UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Matemáticas, lenguaje e historia: Una Alternativa pedagógica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

KARLA ELIZABETH VELASCO MARTÍNEZ

DIRECTORA DE TESIS: MAT. CONCEPCIÓN RUIZ RUIZ-FUNES.

2006

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.. 1

CAPÍTULO I.. 5
REFLEXIONES SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HISTORIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CAPÍTULO II.. 17
EL DESARROLLO COGNITIVO DEL NIÑO

CAPÍTULO III.. 31
CARACTERÍSTICAS DEL PERÍODO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS

CAPÍTULO IV.. 46
LOS JUEGOS LÓGICOS Y SUS IMPLICACIONES PEDAGÓGICAS

CAPÍTULO V.. 62
JUEGOS SEGÚN EL PERÍODO COGNITIVO DEL NIÑO

A SEGUIR LOS OBJETOS.. 64
TORRES DE DISTINTOS TAMAÑOS.. 66
MI CAJA DE TESOROS.. 70
DISTINGAMOS.. 73
LABERINTO.. 75
A UNIR PUNTOS.. 78
SOPA DE LETRAS MATEMÁTICA.. 80
CAMINITO DE DOMINÓ.. 82
BASTA NUMÉRICO.. 84
TABLAS DE MULTIPLICAR CON CANICAS Y BOLSAS.. 88
JUGANDO CON PALILLOS.. 94
CUADRADO MÁGICO.. 98
TRIÁNGULOS CON OPERACIONES.. 101
LAS FRACCIONES.. 103
CASI UN GATO (SIGUIENDO PATRONES).. 112
DESCUBRE MI NÚMERO DE TELÉFONO.. 115
REPARTIENDO EL AGUA.. 117
UN CAMINO QUE PASA POR TODOS LOS PUENTES.. 119
CONSTRUYENDO MOSAICOS CON CUADRILÁTEROS.. 122
JUGANDO CON LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS.. 128
LAS FICHAS DE DOMINÓ.. 134
A VESTIR.. 136
PARA SER UN BUEN BALLET PARKING.. 140

CAPÍTULO VI.. 147
CARACTERISTICAS Y ACTIVIDADES PARA EL PERÍODO DE OPERACIONES FORMALES

TORRES DE HANOI.. 150
ROMPECABEZAS CON PIEZAS ESCONDIDAS.. 158

CONCLUSIONES 172

ANEXO 174
EL ENCÉFALO Y EL PROCESO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

BIBLIOGRAFÍA..190

INTRODUCCIÓN

"Matemáticas lenguaje e historia: Una Alternativa pedagógica" es un trabajo que realicé como resultado de mi vocación como pedagoga matemática y como divulgadora de la ciencia en particular de las matemáticas, pues a lo largo de mi formación en la Facultad de Ciencias de la UNAM, me percaté que hacer matemáticas y dedicarse a ellas implica una constante reestructuración del pensamiento que se tiene y que la nueva estructura que prevalece de él es sumamente enriquecedora.

Los objetivos que tenía al iniciar la investigación que ahora presento tienen relación con mis dos vocaciones, ellos son:

- Conocer cómo hace el ser humano para apropiarse del conocimiento lógico matemático.
- Aprender cuales son los requisitos mínimos esenciales que debe presentar el ser humano para adquirir el conocimiento lógico matemático.
- Hacer una propuesta de enseñanza que permita introducir al alumno en el estudio autónomo de las matemáticas, que se base en la adquisición previa de algunas nociones históricas que tengan referencia con los temas que se desea aprender.
- Exhibir algunas actividades que sean de interés para los niños y funcionen como medio de enseñanza de las matemáticas.

Por otro lado a lo largo de mi formación escolar, siempre llamó mi atención la manera en que se manifiesta y desarrolla el pensamiento lógico matemático, es por ello que realicé una investigación que recorrió diversas áreas del conocimiento como son: morfología y fisiología del cerebro, psicología y pedagogía, historia de las matemáticas y, por supuesto, las matemáticas mismas vistas como un proceso del pensamiento humano. Las conclusiones que obtuve en cada área me resultaron interesantes y por ello decidí abordarlas en esta tesis.

Cabe remarcar que el siguiente trabajo fue escrito para compartir de lo que ahora sé con profesores de matemáticas, por esta razón pido al lector que no sea docente una omisión en mi abuso, sobre todo en los capítulos IV y V de las palabras: profesor y/o docente, para referirme a las personas que hagan uso del material aquí exhibido.

En ningún momento fue mi intención a lo largo de la redacción de la misma, hacer una exclusión de las personas que lean el siguiente material. Considero que algunos de los datos que se mencionan en esta tesis resultan interesantes para todas las personas que la lean, ya que esta tesis también fue escrita con la intención de divulgar otra cara de las matemáticas: su aplicación lúdica. El trabajo está conformado de la siguiente manera:

En el capítulo I, expongo una serie de reflexiones que motivan a los profesores para inculcar en sus alumnos la necesidad de conocer el suceso histórico que tiene relación con los conceptos matemáticos que se enseñan en la escuela; en este capítulo exhibo la forma en que Miguel de Guzmán (filósofo y matemático español) propone tratar la información histórica orientándola a los temas que se enseñan en clase.

El capítulo II contiene los factores psicológicos que son fundamentales para la adquisición de cualquiera de los conceptos (en particular los matemáticos); es aquí donde se hace referencia a los trabajos del psicólogo francés Jean Piaget, en este capítulo justifico la razón de tomar en cuenta sus comentarios como puntos de referencia para el resto del trabajo. Mi propósito en esta tesis no es estudiar los aspectos evolutivos propios de la inteligencia en los primeros años de la infancia, pero si me interesa realizar una reflexión de la continuidad en los procesos cognitivos y la repetición de algunas situaciones que contribuyen a la adquisición de los conceptos matemáticos.

En el capítulo III, presento algunas de las principales características del período de desarrollo cognitivo descrito por Piaget conocido como "período de las operaciones concretas", dentro de las que destaca la formación del lenguaje como un medio para expresar las ideas; aquí se mencionan las opiniones de algunos de los principales lingüistas y psicólogos especializados en el tema.

El capítulo IV aborda el juego infantil desde un enfoque que resulta ser muy útil cuando se plantea como método de enseñanza, en este capítulo se da la definición de juego lógico y se aclaran sus características, también presento los rasgos que definen a los juegos infantiles dependiendo de la etapa del desarrollo cognitivo que manifiesta el niño.

El capítulo V es la parte fundamental de toda la investigación descrita en los capítulos anteriores, pues en él expongo una serie de actividades que constituyen la propuesta pedagógica. Se centra en el período de las operaciones concretas, por ser el más significativo en la consolidación de los conceptos matemáticos básicos; pero también contiene actividades para los niños del período preoperacional. Las actividades que presento en este capítulo son sencillas de manejar y siguen el siguiente esquema:

Título de la actividad, edades y número de participantes que pueden realizar la actividad, intenciones pedagógicas, ubicación histórica, material, procedimiento, comentarios y preguntas, dibujos o ilustraciones, respuestas esperadas o solución, y extensiones o variantes; las características de cada una estan escritas al inicio de este capítulo.

En capítulo IV, describo el período del desarrollo cognitivo conocido como "período de las operaciones formales" que abarca desde la adolescencia hasta la adultez, en este capítulo expongo dos actividades siguiendo el formato del capítulo anterior, en ellas se fomentan la iniciación del alumno en el manejo del lenguaje algebraico; al final del capítulo sugiero algunas referencias bibliográficas así como ciertas exposiciones artísticas que considero útiles para fomentar la cultura matemática en forma extra escolar para los diversos niveles del desarrollo cognitivo.

Al final del trabajo se encuentra un anexo que contiene información que he recolectado acerca de la composición y funcionamiento del cerebro que considero importante conocer para comprender las deficiencias que pueden llegar a presentar algunas personas al aprender los conceptos matemáticos básicos, la justificación de dicho anexo se menciona en el capítulo II.

Espero que el lector al igual que yo, encuentre satisfacción al inferir de la información aquí presentada la forma en que se llega al conocimiento lógico matemático, igualmente anhelo que las actividades que aquí se proponen realmente sean de utilidad para los profesores de manera que puedan aplicarlas en su labor docente y en su momento creen otras siguiendo el método aquí exhibido.

CAPÍTULO I
REFLEXIONES SOBRE LA IMPORTANCIA DE LA HISTORIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Existe una frase escrita por Miguel de Guzmán[1] en su artículo *Enseñanza de las ciencias y la matemática*[2] que influyó de manera significativa en mi percepción sobre la educación matemática: "Es claro que una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos de nuestros estudiantes tiene su origen en un posicionamiento inicial afectivo totalmente destructivo, de sus propias potencialidades en este campo, que es provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de sus maestros. Por eso se intenta también, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que la matemática es capaz de proporcionar, a fin de involucrarlos en ella de un modo más hondamente personal y humano."

En este sentido aquí presento el empleo de algunos de estos "medios de percepción estético", mencionados por Miguel de Guzmán en el mismo artículo: la utilización de la historia de las matemáticas relacionada con su carácter lúdico; para plantear a esta disciplina como parte fundamental de la cultura, siempre vinculada con las demás áreas del conocimiento.

Estoy convencida de que si el profesor le presenta al alumno los conceptos, la forma en cómo nacieron y los relaciona con una actividad en la que participe activamente el estudiante, entonces aquello que desea enseñar se asimila profundamente en su formación; pues sucede que cuando alguien platica o realiza algo que llega a interesar un tercero, la idea se interioriza y entonces aprende el individuo que escucha y observa, esto provoca en las personas un sentimiento de motivación que plantea la inquietud por saber más del tema.

Actualmente a algunos jóvenes suele costarles trabajo adquirir ciertos conceptos relacionados con las ciencias, y en particular aquellos que forman parte de las matemáticas; en este sentido me pregunto: ¿qué sucedería si se les presentan los conceptos a través de pequeños relatos que puedan atraer su atención, de forma que esto constituyera una introducción de ciertos temas?

---

[1] Miguel de Guzmán nació en Cartagena España, estudió filosofía en Alemania (1961), y matemáticas en Madrid (1965), posteriormente se doctoró en Chicago en 1968, fue profesor en muchas universidades extranjeras y fue presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática de 1991 a 1998, además es autor de numerosos libros técnicos y de divulgación, así como de educación matemática.

[2] Tomado del artículo de Miguel de Guzmán titulado. Enseñanza de las ciencias y la matemática. MATEMÁTICA Organización de Estados Iberoamericanos. OEI. Para la educación, la ciencia y la cultura, Pág. 7.

Coincido con varios autores en señalar que el empleo del recurso de la historia de la ciencia en clase, produce un efecto positivo ante el estudiante en su encuentro con la ciencia, particularmente con las matemáticas, pues las ventajas que el alumno obtiene y que se derivan de este método son muchísimas, entre las cuales menciono las siguientes:

- Los alumnos tienen una mejor noción de la génesis de los conceptos matemáticos al plantear ciertos problemas que los originaron, o bien se pueden presentar algunos problemas semejantes a los esbozados anteriormente en clase.

Por ejemplo, si requiere comenzar a hablar en un grupo de primaria o secundaria sobre los números naturales, puede plantear lo siguiente: se dice que las primeras comunidades organizadas tuvieron que idear un método para contar el número de elementos de colecciones que eran de importancia para ellos, como la cantidad de animales que integraban su ganado, el número de vegetales o frutas que componían sus cosechas o bien el número de hombres, mujeres y niños que formaban parte de sus comunidades.

¿Cómo se les ocurre que los humanos de aquella época se las arreglaban para saber el número de elementos que formaba cada colección?, ¿Creen ustedes que siempre supieron contar los seres humanos?, ¿Por qué?, ¿Cómo se imaginan que representaban los números en aquella época?.

Este tipo de planteamientos, así como otros que puede aplicar y que son semejantes al anterior, se establecen por medio de actividades en las que el grupo completo participa proponiendo la solución ante tal situación, esto lo menciona Miguel de Guzmán: "Puestos con nuestros estudiantes delante de las situaciones problema,…, deberemos tratar de estimular su búsqueda autónoma, su propio descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural"[3].

Entonces, para llegar al descubrimiento de dichas estructuras creo que es importante resaltar la idea de que las matemáticas evolucionan en un sentido muy parecido al ser humano, pues son el resultado de un proceso del pensamiento humano que tardó muchos años en concretarse.

[3] Ibidem Pág.8

En este sentido hay que tomar en cuenta otra interpretación: "desde el punto de vista del conocimiento más profundo de la propia matemática, la historia nos proporciona un cuadro en que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico, como para el que enseña. Si cada porción del conocimiento matemático de nuestros libros de texto llevara escrito el número del siglo en que fue desarrollado, veríamos saltar locamente los números, a veces dentro de una misma página o del mismo párrafo. No se trata de que tengamos que hacer conscientes a nuestros alumnos de tal circunstancia, pues el orden lógico no necesariamente es el orden histórico, ni tampoco el orden didáctico coincide con alguno de ellos, pero el profesor debería de saber cómo nacieron las matemáticas para:

1. Comprender mejor las dificultades en la elaboración de las ideas matemáticas, y por ende las de sus propios alumnos.

2. Entender mejor la hilación de las ideas, de los motivos y variaciones de la actividad matemática.

3. Utilizar este saber como una guía sana para su propia pedagogía."[4]

- Considero que mediante el estudio de las dificultades que originaron los temas abstractos de la matemática, los alumnos infieren que el desarrollo de cualquier teoría científica, en particular matemática, debe seguir un proceso lógico y formal desde su elaboración hasta su aplicación, y esto contribuye a establecer un canal de comunicación entre los docentes y el alumnado que permite despertar la capacidad inventiva e intelectual, y al mismo tiempo enseña a respetar los puntos de vista de otras personas.

- Los alumnos comprenden que los matemáticos que crearon los conceptos que utilizamos fueron seres humanos que estaban inmersos en un contexto socio-cultural específico que los determinaba, y a veces limitaba, como científicos, esto se logra al presentar paulatinamente a los autores y sus obras, como introducción a diversos temas.

De esta forma, al estudiar y comprender las situaciones, así como las actitudes ante los problemas que resolvían estos científicos, se muestra la parte humana de la matemática y capacita para concluir y/o reinventar las soluciones planteadas por estos personajes.

[4] Ibidem Pág. 9

Es decir, considero que emplear el recurso histórico en las matemáticas favorece su apreciación humanística y contribuye al hacerlas más accesibles para quienes las estudian, al tiempo que formaliza los pensamientos expresados por la humanidad a través de las diferentes épocas.

- El alumno adquiere técnicas para resolver problemas cotidianos al enfrentarse a alguna problemática diaria que lleva a concluir ciertos conceptos, este método aumenta su paciencia y contribuye en el desarrollo de su originalidad, también motiva a tomar por él mismo nuevos problemas que auxilian en reafirmar los conocimientos aprendidos con anterioridad.

Es decir, después de haber solucionado un primer problema, guiados por el profesor, los alumnos toman una pregunta que tiene relación con su vida diaria, la traducen al lenguaje matemático y luego, mediante la constante práctica de este tipo de actividades, los educandos se percatan de que los conceptos matemáticos que llevan a la solución de los problemas, desde su planteamiento, método de solución y presentación de los resultados, son el fruto del trabajo constante no sólo de ellos mismos, sino del grupo que contribuye en la solución de las situaciones presentadas.

Esto ayuda a integrarlos por completo en el trabajo multidisciplinario, y muestra que la labor matemática en ocasiones se facilita y enriquece si se elabora en equipo, teniendo en todo momento la idea de que, cada miembro debe ser consciente de los pasos empleados en la solución buscada y que esta forma de trabajo hace que el lenguaje en que fue escrito el problema así como las respuestas que se obtengan sean más comprensibles por todos. En este sentido dice Miguel de Guzmán:

"Lo verdaderamente importante es que se cree una atmósfera en el grupo, libre de inhibiciones, libre de competitividad, en que cada uno esté deseoso de aportar sin imponer, abierto a aceptar incluso lo que a primera vista pueda parecer más estrafalario, colaborando gustosamente para mejorar las ideas iniciadas por los otros y viendo con gusto cómo los otros van perfeccionando las ideas propuestas por él. La tarea esencial del moderador es mantener permanentemente este clima, estimulando, la aportación del que tiende a callar demasiado e inhibiendo con suavidad la del que tiende a hablar en exceso, animando cuando el grupo parece quedarse pegado, tratando de abrir nuevas vías cuando todo parece cerrado"[5].

[5] Ibidem Pág. 15

Entiendo que el llevar a cabo tal iniciativa parece a primera vista imposible en el corto tiempo que se tiene para una lección de matemáticas; pero estoy convencida de que la aplicación paulatina del método que a continuación describo, transformará en gran medida la manera en como se proporciona el conocimiento matemático, de tal forma que gracias a la práctica se adaptará el procedimiento en forma sencilla en cada sesión de la materia.

Para ser más explícita expongo uno de los más bellos pasajes de la historia de las matemáticas para ilustrar la forma en cómo se puede plantear un problema con el fin de motivar a los estudiantes para hallar soluciones a problemas similares, para ello, una vez planteada la situación a resolver, desarrollo el esquema de trabajo propuesto por Guzmán que permite elaborar la solución al problema.

Recomiendo que el profesor exponga de forma breve la historia de él o los matemáticos que tengan relación con el tema que se pretende enseñar, como ejemplo presento a continuación la historia de Carl Friedrich Gauss: nació en Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777, sobre su vida familiar se sabe poco pero es seguro que sus padres se preocuparon por que recibiera una buena educación desde que era niño. A los 15 años había destacado tanto en matemáticas que recibió una beca del Duque de Brunswick para ingresar a uno de los mejores colegios en Alemania, el colegio Carolino. En esa época Gauss descubrió varios resultados matemáticos que, aunque ya eran conocidos, eran desconocidos para él.

En 1795 ingresó a estudiar matemáticas en la universidad de Götingen y el Duque continuaba pagando sus estudios. En 1798 Gauss abandonó la universidad sin haberse graduado y a partir de entonces continuó su formación de manera autodidacta. Algunos historiadores piensan que Gauss no podía permanecer en las universidades ni en ninguna institución mucho tiempo pues como tenía un carácter muy fuerte no le era fácil tener amigos.

Para 1799 Gauss había descubierto resultados matemáticos muy sorprendentes, entre ellos había encontrado un método para construir, con regla y compás, un polígono regular de 17 lados. En 1801 publicó el más famoso de todos sus libros: "Disquisiciones aritméticas", a partir de ese año Gauss se dedicó a estudiar la trayectoria de los cuerpos celestes y por ello en 1807 fue nombrado director del observatorio de Götingen.

En 1805 se casó con Johanna Ostoff pero la felicidad de su matrimonio se vio ensombrecida por la muerte de su protector el Duque de Brunswick. Su mujer murió en 1808 mientras daba a luz a su segundo hijo, en ese mismo año murió también su padre, fue una época difícil para él. En 1809 se casó con la mejor amiga de su mujer, Minna, con quien tuvo tres hijos más, Minna, murió en 1831 después de una larga enfermedad. Finalmente Gauss murió la madrugada del 23 de febrero de 1855 en Götingen, murió tranquilo mientras dormía y le dejó a la humanidad uno de los mayores legados de las matemáticas.

Luego en el libro de Alvar y Barra se cita la siguiente anécdota, que sugiero comparta el profesor con los alumnos: "El profesor Buttner, director y maestro del colegio para niños de Brunswick, molesto por alguna falta en el aula impuso a sus alumnos una medida correctiva en la forma de una "prueba sin previo aviso". Debían los niños obtener la suma de cien números como los indicados a continuación: 1+ 2 + 3 + . . . + 100. Entre los alumnos "castigados" se encontraba Carl Friedrich Gauss[6] con apenas 10 años de edad.

Minutos después Gauss era el primero en entregar la pizarra, con un sólo número: la solución correcta y exacta del problema propuesto. Displicente el profesor, casi burlonamente, pensó que Carl había renunciado a la prueba. Mucho tiempo transcurrió (hora y media más), cuando el último de los alumnos entregó su pizarra. El profesor Buttner encontró sorprendido, que la única solución exacta y correcta era la del primer muchacho que entregara su pizarra en primer lugar. Helo aquí: … aquel hombre severo, casi antipático que llevaba el colegio en los usos y costumbres del medioevo se sintió tan halagado con la presencia de un niño precoz y correcto que cambió su estilo como director y como maestro"[7].

Ahora bien, si el lector quisiera conocer la forma de proceder de Carl Friedrich para darle solución el problema planteado anteriormente, basta con que siga las fases propuestas por Guzmán: "el esquema concreto de trabajo puede tener lugar según estas cuatro fases que pueden servir como marco muy general"[8] de la siguiente manera:

Primero, el grupo se familiariza con el problema. Es necesario que comience con el enunciado del planteamiento matemático y que trate de hacerlo comprensible para el alumno; asimismo es indispensable que queden claras las ideas que se deben desarrollar y que facilitan las posibles soluciones al problema, para tal efecto sugiero que plantee las siguientes preguntas:

Se comenzó la suma con el número 1, pero, ¿se puede comenzar desde cualquier otro número?, ¿cuántos números en total se pueden sumar?, ¿cuál proponen que sea el mejor método para resolver esta suma?; sugiero al lector que trate de inventar otras preguntas sin perder de vista el propósito del problema, pues la atención dedicada a éste ayuda a estimular la memoria no sólo de quien invente las preguntas sino también de quienes traten de resolverlas.

Segundo, se buscan estrategias posibles, plantee las siguientes preguntas al grupo y reflexione con ellos:

---

[6] También se sabe fue astrónomo, físico, autor de importantes trabajos sobre mecánica celeste, geodesia, magnetismo y electromagnetismo así como óptica. Su concepción moderna de la naturaleza abstracta de las matemáticas le permitió ampliar el campo de la teoría de los números; convencido de que el quinto postulado de Euclides es indemostrable, creo una teoría que dio origen a la geometría no Euclidiana.

[7] Alvar, Noe y Barra, Zenil. "Carlos Federico Gauss: de niño prodigio a ciudadano", pág. 10

[8] Miguel de Guzmán "Enseñanza de las ciencias y la matemática" pág. 15

¿Cómo podemos simplificar esta suma?
¿Cuáles serán el penúltimo, antepenúltimo, ante-antepenúltimo,…. etcétera, números que se piden sean sumados?
¿Se pueden sumar en cualquier orden los números de esta lista?
¿Qué pasará si sumamos el primer número con el último y el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente?
¿Cuántas posibles sumas como estas hay en la serie de números que se quieren sumar?
¿El resultado de estas sumas siempre es el mismo?
¿A qué se deberá?
¿Entonces cómo habrá obtenido Gauss el resultado?

Tercer paso, el grupo selecciona y lleva a cabo las estrategias que parecen más adecuadas, aquí se forman equipos, los cuales trabajan con el método que elijan sus integrantes. Una vez que terminan pida que un representante de cada uno exponga la solución a la que llegaron, el método que emplearon y la razón por la cual trabajaron de esa forma.

El cuarto y último paso consiste en que todo el grupo reflexiona sobre el proceso seguido, aquí cuestione cuál fue el método más rápido para resolver el problema y exponga las siguientes preguntas:

De entre todos los métodos que acabamos de estudiar, ¿cuál creen que sea el mejor para ser aplicado en lo sucesivo?, ¿por qué?
¿Me pueden dar las instrucciones de cómo efectuar la suma solicitada desde el inicio?.

En este paso procure ser explícito y solicite al grupo que explique toda la actividad; para conseguir tal objetivo es útil emplear las siguientes preguntas:
¿Cuál es el problema a resolver?
¿Cómo debo de comenzar a sumar?
¿Cuántos sumandos como el que proponen hay?
¿Qué operación debo efectuar ahora?
¿Pueden inventar un método más sencillo?
¿Cuál es y en qué consiste?

En todos los pasos, motive la participación de todos los alumnos y sea paciente al escuchar las opiniones de cada uno de ellos, pues esto da confianza a los equipos para tratar de hallar la solución de forma que todos comprendan los pasos a seguir.

A medida que los alumnos avanzan en su conocimiento y se enfrentan a retos cada vez más complicados, logran percatarse de que existen semejanzas entre algunos problemas y que, por ello, la solución dada a alguno de éstos puede usarse para resolver otro.

Por lo tanto es importante manejar los conceptos básicos previamente enseñados pues forman la base del nuevo conocimiento que están adquiriendo; asimismo se propongo que el profesor haga énfasis en que el recurso de memorizar ciertos métodos o fórmulas para resolver problemas en ocasiones es imprescindible pero que no es conveniente abusar de ello, ya que a largo plazo el concepto así asimilado puede olvidarse por falta de práctica.

Es importante enfatizar también, que la práctica nos induce a reinventar constantemente ciertos procedimientos, lo cual capacita a los alumnos y los convierte en reconstructores de su propio conocimiento, cada vez que descubren o encuentran estrategias, estan más cerca de un aprendizaje significativo.

Lo anterior se justifica por otro comentario hecho por Miguel de Guzmán: "Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en el hincapié de la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más bien que en la mera transferencia de contenidos.

La matemática es sobre todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas[9](se trata de estrategias que se pueden utilizar para resolver tareas y salir triunfantes ante las situaciones a resolver) adecuadas para la resolución de problemas en general, por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas adecuadas en cada materia."[10]

Las ventajas anteriormente señaladas, aquellas que se derivan de la estimulación autónoma de resolver los problemas, son alcanzadas en un lapso de tiempo mayor si quienes dirigen las actividades no se esfuerzan en conocer a fondo el contexto histórico que enmarcan los conceptos que desean transmitir.

Por ello es imprescindible que el profesor estudie la historia de las matemáticas, ya que si conoce la evolución de las ideas, sabrá el lugar que ocupan y los posibles alcances y consecuencias de las teorías que de ellas se derivan.

A través de la historia, es más sencillo inducir a los alumnos a adquirir un verdadero interés por la materia. El marco histórico no sólo contribuye en la contextualización del conocimiento matemático, sino que también es de gran utilidad para reafirmar las ideas adquiridas en otras materias. Así otras disciplinas científicas e incluso sociales gestadas en una misma época, podrán sumergirse en el mismo contexto. Esto es de vital relevancia ya que la tendencia moderna es enseñar la ciencia como un todo y de manera inter y multidisciplinaría.

---

[9] Etimológicamente significa "arte de la invención", y es una técnica de investigación en la que se expone la manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como pueden ser el tanteo, las reglas empíricas, etcétera.

[10] Ibidem pág. 6

Por ejemplo, los profesores de bachillerato pueden plantear lo siguiente para relacionar varias materias:

"La Segunda Guerra Mundial se desarrolló de 1939 a 1945, y en ella tomaron parte un gran número de países de Europa, América y Asia y tuvo como principales causas el desarrollo del imperialismo económico de los estados europeos, la intención de los países del eje Berlín-Roma-Tokio de propagar el fascismo y el nazismo en el mundo.

En ella tomaron parte unos 500 millones de personas de las cuales 50 millones perdieron la vida; las pérdidas materiales se cuentan en millones de dólares. Además Japón fue el último país en rendirse y esto fue debido al empleo de nuevas armas poderosas: "las bombas atómicas", una de las cuales fue utilizada en la ciudad de Hiroshima el 6 de agosto de 1945 y otra en Nagasaki el 9 de agosto del mismo año, ambas ocasionaron la destrucción total de las ciudades en cuestión de segundos. Las bombas se desarrollaron gracias al trabajo de varios físicos que colaboraron en sus aportaciones teóricas en el área de la física nuclear"[11].

En este ejemplo los alumnos tienen presente tanto el desarrollo histórico como la colaboración de diversas ciencias en la construcción de las bombas y los costos tanto materiales como económicos que son consecuencias de la guerra.

Pero retomando otras ventajas de aplicar este método de enseñanza son las siguientes:

- Al presentar el marco histórico-cultural-social el alumno identifica una matemática "polivalente", en la que la creación de los conceptos es influenciada por situaciones económicas, políticas y hasta religiosas que en algunos casos frenan o aceleran su formulación y desarrollo. Esto sirve como punto de comparación entre las distintas ideologías manejadas en cada época, por citar algunos ejemplos que pueden ser interesantes para los jóvenes de secundaria se tienen los siguientes: el abogado y matemático Francois Viète[12] quien sólo se dedicó a la matemática en sus ratos de ocio hizo importantes contribuciones a la aritmética, al álgebra, a la trigonometría así como a la geometría, todo esto gracias a la protección política y económica que le confería el rey Enrique III de Bretaña.

[11] Ysunza Uzeta, Salvador, et al. "Enseñanza activa de la historia universal (Seminarios)", cáp.5
[12] Para conocer más sobre la vida de este personaje de la ciencia recomiendo leer la biografía del mismo en los libros de: Morris Kline "Matemáticas la pérdida de la certidumbre" págs. 145 ss. , del mismo autor en su libro "Historia del pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días" Vol.2, o bien del libro del Dr. Joseph Ehrenfried Hofmann "Historia de la matemática" págs. 122 ss.

En contraposición con él, se tiene el ejemplo de Évariste Galois quien por ser muy joven no fue tomado en cuenta por sus profesores, entre ellos Cauchy quien, por cierto, no solamente puso el artículo de Galois en un sitio que luego no recordó, sino que ni siquiera apoyó al muchacho cuando éste le pidió una carta de recomendación para ingresar a la École Polytechnique que era la mejor escuela francesa de aquella época y donde se formaban los mejores matemáticos. Galois murió en un duelo a los veintiún años, pero antes de morir escribió, de su puño y letra, once cuartillas llenas de sus geniales ideas matemáticas. Estas pocas páginas sirvieron muchos años después para desarrollar una rama fundamental del álgebra Moderna: la Teoría de Galois.

- Hablar de historia permite a los estudiantes aprender que muchos de los procedimientos o estrategias que se usan actualmente para desarrollar el conocimiento matemático son tan viejos como las matemáticas mismas: pues desde hace más de seis mil años, los egipcios desarrollaron herramientas matemáticas muy sofisticadas para resolver problemas prácticos de comercio y agrimensura; a lo largo de los siglos eso no cambió, los problemas cotidianos a los que se enfrentan las distintas culturas son siempre una de las fuentes principales para la generación del conocimiento científico.

- También asimilan que el marco histórico muestra que las actividades comerciales enriquecen las matemáticas pues dan pauta a la generación de nuevos conceptos en algunas ramas de esta ciencia. Por ejemplo en el congreso nacional de la Sociedad Matemática Mexicana del año 2004 se planteó un problema de optimización en transporte terrestre en el cual, con base en algoritmos de Teoría de Gráficas, se propone una modificación para obtener las rutas óptimas y distancias más cortas en carreteras; la aplicación de estas rutas es en turismo, pagos de fletes, planificaciones y cálculo del costo de nuevas carreteras, lo cual es utilizado por la Secretaría de Comunicaciones y Transportes.

- También, al ser exhibidas las situaciones prácticas a resolver, los alumnos evalúan las ventajas y desventajas derivadas de las posibles soluciones a éstas, al mismo tiempo analizan ejemplos de las teorías que sustentan las soluciones, amplían su conocimiento del horizonte de aplicación de los nuevos conceptos, favorecen el acercamiento cotidiano de la teoría con la práctica y son capaces de resaltar la importancia del manejo acertado y eficaz de los conceptos que se le han planteado.

- De igual manera, lo anterior plantea la necesidad que hay de especializarse en algún tema de la ciencia que se estudia, gracias a ejemplos como el anterior, el alumno tiene una idea de la forma en cómo se pueden relacionar las distintas áreas de dicha ciencia con el objetivo en común de darle solución al problema dado. También rescata la importancia de la multidisciplinarización del tratamiento de los problemas, reafirmando con ello que no importa el área de estudio al que se enfrenten en el futuro, es fundamental que en todo momento lleven consigo una idea, aunque sea vaga, de los temas tratados en las distintas disciplinas pues esto enriquece el surgimiento de las soluciones. Todo esto contribuye a que el alumno comprenda que toda rama del conocimiento y en particular las matemáticas se convierte en algún momento en el punto de convergencia de varias áreas del saber.

Por lo anterior, considero conveniente que tanto el profesorado como el alumnado hagan el esfuerzo por mantenerse constantemente actualizados en la historia de las matemáticas, pues tomando en cuenta lo citado por Guzmán:

"Desgraciadamente, tanto para el estudiante que desea sumergirse en la investigación matemática como para el que quiere dedicarse a sus aplicaciones, o a la enseñanza, la historia de la matemática suele estar totalmente ausente en el plan obligatorio de la formación universitaria en nuestro país (Guzmán cita el caso de España, aunque yo agregaría el caso de México),…." [13]

"… a mi parecer sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica, como he dicho arriba, y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar el resto de su vida. Mientras llega una situación razonable yo me atrevería a aconsejar:

- La lectura atenta de algunos de los numerosos tratados de historia que han aparecido en castellano (Boyer, Kline, Colette, Grattan-Guinness, Pastor-Rey, etcétera).
-
- Acudir, para los temas del interés particular de cada uno, a las fuentes originales, especialmente de los clásicos.
-
- Leer las biografías de los grandes matemáticos, al menos en su forma sucinta en que aparecen en el Dictionary of Scientific Biography."[14]

[13] Miguel de Guzmán "Enseñanza de las ciencias y la matemática" pág. 9 y 10
[14] Ibidem Pág. 10

Por último considero que como una forma de facilitar y complementar su trabajo docente, el profesorado debe saber cómo se reflejan algunos elementos de la enseñanza formal en la vida de sus estudiantes, con el fin de buscar aplicaciones de la teoría en los intereses de los alumnos; esto evita el desfase entre lo que el docente tiene que transmitir y lo que el aprendiz espera recibir, lo cual como vimos, constituye la principal causa del desinterés que interfiere de manera fundamental en el aprendizaje[15].

Un ejemplo de la forma en que los profesores pueden aprovechar las predilecciones de los alumnos para adquirir algunos conocimientos matemáticos es mediante sus gustos: a los niños les fascina jugar, por ello encuentre estrategias para adaptar algunos conceptos en forma lúdica; también trate de relacionar los personajes o historias que estan presentes en la mente de cada alumno, por ejemplo los personajes de alguna serie animada de algún programa de radio o televisión que este de moda, cree una historia relacionándolos en torno a algún evento mediante el cual se muestre las aplicaciones o los conceptos matemáticos que se requiere resaltar, entonces con seguridad los conceptos serán bien recibidos por los niños.

Para ayudar al docente en esta tarea, en los capítulos V y VI cito ejemplos que introducen la relación de la historia de las matemáticas con algunos conceptos matemáticos y la forma en que se pueden presentar algunos conceptos en forma lúdica, dichos ejemplos son de utilidad al profesor que imparte cátedra a nivel preescolar, primaria y secundaria.

Pero antes de abordar tales ejemplos es necesario analizar, en el siguiente capítulo, la teoría que justifica la forma en cómo los niños llevan a cabo el desarrollo de los procesos del pensamiento, de manera que al conocer la fisiología de éstos, los maestros tengan un marco de referencia que les permita crear estrategias para facilitar el correcto y rápido aprendizaje de las matemáticas. Para esto se plantean las teorías psicológicas que son determinantes para la correcta adquisición del conocimiento.

---

[15] Párrafo inspirado en el comentario hecho por Roberto Markarian en su libro "La dimensión humana de la matemática. Ensayos sobre matemática y cultura Pág. 78.
Roberto Markarian es Doctor en ciencias matemáticas de origen Uruguayo, nacido el 12 de diciembre de 1946, ha publicado un sinnúmero de artículos en los que vincula a las matemáticas con la cultura, además ha sido profesor en diversas universidades en las cuales ha enseñado materias que se relacionan con los sistemas dinámicos y la teoría del caos.

CAPITULO II
EL DESARROLLO COGNITIVO DEL NIÑO

Comienzo este capítulo exponiendo la necesidad de comprender la psicología del proceso de aprendizaje en los niños, pues considero que para tomar decisiones importantes en el aula, los educadores deben saber cómo aprenden los niños las matemáticas. Como se pudo aclarar en el primer capítulo esto contribuye de manera significativa a mejorar el proceso enseñanza aprendizaje. El poseer ciertas bases de psicología puede ayudar a determinar si los materiales y la secuencia de un plan de estudio son los ideales para presentar un tema y hacer que los alumnos lleguen a dominarlo.

La enseñanza inicial de las matemáticas puede ser excesivamente difícil y desalentadora para los niños si no se presta la atención adecuada a la forma de pensar y de aprender de cada uno. Actualmente muchos de los alumnos aprenden y manejan de manera mecánica y sin pensar los conceptos que se les transmite y otros probablemente desarrollan dificultades de aprendizaje de los conceptos matemáticos más complicados, ya que al estar mal fundamentados los principios básicos se crean lagunas conceptuales que a la larga representan verdaderos mares de dudas que impiden al alumno avanzar de forma eficaz en la concepción y tratamiento de los problemas a resolver.

Esto en ocasiones es el resultado de una mala iniciación en la materia originada por la falta de conocimiento acerca del estado del desarrollo cognitivo que cada niño tiene, por ello en este capítulo expongo la teoría desarrollada por Piaget, destacado biólogo que estudió a fondo dichas cuestiones.

El proceso psicológico necesario para desarrollar la adquisición de los conceptos matemáticos, comienza desde la infancia que es el período obligado por el que debe de pasar el ser humano para comprender y adquirir todas las capacidades de abstracción propias del adulto, como lo son el razonamiento abstracto y la posibilidad de revertir sus pensamientos para concluir ciertas premisas[1]. Al respecto existen diversas teorías que sirven para refutar los hallazgos de "la teoría piagetiana de la infancia", la cual es enunciada con detalle más adelante.

Una de las alternativas teóricas más interesantes es la que desarrolló en Escocia el pedagogo Tom Bower que sostuvo que no comenzamos la vida con la única capacidad de responder por medio de reflejos a unos pocos estímulos específicos (como afirma Piaget). Bower aportó pruebas para demostrar que los bebés nacen con una representación del mundo de un alto nivel de abstracción, el desarrollo no consiste en un proceso que va de los reflejos específicos a los conceptos abstractos, como dice Piaget, sino, según Bower, en lo contrario.

[1] Una premisa es una afirmación o idea que se tiene como cierta y que sirve de base a un razonamiento o una discusión.

Es decir, los bebés desarrollan su pensamiento mediante un aprendizaje que consiste en convertir sus ideas abstractas en ideas más específicas conforme se familiarizan con el medio en el que actúan, así con la edad, el conocimiento que posee el bebé de los objetos llega a ser cada vez más específico.

En sus experimentos nota que primero el ser humano comienza a actuar como si dos objetos pudieran existir dentro o detrás de otro sin perder sus identidades, finalmente el bebé llega a la conclusión de que, en ciertas circunstancias, dos objetos pueden compartir entre ellos movimientos, de esta forma va identificando su entorno.

En resumen, la diferencia más obvia entre las concepciones del desarrollo temprano sostenidas por Piaget y Bower es que este último cree que los niños tienen idea de qué es un objeto desde el momento de su nacimiento, mientras que Piaget afirma que el recién nacido necesita casi un año para desarrollar la capacidad de formar una idea sobre los objetos.

Piaget, como otros psicólogos concluyen: las habilidades más importantes que debe de desarrollar el niño pequeño son las relacionadas con la estructura física del mundo; los bebés deben adquirir una conciencia de la existencia permanente de los objetos que desaparecen y reaparecen, deben comprender el tiempo, el espacio y la casualidad, sólo entonces pueden comenzar a comprender la clase especial de seres físicos que denominamos personas.

Piaget afirma que los bebés no distinguen entre personas y cosas hasta los ocho o nueve meses, así se comienza a percibir que los objetos tienen una existencia permanente y por consiguiente pueden comprender que algunos objetos difieren de otros.

Otra versión dice que casi todos los cambios "físicos" importantes en el mundo del bebé, están marcados o modelados por las respuestas de los demás, por leyes y convenciones sociales, por ejemplo los horarios que rigen la aparición de la comida, el arropaje para dormir o después de despertar, y los cambios de ropa cuando el clima varía; de esta forma en lugar de afirmar que los bebés primero comprenden el mundo físico y sólo después toman conciencia de las personas, sería mejor decir que el desarrollo se produce mediante un aumento en la comprensión socio-emocional.

Por citar otro ejemplo, el psicólogo ruso y crítico de Piaget, L.S. Vygotski[2] (1896 – 1934) escribió: "en el desarrollo de los procesos mentales superiores del niño cada función aparece dos veces: primero en el nivel social, y más tarde, en el nivel individual; primero entre personas, la ínter psicológica y después en el interior del propio niño, la intra psicológica. Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos"[3]. Por ello es importante comprender la estructura básica y los detalles de las primeras relaciones sociales del bebé así como el desarrollo del pensamiento humano.

---

[2] Lev Seménovich Vygotski nació en 1896 en Orcha, Bielorrusia, estudio durante cuatro años derecho en una universidad de Moscú y filosofía e historia en un centro paralelo de carácter liberal y progresista, posteriormente

Lo anterior cita la forma en cómo algunos psicólogos educativos consideran se debe abordar el tema del desarrollo cognitivo-conductual del niño el cual debe considerar tanto la interacción social como el surgimiento y desarrollo de los procesos intelectuales del niño.

Esto parece a primera vista alejado de la postura de Jean Piaget, pues él considera que la interacción social del niño con las personas que le rodean le ayuda a comprender mejor su entorno y con ello percibe mejor las estructuras físicas del mundo que le rodea, lo cual es fundamental para lograr su desarrollo cognitivo.

Lo anterior se constata en "la única obra escrita por Piaget desde una perspectiva sociológica: *Etudes Sociologiques (1965)*, donde parece reflejar la importancia de la interacción social del infante, pues menciona que mediante el intercambio de puntos de vista con otras personas, los niños se descentran, es decir, piensan desde la perspectiva de otra persona y, gradualmente, la coordinan con su propia perspectiva"[4].

En su teoría sociológica Piaget describe dos tipos de influencia social: la coerción y la cooperación, la segunda significa co-operar, es decir trabajar u operar conjuntamente y ésta implica un intercambio de ideas, un control mutuo de acciones conducidas objetivamente, y dice que "es la primera manera de una serie de formas de comportamiento que son importantes para la construcción y el desarrollo de la lógica"[5], por otro lado acerca de la coerción menciona: "es la imposición de reglas y el empleo de amenazas y castigos para controlar el comportamiento de los niños. . . . la coerción refuerza y consolida el pensamiento egocéntrico de los niños."[6]

Piaget mencionaba con frecuencia el desarrollo moral de los niños cuando hablaba del desarrollo de su lógica "La razón, en su doble aspecto tanto lógico como moral, es un producto colectivo [social]"[7]afirmaba porque tanto las reglas lógicas como morales deben construirse desde dentro mediante el intercambio de puntos de vista con otras personas.

Aunque Piaget recalcó la importancia de la interacción social, nunca comprobó su teoría con hechos empíricos, no especificó las condiciones bajo las cuales los niños demuestran o no progresos como resultado de la interacción social.

---

se encargó de enseñar psicología en al escuela de magisterio local, lo que le llevó a interesarse por esta ciencia, como psicólogo defendió la tesis de una génesis social del psiquismo, estructurada por los sistemas de signos, escribió varios libros con marcado carácter social y psicológico, ejemplo de ellos tenemos a "*Pensamiento y lenguaje"*, libro publicado en 1934, pero entre todos sus escritos destacan sus "*Obras selecta"s* que comprende no menos de 12 volúmenes, a causa de una tuberculosis fallece a los 37 años de edad en Moscú en el mes de junio de 1934, este psicólogo soviético se considera genial ya que en un corto espacio de tiempo colaboró escribiendo muchísima información acerca de diversos temas psicológicos y definitivamente a él se le representa como una de las principales figuras del post revolucionarismo Ruso.

[3] Vygotski, Lev Semiónovich. "Obras escogidas Vol. III: Problemas del desarrollo de la psique", pág. 183 - 206

[4] Constance Kamii, "El niño reinventa la aritmética III", pág. 68

[5] Ibidem pág 69

[6] Ibidem pág 69

[7] Ibidem pág. 75

Por mi parte coincido con la postura de Piaget cuando menciona que es finalmente el niño quien construye su propia visión del mundo, pero también creo es importante la opinión de Vigotski sobre la inter psicología, pues observo que en ciertas circunstancias el aprendizaje de los niños se logra hacer más significativo si se comparte de las experiencias que se adquieren al enfrentar y resolver ciertos problemas.

Por lo tanto, considero indispensable facilitar el ritmo de aprendizaje que manifieste cada niño, pero creo que es necesario en ocasiones apoyarle en su concepción de las situaciones que se presenten, es decir, propongo que la aptitud de los adultos al enseñar a los niños debe ser crítica respecto a las necesidades propias de cada infante, pues no se puede exigir más allá de lo que en principio es capaz de comprender en cada etapa de su desarrollo.

Al respecto si se observa que el infante ha logrado pasar a la siguiente etapa en su desarrollo cognitivo, entonces se debe facilitar los recursos que le permitan desarrollar las nuevas capacidades que esta por manifestar, considero necesario que a veces comparta las experiencias que ha tenido al tratar cierta información, para lograr que el niño avance en la forma de adoptar y resolver los problemas que enfrente, por ello me parece fundamental que constantemente se actualice en la forma de transmitir la información con el fin de lograr un verdadero interés por parte de quienes reciban los conocimientos.

Antes de abordar la teoría que desarrolló Piaget, surgen las preguntas: ¿quién fue Jean Piaget? y ¿por qué se le atribuyen tantas consideraciones en comparación con los científicos anteriormente mencionados?, para responderlas, presento en lo sucesivo parte de su biografía tomada del libro de Enrique García:

"Piaget nace el 9 de agosto de 1896 en Neuchâtel, Suiza, durante su infancia fue aficionado a las ciencias naturales. Su interés recaía en los fósiles, los crustáceos marinos y las aves, e incluso, emulando un poco a Leonardo Da Vinci, a los diez años produjo un proyecto para la construcción de un "autovap", automóvil con motor de vapor, que era una combinación de carro con locomotora. A los once años, al observar un gorrión albino en un parque de su ciudad, escribió un artículo y lo envió a un periódico de historia natural; fue publicado para júbilo de Piaget.

Gracias a esta publicación logró un contacto en el Museo de Historia Natural, en donde trabajó durante cuatro años escribiendo una serie de artículos acerca de moluscos, varios de ellos fueron publicados en la *Revue Suisse de Zoologie*.

Con veinte años de edad, su inquietud científica radicaba en poder establecer una vinculación entre los aspectos biológicos mentales y sociales, después de terminar el bachillerato, Piaget se inscribió en la facultad de Ciencias de la Universidad de Neuchâtel, en donde obtuvo su doctorado con una tesis acerca de moluscos de la región. Los intereses de Piaget estaban enraizados en la zoología, la embriología, le geología, la química y las matemáticas, lo que en apariencia estaba alejado de la psicología.

Su obra se centro en establecer una vinculación entre las ciencias humanas y las ciencias naturales y aportar la idea de que sin el concurso de las ciencias naturales la psicología no puede abordar el estudio de diversos problemas relacionados con la actividad intelectual del hombre. Su formación como biólogo y sus inquietudes en el terreno de la psicología explican en gran medida el que su búsqueda científica estuviera dirigida hacia una especie de embriología de la inteligencia, hacia el descubrimiento del origen de la inteligencia, en resumen, hacia la psicología genética.

En 1921, inicia una serie prolongada de trabajos, que aportan el cuerpo fundamental de una teoría que cambio a la psicología moderna. Inicialmente, Piaget se dedico a estudiar el lenguaje infantil, sus formas de razonamiento, sus teorías acerca de los fenómenos físicos y sus juicios morales. Durante el periodo que abarca de 1925 a 1929, originó trabajos preliminares sobre aspectos que implican tanto problemas de desarrollo intelectual como de problemas de física, matemáticas y biología, de aquí se desprende una gran cantidad de trabajos relativos a la génesis de las categorías físicas y lógico-matemáticas en el niño, desde el preescolar hasta el adolescente.

Piaget se introdujo en una fase de estudio acerca de la actividad de los niños tanto espontánea como inducida, en la que los sujetos eran sus tres hijos; fruto de esta investigación son tres clásicos de la obra de Piaget: *"El nacimiento de la inteligencia"* (1936), *"La construcción de lo real en el niño"* (1937) y *"La formación del símbolo en el niño"* (1945).

De 1939 a 1945 Piaget estudió el desarrollo de la percepción en el niño, con el objeto de establecer las relaciones entre la percepción y la inteligencia, así como poner a prueba las tesis de la corriente Gestalt; el segundo tipo de investigación que Piaget realizó se refería al estudio del desarrollo de las nociones del tiempo, movimiento, velocidad y lógica del pensamiento, a través del empleo de técnicas experimentales objetivas y de procedimientos analíticos inspirados tanto en la orientación clínica de la psicología y la psiquiatría como en los métodos experimentales de las ciencias naturales.

Durante la ocupación alemana, impartió una serie de conferencias en el *Collage de France*. El contenido de dichas conferencias fue publicado y actualmente es un clásico de la psicogenética: *"La psicología de la inteligencia"*. Al terminar la guerra, Piaget fue designado presidente de la comisión Suiza de la UNESCO y asistió a diversos eventos. Por encargo de esta institución escribió el folleto *"El derecho a la educación"* y le fue ofrecido por Torres Bodet[8] el puesto de subdirector general del Departamento de Educación. Durante algún tiempo ejerció ese puesto aunque manifestaba inquietud por haber abandonado sus investigaciones.

[8] Jaime Torres Bidet (1902-1974), escritor mexicano que tubo un puesto importante en la educación de nuestro país.

A pesar de sus múltiples compromisos, Piaget siempre se dio tiempo para continuar en el hilo de su búsqueda intelectual, gracias a la colaboración de estudiantes que constituían ya una verdadera "escuela" de la psicología genética. Después de redactar quince obras del desarrollo del niño, Piaget abordo la empresa de escribir su tratado de Epistemología[9] Genética.

En 1952, Piaget regreso nuevamente a la universidad de *La Soborna* e impartió cursos de psicología genética; alternó esta cátedra con sus actividades en el *Centro Internacional de Epistemología Genética* de Ginebra hasta el año de 1963, esta institución fue fundada por Piaget en 1956 con la ayuda de la fundación Rockefeller, y ocho años después recibe el apoyo del *Fondo Suizo de Investigación Científica*.

De 1954 a 1957, Piaget asumió la presidencia de la *Unión Internacional de Psicología Científica*, y escribió su obra *"Biología y conocimiento"*, en la cual explica la correspondencia existente entre las estructuras cognitivas y las estructuras orgánicas. Entre 1958 y 1960 recibió el doctorado Honoris Causa de las universidades de Varsovia, Manchester, Oslo y Cambridge. En 1961 publicó, junto con el matemático E. W. Bety, un volumen de *"Epistemología genética"*

.

En 1974 dió a conocer sus dos obras más importantes: *«Recherches sur la contradiction y Apprentissage et Structures de la connaissance»*. El año de 1975 Piaget publicó *"L´equilibration des structures cognitives"* considerada su obra cúspide en la que ofrece la síntesis de los últimos avances de su pensamiento y plantea el problema de los mecanismos psicológicos del progreso de la razón humana" [10].. García no cita el año en que Piaget fallece, sin embargo, al respecto puedo aclarar que falleció el 16 de Septiembre de 1980.

Indudablemente su objetivo era investigar cómo se aprenden los conocimientos, incluyendo por supuesto los matemáticos, mediante el recurso original de preguntar a niños y adolescentes; sus preguntas fueron orientadas no solamente a lo que se puede aprender sino a todo lo que el ser humano elabora espontáneamente. Se preguntaba ¿cómo sabemos lo que creemos saber? y ¿cómo sabemos si lo que creemos saber es cierto?. Al respecto e históricamente, se han desarrollado dos corrientes principales del pensamiento para responder a dichas cuestiones: el empirismo y el racionalismo.

