



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Ondas Gravitacionales de Colapso
de Núcleos Estelares.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A :
CÉSAR SIMÓN LÓPEZ MONSALVO



DIRECTOR DE TESIS:
DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDIN

2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis Padres:
Maria Elena y Mario (2004 †)...
siempre en mis pensamientos.*

Agradecimientos

Mucha gente es la que a lo largo de estos años a ayudado a que esto sea una realidad.

Quiero agradecer al Dr. William Lee por todo el apoyo que me ha brindado desde el principio de este trabajo y por la paciencia con la que ha respondido a todas mis dudas, aún las más pequeñas.

Al Dr. Sergio Mendoza por la elocuente forma de introducirme a la astrofísica y por el apoyo personal y técnico sin el cual no habría podido avanzar mucho.

Al Dr. Matías Moreno por el invaluable apoyo que me brindó en los momentos mas difíciles.

A mis sinodales: Dr. Hernando Quevedo, Dr. Jorge Canto, Dr. Genaro Toledo y Dr. Carlos Villarreal por el tiempo que le dedicaron a lectura y corrección de ésta tesis, sus críticas y comentarios siempre serán bien recibidos.

A mis padres por todos los años de de educación académica y personal que me han dado.

A Vasthi, Laura y Olivia, su apoyo y consejo fueron fundamentales a lo largo de estos años, por su amistad y ayuda...gracias infinitas.

A Hugo por las tantas horas de discusión en el cubi y a lo largo de muchos kilómetros en la carretera, el viaje continua.

A todos mis amigos de la Universidad y de viaje: el Men, Cinzia, Cristelia, Itan, Luis Jimenez, la Yetz, Guillaume, el Mam, la Za, los debianeros, el Cris, Irli, Natalia y Marcos, Yeny, y a mi cuñado Israel, hicieron inolvidable la experiencia en la carrera.

A mi hermano Mario y mi cuñada Aida, sus cuestionamientos me hicieron pensar en muchas cosas que no había entendido y otras que

sigo sin comprender.

A Rafa...en una palabra: magnífico.

Quiero agradecer también a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), proyecto IN119203-3 por el apoyo económico durante la escritura de esta tesis.

Y finalmente a mi novia Vasthi por su infinita paciencia durante este trabajo y fuera de el también.

*Cause all of the stars
are fading away
just try not to worry
you'll see them someday*

Noel Gallagher.

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	ix
1. Geometría del Espacio-Tiempo	1
1.1. Espacio-Tiempo	1
1.2. La métrica	3
1.3. La Conexión	5
1.3.1. Ecuación Geodésica	7
1.3.2. Transporte Paralelo	7
1.3.3. Definición General	7
1.4. La derivada covariante	8
1.4.1. La conexión métrica	9
1.5. Curvatura	10
1.5.1. Conmutadores	11
2. Relatividad General	13
2.1. Ecuaciones del Campo Gravitacional	13
2.2. Acción Gravitacional	14
2.2.1. Acción para partículas en un campo	17
2.3. Consecuencias de las Ecuaciones de Campo	19
2.3.1. Ondas Gravitacionales	19
2.3.2. Colapso Gravitacional	20
3. Campo Débil y Ondas Gravitacionales	21
3.1. Campo Débil	21
3.2. Invarianza de Norma	23
3.3. Ecuación de Onda	25
3.4. Solución a la Ecuación de Onda	27
3.4.1. Elección de la norma	28
3.4.2. Norma-TT	29

3.5. Generación de Ondas Gravitacionales	30
4. Inestabilidades y Colapso	33
4.1. Inestabilidades No-axisimétricas	34
4.2. Condiciones de estabilidad	34
4.3. Inestabilidad secular vs. dinámica	36
4.3.1. Esferoides e inestabilidad dinámica	36
4.4. Colapso Gravitacional	37
4.4.1. Emisión de Ondas Gravitacionales	38
5. Modelo Numérico	39
5.1. SPH	39
5.1.1. Ecuaciones de Movimiento	40
5.2. Relación Politrópica	41
5.3. Ley de Rotación	42
5.4. Señal de Ondas Gravitacionales	43
5.5. Estructura del Código	45
5.5.1. Profile	45
5.5.2. Relax	45
5.5.3. Singleinit	47
5.5.4. Collapse	47
6. Resultados y Discusión	49
6.1. Interpretación General	49
6.2. Resultados con baja resolución	58
6.3. Emisión vs. ρ	58
6.4. Emisión vs. β	60
6.5. Análisis de Fourier	64
7. Conclusiones	77

Introducción

La Teoría de la Relatividad General ha probado ser una de las más efectivas contrucciones teóricas con respaldo experimental. Su elegancia matemática y sus profundas ideas físicas cambiaron la manera de pensar, no solo del mundo científico, sino que han marcado, junto con la mecánica cuántica una revolución completa en la concepción coloquial del universo.

En esta tesis me ocuparé de una de las predicciones aún no observadas de la relatividad general: las ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales son una solución en condiciones muy particulares de las ecuaciones que describen la interacción de la energía con el espacio-tiempo: las ecuaciones de Einstein.

La razón por la que las ondas gravitacionales no han sido aún observadas está en la pequeña amplitud que estas ondas tienen en esta región del universo, además de estar pesadas por un factor de escala verdaderamente pequeño, por lo que a una gran distancia de la fuente son prácticamente imperceptibles por los instrumentos de medición con los que contábamos hasta ahora.

LIGO, un detector de ondas gravitacionales interferométrico aún en fase de calibración, promete detectar las primeras señales de ondas gravitacionales en los próximos años.

En principio, como veremos más adelante, cualquier masa que cambie su momento de inercia produce ondas gravitacionales, pero solo eventos como el colapso gravitacional o los sistemas binarios de objetos compactos producen ondas suficientemente energéticas para ser detectadas. En este trabajo estudiaré las ondas provenientes del colapso gravitacional de núcleos estelares.

Primero, estudiaremos la matemática necesaria para formular la teoría de manera consistente, después revisaremos las condiciones en las que podemos reducir las ecuaciones de Einstein a una ecuación de ondas; encontraremos sus soluciones y estudiaremos su naturaleza, justificación suficiente de las últimas secciones donde estudiaré la

hidrodinámica del colapso de núcleos estelares.

Las ecuaciones involucradas en la última parte no permitirán una solución analítica realista del problema por lo que será necesario utilizar una técnica numérica.

Trabajando en el régimen de *campo débil* implementamos un código hidrodinámico diseñado por el Dr. William Lee, para simular el colapso y, finalmente, estudiar la señal de ondas gravitacionales generadas por estos eventos.

Capítulo 1

Geometría del Espacio-Tiempo

Antes de empezar a discutir la manera en que las ecuaciones de Einstein (las ecuaciones para el campo gravitacional) sustituyen a la teoría de Newton, desarrollaremos la herramienta necesaria para construir la idealización del espacio-tiempo.

1.1. Espacio-Tiempo

Es momento de comenzar a definir de manera precisa con lo que se va a trabajar, y lo primero será definir el fondo sobre el cuál pondremos nuestros campos y partículas. El fondo que emplearemos es el espacio-tiempo, que entendido de una manera simple es la colección de todos los eventos con una distancia definida entre ellos. A cada punto del espacio-tiempo le corresponde un evento y éste está separado de otro una distancia s .

El modelo matemático usado para describir el espacio-tiempo [ref. (2)], es un par $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ donde \mathcal{M} es una variedad Hausdorff* 4-dimensional conexa de clase C^∞ , y \mathbf{g} es una métrica de Lorentz sobre \mathcal{M} .

Una variedad corresponde a nuestra idea intuitiva de la continuidad del espacio y del tiempo. Estrictamente hablando, esta continuidad está bien establecida mediante experimentos a altas energías, hasta distancias del orden de 10^{-15} cm. Tomamos una variedad conexa pues no habría, en principio, manera de obtener información física de alguna componente desconexa.

*Un espacio se dice de Hausdorff cuando para dos elementos distintos existen vecindades disjuntas de cada uno contenidas en el espacio que no se intersectan.

Dos modelos $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ y $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$ son considerados equivalentes si existe un difeomorfismo $\theta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ que convierte la métrica \mathbf{g} en la métrica $\mathbf{g}' = \theta\mathbf{g}$.

La métrica \mathbf{g} nos permite dividir a los vectores no nulos en un punto $p \in \mathcal{M}$ en tres clases: dado el vector $\mathbf{X} \in T_p$, decimos que es *temporal*, *espacial* o *nulo* de acuerdo a si $g(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ es negativo, positivo o cero respectivamente. El orden de diferenciabilidad de la métrica debe ser el suficiente para tener bien definidas las ecuaciones de campo que discutiremos mas adelante. Así que asumiremos en lo que resta que la métrica es al menos C^2 . Ésto permite que las ecuaciones de campo (que involucran las segundas derivadas de la métrica) estén bien definidas en cada punto del espacio-tiempo. De hecho, el orden de diferenciabilidad de la métrica probablemente no tiene significado físico. Como uno nunca puede medir la métrica exactamente, sino hasta algún margen de error, uno nunca podría determinar si de hecho hubiera una discontinuidad en las derivadas de cualquier orden. Por tanto, uno siempre puede representar sus mediciones por una métrica de clase C^∞ .

Como dijimos, habrá varios campos sobre \mathcal{M} , tales como el campo electromagnético y otros, que describen el contenido de materia del espacio-tiempo. Estos campos obedecerán ecuaciones que se pueden expresar como relaciones entre tensores sobre \mathcal{M} en las cuales, todas las derivadas con respecto a la posición son derivadas covariantes con respecto a la conexión simétrica definida por la métrica \mathbf{g} . Ésto es así pues las únicas relaciones definidas por la estructura de una variedad son tensoriales, y la única conexión que tendremos definida será la dada por la métrica. Si existiera otra conexión sobre \mathcal{M} , la diferencia entre las dos sería un tensor y podría ser considerado como otro campo físico.

La teoría que se obtiene depende de los campos de materia que se incorporan. Siempre se deben incluir los campos que son observados experimentalmente, pero también se podría postular la existencia de campos aún no detectados. Por ejemplo, la teoría de Brans-Dicke postula la existencia de un campo escalar de largo alcance que se acopla débilmente a la traza del tensor de energía-momento.

** Un difeomorfismo es función que va de una variedad en otra, que es diferenciable con inversa diferenciable

*** T_p denota al espacio tangente a \mathcal{M} en p .

1.2. La métrica

En geometría elemental, el producto interior entre dos vectores \mathbf{U} y \mathbf{V} se define $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \sum_{i=1}^m U_i V_i$ donde U_i y V_i son las componentes de los vectores en \mathbf{R}^m . Sobre una variedad \mathcal{M} , un producto interior esta definido en cada espacio tangente $T_p \mathcal{M}$.

Recordando la forma del cuadrado del intervalo en Relatividad Especial, en un sistema de referencia inercial en coordenadas cartesianas, el intervalo ds está dado por la relación

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (1.1)$$

donde

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Bajo una transformación de Lorentz, ie. pasándolo a otro sistema inercial, tenemos que el principio de relatividad nos dice que $ds^2 = ds'^2$. Sin embargo, si pasamos a un sistema de referencia no inercial, ds^2 ya no estará dado por (1.1). Así, por ejemplo, si nos movemos a un sistema en rotación uniforme sobre el eje z ,

$$x = x' \cos \omega t - y' \sin \omega t, \quad y = x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \quad z = z', \quad t = t',$$

y el cuadrado del intervalo toma la forma [ref. (3)]

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dl'^2 + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt.$$

La expresión anterior no puede ser representada mediante la suma de los cuadrados de las diferenciales de coordenadas, sin importar cual sea la transformación para el tiempo. Por tanto, en un sistema de referencia no inercial, el cuadrado del intervalo aparece como una cuadrática.

Para describir el tiempo propio en las coordenadas no primadas, simplemente reescribimos las diferenciales

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad ds^2 = \eta_{ij} dx'^i dx'^j, \quad (1.2)$$

con $\eta_{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Ésto define un tensor métrico g_{ij} que contiene la descripción de la longitud de arco ds en un sistema arbitrario

$$ds^2 = \eta_{ij} \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} dx^m dx^n, \quad (1.3)$$

con lo que podemos escribir el cuadrado del intervalo como

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.4)$$

donde los g_{ik} son ciertas funciones de las coordenadas x^j , y representan la métrica del espacio-tiempo y de donde es claro que cumplen la propiedad de simetría, ie. $g_{ik} = g_{ki}$.

Una propiedad que poseen las componentes del tensor métrico es que al transformarse de un sistema de referencia cualquiera a uno inercial, sus componentes están dadas por $g_{ik} = \eta_{ij}$, justamente la métrica de un espacio de Minkowski. Un espacio con esta última métrica se llama *galileano*.

Cuando el tensor métrico es llevado a su forma diagonal, ie. $g_{ik} = 0$ para toda $i \neq k$, se obtiene que tres de los elementos diagonales son negativos. De aquí se sigue que el determinante g de la matriz formada por las componentes del tensor g_{ik} es negativo para un espacio-tiempo verdadero [ref (8)].

$$g < 0. \quad (1.5)$$

Un tensor métrico que no satisfaga esta condición, carece de sentido físico y no corresponde a alguna métrica de un espacio-tiempo real.

En la Teoría Especial de la Relatividad se tiene una métrica plana. Una idea sería incluir la gravedad introduciendo un campo extra sobre el espacio tiempo y manteniendo la métrica plana. Sin embargo, las observaciones muestran que la luz se defleca en presencia de un campo gravitacional****. Como los rayos de luz son geodésicas nulas, esto muestra que la métrica del espacio-tiempo no puede ser plana y ni siquiera conforme a una métrica plana. Por tanto adoptaremos la visión de que el campo gravitacional está representado por la métrica misma.

El tensor métrico en su forma general, no puede ser llevado a una forma galileana para todo espacio mediante una transformación de coordenadas. Esto muestra que los campos gravitacionales no pueden ser eliminados totalmente por una transformación de Lorentz. Los espacios determinados por (1.4) se denominan curvos.

**** En los 30's se midió esta deflexión durante un eclipse total de sol observado en África por una expedición inglesa cuya finalidad era verificar esta predicción de la teoría de Einstein.

Justamente el estudio de espacios curvos y sus conexiones con la gravitación representa el estudio de la Teoría General de la Relatividad. El problema entonces es el de encontrar las ecuaciones de campo que relacionan la métrica con la distribución de materia.

1.3. La Conexión

Ahora estudiaremos la manera en que se generaliza la idea del gradiente en espacios curvos. Para ello necesitaremos un concepto igualmente fundamental, *la conexión*. La noción de conexión juega un papel esencial en la Geometría Diferencial. Una conexión define una derivada covariante que contiene un campo de norma y especifica la manera en que un vector es transportado paralelamente a lo largo de una curva sobre la variedad base \mathcal{M} [ref (4)]. El concepto moderno de conexión surgió del intento de encontrar una definición intrínseca de diferenciación sobre una superficie 2-dimensional embedida en el espacio tridimensional \mathbf{R}^3 de nuestra experiencia física. Para los fines de esta tesis solo nos interesaremos en la conexión de *Levi-Civita*.

Tomemos la esfera S^2 en \mathbf{R}^3 como ejemplo específico. Sean $\theta \in [0, \pi]$ y $\phi \in [0, 2\pi]$ coordenadas locales de la paramentización

$$x(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (1.6)$$

Observamos que $x(\theta, \phi)$ es el vector unitario normal. La métrica inducida por el mapeo escogido está dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_\theta x \cdot \partial_\theta x & \partial_\theta x \cdot \partial_\phi x \\ \partial_\theta x \cdot \partial_\phi x & \partial_\phi x \cdot \partial_\phi x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

con lo que el intervalo es

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.8)$$

Los dos campos vectoriales

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_\theta x = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ u_2 &= \partial_\phi x = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0), \end{aligned} \quad (1.9)$$

son tangentes a la superficie y generan el espacio tangente siempre que $\theta \in (0, \pi)$. Claramente cualquier derivada puede descomponerse en sus componentes tangenciales, proporcionales a u_1 y a u_2 , y una

componente normal \hat{n} proporcional a x . Identificamos a u_1 y a u_2 con las bases ∂_θ y ∂_ϕ para el espacio tangente ya que

$$\partial_\theta f(x) = u_1 \cdot \partial_x f \quad \partial_\phi f(x) = u_2 \cdot \partial_x f, \quad (1.10)$$

donde $f(x)$ es una función sobre \mathbf{R}^3 .

Ahora nuestro objetivo es diferenciar vectores de una manera intrínseca a la superficie y no a la parametrización particular.

Primero calculamos las derivadas parciales ordinarias

$$\partial_\theta(u_1) = (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \theta) = -x$$

$$\partial_\phi(u_1) = \partial_\theta(u_2) = (-\cos \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi, 0) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_2$$

$$\partial_\phi(u_2) = (-\sin \theta \cos \phi, -\sin \theta \sin \phi, 0) = -\sin^2 \theta x - \cos \theta \sin \theta u_1$$

Definimos la derivada covariante intrínseca ∇_X con respecto a algún vector tangente X tomando la derivada ordinaria y proyectándola sobre la superficie. ∇_X es entonces la derivada direccional que resulta de quitar la componente normal de las derivadas parciales ordinarias

$$\nabla_{u_1}(u_1) = 0$$

$$\nabla_{u_1}(u_2) = \nabla_{u_2}(u_1) = \cot \theta u_2$$

$$\nabla_{u_2}(u_2) = -\cos \theta \sin \theta u_1$$

∇ es la *conexión de Levi-Civita* sobre S^2 . Usando la identificación de (u_1, u_2) con $(\partial_\theta, \partial_\phi)$, escribimos

$$\nabla_{\partial_\theta} \equiv \nabla_{u_1} \quad \nabla_{\partial_\phi} \equiv \nabla_{u_2}$$

Ahora, los símbolos de Christoffel están definidos por

$$\nabla_{u_i}(u_j) = u_k \Gamma_{ij}^k, \quad o \quad \nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (1.11)$$

donde $\partial_1 = \partial_\theta$ y $\partial_2 = \partial_\phi$. Entonces, en nuestro ejemplo encontramos que

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\cos \theta \sin \theta,$$

y

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

de otra forma.

1.3.1. Ecuación Geodésica

Supongamos que $x(t)$ es una curva sobre S^2 . Esta curva es una geodésica si no *se desvía*, ie. si la aceleración \ddot{x} solo tiene componentes normales a la superficie. Esta condición se puede escribir como

$$\nabla_{\dot{x}}(\dot{x}) = 0. \quad (1.12)$$

que en componentes se escribe

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \quad (1.13)$$

Por ejemplo, si consideramos un paralelo a una latitud $x(t) = x(\theta = \theta_0, \phi = t)$ entonces $\dot{x} = u_2$ y $\nabla_{\dot{x}}(\dot{x}) = -\cos\theta_0 \sin\theta_0 u_1$. Esta curva es una geodésica sobre el ecuador, $\theta_0 = \pi/2$. Las curvas $x(t) = (\theta = t, \phi = \phi_0)$ siempre satisfacen la ecuación geodésica pues $\dot{x} = u_1$ y $\nabla_{\dot{x}}(\dot{x}) = 0$: éstos son los meridianos que van del polo norte al polo sur.

1.3.2. Transporte Paralelo

La conexión de Levi-Civita nos da una regla para transportar vectores sobre una superficie. Sea $x(t)$ una curva sobre S^2 y sea $s(t)$ un campo vectorial definido a lo largo de la curva. Decimos que s es transportado paralelamente si satisface la ecuación

$$\nabla_{\dot{x}}(s) = 0, \quad (1.14)$$

ie. \dot{s} es normal a la superficie a lo largo de la curva. Dado un vector inicial $s(t_0)$ y una conexión, $s(t)$ está determinado de manera única por la ecuación de transporte paralelo.

El transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada en general no es la identidad. El proceso de asignar a cada curva cerrada por un punto la transformación lineal que mide la rotación que resulta del transporte paralelo se le llama *holonomía*. El conjunto de matrices de holonomía forma un grupo llamado *grupo de holonomía*. La no trivialidad de la holonomía esta relacionada a la existencia de curvatura: el transporte paralelo en una curva cerrada en un plano no da ninguna rotación.

1.3.3. Definición General

En general, no hay una manera natural de embedir una variedad \mathcal{M} en un espacio euclídeo. Entonces, aún para el *haz tangente*, no tiene sentido hablar de normales a \mathcal{M} . Este problema es resuelto con

la teoría de *haces fibrados* [ref. (4)] que no trataremos en esta tesis, pero cuya idea general esta en sustituir la noción de normal por la idea de *fibras* que se *levantan* de cada punto.

Ahora definiremos la conexión sobre el haz tangente. Tomemos una carta (U, ϕ) con coordenada $x = \phi(p)$ con $p \in \mathcal{M}$, la generalización de los símbolos de Christoffel (1.11) esta dada por

$$\nabla_\nu \mathbf{e}_\mu \equiv \nabla_{\mathbf{e}_\nu} \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}, \quad (1.15)$$

donde $\{\mathbf{e}_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ es la base coordenada de $T_p\mathcal{M}$. Los coeficientes de conexión especifican la manera en que los vectores base cambian de punto a punto de la variedad \mathcal{M} . Una vez que la acción de ∇ sobre los vectores base está definida, podemos calcular la acción de ∇ sobre cualquier vector. Sea $V = V^\mu \mathbf{e}_\mu, W = W^\nu \mathbf{e}_\nu \in T_p\mathcal{M}$. Entonces

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{\mathbf{e}_\mu} (W^\nu \mathbf{e}_\nu) &= V^\mu (\mathbf{e}_\mu [W^\nu] \mathbf{e}_\nu + W^\nu \nabla_{\mathbf{e}_\mu} \mathbf{e}_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) \mathbf{e}_\lambda. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por definición, ∇ mapéa dos vectores V y W a un nuevo vector dado por el lado derecho de la ecuación (1.16), cuya componente λ es $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$ donde

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} W^\nu. \quad (1.17)$$

Notemos que $\nabla_\mu W^\lambda$ es la componente λ de un vector $\nabla W = \nabla_\mu W^\lambda \mathbf{e}_\lambda$ y no debe confundirse con la derivada covariante de una componente W^λ .

1.4. La derivada covariante

Como ∇_X tiene el sentido de una derivada, es natural definir la derivada covariante de una función f por la derivada direccional ordinaria

$$\nabla_X f = X[f]. \quad (1.18)$$

Entonces

$$\nabla_X (fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y. \quad (1.19)$$

Requerimos que ésto se cumpla para cualquier producto tensorial

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad (1.20)$$

donde T_1 y T_2 campos tensoriales de tipo arbitrario. La ecuación (1.20) es también válida cuando alguno de los índices esta contraído. Con estos requerimientos, calculamos la derivada covariante de una 1-forma $\omega \in T^*(\mathcal{M})$. Como $\langle \omega, Y \rangle$ es una función para $Y \in T(\mathcal{M})$ tendremos

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (1.21)$$

Escribiendo ambos lados de la ecuación en términos de componentes encontramos

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (1.22)$$

En particular, para $X = e_\mu$, tenemos

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (1.23)$$

Para $\omega = dx^\nu$, obtenemos

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\lambda}^\nu dx^\lambda \quad (1.24)$$

1.4.1. La conexión métrica

Si nuestra variedad está dotada de una métrica, podemos poner algunas restricciones razonables sobre la forma posible de la conexión. Demandamos que la métrica $g_{\mu\nu}$ sea *covariantemente constante*, ie. si dos vectores X y Y son transportados paralelamente a lo largo cualquier curva, entonces su producto interior permanece constante. Sea V un vector tangente a alguna curva a lo largo de la cual se transportan paralelamente vectores. Tenemos

$$\begin{aligned} \nabla_V[g(X, Y)] &= V^\kappa [(\nabla_\kappa g)(X, Y) + g(\nabla_\kappa X, Y) + g(X, \nabla_\kappa Y)] = \\ V^\kappa X^\mu Y^\nu (\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde notamos que $\nabla_\kappa X = \nabla_\kappa Y = 0$. Como ésto es cierto para cualesquiera curvas y vectores, debemos tener

$$(\nabla_\kappa g)_{\mu\nu} = 0 \quad (1.26)$$

o en componentes

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} = 0. \quad (1.27)$$

Si (1.26) se satisface, decimos que ∇ es *compatible con la métrica*, o simplemente *conexión métrica*. Para este trabajo solo nos interesará este tipo de conexiones con la condición adicional de que sean *libres de torsión* [ref. (5)].

