



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Análisis y diseño de una Guía de Onda
con Estructura Periódica

T E S I S
que para obtener el título de
Ingeniero eléctrico–electrónico
presenta
Alejandro Felícito Hernández Montiel

Director de tesis
M. I. Larry H. Escobar S.

2003



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Al Artista, al Diseñador por antonomasia. Ruégole que todo mundo tenga salud y comida.

A mi madre y mis dos padres, porque en gran medida lo que soy se los debo.

Al Hielo, Encantito, Xeli, Helios, Dulce de leche, que se ha convertido en una de las personas más relevantes en mi vida (si no es que la más) en tan poco tiempo, por compartir este valle de lágrimas conmigo y formar la pareja que pretende seguir en crecimiento, en el norte y en el sur, en las buenas y en las malas...

A mi hermana, porque con su fuerza me ha enseñado mucho y porque vinimos con los mismos defectos de fábrica.

A mis compadres (P2, FI, vida).

A los sinodales que tan amablemente otorgaron parte importante de su valioso tiempo en la lectura y corrección de la tesis. Muy particularmente al M. I. Larry H. Escobar S., director de la tesis, por su muy grande paciencia y apoyo.

Índice general

1. Introducción	7
2. Electromagnetismo y Líneas de Transmisión	11
2.1. Ecuaciones de Maxwell	11
2.1.1. Ley de Gauss	12
2.1.2. Ley de Ampère	13
2.1.3. Ley de continuidad de flujo magnético	14
2.1.4. Ley de Faraday	15
2.1.5. Condiciones de frontera	16
2.1.6. Resumen de las ecuaciones de Maxwell	17
2.2. Ondas Electromagnéticas	17
2.2.1. Ondas Electromagnéticas en dieléctricos	18
2.2.2. Ondas Electromagnéticas en conductores	20
2.2.3. Polarización de OEM	21
2.2.4. Reflexión y refracción de OEM	22
2.2.5. Resumen de Ondas Electromagnéticas	27
2.3. Líneas de transmisión	29
2.3.1. Teoría de circuitos y de campo	29
2.3.2. Coeficientes de reflexión y LT con carga	31
2.3.3. Carta de Smith	34
2.3.4. Resumen de líneas de transmisión	36
3. Guías de Onda	37
3.1. Guía de onda de planos paralelos infinitos	37
3.2. Guía de Onda Rectangular	41
3.2.1. Modos transversales eléctricos TE_{mn}	42
3.2.2. Modo TE_{10}	47
3.2.3. Modos transversales magnéticos TM_{mn}	48
3.2.4. Modo TM_{11}	49
3.2.5. Potencia transmitida y atenuación	51
4. Análisis y diseño de una Guía de Onda Periódica	53
4.1. Modelos y aproximaciones preliminares	53
4.2. Modelo de una GOP de planos paralelos infinitos	58

4.3. Solución propuesta	61
5. Resultados	65
5.1. Resultados analíticos y numéricos	65
5.2. Simulaciones	72
6. Conclusiones	81
A. GO WR340	83
. Bibliografía	87

Resumen

El propósito de este trabajo es abordar el tema de la configuración y características de los campos electromagnéticos en las guías de onda (GO) con el objeto de analizar y diseñar una GO con una estructura periódica (GOP) que opere en el intervalo de microondas.

Después de una revisión superficial del electromagnetismo, de la teoría de líneas de transmisión (LT) y de las GO de paredes lisas, se lleva a cabo el análisis de la GOP propuesta, basado en gran medida en el estudio del mismo tema realizado por Ramo *et al.* (1964). Como parte de los resultados se presentan mapas de los campos electromagnéticos en el interior de la GOP, frecuencias armónicas de corte, dimensiones de la GOP y una pequeña comprobación de la conformación del diseño propuesto con el teorema de Floquet. Sólo se realizan simulaciones de las ecuaciones obtenidas, dado que no se construyó el modelo físico, únicamente el matemático.

Con respecto a las GO de paredes lisas, una GOP puede brindar características adicionales en la transmisión de los campos electromagnéticos como demorar la propagación de un modo específico o bien permitir el envío simultáneo de más de un modo. En ciertas circunstancias, éstas y las demás características de las GOP pueden resultar deseables, como en el caso de iluminar una antena con una distribución de los campos electromagnéticos que asemeje a una onda transversal electromagnética para que opere eficientemente, misma distribución que puede ser obtenida mediante el uso de una GOP.

Glosario

Expresión	Concepto
a	Dimensión de la guía de onda en la dirección del eje x Dimensión de la GOP en la dirección del eje x
A_i	Amplitud armónica de la i -ésima armónica espacial (GOP)
b	Dimensión de la guía de onda en la dirección del eje y Dimensión de la GOP en la dirección del eje y
c	Velocidad de la luz en el vacío
d	Periodo de la estructura espacial (GOP)
E	Vector campo eléctrico
f_{ci}	Frecuencia armónica de corte de la i -ésima armónica espacial (GOP)
H	Vector campo magnético
GO	Guía de onda
GOP	Guía de onda con estructura periódica
k_i	Número armónico de onda para la i -ésima armónica espacial (GOP)
k_x	Número de onda en la dirección x de la guía de onda
k_y	Número de onda en la dirección y de la guía de onda
l	Longitud de las ranuras (GOP)
LT	Línea de transmisión
m	Cantidad de medias variaciones de los campos en el eje x de la guía de onda Índice de la ranura (GOP)
n	Cantidad de medias variaciones de los campos en el eje y de la guía de onda Cantidad de medias variaciones de los campos en el eje y de la GOP
OEM	Onda electromagnética
SI	Sistema internacional de unidades
SWR	Relación de onda estacionaria (siglas en inglés)
TE	Onda transversal eléctrica
TEM	Onda transversal electromagnética u onda plana
TM	Onda transversal magnética
w	Espeor de la ranura en la GOP
β_0	Constante de propagación de la OEM fundamental (GOP)
β_i	Constante armónica de propagación de la i -ésima armónica espacial (GOP)

Capítulo 1

Introducción

En el mundo actual, el ser humano maneja grandes volúmenes de información y necesita transmitirlos de un lugar a otro a altas velocidades, por lo que las comunicaciones en alta frecuencia conforman un área muy extensa de trabajo. En la planeación de un sistema de comunicaciones, el conocimiento de los dispositivos de alta frecuencia es de suma importancia para lograr la máxima eficiencia, el ancho de banda óptimo, la potencia necesaria y en general, los parámetros requeridos del sistema.

Existe una gran cantidad de dispositivos de comunicaciones, cada uno de los cuales posee una función bien definida, como las antenas (para emitir y recibir las ondas), los acopladores (para obtener la mejor transferencia), los filtros (para discernir la información). Uno de los elementos que se encarga de conducir los campos electromagnéticos y por tanto la energía y la información entre dispositivos es la línea de transmisión (LT), también ampliamente utilizada en frecuencias bajas. Las guías de onda (GO) son líneas de transmisión con características muy particulares entre las cuales se puede mencionar que en ocasiones poseen un conductor único y que, en el caso de GO de paredes lisas, existe una frecuencia de corte debajo de la cual ya no es posible la transmisión de ondas electromagnéticas (OEM).

En las comunicaciones en microondas, las GO son dispositivos de suma importancia debido a sus características inherentes y a sus parámetros principales (su frecuencia de corte, la potencia y las configuraciones de campo que puede transmitir). Por tanto, un punto medular en el diseño de una GO es conocer el comportamiento de los campos electromagnéticos asociados al modo de transmisión.

El **propósito** de este trabajo es abordar el tema de la configuración y características de los campos electromagnéticos en las guías de onda con el objeto de analizar y diseñar una GO con una estructura periódica (GOP) que opere en el intervalo de microondas. Se asume a todo lo largo del estudio un conocimiento previo de las herramientas matemáticas revisadas en una licenciatura estándar en ingeniería eléctrica como cálculo vectorial, análisis de Fourier, análisis de circuitos eléctricos, electromagnetismo, etc.

Por otro lado, este estudio no es en absoluto exhaustivo en el tema y uno de sus mo-

tores principales fue la curiosidad por conocer las distribuciones de los campos eléctricos y magnéticos dentro de las GOP. Excepto por el trabajo de Clarricoats [1] que presenta un par, en ninguna de las obras consultadas los autores proporcionan mapas de tales distribuciones, siendo el caso de Fiódorov [3], Mendoza en conjunción con Sámano [10], Nikolski [11], Pozar [12] y Ramo [13]. El estudio presente tampoco abunda en muchas otras características de las GOP como la atenuación que presenta, la potencia que puede transportar, su impedancia, su patrón de radiación, su función como filtro de paso de bandas [12], etc., aspectos que se consideran como probables desarrollos posteriores del tema.

Con referencia a las GO de paredes lisas, una GOP puede brindar características adicionales en la transmisión de los campos electromagnéticos como demorar la propagación de un modo específico [3] o bien permitir el envío simultáneo de más de un modo [10]. En ciertas circunstancias, éstas y las demás características de las GOP pueden resultar deseables, como en el caso de iluminar una antena con una distribución de los campos electromagnéticos que asemeje a una onda transversal electromagnética (TEM) para que opere eficientemente, misma distribución que puede ser obtenida mediante el uso de una GOP.

Después de una revisión superficial del electromagnetismo, de la teoría de líneas de transmisión (LT) y de las GO de paredes lisas, se lleva a cabo el análisis de la GOP propuesta, basado en gran medida en el estudio del mismo tema realizado por Ramo *et al.* (1964). Como parte de los resultados se presentan mapas de los campos electromagnéticos en el interior de la GOP, frecuencias armónicas de corte, dimensiones de la GOP y una pequeña comprobación de la conformación del diseño propuesto con el teorema de Floquet. Dado que únicamente se construyó el modelo matemático y no el físico de la GOP propuesta, se realizan simulaciones de las ecuaciones obtenidas sin llevar a cabo medición ni corrección mecánica alguna.

Este trabajo está dividido en 6 capítulos, el primero de los cuales es la presente *Introducción*, cuyos objetivos son definir el alcance del tema que se abordó, delimitar los resultados esperados y mostrar la organización de la tesis. El segundo capítulo lleva por título *Electromagnetismo y Líneas de Transmisión*, es un resumen de los fundamentos necesarios del electromagnetismo, tales como las cuatro ecuaciones de Maxwell y la propagación de OEM, que son la base para abordar el estudio de las guías de onda. El tercer capítulo es llamado *Guías de Onda*, en él se analizan la GO de planos paralelos infinitos y la GO rectangular y se proporciona una descripción muy somera de algunos de sus parámetros: frecuencia de corte, constante de propagación, potencia transmitida.

El capítulo cuatro es *Análisis y diseño de una Guía de Onda Periódica*, en el cual se analiza de forma sucinta un par de GO similares a la propuesta, para después dar cabida al desarrollo del modelo matemático de la GOP sugerida. El capítulo siguiente es llamado *Resultados* y en él se muestran los resultados (analíticos, numéricos y simulaciones) obtenidos en el trabajo como las dimensiones internas de la GOP, la frecuencia de corte, la frecuencia de operación, algunos mapas de la distribución de los campos electromagnéticos en la GOP. El sexto capítulo tiene como nombre *Conclusiones*, contiene las comparaciones con las soluciones desarrolladas por otros autores [1, 10], particularmente con Ramo [13] y presenta las

conclusiones del trabajo y algunas de las aplicaciones recientes de estos dispositivos, así como las expectativas de crecimiento posterior del estudio realizado.

En el anexo único se puede encontrar un poco más de información sobre la GO de paredes lisas WR340 en la cual se basó el diseño propuesto, como algunos de sus fabricantes, frecuencias de corte y de operación sugeridas, materiales con los que se puede manufacturar, etc.

Unas palabras a modo de explicación de la notación empleada a lo largo del trabajo: los corchetes indican una referencia bibliográfica si su contenido es un número o bien indican símbolos de las unidades; para hacer alusión a una ecuación, figura o tabla se coloca el número de la misma entre paréntesis.

Algunas aplicaciones de las GOP son:

1. En el área de comunicaciones, para el transporte simultáneo de varias OEM (fundamental y armónicas) [10].
2. En ciertas condiciones, alimentar a reflectores parabólicos, dado que este tipo de dispositivos es más eficiente si la distribución de los campos electromagnéticos que los iluminan se asemeja a una TEM [1].
3. En la física experimental, pueden proveer un gradiente de aceleración del orden de giga-electron-volts por metro para acelerar electrones con un tren de pulsos [15].
4. Pueden actuar como una carga dieléctrica artificial en un arreglo de maser en donde los electrones interactúan con una de las armónicas espaciales de la GOP, para generar microondas de alta potencia utilizando rayos de electrones de bajo voltaje [9].
5. Las fibras de cristal fotónico con núcleo hueco ofrecen nuevas soluciones para la transmisión de pulsos ultracortos de radiación laser de alta potencia, mejorando la eficiencia de procesos ópticos no-lineales [7]. En general, este tipo de dispositivos son utilizados actualmente bastante a menudo en óptica.

Capítulo 2

Electromagnetismo y Líneas de Transmisión

En este capítulo se comienza con un desarrollo básico de las ecuaciones de Maxwell, seguido del análisis de las ondas electromagnéticas (OEM) tanto en medios dieléctricos como en conductores, para luego continuar con la reflexión y refracción de ondas y después introducir conceptos de líneas de transmisión (LT), ya que en el análisis de ondas transportadas a través de una guía de onda (GO) es necesario conocer los fenómenos electromagnéticos que suceden en su interior.

Este capítulo tiene como objetivo revisar las herramientas y conocimientos necesarios para llevar a cabo los análisis de GO adecuadamente, además de justificar los métodos y suposiciones que posteriormente se emplearán. Por ejemplo, la ecuación de onda (obtenida en la sección *Ondas Electromagnéticas*) modela el comportamiento de perturbaciones sinusoidales que varían en el tiempo y el espacio y se utiliza también para determinar los campos en el interior de una GO, por lo que resulta de suma relevancia saber obtenerla a partir de las *Ecuaciones de Maxwell* y otras consideraciones pertinentes.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

En este tema se desarrolla de forma simple las cuatro ecuaciones de Maxwell, que son la base de las leyes del electromagnetismo y del análisis que se llevará a cabo. Primero se obtiene las expresiones para situaciones estacionarias y después la generalización para campos variantes en el tiempo.

La cantidad eléctrica básica es la *carga eléctrica* Q [8], de cuya existencia ya se tenía conocimiento en la época de los griegos. El ingeniero militar francés C. A. de Coulomb, experimentalmente llegó a la conclusión de que la fuerza que dos cargas se ejercen entre sí está dada por la relación llamada *ley de Coulomb*

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} \quad (2.1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza en newtons, Q_1 y Q_2 son las cargas en coulombs¹, \mathbf{r} es el vector que une las cargas, r es su magnitud en metros y ε es la *permitividad* en farads por metro. La permitividad es una característica eléctrica de los materiales y se puede expresar como el producto de la *permitividad del vacío* $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [F m⁻¹] y una constante adimensional llamada *permitividad relativa*, de forma que $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$. Entonces, para un material *dieléctrico*, se tiene $\varepsilon_r > 1$, mientras que para el aire $\varepsilon_r = 1.0006$, por lo que ε_0 se toma entonces ordinariamente como la permitividad del aire y del vacío.

El *campo eléctrico* \mathbf{E} se define como la fuerza por unidad de carga que actúa en un punto determinado y sus unidades son newtons por coulomb

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.2)$$

Para el cálculo de campos magnéticos, los físicos franceses Biot y Savart dedujeron que un elemento de campo magnético en un punto P se relaciona con la corriente que pasa a través de una pequeña sección de conductor mediante la ecuación llamada *ley de Biot-Savart* [8]

$$d\mathbf{H} = \frac{I dl \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (2.3)$$

donde $d\mathbf{H}$ es el elemento diferencial de campo magnético en amperes por metro, I es la corriente eléctrica en amperes que pasa a través del diferencial de longitud dl en metros, θ es el ángulo que forma la trayectoria de la corriente en la posición de dl con la línea que va hasta P y r es la distancia de dl a P en metros.

2.1.1. Ley de Gauss

El matemático alemán J. K. F. Gauss encontró que la carga total Q dentro de una superficie cerrada S (real o no), y la *densidad de flujo eléctrico* definida como² $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ están relacionadas mediante [2]

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

ecuación llamada *ley de Gauss* en forma integral, donde $d\mathbf{s}$ es el elemento normal hacia afuera de la superficie. Para una densidad volumétrica de carga ρ se tiene

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv \quad (2.4)$$

donde v es el volumen encerrado por S . Para obtener la forma diferencial, se utiliza el *teorema de la divergencia* [2]

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

¹[N]: newton, unidad de fuerza; [C]: coulomb, unidad de carga eléctrica. En adelante se utilizará el Sistema Internacional de Unidades (SI).

²Si el medio es homogéneo, isotrópico y lineal [6].

y entonces se obtiene la forma diferencial

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.5)$$

Si se desea encontrar el campo \mathbf{E} , la ley de Gauss en ocasiones es más útil que la ley de Coulomb, debido a que se simplifican los problemas en los que el campo eléctrico contiene algún tipo de simetría, como en el caso de cargas puntuales, distribuciones de carga lineales, etc.

2.1.2. Ley de Ampère

El físico francés A. M. Ampère encontró que una corriente eléctrica produce un campo magnético que la rodea formando curvas cerradas dado por $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$. Por otro lado, en un conductor lineal se deduce que la *forma puntual de la ley de Ohm* es $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$, donde \mathbf{J}_c es la *densidad de corriente de conducción* en amperes por metro cuadrado debida a la corriente eléctrica, σ es la *conductividad* del medio en siemens por metro y \mathbf{E} es el campo eléctrico en volts por metro [8]. Entonces

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{s} = I \quad (2.6)$$

La ley de Ampère fue desarrollada a partir de campos estacionarios por lo que la variación en el tiempo no estaba contemplada y por lo tanto su ley parcial contradecía la ecuación de continuidad. El físico británico J. C. Maxwell dedujo la *densidad de corriente de desplazamiento* que aparece en un dieléctrico como resultado del proceso de polarización, de manera que pudo generalizar la aportación de Ampère.

La *ecuación de continuidad* expresa que un decremento de la carga en el tiempo dentro de un pequeño volumen debe corresponderse con un flujo de carga a través de la superficie que limita a tal volumen, debido a que la cantidad total de carga se conserva [5]

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

Maxwell observó que al aplicar el *teorema de Stokes* [2] a la ley de Ampère, obtenía

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$$

y al operar con la divergencia llegaba a

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_c \implies 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

lo cual contradice a la ecuación (2.7). Al introducir un término nuevo, llamado \mathbf{J}_d

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d) \implies 0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d$$

es decir $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_d$. Sustituyendo la ecuación (2.5) y haciendo uso de la linealidad de los operadores diferenciales

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_d$$

con lo que Maxwell dedujo la densidad de corriente de desplazamiento $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Entonces, la densidad de corriente total queda dada por la suma de las densidades de conducción y de desplazamiento

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.8)$$

donde la curva C limita a la superficie S , $d\mathbf{l}$ es un elemento de longitud y $d\mathbf{s}$ es un elemento de área normal a S . Al aplicar el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

y para una superficie de integración arbitraria, igualando las dos expresiones anteriores

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.9)$$

lo que por otra parte implica que un campo \mathbf{E} variante en el tiempo genera un campo \mathbf{H} también variante.

Cabe destacar que la inclusión del término densidad de corriente de desplazamiento en la ley de Ampère fue una de las grandes aportaciones de Maxwell a la teoría electromagnética y en particular a la teoría de la transmisión de ondas electromagnéticas (OEM), debido a que precedía su existencia. No obstante, esta idea recibió poca aceptación entre sus contemporáneos hasta que el físico alemán H. R. Hertz comprobó la transmisión de tales ondas en el espacio libre a fines del siglo XIX [5].

2.1.3. Ley de continuidad de flujo magnético

La *ley de continuidad de flujo magnético*, en su forma integral, expresa que la cantidad de líneas de flujo magnético que entra a una superficie cerrada es igual a la que sale, por lo tanto se requiere la ausencia de polos magnéticos aislados [2]

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ es la *inducción magnética* o *densidad de flujo magnético* en webers por metro cuadrado. Esta última identidad se cumple si el medio es lineal, isotrópico y homogéneo y en donde μ es la *permeabilidad* del medio en henrys por metro. Aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0$$

y como el volumen v es arbitrario

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.11)$$

En su forma diferencial, la ley de continuidad de flujo magnético expresa que el campo magnético no posee *sumideros* ni *fuentes*, de forma que las líneas de campo \mathbf{H} son continuas.

2.1.4. Ley de Faraday

Las primeras observaciones cuantitativas que relacionan campos eléctricos y magnéticos *dependientes del tiempo* fueron llevadas a cabo por el químico y físico británico M. Faraday en experimentos sobre el comportamiento de la corriente en circuitos colocados en campos magnéticos variantes en el tiempo, donde observó que un flujo magnético ψ_m cambiante inducía una corriente transitoria en un circuito.

Sea C la trayectoria cerrada que limita a la superficie abierta S y \mathbf{n} el vector unitario normal a S , entonces el flujo magnético ligado a la trayectoria es

$$\psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da$$

mientras que la fuerza electromotriz o diferencia de potencial inducida alrededor de la trayectoria está dada por

$$fem = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico en el elemento $d\mathbf{l}$ de la trayectoria C . Las observaciones de Faraday se combinan en la expresión

$$fem = -\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\Rightarrow \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.13)$$

que es la *ley de Faraday* en forma integral. El signo está dado por la *ley de Lenz* y establece que la corriente inducida que acompaña al flujo magnético tiene dirección opuesta al cambio del flujo a través de la trayectoria. Para obtener la forma diferencial, se aplica el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

entonces, para una superficie fija y arbitraria y tomando como base la linealidad de los operadores ∇ , integral y derivada

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

por lo tanto

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.14)$$

2.1.5. Condiciones de frontera

Las *condiciones de frontera* o condiciones de contorno muestran la relación que guardan entre sí las componentes de los campos cuando pasan de un medio con ciertas propiedades a otro con propiedades diferentes (como la permitividad o la conductividad). Se analiza primero el caso de medios dieléctricos.

Sea la interfaz entre dos dieléctricos mostrada en la figura (2.1) [8]; dado que la integral de línea del campo eléctrico estático alrededor de una curva cerrada es cero, entonces cuando Δy tiende a cero

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{t1}\Delta x - E_{t2}\Delta x = 0$$

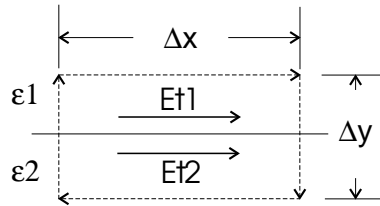


Figura 2.1: El campo eléctrico tangencial es continuo a través de la frontera

es decir, se tiene para la componente tangencial del campo eléctrico

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (2.15)$$

A partir de la ley de Gauss dada por la ecuación (2.4), la integral cerrada de superficie de \mathbf{D} es igual a la carga encerrada; entonces, cuando Δy tiende a cero en la figura (2.2)

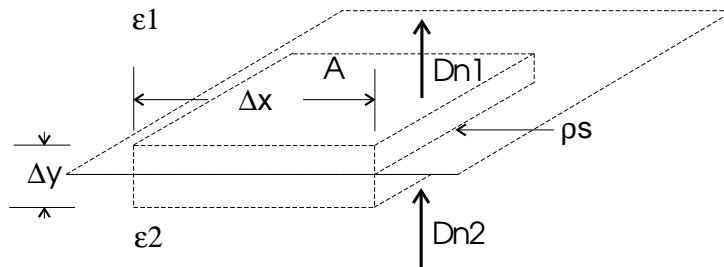


Figura 2.2: La densidad de flujo normal es continua si no hay carga en la frontera

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = D_{n1}A - D_{n2}A = \rho_s A$$

en otras palabras, para la componente normal de la densidad de flujo eléctrico

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (2.16)$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (2.15), las componentes tangenciales del campo eléctrico son iguales en ambos lados de una frontera entre dos dieléctricos. Si el medio 2 es un conductor ($\sigma_2 \neq 0$), el campo E_{t2} en el medio 2 debe ser cero en condiciones estáticas, y entonces la ecuación (2.15) se reduce a $E_{t1} = 0$.

Según la ecuación (2.16), la componente normal de la densidad de flujo eléctrico varía en una frontera cargada entre dos dieléctricos en una cantidad igual a la densidad superficial de carga. Si la frontera está libre de cargas, entonces la ecuación (2.16) se reduce a $D_{n1} = D_{n2}$. Si el medio 2 es un conductor, entonces se tiene $D_{n2} = 0$ y $D_{n1} = \rho_s$.