Los empiristas como Locke, Berkeley y Hume, mantienen que la fuente del conocimiento es externa al sujeto y que aquel es interiorizado a través de los sentidos. Afirman que, al nacer el individuo es como una hoja en blanco en la que se "escriben" las experiencias a medida que crece; Locke por su parte afirmó en 1960: al principio los sentidos dan paso a ciertas ideas, y llenan el armario aún vacío, y la mente progresivamente se familiariza con algunas de ellas, que son alojadas en la memoria.

---

[9] Conocida como "gnoseología" o teoría del conocimiento, es parte de la filosofía, se interesa por entender el conocimiento en sí mismo.

[10] Enrique García González, "Piaget" capítulo 1, págs. 9 -18

Mientras que los racionalistas como Descartes, Spinoza y Kant, no negaban la importancia sensorial, pero insistían en que la razón es más poderosa, porque nos permite conocer con certeza muchas verdades que los sentidos nunca pueden comprobar, también indican que como nuestros sentidos nos engañan con frecuencia, no podemos esperar que las experiencias sensoriales nos proporcionen un conocimiento fiable. En oposición a las ilusiones se tienen los teoremas matemáticos citados por los racionalistas, ya que en ellos se aplica el rigor, la precisión y una forma deductiva que les sirve para apoyar sus teorías. Los racionalistas afirman que ciertos conocimientos o conceptos son innatos y que se desarrollan en función de la maduración.

Piaget observó elementos de verdad y de falsedad en ambos campos, como científico formado en biología estaba convencido de que la única manera de responder a las cuestiones epistemológicas era estudiarlas científicamente en vez de hacerlo mediante la especulación. Con esta convicción decidió que una buena manera de estudiar el conocimiento empírico y la razón del hombre, era prestando atención al desarrollo del conocimiento en los niños. Aunque notaba que tanto la información sensorial como la razón eran importantes, finalmente sus preferencias se desbocaban por el racionalismo.

Utilizando algunos criterios racionalistas Piaget desarrolló una serie de conceptos bastante conocidos llamados *"Estadios o períodos del desarrollo"*. Éstos muestran una continuidad desde el punto de vista psicológico en la evolución de la percepción del niño. Para Piaget, la evolución de la representación del mundo real, llamado el lenguaje, es distinta a la evolución de las operaciones concretas, que son relaciones construidas por cada individuo referente a los objetos físicos.

"Al desarrollar ambas representaciones se asiste a un doble fenómeno ya que por una parte se observa cómo se forman las estructuras a las que podemos seguir paso a paso desde los primeros lineamientos, y por otra asistimos a su terminación, es decir, a la construcción de lo que le llama 'niveles de equilibrio'.

Piaget llama estadios o períodos a aquellas etapas que obedecen a las siguientes características:

1) El orden de sucesión de las adquisiciones es constante. Los estadios pueden caracterizarse por su cronología que depende de la experiencia anterior de los individuos y no solamente de su maduración, pero sobre todo se caracteriza por el medio social que puede acelerar o retrasar su aparición, e incluso impedir su manifestación.

2) El carácter integrado de las estructuras construidas en una edad dada se convierten en parte integrante de las estructuras de la edad siguiente, por ejemplo, el objeto permanente que se construye en el nivel sensorio-motriz será un elemento integrante de las nociones de conservación posteriores.

3) Una estructura de conjunto, y ésta noción adquiere un sentido preciso en el dominio de la inteligencia, por ejemplo una estructura en el nivel de las operaciones concretas es un agrupamiento como los que se encuentran en la clasificación o en la seriación.

4) Un nivel de preparación y de terminación, por ejemplo en las operaciones formales el estadio de preparación será todo el período de los once a los trece años y para la terminación será el nivel de equilibrio que aparece en ese momento.

5) La repetición o la reproducción del mismo proceso formado a diferentes edades, estas se dividen en dos formas, la primera cuando una misma operación se aplica a diferentes contenidos; la segunda es la reconstrucción de una estructura por medio de otras operaciones.

Dicho esto, dividiremos el desarrollo intelectual en tres grandes periodos:"[11]

"PERÍODO DE LA INTELIGENCIA SENSORIO-MOTRIZ.

Se llama así porque todavía no existe en el niño una función simbólica, es decir, la capacidad de representar personas y objetos, este período abarca aproximadamente los dos primeros años de vida del recién nacido, aquí se conforman las subestructuras cognoscitivas que servirán de base a las posteriores construcciones perceptivas e intelectuales (dichas subestructuras son las relacionadas con el movimiento propio del cuerpo y que menciona más adelante).

Este período se basa exclusivamente en una coordinación de percepciones y movimientos sin la intervención de la representación o del pensamiento. En él se presenta un desarrollo evolutivo del niño por parte de los movimientos espontáneos, se alcanza la coordinación de las reacciones circulares "primarias", es decir las relativas al propio organismo y en particular a aquellas que coordinan la mano y el cuerpo, aparece el clásico ejemplo de chuparse el dedo (esta parte se refiere a lo que se le conoce como la motricidad).

Y posteriormente se comienza con las reacciones circulares "secundarias", es decir, las relativas a los objetos manipulados, aquí se adquiere la coordinación entre la visión y la aprehensión ojo-mano, es un estadio de transición entre los hábitos y los actos de inteligencia (también se reconoce esto último como la capacidad de reconocimiento de patrones).

También se comienza con la búsqueda de los objetos desaparecidos pero sin coordinación de los desplazamientos sucesivos, por ello se da una variación de las condiciones mediante una exploración y tanteo dirigido, utilizando éste medio se llega al descubrimiento de nuevos objetos (en esta parte se hace una ligera mención de la interacción social del niño, pues gracias a que los adultos le proporcionan los objetos, el infante es capas de reconocerlo, dado que por sí mismo no es autosuficiente para desplazarse en torno al medio que le rodea).

---

[11] Jean Piaget, "Problemas de psicología genética", pág.20.

Aquí destaca una organización de los movimientos y de los desplazamientos que, sobre el propio cuerpo se van centrando poco a poco y desembocan en un espacio en el que el niño se sitúa él mismo como un elemento entre los otros, esta forma de comportarse señala el término del período sensorio-motriz y la transición con el siguiente. El niño es capaz de encontrar medios nuevos por combinaciones interiorizadas que dan como resultado una comprensión repentina llamada *insight*"[12]

"En el aspecto cognoscitivo se observa que en toda conducta se da un intercambio entre el medio ambiente y el sujeto; pues para Piaget existe una distinción entre tres tipos de conocimiento, según sus fuentes y modos finales de estructuración, son los llamados conocimiento físico, conocimiento lógico-matemático y conocimiento social también llamado convencional. El físico es el referente a los objetos en su realidad externa, sus características exteriores como el color, el peso, las dimensiones, etcétera; estos se conocen mediante la observación y manipulación de los mismos.

El lógico-matemático consiste en relaciones creadas por cada individuo, por ejemplo, si vemos una ficha roja y una azul pensamos que son "diferentes" esta diferencia es justamente una relación creada entre los objetos, y ésta se adquiere de manera no empírica sino conceptual. Por otro lado el ámbito social se refiere a convenciones acordadas entre las personas, por ejemplo el día de navidad sabemos que es el 25 de Diciembre, para la adquisición de este conocimiento por parte del niño es imprescindible la aportación de otras personas, y normalmente se adquiere generacionalmente.

Esta última representa una muestra más de la forma en que Piaget concibe a la interacción social importante para el descubrimiento de las nociones que envuelven el entorno del niño.

Entonces el niño que atraviesa por este estadio presenta solamente el conocimiento físico, pues se comporta de manera empírica la mayor parte del tiempo ya que la comprensión de su entorno se limita a lo que puede llegar a entender por medio de los sentidos, y claramente en este período su conducta supone dos aspectos esenciales: el afectivo y el cognoscitivo. El afectivo asigna un objetivo a la conducta, pues le da un valor a sus fines y proporciona las energías necesarias para la acción. Mientras que el cognoscitivo facilita los medios y la técnica para alcanzar el fin" [13].

El siguiente ejemplo sirve para comprender mejor lo anterior: Un niño que no recibe cariño por parte de sus mayores normalmente se muestra alejado, agresivo y presenta poca interacción con personas ajenas a su familia, por ello manifiesta en ocasiones una conducta antisocial que exige de él cierta energía para efectuar las acciones propias que manifieste su agresividad, y en el ámbito cognitivo el niño aprende ciertos gestos, modales, movimientos y palabras, en decir, se apropia de las técnicas que le facilitan la expresión de su poco gusto por interactuar con gentes ajenas a su realidad.

---

[12] Lo anterior es tomado de las referencias de García Gonzáles capítulo 4 y de la obra anteriormente citada de Jean Piaget.

[13] Constance Kamii. "El niño reinventa la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget", pág. 17

Las estructuras sensorio-motrices son la base de las operaciones posteriores del pensamiento; la inteligencia deriva de la acción porque transforma los objetos y lo real, y el conocimiento es principalmente asimilación activa y operatoria. Entonces la percepción no puede construirse por ella misma independientemente de la acción. La percepción presta ayuda a la actividad sensorio-motriz y la percepción se enriquece por esta actividad.

"A medida que el niño crece, las actividades perceptivas se desarrollan en calidad y en número, corrigiendo así ilusiones y deformaciones. Pero también a medida que aumenta este desarrollo se producen nuevos errores que se intensifican con la edad. Podemos resumir que las nociones de inteligencia no se derivan de las percepciones, sino que proceden de la acción o de las operaciones. Por ejemplo, las nociones lógico matemáticas suponen un juego de operaciones que son abstraídas de las acciones ejercidas sobre los objetos y no de los objetos percibidos".[14]

"Hacia los dos años comienza un segundo período llamado PERÍODO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS DE CLASES, RELACIONES Y NÚMERO Dura hasta los siete u ocho años, su aparición se caracteriza por la formación de la función simbólica y semiótica[15]; la que permite representar objetos por medio de símbolos o signos que se pueden diferenciar, la función simbólica cede a la inteligencia sensorio-motriz prolongarse en pensamiento pero hay un par de circunstancias que retrasan la formación de operaciones propiamente dichas. La primera circunstancia se refiere a la necesidad del tiempo para interiorizar las acciones en pensamiento. La segunda es que la reconstrucción supone una descentralización continua mucho mayor que en el nivel sensorio-motriz."[16]

Las circunstancias antes mencionadas son sencillas de imaginarse al hacer matemáticas, pues los niños tardan varios años en aprender el significado y las representaciones gráficas y verbales de los números, la construcción de dichos conceptos requiere de que el niño se observe a sí mismo como parte de un mundo que contiene elementos que pueden ser clasificados y contabilizados, lo cual implica que el niño ya no se ha de considerar como el centro del pequeño universo que le rodeaba, pues ahora necesita interactuar con otras personas para realizar las operaciones concretas que se le presentan.

Se llaman operaciones concretas a las que versan sobre objetos manipulables, en oposición a las operaciones formales que giran en torno a hipótesis o enunciados simplemente verbales que corresponden a eventos que suceden o pueden llegar a suceder y que ya no requieren forzosamente de objetos manejables que los representen.

[14] García capítulo 4.
[15] Significa la manera en que produce, funciona y recibe los diferentes sistemas de signos de comunicación en los individuos o colectividades.
[16] Jean Piaget, "Psicología y Pedagogía", pág. 36

"Este período, expresa la transformación del niño en adolescente y consiste en dos partes esencialmente: la preparación funcional de las operaciones, también llamada REPRESENTACIONES PREOPERATORIAS y la estructuración propiamente llamada REPRESENTACIONES OPERATORIAS.

LAS REPRESENTACIONES PREOPERATORIAS.
Se manifiestan de las siguientes formas:

1) Desde los dos a los tres años y medio o cuatro: aparece la función simbólica y comienza la interiorización de los esquemas de acción en representaciones, esta interiorización tiene dos hechos positivos:

    a) La aparición de la función simbólica en sus diferentes formas: lenguaje, juego simbólico (o de imaginación), imitación diferida y probablemente comienzo de la imagen mental concebida como una imitación interiorizada de lo que observa en su entorno.

    b) Nivel del nacimiento de la representación, probablemente empiece a formarse la imagen mental (hago en seguida un ejemplo de lo que Piaget concibe como imagen mental: cuando nos platican de un animal que a primera vista no parece conocido se comienza por imaginarlo según la descripción que de él hacen, hasta que gracias a los recuerdos que se tienen almacenados se logra identificar la figura que corresponde a lo que nos dicen y entonces se logra el reconocimiento del animal del que se hace referencia).

2) De los cuatro a los cinco años y medio se manifiestan las organizaciones representativas basadas ya sobre una asimilación a la propia acción; aquí las representaciones se organizan unas con otras y se asimilan a la acción propia. Si bien no hay conservación de cantidad o de conjuntos, pero sí existen configuraciones perceptivas.

    (Por ejemplo en el siguiente experimento: se toman dos embases de distintos tamaños uno pequeño pero ancho como una vaso y el otro grande y alargado como una probeta, y de forma que ambos sean capaces de contener la misma cantidad de líquido, luego frente al niño se vacía el líquido contenido en uno de ellos en el otro y se pregunta si tienen la misma cantidad de líquido, entonces los niños no son capaces de reconocer que aunque el tamaño del embase es distinto el líquido contenido en amos no cambió).

3) De los cinco años y medio a los siete u ocho se manifiestan regulaciones representativas articuladas, en las que se presenta una fase intermedia entre la conservación y la no conservación a través de representaciones verbales. Empiezan a ligarse los estadios con las transformaciones (articulación creciente de seriación y clasificación)."[17]

Otro experimento que corresponde a estas edades es el siguiente: si se colocan en una hilera 10 canicas de un mismo color y paralela a esta se hace otra hilera de canicas pero de distinto color y más separadas entre ellas, entonces al preguntar al niño ¿dónde hay más canicas?, entonces los niños ya son capaces de reconocer, luego de un examen un tanto minucioso que en ambas hileras hay el mismo número de canicas, existen variantes de este experimento que consisten en intercalar los colores de las canicas o la forma de las hileras, también se puede variar la separación entre las canicas e inclusive se pueden agregar y retirar canicas frente al niño y formularle la misma pregunta, pero siempre el infante es capaz de expresar verbalmente en forma correcta el resultado, pues ya son capaces, siempre que estén frente a ellos las canicas, de hacer relaciones entre el número de elementos de cada hilera de canicas.

"LAS REPRESENTACIONES OPERATORIAS.
Se caracteriza por los siguientes puntos:

1) A partir de los siete u ocho años los niños son capaces de realizar procesos lógicos elementales, razonando de forma deductiva de la premisa a la conclusión, pero sólo pueden aplicar la lógica a formas o acontecimientos elementales o en percepciones y representaciones concretas.
2) El niño utiliza estructuras de conjunto, que constituyen la base funcional del pensamiento lógico abstracto, desarrolla –al principio modestamente- una serie de funciones que han empezado a perfilarse en el periodo anterior, como la seriación y la clasificación, aunque aún no permiten utilizar combinaciones generales abstractas (en el caso del experimento de las canicas aún necesita observar en forma directa los conjuntos de las hileras para hacer las comparaciones y llegar al resultado, si se aleja al niño de las hileras y se pregunta ¿cuál de las hileras de canicas: la roja o la azul, contiene mayor número de elementos?, el niño regresará indudablemente a observarlas para emitir un juicio acertado).
3) Un niño de siete a diez años puede ordenar fácilmente una serie de objetos atendiendo a su altura o su longitud, y resolver problemas verbales sencillos, pero son incapaces aún de criticar la lógica que utilizan otras personas para resolver los problemas que se les presentan, resuelven problemas por ensayo y error, y no por medio de una estrategia sistemática y eficiente.

[17] Redactado a partir de la lectura de los textos de García "Piaget" capítulo 4 y de Piaget "Psicología y Pedagogía" capítulos 2 y 3.

Entre los once y los quince años, se inicia el PERÍODO DE LAS OPERACIONES FORMALES el cual permanece y los acompaña por el resto de su crecimiento hasta convertirse y desarrollarse como adultos, en éste se identifican las siguientes características:

1) Desarrollan la capacidad para comprender la lógica abstracta, pueden considerar lo que es probable y ya no están sujetos al aquí, el ahora o a los objetos manipulables como en el período anterior.

2) Manejan la reversibilidad de las operaciones, la cual les permite llegar a las premisas a partir de las conclusiones que se obtienen de ciertos razonamientos.

3) Los adolescentes analizan hipótesis que de hecho pueden ser imposibles, anticipan, planean, analizan, comprenden las metáforas y construyen teorías.

4) Pueden mantener muchas cosas en sus mentes al mismo tiempo. Generan varias alternativas cuando se les pide que resuelvan una dificultad, y revisan el mérito de la solución en sus cabezas.

5) Los individuos evalúan preguntas amplias, intentando encontrarle sentido a la vida, a su identidad, las realidades sociales, la religión, la justicia, el significado, la responsabilidad y cosas parecidas.

6) Las contradicciones les molestan; a menudo se ve la introspección, se concentran en pensar sobre sí mismos. Al final de esta etapa se posee el mismo aparato mental que los adultos."[18]

En resumen: Piaget suponía que las personas heredan algunas tendencias básicas de enfrentamiento ante los problemas: como la adaptación al medio por asimilación, acomodación de los procesos del pensamiento y organización de los pasos a seguir. También afirma que los niños progresan gradual y continuamente a través de diversas etapas de cognición: sensorio-motriz, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales. A pesar de que las observaciones de Piaget suelen ser muy valoradas, algunas de sus conclusiones no concuerdan con lo mencionado por otros científicos conductuales, por ejemplo con Vigotski por la opinión que cada uno tiene sobre la interacción social.

También es importante mencionar que los estadios o períodos mencionados no siempre los presentan todas las personas, pues existen aquellas que no logran entrar en el período de las operaciones formales, dado que no se procura el desenvolvimiento de las estructuras necesarias para lograr la adquisición de los elementos que caracterizan a esta etapa; por esta razón es importante que los educadores procuren actividades que permitan a los educandos lograr la plena realización de todas las etapas descritas, sólo así se responde al compromiso que se adquiere al adoptar la labor educativa.

[18] Tomado del libro de Linda L. Davidoff. Introducción a la Psicología, Pág. 448 - 457.

Lo anterior me permite concluir que es importante comprender la forma en cómo los niños se desarrollan con el fin de crear estrategias para lograr que adquieran las operaciones básicas de manera más accesible y agradable pues estas dependerán del estadio en que se encuentre, las estrategias son fundamentales en el proceso de asimilación de los conceptos matemáticos.

Con este objetivo, en los siguientes capítulos exhibo algunas características que son importantes para los períodos que colaboran en la construcción del pensamiento lógico matemático.

Así mismo en el anexo de la tesis se encuentra un capítulo dedicado a la morfología y fisiología del cerebro humano, pues creo que es importante conocer la forma en cómo este funciona normalmente para orientar aquellos casos de alumnos que presenten ciertos problemas al desarrollar los pensamientos abstractos necesarios para la adquisición de los conceptos lógico matemáticos.

CAPITULO III.
CARACTERÍSTICAS DEL PERÍODO DE LAS OPERACIONES CONCRETAS.

La forma en cómo un individuo se apropia del lenguaje matemático ha sido una interrogante para muchos científicos de diversas épocas inclusive hasta nuestros días. Como mencioné en el capítulo anterior, Jean Piaget se propuso como meta, investigar cómo ocurre la apropiación del conocimiento.

Como ejemplo se tiene que un niño de pocos años aprende los signos de los números en el hogar o en la escuela, más no podría hallarlos por sí mismo tal y como los conocemos, puede que el niño tenga su propio concepto y manejo del número, el cual se va manifestando lenta y paulatinamente según va creciendo. Su mente, sin embargo, actúa sobre la realidad de una manera más complicada, que se le enseña en la escuela donde desarrolla posteriormente los conceptos numéricos.

Es decir existe en los niños un concepto ambiguo de número, que es producto de ciertas acciones del individuo, externas e internas, que tienen una estrecha relación con el principio de conservación y correspondencia de objetos. La construcción del concepto de número natural nunca podrá ser un proceso espontáneo en el niño; quizá se acelera a través del trabajo con un adulto, pero el niño que no cuenta con una guía, jamás podrá alcanzarlo ni por redescubrimiento ni por invención.

Con respecto al desarrollo del número natural se menciona en el libro de Baroody lo siguiente: "Al parecer, los niños pequeños poseen un proceso de enumeración o correspondencia que les permite distinguir entre pequeños conjuntos de objetos. El alcance y la precisión del sentido numérico de un niño pequeño son limitados,……. aunque distinguen entre números pequeños, quizá no pueden ordenarlos por orden de magnitud."[1] Y para adquirirlo explica: "A pesar de todo, el sentido numérico básico de los niños constituye la base del desarrollo matemático. Los preescolares parten de este sentido del número y desarrollan conocimientos intuitivos más sofisticados. Es a partir de la experiencia concreta de la percepción directa, que los niños empiezan a comprender nociones como la magnitud relativa."[2]

"Posteriores pruebas demostraron que los juicios intuitivos sobre los conjuntos que tenían más elementos se basaban en indicios perceptivos como la zona abarcada por cada conjunto. Sin embargo, como los niños basan sus juicios en las apariencias, las comparaciones que hacen entre las magnitudes pueden ser incorrectas."[3]

---

[1] Baroody, Arthur J. "El pensamiento matemático de los niños", pág 41.
[2] Ibidem págs 42,43 y 44.
[3] Constance Kazuko Kamii. "El niño reinventa la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget"capítulo 1.

Otro punto importante para la noción del número es la que corresponde a la conservación de la cantidad: "En primer lugar, se establece la igualdad de dos conjuntos por equivalencia (por ejemplo haciendo hileras que tengan el mismo número de objetos) . . . a continuación se modifica el aspecto de uno de los conjuntos para ver si el niño continúa creyendo o no que los dos conjuntos son coordinables (tienen la misma cantidad). Una vez modificada la longitud se vuelve a preguntar al niño si las dos hileras tienen la misma cantidad. Como la longitud ya no refleja fielmente la cantidad, los niños que se basan en el aspecto para juzgarla se equivocan."[4]

"Piaget denominó *no conservación* a este fenómeno porque el niño no mantiene (conserva) la relación de equivalencia inicial tras una transformación del aspecto (irrelevante para la cantidad). Es evidente que la comprensión intuitiva que tienen los niños de la magnitud y de la equivalencia es imprecisa."[5] De este hecho concluyo que es evidente que el niño no tenga por sí mismo la noción de "número natural" desde temprana edad como se mencionó con anterioridad.

Piaget desarrolló a partir de una inmensa obra experimental, una serie de conceptos que son bastante conocidos, sus pruebas demuestran la existencia, en lo niños de poca edad, de una etapa en la cual los pequeños no están seguros de que una cantidad no cambie pese a las modificaciones perceptivas de los objetos. A partir de los cuatro o los cinco años, niños que ya saben contar pueden decir que hay cinco dedos cuando estos se ven extendidos, y si se juntan los de ambas manos los niños ¡volverán a contarlos, como si los dedos pudieran ser más o menos cuando los unen con otros!.

A partir de la propuesta teórica heredada de los estudios de Piaget, que consiste en apuntar que algunos de los esfuerzos de enseñanza pueden parar en la nada, no porque el alumno no quiera aprender o no ponga interés en el estudio, sino porque no los alcanza a entender, por lo menos en la manera en que se plantean los problemas en la clase de matemáticas.

Según Piaget hay barreras que la inteligencia pone y obligan a buscar estrategias especiales, por ejemplo, al enseñar la proporcionalidad noto que, no se consigue hacer que el niño de siete u ocho años entienda las proporciones, siempre se puede hacer trampa y tal vez se consiga que las identificara e inclusive que las maneje, pero no se logra que las comprenda cabalmente, pero cuando el niño esta en la escuela secundaria y su inteligencia se halla en tránsito entre un nivel de cognición y otro, una buena dirección de aprendizaje es capaz de consolidar lo ya logrado y dar pie para lo que está por venir; es decir la tarea en el aula no es determinar el cambio en el nivel de desarrollo evolutivo, pero sí es ofrecer apoyos cuando la transformación se está gestando.

---

[4] Constance Kazuko Kamii. "El niño reinventa la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget", capítulo 1

[5] Párrafo inspirado del libro de Arthur J. Baroody, "EL pensamiento matemático de los niños", pág. 109.

El período de tránsito al cual me refiero es en el que se transforma el pensamiento concreto en pensamiento abstracto, pero no puedo dar las explicaciones detalladas de tales hechos sin primero tratar de aclarar la forma en cómo el niño se apropia del lenguaje que le permita adquirir los conceptos de los cuales hará abstracción después.

Todo aprendizaje implica un redescubrimiento o reinvención y supone siempre algo parecido a recorrer, de un modo acelerado y eficiente, las etapas fundamentales del desarrollo histórico de las matemáticas, por ello la tarea del docente es lograr que dichas etapas vuelvan a nacer en la mente de los alumnos, de esta manera, si en la escuela se aprovechan al máximo los recursos y las técnicas didácticas, el alumno logra el aprendizaje con confianza en sí mismo y también abre el camino para la adquisición del conocimiento en otras áreas.

Para Piaget las fuentes del proceso de adquisición del pensamiento lógico y matemático están en las acciones, las cuales se interiorizan; él afirma que el concepto de número, que es básico para la comprensión de posteriores conceptos matemáticos más complejos, brota de una especial conjunción de las acciones del sujeto y de su coordinación interna, pero para que éste se mantenga invariable en la mente del niño, se requiere de algún símbolo con el cual se pueda asociar, de manera que cada vez que el niño lo encuentre, sea capaz de asociarle el concepto adecuado, para ello es necesario que el pequeño maneje un nivel de lenguaje que sea óptimo, el cual y como mencioné al final del capítulo anterior, comienza a ser manejado por el ser humano a partir de los dos o tres años.

Pero en esencia, ¿qué es el lenguaje?, para dar una respuesta necesito aclarar que los psicolingüistas (los psicólogos que estudian el lenguaje) lo definen como la forma más complicada de la comunicación intencional, en la cual se relacionan de manera sistemática símbolos (sonidos, letras o signos) con significados y se proporcionan las reglas para combinar y recombinar los símbolos; éste representa mucho más que un mero sistema de comunicación, pues se usa como expresión del pensamiento, para establecer relaciones interpersonales sin ningún interés en particular, en lo que respecta a la comunicación, como juego, y para todo tipo de fines humanos.

En general algunos lingüistas creen que el lenguaje esta caracterizado por cuatro puntos básicamente:

<u>Orden</u>: Las personas construyen las oraciones conforme ciertos principios generales que los lingüistas llaman "reglas de gramática" las cuales son distintas a las que se aprenden en la escuela, que reciben el nombre de "gramática prescriptiva" (ésta es usada frecuentemente para usos literarios o profesionales).

Significado: Muchos vocablos se refieren a objetos y sucesos, por ejemplo: "caballo" hace alusión a un animal de cuatro patas que en promedio pesa media tonelada y tiene crines y cola; aquí cabe el comentario hecho por Vygotski: "la comprensión no se reduce a la reproducción figurativa del objeto y ni siquiera a la del nombre que corresponde a la palabra fónica; consiste más bien en el manejo del propio signo, en referirlo al significado, al rápido desplazamiento de la atención y al desglose de los diversos puntos que pasan a ocupar el centro de nuestra atención. El proceso que se define como comprensión habitual consiste en establecer relaciones, en saber destacar lo importante y pasar de los elementos aislados al sentido del todo."[6]

De aquí que el orden de las palabras en la oración es esencial para la emisión de los pensamientos. En resumen, para descifrar el mensaje, las personas toman en cuenta el significado de las palabras y el orden en las combinaciones de dichas palabras.

Función Social: Las personas hablan por razones sociales para compartir ideas e información y cuando se conversa, se siguen reglas sociales que se aprenden en la niñez, entre ellas, esperar el turno, responder de manera activa y justificar los enunciados al oyente. La postura sociocultural de Vygotski asevera que el desarrollo cognoscitivo se articula en la interacción social y el desarrollo del lenguaje; resalta la importante función que cumplen los adultos y los compañeros más capaces en el aprendizaje infantil, menciona que esta ayuda ofrece un apoyo inicial mientras los estudiantes alcanzan el grado de comprensión que necesitan para resolver más tarde los problemas por sí mismos.

Creatividad: La mayor parte de las frases que forma el ser humano durante su vida son oraciones nuevas estructuradas a partir de refinar las que ya se tenían, las personas combinan las oraciones para expresar las ideas y pensamientos que suelen tener y las hacen de forma original mientras aprenden las reglas que rigen la combinación de dichas estructuras lingüísticas.

Una importante implicación de la teoría expuesta por Vygotski en relación a las características del lenguaje que acabo de citar, es que debe darse a los estudiantes oportunidades para el aprendizaje cooperativo y alentarlos a emplear el lenguaje para organizar sus pensamientos tratando de hacer hincapié en la relevancia de la interacción social del medio.

Ahora considero interesante saber que al igual que con las operaciones básicas en las matemáticas (suma, resta, multiplicación y división), dentro del lenguaje se da una jerarquía. En la parte inferior de la escala jerárquica se encuentran los sonidos básicos llamados fonemas, cuando estos se combinan crean otras unidades que poseen significado llamadas morfemas.

---

[6] Vygotski, Lev Semiónovich. "Obras escogidas Vol. III: Problemas del desarrollo de la psique" págs. 183 - 206.

Los morfemas se unen para formar lo que conocemos como palabras; posteriormente se encuentran las frases, definidas como dos o más palabras dispuestas conformes ciertas normas y al final, en la parte superior de la jerarquía se encuentran las oraciones conformadas por frases. El orden y la estructura de la escala jerárquica están dispuestos por un conjunto de reglas sintácticas.

La forma en cómo el ser humano se comunica fue estudiada por el brillante lingüista Noam Chomsky[7], quien plantea que el lenguaje es consecuencia de una facultad humana innata y que la finalidad de la lingüística consiste en determinar qué propiedades universales existen, así como establecer la "gramática universal" que pudiera explicar el amplio espectro que abarcan todas las lenguas humanas posibles.

El análisis del lenguaje que hace Chomsky parte de las oraciones básicas que se desarrollan y terminan en una variedad de combinaciones sintácticas en las que se aplican una serie de reglas que el sujeto formula. Cuando acaba de aplicarse la cadena de reglas sintácticas, se aplican las reglas fonológicas que rigen la pronunciación.

También postula que todas las expresiones humanas operan en dos niveles estructurales bien definidos que respetan dichas reglas: el superficial y la estructura profunda. El superficial depende de la frase exacta que indica los pensamientos, es decir, cuando se interpretan las ideas fonológicamente se recurre a una sucesión de frases que interactúan para dar la idea completa de lo que se trata de transmitir.

La estructura profunda está constituida por pensamientos básicos y actitudes adoptadas hacia las palabras; a veces se utiliza este término para indicar "gramática" o "gramática universal" o "propiedades abstractas de las reglas", por lo que se postula que dichas estructuras daban toda la información requerida para determinar el significado de las oraciones[8].

---

[7] Nació en Filadelfia en 1928, es lingüista, profesor y activista político, licenciado por la universidad de Pensilvania. A este filólogo estadounidense se le considera fundador de la Gramática generativa transformacional, que es un sistema original para abordar el análisis lingüístico y que ha revolucionado la filología. Chomsky se incorporó a la facultad del Instituto Tecnológico de Massachusetts en el año 1955 y se le conoce no sólo como profesor y escritor, sino también como sistemático opositor a la implicación americana en la guerra del Vietnam. Sus publicaciones lingüísticas más importantes son: Estructuras Sintácticas (1957), Aspectos de la teoría de la sintaxis (1965), The Sound Pattern of English (1968; con Morris Halle), Pensamientos y Lenguaje (1972), The Logical Structure of Linguistic Theory y Reflections on Language (ambas del año 1975). Language and Responsibility (1979) relaciona lengua y política. Entre los escritos políticos de Chomsky están: El poder americano y sus nuevos mandarines (1969).

[8] Para ahondar en algunos datos interesantes y pertinentes consulte la obra de Noam Chomsky titulada: "Reflexiones sobre el lenguaje" capítulo 3.

Este mismo autor está vinculado con "la teoría de adquisición del lenguaje" (DAL por sus iniciales en inglés), en la cual se plantea que las personas nacen con una maquinaria mental que les permite descubrir reglas para formar oraciones aceptables, al respecto dice:

"Una peculiaridad de la adquisición del lenguaje por parte del niño es el grado de precisión con el que imita el habla de sus modelos (miembros de la familia, otros niños, etcétera.)…. El niño evidentemente está oyendo – no constantemente, por supuesto- detalles de los matices fonéticos que van a incorporar parte de su conocimiento lingüístico, pero, cuando sea adulto, ya no va a poder detectarlos…. La velocidad y precisión de la adquisición del vocabulario no deja alternativa alguna a la conclusión de que el niño, de alguna forma, dispone de conceptos previos a su experiencia de la lengua y está, básicamente, aprendiendo etiquetas para conceptos que son ya parte de su aparato conceptual."[9]

Puesto que el lenguaje hablado es rápido e imperfecto, la comprensión del habla es un logro mayor, sin embargo, se hace en forma automática y sin aparentar mucho esfuerzo, sin percatarse de ello; al parecer se trata de manera continua de determinar lo que escucha, con ayuda del conocimiento que se tiene del lenguaje y los sucesos.

El desenvolvimiento del lenguaje y la conciencia metalingüística están muy vinculados al desarrollo cognoscitivo, ya que los niños intentan comprender y aplicar las reglas del lenguaje.

Al emplear su capacidad para el lenguaje, los niños tratan de resolver el rompecabezas del idioma que escuchan, pasando de las frases compuestas por sólo una palabra, al habla telegráfica por la comprensión básica de la pronunciación, el vocabulario, la gramática, la sintaxis[10], la semántica[11] y la pragmática[12], todo esto comienza a manejarlo aproximadamente a los cinco o los seis años de edad y continúa durante toda la vida. Para ejemplificar lo mencionado planteo una descripción breve de la forma en como los niños van adquiriendo las nociones del lenguaje:

Al año, los bebés hacen ruidos distintivos que imitan a los que producen las personas que le rodean, entonces comienzan por entender los significados que encierran para transmitir una idea, cerca del año y medio, los niños comienzan a hablar con un lenguaje telegráfico que tiene sus propias reglas, pues pueden combinar los sonidos que emiten con gestos y que manifiestan sus deseos o necesidades.

---

[9] Noam Chomsky. "El lenguaje y los problemas del conocimiento", conferencia 1, pág. 25.
[10] parte de la gramática que estudia la estructura de las oraciones
[11] estudia el significado de las palabras y de sus variaciones, así como del problema asociado con su significado
[12] es el uso adecuado del lenguaje para la comunicación

Posteriormente a los dos años y medio ya han progresado más allá de dos palabras con pleno conocimiento de su significado, por lo que comienzan a ser capaces de rellenar espacios gramaticales y fonéticos simples, de esta forma comienzan a adquirir el vocabulario y a alargar progresivamente las oraciones.

Luego, a partir de los tres o cuatro años, el infante acostumbra acompañar todas sus actividades con largos monólogos, para ello intenta utilizar un lenguaje lo más completo posible, es decir sin contraer palabras y sin abreviarlas al menos intencionadamente, y esta actitud lo acompaña durante los años que corresponden a la niñez intermedia que abarca hasta aproximadamente los seis años.

En este período de edad inicialmente habla para sí mismo a viva voz con una serie de palabras sílabas y frases que se van reduciendo gradualmente, pues lo que hasta hace poco era un monólogo perfectamente audible, entre los seis y los siete años se transforma poco menos que en un susurro. Por otro lado la estructura gramatical de las frases se esquematiza cada vez más, y al cabo de muy poco tiempo, únicamente en momentos especiales o críticos se tiene la ocasión de oírle pronunciar algunas palabras sueltas.

No mucho más tarde, este lenguaje acaba por desaparecer del todo, y ya en lo sucesivo el niño permanece silencioso cuando este realizando una tarea en solitario, aunque la desaparición no es absoluta, pues eventualmente sigue formulando observaciones en voz alta, sobre todo cuando este distraído; lo que sucede es que dentro de la evolución del habla y de la inteligencia a partir de cierto momento, el lenguaje adopta una forma interna.

El lenguaje interno y esquematizado esta indisolublemente ligado a las actividades del pensamiento, esta relación es sumamente compleja y controvertida, pues en opinión de muchos especialistas que han investigado la formación del lenguaje, el desarrollo intelectual del individuo depende totalmente de su evolución lingüística. El punto de vista de Piaget y sus seguidores es opuesto, para ellos el desarrollo del lenguaje "sigue principalmente los pasos del desarrollo cognoscitivo general, y no al revés"; lo cual no impide que, una vez adquirido, contribuya a acelerar el desarrollo de todos los procesos mentales, como el razonamiento, la memoria, la formación de conceptos o los procesos de aprendizaje.

Ahora bien, cuando las personas utilizan el lenguaje para desarrollar los procesos mentales que van surgiendo (a lo cual habitualmente se le llama razonamiento), utilizan estrategias de toma de decisiones para responder a las preguntas que se hacen, por ejemplo cuando cuestionan su participación en ciertas actividades o bien en la elección de algún platillo en espacial para alimentarse, etcétera. Es común que esto incluya la igualación de prototipos, disponibilidad y búsqueda de ejemplos así como la construcción de explicaciones causales.

De esta manera la solución de problemas comienza normalmente con la identificación de un desafío, al prepararse para enfrentarlo las personas y en particular los niños, representan el problema y adoptan una estrategia para resolverlo: una estrategia de generación-prueba. Después viene un análisis de fines-medio e imágenes; y por lo general, las evaluaciones se presentan durante el desarrollo de la solución del problema o al final (depende de la madurez con que cuente el individuo).

Por otro lado la forma en que se expresan los resultados en forma gráfica depende de la función simbólica en sus diferentes formas y de la manera en cómo ésta surge. La función simbólica se presenta al final del período sensorio-motríz hacia el año y medio o dos años aproximadamente, depende de la evolución de cada individuo, en el cual aparece un conjunto de conductas que implican la evocación representativa de un objeto y que supone la construcción o el empleo de significantes diferenciados; en ella se distinguen cinco conductas:

1. La imitación diferida: que se inicia en ausencia del modelo y es una conducta de imitación sensorio-motora, por ejemplo cuando se pide a un niño que escriba las letras, entonces normalmente dibuja líneas a veces continuas que llenan cierto espacio de la hoja donde garabatea, pero dicha escritura no tiene forma ni orden definido.

2. El juego simbólico: en el cual el niño necesita de un medio propio para poder expresar lo que siente, lo que anhela, etcétera. Este es un sistema de significantes construidos por él y adaptable a sus deseos; en este caso su función es muy semejante a la del sueño. En esta etapa es muy importante que se motive al niño y se promueva su imaginación, la cual será de ayuda en la construcción de los conceptos matemáticos.

3. El dibujo: el cual es un intermediario entre el juego y la imagen mental, aunque no aparece antes de los dos años y medio, resulta ser un ejercicio, que se llega a convertir en una intención realista cerca de los ocho o nueve años, aquí es importante mencionar que el dibujo es una representación de lo que es visible o imaginable. Por ello se debe fomentar que el niño represente por este medio todo aquello que le rodea como las personas que integran su familia, las amistades, los juguetes, etcétera.

4. La imagen mental: esta no se presenta en el nivel sensorio-motor, sino que se desarrolla a partir del período operacional y sirve para crearse una idea clara y precisa del problema a abordar así como de su posible solución.

5. El lenguaje: " hay experimentos que han demostrado que cuando un niño conoce las letras y sabe distinguir con su ayuda los sonidos aislados en las palabras, tarda, sin embargo, en dominar completamente el mecanismo de la escritura. …Los signos de escritura, como es fácil de ver, son símbolos de primer orden, denominaciones directas de objetos o acciones….. el símbolo de segundo orden consiste en la utilización de signos de escritura para representar los símbolos verbales de las palabras. Para que el niño llegue a ese descubrimiento fundamental debe de comprender que no sólo puede dibujar las cosas, sino también el lenguaje. Ese fue el descubrimiento que llevó a la humanidad al método genial de la escritura por letras y palabras, y ese mismo descubrimiento lleva al niño a escribir las letras. Desde el punto de vista psicológico este hecho equivale a pasar del dibujo de los objetos a las palabras."[13]

A la imagen mental se le considera una prolongación de la percepción y un elemento del pensamiento; a través de ella se pueden asociar sensaciones e imágenes inclusive pueden vincularse con el pensamiento lógico; al respecto, dentro del nivel preoperatorio las imágenes mentales del niño son casi estáticas con dificultad sistemática para producir movimientos y transformaciones, no siendo el caso en el período de las operaciones concretas en las que el niño ya tiene un mayor conocimiento del movimiento espacial y del manejo de las imágenes que se le presentan.

Así que para la etapa del período operacional las imágenes ya cuentan con dos características: movimiento y transformación, que se dan gracias a anticipaciones apoyadas en la comprensión operatoria; algunos psicolingüistas creen que aunque la imagen no es suficiente para que el sujeto forme las estructuras operatorias, sí representa un buen punto de apoyo; lo mismo sucede en el caso del lenguaje.

Por otro lado, al final del período operacional los niños son capaces de realizar procesos lógicos que pueden o no estar vinculados con la representación simbólica a través de las imágenes, de esta forma pueden comenzar a razonar en forma deductiva: de la premisa a la conclusión, pero esta función sólo la pueden aplicar a formas o acontecimientos elementales o a percepciones y representaciones concretas, pues les es muy difícil todavía pensar en términos abstractos.

[13] Vygotski. "obras escogidas Vol. III, págs 184 y 197

Para ejemplificar lo anterior, Piaget plantea que a un niño que pasa por el período operacional, se le puede plantear y es capaz de resolver sin complicaciones el siguiente problema: "Juanita es más alta que Susana, y Pepita es más baja que Susana; ¿quién es más alta, Juanita o Pepita?", en cambio antes de los once o doce años tendrá todavía dificultades para resolver un planteamiento de tipo similar pero situado en un nivel de complejidad superior: "Si Juanita es más alta que Susana, y menos que Pepita, ¿quién es la más alta de las tres?, en ocasiones los infantes necesitan representar mediante un dibujo a cada personaje mencionado, pero esto es sólo en casos particulares.

En el período de operaciones concretas, el niño utiliza estructuras de conjunto, que constituyen la base funcional del pensamiento lógico abstracto; desarrolla una serie de funciones que comienzan a perfilarse en el período anterior el período sensorio-motríz, como la seriación y la clasificación; inicialmente tales estructuras son elementales y rudimentarias y no permiten todavía al individuo utilizar combinaciones generales abstractas.

También es importante considerar que no hay verdaderas operaciones si no está presente la función de reversibilidad, pues una operación es una transformación reversible, es decir, implica la posibilidad de regresar en el pensamiento los pasos dados en el tratamiento de un problema, cuando no conducen a la solución. La reversibilidad es tan importante como los conceptos de conservación[14] y seriación, pero ésta se comienza a desarrollar en el período de operaciones formales

.

Para ejemplificar el concepto de conservación, doy el siguiente ejemplo, expuesto por Piaget: "si con un puñado de arcilla o pasta para moldear hacemos una pequeña bola o pelota y, a continuación, la aplastamos para moldear, por ejemplo una salchicha o una torta, un niño de cinco o seis años relacionará la forma con la cantidad, y observando que la bola es más pequeña y corta que la salchicha, no dudará en deducir que tiene menos cantidad de material. Sin embargo, uno o dos años más tarde, habrá descubierto que sólo cambia la forma pero la cantidad permanece constante"[15].

Ahora bien, la seriación consiste en establecer dentro de los elementos de un conjunto un orden determinado, que puede ser clasificándolos en forma creciente, decreciente o mediante alguna característica física que permita distinguirlo. Por ejemplo, cuando el niño aprende a construir torres con bloques de diferente tamaño, normalmente acomoda los bloques más grandes debajo de los pequeños.

---

[14] Piaget llama también a la conservación como "principio de invariancia", el cual se consolida en el período de las operaciones concretas, y que se define como la capacidad de deducir mediante la razón que la cantidad de objetos de una colección permanece igual cuando la apariencia de los objetos dentro del conjunto es modificada

[15] Piaget, Jean "Seis estudios de psicología", pág.

Sin embargo, puede suceder que el mismo niño no pueda establecer la misma relación con series de objetos en que las diferencias sean menos aparentes, por ejemplo, si el niño trata de ordenar canicas del mismo tamaño, pero de diferente color, la primera reacción que tiene es acomodarlas en hilera no atendiendo a su color, después de un tiempo es probable que al repetir el experimento coloque primero las de un mismo color y enseguida las del otro color.

Por último en la clasificación, "Cuando el niño observa las cosas con detenimiento puede descubrir en qué se parecen y en qué son diferentes. Agrupar los objetos según un determinado criterio o punto de vista es clasificar. El niño puede clasificar objetos por su tamaño, su forma, color, uso, posición o por cualquier categoría que él mismo elija. …La capacidad de clasificar es muy importante para pensar, es una habilidad básica para las matemáticas"[16].

En la clasificación aparece nuevamente la función de un orden determinado el cual no está dado cuantitativamente, sino supeditado a determinadas relaciones que a menudo obligan a considerar más de un aspecto o dimensión de los objetos relacionados. Significa que un niño está capacitado para reconocer que un mismo objeto puede pertenecer simultáneamente a una clase y a una subclase, pues es capaz de comprender las relaciones existentes entre las cosas observadas.

Por ejemplo, los niños del período de operaciones concretas son capaces de identificar a una manzana de cáscara roja dentro de la clase de las frutas, pero también la colocan en la clase donde se encuentran las manzanas, por eso concluyen que la manzana de cáscara roja pertenece simultáneamente a la clase de las frutas y a la subclase de las manzanas.

Posteriormente y conforme los niños avancen en su desarrollo cognitivo ya cerca de los nueve o diez años, se alcanzan nuevas potencialidades, pues el niño es capaz de dejar el material concreto y comenzar a representarlo mediante el lenguaje escrito, esto se consolida en los años de adolescencia. También en el período de operaciones concretas los niños adquieren los distintos conceptos de conservación; uno de los experimentos utilizados por Piaget para verificar las características del razonamiento infantil es la prueba de la disolución del azúcar.

---

[16] Fundación Vamos México, "Guía de padres, tomo 2 de 6 a 12 años"pág.79

"El niño de cinco años al ver disolverse el terrón de azúcar en un vaso con agua, responde simplemente que ha desaparecido, en cambio a partir de los ocho o nueve años, aunque aún no sea capaz de argumentarlo correctamente, opinará lo contrario: sigue existiendo en el agua, lo interesante aquí es que ya comienza a aceptar una respuesta que no coincide con lo aparente; finalmente un niño de diez años, admitirá el aumento del peso total una vez disuelta el azúcar en el agua, y por tanto su conservación"[17].

A partir de que el ser humano entra en la etapa de las operaciones concretas la memoria, que consiste en la facultad de almacenar información mentalmente y recobrarla más tarde en condiciones de ser utilizada, juega un papel importante y se va desarrollando de forma rápida y constante. En este período el niño comienza a organizar el material que debe ser recordado, obtiene la habilidad para clasificarlo o agruparlo en torno a determinadas palabras clave, crea imágenes mentales o de asociación, y comienza a manejar una cantidad considerable de información que es necesaria almacenar.

Esencialmente se conocen dos factores que contribuyen al rendimiento de la memoria: la motivación, y la atención. Los niños a partir de los siete años comienzan a concentrarse mejor, dado que han desarrollado una mayor atención en las situaciones que se le presentan, a partir de esta edad los niños se concentran más al resolver problemas matemáticos y esto se nota al observar la concentración intensa y continua que aplican al resolver los ejercicios.

La memoria comienza a fallar cuando no es posible centrar la atención; a veces, esta imposibilidad se debe a la intervención de estímulos extraños del ambiente que provocan la distracción; otras, a los pensamientos personales y en algunos casos cuando existe un estado de nerviosismo o de ansiedad, o también por alguna lesión sufrida en un accidente, es decir, todo tipo de inferencias físicas o mentales, reducen en cantidad y calidad el potencial memorístico de las personas y en particular de los niños.

Existen tres tipos de memoria: la sensorial, la de corto plazo y la de largo plazo; se dice que toda la información que retenemos pasa por estos tres estados, en el mismo orden indicado.

La memoria sensorial actúa mientras estamos percibiendo un estímulo a través de los sentidos, su intervención es fugaz y a menudo se le compara con una cámara fotográfica, pero si el estímulo es duradero y se le procesa con eficacia, entonces se transfiere al siguiente sistema de memoria.

La memoria a corto plazo, también llamada memoria activa, tiene la capacidad de retener por espacio de tiempo más o menos breve la información que es percibida por los sentidos.

---

[17] Piaget, Jean. "Seis estudios de Psicología", pág. 136

Por último y si la información que se procesó por este medio está destinada por el propio individuo a ser conservada, entonces se retiene en un lugar llamado la memoria a largo plazo, que es el verdadero “almacén” de los conocimientos.

En el caso del aprendizaje, para los niños ésta memoria es la que resulta tener más interés, por lo que la transferencia y la fijación de los datos que son almacenados en la memoria a largo plazo deben ser estimulados no sólo por los docentes sino también por los padres de familia, adultos y especialistas, pues es de suma importancia para el correcto desarrollo del niño.

En la etapa en que los niños tienen entre nueve y diez años, se observa por lo común a un infante poco conflictivo, reposado y responsable no sólo en clase sino también en el hogar, esto hace que muchas veces, detrás de tales apariencias, se esconda un niño que puede estar viviendo complejos y contradictorios conflictos emotivos. En esta edad el niño comienza a profundizar y desarrollar su pensamiento lógico y las operaciones concretas que sólo alcanzan para aquello que puede manipular directamente o representar de forma grafica y aunque aún no es capaz de elaborar razonamientos basándose en enunciados puramente verbales y abstractos, esta capacidad la desarrolla y consolida paulatinamente en los próximos años.

En cuanto a lo académico, en esta edad los niños dominan el lenguaje, los procesos de lectura y de escritura, trabajan sobre la comprensión de textos y aprenden a resumir escritos cortos; y en matemáticas adquieren la comprensión de las cuatro operaciones fundamentales con seguridad y rapidez, se inician en los conceptos de las fracciones, en el aprendizaje de las unidades métricas y en las primeras nociones de la geometría como: los cálculos de áreas, volúmenes y conservación de cantidades al hacer cambios de unidades. Es por estas razones que afirmo que el período de las operaciones concretas es la base para el correcto aprendizaje de conceptos más complejos en matemáticas, por lo que es importante que todo ser humano tenga un apropiado desarrollo en esta etapa.

Para los niños que pasan por este período, más que el estudio o la convivencia con los compañeros que le rodean, es de suma importancia tener una buena aceptación familiar, la cual brinda los estímulos necesarios para tener un desempeño excelente en el ámbito no sólo académico sino cultural y social.

En suma la convivencia familiar capacita a los niños de este período para convertirse en personas autosuficientes, también para estos niños es importante disponer del tiempo necesario para juguetear, pero, ¿por qué les es tan imprescindible el juego a esta edad?, la respuesta a esta pregunta se remonta como mencioné a la manifestación de la estructura del lenguaje en forma de simbolización, pues el niño perfecciona su expresión a través del juego.

