



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Oscilaciones Cuasi-Periódicas  
en Discos de Acreción en  
Sistemas Binarios de Rayos X.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A :  
HUGO OLIVARES ESPINOSA



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. WILLIAM HENRY LEE ALARDIN

2006



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Propiedades de los Sistemas Binarios de Rayos X</b>	<b>1</b>
§1.1. Propiedades . . . . .	1
§1.2. Sistemas Binarios de alta y baja masa . . . . .	3
§1.3. Acreción . . . . .	8
§1.3.1. Características . . . . .	8
§1.3.2. Modelo de Discos Delgados . . . . .	9
§1.4. Fenómenos de Rayos X en Sistemas Binarios . . . . .	14
§1.4.1. Características . . . . .	14
§1.4.2. Pulsares de Milisegundo . . . . .	16
§1.4.3. Oscilaciones de Ráfaga . . . . .	18
§1.4.4. Oscilaciones Cuasi-Periódicas . . . . .	20
§1.5. Modelos para Oscilaciones Cuasi-Periódicas . . . . .	26
§1.5.1. Modelo de Batimiento de Frecuencias en el Punto Sónico	27
§1.5.2. Modelo de Precesión Relativista . . . . .	27
§1.5.3. Modelo de la Burbuja de Fotón . . . . .	28
§1.5.4. Modelo de Transición de Capas . . . . .	28
§1.5.5. Modelo de Resonancia Paramétrica No-Lineal . . . . .	29
<b>2. Osciladores</b>	<b>31</b>
§2.1. Osciladores Lineales . . . . .	31
§2.2. Osciladores No-Lineales . . . . .	38
§2.3. Método de Runge-Kutta . . . . .	41
<b>3. Modelo de Resonancia Paramétrica para las Oscilaciones Cuasi-Periódicas</b>	<b>45</b>
§3.1. Desacoplamiento de Órbitas . . . . .	45
§3.2. Resonancia Paramétrica en un Oscilador . . . . .	50
§3.3. Resonancia Paramétrica en Osciladores Acoplados . . . . .	54
§3.3.1. Modelo de los Osciladores . . . . .	54
§3.3.2. Acoplamiento . . . . .	55

§3.4. Simulaciones . . . . .	56
§3.5. Resultados . . . . .	57
§3.6. Conclusiones . . . . .	62

Con todo el cariño  
que pueda imaginar,  
a mi Mamá

# Agradecimientos

Sólo bastó con una decisión repentina, en las que casi todo está ausente -incluida la reflexión-; “en caliente” pues, para que todo a mi alrededor cambiara. Podría parecer que estas son del tipo que causaría más arrepentimiento... todo lo contrario. Hasta el día de hoy, no ha habido un sólo momento en el que me haya reprochado el cambiar mi vida en Xalapa por venir a estudiar a este lugar tan increíble que es la UNAM, rodeada por la aventura que es la Ciudad de México.

Y lo anterior no significa la abnegada aceptación de un “sacrificio” ni nada parecido. Quiero decir que han sido tantas las cosas buenas que no han dejado ni un recoveco para las de otro tipo. Los sinsabores siempre fueron brevísimos, tan olvidables que me acuerdo de algunos que no tienen el menor caso. En un cubículo del Instituto de Astronomía usualmente repleto de estudiantes, pero ahora vacío, vuelvo a caer en cuenta que una de las mejores decisiones de mi vida fué la que tomé una tarde en Veracruz y que me trajo hasta este momento.

La gran fuente de fuerza y sustento para todo esto es, por supuesto, mi madre, quien nunca escatimó nada para poder ayudarme. A ella le debo todo lo que ahora (y siempre) he podido hacer y nunca voy a encontrar la forma ni el tiempo suficiente para poder terminar de agradecerle. Ella sigue allá, pero aún así la traigo conmigo todos los días.

No puedo comenzar a agradecer sino comenzando por William, mi asesor de tesis, quien desde el principio estuvo dispuesto y entusiasta. No recuerdo ni un sólo instante en que esto no se cumpliera, y menos aún faltó su comprensión en lo personal en múltiples ocasiones. Muchas gracias. A Sergio, la decisión de trabajar en astrofísica se la debo a él y a su curso de astrofísica relativista. Siempre ha sido un apoyo fundamental en todo lo que he hecho en estos últimos años y en este Instituto, tanto como que gracias a él, sigo aquí. Lo mismo para José Peña, que me ayudó a dar los primeros pasos en esa parte tan olvidada de la Astronomía que es asomarse por un telescopio. A todos mis sinodales: Manuel Peimbert, Xóchitl Blanco y Genaro Toledo (además de William y Sergio) porque luego de poder disfrutar con sus cursos, se han tomado el tiempo para leer y corregir este trabajo

El gusto de ser Puma no será, por sí mismo, la cosa más memorable. Los amigos son los que siempre hacen que valga la pena, si la hay. Desde el inicio encontré aquellos con los que he compartido más que las clases, y espero siga siendo así. Gracias a Guillermo, el más entrañable, por todos esos viernes de sombrero que se extendieron a toda la semana durante tanto tiempo, junto con mi mismísimo paisano Miguel, siempre con una sonrisa. A la Yetz, por tantos momentos de desesperación. A Laurita, quien siempre halló la forma de resolver los problemas de la tarea aunque eso le costara (y le sigue costando) el caro sacrificio de dejar muchas tardes de su vida en la biblioteca; tardes que hubieran sido totalmente insufribles de no ser por la

genial Vasthi. Para ellas dos, el abrazo más fuerte. La Cris, con quien uno aprende de que se trata eso de tener serenidad. Cynthia, que me ha dado el exclusivo privilegio de su confianza y contarme como uno de sus amigos, después de tantos ires y venires.

Nacho, que a un lado de la gran diferencia de edades, su poca habilidad prensil y escaso cabello, ofrece esos peligrosos tours gastronómicos; espero que podamos compartir de nuevo el mismo bote. Paola, tanta migraña que es bien difícil escaparse de la nostalgia. Adrianita, que me acompañó y ayudó en el lento proceso de dar ese paso, mediante varios valiosos pasitos. Víctor, ese simpático matemático con quien además, comparto el gran gusto por ese puñado de buenos grupos.

Correspondo a esta misma sección en el admirable trabajo de alguien de quien no podría esperarse menos: luego de tantos kilómetros, talleres y deshuesaderos me encuentro finalmente en la posición de agradecer a César. Nunca está de más la ayuda del experto, pero por el contrario, es indispensable la compañía de un amigo. Todos esos momentos de discusión ciertamente le han dado forma no sólo a este trabajo. A Guillaume, con quien pude entenderme en varios idiomas en tan poco tiempo, también correspondo tus agradecimientos: un placer, Jean-Pierre. Mamadou, quien fuera de *Da Ghetto* me deja compartir un poco de su gran aventura, fama y conquistas. Erika, con quien el poco tiempo causa la amnesia que lleva a los buenos recuerdos, te debo el primer empujón. A todos los que durante este largo tiempo han compartido este cubo y han colaborado en su reputación. A Martín, a quien hasta el momento no sé si verdaderamente tuvo mejor suerte. Mario, que mantiene una enseñanza continua del oficio secretarial. Eréndira, que todo se le resbala. Itan, por su amplia y diaria sonrisa que junto con todas esas pláticas hicieron que el tiempo que duró la tesis fuese menos que un tris (y la cosa de la selección natural).

A mis más viejos pero fuertes amigos: Humberto, inseparable desde hace mucho; es siempre como regresar al primer día de clases, a pesar de vivir en planetas diferentes. Juan Pablo, que vive en uno donde las guerras napoleónicas existen, con todo y las buenas intenciones. Yasser es la extensión de mi familia, compañero de viaje; a pesar de que hay más que agradecer, no me alcanza mas que para pagar algo de la amistad.

A Rosa y Alma, sin las que no hubiera tenido donde caer y que me recibieron mucho mejor de lo que pude haber esperado. A toda mi familia, pero muy especialmente a mis abuelos, Anatolio (†) y Soledad, con quienes tanto compartí y con quienes tuve y tengo la envidiable oportunidad de ver que la sabiduría de los viejos no es ningún mito.

A todos los que hacen Wikipedia, por hacer de mis momentos de ocio los mas provechosos del día.

Finalmente al CONACyT, quien mediante el proyecto 36632E apoyó la realización de este trabajo.

# Introducción

Las *Oscilaciones Cuasi-Periódicas de kHz* (OCP de kHz) forman parte de un grupo de fenómenos que se manifiestan en el espectro de rayos X de ciertos sistemas binarios. En estos sistemas un objeto compacto acreta masa desde una estrella compañera y, dependiendo de las características de ambas, la transferencia de masa ocurre de dos formas distintas: acreción de disco y acreción por viento estelar. Una parte del flujo de rayos X que emiten dichos objetos puede producirse debido a que la energía potencial gravitacional, liberada conforme los flujos de acreción se acercan al objeto central, se emite en las regiones internas de los discos de acreción o en la superficie de una estrella de neutrones. La asociación de este tipo de emisión de energía con los fenómenos mencionados anteriormente conduce a la hipótesis de que las OCP de kHz se originan en el disco de acreción.

El interés principal para el estudio de éste fenómeno consiste en la oportunidad que presenta para el estudio de los efectos de relatividad general, presentes en los objetos compactos. Las OCP, junto con los *pulsares de milisegundo* y las *oscilaciones de ráfaga* conforman un grupo que presenta efectos en escalas dinámicas de milisegundos, tiempos que caracterizan los movimientos de materia bajo la influencia de campos gravitacionales intensos y por ende, de índole relativista.

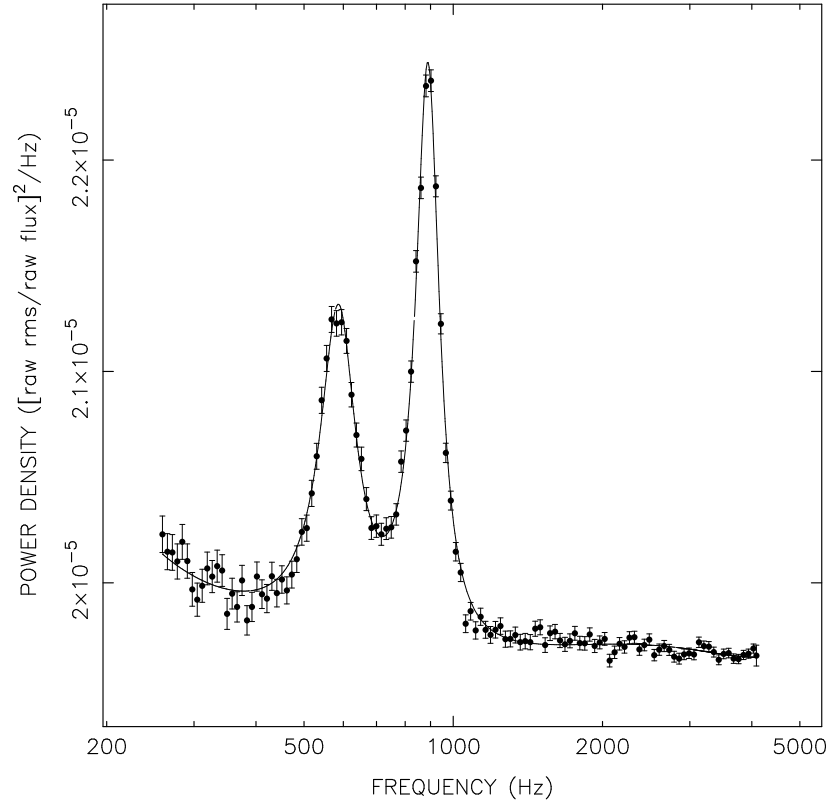
El estudio de las OCP de kHz es relativamente nuevo, pues fué apenas en febrero de 1996 cuando se detectó el primer espectro de frecuencias de variabilidad temporal, en el objeto Sco X-1 (van der Klis et al. 1996). Las OCP de kHz aparecen como 2 picos en el espectro de frecuencias de algunos objeto compactos (fig. 1), de diferente magnitud pero siempre acompañados en pares. Mediante el valor de las frecuencias de las OCP pueden distinguirse dos tipos de oscilación: las de baja frecuencia (que no van en pares, con períodos de algunos segundos y descubiertas en los años 80 <sup>1</sup>) y su contraparte de kilohertz, observadas en los espectros de rayos X. Ejemplos de éste fenómeno han sido observados en sistemas binarios de baja masa (sec. §1.2) cuyos objetos compactos pueden ser enanas blancas, candidatos a hoyos negros o estrellas de neutrones.