De forma similar se puede encontrar la generalización para campos variantes con el tiempo y para las componentes del campo magnético. En la tabla (2.1) se presenta un resumen de las condiciones de frontera [6].

Expresiones generales
$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s$
$B_{n1} = B_{n2}$
$H_{t1} - H_{t2} = J_s$
$E_{t1} = E_{t2}$

Tabla 2.1: Condiciones de frontera

2.1.6. Resumen de las ecuaciones de Maxwell

En la tabla siguiente (2.2) se muestra el resumen de las ecuaciones de Maxwell para campos variantes en el tiempo, donde las relaciones constitutivas son $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

Ley	Forma Diferencial	Forma Integral
Gauss	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv = Q$
Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s}$
Continuidad	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Faraday	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = fem$

Tabla 2.2: Resumen de las ecuaciones de Maxwell

2.2. Ondas Electromagnéticas

Gracias a los resultados teóricos de Maxwell en el siglo XIX, muchos investigadores se dieron a la tarea de comprobar experimentalmente que se podía transmitir energía electromagnética a través de los dieléctricos y en particular en el espacio libre [5]. Como ya se

mencionó, una de las grandes aportaciones de Maxwell fue la inserción en la teoría electromagnética del concepto de *corriente de desplazamiento*.

En este apartado se estudia la propagación de Ondas Electromagnéticas en dieléctricos y en conductores, como consecuencia teórica de las ecuaciones de Maxwell, así como su polarización, reflexión y refracción. Una *Onda Electromagnética (OEM)* es una perturbación que se propaga a través del espacio, en la cual un campo \mathbf{E} cambiante genera un campo \mathbf{B} cambiante, que a su vez genera un campo \mathbf{E} cambiante, y así sucesivamente se produce la propagación de la energía a la velocidad de la luz en el vacío [8].

2.2.1. Ondas Electromagnéticas en dieléctricos

Un material dieléctrico es aquél que no permite el libre flujo de las cargas eléctricas e idealmente tiene conductividad nula ($\sigma = 0$). En una onda *plana* u onda *Transversal Electromagnética (TEM)* en el espacio libre, los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} en todos sus puntos son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, además de que están en fase. La ecuación diferencial que describe su comportamiento se llama *ecuación de onda* y se puede obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Sea un medio dieléctrico (σ , J_c , $\rho_v = 0$, permitividad ε y permeabilidad μ) y una TEM que se propague en la dirección positiva del eje z , con una sola componente del campo eléctrico E_x y una del campo magnético H_y . Desarrollando la ley de Ampère con $\sigma\mathbf{E} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) = \hat{i} \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right)$$

por igualdad de componentes en \hat{i}

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (2.17)$$

De forma similar, con la ley de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \implies \hat{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\hat{j} \mu \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} \right)$$

por igualdad de componentes en \hat{j}

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (2.18)$$

Tomando la derivada parcial respecto a z de la ecuación (2.17) y haciendo uso de la linealidad de los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

y sustituyendo la ecuación (2.18) en la ecuación anterior

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \quad (2.19)$$

A la ecuación (2.19) se le conoce como *ecuación de onda en H_y* . Asimismo se puede demostrar que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad (2.20)$$

la ecuación (2.20) es conocida como *ecuación de onda en E_x* . En conjunto se conocen como *ecuaciones de D'Alembert* [2].

Dimensionalmente, de estas ecuaciones se puede ver que las unidades de $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ son metros por segundo, unidades de velocidad. Entonces, si se considera los valores de la permitividad y la permeabilidad del espacio libre $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [Fm⁻¹] y $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [Hm⁻¹], se tiene

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \times 10^8 \quad (2.21)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, en metros por segundo.

Específicamente para la ecuación (2.20) una solución general puede ser

$$E_x = E_1 \sin(\omega t + \beta z) + E_2 \sin(\omega t - \beta z) \quad (2.22)$$

donde β es la *constante de fase* dada por $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ en radianes por metro, $\omega = 2\pi f$ es la *frecuencia angular* en radianes por segundo, λ es la *longitud de onda* en metros, f es la *frecuencia* en herz y cada término es una solución de la ecuación de onda en E_x . Para un *plano de fase constante*, el argumento de la función es constante; o sea, para el primer término

$$\omega t + \beta z = \text{cte.} \implies \frac{\partial}{\partial t}(\omega t + \beta z) = 0 = \omega + \beta \frac{\partial z}{\partial t}$$

se ve que $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\omega}{\beta} = -f\lambda = -v$, lo que significa que un plano de fase constante tiene una *velocidad de fase* en dirección opuesta a la propagación de la onda. En otras palabras, el segundo término describe a una onda desplazándose en el sentido positivo de z , en tanto el primer término describe a la onda que viaja en sentido contrario [2]. Si el espacio está dividido en dos medios y la frontera entre ellos es el plano $z = 0$, se dice que la onda representada por el primer término a la derecha de la solución (2.22) es la *onda reflejada* y el segundo término es la *onda incidente*.

2.2.2. Ondas Electromagnéticas en conductores

Al estudiar el comportamiento de las ondas en medios con parámetros ε , μ , y σ diferentes a los del espacio libre, se observa que los efectos que añade la conductividad finita son un decaimiento de la amplitud de la onda en la dirección de propagación y un corrimiento de fase entre \mathbf{H} y \mathbf{E} [6]. Por tanto, para el análisis de ondas electromagnéticas que se propagan en medios conductores se supone que: ninguna de las componentes de los campos varía con x ó y ; la región es lineal, homogénea e isotrópica; las densidades de carga son diferentes de cero de forma que se cumpla la ecuación de continuidad (2.7) y la densidad de corriente de conducción \mathbf{J}_c se relaciona con el campo \mathbf{E} mediante la ley de Ohm, $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$.

En notación fasorial y tomando otro orden de las ecuaciones, de la tabla (2.2) se tiene

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E}\end{aligned}\quad (2.23)$$

donde ya se substituyó las relaciones constitutivas $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Comparando este conjunto de ecuaciones con las utilizadas para el espacio libre

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}\end{aligned}$$

y para aprovechar la solución ya obtenida, se manipula las ecuaciones de manera que tengan la misma forma por lo que, de la ecuación (2.23)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\varepsilon\mathbf{E} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}$$

si se reemplaza

$$\begin{aligned}\mu_0 &\text{ por } \mu \\ \varepsilon_0 &\text{ por } \left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\end{aligned}$$

se observa la similitud de las ecuaciones. Por tanto, la ecuación de onda para medios conductores en notación fasorial queda

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon)E_x = (j\sigma - \omega\varepsilon)\omega\mu E_x \quad (2.24)$$

donde una solución propuesta tiene la forma

$$E_x = E_1 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z) + E_2 \exp(-\alpha z) \cos(\omega t + \beta z)$$

donde α en nepers por metro y β en radianes por metro son

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ \beta &= \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]^{1/2}\end{aligned}$$

El factor exponencial que se introduce en la solución toma en cuenta la atenuación de la onda en el medio conductor. Si se combina la *constante de atenuación* α y la *constante de fase* β , resulta la llamada *constante de propagación* en metros a la menos uno

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.25)$$

La frecuencia es de suma importancia para determinar si un medio actúa como dieléctrico o como conductor, dado que muchos materiales cambian su comportamiento eléctrico dependiendo de la frecuencia. Por ejemplo, se puede efectuar una clasificación simple y definir arbitrariamente tres condiciones, considerando las partes real e imaginaria de la ecuación de onda (2.24) [8]: 1) $\omega\varepsilon \gg \sigma$, 2) $\omega\varepsilon \approx \sigma$ y 3) $\omega\varepsilon \ll \sigma$.

Cuando la corriente de desplazamiento es mucho mayor que la de conducción (condición 1), el medio se comporta como un *dieléctrico*. En el caso contrario (condición 3), el medio puede clasificarse como *conductor*. Para los casos intermedios, es decir cuando las corrientes son del mismo orden de magnitud, el medio puede llamarse *cuasi-conductor*. De manera aún más específica, se puede clasificar los medios de acuerdo con el valor de la razón adimensional $\sigma/(\omega\varepsilon)$ llamada *tangente de pérdida* como se muestra en la tabla (2.3).

Tipo de medio	Valor de la razón $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$
Conductor	$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 100$
Cuasi-conductor	$\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 100$
Dieléctrico	$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < \frac{1}{100}$

Tabla 2.3: Clasificación arbitraria de los medios [8]

Por otro lado, una medida de la penetración de la onda en un medio conductor se puede obtener al considerar el *efecto piel*, el cual obliga a que las OEM viajen por fuera del conductor y se desvanezcan en el interior del mismo. Debido a que la OEM se atenúa conforme penetra en el conductor, en un momento dado su amplitud se reduce a $1/e$ veces (36.8%) de su amplitud original. Entonces se define la *profundidad de penetración* como

$$\frac{1}{\sqrt{f\pi\mu\sigma}} \quad (2.26)$$

2.2.3. Polarización de OEM

La orientación vectorial o *polarización* de una OEM es el lugar geométrico que describe la punta de su vector campo eléctrico al ser proyectado en un plano de fase constante.

Por ejemplo, se dice que una onda plana está *polarizada linealmente* cuando en todo momento la proyección de su vector \mathbf{E} describe una línea recta sobre cualquier plano de fase constante. No obstante, en ocasiones \mathbf{E} puede separarse en componentes vectoriales y entonces no necesariamente tendrá polarización lineal, dependiendo de la fase entre ellos. Si se tiene las componentes del campo eléctrico $E_x = E_1 \cos(\omega t - \beta z)$ y $E_y = E_2 \cos(\omega t - \beta z)$ propagándose

en fase y con la misma frecuencia, se tendrá el vector campo eléctrico $\mathbf{E} = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y$ linealmente polarizado y con inclinación respecto al eje x dada por $\phi = \arctan(E_2/E_1)$.

Si los campos están 90° fuera de fase, se tiene que

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\omega t - \beta z) \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t - \beta z + 90^\circ) \end{aligned}$$

entonces en el plano $z = 0$ quedan

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t + 90^\circ) = -E_2 \sin \omega t = -E_2 \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} \end{aligned}$$

por lo tanto, en $z = 0$

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse. Así, la punta del vector \mathbf{E} total dibuja la *elipse de polarización* en cualquier plano de fase constante conforme la OEM se mueve, indicando la *polarización elíptica* de la onda. La elipse de polarización puede tener cualquier orientación (sus ejes no necesariamente coinciden con los coordenados).

Si ahora se expresa la diferencia de fase con δ

$$\mathbf{E} = \hat{i} \underbrace{E_1 \sin(\omega t - \beta z)}_{E_x} + \hat{j} \underbrace{E_2 \sin(\omega t - \beta z + \delta)}_{E_y}$$

Evaluando para $z = 0$ y expandiendo E_y se tiene $E_y = E_2(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta)$, mientras que despejando el término $\sin(\omega t)$ de la expresión para E_x se tiene $\sin \omega t = \frac{E_x}{E_1}$, lo que implica entonces que $\cos \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}$. Si se sustituye en la última relación para E_y se obtiene

$$\frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta} E_x^2 - \frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} E_x E_y + \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta} E_y^2 = 1 \quad (2.27)$$

llamada *ecuación general de polarización* [8]. Si la onda se aproxima, si $E_1 = E_2$ y además si $\delta = +90^\circ$, tiene *polarización circular izquierda*, mientras que si $\delta = -90^\circ$, tiene *polarización circular derecha*.

A modo de ejemplo, la polarización de las OEM tiene importancia práctica en las comunicaciones por radio ya que la potencia que la antena receptora puede captar de la onda incidente depende de la orientación de la antena respecto a la polarización de dicha onda [6].

2.2.4. Reflexión y refracción de OEM

La *reflexión* de OEM se presenta cuando una onda incide en la frontera común entre dos medios y una parte de la onda se refleja, mientras la *refracción* o transmisión significa que

una porción de la onda pasa al otro lado de la frontera. Este tipo de situaciones es de gran importancia en el estudio de las guías de onda (GO) que se abordará más adelante, puesto que precisamente se desea que las ondas sean conducidas en el interior de la GO mediante reflexiones sucesivas en sus paredes. Primero se analiza la incidencia normal y posteriormente la oblicua.

Incidencia normal

La *impedancia intrínseca* η de un medio se define como la razón de los campos \mathbf{E}_x y \mathbf{H}_y para una onda TEM [8] y dado que los campos están en fase resulta

$$\eta = \frac{E_x}{H_y}$$

Para el caso concreto del espacio libre $\eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi$ [Ω]. Para un medio dieléctrico en general, la impedancia intrínseca está dada por $\eta = \eta_0 \eta_r = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, donde η_r es la *impedancia relativa* del medio.

Sea una OEM polarizada linealmente viajando en la dirección positiva de z , con \mathbf{E} en la dirección de x y \mathbf{H} en la dirección de y , que incide perpendicularmente en la frontera entre dos medios con impedancias intrínsecas η_1 (onda incidente y reflejada) y η_2 (transmitida), como se muestra en la figura (2.3).

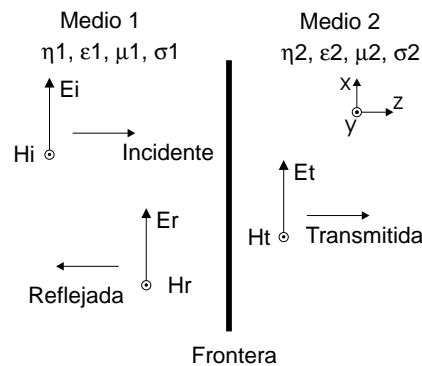


Figura 2.3: Onda TEM que incide perpendicularmente en la frontera entre dos medios [8]

Para cumplir con la continuidad de la componente tangencial del campo en la frontera, de las condiciones de frontera se sabe que

$$E_i + E_r = E_t \quad (2.28)$$

$$H_i + H_r = H_t \quad (2.29)$$

considerando la relación entre los campos eléctrico y magnético y la impedancia intrínseca

$$\frac{E_i}{H_i} = \eta_1 \quad (2.30)$$

$$\frac{E_r}{H_r} = -\eta_1 \quad (2.31)$$

$$\frac{E_t}{H_t} = \eta_2 \quad (2.32)$$

Del análisis resulta el signo negativo para la onda reflejada porque viaja en sentido contrario a la incidente y a la refractada. De las ecuaciones (2.30), (2.31) y (2.32) se despeja los términos en H y se sustituye en la ecuación (2.29)

$$\frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} \quad (2.33)$$

Luego se multiplica la ecuación (2.33) por η_1 y el resultado se suma con la ecuación (2.28)

$$2E_i = E_t \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} \right)$$

y así se encuentra el *coeficiente de transmisión* adimensional $T = E_t/E_i$ para una TEM

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.34)$$

de forma similar se encuentra el *coeficiente de reflexión* adimensional $R = E_r/E_i$ para una TEM

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2.35)$$

La situación representada en la figura (2.3) es análoga a la de una onda en una LT infinita que encuentra un cambio abrupto en la impedancia de la LT; las expresiones para calcular los coeficientes de transmisión y reflexión son idénticas si se considera que las impedancias intrínsecas de los medios se convierten en las impedancias características de las secciones de LT.

Incidencia oblicua

En general, una onda electromagnética puede incidir en la interfaz entre dos medios de forma oblicua. Por ejemplo, en una guía de onda se desea que la incidencia de las ondas sobre las paredes sea oblicua, de tal forma que la energía se refleje entre las paredes y pueda propagarse en una cierta dirección. Se tiene 2 casos [8]:

1. El campo \mathbf{E} es paralelo al plano de incidencia y se dice que la onda está *polarizada paralelamente*.
2. El campo \mathbf{E} es perpendicular al plano de incidencia (plano xz) y se dice que la onda está *polarizada perpendicularmente*.

El plano de incidencia se define mediante una normal a la superficie en la que la onda incide y un rayo que sigue la dirección de propagación de la onda incidente; es decir, es el plano del papel [13]. Se puede ver que cualquier onda TEM puede formarse mediante componentes paralelas y perpendiculares.

Caso paralelo (\mathbf{E}_{\parallel}). En la figura (2.4) el rayo normal al frente de onda incidente genera un ángulo θ_i con la normal a la interfaz. En general, puede haber una onda reflejada (cuya dirección de propagación tiene un ángulo θ_r con la normal a la interfaz) y una transmitida.

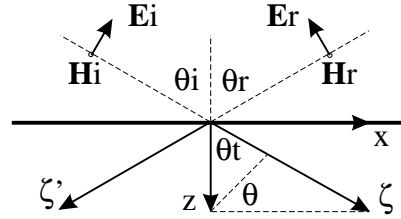


Figura 2.4: TEM que incide de forma oblicua en la interfaz entre dos regiones dieléctricas [13]

Si se asume un vector unitario \mathbf{n} en el sentido de propagación de la onda incidente, se sabe que el factor de fase se puede escribir como $\exp(-jk\zeta)$. En términos del sistema rectangular, ζ se expresa como

$$\zeta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = (\hat{i} \sin \theta_i + \hat{k} \cos \theta_i) \cdot (\hat{i}x + \hat{k}z) = x \sin \theta_i + z \cos \theta_i$$

además, con los sentidos dibujados

$$\frac{E_i}{H_i} = \frac{E_r}{H_r} = \eta_1$$

por lo que los campos incidentes se pueden escribir como

$$\mathbf{E}_i = E_0(\hat{i} \cos \theta_i - \hat{k} \sin \theta_i) \exp(-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{\eta_1} \hat{j} \exp(-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)) \quad (2.37)$$

donde $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ es el número de onda y $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ es la impedancia intrínseca del medio 1.

Los campos reflejado y transmitido se pueden escribir como

$$\mathbf{E}_r = E_0 R_{\parallel}(\hat{i} \cos \theta_r + \hat{k} \sin \theta_r) \exp(-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r))$$

$$\mathbf{H}_r = -\frac{E_0 R_{\parallel}}{\eta_1} \hat{j} \exp(-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r))$$

$$\mathbf{E}_t = E_0 T_{\parallel}(\hat{i} \cos \theta_t - \hat{k} \sin \theta_t) \exp(-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t))$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{E_0 T_{\parallel}}{\eta_2} \hat{j} \exp(-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t))$$

donde R_{\parallel} y T_{\parallel} son los coeficientes adimensionales de reflexión y transmisión de la onda polarizada paralela, $k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$ es el número de onda y $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$ es la impedancia de la región 2. Ahora, tomando en cuenta la continuidad de las componentes tangenciales E_x y H_y en la interfaz $z = 0$

$$\cos\theta_i \exp(-jk_1x \sin\theta_i) + R_{\parallel} \cos\theta_r \exp(-jk_1x \sin\theta_r) = T_{\parallel} \cos\theta_t \exp(-jk_2x \sin\theta_t) \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{\eta_1} \exp(-jk_1x \sin\theta_i) - \frac{R_{\parallel}}{\eta_1} \exp(-jk_1x \sin\theta_r) = \frac{T_{\parallel}}{\eta_2} \exp(-jk_2x \sin\theta_t) \quad (2.39)$$

Si E_x y H_y son continuas en la interfaz $z = 0$ para toda x , entonces esta variación en x debe ser la misma en ambos lados de las 2 ecuaciones, condición que resulta en

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t$$

Esta condición asegura que los términos de fase de las ecuaciones (2.38) y (2.39) varíen al mismo ritmo en ambos lados de la interfaz y a menudo es llamada *condición de acoplamiento de fase* [12]; por otro lado, llevan a las leyes de Snell de reflexión y refracción

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.40)$$

$$k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t \quad (2.41)$$

Las ecuaciones (2.38) a (2.41) se pueden resolver para los coeficientes de reflexión y transmisión, ambos adimensionales

$$R_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \quad (2.42)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \quad (2.43)$$

Nótese que al tener incidencia normal ($\theta_i = \theta_r = \theta_t$), los resultados de las ecuaciones (2.42) y (2.43) se reducen a los de incidencia normal, ecuaciones (2.34) y (2.35).

Es de especial interés que para este tipo de polarización es posible encontrar un ángulo de incidencia tal que $R_{\parallel} = 0$ y la onda sea totalmente transmitida en el medio 2, llamado *ángulo de Brewster* θ_{iB} [8]. Si se hace el numerador de (2.42) igual a cero y $\mu_1 \approx \mu_2$, se tiene

$$\theta_{iB} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1/\varepsilon_2}}$$

El ángulo de Brewster es llamado también *ángulo polarizante* porque una onda con componentes perpendicular y paralela que incida con ese ángulo produce una onda reflejada sólo con componente perpendicular. Así, una onda que esté polarizada circularmente y que incida con el ángulo de Brewster se vuelve linealmente polarizada en la reflexión.

Caso perpendicular (\mathbf{E}_\perp). Con un procedimiento similar al seguido en la polarización paralela, se puede mostrar que los coeficientes adimensionales de reflexión y transmisión para el caso de polarización perpendicular quedan [12]

$$R_\perp = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (2.44)$$

$$T_\perp = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (2.45)$$

Por otro lado, la ley de Snell de transmisión dada por la ecuación (2.41) se puede reescribir como

$$\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin \theta_i$$

Al aumentar θ_i de 0 a 90° (ya sea para polarización paralela o perpendicular), θ_t aumenta también y más rápido. Existe un ángulo de incidencia para el cual $\theta_t = 90^\circ$, llamado *ángulo crítico* θ_{ic} y dado por

$$\theta_{ic} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Cuando el medio 2 es un dieléctrico más denso que el medio 1 ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), la cantidad dentro de la raíz será positiva. Sin embargo, si la onda incide desde un medio más denso en otro menos denso ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) y si $\sin^2 \theta_i \geq \varepsilon_1/\varepsilon_2$, entonces R_\perp se vuelve complejo. En estas condiciones se produce la *reflexión interna total*, cuyo principio dice que cuando una onda incide desde un medio más denso en otro menos denso, con un ángulo igual o mayor que el ángulo crítico, entonces la onda será reflejada total e internamente y será acompañada por una onda superficial en el medio menos denso, la cual decae exponencialmente al alejarse de la interfaz [8].

2.2.5. Resumen de Ondas Electromagnéticas

En esta sección se presenta un resumen de ondas electromagnéticas, abarcando la profundidad de penetración, la tabla (2.4) para las leyes de Snell, la tabla (2.5) para los coeficientes cuando se tiene incidencia normal, la tabla (2.6) para incidencia oblicua y la tabla (2.7) para los ángulos crítico y de Brewster.

Profundidad de penetración (efecto piel): es la profundidad en un conductor para la cual la amplitud de la OEM se reduce a 37% de su valor original, en metros

$$\frac{1}{\sqrt{f\pi\mu\sigma}}$$

donde f es la frecuencia en herz, μ es la permeabilidad del medio en henrys por metro, σ es la conductividad en siemens por metro.

Ley	Fórmula
Reflexión	$\theta_i = \theta_r$
Transmisión	$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$

Tabla 2.4: Leyes de Snell para la reflexión y la transmisión

Descripción	Fórmula
Coefficiente de reflexión	$R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ [adim]
Coefficiente de transmisión	$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$ [adim]

Tabla 2.5: Coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia normal

Descripción	Fórmula
Coefficiente de reflexión paralelo	$R_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$ [adim]
Coefficiente de transmisión paralelo	$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$ [adim]
Coefficiente de reflexión perpendicular	$R_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ [adim]
Coefficiente de transmisión perpendicular	$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$ [adim]

Tabla 2.6: Coeficientes de reflexión y transmisión para incidencia oblicua

Ángulo	Fórmula
Brewster	$\theta_{iB} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_1/\epsilon_2}}$
Crítico	$\theta_{ic} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

Tabla 2.7: Ángulo de Brewster (sólo polarización paralela) y ángulo crítico (polarización paralela y perpendicular)

2.3. Líneas de transmisión

En ocasiones interesa que las ondas electromagnéticas no se dispersen en el espacio sino que tengan una dirección y una trayectoria específicas para optimizar la transmisión. Las *líneas de transmisión (LT)* son dispositivos e interconexiones que conducen la energía electromagnética de un punto a otro [8].

Las LT se pueden clasificar siguiendo varios criterios. Por ejemplo, al tomar en cuenta su *forma*, se encuentra las LT bifilar, coaxial, de placas paralelas y de conductor hueco; si se considera el *modo de propagación*, se tiene los tipos de modo TEM y modos de orden superior. Las guías de onda pertenecen a este último tipo [2].

2.3.1. Teoría de circuitos y de campo

Para el modelado de las LT puede utilizarse la teoría de circuitos, tomando en cuenta que sus parámetros son *distribuidos* y no *concentrados*. Los parámetros concentrados son aquellos que representan a elementos confinados en un punto del circuito (la resistencia está concentrada en los resistores, la capacitancia en los capacitores) y se utilizan para modelar circuitos de baja frecuencia. En alta frecuencia, se asume que los parámetros del circuito están distribuidos homogéneamente a lo largo de toda la LT.

