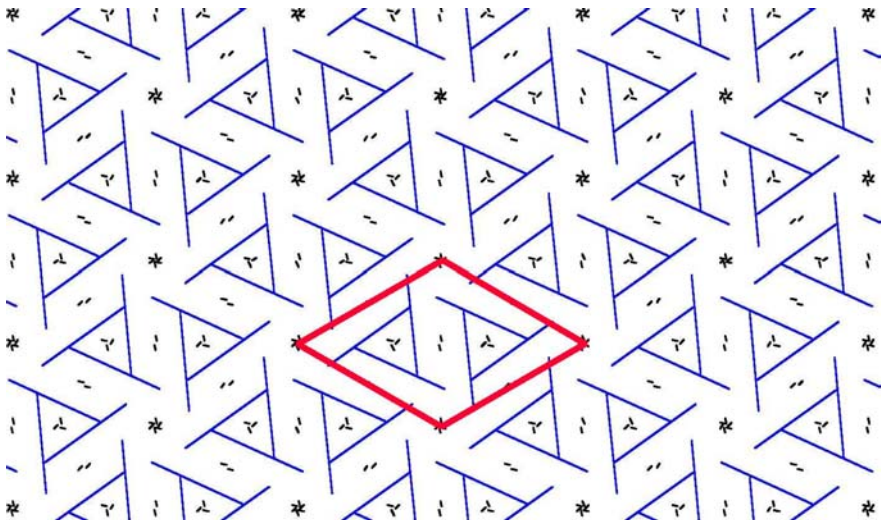




Este grupo de simetría, *p31m*, se distingue del anterior, *p3m1*, por cómo están configurados los centros de giro de 120°.

Grupos con centro de orden 6 (rotaciones de 60°)

Si un grupo cristalográfico posee giros de orden 6 (de 60°), necesariamente tiene también giros de orden 3 (de 120°) y de orden 2 (de 180°). Lo anterior se puede ver en la figura siguiente donde están marcados todos los centros de giro.



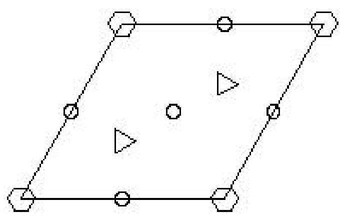
Aunque podemos escoger el paralelogramo fundamental de muchas formas, siempre vamos a tomar un paralelogramo fundamental de tal manera que sus vértices sean centros del máximo orden que aparece, en este caso 6. Es decir, el mínimo grado de rotación, o sea 60°. Así, detectando los centros de giro de 60° es más sencillo determinar un paralelogramo fundamental.

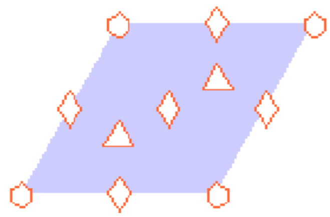
Cuando un grupo cristalográfico plano contiene giros de orden 6, podemos escoger un paralelogramo fundamental que va a ser un rombo formado por dos triángulos equiláteros de tal manera que en sus vértices aparecen centros de giro de 60°; los puntos medios de sus lados y el centro del rombo son centros de orden 2, es decir, de giros de 180°; y los centros de los dos triángulo equiláteros que forman el rombo son centros de orden 3, centros de giros de 120°.

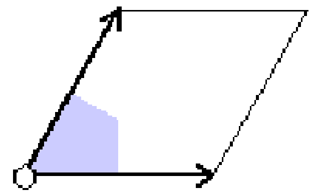
Grupos cristalográficos con giros de orden 6 (60°) sólo hay dos, que se distinguen entre sí fácilmente ya que uno conserva la orientación y el otro no (por contener este último reflexiones).