Poco tiempo después del descubrimiento de las OCP se sugirió que el

---

<sup>1</sup>van der Klis et al. 1985





**Figura 1:** Oscilaciones Cuasi-Periódicas en Sco X-1. La figura es de van der Klis et al. 1996

fenómeno puede producirse debido a las oscilaciones entre distintas órbitas en el flujo de acreción, producto del desacoplamiento de frecuencias en relatividad general (Abramowicz & Kluźniac 2001). Es decir, en vez de considerar sólo una frecuencia orbital  $\Omega$ , la utilización de un potencial característico de una métrica relativista conduce al desacoplamiento de frecuencias  $\omega_r$ ,  $\omega_\theta$  y  $\omega_\phi$ , para una simetría esférica, por ejemplo. Las ahora eigenfrecuencias pueden entrar en un tipo de resonancia conocida como *resonancia paramétrica* que se produce cuando los sistemas oscilantes tienen la forma de una ecuación de Mathieu, que se caracteriza por incluir 2 frecuencias en un mismo oscilador. Cuando las frecuencias alcanzan valores que provocan que las razones entre éstas estén en números enteros, la resonancia se produce, haciendo que la amplitud de la oscilación explote.

Aprovechando las propiedades de éste tipo de ecuaciones, puede construirse un sistema de dos osciladores, cada uno con distinta frecuencia, que refleje las características del movimiento orbital alrededor de los objetos compactos, en el que también se consideren las no-linealidades y la deriva-

ción de algún tipo de acoplamiento, como una hipótesis para el origen, al menos en el sentido analítico, de las OCP.

En el trabajo que inicia a vuelta de hoja se describen algunas de las propiedades de los sistemas binarios y de los fenómenos en rayos X que tienen lugar. Luego se hace un repaso sobre los diferentes tipos de osciladores, para llegar a la ecuación de Mathieu y al método que se utiliza para resolverla. Finalmente, y después de un análisis de la resonancia paramétrica, se habla sobre la construcción del sistema de osciladores, su solución y los resultados en su aplicación al problema del origen de las OCP.



# Capítulo 1

## Propiedades de los Sistemas Binarios de Rayos X

Un sistema binario está formado por dos estrellas ligadas gravitacionalmente. Puesto que alrededor de la mitad de la población total de estrellas vive en sistemas binarios o múltiples, la probabilidad de encontrar este tipo de sistemas es alta. Sin embargo, para que estos sean fuentes de rayos X, en dichos sistemas debe encontrarse al menos un objeto compacto (ver sec. §1.4.1) que ya sea mediante fenómenos en su superficie o mecanismos de acreción, permita emitir en dicha banda de frecuencias.

### §1.1. Propiedades

Los *Sistemas Binarios de Rayos X* (BRX) constituyen una de las fuentes más brillantes de rayos X conocidas hasta el momento en el Universo. La primera fuente de rayos X no solar fue descubierta en 1962, por un grupo de científicos bajo la dirección de Riccardo Giacconi de *American Science and Engineering*, Cambridge, EU; quienes montaron un detector de rayos X a bordo de un cohete, con lo que identificaron Scorpius X-1, a la postre identificada como binaria de rayos X (Gursky *et al.* 1966; Sandage *et al.* 1966; Gottlieb *et al.* 1975).

Los principales factores que determinan el tipo de emisión de estos objetos son:

1. Si el objeto central es una estrella de neutrones o un hoyo negro.
2. La geometría e intensidad del campo magnético, si se trata de una estrella de neutrones.
3. La geometría del flujo de acreción, esférica o de disco.

De esta manera, es posible identificar si la región de emisión es la capa polar magnética de una estrella de neutrones, el disco de acreción alrededor

de un hoyo negro, la región de choque en un flujo esférico, o la parte interior del disco de acreción de una estrella de neutrones. Además, la masa del objeto y la tasa de acreción influyen en la forma del espectro, la luminosidad y la variabilidad de la emisión.

En las estrellas de neutrones, un fuerte campo magnético ( $\sim 10^{12}$  G) limita la frontera interna del disco de acreción a cientos de radios de la estrella con respecto de su superficie, además de colimar el flujo hacia los polos magnéticos. Si los ejes de dichos polos no coinciden con los de rotación, pueden verse pulsaciones de rayos X, siempre que la emisión coincida con la línea de visión. Por otro lado, si el campo magnético es débil ( $\lesssim 10^{10}$  G), el disco puede tocar o al menos acercarse a la superficie de la estrella. La energía liberada por el disco de acreción interno y la frontera entre el disco y la superficie de la estrella de neutrones dominan la emisión de rayos X de este tipo de sistemas. Si se trata de un hoyo negro, los rayos X provienen del disco interno, resultado del calentamiento viscoso <sup>1</sup>.

El tipo espectral de la compañera determina el modo de la transferencia de masa así como el ambiente en la vecindad del objeto compacto. En los sistemas binarios de rayos X de baja masa, BRXBM <sup>2</sup>, esta compañera es del tipo AV o más tardía; aunque en ciertas ocasiones puede tratarse de una enana blanca. Como estos objetos no poseen un viento lo suficientemente fuerte para alcanzar la transferencia de masa que conduzca a la tasa de acreción necesaria, los rayos X se producen sólo si dichas estrellas llenan su lóbulo de Roche <sup>3</sup>.

En los sistemas binarios de rayos X de alta masa, BRXAM, la compañera es del tipo B u O, cuya luminosidad en rayos UV y en óptico puede ser comparable con las de la fuente de rayos X. En este caso el viento es considerable, de entre  $10^{-6}$  y  $10^{-10}$   $M_{\odot}$ /año, con una velocidad terminal de  $2000 \text{ km s}^{-1}$ , por lo que una estrella de neutrones o un hoyo negro pueden atrapar una gran cantidad de esta materia, suficiente para producir los rayos X. En las BRXAM la acreción puede deberse a que el radio del objeto es mayor al lóbulo de Roche, sin embargo, si el cociente de masa entre el objeto compacto y su compañera sobrepasa la unidad, la transferencia de masa en dicho caso puede volverse inestable, aproximadamente  $10^5$  años después de iniciada la acreción (Savonije 1983).

Muchas de las binarias en rayos X aparecen como fuentes intensas por corto tiempo (días), para luego decaer a los largo de meses o incluso años.

---

<sup>1</sup>Las partículas de la materia que se acreta pierden su momento angular original conforme comienzan a girar en el disco, proceso que libera energía gravitacional. La mitad de esa energía se invierte en el incremento de la energía cinética de rotación, mientras la otra parte se convierte en energía térmica que es radiada por la superficie de la parte interna del disco (Shakura y Sunyaev 1973).

<sup>2</sup>Este tipo, junto con el correspondiente para masas mayores se define en la siguiente sección.

<sup>3</sup>*Ibid.*

Estas fuentes transitorias pueden, por algunas semanas, estar entre las más brillantes en el cielo ( $10^4 - 10^5 L_{\odot}$ ).

La geometría del flujo está determinada por el momento angular (por unidad de masa) de la acreción. Si el radio de la compañera sobrepasa el lóbulo de Roche, entonces una corriente de flujo pasará por uno de los puntos de Lagrange y luego orbitará alrededor del objeto compacto en un radio determinado por el momento angular, cuyo límite exterior esta acotado por las fuerzas de marea. En este caso, las interacciones viscosas y la conservación de momento angular provocan la expansión del disco. Por otro lado, si el momento angular se adquiere desde el viento estelar, la magnitud de este será mucho menor, dando como resultado que el disco de acreción, si existe, sea muy tenue.

Finalmente, la emisión de estos objetos se propaga a través del medio que los rodea, lo que modifica los espectros de emisión y absorción. Las zonas que intervienen en estos procesos son: la magnetosfera de la estrella de neutrones, el disco de acreción, la corona del disco, el viento, la atmósfera de la compañera y el medio interestelar.

## §1.2. Sistemas Binarios de alta y baja masa

Como se ha dicho, la transferencia de masa de una estrella a un objeto compacto libera energía potencial gravitacional en forma de radiación. Si  $L$  es la luminosidad resultado del proceso de acreción a una tasa  $\dot{M}$  alrededor del objeto compacto de masa  $M$  y radio  $R$ , entonces

$$L \approx \frac{GM\dot{M}}{R}.$$

Si esta radiación es termalizada, la temperatura efectiva estará determinada por

$$L \approx 4\pi R^2(\sigma T_{eff}^4),$$

donde  $T_{eff}$  es la temperatura efectiva. Como regla general, sabemos que cualquier luminosidad tiene como límite la luminosidad de Eddington (el punto en el que la luminosidad del objeto detiene el proceso de acreción), con lo que es posible calcular la tasa máxima de acreción igualando ambas luminosidades (Padmanabhan 2001, vol. 2), esto es, la luminosidad de acreción para una estrella de neutrones

$$L_{acr} = \frac{GM\dot{M}}{R} = 10^{4.5} L_{\odot} \left( \frac{R}{10^6 \text{ cm}} \right)^{-1} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \left( \frac{\dot{M}}{1.5 \times 10^{-8} M_{\odot} / \text{ año}} \right) \tag{1.1}$$

con la luminosidad de Eddington

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} = 10^{4.5} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) L_\odot, \quad (1.2)$$

de donde obtenemos la acreción máxima

$$\dot{M}_{Edd} = (1.5 \times 10^{-8} M_\odot/\text{año}) R_6 \quad (1.3)$$

, donde la masa del protón se indica con  $m_p$  y  $R_6$  es el radio del objeto compacto en unidades de  $10^6 \text{ cm}$ . Para una estrella de neutrones típica  $M = 1.41 M_\odot$ ,  $R_6 = 1$ , la máxima tasa de acreción que puede sustentarse en estado estacionario es aproximadamente  $1.5 \times 10^{-8} M_\odot \text{ año}^{-1}$ . Con este resultado, lo siguiente es preguntarnos para qué tipo de estrellas pueden darse estos niveles de acreción, en un sistema binario.

Existen dos procesos diferentes que conducen a la acreción sobre una estrella de neutrones. En el primero, la compañera llena su lóbulo de Roche y transfiere masa a través de uno de los puntos Lagrangianos del sistema a la estrella de neutrones. En el segundo caso, la estrella compañera tiene un considerable viento estelar, del que se alimenta la acreción. Posteriormente veremos que el primer proceso es efectivo sólo cuando la estrella compañera tiene masas menores a  $\sim 1 M_\odot$ , mientras que el segundo ocurre cuando dicha estrella es muy masiva  $M \gtrsim 15 M_\odot$ . Por el momento, abrimos un paréntesis para hablar sobre el lóbulo de Roche.

### Lóbulo de Roche

Sea un sistema de 3 cuerpos con masas  $m_1, m_2 \gg m_3$ , con  $m_1$  y  $m_2$  describiendo órbitas circulares alrededor de su centro de masa. En general, la ecuación de movimiento para una partícula sobre la que actúa un potencial  $V(\mathbf{x})$  en un marco de referencia que gira con velocidad angular constante  $\Omega$  es:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad (1.4)$$

por lo que, si las coordenadas de  $m_3$  son  $(x, y)$ , la ecuación de movimiento a partir de (1.4) es:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.5)$$

donde

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu). \quad (1.6)$$

$$U = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}, \quad \rho_1 = [(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2}, \quad \rho_2 = [(x - 1 + \mu)^2 + y^2]^{1/2}, \quad (1.7)$$

con  $(-\mu, 0)$  y  $(1 - \mu, 0)$  como las coordenadas de  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Si multiplicamos las dos ecuaciones (1.5) por  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$ , y luego las sumamos, obtenemos

$$2\Phi - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C = \text{constante}. \quad (1.8)$$

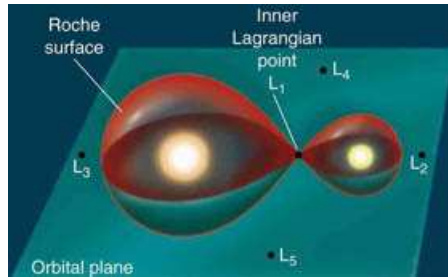
Esta última, llamada *Constante de Jacobi*, es esencialmente la energía del sistema. Lo siguiente es ver lo que sucede manipulando las condiciones de equilibrio. Dado un valor de  $C$ , se debe satisfacer la desigualdad  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Phi - C > 0$ , de donde es posible ver que el movimiento se restringe a una curva  $\Phi = C/2$  llamada curva de Hill.

Reescribiendo la ecuación (1.6), expresando  $(x, y)$  en términos de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , tenemos

$$\Phi = \frac{3}{2} + (1 - \mu) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_1} \right) (\rho_1 - 1)^2 + \mu \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_2} \right) (\rho_2 - 1)^2. \quad (1.9)$$

$\Phi$  es siempre positiva y tiene un mínimo  $\Phi_{min} = 3/2$  cuando  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ . Esto es, si  $m_3$  está en cualquiera de estos dos puntos  $\rho_1, \rho_2$  con velocidad cero (en el marco de referencia rotacional), la configuración de todo el sistema será estacionaria, con  $m_3$  en la posición de mínimo de potencial. La ubicación de dichos puntos (llamados  $L_4$  y  $L_5$ ) coincide con la de dos triángulos equiláteros cuya base la forman  $m_1$  y  $m_2$ . Tal caso corresponde a  $C = 3$  para el que la curva de Hill se degenera en los dos puntos aislados  $L_4$  y  $L_5$ .