Esta distinción tiene su fundamento en el *tamaño eléctrico* del circuito considerado [12]. El análisis con teoría de circuitos asume que las dimensiones físicas de la red son mucho menores que la longitud de onda eléctrica, en tanto el tamaño de las LT puede ser una fracción considerable de la longitud de onda o aun muchas longitudes de onda. Por lo tanto, una LT es una red de parámetros distribuidos, donde los voltajes y las corrientes pueden variar en magnitud y fase a lo largo de su extensión.

Entonces, una LT puede modelarse mediante los siguientes elementos [8]: resistencia serie R en ohms por metro, inductancia serie L en henrys por metro, conductancia paralela G en siemens por metro, y la capacitancia paralela C en farads por metro, como se muestra en la figura (2.5).

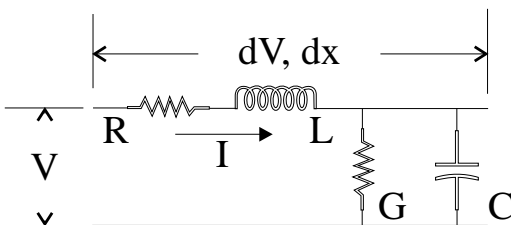


Figura 2.5: Modelo de una LT bifilar utilizando la teoría de circuitos

En el caso más general, para variación sinusoidal de V e I , se tiene una *impedancia serie*

en ohms por metro y una *admitancia paralela* en siemens por metro

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L = R + jX \\ Y &= G + j\omega C = G + jB \end{aligned}$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la *frecuencia angular* en radianes por metro, $f = \frac{1}{T}$ es la *frecuencia* en herz, T es el *periodo* en segundos, $X = \omega L$ es la *reactancia serie* en ohms por metro, y $B = \omega C$ es la *susceptancia paralela* en siemens por metro. De tal forma, la razón del cambio en el voltaje dV con respecto a la distancia dx es, en notación fasorial

$$\frac{dV}{dx} = -IZ \quad (2.46)$$

similarmente para la corriente

$$\frac{dI}{dx} = -VY \quad (2.47)$$

Tomando la derivada respecto a x de la ecuación (2.46) se tiene $\frac{d^2V}{dx^2} = -Z\frac{dI}{dx}$ si la LT es uniforme (Z e Y constantes). Sustituyendo la ecuación (2.47) se obtiene la *ecuación de onda en V de la línea de transmisión*

$$\frac{d^2V}{dx^2} - ZYV = 0 \quad (2.48)$$

si se define la constante de propagación como

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + jX)(G + jB)} = \alpha + j\beta$$

y retomando la dependencia con el tiempo, una solución general para el voltaje en volts y la corriente en amperes de la LT es

$$V = V_1 \exp(\alpha x) \exp(j(\omega t + \beta x)) + V_2 \exp(-\alpha x) \exp(j(\omega t - \beta x)) \quad (2.49)$$

$$I = \frac{V_1}{\sqrt{Z/Y}} \exp(\alpha x) \exp(j(\omega t + \beta x)) - \frac{V_2}{\sqrt{Z/Y}} \exp(-\alpha x) \exp(j(\omega t - \beta x)) \quad (2.50)$$

los primeros términos de las ecuaciones (2.49) y (2.50) representan la propagación en la dirección negativa de x , y los segundos términos, en la positiva. Para la propagación de la energía en una dirección, se define la *impedancia característica* en ohms de la LT como

$$Z_{LT} = Z_0 = \left| \frac{V}{I} \right| = \sqrt{\frac{R + jX}{G + jB}} \quad (2.51)$$

Para una LT sin pérdidas $R, G = 0$. Las ecuaciones (2.46) y (2.47) se convierten en

$$\frac{dV}{dx} = L \frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dI}{dx} = C \frac{dV}{dt}$$

respectivamente y la ecuación (2.48) se reduce a

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{1}{LC} \frac{d^2V}{dx^2}$$

Además una LT sin pérdidas tiene $Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$ $[\Omega]$.

La *velocidad de la energía* en metros por segundo es

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\Im\sqrt{ZY}}$$

$$\sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

Si la LT no tiene pérdidas o si $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, entonces $\sqrt{ZY} = j\omega\sqrt{LC}$ y $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Para una onda individual, la velocidad de fase es la misma que la velocidad de propagación.

La *potencia instantánea* en watts conducida por una LT es $P = VI$. Si V e I varían sinusoidalmente y están fuera de fase, la *potencia promedio* está dada por $P_{prom} = \frac{1}{2}V_0I_0 \cos \theta$, con V_0 el voltaje pico en volts, I_0 la corriente pico en amperes y θ el ángulo de fase. La densidad de potencia en watts por metro cuadrado está dada por el *vector instantáneo de Poynting*

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

Desde el punto de vista de la *teoría de campos*, para encontrar la ecuación de la onda se toma como base las ecuaciones de Maxwell para llegar a la *ecuación de onda* (2.20) ya desarrollada en el apartado anterior

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

que es la ecuación de onda en E_x y una de las ecuaciones de D'Alembert.

2.3.2. Coeficientes de reflexión y LT con carga

Se analiza ahora el caso donde una LT con impedancia característica Z_0 dada por la ecuación (2.51), termina en una impedancia de carga Z_L . Se asume que la carga está en $x = 0$ y que x crece a la izquierda.

El voltaje total y la corriente total en la LT son las resultantes de las dos ondas viajeras que se mueven en direcciones opuestas. En un punto x desde la carga, sea V_0 el voltaje entre los conductores e I_0 la corriente que atraviesa a un conductor, ambos debidos a la onda incidente que viaja a la derecha; sea también V_1 el voltaje e I_1 la corriente debidos a la onda reflejada que viaja a la izquierda; entonces el voltaje en volts es

$$V = V_0 + V_1 \tag{2.52}$$

donde $V_0 = |V_0| \exp(\gamma x)$, $V_1 = |V_1| \exp(-\gamma x + j\xi)$, $\gamma = \alpha + j\beta$, ξ el corrimiento de fase en la carga. Entonces, en el punto $x = 0$ (en la carga), $V_0 = |V_0|$ y $V_1 = |V_1| \exp(j\xi) = |V_1| \angle \xi$ por lo que *en la carga, la razón del voltaje de la onda reflejada al de la incidente es*

$$\frac{V_1}{V_0} = \left| \frac{V_1}{V_0} \right| \angle \xi = R_v \tag{2.53}$$

y se llama *coeficiente de reflexión para voltaje* (adimensional) y mediante el cual se puede escribir el voltaje en volts como $V = |V_0|(\exp(\gamma x) + R_v \exp(-\gamma x))$. De manera similar para la corriente en amperes

$$I = I_0 + I_1 \quad (2.54)$$

con $I_0 = |I_0| \exp(\gamma x - j\delta)$, $I_1 = |I_1| \exp(-\gamma x + j(\xi - \delta))$, δ es la diferencia de fase entre el voltaje y la corriente. *En la carga, la razón de las corrientes reflejada e incidente es*

$$\frac{I_1}{I_0} = \left| \frac{I_1}{I_0} \right| \angle \xi = R_i \quad (2.55)$$

llamado *coeficiente de reflexión para corriente* (adimensional) y así la corriente en amperes se expresa como $I = |I_0| \exp(-j\delta)(\exp(\gamma x) + R_i \exp(-\gamma x))$.

En este punto se tiene expresados los coeficientes de reflexión en función de las diferencias de fase y de la magnitud de las ondas, lo cual resulta poco práctico. Para expresarlos en términos de las impedancias, se sabe a partir de la ecuación (2.51) que

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \left| \frac{V_0}{I_0} \right| \angle \delta = -\frac{V_1}{I_1} = -\left| \frac{V_1}{I_1} \right| \angle \delta \quad (2.56)$$

Recuérdese que la ecuación (2.51) define la impedancia característica considerando que se tiene *una dirección de propagación* y por tanto la ecuación (2.56) proporciona la impedancia para esa dirección de propagación. De las ecuaciones (2.54) y (2.56) y tomando en cuenta que en la carga $Z_L = \frac{V}{I}$, se sigue que

$$\frac{V}{Z_L} = \frac{V_0}{Z_0} - \frac{V_1}{Z_0}$$

sustituyendo la ecuación (2.52) y resolviendo para $\frac{V_1}{V_0}$, se tiene la relación buscada del coeficiente de reflexión para voltaje

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = R_v \quad (2.57)$$

Los coeficientes de reflexión de corriente y voltaje son parámetros sumamente útiles porque proporcionan información acerca del *acoplamiento* entre la LT y la carga. Para impedancias de carga Z_L reales que estén en el intervalo de $[0, \infty)$, R_v va de $[-1, 1]$. Por ejemplo, cuando $R_v = 0$ no hay onda de voltaje reflejada y la carga está bien acoplada con la LT ($Z_L = Z_0$). De forma similar al desarrollo realizado para la ecuación (2.57) se obtiene que

$$R_i = -\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -R_v \quad (2.58)$$

No obstante, téngase en cuenta que para impedancias de carga complejas los coeficientes de reflexión también serán complejos, $R_v = |R_v| \exp(j\theta)$.

La razón $\frac{V}{I}$ en un punto x sobre la LT es igual a la impedancia Z_x en ese punto viendo hacia la carga. Tomando esta relación e introduciendo la ecuación (2.58) y la ecuación posterior a (2.55) para I se obtiene

$$Z_x = \frac{V}{I} = \left| \frac{V_0}{I_0} \right| \angle \delta \left(\frac{\exp(\gamma x) + R_v \exp(-\gamma x)}{\exp(\gamma x) - R_v \exp(-\gamma x)} \right)$$

incorporando además las ecuaciones (2.56) y (2.57), se puede expresar la relación general para la impedancia Z_x a una distancia x de la carga en ohms como

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma x)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma x)} \quad (2.59)$$

Si la LT está en circuito abierto, es decir si $Z_L = \infty$, la ecuación (2.59) queda

$$Z_x = Z_{ca} = \frac{Z_0}{\tanh(\gamma x)} = Z_0 \coth(\gamma x)$$

por otro lado, si la LT está en corto circuito ($Z_L = 0$), la ecuación (2.59) entrega

$$Z_x = Z_{cc} = Z_0 \tanh(\gamma x)$$

Si la LT no tiene pérdidas ($\gamma = j\beta$), entonces las relaciones anteriores se reducen a

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta x)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta x)} \quad (2.60)$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_0}{j \tan(\beta x)} = -jZ_0 \cot(\beta x)$$

$$Z_{cc} = jZ_0 \tan(\beta x)$$

Nótese que la impedancia de una LT sin pérdidas en corto o abierta, es una *reactancia pura*.

Por otro lado, en una LT sin pérdidas, se define la *relación de onda estacionaria (SWR)* como [8]

$$SWR = \frac{V_{m\acute{a}x}}{V_{m\acute{i}n}} = \frac{I_{m\acute{a}x}}{I_{m\acute{i}n}}$$

que es una cantidad adimensional. Desarrollando la primera igualdad

$$SWR = \frac{|V_0| + |V_1|}{|V_0| - |V_1|} = \frac{1 + \left| \frac{V_1}{V_0} \right|}{1 - \left| \frac{V_1}{V_0} \right|}$$

y tomando la magnitud de la ecuación (2.53) y sustituyendo se tiene

$$SWR = \frac{1 + |R_v|}{1 - |R_v|} \quad (2.61)$$

La SWR también proporciona información acerca del acoplamiento entre la LT y la carga, y sus valores están en el intervalo de $[1, \infty)$.

2.3.3. Carta de Smith

Tomando como base la definición de SWR, en 1939 el ingeniero Philip H. Smith desarrolló la *carta de Smith* ³, que es una herramienta gráfica muy valiosa porque permite resolver problemas de LT [2] y se construye mediante la deducción de ciertas expresiones matemáticas a partir de la impedancia de carga $Z_L = R_L + jX_L$ ⁴, de forma similar a la descrita a continuación. Se normaliza Z_L con la impedancia característica Z_0 de la LT

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L + jX_L}{Z_0} = r_L + jx_L$$

por otro lado, de la ecuación (2.57) se puede despejar Z_L quedando

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + |R_v| \exp(j\theta)}{1 - |R_v| \exp(j\theta)}$$

donde se considera que la carga y el coeficiente de reflexión pueden ser complejos. Ahora, normalizando respecto a Z_0 y dado que R_v es complejo, se igualan las expresiones anteriores

$$r_L + jx_L = \frac{1 + \Re\{R_v\} + j\Im\{R_v\}}{1 - \Re\{R_v\} - j\Im\{R_v\}}$$

donde $R_v = \Re\{R_v\} + j\Im\{R_v\}$. Multiplicando y dividiendo el lado derecho de la ecuación anterior por el conjugado del denominador y simplificando

$$r_L + jx_L = \frac{1 - (\Re\{R_v\})^2 - (\Im\{R_v\})^2}{(1 - \Re\{R_v\})^2 + (\Im\{R_v\})^2} + j \frac{2\Im\{R_v\}}{(1 - \Re\{R_v\})^2 + (\Im\{R_v\})^2}$$

Dado que las partes reales en ambos lados de la ecuación deben ser iguales, completando cuadrados y reagrupando

$$\left(\Re\{R_v\} - \frac{r_L}{1 + r_L} \right)^2 + (\Im\{R_v\})^2 = \left(\frac{1}{1 + r_L} \right)^2 \quad (2.62)$$

de la misma manera, para las partes imaginarias se llega a

$$(\Re\{R_v\} - 1)^2 + \left(\Im\{R_v\} - \frac{1}{x_L} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_L} \right)^2 \quad (2.63)$$

El par de ecuaciones anteriores representa dos familias de circunferencias, ortogonales entre sí [12], en el plano $\Re\{R_v\}$, $\Im\{R_v\}$. Las circunferencias de resistencia están definidas por la ecuación (2.62) y las de reactancia, por la ecuación (2.63). Véase la figura (2.6).

³En español castizo, el nombre adecuado es *diagrama de Smith*. No obstante, por simplicidad se ha mantenido la denominación más usual.

⁴No confundir resistencia R_L con coeficientes de reflexión R_v y R_i .

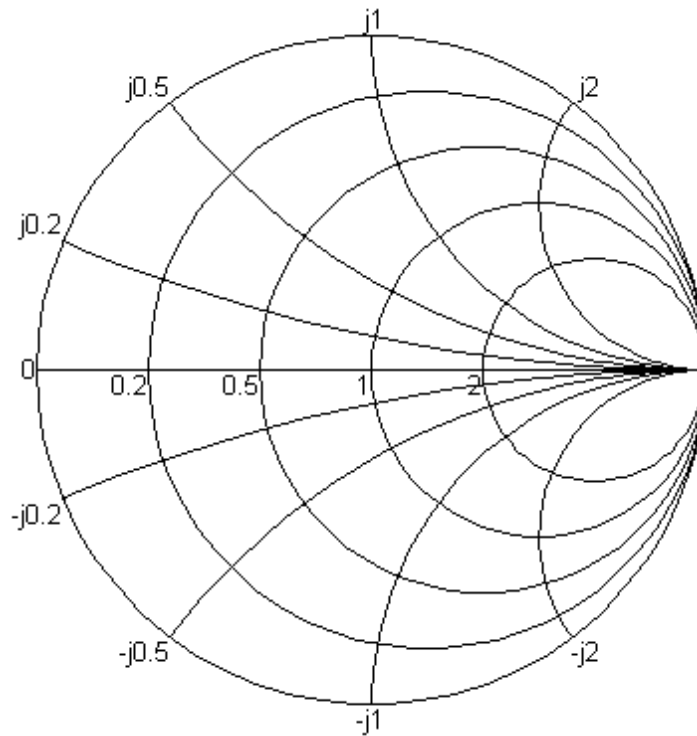


Figura 2.6: Carta de Smith

Algunos puntos importantes en la carta son:

- Las circunferencias de resistencia tienen sus centros en el eje horizontal $\Im\{R_v\} = 0$ y pasan por $R_v = 1$, a la derecha de la carta. Los centros de todas las circunferencias de reactancia están sobre el eje vertical $\Re\{R_v\} = 1$ (fuera de la carta, a la derecha) y también pasan por $R_v = 1$.
- El semicírculo superior de la carta (sin incluir la semicircunferencia ni el eje horizontal) corresponde a cargas inductivo-resistivas. Similarmente, el semicírculo inferior (excluyendo la semicircunferencia y el eje) representa cargas capacitivo-resistivas.
- El eje horizontal (marcado con números reales) alberga valores de carga resistivos puros, mientras en la circunferencia más externa (marcada con números imaginarios) se tiene reactancias puras: la mitad superior corresponde a cargas inductivas y la inferior a capacitivas.
- Para abundar en el párrafo anterior, en el centro de la carta (marcado con el número 1) se tiene la condición de acoplamiento de la línea. En el extremo izquierdo (número 0) se encuentra la condición de línea en corto circuito y el extremo derecho (punto por donde pasan todas las circunferencias) corresponde a la línea abierta.
- *Ángulo de reflexión en grados* [14]. Una versión completa de la carta tiene una escala en grados a su alrededor para facilitar la localización de los puntos; los grados eléctricos son la mitad de los grados geométricos (360° en la carta representan 180° en la LT).

Es interesante observar que la impedancia de la LT se repite cada 180° , lo que equivale a 360° en la carta.

- *Longitudes de onda hacia la carga y hacia el generador.* El valor cero de longitudes de onda recorridas coincide con el extremo de los valores mínimos en el eje de los reales (extremo izquierdo), comienza a crecer en el sentido de las manecillas si vamos hacia la carga y crece en el sentido contrario si nos desplazamos hacia el generador. Al completar una vuelta a la carta se lee 0.5λ (medio ciclo) y por tanto se necesita recorrer dos vueltas a la carta para tener un ciclo completo.

2.3.4. Resumen de líneas de transmisión

Se presenta la tabla (2.8) con las impedancias para las LT con carga y la tabla (2.9) para los coeficientes de reflexión, transmisión y *SWR*.

Carga	Caso general ($\alpha \neq 0$)	Caso sin pérdidas ($\alpha = 0$)
Z_L	$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma x)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma x)}$	$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta x)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta x)}$
$Z_L = \infty$	$Z_x = Z_0 \coth(\gamma x)$	$Z_{ca} = -jZ_0 \cot(\beta x)$
$Z_L = 0$	$Z_x = Z_0 \tanh(\gamma x)$	$Z_{cc} = jZ_0 \tan(\beta x)$

Tabla 2.8: Impedancia de entrada de una LT con terminación

donde $\gamma = \alpha + j\beta$ es la constante de propagación, x es la posición en la LT con respecto a la carga.

Descripción	Fórmula
Coeficiente de reflexión (voltaje)	$R_v = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$
Coeficiente de reflexión (corriente)	$R_i = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0} = -R_v$
Coeficiente de transmisión (voltaje)	$T_v = \frac{2Z_L}{Z_0 + Z_L} = 1 + R_v$
Coeficiente de transmisión (corriente)	$T_i = \frac{2Z_0}{Z_0 + Z_L} = 1 + R_i$
Razón de onda estacionaria	$SWR = \frac{1 + R_v }{1 - R_v }$
Magnitud del coeficiente de reflexión	$ R_v = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$

Tabla 2.9: Relaciones para los coeficientes de reflexión y transmisión

Capítulo 3

Guías de Onda

De la teoría de ondas electromagnéticas (OEM) se sabe que las ondas que usualmente se propagan a través de las líneas de transmisión (LT) son las transversales electromagnéticas (TEM), cuyos campos eléctrico y magnético son transversales a la dirección de propagación. En este capítulo se retoma la discusión para sistemas de transmisión de ondas de orden superior, es decir sistemas en los cuales las OEM tienen componentes de campo \mathbf{E} ó \mathbf{H} en la dirección de propagación. Un sistema de transmisión que puede conducir OEM con modos de orden superior se llama comúnmente *Guía de Onda (GO)* o simplemente guía.

Las GO más simples son conductores huecos que pueden tomar diferentes formas, siendo las más usuales las de sección transversal rectangular y circular. En este capítulo se analizan algunas de las características de las GO como la frecuencia de corte y la atenuación para la GO rectangular hueca. Se comienza con la idealización de planos paralelos infinitos, para la cual se obtiene la longitud de onda de corte y la velocidad de onda en la guía.

3.1. Guía de onda de planos paralelos infinitos

Sea la GO de planos paralelos infinitos mostrada en la figura (3.1), capaz de guiar energía en la dirección z para una onda en modo TEM con \mathbf{E} en la dirección de x [8], en cuyo caso se asemeja a una LT bifilar. No obstante, a frecuencias suficientemente altas puede conducir también modos de orden superior como el *transversal eléctrico (TE)* con \mathbf{E} en la dirección de x por ejemplo, llamado así porque E_x es transversal a la dirección de transmisión. En este caso, \mathbf{E} es transversal en todos lados y \mathbf{H} tiene componentes tanto transversales como longitudinales.

Si las placas son conductoras perfectas, las condiciones de frontera requieren que E_y se desvanezca en el interior de las placas, aunque no necesariamente en el espacio entre éstas. Se considera primero la situación en que dos ondas TEM de la misma frecuencia, para las cuales la polarización es lineal con \mathbf{E} normal a la página, viajan en el espacio libre y se cruzan en un cierto ángulo θ . En la figura (3.2) siguiente se muestra dos frentes de onda.

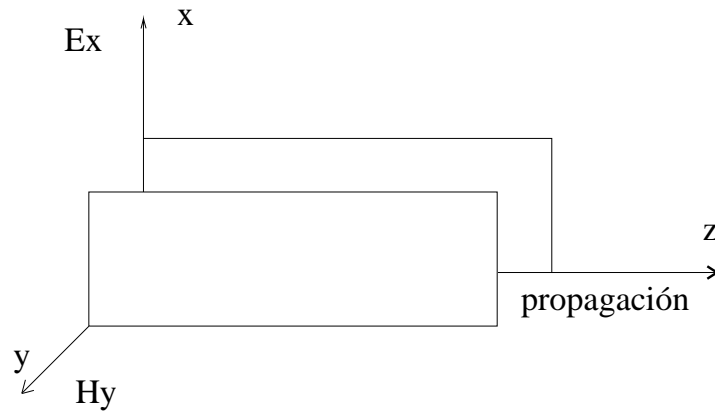


Figura 3.1: Planos paralelos infinitos

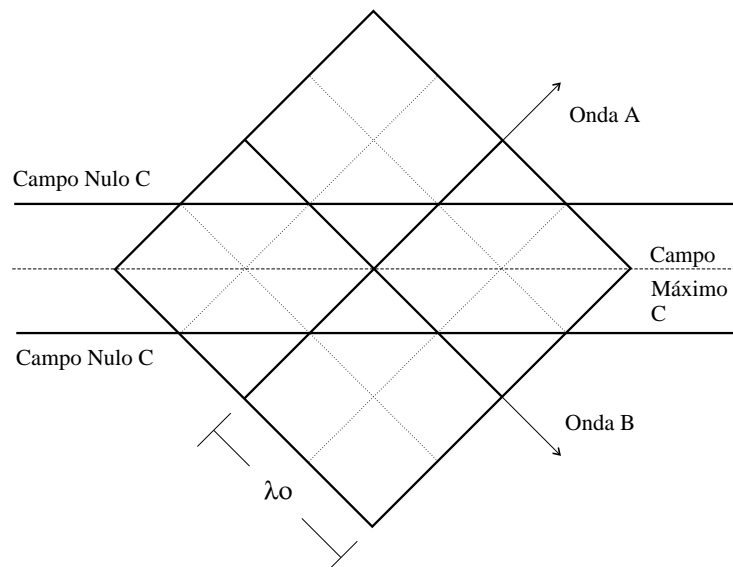


Figura 3.2: Frentes de onda de una TEM

Las líneas continuas oblicuas muestran las crestas (máximos) de \mathbf{E} , mientras que las punteadas son los valles (mínimos). Donde la cresta de una onda coincide con el valle de la otra hay cancelación del campo \mathbf{E} ; donde coincide cresta con cresta o valle con valle hay reforzamiento de \mathbf{E} . Por tanto, $\mathbf{E} = 0$ a lo largo de las líneas horizontales externas y las condiciones de frontera se deben satisfacer en las placas planas conductoras perfectas insertadas a lo largo de dichas líneas de forma normal a la página. Si las ondas son inyectadas en el espacio entre las placas por la izquierda, viajarán hacia la derecha mediante reflexiones en los planos conductores.