Con ésto, los coeficientes de conexión están dados únicamente en términos de los *símbolos de Christoffel* definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.28)$$

1.5. Curvatura

Hemos argumentado, usando al 2-esfera como ejemplo, que el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada en un espacio curvo no llevará a una transformación del vector. La transformación resultante depende de la curvatura total encerrada por el ciclo; sería más útil tener una descripción local de la curvatura en cada punto. Esto es lo que hace el tensor de Riemann.

Una manera de introducir al tensor de Riemann es considerar el transporte paralelo a lo largo de una curva infinitesimal. Imaginemos que transportamos paralelamente un vector V^σ alrededor de un ciclo cerrado definido por dos vectores A^ν y B^μ

Las longitudes infinitesimales de los lados del ciclo son δa y δb respectivamente. Ahora, sabemos que la acción del transporte paralelo es independiente de las coordenadas, así que debe haber un tensor que nos diga cómo cambia el vector cuando regresa a su punto de partida; será una transformación lineal sobre un vector, y por tanto involucrará un índice superior y uno inferior. Pero también dependerá en los dos vectores A y B que definen el ciclo; por tanto deberá tener dos índices inferiores adicionales para contraer con A^ν y B^μ . Mas aún, el tensor debe ser antisimétrico en estos dos índices pues el intercambio de los vectores corresponde a recorrer el ciclo en la dirección opuesta, y debe dar el inverso de la respuesta original. Por tanto esperamos que la expresión para el cambio δV^ρ que experimenta este vector cuando se le transporta paralelamente alrededor del ciclo debe tener la forma

$$\delta V^\rho = (\delta a)(\delta b) A^\nu B^\mu R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma \quad (1.29)$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor-(1,3) conocido como el *tensor de Riemann* o simplemente tensor de curvatura. Es antisimétrico en los últimos dos índices

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu} \quad (1.30)$$

Consideremos el conmutador de dos derivadas covariantes. La relación entre esto y el transporte paralelo alrededor de una curva es que la derivada covariante de un tensor en una cierta dirección mide cuanto cambia el tensor en relación a lo que habría cambiado si se hubiera transportado paralelamente (ya que la derivada covariante de un tensor en la dirección a lo largo de la cual se transporta paralelo es cero). El conmutador de dos derivadas covariantes mide entonces la diferencia de transportar paralelamente un tensor primero en un sentido contra el transporte en el sentido inverso

El cálculo es muy directo. Consideremos un campo vectorial V^ρ , tomamos

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\ &= \partial_\mu(\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \sim \nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma})V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \\ &\quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda - (\mu \sim \nu) \\ &= (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma})V^\sigma - \\ &\quad 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \nabla_\lambda V^\rho. \end{aligned} \quad (1.31)$$

En el último paso renombramos algunos de los índices mudos y eliminamos algunos términos que se cancelan al antisimetrizar. El último término es el tensor de torsión que como dijimos, no es relevante pues las conexiones que tomamos son libres de torsión. El lado izquierdo de la ecuación (1.31) es un tensor, por tanto la expresión entre paréntesis debe ser también otro tensor. Escribimos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma, \quad (1.32)$$

de donde identificamos al tensor de Riemann

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (1.33)$$

1.5.1. Conmutadores

Una noción útil es la del conmutador de dos campos vectoriales X y Y , que es un tercer campo vectorial con componentes

$$[X, Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu. \quad (1.34)$$

El tensor de Riemann pensado como un mapéo multilinear se expresa de manera elegante en términos del conmutador. Pensando al tensor de Riemann como un mapeo de tres campos vectoriales en un cuarto, tenemos

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (1.35)$$

En estas expresiones, la notación ∇_X se refiere a la derivada covariante a lo largo del campo vectorial X ; en componentes $\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$. Notemos que los dos campos vectoriales X y Y en (1.35) corresponden a los dos índices antisimétricos en las componentes del tensor de Riemann. El último término en (1.35) que involucra el conmutador $[X, Y]$, se anula cuando X y Y son elementos de una base coordenada, pues $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

Habiendo definido al tensor de curvatura como algo que caracteriza la conexión, admitimos ahora que en Relatividad General estamos tratando con los símbolos de Christoffel. En este caso la conexión es derivada de la métrica, y la curvatura asociada se puede decir que es la de la métrica misma. Esta identificación nos permite finalmente darle sentido a nuestra noción informal de que los espacios con métrica euclídea o de Minkowski son planos.

Capítulo 2

Relatividad General

La Relatividad General explica la gravitación como la curvatura del espacio-tiempo. Todo es geométrico. Las ecuaciones básicas de esta teoría son las *Ecuaciones de Einstein* o ecuaciones de campo.

En unidades naturales, ie. $c = G = 1$, estas se escriben

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

A continuación haré un repaso breve del significado de estas ecuaciones y como se derivan a partir de un principio variacional.

2.1. Ecuaciones del Campo Gravitacional

Ahora derivaremos las ecuaciones para el campo gravitacional. El tensor de curvatura, definido por lo que le pasa a los vectores que transportamos en el espacio, lo podemos utilizar para generar cantidades con las que se pueden formar relaciones covariantes; sin embargo, poca Física se puede extraer de solo escribir ecuaciones covariantes; debemos establecer las conexiones que estas relaciones tienen con el mundo real. Lo que hizo Einstein fue adivinar cual era esta conexión. No hay manera de deducir la conexión de principios más fundamentales [ref. (6)].

La clave física que nos puede ayudar es que la gravedad se acopla a la densidad de energía, entonces como la densidad de energía en relatividad es la componente $_{00}$ de un tensor de rango dos, necesitamos un tensor de rango dos en nuestras ecuaciones. La curvatura tiene asociado un tensor de rango cuatro, así que lo contraemos una vez y usamos el tensor de Ricci. La primera adivinanza de Einstein fue que el tensor de energía-momento era simplemente proporcional al tensor

de Ricci. Sin embargo, otras elecciones son posibles; podemos sumar al tensor de Ricci un tensor múltiplo del escalar de curvatura R (el tensor de Ricci contraído). La elección final de Einstein fue

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \lambda^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Hay una buena razón para decidir que esta fue una mejor elección. Si tomamos la divergencia covariante de la ecuación (2.2), el resultado es idénticamente cero. Esto quiere decir que la conservación de la energía es una consecuencia simplemente de la forma de la ecuación (2.2). Si hubiésemos puesto el tensor de energía-momento simplemente igual al tensor de Ricci, la ley de conservación de la energía habría sido un postulado físico, un requerimiento extra que habría traído más información y que habría resultado en menos libertad. Los tensores métricos no son únicos; al tratar con ellos, tenemos la libertad de escoger cuatro funciones, que corresponden a las cuatro funciones que describen una transformación general dando las nuevas coordenadas en términos de las viejas. Como la ley de conservación de la energía es una identidad, cuatro funciones en el tensor métrico son efectivamente libres.

El miembro izquierdo de la ecuación (2.2) es conocido como tensor de Einstein y se le denota

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.3)$$

2.2. Acción Gravitacional

Con lo anterior podemos preguntarnos, ¿Que tan bien se ajusta a la naturaleza la elección de Einstein?, ¿Como obtenemos $T_{\mu\nu}$? y ¿Cuál es el significado de las ecuaciones y de las curvaturas?. Para responder estas preguntas, jugaremos un tanto con las ecuaciones. Primero que nada, trataremos de entender la relación con el resto de la física y los principios variacionales.

Para escribir un principio de mínima acción relativista, necesitamos una integral que sea un escalar invariante. Hemos visto que la trayectoria de una partícula en el espacio tiempo con un campo gravitacional está determinada por la ecuación geodésica, pero también postulando que la cantidad

$$\ell = \int ds, \quad (2.4)$$

es estacionaria bajo traslaciones infinitesimales $x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu[\tau] + \delta x^\mu(\tau)$:

$$\delta \ell = 0. \quad (2.5)$$

Este es un ejemplo de un principio de acción, siendo ℓ la acción para el movimiento de la partícula es su órbita. La ventaja de este principio esta en su simplicidad, así como en el hecho de que las expresiones son manifiestamente covariantes, así que vemos de inmediato que nos darán los mismos resultados en cualquier marco de referencia. Más aún, la existencia de soluciones para (2.5) es bastante plausible, en particular si la expresión para esta acción esta acotada. Por ejemplo, para la mayoría de las geodésicas temporales ℓ es un máximo absoluto.

Ahora consideremos la llamada *Acción de Einstein-Hilbert* en algún volumen V del cuatro-espacio

$$S_g = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x R \sqrt{-g}. \quad (2.6)$$

La acción es un escalar pues R es un escalar y $\sqrt{-g}d^4x$ es un escalar. Podemos mostrar esto último considerando que el tiempo propio es un invariante

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

En virtud de que $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, podemos introducir una rotación para hacerlo diagonal; en este caso,

$$(ds)^2 = A_\mu (dx^\mu)^2,$$

de esto vemos que el elemento de volumen d^4x no es un invariante, el elemento de volumen invariante es

$$\sqrt{A_0 A_1 A_2 A_3} dx'^1 dx'^2 dx'^3 dx'^4 = \sqrt{-g'} d^4x'.$$

Bajo una transformación ortogonal, $d^4x' = d^4x$, y también $g' = g$. Entonces la expresión general para el elemento de volumen invariante es

$$\sqrt{-g} d^4x. \quad (2.7)$$

A la cantidad $\sqrt{-g}$ se le llama densidad escalar. Esto significa que su cambio bajo una transformación de coordenadas se obtiene simplemente multiplicándola por el jacobiano de la transformación

$$\sqrt{-g'} = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right| \sqrt{-g}.$$

Consideremos ahora una variación infinitesimal del tensor métrico

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

entonces su inversa cambia como

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} - \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Si imponemos que $\delta g^{\mu\nu}$ y su primera derivada se anulen en la frontera de V ¿Qué efecto tendrá esto sobre el tensor de Ricci y el escalar de curvatura?

Primero calculamos la variación $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de la conexión

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (2.10)$$

entonces, encontramos que [ref. (7)]

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\delta g_{\mu\nu}) - \delta g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\alpha\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Una observación importante es que como $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ es la *diferencia* entre dos conexiones, se transforma como un tensor verdadero. Entonces, esta última expresión puede ser escrita de tal forma que solo aparezcan derivadas covariantes

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\nabla_\mu\delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu}). \quad (2.12)$$

De manera similar, usando de nuevo el hecho que estas expresiones se transforman como tensores, encontramos que

$$R_{\kappa\lambda\alpha}^\nu \rightarrow R_{\kappa\lambda\alpha}^\nu + \nabla_\lambda\delta\Gamma_{\kappa\alpha}^\nu - \nabla_\alpha\delta\Gamma_{\kappa\lambda}^\nu, \quad (2.13)$$

así que la variación del tensor de Ricci esta dada por

$$R_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(-\nabla^2\delta g_{\mu\nu} + \nabla_\alpha\nabla_\mu\delta g_\nu^\alpha + \nabla_\alpha\nabla_\nu\delta g_\mu^\alpha - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_\alpha^\alpha), \quad (2.14)$$

y para el escalar de curvatura ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$) se tiene que

$$R \rightarrow R - R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - \nabla^2\delta g_\alpha^\alpha). \quad (2.15)$$

Finalmente el determinante de $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ se obtiene por

$$\det(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\lambda}(\delta_\nu^\lambda + g^{\lambda\alpha}\delta g_{\alpha\nu}))$$

y entonces

$$\det(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \det(g_{\mu\nu}) \det(\delta_{\nu}^{\mu} + g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu}) = g(1 + \delta g_{\mu}^{\mu}); \quad (2.16)$$

y la densidad escalar queda como

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} \left(1 + \frac{1}{2} \delta g_{\mu}^{\mu} \right). \quad (2.17)$$

Entonces, encontramos la variación para la integral S_g

$$S_g \rightarrow S_g + \delta S_g,$$

como consecuencia de la variación (2.8)

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \quad (2.18)$$

y es por esto que podemos usar la integral de R como acción para la parte gravitacional del problema completo.

Como el tensor de energía-momento aparece de esta forma, a partir de un principio variacional, su divergencia covariante es necesariamente cero. Habíamos encontrado la conexión desde la otra dirección, que podíamos deducir un principio variacional a partir de un tensor con divergencia nula. Los argumentos que hemos dado no son muy rigurosos, y esto ha sido así porque ahora lo que nos interesa es extraer la mayor física posible de este asunto y para ello se ha sacrificado un poco de rigor. *La física puede progresar sin las demostraciones, pero no sin los hechos*[ref. (6)].

Entonces, se puede probar que si el funcional

$$S_g = \int d^4x \Sigma[g_{\mu\nu}]$$

es invariante bajo una transformación de coordenadas, entonces la divergencia covariante de la variación de S_g con respecto a la métrica es idénticamente cero. Es decir que satisface una ecuación de continuidad

$$\nabla_{\mu} G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

2.2.1. Acción para partículas en un campo

Ahora discutiremos como se escribe una ley general de la física, una que no solo describe los campos gravitacionales, sino también a la

materia. Como antes, suponemos que se puede deducir de un principio de mínima acción.

El enunciado matemático es que la variación de la acción sea cero

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots] = 0. \quad (2.20)$$

La densidad lagrangiana \mathcal{L} contiene varios tipos de campos, por ejemplo el tensor del campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, el campo electromagnético A_μ , y, si la materia es un escalar, un campo escalar de materia ϕ . Cuando variamos esta acción con respecto a los diferentes campos, obtenemos las ecuaciones de propagación para los campos correspondientes. Hemos escrito una pieza de esta acción, denotemos lo que falta por una cantidad S_m que depende de los campos de materia ϕ y los campos electromagnéticos A_μ y todos los otros campos que conozcamos.

Cuando tomamos la variación de

$$S = S_g + S_m = -\frac{1}{2\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m,$$

con respecto a $g_{\mu\nu}$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = -\frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.21)$$

El tensor de energía-esfuerzos, densidad de materia $T^{\mu\nu}$ debe ser la derivada variacional de S_m

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (2.22)$$

si $T^{\mu\nu}$ es la fuente del campo gravitacional. Si no fuéramos capaces de calcular $T^{\mu\nu}$ mediante otro principio físico, no habría teoría de gravitación, ya que no sabemos como los campos se relacionan con cualquier otro objeto [ref. (6)].

Hay ciertos requerimientos de consistencia similares a los que encontramos en electromagnetismo. Para resolver las ecuaciones de Maxwell necesitamos corrientes. Las corrientes deben ser conservadas, no pueden ser arbitrarias.

Las corrientes conservadas se obtienen de resolver otros problemas físicos, siguiendo alguna ley independiente, como la ley de Ohm, o la ley de Hooke o la ecuación de Schrödinger para tal o cual sistema. Si no tenemos estas otras leyes, la teoría de campos electromagnéticos sería inútil y carente de significado.

Para el caso gravitacional la situación es mas complicada. El tensor $T^{\mu\nu}$ incorpora el movimiento de la materia, por tanto, debemos tener una ley que siga la materia, incluyendo a la ley de Ohm y la ley de Hooke; pero también $T^{\mu\nu}$ incluirá los campos gravitacionales $g_{\mu\nu}$, una situación que complica mucho mas el problema que su contraparte electromagnética. En general, no es posible escribir ningún tipo de $T^{\mu\nu}$ consistente excepto para el vacío, a menos que uno ya haya resuelto el problema completamente enmarañado. El conflicto es que cualquier $T^{\mu\nu}$ específico no resolverá el problema excepto para casos especiales del tensor métrico; la solución relativista completa debería funcionar a pesar de la elección de coordenadas y curvaturas. Aún para problemas muy simples, no hay una idea clara de como escribir un $T^{\mu\nu}$ propio. No sabemos como escribir un $T^{\mu\nu}$ para representar una barra rotando, y entonces no podemos calcular exactamente su radiación de ondas gravitacionales. No podemos calcular $T^{\mu\nu}$ para el sistema tierra-luna porque el problema de las fuerzas de marea, y la elasticidad de la tierra cambian los campos gravitacionales significativamente. Si suponemos que la tierra es rígida, las ecuaciones son inconsistentes.

2.3. Consecuencias de las Ecuaciones de Campo

En 1915 Einstein usó la Relatividad General para calcular correctamente la precesión anómala de la órbita de Mercurio y también la deflexión de la luz a su paso en la vecindad solar, ocasionada por su campo gravitacional. El primero de estos cálculos resolvía un problema físico conocido, mientras que el segundo hacía un predicción que habría de verificarse años después. Estos hechos, entre otros, hicieron de la Relatividad General junto con la Mecánica Cuántica los dos grandes logros teóricos del siglo pasado, y es por eso que vale la pena estudiar sus consecuencias físicas a fondo.

2.3.1. Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales son un ejemplo de como el espacio-tiempo puede estar curvado aún en el vacío. Relatividad General predice que cuando un objeto pesado oscila de cierto modo, éste manda dobles de curvatura de espacio-tiempo que se propagan a la velocidad de la luz. Ésto no es obvio a partir de nuestra formulación de las ecuaciones de campo. Hulse y Taylor ganaron el premio Nobel en 1993 por sus

cuidadosas observaciones de un sistema binario que cae a su centro de masa lentamente en una espiral, justo como la teoría predice que debe ocurrir si el sistema está perdiendo energía en forma de radiación gravitacional.

Las ondas gravitacionales no han sido detectadas de manera directa, pero hay algunos proyectos para detectarlas.

2.3.2. Colapso Gravitacional

Usualmente el tensor de energía-momento incluye términos de presión, este es un hecho notable pues implica que no solo la densidad de energía, sino también la presión causan atracción gravitacional. Esto parecería violar nuestra intuición de que la presión hace que la materia se expanda. Aquí, sin embargo, nos referimos a efectos gravitacionales de la presión, los cuales son indetectables en situaciones ordinarias.

Hay una variedad de situaciones en las que la densidad no domina a la presión. Por ejemplo, una estrella de neutrones se mantiene por la llamada presión degenerativa ocasionada por el principio de exclusión de Pauli, esto es, la presión y la densidad de energía tienen contribuciones comparables en el lado derecho de las ecuaciones de campo (2.1) y de esta forma se contraresta la tendencia gravitacional a continuar la compresión de la estrella. Más aún, una estrella de neutrones de mas de $2M_{\odot}$ sin rotación, se colapsa inevitablemente a un hoyo negro, en parte gracias a la atracción gravitacional causada por la presión (no degenerativa).

Capítulo 3

Campo Débil y Ondas Gravitacionales

Para las ecuaciones de Einstein derivadas en el capítulo anterior, podemos considerar el caso Newtoniano como el límite en el que el campo gravitacional no es muy intenso, es estático, y las partículas de prueba se mueven lentamente.

En esta sección consideraremos el caso menos restrictivo. El que el campo sigue siendo débil pero sí puede variar con el tiempo, y no hay restricciones en la velocidad de las partículas de prueba. Esto nos permitirá discutir fenómenos que son ambiguos o están ausentes en la teoría de Newton, tales como la radiación gravitacional o la deflexión de la luz.

3.1. Campo Débil

La debilidad del campo gravitacional se expresa al descomponer el tensor métrico en una métrica plana mas una perturbación,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.1)$$

Nos restringiremos a coordenadas en las que $\eta_{\mu\nu}$ toma su forma canónica, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. La suposición que $h_{\mu\nu}$ es pequeño nos permite ignorar cualquier cosa que tenga orden superior al primero en esta cantidad, de lo que obtenemos de inmediato

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$. Podemos subir y bajar índices usando $\eta^{\mu\nu}$ y $\eta_{\mu\nu}$ ya que las correcciones serían de orden superior en la perturbación.

De hecho, podemos pensar en la versión linealizada de la Relatividad General como una teoría descriptiva de un campo tensorial simétrico $h_{\mu\nu}$ propagándose sobre un espacio-tiempo plano. Esta teoría es invariante de Lorentz en el sentido de Relatividad Especial: bajo una transformación de Lorentz, $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$, la métrica $\eta_{\mu\nu}$ es invariante, mientras que la perturbación se transforma como

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} h_{\mu\nu}. \quad (3.3)$$

Queremos encontrar la ecuación de movimiento que obedece la perturbación $h_{\mu\nu}$, que viene de examinar las ecuaciones de Einstein a primer orden. Comenzamos con los símbolos de Christoffel, que están dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}). \quad (3.4)$$

Como los coeficientes de la conexión son cantidades de primer orden, las únicas contribuciones al tensor de Riemann vendrán de las derivadas de los términos con Γ , no con Γ^2 . Bajando un índice por conveniencia, obtenemos

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda} \partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\lambda} \partial_{\sigma} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}, \quad (3.5)$$

de donde obtenemos la expresión en forma explícita

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} h_{\mu\rho} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} h_{\nu\sigma}). \quad (3.6)$$

El tensor de Ricci viene de contraer sobre μ y ρ

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\sigma} \partial_{\nu} h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma} \partial_{\mu} h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h - \square h_{\mu\nu}), \quad (3.7)$$

que es manifiestamente simétrico en μ y ν . En esta expresión definimos la traza de la perturbación como $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^{\mu}_{\mu}$, y el D'Alambertiano es el mismo que para el espacio-tiempo plano, $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Una nueva contracción nos da el escalar de Ricci

$$R = \partial_{\mu} \partial_{\nu} h^{\mu\nu} - \square h. \quad (3.8)$$

Juntando todos nuestros resultados, obtenemos el tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \\
&\quad \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Consistente con nuestra interpretación de la teoría linealizada como una que describe a un tensor simétrico en un fondo plano.

Las ecuaciones de campo linealizadas son $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, donde $G_{\mu\nu}$ está dado por (3.9) y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, calculado a orden cero en $h_{\mu\nu}$. No incluimos correcciones a ordenes superiores al tensor de energía-momento pues estas cantidades deben ser pequeñas para el límite de campo débil. En otras palabras, el orden mas bajo para el que $T_{\mu\nu}$ no se anula es automáticamente del mismo orden de magnitud de la perturbación. La ley de conservación a el orden mas bajo es simplemente $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Nosotros nos ocuparemos de las ecuaciones en el vacío, que como es usual son $R_{\mu\nu} = 0$, donde $R_{\mu\nu}$ esta dado por (3.7).

3.2. Invarianza de Norma

Antes de resolver las ecuaciones linealizadas, tenemos que ocuparnos de la invarianza de norma. Esto surge al demandar que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ no especifique el sistema de coordenadas en el espacio-tiempo; pueden haber mas sistemas coordenados en los que la métrica se escriba como la de Minkowski con una perturbación, pero ésta sea diferente. Por tanto, nuestra descomposición de la métrica no es única.

Podemos ver esto de manera un poco mas abstracta [ref. (5)]. La noción de que la teoría linealizada puede pensarse como una que gobierna el comportamiento de campos tensoriales sobre un fondo plano se puede formalizar en términos de un "espacio-tiempo de fondo" \mathcal{M}_b , un "espacio-tiempo físico" \mathcal{M}_p , y un difeomorfismo $\phi : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathcal{M}_p$. Como variedades \mathcal{M}_b y \mathcal{M}_p son lo mismo, pero imaginamos que poseen campos tensoriales diferentes; sobre \mathcal{M}_b hemos definido la métrica de Minkowski, mientras que en \mathcal{M}_p tenemos alguna métrica $g_{\alpha\beta}$ que obedece las ecuaciones de Einstein. El difeomorfismo ϕ nos permite mandar y regresar campos tensoriales entre una variedad y la otra. Como nos gustaría construir nuestra teoría linealizada como una que toma lugar en el espacio-tiempo plano (de fondo), nos interesa el *pull-back* $(\phi_*g)_{\mu\nu}$ de la métrica física. Podemos definir a la perturbación como la diferencia entre la métrica física *jalada* y la plana

$$h_{\mu\nu} = (\phi_*g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

De esta definición, no hay razón para que las componentes de $h_{\mu\nu}$ sean pequeñas; sin embargo, si los campos gravitacionales sobre \mathcal{M}_p son débiles, entonces para algunos difeomorfismos ϕ tendremos que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Entonces limitaremos nuestra atención únicamente a aquellos difeomorfismos para los que esto es cierto. Entonces, el hecho de que $g_{\alpha\beta}$ obedece las ecuaciones de Einstein sobre el espacio-tiempo físico significa que $h_{\mu\nu}$ obedecerá las ecuaciones linealizadas sobre el espacio-tiempo de fondo (ya que ϕ , como difeomorfismo, se puede usar para jalar las mismas ecuaciones de Einstein).