Otra solución de equilibrio la constituyen los valores simultáneos  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $(\partial\Phi/\partial x) = 0$  y  $(\partial\Phi/\partial y) = 0$ ; con lo que se encuentran otros 3 puntos de estabilidad  $L_1, L_2, L_3$  sobre la línea que une a  $m_1$  y  $m_2$ . A la superficie rodeada por la curva de Hill se le conoce como *Lóbulo de Roche*, donde todo el material está ligado gravitacionalmente a la estrella.



**Figura 1.1:** Puntos de Lagrange y Lóbulo de Roche.

Continuando con los tipos de acreción, en el caso del desbordamiento del lóbulo de Roche, la transferencia ocurre a bajas velocidades y toda la materia que se transfiere se acreta por medio de la compañera. Típicamente, la estrella que pierde masa es de mas de  $\sim 1.4 M_{\odot}$ . Si este es el caso, la órbita y el tamaño del lóbulo de Roche disminuirá hasta ser menor que el de



la estrella. Esta situación se convierte rápidamente en inestable, acelerando el proceso de transferencia de masa a una escala térmica:

$$\tau_{ter} = \frac{GM^2}{RL} \simeq 3 \times 10^7 \text{ años} \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)(L/L_\odot)}. \quad (1.10)$$

Utilizando las relaciones de escala  $L \propto M^{3.5}$ ,  $R \propto M^{0.5}$  (Padmanabhan 2001, vol. 2), válidas en el caso de que la masa de la compañera sea mayor que la del objeto compacto, obtenemos

$$\tau_{ter} = 3 \times 10^7 \text{ años} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-2}. \quad (1.11)$$

Suponiendo que la mayoría de la masa de la compañera se transfiere en esta escala de tiempo ( $\sim 0.8 M_\odot$ ), obtenemos la tasa de transferencia

$$\dot{M}_{Roche} \simeq 3 \times 10^{-8} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^3 M_\odot/\text{años}. \quad (1.12)$$

Aquí vemos que  $\dot{M}_{Roche} < \dot{M}_{Edd}$  solo si  $M \lesssim M_\odot$ . Sin embargo, esto no ocurre pues aquí la masa del objeto compacto no es mayor que la de la compañera. Pero si ese fuera el caso, puede demostrarse que la transferencia de masa provocaría un aumento en el tamaño de la órbita, además de reducir el tiempo de dicho proceso a escalas nucleares (Padmanabhan 2001, vol. 2):

$$\tau_{nucl} \approx 10^{10} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{L}{L_\odot} \right)^{-1} \text{ años}. \quad (1.13)$$

Utilizando  $L \propto M^{3.5}$ , tenemos  $\dot{M} \approx 10^{-10} M_\odot/\text{año} (M/M_\odot)^{3.5}$ , que es menor que la tasa de acreción de Eddington sólo si  $M \lesssim 3M_\odot$ , aunque bajo la primera suposición  $M \lesssim 1.4M_\odot$ . Entonces concluimos que el desbordamiento del lóbulo de Roche puede producir acreción estable con  $\dot{M} < \dot{M}_{Edd}$  siempre que la masa de la estrella sea menor de  $\sim 1.4 M_\odot$ .

La situación es algo diferente en el caso de los sistemas con estrellas compañeras masivas ( $M \gtrsim 15 M_\odot$ ). Estas estrellas tienen fuertes vientos estelares, conduciéndoles a una alta tasa de pérdida de materia ( $\sim 10^{-9} M_\odot/\text{año}$  o más) a fuertes velocidades ( $V_{viento} = (1 - 2) \times 10^3 \text{ km/s}$ ). De todo ese viento, sólo una pequeña fracción será capturada por la estrella de neutrones. Podemos obtener el radio crítico dentro del cual la acreción tiene lugar si igualamos la profundidad del potencial gravitacional del objeto compacto ( $GM_n/r_{acr}$ ) en el radio de acreción con la energía cinética (por unidad de masa)  $V_{viento}^2/2$  del material en el viento. Asumiendo que todo el flujo de partículas a través de un área  $\pi r_{acr}^2$  es capturado por la estrella de neutrones (que orbita a una distancia  $a$  de la compañera), la tasa de acreción se calcula como:

$$\dot{M}_{acr} = \frac{\pi r_{acr}^2}{4\pi a^2} \dot{M}_{viento} = \left( \frac{G^2 M_n^2}{V_{viento}^4 a^2} \right) \dot{M}_{viento} \equiv S \dot{M}_{viento}. \quad (1.14)$$

Como puede verse, la expresión anterior depende fuertemente de la velocidad de viento. Si  $a = 50 R_{\odot}$  y  $V_{viento} = 10^3 \text{ km/s}$ , tenemos  $S \approx 5 \times 10^{-5}$ . Para tener una acreción significativa, digamos,  $\dot{M}_{acr} \gtrsim 10^{-12} M_{\odot}/\text{año}$ , necesitamos  $\dot{M}_{viento} \gtrsim 2 \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{año}$ . Estos vientos solo se encuentran en estrellas de secuencia principal con masas mayores a  $(20 - 25) M_{\odot}$  y en supergigantes azules mayores que  $(15 - 20) M_{\odot}$ .

Estos resultados nos llevan a una conclusión importante. Suponiendo que los remanentes compactos (relativistas) como una estrella de neutrones o un agujero negro pueden formarse al lado de estrellas de cualquier masa, los sistemas binarios de acreción persistente pueden surgir únicamente de dos maneras:

- a). Un objeto compacto y una compañera de baja masa ( $\lesssim 1.4 M_{\odot}$ ) en la que la acreción se debe al desbordamiento del lóbulo de Roche.
- b). Un objeto compacto y una compañera de alta masa ( $\gtrsim 15 M_{\odot}$ ) que acreta debido al fuerte viento estelar.

En el rango de  $(1.4 - 1.5 M_{\odot})$  los vientos son muy débiles para que ocurra (b), mientras que (a) es impedido por la luminosidad de super-Eddington. De aquí que las estrellas con masas en este intervalo no produzcan acreción continua en sistemas binarios.

A estas dos clases de sistemas de acreción se les llama comúnmente *binarias de rayos X de baja masa* (LMXB) y *binarias de rayos X de alta masa* (HMXB) <sup>4</sup>. Estas binarias de rayos X son sistemas que pueden contener tanto una estrella de neutrones como un agujero negro, acretando material desde la compañera; y como se ha dicho, son las fuentes más brillantes de rayos X en el cielo.

En las BRXAM la compañera es una estrella de tipo O ó B ( $M \gtrsim 10 M_{\odot}$ ) cuya emisión predomina en las bandas del óptico y UV, siendo comparable o incluso superior a la de rayos X. Esta estrella pierde masa por viento estelar a una tasa de  $\dot{M} \simeq (10^{-10} - 10^{-6}) M_{\odot}/\text{año}$  y con una velocidad  $v \simeq 2000 \text{ km/s}$ . La fuente de rayos X es alimentada por una fracción de la masa del viento estelar que es acretada. En general, las BRXAM muestran fuertes llamaradas (*flare-ups*), pulsaciones de rayos X, ráfagas transitorias (*transient outbursts*) y variabilidad en escalas de tiempo de minutos. La escala de tiempo característica de las BRXAM es de  $\tau_{BRXAM} \simeq 5 \times 10^4$  años. Hasta el año 2001 se habían encontrado  $\sim 50$  BRXAM en nuestra galaxia, con lo que se puede deducir una tasa de formación de  $\sim 10^{-3}$  por año, que es apenas el 10% de la tasa de aparición de supernovas tipo II en nuestra galaxia. Esto implica que de 1 a 3 de cada 10 estrellas de neutrones en la galaxia están en BRXAM.

Por otro lado, las BRXBM contienen compañeras más tardías que AV, con  $M \lesssim 2 M_{\odot}$ , y una emisión que puede verse dominada por el disco de

<sup>4</sup>Por sus siglas en inglés. En adelante se utilizarán las abreviaturas: BRXBM y BRXAM

acreción. Estos sistemas aparecen como objetos tenues de color azul en la banda del óptico. La escala de tiempo para la transferencia de masa es de  $\tau_{BRXBM} \gtrsim 10^8$  años, mientras que al haber  $\sim 100$  BRXBM (2001) en la galaxia, la tasa de formación es  $\sim 10^{-6}$  por año, i.e., 1 de cada  $10^{4.5}$  (la tasa de formación es menor que la de formación de supernovas tipo II por un factor de  $10^{4.5}$ ) estrellas de neutrones en nuestra galaxia es parte de una BRXBM.

Si la acreción es esférica, sobre el remanente compacto de masa  $M$  y radio  $R$  se acumulará una cantidad de materia  $\Delta M = \dot{M}(2GM/R^3)^{1/2}$  sobre una escala de tiempo dinámica. La densidad de columna a causa del gas acumulado será de  $C = \Delta M/(4\pi R^2)$ . Expresando  $\dot{M}$  en términos de la luminosidad de acreción  $L = (GM\dot{M}/R)$ , con lo que  $C = R^{1/2}L/[4\pi(GM)^{3/2}]$ . Para una estrella de neutrones,  $C \simeq 0.7$  gm/cm<sup>2</sup>, suficiente para que los rayos X puedan escapar del sistema, lo que no ocurre para las enanas blancas ( $C \simeq 22$  gm/cm<sup>2</sup>), pues los rayos X son comúnmente detenidos a densidades de columna de unos pocos gramos por centímetro cuadrado.

### §1.3. Acreción

Ya hemos hablado de como la naturaleza del sistema define el tipo de acreción con que el objeto captura masa de la compañera. En esta sección se discutirá brevemente la dinámica de los materiales gaseosos, que orbitan en un plano alrededor del objeto compacto que constituyen los discos de acreción.

#### §1.3.1. Características

Una manera de tratar la formación del disco es al observar que este se forma cuando el momento angular específico  $J$  de la materia que se acreta sobre el remanente compacto es muy grande para caer directamente sobre él, esto es, que el radio de circularización  $R_{circ}$ , donde la materia pierde energía pero no momento angular,

$$R_{circ} = \frac{J^2}{GM_1}, \quad (1.15)$$

es mayor que el radio efectivo  $R$  del objeto compacto  $M$ . Es decir:

- i). Si  $R > R_{circ}$ , la materia acreta directamente.
- ii). Si  $R < R_{circ}$ , la materia debe perder momento angular para acretar

En las binarias de rayos X el caso (ii) siempre se cumple, como cuando la acreción se da por desbordamiento de lóbulo de Roche. La excepción la constituyen los objetos con un importante campo magnético, como ocurre

en algunas estrellas de neutrones y enanas blancas en las que además la acreción se debe por viento estelar.

Algunas enanas blancas pueden tener los momentos magnéticos ( $\mu = BR^3$ ) más grandes que cualquier objeto astronómico (más de  $10^{34} G \text{ cm}^3$ ), causando que el radio magnetosférico  $r_\mu$  sea incluso comparable con el de separación  $a$  de la binaria. Un ejemplo ilustrativo de esto lo dan algunas *Variables Cataclísmicas* (binarias donde el objeto compacto es una enana blanca), como *AM Herculis*, donde la razón  $r_\mu/a$  es tan grande que suprime la formación del disco.

Suponiendo que la materia puede orbitar a  $R_{\text{circ}}$ , ésta debe perder energía a un ritmo mayor al que se pierde momento angular. Esto indica que la acreción debe ocurrir a través de una secuencia de órbitas circulares con una disminución gradual de  $J$ ; si además no existe un elemento externo que disminuya la cantidad de momento angular, como el campo magnético<sup>5</sup>, el proceso sólo puede completarse si  $J$  es transportado hacia afuera, por lo que el borde del disco se extiende a una distancia mucho mayor de  $R_{\text{circ}}$ . La mayoría del momento angular original es llevado hacia afuera de esta manera, donde puede regresar a la órbita de la compañera a través de fuerzas de marea.

El agente responsable de la disipación de energía y del transporte de momento angular es la *viscosidad*, aunque la física detrás de este concepto es hasta el día de hoy poco clara. Esto da como resultado que la teoría de discos de acreción cuente con distintas suposiciones sobre el comportamiento de ésta para explicar fenómenos como la inestabilidad. Sin embargo, hay propiedades de los discos estacionarios que son independientes de la viscosidad, lo que permite darnos una buena idea sobre sus características.

### §1.3.2. Modelo de Discos Delgados

Esta configuración se basa en la suposición de que los discos de acreción existen prácticamente sólo en el plano, con un grosor  $H$  mucho menor que el radio  $R$ . Esto requiere que la luminosidad sea mucho menor que la de Eddington. Si  $L \gtrsim L_{\text{Edd}}$  la fuerza de radiación es comparable con la de la gravedad, por lo que la estructura gaseosa en el eje vertical puede sostenerse contra ella, haciendo que  $H \approx R$ . Si  $(L/L_{\text{Edd}}) \ll 1$ , la radiación no puede soportar la caída de materia, con lo que  $H < R$ . Sin embargo, es necesario verificar si la presión puede proveer del soporte necesario.