Sea las dos ondas A y B que se denominan componentes en la figura (3.2) en modo TEM; entonces la onda C resultante pertenece al modo TE de orden superior (puesto que el campo eléctrico resultante \mathbf{E} es normal a la dirección de propagación z y el campo magnético \mathbf{H} no lo es) y sólo será transmitida si la longitud de onda es lo suficientemente corta. La longitud de onda a partir de la cual ya no es posible la transmisión se llama *longitud de onda de corte* λ_c ; este parámetro es de suma importancia en el diseño de una GO porque para longitudes de onda mayores que λ_c la información ya no viaja a través de la guía y simplemente se atenúa. Con referencia a la figura (3.3), las ondas TEM viajan en las direcciones z' y z'' . Éstas forman un ángulo θ con las placas conductoras (y con el eje z). El campo eléctrico está en la dirección x (normal a la página) y la distancia entre las placas es b .

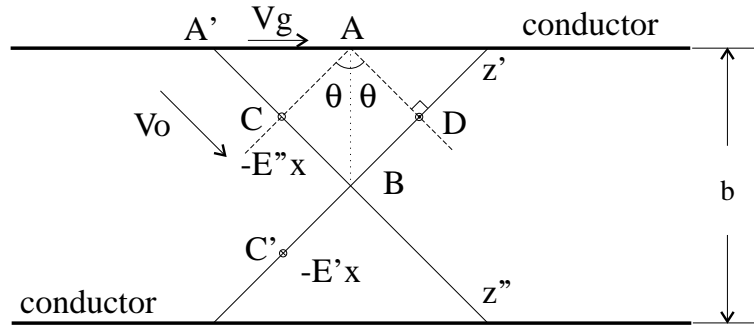


Figura 3.3: Ángulo de reflexión de las ondas TEM

Los campos E'_x y E''_x se cancelan en el punto A (en la lámina conductora) y se refuerzan en el punto B dado que $CB = BD = C'B = \lambda_0/4$, donde λ_0 es la longitud en metros de las ondas TEM componentes (ver figura (3.2)). En general

$$CB = \frac{n\lambda_0}{4}, \text{ donde } n = 1, 2, \dots$$

Entonces $AB \sin \theta = \frac{b}{2} \sin \theta = n\lambda_0/4$ y así

$$\lambda_0 = \frac{2b}{n} \sin \theta \quad (3.1)$$

De acuerdo con la ecuación (3.1), para una distancia b entre placas, la mayor longitud de onda que se puede transmitir con modos de orden superior ocurre con $\theta \approx 90^\circ$; en otras

palabras, la longitud de onda de corte está dada por

$$\lambda_c = 2b/n \quad (3.2)$$

Al sustituir la ecuación (3.2) en la ecuación (3.1), se tiene

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda_0}{\lambda_c}$$

La tabla (3.1) muestra tres valores de θ . Para el primer caso, las ondas TEM A y B son reflejadas entre las placas sin avanzar en la dirección de propagación, por lo que se puede decir que hay una onda estacionaria y no se propaga energía. En el segundo caso, la onda avanza mediante múltiples reflexiones. Para el tercer caso, la transmisión se aproxima a las condiciones de un medio sin confinar. Recuérdese que λ_0 es la longitud de onda de las ondas TEM componentes A y B (ver figura (3.2)).

Valor de λ_0	Valor de θ
$\lambda_0 = \lambda_c$	90°
$\lambda_0 < \lambda_c$	$\theta < 90^\circ$
$\lambda_0 \ll \lambda_c$	$\theta \rightarrow 0$

Tabla 3.1: Valores de λ_0 vs θ

Por otro lado, se deduce de la figura (3.3) que

$$\frac{v_0}{v_g} = \frac{A'C}{A'A} = \cos \theta$$

y como la velocidad de fase en un medio sin confinar es $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, se tiene la *velocidad de fase de la onda TE en la guía* en metros por segundo

$$v_g = \frac{v_0}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \cos \theta}$$

Se puede ver que la velocidad de fase v_g de la onda TE crece sin límite cuando la longitud de onda se incrementa hacia λ_c , mientras que v_g se parece a v_0 cuando la longitud de onda se hace muy pequeña. Así, la velocidad de fase de la onda de modo de orden superior en la guía siempre es igual o mayor que la velocidad en el medio sin confinar. Sin embargo, la energía se propaga con la velocidad de las ondas TEM en zigzag, es decir

$$v_{en} = u = v_0 \cos \theta$$

por lo que la velocidad u de la energía es siempre igual o menor que la velocidad en un medio sin confinar.

La GO de Planos Paralelos Infinitos es una idealización y no se aplica en la práctica; las GO reales usualmente son de un sólo conductor hueco como la rectangular, para la cual algunos parámetros estudiados hasta este punto siguen siendo válidos.

3.2. Guía de Onda Rectangular

Aunque el análisis de la GO ideal de planos paralelos infinitos proporciona información sobre la longitud de onda de corte, velocidad de fase y otras características, no indica la configuración del campo y no se pueden representar situaciones con modos de orden superior más complejos. Para obtener información completa con respecto a las GO huecas, es necesario resolver la ecuación de onda para las condiciones de frontera.

La GO rectangular puede transportar un número infinito de modos, cada uno de los cuales está relacionado con las dimensiones de la GO y con la longitud de onda de la señal. En sistemas prácticos, el primer modo (también llamado dominante) es el que se utiliza comúnmente para la transmisión de OEM y se le conoce como *transversal eléctrico uno cero* TE₁₀, para el cual el campo eléctrico no tiene componente longitudinal [4].

En la teoría de las LT, usualmente se asume que los campos varían en la dirección de propagación z como

$$\exp(-\gamma z)$$

donde $\gamma = \alpha + j\beta$ es la constante de propagación de la OEM, α es la constante de atenuación en nepers por metro y β es la constante de fase en radianes por metro, como ya se mencionó en el capítulo anterior. Además, se describe la variación en el tiempo mediante

$$\exp(j\omega t)$$

por lo tanto, se necesita encontrar la variación del campo eléctrico y del campo magnético en el plano transversal xy ¹. Si alguno de los campos E_z o H_z existe, es posible expresar los campos transversales en términos de los campos longitudinales y la solución detallada para E_z o H_z ofrece entonces bastante interés, puesto que al contar con la descripción analítica de todas las componentes se tiene la información necesaria para delinear los parámetros de la GO. Cada uno de los campos debe satisfacer la ecuación de onda para las condiciones de frontera.

Como se estudió en el segundo capítulo, las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial para una región dieléctrica sin cargas son [4]

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

donde ² $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Entonces se toma el rotacional de la ecuación (3.3) y utilizando notación fasorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.7)$$

¹Cabe mencionar que para describir a los campos se utilizará 3 dimensiones espaciales y una temporal.

²Esta exposición se limita a considerar el espacio libre, por lo cual se asume $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

al sustituir la ecuación (3.4)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.8)$$

usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.9)$$

y sustituyendo la ecuación (3.5) se llega a

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) \mathbf{E} = 0 \quad (3.10)$$

ecuación conocida como *ecuación vectorial de Helmholtz* [2]. Esta ecuación es válida para cada componente de \mathbf{E} y \mathbf{H} y en particular para las componentes longitudinales (en el eje z , véase figura (3.4)) se tiene

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) E_z = 0 \quad (3.11)$$

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) H_z = 0 \quad (3.12)$$

luego se resuelve la ecuación de onda (3.11) ó (3.12) mediante la separación de variables, escribiendo E_z ó H_z como el producto de funciones puras de x , y y z . Si los campos varían en la dirección de z de acuerdo con $\exp(-\gamma z)$, entonces se puede escribir las ecuaciones de onda como

$$(\nabla_t^2 + k_c^2) E_z = 0 \quad (3.13)$$

$$(\nabla_t^2 + k_c^2) H_z = 0 \quad (3.14)$$

donde

$$k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon \quad (3.15)$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.16)$$

3.2.1. Modos transversales eléctricos TE_{mn}

La nomenclatura TE_{mn} indica que la onda no tiene componente longitudinal de campo eléctrico, es decir el campo eléctrico es enteramente transversal; además, el subíndice m señala la cantidad de medias variaciones del campo en el eje x , mientras que el subíndice n denota la cantidad de medias variaciones del campo en el eje y . La derivación de la familia modal TE_{mn} ($E_z = 0$, $H_z \neq 0$) para la GO rectangular ilustrada en la figura (3.4) comienza expresando los campos transversales en términos de H_z [4]. Al desarrollar la ecuación de Maxwell (3.3) se tiene, en notación fasorial (recuérdese que $E_z = 0$)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -j\omega\mu \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

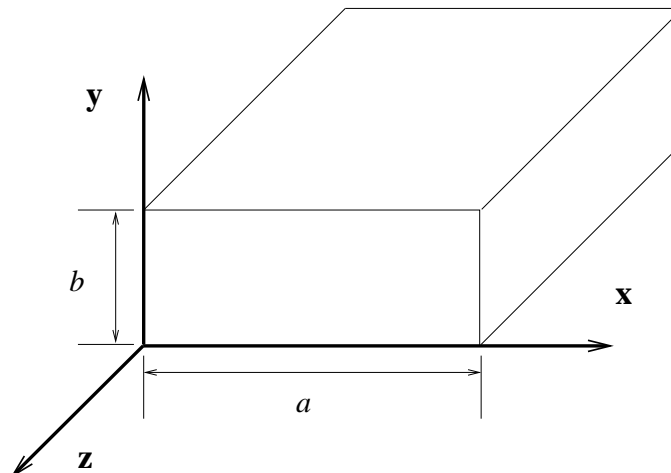


Figura 3.4: Guía de Onda rectangular

y por igualdad de componentes, se obtiene tres ecuaciones escalares

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (3.18)$$

$$\gamma E_x = j\omega\mu H_y \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (3.20)$$

similarmente para la ecuación (3.4)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

por igualdad de componentes

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (3.22)$$

$$-\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} + \gamma H_x\right) = j\omega\varepsilon E_y \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (3.24)$$

las ecuaciones de divergencia (3.5) y (3.6) quedan

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - \gamma H_z = 0 \quad (3.26)$$

si se despeja E_x de la ecuación (3.19) y se sustituye en la ecuación (3.22) da

$$H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.27)$$

(recuérdese de la ecuación (3.15) que $k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$). De forma similar, al despejar E_y de la ecuación (3.18) y sustituir en la ecuación (3.23)

$$H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.28)$$

Se tienen expresadas las componentes transversales del campo magnético H_x y H_y en términos de la longitudinal H_z . Análogamente, se pueden expresar las componentes transversales del campo eléctrico E_x y E_y en función de H_z

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.30)$$

ahora se resuelve la ecuación (3.14) para H_z mediante el método de separación de variables [4]. Para tal efecto, sea $H_z = XY$, donde $X = X(x)$ y $Y = Y(y)$, entonces

$$(\nabla_t^2 + k_c^2)XY = 0 \Rightarrow X''Y + XY'' = -k_c^2 XY$$

dividiendo entre XY

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k_c^2 \quad (3.31)$$

como la suma de las funciones es igual a una constante, entonces se puede asumir que cada función debe ser igual a una constante

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2 \quad (3.32)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -k_y^2 \quad (3.33)$$

de las ecuaciones (3.31), (3.32) y (3.33), las *constantes de separación* se relacionan por medio de

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (3.34)$$

la solución general a este par de ecuaciones diferenciales es

$$X = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (3.35)$$

$$Y = C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y) \quad (3.36)$$

donde las constantes A a D son constantes de integración (complejas en general) que se encuentran a partir de las condiciones de frontera. Sustituyendo las ecuaciones (3.35) y (3.36) en $H_z = XY$

$$H_z = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad (3.37)$$

Las condiciones de frontera requieren que las componentes tangenciales del campo eléctrico se desvanezcan en las paredes conductoras perfectas, es decir $E_y(x=0, y) = 0$, $E_y(a, y) = 0$, $E_x(x, y=0) = 0$, $E_x(x, b) = 0$, ver figura (3.4). Dado que estas ecuaciones se refieren al campo eléctrico y no al campo magnético, se convierten por medio de las ecuaciones (3.29) y (3.30) a condiciones de la derivada del campo magnético

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=0} &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ \left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=a} &= 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \\ \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} \right]_{y=0} &= 0 \Rightarrow D = 0 \\ \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} \right]_{y=b} &= 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b} \end{aligned}$$

A continuación se muestra el desarrollo anterior sólo para el primer par de condiciones

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 = (-Ak_x \sin 0 + Bk_x \cos 0)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

de donde $B = 0$. Luego se sustituye este resultado en la segunda condición y se desarrolla

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 = (-Ak_x \sin k_x a)(C \cos k_y y + D \sin k_y y)$$

la función seno se anula cuando su argumento es un múltiplo entero de π , por lo que $k_x a = m\pi$ o bien $k_x = m\pi/a$. Conviene poner especial énfasis en las constantes

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (3.38)$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (3.39)$$

se puede ver en la figura (3.4) que a y b son las dimensiones internas de la GO. Además, recuérdese que al principio de la sección se comentó el significado de la notación TE_{mn} : m y n son los subíndices que denotan el número de medias variaciones de los campos en la dirección x e y , respectivamente.

Se puede combinar el producto de constantes AC en una sola constante H_{zp} que represente la amplitud del campo magnético H_z (por simplicidad se tomará $H_{zp} = 1$), quedando la expresión (3.37) para la componente longitudinal del campo magnético

$$H_z = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.40)$$

y para las componentes transversales de los campos en el modo TE_{mn}

$$H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\gamma n \pi}{b k_c^2} \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \quad (3.41)$$

$$H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\gamma m \pi}{a k_c^2} \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \quad (3.42)$$

$$E_y = \frac{j \omega \mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{j \omega \mu m \pi}{a k_c^2} \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \quad (3.43)$$

$$E_x = -\frac{j \omega \mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{j \omega \mu n \pi}{b k_c^2} \cos\left(\frac{m \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \quad (3.44)$$

El comportamiento de una onda alimentada en el espacio entre las paredes de la GO se puede examinar al insertar los valores de k_x y k_y en la ecuación (3.34) e igualando con la ecuación (3.15)

$$\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow \gamma_{mn} = \sqrt{\left[\left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2\right] - [\omega^2 \mu \epsilon]} \quad (3.45)$$

las cantidades en los corchetes de la ecuación (3.45) son positivas y reales. Entonces γ_{mn} se vuelve una cantidad real (es decir, un factor de atenuación) si el minuendo dentro del radical es mayor que el sustraendo. El valor γ_{mn} es imaginario puro si el sustraendo es mayor que el minuendo. La transición entre estas condiciones ($\gamma_{mn} \in \Re$ y $\gamma_{mn} \in \Im$) ocurre para la frecuencia de corte $f_{c,mn}$ definida cuando las cantidades en los corchetes son iguales (γ_{mn} nula)

$$\omega_{c,mn}^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b}\right)^2 \quad (3.46)$$

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (3.47)$$

entonces se puede expresar γ_{mn} como

$$\gamma_{mn} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2 - 1} \quad (3.48)$$

en la ecuación (3.48) se muestra claramente que γ_{mn} se vuelve real o imaginaria dependiendo de la frecuencia f

$$f < f_{c,mn} \Rightarrow \gamma_{mn} = \alpha_{mn} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2 - 1} \quad (3.49)$$

$$f > f_{c,mn} \Rightarrow \gamma_{mn} = j\beta_{mn} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2} \quad (3.50)$$

El factor $\omega \sqrt{\mu \epsilon} = \beta_0$ es la constante de fase para una onda plana uniforme que viaja a la frecuencia f en el aire y sin fronteras. Al conocer β_0 se puede encontrar otras propiedades de

la onda como su longitud en la guía y la velocidad de fase. Si la frecuencia f del generador de un modo TE_{mn} está arriba del valor de corte, la longitud de onda en metros de dicho modo se encuentra mediante $\beta\lambda = 2\pi$ para $f > f_{c,mn}$

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad (3.51)$$

donde $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$ es la longitud de onda de una onda plana uniforme en una región de aire no limitada. La velocidad de fase en metros por segundo se encuentra con $v = \frac{\omega}{\beta}$ para $f > f_{c,mn}$

$$v_{g,mn} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c,mn}}{f}\right)^2}} \quad (3.52)$$

donde $v_0 = \omega/\beta_0 = \sqrt{(\mu\varepsilon)^{-1}}$.

3.2.2. Modo TE_{10}

El modo dominante TE_{10} en la GO se obtiene haciendo [4]

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, el campo transversal tendrá sólo una media variación en la dirección x y no tendrá variación en la dirección de y . Sustituyendo los valores de m y n en las ecuaciones (3.40) a (3.44)

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} \quad (3.53)$$

$$H_y = 0 \quad (3.54)$$

$$H_x = j \frac{2a}{\lambda_{10}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.55)$$

$$E_z = 0 \quad (3.56)$$

$$E_y = -j \frac{2a}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.57)$$

$$E_x = 0 \quad (3.58)$$

donde λ_{10} se relaciona con la longitud de onda en el espacio libre λ_0 y con la longitud de onda de corte λ_c de la siguiente manera [4]

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{10}}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 \quad (3.59)$$

Para encontrar la longitud de onda de corte λ_c del modo TE_{10} se parte de la ecuación (3.46) considerando que $m = 1$ y $n = 0$

$$\omega_{c,10}^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

además se sabe que para una onda plana en el espacio libre $\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta_0$ y como $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$ se tiene

$$\omega_{c,10}^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$$

entonces se deduce que la longitud de onda de corte del modo TE_{10} es

$$\lambda_c = 2a \quad (3.60)$$

Ahora se puede obtener el *número de onda de corte* para este modo sustituyendo los valores de m , n y $a = \lambda_c/2$ en la ecuación (3.34)

$$k_c^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2$$

Para construir el patrón de campos para el modo TE_{10} , se reintroduce la variación fasorial $\exp(j(\omega t - \beta z))$ en las expresiones de las componentes de los campos y tomando la parte real correspondiente, para $t = 0$

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} \cos \beta z \quad (3.61)$$

$$H_x = -\frac{2a}{\lambda_{mn}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \quad (3.62)$$

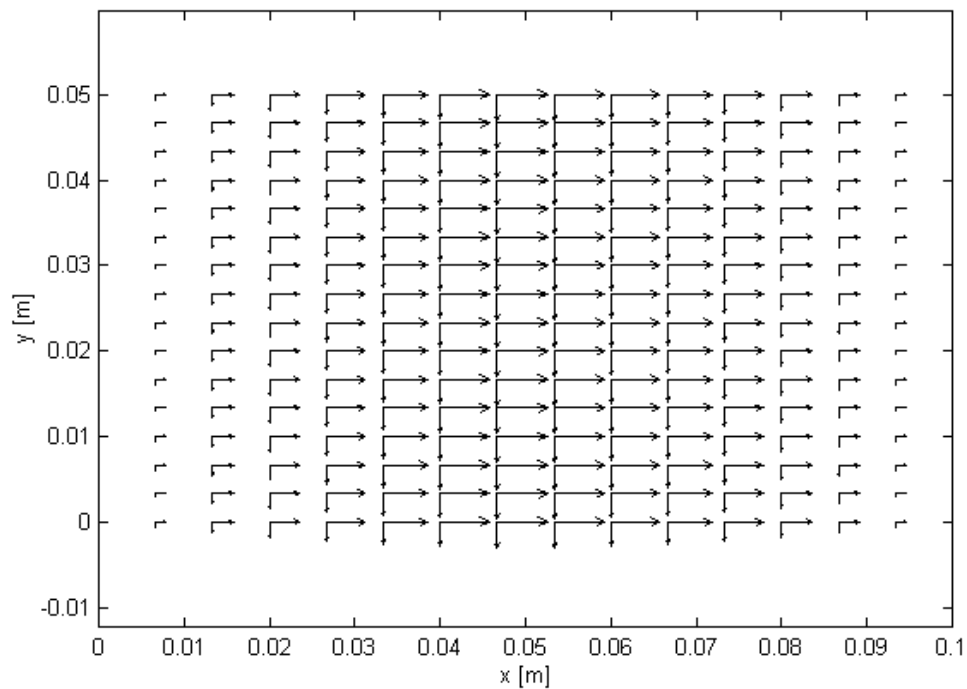
$$E_y = \frac{2a}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \beta z \quad (3.63)$$

En la figura (3.5) se muestra el mapa del campo electromagnético para el modo TE_{10} . Nótese que las dimensiones son $a = 100$ [mm], $b = 50$ [mm] según la disposición mostrada en la figura (3.4). También conviene notar que en la dirección x hay una media variación de los campos, mientras en y no hay variación.

3.2.3. Modos transversales magnéticos TM_{mn}

El desarrollo de la familia modal TM_{mn} es muy similar al de TE_{mn} , en este caso $H_z = 0$ y $E_z \neq 0$ [4]. Todos los campos se expresan en función de E_z y la ecuación de onda en E_z es nuevamente separable en una función pura de x y una de y . Procediendo de forma similar a la sección anterior, el resultado obtenido es

$$\begin{aligned} E_z &= \sin k_x x \sin k_y y \\ E_y &= -\frac{\gamma k_x}{k_c^2} \cos k_x x \sin k_y y \\ E_x &= \frac{\gamma k_y}{k_c^2} \sin k_x x \cos k_y y \\ H_x &= \frac{j\omega\varepsilon k_y}{k_c^2} \sin k_x x \cos k_y y \\ H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon k_x}{k_c^2} \cos k_x x \sin k_y y \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

Figura 3.5: Mapa de campos, modo TE_{10} , vista frontal

donde

$$k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \gamma + \omega^2 \mu \epsilon$$

Las constantes de separación se encuentran con las condiciones de frontera, que en este caso son

$$E_z(x, y = 0) = 0$$

$$E_z(x, y = b) = 0$$

$$E_z(x = 0, y) = 0$$

$$E_z(x = a, y) = 0$$

y de nuevo se obtiene para las constantes de separación los resultados ya mostrados en las ecuaciones (3.38) y (3.39)

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}$$

3.2.4. Modo TM_{11}

El modo más bajo en que se puede transmitir una onda transversal magnética es TM_{11} , dado que $m = n = 0$ queda excluido (E_z no puede ser cero dado que se está analizando un modo transversal magnético y por tanto, debe existir la componente longitudinal del campo

eléctrico) [4]. La longitud de onda de corte en metros es

$$\lambda_c = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.64)$$

siendo las componentes de los campos

$$\begin{aligned} E_z &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ E_x &= -j \frac{\lambda_c^2}{2b\lambda_{mn}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ E_y &= -j \frac{\lambda_c^2}{2a\lambda_{mn}} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ H_x &= j \frac{\lambda_c^2}{2b\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \\ H_y &= -j \frac{\lambda_c^2}{2a\lambda_0} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ H_z &= 0 \end{aligned}$$

En la figura (3.6) se muestra el mapa del campo electromagnético para el modo TM_{11} y las dimensiones internas de la GO son las mismas que en la figura (3.5). En (3.6) es muy notorio el hecho de que tanto en x como en y hay una media variación de los campos.