p6

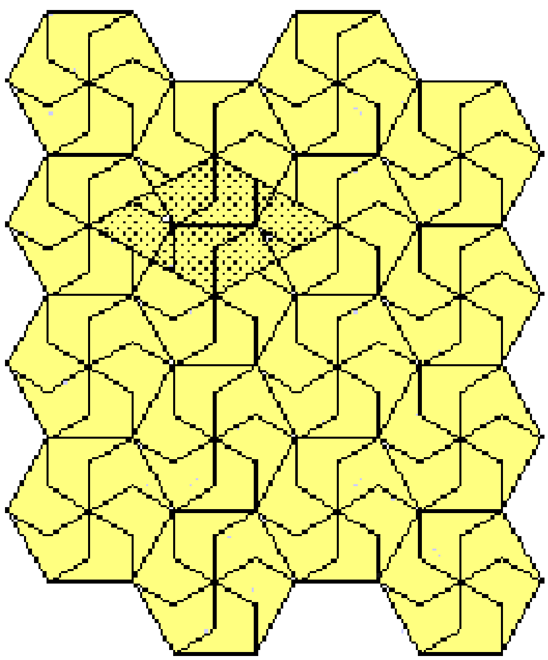
Este grupo contiene rotaciones de 60°, pero no contiene reflexiones ni reflexiones con deslizamiento.

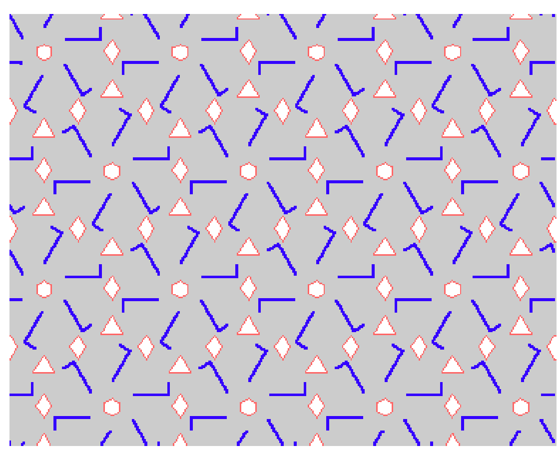

Paralelogramo fundamental


Simetrías (centros)


Generador

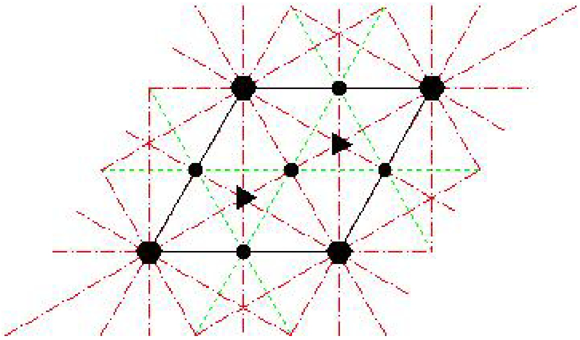
Las siguientes figuras son ejemplos de este grupo de simetría.

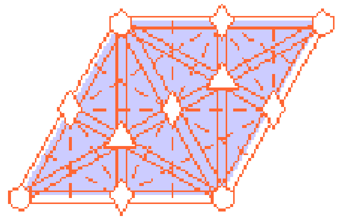


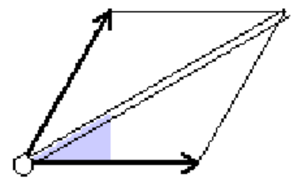


p6m

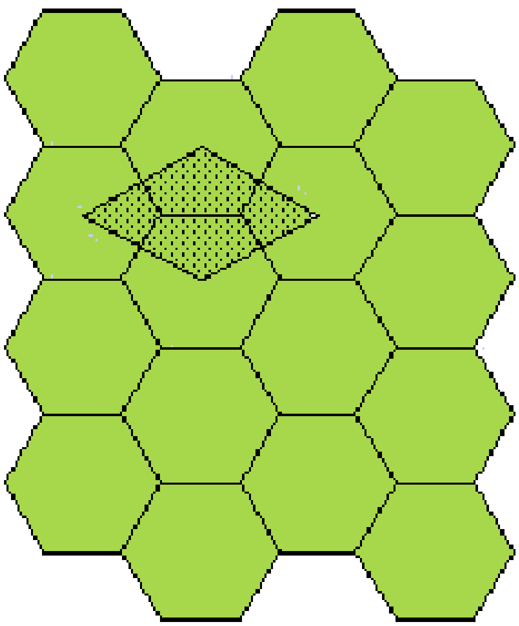
Este es el caso en el que aparecen giros de 60° y además simetrías. Obsérvese que además de los ejes de simetría, también aparecen ejes de simetría con deslizamiento. Se representa en la primera figura sobre un paralelogramo fundamental, los centros, ejes de simetría con línea segmentada y algunos ejes de simetría con deslizamiento con línea punteada.