Puesto que la componente vertical de la aceleración a la altura  $H$  es

---

<sup>5</sup>El campo magnético puede impedir la libre circulación del material acretado (plasma) a lo largo de las órbitas debido al choque de las líneas de campo del plasma con las del objeto compacto, lo que disminuiría la velocidad del material y con ello, su momento angular

aproximadamente

$$\left(\frac{GM}{R^2}\right) \left(\frac{H}{R}\right),$$

se requiere que el soporte vertical sea

$$\left(\frac{GM}{R^2}\right) \left(\frac{H}{R}\right) = \frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial P}{\partial z} \right| \simeq \frac{P_c}{\rho_c H}, \quad (1.16)$$

donde  $P_c$  y  $\rho_c$  son la densidad y la presión centrales, respectivamente, y  $M$  es la masa del objeto compacto central. Si la velocidad azimutal de un fluido en una órbita kepleriana es  $v_\phi = (GM/R)^{1/2}$ , podemos escribir la condición anterior como

$$c_s^2 \simeq \frac{P_c}{\rho_c} \simeq v_\phi^2 \frac{H^2}{R^2}. \quad (1.17)$$

Para que el disco sea delgado, debe ocurrir que  $H \ll R$ , que equivale a  $c_s^2 \ll v_\phi^2$ . En el mismo límite, la aceleración radial debida a la presión está dada por:

$$\frac{1}{\rho} \left| \frac{\partial P}{\partial R} \right| \simeq \frac{P_c}{\rho_c R} \simeq \frac{c_s^2}{R} \simeq \frac{GM}{R^2} \frac{H^2}{R^2}, \quad (1.18)$$

lo cual es mucho mas pequeño que la aceleración gravitacional cuando  $H \ll R$ . Esto muestra que el fluido en un disco delgado se mueve en una órbita kepleriana con un alto grado de precisión.

Lo siguiente es considerar la órbita de un disco en *estado estacionario*, tomando en cuenta la posibilidad de pérdida de momento angular mediante algún mecanismo. La cantidad de materia que cruza por algún radio  $R$  por unidad de tiempo es

$$\dot{M} = -2\pi R \Sigma v_R, \quad (1.19)$$

donde  $v_R$  es la velocidad radial del gas ( $v_R \ll v_\phi$ , la velocidad azimutal) y  $\Sigma(R)$  es la densidad de superficie del disco, integrada en dirección  $z$ . En un disco kepleriano, la velocidad angular de rotación varía como  $\Omega(R) = (GM/R^3)^{1/2}$ , por lo que el momento angular específico varía como  $R^2\Omega \propto R^{1/2}$ , que disminuye con  $R$ . Esto nos indica que la acreción a través de órbitas keplerianas sucesivas es posible sólo si constantemente se pierde momento angular por alguna torca provocada por la viscosidad. Si tomamos la aceleración causada por el cambio de momento angular como  $Rd\Omega/dR$ , podemos calcular la fuerza viscosa por unidad de longitud alrededor del radio  $R$  como:

$$\mathcal{F} = \nu \Sigma R \left( \frac{d\Omega}{dR} \right),$$

donde  $\nu$  es algún coeficiente no especificado de viscosidad. Con esto, la torca de la viscosidad alrededor de toda la circunferencia es:

$$G(R) = (2\pi R \mathcal{F}) R = \nu \Sigma 2\pi R^3 \left( \frac{d\Omega}{dR} \right). \quad (1.20)$$

La dirección de la torca es tal que para un radio menor que  $R$ , la dirección que ésta le da al fluido es hacia atrás, perdiendo momento angular; y si por el contrario, el radio aumenta, se incrementa  $J$ .

Para determinar la estructura radial del disco debemos igualar la torca anterior con la tasa de pérdida de momento angular específico. Para esto, consideremos un anillo en el disco ubicado entre los radios  $R$  y  $dR + R$  y supongamos que para cierto tiempo, una cantidad  $\dot{M}$  entra al anillo  $R + dR$  con momento angular específico  $(R + dR)^2[\Omega(R + dR)]$  y lo deja en  $R$  con  $R^2[\Omega(R)]$ . De ésta manera, podemos ver que la pérdida neta de momento angular en el anillo de fluido por unidad de tiempo es

$$\dot{M} \left[ \frac{d(R^2\Omega)}{dR} \right] dR.$$

La pérdida de momento angular se debe a que la torca actúa sobre  $R$  y  $R + dR$ , cuyo efecto neto es  $(dG/dR)dR$ . Es decir:

$$\dot{M} \frac{d(R^2\Omega)}{dR} = -\frac{d}{dR} \left[ \nu \Sigma 2\pi R^3 \frac{d\Omega}{dR} \right]. \quad (1.21)$$

Utilizando  $\Omega(R) = (GM/R^3)^{1/2}$  e integrando, obtenemos

$$\nu \Sigma R^{1/2} = \frac{\dot{M}}{3\pi} R^{1/2} + \text{constante}. \quad (1.22)$$

La constante de integración, como es de suponer, puede determinarse bajo condiciones de contorno. Una posibilidad es asumir la existencia de un radio  $R_{int}$  como el borde interior del disco. Entonces, para calcular la constante decimos que el lado derecho de la ecuación (1.22) es cero en  $R_{int}$ , por tanto:

$$\nu \Sigma = \frac{\dot{M}}{3\pi} \left[ 1 - \left( \frac{R_{int}}{R} \right)^{1/2} \right]. \quad (1.23)$$

El valor de  $R_{int}$  varía según sea el caso. Si se trata de un hoyo negro,  $R_{int} = 6(GM/c^2)$  que es el radio marginal de la última órbita estable. En el caso de una estrella de neutrones o una enana blanca,  $R_{int}$  puede tomarse como el radio del objeto si el campo magnético es nulo. En el caso de que éste exista, la situación se complica y el radio debe calcularse a partir del balance entre la presión del campo magnético y la presión *ram*<sup>6</sup> (o de empuje). Este cálculo puede hacerse de una manera aproximada (sin tomar en cuenta la geometría del campo) suponiendo que a una distancia  $R$ , el campo magnético se comporta como un dipolo, esto es,  $B(R) = (R_0/R)^3 B_0$ ;

<sup>6</sup>La presión que produce el movimiento de un fluido contra alguna superficie, en este caso, la presión originada por la caída de material sobre la estrella

donde  $B_0$  es el campo magnético en la superficie del objeto compacto de radio  $R_0$ . La presión magnética en  $R$  debida a éste campo es:

$$P_{mag} = \frac{[B(R)]^2}{8\pi} = \frac{B_0^2 R_0^6}{8\pi R^6} \quad (1.24)$$

Si aunado a esto, suponemos que la materia acretada cae desde infinito con una velocidad  $v_i \approx (GM/R)^{1/2}$ , se obtiene que la tasa de acreción es de  $\dot{M} = (4\pi R^2 \rho v)$ , donde  $\rho$  es la densidad del gas. Este gas ejerce una presión ram  $P_g = \rho v_i^2$ , que también puede escribirse como

$$P_g \simeq \frac{\dot{M}}{4\pi R^2} \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (1.25)$$

Igualando esto último con la presión magnética (ec. 1.24) se determina el radio de la magnetosfera para el caso de la caída libre:

$$R_m \simeq G^{-1/7} B_0^{4/7} R_0^{12/7} M^{-1/7} \dot{M}^{-2/7} \quad (1.26)$$

Bajo los parámetros de una estrella de neutrones típica,  $R_m \sim 100$  veces el radio de tal estrella, con lo que se muestra que existe una amplia región entre el disco y la superficie de la estrella que es dominada por el campo magnético. Para una enana blanca,  $R_m$  es mayor al de la estrella únicamente si  $B > 10^6 G$ ; magnitud que no todos esos objetos alcanzan. La existencia de dicho campo indica la existencia de una columna de acreción formada en los polos magnéticos, por donde el material entra finalmente al objeto central.

El valor de la luminosidad en el disco de acreción puede obtenerse si se calcula la tasa a la que el material se calienta por la disipación de la viscosidad. Puede demostrarse a partir de la ecuación de cambio de energía para un fluido viscoso <sup>7</sup> que esto equivale a  $D(R) = (1/2\nu)t_{ij}t_{ij}$  (Shapiro & Teukolsky 1983), donde  $t_{ij}$  son las componentes del tensor de esfuerzos para la viscosidad, que en un disco delgado tiene sólo componentes para el movimiento radial en el plano orbital:

$$t_{r\phi} = t_{\phi r} = \nu \left( \frac{1}{r} v_{r,\phi} + v_{\phi,r} - \frac{v_\phi}{r} \right). \quad (1.27)$$

Como  $v_{r,\phi} = \frac{\partial v_r}{\partial \phi} = 0$ ;  $v_\phi = r\Omega = (GM/r)^{1/2}$ , entonces

$$t_{r\phi} \simeq -\frac{3}{2}\nu\Omega = -\frac{3}{2}\nu \left( \frac{GM}{r^3} \right)^{1/2}. \quad (1.28)$$

Por lo tanto, para todo el disco (utilizando 1.23):

---

<sup>7</sup>Es decir:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}v^2 + u \right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{du}{dt}$ , donde  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \mathbf{t}$  es la ecuación de Euler para un fluido con viscosidad y  $du = -Pd\frac{1}{\rho} + Tds$ .

$$D(R) = \Sigma \frac{1}{2\nu} t_{r\phi}^2 = \frac{3GM\dot{M}}{4\pi R^3} \left[ 1 - \left( \frac{R_{int}}{R} \right)^{1/2} \right]$$

y finalmente, para la luminosidad:

$$L = \int_{R_{int}}^{\infty} D(R) 2\pi R dR = \frac{GM\dot{M}}{2R_{int}}. \quad (1.29)$$

Aquí puede verse que  $L$  es la mitad de la energía potencial gravitacional perdida en la caída desde infinito hacia  $R_{int}$ . La otra mitad está presente como energía cinética en el fluido en  $R_{int}$  y no se disipa en calor: se pierde dentro del hoyo negro o en la frontera de la columna de acreción en el caso de un objeto compacto con superficie.

Como se ha dicho, el otro mecanismo de acreción ocurre mediante viento estelar. Sólo una muy pequeña cantidad del plasma eyectado ( $\lesssim 0.1\%$ ) es capturado por la estrella compacta, y dado que tal material tiene muy poco momento angular, la acreción es casi esférica. Una manera de modelar este tipo de acreción es suponiendo que el objeto compacto se encuentra dentro de un gas de extensión infinita y en reposo; a lo que se le llama *Acreción de Bondi* (1952). En pocas palabras, a partir de las ecuaciones de continuidad y de Euler de hidrodinámica no-relativista, se obtiene que la velocidad a la que se acreta el gas obedece la ecuación:

$$\frac{1}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{v_s^2} \right) \frac{dv}{dr} = -\frac{2}{r} + \frac{GM}{r^2 v_s^2}, \quad (1.30)$$

donde  $v_s$  es la velocidad del sonido dada en términos de presión y densidad  $v_s = \sqrt{\gamma P/\rho}$  cuando el gas sigue una relación politrópica  $P = \rho^\gamma$ . La velocidad  $v$  es igual a  $v_s$  en el punto sónico:

$$r_s = \frac{GM}{2v_s^2}. \quad (1.31)$$

Para la acreción esférica, la ecuación de continuidad es:

$$\dot{M} = 4\pi R^2 \rho v = \text{constante}. \quad (1.32)$$

Si se escribe la velocidad del sonido en el punto sónico como

$$v_s(r_s) = \left( \frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{1/2} v_\infty, \quad (1.33)$$

se encuentra que  $\dot{M}$  es:

$$\dot{M} = \left( \frac{2}{5 - 3\gamma} \right)^{5-3\gamma/2(\gamma-1)} \frac{\pi GM^2 \rho_\infty}{v_{s,\infty}^{3/2}}, \quad (1.34)$$



donde  $\rho_\infty$  y  $v_{s,\infty}$  son la densidad y la velocidad de sonido evaluadas en  $\infty$ .

En el caso de que el gas posea alguna rotación, aunque ésta sea muy pequeña, las líneas en las que el material es acretao bajo la simetría esférica dejan de ser radiales, formando parábolas cuyo foco está en la estrella (que se supone puntual), por lo que las líneas de corriente no acaban en la superficie de la estrella, como es el caso de la acreción esférica. Para el material que está fuera del plano ortogonal al eje de rotación (y que pasa por el centro de la estrella), las partículas que están en trayectorias opuestas simétricamente chocan entre sí, por lo que la componente de la velocidad perpendicular al eje de rotación se anula, produciendo una onda de choque y la energía cinética liberada es radiada en forma de calor. Lo anterior da como resultado que las partículas del gas limiten su movimiento al plano meridional alrededor del objeto compacto, formando un disco de acreción.

Sin embargo, esto es un caso ideal y no se ha tomado en cuenta el campo magnético (en el caso de que no se trate de un hoyo negro) ni que el gas proviene de un flujo mas o menos constante de viento estelar. Incluso la aproximación relativista del modelo de Bondi indica que existen trayectorias del gas que aún fuera del plano pueden llegar a la superficie del objeto, con lo que la simetría de disco se pierde. En general, existen modelos para cada caso de acreción: hoyos negros, estrellas de neutrones y enanas blancas con campo magnético y sin él. Cada caso depende de las particularidades del sistema, pero los dos ejemplos anteriores son suficientes para ilustrar a grandes rasgos lo que sucede en las binarias de rayos X, i.e., si se trata de una de baja o alta masa.

