



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**MODELADO Y SIMULACIÓN DEL
PROCESO DE LAMINADO:
MÉTODO DEL PLANCHÓN**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO**

P R E S E N T A:

ORLANDO LEÓN GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS

M. en I. ARMANDO ORTIZ PRADO



CD. UNIVERSITARIA

2003

SEPTIEMBRE



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta tesis está dedicada a:

*A mi madre,
quien con su cariño y fortaleza siempre me ha apoyado en mis
triumfos y derrotas.*

*A mi padre,
que nunca me ha negado su ayuda y apoyo cuando se la he pedido.*

*A mi hermano Carlos,
quien me ha enseñado el significado de la perseverancia.*

*A mi hermano Marco,
de quien me siento orgulloso por quien es.*

*A mi hermano Gerardo,
de quien admiro su fortaleza ante las situaciones difíciles.*

*A mi amigo Erick,
que en estos 17 años de amistad siempre he podido contar con él.*

*A Blanca, Reyna, Anareli, Perla, Nancy, Alejandro, Fernando, Félix,
León, Martín, Samuel, Shair y Mauro, mis amigos en el amplio sentido
del significado de la palabra “amistad”.*

AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo estuvo bajo la dirección del M. en I. Armando Ortiz Prado a quien sinceramente le agradezco su amistad, apoyo y confianza que me ha brindado durante estos tres años. Su experiencia y conocimientos han sido de valiosa ayuda para mi formación como universitario y el desarrollo de este trabajo de tesis.

A los profesores:

M. en C. Sara Mercedes Cerrad Sánchez.

M. en I. Victor Hugo Jacobo Armendáriz.

M. en C. Ubaldo Márquez Amador.

M. en C. Rafael Schouwenaars Franssens.

Por su aporte de conocimientos como estudiante y tesista.

Al Ingeniero Marco Ramírez, por su aporte de conocimientos al presente trabajo.

Al personal que conforma a la UDIATEM, por su apoyo y amistad.

A la UNAM, por las oportunidades que me ha brindado como universitario.

Orlando León

INDICE DE CONTENIDO.

PRÓLOGO.....	III
--------------	-----

NOMENCLATURA.....	V
-------------------	---

Capítulo 1. Antecedentes

1.1 Introducción.....	1
1.2 El Proceso de Laminado.....	2
1.3 Clasificación del Proceso Laminado.....	3
1.3.1 Laminado en caliente.....	4
1.3.2 Laminado en frío.....	4
1.4 Análisis del Laminado de Producto Planos.....	6
1.5 El Proceso de Colaminado.....	7
1.6 Clasificación de los procesos de Laminado y Colaminado.....	8
1.6.1 Caso simétrico.....	8
1.6.2 Caso no simétrico.....	9

Capítulo 2. Conceptos Básicos.

2.1 Conceptos de Mecánica del Medio Continuo.....	10
2.1.1 Esfuerzo.....	11
2.1.2 Deformación.....	13
2.1.3 Deformación plana.....	14
2.1.5 Elasticidad isotrópica.....	15
2.1.4 Ecuación de Cauchy.....	16
2.2 Principios de plasticidad.....	18
2.2.1 Criterios de fluencia.....	19
2.2.2 Criterio de Tresca.....	20
2.2.3 Criterio de von Mises.....	21
2.2.4 Esfuerzo efectivo.....	23
2.2.5 Deformación efectiva.....	23
2.2.6 Reglas de Flujo.....	24
2.3 Relaciones Esfuerzo-Deformación.....	25
2.4 Fricción.....	27

2.4.1 Ley de Coulomb.....	27
2.4.2 Teoría de la adhesión.....	28
2.4.3 Fricción adherente.....	29
2.5 Método del Planchón.....	30

Capítulo 3. Descripción del Modelo.

3.1 Estado del arte.....	32
3.1.1 Modelo de Orowan.....	32
3.1.2 Modelo de Sims.....	33
3.1.3 Modelo de Bland y Ford.....	34
3.2 Consideraciones del modelo.....	35
3.3 Variables dependientes e independientes del modelo.....	36
3.4 Desarrollo del modelo.....	37
3.5 Condiciones de frontera.....	45
3.6 Generalidades del software de aplicación.....	46

Capítulo 4. Resultados.

Comparación entre los casos distintos de laminación.....	52
--	----

Capítulo 5. Planteamiento del Modelo de Colaminación.

5.1 Estado del arte.....	58
5.2 Consideraciones del modelo.....	61
5.3 Variables dependientes e independientes del modelo.....	62
5.4 Desarrollo del modelo.....	62
5.5 Condiciones de frontera.....	70

CONCLUSIONES.....	72
--------------------------	-----------

BIBLIOGRAFÍA.....	73
--------------------------	-----------

ANEXO I. INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.....	75
--	-----------

ANEXO II. DATOS DE SALIDA.....	78
---------------------------------------	-----------

ANEXO III. ARCHIVOS DE ENTRADA Y SALIDA DE LAMPLAN.....	83
--	-----------

ANEXO IV. CÓDIGO FUENTE DE LAMPLAN.....	86
--	-----------

PRÓLOGO

En el presente trabajo se expone el desarrollo de un modelo para la simulación del proceso de laminación. Este modelo tiene sus bases en el método del Planchón, que a pesar de ser uno de los métodos más sencillos aplicados para laminación, no implica que los resultados obtenidos estén muy alejados de la realidad. De hecho, el método del Planchón permite obtener una aproximación aceptable sin la necesidad de realizar una gran cantidad de cálculos, como sucede con otros métodos. Sin embargo, hay que admitir que mientras más exacta se requiera una solución en este método, el modelo matemático empieza a complicarse más, hasta el grado que, para obtener una función analítica de la solución resulta casi imposible con las herramientas matemáticas existentes hasta el momento. Afortunadamente, el gran desarrollo que se tiene en la computación actualmente, ha hecho factible la aplicación de métodos numéricos a modelos complejos. Es por esa razón que el modelo que se plantea en este trabajo es resuelto a través de un software que emplea métodos numéricos.

El programa resultante del modelo ha sido nombrado LAMPLAN, el cual tiene como función básica el análisis del caso simétrico de un proceso de laminación en frío, considerando la región elástica del material de trabajo. Además, también permite comparar este modelo con otros ya existentes, los cuales presentan diferentes consideraciones con el propósito de simplificar su análisis. El desarrollo del programa se realizó en lenguaje C, y necesita la introducción de los datos del problema por medio de un archivo de texto. Los resultados del software se obtienen en otro archivo de texto, en el cual su formato permite su fácil manejo dentro del entorno de Microsoft Excel, permitiendo la manipulación y visualización de los datos.

En el primer capítulo del trabajo se realiza una descripción general del proceso de laminación, el cual comprende una pequeña reseña histórica del proceso, su clasificación y un análisis del proceso de laminación de productos planos. También se hace una descripción de una variante del proceso de laminación de productos planos conocida como colaminación; en donde dos o más materiales se laminan uno sobre otro formando un conglomerado cuyas propiedades como producto final (que son función de la combinación óptima de materiales) resultan ser adecuadas para ciertas aplicaciones específicas.

En el segundo capítulo se describen los conceptos básicos relacionados con el proceso de conformado en cuestión. Se presentan conceptos de mecánica del medio continuo, los antecedentes de la teoría de plasticidad, la teoría básica sobre fricción seca y una breve

descripción del método del Planchón. Estos temas tienen como finalidad el mostrar la teoría en la cual se basa el modelo desarrollado.

El capítulo 3 presenta el desarrollo de las ecuaciones que conforman el modelo que utiliza LAMPLAN, además de las consideraciones implicadas en el modelo. Se incluye el estado del arte sobre la aplicación de este método en el proceso de laminación, y se describen los cuatro casos que analiza LAMPLAN. Los resultados obtenidos de un ejemplo tomado de un proceso de laminación se discuten en el capítulo 4.

Finalmente, en el capítulo 5 únicamente se plantean las ecuaciones para el modelo del proceso de colaminación. Lo original de este análisis es que se pretende obtener la relación de espesores a la salida del proceso mediante el uso del método del Planchón. Además se utilizarán los resultados del capítulo 4 para justificar una simplificación hecha al modelo.

Una de las finalidades de este trabajo es dar inicio al desarrollo de un modelo que describa el proceso de colaminado basado en el método del Planchón, para posteriormente comparar los resultados con datos experimentales y de esa manera evaluar la eficacia del modelo. Si el modelo resulta satisfactorio, se obtendría una herramienta poderosa, y a la vez simple, para el análisis de este proceso, cuya aplicación de sus productos en la industria se ha visto ampliada recientemente.

Orlando León García.
Septiembre de 2003.

NOMENCLATURA

La lista de símbolos que se muestra a continuación únicamente se aplica para el desarrollo de los modelos para los procesos de laminación y colaminación, los cuales corresponden a los capítulos 3 y 5.

E	Módulo de Young.
ε_{ef}	Deformación efectiva.
ε_y	Deformación real en la dirección y .
F_r	Fuerza de reacción en los rodillos por unidad de ancho.
f_r	Fricción de los rodillos.
f_c	Fricción provocada por el contacto entre la capa interna y la externa.
h	Espesor total del material de trabajo para laminación y colaminación.
h_0	Espesor total inicial del material de trabajo para laminación y colaminación.
h_f	Espesor total final del material de trabajo para laminación y colaminación.
h_e	Espesor de la capa externa.
h_{e0}	Espesor inicial de la capa externa.
h_{ef}	Espesor final de la capa externa.
h_i	Espesor de la capa interna.
h_{i0}	Espesor inicial de la capa interna.
h_{if}	Espesor final de la capa interna.
K	Coefficiente de resistencia.
k	Esfuerzo cortante de fluencia.
k_{min}	Esfuerzo cortante de fluencia del material más blando en el conglomerado.
m	Factor de fricción.
μ	Coefficiente de fricción.
n	Exponente de endurecimiento por deformación en frío.
ν	Coefficiente de Poisson.
P_r	Carga de los rodillos.
P_c	Carga normal provocada por la interacción entre la capa interna y la externa.
R	Radio de los rodillos.
θ	Angulo de contacto para laminación.
θ_c	Angulo de contacto entre la capa externa y la capa interna.
θ_N	Angulo de contacto del punto neutro.
θ_r	Angulo de contacto entre el rodillo y la capa externa.

θ_T	Angulo de contacto total para laminación.
σ_0	Esfuerzo normal de fluencia.
σ_1	Esfuerzo principal en la dirección 1.
σ_2	Esfuerzo principal en la dirección 2.
σ_3	Esfuerzo principal en la dirección 3.
σ_x	Esfuerzo principal en la dirección x .
σ_{xi}	Esfuerzo principal en la dirección x de la capa interna.
σ_{xe}	Esfuerzo principal en la dirección x de la capa externa.
σ_y	Esfuerzo principal en la dirección y .
T_r	Torque de laminado por unidad de ancho.
w	Ancho del material de trabajo.
Y_0	Esfuerzo normal de fluencia para una prueba de tracción uniaxial.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 INTRODUCCIÓN

La contribución de la manufactura al producto nacional bruto (PNB) en un país industrializado es un excelente indicador, sino es que hasta exclusivo, de su grado de desarrollo como nación. Lo anterior se puede demostrar en la gráfica de la figura 1.1, en la que se presenta la contribución de la manufactura al PNB como una función del PNB per capita. La gráfica posiciona a Alemania como líder, seguido por Suiza, Japón, Italia, Francia y los Estados Unidos de América. En la escala más baja están las naciones en vías de desarrollo, como lo son Bangladesh, Zaire y Etiopía. México se encuentra en una posición un poco superior a estos países, teniendo en cuenta la escala logarítmica.

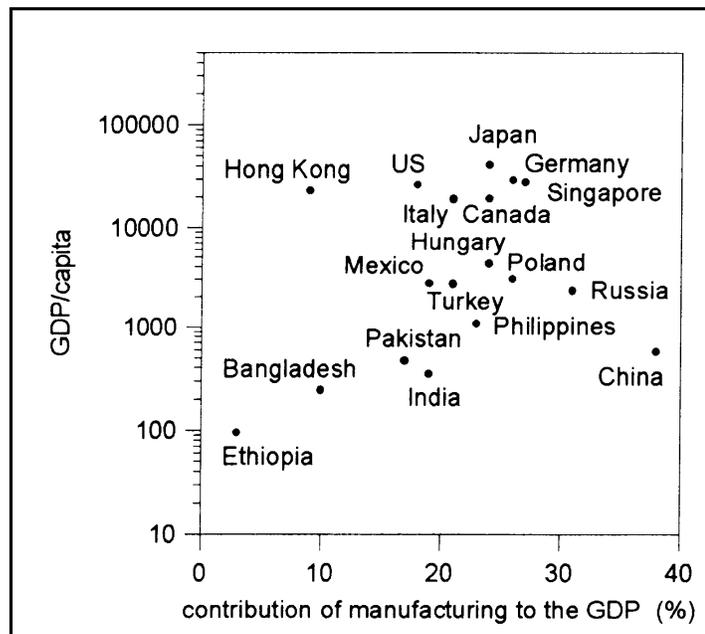


Figura 1.1 Contribución de la manufactura al PNB en 1995.

Debido a la importancia que tienen los procesos de manufactura en la economía de un país, se ha realizado un gran número de investigaciones con el propósito de comprender y explicar el comportamiento de estos procesos y, de esa manera, diseñar y controlar las características físicas del producto final.

Gracias a la capacidad de procesamiento de datos de las computadoras, actualmente los modelos numéricos de cálculo son herramientas posibles e indispensables en el diseño de procesos de manufactura. Sin embargo, aún con todo el potencial de cálculo actual y los avances en la ciencia, no existen soluciones exactas que describan completa y cabalmente el comportamiento de algunos de estos procesos.

A pesar de ello, un sin número de aproximaciones han sido propuestas por varios autores para el modelado matemático y simulación de dichos procesos, en donde se aplican diversas teorías y herramientas matemáticas que buscan dar una solución al problema de predecir el comportamiento de un material durante su procesamiento, así como los parámetros involucrados durante el mismo.

Entre los procesos de conformado mecánico, que son una rama de los procesos de manufactura, el proceso de laminación es uno de los más importantes debido al campo de aplicación que tan amplio que tienen sus productos.

1.2 EL PROCESO DE LAMINADO

Dentro de los procesos de conformado mecánico, el laminado es un proceso de deformación volumétrica, en el cual el espesor del material de trabajo se reduce mediante fuerzas de compresión ejercidas a través de dos rodillos que giran en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura 1.2. Debido al giro de los rodillos, el material de trabajo se introduce hacia el claro de laminación por las fuerzas de fricción a la vez que es comprimido por los rodillos. El proceso básico de laminación es el laminado de productos planos, que es el que se muestra en la figura 1.2, utilizado para reducir el espesor de una sección transversal rectangular, donde las dimensiones del ancho son mucho mayores que el espesor.

La mayoría de los procesos de laminado involucran una alta inversión de capital, debido a que se requieren piezas de equipo pesado llamadas molinos laminadores o de la laminación. El alto costo de inversión exige que los molinos se usen para producción en grandes cantidades de artículos estándar como láminas y placas.

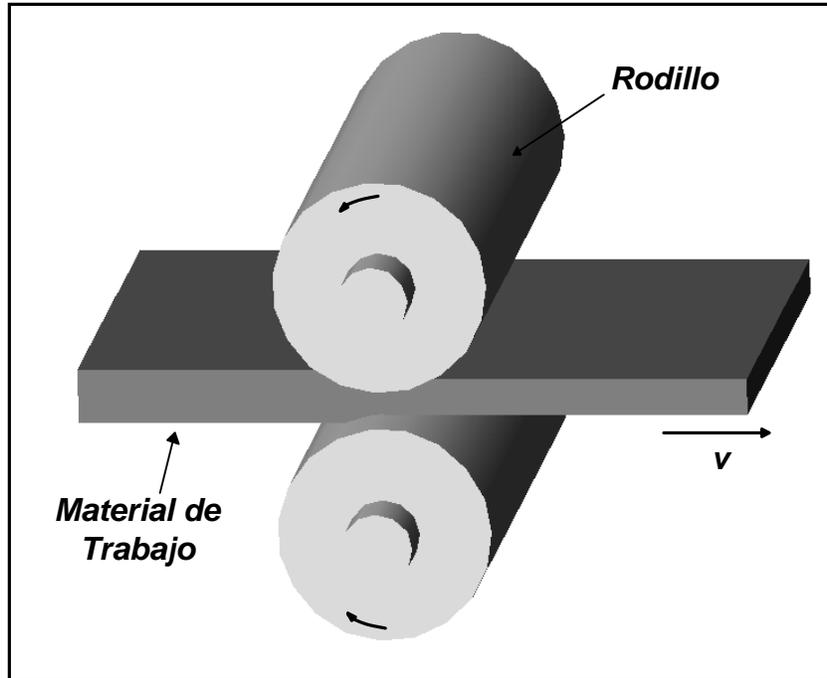


Figura 1.2 Proceso de laminación.

La práctica moderna del laminado data del año 1783, cuando se expidió en Inglaterra una patente para un proceso que producía barras de hierro usando rodillos acanalados; anteriormente, la historia registra el diseño de un molino de laminación realizado por Leonardo da Vinci en el año 1480. Hoy en día los productos laminados abarcan cerca del 90% de los productos fabricados mediante procesos de conformado tradicionales, debido al bajo costo de producción y el gran campo de aplicaciones.

Dada la gran variedad de aplicaciones, resulta interesante el análisis del proceso mediante técnicas analíticas. La necesidad de predecir el comportamiento de un material al ser deformado para obtener un producto se remonta a los primeros estudios de la deformación plástica de los metales (esto es a fines del siglo XIX). La mayor parte de la teoría del conformado de metales se ocupa finalmente de la predicción de las tensiones mecánicas o de los esfuerzos que actúan durante la deformación del metal, y en consecuencia, de las fuerzas que se deben aplicar.

1.3 CLASIFICACIÓN DEL PROCESO DE LAMINADO

Una de las clasificaciones principales en que se divide el proceso de laminado depende del rango de la temperatura en la que se desarrolla el proceso, por lo que es común referirse al laminado en frío y al laminado en caliente. Esta clasificación se basa en la gran variación que existe entre las propiedades de los productos y las condiciones del proceso.

En la industria, la práctica usual es laminar primero a altas temperaturas, para finalmente aplicar laminado en frío. El laminado en caliente se aplica cuando se desean realizar

deformaciones considerables con cargas no tan elevadas, mientras que el laminado en frío se utiliza cuando se necesita gran precisión dimensional y para mejorar las propiedades mecánicas.

1.3.1 LAMINADO EN CALIENTE

En el laminado en caliente, el material de trabajo entra a los rodillos a una temperatura superior a su temperatura de recrystalización, la cual es aproximadamente la mitad de su punto de fusión en la escala absoluta. El material de trabajo se suaviza más conforme se eleva la temperatura por encima de la de recrystalización; sin embargo, existe el inconveniente de que durante el proceso de laminación se genera en ocasiones el calor necesario para causar la fusión en ciertas regiones.

La ventaja más significativa del laminado en caliente radica en la capacidad de producir deformaciones plásticas sustanciales en el material, a diferencia del laminado en frío. Dentro de otras de sus ventajas están que los productos obtenidos generalmente están libres de esfuerzos y sus propiedades son isotrópicas. Las desventajas del laminado caliente son que el producto no puede mantenerse dentro de tolerancias estrechas, y la superficie presenta una capa de óxido característica.

En los últimos 40 años, las tecnologías del control de proceso han sido desarrolladas ampliamente con el propósito de satisfacer las demandas de dimensiones de alta precisión, de un control estrecho en las propiedades físicas y mecánicas y de la obtención de una productividad alta. En los procesos de laminación en caliente modernos, el control de proceso es totalmente computarizado, por lo que las propiedades del producto final pueden ser controladas con mayor precisión.

1.3.2 LAMINADO EN FRÍO

La temperatura a la que se produce el laminado en frío es la del ambiente o un poco superior a ella. Las ventajas más significativas del laminado en frío en comparación al laminado en caliente son: proporcionar mejor precisión dimensional, lo que significa tolerancias más estrechas del espesor; superficie del material libre de incrustaciones o capas de óxido; endurecimiento por deformación, lo cual aumenta la resistencia y la dureza del material de trabajo; y, en cuestiones económicas, debido al ahorro de costos de horno y combustible.

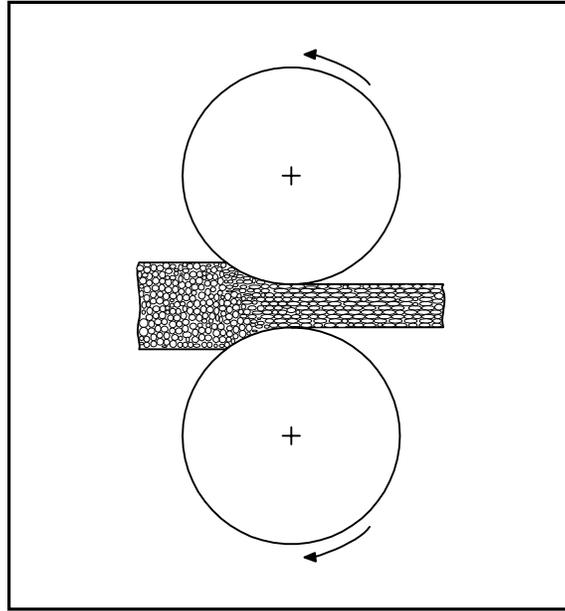


Figura 1.3 Orientación de granos en el laminado en frío.

Además de las ventajas anteriores, hay una que cabe mencionar por separado, y es la referente a la orientación de los granos. Antes de que el material de trabajo sea laminado, todos los granos que conforman el metal se encuentran sin una dirección en específico, y esto se refleja en las propiedades del material mediante su isotropía. Sin embargo, como se observa en la figura 1.3, debido a la deformación provocada por el proceso de laminación, los granos obtienen una dirección orientada hacia el flujo del material, por lo que las propiedades se vuelven direccionales. Esta anisotropía del material por lo general resulta conveniente en el producto, principalmente porque la resistencia en la dirección longitudinal del material se ve incrementada. Pero en ocasiones está característica de los productos laminados resultan indeseables, por ejemplo, en el proceso de embutido en el que se obtienen piezas defectuosas si no se tiene en cuenta la anisotropía de la lámina.

Entre una de las desventajas asociadas con el laminado en frío, está la elevada carga que sufren los rodillos durante el proceso, que es un limitante para la cantidad de reducción del material de trabajo.

1.4 ANÁLISIS DEL LAMINADO DE PRODUCTOS PLANOS

El proceso de laminado de productos planos se ilustra en la figura 1.4. Este proceso involucra el laminado de planchas, tiras, láminas y placas, y partes de trabajo de sección transversal rectangular con un ancho mayor que el espesor. En el laminado plano se acostumbra expresar la relación entre el espesor final y el inicial en términos de un cociente conocido como *reducción*, r .

$$r = \frac{h_0 - h_f}{h_0} \quad (1.1)$$

Cuando se utiliza una serie de operaciones de laminado, la reducción se toma como la suma de los adelgazamientos dividida entre el espesor original.

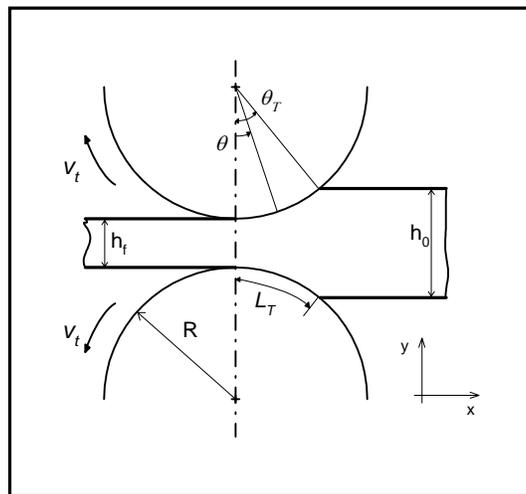


Figura 1.4 Variables del laminado plano.

Además de reducir el espesor, el laminado incrementa usualmente el ancho del material de trabajo. Esto se conoce como ensanchamiento (*spreading*), y tiende a ser más pronunciado con bajas relaciones entre ancho y espesor, así como con bajos coeficientes de fricción.

Los rodillos entran en contacto con el material de trabajo a lo largo de un arco de contacto definido por el ángulo de contacto, θ . Cada rodillo tiene un radio R y su velocidad de rotación tiene una velocidad tangencial v_t . Esta velocidad es mayor que la velocidad de trabajo v_0 y menor que la velocidad de salida v_f . Como el flujo de metal es continuo, hay un cambio gradual en la velocidad del material de trabajo entre los rodillos. Sin embargo, existe un punto a lo largo del arco donde la velocidad del trabajo iguala la velocidad del rodillo. Este punto se llama *punto neutro*, también conocido como punto de no deslizamiento, localizado a un ángulo de contacto θ_N . A cualquier lado de este punto, ocurren deslizamientos y fricción entre el rodillo y el material de trabajo

La fricción se presenta en el laminado como una de las fuerzas que tienen mayor importancia en este proceso. En el lado de la entrada del punto neutro la fuerza de fricción tiene una dirección a favor del flujo del material, mientras que en el otro lado, tiene la dirección opuesta. Sin embargo, las dos fuerzas no son iguales. La fuerza de fricción es

mayor en la entrada, de manera que la fuerza neta jala el trabajo a través de los rodillos. El laminado no sería posible sin estas diferencias.

Las variaciones en la presión del rodillo a lo largo del arco de contacto son significativas. La presión alcanza un máximo en el punto neutro y se desvanece a cada lado de los puntos de entrada y salida. Al aumentar la fricción, la presión se incrementa al máximo relativo entre los valores de entrada y salida. Al disminuir la fricción, el punto neutro se corre hacia la salida a fin de mantener una fuerza neta que jale el material en la dirección del laminado. De otra forma, con una baja fricción, el material de trabajo podría deslizarse en lugar de pasar entre los rodillos.

1.5 EL PROCESO DE COLAMINADO

El colaminado de metales es un proceso de conformado mecánico utilizado para la obtención de materiales compuestos laminares. Los materiales que conforman el compuesto pueden seleccionarse para proporcionar combinaciones poco usuales y difíciles de obtener en los materiales originales, como son: rigidez, resistencia, peso, rendimiento a temperatura alta, resistencia a la corrosión, dureza o conductividad.

Los productos colaminados incluyen recubrimientos muy delgados, superficies protectoras más gruesas, revestimientos, elementos bimetálicos y laminados entre otros. Muchos son diseñados para mejorar la resistencia a la corrosión mientras se mantiene un bajo costo, alta resistencia o bajo peso. Otras aplicaciones importantes incluyen una resistencia superior al desgaste o abrasión, características poco usuales de expansión térmica, e incluso para fines estéticos como es el caso de la chapa para acuñado empleada en Estados Unidos: una aleación Cu-80%Ni se une por ambos lados a una aleación Cu-20%Ni; la aleación de alto níquel da una tonalidad parecida a la plata, mientras que el núcleo predominantemente de cobre garantiza un bajo costo.