Y en cuanto a su capacidad para expresar el lenguaje oral Vygotski cita a Stern y menciona:"El niño que llega a tal descubrimiento (percatarse de su perfección sobre el lenguaje) lo establece: 1 incrementando su vocabulario a saltos (de 10 a 20 palabras en 2 o 3 meses), 2 desarrolla la etapa de las primeras preguntas (al ver un objeto, el niño pregunta qué es, cómo se llama, y se comporta como si supiera que el objeto debe de tener algún nombre) y 3 da el paso decisivo de la forma reflejo-condicionado a otras formas: cuando el niño oye una palabra dicha por las personas que le rodean, las relaciona con el objeto y tan sólo entonces la produce."[18]

En mi opinión, estoy totalmente de acuerdo con los lingüistas citados al decir que el desarrollo del lenguaje es importante en la adquisición de los conocimientos matemáticos, pues la comprensión de las estructuras matemáticas se logra una vez que se ha adquirido las reglas que componen el alfabeto en el que estan escritas, por lo tanto, es importante desde mi punto de vista, fomentar el correcto desarrollo del lenguaje a través de sus diferentes manifestaciones, sean oral, escrita o gráficamente.

Me resulta muy interesante la forma en que exponen los lingüistas que se adquiere y evoluciona la forma en que se comunica el ser humano y me impacta la forma en que se da el paso entre las expresiones orales, la construcción de la comprensión de las oraciones y la representación escrita o gráfica, considero que muchas veces para comprender las matemáticas se manejan los pasos que describí en este capítulo.

Un ejemplo de aquello que afirmo en el párrafo anterior es cuando se propone aprender cierto concepto, lo primero que se tiene que hacer es aprender a leer lo que se encuentra escrito, para ello durante los primeros años de estudio se enseñan los símbolos que generalmente se emplean para representar las ideas matemáticas, éstos se continúan aprendiendo a lo largo de los años de educación, incluso en los primeros años de la licenciatura.

Luego, una vez que se puede leer el enunciado, normalmente entra en juego una etapa en la que se trata de comprender lo que se encuentra escrito, esta tarea es la que suele ser más complicada, pues en ocasiones es necesario recurrir a conceptos previos para lograr su comprensión cabal; otras veces hasta suele ser indispensable la creación de un dibujo o imagen que aclare dicho concepto.

Una vez comprendido el concepto, se debe ser capaz de repetirlo, manifestarlo cuando es necesario y promoverlo entre aquellas personas que aún no lo entienden, para ello las personas se valen las del lenguaje escrito y/o oral, en el cual la formación del orden de los enunciados es de vital importancia

[18] Ibidem págs.173 y 175

También me impactó el punto de vista contradictorio entre los lingüistas y Piaget en cuanto a la dependencia de la evolución lingüística y del desarrollo intelectual, en mi opinión, creo que el nivel de cognición y el lingüístico que tiene cada niño se desarrolla paralelamente y depende de las condiciones particulares en que se desenvuelve cada niño, pues esta en función de los factores internos y externos en que se encuentre el menor, así como la ayuda que se brinda al niño para construir su conocimiento del medio.

Para terminar y como ya mencioné, el juego es una expresión esencial del lenguaje en los niños, creo que vale la pena hacer un análisis detallado de su importancia. Para ello en el siguiente capítulo trato con detenimiento del juego infantil y su aplicación pedagógica en el aprendizaje de las matemáticas.

CAPÍTULO IV.
LOS JUEGOS LÓGICOS Y SUS IMPLICACIONES PEDAGÓGICAS

Creo que las palabras "juego" y "educación" deben de implicar las mismas acciones, ya que por un lado la palabra educación proviene del latín "*educare*", que significa moverse, fluir, salir de, desenvolver las potencialidades físicas, psicológicas, sociales y los valores desde el interior de la persona que recibe educación, y el juego como medio educativo debe tener igual orientación; los juegos constituyen el soporte de todo aprendizaje, dado que inciden directamente en el cambio de conducta del individuo, y dichos cambios se dan de lo cuantitativo[1] a lo cualitativo[2].

Para lograr los cambios conductuales se requiere de tiempo para permitir que la calidad de las experiencias vividas influya en los niños de manera cuantitativa.

El juego infantil resulta ser una excelente vía mediante la cual el conocimiento matemático puede afianzarse en el alumno de edad escolar ubicado en cualquiera de los estadios mencionados en capítulos anteriores. Y antes de reflexionar la forma en que se puede utilizar como medio pedagógico, expongo su definición, pues creo importante tomarla en cuenta.

La definición de juego que más se aproxima a lo que propongo en este trabajo, y que está tomada de la tesis de Sara Alejandra Pando Figueroa dice:

"El término juego tiene muchos significados, con esta palabra se designan múltiples actividades humanas de índole lúdica que van desde la actividad física, como juegos al aire libre o deportivos a los de actividad intelectual, como juegos mentales, de ingenio, de estrategias, pasando por los de entretenimiento como son los juegos de azar y juegos de mesa.

En la enseñanza de las matemáticas, el juego se considera un ejercicio recreativo sometido a reglas, que adquiere importancia porque es un medio para combatir las ideas que se tienen acerca de lo difíciles e incomprensibles que son las matemáticas, pero al jugar con ellas se pueden entender de manera más natural.

Las matemáticas así concebidas (como un conjunto de reglas a seguir) son un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales.

---

[1] Adjetivo relativo a la cantidad.

[2] Adjetivo relativo a la calidad, a la naturaleza de las cosas.

Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimenta las más sencillas y observa a fondo las de los grandes jugadores, trata de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas y finalmente trata de enfrentarse a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos, esperando que alguna buena idea lo lleve a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

El desarrollo de estas estrategias forma parte del aprendizaje matemático y puede adquirirse por medio de las matemáticas recreativas."[3]

Para realizar un juego creo que el profesor debe considerar que las actividades educativas valen por su calidad y no por la cantidad de las mismas, por ello sugiero que fomente siempre los juegos apropiados que ayuden a abordar un tema en especial y posteriormente permita que los niños practiquen y jueguen libremente con la actividad.

Sin supervisión, ayuda u orientación es posible que los niños no rescaten debidamente aquello que el juego puede enseñarles, por lo que se vuelve una necesidad imprescindible conocer qué es, cómo, cuándo, dónde, qué tiempo, por qué, para qué juegan los niños y qué finalidad deben tener las actividades lógicas que se propongan. Y deben aplicarse de forma que no se caiga en la rutina, ni en un libertinaje donde los niños olviden los objetivos que se fijan al comenzar las actividades, deben aplicarse procurando que mantengan el interés de los alumnos por los temas que puedan desprenderse de cada actividad.

Por los argumentos anteriores, es importante considerar al juego como parte de las actividades lúdicas del aprendizaje natural de los niños y jóvenes ya que éste permite que no se sientan frustrados cuando son incapaces de obtener el resultado deseado y promueve la motivación para en lo sucesivo volver a intentar la solución de otro problema parecido o novedoso; de esta forma se estimula la atracción y el interés por las matemáticas.

Los niños se resisten a aprender y comprender todo aquello que para ellos carezca de sentido, por eso, mediante juegos que vayan de acuerdo a su edad y sus habilidades se puede lograr que se apropien del conocimiento en forma divertida.

"Los juegos, por la actividad mental que generan, son un buen punto de partida para el aprendizaje de las matemáticas, el objetivo de los juegos no sólo es divertir sino también lograr que los niños se interesen, piensen y comprendan con cierta motivación, . . . también estimulan la confianza, la autoestima, la comunicación y el trabajo en equipo.

[3] "Un enfoque distinto de la enseñanza de las matemáticas y la lógica a nivel primaria" Sara Pando Figueroa, pág. 13 y 14.

Existe un prejuicio con respecto al juego en la actividad docente, en ocasiones se le considera una actividad inútil y sin seriedad, sin embargo, el juego tiene un enorme valor educativo. …. El juego estimula la imaginación, enseña a pensar con espíritu crítico y es por sí mismo un generador del pensamiento lógico, además de ser un excelente ejercicio intelectual, estimula y facilita el pensamiento y el razonamiento matemático en los niños. ”[4]

En el párrafo anterior se hace referencia al pensamiento lógico, del cual quiero aclarar que es aquel que consiste en relaciones creadas entre los objetos, y que se adquiere de manera no empírica sino conceptual por cada individuo, normalmente es aquel que se utiliza constantemente al hacer matemáticas, pues es el que nos facilita desarrollar las siguientes habilidades: comparar después de hacer observaciones, clasificar los objetos o situaciones observadas, inferir para llegar a una conclusión tomando en cuenta los datos que disponemos, encontrar explicaciones a los eventos que suceden o que pueden suceder mediante la evaluación de causas y efectos, y fomentar la imaginación así como la creatividad para resolver los problemas de manera más sencilla.

Después de reflexionar sobre lo escrito en capítulos anteriores, he concluido que la aparición del pensamiento lógico, se puede conseguir después de que el niño pasa por algunos de los períodos del desarrollo cognitivo citado por Piaget, pues es fundamental que el niño construya poco a poco todas las estructuras que son necesarias para adquirir cada habilidad que promueve este tipo de pensamiento.

Ahora, para continuar con la definición del juego, presento algunos rasgos característicos del juego contemplado como elemento educativo, el juego:

- Motiva el desarrollo físico: “Ofrece al niño la oportunidad de utilizar su cuerpo y de probar sus destrezas físicas”[5].

- Desarrolla el pensamiento lógico: “Al jugar, el niño experimenta, prueba e inventa, entonces construye un estilo de pensamiento libre y flexible por el que busca entender y hacer las cosas de modo original al resolver los problemas”[6]

- Promueve la socialización: “Los niños se unen al jugar, para ser aceptados o simplemente para sentir seguridad de pertenecer a un grupo”[7]

[4] Ibíd. Ibidem pág. 16 y 17
[5] Fundación Vamos México, “Guía de padres, tomo 2 de 6 a 12 años” pág.133
[6] Fundación Vamos México, “Guía de padres, tomo 2 de 6 a 12 años” pág.133
[7] Fundación Vamos México, “Guía de padres, tomo 2 de 6 a 12 años” pág.135

- Estimula el desarrollo de valores: En el juego se pueden inculcar o bien estimular algunos valores como la honestidad, el criticismo[8] y el compartir, etcétera.

Algunos profesores y padres de familia, se preocupan sólo por el desenvolvimiento físico del niño que juega, y no prestan atención a sus reacciones psicológicas como la emotividad, la indiferencia y la imaginación; las reacciones sociales tales como la poca sociabilidad, el rechazo a las opiniones de sus colegas y la agresividad; y aquellas reacciones de valores como la falta de honestidad, la acriticidad y el egoísmo.

En esas condiciones aún los mismos niños juzgan que lo único que debe cultivarse son las destrezas del jugador y que todo lo demás es secundario; admiten que el asunto es ganar a como dé lugar, aún agrediendo. Los niños así educados ven el juego como competencia y no como participación, y sus padres descuidan su formación integral. Esto demanda de los adultos una serie de actitudes y puntos de vista positivos que generen en los niños sentimientos auténticos que se canalicen en acciones benéficas para su desenvolvimiento como individuos sanos, tanto física como intelectualmente.

Es importante que los adultos desarrollen las situaciones de juego, pues contribuye a que los niños adquieran una mejor comprensión del mundo que les rodea, en particular en la escuela inicial (preescolar, primaria e incluso en algunos casos a nivel secundaria), es fundamental que desarrollen las experiencias del tipo concreto. De esta forma los niños ejercitan sus sentidos, ya que tiene la oportunidad de observar, manipular, oler, etcétera, y así, mientras más sentidos pongan en juego, más sólidos y ricos serán los aprendizajes que realicen.

"En el caso del nivel primaria estas nociones se afianzan utilizando materiales estructurados y no estructurados, entre los que podemos nombrar a los rompecabezas, encajes, bloques, latas, maderas, semillas, entre otros, para finalmente llegar al nivel de secundaria donde se utiliza material grafico, láminas, loterías, dominó, tarjetas, fichas y hojas de preparación. De esta forma el niño va gradualmente experimentando de lo concreto a lo abstracto, lo que favorece el pensamiento lógico".[9]

Sobre el juego se ha escrito: "en los momentos del juego se ponen de manifiesto las más agotadoras energías del niño. Se concentra con todo su ser y adquiere satisfacciones emocionales que no puede obtener de otras formas de actividad. El juego profundamente absorbente es esencial para el crecimiento mental, y por ello para el incremento de su potencial lógico. Los niños capaces de sostener un juego intenso tienen mayor probabilidad de saber conducirse y llegar al éxito cuando hayan crecido"[10].

[8] Sistema filosófico fundado sobre la crítica del conocimiento y cuyo promotor fue Kant.
[9] Tomado del libro "Educar jugando" de Mavilo Calero Pérez pág.27.
[10] Ibidem pág. 32

Por otro lado, las diversas teorías cognitivas actualmente coinciden en que los niños que acaban de incorporarse a la escuela no son simples recipientes vacíos que deben llenarse de conocimientos. La mayoría de los niños, llegan a la escuela con una estructura del pensamiento ya existente, dado que los preescolares aprenden mucha de esta lógica de la familia, los compañeros, la televisión y los juegos antes de llegar a la edad en que ingresan al colegio.

Esta forma de pensamiento que se va gestando en los primeros años de vida del niño, representa una parte de los pasos intermedios cruciales entre el conocimiento intuitivo (limitado e impreciso y basado en la percepción directa de los niños) y la forma de pensar que se adquiere en la escuela (la cual se caracteriza por ser mecánica, con un alto contenido de memorización y aplicación de métodos que permiten al alumno "sobrevivir en el medio escolar").

Menciono "sobrevivir en el medio escolar" de esta forma pues cuando el niño llega a la edad de ingresar a la educación escolarizada aprende a no desenvolverse de manera natural, sino que, intenta no ser estigmatizado, entonces recurre al aprendizaje de las posibles respuestas que esperan escuchar tanto el profesor como el resto de los niños en su grupo. Esto representa una deformación, dado que pierde la flexibilidad del pensamiento que tenía antes de ingresar a la escuela, la sustituye por un condicionamiento de las respuestas esperadas y a la larga, esta actitud forma una personalidad de inseguridad que constantemente busca el reconocimiento de otras personas.

El aprendizaje implica una construcción a partir de conocimientos anteriores, ya que es un proceso activo; la estructura del pensamiento ya existente desempeña un papel fundamental en el aprendizaje significativo de la matemática. El desarrollo de dicho pensamiento contribuye eficazmente en la construcción de las soluciones ante los problemas que se presentan al niño durante su educación en el medio escolar. Contribuye a enfrentarse con éxito a posteriores conceptos, en este sentido se tienen dos implicaciones educativas importantes en el proceso enseñanza- aprendizaje:

1. La enseñanza formal, llamada así a la que se imparte en la escuela, pero de ninguna manera pretendo excluir a la que se puede recibir en otros sitios como puede ser en el seno de la propia familia, debe fomentar el desarrollo del pensamiento lógico de los niños, pues los maestros pueden explotar las potencialidades lógicas con que cuenta el niño para que la enseñanza sea significativa e interesante, de manera que el aprendizaje que se obtenga en el período escolar sea exitoso y contribuya al desarrollo personal de quien lo adquiere.

2. El profesorado puede fomentar una relación plena entre el conocimiento intuitivo que el niño adquiere en el hogar y la educación que recibe en la escuela, de lo contrario se fomenta el aprendizaje puramente memorístico que conduce a la pérdida de interés en la materia y genera un rechazo hacia la misma que incluso se puede llegar a perfilarse como un temor hacia la matemática.

El papel fundamental del docente para lograr estas implicaciones, consiste en ser formador de un pensamiento lógico, crítico y reflexivo de las situaciones, antes que ser un transmisor de la información como suele ser en la formación actual de los niños. Así, al plantear la información sobre el mundo que rodea al estudiante durante la clase, se reflexionan los posibles problemas que se pueden presentar cotidianamente, y se analizan los métodos para resolverlos, con ello se consigue que el estudiante forme las capacidades necesarias para valerse por sí mismo como individuo.

Para ello, el profesor debe orquestar todo lo que sucede en el aula: las presentaciones de los temas, las asignaciones de los problemas a resolver, las participaciones de los alumnos, las felicitaciones y observaciones cuando las situaciones lo ameriten, las demostraciones de los resultados importantes y los comentarios así como las observaciones de los alumnos, proponiendo una enseñanza que induzca un proceso de resolución de problemas que se caracterice por su flexibilidad y vasto conocimiento por parte del alumno.

Para lograrlo, el profesor debe jugar el papel de intermediario que contribuya a amalgamar los factores internos así como los externos a la clase. En resumen los maestros deben dedicarse a plantear y verificar hipótesis con la ayuda de sus alumnos.

La enseñanza vista así, es un proceso que fomenta la formación de un pensamiento lógico más estructurado, crítico y reflexivo, mediante la libertad de expresión manifestada por la curiosidad, así como la creatividad para resolver los problemas dados en clase.

Es necesario que la enseñanza conjugue una gran variedad de técnicas que hagan participar activamente al niño en el proceso, ya que es muy frecuente que los métodos de instrucción formales con alto contenido teórico no estimulen al niño para la comprensión de lo enseñado ni su posterior reflexión. Por ejemplo, si en la primaria sólo se les enseña a operar las fracciones mediante los algoritmos ya conocidos, los niños no verán las implicaciones ni las aplicaciones de los números fraccionarios en su vida cotidiana, sino hasta el momento en que el profesor se los presente mediante una actividad o bien se enfrenten ante situaciones en las que deberán de aplicarlos sin el pleno reconocimiento de la forma en cómo deben emplearlos.

Para lograr que los temas sean introducidos en forma apropiada y se puedan llegar a comprender mejor, sugiero aplicar actividades y juegos los cuales deben ser supervisados para que el niño reciba un apoyo real en el proceso de desarrollo de su pensamiento lógico.

La enseñanza debe ser moderadamente original, dado que cuando no encaja en el pensamiento de los niños, éstos pueden desentenderse de ella, aburrirse e inquietarse, de ahí la importancia que tiene enseñar conceptos y técnicas de nivel elemental en función del pensamiento lógico de los niños. Adaptar la enseñanza y los juegos a las necesidades individuales y colectivas de los niños que conforman el grupo constituye una ayuda didáctica, es cierto que para lograrlo el profesor enfrenta una tarea complicada pero no difícil pues si cuenta con la disposición y las actitudes necesarias puede transformar la enseñanza en una actividad plenamente satisfactoria.

Por otro lado, y haciendo alusión al comentario: "La manera de enseñar matemáticas dice mucho más sobre las matemáticas que aquello que se enseña"[11], considero que si la enseñanza se basa en la teoría de la absorción, entonces cultiva la mecanización sobre la reflexión, esto resulta bastante nocivo para el alumno así formado, pues a la larga el niño se proyecta como un individuo incapaz de formular un criterio propio ante las situaciones que se presenten.

Por el contrario, observo que siguiendo las técnicas del aprendizaje lúdico, es posible fomentar el pensamiento crítico y reflexivo en niños cuyo aprendizaje haya sido sistemáticamente mecanizado, e inclusive es posible generar gusto por las matemáticas a niños con ansiedad ante esta disciplina, rompiendo así el círculo vicioso del comportamiento derrotista.

Como medio de socialización, el juego ayuda al niño a conocer a otros niños y a hacer amistad con ellos, al mismo tiempo reconoce sus méritos, coopera y se sacrifica por el grupo, respeta los derechos ajenos, cumple las reglas, vence las dificultades, gana y pierde con dignidad. También el juego induce un proceso de adquisición de valores distintos a los ya mencionados tales como: la solidaridad, la tolerancia y el respeto, los cuales son fundamentales para una convivencia sana.

En esa perspectiva, sugiero que el adulto que funja como guía, participe en el juego, pues sus intervenciones permiten ganar la confianza infantil y enseña mediante el ejemplo los valores morales citados. Por ello se debe procurar que las relaciones entre los adultos y niños no sean autoritarias ni indiferentes.

Sin embargo, muchos adultos sólo ven al niño como objeto de enseñanza en las clases y no dan importancia a los juegos que realizan en los recreos. También he observado que algunos padres de familia para mantener ocupados a sus hijos los mandan a jugar, así pierden la valiosa oportunidad de observar su crecimiento y desarrollo como seres humanos. Lo ideal es que en todo momento los adultos busquen y logren una mayor comunicación, afecto e interacción personal con los niños.

---

[11] Tomado del libro "Educar jugando" de Mavilo Calero Pérez, pág 37.

La educación no se puede dar en modo aislado, la educación es asunto de comunidad. En la escuela y en el hogar, debe de imperar un ambiente amistoso y familiar, de relación igualitaria, democrática, sincera y armoniosa para hacerla más humana. Entonces debe abolirse, de modo definitivo, toda manifestación de opresión, de dominación, en el que los padres o maestros repriman a los niños. En ese ambiente, resulta de provecho participar en sus juegos y distracciones, conversar sobre sus intereses y alegrías, invitarle a realizar tareas comunes, narrarle cuentos o chistes adecuados a su edad, estudiar juntos, etcétera; todas estas actividades deben perseguir el objetivo de inducir en los niños un pensamiento cada vez más abstracto en el que utilicen la lógica para resolver los problemas propuestos.

Con los párrafos anteriores he tratado de exponer las actitudes que deben tomar los adultos y en particular los profesores ante los juegos infantiles, lo cuales, por supuesto, tienen características distintas, pues desde luego que los juegos que promueven un desempeño físico no estimulan las mismas habilidades que aquellos en los que se desarrollan habilidades intelectuales.

Como el planteamiento de esta tesis esta dirigido a exhibir la forma en que se deben realizar los juegos lógicos, en lo sucesivo muestro las características que estos presentan, los cuales aparecen dependiendo del nivel de desarrollo cognitivo que tienen los niños.

En particular el juego lógico de los niños que se encuentran en el período de las operaciones concretas suelen presentar las siguientes características:

- ✓ “El juego lógico es una actividad libre, pues el juego por mandato no es juego. Pero éste sigue reglas que deben de ser respetadas y que normalmente las fija el adulto que se integra o que guía la actividad.

- ✓ El juego lógico no siempre es la representación de la vida cotidiana. Más bien consiste en escaparse de ella a una esfera temporal de actividades que poseen su tendencia propia.

- ✓ El juego lógico transforma la visión del niño respecto a la realidad externa, crea un mundo donde se pueden aplicar todo tipo de razonamientos, los cuales siempre siguen un orden.

- ✓ El juego lógico es desinteresado; es una actividad que transcurre dentro de límites de tiempo y de espacios establecidos y se practica en razón de la satisfacción que produce su propia práctica.

- ✓ Al principio el juego lógico se caracteriza por la imitación y posteriormente por la elaboración de las técnicas que le permiten resolver los problemas empleando las habilidades propias de cada niño”.[12]

Dentro de los objetivos que persigue el juego lógico se encuentran los siguientes:

1. Desarrollar métodos que ayuden a los niños a resolver problemas parecidos que aparezcan en lo sucesivo, para ello sugiero evitar dar importancia excesiva a la necesidad de responder correctamente a los problemas planteados, pues lo que cuenta sustancialmente es los métodos que se emplearon para resolver el problema.
2. Debatir de manera explícita o implícita los conceptos erróneos que se lleguen a presentar al resolver los problemas, por ello considero importante que permita a los niños cuestionar y participar en todo momento que necesite, pero manteniendo un orden al tomar la palabra, sugiero que escuche atentamente los comentarios que haga el niño para felicitarlos, o bien para guiarlos cuando sea necesario para que construyan las respuestas del problema que resuelven.
3. Encontrar y compartir métodos abreviados para la resolución de problemas de índole tanto matemática como cotidiana, esto fomenta su desarrollo intelectual y su actitud frente a la vida.
4. Asociar los métodos nuevos que aprende al resolver los problemas con experiencias familiares, pues al relacionar la estructura del pensamiento ya existente con el pensamiento lógico que se da en la clase, se logra que los conceptos enseñados en el aula se hagan menos extraños, amenazantes y abrumadores.
5. Responsabilizar a los niños de su aprendizaje, pues los juegos lógicos fomentan la idea de que “las matemáticas implican comprensión y creatividad, y no encontrar maneras de dar la impresión de que se sabe la respuesta o el procedimiento correcto”[13]
6. Fomentar la idea del trabajo en equipo, dado que los niños se comunican entre sí al resolver los problemas y constantemente buscan la ayuda de sus compañeros para lograr el resultado de manera más sencilla. También sugiero que procure que los niños hablen constantemente de las matemáticas entre sí y con el profesor con el objetivo de relacionar las matemáticas con los hechos cotidianos que viven los alumnos.
7. Fomentar en el alumno una imagen positiva de las estructuras del pensamiento con que cuenta desde que es pequeño, esto es especialmente importante en el caso de los niños con dificultades para el aprendizaje o para aquellos que presenten ansiedad ante las matemáticas.

[12] Basado en los comentarios hechos por Mavilo Calero Pérez en su libro sobre los juegos.
[13] Ibidem pág. 35

Sobre el punto anterior cabe señalar que es frecuente que los adultos y compañeros de los niños hagan que se sientan avergonzados de sus estrategias para resolver problemas, como resultado los niños tienden a ocultar o disminuir esas estrategias.

Peor aún, empiezan a creer que sus métodos no son válidos, que su manera de pensar las matemáticas es inadecuada y sin sentido, y esto no es favorable para el correcto desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Estos problemas pueden evitarse si el maestro incorpora las siguientes propuestas a su forma de abordar la enseñanza:

a) "Adoptar una actitud receptiva ante las estrategias empíricas del niño, ésta actitud elimina una enorme barrera entre los niños y el maestro y constituye una base para confiar en el maestro como en un amigo que le comparte de su experiencia, como consecuencia es mucho más probable que responda mejor en la enseñanza.

b) Tener en cuenta la capacidad y el valor de estas estrategias, para el cual a veces es un ejercicio útil comparar el pensamiento intuitivo y el lógico de un niño con el de niños más pequeños, de manera que se resalten las diferencias entre el razonamiento que se tenía anteriormente y el nuevo que se adquirió a través del desarrollo del pensamiento lógico, el desarrollo físico y del aprendizaje del niño.

c) Desarrollar una perspectiva del pensamiento lógico que este basado en estrategias empíricas, destacando su importancia en el desarrollo histórico de la matemática, pues a los niños les resulta interesante aprender la importancia que ha tenido, por ejemplo, contar con los dedos en el desarrollo del conocimiento matemático a través de la historia, pues estas discusiones les pueden dar confianza, sobre todo a los que tengan más edad, y que presenten dificultades al enfrentarse con la aritmética informal"[14].

Por otra parte, es importante mantenerse receptivo pues si después de haber aplicado un juego o una actividad nota que el alumno pierde el interés por aquello que se puede deducir del juego, entonces sugiero que procure en la siguiente sesión retomar la actividad pero ahora mencionando las técnicas y conceptos aprendidos en la clase anterior con el fin de que el alumno tome conciencia de lo que se aprende a través del juego en el salón de clase.

---

[14] Arthur J. Baroody, "EL pensamiento matemático de los niños", págs. 46 y 47.

La educación matemática puede ser introducida mediante algunos juegos que pueden definirse en términos de los intereses y actividades actuales de los niños, en efecto, al realizar las actividades, los niños y adolescentes se preguntan de continuo "¿cómo lo estoy haciendo?" y para normar sus juicios toman en cuenta las reacciones verbales y gesticuladas de las personas significativas que le rodean; aunque también comparan su desempeño en varias áreas del conocimiento, con sus propios criterios y con el de sus compañeros. Por ejemplo, los estudiantes de primaria suelen comparar su desempeño en matemáticas con el mostrado en español o en ciencias para formarse el concepto de sí mismos en estas áreas.

"Hay otra tendencia en el desarrollo del autoconcepto[15], justo después de la transición a una nueva escuela, en especial al pasar de la secundaria al bachillerato, los conceptos que tienen los estudiantes de sí mismos parecen volverse más negativos e inestables, y en el tiempo entre los últimos grados de primaria y la secundaria, los estudiantes se vuelven más concientes de sí mismos; a esa edad los sentimientos de autovalía están más vinculados a la apariencia física y la aceptación social.

En la transición entre la primaria y la secundaria es donde las evaluaciones y los sentimientos sobre sí mismos[16], suelen influir en la adquisición de los conocimientos y en particular de las matemáticas, pues esta materia en ocasiones se presta para plantear una categorización de los alumnos entre los que son aptos, es decir los listos que captan todo lo que se enseña sobre los conceptos desde la primera exposición y los no aptos que son los comúnmente llamados lentos o tontos para aprenderlas; por eso se dice que las matemáticas suelen ser categóricas.

Al ser categóricas las matemáticas se debe tener cuidado al plantear los juegos y las actividades con el fin de no hacer distinción entre los participantes, por el contrario se debe buscar que las soluciones estén acorde a las respuestas dadas por todos los integrantes del grupo de forma que la respuesta sea una representación de lo planteado por todos.

Así, al notar que la solución fue construida por todos se fomenta la no discriminación entre los participantes y ello lleva a la larga a un proceso de aceptación de los comentarios dichos por cada uno.

---

[15] Anita E. Woolfok psicóloga autora del libro: "Psicología Educativa", lo define como "el compuesto de ideas, sentimientos y actitudes que la gente tiene sobre sí misma".
[16] Algunos psicólogos tratan al conocimiento de sí mismo como un sinónimo de autoestima.

Así se logrará paso a paso una integración a los niños y jóvenes en una cultura de no discriminación intelectual que les permita reconocer y valorar todos los comentarios emitidos, y con el paso del tiempo esta actitud fomenta la autoestima de aquellos que presentan una disminución de ella en el área de la matemática.

Bajo este objetivo el profesor debe buscar no elogiar las respuestas de un determinado grupo o individuo en la actividad, por el contrario debe fomentar la idea de que todos los puntos de vista son importantes y deben ser considerados para así llegar a una solución completa del problema planteado. Es importante tener muy presente que en el juego pero sobre todo en el juego lógico, nada está bien o mal sino que todos los comentarios llevan a una oportunidad razonable de triunfar, sobre todo si se trabaja en cooperación.

Hay por lo menos dos preguntas que algunos profesores pueden plantearse sobre la autoestima en relación a la materia de las matemáticas que se imparten en la escuela preescolar, primaria, secundaria y hasta el bachillerato;¿la autoestima influye en el comportamiento ante las matemáticas? Y ¿cómo afecta en la vida escolar la autoestima del estudiante?, en respuesta a ellas, parece más probable que los estudiantes con mayor autoestima tengan éxito no sólo en la materia de matemáticas sino en general en la escuela, ya que el tenerla en un alto nivel se relaciona con actitudes más favorables hacia la escuela, mejor comportamiento en el salón de clases y mayor atención en los conceptos que se le enseñan."[17]

Con respecto a la segunda pregunta planteada en el párrafo anterior "hay estudios hechos en 1990 que muestran la satisfacción de los estudiantes en la escuela: El pensar que las clases eran interesantes, que los maestros se preocupaban por ellos, la retroalimentación y las evaluaciones de sus profesores influían en su autoestima.

Los mayores aumentos en la autoestima se producen cuando los estudiantes se hacen más competentes en las áreas que valoran, incluidas las áreas sociales. Esto supone que el mayor desafío del maestro consiste en ayudar a los estudiantes a adquirir conocimientos y destrezas importantes por ello se debe motivar para que la autoestima sea parte de las metas más altas del proceso educativo. Debemos reconocer que la autoestima es el soporte motivador que condiciona el aprendizaje, sobre todo el que corresponde al de las matemáticas por ser categóricas; pues comúnmente se observa que las bajas calificaciones, los comentarios negativos de los padres, profesores y compañeros graban una impresión negativa que los aplasta y acentúa el desaliento"[18].

---

[17] Tomado del libro "Psicología Educativa" de Anita E. Woolfok capítulo 10 pág. 372.
[18] Ibidem págs. 395 - 399.

Por otro lado sé que existe un factor importante para estimular las potencialidades del alumno para aprender matemáticas: la motivación, pero "¿qué es la motivación?. Ésta se puede entender como un estado mental interno del individuo que activa, dirige y mantiene cierta conducta, también se suele dividir en dos: la motivación intrínseca que es la asociada con las actividades que son reforzadas en sí mismas, es decir, es la que surge de la tendencia natural a buscar y superar desafíos cuando se trata de intereses personales y de ejercer las capacidades; y la motivación extrínseca que es creada por factores externos como las recompensas y los castigos, por ejemplo, cuando hacemos algo para obtener una buena calificación, evitar un castigo, etcétera.

Muchas teorías de la motivación destacan el importante papel de las metas, éstas aumentan la motivación si son específicas, moderadamente difíciles y es factible alcanzarlas en el futuro inmediato, se distinguen entre: las metas de desempeño, las cuales se caracterizan por la intención de parecer listo o capaz a los ojos de los demás; y las de aprendizaje, en las que se manifiestan la intención de obtener conocimientos.

Los estudiantes motivados para aprender se establecen metas de aprendizaje más que de desempeño y se concentran en la tarea más que en el ego, este tipo de actitud fomenta la adquisición del pensamiento lógico estructurado de manera más sencilla (pues también en las matemáticas se trabaja bajo objetivos que están regidos por la motivación). Para que el establecimiento de metas sea eficaz en el aula, los alumnos necesitan recibir retroalimentación precisa acerca de su progreso hacia éstas y aceptarlas en lugar de rechazarlas.

"Es poco probable que los estudiantes, perseveren en las tareas o respondan bien a los maestros que los hacen sentir inseguros o incompetentes y que los hacen fracasar. Es menos probable que se responsabilicen del aprendizaje si en el aula se sienten como peones más que como piezas claves, o si creen que el maestro no se preocupa por ellos.

Casi todos los estudiantes tratan de explicarse sus fracasos. Cuando fallan los alumnos que por lo general tienen éxito, suelen hacer atribuciones internas y controlables, por ejemplo, dicen que entendieron mal las instrucciones, carecían de los conocimientos necesarios o no estudiaron lo suficiente.

Cuando los jóvenes se consideran capaces y atribuyen su fracaso a la falta de esfuerzo o a conocimientos insuficientes (causas controlables), en la siguiente ocasión suelen concentrarse en estrategias que les permitan triunfar.

Ésta es una respuesta adaptativa orientada a la comprensión de los temas aprendidos que con frecuencia conduce a los logros."[19]

[19] Ibidem pág. 394

"Los mayores problemas motivacionales surgen cuando los estudiantes atribuyen sus fracasos a causas inestables e incontrolables. Estos alumnos parecen resignados al fracaso, deprimidos, desamparados, lo que generalmente llamamos "desmotivados", de aquí que la apatía sea una reacción lógica al fracaso si los alumnos creen que sus causas son inestables, que es poco probable que cambien, además es menos probable que quienes ven sus fallas bajo ésta luz busquen asistencia, ya que creen que nada ni nadie puede ayudarlos"[20].

Para mejorar y fortalecer los esfuerzos que conducen a la plena comprensión de los conceptos matemáticos, empleando la motivación y fomentando la autoestima sugiero que los alumnos apoyados por los maestros:

- Hagan revisiones y comparaciones con temas anteriores mostrando lo sencillo que es ahora desarrollar cierto tema pues se conocen y comprenden mejor algunos elementos que lo componen, con ello se anima a mejorar los proyectos que pueden proponer los alumnos sobre el tratamiento hacia ciertos temas.
- Propongan sugerencias constructivas para mejorar y modificar las calificaciones cuando ocurran las mejoras, en este sentido planteo al profesor que devuelva a los alumnos los trabajos y exámenes con comentarios concretos y con un criterio crítico favorable sobre los aciertos, los errores y las posibles causas de éstos, para evitarles sucesivos errores al tratar mediante los mismos razonamientos erróneos los ejercicios futuros.
- Resalten las conexiones entre los esfuerzos y los triunfos pasados, para ello, se pueden tener pláticas individuales con los alumnos sobre el establecimiento de metas y la revisión de los objetivos, en la que pida a los estudiantes que manifiesten cómo resolver los problemas difíciles. También sugiero que confronten de manera directa las estrategias derrotistas y así eviten la sensación de fracaso.
- Se establezcan metas de aprendizaje en los estudiantes al moldear en ellos una orientación al dominio de los conceptos que se han enseñado; que reconozcan los alumnos el progreso y los avances; que compartan ejemplos de cómo se adquieren las habilidades en algunas áreas del conocimiento; y que lean relatos sobre estudiantes y algunos personajes matemáticos destacados que superaron problemas con el fin de resaltar las soluciones que le dieron a los problemas citados, y la forma en cómo los científicos han sacado partido de sus errores, por ejemplo puede comentar con los alumnos el caso de "Saccheri[21] quien inconscientemente desarrolló una geometría no euclidiana como resultado de su intento fallido de "probar" el quinto postulado de Euclides que habla de las rectas paralelas."[22]

---

[20] Ibidem pág. 396

[21] Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) matemático Italiano miembro de la compañía de Jesús, a partir de 1699 ocupó la cátedra de matemáticas de la universidad de Pavia, precursor de la geometría no euclidiana por su obra *"Euclides ab ovni naevo vindicatus"*, sobre la teoría de las rectas paralelas, dedujo a partir de dos hipótesis que contiene la negación del quinto postulado

El objetivo de los puntos anteriores, es lograr que los alumnos saquen ventaja de los errores y aprendan de ellos estrategias que les permitan resolver los problemas sucesivos a los que se enfrente no sólo en la clase, sino también en su realidad cotidiana.

En resumen y como ya mencioné, el juego es muy importante para el desarrollo físico e intelectual de los niños, es de vital importancia establecer metas factibles para realizarlos, las actividades que se proponen deben motivar a los niños y procurarles la adquisición de una autoestima que les permita afrontar y resolver cualquier tipo de problema.

Como el interés del niño varía de acuerdo con la edad, en general sugiero que las actividades lógico matemáticas que se proponen a través de juegos vallan acompañadas de las siguientes características que son del agrado de los niños que se hayan en cada etapa que a continuación presento:

Para los niños menores de tres años habrá que escoger juegos que estimulen sus capacidades físicas y les permitan ir construyendo la imagen del mundo que les rodea, de forma que se proporcione el lenguaje que sea necesario para expresarse.

Para los niños entre los tres y cuatro años se debe fomentar los juegos que contengan cantos, acciones de repetición y de caracterización. Los niños de cinco a ocho años son olvidadizos y muy ricos en impulsos, para ellos habrá que elegir juegos llenos de retos y que incluyan actividades físicas sencillas.

Hacia los nueve y diez años de edad, los juegos ya son más complicados, y los predilectos en esta etapa son los de escondite, de persecución y de caza, así como adivinanzas que fomenten su imaginación. A los once y doce años, su instinto gregario[23] se manifiesta fuertemente, los niños de estas edades prefieren los juegos de competencia, a ellos hay que proporcionarles actividades que fomenten su curiosidad por nuevos retos y formarles la inquietud por descubrir nuevas cosas por sí mismos.

De los trece años en adelante entra el difícil período de la adolescencia, será preciso ofrecer a estos jóvenes juegos que estimulen su actividad intelectual y que promuevan el pensamiento abstracto haciendo referencia al pensamiento lógico matemático en la resolución de los problemas que se planteen; de estos se hablará en el capítulo VI de esta tesis con mayor detalle.

---

de *"Los Elementos"* de Euclides, una de las proposiciones en las cuales pueden reconocerse teoremas de geometría no euclidiana.

[22] Tomado de "Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático" de Inés María Gómez Chacón pág. 204.

[23] Es el instinto de la persona que forma parte de un grupo sin distinguirse de las demás, y en especial de la que actúa siguiendo las ideas o iniciativas ajenas.

En el próximo capítulo expongo algunas actividades que pueden aplicar dependiendo de la etapa de desarrollo cognitivo del niño. Este capítulo contiene un mayor número de actividades para los niños que se encuentren en el período de las operaciones concretas, pues esta es la etapa en que se consolidan los conceptos matemáticos que se manejan frecuentemente. Aclaro que por razones de espacio las actividades para los jóvenes del período de las operaciones formales se encuentran en el capítulo IV, dado que van acompañadas de una descripción más profunda sobre dicho período.

CAPITULO V. JUEGOS SEGÚN EL PERÍODO COGNITIVO DEL NIÑO.

En este capítulo desarrollo algunas actividades en las que exhibo la propuesta pedagógica que propongo. Como mencioné en el capítulo anterior, estas actividades estan desarrolladas dependiendo del período de desarrollo cognitivo en que se encuentre el niño, por lo que escribo como complemento a la información que aporté en el capítulo IV y previo a la exposición de las actividades que corresponden a los períodos sensorio-motriz y el de las representaciones preoperatorios, las características que deben seguir los juegos para conseguir la atención de los niños de dichos períodos; es decir, se trata de un breve resumen donde remarco las características sobresalientes que deben presentar los juegos infantiles en cada período.

Por otro lado las actividades estan escritas en impersonal con la intención de facilitar a los educadores las instrucciones de las actividades que lograran una adquisición significativa del conocimiento por parte de los alumnos, para ello propongo el siguiente esquema de trabajo para cada una de ellas:

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD, donde describo brevemente el contenido de la misma.
EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES que pueden realizar la actividad.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS, las cuales tienen relación directa con las etapas del desarrollo cognitivo de los niños descrita por Piaget y que constituyen los objetivos que se persiguen en cada actividad.

UBICACIÓN HISTÓRICA; en esta parte anexo información que los profesores pueden mencionarles a los niños previa o durante la aplicación de la actividad, esto da continuidad a lo sugerido por Miguel de Guzmán en el capítulo I y constituye una parte fundamental de la propuesta pedagógica.

MATERIAL, donde especifico si alguno de ellos puede ser remplazado, y menciono si se debe realizar en equipo o en forma individual para agilizar la construcción del mismo.

PROCEDIMIENTO, en esta parte describo las acciones que realizan tanto los profesores como los participantes de la actividad, también menciono si es necesario hacer algo antes de que los niños la ejecuten; aquí incluyo una “apertura” donde indico cómo arranca la actividad y un “cierre” que consiste en una reflexión de lo que se efectúa y sus posibles efectos obtenidos.

COMENTARIOS Y PREGUNTAS sugeridas, donde propongo “tips” de interacción entre los profesores y los participantes, así como preguntas que enriquecen la actividad, es probable que se encuentren insertadas en algunos pero no en todos los pasos que corresponden al procedimiento.

DIBUJOS O ILUSTRACIONES que están anexados en los pasos del procedimiento donde son necesarios para aclarar lo descrito y colaboran en la aplicación de la actividad.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN, donde describo en ciertos casos, algunas de las posibles reacciones que pueden presentar los participantes del juego, pero en todos describo la solución del problema que se plantea con dicha actividad.

EXTENSIONES O VARIANTES, aquí escribo sugerencias para relacionar la actividad con otras o bien menciono que se pueden adaptar a otro período de desarrollo cognitivo.

Entre los puntos que describen el esquema anterior no integré la duración de las actividades dado que es importante que una vez iniciada la actividad se permita que el niño practique cuanto requiera el juego, no sólo para que se divierta sino para que cuando termine se encuentre plenamente convencido de los conceptos que aprendió al desarrollar la actividad.

Es importante tomar en cuenta que el tiempo de duración promedio de una clase en la escuela es de 50 a 60 minutos, y dado que sugiero se apliquen las actividades en la escuela, entonces trate de aplicarlas en el tiempo que considere conveniente, siempre que éste no sea menor a 20 minutos ni mayor a 60 minutos. Pero si tiene la oportunidad de extenderse sugiero que la actividad no exceda los 90 minutos para evitar que los niños pierdan el interés en la aplicación posterior de la actividad.

Con el fin de que la exposición sea clara, escribo el inicio de cada actividad utilizando una hoja nueva, esto permite identificar con claridad el inicio y término de cada una. Espero que la información así como las actividades sean de utilidad para aplicarlas en el transcurso de los cursos de educación básica en matemáticas.

EL PERÍODO SENSORIO-MOTRIZ: Abarca desde el nacimiento hasta los dos años de vida del niño, en éste se construyen todas las relaciones que el niño necesita para lograr el desarrollo del pensamiento lógico matemático ya que en este período el niño recibe e identifica mucha información que le ayuda a comprender el mundo en el que vive y va almacenando datos que le son de utilidad para identificar las relaciones entre los objetos que va conociendo con la ayuda de los adultos que le rodean.

"Para los niños de esta etapa se deben procurar juegos en los que se estimule sus sentidos: la vista, el oído, el gusto, el olfato y el tacto, es necesario dotarlo de actividades en las que el niño pueda adquirir vivencias de y con su propio cuerpo de manera que logre distinguir entre su yo y el resto del mundo que le rodea, de esta forma adquiere las nociones de movimiento que le permiten medir sus fuerzas"[1].

---

[1] Párrafo inspirado en la lectura del libro "Actividades matemáticas con niños de 0 a 6 años" de Lahora M. Cristina.

ACTIVIDADES DEL PERÍODO SENSORIO-MOTRIZ

EDUCACIÓN MATERNAL

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: A SEGUIR LOS OBJETOS.

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños desde los 3 meses de edad. Pueden participar un 1 niño y 1 o 2 adultos.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Distinguir entre diferentes objetos, ubicar espacialmente al niño, estimular los sentidos, formar la imagen corporal del niño.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Todos los seres humanos pasan por la primera infancia incluyendo a los grandes matemáticos de todos los tiempos, entonces, si se recibe el estímulo apropiado tempranamente es probable que se asegure un correcto desarrollo no sólo personal sino también intelectual.

Se asegura que el niño se encuentre despierto y se mira de frente, entonces se cuenta un cuento pequeño que introduzca un objeto que se presenta al niño se procura que el niño observe o al menos reconozca la silueta de la persona que le habla y que esté atento a lo que dice pues aunque su lenguaje aún no sea familiar para el niño, a la larga será de mucha utilidad para la construcción de su estructura lingüística el oírlo, luego se dice: *¡te voy a mostrar un objeto con el que te divertirás, es de color*: (se menciona el color predominante) *y su tamaño es:* (sólo se menciona chico, mediano o grande), *sirve para:* (se dice la actividad más relevante para la cual se emplea el objeto, si es un juguete sólo se dice que es para divertirse), *¡míralo!, se llama:* (se mencione el nombre del objeto); *¡vamos a jugar juntos con él!*....

MATERIAL: Objetos de distinto tamaño y colores, así como texturas, preferentemente que emitan un sonido al moverse o bien al apretarles; ejemplos: sonajas, muñecos con cascabeles en su interior o que emitan sonidos electrónicos que el niño pueda distinguir.

PROCEDIMIENTO: Se cambia el objeto lentamente de posición con respecto a la mirada del niño, con el fin de que el niño lo siga con la mirada, si el niño pierde de vista el objeto se atrae su atención mediante el sonido que emite el objeto.

Se varía la velocidad en que el objeto se va desplazando por el espacio, y se intenta que éste toque en forma clara distintas partes del cuerpo del niño, al mismo tiempo se dice el nombre de la parte del cuerpo que toco en forma comprensible y se repite varias veces el nombre de dicha parte, de forma que el niño escuche y sienta que el objeto lo toca en un mismo lugar.

Se fomenta que el niño oiga las voces de los adultos y los sonidos que emite el objeto que se presenta, si se escucha un breve balbuceo por parte del niño se recomienda se motive al niño para formar un diálogo con el objeto o con las personas que estan a su alrededor en ese momento.

Se debe permitir que los niños tomen entre sus manos el objeto y que lo manipulen libremente, si el niño toma alguna parte de su cuerpo mientras se realiza la actividad, se recomienda que lo mueva y mencione el nombre de dicha parte. Por ejemplo se puede toma al niño de las piernas, se suben y bajan las dos al mismo tiempo y luego una sube mientras la otra baja y por último se puede simular que está caminando o inclusive corriendo, lo mismo puede hacerse con los brazos o se puede estimular que el niño abra y cierre los dedos de la mano sobre su propia palma de mano.

La actividad se debe culminar cuando el niño dé síntomas de fatiga, o bien cuando se hayan presentado al menos tres o cuatro objetos distintos. Es preferible que el recorrido total del objeto que se mueve no exceda los 4 o 5 minutos.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Dependiendo del desarrollo de cada niño se irá observando al principio pequeños cambios en la forma en que el bebé sigue al objeto y va haciendo una distinción entre el medio que le rodea y su propio cuerpo, esto se distingue cuando el niño se toma más frecuentemente de alguna parte de su cuerpo, la observa con detenimiento y al mismo tiempo balbucea.

EXTENCIONES O VARIANTES: Si se aplica esta actividad a niños de mayor edad, por ejemplo para los que tienen entre 1 y 2 años, entonces se puede preguntar al niño: *¿qué parte de tu cuerpo está tocando (y se menciona el nombre del objeto que esta usando para jugar)?,* si el niño contesta la pregunta correctamente se puede preguntar después: *¿Para qué sirve (se dice el nombre de la parte del cuerpo que acaba de nombrar el niño)?*. Si el niño no menciona correctamente el nombre de la parte del cuerpo que se toco entonces se le ayuda diciendo su nombre y su función.

Esta actividad también puede ayudar a las personas con retraso en el desarrollo para construir poco a poco el vocabulario que se emplea para nombrar los objetos que estan en el entorno, es decir, esta actividad también se puede aplicar para tocar y nombrar los objetos que rodean a las personas que participan en el juego.

EDUCACIÓN MATERNAL

APROXIMADAMENTE DE 1 A 2 AÑOS.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: TORRES DE DIFERENTES TAMAÑOS.

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños mayores de 1 año. Pueden jugar máximo 10 niños para prestar a cada uno la atención que requiera, aunque el número de participantes está a disposición del profesor.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Distinguir y clasificar distintos tamaños, seriar los objetos empleando distintos criterios como el color, la forma, la textura o la forma, introducir los nombres de algunas figuras geométricas planas, afinar la percepción visual, desarrollar el sentido de equilibrio, ejercitar la coordinación ojo-mano y la motricidad gruesa, construir estructuras verbales a partir de los objetos observados.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se sugiere al profesor que introduzca cada pieza al mismo tiempo que invita al niño a realizar la actividad, para ello se plantea el siguiente ejemplo:

¡Vamos a construir una torre encimando estas figuras mira que forma tienen!, ¿crees que podamos hacerla muy alta?, ¿Se caerá?, ¡veamos que tan alto llegamos!.

MATERIAL: Objetos que se puedan colocar uno sobre el otro (por ejemplo cubos, octaedros, dodecaedros e icosaedros[2]) de preferencia que sean fáciles de sostener por los niños, también procure que sean de diferentes colores, tome en cuenta que deben estar hechos de materiales que no sean nocivos, para que si el niño decide llevarlos a la boca se tenga la confianza de poder hacerlo.

PROCEDIMIENTO: Se motiva al niño para que con la ayuda del profesor se forme primero una hilera utilizando todos los objetos que se presentan al niño, se menciona el nombre de la forma de las caras de cada objeto así como su color predominante.

Se forma varias hileras una al lado de la otra de manera que se note visiblemente la diferencia entre sus tamaños, recuerde que es importante que el niño intuya cuál es la más larga o corta, para ir formando la idea de comparación, para ello se menciona al mismo tiempo que se indica cuál es el objeto más grande, quién sigue en tamaño al objeto anterior y así sucesivamente hasta llegar al objeto más pequeño, también se procura que los colores de las piezas con las que se forman las hileras sean distintos o bien que las hileras completas sean hachas por objetos de un solo color.

---

[2] Las imágenes de estas figuras se pueden observar en las páginas 131, 132 y 133 de esta tesis.

Se ayuda al niño para que forme las hileras colocando las piezas una al lado de la otra; recuerde que se pueden combinar los colores de las piezas con que se forman las hileras al mismo tiempo se pregunta al niño *¿qué color es este (se menciona el nombre del objeto que se muestra al niño)?*, *¿es más grande o más pequeño que este (se toca y se menciona el nombre del objeto con el que se compara para hacer la pregunta)?*, se da el siguiente objeto en las manos al niño y se pide que lo acomode donde crea que debe ir en la hilera, si se da el caso, se recomienda permitir que el niño tome por él mismo los objetos y los coloque donde prefiera, pero siempre se cuestiona al niño *¿por qué lo pusiste ahí?*.