## §1.4. Fenómenos de Rayos X en Sistemas Binarios

### §1.4.1. Características

Ya se ha hablado un poco sobre la luminosidad en los discos de acreción alrededor de los objetos compactos, pero aún no se ha dicho el porqué ésta llega a alcanzar energías de rayos X. Para iniciar esta sección, trataremos muy brevemente esta situación.

Para un cuerpo que radía a la luminosidad de Eddington (ec. 1.2), tenemos:

$$L_{Edd} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} = 1.3 \times 10^{46} \left( \frac{M}{10^8 M_\odot} \right) \text{ erg/s.} \quad (1.35)$$

Igualando con la luminosidad de un sistema de tamaño  $R$  que radía como cuerpo negro con temperatura  $T$  se obtiene

$$T \simeq 1.8 \times 10^8 \text{ K} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/4} \left( \frac{R}{1 \text{ km}} \right)^{-1/2}. \quad (1.36)$$

Como  $10^8$  K es del orden de temperaturas a las que se radía en rayos X, el objeto alcanzará esas frecuencias si  $M \simeq M_\odot$ , para  $R \simeq 1$  km.

Existen diversos mecanismos que conducen a la emisión en rayos X en los discos de acreción, aunque en general estos se concentran en la zona interior del disco. Cuando no se trata de un hoyo negro, los rayos X pueden también emitirse como resultado de la explosión del material acretado en la superficie del objeto. En ambos flujos de rayos X se observa una variabilidad que se caracteriza por producirse en escalas dinámicas de milisegundos; por ésta razón a los fenómenos de rayos X en los que se encuentra dicha variabilidad se les conoce como *oscilaciones de milisegundo*. Esto puede verse a partir de las escalas de tiempo dinámicas en las cercanías del objeto compacto. Si  $\tau$  es el tiempo característico:

$$\tau_{din} \equiv \left( \frac{r^3}{GM} \right)^{1/2}. \quad (1.37)$$

Para una estrella de neutrones de  $1.4 M_\odot$ , si la distancia  $R$  es de 10 km, entonces  $\tau \sim 0.7$  ms; y a 100 km,  $\tau \sim 2$  ms. Para un hoyo negro de  $10 M_\odot$  a un radio de 100 km,  $\tau \sim 1$  ms. De lo anterior vemos que los milisegundos son la escala de tiempo natural de los procesos de acreción en las zonas de emisión de rayos X, por lo que una fuerte variabilidad en los rayos X en dicha escala es muy probablemente provocada por un movimiento de materia en esas regiones.

Estos flujos de materia se localizan en regiones con campos gravitacionales intensos, por lo que en los fenómenos que ahí ocurren se observan efectos de relatividad general. Esta es la principal motivación para estudiar dichos fenómenos: para analizar los efectos relativistas de la materia y del espacio-tiempo.

Hasta ahora, se han observado 3 fenómenos de milisegundo en las binarias de rayos X. El primero en descubrirse fué el de las *Oscilaciones Cuasi-Periódicas de Kílohertz*, que se suponen actualmente provocadas por movimientos orbitales en el flujo de acreción (como se supone en la simulación de este trabajo). A continuación se vieron las “oscilaciones de ráfaga” o *Burst Oscillations* causadas probablemente por el giro de una capa en la atmósfera de la estrella de neutrones en corotación con la propia estrella. Y por último, mediante mediciones de satélite se descubrieron los pulsares de milisegundo, cuya existencia ya se había predicho..

En lo que resta de este capítulo hablaremos de estos tres fenómenos (aunque en distinto orden al presentado arriba), pues presentarán un buen panorama sobre los fenómenos de variabilidad en binarias de rayos X como antecedente al análisis de la oscilaciones cuasi-periódicas.

### §1.4.2. Pulsares de Milisegundo

Como hemos visto en la introducción, uno de los posibles escenarios de evolución estelar es el de la formación de un remanente compacto, como una estrella de neutrones. Durante el colapso hasta la formación final del remanente, puede que se conserve momento angular en cierta cantidad. Si el momento angular al inicio del precolapso es de  $J_{\text{in}} \simeq M\Omega_{\text{in}}R_{\text{in}}^2$ , para que se cumpla  $J_{\text{in}} = J_{\text{fin}}$  se requiere que  $\Omega_{\text{fin}} \approx \Omega_{\text{in}}(R_{\text{in}}/R_{\text{fin}})^2$ ; y si la razón entre el radio inicial y final es  $\sim 10^5$ , con velocidad angular inicial de  $\Omega_{\text{in}} = (2\pi/20 \text{ días})$ , la estrella de neutrones tendrá una muy alta velocidad de rotación:

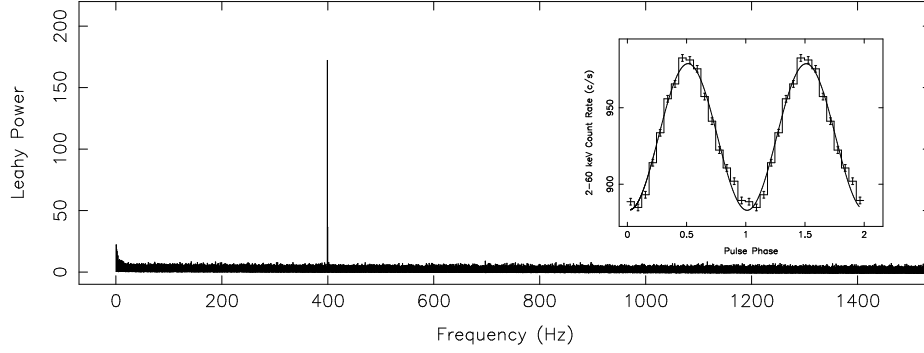
$$\Omega_{\text{fin}} \approx (2\pi/10^{-4} \text{ seg}). \quad (1.38)$$

Los objetos con estas características son conocidos como *Pulsares*. Como además el campo magnético en estos objetos puede ser muy importante, podemos distinguir dos ejes, el de rotación y el magnético. En general, estos ejes no están necesariamente alineados, por lo que al rotar la estrella esta puede actuar como un dipolo magnético, emitiendo radiación electromagnética que se detecta como una señal periódica si el observador se encuentra en la dirección de los polos magnéticos.

El término *pulsar de milisegundo* se refiere usualmente a pulsares con períodos de rotación  $\lesssim 10 \text{ ms}$ , aunque este límite es algo arbitrario. Otra característica que distingue a estos objetos son los débiles campos magnéticos ( $\sim 10^8 - 10^9 \text{ G}$ ), tres órdenes de magnitud menores que el calculado para la mayoría de los pulsares. Aproximadamente el 80% de los pulsares de milisegundo han sido encontrados en sistemas binarios, lo que contrasta con el hecho de que sólo el  $\sim 1\%$  de los pulsares con períodos de rotación mayores están en binarias.

Se cree que los pulsares de milisegundo adquieren la velocidad de rotación mediante los procesos de *spin-up* durante la fase de acreción de sus compañeras. En la mayoría de los pulsares de rayos X en los que la estrella de neutrones acreta mediante un disco, se ha visto que el período de rotación disminuye constantemente, por lo que no parece exagerado sugerir que el mecanismo para la creación de pulsares de milisegundo es el spin-up.

Existen 3 importantes factores que determinan el spin-up: el campo magnético de la estrella de neutrones, la duración de la acreción, y la tasa a la que acreta. La masa de la compañera que pasa al disco de acreción pierde momento angular conforme se acerca al remanente compacto, mediante mecanismos de viscosidad debidos a la rotación diferencial a lo largo del disco. Durante este acercamiento, la materia se mueve en órbitas keplerianas hasta que se acerca a la magnetosfera de la estrella de neutrones, donde el campo magnético es lo suficientemente fuerte para dominar la dinámica, obligando a la materia a co-rotar con la estrella. Si para que esto ocurra, se debe acelerar la materia en el disco a una velocidad angular mayor, la estrella de neutrones perderá momento angular; mientras que si la co-rotación deman-



**Figura 1.2:** Espectro de potencias y perfil de pulsos (recuadro) del primer pulsar de milisegundo en rayos X descubierto (Wijnands & van der Klis 1998).

da que la materia del disco sea desacelerada a velocidades sub-keplerianas, una parte del “exceso” de momento angular pasará a la estrella vía torcas magnéticas. Luego de cierto tiempo, se alcanzará un estado de equilibrio para la velocidad de co-rotación, correspondiente a la de la órbita kepleriana en la frontera de la magnetosfera. Bajo estas condiciones, el período de rotación de la estrella de neutrones igualará al del movimiento kepleriano en la frontera del campo magnético. A esto se le conoce como el *período de equilibrio*  $P_{eq}$ , y está dado por:

$$P_{eq} = \frac{2\pi}{\Omega_k(r = R_{mag})} = 2\pi \left( \frac{R_{mag}^3}{GM} \right)^{1/2}, \quad (1.39)$$

aquí  $\Omega_k$  denota la velocidad kepleriana,  $R_{mag}$  es el radio de la magnetosfera y  $M$  es la masa de la estrella de neutrones. El cálculo de (1.39) puede hacerse hallando el *Radio de Alfvén*, i.e., la distancia desde la estrella de neutrones en la que el campo magnético iguala la presión ram. Esto se hace igualando las ecuaciones (1.24) y (1.25), de donde se obtiene:

$$R_A = \left( \frac{B^2 R^6}{\dot{M} \sqrt{2GM}} \right)^{2/7}. \quad (1.40)$$

Sustituyendo esto en (1.39) se obtiene:

$$P_{eq} = 1.9 \text{ ms } B_9 \left( \frac{M}{1.4 M_\odot} \right)^{-5/7} \left( \frac{\dot{M}}{\dot{M}_{Edd}} \right) R_6^{16/7}, \quad (1.41)$$

donde  $B_9$  es el campo dipolar de la estrella de neutrones en la superficie en unidades de  $10^9 G$  y  $R_6$  es el radio de la estrella en unidades de  $10^6 cm$ . De acuerdo con este resultado, para que una estrella acelere su rotación en períodos de milisegundos es necesario que el campo magnético sea bajo

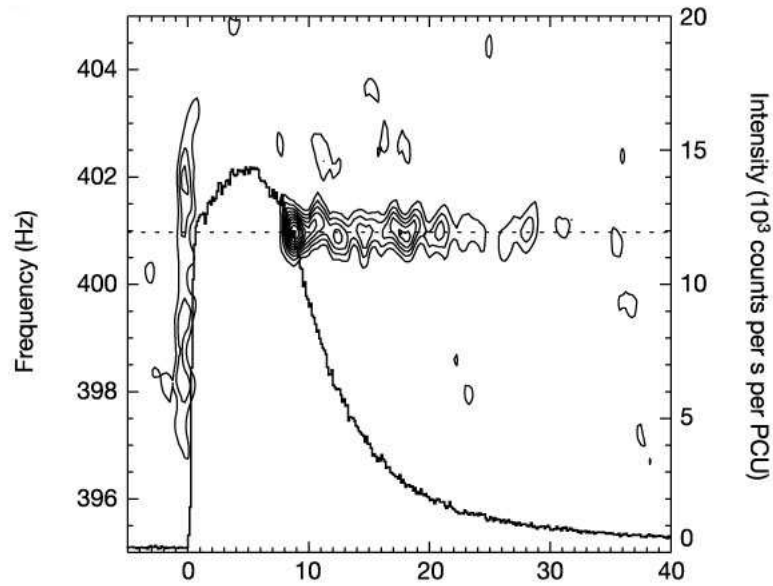
( $\lesssim 10^9 G$ ), lo que está de acuerdo con las observaciones. Pero incluso si este campo magnético es lo suficientemente bajo, la estrella no podrá acelerarse si el tiempo de acreción no es lo suficientemente largo para depositar el momento angular necesario (esencialmente,  $J$  es el producto de la tasa de acreción y el momento angular kepleriano específico en la frontera de la magnetosfera). A este ritmo, la estrella de neutrones alcanzará el equilibrio luego de que una masa total de  $\Delta M \sim 0.1 M_{\odot} (P_{eq}/1.5 ms)^{-4/3}$  haya sido acreta. Si la tasa de acreción es la de Eddington, este equilibrio se alcanzará al pasar  $\sim 10^7$  años. Pero para que lo anterior ocurra, es necesaria una cosa más: si la masa de la compañera es mayor que la de la estrella de neutrones, los períodos de acreción necesarios no se alcanzarán, puesto que poco después del desbordamiento del lóbulo de Roche la transferencia de masa se volvería inestable y la duración del proceso sería  $\lesssim 10^4$  años. Por esta razón, se piensa que los progenitores de los pulsares de milisegundo son BRXBM, en los que la estrella compañera es de menor masa que el objeto compacto. Si éste es el caso, y ocurre la transferencia de masa, la órbita tiende a expandirse, manteniendo la acreción estable y suficientemente alta para acelerar la rotación del objeto central.