En este lenguaje, la invarianza de norma es simplemente el hecho que hay un gran número de difeomorfismos permisibles entre \mathcal{M}_b y \mathcal{M}_p (donde permisibles significa que la perturbación es pequeña). Consideremos un campo vectorial $\xi^\mu(x)$ sobre el espacio-tiempo de fondo. Este campo vectorial general una familia de un parámetro de difeomorfismos $\psi_{(\epsilon)} : \mathcal{M}_b \rightarrow \mathcal{M}_b$. Para ϵ suficientemente pequeño, si ϕ es un difeomorfismo para el cual la perturbación definida por (3.10) es pequeña, entonces también lo será $(\phi \circ \psi_\epsilon)$, aunque la perturbación tendrá un valor diferente.

Específicamente, podemos definir una familia de perturbaciones parametrizadas por ϵ

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= [(\phi \circ \psi_{\epsilon*}g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}] \\ &= [\psi_{\epsilon*}(\phi_*g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La segunda igualdad está basada sobre el hecho de que el pullback bajo una composición está dado por la composición de los pullbacks en el orden inverso, lo cual se sigue de el hecho que el *pullback* mueve cosas en la dirección contraria del mapeo original. Sustituyendo en la relación (3.10) encontramos

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = \psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu}) + \psi_{\epsilon*}(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

usando la suposición de que ϵ es pequeña; en el caso de $\psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu})$ será igual a $h_{\mu\nu}$ a orden mas bajo, mientras que los otros términos nos dan la derivada de Lie:

$$\begin{aligned}
h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= \psi_{\epsilon*}(h_{\mu\nu}) + \epsilon \left[\frac{\psi_{\epsilon*}(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} \right] \\
&= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu} \\
&= h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde la derivada de Lie para el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ está dada por

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu} V_{\nu)} \tag{3.14}$$

con V un campo vectorial, y el hecho de que las derivadas covariantes solo son derivadas parciales al orden mas bajo.

Los difeomorfismos infinitesimales ϕ_ϵ dan una diferente representación de la misma situación física, mientras se mantenga el requerimiento de que la perturbación sea pequeña. Entonces, el resultado (3.13) nos dice la clase de perturbaciones de la métrica que denotan espacios-tiempo equivalentes. La invarianza de nuestra teoría bajo tales transformaciones es análoga a la invarianza de norma tradicional para electromagnetismo donde $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$. En este caso la invarianza es debida a que la fuerza del campo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ permanece sin cambio bajo transformaciones de norma; de manera similar, un poco de álgebra de índices nos permite ver que la transformación (3.14) cambia el tensor de Riemann linealizado

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \tag{3.15}$$

Esta derivación abstracta de la transformación de norma apropiada para la perturbación de la métrica se verifica por el hecho de que deja sin cambio a la curvatura, y por tanto, el espacio-tiempo físico permanece sin cambio.

3.3. Ecuación de Onda

Cuando nos enfrentamos con un sistema que es invariante bajo algún tipo de transformación de norma, nuestro primer instinto es fijar una.

Se puede mostrar que la norma dada por $\square x^\mu = 0$, es equivalente a la condición [ref. (5),(1)]

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = 0. \tag{3.16}$$

En el límite de campo débil esto se convierte en

$$\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}) = 0, \quad (3.17)$$

o

$$\partial_\mu h^\mu{}_\lambda - \frac{1}{2}\partial_\lambda h = 0. \quad (3.18)$$

Esta condición es conocida como la *Norma de Lorentz* (o la norma de Einstein, o la norma de Hilbert). Aún tenemos libertad de norma pues podemos cambiar de coordenadas mediante funciones armónicas infinitesimales.

En esta norma, las ecuaciones linealizadas $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$ se simplifican un poco

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

mientras las ecuaciones del vacío $R_{\mu\nu} = 0$ toman la elegante forma

$$\square h_{\mu\nu} = 0, \quad (3.20)$$

que es simplemente la ecuación de onda relativista. Las ecuaciones (3.20) y (3.18) determinan la evolución de una perturbación del campo gravitacional en el vacío en la norma armónica.

Usualmente es conveniente trabajar con una descripción un poco diferente para la perturbación de la métrica. Definimos la perturbación con *traza-invertida* $\bar{h}_{\mu\nu}$ por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.21)$$

El nombre tiene sentido pues $\bar{h}^\mu{}_\mu = -h^\mu{}_\mu$. En términos de $\bar{h}_{\mu\nu}$, la condición de la norma armónica se vuelve

$$\partial_\mu \bar{h}^\mu{}_\lambda = 0. \quad (3.22)$$

Las ecuaciones de campo se escriben

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

de donde se sigue que las ecuaciones en el vacío están dadas por

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.24)$$

3.4. Solución a la Ecuación de Onda

La solución mas simple a la ecuación (3.24) es la de una onda plana de tipo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \mathcal{R}\{A_{\mu\nu} \exp(i\kappa_\alpha x^\alpha)\}, \quad (3.25)$$

donde \mathbf{A} es el *tensor de amplitud* y κ es un 4-vector nulo. En esta solución la onda plana (3.25) viaja en la dirección espacial $\vec{k} = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)/\kappa^0$ con frecuencia $\omega \equiv \kappa^0 = (\kappa^i \kappa_i)^{1/2}$ ($i = 1, 2, 3$).

El tensor de amplitud \mathbf{A} en la solución (3.25) tiene en principio $16 - 6 = 10$ componentes independientes. Por otro lado, algunas consideraciones indican que solo hay dos grados de libertad en Relatividad General [ref. (1)]. Este exceso de componentes independientes se puede explicar de manera simple. Primero, \mathbf{A} y κ no pueden ser arbitrarias si van a describir una onda plana; como resultado, una condición de ortogonalidad entre las dos cantidades restringirá cuatro de las diez componentes de \mathbf{A} . Después, mientras que se ha escogido una norma de Lorentz global, ésta no fija completamente el sistema coordenado de la teoría linealizada. Una ambigüedad residual es preservada a través de los cambios de norma, aún cuando una norma global ha sido seleccionada.

Consideremos una transformación infinitesimal de coordenadas en términos de un 4-vector desplazamiento pequeño pero arbitrario ξ

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha \quad (3.26)$$

Aplicando la transformación de la métrica linealizada generamos un nuevo tensor métrico que al orden mas bajo es

$$g_{\mu'\nu'}^{nuevo} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{viejo} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad (3.27)$$

de tal suerte que las nuevas y viejas perturbaciones estén relacionadas por la expresión

$$h_{\mu'\nu'}^{nuevo} = h_{\mu\nu}^{vieja} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu, \quad (3.28)$$

o, de manera alternativa por

$$\bar{h}_{\mu'\nu'}^{nueva} = \bar{h}_{\mu\nu}^{vieja} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (3.29)$$

Requiriendo que el nuevo sistema coordenado satisfaga la condición (3.24), hace que el vector desplazamiento sea solución de la ecuación de onda

$$\square \xi^\alpha = 0. \quad (3.30)$$

Como resultado, el vector de onda plano con componentes

$$\xi^\alpha \equiv -iC^\alpha \exp(i\kappa_\beta x^\beta), \quad (3.31)$$

genera, a través de las cuatro constantes arbitrarias C^α , una transformación de norma que cambia arbitrariamente cuatro componentes más de \mathbf{A} . Efectivamente, ahora $A_{\mu\nu}$ tiene únicamente $10 - 4 - 4 = 2$ componentes linealmente independientes, en correspondencia con el número de grados de libertad de Relatividad General.

3.4.1. Elección de la norma

En la práctica, usualmente es conveniente restringir las componentes del tensor de amplitud con las siguientes condiciones.

1. **Condición de ortogonalidad:** cuatro componentes del tensor de amplitud pueden ser especificadas si \mathbf{A} y κ se escogen ortogonales

$$A_{\mu\nu}\kappa^\nu = 0 \quad (3.32)$$

2. **Norma de Lorentz global:** justo como en relatividad especial, un marco de lorentz global relativo a un observador con 4-velocidad \mathbf{u} se puede definir. En este caso, tres componentes del tensor de amplitud pueden ser especificadas después de seleccionar una 4-velocidad \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{A}

$$A_{\mu\nu}u^\nu = 0 \quad (3.33)$$

3. **Transformación de norma infinitesimal:** una componente independiente en el tensor de amplitud puede ser eliminada después de seleccionar el vector de desplazamiento $\xi^\mu = iC^\mu \exp(i\kappa_\alpha x^\alpha)$

$$A^\mu{}_\mu = 0 \quad (3.34)$$

Las condiciones (1), (2) y (3) definen la *norma transversa-sin traza* (transverse-traceless gauge, TT-gauge) y representa la norma estándar para el análisis de ondas gravitacionales.

3.4.2. Norma-TT

La elección anterior, hace una serie de simplificaciones y ventajas, la mas importante es que en esta norma, las únicas componentes no nulas del tensor de Riemann son

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0}. \quad (3.35)$$

Puesto que,

$$R_{j0k0} = \frac{1}{2} \partial_0^2 h_{jk}^{TT}, \quad (3.36)$$

el uso de la norma TT indica que una onda gravitacional viajera con comportamiento temporal periódico $h_{jk}^{TT} \propto \exp(i\omega t)$ pueden ser asociadas a una oscilación local del espacio tiempo, ie.

$$\partial_{00}^2 h_{jk}^{TT} \sim -\omega^2 \exp(i\omega t) \sim R_{j0k0}, \quad y \quad R_{j0k0} = \frac{1}{2} \omega^2 h_{jk}^{TT}. \quad (3.37)$$

Para apreciar mejor los efectos de la propagación de una onda gravitacional, es útil considerar la separación entre dos partículas vecinas A y B en movimiento geodésico y como cambia esta separación en presencia de una onda gravitacional incidente.

Introduzcamos un sistema coordenado $x^{\hat{\alpha}}$ en la vecindad de la partícula A de manera que a lo largo de la línea de mundo de la partícula A el elemento de línea tenga la forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + \delta_{\hat{i}\hat{j}} dx^{\hat{i}} dx^{\hat{j}} + \mathcal{O}(|x^{\hat{j}}|^2) dx^{\hat{\alpha}} dx^{\hat{\beta}}. \quad (3.38)$$

La llegada de la onda gravitacional perturbará el movimiento geodésico de las dos partículas y producirá una contribución no nula a la ecuación de desviación geodésica (1.13). Los cambios en el 4-vector de separación \mathbf{V} entre dos geodésicas con vectores tangentes \mathbf{u} son expresadas a través de la ecuación

$$u^\gamma u^\beta (\nabla_V V) \equiv u^\gamma u^\beta \left(\frac{d^2 V^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dV^\alpha}{d\tau} \frac{dV^\beta}{d\tau} \right) = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta V^\gamma u^\delta. \quad (3.39)$$

Indicando ahora con $n_B^{\hat{j}} \equiv x_b^{\hat{j}} - x_A^{\hat{j}} = x_B^{\hat{j}}$ a las componentes del 3-vector en la posición de las dos partículas, la ecuación (3.39) se puede escribir como

$$\nabla_{x_B} x_B^{(\hat{j})} = -R_{0\hat{k}0}^{\hat{j}} x_b^{\hat{k}}. \quad (3.40)$$

una simple simplificación de esta ecuación viene del hecho que alrededor de la partícula A las conexiones afines se anulan, y la derivada covariante en (3.40) se puede reemplazar por una derivada total ordinaria. Mas aún, dado que en la norma TT el sistema coordenado $X^{\hat{\alpha}}$ se mueve junto con la partícula A , el tiempo propio y el tiempo coordenado coinciden a primer orden en la perturbación de la métrica. Como resultado, la ecuación (3.40) efectivamente se convierte en

$$\frac{d^2 x_B^{\hat{j}}}{dt^2} = \frac{1}{2} \left(\partial_0^2 h_{\hat{j}\hat{k}}^{TT} \right) x_B^{\hat{k}}, \quad (3.41)$$

cuya solución es

$$x_B^{\hat{j}}(t) = x_B^{\hat{k}}(0) \left[\delta_{\hat{j}\hat{k}} + \frac{1}{2} h_{\hat{j}\hat{k}}^{TT}(t) \right]. \quad (3.42)$$

La ecuación (3.42) tiene una interpretación directa e indica que, en el marco de comovimiento con A , la partícula B parece oscilar con una amplitud proporcional a $h_{\hat{j}\hat{k}}^{TT}$.

Como éstas son ondas transversales, éstas producirán una deformación local del espacio-tiempo únicamente en el plano ortogonal a la dirección de propagación. Como resultado, si las dos partículas están sobre la línea de propagación, entonces $h_{\hat{j}\hat{k}}^{TT} x_B^{\hat{j}}(0) \propto h_{\hat{j}\hat{k}}^{TT} \kappa_B^{\hat{j}}(0) = 0$ y no se verá ninguna oscilación desde A .

Consideremos un ejemplo concreto, en particular el caso de una onda plana propagándose a lo largo del eje z positivo. En este caso

$$h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = \mathcal{R}\{A_+ \exp[-i\omega(t-z)]\}, \quad (3.43)$$

$$h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = \mathcal{R}\{A_{\times} \exp[-i\omega(t-z)]\}, \quad (3.44)$$

donde A_+ y A_{\times} representan los dos modos independientes de polarización.

3.5. Generación de Ondas Gravitacionales

En electrodinámica clásica, la energía emitida por unidad de tiempo por un dipolo eléctrico oscilante d es fácilmente determinada por

$$L_{ed} \equiv \frac{2}{3} q^2 a^2 = \frac{2}{3} (\ddot{d})^2, \quad (3.45)$$

donde

$$d \equiv qx, \quad y \quad \dot{d} \equiv q\dot{x}, \quad (3.46)$$

con q la carga eléctrica. Igualmente simple es calcular la correspondiente luminosidad producida en ondas gravitacionales producidas por un dipolo de masa. En el caso de un sistema de N partículas puntuales de masa m_A ($A = 1, 2, \dots, N$), de hecho, el momento dipolar de masa y su primera derivada son

$$\vec{d} \equiv \sum_{A=1}^N m_A \vec{x}_A, \quad (3.47)$$

y

$$\dot{\vec{d}} \equiv \sum_{A=1}^N m_A \dot{\vec{x}}_A = \vec{p}, \quad (3.48)$$

respectivamente. Sin embargo, el requerimiento que el sistema conserve su momento lineal total en ausencia de fuerzas externas

$$\ddot{\vec{d}} \equiv \dot{\vec{p}} = 0, \quad (3.49)$$

forza a concluir que $L_{dm} = 0$, ie. que no hay radiación gravitacional dipolar en Relatividad General.

Ahora, consideremos en analogía con electromagnetismo, el cuadrupolo de masa

$$L_{mq} \equiv \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I} \rangle^2 = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{I}_{jk} \ddot{I}_{jk} \rangle^2, \quad (3.50)$$

donde \tilde{I}_{jk} es el cuadrupolo sin traza o momento cuadrupolar reducido definido por

$$\tilde{I}_{jk} \equiv \sum_{A=1}^N m_A \left[(x_A)_j (x_A)_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} (x_A)_i (x_A)^i \right], \quad (3.51)$$

y los brackets $\langle \rangle$ denotan promedio.

Una estimación a orden de magnitud del sistema de cuadrupolo está dada por [ref. (1)]

$$\ddot{\tilde{I}}_{jk} \sim \frac{MR^2}{\tau^3} \sim \frac{Mv^2}{\tau}, \quad (3.52)$$

de forma que

$$L_{mq} \sim \frac{G}{c^5} \frac{Mv^2}{\tau}, \quad (3.53)$$

donde M es la masa de la parte del sistema que se mueve, R es el tamaño del sistema, τ es el tiempo que le toma a la masa moverse desde un lado del sistema hasta el otro y $v \equiv R/\tau$.

Aunque muy simplificadas, las expresiones (3.52) y (3.53) contienen las piezas de información mas importantes acerca de la generación de ondas gravitacionales. La primera nos dice que la emisión energética a través de ondas gravitacionales está severamente suprimida por el factor $G/c^5 \sim 10^{-59}$, o dicho de otro modo, que la conversión de cualquier tipo de energía en ondas gravitacionales es muy ineficiente. La segunda tiene que ver con la variación temporal del cuadrupolo de masa, que puede volverse importante únicamente para masas grandes moviéndose a velocidades relativistas. Claramente estas condiciones no pueden ser alcanzadas por fuentes terrestres, pero son fácilmente encontradas en objetos compactos astrofísicos, estos ultimo la fuente mas prometedoras de ondas gravitacionales.

Capítulo 4

Inestabilidades y Colapso

Este capítulo está dedicado a la revisión de la física de un polítropo esferoidal comprimible con rotación no uniforme. Este es el caso que estudiaremos como candidato a tener una alta emisión de radiación gravitacional durante el colapso de un núcleo estelar.

El estudio de las oscilaciones de estrellas relativistas está motivado por la posible detección de tales oscilaciones en señales de ondas electromagnéticas o gravitacionales.

Al igual que los hoyos negros, las estrellas compactas pueden responder a perturbaciones y emitir radiación gravitacional. La radiación gravitacional proveniente de estrellas relativistas perturbadas es rica en detalles, muchos de los cuales contienen información física relevante acerca de la estructura interna de las estrellas emisoras, que puede ser usada para deducir propiedades de la materia que no pueden ser investigadas por experimentos en laboratorios terrestres.

A pesar de estas perspectivas, la detectabilidad de ondas gravitacionales de estrellas relativistas perturbadas aún no está bien estudiada. Esto debido a nuestra ignorancia acerca de las condiciones físicas precisas que conducen a una estrella relativista perturbada. Un ejemplo en este sentido es el de una protoestrella de neutrones formada después del colapso gravitacional en una explosión de supernova. Mientras se espera que la nueva estrella de neutrones pulse violentamente durante los primeros segundos después del colapso, la energía radiada a través de sus modos de oscilación es desconocida.

Actualmente solo podemos argumentar que: (1) la energía almacenada en la pulsación puede ser del mismo orden de magnitud que la energía cinética del sistema; (2) las oscilaciones serán amortiguadas principalmente a través de la emisión de ondas gravitacionales, así que la energía liberada puede ser considerable [ref. (9)].

En esta tesis consideraremos modelos estelares que suponen una relación politrópica entre la presión P y la densidad ρ dada por

$$P = K\rho^\Gamma = k\rho^{1+1/n}, \quad (4.1)$$

donde K es una función de la entropía, que consideraremos constante y Γ es el índice politrópico. Este modelo es muy simple y de gran importancia para la astrofísica.

4.1. Inestabilidades No-axisimétricas

Algunos de los modos no-axisimétricos de oscilación en estrellas rotantes pueden no estar amortiguados, sino tener amplitudes que crecen exponencialmente en el tiempo. Cuando este es el caso, se dice que las oscilaciones son inestables y la inestabilidad resultante puede ser o *dinámica*, si se desarrolla en una escala de tiempo dada por la rotación o por la caída libre, o bien *secular*, si se desarrolla en una escala de tiempo mucho más larga, dada por procesos disipativos.

Las inestabilidades dinámicas difieren considerablemente de las seculares en que las primeras son puramente hidrodinámicas, mientras que las segundas son iniciadas por procesos disipativos. En ambos casos, las inestabilidades reflejan el intento de la estrella rotante de encontrar un estado energético menor ya sea cambiando su distribución de masa (a través de variaciones del momento de inercia) o violando la conservación de alguna ley (como el momento angular)[ref. (10)]. Una cantidad que es usada para medir que tan cerca está la estrella rotante del inicio de una inestabilidad es el parámetro β

$$\beta \equiv \frac{T}{|W|}, \quad (4.2)$$

donde T es la energía cinética rotacional y W es la energía potencial.

La parametrización (4.2) es independiente de la ley de rotación y es especialmente útil para objetos con rotación diferencial.

4.2. Condiciones de estabilidad

Consideremos un fluido aislado autogravitante en estado estacionario. La entropía específica se asume constante a través del fluido. El sistema está especificado por cantidades globales conservadas tales como la masa M , la entropía S , el momento angular J y la circulación \mathcal{C} .

La energía total de tal sistema, no necesariamente en equilibrio, puede ser escrita como un funcional de los campos de densidad y velocidad $\rho(x)$ y $\mathbf{v}(x)$

$$E = E[\rho(x), \mathbf{v}(x); M, S, J, \dots]. \quad (4.3)$$

La configuración de equilibrio del sistema puede ser determinada al extremizar este funcional con respecto a todas las variaciones de $\rho(x)$ y $v(x)$ que dejan fijas las cantidades conservadas.

Una gran simplificación se logra si reemplazamos el número infinito de grados de libertad contenidos en $\rho(x)$ y $v(x)$ por un número limitado de parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, de manera que la energía total se vuelve una función de estos parámetros [ref. (10)].

$$E = E(\{\alpha_i\}; M, S, J). \quad (4.4)$$

Para sistemas suficientemente simples, usualmente es posible escribir directamente una expresión de este tipo para la energía, basados en un conjunto de suposiciones.

En general, la estabilidad requiere que una configuración de equilibrio corresponda a un verdadero mínimo de la energía total (4.4), esto es, que todos los eigenvalores de la matriz $(\partial^2 E / \partial \alpha_i \partial \alpha_j)_{eq}$ sean positivos. El principio de la inestabilidad a lo largo de una secuencia de un parámetro de configuraciones de equilibrio puede ser determinado por la condición

$$\det \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right)_{eq} = 0. \quad (4.5)$$

Cuando esta condición se satisface a lo largo de la secuencia, uno de los eigenvalores debe cambiar de signo. Entonces puede llegar a ser posible para el sistema minimizar aún más su energía evolucionando fuera de las condiciones de equilibrio consideradas. En el espacio de parámetros α_i , la evolución debe ser en la dirección del eigenvector asociado al eigenvalor responsable de la realización de la condición (4.5). Si la inestabilidad surge o no, depende de los mecanismos de disipación que preservan las leyes de conservación del modelo de equilibrio.

La condición (4.5) es una condición suficiente pero no necesaria para la inestabilidad [ref. (11)].

4.3. Inestabilidad secular vs. dinámica

Para estrellas con rotación uniforme, las cantidades conservadas que aparecen en la función de energía (4.3) son la masa M y momento angular J .

Las condiciones para el principio de una inestabilidad están basadas en la existencia de una configuración vecina con energía total menor. El sistema en equilibrio puede evolucionar a estas configuraciones si hay un mecanismo disipativo operando. Claramente la evolución tendrá lugar en la escala de tiempo de la disipación. Esta inestabilidad es secular.

Cuando la conservación de M , J y \mathcal{C} se construye en el modelo de equilibrio, las condiciones de estabilidad no pueden ser interpretadas en términos de una inestabilidad secular, pues ningún mecanismo físico realista de disipación es compatible con la conservación de las tres cantidades. Estas condiciones pueden indicar el comienzo de una inestabilidad dinámica. En efecto, la conservación de M , J y \mathcal{C} es una propiedad de las ecuaciones de movimiento Euler para un fluido ideal (sin disipación) [ref. (10)].

4.3.1. Esferoides e inestabilidad dinámica

Para llegar a una expresión del tipo (4.3) para la energía de un polítropo en rotación, hacemos dos suposiciones. Primero, suponemos que las superficies de densidad constante son elipsoides autosimilares. La geometría de la configuración está entonces completamente determinada por los tres ejes principales de la superficie externa, que denotamos por a_1 , a_2 y a_3 . Nuestra segunda suposición es que el perfil de densidad $\rho(m)$, donde m es la masa encerrada en una superficie de isodensidad, es idéntico al de un polítropo esférico de radio $R = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$, es decir, un polítropo esférico del mismo volumen que la configuración rotante.