Los materiales de revestimiento tienen una combinación de buena resistencia a la corrosión y alta resistencia mecánica. El *Alclad* es un compuesto en el cual el aluminio comercialmente puro se une con aleaciones de aluminio de mayor resistencia. El aluminio puro protege de la corrosión a la aleación más resistente. El espesor de la capa de aluminio puro es de entre 1% y 15% del espesor total. Este metal se utiliza en la construcción de aeronaves, cambiadores de calor, edificios y tanques de almacenamiento, donde son deseables las combinaciones de resistencia a la corrosión, resistencia mecánica y bajo peso.

El colaminado es una variante del proceso de laminación convencional, es decir, la unión permanente de metales se da por medio de la compresión entre rodillos, los cuales producen la deformación plástica de los materiales por medio de esfuerzos de compresión y cortantes. Los esfuerzos de compresión se deben a que según el material se introduce, el espesor libre entre los rodillos (claro de laminación) es cada vez menor; los esfuerzos cortantes son debido a que las fibras externas de los materiales están sujetas a la fuerza de fricción de los rodillos.

1.6 VARIANTES DEL PROCESO DE COLAMINADO

La simetría del proceso queda básicamente determinada por el número, disposición y espesor de las capas a unir. Adicionalmente la velocidad, dimensiones y rugosidad de los rodillos definirán también condiciones de simetría. La simetría se tomará con relación a la disposición de los materiales respecto al plano medio que divide al claro de laminación en iguales al considerar que los rodillos superior e inferior son iguales y los parámetros de operación los mismos. El análisis del proceso se simplifica cuando existe simetría tanto en la disposición del material como en la operación del laminador puesto que los flujos serán iguales para ambas mitades.

1.6.1 CASO SIMÉTRICO

Al contar con una disposición simétrica de los materiales a colaminar, cuando los rodillos del laminador en contacto con el material son del mismo diámetro y cuando las velocidades de éstos son iguales, el proceso de modelado se simplifica. Con este se consigue un ahorro significativo en recursos de cómputo. El colaminado simétrico facilita el modelado al requerir únicamente estudiar la deformación de la mitad del conglomerado. El ejemplo más sencillo de colaminado simétrico se muestra en la figura 1.5, en donde tres capas de materiales: dos de ellas iguales tanto en propiedades como en espesores (exteriores en contacto con los rodillos) y una tercera intermedia, son laminadas conjuntamente por un laminador con rodillos del mismo diámetro. Comúnmente se tiene que la capa que presenta menos deformación es la intermedia.

El colaminado simétrico se ajusta perfectamente a la primera etapa de la fabricación de cojinetes de deslizamiento, en donde se tiene un conglomerado Al-AlSn-Al.

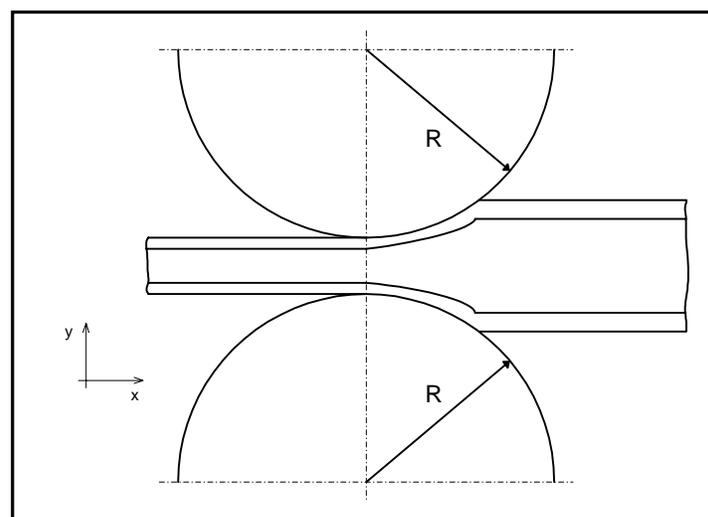


Figura 1.5 Caso simétrico.

1.6.2 CASO NO SIMÉTRICO

Cuando la disposición de los materiales no es simétrica, y el diámetro de los rodillos de trabajo no es el mismo o bien si las velocidades angulares de éstos difieren, el análisis del proceso resulta más complejo. En la figura 1.6 se muestra el caso no simétrico más simple, en donde la velocidad lineal de los rodillos es la misma.

El laminado conjunto no-simétrico se ajusta a la etapa terminal de la fabricación de cojinetes de deslizamiento, en donde el conglomerado Al-A1Sn-Al (que una vez conformado, prácticamente puede ser considerado como un único material) se une a una cinta de acero por medio de la acción mecánica del laminador.

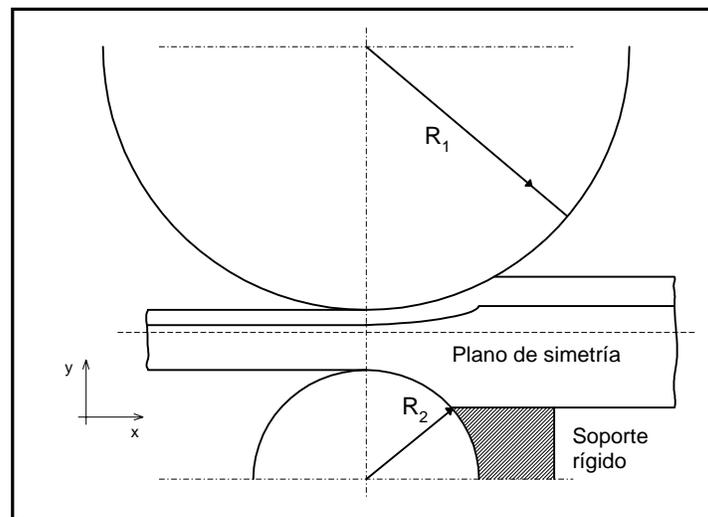


Figura 1.6 Caso no simétrico.

CAPÍTULO 2

CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 CONCEPTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

La composición atómica y molecular de la materia está bien establecida. A escalas lo suficientemente pequeñas, por ejemplo, un bloque de aluminio se puede representar como un conjunto discreto de varios átomos de aluminio organizados en celdas que se repiten, y a una escala aún más pequeña, los átomos están conformados por un núcleo de protones y neutrones del cual los electrones giran alrededor en una órbita. De esta forma, se comprueba que la materia no es continua. Sin embargo, el aceptar que la materia se comporta como un continuo, implica ignorar la composición discreta de los materiales, y asumir que la materia de dichos cuerpos está distribuida uniformemente en su totalidad, sin espacios vacíos. Es decir, se podría dividir indefinidamente la materia en muy pequeños elementos, y cada elemento tendría las mismas propiedades físicas del cuerpo original.

El concepto del continuo resulta aplicable satisfactoriamente a la realidad cuando en un análisis se consideran cuerpos cuyas dimensiones características son mucho mayores en comparación de las distancias moleculares. Poniendo números, cuando las dimensiones son mayores a 1 [μm] se puede considerar a un cuerpo como continuo.

La *Mecánica del Medio Continuo* se encarga del análisis del comportamiento cinemático y mecánico de materiales que son modelados como continuos.

En este capítulo se aplica la mecánica del medio continuo con el propósito de dar las bases para la obtención de las ecuaciones fundamentales que conforman el modelo matemático de los procesos de laminación y colaminación. Además de aplicar el concepto de medios continuos, también se realizan otras dos consideraciones respecto a las propiedades de los materiales. La primera, es que los materiales son homogéneos, que implica que las propiedades en cualquier región del material son las mismas en todo el cuerpo, y la segunda, que las propiedades de los materiales no cambian con la dirección, sin importar su localización, a lo que se le conoce como isotropía.

2.1.1 ESFUERZO

Usualmente, el esfuerzo se define como la sollicitación de un medio continuo a una carga o sollicitación, esta reacción es directamente proporcional a la fuerza aplicada e inversamente proporcional al área sobre la cual actúa. Las fuerzas involucradas en esta relación son las denominadas fuerzas de superficie, las cuales actúan por contacto y pueden ser clasificadas como de carga o de presión.

Las fuerzas internas en el sólido afectan el estado de los enlaces que mantienen unidas a las partículas de éste, manifestándose por consiguiente en una reacción física. Por lo tanto, el esfuerzo se define como la reacción interna de un material en un punto de dimensiones diferenciales, es decir

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.1)$$

La resultante (F) se puede descomponer en dos componentes: una componente normal y una componente tangencial con respecto al área de contacto. A partir de estos dos tipos de fuerzas, se pueden definir esfuerzos normales y esfuerzos cortantes.

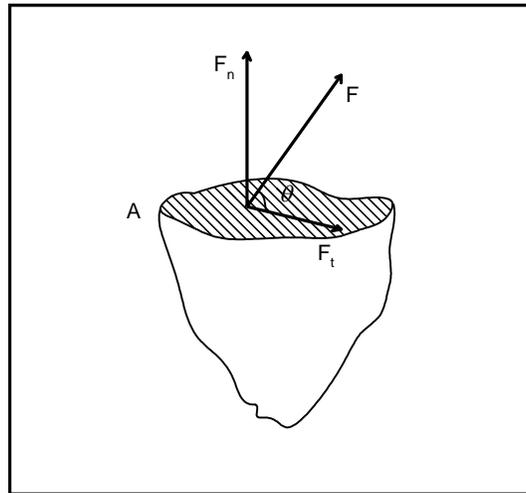


Figura 2.1 Fuerza F aplicada a un ángulo θ sobre un cuerpo.

$$\sigma = \frac{dF_n}{dA} \quad (2.2)$$

$$\tau = \frac{dF_t}{dA} \quad (2.3)$$

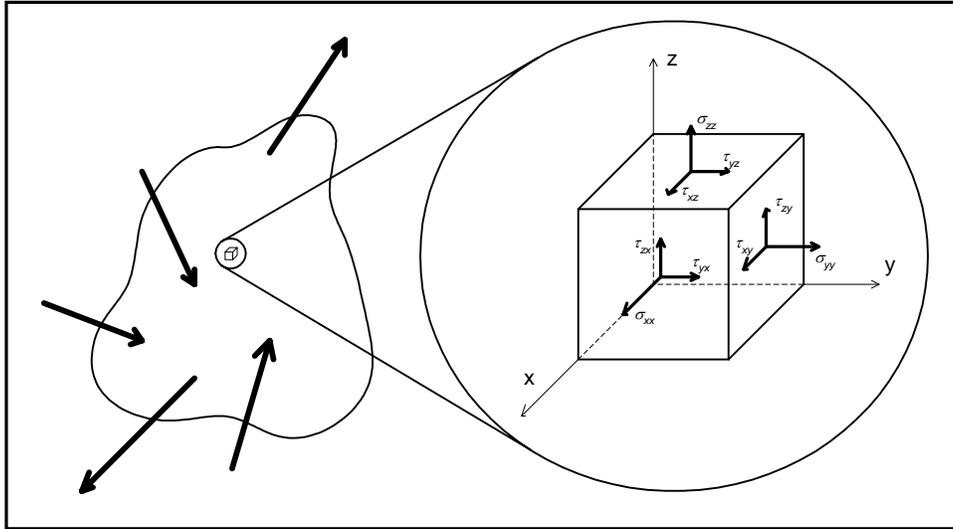


Figura 2.2 Estado de esfuerzos de un volumen diferencial.

Si se analiza un volumen diferencial de un cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sujeto a una serie de sollicitaciones externas, como el de la figura 2.2, se obtendría que cualquier combinación de esfuerzos aplicados al elemento diferencial podría reducirse a 18 componentes, 3 por cada cara. Sin embargo, como el cuerpo se encuentra en equilibrio, por balance de fuerzas se reduce a la mitad el número de incógnitas. El conjunto de estos 9 esfuerzos definen el estado de esfuerzos, es decir, el total de las reacciones en el interior de un cuerpo sometido a sollicitaciones externas. La representación matemática del estado de esfuerzos es por medio de un tensor de segundo rango σ_{ij} , conocido como tensor de esfuerzos, que en forma matricial quedaría expresado como

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

El número de componentes linealmente independientes se reduce a seis al aplicar la ecuación de momentos angulares. También se encuentra, que al haber equilibrio de momentos angulares, el tensor obtenido es simétrico. Aplicando estos resultados a la ecuación 2.4, se obtiene:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Cabe destacar que la magnitud de cada componente del tensor de esfuerzo depende de la dirección del sistema coordenado elegido. Existen direcciones en las que algunos componentes del tensor de esfuerzo tienen un valor de cero. Un ejemplo obvio de esta

situación se observa en una prueba de tracción, los esfuerzos normales perpendiculares a la dirección de la fuerza de tracción son nulos.

Existe un conjunto de ejes coordenados (1, 2 y 3) a lo largo de los cuales el valor de los esfuerzos cortantes se anula. A los esfuerzos normales que conforman a este tensor de esfuerzos ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) se le denominan esfuerzos principales, mientras que a las direcciones se les conoce como ejes principales.

La magnitud de los esfuerzos principales puede ser determinada por la siguiente ecuación cúbica:

$$\sigma_p^3 - I_1\sigma_p^2 + I_2\sigma_p - I_3 = 0 \quad (2.6)$$

A los coeficientes I_1, I_2 y I_3 se les conoce como invariantes, debido a que son independientes del sistema coordenado escogido. El valor de cada uno de los invariante está dado por

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.7)$$

$$I_2 = (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) \quad (2.8)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) \quad (2.9)$$

Para un estado de esfuerzos dado, los esfuerzos principales son únicos.

2.1.2 DEFORMACIÓN

La deformación se define como el cambio de forma de un cuerpo provocado por la aplicación de una carga. Conforme un sólido es deformado, los puntos que conforman al cuerpo tienen un determinado desplazamiento. La forma de medir las deformaciones es por medio de estos desplazamientos; sin embargo, es necesario excluir los efectos del movimiento de cuerpo rígido, tal como las traslaciones y las rotaciones puras.

Siendo el cambio de longitud lo que se usa para definir la deformación, se obtiene que:

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.10)$$

donde e es conocida como deformación ingenieril o nominal. Para deformaciones grandes, es más conveniente utilizar una definición alternativa, propuesta por Ludwick. La deformación real, ϵ , también conocida como logarítmica o natural, es definida como el cociente del cambio en el incremento de longitud entre la longitud actual. Expresado en forma matemática se tiene:

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad (2.11)$$

Al integrar la ecuación 2.11 se obtiene:

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} \quad (2.12)$$

A pesar de la simplicidad de cálculo que implica el uso de deformaciones ingenieriles, este tipo de deformación no cumple con la propiedad de aditividad. La propiedad de aditividad consiste en que la suma de incrementos en la deformación es igual a la deformación total. En el caso de las deformaciones reales, éstas si cumplen con esta propiedad, por lo que es más conveniente su uso.

Al igual que en el caso de esfuerzos, las deformaciones también se utiliza un tensor de deformaciones, que es definido de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Como ya se había mencionado, las deformaciones no contemplan los movimientos relacionados al cuerpo rígido, por lo que la matriz de deformación resulta ser simétrica.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.1.3 DEFORMACIÓN PLANA

Un estado de deformación plana ocurre cuando, en la región de deformación, una de las dimensiones principales es visiblemente mayor que las otras dos. En laminación esto se cumple cuando el área de la sección transversal que comprende el claro de laminación es muy pequeña comparada con el espesor de la cinta. Comúnmente se puede considerar que si la relación entre el espesor del material a laminar y su ancho es de 1 a 10, la deformación puede considerarse plana sin mayores inconvenientes. En este sentido, la deformación en el eje perpendicular al flujo del material (el eje z de la figura 2.3) es despreciable y el tensor de deformaciones queda expresado de la siguiente manera

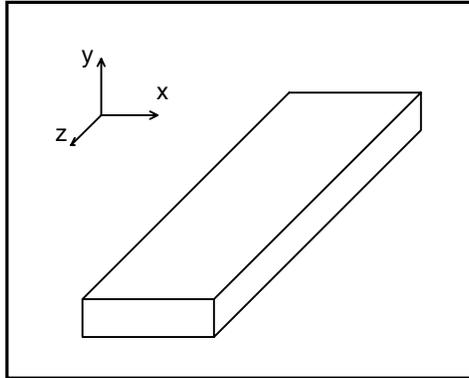


Figura 2.3 Deformación plana.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Un estado de deformación plana está caracterizado por las siguientes propiedades:

- El flujo es en cualquier punto paralelo a un plano dado.
- El movimiento es independiente del eje normal a dicho plano.

El casi nulo ensanchamiento del material de trabajo durante el proceso de laminación es un indicador de la aproximación a un estado de deformación plana.

2.1.4 ELASTICIDAD ISOTRÓPICA

Para la zona elástica de un material isotrópico, lineal y homogéneo, la ecuación constitutiva correspondiente es la ley de Hooke. La ley de Hooke asume que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación.

Para el caso de tracción uniaxial, donde se examina el esfuerzo y la deformación en una sola dirección, figura 2.5, se tiene que

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad (2.25)$$

Sin embargo, las deformaciones en las otras dos direcciones principales se relacionan con la deformación cuya dirección es la de la tracción mediante otra constante, conocida como coeficiente de Poisson, ν , de la siguiente manera

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1 \quad (2.26)$$

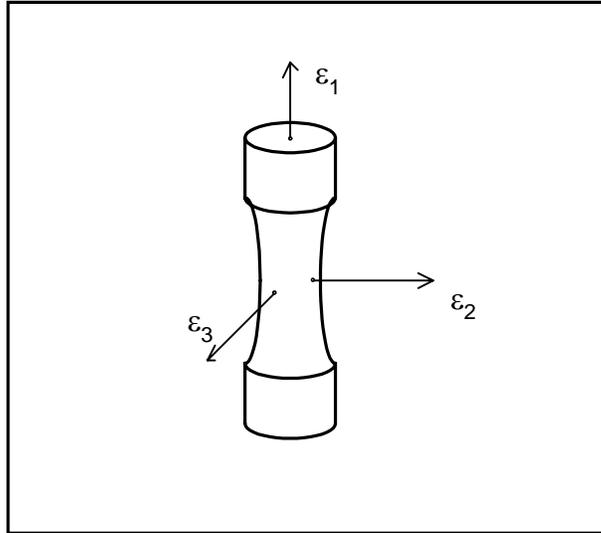


Figura 2.5 Deformaciones principales en una prueba de tracción uniaxial.

En el caso en el que los tres esfuerzos principales sean aplicados simultáneamente, cada uno de ellos provoca deformaciones en las direcciones perpendiculares a su dirección, por lo que la ley de Hooke para un estado de esfuerzos tridimensional está dado por

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (2.27)$$

De manera similar quedarían expresadas las deformaciones de las otras direcciones, solamente que con sus subíndices respectivos.

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \quad (2.28)$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \quad (2.29)$$

2.1.5 ECUACIÓN DE CAUCHY

La ecuación de Cauchy es una expresión basada en el *principio de conservación de cantidad de movimiento lineal*. Este principio de conservación es de hecho una generalización de la segunda ley de Newton aplicada a la mecánica de los medios continuos, y establece que las interacciones entre las partículas de un continuo pueden ser representadas por fuerzas internas (en forma de esfuerzos), donde estas fuerzas obedecen los mismos principios aplicados a las fuerzas externas. La conservación de la cantidad de movimiento lineal puede ser enunciada de la siguiente manera: la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de cualquier conjunto de partículas es igual a la resultante de

las fuerzas que actúan en este conjunto de partículas. La cantidad de movimiento lineal es representada generalmente por el vector \bar{L} , y su valor está dado la siguiente expresión

$$\bar{L} = m\bar{v} \quad (2.16)$$

Para la deducción de la ecuación de Cauchy, se parte de considerar cualquier conjunto de partículas que ocupen un volumen V en el espacio, delimitadas por una frontera de área A , y que estén sometidas a una serie de fuerzas expresadas por unidad de área F_i , como se muestra en la figura 2.4. Las fuerzas de cuerpo están representadas por el vector B , mientras que b es la fuerza de cuerpo por unidad de volumen.

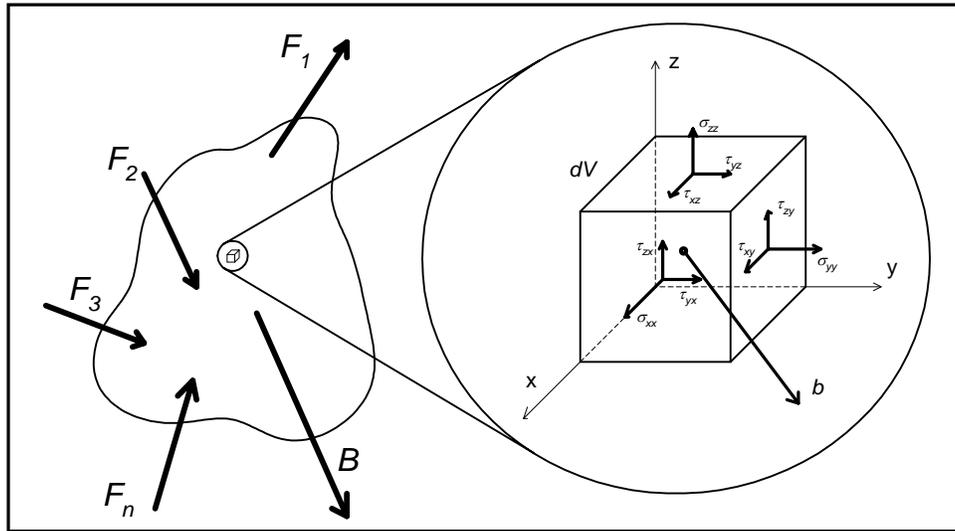


Figura 2.4 Conservación de cantidad de movimiento lineal.

La cantidad de movimiento lineal de cada elemento diferencial está dado por $\rho v dV$, donde v es la velocidad lineal del elemento diferencial dV . La cantidad de movimiento lineal total del volumen V puede ser evaluada por la siguiente integral:

$$\bar{L} = \int_V \rho \bar{v} dV \quad (2.17)$$

Por lo tanto, la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal total está dada por

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} dV = \int_V \rho \frac{d\bar{v}}{dt} dV \quad (2.18)$$

Aplicando la segunda ley de Newton y utilizando la ecuación 2.18 se obtienen los siguientes resultados

$$\sum \bar{F} = \frac{d\bar{L}}{dt} \quad (2.19)$$

$$\int_A \bar{F} dA + \int_V \rho \bar{b} dV = \int_V \rho \frac{d\bar{v}}{dt} dV \quad (2.20)$$

Sin embargo, se tiene que $F = \sigma \cdot n$ y utilizando el teorema de la divergencia, la integral de superficie puede ser transformada a una integral de volumen

$$\int_A \bar{F} dA = \int_A \sigma \cdot \bar{n} dA = \int_V \nabla \cdot \sigma dV \quad (2.21)$$

Donde σ es el tensor de esfuerzos y n es el vector unitario normal a la superficie.

Sustituyendo la ecuación 2.21 en la ecuación 2.20 y reacomodando los términos se obtiene que

$$\int_V \left(\nabla \cdot \sigma + \rho \bar{b} - \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \right) dV = 0 \quad (2.22)$$

Para que se cumpla la ecuación 2.22, el integrando debe ser igual a cero, por lo que se obtiene la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \bar{b} = \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (2.23)$$

La ecuación 2.23 es la forma diferencial del principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal y es conocida como la *ecuación de Cauchy*. En notación índice, la ecuación de Cauchy es expresada de la siguiente manera

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} + \rho b_i = \rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (2.24)$$

2.2 PRINCIPIOS DE PLASTICIDAD

A diferencia de la elasticidad, en el comportamiento plástico el cuerpo deformado no regresa a su estado original cuando se retira la sollicitación aplicada. La deformación es permanente. Sin embargo, para provocar una deformación plástica, es necesario rebasar un determinado esfuerzo, a este esfuerzo se le conoce como *esfuerzo de fluencia*. En la mayoría de los metales dúctiles, la deformación plástica puede continuar incrementándose si el esfuerzo que inició la fluencia es continuamente incrementado.

Las expresiones matemáticas que sirven para aproximar el comportamiento de la plasticidad, aunadas con observaciones experimentales, son conocidas como *criterios de fluencia*. Estos criterios tienen como principal objetivo el predecir bajo que estados de

esfuerzos se producirá la fluencia, dependiendo de determinadas propiedades del metal a ser deformado.

2.2.1 CRITERIOS DE FLUENCIA

Como ya se mencionó, un criterio de fluencia es aquella expresión matemática que utilizando el estado de esfuerzos y ciertas propiedades de material es capaz de determinar el inicio de la deformación plástica o fluencia. La forma más general de esta expresión en términos de los esfuerzos principales es la siguiente:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = Cte \quad (2.30)$$

Para la mayoría de los metales dúctiles que son isotrópicos, se hacen las siguientes consideraciones en base a diversas observaciones.

1. No se considera el efecto de Bauschinger, por lo que los esfuerzos de cedencia en tracción y compresión son equivalentes.
2. Basándose en la ley de conservación de masa, el equivalente plástico del coeficiente de Poisson es 0.5.
3. El esfuerzo hidrostático, σ_H , no influye en la deformación plástica.

$$\sigma_H = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.31)$$

En base a las consideraciones 1 y 3, si se representa gráficamente en tres dimensiones un criterio de fluencia donde los esfuerzos principales en cada una de las direcciones fueran los ejes coordenados, se obtendría una superficie prismática en la que el área perpendicular a cada uno de los ejes se mantendría constante. A esta superficie se le conoce como superficie de fluencia. Si uno de los esfuerzos principales se mantiene constante, a la gráfica bidimensional resultante se le conoce como la región de fluencia.

La razón por la que se puede hacer la consideración 2, es que la deformación plástica ocurre solamente por la acción de esfuerzos cortantes. Por lo tanto, la ecuación 2.31 puede ser expresada de la siguiente manera

$$f[(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_1 - \sigma_3)] = Cte \quad (2.32)$$

Si se utilizaran los círculos de Mohr para la visualización de los esfuerzos principales, se observaría que por la ecuación 2.32 la fluencia no dependería de la posición de los círculos, sino únicamente de sus diámetros. Lo anterior se ilustra en la figura 2.6, donde los dos estados de esfuerzos son equivalentes, debido a que ambos estados provocan fluencia.

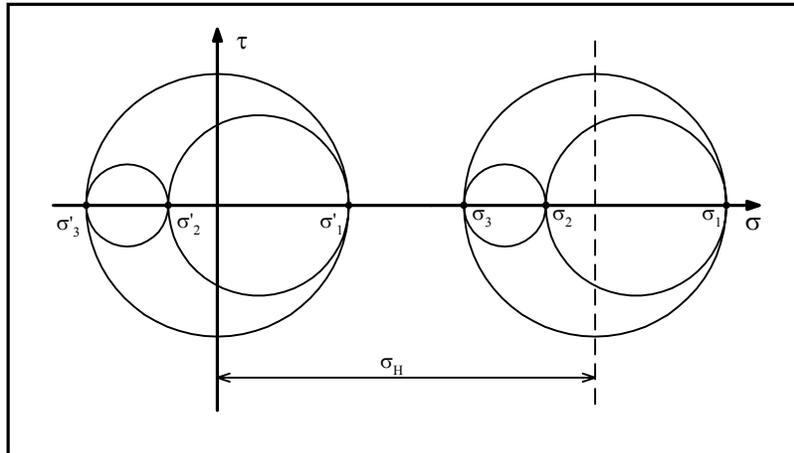


Figura 2.6 Círculos de Mohr para dos estados de esfuerzos que difieren por esfuerzo hidrostático, pero que son equivalentes en cuestión de la fluencia.