Luego de lo anterior, no es de extrañarse la posibilidad de que, luego de alcanzar la estabilidad, la estrella de neutrones continúe acelerándose. Esto depende de que el objeto rote con una velocidad angular mínima para no destruirse por fuerzas centrífugas, que teóricamente, depende de la ecuación de estado del material de la estrella. Con los modelos actuales, los períodos de rotación mínimos están en el rango de  $0.5 - 1.5 ms$ , pero no hay evidencia observacional que lo sustente. Sin embargo, se ha pensado en otros mecanismos que limiten el incremento de rotación, como por ejemplo, que conforme los pulsares se aceleran, éstos se vuelven inestables y en consecuencia aparecen deformidades que conducen a la emisión de ondas gravitacionales, pudiendo alcanzarse un equilibrio entre la emisión y la ganancia de momento angular alrededor de  $10 - 30\%$  mayor al período de rotación mínimo mencionado anteriormente. Sin embargo, la viscosidad puede suprimir tales inestabilidades.

### §1.4.3. Oscilaciones de Ráfaga

Ciertas fuentes de rayos X que muestran incrementos dramáticos de luminosidad por períodos cortos de tiempo son llamadas *Ráfagas de Rayos X* (X-ray Bursts): en estas fuentes  $10^{39} ergs$  de energía son liberados en  $\sim 10 s$ . El inicio del destello es muy rápido  $\sim 1 s$  con incremento en todas las bandas del espectro, diferente a lo que sucede durante el decaimiento, donde el decremento es distinto para las diferentes frecuencias (más rápido para las más altas).

La acreción de hidrógeno del disco hacia la estrella de neutrones crea una capa de dicho material alrededor del objeto que al fundirse nuclearmente



**Figura 1.3:** Espectro de frecuencias de una ráfaga en la fuente de rayos X SAX J1808.4-3658 (Chakrabarty et al. 2003). Durante el inicio de la ráfaga 397 ~ 403 Hz y alrededor de 401 Hz pueden verse oscilaciones en milisegundos, a diferencia del pico de amplitud. La línea punteada indica la frecuencia que se supone para el pulsar. En el eje x se miden los segundos desde el inicio de la ráfaga y el conteo de rayos X en unidades del instrumento PCU, *unidad de conteo proporcional*.

forma una capa de helio. Si las densidades y las temperaturas en esta capa alcanzan el punto de fusión, la superficie sufrirá un rápido e inestable quemado del helio, produciéndose un destello termonuclear que alcanzará energías de rayos gama; incluso, la acreción de más helio puede producir una nueva ráfaga poco tiempo después, siendo más energéticas las que acumulan mayor cantidad de helio, con un tiempo entre las distintas acreciones de ~ 3 hrs. Con este modelo, el rápido incremento de temperatura y el posterior enfriamiento durante el evento termonuclear puede reproducirse correctamente. Sin embargo, existen otro tipo de ráfagas en las que los destellos ocurren a intervalos de tiempo muy corto para poder ser explicados por dicho modelo. Hoffman, Marshall y Lewin (1978) introdujeron la clasificación de Tipo I y Tipo II y sugirieron que las ráfagas repetitivas (tipo II) son producidos por inestabilidades en la acreción y los del tipo I por destellos termonucleares.

Durante la fase inicial de las ráfagas de tipo I, tal parece que la generación de energía es anisotrópica debido a que la aparición de múltiples destellos, unos más cercanos que otros, sugiere que no todo el combustible disponible se quema en cada destello, es decir, sólo una parte de la superficie

se funde; aunque esto puede ser ocasionado también por la interacción con el campo magnético o en algunos casos, por las irregularidades de la capa. La emisión anisotrópica que resulta de lo anterior produce un fenómeno de semiperiodicidad que en teoría puede ser observado, por lo que diversos grupos, desde 1980, realizaron búsquedas de oscilaciones en los destellos de ráfaga. Sin embargo, fué hasta 1996 cuando se detectó la primera fuente irrefutable de oscilaciones en ráfagas de tipo I con una variación de 363 Hz en un espectro de 32 s de duración, justo antes del comienzo de la ráfaga.

Algunas oscilaciones son lo suficientemente fuertes para durar al menos  $\sim 1$  s durante el inicio de la ráfaga, para luego observarse sólo muy débilmente o en absoluto y finalmente aparece por  $\sim 10$  s durante la cola de la explosión. Usualmente la frecuencia se incrementa por 1 – 2 Hz al final de la ráfaga, convergiendo a una “frecuencia asintótica”, que tiende a mantenerse estable de ráfaga a ráfaga, con variaciones de  $\sim 0.1\%$  (que coincide con lo esperado por corrimiento Doppler orbital).

Una posible explicación (y quizá la mas aceptada), consiste en que existe un punto o varios de alta temperatura (hot spots) en alguna capa de la atmósfera de la estrella de neutrones que rota algo mas lento que la propia estrella, debido a que se expanden de 5 – 50 m durante la ráfaga, pero conservando su momento angular, por lo que la variaciones en la frecuencia del espectro son causadas por la aceleración de la atmósfera conforme ésta se contrae durante el decaimiento de la ráfaga. La frecuencia asintótica corresponde a una atmósfera totalmente contraída, con una velocidad de rotación muy cercana a la de la estrella. Si éste fuera el caso, se esperaría un decaimiento de la frecuencia durante el inicio de la ráfaga, aunque no hay suficiente evidencia observacional de que esto ocurra. Una caída de la frecuencia que ha podido observarse durante el final de la ráfaga se explica por una entrada adicional de energía termonuclear al final del evento.

Las amplitudes de las oscilaciones varían en un rango de  $\sim 50\%$  (*rms*) respecto al flujo del inicio de la ráfaga hasta entre 2 y 20% durante el decaimiento. Bajo el modelo de hot spots, la amplitud de las oscilaciones depende entonces de “que tan compacta” es la estrella, factor definido por  $R_G/R$  donde  $R$  es el radio de la estrella de neutrones y  $R_G = GM/c^2$  es el radio gravitacional, por lo que entre mas compacta es la estrella, menor es la amplitud de la oscilación.

A pesar de que se han podido explicar muchas de las características de las oscilaciones de ráfaga, quedan aún varias dudas, principalmente el explicarse el porqué no en todas las ráfagas se presentan estas variaciones en el espectro de frecuencias.

#### §1.4.4. Oscilaciones Cuasi-Periódicas

Las oscilaciones cuasi-periódicas (OCP) fueron descubiertas por van der Klis en 1985 en el flujo de rayos X de la fuente GX 51 (4U 1758-25) que per-

tenece a la clase de BRXBM, con variaciones en las frecuencias del espectro de potencias de 0.5 ms – 2s. Sin embargo, como se ha dicho antes, había un sustento teórico suficiente para suponer la existencia de fenómenos de variabilidad en la escala de kHz como en efecto sucedió con los dos fenómenos mencionados arriba. En el caso de las oscilaciones cuasi-periódicas la búsqueda terminó en Febrero de 1996 cuando en el Centro Espacial Goddard de la NASA se descubrieron las primeras OCP de kHz en la fuente Sco X-1 (4U1728-34), sólo dos meses después del lanzamiento del satélite *Rossi X-ray Timing Explorer* o RXTE (van der Klis et al. 1996). Estos aparecieron como dos picos en el espectro de frecuencias en el rango de 300 – 1300 Hz, con una separación entre ambas de 300 Hz. Por lo general, la frecuencia de ambos picos se incrementa con el flujo de rayos X. Ver figura (1).

### Primeras Interpretaciones

Poco tiempo después del descubrimiento de las OCP de kHz, se pensó que estas podían surgir a causa de los movimientos orbitales de la materia que acreta alrededor del objeto compacto o como un batimiento entre tales interacciones orbitales y la rotación del objeto central (Van der klis et al. 1996, Strohmayer 1996). Incluso, al tiempo del hallazgo, un modelo de batimiento de frecuencias por interacción de la rotación del objeto con las órbitas estaba en uso para OCP lentas en BRXBM, por lo que de inmediato se aplicó a las de kHz. Si  $\nu_2$  es la frecuencia mas alta del par de picos y  $\nu_1$  la mas baja, la interpretación que da el modelo de batimiento de frecuencias es que  $\nu_2$  es  $\nu_{orb}$  para algún radio del disco,  $\nu_1$  es la frecuencia de batimiento entre  $\nu_2$  y  $\nu_{rot}$ , y  $\nu_{rot}$  es la frecuencia de rotación del objeto compacto, entonces  $\nu_1 = \nu_{bat} = \nu_{orb} - \nu_{rot} \approx \nu_2 - \nu_{ráfaga}$  donde la aproximación viene de  $\nu_{ráfaga} \approx \nu_{rot}$ . Posteriormente, este modelo fué perfeccionado en la forma de “modelo de batimiento de frecuencia de punto sónico” por Miller et al. (1996, 1998) donde el radio en la órbita es el punto sónico (el radio interno del disco kepleriano).

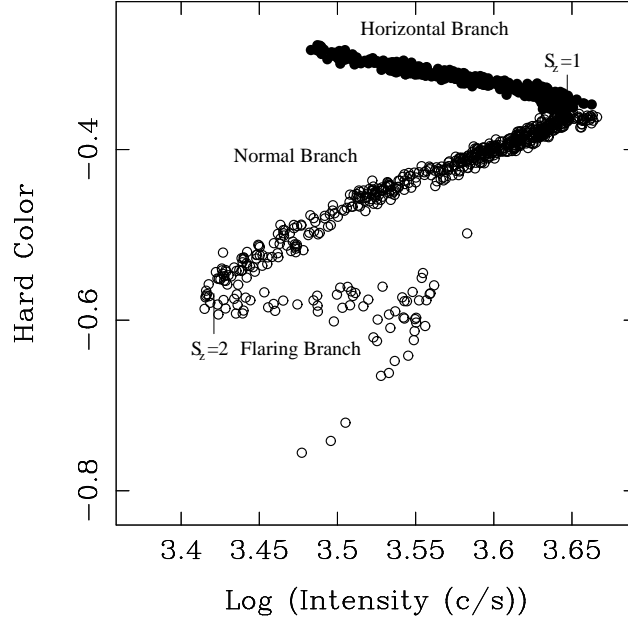
El modelo de batimiento (ver §1.5.1) implica entonces que la separación entre los picos  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  de las OCP de kHz debe ser igual a la frecuencia de rotación del remanente compacto  $\nu_{rot}$ , por lo que ésta debe ser constante y casi igual que  $\nu_{ráfaga}$ . Sin embargo, se ha encontrado que esto no es así, por lo que se han propuesto modelos donde la precesión relativista de una partícula libre pueda explicar la variación de  $\Delta\nu$ .

### Dependencia en el Tipo de la Fuente

Existen diferencias entre las OCP que pueden verse en función del tipo de fuentes en las que se observen. Estas son las fuentes “Z” y las tipo “atolón”, figuras 1.4 y 1.5. Las del primer tipo fueron llamadas así debido a las pistas en forma de Z que se trazan en las gráficas de rayos X en color-color y en



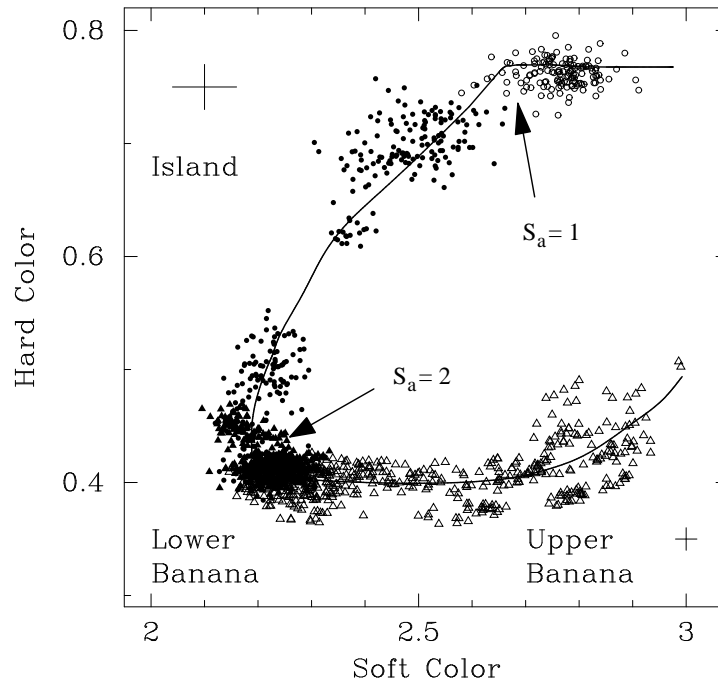
los diagramas de dureza-intensidad en escalas de tiempo de horas a días. Son BRXBM más luminosas, pues en rayos X ésta es muy cercana a la de Eddington,  $L_x \approx L_{Edd}$ . Las fuentes de atolón producen pistas en forma de U o C, las cuales recuerdan al mapa de un atolón debido a que en el limbo izquierdo de la U el movimiento del diagrama se vuelve mas lento, por lo que la pista se rompe en forma de “islas”. La mayoría de estas fuentes están en el rango de  $0.01 - 0.2 L_{Edd}$  (en la parte baja y derecha del diagrama), aunque un grupo pequeño puede alcanzar  $0.2 - 0.5 L_{Edd}$ .