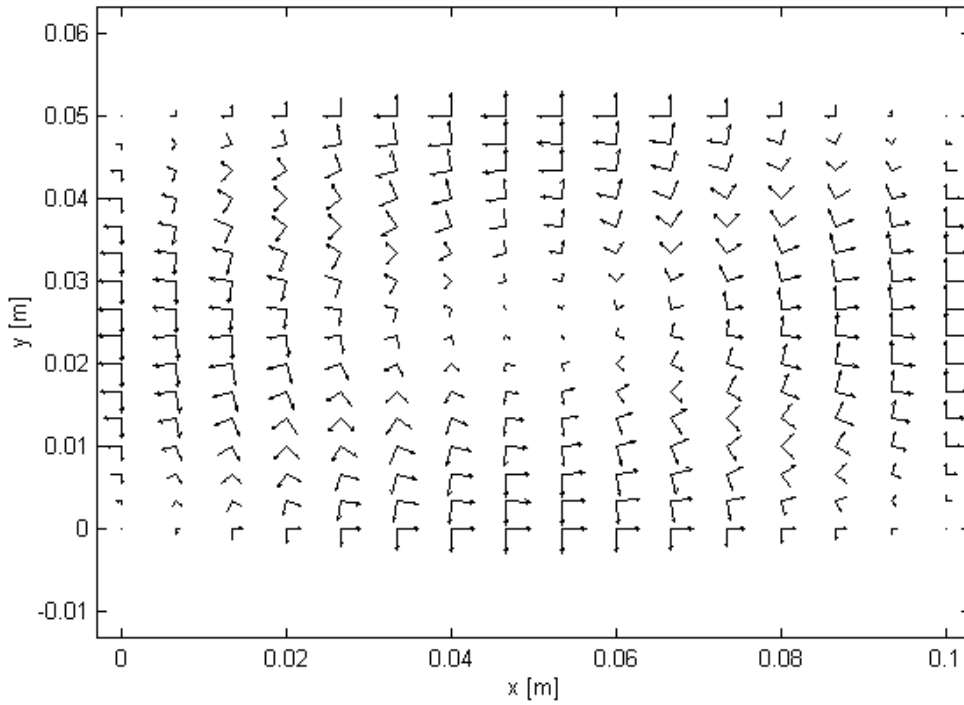


Figura 3.6: Mapa de campos, modo TM_{11} , vista frontal

3.2.5. Potencia transmitida y atenuación

Una cantidad importante en la descripción de una GO es la *potencia promedio transmitida* P_t en watts a través de ella, la cual se puede evaluar usando el teorema de Poynting en su forma compleja [4]

$$P_t = \frac{1}{2} \int_S \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) d\mathbf{S} \quad (3.65)$$

donde \mathbf{S} es la superficie total. Operando para el modo TE_{10} en particular, de las ecuaciones (3.53) a (3.57) para dicho modo se obtiene que

$$\frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_c^2}{\lambda_{10} \lambda_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \quad (3.66)$$

por lo que al integrar sobre la sección transversal de la GO se llega al resultado buscado

$$P_t = \frac{1}{2} \frac{\lambda_c^2}{\lambda_{10} \lambda_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dy dx = \frac{ab}{4} \frac{\lambda_c^2}{\lambda_{10} \lambda_0} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (3.67)$$

Si la disipación por unidad de longitud en las paredes de la guía es pequeña pero finita, la potencia promedio transmitida se puede aproximar como [4]

$$P_t \rightarrow P_t \exp(-2\alpha z) \quad (3.68)$$

La potencia disipada por unidad de longitud es

$$P_L = -\frac{\partial P_t}{\partial z} = 2\alpha P_t \quad (3.69)$$

y despejando α , la *atenuación por unidad de longitud* se puede expresar como

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_t}$$

Para encontrar P_L se determina la disipación en cada pared usando

$$P_L = \frac{1}{2} R_s \int_A |J|^2 dA \quad (3.70)$$

se define la *resistencia superficial* R_s mediante [4]

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad (3.71)$$

donde J es la densidad de corriente; σ y μ son la conductividad y la permeabilidad de la pared, respectivamente. La densidad de corriente eléctrica se relaciona con el campo magnético tangencial mediante las condiciones de frontera y por tanto la magnitud cuadrada de la densidad de corriente en las paredes laterales (donde $x = 0$, $x = a$) está dada para el modo TE_{10} (véase la ecuación (3.53) para H_z) por

$$|J_y|^2 = |H_z|^2 = 1 \quad (3.72)$$

y la disipación que se obtiene sobre la superficie de la pared lateral correspondiente a una unidad de longitud es

$$P_{L, J_y} = R_s \int_0^b 1 dy = bR_s \quad (3.73)$$

Como J_x y J_z en las paredes superior e inferior son perpendiculares, la contribución de cada una de ellas a las pérdidas en la pared se puede considerar por separado. La densidad de corriente debido a H_x en la ecuación (3.55) es

$$|J_z|^2 = |H_x|^2 = \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.74)$$

y la potencia disipada es

$$P_{L, J_z} = R_s \int_0^a \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{aR_s}{2} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right)^2 \quad (3.75)$$

Para la componente z en $y = 0$ e $y = b$, el cuadrado de la densidad de corriente es

$$|J_x|^2 = |H_x|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.76)$$

por lo que

$$P_{L, J_x} = R_s \int_0^a \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{aR_s}{2} \quad (3.77)$$

La pérdida total debida a la resistividad finita de las paredes de la GO es la suma de las pérdidas debidas a cada corriente

$$P_L = P_{L, J_x} + P_{L, J_y} + P_{L, J_z} = R_s \left\{ b + \frac{a}{2} \left[\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right)^2 + 1 \right] \right\} \quad (3.78)$$

La atenuación por unidad de longitud para el modo TE_{10} en una guía rectangular se obtiene finalmente sustituyendo la ecuación (3.78) por la potencia de pérdida y la ecuación (3.67) por la potencia transmitida en la expresión para α

$$\alpha = \frac{P_L}{2P_t} = \frac{2R_s \left\{ 1 + \frac{a}{2b} \left[\left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right)^2 + 1 \right] \right\}}{a \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{10}}\right) \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_0}\right) \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \quad (3.79)$$

...

El capítulo que finaliza se desarrolló para que los fundamentos del análisis de las GO se tengan en mente, dado que en el capítulo siguiente se analizará una guía de onda con estructura periódica (GOP) tomando como antecedente este capítulo. La GOP propuesta se basa en una GO rectangular a la cual se añaden ranuras en una cara y algunos resultados de la GO de paredes lisas se retomará.

Capítulo 4

Análisis y diseño de una Guía de Onda Periódica

En este capítulo se describe el análisis y diseño de una guía de onda con estructura periódica (GOP), estructura que le confiere propiedades muy interesantes. Por ejemplo, este tipo de guías de onda (GO) puede presentar comportamientos similares a los filtros paso-banda y supresor de banda y proporciona uno de los medios para obtener ondas lentas ¹. Estas estructuras son importantes además por su aplicación en el diseño de amplificadores, máseres, corredores de fase y antenas [12].

Hablando en rigor, la teoría de ondas guiadas expuesta anteriormente ya no puede ser aplicada dado que las propiedades de los sistemas no quedan constantes en la dirección de la transmisión de la energía, es decir, *los sistemas no son homogéneos en el sentido longitudinal*. Sin embargo, cuando el periodo espacial d es suficientemente pequeño, el proceso ondulatorio aparece como una onda guiada habitual cuya longitud de onda λ es mucho mayor que d con una gran aproximación [1, 11], como se verá más adelante.

La estructura cuyo análisis se lleva a cabo es mostrada en las figuras (4.1) y (4.2), se trata de una GO rectangular con ranuras periódicas en una cara.

Entre los parámetros que se pretende analizar se encuentra las dimensiones de la GOP, la distribución de los campos electromagnéticos en planos transversales y longitudinales con respecto al sentido de propagación de las ondas, la frecuencia de corte. No obstante, para comenzar resulta conveniente revisar el análisis de una GO similar.

4.1. Modelos y aproximaciones preliminares

En esta sección se analiza una *guía con reentrante* o *guía peine* [11]. En la figura (4.3) se muestra dicho sistema, cuya estructura es periódica a lo largo del eje z (a una distancia d la

¹Ondas lentas: aquéllas cuya velocidad de fase es menor que la velocidad de fase de las ondas transversales electromagnéticas (TEM) en el mismo medio.

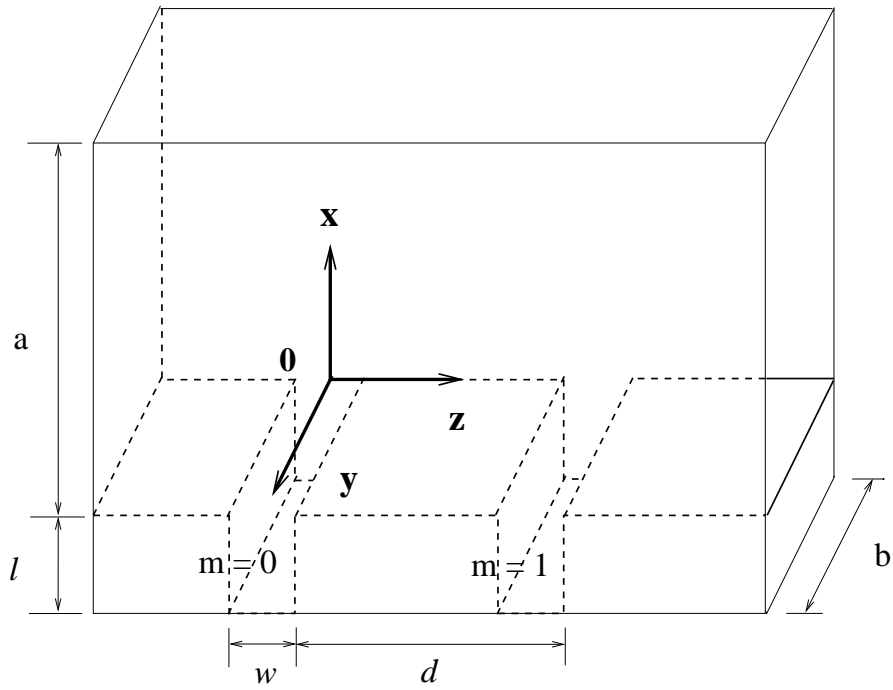


Figura 4.1: Forma general de la GOP

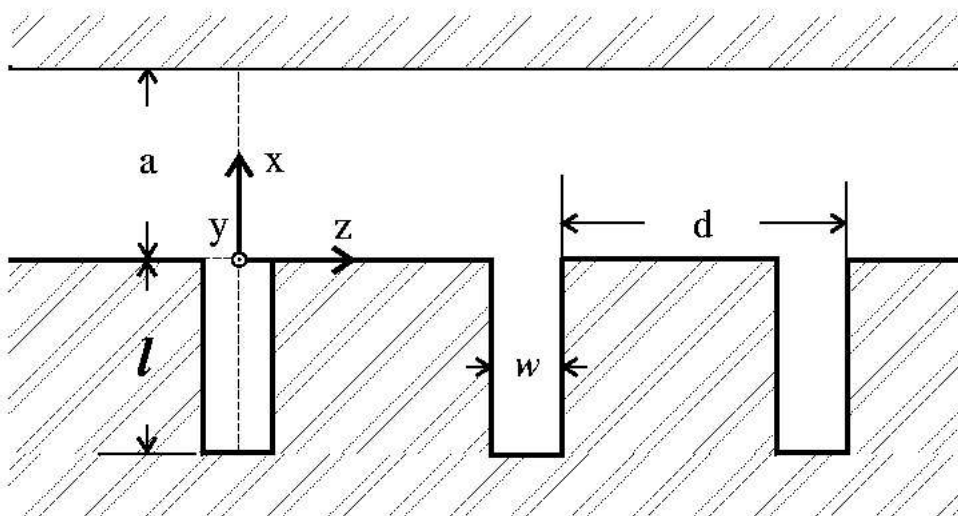


Figura 4.2: GOP propuesta (corte longitudinal)

estructura se repite). Como ya se mencionó, las ranuras de la estructura periódica se repiten

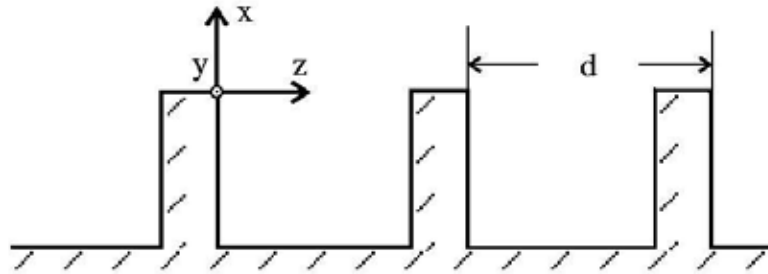


Figura 4.3: GO con estructura periódica simple

a lo largo de la dimensión z y sus dientes son perpendiculares a dicho eje, mientras que el fondo de cada ranura es paralelo a z . Si las corrientes eléctricas que circulan por la superficie del metal de esta GO están orientadas a lo largo del eje z , entonces a costa de los surcos de la estructura sus trayectorias se hacen más largas en comparación con la distancia sobre el eje z ; dichas corrientes eléctricas se generan por el campo magnético que se encuentra en el plano perpendicular al sentido de orientación de las corrientes, es decir el plano xy . En otras palabras, se crean por una onda del tipo transversal magnético (TM) cuyo campo magnético esté situado en el plano xy .

Debido a que se asume la ausencia de pérdidas en el medio y una extensión ilimitada de la estructura a lo largo del eje y (dirigido hacia afuera del papel), se toma $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $\mu = cte.$, $\varepsilon = cte.$, donde μ y ε son la permeabilidad y permitividad respectivamente del dieléctrico que rodea a la guía periódica [3]. En estas condiciones, la ecuación fundamental para la componente longitudinal del campo eléctrico se escribe como la ecuación (3.11)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \right) E_z = 0 \quad (4.1)$$

Dada la periodicidad de la estructura se hace la suposición de que la solución de esta ecuación puede presentarse en forma de onda progresiva con un periodo afectado por el de la estructura, d . Es decir, la solución se representa como la superposición de un número infinito de armónicos

$$E_z = \exp(-j\beta_0 z) \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) \exp\left(-j\frac{2\pi i}{d} z\right) \quad (4.2)$$

donde las funciones $f_i(x)$ reflejan la dependencia de las amplitudes de los armónicos respecto a la coordenada x .

Al sustituir la expresión (4.2) en la ecuación (4.1) y factorizando la exponencial en z se obtiene

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\langle \left\{ \omega^2 \mu \varepsilon - \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 \right\} f_i(x) + \frac{d^2}{dx^2} f_i(x) \right\rangle \exp\left(-jz \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)\right) = 0 \quad (4.3)$$

para que se cumpla esta igualdad es necesario que

$$\frac{d^2}{dx^2} f_i(x) + \left\{ \omega^2 \mu \varepsilon - \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 \right\} f_i(x) = 0 \quad (4.4)$$

Cuando

$$\omega^2 \mu \varepsilon > \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 \quad (4.5)$$

la solución de la ecuación (4.4) tiene la forma

$$f_i = A_i \exp(-jg_i x) \quad (4.6)$$

donde

$$g_i = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2} \quad (4.7)$$

Esta solución representa una onda que se propaga a lo largo del eje x , sin embargo el interés está centrado en una onda que se propaga a lo largo del eje z ; por tanto, la amplitud de la onda debe decrecer con el aumento de la coordenada x , lo que es posible al cumplirse la desigualdad

$$\left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 > \omega^2 \mu \varepsilon \quad (4.8)$$

en este caso, la ecuación (4.4) se escribe en la forma

$$\frac{d^2}{dx^2} f_i(x) - \left\{ \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon \right\} f_i(x) = 0 \quad (4.9)$$

con la solución

$$f_i = A_i \exp(-p_i x) \quad (4.10)$$

donde

$$p_i = \sqrt{\left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)^2 - \omega^2 \mu \varepsilon} \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4.2) y (4.10) se puede escribir

$$E_z = \exp(-j\beta_0 z) \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(-p_i x) \exp\left(-j\frac{2\pi i}{d} z\right) \quad (4.12)$$

o bien

$$E_z = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(-p_i x) \exp\left(-jz \left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \right)\right) \quad (4.13)$$

de este modo, el campo sobre la guía de ondas con reentrante representa la superposición de ondas que se atenúan a lo largo de la abscisa x con el factor de atenuación p_i y cuyas constantes de fase son β_i , donde

$$\beta_i = \beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \quad (4.14)$$

De la ecuación (4.11) se infiere que p_i aumenta con el incremento del número armónico i y la disminución del periodo de la estructura d . El valor mínimo para p_i se tiene cuando $i = 0$

$$p_0 = \sqrt{\beta_0^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (4.15)$$

si el periodo de la estructura d es lo suficientemente pequeño se puede considerar que el campo sobre la guía de ondas con reentrante se determina preferentemente por el armónico fundamental correspondiente a $i = 0$ y la influencia de los armónicos superiores en la estructura de la onda lenta no es grande [3].

Para evaluar la magnitud del periodo de la estructura tal que sea posible despreciar los armónicos superiores, es decir para lograr que el amortiguamiento de los armónicos superiores transcurra con mucha mayor rapidez en comparación con el primer armónico, es necesario cumplir la desigualdad

$$p_i \gg p_0$$

al sustituir en esta expresión las fórmulas (4.11) y (4.15) se obtiene

$$\sqrt{\left(\beta_0 + \frac{2\pi i}{d}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \gg \sqrt{\beta_0^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

del término en paréntesis de la raíz izquierda, se tiene que esta desigualdad es válida para

$$\frac{2\pi i}{d} \gg \beta_0$$

esta última expresión se intensifica con el aumento del número armónico i ; para el primer armónico se tiene

$$d \ll \frac{2\pi}{\beta_0} \quad (4.16)$$

como es sabido, la velocidad de fase es igual a la relación de la frecuencia angular ω a la constante de fase β_0

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_0}$$

la onda lenta deja de existir al acercarse la velocidad de fase a la velocidad de la luz o dicho en otras palabras, al cumplirse la siguiente igualdad

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Por tanto, si la onda lenta debe poseer una velocidad de fase κ veces menor que la velocidad de la onda electromagnética en el espacio libre es necesario que

$$\beta_\kappa = \kappa \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4.17)$$

si $\beta_\kappa = \beta_0$, es decir al sustituir la relación (4.17) en la desigualdad (4.16) se tiene

$$d \ll \frac{\lambda}{\kappa}$$

Si se admite como convención que d sea un décimo de λ/κ , entonces para deceleraciones pequeñas incluso correspondientes a $\kappa \approx 1$ el periodo de la estructura debe tener una magnitud del orden de un décimo de λ . Cabe recordar que λ corresponde a la longitud de onda en el espacio libre con los parámetros μ, ε .

4.2. Modelo de una GOP de planos paralelos infinitos

Resulta notorio del estudio de la GO peine que se trata de un modelo ideal, porque se pide que la GO sea ilimitada en la dimensión y . Sin embargo, los puntos trascendentales de dicho análisis que se retomará son la propuesta de representar el proceso electromagnético como una serie infinita de ondas armónicas (dada en la ecuación (4.2)) y la determinación de la constante de fase armónica (dada en la ecuación (4.14)). En esta sección se desarrolla el modelo matemático de una guía similar a la propuesta, donde se verá que tales suposiciones siguen siendo válidas. El interés de esta GO es que está formada por un par de planos y por tanto resulta un diseño más cercano a la realidad, comparado con la GO peine que sólo está compuesta por una pared, además de que el análisis del autor Ramo [13] es la base del desarrollo propuesto de la GOP.

Si se piensa en dicha guía como una línea de transmisión (LT) de planos paralelos infinitos (o de forma equivalente, si se asume que la dimensión y es muy grande) y las ranuras son relativamente angostas, entonces éstas se comportarán ante las ondas con corrientes en la placa inferior en la dirección de z como *líneas de transmisión en corto* según Ramo [13]. A su vez, estas líneas estarán en serie con el conductor y producirán valores del campo electromagnético en $x = 0$ que se mantendrán esencialmente constantes en todo el grosor de la ranura w . En la figura (4.4b) se muestra la condición de frontera para E_z en $x = 0$ y en la figura (4.4a) se ha repetido el esquema de la guía propuesta por simplicidad. Aunque la representación cuadrada de la condición de frontera despreja el efecto de los campos electromagnéticos de orden superior en las esquinas de las ranuras, resulta ser una aproximación sencilla que muestra las propiedades básicas de la GO en cuestión.

Un punto fundamental es que se tiene un corrimiento de fase de $\beta_0 d$ en cada periodo, dado que interesa analizar ondas que se propagan.

Para el problema analizado, sea $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ y supónganse ondas que sólo poseen las componentes de los campos E_x, E_z y H_y , de manera que se les pueda expresar mediante una suma de ondas del tipo TM, incluyendo la

onda transversal electromagnética (TEM) si la sumatoria incluye el término correspondiente a $i = 0$, de forma tal que se tiene

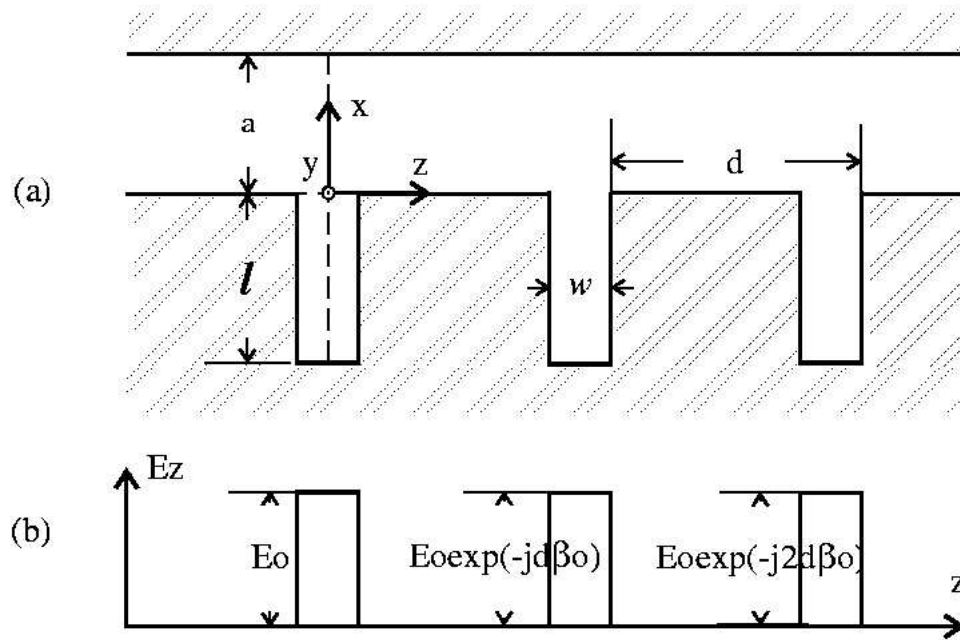


Figura 4.4: GOP propuesta (corte longitudinal) y condición de frontera

$$E_z(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \sin k_i(a - x) \exp(-j\beta_i z) \quad (4.18)$$

$$E_x(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{-j\beta_i}{k_i} A_i \cos k_i(a - x) \exp(-j\beta_i z) \quad (4.19)$$

$$H_y(x, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{-j\omega\epsilon}{k_i} A_i \cos k_i(a - x) \exp(-j\beta_i z) \quad (4.20)$$

$$k_i^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta_i^2 = k^2 - \beta_i^2 \quad (4.21)$$

La condición de frontera mostrada en la figura (4.4b) será una función periódica de z si el factor de fase se toma separadamente. Si se expande la función periódica resultante en la forma compleja de la serie de Fourier, se tiene

$$E_z(0, z) = \exp(-j\beta_0 z) \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_i \exp(-j2\pi i z/d) \quad (4.22)$$

donde

$$C_i = \frac{1}{d} \int_{-w/2}^{w/2} E_0 \exp(j2\pi i z/d) dz \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow C_i = \frac{E_0}{\pi i} \sin\left(\frac{\pi i w}{d}\right) \quad (4.24)$$

y al comparar la ecuación (4.22) con la ecuación (4.18) evaluada en $x = 0$, se encuentra los valores de las amplitudes A_i y las constantes de fase β_i

$$A_i = \frac{C_i}{\sin k_i a} = \frac{E_0 \sin(\pi i w / d)}{\pi i \sin k_i a} \quad (4.25)$$

$$\beta_i = \beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \quad (4.26)$$

nótese que las ecuaciones (4.14) y (4.26) que representan a la constante de fase armónica para la GO peine y para la GOP de planos paralelos infinitos respectivamente son iguales.

Resulta conveniente resaltar el papel que juegan las soluciones con ondas TM en este problema. En otras secciones (por ejemplo en la sección llamada *Modo TM_{11}*), se consideró a las soluciones TM como *modos*, lo cual implícitamente lleva a la idea de que cada modo puede ser excitado independientemente; en este caso, están acoplados mediante la condición periódica de frontera y los modos deben existir en la proporción correcta para satisfacer dicha condición [13]. En este sentido, a los modos para una solución se les conoce como *armónicas espaciales*, extendiendo el carácter armónico temporal de las series de Fourier a un sistema periódico en el espacio. Cabe remarcar que la determinación de β para cualquier armónica espacial automáticamente establece el valor de todas las demás.

Algunas propiedades importantes son:

1. La velocidad de grupo de todas las armónicas espaciales de una onda dada es la misma, lo cual se puede esperar si la onda debe permanecer unida [13].
2. Del número infinito de armónicas espaciales, la mitad son ondas inversas y la otra mitad son directas, lo que quiere decir que las primeras tienen signos contrarios en la velocidad de fase y de grupo, mientras que las segundas tienen el mismo signo [11, 13].
3. La distribución de campos en cualquier plano $z = md$ (m un número entero y d el periodo de la estructura) es la misma que en $z = 0$ excepto que se multiplica por el factor de fase $\exp(-j\beta_0 md)$. Esta propiedad importante se relaciona con el teorema de Floquet [11, 13], que a menudo se toma como el punto de partida en el estudio de sistemas periódicos. Para el caso analizado, de la ecuación (4.18) evaluada en $z = 0$ y de la ecuación (4.26) (d es el periodo de la estructura, i es el índice entero de la serie infinita, m es el índice que refleja la posición de la ranura: $m = 1$ se refiere a la primera ranura, $m = 2$ a la segunda y así sucesivamente)

$$E_z(x, md) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \sin k_i(a - x) \exp(-j\beta_0 md) \exp(-j2\pi im) \quad (4.27)$$

$$= \exp(-j\beta_0 md) \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \sin k_i(a - x) \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow E_z(x, md) = \exp(-j\beta_0 md) E_z(x, 0) \quad (4.29)$$

Dado que el producto im siempre es entero, entonces el factor $\exp(-j2\pi im)$ es siempre igual a la unidad. De igual manera se puede llevar a cabo el desarrollo para las otras componentes de los campos.