La excentricidad e está definida por

$$e^2 \equiv 1 - \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2. \quad (4.6)$$

Esto es importante pues en esta tesis tratamos con el caso general de elipsoides compresibles en los que la rotación no es uniforme. Sin embargo nos restringimos al caso en que los movimientos internos del fluido tienen vorticidad paralela al eje de rotación. Para estas estrellas, también se conserva la circulación \mathcal{C} a lo largo del ecuador.

Un estudio detallado para esferoides comprimibles con $a_1 = a_2$ que conservan M , J y \mathcal{C} , es decir, dinámicamente inestables, está en [ref. (10)] y referencias ahí contenidas.

El resultado principal es que para que el comienzo de una inestabilidad dinámica ocurre en el punto donde $e = 0.9529$ y $T/|W| = 0.2738$, independiente de n en esta aproximación [ref. (10)].

4.4. Colapso Gravitacional

A groso modo, estrellas aisladas con masas de mayores a $\sim 8-10M_\odot$ terminan en el colapso del núcleo, y $\sim 90\%$ son estrellas con masas entre $\sim 8-20M_\odot$. Después de que el núcleo rebota, casi todo el material es expulsado, y si la estrella progenitora tiene una masa $M \leq 20M_\odot$, ésta deja una estrella de neutrones. Por otro lado, si $M \geq 20M_\odot$, la acreción de retraso incrementa la masa de la proto-estrella de neutrones llevándola más allá de su límite de masa lo que resulta en un hoyo negro. Más aún, si la estrella progenitora tiene una masa $M \geq 45M_\odot$, no hay explosión de supernova y la estrella se colapsa directo a un hoyo negro.

Este esquema está muy simplificado. En realidad la metalicidad del progenitor y el momento angular antes del colapso del núcleo tienen una influencia decisiva en el resultado del colapso. Estrellas muy masivas pierden masa mediante viento estelar fuerte. La pérdida de masa es sensible a la metalicidad de la estrella y puede ser muy grande, permitiendo a una estrella de $60M_\odot$ terminar como una estrella de neutrones típica de $1.4M_\odot$, en lugar de un hoyo negro mucho más masivo. Como la pérdida de masa es un fenómeno muy complejo, las observaciones recientes aún son insuficientes para restringir los diversos resultados de un colapso gravitacional para estrellas de más de $45M_\odot$.

La rotación tiene un influencia importante en el colapso, cambiando de manera dramática las propiedades de la región convectiva sobre el núcleo de la protoestrella de neutrones. Fuerzas centrífugas hacen la caída del material en la región ecuatorial más lenta que en el eje polar, produciendo un rebote más débil.

La mayoría de los mecanismos para emisión de ondas gravitacionales detectables de objetos compactos requieren una rotación alta al nacer (períodos de rotación de algunos milisegundos o menos). Como la mayoría de las estrellas masivas tienen tasas de rotación no despreciables, la sola conservación del momento angular sugeriría que una proto estrella de neutrones tiene una rotación fuertemente diferencial.

4.4.1. Emisión de Ondas Gravitacionales

Las ondas gravitacionales de colapso de núcleos tienen un rico espectro, reflejando los varios estados de este evento. La señal inicial es emitida debido al cambio en el momento cuadrupolar axisimétrico durante el colapso. En el caso de la formación de una estrella de neutrones, el momento cuadrupolar típicamente se vuelve mayor mientras el núcleo gira más rápido al contraerse. En contraste, cuando una estrella de neutrones gira rápidamente y se colapsa para formar un hoyo negro de Kerr, el momento cuadrupolar axisimétrico primero crece, pero al final es reducido cuando se forma el hoyo negro.

Una segunda parte de la señal de las ondas gravitacionales es producida cuando el colapso es detenido por la rigidez de la ecuación de estado por encima de las densidades nucleares y el núcleo rebota, conduciendo un choque saliente. El fluido denso sufre movimientos con velocidades relativistas, y una proto-estrella de neutrones con mucha rotación entonces vibra en varios de sus modos normales de oscilación axisimétricos. Esta parte cuasi-periódica de la oscilación puede durar por cientos de períodos de oscilación antes de ser amortiguada de manera efectiva. Si en cambio lo que se forma es un hoyo negro, entonces se excitan los modos cuasi-normales, durando únicamente por unos cuantos períodos de oscilación. Una combinación de oscilaciones de estrella de neutrones y hoyo negro aparecerá si la proto-estrella de neutrones no es estable sino que colapsa a un hoyo negro.

En una proto-estrella de neutrones con rotación, procesos no-axisimétricos pueden provocar tipos adicionales de señales gravitacionales. Tales procesos son inestabilidades dinámicas, inestabilidades seculares conducidas por ondas gravitacionales o convección en la región interior de la proto estrella de neutrones y envolvente.

Capítulo 5

Modelo Numérico

Para reproducir las condiciones estudiadas en el capítulo anterior, recurrimos a un método numérico ya que la búsqueda de una solución de ondas gravitacionales analítica a las ecuaciones de Einstein, aún en el caso mas simple discutido previamente, es una tarea prácticamente imposible de lograr.

Sólo mediante el uso de supercomputadoras es razonable pensar encontrar una solución a las ecuaciones completamente relativistas que describen un colapso tridimensional no-esférico.

En esta tesis, utilizamos un código que reproduce el colapso gravitacional de un núcleo estelar dados su masa, radio inicial, una ley de rotación acompañada de su velocidad angular inicial y una relación politrópica. En todos los cálculos solo nos referiremos a una relación politrópica definida por intervalos, es decir, con distinto índice politrópico en distintos rangos de densidad.

El código que usamos esta basado en una técnica *soft Particle Hydrodynamics* (SPH) que, hace interactuar un número N de partículas suavizadas, es decir, no son partículas puntuales sino con un ancho definido por una gaussiana que se corta a cierta distancia del centro de masa de la partícula. Una revisión detallada del código puede encontrarse en [ref. (16),(17)].

5.1. SPH

La técnica numérica SPH es un método Lagrangiano donde las fuerzas son evaluadas por interpolación entre puntos moviéndose con el fluido, que consideramos como partículas. Las ventajas principales son que no se necesitan suposiciones a priori acerca de la naturaleza del flujo que será estudiado y que no se pierde esfuerzo computacional en

modelar regiones que carecen de materia. Esto es particularmente útil cuando se modelan complicados flujos astrofísicos en tres dimensiones.

A continuación describiré brevemente el código SPH desarrollado por el Dr. William Lee probado de manera exitosa en tres dimensiones en diversos problemas astrofísicos.

5.1.1. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento son esencialmente las del problema de N cuerpos asociando a cada partícula con un elemento del fluido. Las partículas pueden pensarse como elementos de fluido con simetría esférica con un perfil de densidad gaussiano. Las interacciones hidrodinámicas entre los elementos del fluido dependen del traslape entre partículas adyacentes. Entonces, las ecuaciones para la i -ésima partícula se escriben

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{v}_i \\ m\dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{F}_{iG} + \mathbf{F}_{iH} \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i y m_i son la posición, velocidad y masa de la i -ésima partícula, y \mathbf{F}_{iG} y \mathbf{F}_{iH} denotan las fuerzas gravitacional e hidrodinámica. La densidad en la posición de la i -ésima partícula está calculada de acuerdo a

$$\rho_i \equiv \rho(\mathbf{r}_i) = \sum_j m_j W_{ij} \quad (5.2)$$

donde W_{ij} es el kernel simetrizado, que da el perfil gaussiano para cada partícula, i y j . La longitud de suavizado h_i esencialmente representa el ancho del elemento de fluido para la partícula i , y tenemos

$$W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h_{ij}), \quad h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j). \quad (5.3)$$

Es claro que el cálculo de la densidad simplemente toma en cuenta el traslape entre los kernels de partículas individuales y los suma en un punto dado. Esta es la idea general de SPH, y una suma similar aparecerá por cada cantidad interpolada. En general, para una función $A(\mathbf{r})$, el valor interpolado en la posición de la partícula i estará dado por

$$A_i = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W_{ij}. \quad (5.4)$$

El término \mathbf{F}_{iH} incluye la contribución del gradiente de la presión y de una viscosidad artificial. En forma simetrizada se escribe como

$$\mathbf{F}_{iH} = - \sum_j m_j m_i \left(2 \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla_i \mathbf{W}_{ij}, \quad (5.5)$$

donde

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \bar{\rho}_{ij}, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > \mathbf{0} \end{cases},$$

$$\mu_{ij} = \frac{h_{ij}(\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2 + \eta^2 h_{ij}^2}.$$

Aquí $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, c_i es la velocidad del sonido en la posición de la i -ésima partícula, α y β son constantes, $\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$ y $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$.

La forma de \mathbf{F}_{ih} , y en particular de la simetrización del gradiente de la presión, asegura que las fuerzas entre pares de partículas sean simétricas, y por tanto centrales, con lo cual se conserva de manera automática el momento angular.

El valor u_i de la energía térmica por unidad de masa, evoluciona de acuerdo a la primera ley de la termodinámica, tomado en cuenta la contribución de los términos viscosos.

5.2. Relación Politrópica

Examinamos un conjunto de condiciones iniciales utilizando un modelo simplificado, con una ecuación de estado que desprecia todos los efectos de transporte.

Aproximamos el colapso del núcleo con un polítopo en rotación. Dividimos la relación (4.1) en tres partes a intervalos distintos en la densidad,

$$P = \begin{cases} K_1 \rho^{\Gamma_1} & \rho < \rho_1 \\ K_2 \rho^{\Gamma_2} & \rho_1 \leq \rho < \rho_2 \\ K_3 \rho^{\Gamma_3} & \rho > \rho_2 \end{cases}, \quad (5.6)$$

donde K_i son constantes definidas para garantizar la continuidad de la relación (4.1) y Γ_i son los índices politrópicos mostrados en la tabla (6.1), en los que se pasa de una relación politrópica suave a una

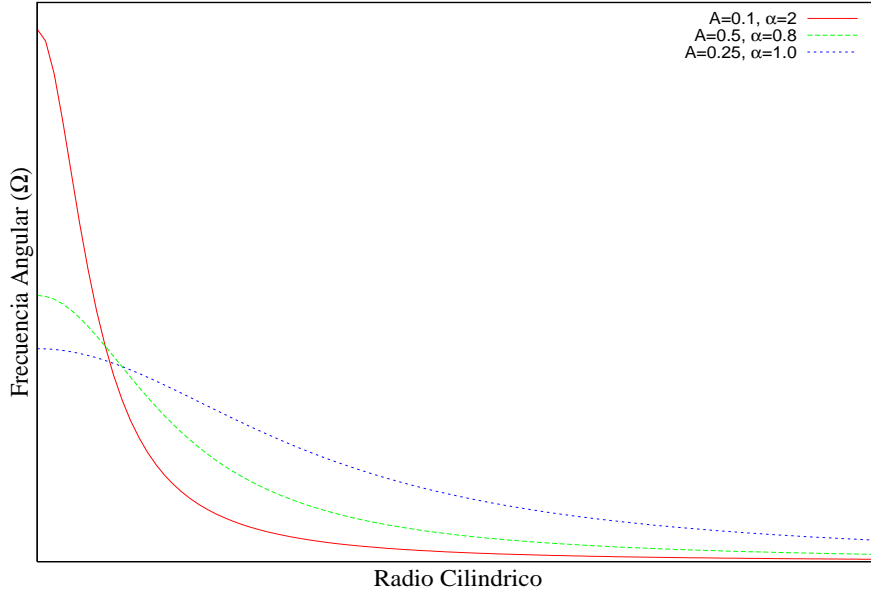


Figura 5.1: Curvas de la ley de rotación para α fija y distintos valores del parámetro de rotación diferencial A

mas *dura* cuando el núcleo alcanza una densidad crítica ρ_2 . Este endurecimiento de la relación politrópica puede provocar un rebote que hará evolucionar el colapso hasta alcanzar una menor densidad $\rho < \rho_2$ en los que nuevamente se pierde la rigidez.

5.3. Ley de Rotación

Todas las simulaciones rotan de acuerdo a la ley de rotación propuesta por Eriguchi & Muller, [ref. (12)]

$$\Omega(\tilde{\omega}) = \Omega_0 \left[1 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{A_{diff}} \right)^2 \right]^{-1}, \quad A_{diff} = A \times R, \quad (5.7)$$

donde $\tilde{\omega}$ es la distancia al eje de rotación, A es un parámetro libre independiente que determina la distribución inicial de momento angular [figura (5.1)] y R es el radio inicial de la estrella. Para $A \rightarrow \infty$ tenemos un cuerpo rígido y para $A \rightarrow 0$ se tienen modelos con una rotación diferencial fuerte. La constante Ω_0 es la velocidad angular en términos del tiempo de caída libre T_{ff}

$$\Omega_0 = \alpha T_{ff}^{-1}, \quad T_{ff} = \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.8)$$

En este punto cabe señalar que debido a la consevación de momento angular, el rebote del núcleo mencionado en la sección anterior puede darse sólo por la rotación inicial, en cuyo caso, éste nunca alcanzaría la densidad crítica para endurecer la relación politrópica.

5.4. Señal de Ondas Gravitacionales

La señal de ondas gravitacionales se calcula utilizando una aproximación post-newtoniana donde algunas derivadas temporales de orden superior en el momento cuadrupolar han sido transformadas en derivadas espaciales mucho más fáciles de calcular numéricamente. En particular, el campo de radiación cuadrupolar h^{TT} , es calculado con una expresión derivada de manera independiente por Nakamura & Oohara [ref. (14)] y Blanchet, et. al. [ref. (15)]

$$h_{ij}^{TT}(\mathbf{X}, t) = \frac{2G}{c^4 R} P_{ijkl}(N) \times \int d^3x \rho (2v^k v^l - x^k \partial_l \Phi - x^l \partial_k \Phi), \quad (5.9)$$

donde $R = |\mathbf{X}|$ es la distancia entre el observador y la fuente, Φ es el potencial gravitacional Newtoniano, ρ es la densidad de masa y v es la velocidad. Las otras cantidades tienen su sentido usual excepto por $P_{ijkl}(N)$ (con $N = \mathbf{X}/R$) que denota el TT-operador de proyección sobre el plano ortogonal a la dirección de propagación (N) de la onda saliente, actuando sobre tensores cartesianos simétricos de acuerdo a

$$P_{ijkl}(N) = (\delta_{ik} - N_i N_k)(\delta_{jl} - N_j N_l) - \frac{1}{2}(\delta_{ij} - N_i N_j)(\delta_{kl} - N_k N_l). \quad (5.10)$$

Para simulaciones axisimétricas, que son mejor expresadas en coordenadas esféricas, es natural representar el campo total de radiación \tilde{h}^{TT} en términos de los armónicos tensoriales $T_{ij}^{E2,lm}$ y $T_{ij}^{B2,lm}$ con amplitudes A_{lm}^{E2} y A_{lm}^{B2} de la siguiente manera [ref. (12)]

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{X}, t) = & \frac{1}{R} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-1}^{+1} \{ A_{lm}^{E2} \left(t - \frac{R}{c} \right) T_{ij}^{E2,lm}(\theta, \phi) + \\ & A_{lm}^{B2} \left(t - \frac{R}{c} \right) T_{ij}^{B2,lm}(\theta, \phi) \}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En coordenadas esféricas los términos A_{lm}^{E2} y A_{lm}^{B2} tienen una representación integral bastante simple sobre la fuente. Por simetría, únicamente hay un término cuadrupolar no nulo en la ecuación (5.11), A_{20}^{E2} . Los términos de orden superior son despreciados en la aproximación cuadrupolar h^{TT} del campo de radiación gravitacional \tilde{h}^{TT} . Transformando la ecuación (5.9) a coordenadas esféricas y expresando las v^i en términos de vectores unitarios en las direcciones r , θ y ϕ uno obtiene, comparando términos en la ecuación (5.9) con el orden más bajo de la ecuación (5.11) la siguiente expresión para la amplitud del cuadrupolo de masa

$$\begin{aligned} A_{20}^{E2}(t) = & \frac{G}{c^4} \frac{16\pi^{3/2}}{\sqrt{15}} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r, z, t) [v_r v_r (3z^2 - 1) + \\ & v_\theta v_\theta (2 - 3z^2) - v_\phi v_\phi - 6v_r v_\theta z \sqrt{1 - z^2} - \\ & r \partial_r \Phi (3z^2 - 1) + 3 \partial_\theta \Phi z \sqrt{1 - z^2}] r^2 dr dz, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde $z = \cos \theta$.

A partir de la definición de $T_{ij}^{E2,2m}$ [ref.(12)] se derivan las componentes de h^{TT}

$$h_{\theta\theta}^{TT} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{\pi}} \sin^2 \theta \frac{A_{20}^{E2}(t)}{R} \equiv h_+. \quad (5.13)$$

La única componente no nula aparte de (5.13) es $h_{\phi\phi}^{TT} = -h_{\theta\theta}^{TT}$. Notamos que debido a la hipótesis de (i) simetría axial y (ii) de gravedad Newtoniana, $h_{\theta\theta}^{TT} = h_+$ y $h_{\phi\phi}^{TT} = -h_+$, donde h_+ y h_\times son las amplitudes de onda correspondientes a las dos polarizaciones independientes del campo de radiación gravitacional [ref.(12)].

La energía total radiada en forma de ondas gravitacionales esta dada por

$$E_{GW} = \frac{c^3}{G} \frac{1}{32\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{dA_{20}^{E2}}{dt} \right)^2 dt. \quad (5.14)$$

La energía radiada por unidad de frecuencia $dE/d\nu$ se calcula a partir de la amplitud A_{20}^{E2} usando la transformada de Fourier dada por

$$\frac{dE(\nu)}{d\nu} = \frac{c^3}{G} \frac{1}{16\pi} \nu^2 |\tilde{A}_{20}^{E2}(\nu)|^2, \quad (5.15)$$

donde

$$\tilde{A}_{20}^{E2}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A_{20}^{E2}(t) e^{i\nu t} dt \quad (5.16)$$

es la transformada de la amplitud cuadrupolar. La energía total radiada (cuadrupolar) en forma de ondas gravitacionales está dada entonces por

$$E_{GW} = \int_0^\infty \frac{dE}{d\nu} d\nu. \quad (5.17)$$

Este valor debe ser idéntico al valor obtenido en (5.14), donde la integración es sobre el tiempo.

5.5. Estructura del Código

Los cálculos realizados son simulaciones hidrodinámicas tridimensionales completas. Los umbrales de densidad y los índices politrópicos son característicos, y las constantes K_i en la relación politrópica están fijas para garantizar continuidad. Para todos los cálculos utilizamos el mismo radio y masa por lo que únicamente tenemos dos parámetros libres, α y A .

Todos los cálculos son realizados para una estrella de $100M_\odot$ y radio 10^7 m.

Para reproducir el colapso, el código esta dividido en cuatro pasos.

5.5.1. Profile

Este programa toma los valores iniciales para la masa y radio inicial de la estrella introducidos al inicio de esta sección y hace una malla cúbica con un número de puntos

$$N_{points} = N_{rad}^3 + 1, \quad (5.18)$$

donde la variable de entrada N_{rad} es el lado del cubo. Luego se redondean las esquinas para lograr una primera aproximación esférica (fig.5.2) y finalmente construye un perfil de densidad para el núcleo (fig. 5.3).

5.5.2. Relax

La segunda parte del código usa las condiciones iniciales construídas en *profile*, y las relaja con un término de amortiguamiento artificial proporcional a la velocidad en las ecuaciones de movimiento, para eliminar ruido numérico. También se incluye un término centrífugo para

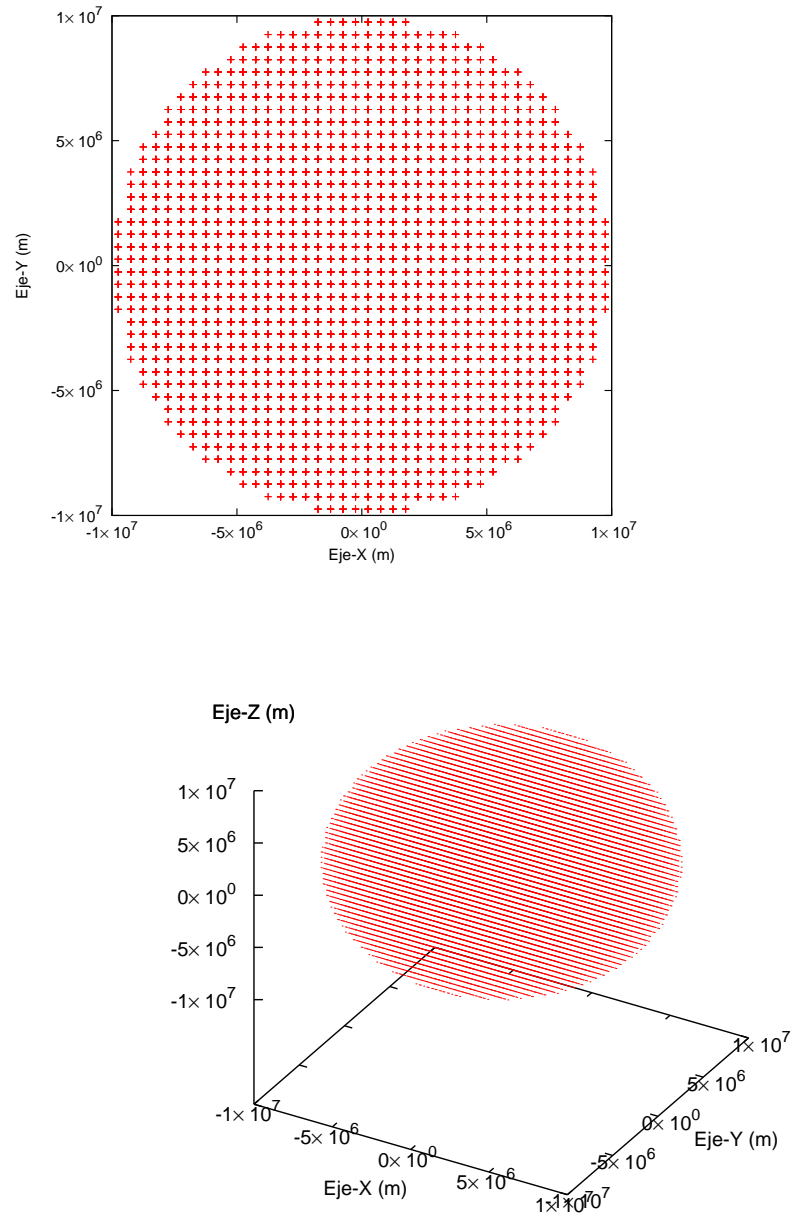


Figura 5.2: Distribución de partículas que conforman el núcleo de la estrella.

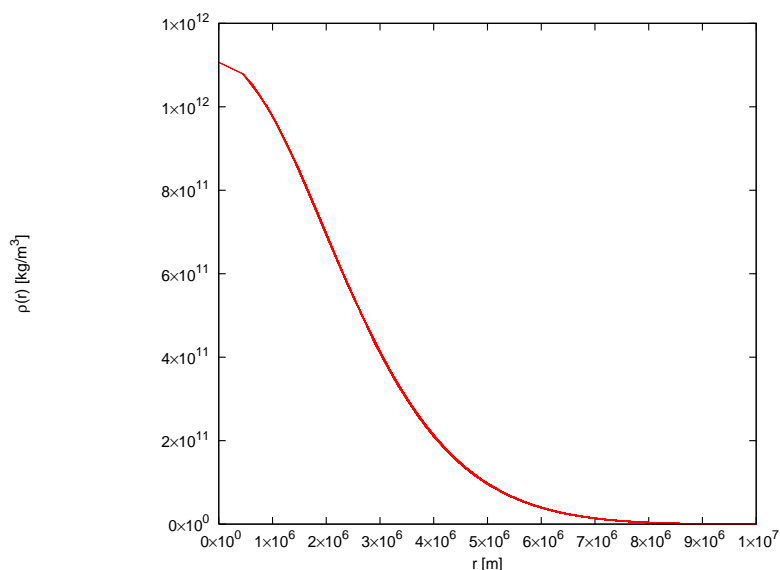


Figura 5.3: Perfil de densidad inicial.

lograr las condiciones iniciales en las que la rotación ha sido tomada en cuenta.