**Figura 1.4:** Fuente tipo Z del objeto GX 440+0 (Jonker et al. 1999). Los valores  $S_z$  así como los nombres de las distintas partes del diagrama son características convencionales de ambos tipos de fuentes.

La mayor parte de las características espectrales de estas fuentes dependen, en general, de la posición a lo largo de la pista de la Z o del atolón, por lo que la fenomenología es esencialmente unidimensional. En todas las fuentes Z se observa que las OCP de kHz caen a los niveles mas bajos de acreción que se pueden inferir, y por otro lado, las OCP se vuelven indetectables para los niveles mas altos. En las fuentes de atolón, donde la acreción es mas alta de lo que se infiere, esto no puede ser un efecto de sensibilidad; aquí las OCP son vistas en la parte baja de la pista, cercanas a la parte de las islas, donde en algunas fuentes se detectan picos que suelen ser mucho mas débiles que la mayor tasa de acreción inferida.

Se ha observado que la frecuencia de las oscilaciones se incrementa a la largo de las pistas si la tasa de acreción también aumenta. En escalas de tiempo de horas a un día, la tasa de acreción inferida usualmente corres-



**Figura 1.5:** [Fuente tipo atolón del objeto 4U 1608-52. (Méndez et al. 1999).

ponde a un aumento en el flujo de rayos X; sin embargo cuando este flujo decrece y no así la  $\dot{M}$ , se espera que la frecuencia se mantenga en correlación con la tasa de acreción inferida, sin importar el flujo, situación que se ha observado en algunas fuentes.

Por tanto, las OCP se ajustan a la fenomenología anterior para fuentes Z y de atolón en BRXBM en términos de los tipos de éstas y sus estados, incluyendo el hecho de que es la posición en las pistas y no los flujos de rayos X lo que determina la fenomenología.

En las tablas 1.1 y 1.2 se muestran algunas de las observaciones de las OCP de kHz, indicando las frecuencias donde se han visto cada uno de los picos y la separación entre ellos, en las fuentes Z y en las fuentes de atolón, respectivamente.

### Altas Gravedades y OCP

Las oscilaciones cuasi-periódicas son potencialmente un instrumento para establecer la masa y radio de las estrellas de neutrones, así como para probar efectos de relatividad general. La detección de la última órbita circular estable (UOCE) u órbita marginal puede constituir la primera detección directa de un efecto relativista, probando que el radio de la estrella es menor

**Cuadro 1.1:** Frecuencias de las OCP de kHz observadas en fuentes Z.

Fuente	$\nu_1$ (Hz)	$\nu_2$ (Hz)	$\Delta\nu$ (Hz)	Referencias
Sco X-1	565	870	$307\pm 5$	Van der Klis et al. 1996a,b,c,1997b
	845	1080	$237\pm 5$	
		1130		
GX 5-1	215	505	$298\pm 11$	Van der Klis et al. 1996e Wijnands et al. 1998c
	660	890		
	700			
GX 17+2		645	$294\pm 8$	Van der Klis et al. 1997a Wijnands et al. 1997b
	480	785		
	780	1080		
Cyg X-2		730	$346\pm 29$	Wijnands et al. 1998a
	530	855		
	660	1005		
GX 340+0	200	535	$339\pm 8$	Jonker et al. 1998, 1999c
	565	840		
	625			
GX 349+2	710	980	$266\pm 13$	Zhang et al. 1998a Kuulkers & van der Klis 1998
		1020 <sup>a</sup>		

Valores de  $\nu_1$  y  $\nu_2$  de los picos de las OCP (redondeados al valor 5 mas cercano). Las entradas de las columnas que no están separadas por una línea horizontal indican los rangos sobre las cuales se observó o infirió que varía la frecuencia, dichos rangos se combinan para diferentes observaciones. Las entradas en una fila ininterrumpida significan que los datos fueron tomados simultáneamente. (<sup>a</sup>) indica una detección marginal. Figura tomada de van der Klis 2000.

que la órbita marginal. Por otro lado, si las OCP de kHz son causadas por el movimiento orbital alrededor de la estrella de neutrones, su frecuencia no puede ser mayor que la de la órbita marginal.

Si uno de los picos de frecuencia  $\nu$  corresponde a un movimiento kepleriano estable alrededor de una estrella de neutrones, es posible inferir los límites de la masa y el radio de la estrella. Para una geometría de Schwarzschild, 1) el radio de la estrella  $R$  debe ser menor que el radio de la órbita kepleriana  $r_k$ , i.e.:

$$R < r_k = \left( \frac{GM}{4\pi^2\nu^2} \right)^{1/3} \quad (1.42)$$

y 2) el radio de la órbita marginal  $r_{margin}$  debe también ser menor que  $r_k$ , es decir:

$$r_{margin} = \frac{6GM}{c^2} < \left( \frac{GM}{4\pi^2\nu^2} \right)^{1/3} \quad \text{ó} \quad M < \frac{c^3}{2\pi 6^{3/2} G\nu} \quad (1.43)$$

La condición 1) es un límite superior para  $R$  independiente de la masa, mientras que 2) es un límite superior para  $M$ . A pesar de que ambas expresiones son clásicas, dan idea muy cercana de lo que sucede en el límite relativista.

**Cuadro 1.2:** Frecuencias de las OCP de kHz observadas en fuentes de atolón.

Fuentes	$\nu_1$ (Hz)	$\nu_2$ (Hz)	$\Delta\nu$ (Hz)	Referencias
4U 0614+09	418 825	450 765 1160 1215 1330	312±2	Ford et al. 1996, 1997a,b; Van der Klis et al. 1996d; Méndez et al. 1997; Vaughan et al. 1997,1998; Kaaret et al. 1998; van Straaten et al. 1999
EXO 0748-676		695		J. Homan 1999, in prep.
4U 1608-52	415 440 475 865 895	765 800 1090	325±7 326±3 225±12	Van Paradijs et al. 1996; Berger et al. 1996; Yu et al. 1997; Kaaret et al. 1998; Vaughan et al. 1997,1998; Méndez et al. 1998a,b, 1999; Méndez 1999; Markwardt et al. 1999b
4U 1636-53	830 900 950 1070	1150 1190 1230	251±4	Zhang et al. 1996a,b,1997a; Van der Klis et al. 1996d; Vaughan et al. 1997,1998; Zhang 1997; Wijnands et al. 1997a; Méndez et al. 1998c; Méndez 1999; Markwardt et al. 1999b; Kaaret et al. 1999a
4U 1702-43	625 655 700 770 902	1000 1040 1085	344±7 337±7 315±11	Markwardt et al. 1999a,b
4U 1705-44	775 870	1075 <sup>a</sup>	298±11	Ford et al. 1998a
XTE J1723-376		815		Marshall & Markwardt 1999
4U 1728-34	510 875 920	325 845 1160	349±2 279±12	Strohmayer et al. 1996a,b,c; Ford & van der Klis 1998; Méndez & van der Klis 1999; Méndez 1999; Markwardt et al. 1999b; di Salvo et al. 1999
KS 1731-260	900	1160 1205	260±10	Wijnands & van der Klis 1997
4U 1735-44	630 730 900 <sup>a</sup>	980 1025 1150 1160	341±7 296±12 249±15	Wijnands et al. 1996a, 1998b; Ford et al. 1998b
4U 1820-30	500 795	655 860 1075 1100	358±42 278±11	Smale et al. 1996, 1997; Zhang et al. 1998b; Kaaret et al. 1999b; Blosler et al. 1999
Aql X-1	670 930	1040 <sup>a</sup>	241±9 <sup>a</sup>	Zhang et al. 1998c; Cui et al. 1998a; Yu et al. 1999; Reig et al. 1999; M. Méndez et al. 1999
4U 1915-05	515 560 655 705 <sup>a</sup> 880	820 925 1005 1055 1265 <sup>a</sup>	348±11	Barret et al. 1997,1998; Boirin et al. 1999
XTE J2123-058	845 855 870 <sup>a</sup>	1100 1130 1140	255±14 276±9 270±5 <sup>a</sup>	Homan et al. 1998b,1999a; Tomsick et al. 1999

## Candidatos a Hoyos Negros

Aunque durante años se ha buscado en los fenómenos de milisegundos marcas distintivas que permitan diferenciar a las estrellas de neutrones y hoyos negros, incluso mediante las OCP (Titarchuk y Shaposhnikov 2005), por lo general existen grandes similitudes entre los fenómenos espectrales entre las estrellas de neutrones de bajo campo magnético y los objetos que son candidatos a hoyos negros. En los candidatos a hoyos negros, las OCP de kHz se muestran como dos picos con una relación de frecuencias de 3:2, e incluso 4:3; sin embargo, a diferencia de las fuentes con estrellas de neutrones, los picos no se mueven a lo largo del espectro de frecuencias sino que se mantienen en los mismos valores de  $\nu$ . Específicamente, en la fuente GRO J1655-40 las frecuencias de los picos de amplitud son de 300 Hz y de 450 Hz, mientras que en XTE J1550-564 están en 184 Hz y 276 Hz.

Diversos autores afirman que las OCP de baja frecuencia ( $< 100$  Hz) parecen tener una contraparte en los candidatos a hoyos negros, debido a que el fenómeno puede depender de un mismo parámetro, como  $\dot{M}$ . Otros sugieren que el origen es una dependencia física entre las frecuencias. Incluso en ciertos candidatos de hoyos negros, pulsares de milisegundo y fuentes de atolón, cuando las tasas de acreción son bajas los espectros de potencias son muy parecidos, con una amplia componente de ruido que muestra una ruptura a bajas frecuencias, en la que frecuentemente se tiene una apariencia de OCP. Esto sugiere, a excepción de las fuentes Z que no entran en los parámetros de la similitud, que tales fenómenos son el mismo en estrellas de neutrones y hoyos negros. Esto podría excluir a los modelos de batimiento entre órbitas y la rotación del objeto, así como cualquier otro modelo que requiera de un remanente con superficie, un horizonte de eventos, un campo magnético o su ausencia; lo que implicaría que el fenómeno es generado en el disco de acreción alrededor de cualquier objeto compacto.

### §1.5. Modelos para Oscilaciones Cuasi-Periódicas

Debido a la posibilidad de obtener conclusiones fundamentales sobre la naturaleza, se han propuesto varios modelos para explicar el origen de los OCP de kHz, pues claramente este fenómeno involucra aspectos que de ser entendidos brindan la oportunidad de probar, sobre todo, predicciones de relatividad general. En la mayoría de estos se involucra el movimiento orbital alrededor de la estrella de neutrones. Luego de los primeros trabajos, sobre el batimiento de frecuencias, el caso donde se utiliza el punto sónico, la precesión relativista de órbitas de Stella y Vietri (1998), se tienen los del modelo de burbuja de fotón (Klein et. al. 1996) y el de transición de capas en el disco (Titarchuk et. al 1998), por mencionar algunos de los mas citados. A continuación se presenta un panorama general y muy breve de algunas de las propuestas que han surgido a raíz de la aparición de las OCP

de kHz.

### §1.5.1. Modelo de Batimiento de Frecuencias en el Punto Sónico

Los modelos de batimiento de frecuencias involucran movimientos orbitales para algún radio en el disco. Otro fenómeno observado en algunas fuentes Z son las *oscilaciones de rama horizontal* o ORH de 15 – 60 Hz, que de acuerdo a Alpar y Shaham (1985) se explica utilizando un modelo de batimiento donde se utiliza el radio de la magnetosfera como uno de los parámetros. Miller et al. (1996) propone utilizar este mismo modelo para las OCP de kHz utilizando como radio de interacción en el disco aquel donde las velocidades se vuelven supersónicas,  $r_s$ . En este punto, la materia que orbita se acerca gradualmente a la estrella de neutrones siguiendo trayectorias espirales hasta que en algún punto golpea la superficie, con lo que se produce la emisión de energía. Este punto viaja alrededor de la estrella de neutrones a la velocidad angular del grupo de órbitas espirales. Esto produce el pico superior en  $\nu_2$ , mientras que  $\nu_1$  aparece debido a que un haz de rayos X generado por la acreción hacia los polos magnéticos que recorre el objeto compacto con una velocidad igual a la de la rotación de la propia estrella  $\nu_{rot}$  irradia el grupo de órbitas en  $r_s$  una vez por período, lo cual modula (a la frecuencia de batimiento) la tasa a la cual el grupo de órbitas provee materia a los flujos espirales y en consecuencia, la emisión desde los puntos mencionados.