Dentro de la teoría de la plasticidad, es común expresar al tensor de esfuerzos como la suma de dos términos: el esfuerzo hidrostático, σ_{ij} , y el tensor desviador de esfuerzos, S_{ij} .

$$\sigma_{ij} = \sigma_H \delta_{ij} + S_{ij} \quad (2.33)$$

donde δ_{ij} representa al tensor identidad.

Debido a que el esfuerzo hidrostático no influye en la fluencia, el desviador de esfuerzos es el único responsable de provocarla.

2.2.2 CRITERIO DE TRESCA

El criterio postula que la fluencia ocurre cuando el esfuerzo cortante mayor alcance un valor crítico. En términos simplificados, el criterio puede ser expresado de la siguiente forma

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = Cte \quad (2.34)$$

O a manera de ejemplo

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Cte ; \text{ si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.35)$$

Para poder evaluar la constante, se utiliza el estado de tracción uniaxial. En ese estado $\sigma_{\max} = \sigma_1$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ y la fluencia ocurre en el momento en que se alcanza el esfuerzo de fluencia en la prueba de tracción, es decir, $\sigma_1 = \sigma_0$. Sustituyendo se obtiene

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Cte = \sigma_0 \quad (2.36)$$

Para el caso de cortante puro, $\sigma_{max}=\sigma_1$, $\sigma_{min}=\sigma_3=-\sigma_1$ y $\sigma_2=0$. La fluencia ocurre cuando el cortante máximo alcanza el esfuerzo de fluencia para el caso de cortante puro, k . Cuando se alcance ese punto $s_1=k$, por lo que

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1 = Cte = 2k \quad (2.37)$$

Finalmente el criterio de Tresca se expresa como

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k ; \text{ si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.38)$$

El criterio de Tresca es utilizado ampliamente en el diseño ingenieril debido a su relativa simplicidad matemática. Sin embargo, este criterio no toma en consideración el esfuerzo principal intermedio.

En la figura 2.7 se muestra la gráfica de la región de fluencia para el criterio de Tresca.

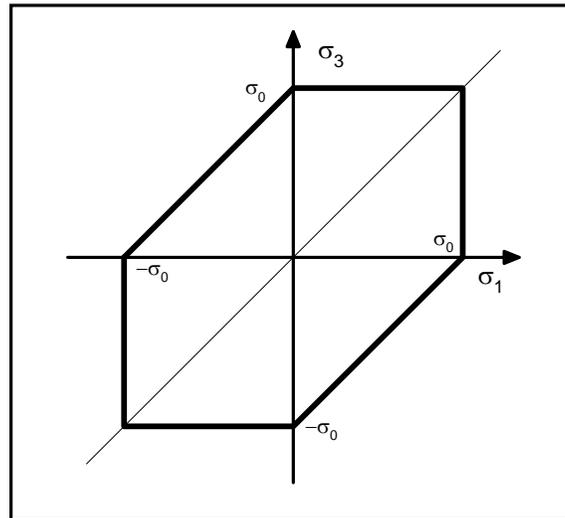


Figura 2.7 Región de fluencia para el criterio de Tresca.

2.2.3 CRITERIO DE VON MISES

Von Mises (1913) propuso que la fluencia ocurre cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos J_2 exceda algún valor crítico.

$$J_2 = k^2 \quad (2.39)$$

donde

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \quad (2.40)$$

Para evaluar la constante k y relacionarla con el esfuerzo de fluencia en la prueba de tracción, se examinara la fluencia en tracción uniaxial, donde $\sigma_1=\sigma_0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$

$$\sigma_0^2 + \sigma_0^2 = 2\sigma_0^2 = 6k^2 \quad (2.41)$$

$$\therefore \sigma_0 = \sqrt{3}k \quad (2.42)$$

Sustituyendo los resultados de la ecuación 2.41 se obtiene la forma típica del criterio de fluencia de von Mises

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} \quad (2.43)$$

Von Mises originalmente propuso este criterio debido a su simplicidad matemática. En trabajos posteriores se intentó encontrar el significado físico de la ecuación 2.43, pero no fue sino hasta 1924 cuando Hencky demostró que era equivalente a asumir que la fluencia ocurre cuando la energía de distorsión alcanza un valor crítico. La energía de distorsión es la parte de la energía total de deformación por unidad de volumen que está involucrada en el cambio de forma en contraposición a un cambio de volumen.

La región de fluencia para el criterio de von Mises se muestra en la figura 2.8.

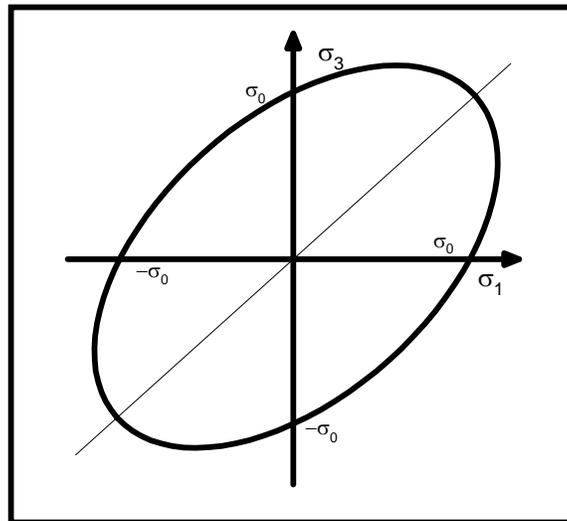


Figura 2.8 Región de fluencia para el criterio de von Mises.

2.2.4 ESFUERZO EFECTIVO

Para cualquier esfuerzo de fluencia, es conveniente definir un esfuerzo efectivo que sea una función que represente al estado de esfuerzos aplicado. Si la magnitud del esfuerzo efectivo alcanza un valor crítico, entonces el estado de esfuerzos aplicado causará fluencia, es decir, el esfuerzo efectivo es un indicativo del criterio de fluencia.

Expresado en términos de esfuerzos principales, el esfuerzo efectivo se expresa como

$$\sigma_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.44)$$

Considerando el criterio de Tresca, éste se puede expresar como

$$\sigma_{ef} = \sigma_1 - \sigma_3; \text{ donde } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2.45)$$

Cabe resaltar que cuando $\sigma_{ef} = \sigma_0$, en cualquier criterio se puede predecir fluencia; mientras que el esfuerzo efectivo debe alcanzar un valor de $\sqrt{3}k$ de acuerdo a von Mises y de $2k$ conforme al criterio de Tresca.

2.2.5 DEFORMACIÓN EFECTIVA

De manera similar en que se definió el esfuerzo efectivo, es conveniente relacionar el incremento de una deformación multiaxial con un incremento equivalente de una prueba de tracción uniaxial. Para obtener dicha relación, es necesario aplicar el principio de trabajo plástico equivalente, lo cual implica igualar el trabajo plástico desarrollado en una dimensión con el trabajo plástico realizado para estado general:

$$dw = \sigma_{ef} d\varepsilon_{ef} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (2.46)$$

Para el criterio de von Mises, la deformación efectiva está dada por

$$d\varepsilon_{ef} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)^2} \quad (2.47)$$

Si la deformación es proporcional, la deformación efectiva total puede ser expresada en términos de la deformación total como

$$\varepsilon_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} \quad (2.48)$$

Para el criterio de Tresca, la deformación efectiva se expresa como

$$d\varepsilon_{ef} = |d\varepsilon_i|_{\max} \quad (2.49)$$

donde i se refiere a las direcciones principales. Por lo tanto, ε_{ef} para el criterio de Tresca equivale al valor absoluto de la deformación principal más grande.

2.2.6 REGLAS DE FLUJO

Para el caso de deformación elástica, el esfuerzo y las deformaciones están relacionadas por la ley de Hooke; por ejemplo

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (2.27)$$

Existen relaciones similares, conocidas como *reglas de flujo*, que han sido desarrolladas para el caso de deformación plástica. De manera general, la ecuación de flujo puede ser establecida como

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.50)$$

donde f es una función de σ_{ij} que describe la fluencia. Si el criterio de von Mises es utilizado para f , y con la diferenciación apropiada, se obtiene que

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon_{ef}}{d\sigma_{ef}} \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right) \quad (2.51)$$

Cabe hacer notar la similitud con la ecuación 2.27. Las expresiones para $d\varepsilon_2$ y $d\varepsilon_3$ son análogas. Sin embargo, $d\lambda$ y $d\varepsilon_{ef}/d\sigma_{ef}$ frecuentemente no pueden ser evaluadas, por lo que las reglas de flujo pueden ser evaluadas a través de cocientes

$$\frac{\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right)}{d\varepsilon_1} = \frac{\left(\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right)}{d\varepsilon_2} = \frac{\left(\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right)}{d\varepsilon_3} \quad (2.52)$$

Para el caso del criterio de Tresca, $f = \sigma_1 - \sigma_3$, por lo que de acuerdo a la ecuación 2.50, las reglas de flujo están dadas por

$$d\varepsilon_1 = d\lambda \quad (2.53)$$

$$d\varepsilon_2 = 0 \quad (2.54)$$

$$d\varepsilon_3 = -d\lambda \quad (2.55)$$

Siempre y cuando se cumpla que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

2.3 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

El propósito de un ensayo de tracción uniaxial es el de poder determinar la relación esfuerzo-deformación que rige al material de la probeta. Por lo general, dicha relación es representada de manera gráfica, y el tipo de esfuerzos y deformaciones que se utilizan son los ingenieriles o los reales. Las curvas obtenidas de las gráficas, tanto la ingenieril como la real, tienen casi el mismo comportamiento en la región elástica.

La diferencia entre la curva esfuerzo-deformación real y su contraparte ingenieril se presenta en la región plástica. Los valores del esfuerzo real son más altos en la región plástica porque se utilizan en el cálculo las áreas instantáneas de la sección transversal de las probetas, mismas que han sido continuamente reducidas durante la elongación. Al final de la curva se produce un descenso como resultado del estrangulamiento. Las gráficas esfuerzo-deformación ingenieril y real característica de los metales se muestran en la figura 2.9.

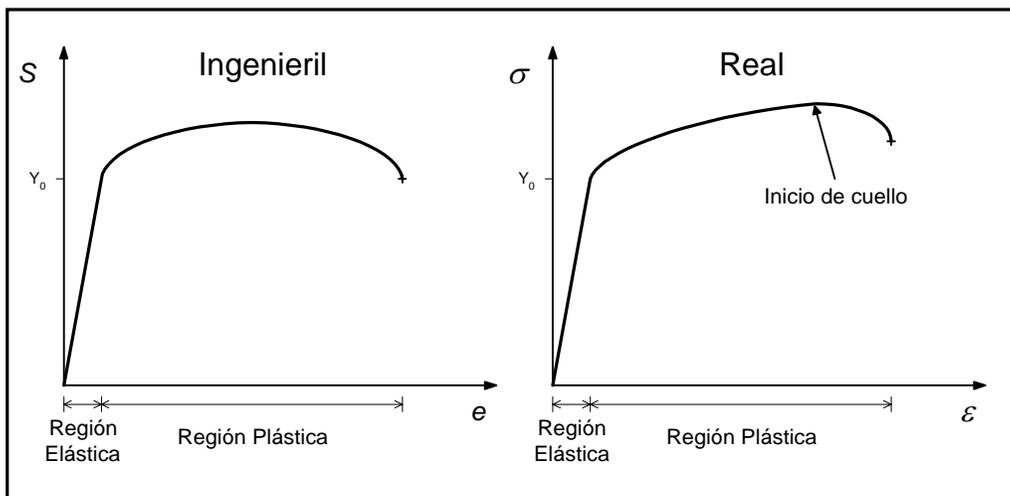


Figura 2.9 Curva esfuerzo-deformación ingenieril y real.

Conforme el esfuerzo se vuelve significativo en la región plástica, los valores de la deformación real y deformación ingenieril divergen. La relación entre ambas deformaciones está dada por:

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \tag{2.56}$$

De igual manera el esfuerzo real y el ingenieril pueden relacionarse mediante la expresión:

$$\sigma = S(1 + e) \tag{2.57}$$

Se puede observar en la región plástica de las gráficas esfuerzo-deformación, que conforme el esfuerzo aumenta, el metal se torna más resistente. A esta propiedad se le conoce como *endurecimiento por deformación* y es una característica que exhiben todos los metales en mayor o menor grado.

El endurecimiento por deformación, o *endurecimiento por trabajo*, es un factor importante en ciertos procesos de manufactura, particularmente en conformado de metales. Aunque el comportamiento de los materiales reales en la región plástica es demasiado compleja, se han sugerido varias ecuaciones de origen empírico con el propósito de idealizar la plasticidad en los metales. Dentro de estas ecuaciones, la más utilizada corresponde a la que sugirió Holloman en 1944, cuya expresión es:

$$\sigma = K\varepsilon_p^n \quad (2.58)$$

Donde el esfuerzo y la deformación involucradas en la ecuación se refieren a las reales. La ecuación 2.58 recibe el nombre de curva de flujo o fluencia, y aproxima el comportamiento de los metales en la región plástica, incluida su capacidad de endurecimiento por deformación. A la constante K se le llama *coeficiente de resistencia*, [MPa], mientras que al parámetro n se le conoce como *exponente de endurecimiento por deformación*. La curva de flujo es obtenida mediante regresión lineal a partir de ensayos de tracción uniaxial, sin embargo, es posible utilizarla para otros casos, como para deformación plana. La única modificación que debe aplicarse es que deben utilizarse los esfuerzos y deformaciones efectivas en la ecuación 2.58.

La curva de esfuerzo contra deformación real proporciona mucha información acerca del comportamiento plástico. Como ya se ha mencionó, la ley de Hooke gobierna el comportamiento de los metales en la región elástica, y la curva de fluencia o flujo determina el comportamiento en la región plástica. Para el estudio del proceso de laminación de productos planos, las tres formas básicas de relación esfuerzo-deformación que se utilizan para describir el comportamiento de los materiales a laminar se presentan a continuación:

a) *Rígido-Plástico sin endurecimiento*. Debido a las grandes deformaciones plásticas, se desprecia el comportamiento elástico. Si el esfuerzo alcanzado es menor al de fluencia, el material se comporta como un cuerpo rígido. Sin embargo, al rebasar el punto de fluencia Y , el material se deforma plásticamente al mismo nivel de esfuerzo. La curva de fluencia está dada por $K = Y_0$ y $n = 0$. Los metales se comportan de esta manera cuando han sido calentados a temperaturas lo suficientemente altas para recrystalizar, más que endurecerse por trabajo durante la deformación.

b) *Rígido-plástico con endurecimiento*. También se desprecia la región elástica del material dado a su comparación con la deformación plástica. Se considera el endurecimiento del material para el comportamiento plástico.

c) *Elástico-plástico con endurecimiento*. Estos materiales obedecen a la ley de Hooke en la región elástica, y comienzan a ceder en su punto de fluencia Y_0 . Su deformación continua

requiere esfuerzos siempre crecientes, dados por una curva de fluencia cuyo coeficiente de resistencia K es mayor que Y_0 , cuyo exponente de endurecimiento por deformación n es mayor que cero. La mayoría de los metales dúctiles se comportan de esta manera cuando se trabajan en frío.

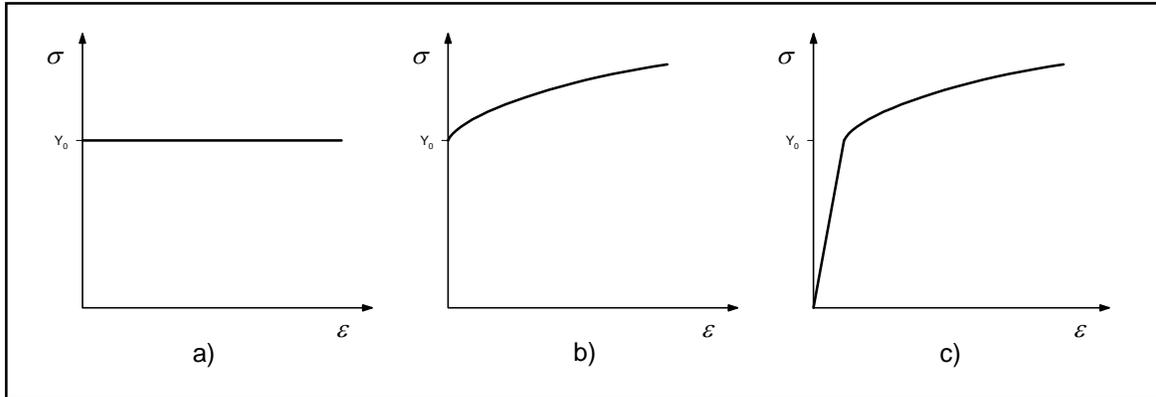


Figura 2.10 Relaciones esfuerzo-deformación para laminación: a) rígido-plástico sin endurecimiento, b) rígido-plástico con endurecimiento y c) elástico-plástico sin endurecimiento.

2.4 FRICCIÓN

Dentro del estudio de los procesos de manufactura, la consideración de las fuerzas de fricción es un factor importante dentro de los problemas en los que existe contacto entre dos piezas. Aunque en algunas ocasiones en los análisis de conformado se desprecian las fuerzas de fricción, existen procesos en los que no es posible despreciarlos, dado que la fricción resulta ser un factor predominante, y su supresión implicaría una consideración lejana a la realidad. Para el caso del proceso de laminado, la fricción es un efecto que no se puede despreciar, debido a que esta fuerza es la que permite el flujo del material dentro del claro de laminación.

2.4.1 LEY DE COULOMB

La ecuación más conocida de las leyes de fricción es la ley de Coulomb (Ley de la fricción seca o Ley de Amontón). Esta ley establece que la magnitud de la fuerza de fricción es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza normal, o, de manera equivalente, que el esfuerzo cortante debido a la fricción es proporcional a la carga normal:

$$F_f = \mu N \quad \text{ó} \quad f_r = \mu P_r \quad (2.59)$$

Donde, la fuerza de fricción o el esfuerzo cortante son simplemente valores limitantes de la fuerza tangencial o esfuerzo que quizá estén presentes debido a los efectos de fricción. μ es conocida como el coeficiente de fricción o constante de Coulomb, el cual tiene un valor constante con respecto a la presión de contacto o esfuerzo para una determinada situación.

La ley de Coulomb es conceptualmente correcta para presiones muy pequeñas, en las que la fuerza limitante tangencial se aproxima a cero conforme la presión se va acercando a cero. De hecho, esta ley generalmente se utiliza cuando las presiones de contacto son menores que la de la resistencia del material y no existen grandes deformaciones.

2.4.2 TEORÍA DE LA ADHESIÓN

Una antigua teoría sostenía que la fricción resultaba del bloqueo mecánico entre las superficies. Si bien esta teoría es aplicable para algunas situaciones, no explica la manera en que ocurre la fricción en la mayoría de los sistemas de fricción en ingeniería mecánica.

Hoy en día la explicación de la fricción aceptada comúnmente es la *teoría de la adhesión*, la cual sostiene que dos superficies deslizantes (no lubricadas) están en contacto una con la otra sólo en una pequeña fracción del área aparente entre ellas. Esto es verdad aun cuando si las superficies sean bastante lisas. Cuando se observan en una vista muy ampliada, cada superficie se caracteriza por asperezas microscópicas que hacen contacto con su opuesta sólo en ciertos puntos. Estos puntos comprenden el área real de contacto A_r entre las dos superficies, como se observa en la figura 2.11.

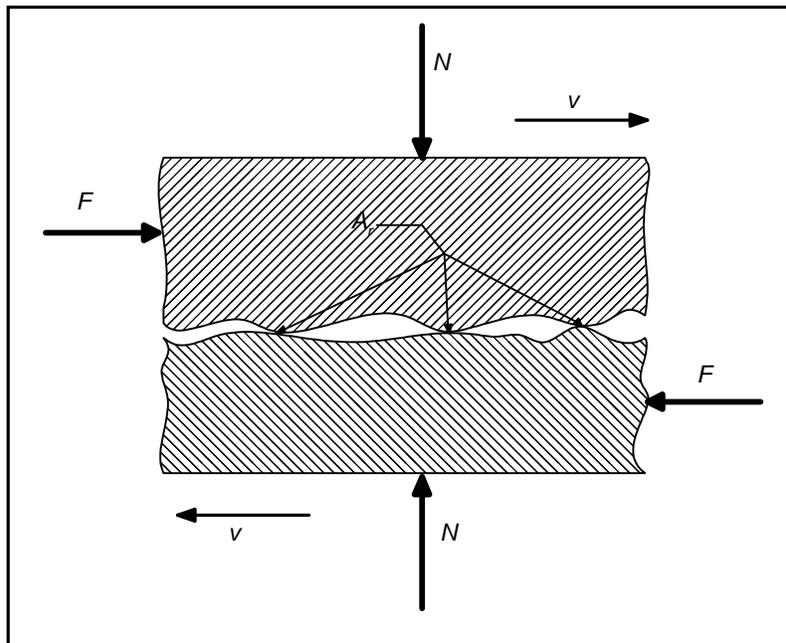


Figura 2.11 Vista microscópica de dos superficies deslizantes con fricción en la intercara.

A causa de que el área real soporta la carga normal, los esfuerzos involucrados en estos puntos de contacto son muy altos y conducen a deformaciones plásticas y adhesión en algunos casos. Debido a la naturaleza aleatoria de las superficies, algunas asperezas experimentan esfuerzos más grandes que otros, de manera que la adhesión ocurre solamente en los puntos donde los esfuerzos son muy altos y hay un contacto físico muy

estrecho. La forma de enlace no está completamente explicada, pero se cree que implica la clase de mecanismos de los enlaces atómicos. Está influida por el tipo de materiales en contacto y su condición. Para romper estos enlaces adhesivos conforme las superficies se mueven, una con respecto a la otra, se requiere una fuerza, la cual se aplica contra las uniones como una fuerza cortante. Estas conexiones suman un área equivalente al área real de contacto. De la misma manera, la fuerza normal N implica la resistencia a la fluencia del material más suave aplicada sobre el área real de contacto.

2.4.3 FRICCIÓN ADHERENTE

Mientras que la ley de Coulomb resulta ser una buena aproximación para la predicción de la fuerza de fricción para cuerpos rígidos; sin embargo, cuando se trabaja con cargas suficientemente grandes como para alcanzar el esfuerzo de fluencia del material, la ley de Coulomb sobrestima la fuerza de fricción.

Como ya se mencionó en la teoría de la adhesión, la fricción en la intercara no puede exceder al esfuerzo cortante de fluencia del material, debido a que el material empezaría a deslizarse aún cuando estén unidos firmemente. A esta condición extrema se le conoce como fricción adherente, y es representada generalmente como

$$f_r = k \tag{2.60}$$

donde k es el esfuerzo cortante de fluencia correspondiente al material más suave. La figura 2.12 ilustra la transición entre las bajas presiones de contacto y las presiones cercanas al valor del esfuerzo cortante de fluencia del material.

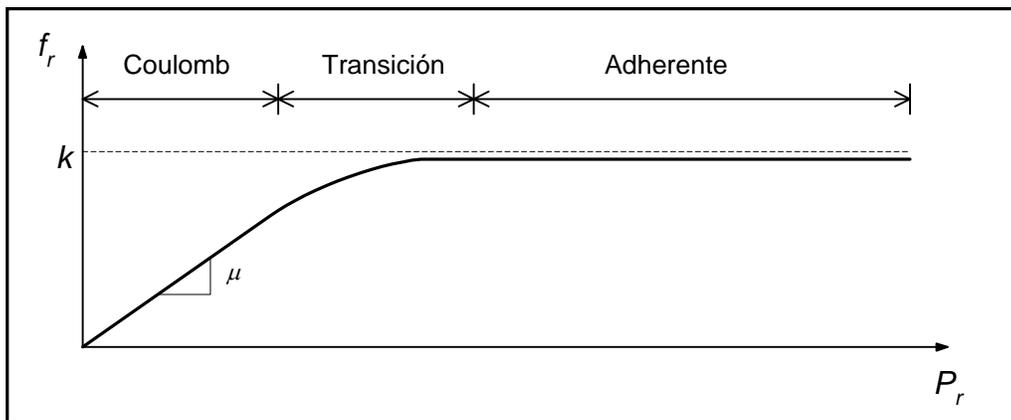


Figura 2.12 Comportamiento de la fricción en función de la presión normal.

Para el caso del criterio de Tresca, el esfuerzo cortante máximo expresado en términos del esfuerzo de normal de fluencia está dado por:

$$f_r = \frac{\sigma_0}{2} \quad (2.61)$$

Mientras que en el caso del criterio de von Mises, se tiene que:

$$f_r = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (2.62)$$

Generalmente es introducida una modificación a la fricción adherente para explicar el hecho de que las fuerzas de fricción son raramente tan grandes como el esfuerzo cortante de fluencia, pero que están en un régimen de presiones de contacto alto en las que son poco dependientes de la presión. Esta generalización puede ser escrita de la siguiente forma:

$$f_r = mk \quad (2.63)$$

Donde m es una constante conocida como el factor de fricción y varía desde 0 (deslizamiento sin fricción) hasta 1 (adhesión).

2.5 MÉTODO DEL PLANCHÓN

Este método, también conocido como *aproximación de equilibrio del cuerpo libre*, consiste en la descomposición de la pieza de trabajo en elementos con espesor diferencial (en inglés *slab*), y la aplicación de balance de fuerzas a cada uno de estos elementos. El método produce una ecuación diferencial ordinaria, que mediante la integración de esta ecuación y con el uso de condiciones de frontera adecuadas, es posible obtener una solución del problema. Las suposiciones inherentes involucradas para el método del planchón son:

- La dirección de las cargas aplicadas y los planos perpendiculares a estas direcciones definen las direcciones principales, y los esfuerzos principales no varían en estos planos.
- A pesar de que los efectos de la fricción en las superficies son incluidas en el balance de fuerza, estos no influyen en la distorsión interna del metal o en la orientación de las direcciones principales.
- Secciones planas permanecen planas, lo cual implica que la deformación es homogénea al momento de la determinación de la deformación inducida.

Además de las consideraciones anteriores, se enlistan a continuación otras consideraciones utilizadas comúnmente que tienen como objetivo la simplificación del modelo matemático, sin embargo, dichas consideraciones no son indispensables para el desarrollo del método del planchón.

- El material tiene un comportamiento rígido-plástico.
- No se presenta endurecimiento en el material.
- Se aplican simplificaciones geométricas.
- Se utilizan modelos de fricción sencillos.

- Condiciones de frontera simplificadas.

Los pasos básicos para la aplicación del método del planchón es la siguiente:

1. Identificar la dirección en la que se encuentren las variaciones más significativas de esfuerzos y deformaciones.
2. Aplicar equilibrio de fuerzas a un elemento diferencial del material, incluyendo los esfuerzos originados por contacto y fricción. La característica del elemento diferencial es que tiene una longitud de magnitud diferencial correspondiente a la dirección del paso anterior.
3. Obtener una ecuación diferencial ordinaria en la que se relacione el esfuerzo con una variable geométrica.
4. Utilizar un criterio de fluencia para reducir a una incógnita a la función.
5. Aplicar condiciones de frontera.
6. Resolver la ecuación diferencial ordinaria para obtener al esfuerzo en función de la variable geométrica.

Al utilizar equilibrio de fuerzas el método del planchón, el principio universal que se busca cumplir es el relativo a la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Sin embargo, el método estrictamente no cumple con la ecuación de Cauchy, debido a que se desprecian términos.