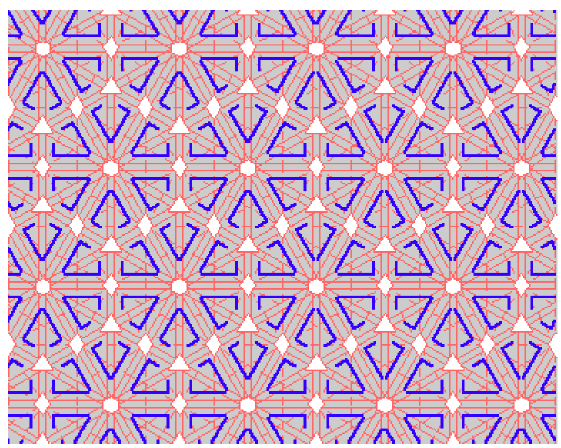

Paralelogramo fundamental


Simetrías (ejes y centros)


Generador

El grupo *p6m* está representado en las siguientes figuras.





Algoritmo de Reconocimiento

Para clasificar los grupos cristalográficos planos, puede aplicarse el siguiente algoritmo:

Considerar una figura que llene el plano y en la que existan dos traslaciones independientes (arriba-abajo, izquierda-derecha)

- ¿Existen ejes de simetría?
  - SI
    - ¿Hay ejes de simetría que no sean paralelos?
      - SI
        - ¿Hay giros de 60°?
          - SI
            - p6m
          - NO
            - ¿Hay giros de 120°?
              - SI
                - Hallar el grupo de simetría de la región comprendida por tres ejes de simetría que definan un triángulo equilátero no cruzado por otros ejes de simetría
                - p3m1 | p31m
              - NO
                - Hallar el grupo de simetría del rectángulo determinado por cuatro ejes de simetría, de forma que ningún otro eje paralelo a los lados cruce el rectángulo
                - pmm | cmm | p4m | p4g
      - NO
        - ¿Hay ejes de deslizamiento perpendiculares a los de simetría?
          - SI
            - pmg
          - NO
            - ¿Hay ejes de deslizamiento paralelos a los de simetría?

SI	NO
cm	pm
  - NO
    - ¿Hay ejes de deslizamiento?
      - SI
        - ¿Hay ejes de deslizamiento perpendiculares?

SI	NO
pgg	pg
      - NO
        - Considerar el menor ángulo de giro que pertenezca al grupo

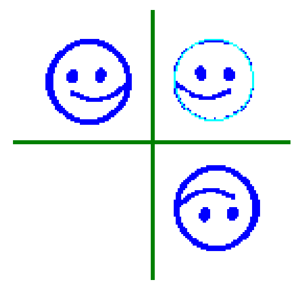
0°	180°	120°	90°	60°
p1	p2	p3	p4	p6

Es posible tener mosaicos que incluyen tres tipos de simetrías, o aún cuatro (reflexión, rotación, traslación y reflexión deslizada). Existen dos ideas principales:

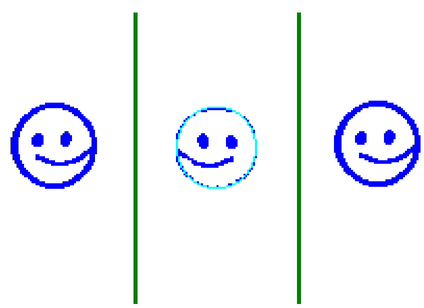
1. En un motivo simétrico con dos simetrías, se puede tener la combinación de éstas, también llamada composición o producto.
   Por ejemplo: Si el motivo tiene rotaciones de 45° y rotaciones de 90°, entonces también tiene rotaciones de 45°+90°=135°. Este mismo motivo tendrá rotaciones de 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° y 0°.