Este es un cálculo hidrodinámico completo que usa SPH con el fin de lograr una mejor aproximación a un polítopo rotante homogéneo a punto de colapsar (figura 5.5).

5.5.3. Singleinit

Este programa evoluciona el sistema un paso, sin mover las partículas. Esencialmente calcula las fuerzas que siente cada elemento de gas, y lo guarda. Será parte de la condición inicial para el paso que sigue.

5.5.4. Collapse

Este es el programa principal, toma las condiciones iniciales de *singleinit* y las evoluciona con la relación politrópica (5.6) y la ley de rotación (5.7). El paso de tiempo es controlado de manera dinámica, y toma *fotos* en momentos determinados por el código mismo. Monitorea punto a punto posiciones, velocidades, energía, densidad, presión, energía cinética (T), energía potencial (W), momento angular, y amplitud de las ondas gravitacionales.

En lo que sigue mostraremos los resultados obtenidos de tres series de simulaciones para distintos parámetros iniciales.

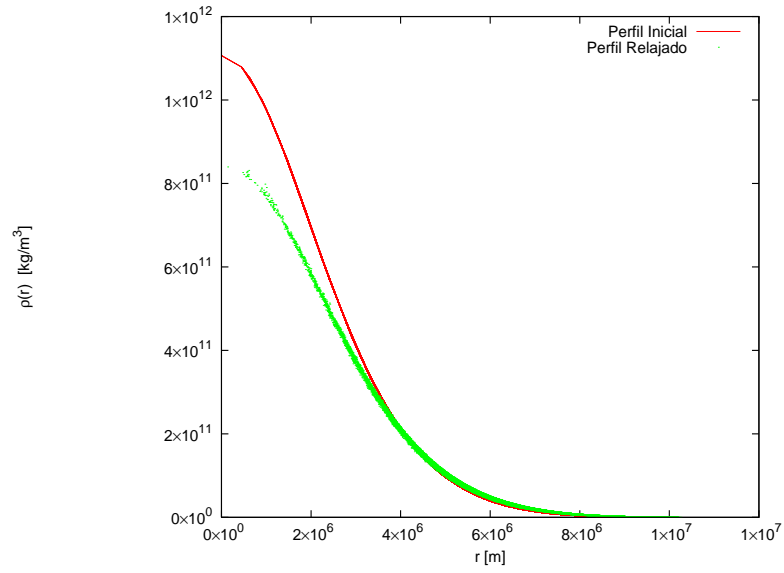


Figura 5.4: Perfil de densidad relajado.

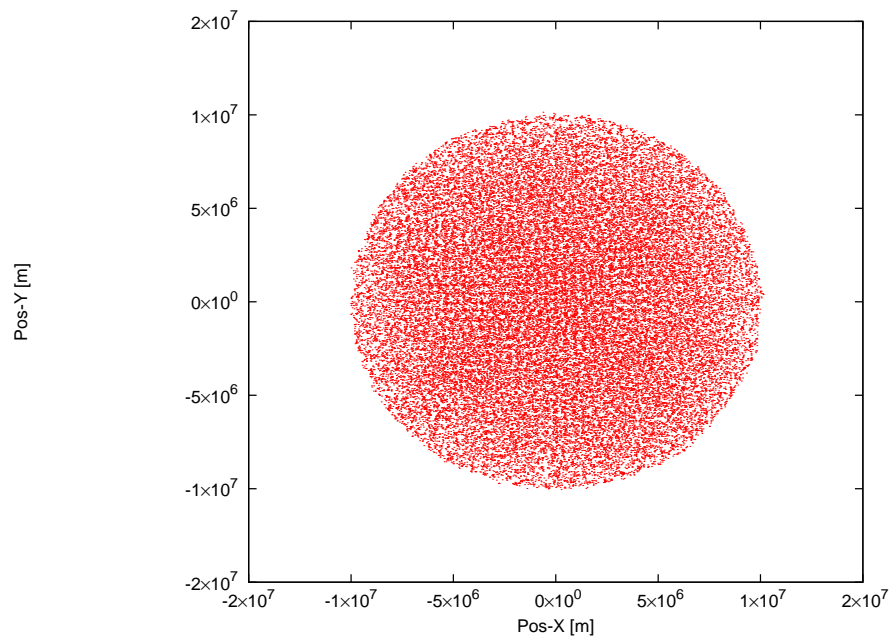


Figura 5.5: Distribución de las partículas que conforman el núcleo de la estrella después del relajamiento.

Capítulo 6

Resultados y Discusión

Para inducir numéricamente el colapso, tomamos la ecuación de estado (5.6) y asignamos los valores para los distintos índices politrópicos y fijamos los umbrales de densidad como se muestra en la tabla (6.1).

Escogemos un índice politrópico inicial bajo para que la estrella evolucione conducida principalmente por fuerzas gravitacionales y así garantizar el colapso.

Fijamos el segundo umbral de densidad antes de que el núcleo alcance la densidad nuclear, cambiando abruptamente el índice politrópico endureciendo la ecuación de estado, que junto con la rotación, si las condiciones iniciales no son demasiado extremas, garantizará al menos un rebote en el que se espera ocurra la mayor emisión de ondas.

6.1. Interpretación General

Los resultados de esta sección fueron tomados de la corrida cuyos valores para los parámetros de la ley de rotación (5.7) son: $A = 0,1$ y $\alpha = 2,0$.

Las figuras (6.1) y (6.2) muestran el campo de velocidades del colapso desde $t = 0$ seg. hasta el tiempo de rebote $t = t_r$, definido en esta tesis como el tiempo en el que se alcanza la densidad máxima, en

i	$\rho [kg/m^3]$	Γ_i	K_i
1	$0 - 2 \times 10^{11}$	1.4	1.4062×10^{10}
2	$2 \times 10^{11} - 5 \times 10^{15}$	1.3	1.8973×10^{11}
3	$5 \times 10^{15} - \infty$	1.6	332556.714

Cuadro 6.1: Valores para la relación politrópica.

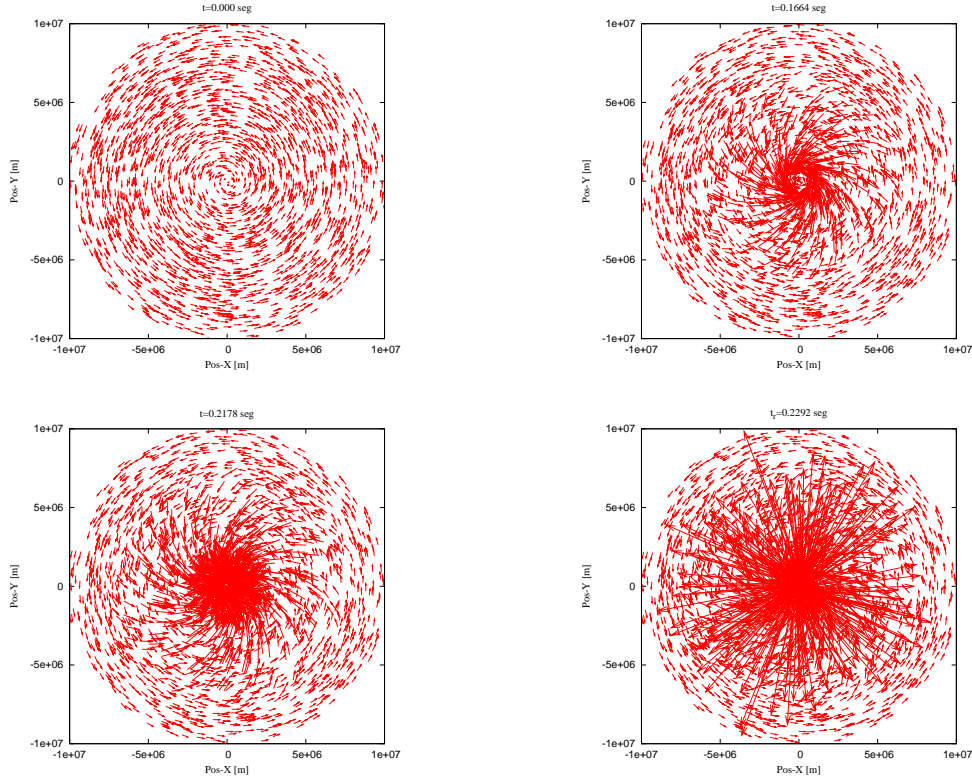


Figura 6.1: Secuencia temporal para el campo de velocidades sobre el plano de rotación de la estrella

los planos de rotación y axial. En las vistas sobre el plano de rotación se aprecia de manera clara la rotación inicial y como evoluciona hasta acabar en un violento rebote, mientras que en las vistas sobre el plano axial se aprecia que el rebote se produce con más violencia sobre el plano de rotación. también se puede apreciar la conservación de la circulación \mathcal{C} a lo largo del ecuador.

Lo anterior se puede ver también en la distribución de partículas, figura (6.3, que muestra un acercamiento a la región central del núcleo donde es visible la deformación sobre el plano de rotación.

Las figuras (6.5) y (6.6) muestran una secuencia temporal de las simulaciones para el perfil de densidad en donde se muestra el incremento de hasta cinco ordenes de magnitud entre el tiempo $t_0 = 0,00\text{seg}$ y el tiempo de rebote t_r . En la figura (6.6) se puede apreciar además que en efecto, los contornos de isodensidad se deforman en elipsoides.

Las figuras (6.7) y (6.8) forman también un par de secuencias temporales para la emisión de ondas gravitacionales en la región central

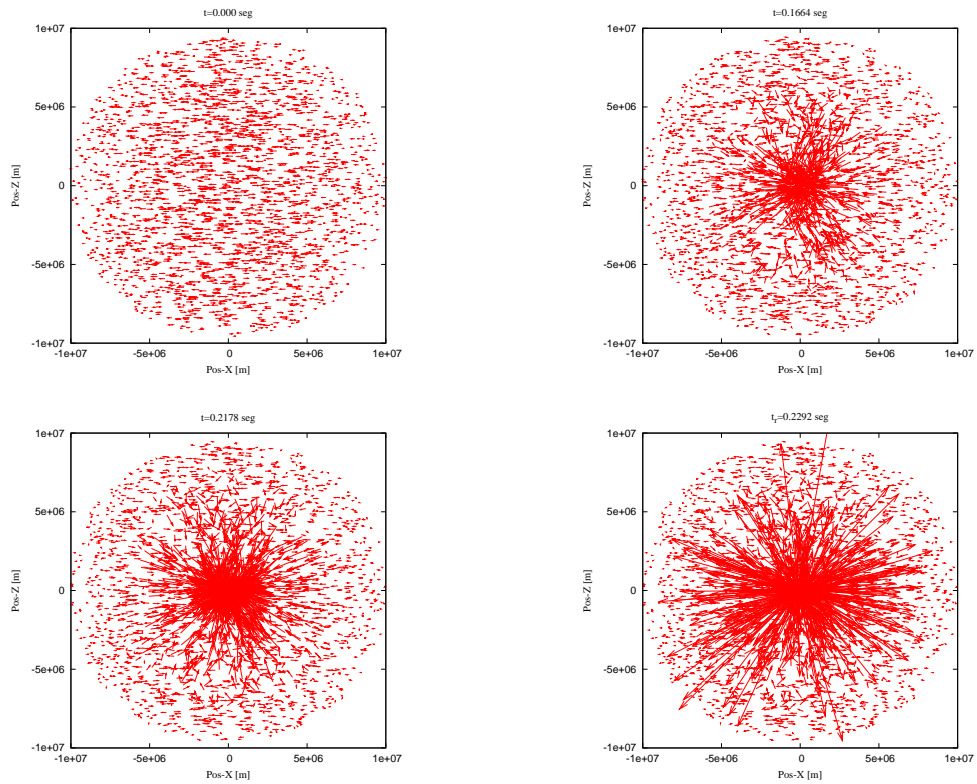


Figura 6.2: Secuencia temporal para el campo de velocidades en el plano paralelo al eje de rotación de la estrella

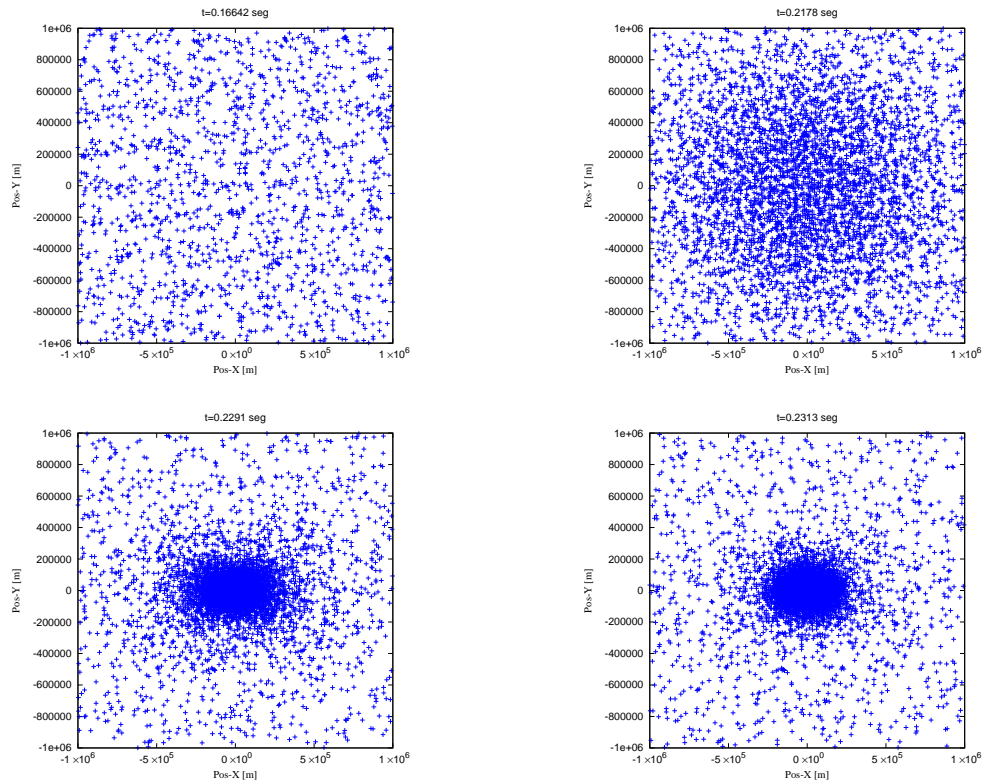


Figura 6.3: Acercamiento sobre el plano paralelo al eje de rotación para una secuencia temporal del colapso.

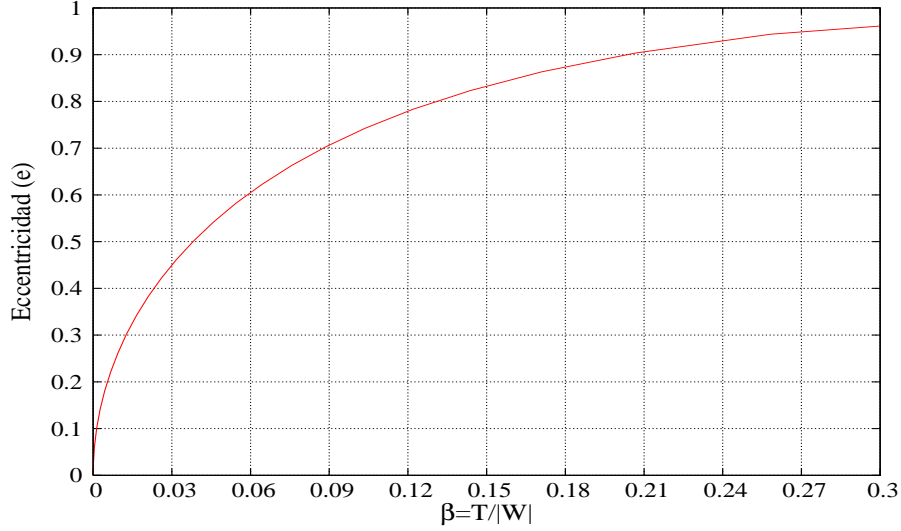


Figura 6.4: Función inversa de la ecuación (6.1)

del núcleo con un radio de 10^6 m en los planos de rotación y axial respectivamente. La secuencia también va desde $t = 0,00$ seg. hasta t_r .

La definición del tiempo de rebote t_r tiene sentido si observamos la figura (6.14).

Para esta corrida, vemos que el núcleo alcanza y pasa la densidad umbral ρ_2 en la que se cambia el índice poltrópico, endureciendo la relación politrópica, seguido de varios rebotes a densidades cada vez mas altas hacia el final del tiempo simulado.

En la figura (6.18) podemos ver que el pico máximo de la emisión de ondas no corresponde con el tiempo de rebote, sino con el tiempo en el que se alcanza el valor máximo de β . Esto debido a que si pensamos al núcleo como un elipsoide, las configuraciones con β mas alta corresponden a configuraciones con excentricidad e [ec. (4.6)] mayor siguiendo la relación [ref. (10)]

$$\frac{T}{|W|} = \frac{3}{2e^2} \left(1 - \frac{e(1 - e^2)^{1/2}}{\sin^{-1} e} \right) - 1, \quad (6.1)$$

esta función es invertible en el dominio $(0, 1)$. La figura (6.4) muestra la excentricidad como función de β .

De la figura (6.4) y las ecuaciones (3.50) - (3.51), se puede entender la diferencia en tamaño entre la amplitud máxima y el tren de ondas que le sigue, que corresponden a una configuración menos excéntrica del núcleo.

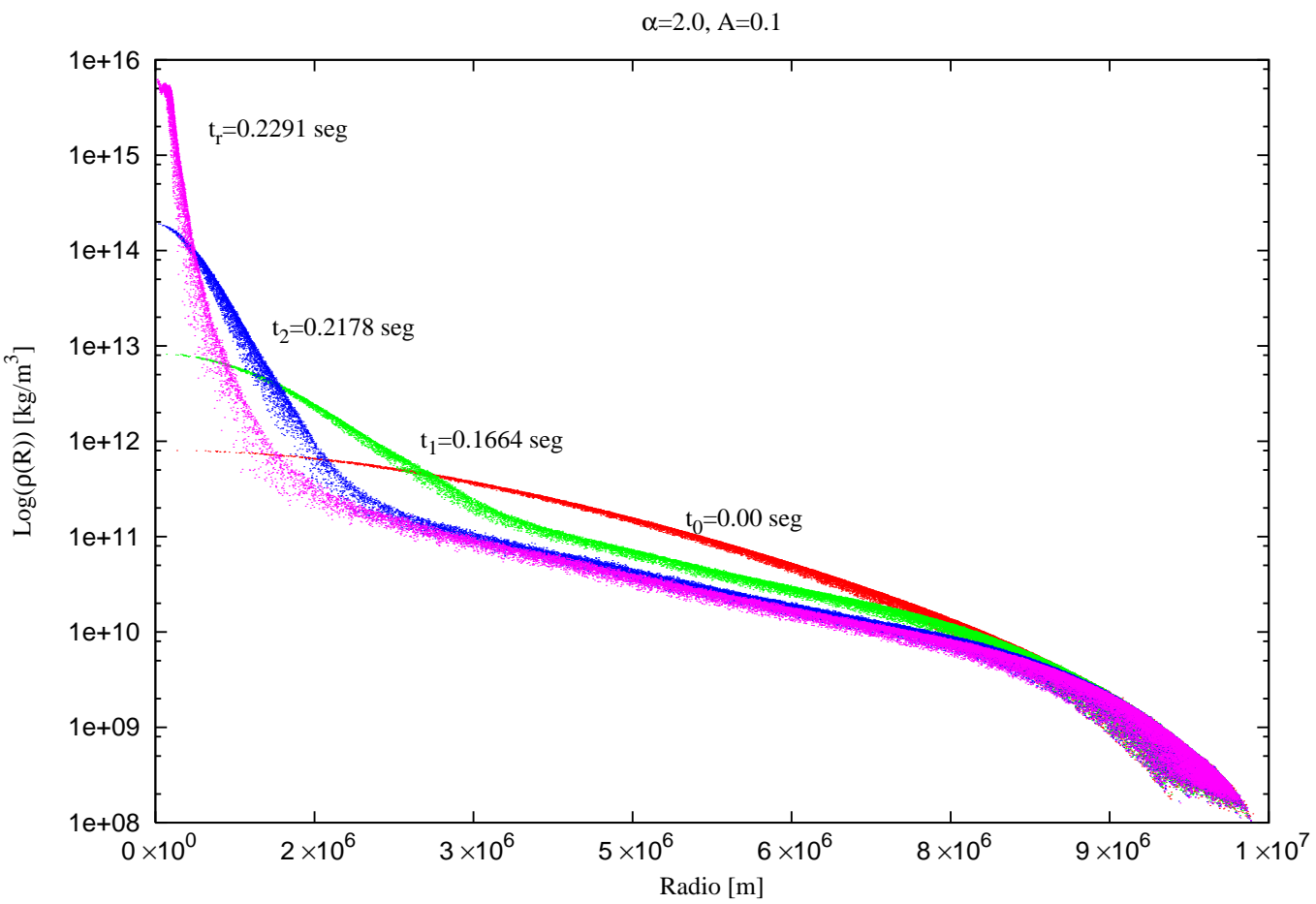


Figura 6.5: Secuencia temporal para el perfil de densidad desde t_0 hasta t_r para los valores $A = 0,1$ y $\alpha = 2,0$.