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} + \rho b_i = \rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (2.24)$$

El segundo y el tercer término de la ecuación se refieren a las fuerzas de cuerpo y a los efectos inerciales, respectivamente. Estos términos son los que desprecia el método del planchón debido a que en comparación con el primer término, éstos no tienen tanto efecto en la ecuación de Cauchy. Además, el incluir estos términos implicaría complicar la matemática del problema a cambio de un poco más de exactitud, lo cual no es conveniente.

Por lo tanto, la forma de la ecuación de Cauchy con que utiliza en método del planchón es

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = 0 \quad (2.64)$$

CAPÍTULO 3

DESCRIPCIÓN DEL MODELO

3.1 ESTADO DEL ARTE

Los modelos unidimensionales del proceso de laminado, basados en el método del planchón, han sido publicados ya hace varios años y frecuentemente revisados. Una revisión detallada de los modelos de Orowan y sus variaciones, incluyendo un programa de computación en FORTRAN, fue realizada por Alexander en 1972. En este estudio, Alexander comparó críticamente la capacidad de predicción entre sus resultados y los modelos obtenidos de las simplificaciones de Sims y Bland y Ford.

3.1.1 MODELO DE OROWAN

Este modelo fue primero desarrollado por *Von Karman* en 1925 para posteriormente ser desarrollado y resuelto por *Orowan* en 1943, mediante el uso de técnicas gráficas. El modelo de Orowan está basado en el equilibrio de fuerzas de un elemento diferencial que sufre una deformación plástica provocada por dos rodillos, como se muestra en la figura 3.1. La presión del rodillo, distribuido a lo largo del arco de contacto, el esfuerzo cortante debido a la fricción y los esfuerzos en las direcciones longitudinal y transversal conforman el sistema de esfuerzos en el elemento diferencial. El equilibrio de este sistema conforma la ecuación básica de balance. Las dos ecuaciones generadas son:

$$\frac{d}{d\theta}(\sigma_x h) = 2P_r R(\sin\theta \pm \mu \cos\theta) \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = P_r(1 \pm \mu \tan\theta) \quad (3.2)$$

El signo \pm indica la relación existente para el punto neutro, en esencia, el modelo presenta dos ecuaciones diferenciales distintas. La ecuación de signo negativo funciona de la entrada al punto neutro y la de signo positivo de dicho punto a la salida.

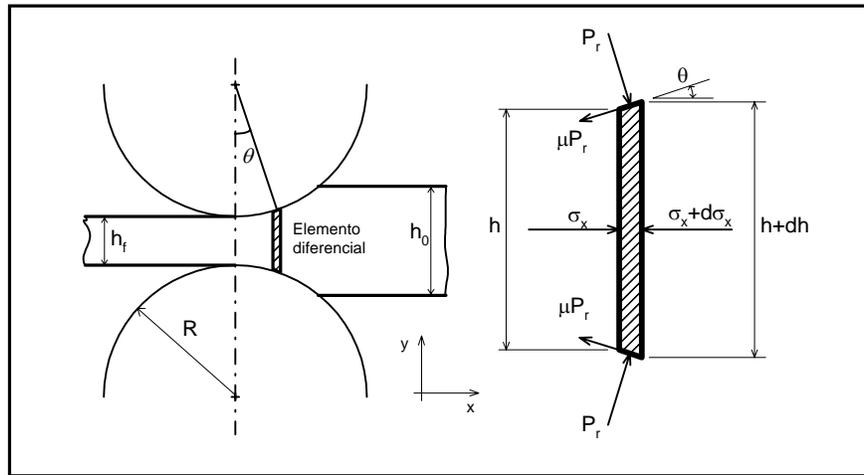


Figura 3.1 Modelo de Orowan.

La forma que presenta la ecuación 3.1 es la misma a la que Orowan planteó en 1943. Para encontrar una solución será necesario hacer uso de ecuaciones independientes de la teoría de plasticidad como el criterio de *von Mises*:

$$\sigma_y - \sigma_x = 2k \quad (3.3)$$

Donde k representa el esfuerzo de cedencia para un estado de cortantes puro.

La expresión 3.1 es una ecuación diferencial ordinaria no lineal EDO con dos variables dependientes por lo que será necesario eliminar la variable h representándola en función de la variable independiente θ , utilizando la geometría de la figura 3.1:

$$h = h_f + 4R \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.4)$$

Para poder encontrar una solución a este sistema de ecuaciones desarrollado por Orowan es necesaria la utilización de algún método numérico. En 1972 Alexander realizó un programa en FORTRAN basándose en el método numérico de Runge Kutta, en el cual proporcionaba una solución a dicha ecuación.

3.1.2 MODELO DE SIMS

Sims (1954) asume que debido a que los ángulos son pequeños en el proceso de laminación, éstos pueden ser representados por sus magnitudes expresadas en radianes. También asume que el producto del esfuerzo cortante debido a la fricción y la variable angular es despreciable en comparación de los demás términos y que la fricción adherente está presente en la región de deformación. Estas simplificaciones permiten la integración

directa de la ecuación de equilibrio, por lo que la fuerza de los rodillos por unidad de ancho está dada por

$$P_r' = 2kLQ_P \quad (3.5)$$

El término $2k$ representa el esfuerzo de fluencia del material, obtenido en compresión plana. La longitud de contacto proyectada L está dada por la expresión

$$L = \sqrt{R(h_0 - h_f)} \quad (3.6)$$

El factor Q_P está en función del radio del rodillo, la reducción, r , y el espesor en el punto neutro, h_N

$$Q_P = \left[\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{1-r}{r}\right)} \tan^{-1} \sqrt{\left(\frac{r}{1-r}\right)} - \frac{\pi}{4} - \sqrt{\left(\frac{1-r}{r}\right)\left(\frac{R}{h}\right)} \ln \frac{h_N}{h} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1-r}{r}\right)\left(\frac{R}{h}\right)} \ln \frac{1}{1-r} \right] \quad (3.7)$$

El ángulo donde se localiza el punto neutro, θ_N , se obtiene de la siguiente ecuación

$$\frac{\pi}{4} \ln(1-r) = 2\sqrt{\frac{R}{h}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{h}} \theta_N \right) - \sqrt{\frac{R}{h}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{r}{1-r}} \quad (3.8)$$

Debido a su simplicidad, el modelo de Sims frecuentemente es la base de los modelos de fuerza en los rodillos para el laminado en caliente en la industria del acero laminado. El modelo de Beynon y Sellars (1993), conocido como SLIMMER, utiliza el modelo de Sims.

3.1.3 MODELO DE BLAND Y FORD

Además de la consideración de ángulos pequeños, Bland y Ford (1948) suponen que la carga de los rodillos es igual al esfuerzo en la dirección vertical. Como la diferencia entre estas dos magnitudes resulta ser una función del coseno de ángulos muy pequeños, el error no es apreciable, especialmente en laminado en frío, donde los diámetros de los rodillos son usualmente mucho más grandes que el espesor del material de trabajo. Bajo estas consideraciones, la fuerza de los rodillos por unidad de ancho es

$$P_r' = 2kR \left[\int_0^{\theta_N} \frac{h}{h_f} e^{\mu H} d\theta + \int_{\theta_N}^{\theta_T} \frac{h}{h_0} e^{\mu(H_0-H)} d\theta \right] \quad (3.9)$$

donde H está dado por

$$H = 2\sqrt{\frac{R}{h_f}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{R}{h_f}} \theta \right) \quad (3.10)$$

La localización del punto neutro está dado por la siguiente ecuación

$$\theta_N = \sqrt{\frac{h_f}{R}} \tan \left(\frac{H_N}{2} \sqrt{\frac{h_f}{R}} \right) \quad (3.11)$$

Este modelo es frecuentemente utilizado en el análisis del proceso de laminado en frío.

3.2 CONSIDERACIONES DEL MODELO

El modelado de algún fenómeno físico siempre acarrea el uso de ciertas suposiciones, esto no sólo con el fin de simplificar las operaciones y ahorrar tiempo, tanto humano como de máquina; sino que las herramientas matemáticas con que se cuentan no son suficientes para la resolución del modelo. Lo ideal sería encontrar una solución de forma analítica que describiera a la perfección el fenómeno a modelar, debido a que permitiría un mayor control sobre este fenómeno. Sin embargo, como ya se mencionó, aún con el uso de algunas suposiciones, no es posible encontrar una solución analítica, por lo que se recurre a métodos numéricos.

Además de las suposiciones que son necesarias para la aplicación del método del Planchón que se mencionaron en el capítulo 2, es necesario también realizar ciertas consideraciones sobre las condiciones del proceso de laminación. A continuación, se enlistan todas las suposiciones que están involucradas dentro del desarrollo del análisis, tanto las concernientes al método del planchón, como las del proceso de laminación.

1. El eje definido por la dirección del flujo del material y una dirección perpendicular a éste, cuyo plano es perpendicular al eje de la línea de centro de los rodillos, conforman lo que son las direcciones principales de los esfuerzos principales. Las direcciones principales no cambian de orientación en algún punto del proceso.
2. No se considera la distorsión interna del material provocada por lo efectos de fricción, aunque en el equilibrio de fuerzas si se consideran estas fuerzas. Esto implica que los planos de sección vertical permanecen planos.
3. Debido a que en el proceso de laminación el ancho del material es mucho mayor que el espesor, se encuentra que el ancho casi no presenta deformación durante el proceso, por lo que se puede considerar deformación plana sin alejarse de la realidad.
4. Respecto a la fricción, se utiliza la ley de Coulomb para el contacto entre el rodillo y el material. Además se considera que el coeficiente de fricción se mantiene constante en toda la superficie de contacto.
5. La velocidad angular de los rodillos es constante.
6. Se utilizará el criterio de von Mises como criterio de fluencia.

7. La longitud de contacto entre los rodillos y el material es mucho más pequeña en comparación con la circunferencia de los rodillos.
8. En el análisis de equilibrio de fuerzas, se desprecian los efectos inerciales y las fuerzas de cuerpo que actúan sobre cada elemento diferencial.
9. El proceso a modelar es laminado simétrico en frío.
10. La ecuación constitutiva para la zona elástica del material estará regida por la ley de Hooke

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (3.12)$$

11. Para el modelado del endurecimiento del material en la zona plástica se utilizara la siguiente relación entre esfuerzo y deformación reales

$$\sigma_0 = K\varepsilon_p^n \quad (3.13)$$

A pesar de que ya se había hecho mención de las consideraciones necesarias para el método del planchón, estas se vuelven a mencionar, pero con la diferencia de que se adapta o se justifica cada una de estas suposiciones con las condiciones del proceso de laminación.

3.3 VARIABLES DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE DEL MODELO

Para el caso de laminación, la variable que se desea determinar primordialmente es la distribución de la carga que el rodillo ejerce sobre el material de trabajo, P_r . A partir de esta distribución de carga, es posible determinar la fuerza de reacción soportada por el rodillo, el torque necesario para la realización del proceso y la potencia requerida para la laminación de productos planos. Los datos obtenidos de la fuerza de reacción sobre los rodillos tienen como principal objetivo la seguridad del equipo de la laminadora y la calidad de los productos laminados. Una fuerza excesiva durante el proceso de laminación puede causar una deformación en los rodillos, lo cual produciría una variación de espesores a lo ancho del producto de laminación.

Uno de los pasos para el desarrollo del método del planchón es obtener una ecuación diferencial en la que las únicas variables sean el esfuerzo de interés y otra cuyo origen sea geométrico. La variable dependiente para el caso de laminación es la carga de los rodillos, como ya se mencionó en el párrafo anterior. Sin embargo, con el propósito de no complicar el cálculo de las operaciones, se utiliza el esfuerzo principal correspondiente a la dirección del flujo del material, σ_x , como la variable dependiente. A partir del esfuerzo principal, se determina el valor de la carga de los rodillos, que es la variable de interés. Para el caso de la variable independiente, se utiliza el ángulo de contacto θ , aunque el análisis parte del uso de la variable longitudinal x . La razón por la que se prefiere esta variable respecto a la longitudinal x , es debido a que las variaciones de los esfuerzos y cargas implicadas en el análisis son menos bruscas con respecto del ángulo de contacto θ que con la variable longitudinal x , y mientras menos sean estas variaciones, se reduce más el error implicado por el uso de un método numérico.

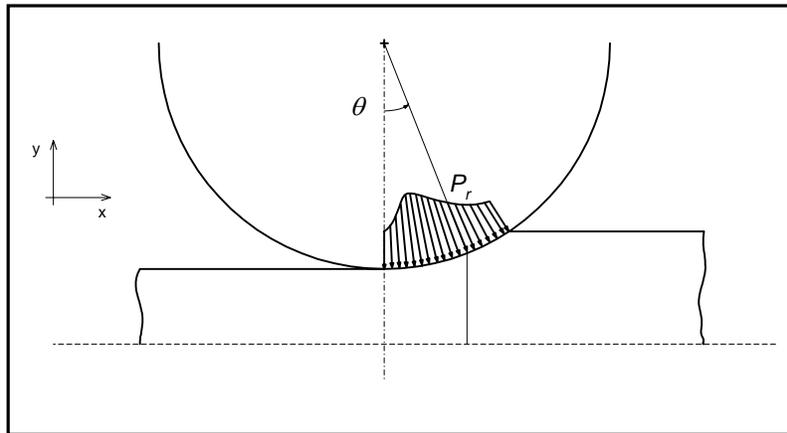


Figura 3.2 Variables dependiente e independiente.

3.4 DESARROLLO DEL MODELO

Para la aplicación del método del planchón al proceso de laminación, cabe recordar que este análisis es unidimensional. Del proceso de laminación, se tiene que la dirección en la que varía principalmente el valor de los esfuerzos es en el eje x , por lo que las variaciones en los otros ejes se desprecian para este método.

Como en el análisis por el método del planchón se busca cumplir en cierta manera con el principio de conservación de cantidad de movimiento lineal, se tiene que las ecuaciones principales son las ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Del equilibrio de fuerzas se derivan tres ecuaciones, que corresponden a cada uno de los ejes coordenados. Sin embargo, debido a que la laminación de productos planos se considera como un proceso de deformación plana, entonces solamente se cuenta con dos ecuaciones referentes al equilibrio de fuerzas.

El diagrama de cuerpo libre de dos elementos diferenciales representativos del material de trabajo se muestran en la figura 3.3, en el cual el elemento de la derecha está situado entre el plano de entrada y el plano del punto neutro, mientras que el elemento de la izquierda representa los elementos entre el plano del punto neutro y el plano de salida.

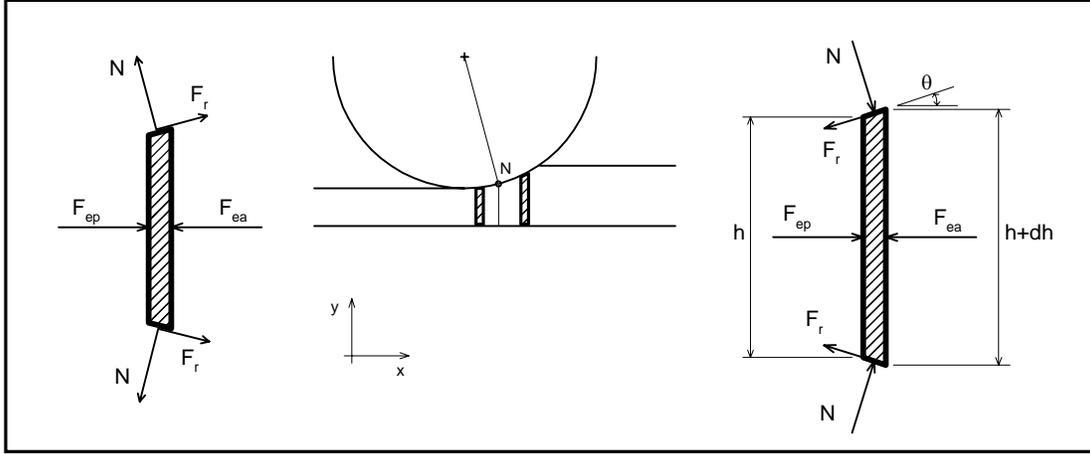


Figura 3.3 Método del planchón.

Donde

N : Fuerza debida a la presión normal de los rodillos sobre el material.

F_f : Fuerza de fricción entre el rodillo y el material.

F_{ea} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial anterior.

F_{ep} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial posterior.

Aplicando la ecuación de equilibrio fuerzas en el eje x :

$$\sum F_x = 0 \quad (3.14)$$

$$F_{ep} - F_{ea} + 2N_x \mp 2F_{rx} = 0 \quad (3.15)$$

El símbolo que antecede a la fuerza de fricción, implica que el signo de arriba (en este caso negativo) se utiliza entre el plano de entrada y el punto neutro, mientras que el signo inferior (positivo en esta ecuación) se aplica entre el punto neutro y el plano de salida. Esta convención se utiliza en todo el análisis.

Cada una de estas fuerzas puede ser expresada en términos de fuerza por unidad de área.

$$F_{ep} = \sigma_x hw \quad (3.16)$$

$$F_{ea} = (\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh)w \quad (3.17)$$

$$N_x = P_r (\text{sen } \theta) wds \quad (3.18)$$

$$F_{rx} = f_r (\text{cos } \theta) wds \quad (3.19)$$

Como se mencionó en las suposiciones, en este modelo se va a utilizar la ley de Coulomb, que relaciona a la presión normal P_r con el cortante f_r mediante la siguiente ecuación

$$f_r = \mu P_r \quad (3.20)$$

Sustituyendo el valor de cada una de las fuerzas, la ecuación que se obtiene es la siguiente

$$\sigma_x hw - (\sigma_x + d\sigma_x)(h + dh)w + 2P_r(\text{sen}\theta)wds \mp 2\mu P_r(\text{cos}\theta)wds = 0 \quad (3.21)$$

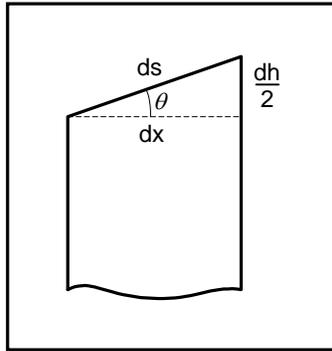


Figura 3.4 Relaciones geométricas.

A partir de la geometría mostrada en la figura 3.4 se obtiene la siguiente relación:

$$ds = \frac{dx}{\text{cos}\theta} \quad (3.22)$$

Sustituyendo la ecuación 3.22 en la ecuación 3.21, desarrollando términos y simplificando se obtiene la siguiente ecuación

$$h \frac{d\sigma_x}{dx} + \sigma_x \frac{dh}{dx} = 2P_r(\tan\theta \mp \mu) \quad (3.23)$$

Para poder desarrollar la ecuación y dejarla en términos del ángulo de contacto θ , que es la variable independiente del modelo, es necesario desarrollar las relaciones entre x , h y θ . Estas relaciones se determinan a partir de la geometría del proceso, la cual se ilustra en la figura 3.5.

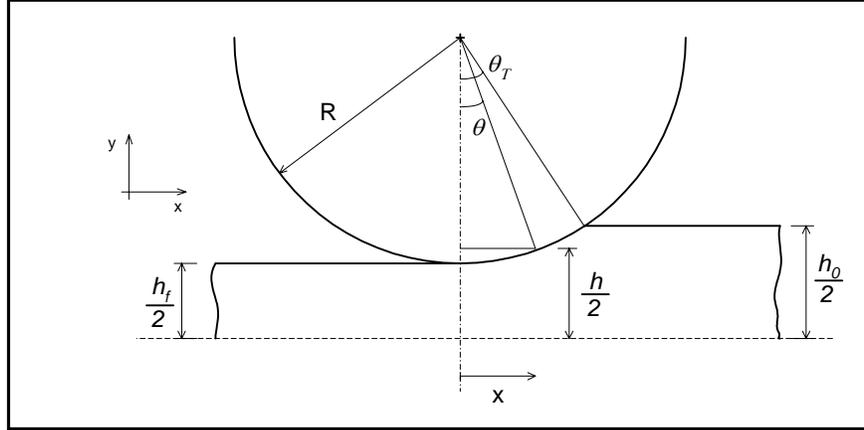


Figura 3.5 Análisis geométrico.

$$h = h_f + 2R(1 - \cos \theta) \quad (3.24)$$

$$x = R \operatorname{sen} \theta \quad (3.25)$$

Derivando las ecuaciones 3.24 y 3.25 se obtiene

$$\frac{dh}{d\theta} = 2R \operatorname{sen} \theta \quad (3.26)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = R \cos \theta \quad (3.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.26 y 3.27 en la ecuación 3.23, aplicando la regla de la cadena para derivadas y despejando la derivada del esfuerzo principal en x , se obtiene

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h} (P_r (\operatorname{sen} \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \operatorname{sen} \theta) \quad (3.28)$$

Por otro lado, para poder determinar la relación entre P_r y σ_x es necesario desarrollar la ecuación de equilibrio para el eje y . De esta ecuación, se obtiene el esfuerzo principal correspondiente al eje y en función de la carga de los rodillos P_r . Desarrollando el equilibrio de fuerzas en el eje y a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 3.6.

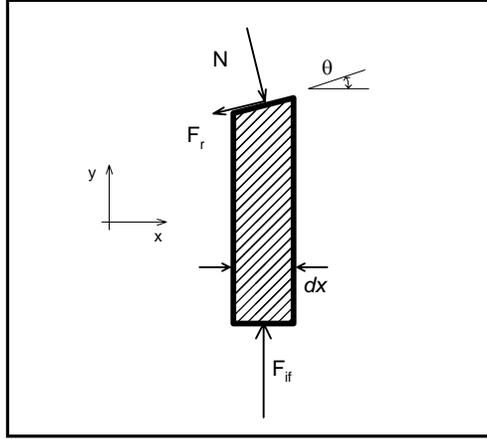


Figura 3.6 Diagrama de cuerpo libre para el eje y.

Donde

F_{if} : Fuerza interna vertical del material.

El valor de la fuerza interna F_{if} puede dejarse en términos del esfuerzo principal correspondiente al eje y.

$$F_{if} = \sigma_y w dx \quad (3.29)$$

Considerando la ecuación del equilibrio de fuerzas en la dirección y:

$$\sum F_y = 0 \quad (3.30)$$

$$F_{if} - N_y \mp F_{ry} = 0 \quad (3.31)$$

$$\sigma_y w dx - P_r \cos \theta w \frac{dx}{\cos \theta} \mp \mu P_r \operatorname{sen} \theta w \frac{dx}{\cos \theta} = 0 \quad (3.32)$$

Simplificando la ecuación y despejando σ_y se obtiene

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu \tan \theta) \quad (3.33)$$

La forma de relacionar ambas ecuaciones resultantes del equilibrio de fuerzas es mediante el criterio de von Mises, en el que se relaciona a ambos esfuerzos principales cuando existe un comportamiento plástico del material. Partiendo de la ecuación del capítulo 2 del criterio de von Mises y de la ecuación de flujo para la dirección 3 se obtienen la ecuación buscada.

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} \quad (2.43)$$

$$d\varepsilon_3 = \frac{d\varepsilon_{ef}}{d\sigma_{ef}} \left(\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) \quad (3.34)$$

Debido a que la laminación es un proceso de deformación plana se tiene que $\varepsilon_3=0$, la ecuación 3.34 se simplifica a

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.35)$$

Al sustituir la ecuación 3.35 en la ecuación 2.43 y simplificando se obtiene

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad (3.36)$$

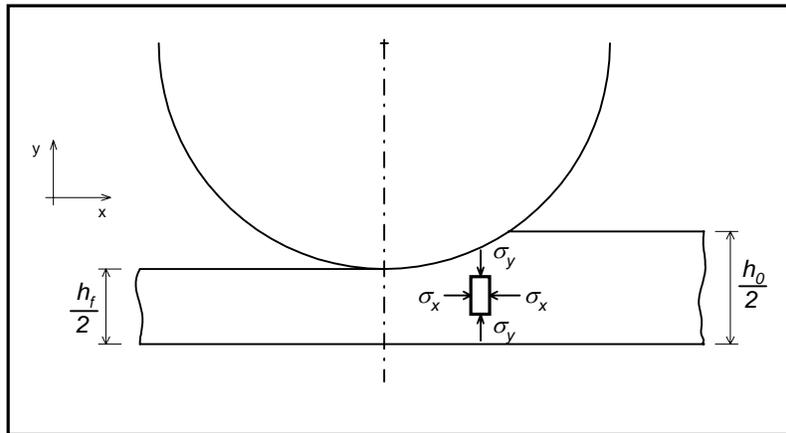


Figura 3.7 Esfuerzos internos del material.

Para poder sustituir cada uno de los valores de la ecuación del criterio de von Mises, es necesario analizar cada uno de los esfuerzos involucrados. Ambos esfuerzos principales, tanto el correspondiente a la dirección x como a la dirección y , fueron considerados como esfuerzos compresivos desde su planteamiento, como se observa en la figura 3.7. Hay que tener en mente que por convención se ha adoptado que esfuerzos de tracción implican un valor positivo, mientras que para esfuerzos de compresión el signo es negativo. Por eso es necesario realizar un cambio de signo al momento de sustituir los valores de los esfuerzos principales. Los resultados que esperaríamos con estos cambios de signo es que los valores de los esfuerzos principales tendrían un signo positivo durante todo el proceso, y debido a que los signos del esfuerzo principal en y , σ_y , y de la presión de los rodillos P_r son iguales, entonces se obtendría un valor positivo para P_r , siendo que implica realmente un esfuerzo de compresión. Por otro lado, σ_0 representa el esfuerzo de fluencia para el caso de compresión, por lo que el signo resultante debe ser también negativo. Con el propósito de obtener valores positivos, será necesario poner el signo negativo al momento de sustituir en la ecuación 3.36. Cabe recordar que la ecuación del criterio de von Mises original contiene

elementos elevados al cuadrado, por lo que se evita el problema concerniente a la diferencia de signos entre el esfuerzo de fluencia y el resultado de la diferencia de los esfuerzos principales. Para eliminar los exponentes a ambos lados se necesita eliminar este problema de signos. Por las condiciones del proceso se obtiene que el esfuerzo principal en y siempre va a ser mayor al esfuerzo principal en x en cuestión de magnitud. Considerando los signos, la diferencia de σ_y menos σ_x tendrá como resultado un valor negativo, que sería del mismo signo que el del esfuerzo de fluencia. De todo el análisis anterior se puede concluir entonces que:

$$\sigma_1 = -\sigma_y \quad (3.37)$$

$$\sigma_2 = -\sigma_x \quad (3.38)$$

$$\sigma_0' = -\sigma_0 \quad (3.39)$$

Finalmente, la ecuación del criterio de von Mises, después de multiplicar por menos a toda la ecuación, quedaría de la siguiente manera:

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad (3.40)$$

El valor del esfuerzo de fluencia obtenido de la ecuación 3.40 depende del tipo de comportamiento que presente el material cuando es sometido a deformación plástica. Si el material no presentara endurecimiento el valor de σ_0 sería constante e igual a Y_0 , sin embargo, si se considera endurecimiento, el esfuerzo de fluencia sería función principalmente de la deformación efectiva del material, como ya se mencionó en el capítulo 2. Las conclusiones anteriores parten de la consideración de que el proceso a modelar es laminado en frío.