2. Los cuatro tipos de simetría pueden obtenerse combinando reflexiones:

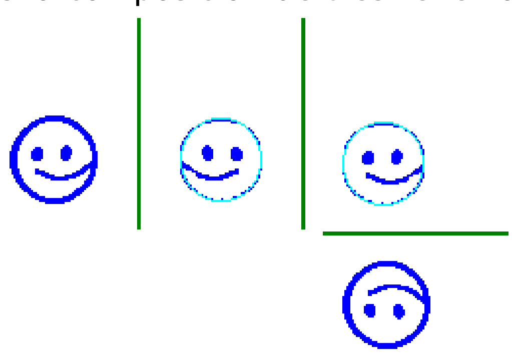
   a) Una rotación es la composición de dos reflexiones en línea que se intersecan.

   b) Una traslación es la composición de dos reflexiones en líneas paralelas.

   c) Una reflexión deslizada es la composición de una traslación y una reflexión, es decir, es la composición de tres reflexiones.

Así, con la combinación de las reflexiones de un motivo en dos líneas paralelas y una línea perpendicular se puede construir un mosaico.

LA ALHAMBRA DE GRANADA, ESPAÑA

Como bien lo mencioné en el capítulo anterior, los ejemplos de los mosaicos corresponden a la Alhambra.

La Alhambra, denominada así por sus muros de color rojizo («qa'lat al-Hamra'», Castillo Rojo), está situada en lo alto de la colina de al-Sabika, en la margen izquierda del río Darro, al este de la ciudad, frente a los barrios del Albaicín y de la Alcazaba.

Su posición estratégica, desde la que se domina toda la ciudad granadina, hace pensar que existían construcciones anteriores a la llegada de los musulmanes. Su conjunto amurallado, posee una forma irregular limitado al norte por el valle del Darro, al sur por el de la al-Sabika, y al este por la Cuesta del Rey Chico, que a su vez la separan del Albaicín y del Generalife, situado en el cerro del Sol.

En el siglo IX, se tiene constancia de ella por primera vez, cuando en 889 Sawwar ben Hamdun tuvo que refugiarse en la Alcazaba y repararla debido a las luchas civiles que azotaban por entonces al Califato cordobés, al que perteneció Granada. Posteriormente, este recinto empezó a ensancharse y a poblarse, aunque no hasta lo que sería con posterioridad, ya que los primeros monarcas siríes fijaron su residencia en lo que posteriormente sería el Albaicín.

A pesar de la incorporación del castillo de la Alhambra al recinto amurallado de la ciudad en el siglo XI, lo que la convirtió en una fortaleza militar, no sería hasta el siglo XIII con la llegada del primer monarca nazarí, Mohamed ben Al-

Hamar Mohamed I, (1238❸1273) cuando se fijaría la residencia real en la Alhambra. Este hecho marcó el inicio de su época de mayor esplendor.

Primero se reforzó la parte antigua de la Alcazaba, y se construyó la Torre de la Vela y del Homenaje, se subió agua del río Darro, se edificaron almacenes, depósitos y comenzó la construcción del palacio y del recinto amurallado que continuaron Mohamed II (1273❸1302) y Mohamed III (1302❸1309), al que también se le atribuyen un baño público y la Mezquita sobre la que se construyó la actual iglesia de Santa María.