Se comienza a fabricar las torres encimando los objetos que previamente se colocaron en hileras, se pueden crear torres hechas con sólo un tipo de objetos, por ejemplo sólo hechas con cubos, con octaedros o con los demás objetos mencionados en el material o también se pueden ir intercalando, en todo momento se menciona al niño el nombre del objeto con que se construye la torre, así como los nombres de los colores de cada uno y su tamaño; siempre se motiva al niño para que participe activamente en la construcción de las torres.

Se varia, al igual que en las hileras, los tamaños de las torres y se construyen varias, posteriormente se intenta tirarlas o deshacerlas con la ayuda de los niños, se puede experimentar quitando los objetos que se encuentran en la base de las torres, o bien alguno de los que se encuentre en la parte central o hasta arriba de la torre, esto ayuda a los niños para adquirir cierta experiencia que es de utilidad para comprender conceptos relativos a la ubicación espacial, ya que se debe decir *¡vamos a quitar una pieza de en medio de esta torre (o bien de arriba o debajo de la torre)! ¿crees que se caiga?, se pregunta al niño ¿cuál crees que se caiga primero la torre grande o la chica si las empujamos las dos al mismo tiempo?, ¿por qué?*.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Se espera que el niño participe activamente y que al final del primer bimestre de practicar la actividad con la ayuda de un adulto, el niño comience por sí mismo a jugar de esta forma con éste tipo de material.

Recuerde que la estructuración del espacio en el niño pequeño sólo puede efectuarse adecuadamente cuando éste ya ha adquirido una imagen mental correcta de su propio cuerpo, por ello, si en el camino de la realización de dicha actividad el infante desvía su atención hacia la observación de sí mismo se recomienda se le permita.

Al principio, cuando el niño realice estas hileras o torres, es probable que no coordine bien sus movimientos y que incluso las torres no se formen adecuadamente y tiendan a caerse repetidas veces, pero se espera que a medida que practique se adquiera mejoría en la motricidad y en la destreza manual.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede experimentar con niños más grandes la construcción de hileras o torres hechas de plastilina o de objetos que se encuentran en casa como tazas, vasos y otros objetos todos ellos hechos de plástico para evitar accidentes; y se recomienda observar las reacciones que tiene cada niño al tratar de deshacer o tirar estas torres.

PERÍODO DE PREPARACION Y ORGANIZACIÓN DE LAS OPERACIONES CONCRETAS DE CLASES, RELACIONES Y NÚMERO

LAS REPRESENTACIONES PREOPERATORIAS: Este abarca desde los 2 o 3 y hasta los 7 años y se subdivide en períodos por edades: de entre los 2 o 3 y hasta los 4 años, de los 4 a los 5 y medio años, y de los 5 y medio a los 8 años, esto es según la clasificación que se vio en el capítulo II.

Existe una clasificación del juego en su etapa social para este período dada por Cousinet[3], la cual menciono brevemente:

"Según Cousinet, el juego pasa por cuatro etapas: la agresión manual, la agresión oral, la agresión de exhibicionismo y la de importunar, y éstos constituyen la forma en que los niños de esta edad se expresan colectivamente.

- En la manual, el niño siente dos necesidades: la de manifestarse distinto y de unirse al otro, por ello a los 3 o 4 años, los niños se empujan, se tiran, se atropellan, y en general este comportamiento es considerado como natural, tanto que "un niño que no se atreve jamás a empujar o tirar a otros niños tiene en verdad, un desenvolvimiento anormal"[4], este comportamiento constituye una actividad de pre-sociabilidad, como ejemplo (se debe observar que) constantemente se ha visto en las escuelas que un par de niños que se han empujado, momentos después toman una actitud conciliadora y se ponen a jugar.

El profesor debe tener cierto grado de intuición para distinguir entre la personalidad propia del niño en esta etapa de aquella actitud que puede asumir el infante y que le indique al profesor que algo no está bien en su desarrollo del entorno familiar, es decir, si se observa que un niño sólo pega y arremete contra sus compañeros sin nunca conseguir integrarse a la actividad lúdica es muestra de que tal vez es tratado con agresión en su casa y ésa es la forma en cómo lo denuncia o bien puede que se trate de algún malestar físico que padezca.

---

[3] Roger Cousinet es un gran pedagogo francés. Nació en 1889. Su método es conocido como de trabajo libre por grupos. Su concepción pedagógica está influenciada por las ideas de Rousseau y Dewey. Entre sus obras se pueden citar: Un Nuevo Método de Trabajo Libre por Grupos, La Vida Social de los Niños, Estudios de Pedagogía, La Formación del Educador y Las Primeras Manifestaciones de la Vida Social en los Niños.

[4] Mavilo Calero Pérez, "Educar jugando" pág. 25

- La agresión oral. Se manifiesta en el niño cuando hace comentarios del tipo: *"Yo soy más fuerte que tú". "Mi padre es más bueno que el tuyo"*, entre otras, se trata de las formas de afirmación del yo, que el niño buscará satisfacer de diferentes maneras. En esta etapa se recomienda que se apliquen actividades en las que todos los niños del grupo expongan las actividades que mejor desempeñan y compartan de las experiencias que han tenido con sus compañeros, de esta forma todos se darán cuenta que tienen ventajas y desventajas sobre los demás compañeros de su grupo, poniéndolos a todos en un mismo nivel.

- El exhibicionismo. En esta etapa el niño presenta aquellos signos de superioridad que le caracterizan y trata de asegurar la alianza del adulto (ser el mimado del maestro), quiere convertirse en un objeto de envidia de los demás con el fin de delimitar su posición en el grupo, pero una vez que el niño ocupa su sitio ya no tendrá necesidad de recurrir a estos medios. En tal situación los juegos que se recomiendan aplicar son aquellos en los que cada niño elija su posición y se comprometa a cumplir con las necesidades de tal puesto, por ejemplo la posición de defensa en el juego de fútbol, o de lanzador en el béisbol, etcétera.

- El niño que importuna es un ser social que busca satisfacer su necesidad de socialización llamando la atención de todos sus compañeros, esta actitud será superada, cuando los integrantes del grupo a la larga se manifiesten ante él con un sentimiento de aceptación y de reconocimiento. A este tipo de actitud se le suele canalizar en los juegos poniendo al niño con tal manifestación en mayor actividad con respecto a sus compañeros de esta forma todos lo verán constantemente participando y haciendo las veces de árbitro en los juegos, esta actitud a la larga orillará al niño desear participar de forma más pasiva y en la misma magnitud que la de sus compañeros pues es probable que se halla ya satisfecho su necesidad de reconocimiento"[5].

Es importante que el profesor encuentre las estrategias necesarias para fomentar el correcto desarrollo del juego en este período, por ello se sugiere que el profesor observe y prevenga los posibles problemas que se puedan presentar, de esta forma sabrá conducirlos a un buen término. Las actividades que se proponen para ser aplicadas en este período son las siguientes.

[5] Tomado de la lectura del capítulo 1 del libro "Educar jugando" de Mavilo Calero Pérez.

EDUCACIÓN PREESCOLAR

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: MI CAJA DE TESOROS

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños de 3 años en adelante, aunque se puede aplicar a aquellos niños que necesiten incrementar su vocabulario y tengan mayor edad. Se puede aplicar en grupos pequeños de 5 a 10 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Identificar y nombrar apropiadamente las propiedades de un objeto familiar, introducir la correspondencia uno a uno, clasificar y hacer conjuntos de objetos que tengan características comunes, incrementar el vocabulario, incrementar la imaginación y creatividad, mejorar el lenguaje.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se debe contar una historia parecida a la siguiente: *Hubo una vez un gran pirata que viajó por todo el mundo y que coleccionó toda clase de cosas bellas y de valor, pero una vez en uno de tantos viajes su barco naufragó y todo su tesoro se sumergió, desde entonces algunos buzos lo buscan para hacerse ricos, pero ahora tú también puedes formar tu propio tesoro, ¡que tal si lo intentamos!, ¿te gustaría jugar?*

MATERIAL: Una caja de galletas forrada como lo prefiera cada participante, esta será la "caja de tesoros", diferentes objetos que el niño pueda llevar al salón de clases y que sean no muy grandes, ejemplos: tapas de botellas de refresco, pelotas de unicel pintadas de diversos colores, barras de plastilina, dados, canicas, cáscaras de nueces, corchos, dulces, etcétera, bolsas de distintos tamaños y un marcador con el que pueda marcar las bolsas.

Se puede que antes de cada nueva sesión del juego, el profesor añada un elemento en cada una de las cajas de los participantes, pero cuidando que los niños no se den cuenta, al principio, los elementos añadidos son muy similares en todas las cajas (caramelos, dulces, frutas secas, etcétera) y luego cada vez más variados (piedritas, sopas de pasta de diferentes tamaños, fichas de la misma forma y el mismo tamaño pero de diferentes colores, tapas de envases de plástico de distintos tamaños, plumas con tintas de diversos colores o vasitos de yogurt de formas y colores distintos).

Previamente a la aplicación del juego el profesor debe verificar que cada niño tenga el mismo número de elementos con cierta característica para introducirlos en las "cajas de tesoro", por ejemplo cada niño debe tener: una cáscara de nuez, una tapa de refresco, una liga y una hoja de papel; también se intenta que por lo menos 3 niños tengan el mismo color de uno de los objetos anteriores, aunque no es indispensable para la realización de la actividad, por el contrario la variación de los colores o formas enriquece al juego.

PROCEDIMIENTO: Se indica a los niños que introduzcan cada uno los objetos con las características antes mencionadas en sus respectivas "cajas de tesoro". Para ello se procura solicitar un día antes que los niños lleven algunos objetos; se puede comenzar con objetos que sean bien conocidos por ellos como cáscaras de nueces, o tapas de botellas de refresco, entonces en la primera sesión del juego todos los integrantes tendrán el mismo número y la misma clase de objetos en sus "cajas de tesoros"

Se familiariza a los participantes con el contenido de sus "cajas de tesoros", es decir se motiva a que los niños destapen sus "cajas de tesoros" y observen bien las cualidades que caracterizan a cada uno de los objetos que contienen.

Se pregunta: *¿Quién tiene un tesoro parecido a mi tesoro en su caja?*. Sin mostrar el objeto elegido, el profesor enuncia una característica que permite reconocer al objeto, ejemplo: *"Yo tengo un tesoro que no es muy grande, pero si es muy duro, además se encarga de proteger a la nuez mientras crece. ¿Alguien sabe qué es lo que tengo en mi caja de tesoros?"*.

Se permite que los niños busquen en sus cajas algún objeto que coincida con las características que acaba de enunciar, una vez que lo encuentra se pide al niño que lo muestre levantándolo ante la mirada de todos. Recuerde que el objetivo no es adivinar cuál es el objeto al que se refiere en la pregunta, sino entrenar para identificar la propiedad de un objeto, y paralelamente formar un conjunto de cosas que tengan una propiedad común.

Luego se colocan en una bolsa todos los objetos que tienen la misma característica, en el caso anterior se hace un conjunto de cáscaras de nuez, el cual se introduce en una bolsa que debe tener escrito: "CÁSCARAS DE NUECES", se procura contar con varias bolsas que pueda marcar para hacer varios conjuntos que se distingan entre sí por las características de los objetos que los formen.

Se practica varias veces el razonamiento anterior con el grupo, pero se deben variar los objetos y las características que se piden para introducirlos en las bolsas, por ejemplo, si el profesor pide que muestren las tapas de refresco, entonces se pueden hacer bolsas donde se introduzcan las tapas de un mismo color.

Una vez que se hayan terminado de clasificar e introducir los objetos en las distintas bolsas, entonces se puede pedir a los niños que pasen a tomar sólo un objeto de la bolsa que el profesor les indique y que lo introduzcan nuevamente en su "caja de tesoro" de esta forma se reafirma la correspondencia uno a uno, un objeto con la característica señalada para cada caja.

Se sugiere que motive a los niños para que ellos inicien el juego a partir del modelo ya practicado, al principio puede que sea difícil para aquellos niños que tienden a mostrar su tesoro y no a describirlo manteniéndolo oculto en su "caja de tesoros", por lo que recomiendo se ayude a los niños en las primeras veces que le toque participar, para que posteriormente adquiera confianza y al final logre describirlo por él mismo.

Se pueden formar grupos pequeños en los que cada participante pueda ejercitar nombrando las propiedades de los objetos que se hayan en su "caja de tesoros", y se fomenta la participación de cada uno de los integrantes de los grupos, de esta forma se fortalece su intervención y se incrementa su vocabulario.

Se practica el juego durante varias semanas a razón de una o dos sesiones por semana, en las que por supuesto cada sesión debe de comenzar con una continuación de la historia que se planteó al principio la cual puede ser verídica (entonces se debe de tratar de algún personaje real del cual previamente se haya ilustrado bien el profesor) o bien se puede motivar a construir una historia en la que cada integrante del grupo colabore haciendo volar su imaginación.

Se debe culminar el juego cuando cada uno de los participantes haya descrito al menos un objeto contenido en su caja. Se debe dejar de practicar cuando el profesor considere que los niños hayan mejorado considerablemente en su vocabulario y en el manejo del lenguaje

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Cada niño es diferente y por ello la forma en la que se apropia del lenguaje en general es distinta, pero se espera que al final del segundo o tercer mes de aplicar la actividad, el niño por sí mismo sienta la necesidad de incrementar su vocabulario y de jugar este mismo juego en casa con familiares o amigos. Puede darse el caso en que si se pregunta *"Yo tengo un tesoro que es redondo ¿Quién tiene un tesoro igual a mi tesoro?"*, el niño que muestra el borde redondo de su corcho justifica correctamente su elección, en estos casos se procura comentar con el grupo las respuestas dadas por cada uno de ellos.

Es importante que se asigne a cada objeto un sólo nombre, pero se puede hacer referencia de él mediante algunas de sus características y funciones, de forma que en el futuro no le cueste trabajo al niño manejar este tipo de identificación en las estructuras matemáticas.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se debe renovar el contenido de la "caja de tesoros" constantemente; puede ser cada día, cada semana, o bien cuando el profesor lo considere necesario, es probable que los objetos y el número de cosas en cada caja sea distinta, eso dependerá del gusto de cada niño al llevar objetos nuevos para su caja.

EDUCACIÓN PREESCOLAR

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: DISTINGAMOS

EDADES Y NÚMERO DE INTEGRANTES: Desde los 4 años. Se puede jugar con 10 y hasta 15 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Incrementar el vocabulario del niño, clasificar, identificar y nombrar las características de un objeto, reafirmar la operación de conteo, dar la noción intuitiva de conjunto e introducir las operaciones de suma y resta.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se sugiere que el profesor invente un cuento que motive a los jugadores a participar, un ejemplo puede ser el siguiente: *Una vez me encontré una caja misteriosa en mi casa, me pregunté cuántas cosas contendría y si todo lo que tenía era de un mismo color o de una misma forma, por eso decidí traerla para que entre todos descubramos su contenido, ¿quieren ayudarme a revisarla?*.

MATERIAL: Objetos con características fáciles de nombrar, tres características bastan para comenzar, por ejemplo: forma, color, tamaño, sonido, olor, textura, etcétera. Una caja de tamaño regular y una bolsa bastante grande de color opaco.

PROCEDIMIENTO: Se cuentan el total de objetos contenidos dentro de la caja, para ello se pueden sacar uno a uno y pasarlos a la bolsa obscura, se procura que todo el grupo participe en sacar los objetos y en contarlos, para ello se debe pedir que pase un niño a la vez, también se pide a los niños que identifiquen al menos dos características de los objetos por ejemplo la forma, los colores, la textura, el olor, etcétera de todas las cosas que acaban de observar.

Se elige un criterio para clasificar los objetos que acaban de contar, por ejemplo el criterio "color", luego se pregunta *¿cuáles son los colores de los objetos?*, se sugiere que los niños mencionen las características más visibles de los objetos conforme los saquen de la bolsa. Otros criterios de clasificación pueden ser los tamaños, las formas, o la utilidad que le den a cada objeto, así como su olor o consistencia.

Se describen y se reúnen cada uno de los objetos con otros parecidos: si un niño describe un objeto como *"un triángulo amarillo"*, se debe pedir al grupo que busque si hay otros objetos que tengan triángulos amarillos y que se encuentren dentro de la bolsa, en el caso de una respuesta afirmativa, se pregunta *¿son idénticos estos objetos que dicen tienen "triángulos amarillos"?* esto con el fin de generar una descripción que tenga en cuenta otras características del objeto.

Cuando los niños sean capaces de hacer una descripción completa, se sugiere motivarlos para que respondan la siguiente: *¿cómo saben si su descripción está completa o incompleta?*, esto fomenta un pensamiento lógico que le será de utilidad al niño al justificar las respuestas a algunos problemas matemáticos. Para fomentar la descripción se sugiere que elija una cosa de las contenidas en la bolsa y sin mostrarlo a los participantes, plante o formule preguntas que sólo puedan ser contestadas por "*sí*" o "*no*". Por ejemplo, para conjuntos de cosas de color rojo, amarillo o verde, de forma cuadrada, redonda o triangular, chatos y gruesos, podemos tener el siguiente diálogo:

Profesor: ¿Es azul?
Niño: No.
Profesor: ¿Es rojo?
Niño: Sí
Profesor: ¿Es redondo?
Niño: No
Profesor: ¿Es cuadrado?
Niño: No
Profesor: ¿Es triangular?
Niño: Sí
Profesor: ¿Tiene olor a fresa?
Niño: No
Etcétera.

Después se trata de adivinar entre todos los participantes el nombre del objeto del que se hacen las preguntas y se busca en la bolsa todos los objetos que se parezcan o que tengan características en común con éste, una vez que se encuentran, se colocan nuevamente en la caja, y cuando finalmente se encuentre la bolsa vacía se cuentan en voz alta los objetos con la ayuda de los niños. Al final de las clasificaciones se debe procurar que todos los objetos se encuentren nuevamente en la caja.

Se retira del conjunto final de objetos que se encuentran en la caja una cantidad al principio pequeña y después grande de cosas para introducir la noción de la operación resta, para ello se les pregunta a los niños *¿cuántos objetos quedan en la caja si sacamos estos (entonces se muestran y se cuentan los objetos que fueron extraídos)?*, esto ayuda para que los vuelvan a contar o bien para comenzar a restar del total que había en la caja la cantidad de objetos que se tomaron de ella.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Después de practicar constantemente este juego durante varias semanas, los niños incrementarán su forma de describir las cosas que les rodean y comenzarán a hacer con agilidad una serie de operaciones como sumas y restas con números que tengan no más de tres dígitos.

EXTENSIONES O VARIANTES: Esta misma actividad se puede aplicar con figuras geométricas o con números dibujados en papel cartulina siguiendo el mismo procedimiento.

EDUCACIÓN PRIMARIA 1° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: LABERINTO

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 6 años. Se realiza de manera individual o en equipos de 2 personas

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Promueve la capacidad de elección, el reconocimiento de objetos e incrementa la ubicación espacial para distinguir entre arriba y abajo, también promueve la motricidad fina, refuerza la lateralidad (derecha e izquierda), facilita la adquisición del vocabulario y el manejo del lenguaje necesario para comunicar sus respuestas.

UBICACIÓN HISTÓRICA: El profesor puede invitar a los participantes a jugar de la siguiente manera: *Tengo estos dibujos donde se encuentra un niño y varios caminos que puede recorrer, que te parece si marcamos los distintos caminos que el niño puede tomar y descubrimos los distintos objetos que se encuentran al final de cada camino.*

MATERIAL: Fotocopias del laberinto de preferencia una por cada niño y lápices de colores.

PROCEDIMIENTO: Se reparten las fotocopias del laberinto y se da a cada niño al menos cinco colores distintos con los que marcará los distintos caminos que puede trazar.

Se les pide a los niños que marquen con distintos colores los diversos caminos que puede tener el niño que se muestra en el dibujo para llegar a un objeto que se les indique, por ejemplo para llegar a la bicicleta, luego se muestra los distintos caminos hechos por cada uno de ellos frente al resto de los participantes.

Entonces se puede preguntar: *¿Hay sólo un camino para llegar a la bicicleta?, ¿cuántos distintos puede haber?, ¿a qué objetos puede llegar el niño?, ¿a qué objetos no puede llegar el niño?, ¿por qué?, ¿se puede usar un mismo camino para llegar a dos figuras distintas?, ¿puedes dibujar un camino que sea el más largo de todos?, ¿cuál es el camino más pequeño?, ¿a qué figura lleva el camino más largo?, y al final del camino más chico ¿qué figura esta?, ¿todos los caminos se comienzan a marcar hacia la derecha?, ¿hay caminos que lleven hacia debajo de la hoja?, ¿cuáles son?, ¿hay salidas del laberinto que se marquen hacia la izquierda?, ¿cuántas son?, etcétera.*

Se pide a todos los participantes que expliquen las razones por las que marcaron esos caminos y no otros, también procure escuchar todos los comentarios de los jugadores ya que el sentirse escuchado motiva para transmitir las respuestas en forma oral.

Se invita al profesor a que busque o invente otros laberintos que sean del mismo estilo de manera que pueda aplicarlos en sucesivas ocasiones, es muy importante que se motive a los niños para que indiquen la ruta que siguieron para llegar a cierto objeto pero empleando las palabras "arriba, abajo, derecha e izquierda"

Por ejemplo en el siguiente laberinto uno de los caminos que van de la imagen del niño a la imagen del bote de la basura puede describirse así: *comienzo a marcar el camino hacia arriba y a la derecha, luego el camino hace que baje, luego me lleva a la izquierda y así llego al bote de basura.*

Imagen de un laberinto sencillo.

Otro tipo de laberintos que pude introducir el profesor son como el siguiente:

Imagen tomada de la tesis de Sara Alejandra Pando Figueroa, pág. 71

Se debe aplicar este tipo de actividades durante un largo período de tiempo para ayudar a los niños en su expresión oral y para que sean capaces de indicar correctamente el camino que siguieron de forma que sea comprensible para todos sus compañeros.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Para este tipo de laberintos no existe una solución única por lo que se sugiere que permita a los niños que hagan sus propias rutas, esto contribuirá en su adquisición del lenguaje, del vocabulario y de una apropiada ubicación espacial. Es probable que al principio no se tracen correctamente las rutas a lo largo de los caminos, es decir, tal vez se salgan los trazados pero se espera que posteriormente adquieran la práctica necesaria para resolver los laberintos.

La respuesta correcta para el segundo laberinto que se propone en la actividad es la siguiente:

Imagen tomada de la tesis de Sara Pando Figueroa, pág. 123

VARIANTES O EXTENSIONES: Se debe pedir al niño que después de haber resuelto estos laberintos, trate de inventar él mismo nuevos laberintos y que se los dé a sus compañeros para que los resuelvan, de esta manera se estimula su imaginación y creatividad.
Se puede pedir al niño que cierre algunos de los caminos con líneas y que los comparta con sus compañeros para que descubran los objetos a los cuales se puede llegar y se debe permitir que se expongan los comentarios de cada uno de los niños de forma que expresen verbalmente sus conclusiones.
Cuando el niño es más grande se puede sustituir las palabras arriba, abajo, derecha e izquierda por Norte, Sur, Este y Oeste, de forma que a la larga también podrán manejar estos conceptos en forma clara y precisa.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: A UNIR PUNTOS

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: A partir de los 6 años. Esta es una actividad que se realiza en forma individual.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Promueve la motricidad fina, la ubicación espacial, la lateralidad, introduce la noción intuitiva de continuidad y facilita el trazado de líneas.

UBICACIÓN HISTÓRICA: El profesor puede motivar la participación de los jugadores mediante un comentario como el siguiente: *Me regalaron esta hoja, me dijeron que contiene un dibujo bonito, ¿me ayudas a descubrir de qué se trata?, ¡unamos las líneas!*, pero también puede inventar su propia historia para intrigar a los niños a descubrir el dibujo que se encuentra en la hoja que les da a los niños.

MATERIAL: Fotocopias del dibujo punteado de preferencia una por niño y lápices de colores.

PROCEDIMIENTO: Se reparten las fotocopias, una por niño, también los lápices de colores, se trata de darle suficientes a cada niño para que cada línea sea dibujada de un color distinto.

Se presenta los dibujos de cada niño al resto de sus compañeros, y entre todos se dice el nombre de los objetos que aparecen después de trazar las líneas punteadas.

Se recomienda que el profesor consiga dibujos cada vez más elaborados y los puntee para resolverlos en otras ocasiones. El dibujo propuesto en esta actividad es el siguiente:

Se debe permitir que los niños marquen los dibujos como mejor les parezca, pero de preferencia se debe preguntar ¿qué estrategia empleaste para marcar el dibujo?, ¿dónde comenzaste a marcarlo?, ¿por qué comenzaste ahí?, ¿se puede comenzar desde algún otro sitio?.

Se debe motivar al niño para que invente algunos dibujos punteados y que los comparta con el resto de sus compañeros, esto fomenta su creatividad y su imaginación, además le ayudará a ser preciso en el marcado de las líneas lo que mejora su motricidad fina.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Cada niño tiene su propia técnica para marcar las líneas punteadas, al principio tal vez les cueste un poco de trabajo unirlas correctamente, pero el aplicador de esta actividad puede ayudarles a aquellos que presenten dificultades, claro que se espera que después de practicar constantemente este tipo de actividades, los niños presenten mejorías considerables en su forma de dibujar e inclusive en la de escribir pues este tipo de actividades mejoran la caligrafía y colaboran en la imagen del mundo que rodea al niño, se pueden crear dibujos de animales o de paisajes que los niños no conozcan de esta forma se motivará también la adquisición del vocabulario apropiado para referirse a estos.

EXTENSIONES O VARIANTES: Este tipo de actividad se puede hacer más interesante si se combinan dos o más imágenes encimadas, de forma que los niños deben de marcar de distinto color a cada una de ellas, se sugiere que esto se aplique a partir de los 7 años cuando los niños ya son capaces de identificar mejor las imágenes que se encuentran en el dibujo.

LAS REPRESENTACIONES OPERATORIAS. Como ya mencione en el capítulo II este período abarca desde los 7 u 8 años y hasta los 11 o 12 años. Acerca del tipo de juegos que se pueden aplicar así como sus características, hablé ampliamente en el capítulo IV por lo que en éste espacio sólo menciono las actividades que propongo se apliquen a los niños que se hallan en éste período.

EDUCACIÓN PRIMARIA 2° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: SOPA DE LETRAS MATEMÁTICA

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: A partir de los 7 años. Pueden participar el número de integrantes que deseen, si se forman equipos, éstos deben ser de máximo 3 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Promueve la ubicación espacial y la relación de nombres con símbolos e imágenes, también la motricidad fina, fomenta la originalidad, el vocabulario, la identificación de palabras y refuerza la gramática y la ortografía de los nombres de ciertos números y figuras geométricas.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Las sopas de letras han sido utilizadas por varias culturas para reforzar la gramática y las ubicaciones espaciales desde hace ya varios años, se puede introducir mediante una historia, un cuento o simplemente invitando a los niños a resolverlo retándolos en un concurso por ver quién encuentra el mayor número de palabras.

MATERIAL: Fotocopias de las distintas sopas de letras propuestas por el profesor, de preferencia una por cada niño, lápices o colores, un pizarrón y gis.

PROCEDIMIENTO: Se reparten las hojas con las sopas de letras una por cada niño, lo mismo con los lápices de colores, se dibujan en el pizarrón algunos números y figuras geométricas y se pide a los niños que anoten los nombres de dichas figuras debajo de la sopa de letras.

Se pide a los niños que busquen en la sopa de letras los nombres que acaban de anotar, estos pueden aparecer en forma horizontal, vertical o en diagonal, luego se indica que una vez que los encuentren deben encerrarlos con un óvalo o bien en un rectángulo de forma que se pueda distinguir del resto de las letras que se encuentran en la sopa.

Una que terminen de encerrar los nombres de las figuras o de los números, se comparan la posición de los nombres que cada concursante haya encontrado, de ser posible el profesor debe rectificar que las palabras estén correctamente encerradas.

La sopa de letra que propongo se resuelva en clase es la siguiente, pero el profesor puede buscar o crear muchas otras y resolverlas con la ayuda de todos los participantes de la actividad.

Se debe cuestionar a los niños *¿cuáles son las estrategias que empleas para encontrar las palabras en la sopa de letras?, ¿cómo comienzas a buscarlas?, una vez que la encuentras ¿cómo haces el trazado del óvalo o del rectángulo para encerrar la palabra?*, se recomienda poner atención a las respuestas que den los niños ya que en ocasiones de ellas se puede extraer el vocabulario que permita exponerles mejor los temas que se enseñan en la clase.

Esta sopa de letras la tomé de la tesis de Sara Alejandra Pando Figueroa "Un enfoque distinto de la enseñanza de las matemáticas y la lógica a nivel primaria" pág. 71

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Es probable que al principio cada niño utilice sus propias técnicas para encontrar las palabras y para encerrarlas, por lo que el aplicador debe de fomentar la libre expresión de cada participante. La solución a la sopa propuesta es la siguiente:

Imagen tomada de la tesis "Un enfoque distinto de la enseñanza de las matemáticas y la lógica a nivel primaria" pág. 123

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede tratar con sopas que contengan más letras en las que las palabras se encuentren intersecadas en posiciones horizontales con verticales o con diagonales y demás combinaciones posibles.

EDUCACIÓN PRIMARIA 3° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: CAMINITO DE DOMINÓ

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Se puede aplicar desde los 8 años. Se recomienda se aplique de forma individual, pero se pueden formar pequeños grupos de 3 personas por cada juego de fichas.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: EL niño refuerza las operaciones de clasificación y seriación de los números naturales que se encuentran en las fichas de domino, se introduce en el manejo de las fichas de dominó y por ello se familiariza con las reglas de dicho juego, se pueden introducir algunas operaciones aritméticas como la suma y resta de números no mayores a seis, promueve la ubicación espacial y la motricidad fina.

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA: El profesor puede introducir esta actividad mediante un cuento como el siguiente: *A Perla le compraron recientemente un dominó y su padre quiere jugar con ella, pero antes de esto, Perla decide destapar su nuevo juego y contar el número de piezas que tiene, observa cada una de ellas para así tener cierta ventaja sobre su padre y de ésta forma al conocer bien su juego tal vez podrá ganarle más juegos, para ello decide contarlas y formarlas una tras la otra, ¿tu harías lo mismo que Perla para ganar más en este juego?*

MATERIAL: Un juego completo de dominó compuesto por 28 fichas.

PROCEDIMIENTO: Se reparte equitativamente las piezas del domino entre los participantes y se pide a los niños que cada uno pase a colocar una ficha enseguida de la otra justo como se unen en el juego, de forma que al final se forme un rectángulo como el de la siguiente figura, se debe cuidar que no sobre ni falte ninguna ficha:

Imagen tomada de la tesis de Sara Pando Figueroa pág. 43

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: El siguiente diagrama ilustra una de las tantas posibles soluciones que se les invita a descubrir al aplicador de esta actividad con la ayuda de los participantes; y en cuanto a las respuestas de las operaciones elementales éstas dependerán de los números con que se cuenten para efectuarlas pero se debe de motivar a que los propios niños las corrijan en caso de estar incorrectas.

Es posible que el rectángulo se cierre sin haber usado todas las fichas; el juego, de cualquier manera, habrá cumplido su objetivo.

Imagen tomada de la tesis de Sara Alejandra Pando Figueroa pág. 96

EXTENSIONES O VARIANTES: Este juego se puede repetir repartiendo de distintas formas las fichas de dominó y formando distintas formas geométricas de manera que una vez que todos los niños se familiaricen con las piezas se pueda introducir las reglas del juego de dominó, se le pueden hacer variaciones a este juego al pedir que los niños vallan sumando, restando o multiplicando los números que están en los extremos de las fichas que van uniendo de manera que se refuerza así las operaciones elementales.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: BASTA NUMÉRICO[6]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: De los 8 años en adelante. No hay un límite de integrantes para esta actividad, pero para que se realice bien la actividad se sugiere que el límite inferior de participantes sea 2.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Se fomenta la participación grupal, y se refuerzan las operaciones elementales de suma y multiplicación.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se sugiere que el profesor lea antes de comentar la siguiente información con los niños y que después se encuentre la forma de comentar esta información con los niños.

La aritmética es una ciencia muy antigua, se ejerce desde la prehistoria, la palabra "*ARITMETICA*" significa "*número*", ésta rama de las matemáticas es la que estudia las propiedades de los números, así como las operaciones que con éstos se pueden hacer.

Para hacer operaciones es importante utilizar las cifras, la etimología de la palabra "*cifra*" es la voz árabe "*sifr*" que significa "*vacío*" y este vocablo fue primero empleado para designar el cero. Cuando cambió de sentido, se reservó para designar a este número con la forma italiana *zefiro.*

En lo que concierne a la forma de las cifras se reproduce un cuadro que muestra la serie de transformaciones que desde los hindúes y a través de los árabes, conducen a nuestras actuales cifras.

---

[6] Esta actividad esta basada en un juego propuesto por Sara Pando en la pág. 81 de su tesis de licenciatura.

También hay que tomar en cuenta la manera de contabilizar las cifras, esa manera son los sistemas de numeración, los cuales dividen en dos grandes ramas: las numeraciones aditivas como las empleadas por los romanos, ejemplo: XII = 10 + 2 = 12 y la numeración de posición que hoy es la nuestra y que fue ideada por los babilonios hace más de veinte siglos antes de nuestra era, el ejemplo de este tipo de numeración es el siguiente: 01 se refiere a un objeto como el siguiente *, pero cambiando de lugar la cifra cero se tiene 10 la cual nos hace pensar en los siguientes objetos ********** y por eso las dos cantidades son distintas con tan sólo cambiar de lugar una cifra.

El sistema de numeración de posición que usamos actualmente proviene de la India, y de ahí pasó al mundo árabe, donde fue descubierto gracias a la traducción de un tratado de astronomía; el matemático Muhammad al-Kwarizmi la hizo conocer en una obra célebre, traducida al latín a comienzos del siglo XII por Abelardo de Bath con el título de "*Algorismus*", esta obra permitió introducir en occidente la numeración de posición. Y a pesar de su evidente simplicidad, el nuevo sistema no fue aceptado sin resistencias; en el siglo XVII los tribunales de cuentas abandonaron las cifras romanas que todavía empleamos en nuestras inscripciones lapidarias o en nuestros relojes.

El origen de los signos + y – se remonta a las abreviaturas comerciales empleadas en 1489 por J. Widmann. Antes, y aún después, los matemáticos empleaban o emplearon las palabras "*et* o *additus*, *demptus* o *minus* (Fibonacci, 1202), para referirse a estas operaciones.

El signo $\times$ de la multiplicación aparece en la obra del inglés William Oughtred "*Clavis matemática*" (Oxford, 1631). Antes, Michel Stiffel había empleado el signo *M* (1545); Francois Viète, el fundador del álgebra empleada en la actualidad, escribía *in*. Y el nuevo signo de multiplicación $\bullet$ fue introducido por el matemático y filósofo Leibniz en 1698.

El signo de división : se debe a Leibniz. Antes de él, en 1659 el inglés Rahn había usado el signo $\div$, que aún se emplea a veces en los países anglosajones. Finalmente el símbolo = se encuentra en "*The Wehstone of Witte*" de Robert Recorde publicado en Londres en 1557. Mientras que en Europa hasta Leibniz continuaba escribiendo el signo cartesiano α [7].

Una forma en que se puede comentar esta información con los niños es la siguiente: *En matemáticas a la forma en que se hacen las operaciones y se conoce cómo son los números que conocemos actualmente se llama "Aritmética".*

Los números que usamos se forman con los primeros dígitos que también se les llama "cifras" esta palabra significa vacío y se usaba en la antigüedad para referirse al número 0, ahora se emplea para pensar en los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, estos números no siempre fueron iguales, puedes ver en esta tabla cómo fueron a través del tiempo, entonces se les muestra la imagen anterior.

[7] Tomado del libro de Jean-Pierre Alem, Págs. 19,20 y 70-78.

A la manera de contar con los números se le llama "sistemas de numeración" y algunos son muy extraños como los números romanos que en realidad eran letras y dependían de una suma para representar cierto número, por ejemplo: la letra X representa el número 10 y la letra I representa el número 1, por eso si colocaban XII, entonces se cuenta primero 10 y luego 1 y otro 1, entonces al sumar estos números se obtiene el número: 10 + 1 + 1 = 12.

En cambio el sistema que nosotros usamos se llama "posicional" y significa que no es lo mismo poner el 0 antes del 1 que el 0 después del 1, entonces se dibuja lo que se mencionó anteriormente con los asteriscos.

También los signos de las operaciones aritméticas han cambiado mucho a través del tiempo, pues al principio se utilizaban sólo palabras para representarlos y poco a poco algunas personas han inventado varias formas para referirse a estas operaciones. Si el niño le pide ejemplos o bien si el profesor quiere mencionárselos puede hacer referencia a lo que se acaba de explicar anteriormente.

Se sugiere que toda esta información se dé a los niños a lo largo de la actividad y cuando se hagan pausas entre una jugada y otra, para evitar que los niños pierdan su interés por la actividad.

MATERIAL: Libreta, lápices, pizarrón y gis, se puede sacar fotocopias de cada rectángulo donde escriben los resultados, en ese caso se requiere de una por cada niño.

PROCEDIMIENTO: Se deben dar las siguientes instrucciones para jugar:

- Juega con dos o más personas
- Copia en tu libreta un cuadro como el dibujado en el pizarrón
- Uno de los jugadores dice los números 1,2,3,4,5,…. en sucesión
- Otro jugador lo detiene diciendo **basta**
- Todos los jugadores escriben en la columna donde dice 1° número el último número que alcanzó a decir el jugador que comenzó el juego.
- Posteriormente se efectúan las operaciones indicadas en las cabeceras de las columnas comenzando por tomar el número escrito en la columna de la flecha:

Súmale 7 a este número y anota el resultado

Al número que te quedó réstale 1 y anota el resultado.

Al número que te quedó multiplícalo por 2 y anota el resultado

Al número que te quedó súmale 3 y anota el resultado

Al número que te quedó multiplícalo por 5 y anota el resultado

Al número que te quedó súmale 9 y anota el resultado

Al número que te quedó multiplícalo por 11 y anota el resultado

Al número que te quedó súmale 10 y anota el resultado

- Por cada resultado correcto obtienes 2 puntos, súmalos para que anotes al final del renglón el total de puntos.
- Al completar la tabla, el ganador será el que tenga mayor puntuación.

1° número	+ 7	x 2	+ 3	x 5	+ 9	x 11	+ 10	TOTAL

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Las soluciones de éste juego dependen de la elección de los números que se obtengan al decir **basta** por lo que se recomienda que el profesor efectúe las operaciones en el pizarrón para que todos los alumnos comprueben sus resultados, puede también motivar a que los niños pasen a resolverlas frente el resto del grupo.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se recomienda que el profesor varíe las operaciones que se pueden aplicar en esta actividad, inclusive si se aplica con jóvenes de secundaria, se pueden introducir el manejo de números enteros (que son los que tienen signos negativos y positivos), inclusive se pueden introducir en el manejo de números racionales (fracciones) o reales (que incluyen a los todos los números que se manejan al hacer operaciones aritméticas).

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: TABLAS DE MULTIPLICAR CON CANICAS Y BOLSAS

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 7 años. Pueden participar como mínimo 2 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Reafirma las tablas de multiplicación, ejercita la memoria, motiva la aprehensión de las tablas de multiplicación mediante la comprensión de las reglas que las originaron.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se recomienda leer el siguiente texto e ir extrayendo de él la información que se requiera para los niños, la cual se les debe de presentar con pequeños comentarios como se expuso en la actividad anterior.

La aritmética ya se aplicaba en la región de Mesopotamia desde épocas muy antiguas, y no pudo derivar más que del método arcaico del "*montón de guijarros*" empleado con fines numéricos, estos *guijarros*[8] permitieron al hombre iniciarse en el arte de efectuar operaciones.

Cuando nosotros decimos "*Cálculo*", la palabra misma nos remite a ese procedimiento llegado de tiempos muy antiguos. Aparecida en la lengua francesa en el siglo XV (Nicolas Chuquet, 1484), la palabra viene del latín *calculus* (plural de *calculi*), que quiere decir "*guijarro*" y por extensión "*bola*", "*ficha*" y "*peón*".

Los griegos y romanos enseñaban a sus niños a contar y efectuar sus cálculos por medio de guijarros, bolas, fichas y peones de piedra caliza, por lo que la palabra vino a designar, finalmente, cualquiera de las operaciones aritméticas elementales: suma, resta, multiplicación y división, etcétera.

Es interesante mencionar que en la antigüedad las operaciones se efectuaban en tableros que contenían arena de manera que al ir efectuando las cuentas se iban borrando los resultados de los cálculos intermedios.

[8] Son pequeñas piedrecillas redondeadas que se encuentran en las orillas y cauces de ríos y arroyos.

Existe por otra parte, una huella evidente de éstas técnicas en la etimología de las palabras sánscritas [9]"*Guyana*, *hanana*, *vadha*, *kshsya*, etcétera, empleadas por los habitantes del país India para designar la operación de la multiplicación; éstas palabras significan, en efecto, "*destruir*", "*matar*", aludiendo a los sucesivos borrados de los productos parciales intermedios en ese método; posteriormente los árabes aritméticos efectuaban un "cálculo sin borrado, que consistía en tachar y escribir por encima los resultados intermedios", sin que por ello desapareciera el cálculo realizado "borrando las figuras dibujadas sobre el polvo".

Posteriormente apareció un procedimiento muy efectivo que los árabes inventaron alrededor del siglo XIII, transmitiéndolo posteriormente a Europa occidental, donde fue conocido con el nombre de multiplicación *per gelosia* ("*por celosía*"), aludiendo a la disposición de las cifras que evocan las mallas de madera o metal tras las que las mujeres, y sobre todo los maridos celosos, podían observar sin ser vistos; hay una descripción del método en una obra anónima de aritmética publicada en Treviso en 1478, así como en la "*Summa de aritmética, geometría, proporzioni di proporcionalita*" del matemático italiano Luca Pacioli (Venecia 1494).

Denominada por los árabes "*multiplicación en cuadro*", la disposición es bastante peculiar, pero el resultado final se obtiene poco más o menos como en nuestra técnica actual, sumando los productos de las diversas cifras del multiplicando y el multiplicador.

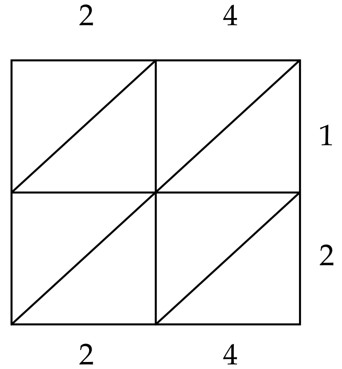
Este método se fue perfeccionando hasta que a finales del siglo XV comenzó a utilizarse en Europa otra variante mucho más evolucionada que consistía en trazar una línea y por encima de ella se escriben las cifras del multiplicando; por debajo a la derecha y oblicuamente, de derecha a izquierda en el sentido de los órdenes crecientes, las del multiplicador, éste método es tan evolucionado como el nuestro la única diferencia estriba en la disposición de las cifras del multiplicador.

El procedimiento actual fue descrito por primera vez en el año 628 por Brahmagupta en su obra "*Brahmasphutasiddhanta*", en los que exponía cuatro métodos de multiplicación a los que daba los nombres de *gomutrika*, *canda*, *bheda* e *isa*, el método empleado por éste matemático árabe consistía en escribir el multiplicando tantas veces como posea el multiplicador, pero desplazándolo en cada ocasión un lugar hacia la izquierda, en lugar de hacia la derecha , y escribiendo a la derecha las cifras del multiplicador, pero de abajo a arriba, es decir, en el orden inverso al de antes.

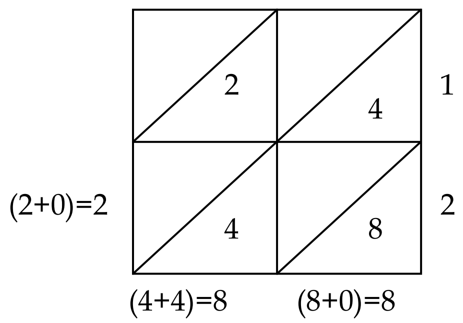
[9] Sánscritas se refiere a la lengua indoeuropea, sagrada y literaria de la antigua civilización brahmánica.

Finalmente él mismo matemático se encargó de afinar su método para alcanzar el grado de perfección de nuestra técnica actual, así pues a comienzos del siglo VII los matemáticos disponían de un procedimiento de multiplicación mucho más avanzado que el de la "*celosía*", lo que muestra el talento de los sabios indios y sus sucesores árabes en este terreno[10].

Un ejemplo de cómo se multiplica por el método de celosía es el siguiente: "Suponga que se quiere multiplicar 12 por 24. Primero, dibuje una caja y divídala en cuatro cuadrados, uno para cada uno de los cuatro dígitos del problema. Escriba los dígitos al lado de los cuadrados en el orden en que aparecen. Ponga los dígitos del primer número a lo largo del lado superior de la caja, empezando por el cuadrado superior izquierdo. Ponga los dígitos del segundo número a lo largo del lado derecho de la caja, de arriba abajo y empezando con el cuadrado superior derecho. Ahora dibuje unas líneas que dividan las cuatro pequeñas cajas por la mitad, en diagonal.



Después, hay que multiplicar alrededor de la caja, entrando las respuestas en las mitades superior e inferior de las cajas que ha hecho. Los dígitos de las unidades van a las partes inferiores, y las decenas van a las partes superiores. Empezando por arriba a la izquierda, $2 \times 1 = 2$. Esto es una unidad sin decenas, y por tanto debemos ponerlo en el triángulo inferior de la caja 2×1 . Baje a la caja inferior: $2 \times 2 = 4$. Ponga el 4 en el triángulo inferior de esta caja. Pasemos al 4 de 24, y multipliquemos: $4 \times 1 = 4$; póngalo en el triángulo inferior de su caja. Y, por último, $4 \times 2 = 8$, que también va al triángulo inferior.



Resultado 288

[10] Para obtener mayor información sobre éste tema se sugiere consultar las obras de Georges Ifrah en el capítulo 25 y de Scott Flansburg et al Págs. 65-71.

Ahora tenemos que sumar los números de la caja en diagonal, empezando por la caja inferior derecha. Como no hay nada que sumarle al 8, limítese a escribirlo debajo de su caja. En la siguiente diagonal hacia arriba, empezando por el triángulo inferior de la caja superior derecha, el 4, sume en diagonal a C abajo y hacia la izquierda. En este caso $4+4=8$. Escriba esto debajo de su caja. El único número de la siguiente fila, que empieza en el triángulo superior de la caja superior derecha, es un 2. Escríbalo al lado de la caja. En la siguiente hilera, que consiste sólo en el triángulo superior de la caja superior izquierda, no hay ningún número. Ahora, lea los dígitos desde la parte superior izquierda hasta la parte inferior derecha: 288 . Ésta es la respuesta."[11]

MATERIAL: Pizarrón, gises de colores, canicas las cuales pueden ser sustituidas por piedrecillas o fichas (en promedio cien por cada alumno) y bolsas de plástico medianas (de preferencia 10 por cada niño), libreta y lápiz.

PROCEDIMIENTO: Se pide a los niños que formen pequeños conjuntos primero que tomen 20 canicas y que las introduzcan de dos en dos en las 10 bolsas distintas que tienen, entonces se debe preguntar *¿cuántas canicas hay en total si juntamos todas en una sola bolsa?*.

Luego se pide que saquen de las bolsas las canicas, que las cuente y una vez de que se convenzan los niños que aún tiene 20 canicas la bolsa se pide entonces que sólo tome 2 bolsitas de plástico y que en cada una ponga 10 canicas, en seguida se pregunta *¿siguen siendo 20 canicas?, ¿en qué se diferencia la forma de acomodar las canicas que acabamos de hacer con el que hicimos anteriormente?*

Por último se pide que los niños disminuyan la cantidad de canicas, lo pueden hacer de dos en dos y el acomodo de las mismas en las diferentes bolsas pero siempre considerando los resultados de la tabla de multiplicación (en éste caso de la tabla del número 2).

El objetivo es que mientras el niño hace conjuntos de objetos y los agrupa en las bolsas, el profesor vaya escribiendo en el pizarrón, el cual se habrá previamente dividido en tres columnas; en la primer columna anota la palabra bolsas, en la segunda canicas y en la tercera el resultado total de canicas, ejemplo: *"Tengo 3 bolsitas con 2 canicas cada una, entonces en total tengo 6 canicas"*, entonces se escribe los símbolos "3×2=6"; luego en otro renglón se escribe: "p*ero si en 2 bolsitas acomodo 3 canicas, entonces sigo teniendo 6 canicas en total*", lo cual en símbolos se escribe como "2×3=6". De esta forma se van escribiendo las tablas del 2 y sus operaciones conmutativas de cada renglón que la conforman.

---

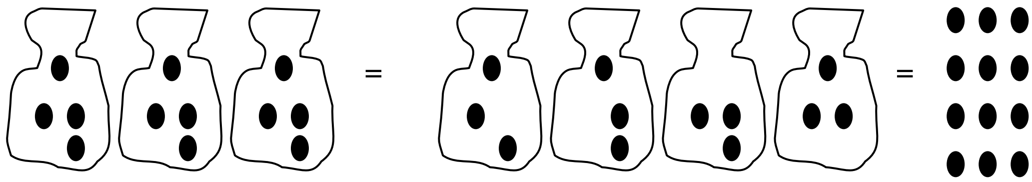
[11] Scott Flansburg et al. "Matemáticas para todos" Págs. 65 y 66

Después de hacer cada acción se sugiere que el niño escriba en su libreta la cuenta realizada y su operación conmutada; para que después de repasar todas las tablas siguiendo este método se puedan escribir todas las tablas de multiplicación una seguida de la otra y el niño sea capaz de irlas construyendo por sí mismo.

Como ejemplo de lo anterior observe el siguiente que se sugiere el profesor escriba en el pizarrón:

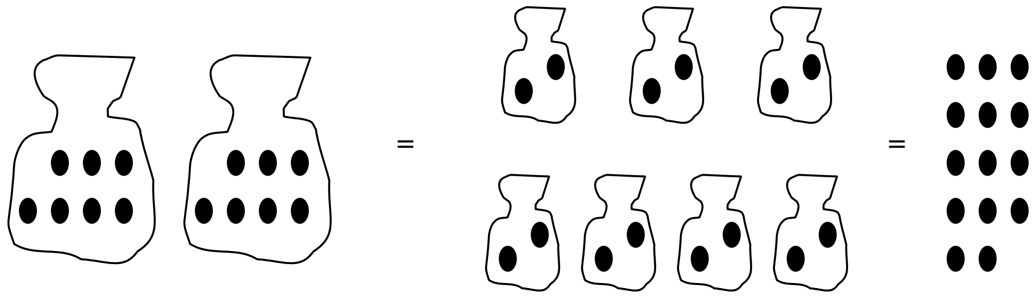
"si en tres bolsitas acomodo 4 canicas, entonces tengo 12 canicas en total que es lo mismo que tener cuatro bolsitas con tres canicas cada una"

$3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$



Otro ejemplo es el siguiente: *"si tengo dos bolsas con siete canicas cada una, en total tengo el mismo número de canicas que si colocara dos canicas en siete bolsas"*

$2 \times 7 = 7 \times 2 = 14$



Se recomienda que se construya una tabla de multiplicación al día para que cuando concluya la semana se escriban todas las repasadas como ejercicio.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Ante la primera pregunta: *¿cuántas canicas hay en total si juntamos todas en una sola bolsa?*, el niño tal vez las cuente una a una hasta concluir que son las 20 con las que comenzó el juego; para la pregunta: *¿siguen siendo 20 canicas?*, el niño volverá a contarlas y responderá que en efecto no ha cambiado la cantidad de canicas, y para la pregunta: *¿en qué se diferencia la forma de acomodar las canicas que acabamos de hacer con el que hicimos anteriormente?*, cada niño explicará a su manera la forma en cómo acomodó las canicas en las bolsas, pero tratará de ser aún concreto en sus respuestas, es decir, tal vez trate de mostrar la forma en que las acomodó en las bolsas.