Como ya se había mencionado, la ecuación constitutiva que se seleccionó para el caso de endurecimiento fue la ecuación 3.13.

$$\sigma_0 = K \varepsilon_{ef}^n \quad (3.41)$$

Debido a que el proceso es una deformación plana y aplicando el principio de conservación de masa se obtiene que $\varepsilon_x = -\varepsilon_y$. De la definición de esfuerzo efectivo, ecuación 2.48, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\varepsilon_{ef} = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_y \quad (3.42)$$

Cabe recordar que ε_y es la deformación real que sufre el elemento diferencial en la dirección y ; pero como éste es de compresión, el signo de la deformación por lo tanto es negativo. En la ecuación de endurecimiento, únicamente se necesita el valor absoluto de la

deformación para la predicción de la magnitud del esfuerzo de fluencia, ya sea de compresión o de tracción. Por lo anterior, la deformación real en la dirección y se obtiene de la siguiente manera

$$\varepsilon_y = \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \quad (3.43)$$

Finalmente juntando las ecuaciones 3.41, 3.42 y 3.43 en la ecuación 3.40, se obtiene la relación entre los esfuerzos principales en el caso de la zona plástica.

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n \quad (3.41)$$

Por otra parte, para el modelado del comportamiento elástico, la ecuación obtenida del criterio de von Mises no sería aplicable. De las consideraciones, la ecuación constitutiva para la zona elástica del material está dada por la ley de Hooke.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \quad (2.29)$$

Por las condiciones del problema, la deformación principal en la dirección 3 es cero.

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.42)$$

Al sustituir la ecuación 3.42 en la ecuación 2.27 y simplificando se obtiene

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1(1 - \nu^2) - \sigma_2(\nu + \nu^2)) \quad (3.43)$$

Con respecto a los signos, se cumple lo mismo que para la deformación plástica, tanto para los esfuerzos, como para la deformación.

$$\sigma_y(1 - \nu^2) - \sigma_x(\nu + \nu^2) = E\varepsilon_y \quad (3.44)$$

Donde ε_y tiene la misma definición que la de la ecuación 3.40, por lo que la ecuación finalmente quedaría como

$$\sigma_y(1-\nu^2) - \sigma_x(\nu + \nu^2) = E \ln \left| \frac{h}{h_0} \right| \quad (3.45)$$

Cuando se considera un comportamiento elástico-plástico, cuando se inicia de la deformación se utiliza la ecuación 3.45. La ecuación que corresponde al comportamiento plástico, la ecuación 3.41 empezaría a utilizarse cuando el esfuerzo efectivo alcanzara un valor crítico que corresponde al inicio de la fluencia. Como se está utilizando el criterio de von Mises, la fluencia comienza cuando se cumple la siguiente condición

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \quad (3.46)$$

Donde Y_0 es el esfuerzo de fluencia para tracción uniaxial.

En conclusión, todas las ecuaciones necesarias para el modelado del proceso de laminación de productos planos se muestran a continuación.

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h} (P_r (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta) \quad (3.28)$$

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu \tan \theta) \quad (3.33)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{h}{h_0} \right| \right)^n \quad (3.41)$$

$$\sigma_y(1-\nu^2) - \sigma_x(\nu + \nu^2) = E \ln \left| \frac{h}{h_0} \right| \quad (3.45)$$

$$h = h_f + 2R(1 - \cos \theta) \quad (3.24)$$

3.5 CONDICIONES DE FRONTERA

La obtención de la función de la carga de los rodillos P_r se obtiene de la resolución de la ecuación diferencial ordinaria 3.28 y del sistema de ecuaciones al que se llegó. Sin embargo, la ecuación 3.28 expresa en realidad dos ecuaciones diferenciales, cuya única diferencia entre ambas se encuentra en un signo. Partiendo del plano de y utilizando la ecuación diferencial ordinaria con el signo en la parte superior, la solución proporciona una curva para la carga de los rodillos. La otra ecuación diferencial ordinaria, la del signo en la parte inferior, se utiliza para el plano de salida, y de su solución se obtiene otra curva. Estas dos curvas, que predicen el comportamiento de la carga a lo largo del arco de contacto, definen lo que usualmente se conoce como *colina de fricción*, las cuales se muestran en la

figura 3.8. La localización de la intersección de las dos curvas (el punto más alto de la colina de fricción) define el plano que contiene al punto neutro N .

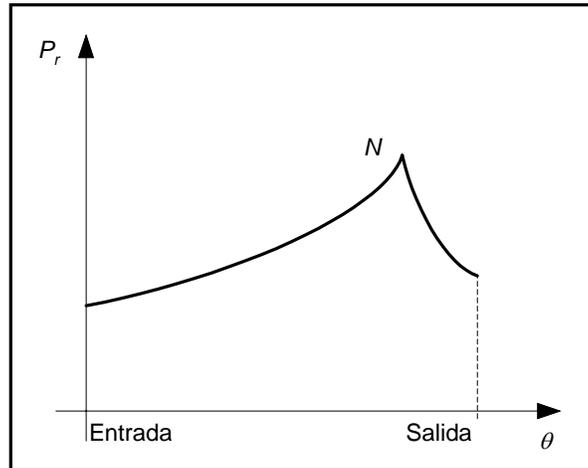


Figura 3.8 Colina de fricción.

Las condiciones de frontera para la entrada y la salida son las siguientes

$$\sigma_x=0 \text{ para } \theta=0$$

$$\sigma_x=0 \text{ para } \theta= \theta_T$$

Donde θ_T es el ángulo de contacto total.

Estas condiciones de frontera son aplicables para cualquier consideración realizada sobre el método del planchón en el proceso de laminación, incluyendo cualquier tipo de comportamiento del material. Estas condiciones se basan en el hecho de que los elementos diferenciales en el plano de entrada y de salida no interactúan con aquellos elementos que no están en contacto con los rodillos, por lo que el esfuerzo en la dirección del flujo de material es igual a cero.

3.6 GENERALIDADES DEL SOFTWARE

El encontrar una solución analítica de la ecuación diferencial 3.28 resulta muy poco factible, por lo que es necesario el uso de métodos numéricos para obtener una solución. El método numérico empleado es el Runge-Kutta de cuarto orden, mientras que el lenguaje de programación utilizado para la aplicación del método es el lenguaje C orientado a objetos. El nombre del software creado para la aplicación del método del planchón orientado al proceso de laminación es LAMPLAN. En el anexo III se explica la forma en que el programa LAMPLAN recibe los datos del problema y también la manera en que se obtienen los resultados, además de que en el anexo IV se incluye el código fuente del programa.

El programa LAMPLAN tiene como objetivo la comparación entre varias consideraciones realizadas en el método del planchón aplicado al proceso de laminación. Se presentan cuatro casos. El primero de ellos se refiere al análisis aportado por este trabajo, en donde se considera la región elástica en el proceso de laminación y, por lo tanto se utiliza un comportamiento elástico-plástico para el material. Las ecuaciones implicadas se muestran a continuación

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h} (P_r (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta) \quad (3.28)$$

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu \tan \theta) \quad (3.33)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n \quad (3.41)$$

$$\sigma_y (1 - \nu^2) - \sigma_x (\nu + \nu^2) = E \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \quad (3.45)$$

$$h = h_f + 2R(1 - \cos \theta) \quad (3.24)$$

Las ecuaciones obtenidas al aplicar las sustituciones son

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos \theta)} \left(\frac{E \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sigma_x (\nu + \nu^2)}{(1 \pm \mu \tan \theta)(1 - \nu^2)} (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta \right) \quad (3.47)$$

$$P_r = \frac{E \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sigma_x (\nu + \nu^2)}{(1 \pm \mu \tan \theta)(1 - \nu^2)} \quad (3.48)$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos \theta)} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan \theta)} (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta \right) \quad (3.49)$$

$$P_r = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan \theta)} \quad (3.50)$$

Las ecuaciones 3.54 y 3.55 corresponden a la región elástica, mientras que las ecuaciones 3.56 y 3.57 se refieren a la región plástica. La condición utilizada para conocer en que región se encuentra el material se da a continuación

$$\text{Región elástica si} \quad \sigma_y - \sigma_x < \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0$$

$$\text{Región plástica si} \quad \sigma_y - \sigma_x \geq \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0$$

En el segundo caso, también se considera un comportamiento del material rígido-plástico, pero con la diferencia que se toma en cuenta el endurecimiento del material. Las ecuaciones resultantes son

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h} (P_r (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta) \quad (3.28)$$

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu \tan \theta) \quad (3.33)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \varepsilon_{in} \right)^n \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{in} = \sqrt[n]{\frac{Y_0}{K}} \quad (3.52)$$

$$h = h_f + 2R(1 - \cos \theta) \quad (3.24)$$

El término ε_{in} de la ecuación 3.50 corresponde al desplazamiento de la curva de endurecimiento que se debe aplicar para modelar el comportamiento rígido-plástico con la ecuación 2.58.

$$\sigma = K \varepsilon_p^n \quad (2.58)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.24, 3.33, 3.50 y 3.51 en la ecuación 3.28 se obtiene

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos\theta)} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sqrt[n]{\frac{Y_0}{K}} \right)^n + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan\theta)} (\sin\theta \mp \mu \cos\theta) - \sigma_x \sin\theta \right) \quad (3.53)$$

$$P_r = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sqrt[n]{\frac{Y_0}{K}} \right)^n + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan\theta)} \quad (3.54)$$

En el caso 3 se analiza el modelo clásico que se utiliza en los libros de Metalurgia Mecánica¹, en el que se considera un comportamiento del material rígido-plástico sin endurecimiento. Las ecuaciones involucradas son

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h} (P_r (\sin\theta \mp \mu \cos\theta) - \sigma_x \sin\theta) \quad (3.28)$$

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu \tan\theta) \quad (3.33)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 \quad (3.55)$$

$$h = h_f + 2R(1 - \cos\theta) \quad (3.24)$$

Haciendo las sustituciones y simplificaciones necesarias se obtiene que las ecuaciones necesarias para este caso son

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos\theta)} \left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan\theta)} (\sin\theta \mp \mu \cos\theta) - \sigma_x \sin\theta \right) \quad (3.56)$$

$$P_r = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} Y_0 + \sigma_x}{(1 \pm \mu \tan\theta)} \quad (3.57)$$

Finalmente, en el caso 4 se utiliza el mismo comportamiento del material que para el caso 1, la diferencia es que se aplica una de las consideraciones de Bland y Ford en la que suponen que la carga de los rodillos es igual al esfuerzo principal en la dirección vertical.

Esta consideración implica que el término $\mu \tan \theta$ se desprecie, por lo que las ecuaciones quedarían de la siguiente forma

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos \theta)} \left(\frac{E \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sigma_x (v + v^2)}{(1 - v^2)} (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta \right) \quad (3.58)$$

$$P_r = \frac{E \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| + \sigma_x (v + v^2)}{(1 - v^2)} \quad (3.59)$$

$$\frac{d\sigma_x}{d\theta} = \frac{2R}{h_f + 2R(1 - \cos \theta)} \left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n + \sigma_x \right) (\sin \theta \mp \mu \cos \theta) - \sigma_x \sin \theta \right) \quad (3.60)$$

$$P_r = \frac{2}{\sqrt{3}} K \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left| \ln \frac{h}{h_0} \right| \right)^n + \sigma_x \quad (3.61)$$

Las condiciones son las mismas que las aplicadas en el caso 3, tan solo con la variante de que $\sigma_y = P_r$.

Finalmente, LAMPLAN obtiene el ángulo en el cual las curvas de la colina de fricción se intersectan, con lo cual se obtiene la localización del punto neutro para cada uno de los cuatro casos. Conociendo donde se encuentra el plano del punto neutro, se calcula la fuerza de reacción en los rodillos y el torque del laminado, ambos por unidad de ancho, en base a las siguientes ecuaciones:

$$F_r = \int_{\theta_N}^{\theta_T} P_{rI} R d\theta + \int_0^{\theta_N} P_{rII} R d\theta \quad (3.62)$$

$$T_r = 2\mu R \left(\int_{\theta_N}^{\theta_T} P_{rI} R d\theta - \int_0^{\theta_N} P_{rII} R d\theta \right) \quad (3.63)$$

Donde P_{rI} y P_{rII} corresponden a la distribución de carga de los rodillos a la entrada y a la salida del proceso.

Sin embargo como no se tiene una función analítica como solución de la distribución de carga de los rodillos, entonces se utiliza la definición de integral para obtener la fuerza de reacción en los rodillos y el torque de laminación

$$F_r = \sum_{\theta=\theta_N}^{\theta_T} P_{rI} R(\Delta\theta) + \sum_{\theta=0}^{\theta_N} P_{rII} R(\Delta\theta) \quad (3.64)$$

$$T_r = 2\mu R \left(\sum_{\theta=\theta_N}^{\theta_T} P_{rI} R(\Delta\theta) - \sum_{\theta=0}^{\theta_N} P_{rII} R(\Delta\theta) \right) \quad (3.65)$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

COMPARACIÓN ENTRE LOS CASOS DISTINTOS DE LAMINACIÓN

Cuando se elabora un modelo que predice el comportamiento de algún fenómeno físico, resulta indispensable la comparación de los resultados obtenidos de éste con los datos del proceso real. Lo anterior con el propósito de evaluar la eficacia de este modelo para la predicción del fenómeno. Sin embargo, cuando no es posible obtener datos del fenómeno real, se procede a la comparación con otros modelos ya existentes y aceptados, que permitan observar las semejanzas y las diferencias en el comportamiento entre estos modelos. El caso del proceso de laminación no es la excepción a esto.

Aún cuando no se cuenta con la información de datos experimentales, es posible obtener de la literatura modelos sobre la aplicación del método del planchón al proceso de laminación. El modelo que se encuentra en dicha literatura considera un comportamiento rígido-plástico sin endurecimiento en las propiedades del material, utilizado debido a la relativa simplicidad que implica en la herramienta matemática. Otra simplificación que en ocasiones se llega a aplicar es la de considerar despreciable la componente de la fuerza de fricción sobre el eje cuya dirección es perpendicular al flujo del material de trabajo. La última es la misma consideración que aplicaron Bland y Ford en su modelo. Otro modelo, que se va a utilizar, aún cuando no aparece en la literatura, es el que considera el endurecimiento del material en un comportamiento rígido-plástico. El modelo anterior tiene el propósito de observar el efecto que tiene el considerar la región elástica del material sobre la distribución de cargas.

Los datos referentes a la geometría, a las propiedades del material y a las condiciones de contacto que se utilizaron para efectuar la comparación entre los diferentes modelos del proceso de laminación con LAMPLAN se muestran en la tabla 4.1. El material cuyas propiedades se muestran en la tabla 4.1 corresponde al acero de bajo contenido de carbono recocido².

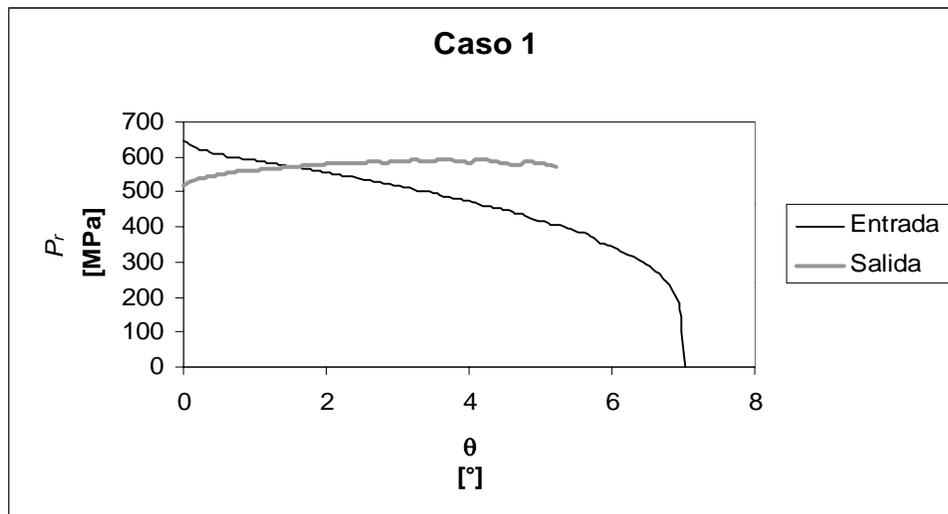
² Ref[8] pp. 51

Radio de los rodillos	$R = 20$ [cm]
Espesor inicial del material	$h_0 = 7$ [mm]
Espesor final del material	$h_f = 4$ [mm]
Coefficiente de fricción	$\mu = 0.3$
Módulo de Young	$E = 210$ [GPa]
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$
Coefficiente de Resistencia	$K = 500$ [MPa]
Exponente de endurecimiento	$n = 0.25$
Esfuerzo de fluencia	$Y_0 = 250$ [MPa]

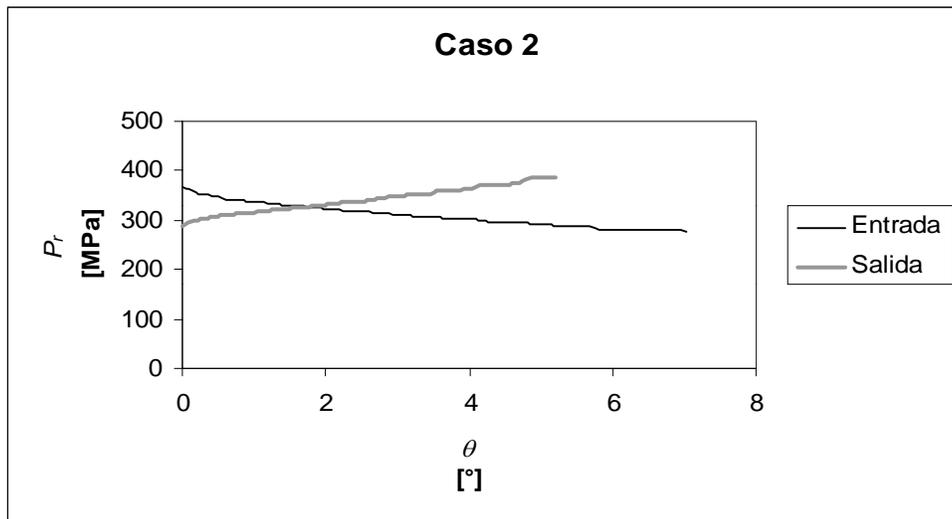
Tabla 4.1 Datos del problema.

Uno de los aspectos que se debe tener muy presente en la resolución de un modelo por medio de herramientas informáticas, es el tiempo empleado para la obtención de los resultados. Para el caso de algunos software que utilizan otros métodos, por ejemplo el método del elemento finito, se necesitan de horas, aún con una computadora adecuada, para poder obtener los resultados del modelo. Para el caso del software de LAMPLAN, la solución es obtenida en cuestión de segundos, lo cual resulta una gran ventaja.

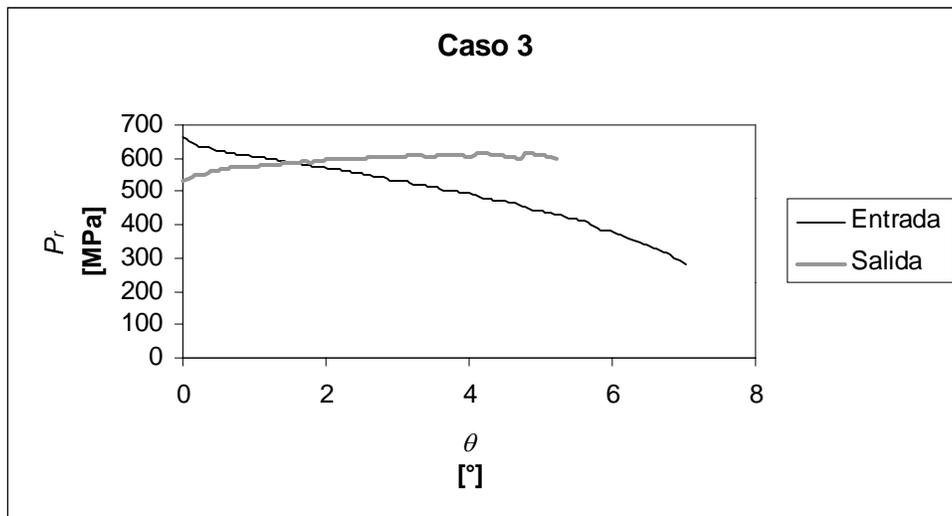
Los resultados obtenidos mediante LAMPLAN se observan en las siguientes gráficas que corresponden a las colinas de fricción de cada uno de los modelos de laminación. Los valores en los que se basa cada una de las colinas de fricción se presentan en el anexo II.



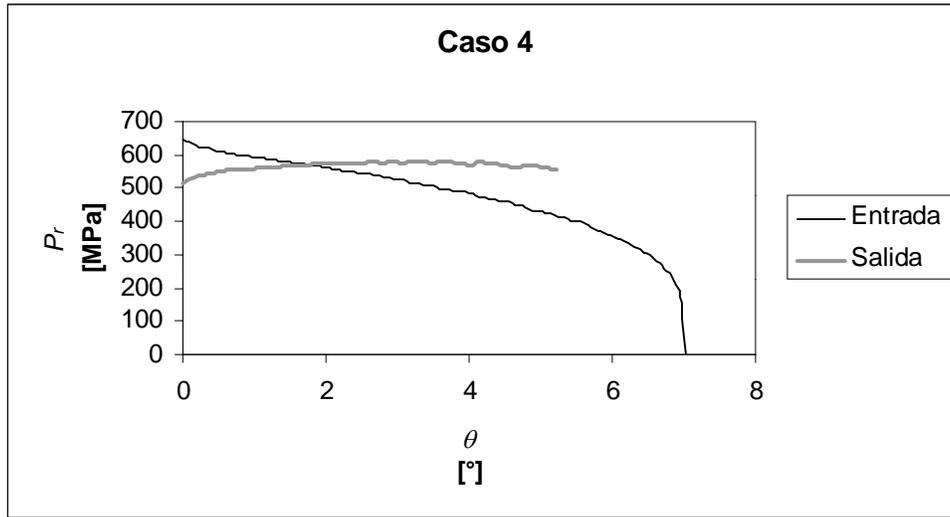
Gráfica 4.1 Comportamiento elástico-plástico con endurecimiento.



Gráfica 4.2 Comportamiento rígido-plástico sin endurecimiento.



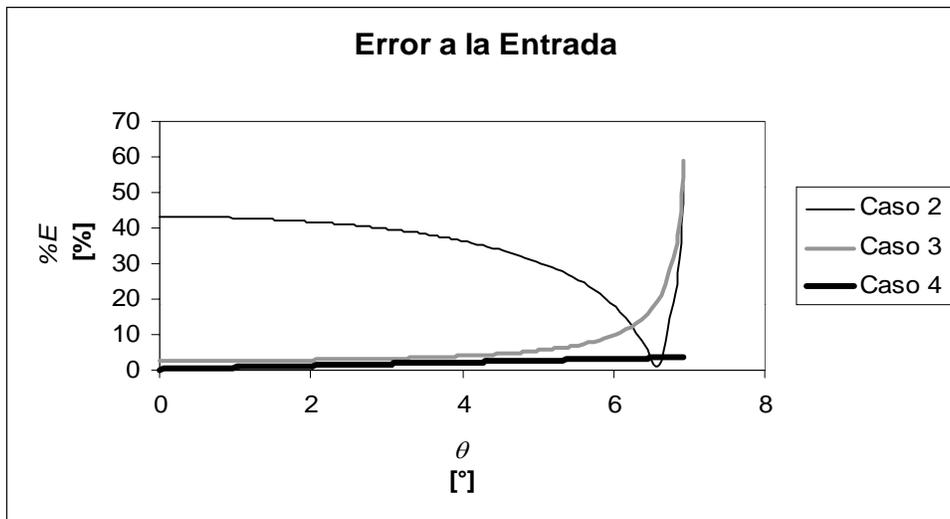
Gráfica 4.3 Comportamiento rígido-plástico con endurecimiento.



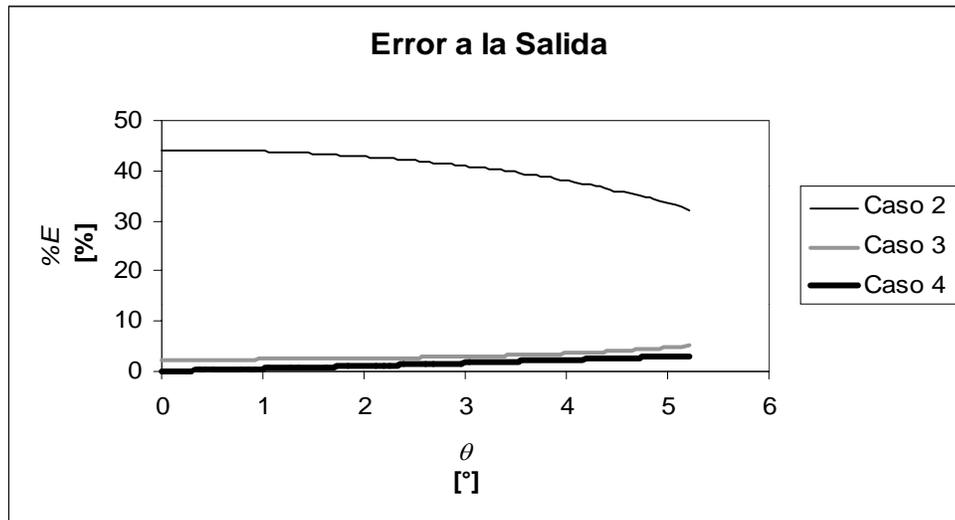
Gráfica 4.4 Comportamiento elástico-plástico con endurecimiento con la consideración de Bland y Ford.

De manera cualitativa, es posible observar la gran diferencia que existe en la forma de las curvas de colina de fricción cuando se consideran diferentes tipos de comportamiento en el material de trabajo (gráficas 4.1, 4.2 y 4.3). En cambio, cuando se hace la consideración de Bland y Ford, no se aprecia diferencia en el comportamiento de los resultados (gráficas 4.1 y 4.4).

Al comparar los resultados entre sí de manera cuantitativa, tomando como referencia el modelo del caso 1 por ser el más completo, se obtienen las siguientes gráficas.



Gráfica 4.5 Comparación entre los cuatro casos utilizando los resultados de la entrada.



Gráfica 4.6 Comparación entre los cuatro casos utilizando los resultados de la salida.

Cuando se desarrollaron las ecuaciones en el capítulo 3, se utilizó el signo \pm para indicar que se tenían dos ecuaciones: una que utilizaba el signo de arriba, que por convención correspondía al arco de contacto entre la entrada y el punto neutro, y la otra que hacía uso del signo inferior, que comprendía entre el plano que contiene al punto neutro y el plano de salida. Al hacer referencia de los resultados de la entrada, significa que los resultados corresponden a la solución de la ecuación diferencial ordinaria que utiliza el signo superior, mientras que los resultados de salida son asociados a la solución con el signo inferior.

La ecuación que se utilizó para calcular el porcentaje de error se da a continuación

$$\% E = \left| \frac{P_{ri} - P_{r1}}{P_{r1}} \right| \cdot 100\% \quad (4.1)$$

De las gráficas 4.5 y 4.6 se observa que el caso que presenta mayor porcentaje de error, con un valor promedio cercano al 40 %, corresponde al modelo clásico del método del planchón aplicado a laminación, en el que se considera un comportamiento rígido-plástico sin endurecimiento. Para el caso 3, en el que se considera un comportamiento rígido-plástico con endurecimiento, el error en la mayor parte del arco de contacto presenta un valor inferior al 10 %. Sin embargo, en las proximidades del plano de entrada, el error aumenta hasta superar el 60 %. Para el caso 4, se aprecia que la suposición de Bland y Ford genera un error inferior del 3 % a lo largo del arco de contacto.