A Yúsuf I (1333❸1353) y Mohamed V (1353❸1391) se les debe la mayoría de las construcciones de la Alhambra que han llegado a nuestra época. Desde la reforma de la Alcazaba y los palacios, pasando por la ampliación del recinto amurallado, la Puerta de la Justicia, la ampliación y decoración de las torres, construcción de los Baños y el Cuarto de Comares, la Sala de la Barca, hasta el Patio de los Leones y sus dependencias anexas. De los reyes nazaríes no se conserva prácticamente nada.

El último rey moro reinaba ahí cuando fue vencido por Isabel la Católica en 1492. De la época de los Reyes Católicos hasta nuestros días se puede destacar la demolición de parte del conjunto arquitectónico por parte de Carlos V (nada raro en los conquistadores españoles) para construir el palacio que lleva su nombre, la construcción de las habitaciones del emperador y el Peinador de la Reina y el abandono de la conservación de la Alhambra a partir del siglo XVIII. Durante la dominación francesa fue volada parte de la fortaleza y hasta después del siglo XIX comenzó su reparación, restauración y conservación que se mantiene hasta la actualidad.

El arte del Islam tiene sus raíces en la religión. La tradición afirma que el profeta Mahoma prohibió las imágenes y los ídolos que representan seres vivos. Sólo Dios puede crear y dar forma a la vida, cualquier imitación hecha por el hombre es considerada idolatría.

El resultado de estos mandatos religiosos en la cultura islámica lo encontramos en el arte y en la ciencia. En ambos se desarrolla un gusto marcado por el pensamiento abstracto, el conocimiento lo buscan a través de los números, la geometría, las matemáticas, el movimiento de los planetas y otros cuerpos celestes. Basta quizá con decir que son los padres del Álgebra, palabra árabe que significa “reacomodo”.

El interés de lo abstracto en la forma artística se manifiesta en las expresiones con motivos geométricos: el arabesco floral y el arabesco poligonal. El primero hace uso de figuras y curvas geométricas en forma libre, el segundo usa una geometría de líneas rectas que siguen un patrón bien definido y la cumbre de éste lo encontramos en la Alhambra.

La Alhambra está conformada por una serie de patios y cámaras adornados con hermosas y coloridas figuras geométricas plasmadas en mosaicos o en las herrerías de puertas y ventanas. Estos mosaicos o herrerías están generados por patrones repetitivos, lo cual hace suponer que los artistas moros sabían bastante del comportamiento de los cristales y se empeñaron en buscar todas las combinaciones de simetrías posibles. El trabajo de la Alhambra fue sin duda efectuado por artistas con amplios conocimientos de las matemáticas de su tiempo.

Al parecer existen puntos de vista encontrados sobre la existencia de los 17 grupos cristalográficos planos en la Alhambra: "Se ha escrito recientemente que sólo 13 grupos están presentes en la Alhambra (ver por ejemplo, B. Grünbaum y C. G. Shepard, "Symmetry in Morís and other ornaments", Comp. and Maths. with Appls. 12B (1986) 641-653). Sin embargo no es difícil encontrar 16. El crédito por la búsqueda del elusivo décimo-séptimo $D\overline{333}$ se debe a Rafael Pérez Gómez (fotografía 13). El ejemplo de la fotografía 18, me fue indicado por el Prof. D. Antonio Fernández Puertas. Sin embargo el ejemplo de Pérez Gómez es mejor, ya que está en la fábrica de la Alhambra"[6]