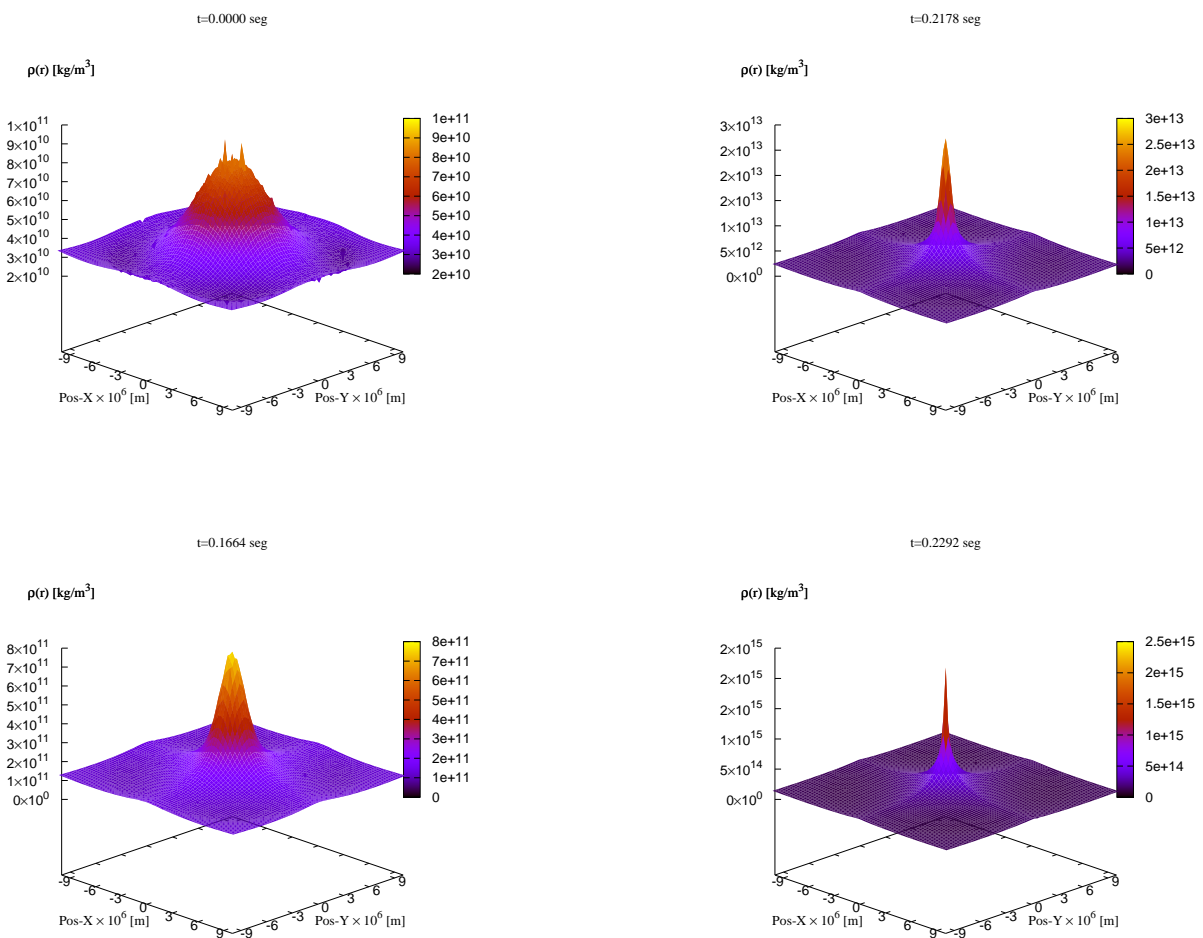


Figura 6.6: Secuencia temporal para la densidad sobre el plano de rotación del núcleo para los valores $A = 0,1$ y $\alpha = 2,0$

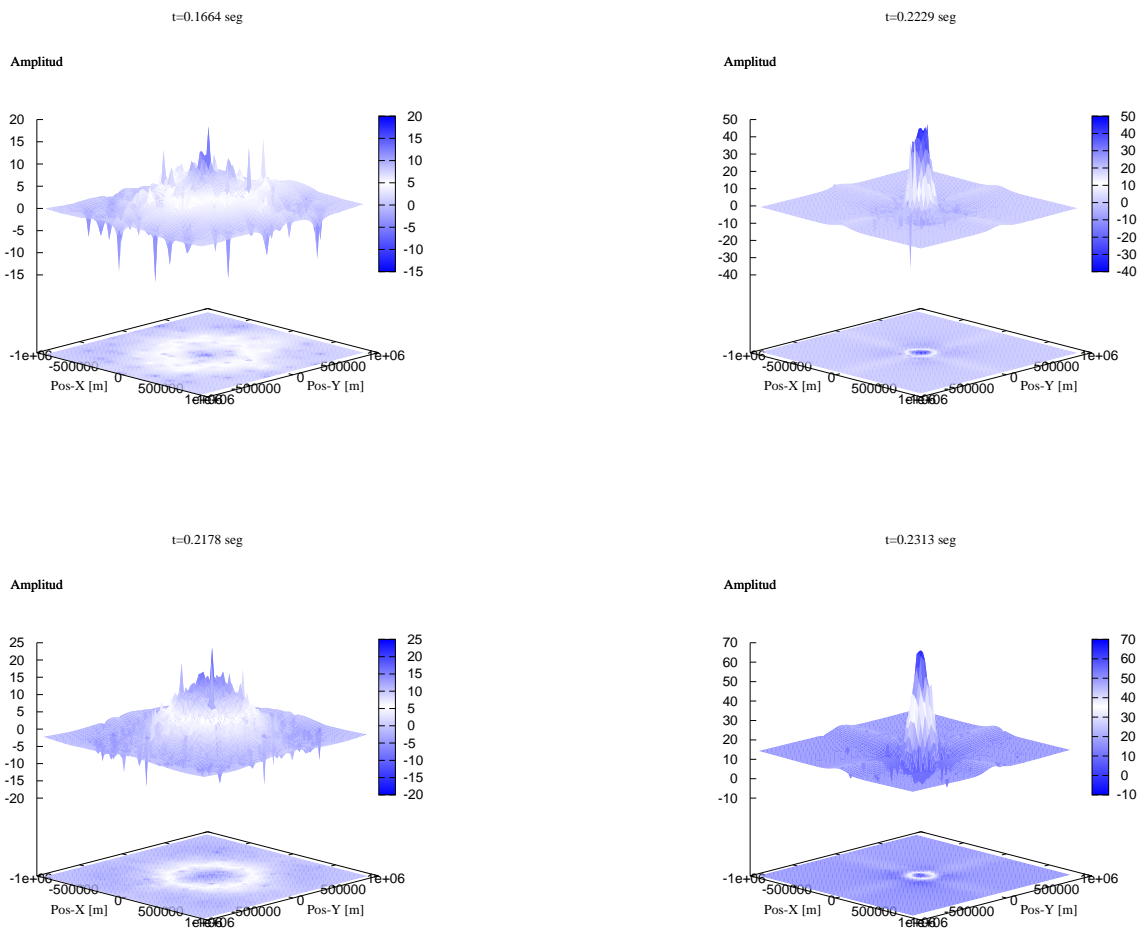


Figura 6.7: Secuencia temporal para la emisión de ondas gravitacionales sobre el plano de rotación del núcleo para los valores $A = 0, 1$ y $\alpha = 2, 0$

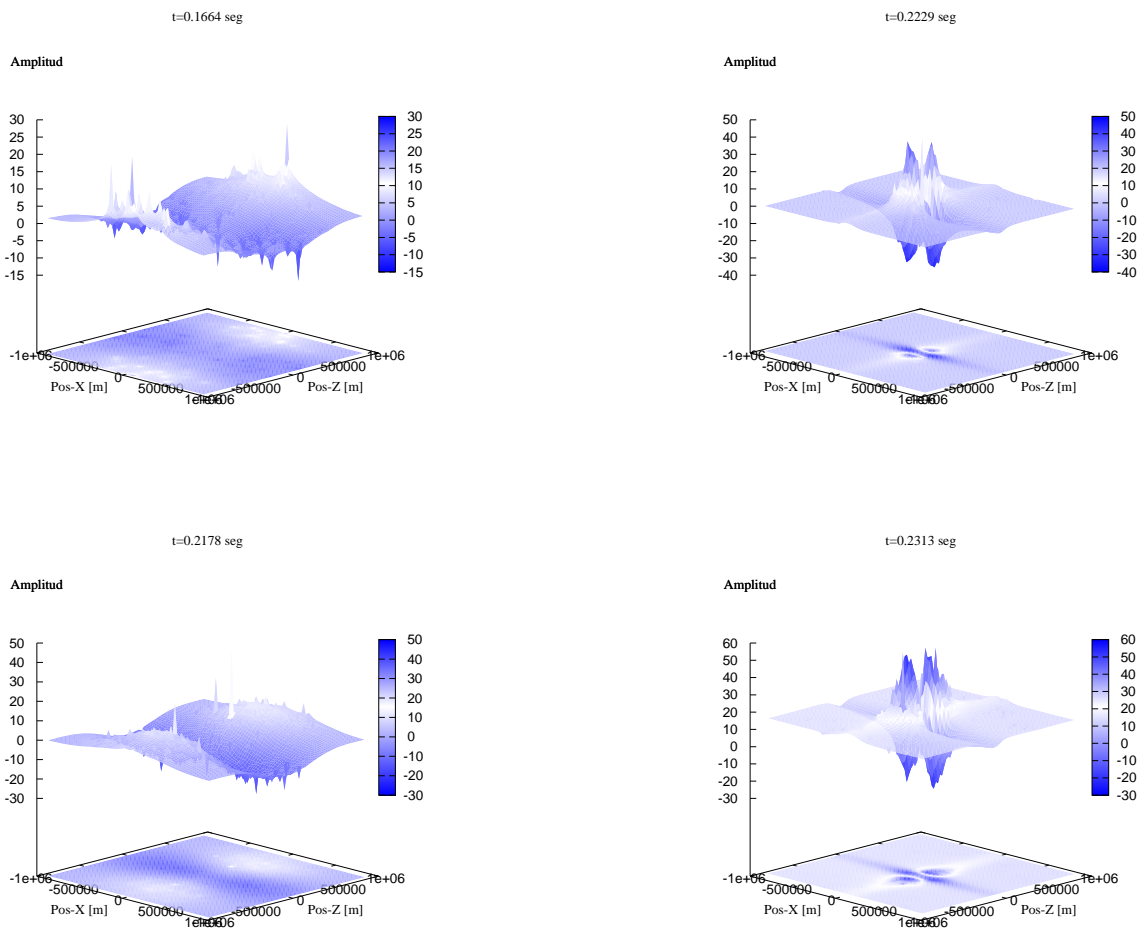


Figura 6.8: Secuencia temporal para la emisión de ondas gravitacionales sobre el plano paralelo al eje de rotación del núcleo para los valores $A = 0,1$ y $\alpha = 2,0$

6.2. Resultados con baja resolución

Realizamos tres series de corridas a resolución baja con el fin de caracterizar la dependencia de la emisión de las ondas en los parámetros iniciales de la ley de rotación.

Verificamos que las condiciones del Capítulo 4 se satisfacen, ie. todos nuestros cálculos conservan momento angular J y la masa M se conserva salvo pérdidas de partículas en la malla post-rebote. Esto sugiere que la evolución del núcleo fue conducida por inestabilidades dinámicas.

Para tener una mejor descripción de nuestros modelos, tomamos las configuraciones que evolucionan a un estado de energía total menor mediante la emisión de una mayor cantidad de ondas gravitacionales. Hacemos una nueva serie de simulaciones con una resolución que permita garantizar de manera efectiva la conservación de M , J y \mathcal{E} . Debido a la diferencia en el tiempo simulado, tomamos los modelos para los cuales el pico principal de emisión es mayor pues éstas son las configuraciones que alcanzan una mayor excentricidad después del tiempo de rebote.

Los resultados para las tres series de simulaciones con resolución de $N_{points} = 15000$ están resumidos en la tabla 6.2, en los que se cambia la rigidez en la rotación variando los valores del parámetro A , y regulando la frecuencia angular con una secuencia de valores para el parámetro α de la ley de rotación (5.7).

La figura (6.9) muestra una salida típica para la amplitud A_{20}^{E2} de las ondas como función del tiempo para la elección de parámetros $A = 0,1$, $\alpha = 2,0$.

En las figuras (6.10)-(6.12) se muestran los resultados para la amplitud A_{20}^{E2} de cada serie como función del tiempo, cuya envolvente nos permitió seleccionar los parámetros iniciales en la ley de rotación.

La gráfica (6.13) muestra una curva en el espacio de parámetros (A, α) a lo largo de la cual la emisión de ondas gravitacionales es máxima.

6.3. Emisión vs. ρ

Tomando los valores de los parámetros A y α para los cuales la emisión de ondas fue mayor, realizamos tres simulaciones con $N_{points} = 50000$ partículas.

Las figuras (6.14)-(6.16) muestran la correspondencia entre el tiem-

A	α	t_{max} [seg]	t_r [seg]	$\rho_{max} \times 10^{15}$ [kg/m ³]	$E_{GW} \times 10^{46}$ [Joules]	E_{GW}/Mc^2
0.1	0.0	0.26494	0.19250	14.0938	2.84579	0.0015927
	0.5	0.26932	0.19463	9.8773	2.77751	0.0015545
	1.0	0.27559	0.20069	10.1439	2.97027	0.0016624
	1.5	0.29274	0.21533	7.0046	5.62269	0.0031469
	2.0	0.32381	0.28606	6.9924	5.76166	0.0032247
	2.25	0.35121	0.31386	6.0707	3.15580	0.0017662
	2.5	0.40267	0.36775	5.7952	1.36181	0.0007621
	2.75	0.49789	0.48778	5.7889	0.77766	0.0004352
	3.0	0.76333	0.75412	3.3009	0.14444	0.0000808
0.25	0.0	0.26494	0.19250	14.0938	2.84579	0.0015927
	0.5	0.27306	0.19922	9.4229	3.40176	0.0019039
	0.75	0.28571	0.20995	7.5308	4.68930	0.0026245
	1.0	0.31404	0.23209	6.7331	6.04203	0.0033816
	1.15	0.33232	0.24923	6.2733	4.37920	0.0024509
	1.25	0.36713	0.31828	5.9761	1.92192	0.0010756
	1.3	0.38069	0.34911	5.8675	1.20902	0.0006766
	1.5	0.61234	0.60711	4.9573	0.20040	0.0001121
0.5	0.0	0.26494	0.19250	14.0938	2.84579	0.0015927
	0.25	0.26841	0.19577	11.1847	3.51860	0.0019693
	0.5	0.28351	0.20819	9.1226	3.59416	0.0020115
	0.75	0.31901	0.24099	7.6996	5.17060	0.0028939
	0.8	0.33518	0.25254	6.3561	4.58372	0.0025654
	0.9	0.37190	0.32772	5.6904	1.49106	0.0008345
	0.95	0.42125	0.38542	6.0694	0.72095	0.0004035
	1.0	0.54499	0.52817	5.7933	0.43651	0.0002443
	1.05	0.98482	0.96908	1.7680	0.05040	0.0000282

Cuadro 6.2: Resultados para las tres series de simulaciones. t_{max} es el tiempo simulado, t_r es el tiempo de rebote y ρ_{max} es la densidad máxima alcanzada.

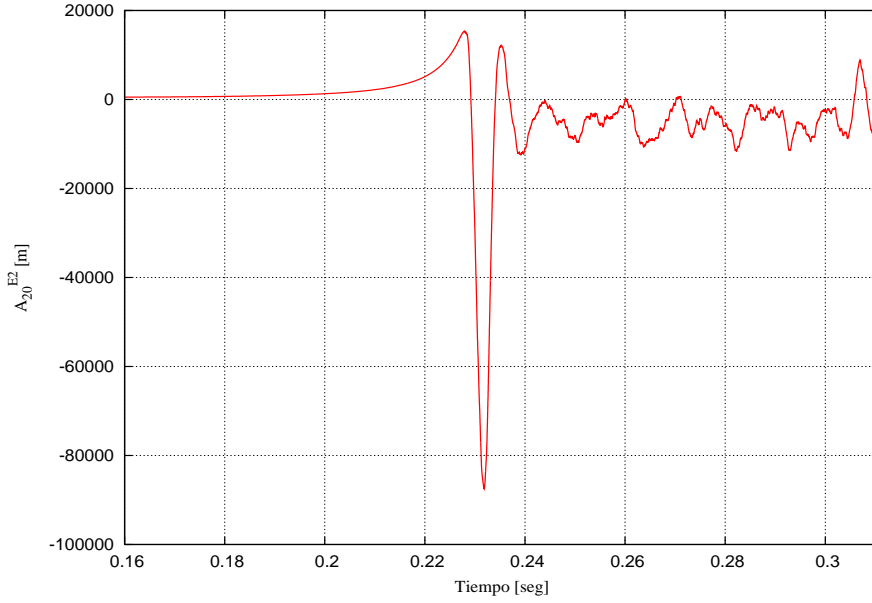


Figura 6.9: Salida típica de $A_{20}^{E2}(t)$ para $A = 0,1$ y $\alpha = 2,0$.

po de rebote y la amplitud de las ondas. En la parte superior de cada gráfica se muestra la densidad $\rho(t)$ en el mismo intervalo temporal que la gráfica de abajo, en la que se muestra la solución A_{20}^{E2} . De este modo vemos que la definición del tiempo de rebote dada en la sección anterior se puede utilizar para caracterizar de forma coherente el tiempo efectivo de simulación. Nótese la consistencia temporal del momento en el que se alcanza la densidad máxima con el primer momento en que A_{20}^{E2} cambia de signo.

Después se observan una serie de rebotes que hacen oscilar a la densidad teniendo el valor umbral ρ_2 prácticamente como valor medio, aunque se observa un comportamiento ascendente en las oscilaciones hacia el final del tiempo simulado.

Por otro lado, como vimos en la primera sección de este capítulo, la emisión está dinámicamente mejor relacionada con el cociente β .

6.4. Emisión vs. β

Como hemos dicho, si pensamos al núcleo como un elipsoide en rotación, las configuraciones con mayor excentricidad son las que más ondas emiten, en particular la formación de una barra permitiría una emisión mayor de ondas [ref. (12),(13)]. Esto lo podemos ver mediante la razón β . En la gráfica (6.17) se muestran los valores máximos de

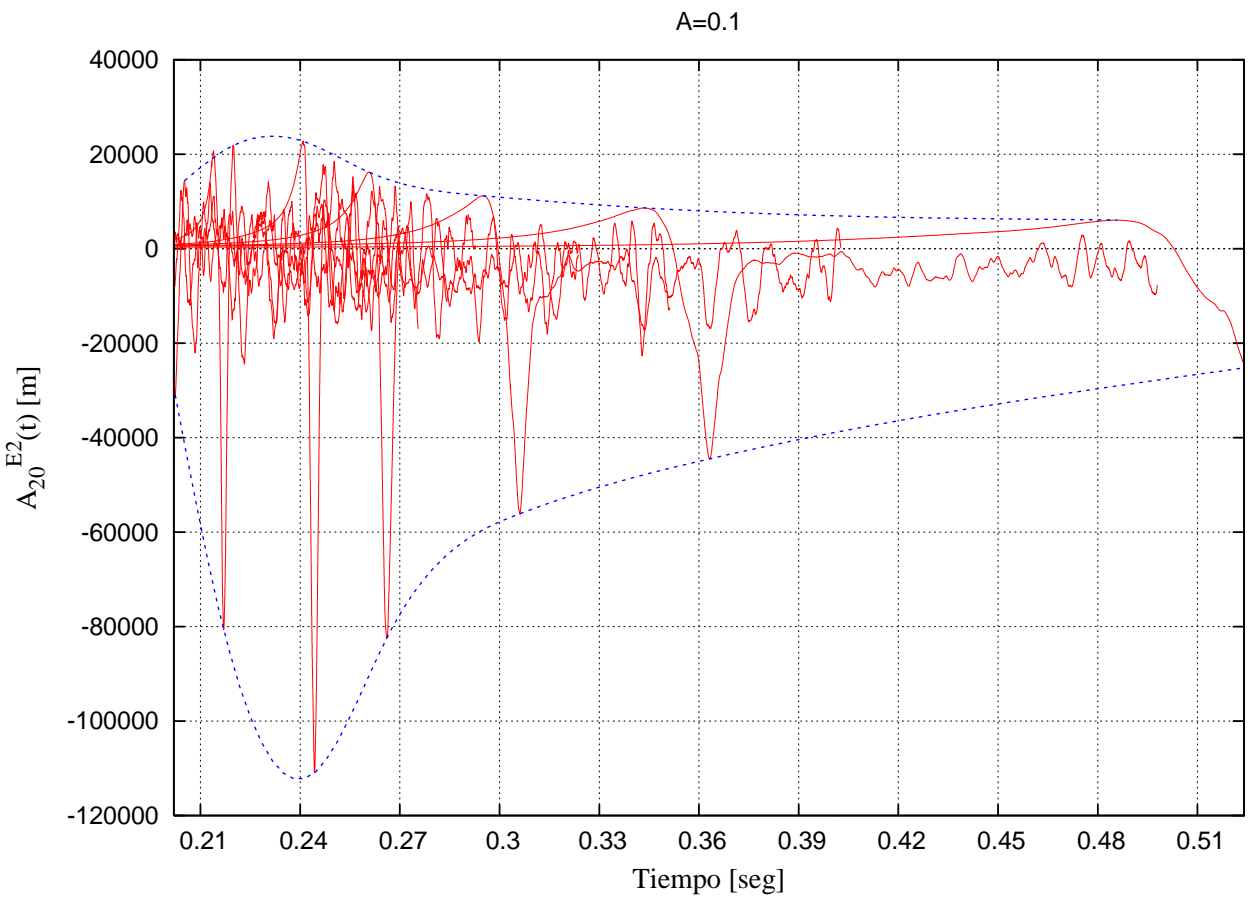


Figura 6.10: Secuencia de simulaciones para $A = 0,1$ con los distintos valores de α mostrados en la tabla (6.2).

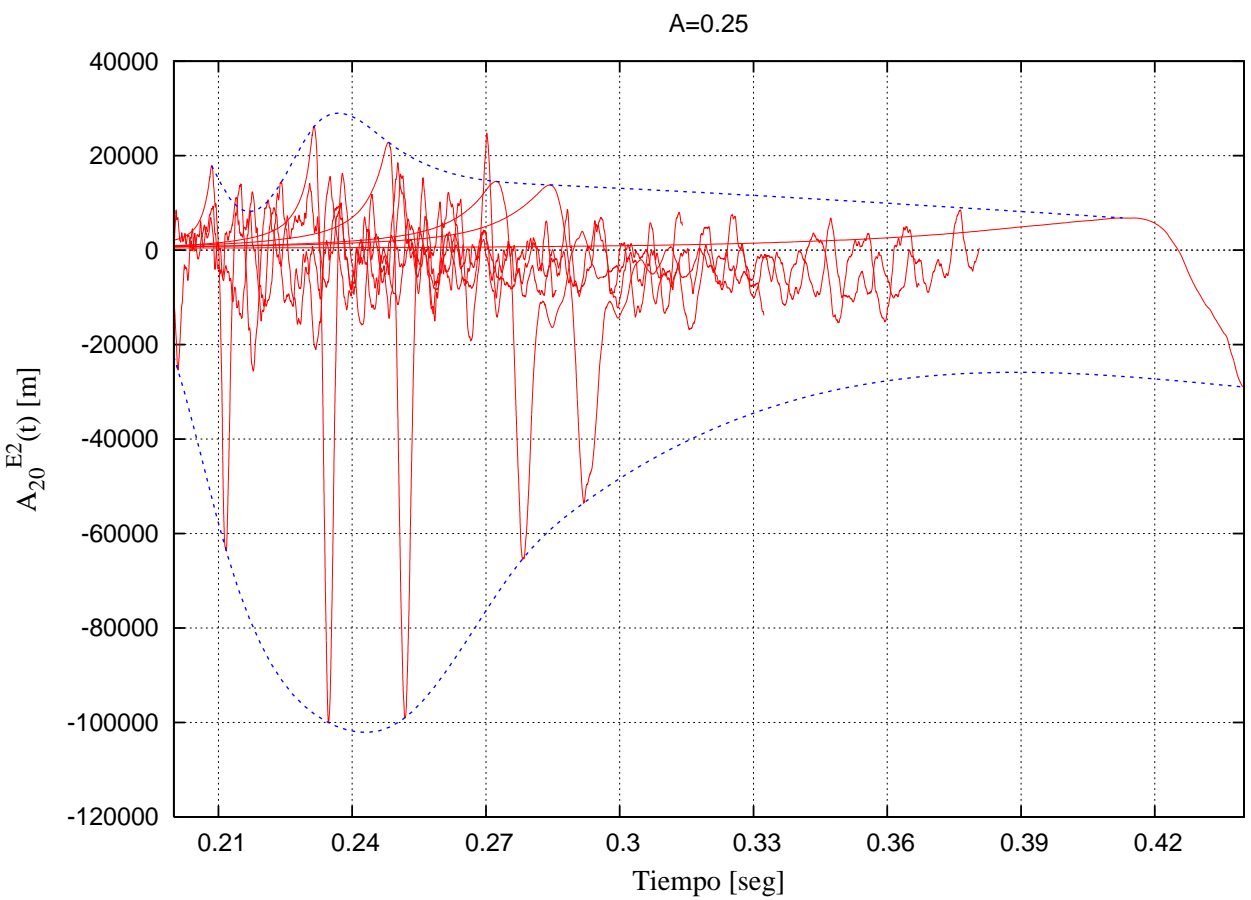


Figura 6.11: Secuencia de simulaciones para $A = 0,25$ con los distintos valores de α mostrados en la tabla (6.2).