A continuación se muestran valores de otros datos de interés y su comparación con el caso 1.

Angulo Neutro:

			%E [%]
Caso1:	1.517	[grados]	0
Caso2:	1.727	[grados]	13.843
Caso3:	1.559	[grados]	2.7686
Caso4:	1.769	[grados]	16.612

Fuerza de reaccion:

Caso1:	11383.772	[kN/m]	0
Caso2:	7418.176	[kN/m]	34.836
Caso3:	11992.446	[kN/m]	5.3469
Caso4:	11552.168	[kN/m]	1.4793

Torque:

Caso1:	1366.053	[kN]	0
Caso2:	890.181	[kN]	34.836
Caso3:	988.628	[kN]	27.629
Caso4:	1386.26	[kN]	1.4792

CAPÍTULO 5

PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE COLAMINACIÓN

5.1 ESTADO DEL ARTE

Métodos de análisis para la comprensión y predicción del comportamiento de las capas que se colaminan están orientados a proporcionar parámetros importantes de diseño. Gracias a la capacidad de procesamiento de datos de las computadoras, actualmente los modelos numéricos son herramientas importantes e incluso indispensables en el diseño, con esto se busca dar solución al problema de predecir el comportamiento del material durante su procesamiento así como los parámetros involucrados durante el proceso. En el pasado se han desarrollado varios métodos aproximados de análisis y se han aplicado a varios procesos de conformado, los métodos más conocidos son el Método del Planchón, el Método de Campos de Líneas de Deslizamiento, el Método de la Visioplaticidad, el Método General de Hill, el Método del Límite Superior, y más recientemente el Método del Elemento Finito.

El Método del Elemento Finito es considerado actualmente como la técnica más generalizada para el análisis de un modelo cuyas primeras aplicaciones orientadas al análisis de la deformación plástica estuvieron basadas en las ecuaciones de Prandtl-Reuss. Comúnmente, la simulación y análisis de procesos de conformado mecánico es mediante software comercial basado en la aplicación de este método.

Alternativamente se utilizó un modelo matemático basado en el Método del Límite Superior cuya formulación requiere de los antecedentes teóricos asociados a las deformaciones plásticas, así como de técnicas de cálculo que, apoyadas con métodos de programación, dieron origen recientemente al sistema SIMCLAD para el análisis de deformaciones en el colaminado simétrico en la Unidad de Asistencia Técnica en Materiales de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

MODELO DE TZOU

Este modelo fue desarrollado recientemente por G.Y. Tzou (2001) y tiene la aparente ventaja de poder ser resuelto de forma analítica sin utilizar el método numérico de Runge-Kutta para la solución de las ecuaciones que definen el proceso de colaminado. La solución alcanzada por este método permite explorar el campo de esfuerzos de las capas colaminadas en el claro de laminación. La solución analítica de las ecuaciones de equilibrio resultantes proporciona la posibilidad de obtener una relativa conveniencia en cuanto a tiempo de cálculo requerido. Por lo tanto este modelo utiliza el método del planchón para el proceso de colaminación.

A continuación, y para efectos de poder hacer una comparación entre las bondades del método desarrollado en el presente trabajo, se hace una breve descripción del modelo propuesto por Tzou. El análisis parte de considerar el equilibrio en un elemento diferencial de un conglomerado tricapa como el mostrado en la figura 5.1. Para simplificar la formulación del modelo se hacen las siguientes consideraciones:

1. Los rodillos son rígidos y del mismo diámetro, y las capas a colaminar tienen un comportamiento rígido-plástico.
2. Se considera deformación plana.
3. Los esfuerzos se presentan uniformemente distribuidos en los elementos que se colaminan. El esfuerzo vertical (p) y los esfuerzos horizontales (q_c y q_m) son asumidos como esfuerzos principales.
4. El coeficiente de fricción entre los rodillos y el material de las capas externas y entre las capas que se colaminan es constante a lo largo del arco de contacto. Se hace uso del modelo de fricción de Coulomb, es decir: $\tau = \mu p$.
5. Las direcciones del flujo de las capas colaminadas a la entrada y a la salida son horizontales.
6. No existe deslizamiento entre la interfase de las hojas; por lo que el conglomerado que se colamina está unido completamente antes de ser laminado.

La disposición geométrica del conglomerado y la nomenclatura utilizada por el autor del artículo citado se muestran en la figura 5.1.

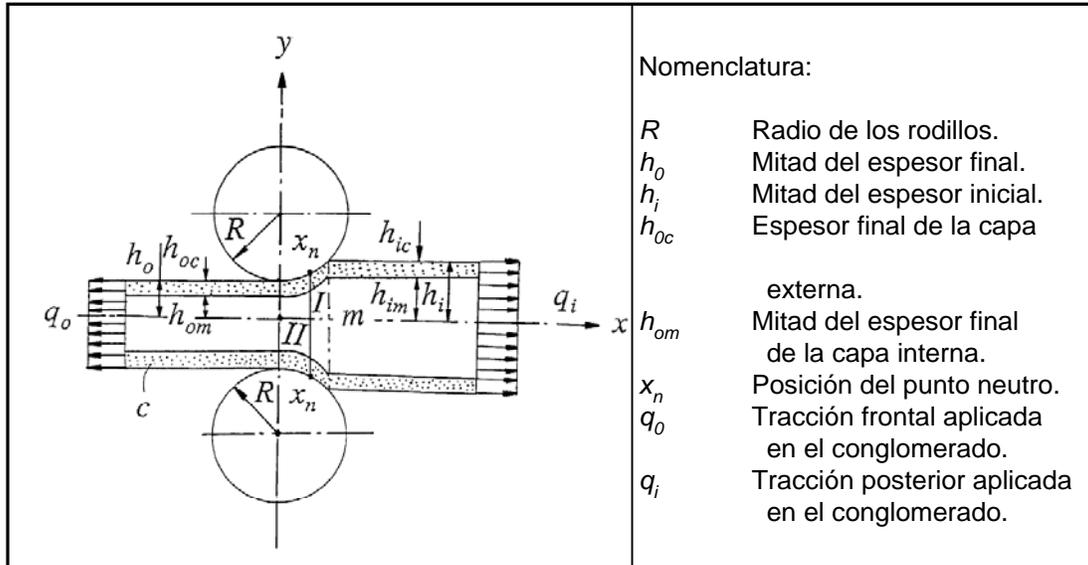


Figura 5.1 Modelo de Tzou.

Básicamente, la solución parte de plantear las ecuaciones de equilibrio cuasi-estático de un elemento diferencial en cada capa y así, generar las ecuaciones diferenciales pertinentes que sustenten la condición de equilibrio de fuerzas al interior del material. Al contar con dos capas de materiales diferentes (la simetría se aplica en el desarrollo del modelo) se cuenta con un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, cuya solución resulta relativamente simple de evaluar al utilizar métodos convencionales para ecuaciones diferenciales. La solución final es función de los parámetros característicos del proceso y particularmente de un parámetro que se mantiene como incógnita a lo largo de la solución el cual es la relación de espesores entre las capas que se colaminan.

La mayor desventaja de este método radica en el hecho de que para simplificar el análisis y poder acoplar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno se recurre a considerar que los materiales han sido unidos de forma permanente previamente al proceso, con lo cual se desprecia el efecto que tiene la fricción debida al deslizamiento que ocurre entre las capas. La unión previa de las capas condiciona fuertemente los perfiles de flujo de material y con ello la deformación a la interfase de los materiales.

Otro inconveniente, y que quizá tenga mayor importancia que el anterior es que la relación de espesores en cualquier punto del proceso se mantiene constante, es decir, el cociente del espesor de las capas a la entrada es igual a las de la salida. Lo anterior implica que no se determina realmente la relación de espesores al final del proceso.

En el campo de aplicación práctica de cualquier modelo que simule el proceso de colaminado, la relación de espesores (y no la carga de laminación) será quizá la variable primordial de interés debido a que este parámetro define, en muchas aplicaciones, las características del producto final en el que el conglomerado será utilizado. Es por ello que, y debido a su omisión en la solución, el modelo desarrollado por Tzou no puede tener una aplicación práctica en la industria y resulta muy inconveniente cuando la variable

primordial es la relación de espesores del producto final. Para condiciones particulares es posible establecer correlaciones entre carga y relación de espesor, sin embargo lo anterior no resulta idóneo al no contar con una solución general del problema.

5.2 CONSIDERACIONES DEL MODELO

De manera análoga a como se procedió en la aplicación del método del planchón para el proceso de laminación, es necesario plantear las consideraciones para el caso del proceso de colaminado. Para el desarrollo del modelo se requiere tomar en cuenta las condiciones del proceso real así como las simplificaciones que se hacen respecto a éste. A continuación se enlistan las consideraciones de las que parte el desarrollo del modelo:

1. Se considera un proceso de colaminado a temperatura ambiente (trabajo en frío) y simétrico.
2. Se desprecia la deformación de los rodillos.
3. Se considera deformación plana en el conglomerado, debido a que se desprecia el ensanchamiento.
4. La ley de Coulomb se utiliza para el contacto entre el rodillo y la capa externa. Se asume un coeficiente de fricción durante el proceso.
5. Para el contacto entre la capa interna y la capa externa se utiliza la teoría de la fricción adherente, donde se considera que no existe deslizamiento ($m=1$).

$$f_r = mk \quad (2.63)$$

6. Se aplica el criterio de von Mises para la fluencia de los materiales.
7. El ángulo de contacto total es pequeño.
8. En el equilibrio de fuerzas de las capas del conglomerado se desprecian los efectos inerciales y las fuerzas de cuerpo.
9. Se considera un comportamiento rígido-plástico con endurecimiento para los materiales del conglomerado. La ecuación utilizada para modelar el endurecimiento por trabajo es la ecuación

$$\sigma = K \varepsilon_p^n \quad (2.58)$$

10. La ecuación constitutiva para la zona elástica del material estará regida por la ley de Hooke.
11. Para el modelado del endurecimiento del material en la zona plástica se utilizara la expresión de Holloman, mencionada en el capítulo 2.

Además de estas consideraciones hay que agregar las implicadas con el uso del método del planchón, que no se incluyeron en la lista.

5.3 VARIABLES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES DEL MODELO

Como ya se mencionó en el último párrafo del modelo de Tzou, la relación de los espesores al final del conglomerado es la variable más importante a determinar, debido a su aplicación que tendría en la industria en cuestión de predicción. En este modelo, la variable principal que se busca determinar es el espesor de la capa interna del conglomerado en cualquier punto del arco de contacto, debido a que con este espesor es posible obtener de manera directa la relación de espesores del conglomerado. De manera adicional, el modelo permite obtener la distribución de cargas resultante del contacto entre el rodillo y la capa externa. De manera similar al modelo del proceso de laminación, la variable independiente será el ángulo de contacto, θ_r , por las mismas razones que se plantearon en el capítulo 3.

A diferencia del modelo que se obtuvo para el proceso de laminación, en el caso de colaminación se tendrán dos variables dependientes, que son el espesor de la capa interna, h_i , y la carga de los rodillos, P_r . Lo anterior implica la existencia de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en función de dos variables dependientes y una independiente.

5.4 FORMULACIÓN Y DESARROLLO DEL MODELO

En la figura 5.2 se ilustra de manera esquemática el proceso de colaminación simétrico.

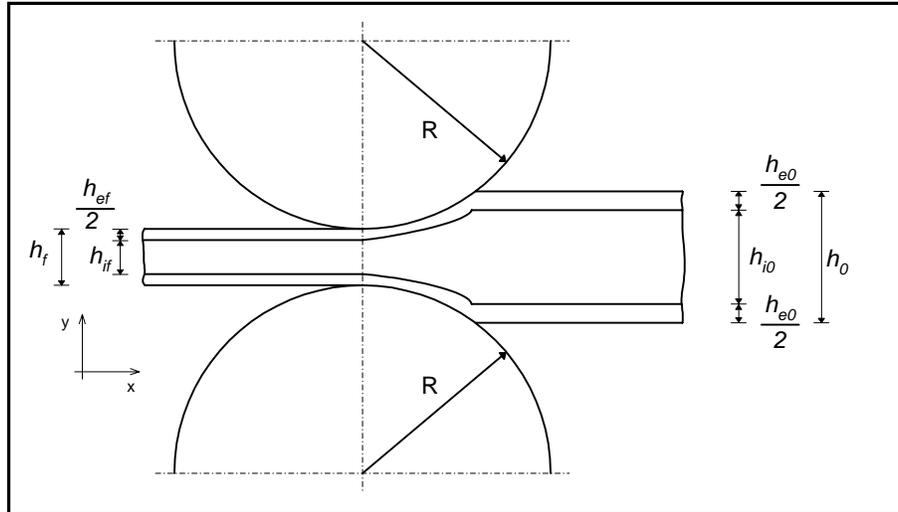


Figura 5.2 Proceso de colaminado.

Como ya se mencionó anteriormente, la principal ventaja del método del Planchón es que cumple con la conservación de la cantidad de movimiento lineal, a pesar de que se desprecien ciertos efectos relacionados a éste por las condiciones del problema. La ecuación resultante de la conservación de cantidad de movimiento lineal es la relacionada con el equilibrio de fuerzas en el cuerpo, que para este caso será el equilibrio de fuerzas en cada elemento diferencial de los materiales a colaminar.

La ecuación de equilibrio de fuerzas debe satisfacerse para cualquier dirección del elemento diferencial, y debido a que se considera deformación plana durante todo el proceso, basta con satisfacer el equilibrio de fuerzas en los ejes x y y tanto para la capa externa como para la capa interna.

Las fuerzas que actúan sobre un elemento diferencial cualquiera de la capa externa se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.3.

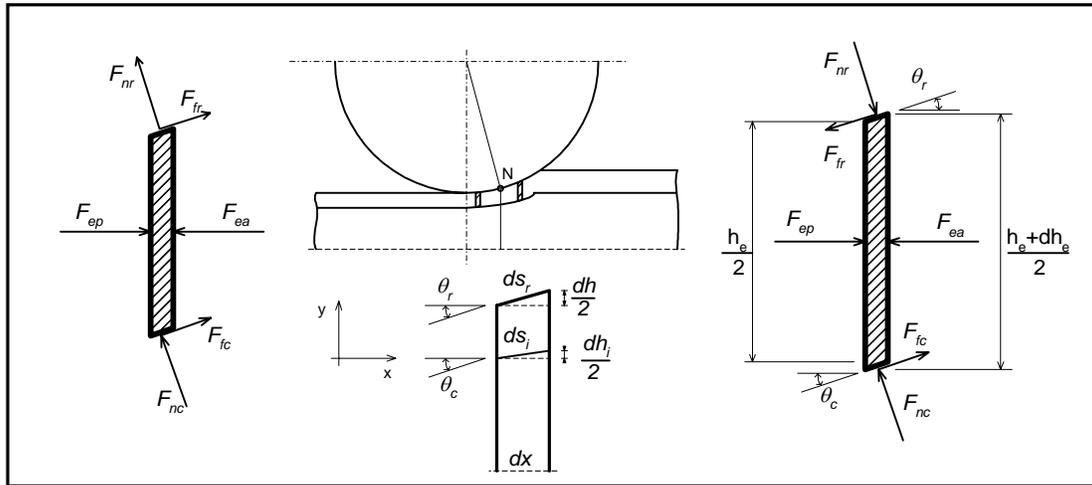


Figura 5.3 Diagrama de cuerpo libre para la capa externa.

Donde

F_{nr} : Fuerza debida a la presión normal de los rodillos sobre la capa externa.

F_{fr} : Fuerza de fricción entre el rodillo y la capa externa.

F_{nc} : Fuerza debida a la presión normal de la capa interna sobre la capa externa.

F_{fc} : Fuerza de fricción entre la capa interna y la capa externa.

F_{ea} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial anterior.

F_{ep} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial posterior.

De la ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección x del elemento diferencial se obtiene:

$$\sum F_x = 0 \quad (5.1)$$

$$F_{ep} - F_{ea} + F_{nrx} \mp F_{frx} - F_{ncx} + F_{fcx} = 0 \quad (5.2)$$

Al igual que para el caso de laminación, a fuerza debida a la fricción que ejercen los rodillos sobre la capa externa del material tiene ambos signos, debido a que el sentido de dicha fuerza cambia en función de la localización del elemento diferencial analizado respecto al punto neutro. Entre la entrada del material al claro de laminación y el punto neutro, el elemento tiene un signo negativo, originado por el deslizamiento entre el rodillo y la capa externa, donde la velocidad tangencial del rodillo es mayor. En cambio, el signo es

positivo a partir del punto neutro y hasta la salida, dado que la velocidad de la capa exterior es mayor a la tangencial del rodillo.

Sustituyendo los valores respectivos de cada uno de los términos de la ecuación 3.1, es posible obtener la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \sigma_{xe} \frac{h_e}{2} w - (\sigma_{xe} + d\sigma_{xe}) \frac{(h_e + dh_e)}{2} w + P_r \left(\frac{dx}{\cos \theta_r} \right) w \operatorname{sen} \theta_r \mp f_r \left(\frac{dx}{\cos \theta_r} \right) w \cos \theta_r \\ - P_c \left(\frac{dx}{\cos \theta_c} \right) w \operatorname{sen} \theta_c + f_c \left(\frac{dx}{\cos \theta_c} \right) w \cos \theta_c = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cabe resaltar que σ_{xe} representa el esfuerzo principal en la dirección x, mientras que P_r , P_c , f_r y f_c representan las presiones normales y las fuerzas de fricción por unidad de área.

Desarrollando la ecuación 5.3, multiplicando por el signo menos toda la ecuación y despreciando el producto de diferenciales

$$\sigma_{xe} \frac{dh_e}{2} + \frac{h_e}{2} d\sigma_{xe} - P_r \tan \theta_r dx \pm f_r dx + P_c \tan \theta_c dx - f_c dx = 0 \quad (5.4)$$

O bien

$$\sigma_{xe} \frac{dh_e}{dx} + h_e \frac{d\sigma_{xe}}{dx} = 2(P_r \tan \theta_r \mp f_r - P_c \tan \theta_c + f_c) \quad (5.5)$$

La ecuación 5.5 esta expresada en forma de ecuación diferencial, donde las incógnitas a determinar son σ_{xe} , h_e , P_r , P_c , f_r , f_c , θ_r y θ_c .

Al aplicar la ecuación de equilibrio de fuerzas en la dirección y del elemento diferencial se obtiene la siguiente ecuación:

$$-F_{nry} \mp F_{fry} + F_{ncy} + F_{fcy} = 0 \quad (5.6)$$

Al sustituir los valores de cada una de los términos de la ecuación 5.6 y al simplificar el resultado obtenido, se obtiene la siguiente relación:

$$P_r \pm f_r \tan \theta_r = P_c + f_c \tan \theta_c \quad (5.7)$$

De manera análoga al desarrollo de las ecuaciones en la capa externa, se parte del análisis del diagrama de cuerpo libre de la capa interna, que se muestra en la figura 5.4.

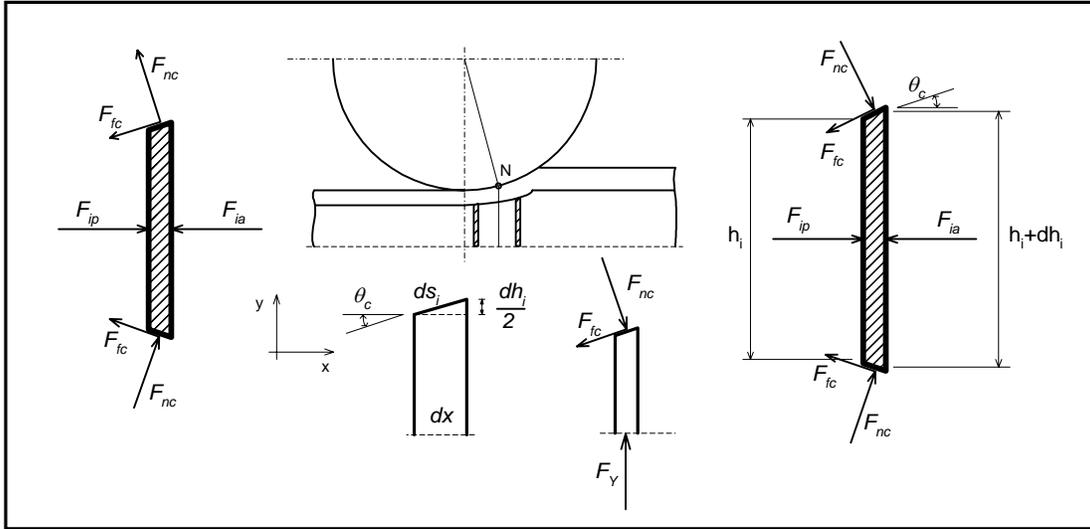


Figura 5.4 Diagrama de cuerpo libre para la capa interna.

Donde:

F_{nc} : Fuerza debida a la presión normal de la capa interna sobre la capa externa. Aplicación de la tercera ley de Newton.

F_{fc} : Fuerza de fricción entre la capa interna y la capa externa. Aplicación de la tercera ley de Newton.

F_{ia} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial anterior.

F_{ip} : Fuerza de empuje ejercida por el elemento diferencial posterior.

F_y : Fuerza interna para el equilibrio de las fuerzas en el eje y.

La ecuación de equilibrio de fuerzas en el eje x queda expresada de la siguiente manera:

$$\sum F_x = 0 \quad (5.8)$$

$$F_{ncx} - F_{ia} + 2F_{ip} - 2F_{fcx} = 0 \quad (5.9)$$

Sustituyendo variables:

$$\sigma_{xi} h_i w - (\sigma_{xi} + d\sigma_{xi})(h_i + dh_i)w + 2P_c \left(\frac{dx}{\cos \theta_c} \right) w \sin \theta_c - 2f_c \left(\frac{dx}{\cos \theta_c} \right) w \cos \theta_c = 0 \quad (5.10)$$

Desarrollando términos y despreciando el producto de diferenciales:

$$h_i d\sigma_{xi} + \sigma_{xi} dh_i - 2P_c dx \tan \theta_c + 2f_c dx = 0 \quad (5.11)$$

Reordenando términos para obtener la forma de una ecuación diferencial:

$$h_i \frac{d\sigma_{xi}}{dx} + \sigma_{xi} \frac{dh_i}{dx} = 2(P_c \tan \theta_c - f_c) \quad (5.12)$$

Respecto a la ecuación de equilibrio de fuerzas en el eje y para esta capa, se obtiene:

$$F_Y - F_{ncy} - F_{fcy} = 0 \quad (5.13)$$

Desarrollando la ecuación 5.13 y haciendo uso de la ecuación 5.7 se obtiene:

$$\sigma_y = P_r \pm f_r \tan \theta_r = P_c + f_c \tan \theta_c \quad (5.14)$$

Donde σ_y es el esfuerzo principal en la dirección y.

De la ecuación 5.14 podemos concluir que el esfuerzo de compresión ejercido sobre cada elemento diferencial del claro de laminación en la dirección y, tanto de la capa externa como de la capa interna, tiene un valor de σ_y , el cual resulta ser el esfuerzo principal en la dirección, y que puede ser expresado en términos de la presión normal y de la fricción ya sea de los rodillos o de la interfase de los materiales.