Foto 13

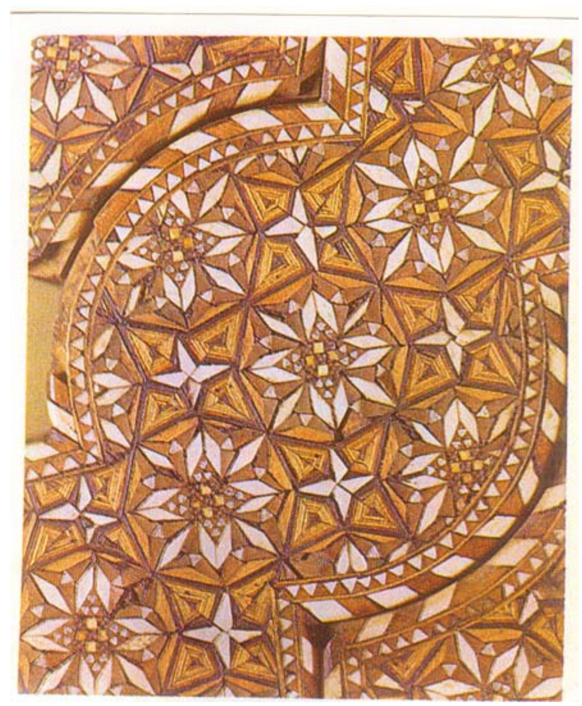


Foto 18

Por el análisis que he realizado hasta el momento, considero que el grupo p3m1 no se encuentra en la foto 13. En lo personal aceptaría la representación

[6] José María Montesinos Amilibia, "Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra" en Epsilon, España, Ed. GRAFSUR, 1987, p. 30

de la foto 18, que aunque rebuscada contiene a dicho grupo, lástima que no se aprecie como un mosaico cubriendo el plano.

Sin embargo, buscando en la Internet, me encuentro con que en la Alhambra está el mosaico del grupo cristalográfico p3m1, que reproduje en el segundo capítulo. Para demostrar que efectivamente se encuentra en el palacio, se requeriría de una investigación de campo.

Este grupo que ha provocado controversias, se localiza en otros palacios de España creados por los árabes. El asunto es que el imaginar que los diecisiete grupos cristalográficos se encuentran todos representados en la Alhambra, despierta muchas emociones.

APÉNDICE

PÁGINAS RECOMENDADAS PARA CREAR UN MOSAICO

http://www.esc20.k12.tx.us/etprojects/formats/sampler/spring2001/sstes/default.html

http://www.imaginationproject.com/escher/teaching/maketessel.html

http://www.ims.k12.nj.us/Webquests/tesselation/tesselation.htm

http://www.montello.k12.wi.us/tessellate.htm

http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/index.htm

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/kolam03.htm

BIBLIOGRAFÍA

Barrucand, Marianne; Bednorz, Achim
Arquitectura Islámica en Andalucía
Trd. J. Pablo Kummetz
Hungría, Ed. TASCHEN, 1992

Diccionario Enciclopédico Academia
México, Fernández Editores, 1990. Tomo 3, p. 1029

Diccionario Científico y Tecnológico
España, Ediciones Omega, 1979. Tomo 1, p. 1477

Enciclopedia Historia del Arte. Rococó y Neoclasicismo
España, Océano, Grupo Editorial. Tomo II, pp. 1976-1979

Ghyka, Matila C.
Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes
Trad. J. Bosch Bousquet
España, Ed. Poseidon, 1983

Irving, Washington
Cuentos de la Alhambra
Trad. Valencia
México, Ed. Porrúa, 1992, Octava edición

Jacobs, Michael
La Alhambra
Trad. Caroline Phipps & Sergi Nicolau Ferrer
Hong Kong, Ed. Cartago, 2000

Kappraff, Jay
Connections, The Geometric Bridge Between Art and Science
E. U. A., McGraw-Hill, 1990

Larousse. Diccionario de la Lengua Española
México, Larousse Planeta, 1994, p. 609

Los Mayas. Una civilización milenaria
Recopilador: Nikolai Grube
Italia, Ed. KÖNEMANN, 2001

Martin, George E.
Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry
E. U. A., Ed. Springer, 1982

Montesinos Amilibia, José María [6]
"Caleidoscopios y grupos cristalográficos en la Alhambra"
En: Epsilon
Granada, 1987
pp. 9-30

Pedoe, Dan [1]
La geometría en el arte
Trad. Caroline Phipps
España, Ed. Gustavo Gili, 1982, Segunda edición

Peña, José Antonio de la
Álgebra en todas partes
México, Ed. Fondo de Cultura Económica, 1999

Phillips, F. C.
Introducción a la Cristalografía
Madrid, España, Ed. Paraninfo, 1978, Segunda edición