4.3. Solución propuesta

Con base en los estudios anteriores (Ecuaciones de Maxwell, Ondas Electromagnéticas, Guías de Onda de paredes lisas y demás), en esta sección se desarrolla la propuesta de una Guía de Onda Rectangular con Estructura Periódica en la pared inferior. Entre los parámetros que se deben determinar están las dimensiones de la GOP (a, b, d, l, w), la cantidad de armónicas que se utilizará (es impráctico considerar la serie infinita), la frecuencia de corte de cada onda armónica y además se espera obtener mapas de los campos electromagnéticos dentro de la GOP en planos transversales y longitudinales.

Dado que las ondas electromagnéticas (OEM) que se propaguen a través de la GOP deben cumplir con la ecuación vectorial de Helmholtz (3.11), se propone que E_z tenga la siguiente forma

$$E_z = \sin(k_y y) \sum_i A_i \sin k_i(a - x) \exp(-j\beta_i z) \quad (4.30)$$

la sumatoria es nuevamente infinita y su índice barre valores desde $i = -\infty$ hasta $i = +\infty$. En adelante, en la notación de las sumatorias se asume el mismo índice y que mantiene ese proceder, a menos que se indique explícitamente lo contrario. Con respecto a la ecuación (4.18) propuesta por Ramo ² [13], en la ecuación (4.30) se ha agregado el término $\sin(k_y y)$, de manera que se asegure que la componente E_z del campo eléctrico satisfaga las condiciones de frontera en el nuevo par de planos ³ localizados en $y = 0$ y $y = b$. Para tomar en cuenta la introducción del nuevo término, es necesario modificar el coeficiente k_i que asume la forma

$$k_i^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_y^2 - \beta_i^2$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

nótese que el coeficiente k_y tiene la misma forma que para las GO de paredes lisas, de manera que provee un número entero de medias variaciones del campo eléctrico en el eje y (véase la ecuación (3.39) y la explicación posterior). Operando de forma similar al procedimiento seguido para obtener las ecuaciones que describen los campos eléctrico y magnético dentro

²El análisis propuesto está basado en gran medida en el desarrollo llevado a cabo por este autor.

³Recuérdese que la GOP propuesta puede verse como una GO rectangular a la que se agregan ranuras en una cara.

de GO lisas, las componentes de los demás campos en la GOP son

$$E_y = -j \sum_i \frac{\beta_i k_y}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_i^2} A_i \sin k_i (a - x) \cos(k_y y) \exp(-j \beta_i z) \quad (4.31)$$

$$E_x = j \sum_i \frac{\beta_i k_i}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_i^2} A_i \cos k_i (a - x) \sin(k_y y) \exp(-j \beta_i z) \quad (4.32)$$

$$H_x = j \sum_i \frac{\omega \varepsilon k_y}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_i^2} A_i \sin k_i (a - x) \cos(k_y y) \exp(-j \beta_i z) \quad (4.33)$$

$$H_y = j \sum_i \frac{\omega \varepsilon k_i}{\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_i^2} A_i \cos k_i (a - x) \sin(k_y y) \exp(-j \beta_i z) \quad (4.34)$$

Las ecuaciones (4.31) a (4.34) de las componentes de los campos se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell, expresando todas las componentes transversales en función de la componente longitudinal deseada (en este caso E_z), luego resolviendo la ecuación de onda mediante el método de la separación de variables y evaluando la solución hallada con las condiciones de frontera adecuadas.

Si la conducta de los campos en las ranuras de la GOP está bien aproximada por el comportamiento de una LT en corto (ver figura (4.4a)), entonces el valor de H_y en la recta $x = 0, z = 0$ es

$$H_y = -j \frac{E_0}{\eta} \cot(kl) \quad (4.35)$$

donde E_0 es un valor de referencia de intensidad de campo eléctrico en volts por metro, η es la impedancia del medio en ohms y l es la profundidad de las ranuras de la estructura periódica en metros. Por facilidad en el manejo de las ecuaciones se considera que

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 = 377 \\ k^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon - k_y^2 \end{aligned}$$

e igualando la ecuación (4.35) con la (4.34) evaluada en $x = 0, z = 0$

$$-\frac{\cot(kl)}{\eta_0} = \sum_i \frac{\omega \varepsilon}{\pi i k_i} \sin\left(\pi i \frac{w}{d}\right) \cot(k_i a)$$

se puede observar que la propagación de las OEM a través de la GOP queda determinada por el sistema de ecuaciones

$$0 = \sum_i \frac{\omega \varepsilon}{\pi i k_i} \sin\left(\pi i \frac{w}{d}\right) \cot(k_i a) + \cot(kl) \frac{1}{\eta_0} \quad (4.36)$$

$$k_i^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_y^2 - \beta_i^2 \quad (4.37)$$

$$\beta_i = \beta_0 + \frac{2\pi i}{d} \quad (4.38)$$

Resulta oportuno comentar que el cálculo realizado con las ecuaciones propuestas arroja valores de A_i y β_i iguales a los obtenidos por Ramo. Si el análisis aquí expuesto se apega a

la idea de dicho autor, entonces la onda correspondiente a $i = 0$ es la TEM y del estudio de OEM se conoce que

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

al sustituir esta fórmula y la (4.38) en (4.37) se llega a

$$k_i^2 = -k_y^2 - 4\pi i\beta_0/d - (2\pi i/d)^2 \quad (4.39)$$

la ecuación (4.39) implica que k_i puede tomar valores reales o imaginarios dependiendo del índice i : el primer y tercer términos del lado derecho son negativos siempre, sin importar el signo de i , mientras el segundo término es negativo sólo si $i > 0$. Es decir, en este último caso se tiene que los tres términos son negativos y así $k_i^2 < 0$, lo que implica que $k_i \in \Im$ (números imaginarios) y por tanto únicamente se pueden usar las armónicas con índice negativo, dadas por ⁴

$$k_{-i}^2 = 4\pi i\omega/(cd) - k_y^2 - (2\pi i/d)^2 \quad (4.40)$$

de manera que $k_i \in \Re$ (números reales) y exista propagación de OEM y consecuentemente transmisión de energía a través de la GOP.

El corte de cada onda armónica se caracteriza porque el índice k_{-i} correspondiente es igual a cero; es decir, forzando $k_{-i} = 0$ y despejando $\omega = \omega_{ci}$ de la ecuación (4.40)

$$\omega_{ci} = (k_y^2 + (2\pi i/d)^2) \frac{cd}{4\pi i} \quad (4.41)$$

esta última ecuación expresa que la velocidad angular de corte de la i -ésima armónica depende naturalmente del índice i , también del periodo espacial de la estructura d y de otras constantes como π y c ⁵. Un punto interesante que se puede destacar de la ecuación (4.41) es que se vuelve una relación casi lineal en i si el periodo d de la estructura es lo suficientemente pequeño (en términos prácticos, del orden de 10 [mm]).

...

En este capítulo se llevó a cabo el desarrollo del modelo matemático de la GOP propuesta, basado en análisis previos [1, 3, 11, 13]. Se obtuvo diversos parámetros como la amplitud armónica A_i (ecuación (4.25)), constante armónica de propagación β_i (ecuación (4.26)).

Algunos puntos que cabe recalcar son:

- Se observa en la ecuación (4.25) que la amplitud A_i de las ondas armónicas depende en gran medida de la relación w/d (w es el grosor de la ranura, d es el periodo espacial de la estructura) debido a la existencia del término $C_i = E_0 \sin(\pi iw/d)/(\pi i)$. Partiendo de que $w/d \in [0, 1]$ y si $w/d \ll 1$ se tiene que la variación de la amplitud de una armónica a otra es mínima y por lo tanto se debe tener una gran cantidad de armónicas en la GOP para cumplir con el criterio establecido (prescindir de las armónicas cuya amplitud esté por debajo de $\sim 0.1A_1$, es decir la décima parte de la amplitud de la primera armónica).

⁴Recuérdese que el índice de la sumatoria infinita es i , perteneciente al conjunto de los números enteros. No confundirlo con el número $i = \sqrt{-1}$, base de los imaginarios.

⁵Téngase en mente que c es la velocidad de la luz en el espacio libre.

- En el otro extremo, para $w/d = 1$, las armónicas tienen amplitud nula. Dicho resultado es de esperarse, puesto que al tener la ranura el mismo ancho que el periodo espacial de la GOP, ésta se convierte en una guía de onda de paredes lisas rectangular, en la cual no existen componentes armónicas que sean generadas debido a la periodicidad espacial.

El siguiente capítulo contiene los resultados analíticos y gráficos de dicho desarrollo.

Capítulo 5

Resultados

Hasta este punto, se han desarrollado las ecuaciones que determinan los campos electromagnéticos en la guía de onda con estructura periódica (GOP) así como las que determinan la frecuencia de corte de cada onda armónica, su constante de fase, su amplitud, etc. En este capítulo se presentan los resultados analíticos (profundidad de la ranura, frecuencias de corte calculada y de operación propuesta) y los resultados gráficos (simulaciones de los campos electromagnéticos en planos transversales y longitudinales) de los desarrollos realizados.

5.1. Resultados analíticos y numéricos

Para cuantificar los parámetros de las ondas electromagnéticas (OEM) se deben asignar valores a todas las constantes. Se toma como base las dimensiones de una GO rectangular comercial, estándar, la GO WR340 ¹

$$a = 3.4 \text{ [in]} = 86.36 \text{ [mm]}$$

$$b = 1.7 \text{ [in]} = 43.18 \text{ [mm]}$$

cabe destacar que $a = 2b$, o sea la dimensión en x es el doble del tamaño en y . La característica de la GO WR340 que influyó en su selección como referencia es su tamaño que obliga a operar en una región de microondas en la cual la frecuencia no es tan alta como para las guías submilimétricas, que pueden operar en centenas de [GHz]. Se propone además (consulte las figuras (4.4) y (5.6) para ver la correspondencia de las dimensiones)

$$w/d = 0.25 \text{ [adim]}$$

$$d = 0.1 \text{ [m]}$$

$$n = 1 \text{ [adim]}$$

$n = 1$ implica que sólo se tendrá una media variación de los campos en el eje y , $d = 0.1$ [m] establece que el periodo de la estructura es $d = 100$ [mm] y $w/d = 0.25$ determina que el grosor de la ranura es $w = 25$ [mm]. En las gráficas (5.7) y posteriores de los campos en la

¹Ver Anexo B *GO WR340* acerca de los fabricantes y de las hojas de datos.

GOP, se toma una longitud sobre el eje z igual a un periodo de la GOP $d = 100$ [mm].

A partir de la ecuación (4.41) para las velocidades angulares de corte desarrollada en el capítulo anterior se pueden obtener las frecuencias de corte

$$f_{ci} = cd(k_y^2 + (2\pi i/d)^2)/(8\pi^2 i) \quad (5.1)$$

recordando que c es la velocidad de la luz en el vacío. Sustituyendo las constantes propuestas anteriormente en la ecuación (5.1) se obtiene la tabla (5.1) en [GHz], donde se muestran las frecuencias de corte sólo para 15 armónicas, porque con el valor escogido de la relación w/d , para $i = 14$ la amplitud de las armónicas ha decaído en 10 veces (como se puede verificar en la gráfica (5.1)) y k_i se vuelve imaginario.

$f_{c1} = 3.51$	$f_{c6} = 9.34$	$f_{c11} = 16.7$
$f_{c2} = 4.01$	$f_{c7} = 10.8$	$f_{c12} = 18.2$
$f_{c3} = 5.17$	$f_{c8} = 12.2$	$f_{c13} = 19.6$
$f_{c4} = 6.50$	$f_{c9} = 13.7$	$f_{c14} = 21.1$
$f_{c5} = 7.90$	$f_{c10} = 15.2$	$f_{c15} = 22.6$

Tabla 5.1: Frecuencia de corte de las primeras 15 armónicas

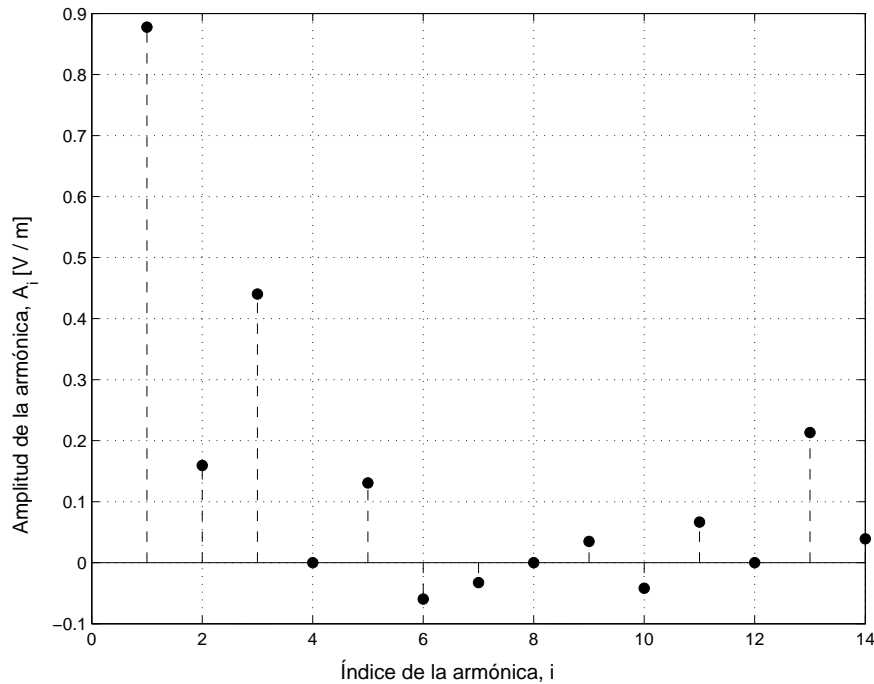


Figura 5.1: Variación de la amplitud del campo eléctrico total con el índice de la armónica

Si interesa mantener las 14 armónicas mencionadas, la frecuencia de operación de la GOP debe ser mayor que $f_{c14} = 21.1$ [GHz], dado que con el aumento del índice i el valor de la f_{ci}

correspondiente también aumenta y por tanto una frecuencia de operación menor que f_{c14} provocaría el corte de una armónica cuando menos. Para efectos de las gráficas (5.2) a (5.5) donde se muestra el comportamiento de la longitud l , se toma como dominio de frecuencia el intervalo $[f_{c14}, f_{c15}]$.

De la ecuación (4.36) desarrollada en el capítulo anterior, se puede despejar el valor de la profundidad de la ranura l que hace posible la existencia de las armónicas previstas, donde

$$l = \frac{1}{k} \left\{ \operatorname{arccot} \left(-\eta_0 \sum \frac{\omega \varepsilon k_i}{\pi i (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta_i^2)} \sin(\pi i w / d) \cot(k_i a) \right) + \Delta \right\} \quad (5.2)$$

de manera que se tenga propagación de OEM en el interior de la GOP. Sustituyendo en la ecuación (5.2) los valores propuestos al principio de este capítulo con $\Delta = 0$ y realizando los cálculos mostrados, se puede obtener la gráfica (5.2) en la cual se observa que existen intervalos de frecuencia para los cuales la profundidad de la ranura se vuelve negativa, lo que implica que las ranuras tendrían una *altura* en vez de una *profundidad*.

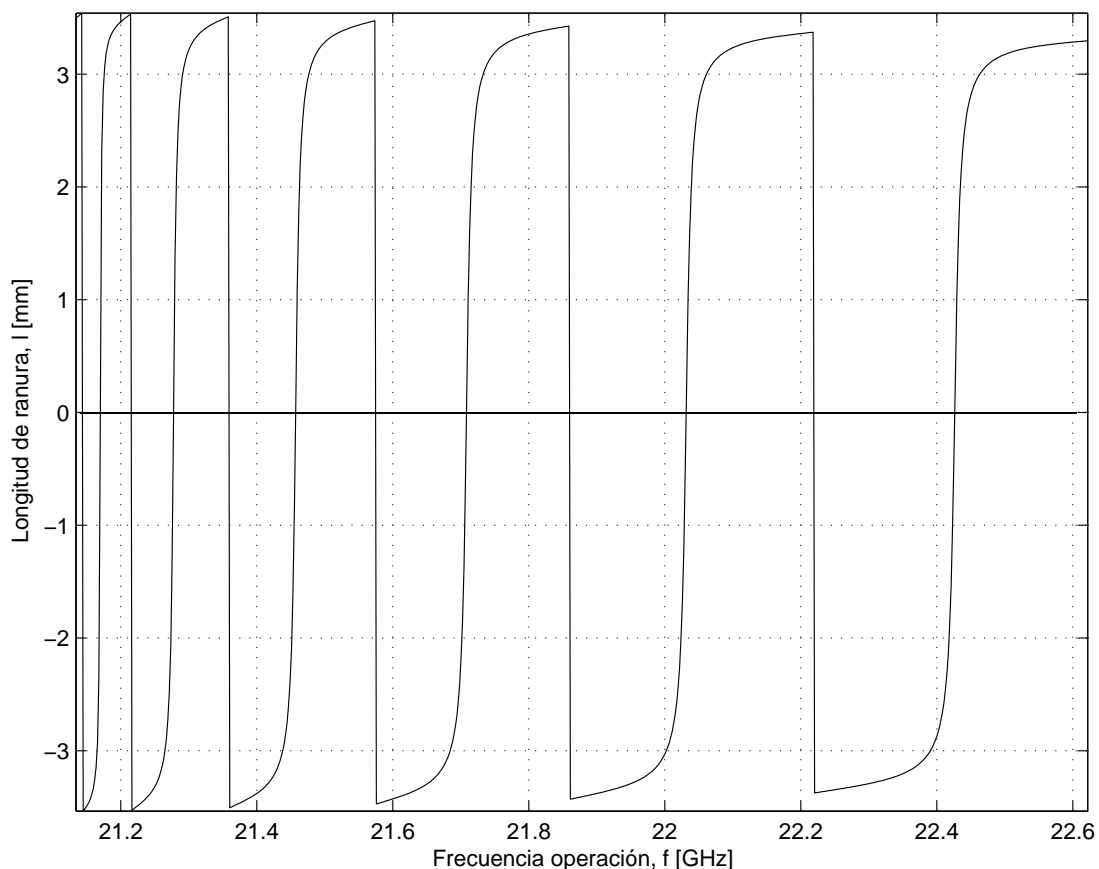


Figura 5.2: Comportamiento de l vs f en la GOP

Hay 2 puntos que resultan de interés en la figura (5.2):

- Teóricamente, en los puntos de cruce de la curva con el eje $l = 0$ (eje horizontal) la GOP *degenera* en una GO de paredes lisas rectangular, debido a que la profundidad de la ranura se anula y por tanto la ranura misma.
- Conforme la frecuencia aumenta, los valores máximos locales de la curva para l se mantienen durante un intervalo mayor: la espiga que está centrada en ~ 21.2 [GHz] es mucho más delgada que la última, la cual está centrada en ~ 22.5 [GHz] y que está recortada. En otras palabras, a mayor frecuencia, los valores máximos locales de l siguen siendo máximos durante un intervalo de frecuencia mayor.

Ahora bien, una profundidad de ranura $l = 3$ [mm] parece un tanto pequeña considerando las dimensiones a y b propuestas. No obstante, se puede hacer uso de la periodicidad de las funciones trigonométricas de forma que dicha profundidad aumente. En la figura (5.3) se tiene un resultado de dicha modificación, haciendo $\Delta = 2\pi$ en la ecuación (5.2), así l es siempre positiva con valores sustancialmente mayores que el original (un orden de magnitud).

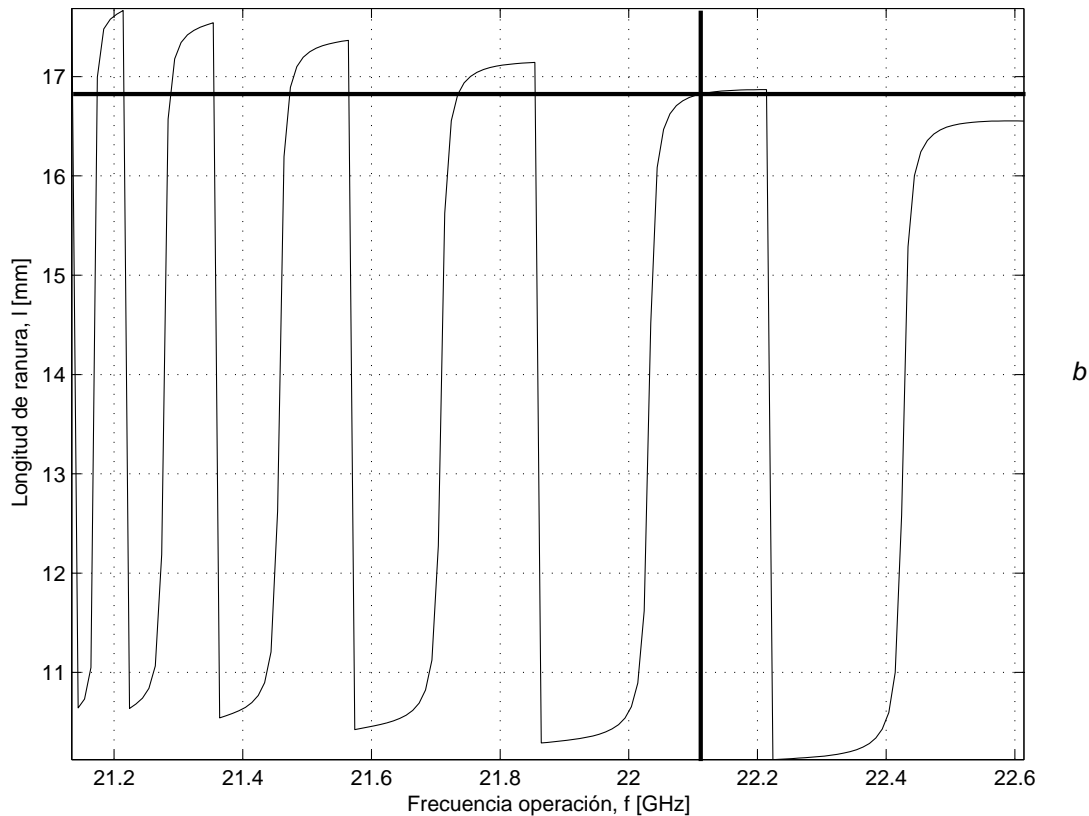


Figura 5.3: Comportamiento de l vs f con fase 2π en la GOP

Nótese en la figura (5.3) que los valores máximos locales de l disminuyen gradualmente con la frecuencia desde $l \approx 18$ [mm] hasta $l \approx 16.5$ [mm], mientras en la gráfica (5.2) para la curva original se tiene que los valores máximos locales quedan ~ 3 [mm] en todo el intervalo

de frecuencia mostrado. Se puede inferir entonces que al imponer un cambio de fase en la ecuación (5.2) y mientras mayor sea la frecuencia de operación, menor es la profundidad de la ranura necesaria para tener una GOP.

Por otro lado, si se continúa cambiando el valor de Δ en la ecuación (5.2) en múltiplos de 2π , se obtiene una familia de soluciones con valores de l que aumentan con el crecimiento del argumento. Se resalta que en la porción mostrada de la familia de curvas para la profundidad l , figuras (5.3) y (5.4), el comportamiento es similar si se considera que en estos dos casos la profundidad de la ranura tiende a disminuir a mayor frecuencia de operación, siendo este efecto más pronunciado con un argumento mayor.

Un ejemplo claro del decremento más pronunciado en la profundidad l cuanto mayores son la frecuencia de operación y el cambio de fase se muestra en la figura (5.4), donde los valores máximos locales de l varían desde $l \approx 61$ [mm] hasta $l \approx 57$ [mm] (recuérdese que para un cambio de fase nulo, la profundidad es $l \approx 3$ [mm] para el mismo intervalo de frecuencia $[f_{c14}, f_{c15}]$).