Aplicando las consideraciones tomadas para el modelado de las fuerzas de fricción a las ecuaciones 5.5, 5.12 y 5.14 se obtiene:

$$\sigma_{xe} \frac{dh_e}{dx} + h_e \frac{d\sigma_{xe}}{dx} = 2(P_r (\tan \theta_r \mp \mu_r) - P_c \tan \theta_c + mk_{min}) \quad (5.15)$$

$$h_i \frac{d\sigma_{xi}}{dx} + \sigma_{xi} \frac{dh_i}{dx} = 2(P_c \tan \theta_c - mk_{min}) \quad (5.16)$$

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu_r \tan \theta_r) = P_c + mk_{min} \tan \theta_c \quad (5.17)$$

Mediante manipulación algebraica, la ecuación 5.17 puede ser expresada de la siguiente manera

$$\sigma_y = P_r (1 \pm \mu_r \tan \theta_r) = P_c \left(1 + m \frac{k_{min}}{P_c} \tan \theta_c \right) \quad (5.18)$$

Una de las conclusiones que se obtuvo del capítulo 4 fue que el despreciar la componente de la fuerza de fricción sobre el eje y no afecta de manera apreciable a la solución. Para el análisis del proceso de colaminación se aplica esta consideración para ambas capas, con el propósito de poder simplificar las matemáticas del modelo, sin la necesidad de sacrificar la exactitud de la solución. Por lo tanto, la ecuación 5.18 se simplifica a

$$\sigma_y = P_r = P_c \quad (5.19)$$

Como P_r es una de las variables que de interés, sustituimos a P_c de las ecuaciones 5.15 y 5.16.

$$\sigma_{xe} \frac{dh_e}{dx} + h_e \frac{d\sigma_{xe}}{dx} = 2(P_r(\tan\theta_r \mp \mu_r - \tan\theta_c) + mk_{min}) \quad (5.20)$$

$$h_i \frac{d\sigma_{xi}}{dx} + \sigma_{xi} \frac{dh_i}{dx} = 2(P_r \tan\theta_c - mk_{min}) \quad (5.21)$$

La ecuación que relaciona a los esfuerzos principales de las ecuaciones anteriores se basa en el criterio de fluencia. Como el criterio de fluencia que se utiliza es el mismo que el utilizado en la laminación, el análisis es similar al aplicado a ese modelo, por lo que se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\sigma_y - \sigma_{xe} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \quad (5.22)$$

$$\sigma_y - \sigma_{xi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \quad (5.23)$$

Sustituyendo la ecuación 5.19 en las ecuaciones 5.22 y 5.23, y despejando a σ_{xe} y a σ_{xi} se obtiene

$$\sigma_{xe} = P_r - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \quad (5.24)$$

$$\sigma_{xi} = P_r - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \quad (5.25)$$

Al sustituir las ecuaciones anteriores en las ecuaciones 5.20 y 5.21 llega a las siguientes ecuaciones

$$\left(P_r - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \right) \frac{dh_e}{dx} + h_e \frac{dP_r}{dx} - \frac{2}{\sqrt{3}} h_e \frac{d\sigma_{0e}}{dx} = 2(P_r(\tan\theta_r \mp \mu_r - \tan\theta_c) + mk_{min}) \quad (5.26)$$

$$\left(P_r - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \right) \frac{dh_i}{dx} + h_i \frac{dP_r}{dx} - \frac{2}{\sqrt{3}} h_i \frac{d\sigma_{0i}}{dx} = 2(P_r \tan\theta_c - mk_{min}) \quad (5.27)$$

Para poder desarrollar la ecuación y dejarla en términos de θ_r , que es la variable dependiente del modelo, es necesario desarrollar las relaciones entre x , h_e , h_i y θ_r . Algunas

de estas relaciones son obtenidas de la misma manera que en capítulo 3 para el caso de laminación. Las relaciones restantes se determinan basándose en las figuras 5.2, 5.3 y 5.4.

$$h = h_i + h_e \quad (5.28)$$

$$h = h_f + 2R(1 - \cos \theta_r) \quad (3.24)$$

$$\theta_{rT} = \cos^{-1} \left(\frac{h_f - h_0 + 2R}{2R} \right) \quad (5.29)$$

$$x = R \operatorname{sen} \theta_r \quad (5.30)$$

$$\frac{dx}{d\theta_r} = R \cos \theta_r \quad (5.31)$$

$$\frac{dh}{d\theta_r} = 2R \operatorname{sen} \theta_r \quad (5.32)$$

$$\frac{dh_i}{dx} = 2 \tan \theta_c \quad (5.33)$$

$$\frac{dh}{dx} = 2 \tan \theta_r \quad (5.34)$$

Aplicando estas relaciones geométricas a las ecuaciones 5.25 y 5.26

$$(h - h_i) \frac{dP_r}{dx} - \frac{2}{\sqrt{3}} (h - h_i) \frac{d\sigma_{0e}}{dx} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \frac{dh_i}{dx} = 2 \left(mk_{\min} \mp \mu_r P_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \tan \theta_r \right) \quad (5.35)$$

$$h_i \frac{dP_r}{dx} - \frac{2}{\sqrt{3}} h_i \frac{d\sigma_{0i}}{dx} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \frac{dh_i}{dx} = -2mk_{\min} \quad (5.36)$$

Haciendo uso de la regla de la cadena utilizando la ecuación 5.31 se obtiene

$$(h - h_i) \frac{dP_r}{d\theta_r} - \frac{2}{\sqrt{3}} (h - h_i) \frac{d\sigma_{0e}}{d\theta_r} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \frac{dh_i}{d\theta_r} = 2R \left((mk_{\min} \mp \mu_r P_r) \cos \theta_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \operatorname{sen} \theta_r \right) \quad (5.37)$$

$$h_i \frac{dP_r}{d\theta_r} - \frac{2}{\sqrt{3}} h_i \frac{d\sigma_{0i}}{d\theta_r} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \frac{dh_i}{d\theta_r} = -2Rmk_{\min} \cos \theta_r \quad (5.38)$$

Derivando la ecuación 2.58, que corresponde a la ecuación de Holloman, y utilizando las definiciones de deformación efectiva y deformación real se obtienen las siguientes expresiones

$$\frac{d\sigma_{0e}}{d\theta_r} = -\frac{K_e n_e}{h - h_i} \left(-\ln \left(\frac{h - h_i}{h_{e0}} \right) \right)^{n_e - 1} \left(2R \operatorname{sen} \theta_r - \frac{dh_i}{d\theta_r} \right) \quad (5.39)$$

$$\frac{d\sigma_{0i}}{d\theta_r} = -\frac{K_i n_i}{h_i} \left(-\ln \left(\frac{h_i}{h_{i0}} \right) \right)^{n_i - 1} \frac{dh_i}{d\theta_r} \quad (5.40)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.39 y 5.40 en las ecuaciones 5.37 y 5.38, y simplificando

$$(h - h_i) \frac{dP_r}{d\theta_r} + \frac{2}{\sqrt{3}} K_e \left(\varepsilon_e^{n_e} - \frac{2}{\sqrt{3}} n_e \varepsilon_e^{n_e - 1} \right) \frac{dh_i}{d\theta_r} = 2R \left((mk_{\min} \mp \mu_r P_r) \cos \theta_r + \frac{2}{\sqrt{3}} K_e \left(\varepsilon_e^{n_e} - \frac{2}{\sqrt{3}} n_e \varepsilon_e^{n_e - 1} \right) \operatorname{sen} \theta_r \right) \quad (5.41)$$

$$h_i \frac{dP_r}{d\theta_r} - \frac{2}{\sqrt{3}} K_i \left(\varepsilon_i^{n_i} - n_i \varepsilon_i^{n_i - 1} \right) \frac{dh_i}{d\theta_r} = -2Rmk_{\min} \cos \theta_r \quad (5.42)$$

En las ecuaciones anteriores se introdujeron las variables ε_e y ε_i , las cuales se refieren a las deformaciones efectivas de la capa exterior y la capa interior, respectivamente.

$$\varepsilon_e = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{h - h_i}{h_{e0}} \right) \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{h_i}{h_{i0}} \right) \quad (5.44)$$

Las ecuaciones diferenciales 5.41 y 5.42 describen el modelo del proceso de colaminación suponiendo un comportamiento rígido-plástico con endurecimiento de los materiales. La solución de estas ecuaciones se puede obtener con el mismo método numérico utilizado en el proceso de laminación, solo que con las modificaciones para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que es necesaria la normalización de este. Las ecuaciones diferenciales normalizadas quedarían de la siguiente forma

$$\frac{dh_i}{d\theta_r} = \frac{ce - bf}{ae - db} \quad (5.45)$$

$$\frac{dP_r}{d\theta_r} = \frac{af - dc}{ae - db} \quad (5.46)$$

Donde

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} K_e \left(\varepsilon_e^{n_e} - \frac{2}{\sqrt{3}} n_e \varepsilon_e^{n_e-1} \right) \quad (5.47)$$

$$b = h - h_i \quad (5.48)$$

$$c = 2R \left((mk_{min} \mp \mu_r P_r) \cos \theta_r + \frac{2}{\sqrt{3}} K_e \left(\varepsilon_e^{n_e} - \frac{2}{\sqrt{3}} n_e \varepsilon_e^{n_e-1} \right) \sin \theta_r \right) \quad (5.49)$$

$$d = -\frac{2}{\sqrt{3}} K_i \left(\varepsilon_i^{n_i} - n_i \varepsilon_i^{n_i-1} \right) \quad (5.50)$$

$$e = h_i \quad (5.51)$$

$$f = -2Rmk_{min} \cos \theta_r \quad (5.52)$$

$$\varepsilon_e = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{h - h_i}{h_{e0}} \right) \quad (5.43)$$

$$\varepsilon_i = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{h_i}{h_{i0}} \right) \quad (5.44)$$

5.5 CONDICIONES DE FRONTERA DEL MODELO

La obtención de las condiciones de frontera para el caso de colaminación resultan más difíciles de obtener que para el caso de laminación de productos planos. La complejidad se debe a que son dos variables dependientes, P_r y h_i , las que contiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que se necesitan dos ecuaciones de frontera para hallar su solución. Sin embargo, cabe recordar que en realidad se tienen dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de dos variables dependientes, debido a que un sistema de ecuaciones es aplicable entre el plano de entrada y el plano del punto neutro, y el otro sistema corresponde al arco de contacto entre el punto neutro y la salida. Lo anterior nos da un total de cuatro condiciones de frontera: dos para el plano de entrada y dos para el plano de salida.

Las condiciones de frontera para el plano de entrada están dadas por las condiciones geométricas de los materiales que conforman el conglomerado y la condición del esfuerzo principal correspondiente al eje x . La última condición tiene una deducción familiar a la dada para el proceso de laminación (capítulo 3.6), por lo que las condiciones de frontera para el plano de entrada son

$$\sigma_x=0 \text{ y } h_i=h_{i0} \text{ para } \theta=0$$

Para el caso de las condiciones de frontera del plano de salida, la situación es diferente. Se cuenta con la condición del esfuerzo principal correspondiente al eje x , $\sigma_x=0$, pero el problema es obtener el valor del espesor de la capa interna a la salida, debido a que este es una de las incógnitas a determinar de más importancia en el modelo. Sin embargo, al analizar el elemento diferencial que corresponde al del plano de salida y aplicar la condición final del esfuerzo principal en el eje x , se tiene que el criterio de fluencia para las dos capas queda expresado de la siguiente manera

$$\sigma_y - \sigma_{xe} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \quad (5.21)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0e} \quad (5.45)$$

$$\sigma_y - \sigma_{xi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \quad (5.22)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0i} \quad (5.46)$$

Igualando la ecuación 5.45 con la ecuación 5.46

$$\sigma_{0e} = \sigma_{0i} \quad (5.47)$$

Sustituyendo la ecuación 2.58 y la definición de deformación real en la ecuación 5.47

$$K_e \left(-\ln \left(\frac{h - h_{if}}{h_{e0}} \right) \right)^{n_e} = K_i \left(-\ln \left(\frac{h_{if}}{h_{i0}} \right) \right)^{n_i} \quad (5.48)$$

La única incógnita en la ecuación 5.48 es el h_{if} , por lo que es posible hallar su valor. Debido a que resulta complicado el despeje del espesor final de la capa interna de la ecuación 5.48, será necesario recurrir a un método numérico para encontrar dicho valor. Al obtener el valor de h_{if} , se obtienen las cuatro condiciones de frontera necesarias para la resolución del modelo, por lo que nada más resta encontrar la solución por medio de métodos numéricos aplicados a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de dos variables.

CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo para la simulación del proceso de laminación de productos planos en base al método del planchón. La característica principal de este modelo, que lo diferencia de otros existentes basados en el mismo método, radica en la consideración de un comportamiento elástico-plástico del material, en el que se consideran los efectos del endurecimiento por deformación. Para la obtención de este modelo fue necesario el desarrollo de las ecuaciones correspondientes a la región elástica del material, tomando como base la teoría existente para la elasticidad.

El software desarrollado, al que se le ha nombrado LAMPLAN, consiste en una recolección de diferentes modelos que utilizan el método del planchón para la obtención de la distribución de cargas a lo largo del arco de contacto, además de otras variables, como son la localización del punto neutro y la fuerza de reacción por unidad de ancho experimentada por los rodillos. Los resultados obtenidos de LAMPLAN también pueden ser utilizados para la comparación de los modelos entre sí.

Al realizar la comparación de los modelos para un caso específico de laminación, se encontró que la diferencia entre el modelo clásico existente presentaba una diferencia apreciable en los resultados en comparación con el modelo desarrollado en este trabajo. A lo que se concluye que los modelos analizados por el método del planchón para el proceso de laminación dependen en gran medida del tipo de comportamiento que se considere para el material de trabajo.

También se concluye que la suposición de considerar despreciable la componente de la fricción correspondiente al eje normal a la dirección del flujo no acarrea errores importantes. Esta conclusión pudo utilizarse para el desarrollo del modelo para el proceso de colaminación.

Aunque el método del planchón se ha utilizado exclusivamente para la determinación de esfuerzos, se demostró que este método es capaz de obtener una expresión para modelar la geometría de la capa interna de un conglomerado de colaminación. Estas ecuaciones fueron desarrolladas para un proceso de colaminación simétrica en frío y con un comportamiento de los materiales rígido-plástico con endurecimiento. Además se utilizó el modelo de fricción adherente para la simulación del contacto entre los materiales del conglomerado.

Al final del desarrollo se obtuvo una ecuación en la cual se puede obtener el valor del espesor de la capa interna del conglomerado a la salida del proceso, una variable importante para fines de diseño del proceso.

Como comentario final, se espera que el presente trabajo sirva como base para la obtención de modelos del proceso de colaminación en base al método del planchón, aprovechando las bondades que presenta este método.

ANEXO I

INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Cuando se quiere encontrar la solución de una ecuación diferencial no lineal existen dos caminos posibles. El primero consiste en buscar las soluciones planteadas en la literatura para algunas de estas ecuaciones que han podido ser encontradas por métodos aleatorios, dichas soluciones son variables puesto que dependen de las condiciones de frontera o del valor inicial. Un análisis de estabilidad de los puntos singulares proporcionará información del carácter convergente o divergente de la ecuación y se podrán encontrar los diagramas de fases correspondientes que representan la ecuación exacta para regiones “muy cercanas” a estos puntos. El segundo método sería utilizar algún método numérico, éstos están basados en encontrar series o polinomios truncados que representen de forma alterna a la función deseada. La ventaja de estos métodos radica en que la solución de la ecuación puede ser determinada en cualquier parte del dominio donde la función exista, es decir, en donde cumpla con el teorema de unicidad. La desventaja radica en que la solución es expresada de forma discreta en pares de puntos, de primera instancia parecería coherente encontrar los pares de puntos casi contiguos de tal forma que la solución pareciera ser continua, pero el procedimiento para ir encontrando nuevos puntos es por interpolación o extrapolación, con esto, se limita la convergencia de la solución. Además hay que resaltar que éste es un proceso iterativo el cual necesita de una computadora que pueda realizar cientos o miles de cálculos, trayendo como consecuencia problemas de almacenamiento de datos y errores de truncamiento.

El forma general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (EDOP)es:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$$

Como se puede observar, en una EDOP la derivada siempre será una función conocida por lo que se puede conocer la pendiente en cualquier punto que se desee, esto implica una gran ventaja para una interpolación puesto que se puede predecir un punto desconocido extrapolando a partir de un valor inicial, de tal forma:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Donde “h” es la distancia al punto “n” sobre el dominio donde se quiere extrapolar y $f(x_n, y_n)$ la pendiente de la función deseada, Este método se le conoce como de Euler y la mayoría de los métodos numéricos para la solución de EDOP lo toman de referencia.

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4° ORDEN

Este método es una de las variantes del método de Euler y presenta una corrección respecto a éste último debido a que toma en cuenta la derivada valuada en el punto donde se extrapolará y en otros tres puntos dentro del intervalo, es de carácter *simétrico* por lo que no estará sólo en función de la derivada valuada sino que hace uso de parámetros de correlación obtenidos por expansiones en series de Taylor, el modelo es el siguiente.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Donde las “k” son los parámetros y “ $O(h^5)$ ” es el error. Se puede observar que para pasos h pequeños el error tenderá a cero aunque hay que recordar los inconvenientes descritos anteriormente, será necesario encontrar un rango de equilibrio en donde el proceso arroje errores mínimos debido al modelo y a la vez los debidos al truncamiento y al número de iteraciones. En la gráfica de la figura I.1 se representa el error de la ecuación diferencial en función del tamaño de los incrementos, h .

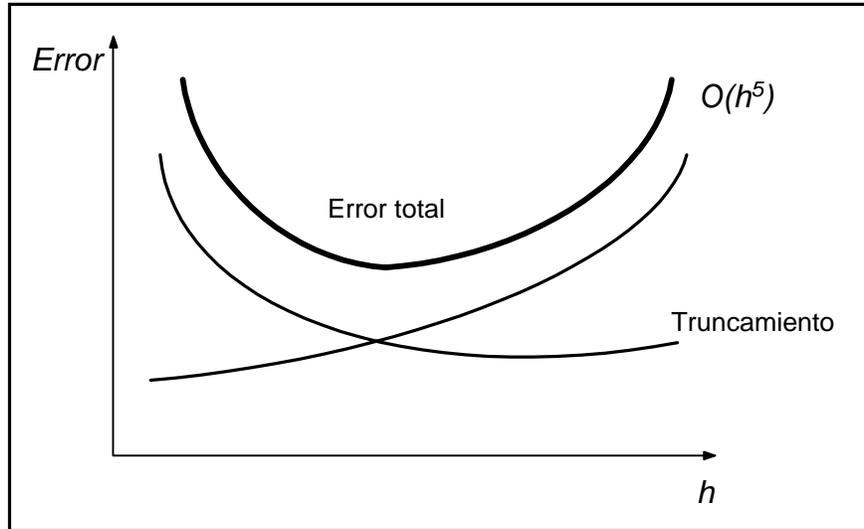


Figura I.1 Error implicado por el uso de métodos numéricos.

Para el modelo de laminación mostrado, el método de Runge-Kutta resulta ser una opción poderosa en la solución debido a que sólo se necesita conocer la condición de frontera y hacer un alto número de iteraciones.

ANEXO II.

Los siguientes datos corresponden al archivo de salida generado por LAMPLAN.

Radio de los Rodillos: R= 200.00 [mm]
 Espesor Inicial: h0= 7.00 [mm]
 Espesor Final: hf= 4.00 [mm]
 Angulo de Contacto: Trc 7.022 [grados]
 Coeficiente de Friccion: m= 0.300
 Modulo de Young: E= 210000 [MPa]
 Coeficiente de Poisson: v= 0.300
 Coeficiente de Resistencia: K= 500.00 [MPa]
 Exponente de Endurecimiento: n= 0.251
 Esfuerzo de Fluencia: Y0= 250.00 [MPa]
 Numero de Iteraciones: Pas= 500
 Salida de Datos: i= 5

Angulo h	Sx1	Sx2	Sx3	Sx4	Pr1	Pr2	Pr3	Pr4
[grad] [m]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
ENTRADA								
7.022 7.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000	278.389	278.389	0.000
6.937 6.93	0.17	0.30	0.31	0.18	183.138	278.799	291.086	189.829
6.867 6.87	0.27	0.43	0.45	0.28	213.334	279.026	300.480	221.051
6.797 6.81	0.34	0.52	0.54	0.35	234.452	279.211	309.060	242.847
6.727 6.75	0.39	0.58	0.62	0.41	251.082	279.373	316.980	259.980
6.657 6.70	0.44	0.63	0.67	0.46	264.970	279.521	324.352	274.263
6.586 6.64	0.48	0.67	0.72	0.50	276.986	279.662	331.259	286.597
6.516 6.58	0.52	0.71	0.77	0.53	287.631	279.798	337.765	297.506
6.446 6.53	0.55	0.74	0.81	0.57	297.225	279.931	343.922	307.319
6.376 6.47	0.59	0.78	0.85	0.61	305.983	280.063	349.771	316.261
6.305 6.42	0.62	0.81	0.89	0.64	314.059	280.195	355.349	324.491
6.235 6.37	0.66	0.84	0.93	0.69	321.566	280.329	360.684	332.130
6.165 6.31	0.71	0.88	0.98	0.73	328.595	280.468	365.803	339.268
6.095 6.26	0.76	0.93	1.04	0.79	335.215	280.615	370.730	345.980
6.025 6.21	0.84	0.99	1.13	0.87	341.489	280.776	375.493	352.330
5.954 6.16	0.95	1.08	1.25	0.98	347.479	280.967	380.126	358.384
5.884 6.11	1.16	1.25	1.48	1.20	353.276	281.232	384.704	364.237
5.814 6.06	1.73	1.70	2.10	1.79	359.165	281.769	389.514	370.193
5.744 6.01	5.74	4.81	6.44	5.92	368.162	284.890	397.797	379.450
5.674 5.96	9.85	7.97	10.87	10.16	377.049	288.063	406.053	388.592
5.603 5.91	10.44	8.42	11.51	10.77	382.324	288.601	410.500	393.900

5.533	5.86	10.66	8.58	11.74	10.99	387.060	288.863	414.445	398.638
5.463	5.82	10.78	8.67	11.86	11.11	391.538	289.052	418.183	403.104
5.393	5.77	10.86	8.73	11.95	11.19	395.827	289.213	421.781	407.372
5.322	5.72	10.92	8.77	12.01	11.26	399.958	289.362	425.267	411.473
5.252	5.68	10.97	8.81	12.07	11.31	403.949	289.504	428.655	415.428
5.182	5.63	11.03	8.85	12.13	11.37	407.817	289.645	431.956	419.252
5.112	5.59	11.08	8.89	12.19	11.42	411.572	289.788	435.181	422.959
5.042	5.55	11.15	8.94	12.26	11.50	415.232	289.941	438.342	426.566
4.971	5.50	11.26	9.01	12.37	11.60	418.821	290.116	441.462	430.097
4.901	5.46	11.46	9.15	12.58	11.81	422.407	290.355	444.612	433.626
4.831	5.42	12.19	9.65	13.36	12.57	426.424	290.952	448.243	437.608
4.761	5.38	18.61	14.02	20.10	19.15	435.898	295.315	457.633	447.328
4.690	5.34	19.78	14.81	21.33	20.35	440.165	296.192	461.578	451.569
4.620	5.30	20.02	14.97	21.58	20.59	443.444	296.454	464.508	454.771
4.550	5.26	20.13	15.04	21.69	20.71	446.525	296.634	467.252	457.764
4.480	5.22	20.20	15.09	21.77	20.78	449.495	296.790	469.900	460.641
4.410	5.18	20.27	15.13	21.84	20.85	452.384	296.938	472.481	463.431
4.339	5.15	20.33	15.18	21.91	20.92	455.207	297.088	475.012	466.153
4.269	5.11	20.42	15.23	22.00	21.01	457.987	297.252	477.515	468.830
4.199	5.07	20.60	15.35	22.19	21.19	460.791	297.473	480.057	471.530
4.129	5.04	21.61	16.00	23.23	22.22	464.343	298.215	483.393	475.012
4.059	5.00	27.45	19.75	29.32	28.20	472.572	301.995	491.611	483.378
3.988	4.97	27.86	20.01	29.74	28.61	475.421	302.358	494.242	486.122
3.918	4.93	27.98	20.09	29.87	28.74	477.940	302.545	496.540	488.519
3.848	4.90	28.06	20.13	29.95	28.82	480.357	302.702	498.745	490.810
3.778	4.87	28.13	20.18	30.02	28.89	482.716	302.856	500.900	493.040
3.707	4.84	28.23	20.25	30.13	29.00	485.054	303.030	503.045	495.248
3.637	4.81	28.57	20.45	30.48	29.34	487.566	303.343	505.380	497.636
3.567	4.77	33.87	23.75	35.98	34.75	494.912	306.692	512.735	505.049
3.497	4.74	34.40	24.08	36.52	35.29	497.517	307.122	515.184	507.529
3.427	4.72	34.51	24.15	36.64	35.41	499.672	307.303	517.176	509.542
3.356	4.69	34.59	24.19	36.72	35.48	501.745	307.460	519.090	511.468
3.286	4.66	34.69	24.26	36.83	35.59	503.798	307.635	520.994	513.374
3.216	4.63	35.27	24.61	37.43	36.18	506.275	308.094	523.341	515.717
3.146	4.60	39.88	27.41	42.18	40.87	512.665	310.963	529.743	522.112
3.075	4.58	40.05	27.52	42.37	41.05	514.662	311.183	531.610	523.956
3.005	4.55	40.14	27.57	42.46	41.14	516.523	311.346	533.342	525.657
2.935	4.52	40.27	27.65	42.59	41.27	518.388	311.536	535.086	527.363
2.865	4.50	44.01	29.90	46.46	45.08	523.774	313.866	540.470	532.703
2.795	4.48	44.57	30.23	47.03	45.64	525.974	314.306	542.571	534.751
2.724	4.45	44.66	30.29	47.12	45.74	527.680	314.475	544.169	536.289
2.654	4.43	44.82	30.39	47.29	45.90	529.416	314.685	545.803	537.858
2.584	4.41	48.76	32.73	51.36	49.91	534.844	317.113	551.249	543.226
2.514	4.38	48.93	32.83	51.52	50.07	536.502	317.323	552.815	544.712
2.444	4.36	49.04	32.90	51.64	50.19	538.078	317.506	554.299	546.112
2.373	4.34	52.06	34.68	54.75	53.25	542.482	319.382	558.704	550.418
2.303	4.32	52.22	34.77	54.92	53.41	544.024	319.590	560.164	551.781
2.233	4.30	52.46	34.91	55.16	53.65	545.605	319.844	561.669	553.184
2.163	4.28	54.99	36.40	57.77	56.22	549.421	321.430	565.480	556.877
2.092	4.27	55.10	36.46	57.89	56.34	550.808	321.613	566.795	558.078
2.022	4.25	57.48	37.85	60.33	58.75	554.399	323.105	570.382	561.535
1.952	4.23	57.60	37.92	60.46	58.87	555.719	323.291	571.637	562.666
1.882	4.22	59.79	39.19	62.70	61.08	559.048	324.668	574.962	565.851
1.812	4.20	60.05	39.35	62.98	61.35	560.441	324.940	576.301	567.055
1.741	4.18	62.94	41.02	65.94	64.27	564.394	326.717	580.275	570.871
1.671	4.17	64.84	42.12	67.90	66.19	567.341	327.929	583.220	573.658

1.601	4.16	66.18	42.90	69.28	67.54	569.692	328.815	585.554	575.834
1.531	4.14	66.50	43.09	69.61	67.87	571.006	329.122	586.828	576.953
1.461	4.13	68.05	43.98	71.20	69.43	573.495	330.127	589.311	579.267
1.390	4.12	69.73	44.95	72.93	71.13	576.084	331.209	591.902	581.680
1.320	4.11	70.66	45.48	73.88	72.07	577.893	331.862	593.695	583.299
1.250	4.10	71.80	46.14	75.05	73.22	579.875	332.633	595.668	585.092
1.180	4.08	73.37	47.04	76.67	74.80	582.250	333.649	598.050	587.283
1.109	4.07	76.52	48.84	79.90	77.98	586.166	335.568	602.017	591.034
1.039	4.07	78.34	49.88	81.77	79.82	588.725	336.727	604.594	593.406
0.969	4.06	79.64	50.62	83.10	81.12	590.726	337.587	606.601	595.211
0.899	4.05	80.70	51.23	84.20	82.19	592.465	338.316	608.342	596.748
0.829	4.04	82.40	52.20	85.94	83.90	594.802	339.406	610.701	598.889
0.758	4.04	82.81	52.44	86.36	84.32	595.824	339.765	611.713	599.700
0.688	4.03	84.75	53.55	88.36	86.27	598.337	340.993	614.258	602.015
0.618	4.02	85.56	54.01	89.19	87.09	599.687	341.579	615.614	603.154
0.548	4.02	92.08	57.72	95.88	93.65	606.697	345.407	622.783	610.000
0.477	4.01	93.99	58.81	97.84	95.56	609.073	346.616	625.198	612.169
0.407	4.01	95.78	59.83	99.68	97.36	611.307	347.762	627.471	614.193
0.337	4.01	102.01	63.37	106.07	103.62	617.935	351.428	634.257	620.635
0.267	4.00	103.76	64.37	107.87	105.37	620.055	352.549	636.419	622.539
0.197	4.00	107.03	66.22	111.22	108.65	623.662	354.534	640.110	625.934
0.126	4.00	113.89	70.13	118.27	115.54	630.834	358.566	647.464	632.904
0.056	4.00	122.74	75.16	127.35	124.42	639.954	363.724	656.820	641.822
-0.000	4.00	128.99	78.71	133.77	130.69	646.409	367.386	663.444	648.106

SALIDA

0.000	4.00	0.00	0.00	0.00	0.00	517.416	288.675	529.676	517.416
0.084	4.00	8.75	4.88	8.96	8.75	526.377	293.689	538.853	526.143
0.154	4.00	17.05	9.51	17.45	17.04	534.814	298.429	547.494	534.374
0.225	4.00	20.00	11.16	20.47	19.99	537.866	300.186	550.628	537.223
0.295	4.01	22.22	12.40	22.74	22.20	540.158	301.537	552.985	539.310
0.365	4.01	27.89	15.56	28.55	27.86	545.877	304.822	558.855	544.808
0.435	4.01	29.59	16.51	30.29	29.56	547.582	305.885	560.619	546.305
0.506	4.02	31.40	17.53	32.15	31.37	549.369	307.015	562.470	547.881
0.576	4.02	34.97	19.52	35.80	34.93	552.882	309.130	566.092	551.171
0.646	4.03	38.15	21.30	39.05	38.09	555.966	311.025	569.278	554.031
0.716	4.03	40.45	22.59	41.41	40.39	558.143	312.434	571.539	555.988
0.786	4.04	40.92	22.85	41.89	40.85	558.443	312.812	571.881	556.079
0.857	4.04	42.64	23.81	43.66	42.57	559.970	313.898	573.483	557.386
0.927	4.05	43.05	24.05	44.08	42.98	560.143	314.246	573.701	557.350
0.997	4.06	44.98	25.13	46.06	44.90	561.810	315.452	575.454	558.792
1.067	4.07	47.08	26.31	48.20	46.98	563.607	316.753	577.343	560.360
1.138	4.08	50.49	28.22	51.69	50.37	566.690	318.798	580.553	563.197
1.208	4.09	52.24	29.21	53.49	52.11	568.072	319.908	582.025	564.350
1.278	4.10	53.01	29.64	54.28	52.87	568.430	320.463	582.451	564.492
1.348	4.11	54.09	30.26	55.39	53.95	569.071	321.199	583.172	564.912
1.418	4.12	55.62	31.12	56.96	55.47	570.125	322.189	584.318	565.736
1.489	4.13	56.79	31.78	58.15	56.63	570.778	322.974	585.059	566.166
1.559	4.15	58.52	32.76	59.92	58.34	571.954	324.078	586.339	567.108
1.629	4.16	60.29	33.76	61.74	60.10	573.148	325.214	587.642	568.066
1.699	4.18	62.59	35.07	64.10	62.38	574.832	326.652	589.451	569.503
1.769	4.19	62.92	35.26	64.43	62.70	574.491	326.961	589.189	568.951
1.840	4.21	66.48	37.28	68.09	66.23	577.381	329.132	592.244	571.566
1.910	4.22	69.16	38.82	70.84	68.88	579.345	330.801	594.355	573.270
1.980	4.24	69.39	38.94	71.07	69.10	578.789	331.054	593.884	572.504
2.050	4.26	72.41	40.68	74.17	72.09	581.021	332.927	596.280	574.464