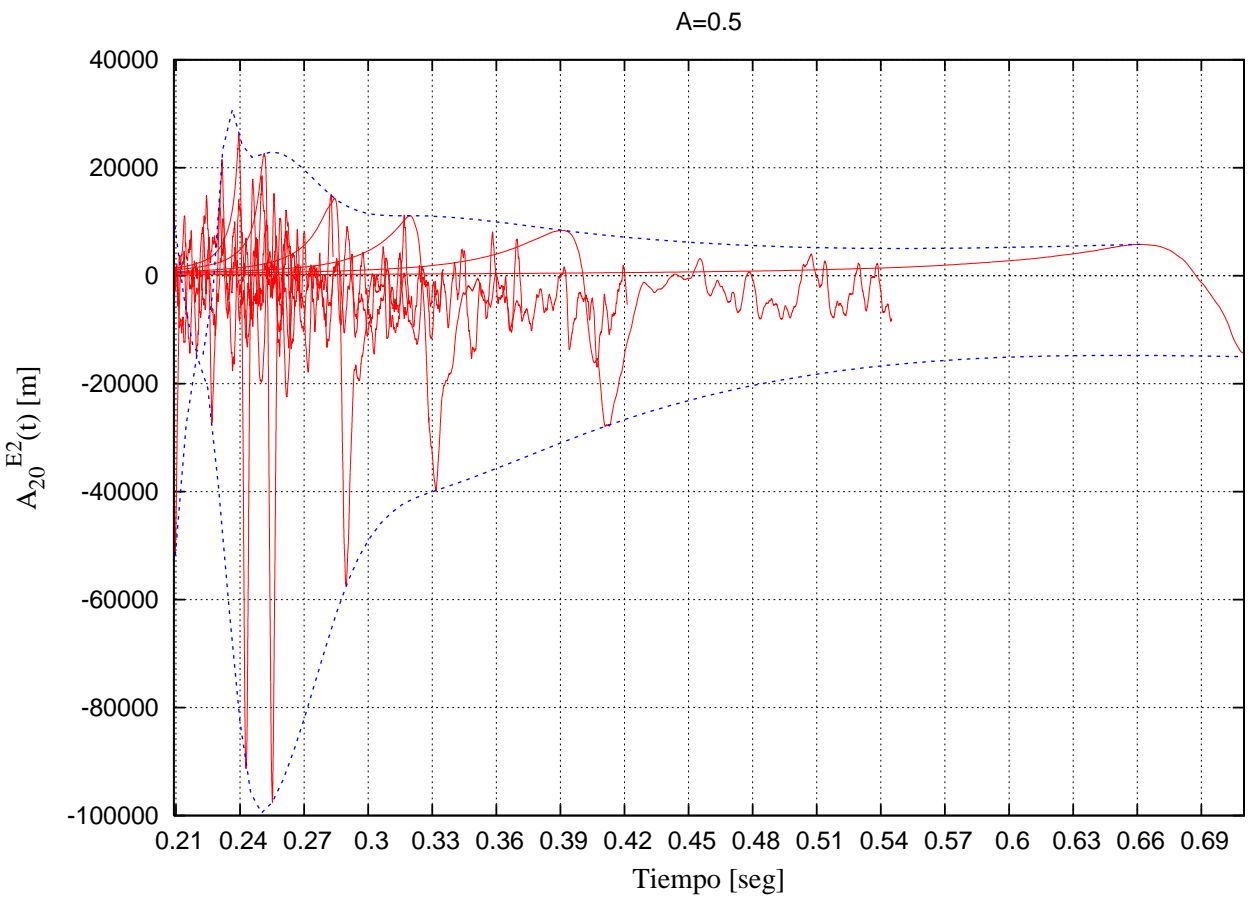


Figura 6.12: Secuencia de simulaciones para $A = 0,5$ con los distintos valores de α mostrados en la tabla (6.2).

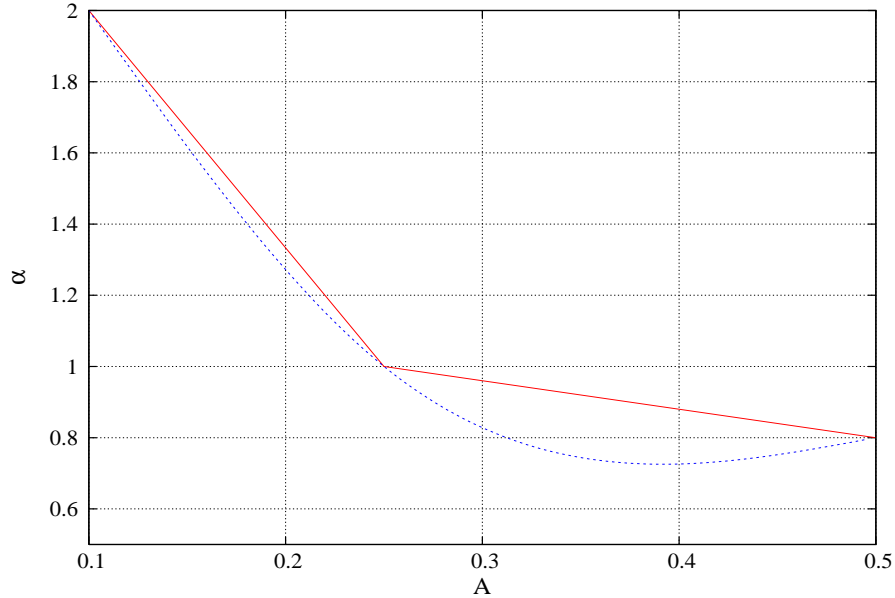


Figura 6.13: Curva que maximiza la emisión de ondas en el espacio (A, α) .

β durante las simulaciones así como el tiempo de rebote t_r . El valor máximo de β es alcanzado unos instantes después del tiempo de rebote, como lo sugieren las gráficas (6.14)-(6.16). En las gráficas (6.18)-(6.20) se muestra la correspondencia entre el valor máximo de β (excentricidad máxima) y el pico de mayor emisión de ondas gravitacionales. En la parte superior se gráfica β , que alcanza un valor máximo del orden de 0.27; en la parte inferior se encuentra nuevamente la salida A_{20}^{E2} .

Solo en el caso $A = 0,1$, $\alpha = 2,0$ se alcanza un valor superior al límite $\beta_{dyn} = 0,27$ en el que se presentaría la formación de una barra en el núcleo. Las otras dos corridas presentan un valor $beta_{max}$ muy cercano al valor β_{dyn} . En todos los casos, después de que β alcanza su valor máximo, este decrece rápidamente hasta $\sim 0,25$ donde vuelve a crecer pero de manera muy lenta sin exceder el valor de $\sim 0,245$.

6.5. Análisis de Fourier

Finalmente, para el análisis de Fourier, tomamos las señales de A_{20}^{E2} y cortamos el pico de emisión máxima con el fin de tener un tren de ondas un poco mas uniforme, aunque debido al corto número de ciclos, es inevitable tener demasiado ruido en la transformada de fourier (FFT). En las figuras (6.21)-(6.23) se muestran los trenes de

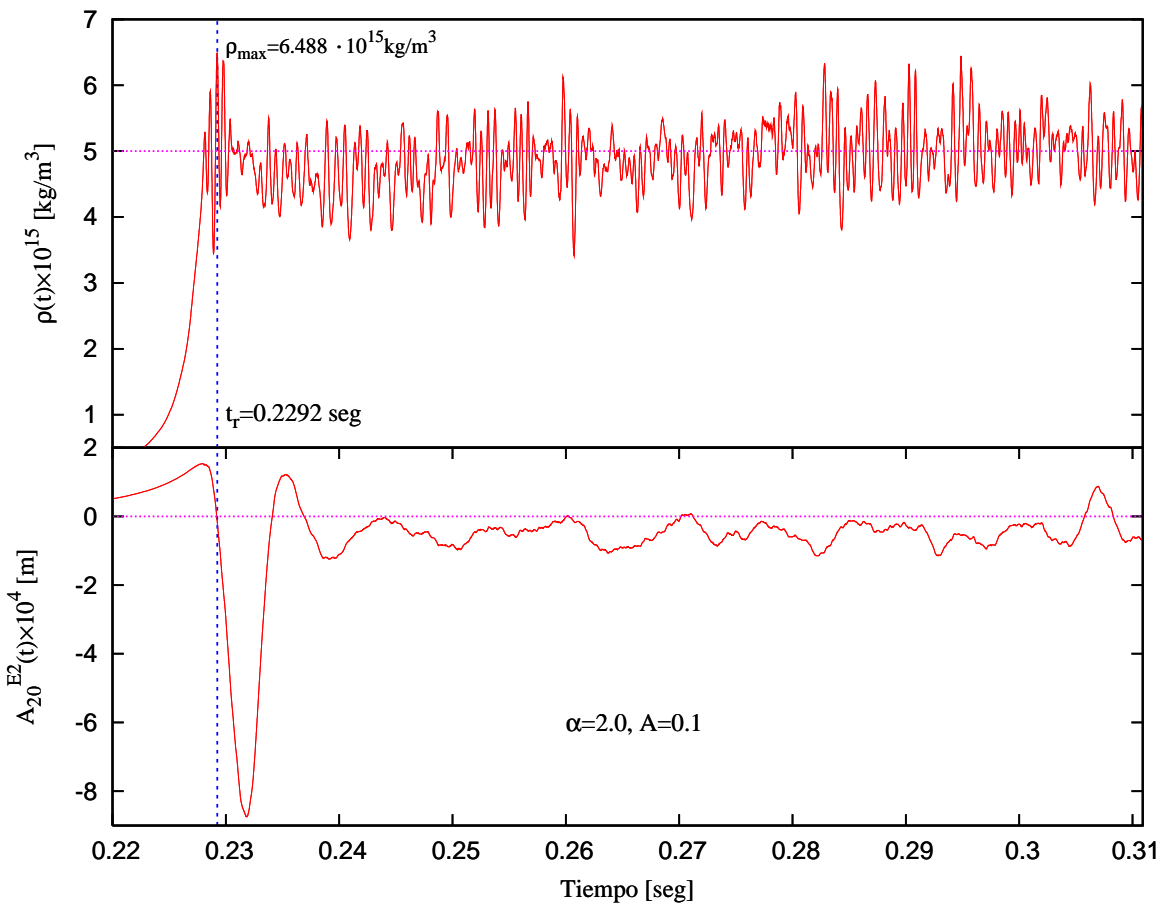


Figura 6.14: En la parte superior $\rho(t)$, la línea púrpura indica el umbral de densidad ρ_2 de endurecimiento de la relación politrópica. En la parte inferior A_{20}^{E2} .

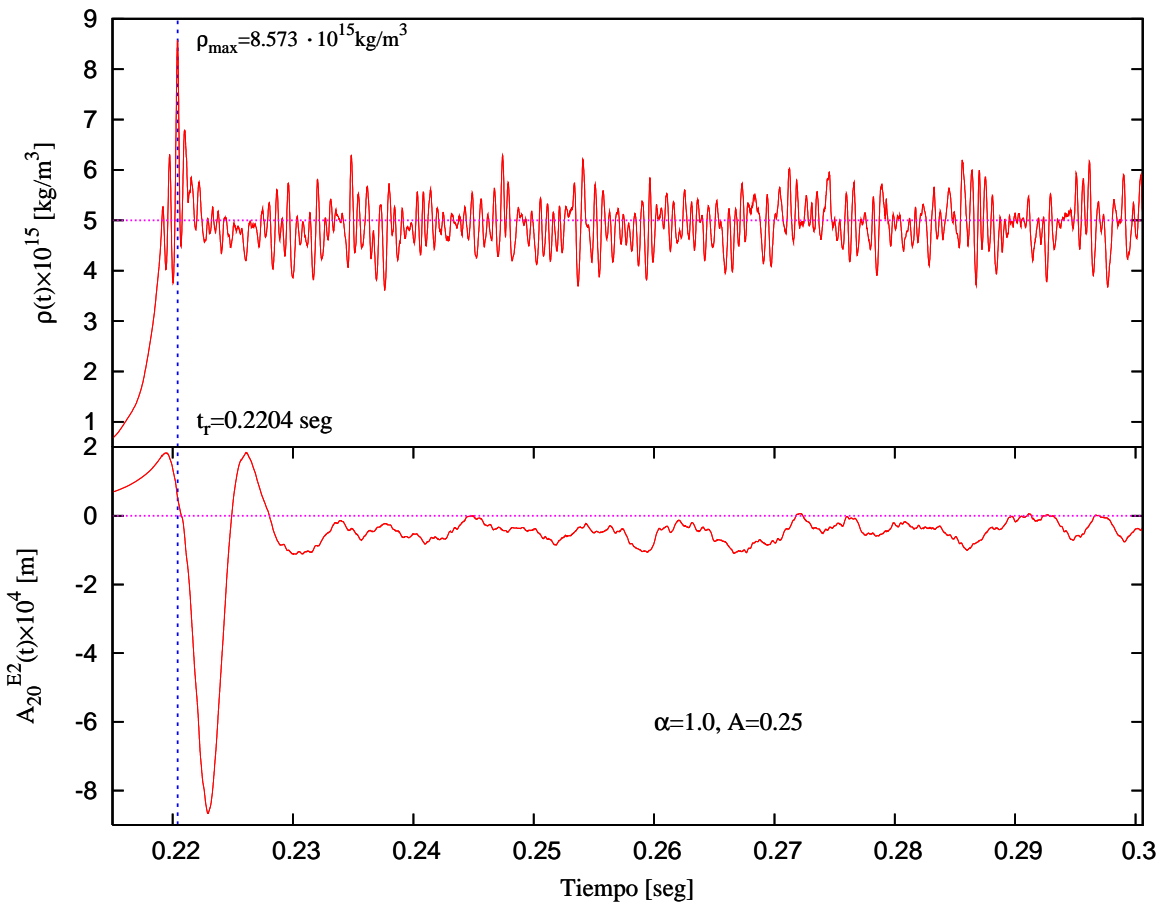


Figura 6.15: En la parte superior $\rho(t)$, la línea púrpura indica el umbral de densidad ρ_2 de endurecimiento de la relación politrópica. En la parte inferior A_{20}^{E2} .

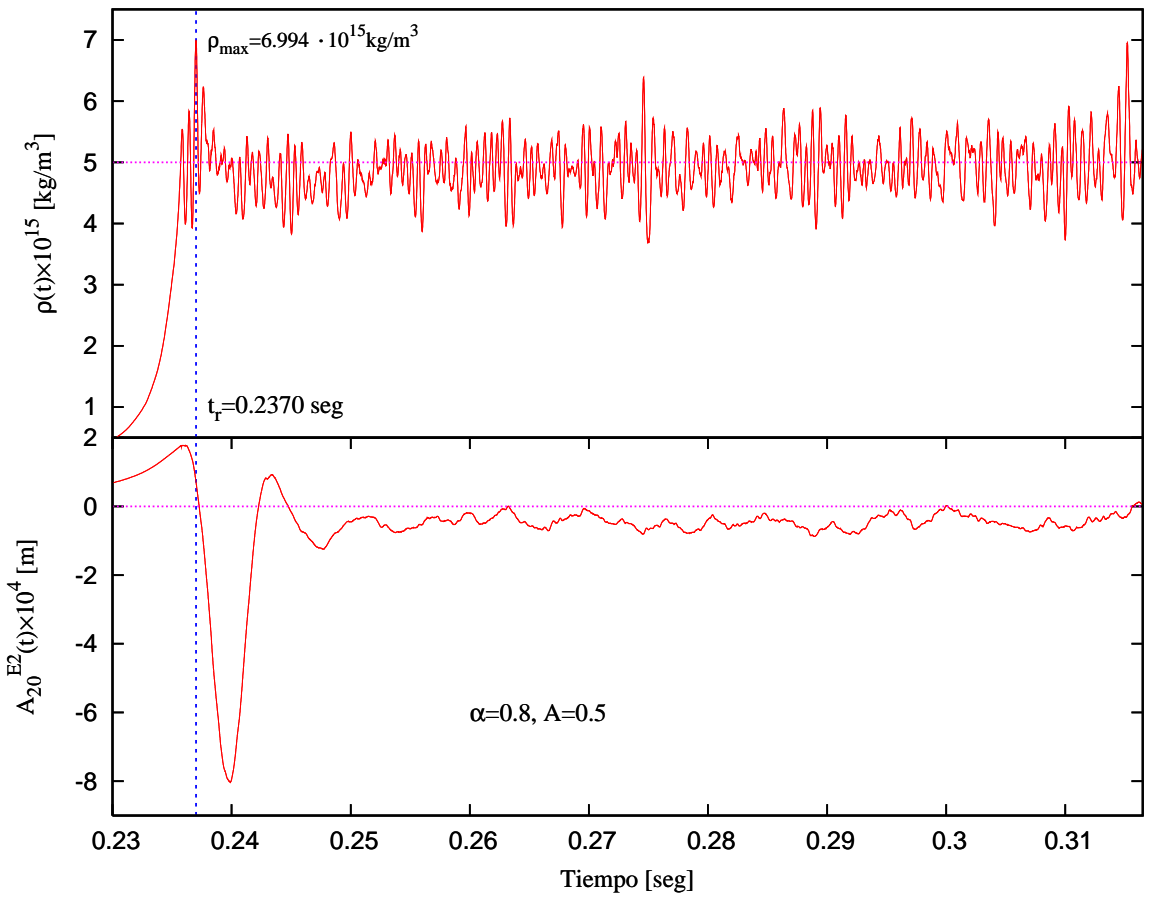


Figura 6.16: En la parte superior $\rho(t)$, la línea púrpura indica el umbral de densidad ρ_2 de endurecimiento de la relación politrópica. En la parte inferior A_{20}^{E2} .

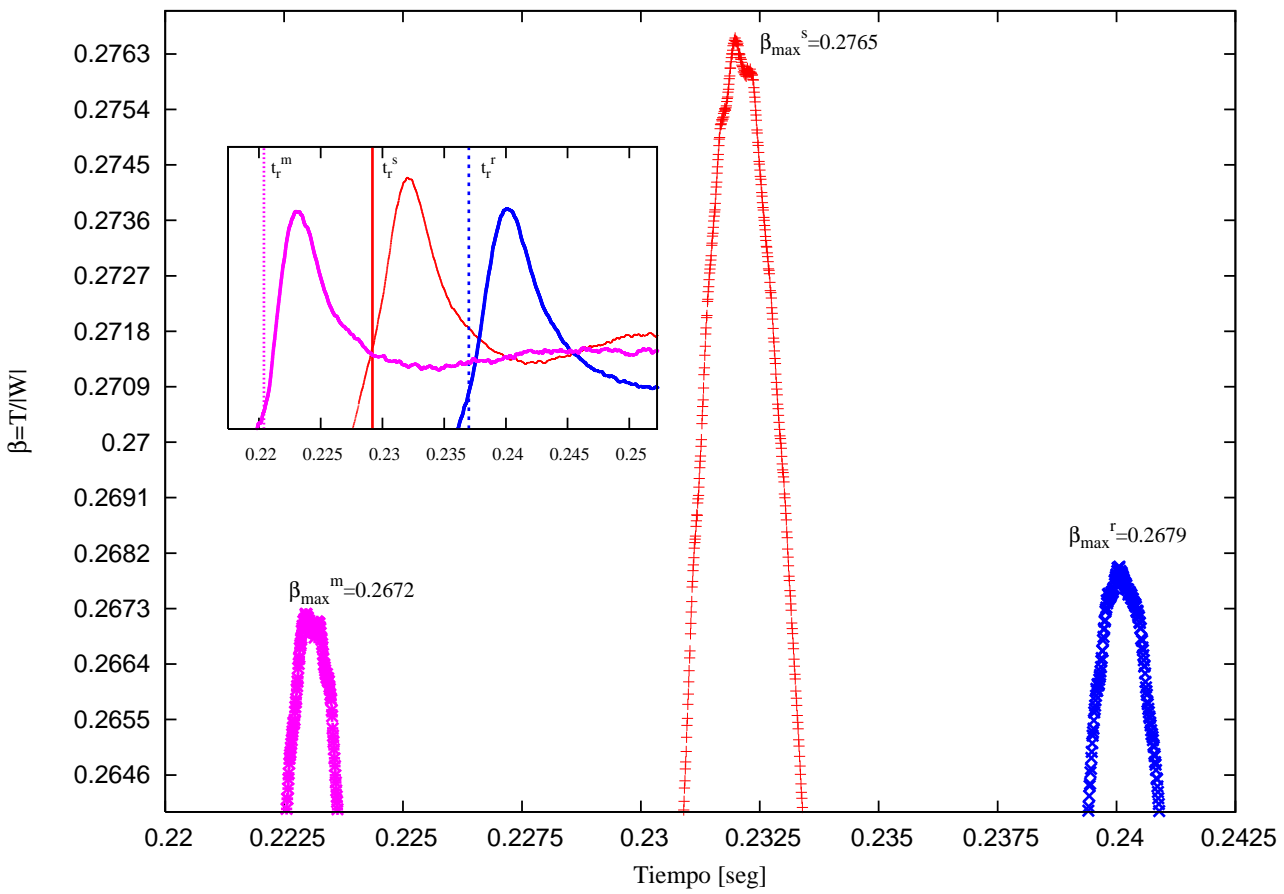


Figura 6.17: Valores máximos de β . La gráfica pequeña muestra los momentos de t_r .

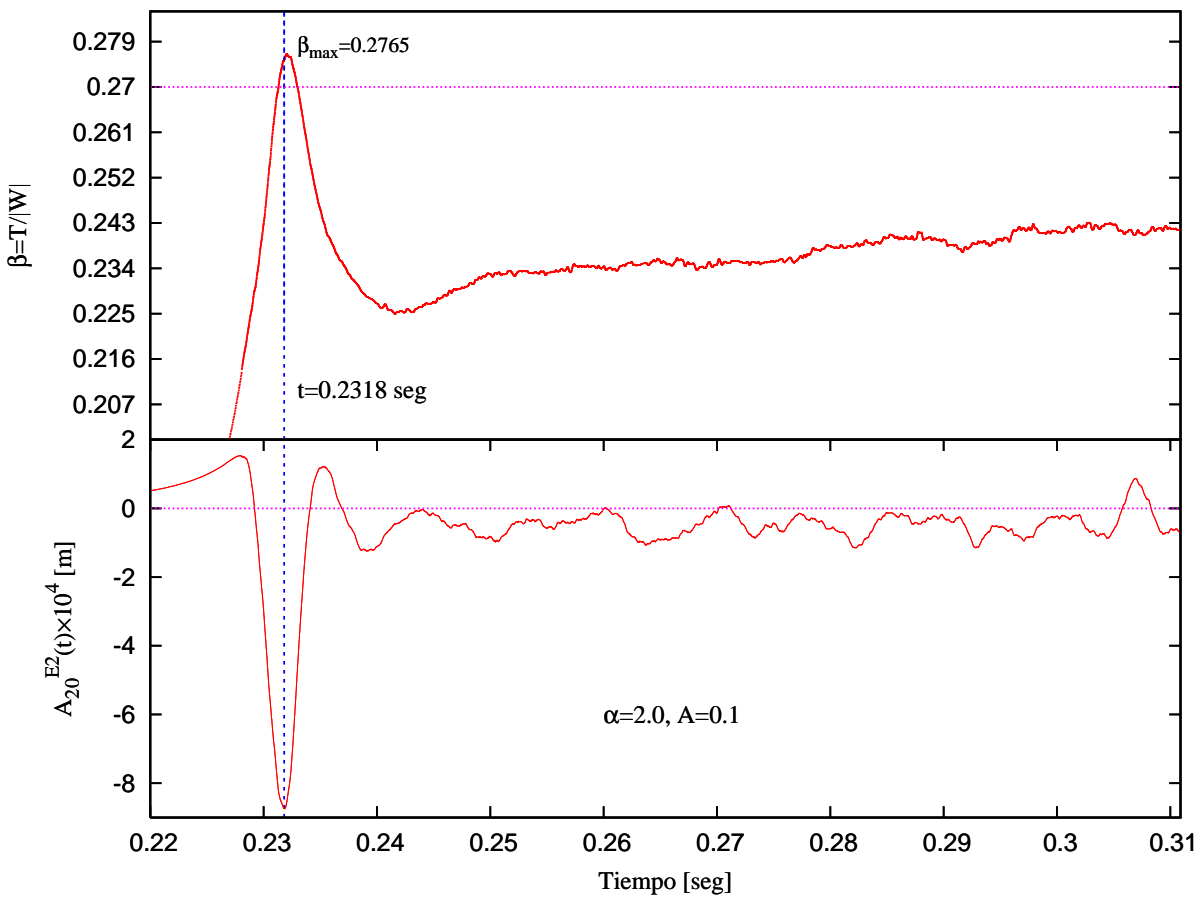


Figura 6.18: En la parte superior $\beta(t)$, la línea púrpura indica el valor $\beta_{crit} = 0,27$ En la parte inferior A_{20}^{Ez} .