Se espera que el niño después de jugar con las canicas al acomodarlas de la manera antes descrita logre escribir las tablas de multiplicación por sí mismo en una sola clase, para ello se debe permitir que vuelva a utilizar el material si es necesario para construir sus resultados.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede facilitar el razonamiento de esta actividad si permite que los niños trabajen en grupos pequeños, y si el profesor se mantiene constantemente al pendiente de la forma en que los niños enlistan las operaciones de las tablas de multiplicar así como sus operaciones inversas.

Se recomienda que después de aplicar varias veces la actividad y si el niño aún no lo nota, haga la observación de que basta con realizar las acciones que corresponden a las primeras 5 tablas de multiplicar para completar el resto de las tablas.

EDUCACIÓN PRIMARIA 4° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: JUGANDO CON PALILLOS[12]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Se puede aplicar desde los 9 años, y se recomienda que se realice la actividad en forma individual.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Fomenta la adquisición del pensamiento lógico, dota de originalidad en el tratamiento de los problemas matemáticos, promueve la ubicación espacial.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se puede transmitir al niño lo siguiente: *Desde tiempos muy remotos ha sido muy entretenido descubrir cosas utilizando algunos utensilios que tenemos a la mano como los palitos, palillos o mondadientes, los podemos usar para tratar problemas con números.*

Se tienen noticias de que los practicaban personajes como Flavio Josefo (historiador judío, comandante de Galilea durante la guerra contra los romanos) entre los años 37 al 100 después de Cristo; Carlomagno que fue un importante emperador en el siglo IX se entretenía resolviendo juegos con los mondadientes después de comer.

Algunos matemáticos como Leibniz cerca de 1667 y Flaubert (escritor francés creador de "Madame Bovary") en los años 1875 y 1880 entre otros utilizaban los palillos en sus ratos libres para inventar juegos o para tratar de explicarse problemas aritméticos sencillos.

Y quien no conoce el clásico juego de "los palillos chinos", en aquel país es muy común ver a los niños y jóvenes entreteniéndose con este tipo de juguetes, pues además de que son fáciles de conseguir, la constante practica de los distintos juegos que con ellos se pueden hacer les ayuda a "no tener un pulso de maraquero"(es decir, que pueden mantener su mano fija en un mismo sitio durante un largo período de tiempo sin que ésta comience a moverse).

Como vez mucha gente se ha divertido y ha aprendido utilizando los palillos; ¿te gustaría ser parte de ellos?, que tal si haces un par de actividades con palillos y pruebas lo divertido que es aprender con ellos.

MATERIAL: Palillos de dientes también llamados mondadientes, aproximadamente 10 por cada alumno, pizarrón, gises, una hoja de papel y colores.

PROCEDIMIENTO: Se colocan los palillos sobre una superficie plana para representar la figura, se dibuja cada uno de los problemas en el pizarrón y se pide a los niños que lo resuelvan en equipos o bien de forma individual y que apunten sus soluciones en la hoja.

Es importante que se indique a los niños que copien la figura del pizarrón en un solo color y que utilicen un color distinto para señalar los palillos que se movieron para resolver el problema, y que traten de dibujar la solución con esos dos colores.

---

[12] Esta actividad esta basada en unos juegos de la tesis "Un enfoque distinto de al enseñanza de las matemáticas y la lógica a nivel primaria" de Sara Alejandra Pando Figueroa, páginas 47 y 102

Primer problema: "El pez". Se cambia de lugar sólo tres palillos, para que el pez cambie la dirección de su nado, *¿cuáles son los palillos que debes mover?*

Figura del pez, cada línea representa un palillo, pág. 47 de la tesis de Sara Pando.

Segundo problema: "El recogedor" *¿Se pueden cambiar de lugar sólo dos palillos, para que la basura (que es la mancha de color negro que esta en la figura) quede fuera del recogedor?, ¡no se vale mover la basura!*, después de mover los palillos, el recogedor tiene que conservar su forma, pero puede cambiar su orientación.

Esta figura representa un "recogedor de basura" y es tomada de la tesis de Sara Pando pág.47

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Los niños después de haber realizado varios intentos al cambiar de posición los palillos, habrán pensado cuál de las posibles estrategias que siguieron les lleva a obtener el resultado deseado, de esta manera piensan y comienzan a desarrollar el pensamiento lógico.

Al inicio de la actividad puede que algunos de los niños se desesperen al intentar cambiar varios palillos y observar que la solución que plantean no les ayuda, entonces se debe tener paciencia para ayudarles a observar detalladamente la figura a la que se supone deben llegar, para esto se sugiere que el profesor dibuje en la hoja o bien en el pizarrón la respuesta después de ver que el niño ha realizado varios intentos sin conseguir la solución.

La solución para el primer problema es esta: si se cambia de lugar los tres palillos señalados mediante las líneas punteadas, el pez nadará en sentido contrario.

La imagen de la izquierda muestra con las líneas completas la posición original de los palillos, estos se deben dibujar de un mismo color y las líneas punteadas representa las posiciones donde quedarán los palillos una vez que se cambien de posición, las flechas indican cuáles son los palillos que se deben mover. La imagen de la derecha muestra la posición final en la que se observa que el pez realmente cambia su nado, los palillos que se movieron se indican con las flechas.

Y para el problema del recogedor se tiene que cambiando de lugar los palillos marcados por las flechas, entonces se logra sacar la basura, es decir, la basura queda fuera del recogedor una vez que se mueven los palillos indicados con las flechas en la imagen de la izquierda..

Al igual que en las imágenes anteriores las flechas indican cuáles son los palillos que efectuaron algún movimiento, y realmente se puede comprobar que la basura queda afuera del recogedor, y que éste cambia su orientación.

EXTENSIONES O VARIANTES: Este mismo juego se puede realizar utilizando otro tipo de materiales como plastilina o hilos, se sugiere que pregunte a los niños de mayor edad qué tipo de material utilizarían para jugar esta actividad, se debe motivar a los alumnos para que propongan nuevos juegos de esa estilo y que los aplique en su casa con sus familiares o con sus amigos.
Resulta interesante aplicar este tipo de actividad a jóvenes mayores de 13 años, ya que las soluciones que llegan a plantear, en ocasiones las representan mediante un lenguaje más elaborado, lo cual es síntoma de que se encuentran en el período de las operaciones formales.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: CUADRADO MÁGICO

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 9 años, generalmente se aplica la actividad en forma individual, pero se puede realizar en equipos de 3 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Refuerza las operaciones aritméticas, motiva la rapidez acertiva en el manejo de las operaciones aritméticas, fortalece el manejo de la ubicación espacial de líneas horizontales, verticales y diagonales.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se les comenta a los niños: *un cuadrado mágico es un tablero cuadriculado con el mismo número de renglones que de columnas, en el cual están escritos ciertos números dispuestos de tal manera que su suma es la misma en cada renglón, columna y ambas diagonales del cuadrado.*

Son muy antiguos puesto que ya los conocían los chinos y los hindús desde antes de nuestra era, los árabes los introdujeron a occidente donde un monje griego llamado Moschopoulos, los reveló a los cristianos en el siglo XIV. A lo largo de la historia creían que tenían propiedades mágicas estos juegos matemáticos y esto explica su nombre; tal creencia supersticiosa no desapareció en nuestra época puesto que, hace algunos años, las mujeres camboyanas trazaban cuadrados de éste tipo en los pañuelos con que se cubrían la cabeza para protegerse de los bombardeos[13].

MATERIAL: Libreta, lápiz, pizarrón y gises.

PROCEDIMIENTO: Se dibuja en el pizarrón el cuadrado mágico. Se elige a un niño para que pase a escribir lo que el resto del grupo le señale anotar en cada espacio del cuadrado mágico. Se plantean las siguientes instrucciones:

En cada una de las casillas vacías del cuadrado mágico, se escribe uno de los números 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8 o 9 de manera que:

- La suma de los cuatro números de cada renglón sea 18.
- La suma de los cuatro números de cada columna sea 18.
- La suma de los cuatro números de cada una de las diagonales principales sea 18.
- Los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7 deberán aparecer **dos veces** en el cuadrado mágico, los números 0, 1, 8 y 9 sólo **una vez**.

Se copia el cuadrado mágico en la libreta y se escriben las soluciones propuestas en cada caso. Finalmente se comparan los resultados y se verifican si las respuestas están correctas para lo cual se sugiere al profesor que realice las operaciones aritméticas ayudados por los niños en el pizarrón.

---

[13] Para obtener mayor información acerca de los cuadrados mágicos se debe de consultar la obra de Jean-Pierre Alem citada en la bilbiografía, Págs. 106-110.

Se sugiere al profesor que plantee varios problemas semejantes al siguiente para que se realice con al colaboración de todos los jugadores, existen cuadrados mágicos más sencillos de realizar, si desea comenzar con los cuadrados sencillos de resolver se sugiere que consulte la bibliografía citada.

	4	7	
6			5
2			5
	4	3	

Esta imagen está inspirada en un juego propuesto en la pág. 38 de la tesis de Sara Pando Figueroa.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Se recomienda que los niños en su libreta escriban las posibles soluciones a este problema, la solución para éste es la siguiente:

7	4	7	0
6	1	6	5
2	9	2	5
3	4	3	8

7+4+7+0=18
6+1+6+5=18
2+9+2+5=18
3+4+3+8=18
Sumas de los renglones

7+6+2+3=18
4+1+9+4=18
7+6+2+3=18
0+5+5+8=18
Sumas de las columnas

0+6+9+3=18
7+1+2+8=18
Sumas de las diagonales

Es muy probable que al ir realizando la actividad los niños se desalienten al ver frustrados sus estrategias ante el problema, en todo caso habrá que ayudarles a hacer las operaciones que propongan en el pizarrón para que con la ayuda de todo el grupo se llegue al resultado correcto.

EXTENSIONES O VARIANTES: Este tipo de actividad resulta conveniente aplicarlas también en secundaria, sobre todo en el primer año, par que los alumnos practique constantemente las operaciones básicas, se puede plantear a los jóvenes de este período que inventen sus propios cuadrados mágicos empleando otro tipo de operaciones, pueden ser empleando la multiplicación o la división.

Se sugiere que en todo momento observe las estrategias que emplean los niños de distintas edades con el fin de identificar las distintas etapas en el desarrollo del pensamiento lógico matemático que presenta el niño durante su crecimiento, para ello se recomienda se aplique esta actividad por lo menos durante un mes a lo largo del ciclo escolar.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: TRIÁNGULOS CON OPERACIONES

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Se puede aplicar desde los 10 años y se recomienda que se aplique en forma individual, aunque se pueden hacer equipos de 3 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Reforzar las operaciones de multiplicación y resta, fomentar en los niños la inquietud por crear sus propios juegos matemáticos, y motivar el trabajo en equipo.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se debe mencionar a los niños que *los acertijos numéricos siempre han llamado la atención de las personas en todas las épocas y muestra de ello es que algunos matemáticos invirtieron parte de su tiempo en la solución de dichos enigmas, por citar algunos ejemplos tenemos a Gauss, Pierre de Fermat, Euler, entre los más destacados.*

MATERIAL: Pizarrón, gises, Libreta y lápiz, aunque se puede dar una fotocopia con los triángulos y sus dígitos a cada niño.

PROCEDIMIENTO: Se puede comenzar formando equipos de máximo tres integrantes, pero esto no es necesario para la realización de la actividad, se dice a los niños que formen los equipos que entre ellos deben elegir un nombre para su equipo y anotarlo en el pizarrón, se dibuja en el pizarrón las figuras geométricas con los números colocados como se muestra en la figura.

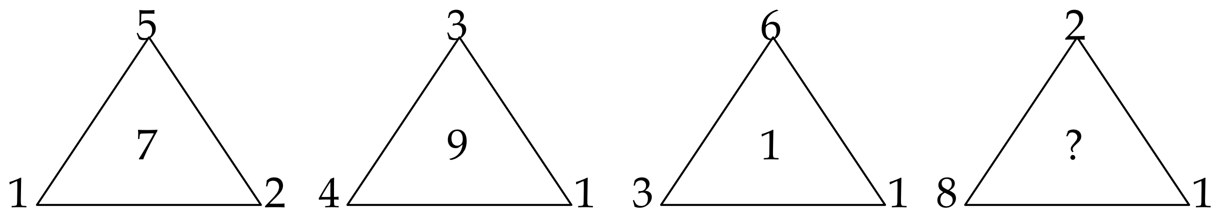


Imagen que el profesor debe dibujar en el pizarrón para realizar la actividad.

Se debe buscar el patrón para encontrar el número que se encuentra en el centro de los triángulos, para ello se sugiere que el profesor permita a los niños que planteen las ideas que les surjan hacer para encontrarlos. Se indica a los equipos, en caso de que existan, que el equipo ganador será el primero que obtenga el resultado correcto.

Se debe motivar el razonamiento que lleve a la solución mediante los siguientes cuestionamientos: *¿qué sucede si se multiplican los números que están en las esquinas de cada triángulo?, ¿servirá de algo restarle al resultado de la operación anterior, algún número para obtener el número que esta en el interior de cada triángulo?, ¿cuál es el número que conviene restar para que se obtengan los números que se encuentran en el centro de los tres primeros triángulos?,, ¿cómo ayuda los resultados anteriores para obtener el número que se busca?*

Se comparan los resultados de cada equipo y se dirige una discusión sobre la obtención de los resultados de las operaciones planteadas, para esto se sugiere motive a cada participante para que exponga sus opiniones al respecto.

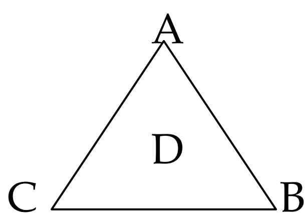
Se reparten los puntos que se otorgan en la actividad: al primer equipo en terminar y tener bien las respuestas se les dan 3 puntos, al siguiente 2 y el que les siga 1 punto, al final de cada juego se hace la cuenta del puntaje que lleva cada equipo y se anota en el pizarrón al lado del nombre del equipo que los obtuvo.

Para continuar con la actividad se pueden cambiar los números que se encuentran en cada triángulo, para ello, se sugiere al profesor que primero plantee, resuelva y practique los nuevos números que se propondrán, pues como se lee en el siguiente párrafo, las soluciones dependen de un número que permanece constante.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Se espera que todos los niños participen de la actividad ya sea pasando al pizarrón o dictando las soluciones y compartiendo las experiencias que tuvieron con las cuentas.

Se debe permitir en todo momento que los niños compartan las estrategias que emplean para resolver los problemas, sea que hayan conducido o no a la solución, pues esto constituye una de las base del pensamiento lógico matemático.

Las operaciones con los números de los triángulos que conducen a la solución se deben realizar de la siguiente manera:



(A x B x C) – 3 = D
Imagen que ilustra cómo se resuelve este problema.

El número que siempre se obtiene al hacer operaciones con los números que aparecen en los vértices de los triángulos es TRES, ya que: 1 x 2 x 5 = 10 – 7 =3; 4 x 1 x 3 = 12 – 9 = 3; 3 x 1 x 6 = 18 – 15 = 3 y en el interior del triángulo deben de escribir el número 13 pues haciendo las mismas operaciones 2 x 8 x 1 = 16, 16– 13 = 3, por eso se obtiene como resultado el número 3.

Se sugiere al profesor, efectuar las operaciones anteriores en el pizarrón para que los niños se percaten de la forma en cómo se realizaron las cuentas y así se motiven para que puedan por ellos mismos a la larga analizar sus respuestas y corregir sus posibles errores.

EXTENSIONES O VARIANTES: Esta actividad la pueden realizar sin mayor problema los jóvenes del período de las operaciones formales pues el nivel de abstracción con que cuentan es superior al de los niños de 9 años, por eso se sugiere que el profesor aplique esta actividad a los jóvenes para reforzar el manejo de las operaciones básicas.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: LAS FRACCIONES[14]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Se puede aplicar a partir de los 9 años, se puede aplicar en forma individual o bien en grupos de 2 o 4 integrantes.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Introducir intuitivamente algunos conceptos matemáticos como son los números fraccionarios mejor conocidos como racionales y el mínimo común denominador; refuerza las operaciones aritméticas de suma y resta con este tipo de números.

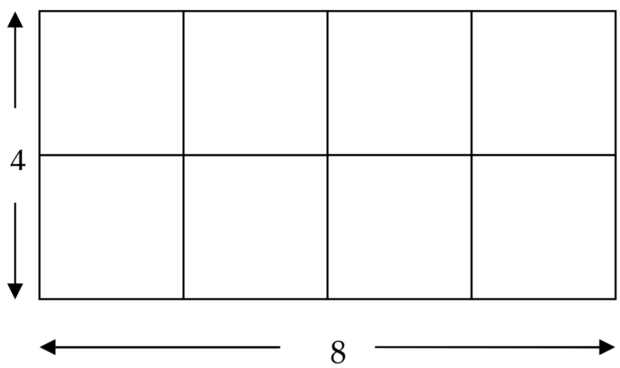
UBICACIÓN HISTÓRICA: A lo largo de la actividad se puede contar a los niños lo siguiente: *Una fracción es una razón o proporción entre dos números enteros; las fracciones ya eran conocidas por los egipcios y por los babilonios. Pero la barra de la fracción fue inventada por los árabes. En el siglo XIX, A. de Morgan propuso la forma* $\frac{a}{b}$ *que es la que se maneja actualmente. Los términos "numerador" y "denominador" fueron creados por Nicolas Chuquet.*

Los números decimales son otra forma en cómo se representan a los números fraccionarios y fueron introducidos en la aritmética por el belga Simon Stevin, llamado Simón de Brujas, en 1585. Las notaciones de los decimales; pasaron por las siguientes fases:

643 (0) 3 (1) 2 (2) 4 (3)	*Stevin (1585)*
643 0 324	*Bürgi (1592)*
643 1 324	*Viète (1598)*
643 . 324	*Neper (1605)*
643 , 324	*En la actualidad*[15].

MATERIAL: Foami o papel cartulina de colores recortados y marcados con divisiones de la siguiente manera:

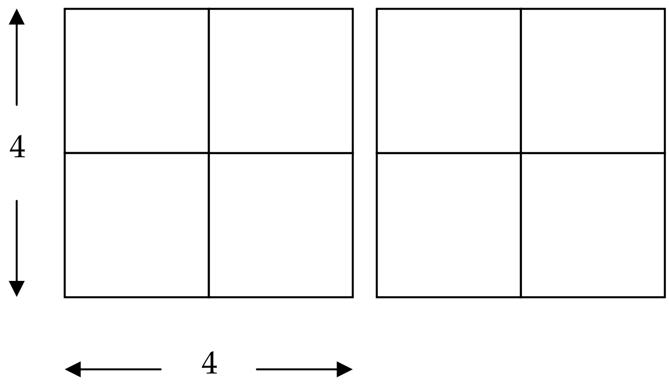
2 rectángulos colores blanco de 8cm x 4 cm



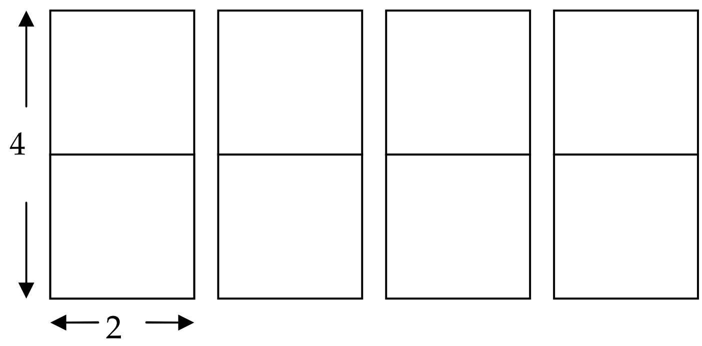
[14] Actividad inspirada en el juego Desquebra/2 creado por Hugo Rodríguez Carmona (5597-7620)

[15] Para tener más detalles se sugiere consultar la obra de Georges Ifrah.

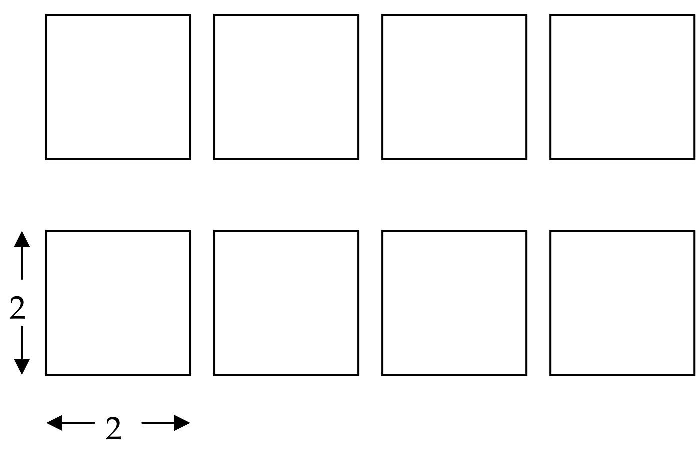
4 cuadrados de 4cm x 4 cm de color rojo



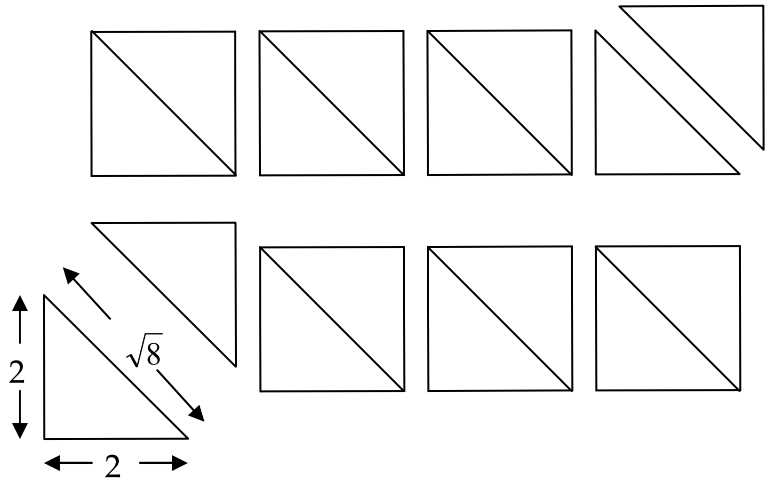
8 rectángulos de 4cm x 2 cm de color azul



16 cuadrados de 2cm x 2 cm de color verde



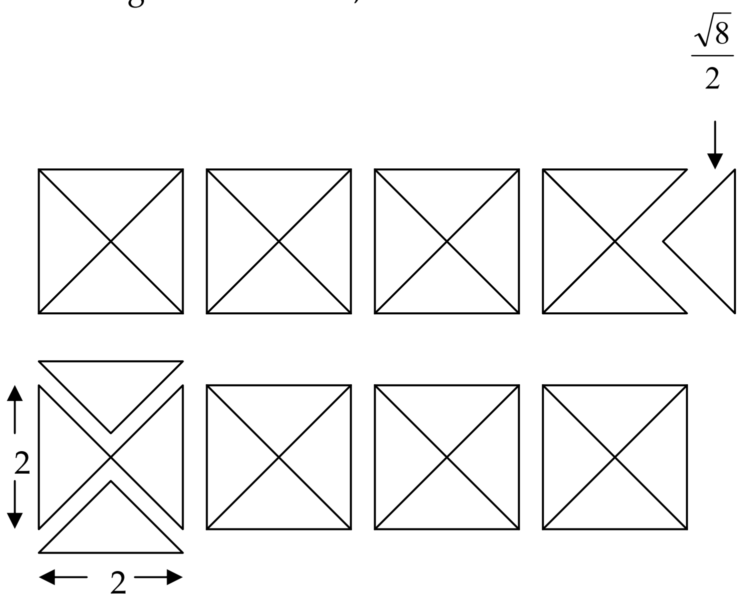
32 triángulos rectángulos de 2 cm en sus catetos y $\sqrt{8}$ cm de hipotenusa de color naranja



Por el teorema de Pitágoras se calcula la medida de la hipotenusa de cada triángulo ya que $2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$, entonces la hipotenusa es $\sqrt{8}$.

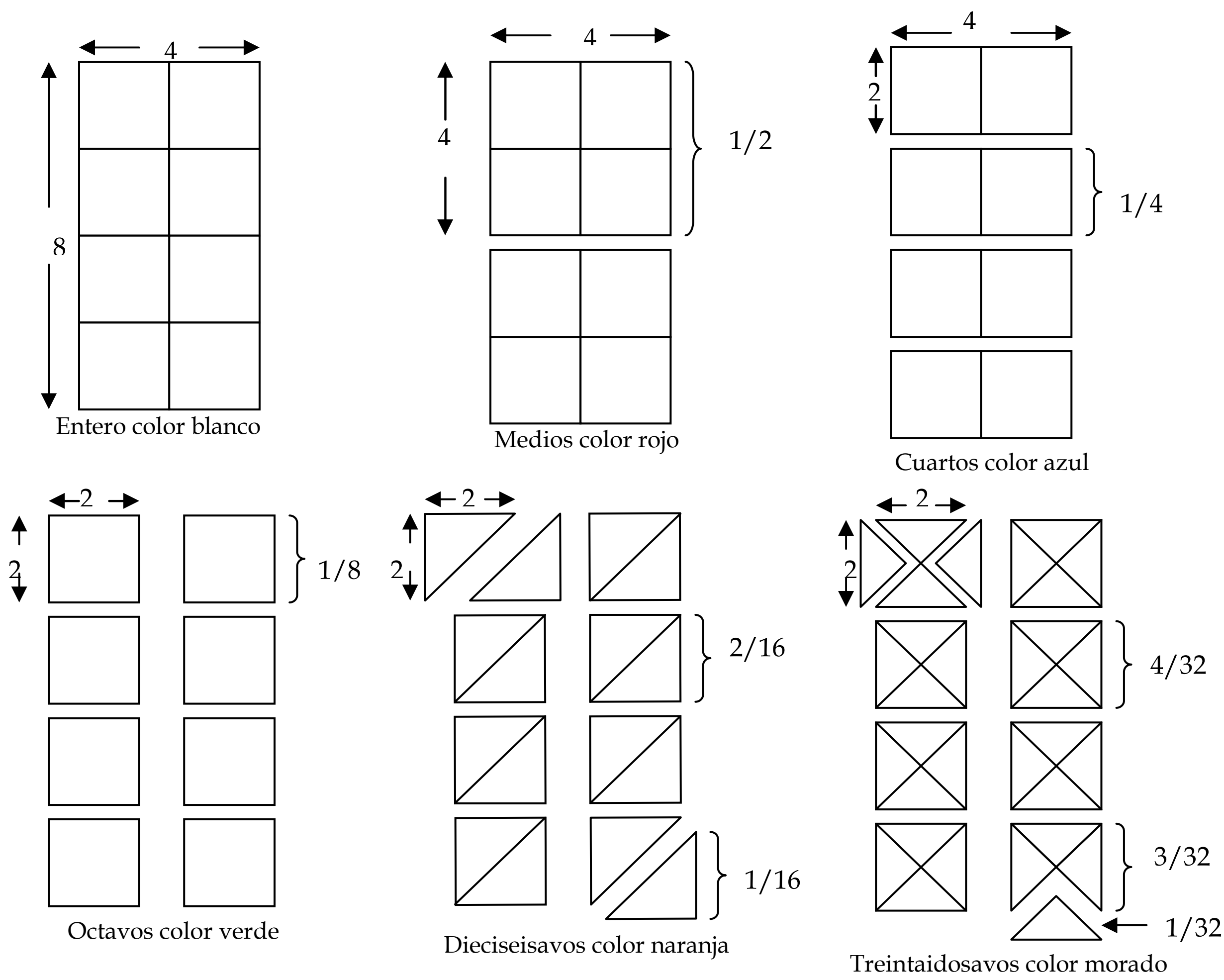
También usarán 64 triángulos isósceles de 2 x $\frac{\sqrt{8}}{2}$ cm de lado de color morado

Como cada uno de los catetos de los triángulos pequeños es la mitad de la hipotenusa de los triángulos anteriores, entonces la medida de éstos es $\frac{\sqrt{8}}{2}$ cm



Cada rectángulo y cuadrado deberá de ir marcado con un plumón o pluma para que se distingan los cuadrados de 2 x 2 cm , por ejemplo en el rectángulo blanco caben 8 cuadrados de éstas medidas, por cada niño se debe utilizar el conjunto de piezas con las características dadas, estos representan en conjunto un juego de piezas completo; también se necesita pizarrón, gises, libreta y lápices.

PROCEDIMIENTO: Se plantea la clasificación de los colores que representan las fracciones que se utilizan, y se permite que los niños se familiaricen con estos colores y lo que representan.



Luego se dice a los niños lo siguiente: *"Comenzaremos utilizando sólo la mitad del juego de piezas de cada color, así que habrá que separar justo la mitad de piezas de cada color para formar dos juegos.*

Si colocas el rectángulo blanco con la división hecha en él hacia arriba entonces estamos representando un entero, poniendo sobre éste sólo dos cuadrados rojos con la división hacia arriba entonces estamos representando a dos medios, pero si sólo ponemos uno sobre el rectángulo blanco entonces estamos representando a un medio.

Un sólo rectángulo azul con la división hacia arriba representa a un cuarto y si colocamos cuatro de éstos sobre el rectángulo blanco entonces lo cubrimos completamente. Si colocamos un cuadrado verde sobre el rectángulo blanco entonces éste representa a un octavo, y como es de esperarse con ocho de estos se cubre completamente al rectángulo blanco.

Colocamos un rectángulo naranja sobre el cuadrado verde entonces éste representa la mitad del octavo, lo cual sugiere que el triángulo anaranjado representa un dieciseisavo, y con 16 dieciseisavos se cubre por completo al rectángulo blanco.

Por último si colocamos un triángulo morado sobre el triángulo naranja nos daremos cuenta de que éste representa la mitad del naranja, es decir, el triángulo morado representa un treintaidosavo, y por supuesto que 32 treintaidosavos cubren por completo a un rectángulo blanco."

Se debe permitir la manipulación del material con el fin de familiarizarse con él y para comprobar lo anterior

Posteriormente se plantea las equivalencias entre las fracciones de la siguiente manera: en $\frac{1}{16}$ hay $\frac{2}{32}$, esto se comprueba al poner dos triángulos morados sobre un triángulo naranja. $\frac{1}{8}$ Tiene $\frac{2}{16}$ pues sobre el cuadrado verde se pude cubrir por completo con dos triángulos naranjas, eso quiere decir que en $\frac{1}{8}$ hay $\frac{4}{32}$ pues cuatro cuadrados morados cubren a un cuadrado verde

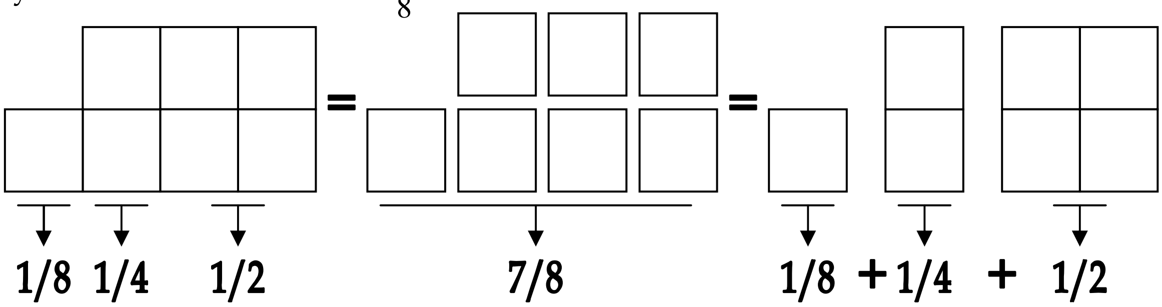
De esta manera se pude representar a la fracción $\frac{9}{32}$ de dos formas: la primera es con dos cuadrados verdes y un triángulo morado, y la segunda es mediante un rectángulo azul y un triángulo morado, dado que dos cuadrados verdes cubren un rectángulo azul y si en cada cuadrado verde hay cuatro treintaidosavos, entonces en dos cuadrados verdes hay ocho treintaidosavos y al agregarle uno más se obtienen los nueve treintaidosavos.

Otro ejemplo: $\frac{5}{16}$ se puede representar como cinco triangulitos naranjas o con dos cuadrados verdes y un triángulo naranja o bien con un rectángulo azul

y un triángulo naranja. Por otra parte $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ pues un cuadrado rojo es cubierto por dos rectángulos azules y por cuatro cuadrados verdes.

Se sugiere al profesor practicar más equivalencias de las fracciones

Se plantea la operación suma entre las siguientes fracciones: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ se representa con una figura que contiene un cuadrado rojo al lado de este se coloca un rectángulo azul y al lado de él se pone un cuadrado verde, tal y como se muestra en las figuras, para ver cual es el resultado de la operación habrá que fijarnos en la figura más pequeña que cabe en el resto de la figura creada, que en éste caso coincide con ser el cuadrado verde, es decir, basta con preguntarse cuántas veces cabe el cuadrado verde en la figura completa y como ya se vio en las equivalencias se puede verificar que cabe 7 veces, entonces el resultado se da en términos de la fracción que representa la figura más pequeña y entonces el resultado es $\frac{7}{8}$.

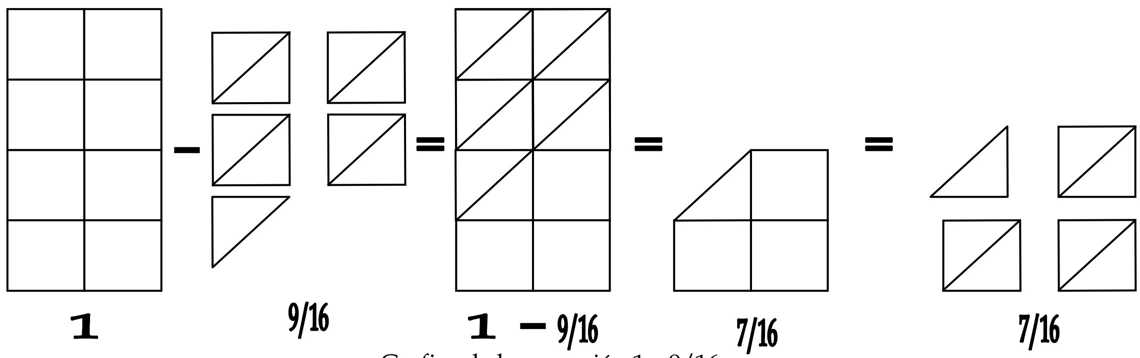


Grafica de la operación 1/8 + 1/4 + 1/2

Se propone al niño que efectúe las siguientes operaciones $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}+\frac{3}{16}$ y $\frac{3}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$

Se plantean las restas de fracciones: para efectuarlas se toma el rectángulo Blanco el cual representa un entero, la forma de realizar $1-\frac{9}{16}$ es la siguiente: sobre el entero coloque los 9 triángulos naranjas y observe la parte que quede en blanco, y ahora se cuenta cuántas veces el triángulo naranja (que es la figura más pequeña) cabe en el área en blanco, en éste caso el resultado será $\frac{7}{16}$.

Es decir, caben 6 veces en los cuadrados marcados sobre el rectángulo blanco más una vez en la parte que está ocupada por el triángulo naranja; para ser más gráfico el ejemplo véase las siguientes figuras.



Grafica de la operación 1 – 9/16

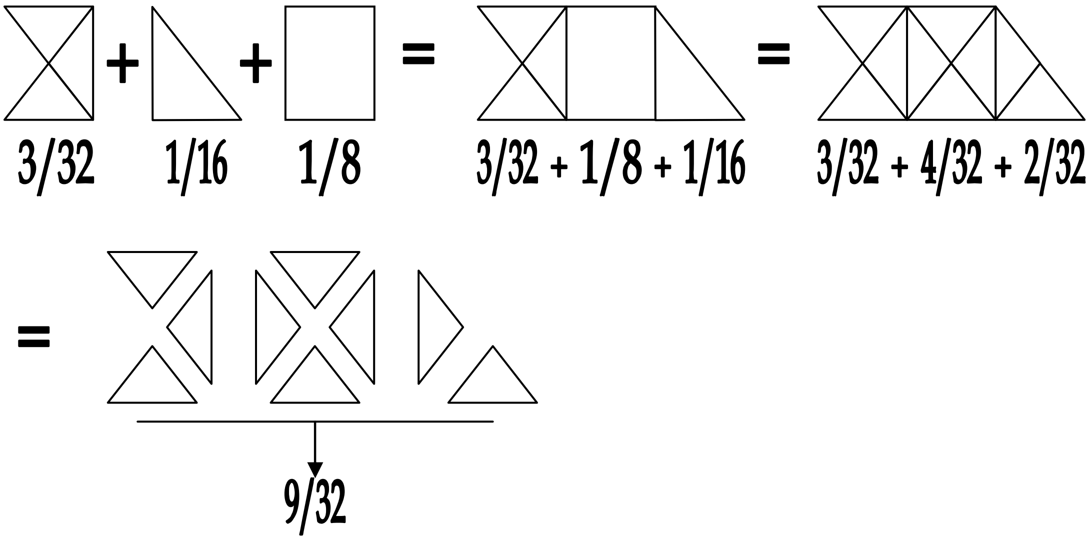
Se plantea las restas que pueden realizar los niños las se proponen son las siguientes: $1-\frac{1}{4}$, $1-\frac{2}{16}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}-\frac{5}{32}$.

Si se sigue éste proceso y se repiten las operaciones varias veces el profesor puede llagar a introducir no sólo las nociones de fracciones, equivalencias y mínimo común denominador, sino que también puede introducir las operaciones fundamentales de suma y resta de dichas fracciones, entonces el maestro puede variar las cuentas así como la aplicación del método a sus necesidades pedagógicas.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Para las sumas: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ se coloca un cuadrado rojo al lado de un rectángulo azul y la solución es tres cuartos pues el rectángulo azul es la figura más pequeña y cabe tres veces en toda la figura completa.

Para efectuar $\frac{3}{8}+\frac{3}{16}$ se ponen tres cuadrados verdes y al lado de ellos tres triángulos naranjas, como éstos son la figura más pequeña y cabe 9 veces en toda la figura formada, entonces la solución es $\frac{9}{16}$.

Para hacer $\frac{3}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$ se colocan tres triángulos morados, uno de color Naranja y un cuadrado verde, la figura más pequeña es el triángulo morado, el cual cabe 9 veces y así la solución es $\frac{9}{32}$.



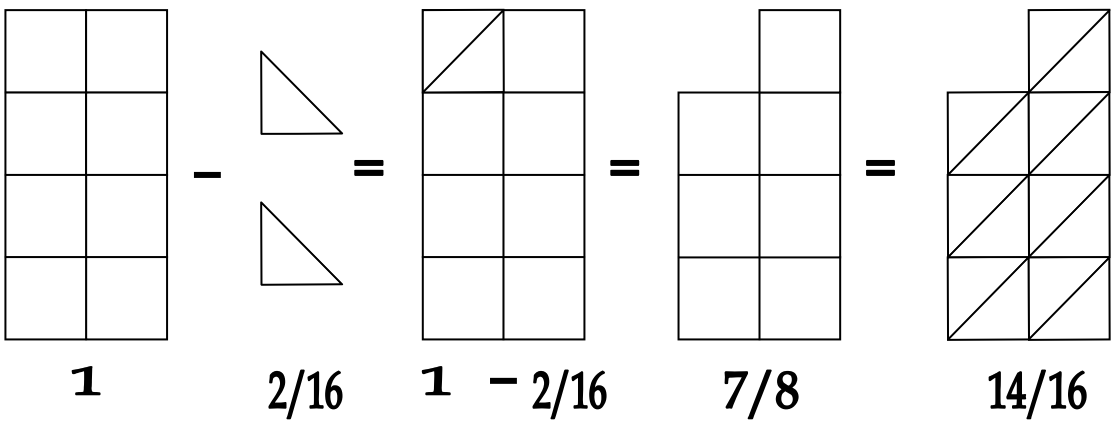
Grafica de la operación 3/32 + 1/16 + 1/8

En cuanto a las restas: $1-\frac{1}{4}$ se encima al rectángulo blanco, un rectángulo azul, y entonces de esta medida quedarán tres rectángulos en blanco por lo que

la respuesta es $\frac{3}{4}$.

Para la operación: $1-\frac{2}{16}$ se encima al rectángulo en blanco, dos triángulos naranjas que se pueden colocar uno junto al otro de forma que cubren uno de los cuadraditos marcados sobre el rectángulo en blanco dejando libres a 7 de

Éstos por lo que la solución es $\frac{14}{16}$ pues en cada cuadradito caben dos triángulos naranjas y hay 7 libres entonces 7 x 2 = 14 son las veces que caben los triangulitos naranjas en la zona en blanco que quedó.



Grafica del ejercicio 1 – 2/16

En la operación $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ se encima sobre un cuadrado de color rojo un rectángulo azul, y se observa que en la parte roja que queda sin cubrir cabe sólo uno más de este tipo de rectángulos, por lo que la solución es $\frac{1}{4}$.

Por último para la operación $\frac{1}{2}-\frac{5}{32}$ sobre el cuadrado rojo se enciman cinco triángulos de color morado y se observa que quedan sin cubrir sobre la parte en rojo dos cuadritos rojos (de los marcados sobre el cuadrado rojo grande) y por cada uno de ellos caben cuatro triángulos morados, además sobra también un pedazo del tercero en el que caben tres de éstos triangulitos, por lo que la solución es (4 x 2) + 3 = 11, es decir, once treintaidosavos.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se recomienda que este juego se practique también con los niños del período de operaciones formales, pues constituye una herramienta muy útil para reforzar las operaciones con números racionales.

EDUCACIÓN PRIMARIA 5° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: CASI UN GATO (SIGUIENDO PATRONES)[16]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños que tengan más de 10 años, se puede aplicar a un grupo de 20 niños, pero se juega en forma individual.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Refuerza la ubicación espacial, promueve la coordinación ojo-mano, induce el razonamiento lógico matemático, motiva la expresión oral y fomenta el manejo del vocabulario adecuado para expresar la orientación espacial.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se cuenta a los niños: *Desde los tiempos más antiguos, los juegos se han visto unidos a la historia de las matemáticas. No es un capricho del destino que los matemáticos de todas las épocas hayan mostrado interés por estos juegos por dos razones principales. Por una parte, muchos tienen un contenido inspirador que propicia el estudio y desarrollo de diferentes áreas de esta ciencia; por otra parte aprendemos el carácter lúdico de las matemáticas que se ve complementado con el juego.*

MATERIAL: Libreta o fotocopias de los cuadros de la actividad para cada participante y lápiz.

PROCEDIMIENTO: Se pide a los niños que observen los tableros que les debe mostrar el profesor y se indica que la figura O representa una ficha y que se mueve siempre de la misma manera, y que la figura X es otra ficha que también se mueve siempre de la misma forma sobre el tablero que es igual a la última de las siguientes figuras:

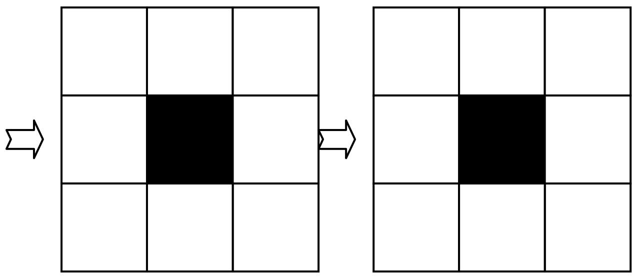


Imagen que presenta al tablero y el patrón en que se mueven las figuras

[16] Actividad inspirada en la tesis de Sara Pando Figueroa págs. 60 y 126

Se indica a los niños que cada flecha indica que se ha cambiado cada figura de lugar, luego se pregunta a los niños: ¿cómo creen que se mueva la ficha O?, ¿cómo se mueve la ficha X?, ¿dónde creen deben de ir las fichas en los siguientes dos pasos?, entonces se pide a los niños que resuelvan cada uno de los tableros vacíos que estan en la imagen anterior.

Por último se pide que compartan con sus compañeros de clase la solución que propusieron y que justifiquen la forma en que pasaron cada una de las fichas de una posición a la otra sobre los tableros.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Tal vez algunos de los niños se equivoque en el primer paso, por ello se sugiere que ayude para que ellos puedan comprender la forma en que se desplazan las fichas en los tableros. Tal vez en este caso se deba de hacer uso de objetos que los niños puedan manipular y cambiar de posición sobre los tableros de forma que representen la manera en que cada ficha cambia su posición sobre el tablero.

Se espera que los niños puedan resolver más allá del quinto paso sin la ayuda del profesor, y la aplicación de este juego no tiene que estar limitada a cierto número de pasos, por lo que si los niños así lo deciden, se puede continuar con la actividad hasta que la dominen.

Al final de los siguientes dos pasos las fichas terminan en los lugares que se menciona a continuación:

Se mueven las fichas con el sentido de las manecillas del reloj, la ficha O siempre se mueve tres cuadritos y la ficha X siempre se mueve dos cuadritos; la siguiente es la lista de los movimientos que realiza cada ficha, se sugiere se lea con cuidado y se comience a hacer una imagen mental de la forma en que cada ficha se desplaza para que al final de la lectura se repase la posición final que se imaginó con la que aparece en la figura que esta al último de esta descripción.

1. La ficha O se mueve 2 cuadritos a la derecha, y 1 hacia abajo.
2. La ficha X remueve 2 cuadritos a la izquierda.
3. La ficha O se mueve 1 cuadrito hacia abajo y 2 a la izquierda.
4. La ficha X se mueve 2 cuadritos a la derecha.
5. La ficha O se mueve 2 cuadritos hacia arriba y 1 hacia la derecha.
6. La ficha X se mueve 2 cuadritos a la derecha.
7. La ficha O se mueve 1 cuadrito a la derecha y 2 para abajo.
8. La ficha X se mueve 2 cuadritos para abajo.
9. La ficha O queda en la esquina inferior derecha.

10. La ficha X queda en la esquina inferior derecha.

11. La ficha O queda en la primera columna y el segundo renglón del tablero.

12. La ficha X queda en la primera columna y el último renglón del tablero.

Se puede comprobar los pasos anteriores mediante la siguiente imagen:

Figura de la descripción de la solución del problema.

EXTENSIONES O VARIANTES: Es interesante aplicar este juego con niños de menor edad, desafortunadamente la actividad no es totalmente comprendida por ellos, sin embargo algunos niños llegan al resultado aplicando la intuición; para mejorar la expresión de las estrategias que aplica el niño al resolver esta actividad se sugiere que se practique constantemente variando la forma en que se desplazan las fichas y que se cambie también las imágenes.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: DESCUBRE MI NÚMERO DE TELÉFONO[17]

EDADESY NÚMERO DE PARTICIPANTES: Se puede aplicar desde los 10 años, y pueden participar máximo 20 niños, pero cada uno debe trabajar en forma individual.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Refuerza las operaciones elementales de seriación, clasificación, suma y resta, además organiza el pensamiento abstracto y promueve la búsqueda de estrategias.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se puede narrar a los niños lo siguiente: *Los primeros juegos matemáticos que han ido apareciendo a lo largo de la historia de la humanidad se encuentran escritos en el papiro de Rhind o de Ahmes, que es como un libro que fue encontrado en un viejo edificio de la ciudad de Tebas, en Grecia, data del año 1850 A.C. Se trata de un escrito que nos muestra las matemáticas de la época. En él aparece una recopilación de varios problemas cuya resolución se realiza principalmente a través de métodos basados en prueba y error. Con él se muestra cómo en las matemáticas de aquella civilización ya aparecían los juegos a modo de acertijos.*

MATERIAL: Pizarrón, gises, libreta y lápices.

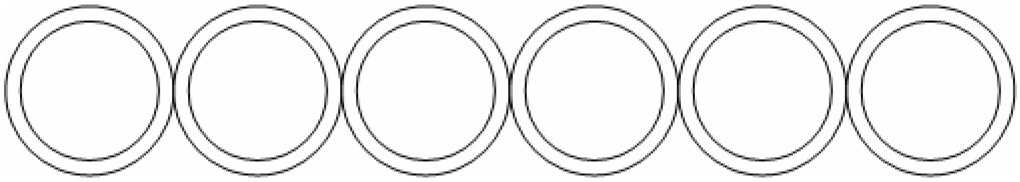
PROCEDIMIENTO: Se dibujan los seis círculos que necesita la actividad y se plantea el objetivo del juego que es descubrir un número telefónico, del cual se debe escribir cada una de sus cifras en los espacios vacíos de los círculos.

Se escribe las condiciones que deben cumplir los números que se deben colocar en el interior de los círculos, éstas son las siguientes:

"El número telefónico que buscamos:

- ✓ Consta de seis cifras, todas diferentes.
- ✓ No hay ningún cero.
- ✓ Las seis cifras van en orden, de mayor a menor.
- ✓ Puede ser que sean no consecutivas.
- ✓ Al restar dos cifras vecinas, el resultado máximo que puedes obtener es 2.
- ✓ La suma de la primera y la última cifra es 11.
- ✓ La tercera y quinta cifras son números pares.
- ✓ La segunda y tercera cifras sí son consecutivas.

¿Qué número es?



Modelo de cómo se deben dibujar los círculos en el pizarrón.

---

[17] Esta actividad fue tomada de la tesis de licenciatura de Sara Alejandra Pando Figueroa pág.68 y 128

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Se debe mantener atención en las respuestas que le den los niños cuando pregunte *¿cómo llegaste a que ese es el número que se tiene que escribir en los círculos?*; se recomienda al profesor que después de que todos hayan participado, ayude a los niños a efectuar las operaciones necesarias para hallar el número buscado, se sugiere hacer que todos participen activamente en la búsqueda de dicho número, para ello puede pedir a alguno de los niños que escriba en el pizarrón las cuentas que se espera le dicten sus compañeros de actividad; la respuesta para el planteamiento anterior es: 2 3 4 6 8 9 .

Si así lo desea el profesor puede inventar y aplicar otro tipo de problemas semejantes al anterior para reforzar las operaciones elementales, o bien puede motivar a los jugadores para que propongan sus propios problemas a resolver.

Se recomienda que el profesor muestre que todas las condiciones que se solicitaron sean cumplidas por el número que se obtiene como solución, de manera que se motive a todo el grupo en la elaboración de dichas comprobaciones así se reforzarán sus conocimientos sobre aritmética.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se recomienda aplicar constantemente esta actividad con los niños que tengan esta y mayor edad, pues resulta ser un ejercicio muy enriquecedor para complementar el desarrollo que vaya adquiriendo de su lógica matemática.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: REPARTIENDO EL AGUA[18]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños desde 10 años, se recomienda que los niños trabajen en equipos de dos y de preferencia se puede aplicar a grupos de máximo 10 niños en cada sesión.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Refuerza la conservación de la cantidad, estimula el pensamiento abstracto, refuerza la ubicación espacial, refuerza la motricidad gruesa.

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA: A lo largo de la historia el hombre siempre se ha valido de la naturaleza para comprender los fenómenos que le rodea, por eso el uso del agua para los niños puede serles de mucha ayuda en la construcción de las respuestas a ciertos problemas y los dota de la experiencia necesaria para ir haciendo abstracción de ciertos fenómenos.

La historia que se sugiere se les narre a los niños se encuentra a lo largo del procedimiento.

MATERIAL: Jarras de 8, 5 y 3 litros, 8 litros de agua, 8 litros de agua.

PROCEDIMIENTO: Se plantea la actividad: *"Dos amigos tienen una jarra con 8 litros de agua de limón y quieren repartírsela en partes iguales, para ello sólo disponen de dos jarras vacías, una con capacidad para 5 litros y la otra para 3 litros.*

¿Cómo se repartirán el agua de limón en partes iguales, usando únicamente la jarra llena de 8 litros y las jarras vacías de 3 y 5 litros?"