2.121	4.27	72.63	40.80	74.39	72.31	580.383	333.177	595.734	573.617
2.191	4.29	74.68	41.98	76.50	74.33	581.560	334.495	597.057	574.542
2.261	4.31	76.33	42.93	78.19	75.96	582.293	335.582	597.929	575.032
2.331	4.33	76.48	43.02	78.35	76.12	581.474	335.797	597.212	574.006
2.401	4.35	80.65	45.43	82.63	80.23	584.677	338.365	600.633	576.899
2.472	4.37	80.88	45.57	82.87	80.45	583.854	338.626	599.922	575.868
2.542	4.39	81.05	45.66	83.04	80.62	582.926	338.851	599.110	574.736
2.612	4.42	86.63	48.92	88.78	86.12	587.449	342.277	603.907	578.900
2.682	4.44	87.02	49.15	89.19	86.51	586.670	342.638	603.258	577.910
2.752	4.46	87.15	49.22	89.32	86.64	585.580	342.843	602.296	576.617
2.823	4.49	87.55	49.45	89.72	87.02	584.715	343.206	601.571	575.543
2.893	4.51	93.60	53.02	95.95	92.98	589.552	346.950	606.721	579.993
2.963	4.53	93.87	53.18	96.23	93.24	588.477	347.243	605.794	578.713
3.033	4.56	94.00	53.25	96.36	93.37	587.212	347.450	604.677	577.249
3.104	4.59	94.21	53.38	96.59	93.58	585.989	347.710	603.611	575.825
3.174	4.61	99.91	56.77	102.46	99.18	590.294	351.293	608.250	579.740
3.244	4.64	102.60	58.38	105.23	101.82	591.501	353.059	609.703	580.659
3.314	4.67	102.81	58.50	105.44	102.02	590.129	353.316	608.507	579.089
3.384	4.70	102.94	58.58	105.58	102.15	588.630	353.528	607.188	577.396
3.455	4.73	103.10	58.68	105.75	102.31	587.121	353.764	605.867	575.694
3.525	4.76	103.65	59.01	106.32	102.85	585.949	354.235	604.904	574.317
3.595	4.79	112.89	64.62	115.86	111.89	593.580	360.086	613.042	581.396
3.665	4.82	113.84	65.20	116.84	112.82	592.714	360.811	612.415	580.308
3.736	4.85	114.06	65.33	117.06	113.03	591.047	361.081	610.969	578.450
3.806	4.88	114.19	65.42	117.20	113.17	589.241	361.302	609.392	576.459
3.876	4.91	114.33	65.50	117.34	113.30	587.378	361.523	607.766	574.412
3.946	4.95	114.53	65.62	117.55	113.50	585.522	361.787	606.161	572.374
4.016	4.98	115.07	65.96	118.11	114.03	583.957	362.269	604.868	570.612
4.087	5.02	124.26	71.71	127.64	123.00	591.167	368.275	612.688	577.232
4.157	5.05	128.46	74.33	132.00	127.09	593.211	371.099	615.168	578.910
4.227	5.09	128.90	74.61	132.46	127.53	591.354	371.525	613.617	576.864
4.297	5.12	129.10	74.74	132.66	127.72	589.180	371.795	611.754	574.516
4.367	5.16	129.24	74.83	132.81	127.86	586.874	372.028	609.770	572.042
4.438	5.20	129.37	74.91	132.95	127.98	584.483	372.253	607.716	569.485
4.508	5.24	129.52	75.01	133.10	128.13	582.034	372.492	605.621	566.874
4.578	5.28	129.73	75.14	133.32	128.33	579.571	372.773	603.532	564.249
4.648	5.32	130.15	75.41	133.75	128.74	577.234	373.191	601.597	561.743
4.719	5.36	131.74	76.45	135.42	130.29	576.017	374.399	600.854	560.298
4.789	5.40	146.03	85.83	150.35	144.17	587.737	384.165	613.655	571.099
4.859	5.44	148.69	87.58	153.12	146.74	587.430	386.106	613.921	570.504
4.929	5.48	149.25	87.96	153.71	147.29	584.881	386.637	611.872	567.787
4.999	5.52	149.52	88.14	153.99	147.55	581.928	386.969	609.433	564.686
5.070	5.56	149.70	88.26	154.18	147.72	578.769	387.240	606.815	561.391
5.140	5.61	149.84	88.35	154.33	147.86	575.457	387.486	604.073	557.949
5.210	5.65	149.97	88.44	154.46	147.98	572.009	387.724	601.230	554.377

Angulo Neutro:

Caso1:	1.517	[grados]
Caso2:	1.727	[grados]
Caso3:	1.559	[grados]
Caso4:	1.769	[grados]

Fuerza de reaccion:

Caso1:	11383.772	[kN/m]
--------	-----------	--------

Caso2: 7418.176 [kN/m]
Caso3: 11992.446 [kN/m]
Caso4: 11552.168 [kN/m]

Torque:

Caso1: 1366.053 [kN]
Caso2: 890.181 [kN]
Caso3: 988.628 [kN]
Caso4: 1386.260 [kN]

ANEXO III

LAMPLAN obtiene los datos sobre las condiciones de laminación de un archivo externo y genera un archivo de salida. El archivo de texto que brinda información al programa es *Tecpatl.dat*, el cual contiene información sobre aspectos geométricos del proceso de laminación, propiedades del material de trabajo, propiedades de contacto entre materiales y datos sobre el método numérico.

A continuación se muestra la forma en que está constituido el archivo de entrada, partiendo de un ejemplo.

0.2	R [m]	Radio de los Rodillos.
0.007	h_0 [m]	Espesor inicial de la placa.
0.004	h_f [m]	Espesor final de la placa.
0.3	μ	Coefficiente de fricción.
210000	E [MPa]	Módulo de Young.
0.3	ν	Coefficiente de Poisson.
234	K [MPa]	Coefficiente de Resistencia.
0.251	n	Exponente de endurecimiento.
250	Y_0 [MPa]	Esfuerzo de fluencia.
500		Número de pasos del método numérico.
2		Número de puntos de inspección sobre el arco de contacto.

El archivo de salida tiene como nombre *Calli.txt* y contiene información sobre el ángulo de contacto, θ , el espesor del material, h , los esfuerzos principales en la dirección del flujo del material, σ_x , además de la carga que ejercen los rodillos sobre la placa, P_r , para cada uno de los cuatro casos. El caso 1 corresponde a un material con comportamiento elástico-plástico con endurecimiento; el caso 2 es el más simple, tiene comportamiento rígido-plástico sin endurecimiento; el caso 3 presenta un comportamiento rígido-plástico con endurecimiento; y, por último, en el caso 4 se considera que la carga P_r tiene la misma dirección que el esfuerzo principal en y .

La constitución del archivo de salida es la siguiente:

Datos de entrada del proceso

Radio de los Rodillos: R= 200 [mm]
 Espesor Inicial: h0= 7 [mm]
 Espesor Final: hf= 4 [mm]
 Angulo de Contacto: Trc 7.022 [grados]
 Coeficiente de Friccion: m= 0.3
 Modulo de Young: E= 210000 [MPa]
 Coeficiente de Poisson: v= 0.3
 Coeficiente de Resistencia: K= 234 [MPa]
 Exponente de Endurecimiento: n= 0.251
 Esfuerzo de Fluencia: Y0= 250 [MPa]
 Numero de Iteraciones: Pas= 500
 Salida de Datos: i= 2

Carga de los rodillos

	Angulo [grad]	h [m]	Sx1 [MPa]	Sx2 [MPa]	Sx3 [MPa]	Sx4 [MPa]	Pr1 [MPa]	Pr2 [MPa]	Pr3 [MPa]	Pr4 [MPa]
ENTRADA	7.022	7	0	0	0	0	0	278.389	278.389	0
	6.98	6.96	0.04	0.18	0.18	0.05	71.992	278.623	278.941	74.637
.....										
.....										
.....	0	4	60.37	78.71	85.16	61.16	302.519	367.386	404.574	303.314
SALIDA	0	4	0	0	0	0	242.151	288.675	319.414	242.151
	0.042	4	2.62	3.13	3.46	2.62	244.826	291.868	322.945	244.771
	0.07	4	3.79	4.51	4.99	3.79	246.019	293.297	324.524	245.928
.....										
.....										
.....										

Otras variables de interés.

Angulo Neutro:

Caso1: 1.517 [grados]
 Caso2: 1.727 [grados]
 Caso3: 1.559 [grados]
 Caso4: 1.769 [grados]

Fuerza de reaccion:

Caso1: 11383.772	[kN/m]
Caso2: 7418.176	[kN/m]
Caso3: 11992.446	[kN/m]
Caso4: 11552.168	[kN/m]

Torque:

Caso1: 1366.053	[kN]
Caso2: 890.181	[kN]
Caso3: 988.628	[kN]
Caso4: 1386.260	[kN]

ANEXO IV

El tipo de lenguaje que se utilizó para la elaboración del software fue lenguaje C orientado a objetos. El código fuente del programa LAMPLAN se muestra a continuación.

```

/***** LAMPLAN *****/
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#define Pi 3.1415926535

class Laminado
{
    double R, h0, r, mr;
    double Trc;
    double Tr;
    double k, n, Y0;
    double E, v;
    double Pas;
    int i;
    char Pos, Comp;

    FILE *Ollin;

public:
    Laminado();
    void Archivo(char Arc[20]);
    void Constantes(char Arc[20]);
    double Deformacion(double h);
    double Fluencia(double h);
    double Carga(double Ang, double sx);
    double NormalSx(double Ang, double pr);
    void RungeKutta();
    void Final();
};

//-----
Laminado::Laminado()
{
```

```
R=0.0;
h0=0.0;
r=0.0;
mr=0.0;
Trc=0.0;
Tr=0.0;
E=0.0;
v=0.0;
k=0.0;
n=0.0;
Y0=0.0;
Pos='E';
}

//-----

void Laminado::Archivo(char Arc[20])
{
    Ollin= fopen(Arc, "a+t");
}

//-----

void Laminado::Constantes(char Arc[20])
{
    char archivo[16];
    FILE *Datos;

    Datos=fopen(Arc, "r");

    fseek(Datos, 0, SEEK_SET);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    R=atof(Arc);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    h0=atof(Arc);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    r=atof(Arc)/h0;

    fgets(Arc, 9, Datos);
    mr=atof(Arc);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    E=atof(Arc);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    v=atof(Arc);

    fgets(Arc, 9, Datos);
    k=atof(Arc);
}
```

```

fgets(Arc, 9, Datos);
n=atof(Arc);

fgets(Arc, 9, Datos);
Y0=atof(Arc);

fgets(Arc, 9, Datos);
Pas=atof(Arc);

fgets(Arc, 9, Datos);
i=atof(Arc);

Trc=acos((h0*(r-1.0)+2.0*R)/(2.0*R));
/*
printf("Archivo externo: ");
scanf("%s", &archivo);
strcat(archivo, ".dat");

Ollin= fopen(Arc, "a+t");
*/
fprintf(Ollin, "\n\nRadio de los Rodillos:\tR=\t%.2f\t[mm]",
1000.0*R);
fprintf(Ollin, "\nEspesor Inicial:\th0=\t%.2f\t[mm]", 1000.0*h0);
fprintf(Ollin, "\nEspesor Final:\thf=\t%.2f\t[mm]", 1000.0*h0*r);
fprintf(Ollin, "\nAngulo de Contacto:\tTrc\t%.3f\t[grados]",
Trc/Pi*180.0);
fprintf(Ollin, "\nCoeficiente de Friccion:\tm=\t%.3f", mr);
fprintf(Ollin, "\nModulo de Young:\tE=\t%.0f\t[MPa]", E);
fprintf(Ollin, "\nCoeficiente de Poisson:\tv=\t%.3f", v);
fprintf(Ollin, "\nCoeficiente de Resistencia:\tK=\t%.2f\t[MPa]",
k);
fprintf(Ollin, "\nExponente de Endurecimiento:\tn=\t%.3f", n);
fprintf(Ollin, "\nEsfuerzo de Fluencia:\tY0=\t%.2f\t[MPa]", Y0);
fprintf(Ollin, "\nNumero de Iteraciones:\tPas=\t%.0f", Pas);
fprintf(Ollin, "\nSalida de Datos:\ti=\t%d", i);

fprintf(Ollin,
"\n\n\n\tAngulo\tth\tSx1\tSx2\tSx3\tSx4\tPr1\tPr2\tPr3\tPr4");
fprintf(Ollin,
"\n\t[grad]\t[m]\t[MPa]\t[MPa]\t[MPa]\t[MPa]\t[MPa]\t[MPa]\t[MPa]"
);

fclose(Datos);

}

//-----

double Laminado::Deformacion(double h)
{
double ey;
ey=-log(h/h0);

```

```

        return(ey);
    }

//-----

double Laminado::Fluencia(double h)
{
    double s0;
    s0=k*pow(2.0/sqrt(3.0)*Deformacion(h), n);
    return(s0);
}

//-----

double Laminado::Carga(double Ang, double sx)
{
    double Pr, h, sy, s0;

    h=h0*r+2.0*R*(1.0-cos(Ang));

    switch(Comp)
    {
        case 'E':
            sy=(E*Deformacion(h)+sx*(v+v*v))/(1.0-v*v);
            if(sy-sx>=2.0/sqrt(3.0)*Y0 || Pos=='S')
                sy=2.0/sqrt(3.0)*Fluencia(h)+sx;
            break;

        case 'D':
            sy=(E*Deformacion(h)+sx*(v+v*v))/(1.0-v*v);
            if(sy-sx>=2.0/sqrt(3.0)*Y0 || Pos=='S')
                sy=2.0/sqrt(3.0)*Fluencia(h)+sx;
            break;

        case 'R':
            sy=2.0/sqrt(3.0)*Y0+sx;
            break;

        case 'P':
            s0=k*pow(2.0/sqrt(3.0)*Deformacion(h)+pow(Y0/k, 1.0/n),
n);
            sy=2.0/sqrt(3.0)*s0+sx;
            break;
    }

    if(Comp=='D')
        Pr=sy;
    else
    {
        if (Pos=='E')
            Pr=sy/(1.0+mr*tan(Ang));
        else
            Pr=sy/(1.0-mr*tan(Ang));
    }
    return(Pr);
}
}

```

```
//-----
double Laminado::NormalSx(double Ang, double sx)
{
    double dSx, Pr, h;

    h=h0*r+2.0*R*(1.0-cos(Pi/Ang));
    Pr=Carga(Ang, sx);

    if (Pos=='E')
        dSx=2.0*R/h*((Pr-sx)*sin(Ang)-mr*Pr*cos(Ang));
    else
        dSx=2.0*R/h*((Pr-sx)*sin(Ang)+mr*Pr*cos(Ang));

    return(dSx);
}

//-----

void Laminado::RungeKutta()
{
    double u1, u2, u3, u4;
    int j, z, nt, NE, NR, NP, ND;
    double h;
    double Inc;
    double Sx1, Sx2, Sx3, Sx4;
    double CargaE[1000];
    double CargaD[1000];
    double CargaR[1000];
    double CargaP[1000];
    double TNE;
    double TND;
    double TNR;
    double TNP;

    /*****Entrada*****/
    TNE=0.0;
    TND=0.0;
    TNR=0.0;
    TNP=0.0;

    Pos='E';
    Tr=Trc;
    h=h0;
    Inc=Trc/Pas;

    Sx1=0.0;
    Sx2=0.0;
    Sx3=0.0;
    Sx4=0.0;
}

```

```

    fprintf(Ollin, "\n\nENTRADA");
    fprintf(Ollin, "\n\t%.3f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f",
180.0/Pi*Tr, 1000.0*h, Sx1, Sx2, Sx3, Sx4);

    Comp='E';
    CargaE[0]=Carga(Tr, Sx1);
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx1));
    Comp='R';
    CargaR[0]=Carga(Tr, Sx2);
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx2));
    Comp='P';
    CargaP[0]=Carga(Tr, Sx3);
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx3));
    Comp='D';
    CargaD[0]=Carga(Tr, Sx4);
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx4));

    for(Tr=Tr-Inc, j=0, z=1; Tr>=0.0; Tr=Tr-Inc, j++, z++)
    {
        Comp='E';
        u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx1);
        u2=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx1-u1/2.0);
        u3=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx1-u2/2.0);
        u4=Inc*NormalSx(Tr-Inc, Sx1-u3);

        Sx1=Sx1-(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

        CargaE[z]=Carga(Tr, Sx1);

        Comp='R';
        u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx2);
        u2=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx2-u1/2.0);
        u3=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx2-u2/2.0);
        u4=Inc*NormalSx(Tr-Inc, Sx2-u3);

        Sx2=Sx2-(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

        CargaR[z]=Carga(Tr, Sx2);

        Comp='P';
        u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx3);
        u2=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx3-u1/2.0);
        u3=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx3-u2/2.0);
        u4=Inc*NormalSx(Tr-Inc, Sx3-u3);

        Sx3=Sx3-(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

        CargaP[z]=Carga(Tr, Sx3);

        Comp='D';
        u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx4);
        u2=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx4-u1/2.0);
        u3=Inc*NormalSx(Tr-Inc/2.0, Sx4-u2/2.0);
        u4=Inc*NormalSx(Tr-Inc, Sx4-u3);

        Sx4=Sx4-(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;
    }

```

```

CargaD[z]=Carga(Tr, Sx4);

if (j==i)
{
    h=h0*r+2.0*R*(1.0-cos(Tr));

    fprintf(Ollin,
"\n\t%.3f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f", 180.0/Pi*Tr, 1000.0*h, Sx1,
Sx2, Sx3, Sx4);

    Comp='E';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx1));
    Comp='R';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx2));
    Comp='P';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx3));
    Comp='D';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx4));

    j=0;
}
}
fprintf(Ollin, "\n\t%.3f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f",
180.0/Pi*Tr, 1000.0*h, Sx1, Sx2, Sx3, Sx4);

Comp='E';
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx1));
Comp='R';
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx2));
Comp='P';
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx3));
Comp='D';
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx4));

nt=z;
/*****Salida*****/
*****/

Pos='S';
Tr=0.0;
h=h0*r;

Sx1=0.0;
Sx2=0.0;
Sx3=0.0;
Sx4=0.0;

fprintf(Ollin, "\n\nSALIDA");
fprintf(Ollin, "\n\t%.3f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f",
180.0/Pi*Tr, 1000.0*h, Sx1, Sx2, Sx3, Sx4);

Comp='E';
CargaE[z]=Carga(Tr, Sx1);
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx1));
Comp='R';
CargaR[z]=Carga(Tr, Sx2);

```

```

fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx2));
Comp='P';
CargaP[z]=Carga(Tr, Sx3);
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx3));
Comp='D';
CargaD[z]=Carga(Tr, Sx4);
fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx4));

z=z-1;

for(Tr=Inc, j=0; Tr<=0.75*Trc; Tr=Tr+Inc, j++, z--)
{
    Comp='E';
    u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx1);
    u2=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx1+u1/2.0);
    u3=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx1+u2/2.0);
    u4=Inc*NormalSx(Tr+Inc, Sx1+u3);

    Sx1=Sx1+(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

    if(Carga(Tr, Sx1)<=CargaE[z])
    {
        CargaE[z]=Carga(Tr, Sx1);
        TNE=Tr*180.0/Pi;
    }

    Comp='R';
    u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx2);
    u2=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx2+u1/2.0);
    u3=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx2+u2/2.0);
    u4=Inc*NormalSx(Tr+Inc, Sx2+u3);

    Sx2=Sx2+(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

    if(Carga(Tr, Sx2)<=CargaR[z])
    {
        CargaR[z]=Carga(Tr, Sx2);
        TNR=Tr*180.0/Pi;
    }

    Comp='P';
    u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx3);
    u2=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx3+u1/2.0);
    u3=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx3+u2/2.0);
    u4=Inc*NormalSx(Tr+Inc, Sx3+u3);

    Sx3=Sx3+(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

    if(Carga(Tr, Sx3)<=CargaP[z])
    {
        CargaP[z]=Carga(Tr, Sx3);
        TNP=Tr*180.0/Pi;
    }

    Comp='D';
    u1=Inc*NormalSx(Tr, Sx4);
    u2=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx4+u1/2.0);

```

```

u3=Inc*NormalSx(Tr+Inc/2.0, Sx4+u2/2.0);
u4=Inc*NormalSx(Tr+Inc, Sx4+u3);

Sx4=Sx4+(u1+2.0*u2+2.0*u3+u4)/6.0;

if(Carga(Tr, Sx4)<=CargaD[z])
{
    CargaD[z]=Carga(Tr, Sx4);
    TND=Tr*180.0/Pi;
}

if (j==i)
{
    h=h0*r+2.0*R*(1.0-cos(Tr));

    fprintf(Ollin,
"\n\t%.3f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\t%.2f", 180.0/Pi*Tr, 1000.0*h, Sx1,
Sx2, Sx3, Sx4);

    Comp='E';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx1));
    Comp='R';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx2));
    Comp='P';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx3));
    Comp='D';
    fprintf(Ollin, "\t%.3f", Carga(Tr, Sx4));

    j=0;
}
}

/*****Resultados*****/
*****/

fprintf(Ollin, "\n\nAngulo Neutro:");
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso1:\t%.3f\t[grados]", TNE);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso2:\t%.3f\t[grados]", TNR);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso3:\t%.3f\t[grados]", TNP);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso4:\t%.3f\t[grados]", TND);

for(z=0, TNE=0.0, TNR=0.0, TNP=0.0, TND=0.0; z<=nt; z++)
{
    TNE=CargaE[z]*Inc*R+TNE;
    TNR=CargaR[z]*Inc*R+TNR;
    TNP=CargaP[z]*Inc*R+TNP;
    TND=CargaD[z]*Inc*R+TND;
}

fprintf(Ollin, "\n\nFuerza de reaccion:");
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso1:\t%.3f\t[kN/m]", TNE*1000);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso2:\t%.3f\t[kN/m]", TNR*1000);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso3:\t%.3f\t[kN/m]", TNP*1000);
fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso4:\t%.3f\t[kN/m]", TND*1000);

for(z=0, TNE=0.0, TNR=0.0, TNP=0.0, TND=0.0; z<=nt; z++)
{

```

```

        if(z<NE)
            TNE=-2.0*mr*R*CargaE[z]*Inc*R+TNE;
        else
            TNE=2.0*mr*R*CargaE[z]*Inc*R+TNE;

        if(z<NR)
            TNR=-2.0*mr*R*CargaR[z]*Inc*R+TNR;
        else
            TNR=2.0*mr*R*CargaR[z]*Inc*R+TNR;

        if(z<NP)
            TNP=-2.0*mr*R*CargaP[z]*Inc*R+TNP;
        else
            TNP=2.0*mr*R*CargaP[z]*Inc*R+TNP;

        if(z<ND)
            TND=-2.0*mr*R*CargaD[z]*Inc*R+TND;
        else
            TND=2.0*mr*R*CargaD[z]*Inc*R+TND;
    }

    fprintf(Ollin, "\n\nTorque:");
    fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso1:\t%.3f\t[kN]", TNE*1000);
    fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso2:\t%.3f\t[kN]", TNR*1000);
    fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso3:\t%.3f\t[kN]", TNP*1000);
    fprintf(Ollin, "\n\n\tCaso4:\t%.3f\t[kN]", TND*1000);

}

//-----

void Laminado::Final()
{
    fclose(Ollin);
}

//-----

void main (void)
{
    Laminado Col;

    clrscr();

    Col.Archivo("Calli.txt");
    Col.Constantes("Tecpatl.dat");

    Col.RungeKutta();

    Col.Final();
}

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hosford, William; Caddell, Robert. “**Metal Forming. Mechanics and Metallurgy**”. Second Edition. PTR Prentice Hall. USA, 1993. ISBN 0-13-588526-4.
- [2] Lenard, J.G.; Pietrzyk, M.; Cser, L.. “**Mathematical and Physical Simulation of the Properties of Hot Rolled Products**”. First Edition. Elsevier. UK, 1999. ISBN 0-08-042701-4.
- [3] Khan, Akhtar S.; Huang, Sujian. “**Continuum Theory of Plasticity**”. First Edition. John Wiley & Sons. USA, 1995. ISBN 0-471-31043-3.
- [4] Wagoner, Robert H.; Chenot, Jean-Loup. “**Fundamentals of Metal Forming**”. First Edition. John Wiley & Sons. USA, 1997. ISBN 0-471-57004-4.
- [5] Dieter, Geroge E.. “**Mechanical Metallurgy**”. Third Edition. Mc Graw Hill. USA, 1986. ISBN 0-07-016893-8.
- [6] Mase, G. Thomas; Mase, George E.. “**Continuum Mechanics for Engineers**”. Second Edition. CRC Press. USA, 1999. ISBN 00-8493-1855-6.
- [7] Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russel. “**Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica**”. Sexta Edición. Mc Graw Hill. México, 1997. ISBN 970-10-1951-2.
- [8] Groover, Mikell P.. “**Fundamentos de Manufactura Moderna. Materiales, Procesos y Sistemas**”. Primera Edición. Prentice Hall. México, 1996. ISBN 968-880-846-6.
- [9] Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russel. “**Mecánica de Materiales**”. Segunda Edición. Mc Graw Hill. Colombia, 1992. ISBN 0-07-837340-9.
- [10] Zill, Dennis G.. “**Ecuaciones Diferenciales**”. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1988. ISBN 0-87150-928-8.
- [11] Tzou, G. Y. “**Theoretical Study on the Cold Sandwich Sheet Rolling Considering Coulomb Friction**”. Journal of Materials Processing. 114 (2001). Pp. 41-50.

[12] Quiroz González, Héctor Adrián. “**Modelado y Simulación de Procesos de Laminado Conjunto**”. Tesis de Maestría. UNAM Posgrado. México, 2003.

[13] Romero Hernández, Jorge Luis; Muñoz González, Vivaldo. “**Modelado del Proceso de Colaminación**”. Tesis de Licenciatura. UNAM, Facultad de Ingeniería. México, 2002.