Tatarkiewicz, Wladislaw [2]
Historia de seis ideas. Arte, belleza, forma, creatividad, mímesis, experiencia estética
Trad. Francisco Rodríguez Martín
España, Ed. TECNOS, 1996, Quinta edición

Vernet, Juan; Martínez Martín, Leoner
Al-Andalus. El Islam en España
España, LUNWERG EDITORES, 1999, Segunda edición

Weyl, Hermann
La Simetría
Trad. José Grané
Barcelona, España, Ed. PROMOCIÓN CULTURAL, S. A., 1975

Wilson, Eva
Diseños Islámicos
Trad. Cristina Muntada
México, Ediciones G. Gili, 2000, Segunda edición

PÁGINAS WEB CONSULTADAS

http://alhambradegranada.org/historia/alhambraMenuLugares.asp

http://babettegazeau.free.fr/pagessites/artafricain/masques_texte.htm#masque

http://blason.metropoliglobal.com/disenyo/infordise4.html

http://ccins.camosun.bc.ca/%7Ejbritton/jbsymteslk.htm

http://charlottepatera.com/ html/mitla.html

http://clowder.net/hop/17walppr.html

http://clio.rediris.es/fichas/arteislam/islam1.htm#intro

http://club.telepolis.com/gvb/artprehi.htm

http://club.telepolis.com/gvb/cultures.htm

http://comp.uark.edu/~strauss/symmetry.unit/sym.1.1.5.html

http://daphne.palomar.edu/design/conclude.html

http://en2.wikipedia.org/wiki/Asymmetry

http://etab.ac-orleans-tours.fr/clg-mpagnol-vernouillet/Les%20pavages.htm

http://fresno.cnice.mecd.es/~arodr135/paginas/bestiario.html

http:://instructional1.calstatela.edu/ bevans/Art446-0...

http://home.comcast.net/~eschermc/

http://home.earthlink.net/~jdc24/symmetry.htm

http://html.rincondelvago.com/transformaciones-geometricas.html

http://larcher.c.free.fr/JASA6.HTM

http://marie.epfl.ch/escher/

http://plato.acadiau.ca/courses/educ/reid/Geometry/Symmetry/frieze.html

http://plato.acadiau.ca/courses/educ/reid/Geometry/Symmetry/Transformation s.html

http://plato.acadiau.ca/courses/educ/reid/Geometry/Symmetry/symmetry.html

http://math.usask.ca/~dlp537/index.html

http://mathforum.org/library/drmath/view/53325.html

http://mathforum.org/geometry/rugs/symmetry/bp.html

http://mathmuse.sci.ibaraki.ac.jp/pttrn/Pattern.html

http://mathworld.wolfram.com/WallpaperGroups.html

http://membres.lycos.fr/villemingerard/Geometri/Sym2D.htm

http://membres.lycos.fr/villemingerard/Geometri/Symetrie.htm

http://members.tripod.com/vismath/kim/

http://members.tripod.com/vismath8/tennant/

http://michaelshepperd.tripod.com/resources/groups.html

http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/Transformacio nes/transformaciones.doc

http://navajocentral.org/rugs.htm

http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/

http://personal.redestb.es/seldon/figuras/ambigrama.htm

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/kolam02.htm

http://rupestreweb.tripod.com/alucino.html

http://rupestrweb.tripod.com/alucino.html

http://rupestreweb.tripod.com/mendiola2.html http://sala4.maf.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/Movimientos_F.htm

http://sunsite.wits.ac.za/math/frieze.htm

http://teams.lacoe.edu/documentation/classrooms/amy/geometry/6-8/web/web.html

http://teams.lacoe.edu/documentation/classrooms/amy/geometry/6-8/web/web.html#tessellations