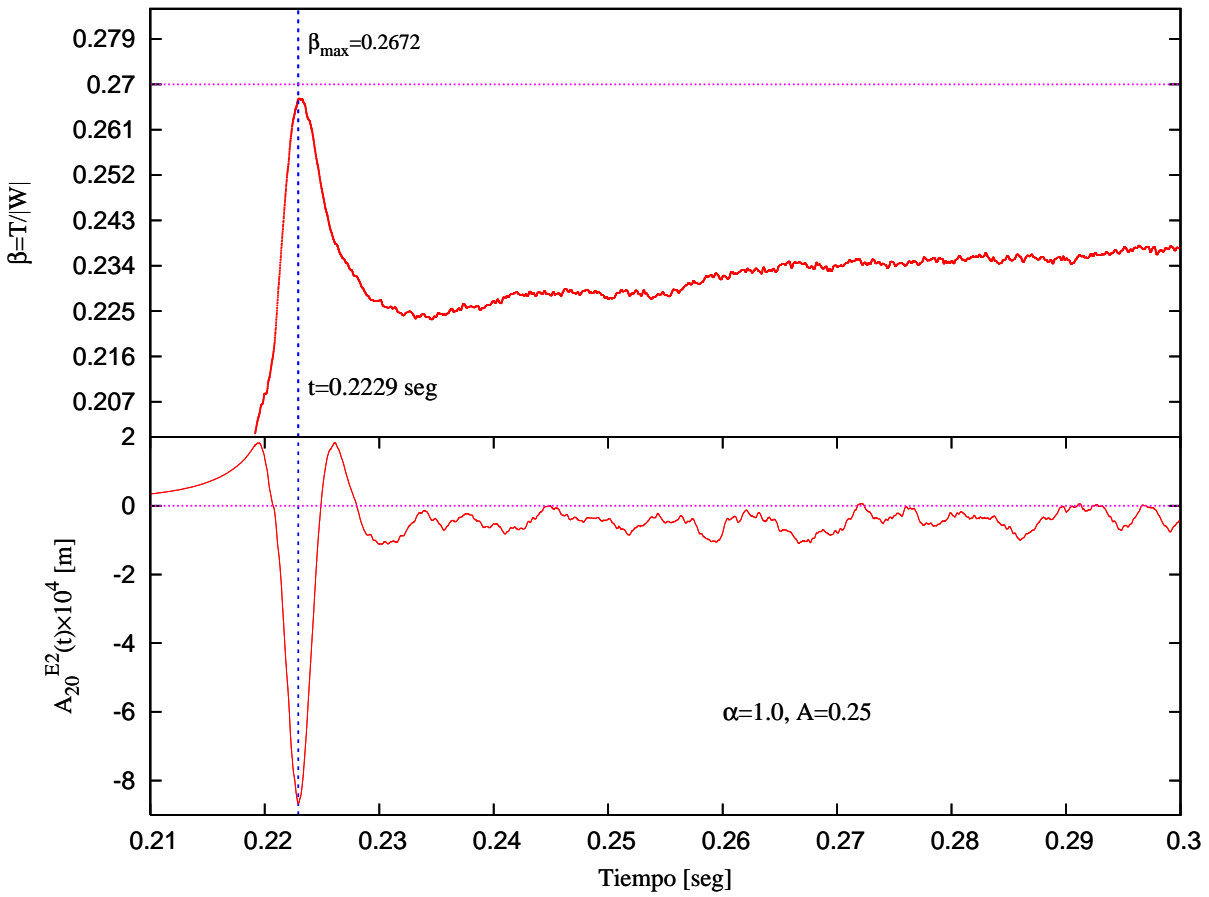


Figura 6.19: En la parte superior $\beta(t)$, la línea púrpura indica el valor $\beta_{crit} = 0,27$ En la parte inferior A_{20}^{E2} .

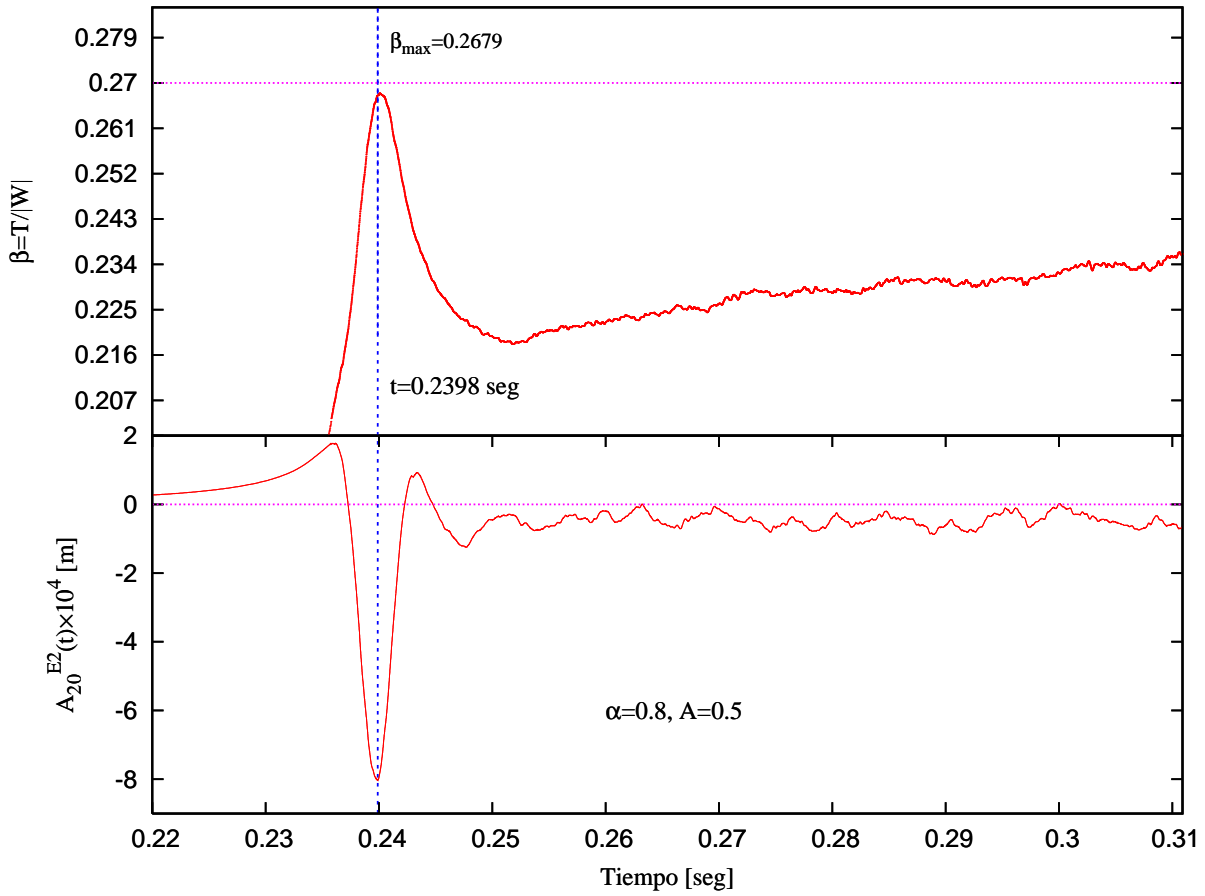


Figura 6.20: En la parte superior $\beta(t)$, la línea púrpura indica el valor $\beta_{crit} = 0,27$ En la parte inferior A_{20}^{E2} .

A, α	t_r [seg]	$\rho_{max} \times 10^{15}$ kg/m^3	β_{max}	$E_{GW} \times 10^{46}$ [Joules]	E_{GW}/Mc^2
0.1, 2.0	0.2292	6.4889	0.2765	3.5799	0.0020
0.25, 1.0	0.2370	6.9943	0.2679	2.8166	0.0015
0.5, 2.0	0.2204	8.5736	0.2672	3.8489	0.0021

Cuadro 6.3: Resultados para las simulaciones con $N_{points} = 50000$.

onda y su transformada respectiva.

A pesar del ruido, las frecuencias principales pueden ser leídas de las transformadas y se encuentran entre los 50 y 500 Hz, propias de las escalas de tiempo de las figs. (6.10)-(6.12).

Los resultados de las simulaciones con $N_{points} = 50000$ partículas se encuentran resumidos en la tabla (6.3).

El cálculo de la energía a partir de las frecuencias [ec. (5.17)] es trivial, sin embargo, debido a la gran cantidad de ruido de la transformada, el método se vuelve poco confiable por lo que el cálculo de la energía se hace de manera directa [ec. (5.14)]; sin embargo, la corta duración del tiempo simulado no permite que el método de FFT de un resultado confiable en todas las frecuencias.

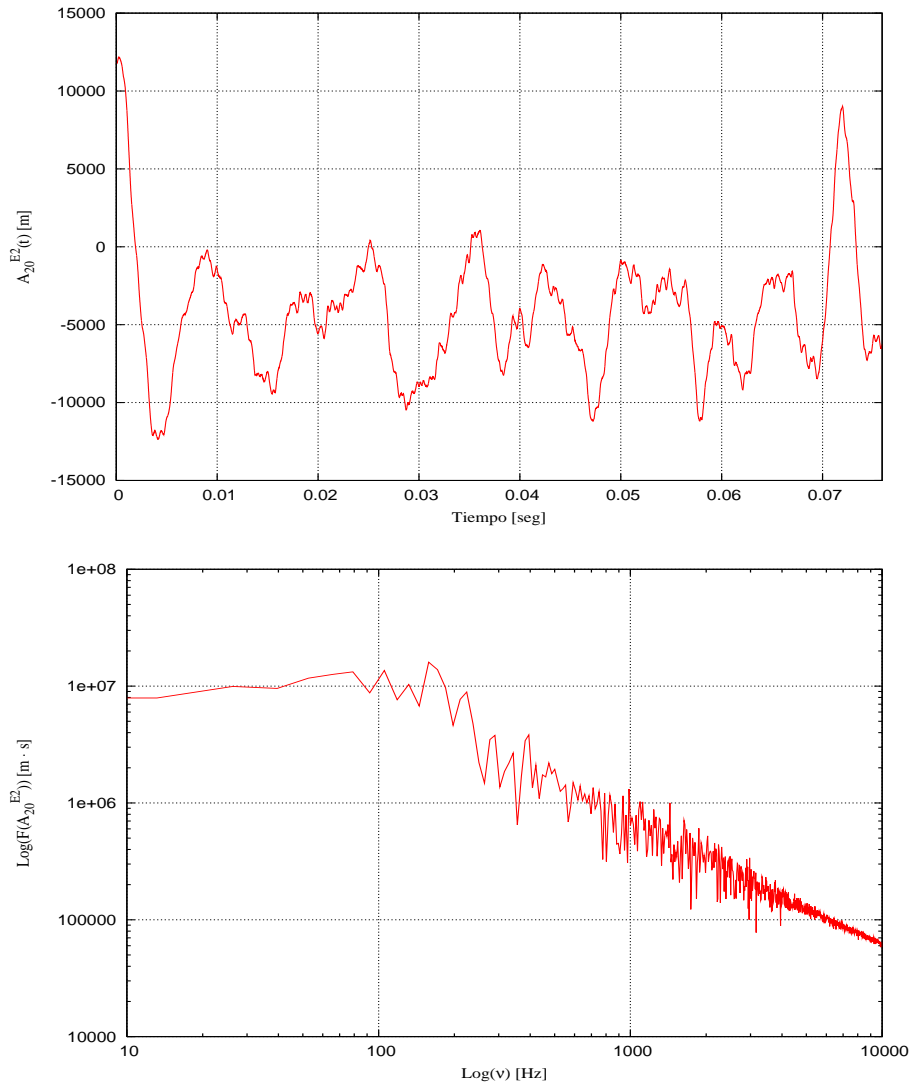


Figura 6.21: Sección temporal de A_{20}^{E2} a la que se le calcula transformada. $A = 0,1$, $\alpha = 2,0$.

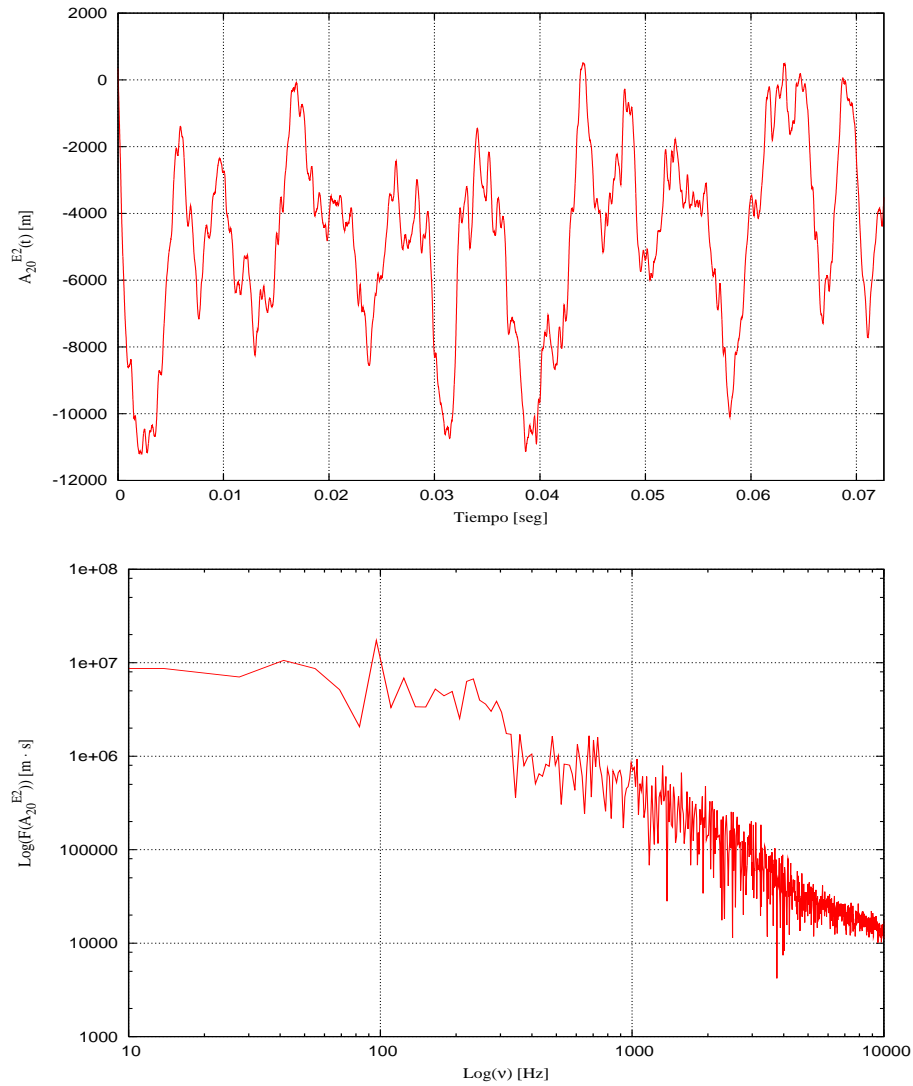


Figura 6.22: Sección temporal de A_{20}^{E2} a la que se le calcula transformada. $A = 0,25$, $\alpha = 1,0$.

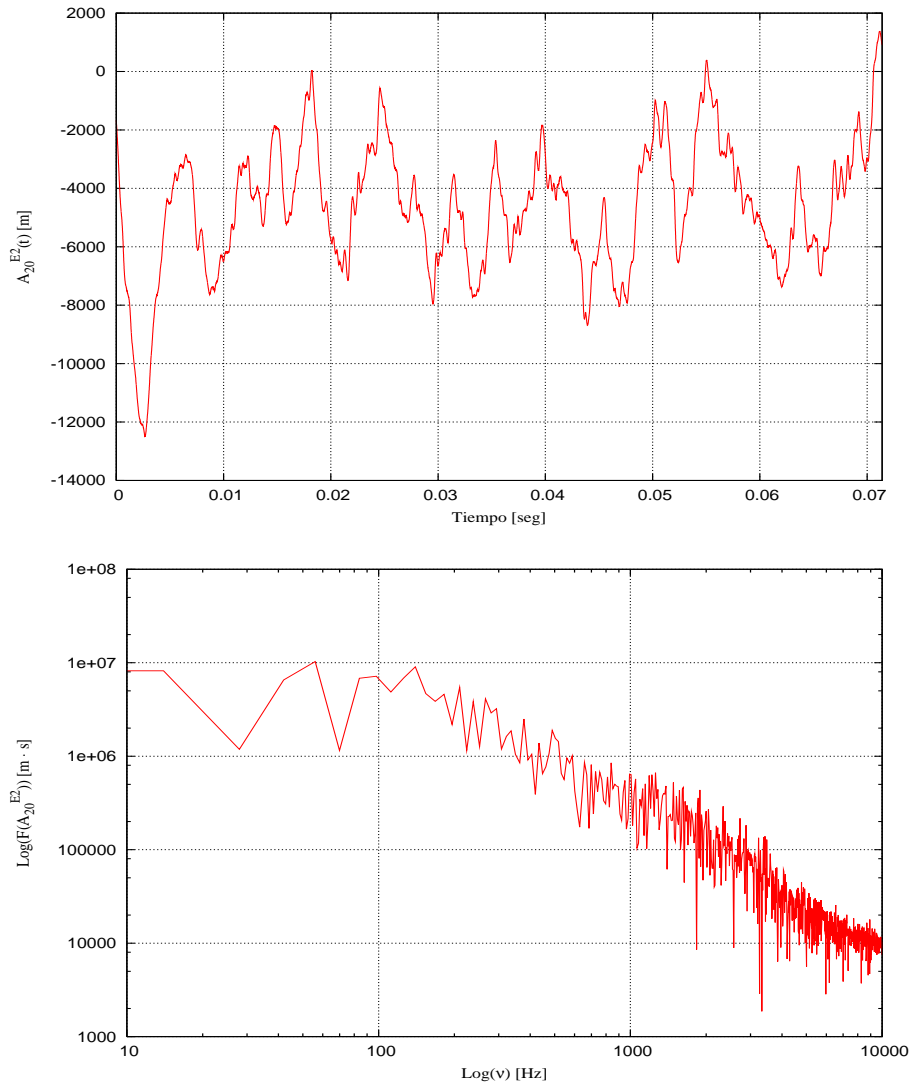


Figura 6.23: Sección temporal de A_{20}^{E2} a la que se le calcula transformada. $A = 0,5$, $\alpha = 0,8$.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se hizo un repaso de las matemáticas necesarias para formular la teoría física que justifica la existencia de las ondas gravitacionales.

En la aproximación de campo débil ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$) se dedujo una forma explícita de una ecuación de onda para la perturbación $h_{\mu\nu}$ a partir de las ecuaciones de campo.

Se estudio la generación y naturaleza de la solución de ondas, y nos enfocamos en el caso particular en el que éstas son producidas por el colapso gravitacional.

Conociendo la naturaleza cuadrupolar de las ondas y su relación con el cambio en el momento de inercia del objeto que las produce, repasamos brevemente la hidrodinámica (no-relativista) del colapso gravitacional axisimétrico, con la idea de obtener una configuración para la cual la emisión fuera máxima, siendo las condiciones para la inestabilidad del modo barra las idóneas para realizar este objetivo.

Haciendo uso de un código hidrodinámico tridimensional (SPH) resolvimos las ecuaciones de movimiento para una estrella de población III con $100M_{\odot}$ y radio 10^7m para tres distribuciones distintas de frecuencia angular, variando la cantidad de rotación inicial en cada caso, obteniendo para cada una, la configuración que maximiza la emisión de ondas.

Tomando la configuración que minimiza la energía con una mayor emisión de ondas en cada serie, aumentamos la resolución de los cálculos con el fin de observar la formación de una barra discutida en el capítulo 4. La resolución no fue suficiente para una clara apreciación en de esta forma, sin embargo, se observa indirectamente a través del cociente entre la energía cinética y la potencial. La estrella evoluciona hasta alcanzar un estado dinámicamente inestable y así debiera for-

mar una barra. Lo que en realidad se observa es que la configuración de mayor emisión es aquella que presenta una mayor excentricidad si el núcleo se toma como un elipsoide.

Se prueba de manera efectiva la coincidencia temporal entre el pico máximo de emisión de ondas gravitacionales con el máximo del cociente β , así como la consistencia en la definición del tiempo de rebote t_r .

Debido al tren de ondas tan reducido no se logra una transformada de Fourier libre de ruido, sin embargo, adecuada para observar las principales frecuencias de la señal.

Cabe mencionar que el código no es relativista ni toma en cuenta efectos térmicos del colapso, esto debido a que lo que nos interesaba era ver directamente la señal de las ondas y ésta sólo depende de las cantidades dinámicas (no térmicas) y a pesar de que no es relativista, reproduce la física tridimensional necesaria para la generación de ondas.

Finalmente notamos que la limitación no-relativista de estos cálculos comienza a ser apreciable, pero aún son aceptables, pues el tamaño del núcleo simulado al tiempo de rebote ($R \sim 200$ km), se encuentra lejos de alcanzar su radio de Schwarzschild ($R_s \sim 30$ km), sin embargo, está al borde del régimen en el que los efectos relativistas deben ser tomados en cuenta ($R \sim 10R_s$).

Bibliografía

- [1] Misner, C.W., Thorne, K.S. & Wheeler, J.A., “Gravitation”,
W.H. Freeman and Comp.,
San Francisco 1973
- [2] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. “The Large Scale Structure of Space-
Time”
Cambridge University Press,
Cambridge 1973.
- [3] Landau, L., Lifshitz, E.M. “The Classical Theory of Fields”
Pergamon Press, 1980
- [4] Eguchi, T., Gilkey, P., Hanson, A., “Differential Geometry, Gauge
Theories and Gravitation”
Phys. Rep. (66) No. 6 213-393,
1980
- [5] Carroll, S. “Lectures on General Relativity”
arXiv:gr-qc/9712019 v1 (1997)
- [6] Feynmann, R.P. “The Feynmann Lectures on Gravitation”,
Penguin Books,
New Jersey, 1980
- [7] 't Hooft, G. “Introduction to General Relativity”
Preprint version 8/4/2002
Utrecht, 2002
- [8] Mendoza, S. “Astrofísica Relativista”
Notas del Seminario de Física Teórica,
Facultad de Ciencias, UNAM 2003
- [9] Rezzolla, L. “Gravitational Waves from Perturbed Black Holes and
Compact Stars”
arXiv:gr-qc/0302025 (2003)

- [10] Lai, D., Rasio, F.A., Shapiro, S.L., “Ellipsoidal Figures of Equilibrium: Compressible Models”
ApJ Supplement Series (**88**) 205-252
Septiembre, 1993
- [11] Bardeen, J. M., Friedman, J.L., Schutz, B.F. & Sorkin, R., “Article Name”
ApJ, 217, L49 (1977)
- [12] Zwerger, T., Muller, E, “Dynamics and gravitational wave signature of axisymmetric rotational core collapse”
Astron. Astrophys. (**320** 209-227 (1997)
- [13] Fryer, C.L., Woosley, S. E., Heger, A., “Pair Instability Supernovae, Gravity Waves and Gamma Ray Transients”
ApJ, (**550**) 372 (2001)
- [14] Nakamura, T., Oohara,K. “Frontiers in Numerical Relativity”
(eds. C.R. Evans, L.S. Finn, and D.W. Hobill,
Cambridge Univ. Press, 1989)
- [15] Blanchet,L. Damour, T., Schafer,G., “MNRAS”
242 (1990) 289
- [16] Lee, W.H., “Hydrodynamics of the coalescence of a black hole with a neutron star”
Ph.D. Thesis, Univ. Wisconsin,
Madison 1998
- [17] Monaghan, J.J., “Smoothed Particle Hydrodynamics”
Annu. Rev. Astron. Astrophys. (**30**) 543-574 (1992)