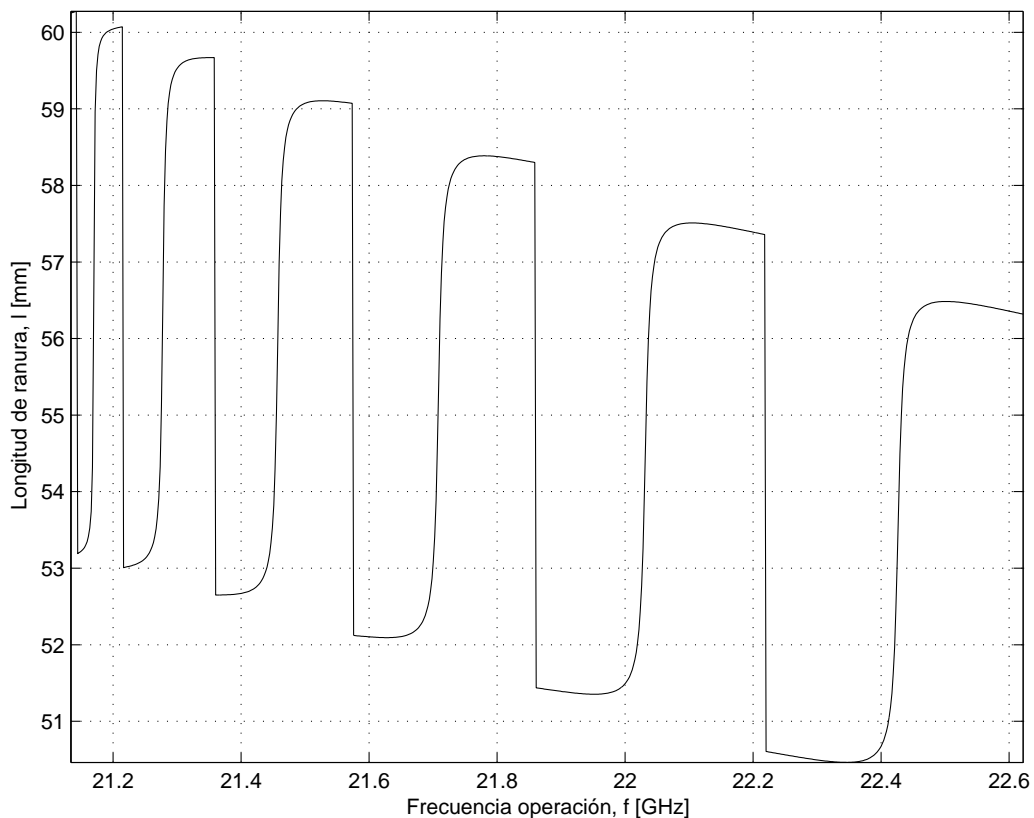


Figura 5.4: Comportamiento de l vs f con fase 8π en la GOP

También cabe resaltar que para cambios de fase en la ecuación (5.2) múltiplos de 2π , la longitud de la ranura es positiva para todo el intervalo de frecuencia simulado. Para

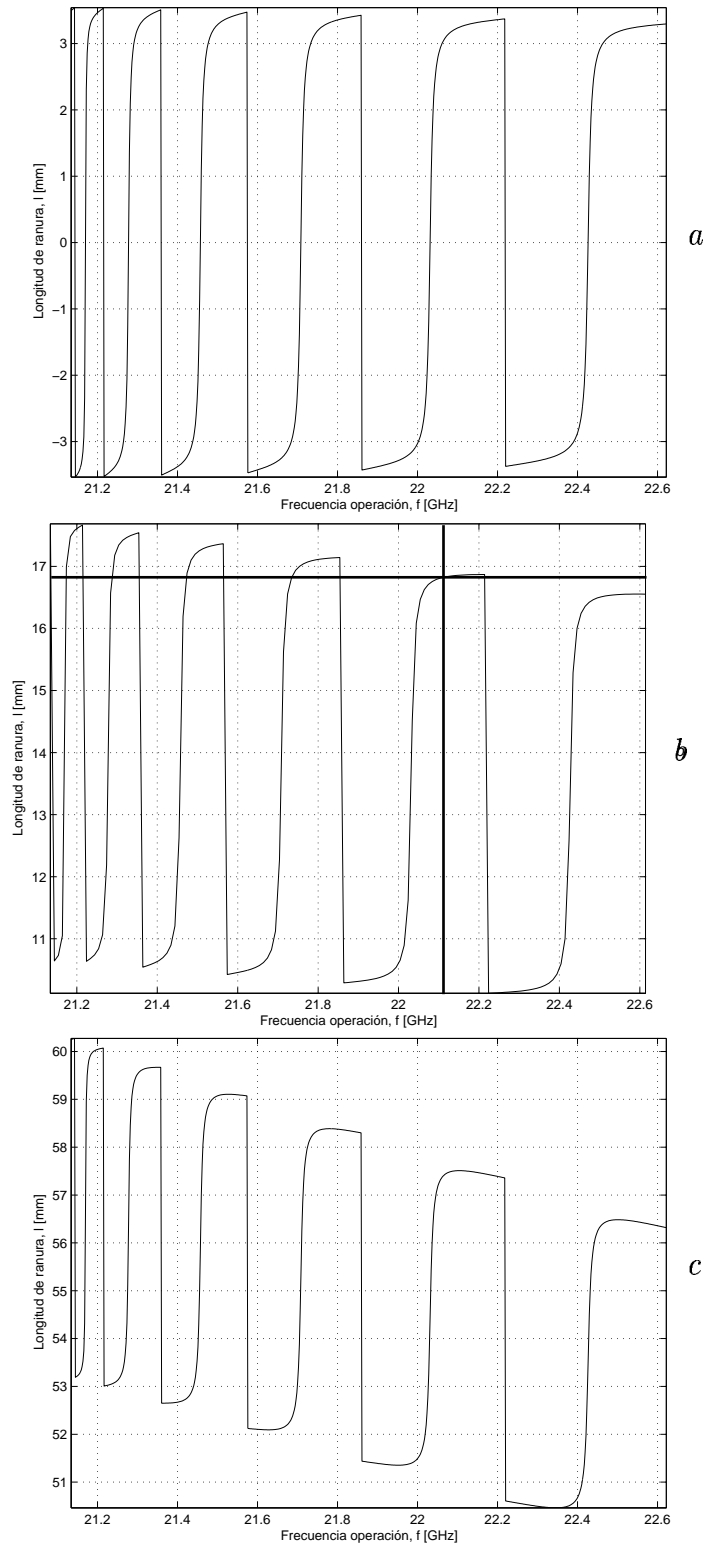
completar esta sección, se agrega una gráfica (5.5) en la cual se presentan las tres gráficas anteriores (5.2) a (5.4) juntas, de manera que los resultados mencionados sean más evidentes. Una característica relevante que se puede notar en la figura (5.5) es que los cambios de fase múltiplos de 2π introducidos en la ecuación (5.2) y que dan origen a la familia de curvas para l , no alteran la frecuencia en la cual se tienen *valles* y *crestas* en las figuras (5.5a) a (5.5c), sino que únicamente modifican la amplitud de la curva. Es decir, físicamente proveen un desplazamiento en la profundidad de la ranura mas no en la frecuencia de operación.

En esta figura (5.5) son muy notorios los efectos de la fase y la frecuencia sobre la curva l . La gráfica para fase nula (5.5a) tiene la menor variación en el valor de los máximos locales cuando aumenta la frecuencia y cuando la fase es 8π la gráfica resultante (5.5c) muestra variación considerable en el valor de los máximos al aumentar la frecuencia.

Algunos otros resultados de esta sección son:

- Se tiene una GO rectangular en lugar de la GOP si la profundidad de la ranura es nula ($l = 0$). En la gráfica (5.2) de l vs f obtenida a partir de la ecuación (5.2), se puede notar que hay ciertas frecuencias de operación para las cuales la longitud de la ranura se anula, lo que implica la *degeneración* de la GOP en una GO rectangular.
- Nótese en la figura (5.5b) que los valores máximos locales de l disminuyen gradualmente con la frecuencia desde $l \approx 18$ [mm] hasta $l \approx 17$ [mm], mientras en la gráfica (5.5a) para la curva original se tiene $l \approx 3$ [mm] casi siempre. Se puede inferir entonces que al imponer un cambio de fase en la ecuación (5.2) y mientras mayor sea la frecuencia de operación, menor es la profundidad de la ranura necesaria para tener una GOP.
- En las gráficas (5.5b) y (5.5c) se observa también que para un cambio de fase múltiplo de 2π en la ecuación (5.2), la longitud de la ranura es siempre positiva, lo cual implica que la estructura periódica de la GOP consta efectivamente de ranuras con cierta *profundidad*, en oposición al caso $l < 0$ en el que las ranuras tienen *altura*. La figura (5.5a) tiene intervalos que ejemplifican ambos casos.
- Se resalta que en la porción mostrada de la familia de curvas para la profundidad l , figuras (5.5b) y (5.5c), el comportamiento es similar si se considera que en ambos casos se tiende a disminuir la profundidad de la ranura a mayor frecuencia de operación, siendo este efecto más pronunciado con un argumento mayor. Un ejemplo claro de la variación más pronunciada en la profundidad l cuanto mayores son la frecuencia de operación y el cambio de fase se muestra en la figura (5.4), donde l cambia desde $l \approx 61$ [mm] hasta $l \approx 57$ [mm] para el intervalo mostrado.

Por otro lado, en la sección siguiente se presenta las simulaciones de los mapas de los campos electromagnéticos y para poder llevar a cabo su representación gráfica en el tiempo es necesario adecuar las ecuaciones (4.30) a (4.34), lo cual se lleva a cabo extrayendo la parte real de cada componente de los campos multiplicada por el término $\exp(j\omega t)$.

Figura 5.5: Variación de la profundidad l con la fase: *a*) fase nula, *b*) fase 2π , *c*) fase 8π

5.2. Simulaciones

Como resultado del análisis desarrollado y para tener una interpretación mejor de los resultados, a continuación se muestran las simulaciones gráficas de los campos electromagnéticos en el interior de la GOP. Se presentan mapas de los campos electromagnéticos en un plano transversal y tres planos longitudinales, $z = 0$, $y = 0$, $b/2$ y $x = a/2$ respectivamente. Véase la figura (5.6).

Los planos $z = cte.$ (verticales de perfil) son transversales a la dirección de propagación (eje z) y son paralelos al plano que describen los ejes x e y . Por ejemplo, el plano $z = 0$ queda dentro de la ranura marcada $m = 0$ y el plano $z = 1d$ está dentro de la ranura $m = 1$. Los planos $x = cte.$ (horizontales) son paralelos al plano descrito por y y z y también paralelos a la superficie horizontal de las ranuras. Por tanto, el plano $x = a/2$ queda a medio camino entre la parte superior de las ranuras y el plano superior de la GOP. Los planos $y = cte.$ (verticales de frente) son paralelos al plano formado por los ejes x y z , por lo que el plano $y = 0$ es el plano posterior de la GOP y el plano $y = b/2$ está a la mitad de la GOP y la corta longitudinalmente.

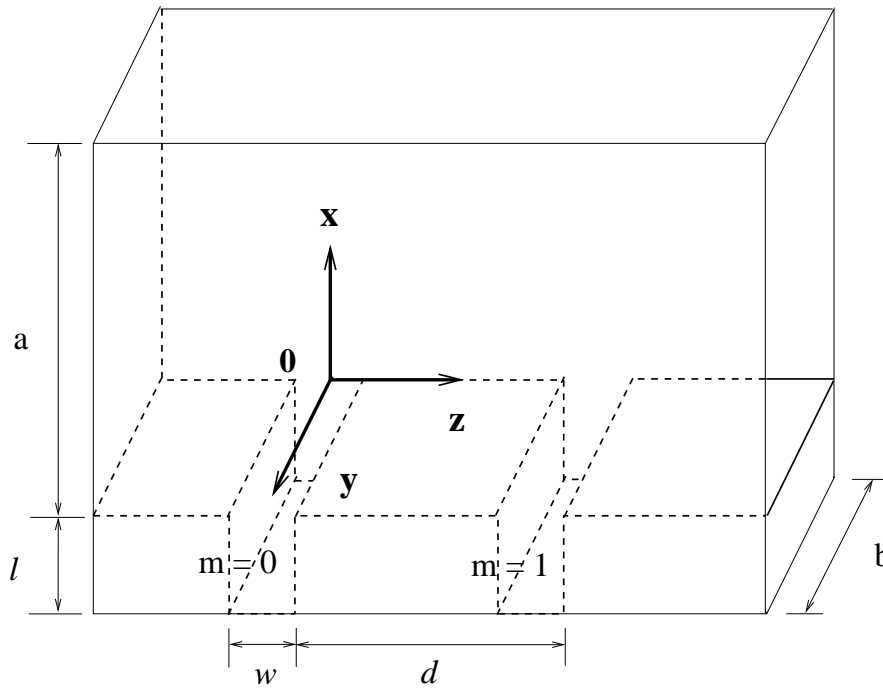


Figura 5.6: Dimensiones de la GOP (no a escala)

Con base en la figura (5.3) se elige como frecuencia de operación $f = 22.1$ [GHz] dado que alrededor de tal frecuencia la gráfica es casi plana (horizontal), entonces la profundidad queda $l = 16.8$ [mm]. En dicha zona de la figura (5.3) la frecuencia puede variar dentro de un cierto intervalo relativamente amplio (~ 100 [MHz]) sin cambiar demasiado las condiciones de operación de la GOP, lo cual resulta relevante para dar estabilidad al sistema.

La gráfica (5.7) muestra el mapa del campo eléctrico (derecha) y del campo magnético (izquierda) en la ranura y dentro de la GOP. Es decir se representa la región que va desde el fondo de la ranura $x = -l$ hasta el plano superior de la GOP $x = a$, en el plano vertical $z = 0$.

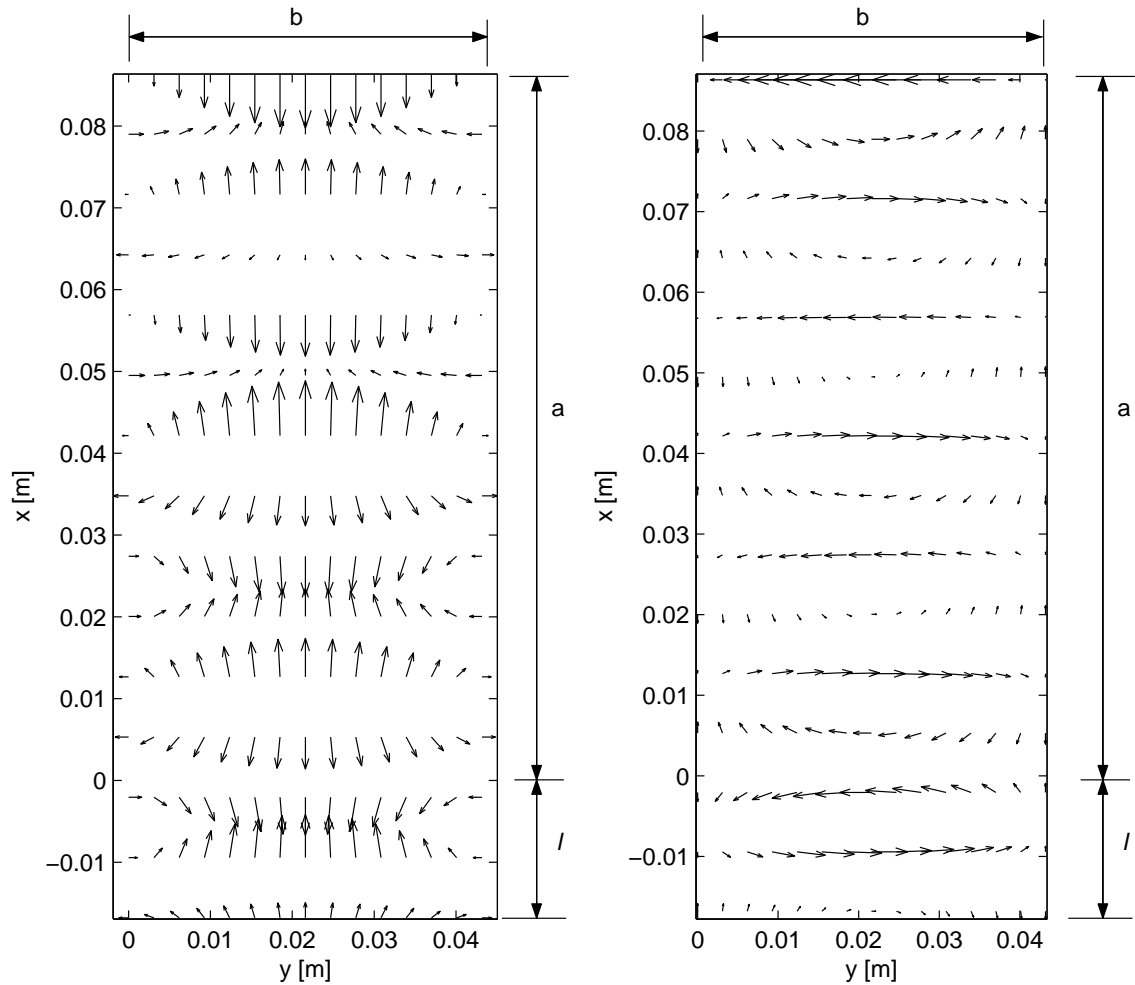


Figura 5.7: Campo eléctrico (a la derecha) y campo magnético (a la izquierda), en el plano $z = 0$

Cabe resaltar que el campo eléctrico (a la derecha) se acerca perpendicularmente a los planos $y = 0$, $y = b$ y $x = a$. Sin embargo no en todo el fondo de la ranura $x = -l$, se cumple esta condición de frontera, lo cual se debe al modelo matemático desarrollado, en el cual los efectos de borde se toman como inexistentes; es decir se asume una función cuadrada para representar las condiciones de frontera en las ranuras. Para el campo magnético (a la izquierda) sucede una situación similar. El campo magnético se acerca tangencialmente a los planos laterales $y = 0$, $y = b$ y superior $x = a$, cumpliendo así las condiciones de frontera, en tanto en el fondo de la ranura $x = -l$, el campo magnético cambia su orientación de tangencial al plano inferior a perpendicular al plano inferior conforme se separa del centro de la ranura (lugar dado por la recta $y = b/2$).

En la figura (5.8) se muestra la distribución de los campos eléctrico y magnético en la GOP.

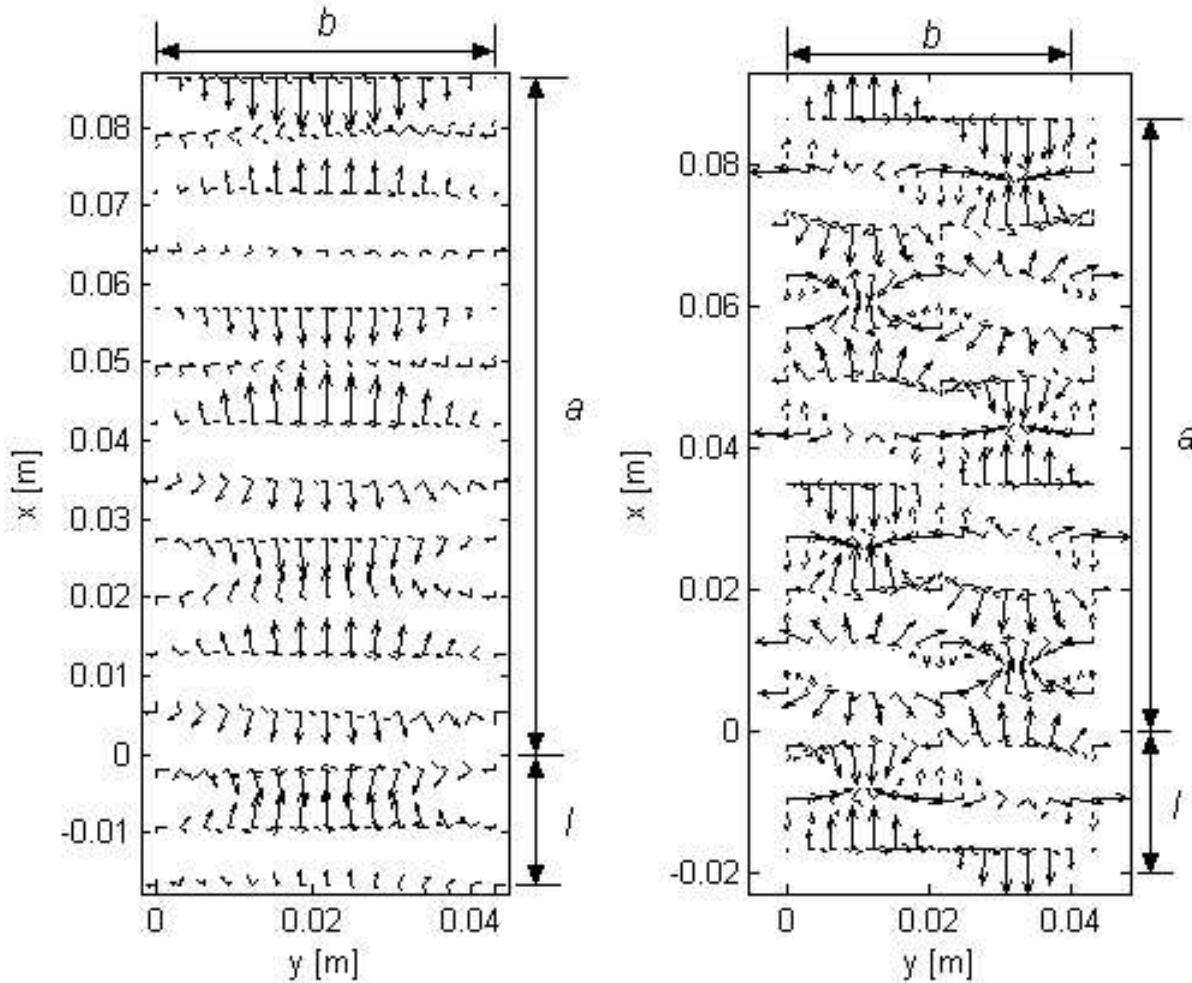


Figura 5.8: Campos electromagnéticos en la ranura y en la GOP, plano $z = 0$

Los vectores de campo eléctrico están representados con línea continua y los vectores que muestran al campo magnético tienen línea punteada (en general los vectores de campo eléctrico tienen longitudes mayores que sus correspondientes de campo magnético). A la izquierda se muestra el mapa para $n = 1$ (media variación de los campos en el eje y), mientras a la derecha se encuentra el esquema correspondiente a $n = 2$ (dos medias variaciones, es decir una variación completa de los campos electromagnéticos). A diferencia de los campos electromagnéticos en la figura (5.7), en el mapa de la figura (5.8) correspondiente a $n = 2$ los campos se apegan mejor a las condiciones de frontera al aproximarse el campo eléctrico perpendicularmente y el campo magnético tangencialmente a todas las fronteras $x = -l$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ (es decir la componente tangencial del campo eléctrico y la perpendicular del campo magnético son nulas en las fronteras).

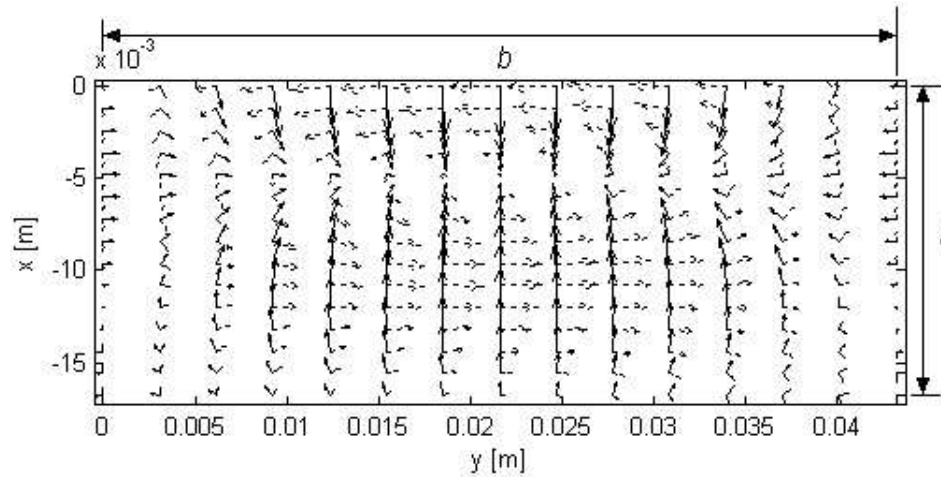


Figura 5.9: Campos electromagnéticos en la primera ranura, plano $z = 0$

La gráfica (5.9) muestra el mapa del campo electromagnético únicamente en el interior de la primera ranura. Si se observa con atención la figura (5.7) se puede notar que ambos campos (eléctrico y magnético) cumplen las condiciones de frontera en el fondo de la ranura $x = -l$ para la parte central $y = b/2$. No obstante, al alejarse del centro y progresivamente acercarse a los planos que limitan a la GOP en la dimensión y , las fronteras que dominan para las condiciones de frontera son precisamente los planos $y = 0$, $y = b$, lo cual se debe al modelo matemático desarrollado.