Imagen que representa los envases que puede utilizar el niño para resolver el problema

Se debe permitir la manipulación del material para la obtención de la solución; se debe sugerir a los niños que apunten el procedimiento que siguen en cada equipo para que el final del juego se comenten con los otros niños y lleguen entre todos a planear la mejor estrategia para resolver el problema.

[18] Esta es otra actividad que se puede encontrar en la tesis de licenciatura de Sara Alejandra Pando Figueroa en las págs. 68 y 120.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Los pasos que se deben seguir para repartir correctamente el agua son los siguientes:

- Se tiene llena la jarra grande con capacidad para 8 litros, y vacías la mediana para 5 litros y la chica para 3 litros.
- Se llena la jarra mediana y quedan tres litros de agua en la jarra grande.
- De la jarra mediana se llena la jarra chica y quedan dos litros en la jarra mediana.
- A la jarra grande que tiene tres litros, se agrega los tres litros de la jarra chica, con lo que ahora la jarra grande tiene seis litros y la jarra chica quedó vacía.
- A la jarra chica se vacía los dos litros de la jarra mediana, dejando así la jarra mediana vacía.
- A la jarra mediana se vacía cinco litros de los que tiene la jarra grande, dejándole a ésta sólo un litro.
- A la jarra chica que tiene dos litros se agrega un litro de la jarra mediana, con lo que ahora la jarra chica queda llena y la mediana tiene cuatro litros.
- A la jarra grande que tiene un litro se agregan los tres litros que tiene la jarra chica.
- Finalmente la jarra grande tiene cuatro litros, la jarra mediana tiene cuatro litros y la jarra chica quedó vacía.

Después de escuchar a los equipos, se resuelve la actividad frente a todos los niños y se dice al final: *"de esta manera los amigos repartieron el agua de limón en dos partes iguales, 4 litros para cada uno"*.

EXTENSIONES O VARIANTES: Esta actividad constituye una herramienta muy enriquecedora para los jóvenes del período de operaciones formales, por lo que se sugiere aplique con ellos tanto como los niños lo pidan no sólo en ésta, sino en todas las edades para las que se aplique la actividad.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: UN CAMINO QUE PASA POR TODOS LOS PUENTES[19]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños desde los 10 años, la actividad se realiza en forma individual y el número de participantes se deja a criterio del profesor.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Coordina los movimientos mano-ojo, fortalece la ubicación espacial, formaliza el pensamiento abstracto, estimula la motricidad fina.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Dentro de la diversidad de las teorías matemáticas, existe la teoría de gráficas. Muchos problemas se pueden pensar en términos de un número finito de puntos unidos por líneas, a este tipo de estructuras se les llama gráficas. Con ellas se pueden representar y estudiar problemas de ubicación y conexiones de calles, sistemas de rutas aéreas, redes de comunicación, distribución de mercancías y mucho más. Los matemáticos usan muchos tipos de gráficas y en estas encuentran el número de líneas que deben salir o entrar en cada uno de sus vértices o puntos para que los problemas que se plantean mediante la gráfica tengan solución.

La teoría de gráficas se ha convertido en una herramienta muy poderosa en la solución de problemas complicados y también en el diseño de formas eficientes de afrontar situaciones en las que entren en juego muchas variables del problema.

Un problema clásico en la teoría de gráficas es el que se puede plantear a los niños, se trata de un problema que le dieron al matemático *Leonhard Euler*, se sugiere que lo comente a los niños antes de empezar la actividad, el problema consiste en lo siguiente: *la ciudad de Königsberg nombre alemán de Kaliningrad ciudad de Rusia que se encuentra a orillas del mar Báltico, cuenta con dos islas y siete puentes, los puentes están distribuidos en la ciudad como se muestra en el siguiente dibujo* (se sugiere que esboce el diagrama en el pizarrón):

[19] Esta actividad se encuentra también en la tesis de Sara Pando Figueroa en las págs. 47 y 102

La tradición en la ciudad de Königsberg, era realizarr un paseo en el que se recorrieran los siete puentes sin pasar dos veces por ninguno de ellos, pero eso sí había que regresar siempre al lugar donde se empezó a caminar. Nadie había podido resolver el problema hasta que Euler que trabajaba en la ciudad de San Petersburgo al servicio de la reina Catarina la Grande se enteró de tal reto y decidió resolver el problema, el cual planteo mediante gráficas, y probó que era imposible recorrer todos los puentes de una sola vez sin pasar dos veces por ninguno de ellos (si se desea ahondar en la forma que Euler resolvió el problema se sugiere que consulte en la bibliografía el libro de Flansburg, Scout).

En la actividad que vamos a realizar se jugará un poco como lo hizo Euler para encontrar la solución al problema".

MATERIAL: Fotocopias de la actividad una para cada participante o bien si se desea se puede sustituir por una libreta y lápiz; también se necesita pizarrón y gis.

PROCEDIMIENTO: Se dibujan en el pizarrón las figuras para las que hay que encontrar en cada una un camino que pase por todas las líneas; el camino debe de terminar en el mismo punto donde empezó. No se vale pasar dos veces por una misma línea, y por cierto: ¡ se tiene que hacer sin despegar el lápiz de las hojas!.

Se debe permitir que los niños hagan equipos, y que cuando terminen de trazar sus caminos los exhiban y expliquen el método que siguieron para trazarlo.

Figuras que deben trazarse para hacer la actividad

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Cada gráfica tiene marcado por medio de flechas numeradas un camino que pasa por todas las líneas una sola vez y termina donde empezó, se considera que no son las únicas soluciones, pues la forma en que se recorren los caminos y por ello el número que debe tener cada flecha depende de dónde se comience a trazar.

Todas las imágenes son tomadas de la referencia que se cita en el pie de página número 19

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede pedir que cada gráfica sea trazada con dos colores uno para marcar los caminos, y otro para los vértices o bien para los números de las flechas, se puede aplicar para los jóvenes de las operaciones formales ya que contribuye al igual que algunas de las actividades anteriores en desarrollar el pensamiento abstracto.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: CONSTRUYENDO MOSAICOS CON CUADRILÁTEROS

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIANTES: A partir de los 10 años y se aplica en grupos de máximo 20 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Afirmar los conceptos de cuadriláteros y su clasificación de cóncavos y convexos, introducirlos en algunos conceptos geométricos como: teselación (cubrimiento del plano que puede ser el piso o las paredes con una figura se caracteriza por no encimar las figuras ni dejar huecos); mosaico (cubrimiento del plano con dos o más figuras, reciben los adjetivos de diédrico, triedro, dependiendo del número de piezas distintas que lo conformen),diédrico (*di* = dos *édros* = caras, se trata de una construcción hecha con dos piezas), triedro (*tri*=tres *édros*=caras, se trata de una figura hecha con tres figuras distintas) y la razón áurea (cantidad numérica que es agradable a la vista y cuya aplicación directa está en algunas obras de arte como en *la Monalisa* de *Miguel Ángel* se denota por la letra griega "*fi*" $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$), fomenta la ubicación espacial, promueve la expresión oral de los conceptos aprendidos y se introduce a los niños a la apreciación artística, desarrolla el pensamiento lógico y la imaginación así como la creatividad.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se puede decir al niño después de mencionarle los conceptos anteriores, lo siguiente: *Las teselaciones han sido empleadas por diversas culturas entre ellas la que destaca es la Árabe y muestra de ello lo presenta la Alhambra, se trata de un palacio nazarí de Granada en España, y que fue construido entre los siglos XIII y XIV, dentro de sus murallas hay distintos edificios del cual nos interesa la finura de su decoración en mármol, estuco y azulejo, pues estos representan algunos patrones de las distintas teselaciones que existen, es considerado patrimonio de la humanidad a partir de 1984* (se muestra a los niños una imagen de la Alambra como la siguiente).

Fotografía de la Alambra vista desde el exterior [20]

[20] Esta imagen se tomó de la tesis de licenciatura de Cristina Alvarado Valencia, págs. 119 y 121

Una muestra más de la belleza de las teselaciones se tiene representada en el mosaico de *Penrose*, el cual es un patrón de dos figuras geométricas que forman una teselación no periódica e infinita, éste fue creado por el matemático *Roger Penrose*, y elaborado por *José Sandoval*. Esta obra está constituida por dos piezas y goza de una belleza estética que permite observar un sinnúmero de formas a partir del sitio donde se coloque el observador, actualmente se le puede mirar con detenimiento en la sala de matemáticas del museo de las ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNIVERSUM).

MATERIAL: Cartoncillos delgados (al menos serán necesarios unos 5 pliegos) y pintura vinci para darles color a las piezas que en él se trazarán o bien se puede emplear cartulinas de diferentes colores, lápices, regla, transportador, tijeras, cinta adhesiva, y una superficie plana que se pueda cubrir con las piezas que se fabricarán, por ejemplo una pared, el pizarrón o una parte del piso del salón de clases o del lugar donde se desarrolle la actividad.

PROCEDIMIENTO: Al menos 7 días antes de que se desarrolle la actividad se enseñan a los niños las siguientes figuras y se pide que tracen y recorten al menos 10 de cada una en uno de los pliegos de cartoncillo o en la cartulina y que las pinten de distintos colores; las figuras se llaman cometa (también se le llama papalote) y dardo (que se le puede llamar también flecha) por la forma que cada una tiene; es importante que los niños marquen tamicen las líneas curvas que se encuentran en el interior de cada figura[21].

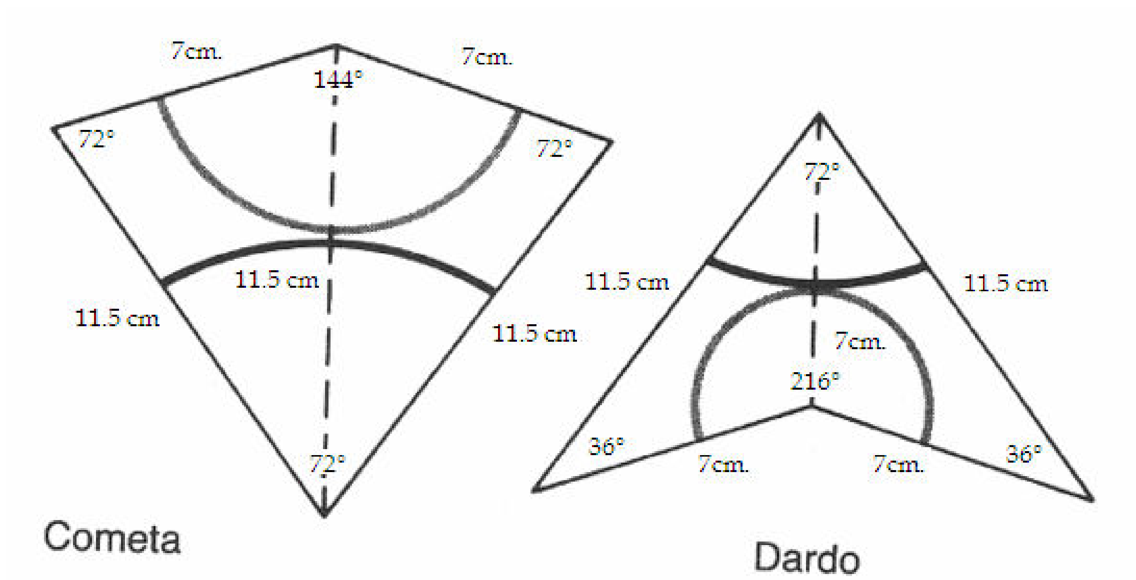


Imagen de las figuras que los niños deben trazar

[21] Las imágenes fueron modificadas de las originales que se encuentran en el libro de Martin Gardner

Las imágenes anteriores las hizo Roger Penrose[22] a partir de trazar las diagonales del pentágono regular inscrito en una circunferencia, como lo muestra la siguiente imagen.

A esta figura se le conoce como el pentagrama pitagórico

Si se observa la figura se reconoce de inmediato el cuadrilátero AECD, en él se encuentran inscritos el papalote que se distingue al seguir con la mirada el cuadrilátero ABCD y la flecha en el cuadrilátero ABCE.

Se debe pedir antes de la realizar la actividad que se tracen y recorten también otras figuras geométricas como triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos, octágonos y pentágonos cuyos lados deben medir 11.5 cm cada uno, se pueden también trazar rectángulos cuyas magnitudes de los lados sean 7cm X 11.5 cm, de preferencia se piden al menos 10 figuras de cada uno.

Se refuerzan los conceptos de cuadriláteros (figura que tiene cuatro lados los cuales no tienen por qué ser iguales), cóncavo y convexo[23], para ello se sugiere se midan los ángulos de cada una de las figuras con un transportador, entonces se puede mencionar que las cometas o papalotes son cuadriláteros cóncavos y que los dardos o flechas con cuadriláteros convexos por la definición de cada uno de ellos.

---

[22] Matemático y físico británico, sus investigaciones se han centrado en la teoría de hoyos negros, en cosmología y en el desarrollo formal del embaldosado no periódico del plano, con aplicaciones en geometría y en cristalografía.

[23] Un cuadrilátero es cóncavo si contiene un ángulo interior mayor a 180° y es convexo si todos sus ángulos interiores son menores a 180°, para mayor referencia se recomienda consultar el libro del Dr. Aurelio Baldor "Geometría".

Se les dice a los niños que los papalotes y las flechas estan trazados en proporción áurea, es decir, si tomamos como unidad los 7 cm para trazar uno de los lados, por ejemplo de la flecha, entonces se calcula la siguiente proporción para saber de qué medida se trazan los lados mayores de este cuadrilátero cóncavo.

$$7cm \rightarrow 1unidad$$
$$xcm \rightarrow \phi \approx 1.618unidades$$ y se resuelve como sigue: $$x = \frac{(7)(1.618)}{1}$$

Y al hacer la cuenta resulta que $x = 11.326$ lo cual aproximamos a $11.5cm$ para trazar los cuadriláteros cóncavos y convexos, esto significa que los lados de estas figuras están en razón o proporción áurea.

Gráficamente lo anterior se representa como sigue:

Papalote y flecha con unidades de sus lados en razón áurea

Si se hacen coincidir los lados AB y BC de ambas piezas se obtiene el cuadrilátero ADCE que se muestra a continuación:

Luego se dice a los niños: *¿las figuras que trazaste te ayudarán a cubrir una parte de la pared o del piso sin dejar ni un solo hueco y evitando que se encimen las piezas?, a esto se le llama mosaico si está hecho de dos o más figuras distintas y se llama teselaciones si esta hecha de una sola pieza, entonces ¿puedes hacer mosaicos con esas figuras?, ¿puedes hacer teselaciones? ¿cuántas distintos puedes hacer?, ¿se pueden hacer teselaciones con hexágonos?, ¿por qué?, ¿se pueden hacer con otra figura, por ejemplo con los triángulos?, ¿por qué? ¿te gustaría diseñar tu propio mosaico o teselación utilizando las figuras que hiciste?.*

Después se motiva a los niños para que construyan una teselación por cada figura que hicieron o un mosaico combinando las piezas que fabricaron previamente, para ello se recomienda que se intente cubrir una parte del piso del salón o el la pared y para ello se pide que peguen las piezas según crean conveniente para formar sus figuras, se pueden formar equipos y se recomienda que entre todos los niños se unan las piezas con cinta adhesiva.

Se debe observar la forma en que cada niño construye su teselación o mosaico y se debe alentar para que haga diseños distintos a los de sus compañeros, también se puede pedir que el niño invente una historia en la que participen las figuras que va creando.

Al final de que cada niño termine se creación se tiene que montar una exposición de los mosaicos que elaboraron los niños en forma individual o en equipo, para ello recomiendo que se permita a cada uno expresarse libremente en el espacio donde se realiza este juego.

Se recorre la exposición acompañado de los participantes, se sugiere detenerse frente a cada figura y se motiva a que el creador de dicha imagen explique brevemente cómo la hizo, por qué eligió esa combinación de los colores (si es el caso) y la forma en cómo unió las figuras, de manera que cada niño participe al menos con una exposición.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: No se cuenta con una única respuesta por parte del alumno pues la construcción de la teselación o el mosaico depende de su personalidad y de su imaginación así como por sus destrezas y dedicación en la elaboración de su trabajo; en cuanto a la parte teórica, se espera que el niño comprenda la diferencia entre un cuadrilátero cóncavo y convexo, además que distinga las propiedades básicas de cada uno de ellos.

Las líneas marcadas en las flechas y los papalotes sirven para identificar caminos continuos que se hacen cuando se unen algunas de estas piezas y de esta manera se facilita la orientación en como se pueden unir dichas piezas, un ejemplo de un diseño de lo anterior y que los niños pueden hacer es el siguiente:

Los nombres de estos diseños son los originales que les dio Penrose.

Otros diseños se pueden consultar en el proyecto del programa tutoral para becarios de la D.G.D.C. (Dirección General de Divulgación de la Ciencia de la UNAM), titulado "El mosaico de Roger Penrose" escrito por Sara Alejandra Pando Figueroa en abril del 2001.

La siguiente imagen es uno de los diseños más famosos que contiene el mosaico que creo Roger Penrose, se puede observar que se trata de un mosaico diédrico.

Sobre la zona sombreada se puede observar con mayor detalle que es un mosaico diédrico.

EXTENSIONES O VARIANTES: Si se aplica a jóvenes del período de operaciones formales les resultará muy gratificante y normalmente este tipo de actividades los motiva para aprender más acerca de geometría.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: JUGANDO CON LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS[24]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 10 años se puede aplicar y se recomienda para un grupo no mayor de 25 niños.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Induce la creación de los nombres de los sólidos platónicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), fortalece el uso de la memorización, fortalece la lógica matemática y estimula el trabajo en equipo.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se recomienda que comparta cierta información de la que se expone a continuación con el grupo de forma que se motive por aprender más de esta rama de las matemáticas.

Se dice que antiguamente en Egipto, las aguas del río Nilo crecían y subían de nivel borrando los límites de los terrenos; entonces era necesario que cada año, los dueños de las tierras volvieran a medir y marcar sus terrenos. Los egipcios habían desarrollado una gran habilidad *"el arte de medir la tierra"*, inventaron procedimientos y técnicas que se fueron transmitiendo de generación en generación.

Estos conocimientos llegaron a otros pueblos, en particular a los griegos gracias a Tales de Mileto, quienes estudiaron el *"arte de medir la tierra"* que en griego se dice *GEOMETRÍA*. Se dieron cuenta que en el fondo de las técnicas egipcias había ciertos principios generales más allá de los terrenos y sus medidas, tenían que ver con relaciones y propiedades que existían entre ciertas formas y figuras.

Entre los siglos IV y VI a.c., floreció en Grecia la más importante escuela científica y filosófica de su época, en la que se dieron cuenta de la importancia de encontrar enunciados generales que mostraran las propiedades de las figuras geométricas así como enunciar sus demostraciones.

Pensaban en superficies y volúmenes abstractos, delimitados por líneas abstractas y cuyas relaciones y propiedades se cumplen siempre. Elaboraron así con el paso del tiempo, una geometría independiente de los casos concretos, construyeron el primer sistema de matemáticas puras. Fueron los primeros en reconocer el valor de dar leyes generales, características que entre otras distingue a la matemática.

[24] Las imágenes que se encuentran en esta actividad fueron tomadas del libro de Carlos Prieto, págs. 14, 17, 18 y 21.

La geometría clásica fue la primera rama de las matemáticas, y se consolidó gracias al trabajo de Euclides, quien en su libro de *"los elementos"* reunió todo el conocimiento matemático de la época, lo organizó y lo más importante de todo, lo formalizó.

Al profundizar en sus estudios de la geometría, los griegos dejaron de preocuparse por las aplicaciones prácticas de los conocimientos que desarrollaban. Sus indagaciones estaban guiadas por una pasión hacia el conocimiento y el placer estético.

Entre los puntos más sobresalientes de la geometría desarrollada por una de las escuelas más importantes de la antigüedad: los Pitagóricos (alumnos de la escuela fundada por Pitágoras de Samos) se puede decir que, de acuerdo con una referencia del libro XIII de "*los elementos*", los pitagóricos conocieron de los cuerpos regulares, el cubo, el tetraedro y el dodecaedro. Pero el octaedro y el icosaedro parecen haber sido estudiados por primera vez por *Teeteto*, en la primera mitad del siglo IV a.c.

MATERIAL: Sólidos platónicos construidos con un material resistente como papel cascarón, mica o de plástico y de tamaño regular.

PROCEDIMIENTO: Se les da a los niños la siguiente explicación, la cual es esencial para la realización de la actividad:

Existen unas figuras geométricas llamadas ***poliedros regulares*** se tratan de sólidos cuyas caras son polígonos regulares los cuales pueden ser triángulos equiláteros, cuadrados y pentágonos, además todas las caras de un poliedro regular son iguales. Platón[25] descubrió que sólo hay cinco de ellos y los relacionó con los elementos de la tierra (agua, aire, éter, fuego y tierra) , por eso también se les conoce como ***sólidos platónicos.***

Los cinco sólidos platónicos reciben su nombre dependiendo del número de caras que tienen, y se relaciona con el elemento de la tierra con el que tienen alguna semejanza, por ejemplo:

---

[25] Filósofo griego (427 – 347 a. C.) nacido en Atenas, fundó una escuela llamada Academia, escribió unos treinta diálogos que en la mayoría de los casos ponen en escena a discípulos y adversarios frente a Sócrates, quien mediante sus preguntas los lleva a reconocer las contradicciones del falso saber, de lo sensible de las apariencias. Su obra ejerció una influencia duradera, alimentando en los pensamientos cristianos, islámicos y sucesivos, las corrientes más idealistas y trascendentes.

El sólido platónico que contiene el menor número de caras es el ***tetraedro*** su nombre proviene del griego $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha$ (tetra), cuatro y $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (edra), cara, por ello se sabe que tiene cuatro caras, cuyas formas son triángulos equiláteros, se le relaciona con el elemento fuego porque se parece a una flama o una llama; la imagen de dicho sólido es la siguiente:

Tetraedro: sólido de cuatro caras triangulares

El ***hexaedro*** también conocido como cubo sus caras son cuadrados y su nombre viene del griego $\varepsilon\kappa$ (ex), seis y $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (edra), cara, significa que tiene seis caras, las cuales son cuadrados; se le relaciona con la tierra porque se trata de la figura más estable y que es capaz de sostener sobre sí al resto de los sólidos, su imagen corresponde a la siguiente:

Hexaedro: sólido de seis caras cudradas identicas.

El ***octaedro*** es el siguiente sólido pues como ya se puede dar una idea tiene ocho caras en forma de triángulos equiláteros, su nombre se deriva de los vocablos $o\kappa\tau\omega$ (icto), ocho y $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (edra), cara; si se le observa desde lejos y sostenido en uno de sus vértices se puede apreciar la imagen de un papalote, también se asemeja a un rehilete cuando de sostiene entre las dos manos de dos de sus vértices opuestos y se piensa que esta hecho de papel, además de que sople un fuerte viento, entonces el ***octaedro*** giraría sobre las palmas de quien lo sostiene; su imagen es:

Octaedro: sólido de ocho triángulos equiláteros

El último de los poliedros regulares suyas caras son triángulos equiláteros es el ***icosaedro*** a este se le relaciona con el elemento agua pues se parece a una gota de este elemento, también a una concha de un caracol marino cuando se coloca cerca del oído, y con mucha imaginación inclusive puede parecer un pez globo o el caparazón de una tortuga marina, su nombre esta formado por los vocablos $\varepsilon\iota\kappa o\sigma\iota$, veinte y $\varepsilon\delta\rho\alpha$ (edra), cara; su forma es:

Icosaedro: Sólido con veinte caras triangulares

El único de los sólidos platónicos que tiene por caras pentágonos regulares es el ***dodecaedro*** que proviene del griego *δωδεκα* (dodeca), doce y *εδρα* (edra), cara; a este sólido se le relaciona con el elemento éter que en la antigua Grecia representaba lo sublime, lo puro y lo relativo a la divinidad, por eso representa también el cielo, lugar donde cohabitan los dioses que eran importantes para dicha cultura, con mucha abstracción, si se unen dos dodecaedros pegándolos por las caras, entonces se aprecia una nube, por esta razón esta figura representa el cielo, que es el quinto elemento desde el punto de vista de los antiguos griegos. La imagen del ***dodecaedro*** es la siguiente:

Dodecaedro: Único sólido que tiene doce caras en forma de pentágonos regulares

Cabe mencionar que si se desea saber más acerca de estas figuras geométricas se puede consultar el libro de Carlos Prieto: "Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas", vale la pena revisar la exposición que de ellos se hace en esta obra.

Posteriormente a la exposición anterior se elige un lugar apropiado para llevar a cabo el juego, se sugiere que se elija un espacio abierto y muy grande, por ejemplo el patio de una escuela primaria. Se colocan los sólidos platónicos en uno de los extremos del patio, mientras los niños forman en el otro extremo, luego se exponen las reglas del juego que son:

- Integrar equipos de máximo 5 niños.
- Formar a cada niño del equipo uno detrás de otro tomando como referencia la estatura de cada integrante del equipo, de manera que al final se cuente con una fila de estaturas ascendentes.
- Pasar a los primeros niños de cada equipo al frente donde previamente se colocó una línea de salida, y una vez elegido uno, se dice el nombre o el elemento con el se relaciona el sólido, luego se pide que después de que el profesor cuente hasta tres los niños corran y el primero en tocar la figura correcta gana un punto para su equipo.
- Procurar que todos los niños pasen para ello una vez que participó se pide al niño que se forme al final de la hilera de su equipo.
- Contabilizar los puntos que cada equipo lleva ganados.

- Mencionar el nombre del equipo ganador.

Es importantísimo reforzar los nombres de cada figura y del elemento con que se le relaciona para ello pide que todos los concursantes participen.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Al principio los niños tratarán de señalar la figura que debe tocar el compañero que va a pasar, esto es una muestra más del sentido gregario que mencionó Piaget, lo hacen pues en ocasiones sus propios compañeros lo piden pues no suelen acordarse de ciertos datos que se mencionó al inicio de la actividad; en este caso el profesor debe procurar emplear una estrategia que no les permita "hacer esta trampa", con el fin de que los niños que son ayudados no se queden acostumbrados y traten en lo sucesivo de esperar que sus amigos o compañeros encuentren las soluciones de los problemas que se le presentan.

Al finalizar la actividad los niños sabrán bien distinguir los sólidos platónicos esto ayuda para que en sucesivas clases se introduzca el cálculo de su perímetro, área lateral, área total, volumen, entre otros.

EXTENSIONES O VARIANTES: Otra actividad que se puede hacer con los sólidos platónicos es calcular un número muy especial llamado "la característica de Euler", esta variante es muy interesante aplicarla a jóvenes y niños del período de operaciones formales, para hacer esta adaptación se sugiere leer el libro de Carlos Prieto que se citó en esta actividad.

EDUCACIÓN PRIMARIA 6° GRADO

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: LAS FICHAS DE DOMINÓ[26]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 11 años, se puede jugar individualmente por lo que el profesor puede decidir el número de participantes en la actividad.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Se reafirma la clasificación, seriación de los números, introduce a los niños en el juego del dominó, refuerza la orientación espacial, promueve la identificación de figuras geométricas, además fortalece la imaginación para la creación de figuras y problemas geométricos.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se cuenta al niño lo siguiente: *Los juegos de dominó conocidos datan de hace más de 3000 años, fue inventado en China como una derivación de los dados cúbicos, que fueron exportados a China de la India. Las primeras fichas fueron labradas en hueso o marfil a los que le insertaban puntitos de ébano. En China el dominó se dividió en dos categorías el Civil y el Militar con algunas derivaciones como el Mah Jong.*

Posteriormente se dice que pasó a Egipto, donde según algunos conocedores, éstos fueron los que crearon el dominó tal y como lo conocemos en la actualidad, inclusive afirman que el vocablo "Chuti Mul" significa 7 mulas y fue inventado por los árabes, tal vez fueron ellos los que agregaron las "fichas blancas" o "ceros", término desconocido en su inicio para el resto de la civilización, con excepción tal vez de la cultura Maya en América.

MATERIAL: Un juego de dominó completo de preferencia por cada participante, fotocopias de la actividad, una por cada niño y lápices de colores.

PROCEDIMIENTO: Se introduce a los niños en el juego del dominó y posteriormente se reparte los juegos. Se permite que los niños se familiaricen con las fichas, para ello se sugiere se pida que reconozcan los números que intervienen en cada ficha y por lo tanto en las piezas de todo el juego.

---

[26] Actividad tomada de la tesis de licenciatura de Sara Alejandra Pando Figueroa en las págs. 43 y 96

Se reparte las hojas que contengan el siguiente diagrama:

En esta figura se encuentran las 28 fichas de dominó

Se solicita a cada niño que localice las 28 fichas de dominó que se encuentran revueltas en el tablero, una vez que las localice se deben encerrar e iluminar.

Se debe aclarar que **no** se vale usar un mismo cuadrito para dos fichas diferentes. Se pide a los niños que coloquen las fichas según la hoja que acaban de iluminar para que comprueben si su respuesta corresponde a lo que físicamente se puede hacer son las fichas.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: La solución para el tablero que se dio en las fotocopias es la siguiente:

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede aplicar esta actividad inclusive a niños de menor edad pues algunos son capaces de resolverla desde que tienen 8 o 9 años, pero eso depende del desarrollo visual y lógico que tenga el niño.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: A VESTIR[27]

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Desde los 11 años se puede aplicar y se puede realizar en forma individual o en equipos de 3 niños

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Introducir algunos conceptos de probabilidad como los diagramas de árbol, la regla del producto y la clasificación de la información, además fomenta la creatividad e imaginación en el tratamiento de algunos problemas, motivar el pensamiento abstracto a partir de material tangible.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se puede decir a los niños: *La parte de la matemática que estudia los problemas sobre cuántas combinaciones diferentes se pueden formar con objetos dados se le llama COMBINATORIA, esta rama nace en el siglo XVI a través de diversos juegos de azar con dados cartas, etcétera.*

*Algunos matemáticos como **Tartagli**a en el siglo XVI, **Pascal** y **Ferma**t en el siglo XVII, estudiaron esta área de las matemáticas y parte de sus investigaciones están dedicadas a resolver juegos de azar. La combinatoria es una parte importante de la teoría de Probabilidad que fue desarrollada por **Jacob Bernoulli, Leibnitz** y **Euler**.*

Las aplicaciones de la Probabilidad y en particular de la combinatoria las encontramos principalmente en los problemas de horarios del transporte público, en los procesos de producción de algunas fábricas, así como al encriptar las claves secretas que utilizamos en nuestras cuentas bancarias personales, entre otras.

Los problemas de combinatoria son variados, pero la mayoría se resuelven mediante tres reglas fundamentales: los diagramas de árbol, la regla de la suma y la del producto.

MATERIAL: Siete cuadrados de papel de 10cm X 10cm de diferentes colores y 3 rectángulos de papel de 10cm X 2cm de distintos colores, se debe dar la misma cantidad de material a cada niño, de preferencia previamente a la aplicación de la actividad, forme los juegos con dichos papelitos, libreta, lápices, cinta adhesiva, pizarrón y gises.

PROCEDIMIENTO: Se plantea el problema: se trata de saber cuántos posibles cambios de ropa tiene una persona que cuenta con tres playeras, cuatro pantalones y tres pares de zapatos.

Se reparte el material y se permite la manipulación del mismo para familiarizarse con él; los cuadrados representarán las playeras y los pantalones, los rectángulos son los pares de zapatos, se recomienda poner una letra a los pantalones para no confundirlos con las playeras.

[27] Esta actividad fue desarrollada en colaboración de Margarita Reyes Flores.

Se hace una lista de todos los cambios de ropa que se pueden hacer, se recomienda utilizar el material didáctico que se les repartió previamente para hacer dicha lista.

Se pregunta por los resultados obtenidos por cada participante, para eso se pide que los niños expliquen el método que siguieron para obtener sus resultados.

Se dibuja un diagrama de árbol en el pizarrón: se sugiere que todos los niños colaboren al decir cual debe ser la posición de los objetos que se dibujen. Posteriormente se pide que con la cinta adhesiva los niños peguen en la pared y cerca del pizarrón formando una columna los papeles que corresponden a las playeras, en otra columna que se encuentre cerca de la anterior se pegan los papeles que corresponden a los pantalones y al final se pega otra columna de papeles rectangulares que son los que corresponden a los zapatos.

Se escriben los resultados de dicho diagrama, para ello se trata de mostrar con el movimiento de las manos la ruta que se sigue para hacer dicha lista, esta parte tiene que ser muy explícita para que el niño observe de forma intuitiva la construcción de un diagrama de árbol.

Por ejemplo, se puede comenzar con la primera playera que se encuentre en la primer columna, luego se señala con la mano el tercer pantalón de la segunda columna y por último se sigue hasta el cuarto par de zapatos que se encuentra en la tercer columna.

Posteriormente se dibuja en el pizarrón, una de las rutas del diagrama de árbol, sugiero que con el gis dibuje en el pizarrón la columna de las playeras, por cada playera dibuje los cuatro pantalones y por cada pantalón dibuje los tres pares de zapatos, al final trate de unir con líneas las respuestas, se puede pedir a los participantes que se cercioren de que no falta ninguna línea para unir los posibles cambios de ropa que se pueden formar. Como una pequeña guía para hacer los dibujos se anexa el siguiente dibujo.

Dibujo del diagrama de árbol que se debe hacer en el pizarrón

Se deduce la regla del producto, para ello sugiero anote debajo de la columna de las playeras el número 3, bajo la columna de los pantalones el número 4 y bajo los dibujos de los zapatos el número 3, al final coloque los signos de multiplicación entre estos números y se procura motivar a los niños para que efectúen las operaciones y de esta forma concluyan que hay 36 combinaciones distintas de la ropa dada en este problema; gráficamente se hace de la siguiente manera:

3 X 4 X 3 = 36

Este mismo juego se puede aplicar con otro tipo de objetos y de situación por resolver, se recomienda que el profesor invente varias actividades de éste tipo y las aplique en la clase para que se refuercen los conceptos que acaba de recibir el niño.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Es probable que algunos alumnos se cansen rápidamente y dejen de hacer la lista de los resultados, en cuyo caso se sugiere al profesor que les motive ayudándoles a terminar la lista con el fin de que el concepto sea mejor asimilado por el niño y se percate de la practicidad de la regla del producto.

En general, es difícil que sin previo conocimiento del concepto de diagrama de árbol el niño lo logre dibujar por lo que no habrá que desesperanzarse en el caso de que todos los niños tengan una respuesta equivocada, por el contrario trate de rescatar de esta situación negativa una enseñanza positiva.

EXTENSIONES O VARIANTES: La actividad se puede continuar aplicando hasta el nivel bachillerato en el cual será de utilidad para introducir nuevamente el concepto de combinatoria.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: PARA SER UN BUEN BALLET PARKING

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para niños mayores de 10 años, se recomienda que se realice en forma individual, pero en caso de hacerse en grupo, éste no debe exceder de 3 niños, con el fin de que logren un aprendizaje significativo.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Reafirma la ubicación espacial, fortalece la lógica matemática, introduce la planeación para resolver problemas, fomenta la imaginación para tratar y resolver problemas geométricos y lógicos, promueve el pensamiento abstracto, induce el manejo asertivo de la lateralidad, introduce el manejo del lenguaje algebraico y el concepto de plano cartesiano.

UBICACIÓN HISTÓRICA: Se platica al niño: ***René Descartes****, filósofo y matemático francés (1596-1650) fundamentó su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un punto de partida sobre el que construir todo el conocimiento:* **Pienso luego existo**. *En matemáticas es el creador de otro tipo de geometría, donde las figuras que ahí se estudian son diferentes a las que conoces, esta área de las matemáticas se llama* ***geometría analítica****, construida también tomando un punto de partida y dos rectas perpendiculares que se cortan en ese punto, es el denominado* ***sistema de referencia cartesiano***.

MATERIAL: Un cuarto de papel ilustración, 12 carritos de juguete y 4 camiones o camionetas de juguete (el tamaño se especifica adelante), etiquetas o letras con adhesivo libreta, lápiz y colores.

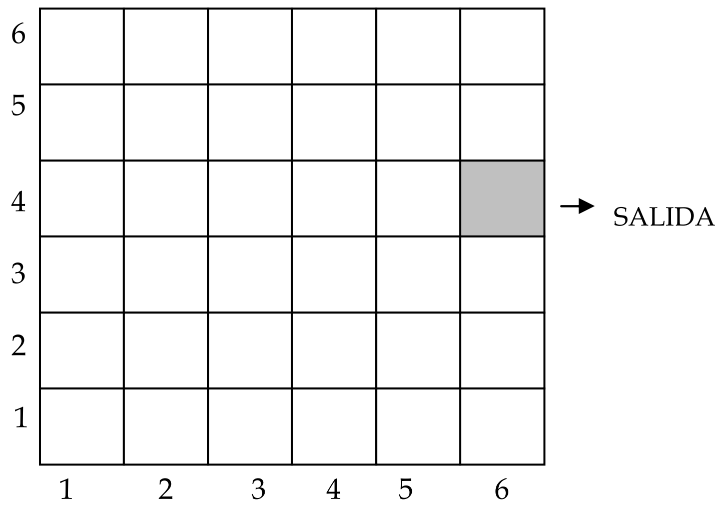
PREPARACIÓN DEL MATERIAL: Se corta el papel ilustración en un cuadrado de 12cm X 12 cm, se divide en cuadrados de 2cm X 2 cm, el cuadrado que se halla en la última columna y en la tercera hilera debe ser pintado de algún color que sea fácil de reconocerlo; este tablero será el estacionamiento y la salida de éste es el cuadrado que está iluminado.

Los doce carritos de juguete deben abarcar un par de los cuadrados que se trazaron en el tablero, deben ser marcados con etiquetas que contengan las letras de la A a la K según el orden alfabético. Los camioncitos o camionetas de juguete deben ocupar tres cuadrados de la división del tablero, estos se marcan con etiquetas que tienen las letras L a la O sin contar la Ñ según el orden alfabético.

Se recomienda que cada niño fabrique su propio juego.

PROCEDIMIENTO: Se presenta el tablero al niño. Se recomienda que muestre a todos un tablero terminado que este dividido y que contenga uno de los cuadrados iluminado según se explicó con anterioridad.

Se introduce el manejo del tablero. Para ello se puede introducir el concepto de plano cartesiano; cada cuadrado que se encuentre en la base del tablero se numerará del 1 al 6, lo mismo con los cuadrados que estén en el lado izquierdo del tablero, ejemplo viendo de frente el tablero si se desea encontrar el cuadrado que corresponde a las coordenadas (6,1), entonces se cuenta primero 6 cuadrados sobre la base del tablero y luego el primer cuadrado hacia arriba sobre esa columna; todo esto se ilustra con la siguiente imagen:



Tablero de la actividad

Se plantea el problema: El tablero representa al área que ocupa un estacionamiento y se colocan dentro los autos que se encuentran estacionados, el objetivo del juego consiste en sacar siempre el carrito marcado con la letra K por la salida del estacionamiento que es el cuadrado pintado, para sacarlo se debe seguir las siguientes reglas:

- Una vez colocados los carritos y camiones, ninguno debe de salir del estacionamiento (salvo el marcado con la letra K).
- Los carritos y camiones sólo pueden avanzar hacia delante o hacia atrás.
- No se debe ocupar un mismo cuadrado por dos camiones o carritos, es decir, no se vale que ocupen un mismo espacio ambos juguetes.
- Recuerde que la única salida del estacionamiento es el cuadrado representado por las coordenadas (6,4).

Se plantea las reglas de escritura para expresar la solución; se recomienda que cada movimiento que haga el niño en el tablero, la escriba en la libreta, y para evitar confusiones en el momento de escribir la solución, el tablero siempre debe de estar en la misma posición frente al jugador, el código para escribir las respuestas es el siguiente:

Utilice la letra S (de subir) si el juguete se desplaza hacia arriba

Utilice la letra Y (para introducir el manejo del eje de las ordenadas) si se desplaza hacia abajo

La letra X (se elije esta letra para introducir el manejo del eje de las abscisas), se utiliza cuando el juguete se mueva hacia la derecha

La letra R (esta letra no se repite al señalar los carritos o las camionetas), se emplea cuando el juguete se mueve hacia la izquierda

El profesor puede cambiar si así lo desea el código de escritura para facilitar su manejo en la clase, se recomienda busque letras o símbolos que sean fáciles de manejar por los niños y trate de cambiar cada tres aplicaciones de esta actividad el código, esto ayuda a introducir la noción del cambio de variable.

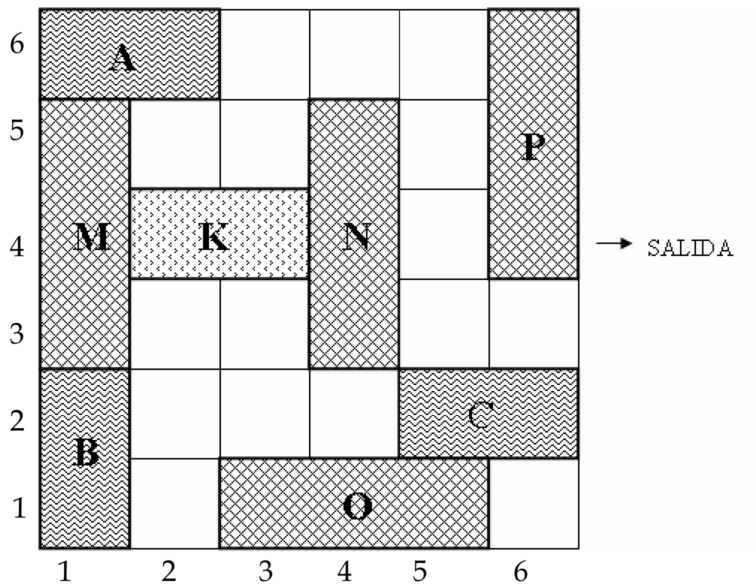
La solución se escribe en tres columnas, en la primera se pone la letra que tiene el juguete que se mueve de la A a la O; en la segunda se coloca el lugar hacia donde de hace el movimiento (S,Y,X,R) y en la tercera se escribe la cantidad de cuadrados que se desplazó el juguete 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Se indica la forma en que se colocan los juguetes para comenzar cada partida de la actividad. Se da el nombre del juguete de la A a la O sin la letra Ñ y se designa su colocación por medio de dos o tres coordenadas, además se recuerda que el único juguete que sale siempre del tablero es el marcado con la letra K.

Se permite que los niños obtengan diversas soluciones y se motiva la participación de los niños para que, ayudados al inicio y entusiasmados después, compartan sus respuestas con el resto de los niños. Para ejemplificar los puntos anteriores se plantea el siguiente ejemplo:

JUEGO DE REFERNCIA:

JUGUETE	COLOCACIÓN
A	[(1,6) y (2,6)]
B	[(1,1) y (1,2)]
C	[(5,2) y (6,2)]
P	[(6,4) , (6,5) y (6,6)]
M	[(1,3) , (1,4) y (1,5)]
N	[(4,3) , (4,4) y (4,5)]
O	[(3,1) , (4,1) y (5,1)]
K	[(2,4) y (3,4)]

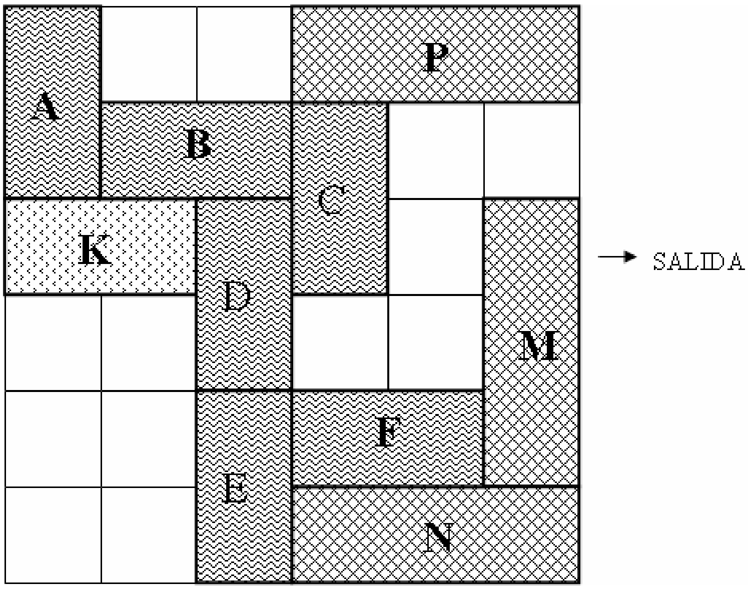


SOLUCIÓN DEL JUEGO DE REFERENCIA: CR3, PY3, AX1, MS1, BS1, OR2, NY2, KX5.

A continuación se da una lista de ejercicios que se propone que haga el alumno (apoyado si es el caso por el profesor), su respuesta se enuncia al lado del diagrama de la posición inicial del juego.

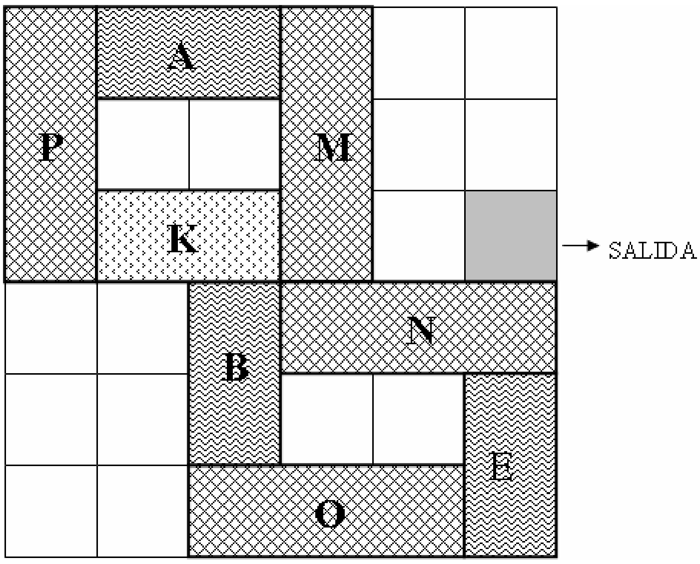
JUEGO 1 PLANTEAMIENTO:

A [(1,5) y (1,6)]
B [(2,5) y (3,5)]
C [(4,4) y (4,5)]
D [(3,3) y (3,4)]
E [(3,1) y (3,2)]
F [(4,2) y (5,2)]
K [(1,4) y (2,4)]
N [(4,1), (5,1) y (6,1)]
M [(6,2), (6,3) y (6,4)]
P [(4,6), (5,6) y (6,6)]



JUEGO 2
PLANTEAMIENTO:

A [(2,6) y (3,6)]
B [(3,2) y (3,3)]
E [(6,1) y (6,2)]
K [(2,4) y (3,4)]
M [(4,4), (4,5) y (4,6)]
N [(4,3), (5,3) y (6,3)]
O [(3,1), (4,1) y (5,1)]
P [(1,4), (1,5) y (1,6)]



JUEGO 3 PLANTEAMIENTO:

A [(3,5) y (3,6)]

B [(4,6) y (5,6)]

C [(2,4) y (2,5)]

D [(1,3) y (1,4)]

E [(5,3) y (5,4)]

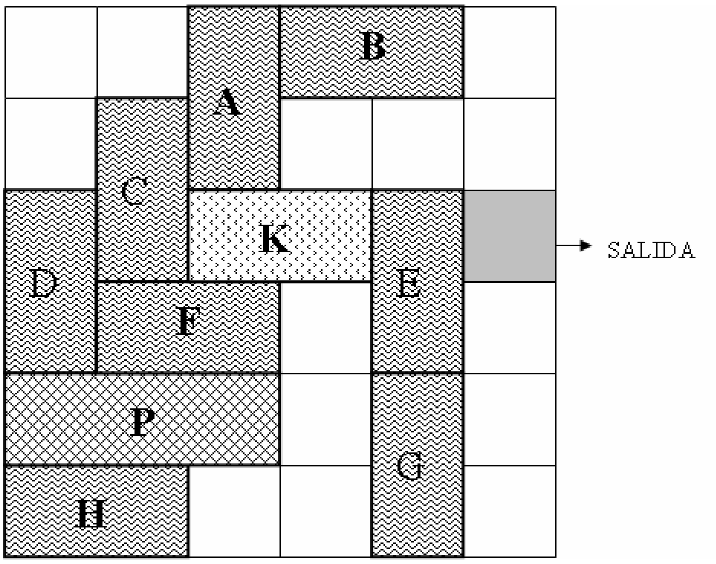
F [(2,3) y (3,3)]

G [(5,1) y (5,2)]

H [(1,1) y (2,1)]

K [(3,4) y (4,4)]

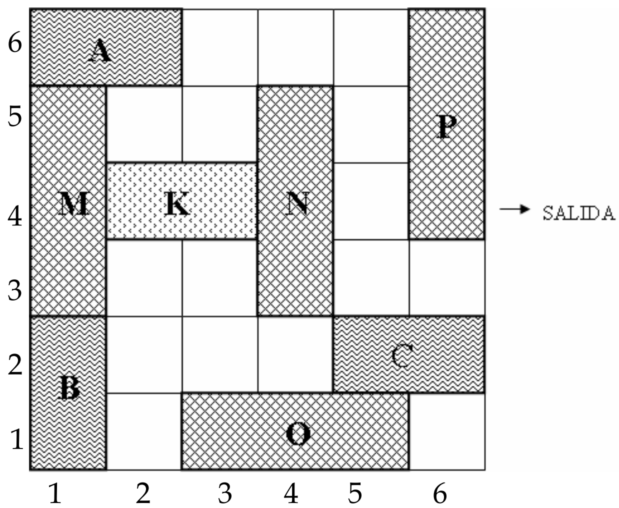
P [(1,2), (2,2) y (3,2)]



RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: Es probable que en los primeros intentos del juego los niños muevan los juguetes sin anotar las respuestas o que se equivoquen al escribir las soluciones, para evitarlo se recomienda que el profesor juegue lo suficiente con ellos, se pide que ayude a anotar en el pizarrón las soluciones que vayan planteando los niños, también ayude a que los jugadores se percaten de cuales son los juguetes que se deben de mover para lograr sacar el carro K del estacionamiento.

La técnica para inducir este razonamiento consiste en preguntarse *¿cuál es el juguete más cercano al carro K que le estorba para que se despeje la salida y éste logre salir?,* luego se pregunta si a éste último carro le estorba a su vez otro para moverse y así sucesivamente.

Ejemplo, en el problema planteado: al carro K le estorban los camiones N y P para salir, al camión P le estorba el carro C y al camión N le obstruye el movimiento el camión O, a éste le estorba el carro B y frente a este se encuentra el camión M que a su vez le obstruye el paso el carro A para moverse.



Entonces el primero en moverse debe ser el auto C, luego el camión P para despejar la salida, seguido del carro A que permitirá que se muevan los juguetes M, B, O y N de forma que dejan libre el espacio para que salga el carro K del estacionamiento.

Una vez que los niños estén totalmente familiarizados con el juego y con la forma en cómo se lleva a cabo, se plantea que realicen la actividad por ellos mismos de esta manera no se les dificultará el razonamiento y la escritura de la solución.

En seguida se escribe algunos problemas que se propone resuelvan los niños con la ayuda del guía de la actividad y con la participación de todos los participantes del juego.

LAS SOLUCIONES PARA LOS JUEGOS QUE SE PLANTEARON SON RESPECTIVAMENTE LAS SIGUIENTES:

PARA EL JUEGO 1

C Y 1 , B X 2, D S 2, E S 2, N R 1, M Y 1, F R 3, C Y 1, E Y 1, K X 6.

PARA EL JUEGO 2
P Y 3, K R 1, B S 2, N R 1, E S 3, O X 1, N X 1, B Y 3, K X 1, P S 3, N R 3, M Y 1, A X 3, M S 1, N X 3, P Y 3, K R 1, B S 4, K X 1, P S 3, N R 3, E Y 2, O R 3, M Y 3, K X 5.