http://tiendas.espaciopyme.com/artafricanesp/

http://universal.eud.com/1997/02/17/17324D.shtml

http://xahlee.org/Wallpaper_dir/c5_17WallpaperGroups.html

http://weasel.cnrs.humboldt.edu/~spain/alh/index.html

http://web.nmsu.edu/~pscott/isgems91.htm

http://www.accefyn.org.co/Valbis/GrupAntropo.pdf

http://www.altur.com/esp/pgranada/granada/index.htm

http://www.amc.unam.mx/laciencia/matsec2.htm

http://www.artehistoria.com/historia/ponframes.htm

http://www.astrocosmo.cl/h-foton/h-foton-06_05.htm

http://www.brunette.brucity.be/max/lespages/escher/pgg.htm

http://www.cienciateca.com/simetria.html

http://www.cienciateca.com/simhumana.html

http://www.cienciateca.com/simnieve.html

http://www.cienciateca.com/17spgps.gif

http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/coordenadas.htm http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/embaldosados.htm

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/rotaciones.htm

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/simetrías.htm

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/traslaciones.htm

http://www.cnice.mecd.es/Descartes/4a_eso/Movimientos_en_el_plano_4/Movimi4.htm

http://www.cut-the-knot.org/triangle/Frieze.shtml

http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.pattern/lesson5math.html

http://wwwecsu.ctstateu.edu/depts/edu/projects/ethnomath.html

http://www.emis.de/monographs/jablan/chap26.htm

http://www.emis.de/monographs/jablan/cont.htm

http://www-etsi2.ugr.es/profesores/jmaroza/anecdotario/anecdotario-a.htm

http://www.fact-index.com/f/fr/frieze group.html

http://www.france.diplomatie.fr/culture/expositions_scientifiques/maths_quot/pages/droite01.html

http://www.fundacionginer.org/boletin/bol_nn_lcorrales.htm#[8]

http://www.geocities.com/curinguri/flautatriple/ftriple.html

http://www.geocities.com/sunsetstrip/studio/2982/islam.html

http://www.geologia.uson.mx/academicos/amontijo/carbonatos/biomicro.htm

http://www.ideal.es/especiales/fitur/suplementos/noticia06.html#top

http://www.imageandart.com/tutoriales/historia_arte/abstraccion.html

http://www.jqjacobs.net/rock_art/transparencies.html

http://www.maf.arq.uva.es/GYCGA/Apuntes/Introd/Introd.htm http://www.infoaragon.net/servicios/blogs/tiopetrus/index.php?idarticulo=2003 09261-22k

http://www.marlamallett.com/default.htm

http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/math-art-arch.shtml

http://www.math.utah.edu:8080/~lars/mathart

http://www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/index.html

http://www.maths.warwick.ac.uk/~wendland/ma243/e117.html

http://www.maths.warwick.ac.uk/~wendland/ma243/e86.html

http://www.maths.warwick.ac.uk/`wendland/ma243/e68.html

http://www.maths.warwick.ac.uk/~wendland/ma243/escher.html

http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/field/

http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/maynard/

http://www.ncf.edu/sendova/Pages/SolidState/2D%20Crystallography.ppt

http://www-oi.uchicago.edu/OI/MUS/VOL/NN_SUM94/NN_Sum94.html

http://www.oswego.edu/~baloglou/103/seventeen.html

http://www.patagonia.com.ar/neuquen/villapehuenia/rupestreslaslajas.php

http://www.peiresc.org/orig.ex03.htm

http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Teselaciones.htm

http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/symmetry.html

http://www_sphys.unil.ch/escher/

http://www.tuttogratis.es/gratis/traductor_espa_ol_arabe/2/

http://www.ugr.es/~ruiz/preprint/SimetraenlaAlhambra.pdf

http://www.xahlee.org/Wallpaper_dir/c0_WallPaper.html http://www.xtal.iqfr.csic.es/Cristalografia/parte_03.html

http://www.yesopunk.8k.com/antiateismo2.htm

http://www.yoogoo.com/Top/Science/Math/Recreations/Tessellations

http://www.webislam.com/BEI/Burckhardt/index_Burckhardt.htm

http://www2.spsu.edu/math/tile/index.htm