En la figura (5.10) se tiene el mapa del campo eléctrico en el plano horizontal $x = a/2$. Nótese en esta distribución del campo eléctrico que $E_y < E_z$ en la parte central de la GOP (la recta $y = b/2$), donde también se observa que los valores absolutos de los campos son máximos, mientras en la región próxima a los planos $y = 0$, $y = b$ la situación contraria prevalece ($E_z < E_y$), de manera que las condiciones de frontera se cumplen (campo eléctrico tangencial a la frontera siempre es nulo).

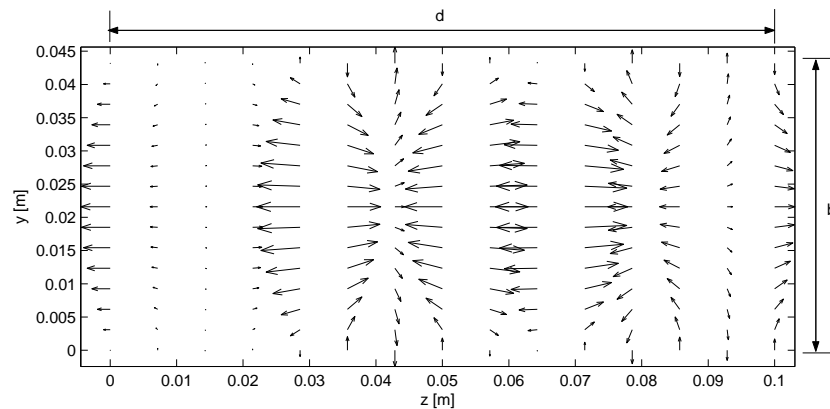


Figura 5.10: Campo eléctrico en la GOP, plano $x = a/2$

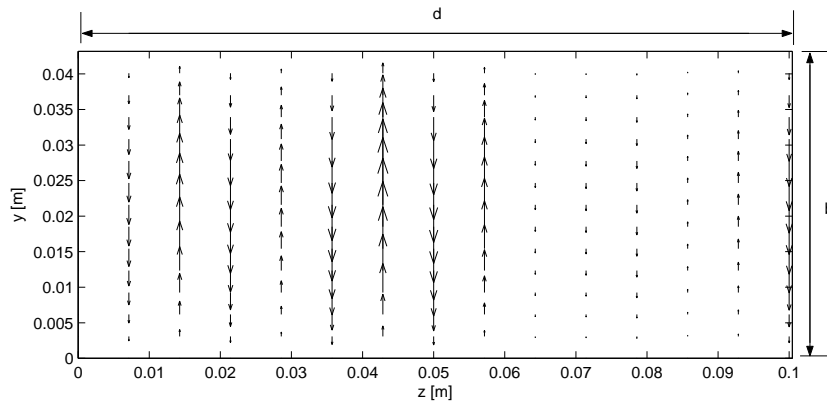


Figura 5.11: campo magnético en la GOP, plano $x = a/2$

La figura (5.11) corresponde al mapa del campo magnético en el plano horizontal $x = a/2$ y sobre un periodo espacial d . Al tener un conjunto de ondas TM y siendo la dirección de propagación z , en el plano yz sólo se tiene la componente H_y . En las fronteras se observa que las condiciones de frontera se cumplen (campo magnético perpendicular nulo).

La figura (5.12) muestra la distribución del campo eléctrico en la GOP (sin incluir la primera ranura). Las fronteras son los planos $x = a$ (en el cual las condiciones de frontera se cumplen) y una porción de $x = 0$ (no hay ranura en la región $z \in [0.0125, 0.0875]$). En este esquema es manifiesta la complejidad del comportamiento de los campos, inclusive considerando un periodo espacial, por lo que en el mapa (5.13) se presenta el campo eléctrico únicamente en la primera ranura ($m = 0$).

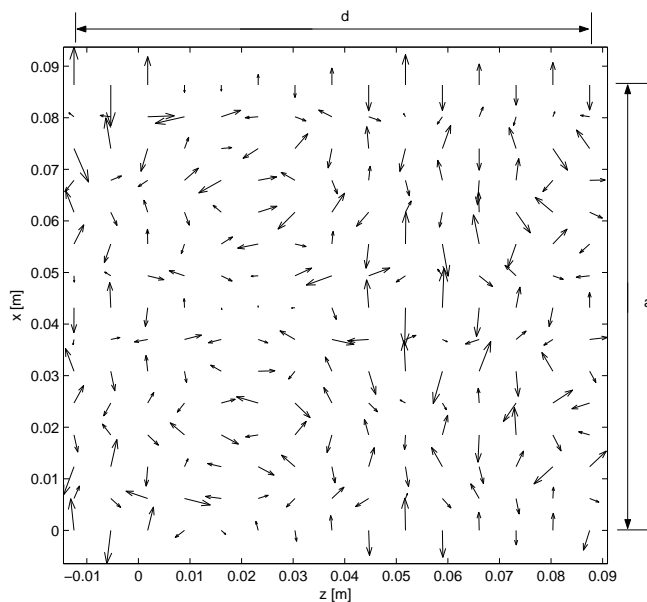


Figura 5.12: Campo eléctrico en la GOP, plano $y = b/2$

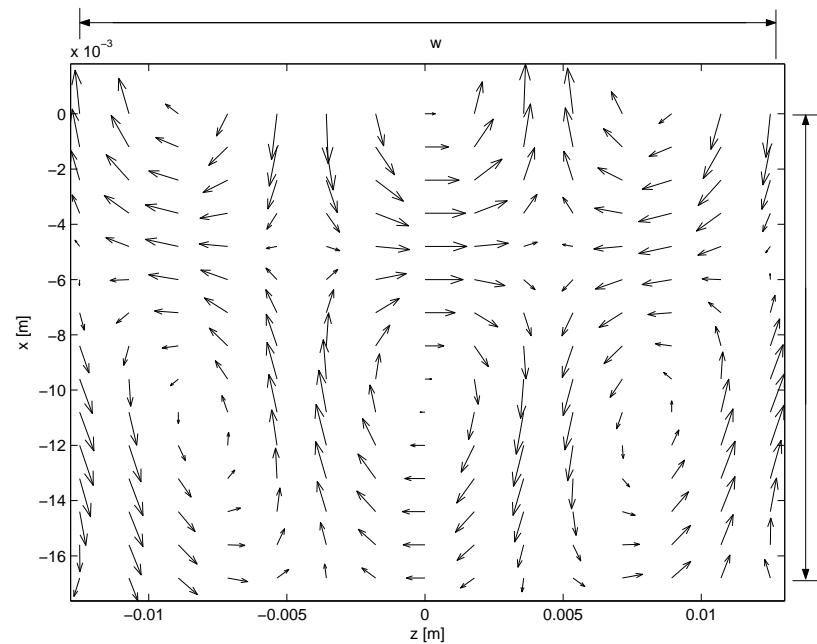


Figura 5.13: Campo eléctrico en la primera ranura, plano $y = b/2$

La gráfica (5.13) corresponde al mapa del campo eléctrico en la primera ranura $m = 0$ ($x \in [-l, 0]$, $z \in [-w/2, w/2]$). En esta gráfica, se tienen tres fronteras (excepto $x = 0$) mas las condiciones de frontera no se cumplen satisfactoriamente debido a las aproximaciones realizadas (condiciones de frontera para E_z no toma en cuenta efectos de borde, se tiene un número finito de armónicas, etc.).

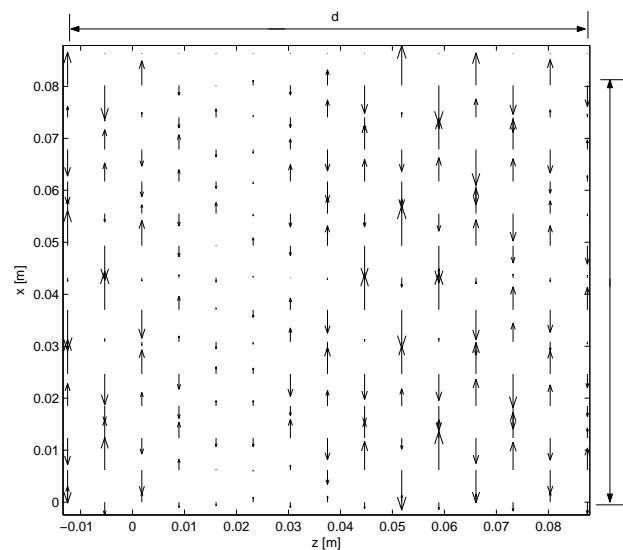


Figura 5.14: campo magnético en la GOP, plano $y = 0$

La gráfica (5.14) muestra el mapa del campo magnético en la GOP (sin incluir la ranura). Nótese que se tiene el plano $y = 0$, porque en $y = b/2$ la componente H_x del campo magnético

se anula. El comportamiento es similar al del mapa de la figura (5.11) en tanto se tiene únicamente una componente. No obstante, en la figura (5.14) H_x varía con x y con z ; para mayor claridad se ofrece el mapa del campo magnético dentro de la primera ranura ($m = 0$) en la figura (5.15).

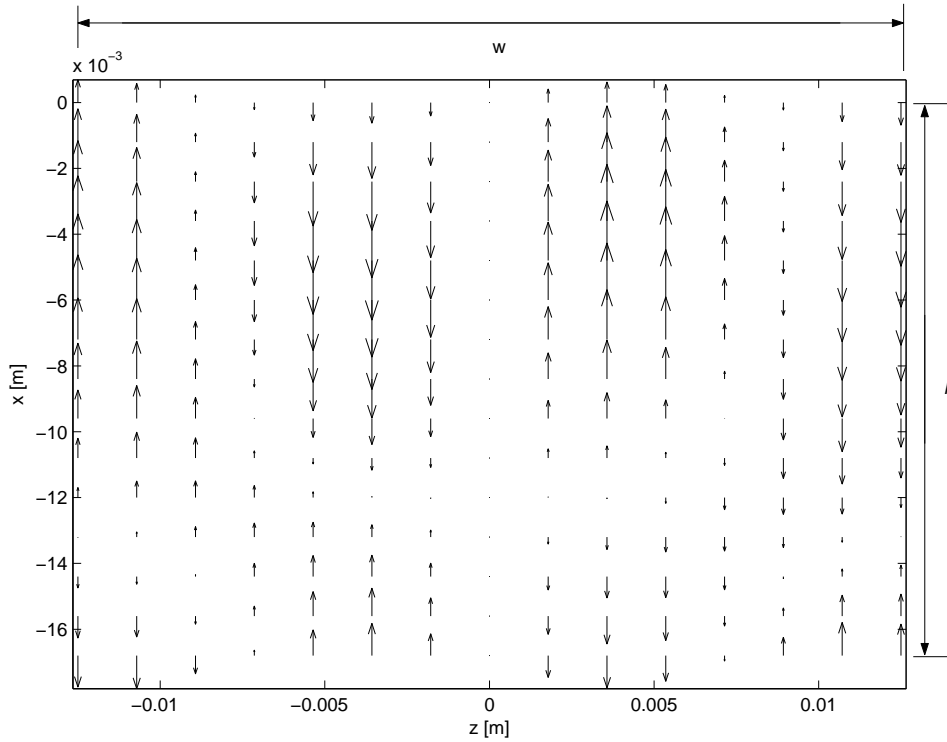


Figura 5.15: campo magnético en la primera ranura, plano $y = 0$

En la figura (5.15) se tiene el mapa del campo magnético en el interior de la primera ranura. De nuevo se tiene sólo una componente de campo magnético (H_x) y se presenta el comportamiento del campo magnético en el plano $y = 0$.

Por otro lado, la ecuación (4.29), que aquí se reproduce

$$E_z(x, md) = \exp(-j\beta_0 md) E_z(x, 0)$$

expresa el teorema de Floquet, que relaciona la componente E_z del campo eléctrico en una ranura m con la componente E_z en la ranura $m = 0$. Cuando $m = 0$ se hace alusión a la ranura donde los ejes comienzan y las siguientes ranuras están numeradas consecutivamente hacia la derecha (ver figura (5.6)). Es decir, se pueden conocer las componentes de los campos para cualquier ranura donde m sea un número natural (entero positivo) si se conocen dichas componentes para la ranura inicial $m = 0$.

En la figura (5.16) se muestra el mapa de los campos electromagnéticos para los planos $z = md$, donde $m = 2, 3$. Debe tenerse en cuenta que aunque la magnitud de cada campo cambia, la razón de las magnitudes de los campos electromagnéticos se mantiene igual y por

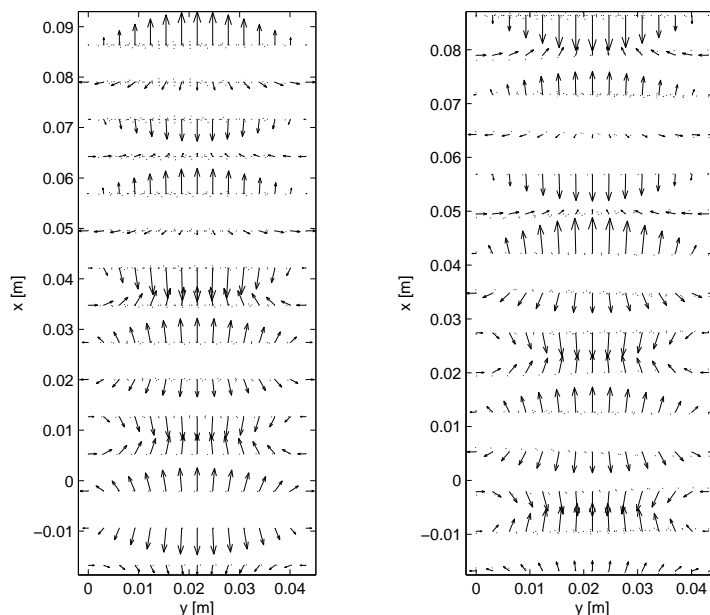


Figura 5.16: Campo electromagnético dados por Floquet: $m = 2$ (derecha) y $m = 3$ (izquierda)

tanto en la gráfica (5.16) se tiene la impresión que sólo cambian de signo. Se ofrece por tanto la tabla (5.2) donde se muestra los valores de los campos en función del valor m para donde $m = 1, 2, 3, 4$. Los números entre paréntesis de la primera columna son los *factores de Floquet* (ff) dados por el teorema de Floquet [3, 11, 13]. Es interesante observar que para el renglón correspondiente a $m = 2$ se tiene la mayor diferencia con respecto a la teoría. Se realizó el cálculo de la magnitud de los campos en los puntos ($x = 0.009$, $y = 0.0108$, $z = md$) dentro de la GOP.

$x = 0.009$, $y = 0.0108$	H_x	H_y	E_y	E_x
$m = 0$ ($ff = 1$)	0.0011	0.0018	-0.3532	0.2242
$m = 1$ ($ff = -0.669$)	-0.0007	-0.0018	0.2418	-0.1535
$m = 2$ ($ff = -0.105$)	-0.0007	-0.0014	0.0221	-0.0140
$m = 3$ ($ff = 0.809$)	0.0008	-0.0021	-0.2720	0.1727
$m = 4$ ($ff = -0.978$)	-0.001	0.0023	0.3504	-0.2225

Tabla 5.2: Amplitudes de los campos calculadas y el factor de Floquet

$m = 1$	H_x	H_y	E_y	E_x
Programa	-0.0007	-0.0018	0.2418	-0.1535
Floquet ($ff = -0.669$)	-0.0007	-0.0012	0.236	-0.1499
Error relativo (%)	0	33	2	6

Tabla 5.3: Comparación de las amplitudes calculadas mediante el programa con las calculadas mediante ff , $m = 1$

Es oportuno mencionar que los valores plasmados en la tabla (5.2) verifican los resultados obtenidos en este trabajo dado que los valores de las amplitudes de los campos calculados según el factor de Floquet se asemejan en gran medida a los obtenidos con el desarrollo presentado en este estudio. Por ejemplo, se puede obtener la tabla (5.3) para el caso en que $m = 1$, tabla en la cual se comparan los valores calculados mediante el programa desarrollado en este trabajo con los valores que arroja el teorema de Floquet mediante los factores ff de Floquet.

Para obtener el renglón *Floquet* en la tabla (5.3), se multiplica la amplitud de las componentes de los campos en la ranura correspondiente al índice $m = 0$ (que se encuentran en el primer renglón de la tabla (5.2)), por el factor de Floquet ff asociado, dado que el teorema de Floquet toma como base los campos en la ranura inicial para determinar el valor en otras ranuras. Como se puede ver, los valores de error relativo en la tabla (5.3) son satisfactorios (menores a 10 %) excepto para el caso de la componente H_y , en el cual el valor es 33 %.

Resultados de la sección que finaliza son:

- En las gráficas (5.12) y (5.14) se puede observar que el comportamiento de los campos en la GOP es sumamente atípico, llegando a presentar gran dificultad para su interpretación. Sin embargo, esquemas como el (5.9) que presenta los campos electromagnéticos en el interior de la ranura son similares a los encontrados en el caso de una GO rectangular o cuadrada. Los campos que presentan sólo una componente (por ejemplo las gráficas (5.11) y (5.15) para el campo magnético) también son relativamente comunes en el análisis de los campos electromagnéticos en GO.
- De la figura (5.16) y en conjunción con la tabla (5.2) se concluye que los campos electromagnéticos se comportan satisfactoriamente de acuerdo al patrón esperado, al tener en planos $z = md$ (con m entero positivo, d el periodo de la estructura) distribuciones *escaladas* de los campos, similares a la distribución encontrada en el plano $z = 0$ y cuyo factor de escala está dado por

$$\cos(md\beta_0)$$

donde se asumieron los valores $\beta_0 = \omega/c$ ($\omega = 2\pi f$, $f = 22.1$ [GHz] es la frecuencia de operación, c es la velocidad de la luz $\sim 3(10^8)$ [m s⁻¹]).

...

En este capítulo se tomó como referencia la guía WR340 para realizar una propuesta de las dimensiones de la GOP basado en una GO estándar. De la GOP analizada se han obtenido diversos parámetros como la frecuencia armónica de corte f_{ci} (ver ecuación (5.1) y tabla (5.1)) Además, se han obtenido mapas de los campos eléctrico, magnético y y electromagnético en planos transversales y longitudinales en el interior de la GOP (mapas (5.7) a (5.15)), se comprobó gráficamente (figura (5.16)) y numéricamente (tablas (5.2) y (5.3)) el teorema de Floquet [11, 13].

En el capítulo siguiente se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se ha analizado y diseñado una guía de onda con estructura periódica (GOP) basado en los análisis de sistemas con estructura periódica propuestos por varios autores [1, 3, 11, 12, 13].

De los resultados obtenidos se concluye lo siguiente:

- Ante la inexistencia de ondas armónicas ($i = 0$) el número de onda k_i se vuelve imaginario con la morfología que se ha propuesto, quedando

$$k_0^2 = -k_y^2$$

(recuérdese que se asumió $\beta_0 = \omega/c = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon}$) y por lo tanto no hay propagación de ondas electromagnéticas (OEM).

- Si se tuviera $\omega^2 \mu \epsilon > k_y^2 + \beta_0^2$ entonces podría propagarse la onda fundamental para la cual $i = 0$. Una forma de satisfacer tal condición es asumir que $\omega/c \neq \beta_0$, es decir que para $i = 0$ no se tenga la onda transversal electromagnética (TEM), a diferencia del planteamiento propuesto por el autor Ramo [13], cuyo análisis desarrollado es una de las bases de este trabajo. Matemáticamente, si $\omega^2 \mu \epsilon > k_y^2 + \beta_0^2$ se tiene

$$\begin{aligned} k_i^2 &= \omega^2 \mu \epsilon - k_y^2 - \beta_0^2 > 0 \\ \Rightarrow k_i^2 &> 0 \end{aligned}$$

con lo cual obliga a que k_i sea un número real, $k_i \in \Re$.

- Concretamente, en el diseño propuesto no existe la propagación de la onda fundamental cuando $w/d = 1$ por dos motivos: la onda fundamental es una TEM (la cual no se propaga en medios confinados debido a que no cumple las condiciones de frontera) y el número de onda k_i es imaginario.
- Se podría diseñar una GOP en la cual la morfología de k_i sea $k_i^2 = \omega^2 \mu \epsilon + k_y^2 - \beta_i^2$ (nótese el signo positivo en el término k_y^2). Si además se vuelve a asumir la onda TEM

cuando $i = 0$ (o sea $\omega/c = \beta_0$) y si $a = b$ entonces

$$\begin{aligned} k_i^2 &= k_y^2 \\ \Rightarrow k_i &= k_y \end{aligned}$$

diseño que concuerda con una GO cuadrada, no rectangular, en la cual $k_x = k_y = k_i$ son las constantes de separación que rigen también el número de medias variaciones de los campos en los respectivos ejes x e y .

- Entre las perspectivas de desarrollo posterior de este trabajo están:
 1. Encontrar el comportamiento de la amplitud del campo eléctrico y del campo magnético totales, reintroduciendo los valores de l en función de la frecuencia (véase figura (5.2)) en la ecuación (5.2).
 2. Obtener el patrón de radiación de los campos electromagnéticos, calculando la transformada de Fourier de las componentes de los campos y graficando en coordenadas polares.
 3. Modificar la geometría de la GOP, modelando un pequeño ángulo de apertura entre las paredes de la GOP y así se podría obtener una antena de tipo corneta [1, 10].
 4. Encontrar las soluciones de la ecuaciones de Maxwell en el interior de la GOP separadamente de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el interior de las ranuras y evaluarlas en los límites (fronteras) para probar la existencia de la unicidad de la solución de los campos electromagnéticos en una GOP.
 5. Extender la estructura periódica a un par de planos o más. Análisis similares ya existen, empero se refieren a una GOP circular [10] o bien se aborda ordinariamente desde una enfoque que implica la propagación de una sola armónica y por tanto las series de OEM armónicas se eluden [1].

Apéndice A

GO WR340

Para encontrar información referente a las guías de onda de paredes lisas , se puede consultar las direcciones de los fabricantes, algunas de las cuales son

www.pennengineering.com
www.microwaveeng.com
www.mdllab.com

Algunos de ellos manufacturan elementos sobre pedido con las características deseadas para la aplicación particular que uno desee. Acerca de la guía de onda WR340, algunos datos son

f_L [GHz]	f_U [GHz]	Ancho int. [mm]	Altura int. [mm]
2.2	3.3	86.36	43.18

Tabla A.1: Datos de guía de onda WR340

f_L es la frecuencia de operación mínima, f_U es la máxima y las otras dos dimensiones son internas de la GO. Por otro lado, las GO pueden ser fabricadas en general de aluminio, bronce, cobre y plata.

En las páginas siguientes se muestra secciones de las hojas de datos de las empresas mencionadas, Penn Engineering, MEC y MDL.

Porción de las hojas de datos de Penn Engineering.

Porción de las hojas de datos de MEC.

Porción de las hojas de datos de MDL.

Bibliografía

- [1] P. J. B. Clarricoats. *Corrugated horns for microwave antennas*. Peter Peregrinus Ltd., UK, 1984.
- [2] L. Escobar. *Fundamentos de Teoría Electromagnética*. FI UNAM, México, 2001.
- [3] N. Fiódorov. *Fundamentos de electrodinámica*. Mir, URSS, 1982.
- [4] J. Helszajn. *Microwave Engineering*. McGraw-Hill, Singapur, 1992.
- [5] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & sons, USA, 1975.
- [6] C. T. A. Johnk. *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*. John Wiley & sons, USA, 1988.
- [7] S. O. Konorov et. al. Waveguide modes of electromagnetic radiation in hollow-core microstructure and photonic-crystal fibers. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 96(5), 2003.
- [8] J. D. Kraus. *Electromagnetics*. McGraw-Hill, USA, 1999.
- [9] L. Lei y E. Jerby. Two-dimensional cyclotron-resonance maser array: Spectral measurements with one and two electron beams. *Physical Review E*, February 1999.
- [10] I. Mendoza y R. Sámano. *Antenas cónicas corrugadas*. Tesis FI UNAM, México, 2001.
- [11] V. Nikolski. *Electrodinámica y propagación de ondas de radio*. Mir, URSS, 1976.
- [12] D. Pozar. *Microwave Engineering*. Addison-Wesley, USA, 1990.
- [13] S. Ramo, J. R. Whinnery y T. Van Duzer. *Fields and waves in communication electronics*. John Wiley & sons, USA, 1964.
- [14] J. Sosa. *Líneas de transmisión y guías de onda*. Limusa, México, 1988.
- [15] D. Zheng y R. L. Byer. Proposed waveguide structure for laser driven electron acceleration. Technical report, Ginzton Lab., Stanford University, 1996.