PARA EL JUEGO 3
C S 1, D S 1, F R 1, K R 2, A Y 2, B R 1, E S 2, G S 2, H X 3, P X 3, A Y 2, F X 2, K X 2, C Y 4, D Y 4, F R 2, K R 2, B R 2, A S 4, F X 2, K X 2, C S 2, P R 2, G Y 1, K X 4.

EXTENSIONES O VARIANTES: Después de practicar varias veces la actividad, se puede sustituir los juguetes por fichas que abarquen 2 o 3 cuadrados del tablero según representen a un carro o un camión, estos deben ser iluminados y marcados según se mencionó anteriormente, esto forma el pensamiento abstracto necesario para comprender la sustitución de números por variables, lo cual es fundamental al tratar los problemas algebraicos.

Como ya se mencionó el profesor puede sustituir los nombres de las posiciones hacia donde se debe de mover el juguete, se sugiere que en algún momento emplee las letras N (cuando se quiera que el juguete suba), S (si el juguete tiene que bajar), E (en el caso que se desplace hacia la derecha) y O (cuando se mueva a la izquierda).

CAPITULO VI. CARACTERISTICAS Y ACTIVIDADES PARA EL PERÍODO DE OPERACIONES FORMALES

En la teoría de Piaget, el período final del desarrollo intelectual es el de las operaciones formales, que comienza aproximadamente a los doce años y se consolida durante la adolescencia. Algunas de las características principales de este período son: un pensamiento flexible y eficaz que puede tratar eficientemente los problemas complicados y puede imaginar las muchas posibilidades ante una situación; además puede compensar mentalmente las transformaciones en la realidad otras características se encuentran mencionadas en el capítulo II.

A Piaget le resulta importante comparar el pensamiento de los adolescentes y de los niños, además le interesa estudiar la forma en cómo éstos se enfrentan a problemas científicos, también le interesa saber cómo llevan a cabo experimentos y cómo razonan respecto a los datos observados.

Comparados con los niños de menor edad, los jóvenes del período de las operaciones formales hacen de la realidad algo secundario a la posibilidad, lo cual es importante en el tratamiento de los problemas científicos.

Es decir, Piaget observó que los niños en el período de las operaciones concretas comienzan sus experimentos con escasa intuición y no disponen de un plan detallado para llevarlo a cabo. No considera todas las posibilidades de las respuestas antes de comenzar, en vez de eso, se hayan limitados a tratar con resultados empíricos, con cosas que son accesibles a la percepción inmediata. Los jóvenes del período de las operaciones concretas no consideran las posibilidades en un plano teórico. En vez de eso, trabajan eficazmente con lo concreto y lo real y poseen la capacidad de hacer con cosas nuevas y diferentes a lo que ya ha realizado anteriormente.

Para el adolescente, por el contrario, la posibilidad va unida a la realidad. Confrontando un problema científico, comienza no observando los resultados empíricos, sino pensando en las posibilidades que se hayan implícitas en la situación. Se imagina que podrían ocurrir muchas cosas, que las interpretaciones de los datos podrían ser factibles y que lo que ha ocurrido realmente es sólo una dentro de cierto número de alternativas posibles. Sólo después de haber realizado un análisis hipotético de este tipo, procede a obtener datos empíricos que sirven para confirmar o refutar sus hipótesis. Es decir, basa los experimentos en la deducción de lo hipotético; no se halla limitado solamente por lo observado.

Otros rasgos distintivos son sus habilidades “combinatorias”, pues son capaces de llegar al resultado de un problema tratando con varios métodos que lleven a la buena resolución de éste, entonces las estructuras cognoscitivas del adolescente se desarrollan hasta el punto en donde pueden adaptarse eficazmente a una gran variedad de problemas, y estas estructuras son lo suficientemente estables para asimilar prontamente un cierto número de situaciones nuevas.

Piaget mantiene, sin embargo, que al finalizar la adolescencia, las formas que tiene el individuo de pensar, esto es, sus estructuras cognoscitivas, se hayan completamente formadas. Si bien estas estructuras se pueden aplicar a nuevos problemas con el fin de obtener un conocimiento significativo, las estructuras en sí, sufren muy pocas modificaciones después de la adolescencia. Han alcanzado, en efecto, un alto grado de equilibrio.

Desde luego como ya mencioné en los capítulos II y III, no todos los niños alcanzan dicha estructura mental, pues la obtención de ésta depende de varios factores que menciono más adelante.

El pensamiento del adolescente posee un alto número de factores suplementarios. En primer lugar, "suele ser flexible, luego dispone de un gran número de operaciones cognoscitivas con las que ataca los problemas; las características de las técnicas con que suele resolver los problemas son: identidad, negación, reciprocidad, correlatividad y reversibilidad, con ellas llega a una serie de conclusiones definitivas"[1]. Esto es, el adolescente es versátil en su pensamiento y puede tratar de muchas maneras un mismo problema y desde un gran número de perspectivas.

En segundo lugar es poco probable que el adolescente se sienta confundido ante algunos resultados insólitos, puesto que ha concebido ya de antemano todas las posibilidades de los resultados.

Piaget también detectó que en la esfera intelectual, el adolescente tiene la tendencia a tratar asuntos abstractos y teóricos, en efecto, en el proceso de explotar sus nuevas capacidades, el adolescente pierde a veces el contacto con la realidad y cree que puede resolverlo todo mediante el pensamiento. En la esfera emotiva, el adolescente es capaz de dirigir sus emociones hacia ideas abstractas y no hacia las personas, por ejemplo, si antes solía amar a su madre u odiar a un compañero, ahora es capaz de amar la libertad u odiar la explotación; entonces el adolescente ha llegado a un nuevo modo de vida donde lo posible y lo ideal cautivan al mismo tiempo su mente y sus sentimientos.

¿Cómo se alcanza la etapa de las operaciones formales?, Piaget sostiene que el desarrollo neurológico ocurrido durante la etapa de la pubertad, brinda la base para la formación y el desarrollo de las operaciones formales. Pero los cambios neurológicos no son suficientes: existen culturas cuyos miembros carecen de operaciones formales, pero no, al parecer, del desarrollo neurológico requerido.

---

[1] Si el lector se ve interesado en profundizar en estos términos puede consultar el libro de Herbert Ginsburg, "Piaget y la teoría del desarrollo intelectual" capítulo. 5

En segundo lugar, Piaget afirma que el medio ambiente social juega también un cierto papel (el cual como vimos es un factor importantísimo en la teoría formulada por Vygotski). La educación escolar y cualquier otro tipo de instrucción pueden acelerar o retardar el desarrollo de las estructuras formales.

También es cierto que el nivel de desarrollo intelectual de una determinada cultura puede afectar el desarrollo cognoscitivo de sus miembros. Pero la explicación a base del medio ambiente social no es suficiente, pues no se puede enseñar a un niño de cinco años las operaciones formales: puesto que el individuo debe haber desarrollado estructuras cognoscitivas adecuadas. En otras palabras, el niño tiene que estar preparado para el desarrollo de las operaciones formales, al adquirir las aptitudes del período concreto. Una tercera consideración es que si el adolescente no ha tenido nunca la posibilidad de experimentar con diversos objetos, no desarrolla las estructuras formales.

Y como cuarto y último, pero no menos importante punto, la actividad propia del niño es crucial para este desarrollo, pues cuando el niño se haya en el período concreto operativo intenta aplicar los métodos intelectuales a situaciones complejas en las cuales a veces tropieza, con ciertas contradicciones, y para ello tiene que reorganizar sus operaciones concretas. Los cambios se producen cuando se siente incapacitado para enfrentarse con la realidad actual y entonces reacciona mediante una reorganización interna.

En resumen: en la etapa del pensamiento formal, el adolescente desarrolla las capacidades para imaginar las posibilidades inertes a una situación. Antes de actuar sobre un problema con el que se enfrenta, el adolescente lo analiza e intentan elaborar hipótesis que conciernen a lo que pueda ocurrir. Estas hipótesis suelen ser numerosas y complejas, porque el adolescente toma en consideración de manera exhaustiva todas las combinaciones posibles. A medida que avanza para comprobar sus ideas, diseña experimentos que son eficaces, puesto que apoya algunas hipótesis y desaprueba otras.

El adolescente observa con exactitud los resultados de los experimentos y deduce las conclusiones idóneas, además obtiene ciertas conclusiones, y es capaz de razonar sobre ellas, por tanto, llega a interpretaciones nuevas sobre los resultados obtenidos.

Entonces, el avance cognoscitivo está en función no sólo de un desarrollo neurológico adecuado, sino también de un medio ambiente social idóneo, una experiencia con las cosas y una reorganización cognoscitiva interna. Esta es, por supuesto, una nueva sinopsis que concierne al desarrollo y no, en cambio, una teoría detallada.

Ahora sí, una vez que se conoce la forma en cómo suelen formar sus pensamientos los adolescentes expongo algunas actividades que permiten al profesor introducir algunos temas y conceptos matemáticos.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: TORRES DE HANOI

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: A partir de los 13 años. Se puede aplicar en grupos de 20 a 25 personas, pero se recomienda que se subdividan en grupos de 3 a 4 individuos.

INTENCIONES PEDAGÓGICAS: Promueve las habilidades de ubicación espacial, observación, agilidad numérica, creatividad, abstracción y participación grupal, además ayuda en el fortalecimiento del pensamiento lógico matemático prealgebraico y en la utilización de algunas operaciones aritméticas como la potenciación y sucesiones aritméticas, además estimula la utilización del lenguaje matemático para expresar la solución del problema planteado.

UBICACIÓN HISTÓRICA: El profesor puede plantear la siguiente anécdota en la clase, corresponde a la leyenda sobre las torres de Hanoi[2]: "En el gran templo de Baranés, bajo la cúpula que señala el centro del mundo, reposa una bandeja en la cual están colocadas tres agujas de diamante. En el momento de la creación, Dios colocó en una de las agujas 64 discos de oro puro, ordenadas por tamaños desde el mayor que reposa en la bandeja, hasta el más pequeño, en lo alto de la aguja, es la torre de Brahma[3].

Incansablemente, día tras día, los sacerdotes del templo mueven los discos haciéndolos pasar de una aguja a otra, de acuerdo con las leyes fijas e inmutables de Brahma, que dictan que el sacerdote no mueve más de un disco a la vez, ni lo sitúe encima de un disco de menor tamaño.

Está vaticinado que el día en que los 64 discos hayan sido trasladados de la aguja en la que Dios los posó al crear el mundo, a otra aguja, ese día, la torre, el templo y todos los brahmanes se derrumbarán quedando reducidos a cenizas y con gran estruendo, el mundo desaparecerá"[4]. ¿Se podrá calcular el día en que desaparecerá el mundo según lo que plantea la leyenda? Se invita a que lo averigüemos.

MATERIAL: Se requiere de tres estacas de madera o varillas que se encuentren colocadas perpendicularmente sobre una superficie plana, y también una serie de discos apilados de diámetros decrecientes, perforados en el centro, con los cuales se formarán las torres que pueden estar hechas desde 5 hasta 64 discos.

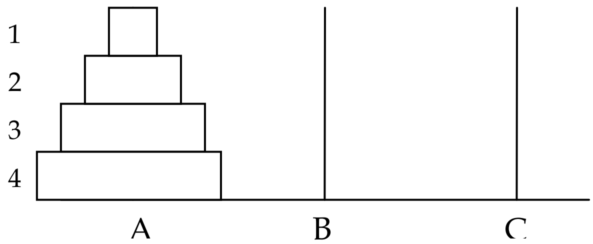
---

[2] Hanoi es la capital de Vietnam desde su reunificación como país en 1975 y se encuentra a orillas del río rojo al sureste de Asia.

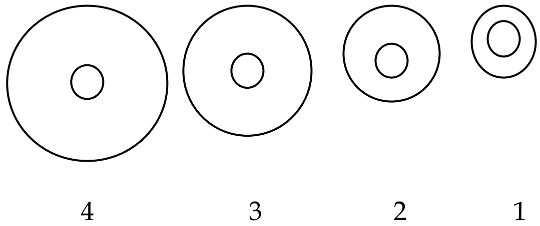
[3] Brahma es uno de los principales dioses del panteón hindú, se le concibe como el primer ser creado y creador de todas las cosas, suele representarse con cuatro rostros y cuatro brazos, símbolos de su omnisciencia y de su omnipresencia.

[4] Ruiz Ruiz-Funes, Concepción, de Regules Ruiz-Funes, Sergio, "El piropo Matemático", pág. 23

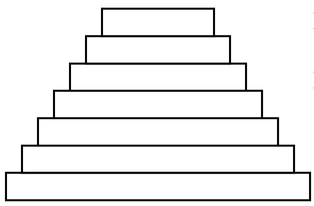
Este juego se ofrece en una versión comercial, hecho de material de plástico, pero se puede sustituir por una sucesión de monedas de diversos diámetros sobrepuestas una sobre la otra formando la pequeña torre y un cartón con tres círculos dibujados con el diámetro ligeramente más grande que el de la moneda mayor; libreta, lápices, gis y pizarrón.



Estacas de madera con los discos colocados formando una torre de 4 discos vista de canto



Discos de la torre vistos desde arriba y colocados uno al lado del otro para comparar su tamaño



Aproximación de la vista de canto de las siguientes:
Moneda de 10 centavos
Moneda de 1 peso
Moneda de 50 centavos
Moneda de 2 pesos
Moneda de 5 pesos
Moneda de 10 pesos
Moneda de 20 pesos

PROCEDIMIENTO: Después de que el profesor plantee la leyenda en la clase se invita a que el grupo participe para calcular cuánto tiempo se llevarían los sacerdotes en desplazar la torre completa, una vez que se logra tener la atención de los estudiantes, se presenta el material y se plantea la actividad como sigue.

El juego consiste en pasar todos los discos que están acomodos de mayor a menor en uno de los tres postes o estacas, a uno de los dos postes vacíos restantes, siguiendo estas reglas:

- Se pueden utilizar las 3 estacas para pasar los discos de la torre, ya que no se deben retener discos en la mano, ni apoyarlos en ningún otro lado que no sea en una de las estacas.
- Sólo se puede mover un disco a la vez.
- No se vale que quede un disco grande sobre uno más pequeño.
-

Hay además dos reglas de algún modo complementarias, que se pueden plantear, pero que de ningún modo son indispensables para la realización de la actividad.

- Es necesario llevar la torre a una estaca determinada (esto es, no a cualquiera de las otras dos disponibles).

- Hay que realizar la tarea en una cantidad mínima de movimientos (existen, para las diferentes torres de 2, 3, 4, y 5 o más discos, números mínimos de traslados para tener éxito, pero también se logra trasladar la torre con desplazamientos innecesarios).
-

Resulta una buena idea presentar un modelo frente al grupo ya sea mostrando el juego físicamente o bien dibujándolo en el pizarrón y fomentando la realización con diversos materiales por parte de los alumnos. La torre de Hanoi es un juego individual, en el sentido de que participa una persona por vez o turno, pero no excluye al equipo para hacerle consultas.

Posterior a la creación del material se puede comenzar a jugar en forma "inductiva", esto es, se puede comenzar a realizar el desplazamiento de las torres tomándolas con pocos discos y observando los resultados, con tal motivo se invita a que el alumno haga una tabla en la que en la primer columna escriba el número de discos que mueve y en la segunda el número de movimientos que empleo para desplazarlos. Mover los discos sin seguir un orden entre ellos para desplazarlos da origen a muchos resultados distintos entre los listados de los alumnos.

Por otro lado es importante aclarar al alumno que el tiempo que se emplea para desplazar la torre está en función del mínimo número de movimientos necesarios; por ejemplo si una torre de 3 discos se desplaza en 7 movimientos mínimos y suponiendo que se tarda 1 segundo en cambiar de lugar cada disco, entonces la torre de 3 discos tarda 7 segundos en ser trasladada.

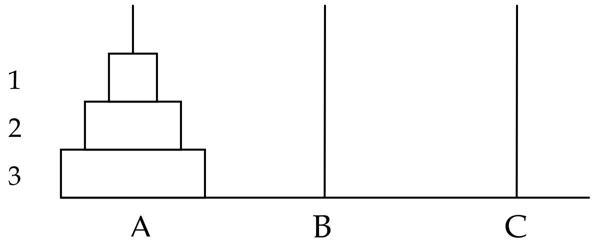
Por eso es importante primero conocer el mínimo número de movimientos para cada torre, en particular en el caso de la leyenda nos interesa saber el número de movimientos mínimos necesarios para desplazar la torre de 64 discos. Para deducir este número se requiere desplazar correctamente los discos pues de lo contrario se contarán movimientos innecesarios.

La forma en que se deben desplazar los discos para obtener el mínimo número de pasos es el siguiente:

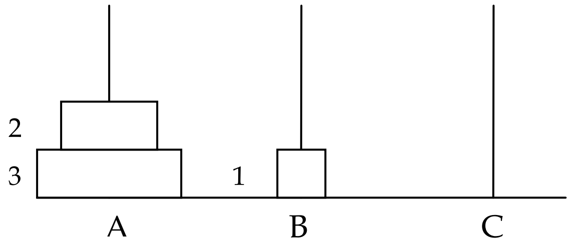
1.- Se toma el disco de menor diámetro y este siempre se desplazará hacia el mismo lado, derecha o izquierda, respecto a alguna de las estacas, para esto se sugiere que el alumno tenga siempre presente el último desplazamiento que realizó el disco.

2.- Los movimientos de los discos deben intercalarse, es decir, después de mover el disco de menor diámetro, se debe mover otro de los discos restantes hacia la estaca que convenga, no importa cual sea, siempre que no se encime este disco sobre uno de menor diámetro comparado con él, esto con el fin de no estar en contra de la tercera regla del juego.

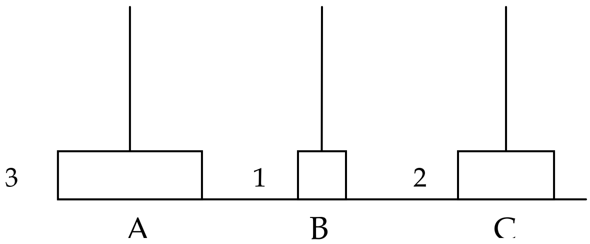
Un ejemplo de lo último es el siguiente que se efectúa con una torre de 3 discos:



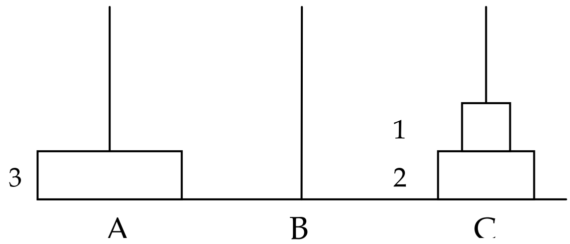
Torre de 3 discos



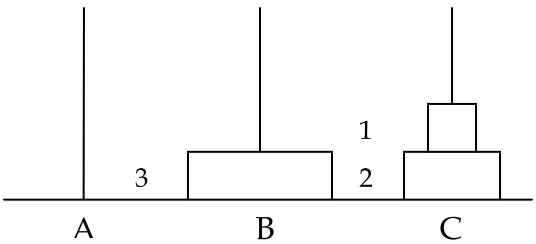
Se mueve el disco 1 a la derecha de la estaca A



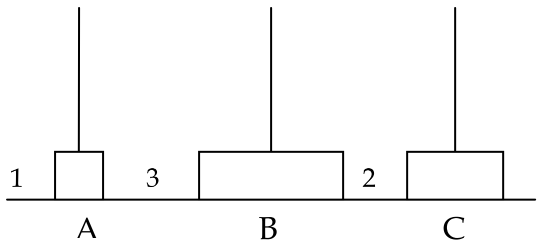
Se mueve el disco 2 a la estaca C y no sobre el disco 1 para no ir contra la tercera regla



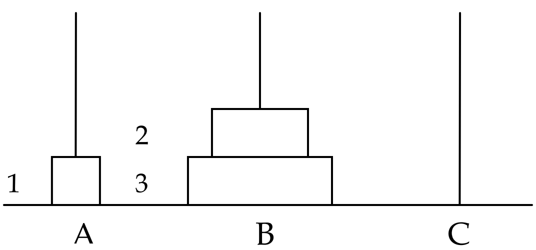
Se mueve el disco 1 a la derecha



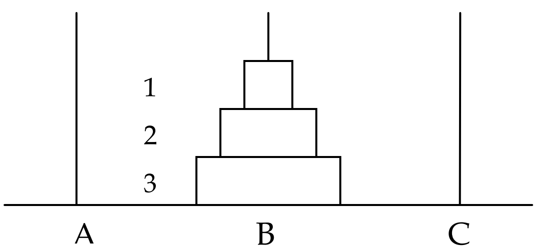
Se mueve "la base de la torre", es decir, el disco 3



Se mueve el disco 1 a la derecha y como ya no hay estaca después de la indicada por la letra C, entonces se comienza de nuevo con la nombrada con la letra A



Se mueve el disco 2 sobre el 3 y no sobre el disco 1 para evitar contradecir la tercera regla del juego



Se mueve el disco 1 sobre el disco 2 y así se termina de armar la torre de 3 discos

Esta forma de mover los discos indica que si la torre sólo tiene un disco, entonces basta un movimiento para cambiarlo de estaca. Si la torre tiene dos discos, entonces bastan tres movimientos para cambiar los discos a otra estaca. Si la torre tiene tres discos, entonces son necesarios siete movimientos para cambiarla de lugar, los resultados anteriores debe anotarlos el profesor en el pizarrón y los alumnos en sus libretas, para después plantear la siguiente pregunta: ¿Cuántos son los mínimos movimientos para las torres de cuatro, cinco o más discos?, entonces el profesor ahora sólo debe servir de espectador y en ocasiones de guía para ir orientando los movimientos de las torres de los alumnos y ayudarles a llegar a la fórmula general que da la respuesta al planteamiento propuesto en la ubicación histórica.

Para ayudar a los alumnos a deducir matemáticamente la fórmula general que indica el mínimo número de movimientos necesarios para desplazar las torres, se debe observar lo anotado en el pizarrón:

Torre de 2 discos	3 movimientos mínimos
Torre de 3 discos	7 movimientos mínimos
Torre de 4 discos	15 movimientos mínimos
Torre de 5 discos	?

Y luego reflexione con el grupo lo siguiente: para pasar del número 3 al número 7 se suma 4; para pasar del número 7 al número 15 se suma 8. Cuatro se puede escribir como 3+1; ocho se puede escribir como 7+1. Luego pruebe empíricamente, moviendo los discos que 15+15+1 =31 es el número mínimo de movimientos que corresponde a la torre de 5 discos. La torre de 6 se obtiene con 31+31+1 =63 movimientos mínimos. Y que para la de 7 es 63+63+1 =127.

Entonces haga un listado en el pizarrón semejante al siguiente:

Torre de 2 discos	3 = 2 + 1
Torre de 3 discos	7 = 3 + 3 + 1
Torre de 4 discos	15 = 7 + 7 + 1
Torre de 5 discos	31 = 15 + 15 + 1
Torre de 6 discos	63 = 31 + 31 + 1
Torre de 7 discos	127 = 63 + 63 + 1

¿Qué dirán los alumnos si se les pregunta por la torre que tiene 10 discos?, ¿Hay alguna manera de encontrar la ley general, para cualquier número, sin necesidad de llegar paso a paso? Quienes estén familiarizados con las potencias sucesivas del número 2 (4, 8, 12, 32, etcétera) tal vez nos hagan la observación de que 3 = 4 – 1; 7 = 8 – 1; y que 15 = 16 – 1.

Otra forma de escribir los resultados anteriores es la siguiente:

Torre de 2 discos:	$4-1=2^2-1$
Torre de 3 discos:	$8-1=2^3-1$
Torre de 4 discos:	$16-1=2^4-1$
Torre de 5 discos:	$32-1=2^5-1$
Torre de 6 discos:	$64-1=2^6-1$
Torre de 7 discos:	$128-1=2^7-1$

El razonamiento anterior es el que se debe emplear ya que de continua experimentando con las torres de 8 y 9 discos se observa que se sigue cumpliendo la regla, es decir, para 15 discos la solución consiste en elevar 2 a la potencia 15 y restar 1.

Torre de 15 discos: $2^{15}-1=32768-1=32767$

La expresión matemática general la obtienen los jóvenes si saben o aprenden que una letra cualquiera representa un número también arbitrario, es decir, si n representa a cualquier número, entonces:

La torre de n discos necesita: 2^n-1 movimientos.

Los cálculos con los números un poco más grandes que los anteriores se pueden hacer sin calculadora; pero empleando la máquina todo resulta más fácil. También es probable que los alumnos más curiosos y capaces quizás intenten buscar la razón estructural de estos resultados, entonces se sugiere que ayude a los alumnos a razonar lo siguiente:

La torre de 2 discos requirió de 3 movimientos. La torre de 3 necesita tres movimientos iniciales para mover los dos discos superiores y después un movimiento más para movilizar la base. Una vez colocada la base en otra estaca se requieren otros tres movimientos para regresarlos a su lugar, en total 3 + 3 + 1 movimientos.

Así compruebe que:

$3=2^2-1$ y que la torre de 3 discos exige 3 + 3 + 1 movimientos.

Un reemplazo matemático brinda la ocasión de poner 2^2-1 en lugar de 3, entonces, después de efectuar las sustituciones nos queda:

$$3+3+1=\left(2^2-1\right)+\left(2^2-1\right)+1=2^2-1+2^2\left(-1+1\right)=2^2+2^2-1=4+4-1=(2\times 2^2)-1=2^3-1$$

No es una casualidad, pues lo mismo se puede repetir para cualquiera de los números analizados. Un ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&7+7+1=15\\
&(8-1)+(8-1)+1=15\\
&(2^3-1)+(2^3-1)+1=15\\
&2^3+2^3-1+(-1+1)=15\\
&2^3+2^3-1=15\\
&(2\cdot2\cdot2)+(2\cdot2\cdot2)-1=15\\
&2(2\cdot2\cdot2)-1=15\\
&(2\times2^3)-1=15\\
&2^4-1=15
\end{aligned}
$$

Entonces el número de movimientos necesarios para que se cumpla la profecía que se cita en la leyenda de la torre de Hanoi, es:

$$2^{64}-1=18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \quad \text{movimientos}$$

Y suponiendo que los sacerdotes realicen un movimiento por segundo y trabajen las 24 horas del día, durante los 365 días del año (tomando en cuenta los años bisiestos), tardarían 58,454,204,609 siglos más 6 años en concluir la obra, siempre que no se equivoquen, pues un pequeño descuido podría echar a perder todo los movimientos hasta entonces realizados. Como problemita se invita al lector a pensar la forma en que se deduce el resultado que se acaba de enunciar.

RESPUESTAS ESPERADAS O SOLUCIÓN: No todos los alumnos llegan a resolver el problema en forma inductiva, hay ocasiones en las que se sienten abrumados por la forma en que se tienen que desplazar los discos pues algunos de ellos llegan a costarles trabajo adoptar el razonamiento correcto para moverlos.

Para evitar que el alumno abandone la actividad o se desespere se sugiere que permita el intercambio de ideas entre los jóvenes y que escuche con atención los comentarios que desee compartir con el grupo, de manera que pueda de ellos rescatar información que sea de utilidad para resolver el problema que plantean las torres de Hanoi.

En todo momento se debe tener paciencia y aclarar las dudas de los alumnos de forma que sean capaces de resolver algunas jugadas por ellos mismos en posteriores aplicaciones del juego.

Por otro lado la solución a la forma en que se tienen que desplazar los discos de la torre de Hanoi para obtener el mínimo número de movimientos se explicó a lo largo del procedimiento, pero si el lector gusta observar una demostración de este juego puede acudir al Museo de las Ciencias UNIVERSUM en la sala de Matemáticas.

EXTENSIONES O VARIANTES: Se puede aplicar el juego de la torre de Hanoi con niños de menor edad a la que se indicó, pero claro que la información que se maneje tendrá que modificarse, pues los objetivos que desee rescatar depende de las actividades que con ella se realice; por ejemplo, en la aplicación de las torres de Hanoi a nivel preescolar, se puede diferenciar los distintos tamaños de los discos de la torre de manera que se forme con ellos una hilera donde se acomodarán los discos desde el más grande hasta llegar al más pequeño, también se puede pedir a los niños que intercalen los tamaños de las hileras colocando un disco grande seguido de uno de mayor tamaño y posteriormente otro disco más grande que el anterior y así sucesivamente.

También pueden ayudar a que los niños cuenten ya sea los discos que integran la torre o los pasos necesarios para mover una torre de por ejemplo 5 o 6 discos, esto reafirma su aprendizaje de la sucesión numérica de los números naturales.

A partir del cuarto año de primaria la aplicación de este juego debe promover el manejo de la intuición y de la lógica que se basa en deducciones a partir de la experiencia al mover los discos de una estaca a la otra, pues los niños de este nivel escolar ya son capaces de notar que para mover la torre que está hecha de 3 discos, es necesario desplazar primero una torre con 2 discos.

Antes de comenzar la siguiente actividad quiero notar que he omitido algunas de las características que se presentan en las actividades anteriores, con el fin de respetar el derecho de autor del siguiente taller; ya que éste fue elaborado por Diana Maya Padilla y se aplicó en el Museo de Ciencias UNIVERSUM en Mayo de 2005, lo elegí pues considero contiene justo lo que se requiere para promover el pensamiento lógico matemático enfocado a la introducción del adolescente en el álgebra.

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD: ROMPECABEZAS CON PIEZAS ESCONDIDAS

EDADES Y NÚMERO DE PARTICIPANTES: Para personas mayores de 15 años. Se recomienda se apliquen a grupos de 10 a 15 personas para formar equipos de 3 integrantes.

“**Título del Taller:** Rectángulos mágicos.
Autor: Diana Maya Padilla
Dirigido a: Público mayor de 15 años.
Duración: 1 hora.

Habilidades que promueve: Ubicación gráfica, observación, agilidad numérica, creatividad y abstracción. Introducción al álgebra de Diofanto.

Introducción histórica: Un divertido problema, planteado por el belga Peter Raedshelders, aparece en la revista Recreational Mathematics (Matemática Recreativa) en 1992: ¿cuándo es posible formar un rectángulo con otros de la forma 1x2, 2x3, 3x4,..., n x (n+1) de tal manera que se tome sólo uno de cada tamaño? Para el caso n=4 y n=5 el problema parece sencillo de resolver, se arman los rectángulos 10x4 y 8x5 con cuatro piezas y el de 14x5 con cinco Sin embargo, con los primeros seis rectángulos consecutivos no es posible llenar rectángulo alguno, pues aunque la suma de sus áreas es 1x2 + 2x3 + 3x4 + 4x5 + 5x6 + 6x7 = 112 y 112 es el área de los rectángulos 16x7 y 14x8, no hay manera de armarlos, pues las regiones que quedan después de colocar la pieza de 6x7 no se pueden cubrir con los cinco rectángulos restantes. En la misma revista, en su edición de 1993, se muestran los rectángulos formados con siete, ocho, once, trece y catorce de estas singulares piezas, sin mencionar nada sobre los casos de nueve, diez y doce piezas. La pregunta general sigue aún abierta sin una solución contundente.

Entre los rectángulos que se pueden llenar con rectángulos consecutivos, hay unos que resultan ser nuevamente consecutivos, como es el caso del rectángulo de 4x5 tapizado con las piezas de 1x2, 2x3 y 3x4 o el de 15x16 donde se utilizan los ocho primeros de estas piezas. Si el problema anterior se restringe a la siguiente interrogante ¿cuándo es posible llenar un rectángulo consecutivo con otros de la misma forma tomando sólo uno de cada tamaño? Tal como la plantea Edward Onstott en 1997 en la misma revista, el problema de armado parece tener un mejor futuro que la anterior.

Cuando un rectángulo consecutivo de tamaño *m x (m+1)* es cubierto por *n* rectángulos también consecutivos, ocurre necesariamente que la suma de las áreas de las piezas han igualado el área del rectángulo formado por ellos. Sucede así la siguiente ecuación con incógnitas *n* y *m*. *1x2 + 2x3 + 3x4 +... + n x (n+1) = m x (m+1).*

Las singulares piezas de lados *n* y *n+1* (enteros y positivos) reciben el nombre de *rectángulos consecutivos.* Algunos problemas interesantes que tienen que ver con este tipo de acertijos aún están abiertos y se invita a que el lector los investigue y resuelva en la clase.

Resumen: A partir de la formación de un rompecabezas rectangular con piezas del mismo tipo aunque de distintos tamaños, se conduce al joven para que observe estrategias geométricas de armado, descubra las propiedades geométricas de las piezas como rectángulos consecutivos, interprete el llenado del rompecabezas a un lenguaje aritmético mediante el uso de longitudes y áreas, y analice ya con un lenguaje algebraico, por qué estas piezas mágicas logran cubrir el rectángulo mayor. Este problema es una adaptación para taller de uno planteado hace siglos en el estudio de las ecuaciones diofantinas[5].

Lo que se pretende: Fortalecer el pensamiento algebraico de los jóvenes de nivel preparatoria, partiendo de su conocimiento gráfico sobre el armado de rompecabezas y la utilización de operaciones aritméticas.

Lo que vamos a necesitar: Por cada equipo de cuatro jóvenes se requieren:

a) Dos marcos de 4x5 cm, otros dos de 15x16 cm y uno de 55x56 cm. Todos los marcos necesitan ser elaborados de material rígido como madera, cintra o foamy grueso y tener un canal de 2 mm en la parte inferior para poder deslizar y colocar hojas de cartón.
b) Dos conjuntos de tres plantillas de dimensión 15x16 cm y otros dos de cuatro plantillas de 55x56 cm, realizados con cartón o fibracel en tonos grises.
c) Dos conjuntos de veinte piezas rectangulares, fabricadas sin color adicional sobre alguno de los materiales rígidos sugeridos arriba y en las cuales se ha indicado el número con la longitud de cada uno de sus lados (sólo en una de las caras y sin la indicación "cm"). Las dimensiones, en centímetros, de los rectángulos son 1x2, 2x3, 3x4, 4x5, 5x6, 6x7, 7x8 y 8x9, 9x10, 10x11, hasta el de tamaño 20x21. En el apartado de ilustraciones se muestran los marcos, la serie de plantillas y las piezas marcadas.
d) Dos calculadoras grandes, una para cada pareja, cuatro hojas de papel blancas y cuatro plumas de cualquier color.
e) Dos juegos de tablas de llenado de datos. Cada juego consiste de dos hojas tamaño carta previamente impresas, una con una tabla para el llenado de las áreas de los distintos rectángulos del rompecabezas *D* y otra para señalar los casos en que la suma de estas áreas coincida con la del algún otro rectángulo consecutivo (cuya definición se precisa en el glosario). Ambas tablas se muestran en la parte de ilustraciones.

[5] Estas ecuaciones se caracterizan por tener la siguiente forma: $ax + by = c$ donde a, b y c son los coeficientes enteros y las soluciones para x e y también son números enteros, este tipo de ecuaciones también se les conoce con el nombre de lineales en dos variables y fueron inspiradas a los algebristas árabes y posteriormente a los del renacimiento por el matemático griego Diofanto que vivió en Alejandría entre el siglo II a.C. y el siglo IV d.C.

f) Una bolsa de plástico formando un paquete en el que se incluye las ocho veinte piezas en foamy delgado, un par de plantillas de 15x16 en papel bond y copias de ambas tablas.

Los muchachos trabajarán sentados frente a una mesa. Se sugiere que el adulto conductor del taller, guíe el trabajo de veinte jóvenes aproximadamente.
Introducción: La resolución de problemas puramente geométricos puede llevarnos sin más al descubrimiento de leyes algebraicas clásicas en la historia matemática. En el camino por descubrir el armado de un singular rompecabezas, cuyas piezas guardan una relación aritmética, nos encontramos con conceptos comunes como el de operar con suma y producto, con lo que se logra construir un análisis aritmético del problema. Casi con un lenguaje sencillo se pude comprender por qué rectángulos consecutivos pueden llenar otro más grande del mismo tipo. La repercusión geométrica del tema, nos permite comprobar de manera física ese entendimiento abstracto y fijar mejor en nuestra mente los conceptos básicos de los cuales echa mano.

Procedimiento:

1. A cada equipo de cuatro personas se les indica trabajar en pareja durante esta primera fase y se les dota, a cada par de ellos, de un marco del rompecabezas *C* (de 15x16 cm), la plantilla número *1* de la serie y las primeras ocho piezas. Se les instruye para armar el rompecabezas colocando las piezas adecuadas en los espacios en blanco y haciendo casi omiso de los números pintados en cada una. Más aún, se solicita trabajar las piezas del lado no graduado. Continua así la práctica con las plantillas siguientes del rompecabezas, las cuales aparecen con cada vez más rectángulos en blanco. Si el conductor del taller observa una resolución rápida del problema planteado, se puede optar por pasar directamente a la plantilla que aparece completamente en blanco bajo las mismas indicaciones de llenado.
2. De la misma manera se les pide armar el rompecabezas *D* (de 55x56cm) trabajando, de aquí en adelante, con las veinte piezas rectangulares y en equipos de cuatro personas. No hay que preocuparse si aparecen distintas maneras de armar el rompecabezas, pues hay al menos ocho formas diferentes de hacerlo.
3. Se les invita a observar qué tipo de piezas están manejando, a través de la relación que guardan los lados en cada rectángulo y la que resulta de tomarlos por parejas. Para eso se les pide voltear las piezas del rompecabezas armado mostrando los números marcados en ellas.
   Se da la definición de rectángulos consecutivos en la manera que surja de ellos. Los conductores pueden motivar alguna construcción geométrica que muestre la identificación entre los lados que miden lo mismo. Puede ser una pirámide con las piezas encimadas, de la más grande a la más pequeña, identificando los lados correspondientes.

Por ejemplo, podemos encimar el rectángulo de 20x21 al de 19x20 haciendo coincidir el lado que mide 20, el 18x19 al 19x20 compartiendo el lado de longitud 19 y continuar así hasta encimar el 3x2 al 1x2 justo sobre el lado de longitud 2. Se observa que esta peculiar pirámide tiene un solo camino para bajar sus escalones de uno en uno. Muestro un dibujo de la pirámide vista desde superior y lateralmente, utilizando sólo las primeras ocho piezas. También se observa otra figura plana en donde se han pegado por parejas los lados de las piezas con la misma longitud. Se sugieren similares formas para el conjunto de veinte piezas.

4. Se pregunta también sobre las dimensiones del rectángulo de la plantilla y la relación con los que lo cubren. Para saber cuánto mide cada lado de la plantilla, es necesario sumar los lados de las piezas en ambas direcciones, horizontales y verticales. Para saber cuál es el área de ésta, tendrán que sumar las áreas de las piezas por lo que la operación del producto también surgirá. Se estimula a escribir en las hojas en blanco las sumas y productos involucrados. Discutirán primeramente en equipos para posteriormente hacer una reflexión comparativa en el grupo de los resultados.
5. Se les piden las áreas de las piezas y plantillas (agrupadas en la ***Tabla I***, la cual deberán llenar por parejas) y se les sugiere un proceso aditivo de las áreas de las piezas, para saber en qué casos la suma total coincide con el área de un rectángulo consecutivo más grande de alguna plantilla. Se fija la idea mediante el llenado de la ***Tabla II*** y se establece la conclusión ante el grupo: *las piezas rectangulares forman un rompecabezas rectangular consecutivo cuando la suma de sus áreas es el área de algún rectángulo consecutivo más grande*.
6. Se les pregunta sobre la fórmula que representa el área del rectángulo consecutivo de tamaño $nx(n+1)$ y aquella que representa la suma de los primeros m rectángulos consecutivos, para llegar a plantear la ecuación que representa el llenado del rompecabezas.
7. Se les reparte por persona un pequeño paquete con un rompecabezas: plantillas, piezas y tablas, con la finalidad que puedan seguir buscando más rompecabezas de este tipo.

Comentarios y preguntas sugeridas: El orden del taller puede atenderse a través de las siguientes interrogantes dirigidas al público participante. Las anotaciones en cada parte pretenden contribuir a una mejor conducción del trabajo.

1. *Observen el siguiente rectángulo (o plantilla), colóquenlo en el marco ¿Pueden llenarlo con las ocho piezas (o veinte si se trata del rompecabezas D) que tienen al lado?* Esta pregunta es la misma para todas las plantillas de ambos rompecabezas.

2. *¿Cómo acomodarían las piezas para llenar el rectángulo grande cuando la plantilla está totalmente (con algunas partes) en blanco? Hasta aquí se trabajan con las piezas sin considerar los números que indican la longitud de sus lados, de preferencia se usarán del lado de las caras no marcadas. Una estrategia que se espera vayan descubriendo, es acomodar primero las piezas grandes llenando el ancho y el largo de la plantilla.*
   Analicemos las piezas del rompecabezas ¿qué figuras son? ¿cómo son sus lados? ¿hay alguna relación entre los lados de cada pieza? Se puede dar el nombre de rectángulos consecutivos y se sugiere usar aquí las veinte piezas del rompecabezas D volteándolas por el lado que están marcadas.
3. *¿Hay alguna relación entre las piezas del rompecabezas? ¿Pueden dar una construcción geométrica en donde vayan identificados (pegados) todos los lados que coinciden? Se dan más adelante, en la parte de ilustraciones, dos posibles maneras de mostrar las coincidencias entre los lados, aunque se deben motivar todas las que salgan de los niños. La idea aquí no es que memoricen la construcción, sino que fijen como quieran la relación entre los lados de los rectángulos consecutivos. Nótese que los rectángulos consecutivos aparecen todos en forma consecutiva para formar el rectángulo de la planilla de 55x56, es decir, están presentes el 1x2, el 2x3 y todos los siguientes hasta el 20x21. Por tanto, cualquier construcción geométrica que muestre la coincidencia de los lados será de una sola pieza, no de varias partes despegadas.*
4. *¿Cuánto miden los lados del rectángulo de la plantilla? ¿de qué tipo es éste?* Para decir que la plantilla también es un rectángulo consecutivo, es necesario *sumar* los lados de los rectángulos que la cubren, por lo que se recomienda iniciar a trabajar con el rompecabezas usando las piezas del lado marcado con números y esperar un poco para que sea a ellos a quienes se les ocurra empezar a operar.

5. *Si el rectángulo de la plantilla mide 55 cm de un lado ¿qué significa que hayan entrado las piezas en la plantilla? ¿qué pasa si medimos este lado en la parte derecha? ¿y en la izquierda? ¿y si medimos en medio?* La sugerencia aquí es motivar que escriban en la hojas blancas las sumas de las cantidades que dan por resultado 55, para eso pueden ayudarse de la calculadora. Con esa idea, se espera que escriban 15+19+21=55, 18+17++8+12=55 o 18+10+8+4+15=56, por ejemplo. Es importante pedir a los chicos escriban el signo de "=" para generar expresiones completas y plasmar así la frase 15+19+21 = 18+17++8+12 = 18+10+8+4+15 = 55 que corresponde a las longitudes de los rectángulos formando el lado de la plantilla. *¿Y qué ocurre con el otro lado, el que mide 56?*

6. *¿Qué relación hay entre el área de la plantilla y las de sus piezas?* Se motivará la escritura de la igualdad: 55x56 = (1x2) + (2x3) + (3x4) + (4x5) + ...+ (19x20) + (20x21).

7. *¿Cuánto vale el área de estos rectángulos especiales a los que les llamamos consecutivos? Llenen por favor la Tabla I. ¿Cuál es la fórmula que representa el área del rectángulo de lados n y n+1? Colóquenla al final de la tabla.* Se espera aquí sin mayor dificultad la respuesta $n(n+1)$.

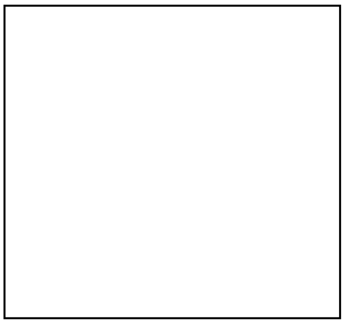
8. *¿Cuánto es la suma de los rectángulos consecutivos? Por ejemplo ¿de los primeros dos? ¿y de los primeros tres? ¿cuánto vale las suma de las primeras ocho piezas con el que armaron el rompecabezas pequeño?* Se les solicita llenar la primera columna de la *Tabla II*, para lo cual pueden hacer uso nuevamente de la calculadora. *¿y cuál es la suma de los primeros m rectángulos consecutivos? Propónganla en la parte de atrás de la Tabla II.* Después de discutir en los equipos de cuatro miembros, se puede hacer un análisis comparativo de las propuestas ante el grupo, para intercambiar argumentaciones. No debe tardar demasiado en surgir la expresión $1x2 + 2x3 + \ldots + m(m+1)$.

9. *¿Es cierto que puedo armar un rompecabezas del tipo rectangular consecutivo con sólo dos de estas piezas? ¿y con cinco?* Se recomienda que intenten armar uno con cinco piezas *¿Por qué no se puede? ¿qué tal con las tres primeras piezas?* Después de que lo intentan y comprueben que sí es posible, se interroga comparativamente *¿qué cumple el de tres que no cumple el de cinco?* La intención es motivar que los chicos establezcan que la suma de las áreas de las piezas da el área de un rectángulo consecutivo. Se pueden sugerir ideas como *¿la suma de las primeras tres piezas es alguna de las áreas de nuestra lista en la Tabla I?* Se les presenta el rompecabezas *A* de lados cuatro por cinco. *¿Y la suma de las primeras cinco piezas, 70, es área de algún rectángulo consecutivo? ¿y la suma de las primeras siete? ¿y la de ocho?* Establecemos la conclusión: *Las piezas rectangulares forman un rompecabezas rectangular consecutivo más grande cuando la suma de sus áreas es el área de este rectángulo consecutivo cuya lista está dada en la Tabla I.* Solicitamos completar la *Tabla II*. *¿y cómo plantearían esta condición en lenguaje algebraico? ¿qué fórmula darían?* Se motiva la igualdad entre la suma de áreas de las piezas ($1x2 + 2x3 + \ldots + m(m+1)$) y el área de otro rectángulo consecutivo más grande $n(n+1)$, para concluir la famosa ecuación diofantina que dio origen al rompecabezas: $1x2 + 2x3 + \ldots + m(m+1)=n(n+1)$.

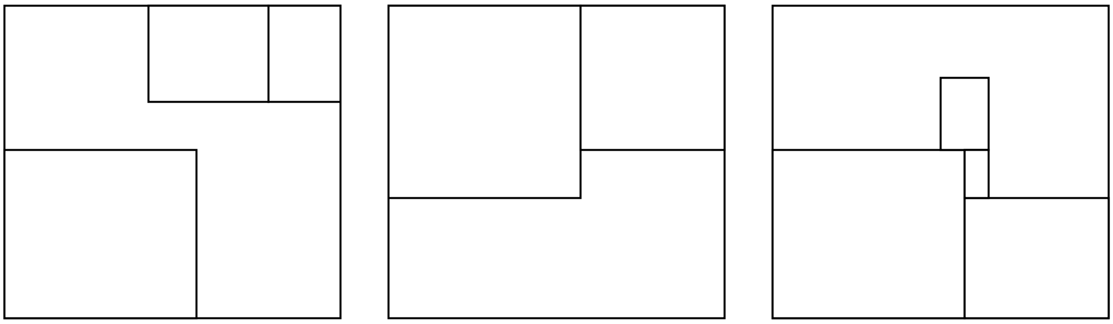
10. Para concluir, se les da a cada persona un paquete en el que incluye un rompecabezas de ocho piezas, un par de plantillas y copias con ambas tablas, con la finalidad que puedan seguir buscando más rompecabezas de este tipo.

Dibujos e ilustraciones:

Marco para los rompecabezas *C* (15x16) y *D* (55x56) con la plantilla completamente en blanco.

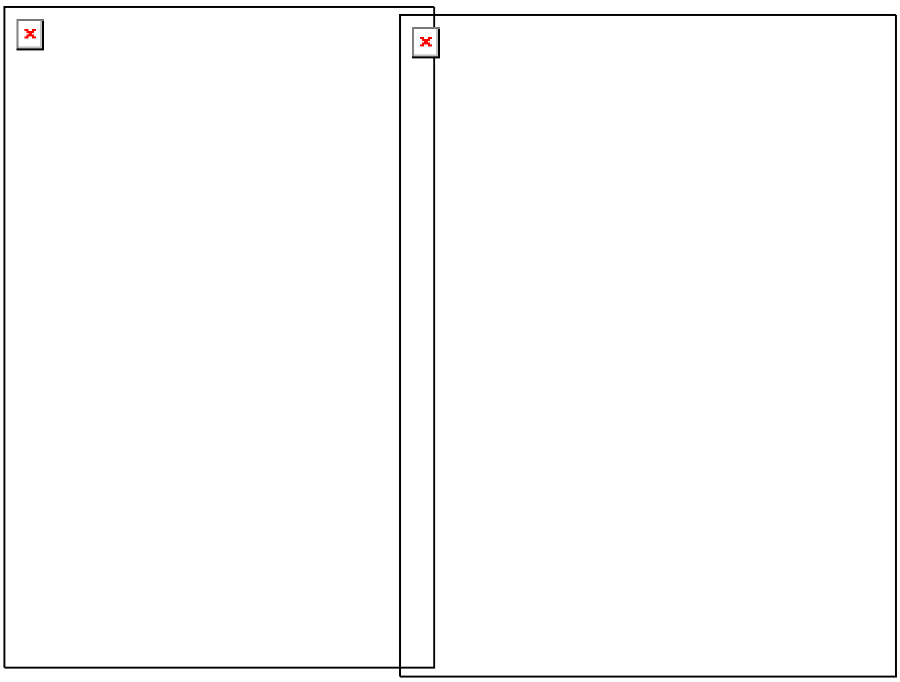


Serie de plantillas del rompecabezas *C*.



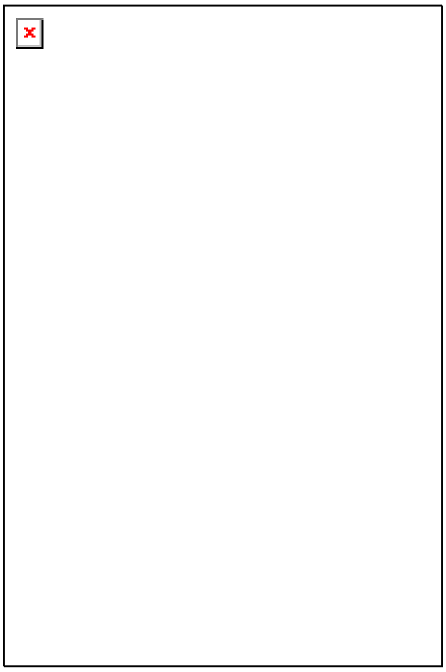
Cada uno de los rectángulos que se ensamblan en el rompecabezas del tipo C

Serie de plantillas del rompecabezas *D*.



Cada pieza del rompecabezas está marcada con color.

Figura comparativa de los lados de las primeras ocho piezas (se puede continuar para las veinte piezas).

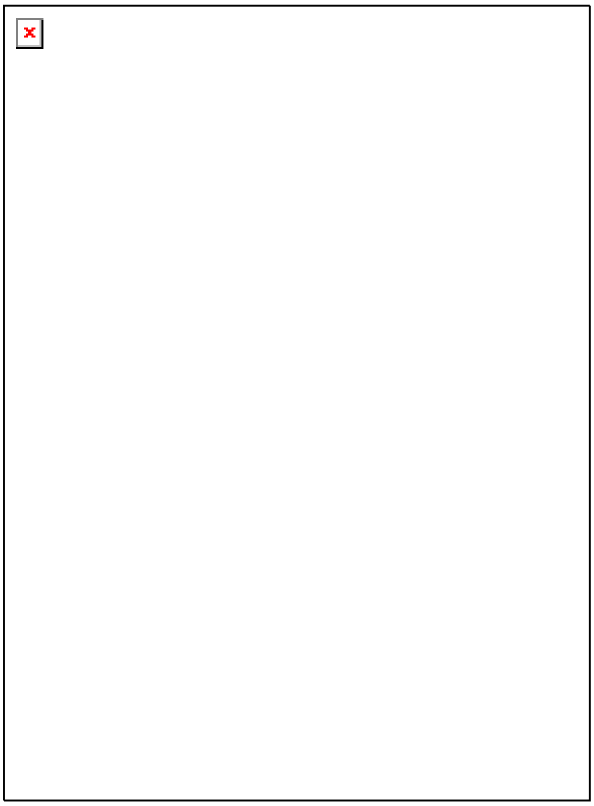


Las nueve primeras piezas unidas por el lado que mide lo mismo de cada una de ellas.

Las nueve primeras piezas unidas encimadas una sobre la otra.

Las nueve primeras piezas unidas encimadas una sobre la otra y vistas de lado.

Algunas de las veinte piezas marcadas en tamaño normal[6].



El tamaño de los lados de cada rectángulo está escrito con número

[6] El tamaño de esta imagen fue modificado para anexarlo a la tesis, pero el tamaño de cada rectángulo se explica en el pie de figura.

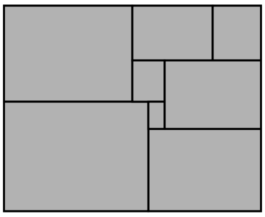
Tabla I.

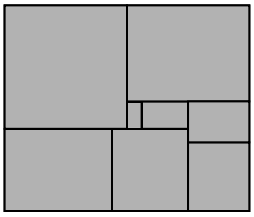
Áreas de rectángulos consecutivos	
R1 = rectángulo de 1x2	Área(R1) = 2
R2 = rectángulo de 2x3	Área(R2) =
R3 = rectángulo de 3x4	Área(R3) =
R15 = rectángulo de 15x16	Área(R15) =
R55 = rectángulo de 55x56	Área(R55) =

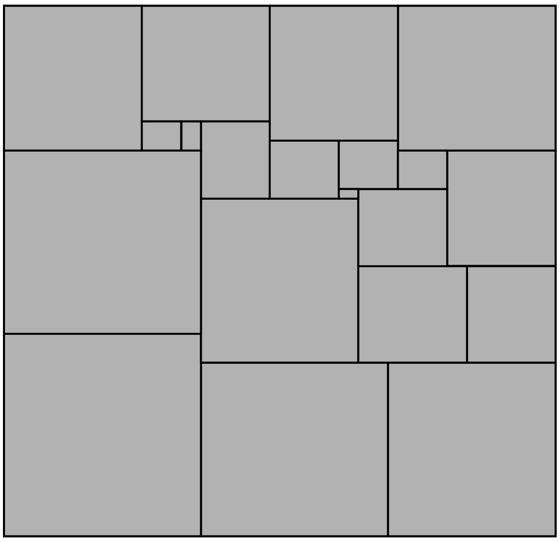
Tabla II.

Suma de áreas de rectángulos consecutivos		
Número de rectángulos consecutivos	Suma de sus áreas	¿coincide con el área de algún rectángulo consecutivo?
1	2	Sí, 2=Área(R1)
2	2+6=8	No
8		
20		

Algunas soluciones a los rompecabezas *C* y *D*.







El tamaño de esta imagen también fue modificado, pero se trata de las mismas piezas que se mostraron anteriormente

Glosario:
Plantilla. Modelo o guía que sirve para iluminar, colorear, dibujar o llenar.
Pieza. Cada una de las partes de un conjunto. Figura de un juego.
Rectángulo consecutivo. Aquel cuyos lados difieren de una unidad entre ellos.

1 de marzo de 2005"[7]

RESPUESTAS ESPARADAS O SOLUCIÓN: Puede que al principio los jóvenes que participan del taller no visualicen la forma en que pueden deducir las ecuaciones Diofantinas por ello es necesario que el profesor se mantenga alerta y con disposición para resolver las dudas que pueden llegar a presentar los alumnos.

Sugiero que la realización de este taller se haga en dos o tres sesiones con el fin de que los alumnos reafirmen poco a poco los conceptos que puedan rescatar de lo realizado en días anteriores.

[7] Taller "Rompecabezas con piezas escondidas" Diana Maya Padilla, museo UNIVERSUM, marzo 2005

Para finalizar este capítulo comento que en el libro de Inhelder y Piaget "*De la lógica del niño a la lógica del adolescente*", se caracteriza el desarrollo intelectual desde la primera infancia hasta la adolescencia tardía como "la construcción continuada de estructuras lógicas cada vez más complejas y poderosas hasta llegar a las, así llamadas, operaciones lógico-formales, que son el logro más alto, la cúspide del desarrollo intelectual: el estado de equilibrio final hacia el cual se ha movido toda la ontogénesis[8]"[9].

Pero si el conocimiento es una actividad inacabable, el pensamiento, en cuanto instrumento de aquél, no puede darse jamás como definitivamente concluido. Por el contrario, en verdad, no deja nunca de evolucionar, renovarse y reconstruirse. El pensamiento se comprende mejor si se acentúan sus cualidades dinámicas.

En contraste con el pensamiento adulto, el pensamiento infantil se caracteriza como describí en el capítulo II por ser subjetivo, intuitivo, egocéntrico y por disponer de una racionalidad de tipo concreto. El pensamiento adolescente, entonces constituye el lugar de paso entre uno y el otro nivel del pensamiento.

Hay estudios como los realizados por un psicólogo apellidado King (1986) de los que puede extraerse, no obstante, la conclusión de que los adultos, en determinadas situaciones, dan muestras de formas de pensar más avanzadas que las puramente formales, aunque, paradójicamente, no siempre actúen en un nivel formal.

El pensamiento que se desarrolla en la edad adulta es de orden superior; algunos investigadores estan de acuerdo en que posee las siguientes características: no es algorítmico, ofrece múltiples soluciones a un problema, incluye tanto el juicio como su interpretación, aplica múltiples criterios para resolver problemas y en ocasiones utiliza la lógica de proposiciones para construir las soluciones e incorpora el sentido de incertidumbre ante las situaciones que se presentan.

Es decir, lo que se desarrolla en la vida adulta, es un pensamiento de carácter dialéctico-relativista pero no forzosamente, aunque tampoco sea imposible, un pensamiento lógico-formal de tercer orden posterior al pensamiento lógico-formal de segundo orden desarrollado en la adolescencia; dado que hay adultos que no logran desarrollar el pensamiento lógico matemático y parece que más bien las técnicas que utilizan para la resolución de sus problemas corresponden al período de las operaciones concretas, esto es resultado de la estructura del pensamiento heredada del medio que rodea a la persona a lo largo de su vida.

---

[8] Ontogénesis significa: la formación y desarrollo del individuo considerado con independencia de la especie.

[9] Inhelder y Piaget "*De la lógica del niño a la lógica del adolescente*", pág. 10

Como dijo Vygotski este pensamiento se ve afectado o beneficiado por las personas y las condiciones de vida que le rodean, esto es, no se puede hablar de que cierta persona logre la obtención del pensamiento lógico matemático de la noche a la mañana como suele suceder cuando se manifiestan los cambios hormonales en el organismo, dado que aquellos necesitan de un esfuerzo intelectual que les permita madurar y eso se consigue sólo a través de la consideración y reflexión con vistas a la comprensión de ciertos temas.

Desde el enfoque psicométrico parece que tampoco puede mantenerse un modelo deficiente del desarrollo intelectual durante la vida adulta. Según algunos psicólogos, se puede hablar de un cierto declive, a partir de los 65 años aproximadamente, que no tiene carácter general, y que afecta sólo a aspectos de la inteligencia que permite comunicarse o realizar ciertas operaciones pero no de la inteligencia que resguarda los conocimientos básicos con que cuenta ya el adulto (los nombres de los objetos o la forma de comer y vestirse), lo anterior visto desde la óptica de una persona saludable, no siendo el mismo caso en los adultos que presentan enfermedades degenerativas del sistema nervioso.

En realidad la etapa adulta es un período de consolidación y afianzamiento en la esfera emocional, profesional y social, en él se trata de reconceptualizar la vida adulta desde una perspectiva positiva, se caracteriza porque el adulto no sólo construye su propio conocimiento, también es el constructor activo de una personalidad consistente, en definitiva, de sí mismo.

Algunas implicaciones educativas se resumen al decir que el adulto ha desarrollado un tipo de pensamiento que admite mejor la ambigüedad, las situaciones abiertas, acepta que las cosas no son sólo blancas o negras….., que el conocimiento es un proceso, puesto que entre la nada y el todo hay pasos intermedios. Comprende la importancia del marco conceptual previo del que se parte; asume la existencia de distintos tipos de lógica entre ellas la matemática la cual distingue perfectamente; tiene una mayor capacidad para distinguir problemas y contradicciones, y es capaz de visualizar ciertas paradojas.

Claro está que no todo son ventajas, también se toman en cuenta los inconvenientes los cuales fundamentalmente son dos:

1) En algunas ocasiones los adultos tienen lagunas importantes; pues no disponen de los pre-requisitos o conocimientos necesarios para afrontar con éxito nuevos dominios de conceptos o problemas, dado que han dejado de ejercitarlos y por ello los han olvidado.

2) Y puede que el adulto arrastre ideas previas o conceptos erróneos que pueden entorpecer o interferir la adquisición correcta de los conceptos que se quieren transmitir.

La educación de las matemáticas para los adultos tiene que aprovechar la riqueza generada por la continua evolución experimentada por el individuo y apoyarse en ella. En este sentido la presentación de los contenidos puede y debe tener en cuenta todo el caudal de esquemas (afectivos y sobre todo cognitivos) almacenados por el sujeto a lo largo de su vida para permitir al alumno adulto conectar aquéllos con éstos. Sólo así este tipo de educación puede tener algún éxito.

Por otra parte, también hay que tener en cuenta los rasgos citados. Sugiero al "profesor conozca lo más detalladamente que pueda – mediante pruebas que permitan examinar el estado inicial- los conocimientos locales del adulto y las pseudos tendencias o faltas cognitivas y afectivas respecto a las matemáticas que han sido inevitablemente conformados a lo largo de su vida. No es fácil cambiarlos, pero su influencia negativa puede ser controlada si se les conoce"[10].

En conclusión, después de leer lo anterior, reflexiono que no es sencillo tratar de aportar nuevos y novedosos conocimientos matemáticos a las personas adultas, sin embargo es una tarea que implica un reto para aquellos que se dedican al área educativa y sobre todo para aquellos que tratan de fomentar el acercamiento a las matemáticas.

Con estos comentarios me gustaría finalizar el presente trabajo, invitando a que aquellos profesionistas que interesados en el tema, retomen las ideas aquí expuestas y continúen desarrollando técnicas y ejercicios que permitan a las personas acercarse a las matemáticas, pero también propongo a las personas que se encuentran en este período del desarrollo cognitivo, que procuren consultar por cuenta propia algunos de los textos matemáticos que fomenten la curiosidad por conocer más acerca de esta ciencia, para tal objetivo recomiendo algunos escritos que, en forma de algunos géneros literarios promueven la curiosidad matemática, por ejemplo invito las siguientes recomendaciones bibliográficas:

- Mathema: el arte del conocimiento. Fausto Ongay, Fondo de cultura económica, colección la ciencia para todos no. 177, 2000.

- El enigma de Scherezade. Raymond Smullyan, Editorial Gedisa S.A., 1998.

- Satán, Cantor y el infinito. Raymond Smullyan, Editorial Gedisa S.A., 1992.

- Un cuento enmarañado. Lewis Carroll, Nivola ediciones, 2002.

[10] Para profundizar sobre estos temas se recomienda al lector leer el libro de Antonio Corral Iñigo citado en la bibliografía.

- Las paradojas del infinito. Bernard Bolzano, Servicios editoriales de la facultad de ciencias UNAM, 1991.

También sugiero que asistan a exposiciones de obras de arte que estén relacionadas en forma directa o indirectamente con las matemáticas, algunas de ellas pueden ser exhibiciones de las piezas de Escher y Sebastián que son artistas cuyas obras nos transportan al fascinante mundo de las geometrías.

Por supuesto que invito a encontrar relaciones entre las matemáticas y todas las actividades que lleve a cabo en el día, de manera que se convenza de que la matemática está presente en todas las cosas que se hallan en la realidad en que se vive, así a través de la práctica a lo largo del tiempo de este tipo de reflexiones, se proporciona una estructura de pensamiento que motiva a aprender cada día más, lo cual nos forma como individuos capaces de afrontar cualquier problema que se presente a lo largo de nuestra vida.

CONCLUSIONES

Al realizar este trabajo, aprendí que las matemáticas constituyen una ciencia polivalente y multidisciplinaria, pues la investigación que llevé a cabo me condujo por las áreas sociales, biológicas, culturales e infantiles de la realidad en que vivo. Mi óptica ante las matemáticas cambió desde que me percaté que enseñar matemáticas implica conocer la forma de pensar de aquellos que me rodean.

Antes de comenzar a hacer este trabajo creía tener un panorama muy general de la forma en que se aprende matemáticas; sabía que los conceptos matemáticos se adquieren mejor si desde la infancia se promueve la apropiación de experiencias que ayuden a comprender las ideas que encierra cada concepto que se desea transmitir y que para asegurar un aprendizaje significativo en los niños en ocasiones es necesario repetir constantemente los conceptos, ya que los niños adquieren los conocimientos mediante el ejercicio constante de la manipulación de objetos en situaciones donde aplican estrategias empíricas para resolver los problemas.

Después de realizar este trabajo me doy cuenta de que, para formar una idea general del proceso enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se necesita tener presente los factores físicos, psicológicos y sociales que involucran al ser humano; la investigación que hice me dio la oportunidad de ilustrarme en los conocimientos esenciales de dichos factores, pues tuve la oportunidad de aprender que para lograr un pleno desarrollo de las estructuras del pensamiento sobre el cual se basa el conocimiento lógico matemático, necesita tener un correcto funcionamiento de las estructuras fisiológicas y morfológicas en este caso del cerebro.

Requiere también que el ser humano experimente desde que es pequeño, algunas de las experiencias que manifiestan los niños en los períodos del desarrollo cognitivo desarrollado por Piaget, y digo algunas puesto que no estoy plenamente convencida de que tales estructuras representen la forma en que se desenvuelve el pensamiento en los niños, ya que desde mi óptica los niños y jóvenes actualmente estan influenciados por un medio que les provee de muchos estímulos que en ocasiones beneficia y en otras obstaculiza su comprensión del medio donde se desarrollan y que constituye parte fundamental del proceso de la adquisición del conocimiento.

Creo que la información que presenté a lo largo de este trabajo representa una ayuda para el profesor que se interesa por dar una instrucción de calidad, ya que en esta tesis brindé un novedoso marco de referencia sobre la teoría de la adquisición de las matemáticas: la introducción de éstas mediante el empleo de la historia de las matemáticas.

Considero que esta tesis también aporta algunos de los elementos mínimos necesarios que resultan útiles al plantearlos como estrategias para la enseñanza de las matemáticas.

Estoy satisfecha pues creo que logré realizar algunos de mis objetivos dado que ahora sí puedo afirmar que tengo una idea más clara de aquello que se requiere desarrollar para aprender matemáticas, al menos aprendí que para hacer una verdadera propuesta educativa se requiere manejar un marco teórico sustentado no sólo en la teoría que se desea enseñar, en mi caso las matemáticas; también hace falta tener presente los factores que pueden llegar a influir sobre los niños cuando éstos tratan de adquirir los conceptos matemáticos.

Por supuesto que la propuesta didáctica que presenté en la tesis constituye una primera aproximación de otras que quiero desarrollar en mi labor profesional, considero que las actividades que presenté en este trabajo son de utilidad para los profesores que se preocupan por mostrar que las matemáticas no son difíciles de adquirir y pienso que esto debe representar la actitud que se debe tomar desde que el niño aprende sus primeras nociones, de esta forma se logra formar un ser humano que es capaz de enfrentar cualquier situación que se proponga resolver a lo largo de su vida.

Esta propuesta didáctica la probé por medio de la aplicación, en diversas ocasiones, de la mayoría de las actividades, tuve la oportunidad de adoptarlas como estrategias de acercamiento de los niños con las matemáticas en mi labor como becaria en el museo de ciencias UNIVERSUM de la UNAM.

Es ahí donde me percaté que siguiendo el método que describí en los capítulos V y VI se puede verdaderamente lograr que el niño se interese y adquiera algunas nociones sobre matemáticas; considero que las actividades tienen éxito no sólo porque al aplicarlas noté que los niños se divierten al realizarlas, también observé que generan en ellos la inquietud por saber más sobre los temas que se relacionan con los conceptos que se pueden rescatar de ellas y que sólo se mencionan brevemente.

Ahora sé que la enseñanza de las matemáticas se vuelve sumamente atractiva y enriquecedora si se efectúa o complementa siguiendo el método de las actividades que presento en esta tesis. Esto me anima a invitar al lector para que pruebe llevar a cabo esta propuesta y modificarla en forma constructiva para lograr una asimilación significativa de las matemáticas, y de esta forma verlas como una ciencia actual, viva, polivalente y multidisciplinaria.

En resumen fue muy grato para mí asimilar, practicar y compartir la teoría que esta escrita en esta tesis con la que concluyo que las matemáticas así presentadas resultan no sólo atractivas, divertidas y retadoras, también son motivadoras para relacionar ésta ciencia con otras a través de aquello que suele ser fundamental para los niños: las actividades lúdicas.

ANEXO

EL ENCÉFALO Y EL PROCESO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

En este anexo expongo la necesidad de comprender la morfología y fisiología de los diversos procesos de aprendizaje en los niños, pues considero que para tomar decisiones importantes en el aula, los educadores deben saber cómo aprenden los niños las matemáticas. Como se pudo aclarar en el primer capítulo esto contribuye de manera significativa a mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje.

También tener conocimientos, aunque sean elementales, de la estructura y funcionamiento del encéfalo que es la parte del sistema nervioso situada en la cavidad craneal, ayuda a identificar cuando una persona sufre de una lesión que le impide aprender con facilidad los conceptos matemáticos. Esto permite seleccionar métodos adecuados para transmitir los conceptos matemáticos de una manera accesible.

La comprensión acerca del aprendizaje de las matemáticas guían la toma de decisiones e influyen en la eficacia como educadores en la materia, de ahí que es esencial que todo profesor examine atentamente su punto de vista sobre el aprendizaje pero tomando como referencia la óptica psicológica y fisiológica de la cognición, pues ambos aspectos son fundamentales para la asimilación plena de los conceptos matemáticos. La parte psicológica del aprendizaje fue expuesta en los capítulos II y III; por esta razón en lo sucesivo trato los temas de fisiología y morfología cerebral que considero son básicos para tener una idea de cuáles son las necesidades esenciales para la adquisición de los conocimientos.

Existen dos sistemas que coordinan y dirigen, de manera independiente pero interactiva, el vínculo entre los órganos que reciben y procesan la información que le llega al organismo; el sistema circulatorio es uno y el sistema nervioso es el otro. Este último es el principal sistema coordinador-conductor y desempeña un papel dominante al dirigir las acciones del cuerpo; también este sistema juega un papel determinante en la conducta y en la cognición, pues constituye las "entradas" que le permiten obtener información con respecto al mundo que le rodea al cuerpo humano, a través de los sentidos que reciben los estímulos que provienen del medio ambiente como el sonido, la luz, la forma, el color, el calor, el tacto, el movimiento muscular, entre otros; pero al mismo tiempo recibe otros estímulos provenientes del interior como las emociones y los sentimientos que juegan un papel importante en la motivación para la adquisición de los conceptos.

A las "entradas" se les llama receptores y la mayor parte de ellas están compuestas de terminales nerviosas, de las que hablaré más adelante, y las "salidas" también conocidas como sensores o efectores, son partes móviles que permiten desplazarnos y efectuar cambios internos y externos, ellas se encuentran en músculos, articulaciones, glándulas y órganos.

El sistema nervioso se divide en central, periférico, somático y autónomo, y cada uno funciona en forma conjunta con el resto del organismo en la forma que describo enseguida.

SISTEMA NERVIOSO CENTRAL (SNC): Está integrado por el cerebro (que constituye la masa principal del encéfalo) y la médula espinal, es mucho más poderoso que cualquier computadora en el manejo de distintas tareas como el reconocimiento de patrones, el razonamiento, la abstracción, la utilización del lenguaje y de la imaginación. Algunos científicos calculan que la capacidad total de este sistema para procesar datos es de ¡10 trillones de bits por segundo!

- EL CEREBRO es el órgano maestro del cuerpo pues recibe los mensajes de los receptores, integra la información con las experiencias pasadas, evalúa los datos y realiza los planes que guiarán las acciones, además integra funciones vitales como la circulación y la respiración; supervisa la satisfacción de necesidades corporales, incluyendo el sueño y la alimentación. Éste permanece activo mientras el organismo viva; funciona cuando las personas utilizan el lenguaje, reflexionan, resuelven problemas o realizan actividades que no siempre se inician a partir de la estimulación sensorial.

- MEDULA ESPINAL es el conjunto de fibras compuestas por neuronas que forman el área de integración de muchos reflejos motores y que cumple una serie de funciones; es considerada como el intermediario que manda información al cerebro y recibe mensajes del mismo, los cuales conduce a diferentes partes del cuerpo, transformándolos en reacciones musculares locales; además integra y coordina datos sensoriales referentes a la presión, el tacto, la temperatura y el dolor. La médula protege al cuerpo de daños, pues los reflejos son respuestas rápidas e involuntarias ante un estímulo que representa peligro, por ejemplo, la médula coordina el movimiento de la mano para retirarla de una hornilla caliente.

SISTEMA NERVIOSO PERIFERICO (SNP) Con frecuencia los receptores y efectores se encuentran bastante alejados del sistema nervioso central, los humanos estamos dotados de un sistema de comunicación: el sistema nervioso periférico que incluye una red de nervios que llevan la información y conectan a los órganos; este sistema está dividido fundamentalmente en dos partes: el sistema nervioso autónomo y el sistema nervioso somático.

- SISTEMA NERVIOSO SOMÁTICO está integrado por nervios que conectan al SNC con los receptores por el lado de la entrada de información y con los músculos esqueléticos y articulaciones por el lado de lo que emerge del sistema. Este sistema nervioso permite realizar acciones voluntarias, moverse y comportarse de distintas formas.

- SISTEMA NERVIOSO AUTÓNOMO contiene nervios que transmiten mensajes entre el SNC y los llamados músculos involuntarios que son aquellos que controlan las glándulas y los órganos internos, este sistema opera de manera independiente para mantener al cuerpo en condiciones adecuadas para funcionar y regula la distribución de los nutrientes para que actúe como requiera el organismo. A pesar de ser autónomo, recibe influencias del SNC, del sistema endocrino y del medio ambiente[1].

A continuación en la figura 1 presento una imagen de los nervios y la distribución de los mismos a lo largo de la médula espinal. En la imagen se aprecia la forma en que cada nervio se une con la médula y cómo ésta a su vez se divide y se conecta con el encéfalo.

Figura 1: Médula espinal y sus conexiones

[1] Todo lo anterior fue tomado del libro Fisiología humana de Guyton.

El sistema nervioso humano está compuesto por varios tipos de células; la célula nerviosa llamada neurona, es la unidad funcional básica tanto del SNC como del SNP, se estima que existen entre 100,000 millones y un billón de neuronas en los humanos, además de que cada una tiene 10 micras de ancho (esto es una aproximación pues hay neuronas de diferente tamaño); hagamos un cálculo para tener una idea de que tan pequeña es una neurona: la cabeza de un alfiler es de aproximadamente 0.5 mm, si una neurona mide 10 micras de diámetro, se podrían colocar 50 neuronas dentro de ese espacio[2].

"También el sistema nervioso humano contiene otro tipo de células: las células gliales que rebasan el número de neuronas en porción de diez a una en el SNC; en el SNP, las células con esta función se llaman células de Schwann. Se pensaba que estas células mantenían a las neuronas en su sitio, de manera similar al tejido conectivo en muchos órganos. En la actualidad, se cree que están activas, al parecer también intervienen en el control de las actividades de las neuronas, es posible que brinden apoyo en la percepción, la memoria e incluso en algunos procesos mentales superiores"[3].

La anatomía de una neurona varía bastante en tamaño, forma y función; pero, sin importar su tipo, tienen generalmente tres elementos: la dendrita, el cuerpo celular y el axón. Las neuronas al igual que otras células están llenas de una sustancia semilíquida, por lo general transparente llamada protoplasma y estan envueltas en una membrana celular que regula todo lo que sale y entra de la célula. El cuerpo celular o soma de la neurona contiene una serie de estructuras especializadas que la nutren y conservan. El núcleo de la célula casi siempre está localizado en la parte central del cuerpo celular y tiene forma semiesférica; contiene información genética en forma de ADN (ácido desoxirribonucleico) que determina la estructura y función celular.

Las dendritas y el axón son fibras ramificadas que unen a las neuronas entre sí, estas fibras hacen que las neuronas tengan una apariencia diferente a las otras células del cuerpo; la mayor parte de las neuronas tienen muchas dendritas que salen en todas direcciones, ¡pueden existir hasta treinta mil en una sola neurona! Su principal función es la de compartir información entre los receptores y los efectores.

Se considera que el axón, también llamado cilindroeje es "la porción emisora de mensajes de la célula"; los axones varían en longitud y van desde menos de un centímetro, para aquellas neuronas que forman el cerebro, hasta más de un metro para las neuronas que forman las fibras nerviosas de la médula espinal, el axón se ramifica para establecer contacto con otras células; en las puntas del axón se encuentran los botones terminales, también llamados terminales presinápticas.

---

[2] Exposición del Instituto de Neurología de la UNAM en el museo de ciencias UNIVERSUM, mayo 2005
[3] Tomado de Diamond M.C., Sheibel A.B., et al. On the brain of a scientist : Albert Einstein; Exper. Neurol. 1985, 198 – 204 .

Algunos axones están recubiertos de una membrana conocida como vaina de mielina que desempeña la función de aislante, las neuronas que están dotadas de este recubrimiento pueden transmitir los mensajes a una velocidad cien veces mayor que las que no lo tienen.

A continuación exhibo la figura 2 que presenta la morfología de una neurona, en ésta se puede apreciar una comparación de la neurona con el sistema nervioso central, pues se muestra la parte que puede semejarse al encéfalo y la que se asemeja a la médula, estas semejanzas se basan en la forma en que se observa trabaja cada uno de sus elementos.

Figura 2: Morfología de una neurona.

Cada neurona se une al menos con otra y en el mejor de los casos con muchas; el axón de una neurona puede establecer contacto con una dendrita, cuerpo celular o axón de otra neurona, o con células de un músculo, glándula u órgano. Vistas en el microscopio, entre la unión del axón de la primera célula y la dendrita de la segunda célula hay un espacio diminuto llamado "sinapsis" de aproximadamente dieciocho millonésimos de pulgada de ancho; el cerebro humano contiene más de cien billones de sinapsis También en las terminales de las neuronas pequeñas hay hinchazones en forma de botones, llamados botones terminales, estos contienen pequeños paquetes de almacenamiento conocidos como vesículas sinápticas transmisoras que portan los neurotransmisores, estos son sustancias químicas necesarias en la comunicación neuronal y que la célula fabrica.

Figura 3

En la figura 3 se observa la sinapsis en forma detallada, aquí aparecen los botones terminales de los axones que también se llaman nudos sinápticos y que a su vez contienen las vesículas sinápticas transmisoras, también se esquematizan las mitocondrias que son elementos esenciales para la sobrevivencia de cada neurona.

En el sistema nervioso periférico se identifican dos tipos diferentes de neuronas: las sensoriales y las motoras; las sensoriales llevan los mensajes de los receptores al SNC, las motoras por su parte conducen las órdenes a los efectores, estos dos tipos tienen axones de mayor longitud pues se unen para formar los cables de nervios que comunican al sistema periférico con el resto del cuerpo.

Los seres humanos tienen cuarenta y tres pares de nervios, un conjunto para cada lado del cuerpo; al ramificarse y volverse a ramificar, las neuronas ponen en contacto directo a casi cada región del cuerpo con el cerebro y con la médula espinal. El sistema nervioso central contiene la mayor porción de las neuronas de una persona; la mayor parte de estas neuronas reciben el nombre de ínter neuronas, las cuales tienen axones cortos y dendritas que se ramifican de manera muy profunda.

Para explicar la forma en cómo pasan los mensajes de una neurona a otra tomemos el siguiente ejemplo: cuando recibimos un golpe en el músculo que está debajo de la rodilla, se excitan, es decir, se activan los receptores del tendón y estos traducen la sensación al lenguaje electroquímico; y si el golpe fue lo suficientemente intenso, entonces provoca que la neurona receptora transmita un impulso nervioso, este impulso codificado viaja a la médula espinal y ahí activa a una neurona motora que lleva el mensaje al músculo apropiado, entonces el pie se mueve y así se produce una reacción motora.

Es probable que se pregunte: ¿qué es un impulso nervioso?, para responder esta pregunta observe que cuando una neurona está en reposo (figura 4 inciso A), su membrana celular mantiene un equilibrio.

La célula entonces conserva ciertas partículas cargadas eléctricamente, e impide que otras entren, pero deja que algunas floten libremente de un lado a otro de la membrana; cuando se le estimula suficientemente, es decir cuando se excita la neurona, su membrana pierde el control y es penetrada por ciertas sustancias químicas; a este cambio se le conoce como permeabilidad y generalmente comienza en las dendritas para luego extenderse hacia el cuerpo celular y el axón (figura 4 inciso B). La alteración se acompaña por movimientos de partículas cargadas las cuales producen cambios en el voltaje y señales eléctricas. Por último se restablece gradualmente el equilibrio en los componentes electroquímicos de la neurona al expulsar otras sustancias químicas y comienza un estado de inhibición (figura 4 inciso C). Entonces el impulso nervioso es la alteración transitoria en la permeabilidad de la neurona que envuelve al axón y la distribución de cargas eléctricas que se presentan en ese sitio.

Figura 4: Diferentes estados del impulso nervioso.

Los impulsos nerviosos son los que le permiten a una neurona comunicarse con otra célula cercana, pero si este impulso es igual a uno anterior, entonces ¿cómo distingue el cerebro los distintos tipos de estímulos nerviosos?. Es decir ¿cómo distingue el cerebro los impulsos que nos describen la sensación de tener calor de aquellos que describen la sensación de tener hambre o los de recibir algún golpe?. Los eventos que nos rodean están codificados de diversas maneras; los receptores están especializados de modo que responden a tipos particulares de estimulación, una vez recibida esta sensación los nervios específicos llevan sus mensajes a sitios predeterminados del cerebro para ser analizados, de esta forma la luz y el sonido producen distintas sensaciones en distintas partes del cerebro.

Cuando la redistribución de la carga que acompaña al cambio de la permeabilidad llega hasta la punta de las ramas del axón, por lo general provoca la liberación de neurotransmisores. Éstos se combinan entonces con proteínas muy específicas en la superficie de las células blanco, que son aquellas neuronas a las que llegan los impulsos nerviosos; esta unión desencadena respuestas electroquímicas, en algunos casos un impulso nervioso en las células blanco; poco después las sustancias transmisoras se destruyen o regresan a la neurona de la que provienen para ser realmacenadas y empleadas en otra ocasión.

Para 1985 algunos científicos ya habían aislado más de cincuenta posibles neurotransmisores y esperaban que el número superara los doscientos. Los neurotransmisores se pueden dividir en dos categorías: los excitatorios los cuales provocan que las células contiguas se activen y liberen impulsos nerviosos, y los inhibitorios que tienden a impedir que las células cercanas se activen. Las neuronas efectúan un registro constante de la cantidad total de los dos tipos de transmisores en su sinapsis receptora, entonces cuando los transmisores excitatorios exceden de manera significativa a los inhibitorios, la neurona se activa.

Todo el proceso emplea solamente cincuenta milisegundos en efectuarse, lo cual es increíblemente rápido considerando que durante este proceso de comunicación neuronal se fabrican constantemente los transmisores, se secretan, se desdoblan o combinan y se recapturan en la neurona que los fabrica. Por ello, el comportamiento, la conducta, el aprendizaje y demás actividades que desarrolla el ser humano se ven modificados de manera considerable si se alteran los balances químicos que los neurotransmisores presentan al estar almacenados en las neuronas o bien al ser liberados en la sinapsis; por lo que, es idóneo que para aprender cualquier tema, se mantenga un buen equilibrio de dichas sustancias, esto se logra manteniendo una vida saludable que observe una moderación constante entre alimentación balanceada, ejercicio, actividad laboral y descanso.

Aún sigue la pregunta ¿cómo hace el organismo para aprender matemáticas?, para contestarla se necesita conocer la forma como el cerebro efectúa el lenguaje, procesa la información y almacena lo que acaba de aprender.

Para responder tales cuestiones hay que tener presente algunas generalidades del cerebro, por ejemplo que tiene la apariencia de una nuez crecida de kilo y medio de peso y está colocado en al parte superior de la médula espinal. En él las neuronas están organizadas de manera estrecha, se agrupan por áreas, de acuerdo con su función.

Una meta interesante para los psicofisiólogos es identificar los "departamentos" y "cadenas de mandos" que se encuentran en el cerebro; pero tal empresa parece estar muy alejada pues los científicos apenas comienzan a descifrar las conexiones entre los cientos de estructuras cerebrales, sin embargo sí se puede identificar la organización general del cerebro humano analizándolo por regiones; las cuales reciben el nombre de hemisferios (figura 5).

Figura 5: Vista inferior de la morfología y distribución de los hemisferios y lóbulos cerebrales.

La corteza cerebral es la estructura que tiene enormes capacidades de procesamiento de información en los seres humanos; la corteza madura contiene cerca de tres cuartas partes de las neuronas cerebrales. Tiene unos dos milímetros de espesor, se ve doblada y arrugada, y si se le estira, su superficie abarca un área aproximada de medio metro cuadrado. Una grieta profunda divide a la corteza en dos mitades simétricas llamadas hemisferios los cuales controlan las funciones del cuerpo en forma cruzada, es decir, el hemisferio derecho controla el lado izquierdo del cuerpo y viceversa.

Una característica de la especie humana es la desigualdad funcional de cada hemisferio cerebral, en los libros de fisiología cerebral citan que el funcionamiento del lado izquierdo del cuerpo esta regido por el hemisferio derecho y viceversa, y que cada uno desempeña actividades que son complementarias, por ejemplo, en el hemisferio derecho se desarrolla principalmente la capacidad de motricidad, no con ello se refiere a que no se desarrollen otras capacidades referentes por ejemplo al lenguaje o la interacción con otros individuos.

"El predominio cerebral ésta, en cierta medida, ligado a la preferencia manual: así, las zonas cerebrales indispensables para el ejercicio del lenguaje están situadas en el caso de los diestros en el hemisferio izquierdo responsable de la movilidad del lado derecho del cuerpo. En realidad la participación de los dos hemisferios en las actividades psicológicas y orgánicas es variable según los individuos; las reglas a que esto obedece y las razones que la determinan (genéticas, sociales) son todavía poco conocidas"[4].

Varias marcas en la superficie dividen a cada hemisferio en cuatro secciones o lóbulos: frontal, parietal, temporal y occipital (figuras 5 y 6). El procesamiento de información en cada lóbulo es estratificado, esto es, los datos pasan de áreas primarias a secundarias y, de ahí, a otras de asociación más elevada.

[4] "Gran enciclopedia Larousse tomo 5" pág. 5331

Las funciones que desempeña cada lóbulo en general son las siguientes:

Figura 6: Vista lateral izquierda del encéfalo, se observa las divisiones principales y los cuatro lóbulos mayores del cerebro.

- LÓBULOS PARIETALES: Se encuentran cerca de la mitad del cerebro, contienen áreas que registran y analizan mensajes provenientes de la superficie del cuerpo (exterior e interior), manejan información concerniente al tacto, la presión, la temperatura, el movimiento y la posición muscular, las cuales son llamadas funciones somato-sensoriales o de sentido corporal.

- LÓBULOS FRONTALES: Nos permiten recordar, sintetizar datos sensoriales e información emocional, interpretar información y manejar material en secuencia, así como establecer propósitos y planes, además supervisan nuestro progreso hacia esas metas.

- LOBULOS TEMPORALES: Localizados por encima de la zona donde se encuentran las orejas, las neuronas en esta área participan en decidir que cosas registrar y almacenar de las imágenes captadas de lo que nos rodea; inspeccionan y archivan los eventos seleccionados, aparentemente también evalúan, al juzgar algunas experiencias de manera positiva y otras negativa, además registran y sintetizan lo que escuchamos.

- LOBULOS OCCIPITALES: Situados en la parte posterior, son vitales en la recepción y procesamiento de información visual.

Cuando se trata de formar un proceso de pensamiento, el cerebro comienza a construir o recordar imágenes simples; conforme continúa el análisis tiene acceso a recuerdos, emociones y objetivos; una multitud de neuronas entrelazadas permite al cerebro usar sus recursos cuando actúa sobre la información presente y para expresar lo que se procesa, por lo general, uno de los dos hemisferios, con más frecuencia el izquierdo, domina el uso exclusivo del lenguaje; en el interior de este hemisferio trabajan juntas varias áreas para facilitar la comunicación (Figura 7), éstas son:

- EL AREA DE WERNICKE, llamada también AREA DE INTEGRACIÓN COMÚN O ÁREA GNÓSTICA: Ubicada cerca de la zona auditiva contribuye en interpretar todos los tipos de sensaciones para identificar un significado en común, en ella se seleccionan las palabras que serán emitidas y colabora en comprender lo escuchado, por ser la zona donde se interpreta toda la información sensorial es probable que cualquier lesión de esta área dejará a la persona mentalmente discapacitada; incluso aunque aún pudiera interpretar las sensaciones respectivas de las diversas áreas de asociación, esta información carecería prácticamente de valor para el cerebro a menos que pudiera interpretar su significado final. El daño fisiológico de ésta región del cerebro casi siempre se debe a un tumor cerebral o un accidente vascular cerebral, éste último es ocasionado por pérdida súbita del riego sanguíneo hacia una región del cerebro ya sea por hemorragia o trombosis de un vaso sanguíneo.
- EL GIRO ANGULAR: Situado en el lóbulo parietal, permite la transformación a palabras de las imágenes que percibimos al leer, escribir o examinar.
- EL AREA BROCA: Que se encuentra en el lóbulo frontal permite hablar de manera fluida y pronunciar las palabras con claridad.

Figura 7: Organización de las principales áreas del cerebro que participan en la elaboración y comunicación del lenguaje.

Aparte de los lóbulos, el cerebro está formado por otras estructuras, que participan en el aprendizaje y que considero importante mencionar.

- EL TÁLAMO: Registra la información de sucesos importantes, participa en las funciones del lenguaje y controla el sueño y la vigilia.

- EL SISTEMA LÍMBICO: Incluye a la amígdala, el hipocampo, el séptum y el cíngulo junto con porciones del hipotálamo y del tálamo, se encuentran cerca de la orilla exterior del cerebro, estos desempeñan un papel muy importante en el olfato, están implicados de modo crucial en la expresión de la motivación y la emoción, controlan el apetito, la sed, el sueño, la vigilia, la temperatura corporal, el sexo, la agresión, el miedo y la docilidad, es central para la representación de nuestro entorno y para ubicarnos; en resumen, orienta la conducta que contribuye con la supervivencia personal y de la especie, en estas estructuras subyacen los sentimientos sociales, aquellos que son la base de la familia y la convivencia en grupo.

- EL HIPOTÁLAMO: Es el más importante de la estructura límbica, tiene el tamaño de un cacahuate, controla tantas funciones vitales que a veces se llama el guardián del cuerpo; funciona a dos niveles conductual y fisiológico.

  - Conductual: Provoca hambre, sed, frío, nos instiga a tomar medidas para satisfacer necesidades corporales.

  - Fisiológico: Acelera la actividad de los sistemas nerviosos autónomo y el endocrino, ejerce control mediante la glándula pituitaria; participa de manera importante en varios tipos de agresión, conserva la energía que no se está utilizando con el fin de utilizarla posteriormente. Otras regiones límbicas, incluyendo el séptum, el hipocampo y la amígdala parecen influir sobre las emociones y los motivos de manera indirecta a través de sus interacciones con el hipotálamo.

- EL CEREBELO: Regula la postura, el equilibrio, el movimiento; en éste se hallan las células visuales que son sensibles al movimiento.

Al igual que el sistema nervioso, el sistema endocrino coordina las células corporales; opera liberando moléculas mensajeras que interactúan con células receptivas, y modifica su actividad. La mayor parte del tiempo los sistemas nerviosos y endocrino trabajan en colaboración.

Existen otras sustancias químicas diferentes de los neurotransmisores que trabajan en el cerebro modificando tanto los patrones conductuales como los cognitivos y fisiológicos, se trata de las "hormonas" que son sustancias secretadas por el sistema endocrino y que activan la conducta; predeterminan las funciones de los sistemas metabólico, endocrino y nervioso de manera que afectan las actividades; además la conducta y el entorno influyen sobre los niveles hormonales.

Lo anterior es importante tenerlo en cuenta para comprender los cambios que presentan los jóvenes que se hallan en la pubertad y en la adolescencia, pues en estas etapas se desarrollan dentro de su organismo estas sustancias que en ocasiones desequilibran los neurotransmisores[5].

Para realizar una operación matemática como la suma de dos números, lo primero que hace nuestro cerebro es reconocer no sólo los números que se operan, también presta atención a la operación que se ha de realizar y para ello recuerda cómo efectuarla, por lo que en base a lo anteriormente descrito el cerebro hace las siguientes operaciones para resolver los problemas matemáticos como el planteado:

La realización de la operación comienza en nuestro ojo, que es un órgano de entrada, este observa la figura y transmite un impulso al nervio óptico, a su vez lo envía a la zona del lóbulo occipital izquierdo, donde es procesada por miles de neuronas, a través de las cargas eléctricas el cerebro aprende, si es que aún no conoce los números, o bien recuerda el concepto que se relaciona con dicho número y trata por medio de la intervención del lado derecho del cerebro de reconocer tanto el nombre como el significado de tal símbolo, para ello es necesario almacenar la información que ya se tiene temporalmente en una pequeña zona del área prefrontal.

La información que recolecta el ojo es retomada unos cuantos segundos después; al mismo tiempo que se ingresa la información se activan las neuronas del lóbulo frontal que es donde se almacenan todos los recuerdos y se empatan los impulsos recién llegados con los previamente almacenados, así se llega al reconocimiento del número. Las tareas de reconocimiento del significado del número como la de la operación se efectúan en forma similar.

[5] Si el lector desea ampliar su conocimiento sobre estos temas puede consultar los libros de donde obtuve los datos y las figuras presentadas anteriormente, la bibliografía es la que corresponde a los autores A.C. Guyton y María Luisa Fanjul citados al final de la tesis.

Posteriormente la unión de tales impulsos viajan hasta posicionarse primero en los lóbulos frontales, y luego en los temporales que es donde se interpreta la información a impulsos nerviosos y entonces se evalúan los datos, de esta forma se combinan para formar un nuevo impulso el cual regresa al lóbulo frontal y es interpretado como el resultado. Después es empatado con un impulso de igual intensidad, así se le reconoce y se le interpreta nuevamente como el número resultante de la operación.

Posteriormente, la información es almacenada no sólo en el lóbulo frontal, también viaja al área de Wernick y a la de Broca donde el cerebro analiza las palabras que habrá de emitir para dar a conocer el resultado. Por último pasa al tálamo donde se producen los impulsos que llevaran la información hacia el exterior, dado que éste le ordena a la boca expresar verbalmente el resultado.

Aunque, si se trata de escribir la respuesta se pide al lóbulo parietal y al frontal que colaboren en la escritura; el primero dicta a los músculos las acciones que debe realizar para escribir correctamente el resultado, mientras que el frontal vuelve a guardar la información aprendida para producir una nueva sustancia que le sirve para compararla en lo sucesivo, es de esta forma en como se da la identificación.

Entonces, si se desea escribir correctamente los resultados de dicha operación, el cerebro debe de elegir el patrón que más convenga, pero, regularmente el lóbulo izquierdo será quien colabore de manera fundamental, pues en él se ubican las estructuras que permiten expresar las inquietudes y logros en materia de educación matemática.

En oposición con el ser humano, y para nuestra sorpresa, algunos animales como los cuervos y las avispas solitarias están más o menos dotadas de la noción de número, pues genéticamente adquieren de manera rudimentaria una especie de percepción directa de cantidades concretas, lo que es distinto a contar en abstracto, que consiste en la facultad de asociar un número a cada uno de los elementos de cierto conjunto y este proceso es poseído por el ser humano una vez que es aprendido, he aquí un ejemplo:

"La avispa madre, deposita cada uno de sus huevos en un agujero distinto y los provee de cierto número de orugas vivas, de las que se alimentará su prole al eclosionar[6].

[6]El significado de esta palabra viene de eclosión y significa la apertura de un capullo de flor o de una crisálida, que es la ninfa de un insecto, es decir que el insecto no ha pasado del estado de larva, en otras palabras, es cuando el insecto no ha pasado del estado de oruga a mariposa.

Ahora bien, el número de esas orugas es notablemente constante para cada especie de avispa: algunas ponen cinco, otras doce, otras hasta veinticinco por celdilla. Pero el caso más notable es el de la especie llamada "Genus eumenus", variedad de la cual el macho es más pequeño que la hembra, por algún misterioso instinto, la madre siempre sabe si tal huevo producirá un macho o una hembra y, en consecuencia, provee el agujero de alimento apropiado. No modifica ni la especie ni el tamaño de las orugas; pero si el huevo es un macho pone cinco orugas y si es hembra pone diez."[7]

En comparación con los animales, el ser humano posee pocas capacidades instintivas pero en cambio tiene el poder de aprovechar su entorno para evolucionar mediante una educación y aprendizaje apropiados, pues como dice P. Chauchard[8] "el hombre nace con un cerebro inacabado e inmaduro rico sólo en posibilidades que aprenderá a desarrollar imitando su entorno".

La información que acabo de presentar considero importante tomarla en cuenta para ayudar a los alumnos que por alguna circunstancia presentan un déficit de aprendizaje en las matemáticas, pues a dichos casos se les puede sugerir una canalización con los especialistas dentro de los que destacan los psicólogos y neurólogos, esto constituye parte esencial para auxiliar al alumno que presente y reincida en su deficiencia de aprendizaje de las matemáticas.

También pienso que es importante conocer dicha información para hacer concientes a los padres y alumnos de la necesidad de mantener en buen estado la salud mental y física de nuestro organismo, la cual se logra al darle una buena alimentación, ejercicio y limpieza al cuerpo, esto refleja una excelente adquisición de todo lo que se proponga aprender y desarrollar a lo largo de la vida. Por ello invito a hacer vigilia sobre la forma en que se mantiene y provee de salud al organismo. Los profesores pueden sugerir visitas médicas regulares cuando consideren que los casos lo ameriten y los padres de familia y alumnos pueden tomar en cuenta dichas sugerencias.

[7] Tobias Dantzing." Le nombre, lange de la science » pág. 126
[8] Paul Chauchard, « Les Mécanismes cérébraux de la prise de conscience: neurophysiologie psychanalyse et psychologie animale » pág. 48

BIBLIOGRAFÍA

Alem, Jean Pierre, “Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático”, Gedisa, Francia, 1997

Alvar, Noe y Barra, Zenil, “Carlos Federico Gauss: de niño prodigio a ciudadano”, Limusa, México, 1996

Alvarado Valencia Cristina, “La simetría en el arte a través de la historia”, Tesis nivel licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2005

Baroody, Arthur J, “El pensamiento matemático de los niños”, Visor distribuciones, España, 1988

Bochner, Salomón, “El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia”, Alianza Universidad, México, 1991

Calero Pérez, Mavilo, “Educar jugando”, Alfaomega, México, 2003

Cerquetti Aberkane, Francoise y Berdonneau, Catherine, “Enseñar matemática en el nivel inicial”, Edicial S.A., Francia, 1994

Chauchard Paul, « Les Mécanismes cérébraux de la prise de conscience: neurophysiologie, psychanalyse et psychologie animale », Paris, 1976

Chomsky, Noam, “El lenguaje y los problemas del conocimiento”, Visor distribuciones S.A., México, 1989

Chomsky, Noam, “Reflexiones sobre el lenguaje”, Ariel, México, 1979

Corral Iñigo, Antonio, “De la lógica del adolescente a la lógica del adulto”,Trotta S.A., España, 1998

Dantzing Tobias, “Le nombre, lange de la science » , Paris, 1974

Diamond M.C., Sheibel A.B., et al. “On the brain of a scientist: Albert Einstein”, Exper. Neurol., Estados Unidos, 1985

Dr. Ehrenfried Hofmann, Joseph, “Historia de la matemática”, Limusa, México, 2003

Flansburg, Scout y Hay, Victoria, “Matemáticas para todos”, Paidos, España, 1995

Fundación Vamos México, “Guía de Padres” tomo 2 de 6 a 12 años, Editorial Infantil y Educación, S.A. de C.V., México, 2005

Gardner, Martin, "Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas", Editorial Labor S.A., España, 1990

García González, Enrique, "Piaget", Trillas, México, 1989

Gómez Chacón, Inés María, "Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático", Narcea S.A., España, 1998

Guyton, Arthur C, "Fisiología humana", Interamericana Mac. Graw Hill, México, 1987

Guzmán, Miguel de, "Enseñanza de las ciencias y la matemática", MATEMÁTICA Organización de Estados Iberoamericanos. OEI. Para la educación, la ciencia y la cultura; artículo publicado en la página: http:// www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

Ifrah, Georges, "Historia universal de las cifras", Espasa Calpe S.A., España, 2001

Kazuko Kamii, Constante, "El niño reinventa la aritmética III", Visor distribuciones S.A., España, 1994

Kline, Morris, "Historia del pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días" Vol.1, Alianza Editorial, España, 1992

Kline, Morris, "Matemáticas la pérdida de la certidumbre". Siglo XXI, México, 1976

Lahora, María Cristina, "Actividades matemáticas con niños de 0 a 6 años", Nancea S.A., España, 1992

Larousse, "El Pequeño Larousse Ilustrado", Ediciones Larousse, México, undécima edición, 2005

Larousse, "Gran Enciclopedia Larousse tomo 5", Editorial Planeta, S.A., Barcelona, quinta edición, 1993

Markarían, Roberto, "La dimensión humana de la matemática. Ensayos sobre matemática y cultura", Ediciones la Vasija, Uruguay, 2003

Pando Figueroa, Sara, "Un enfoque distinto de la enseñanza de las matemáticas y la lógica a nivel primaria", Tesis nivel licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2002

Piaget, Jean, "Psicología y Pedagogía", Ariel Barcelona, 1973

Piaget, Jean, “Seis estudios de Psicología”, Seix Barral, Barcelona, 1979

Prieto, Carlos, “Aventuras de un duende en el mundo de las matemáticas”, Fondo de Cultura Económica, Colección la ciencia para todos número 206, México, 2005

Ruiz Ruiz-Funes, Concepción y Trigueros, María, “Libro de la sala de matemáticas”, Museo de las ciencias Universum, México, 1999

Ruiz Ruiz-Funes, Concepción y de Régules Ruiz-Funes, Sergio, “El Piropo Matemático”, Editorial Lectorum, México, 2000

Vygotski, Lev Semiónovich, “Obras escogidas Vol. III: Problemas del desarrollo de la psique”, Visor distribuciones S.A., España, 1995

Woolfolk, Anita E,”Psicología Educativa”, Prentice Hall Panamericana, 1999

Ysunza Uzeta, Salvador, et al., “Enseñanza activa de la historia universal (Seminarios)”,Porrúa Hnos. y Cía, México, 1975