De esta manera, el modelo predice que  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  es constante con  $\nu_s$ , situación que es contraria a las observaciones. Sin embargo, si las trayectorias espirales que recorren las órbitas se modifican, entonces la frecuencia de batimiento cambiará, en particular, ésta aumentará si es que la espiral disminuye lo que en consecuencia acorta el tiempo de los trayectos de la materia hacia la superficie. Con esto, el pico de baja frecuencia se acerca al otro, con lo que  $\Delta\nu$  disminuye, inclusive puede disminuir más si la luminosidad de rayos X que aumenta por una fuerte radiación “arrastra la espiral”, disminuyendo su tamaño y produciendo el mismo efecto.

### §1.5.2. Modelo de Precesión Relativista

La idea principal de este modelo es que las 3 frecuencias principales que se observan son las 3 frecuencias que resultan del movimiento orbital de una partícula libre bajo efectos de relatividad general.

Si se tienen órbitas excéntricas e inclinadas para una partícula libre alrededor de una estrella de neutrones con rotación, se verá *precesión nodal* (un “temblor” del plano orbital) y una *precesión del periastro* (análogo a la precesión del perihelio de Mercurio). En este modelo (Stella y Vietri 1998), se identifica a  $\nu_2$  con la frecuencia de una órbita en el disco y a  $\nu_1$  y  $\nu_{BF}$  de

una de las bajas frecuencias ( $10 - 100 \text{ Hz}$ ) en los picos de las OCP con la precesión del periastro y la precesión nodal de las órbita, respectivamente.

Al orden mas bajo, la precesión nodal relativista es  $\nu_{nod} = 8\pi^2 I \nu_2^2 \nu_s / c^2 M$ , donde  $I$  es el momento de inercia de la estrella. Por otro lado, la variación en separación entre los picos es causada por la precesión del periastro, de manera que  $\Delta\nu = \nu_2(1 - 6GM/rc^2)^{1/2}$ , con  $r$  como el radio orbital (obsérvese que debido a la forma de las ecuaciones, lo anterior puede aplicarse también a hoyos negros). Existe una concordancia aceptable con las observaciones para  $\nu_1$  y  $\nu_2$  si  $\nu_{BF}$  es igual a 2 o 4 veces la frecuencia de la precesión nodal, lo que es posible que suceda mediante argumentos sobre la geometría alrededor del objeto. Sin embargo, para una concordancia mas precisa con las observaciones, se requieren parámetros adicionales.

Aunque el modelo provee de buenos resultados, quedan dudas sobre su propia consistencia. Aún no es claro cómo órbitas con esos niveles de excentricidad y precesión pueden existir, cómo es exactamente que el flujo es moderado a las frecuencias que se predicen, como es que  $\nu_2$  varía con la luminosidad, etc.

### §1.5.3. Modelo de la Burbuja de Fotón

Este modelo intenta explicar las OCP de kHz vistas en Sco-1 mediante hidrodinámica de la radiación (Klein et al. 1996). Aquí la acreción (super-Eddington) tiene lugar mediante un embudo magnético, donde se forman “burbujas de fotones” que suben flotando y explotan en secuencia cuasi-periódica. En algunas de las simulaciones 1 o 2 picos son encontrados, que incrementan su frecuencia conforme aumenta la acreción, como en las observaciones. Lo interesante del modelo es que no se requiere rotación alguna, pero no explica de manera natural las relaciones entre las frecuencias, como en el batimiento.

### §1.5.4. Modelo de Transición de Capas

Existen diversos modelos en los que se identifica a las OCP como modos de oscilación en el disco de acreción, aunque estos difieren en cuanto a la naturaleza de las oscilaciones. Titarchuk, Lapidus y Muslimov (1998) proponen un modelo en el que la llamada baja frecuencia de rama  $\nu_B$ , de Kepler  $\nu_k$  y la frecuencia híbrida  $\nu_h$  son las eigenfrecuencias del oscilador. Proponen que la frecuencia  $\nu_{ORH}$  de las oscilaciones de rama horizontal así como  $\nu_1$  y  $\nu_2$  pueden ser interpretadas como la resonancia entre las frecuencias  $\nu_B$ ,  $\nu_k$  y  $\nu_h$ . Además, argumentan que los corrimientos de frecuencia dependen de una tasa de amortiguamiento  $\lambda$ . Poco tiempo después, Titarchuk (2002) amplía el trabajo y entre otras cosas calcula el ángulo de inclinación del eje de la magnetosfera respecto al de rotación mediante relaciones entre las frecuencias.

### §1.5.5. Modelo de Resonancia Paramétrica No-Lineal

En diversos artículos (Abramowicz y Kluźniak 2001; Kluźniak y Abramowicz 2002; Abramowicz et al. 2003; Kluźniak et al. 2004; Lee 2004) se dice que las OCP de kHz pueden ser el resultado de la resonancia no-lineal entre dos modos de oscilación en el disco de acreción. Como se ha visto en sistemas con agujeros negros y posiblemente en Sco X-1, las frecuencias de los picos suelen coincidir con la relación  $\omega_1/\omega_2 = m : n$ , con  $m : n = 2 : 3$ , que correspondería a la primera resonancia. La presencia de otros pares de OCP de mayor frecuencia reforzaría esta hipótesis, pues éstos podrían explicarse como los sub-harmónicos de la primera resonancia ( $m : n = 3 : 4, 4 : 5, etc$ ).

Para reproducir las OCP, se parte de un modelo en el que se suponen líneas de flujo en el disco de acreción, que oscilan con cierta frecuencia (derivadas de un potencial pseudo-relativista) con respecto al radio y al plano de acreción del disco. Cada uno de estos “osciladores” tiene la forma de la ecuación de Mathieu, como veremos mas adelante, en las que se presenta la resonancia. El acoplamiento entre los osciladores se varía de tal manera que se puede ver la resonancia para distintas frecuencias a lo largo del espectro de Fourier.





# Capítulo 2

## Osciladores

Con la finalidad de ilustrar la construcción del modelo que se utilizará para la simulación, a continuación se da un breve repaso sobre algunos aspectos de los osciladores hasta llegar al caso de la resonancia paramétrica (ecuación de Mathieu), con el fin de demostrar que éste tipo de oscilación puede dar lugar a las OCP.

### §2.1. Osciladores Lineales

#### Osciladores libres

Consideremos un sistema en una dimensión que se desplace (en el vacío) ligeramente alrededor de un punto de equilibrio estable, es decir, aquel donde la energía potencial  $U(x_0)$  es un mínimo. Para hallar la energía de restauración correspondiente a estos desplazamientos, una buena aproximación es hacer un desarrollo en serie de Taylor alrededor de dicha posición:

$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots, \quad (2.1)$$

y elegimos  $U(x_0) = 0$  (como el mínimo) al igual que  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ , por lo que el primer término no nulo corresponde a la segunda derivada del potencial, para la que hacemos  $U'' = k$ , e ignoramos los términos de orden superior en el desarrollo. Ahora tomemos la forma general de la energía cinética como  $\frac{1}{2}a(x)\dot{x}^2$  haciendo  $a(x) = m$  para  $x = x_0$ . De esta forma obtenemos el Lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad (2.2)$$

cuya ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

y con

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad (2.3)$$

como la *frecuencia angular* obtenemos

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (2.4)$$

cuya solución, en forma general, es:

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (2.5)$$

o de otra manera

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.6)$$

donde las constantes  $a$  y  $\alpha$  representan la *amplitud* la *fase*, que están relacionadas por:

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \alpha = -c_1/c_2.$$

Así que de acuerdo a la ecuación (2.6), el sistema se mueve ejecutando oscilaciones armónicas, con una frecuencia  $f = \omega/2\pi$ , que depende de propiedades intrínsecas del sistema (ec. 2.3) y no de la amplitud, bajo la suposición de pequeñas oscilaciones. Si ampliamos el movimiento al plano complejo, escribimos la solución como

$$x = \text{Re}[A \exp(i\omega t)], \quad (2.7)$$

donde

$$A = a \exp(i\alpha), \quad (2.8)$$

es la *amplitud compleja*.

### Osciladores forzados

Ahora pensemos que el sistema anterior oscila bajo la acción de un campo externo  $U_{ext}(x, t)$ . Para los desplazamientos en  $x$ , de manera análoga a (2.1)

$$U_{ext}(x, t) = U_{ext}(0, t) + \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} x. \quad (2.9)$$

El primer término puede ser excluido del lagrangiano por depender del tiempo. Si llamamos  $xF(t)$  al segundo, obtenemos que el lagrangiano de todo el sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 + xF(t), \quad (2.10)$$

al que corresponde la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)/m. \quad (2.11)$$

No es difícil de imaginar que dadas las características del medio donde ocurren las OCP, la fuerza que estimula dichas oscilaciones sea periódica (i.e. debido a la rotación del objeto compacto y de su campo magnético); si éste es el caso:

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (2.12)$$

En este caso, la solución particular tiene la forma

$$x_1 = b \cos(\gamma t + \beta). \quad (2.13)$$

Para hallar el valor de esta amplitud, sustituimos lo anterior junto con (2.12) en (2.11) y obtenemos

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}.$$

En general, la ecuación (2.11) tiene una solución de la forma  $x = x_0 + x_1$ , es decir, la solución de la ecuación homogénea (2.6) más (2.13). Así

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta), \quad (2.14)$$

donde  $a$  y  $\alpha$  son constantes arbitrarias. Si suponemos que las OCP son el resultado de la resonancia entre osciladores, veamos que sucede en tal caso, cuando  $\gamma \rightarrow \omega$ . De esta forma, el denominador del segundo término se vuelve cero. Para poder calcular el límite, es conveniente reescribir la solución anterior como

$$x = a' \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)], \quad (2.15)$$

y como puede verse, el valor de la constante  $a$  es distinto. Con esto, puede aplicarse la regla de L'Hopital (para derivar respecto de  $\omega$ ). Esto da como resultado:

$$x = a' \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (2.16)$$

Esto indica que un campo externo periódico cuya frecuencia es lo suficientemente cercana a la de las oscilaciones hará que la amplitud aumente linealmente con el tiempo. Si la frecuencia del forzamiento difiere algo más de la del sistema, digamos  $\epsilon$ , de acuerdo con (2.7) la solución general se escribe como

$$x = A \exp(i\omega t) + B(\exp[i(\omega + \epsilon)t]) = [A + B \exp(i\epsilon t)] \exp(i\omega t). \quad (2.17)$$

El término

$$C = |A + B \exp(i\epsilon t)|, \quad (2.18)$$

representa la amplitud del movimiento cerca de la resonancia. Reescribiendo, de acuerdo a 2.8 tenemos

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\epsilon t + \beta - \alpha) \quad (2.19)$$

donde se ha escrito  $B = b \exp(i\beta)$ . De esta manera se observa que cerca de la resonancia la amplitud varía con frecuencia  $\epsilon$ , entre los valores  $|a - b|$  y  $a + b$ . A este fenómeno se le conoce como *batimientos* (beats).

### Osciladores amortiguados

Veamos ahora el caso en que el sistema no se mueve sólo en el vacío, sino en presencia de un medio. Nuevamente debemos suponer que las oscilaciones son pequeñas, en comparación con los procesos de disipación de energía en el medio.

El principal mecanismo de amortiguación es la fricción, que bajo las condiciones anteriores y las de un medio homogéneo puede depender sólo de la velocidad. Si además ésta es lo suficientemente pequeña, la fricción puede aproximarse mediante un desarrollo en potencias de dicha velocidad de la forma  $f_f = -\alpha\dot{x}$ . La ecuación de movimiento toma entonces la forma

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \quad (2.20)$$

Al igual que en 2.3,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia de las oscilaciones libres en el vacío. Definimos también el *coeficiente de amortiguamiento*  $\lambda$  como:

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m}, \quad (2.21)$$

con esto obtenemos

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} = 0. \quad (2.22)$$

Para calcular la solución de la ecuación anterior, sólo necesitamos hallar las soluciones de la ecuación característica  $r^2 + \omega^2 + 2\lambda r = 0$ . Estas son:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2},$$

que corresponden a los argumentos de la solución general de 2.22

$$x = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t). \quad (2.23)$$

Podemos inferir el comportamiento de este oscilador si analizamos distintos casos para la solución anterior, mediante la relación entre las frecuencias. Tomemos primero  $\lambda < \omega_0$  ( $r$  compleja). Entonces la solución general queda como

$$x = re[A \exp(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t)],$$

donde  $A$  es alguna constante compleja arbitraria. Esto también lo podemos escribir como

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.24)$$

donde

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

por lo que es fácil ver que la frecuencia con la que oscila el sistema en este caso es menor que la de las oscilaciones libres ( $a$  y  $\alpha$  son constantes reales). Con la ecuación (2.24) podemos ver que la caída de la amplitud es exponencial, y determinada por el parámetro  $\lambda$ .

Si ahora  $\lambda > \omega$ , escribimos la solución general (2.23) como

$$x = c_1 \exp[(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t] + c_2 \exp[(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t],$$

donde es posible ver que la amplitud disminuye en el tiempo, y para  $t \rightarrow \infty$  esta se acerca asintóticamente a la posición de equilibrio. Por último, para  $\lambda = \omega_0$

$$x = (c_1 + c_2) \exp(-\lambda t),$$

donde al igual que en el caso anterior, la amplitud disminuye con el tiempo.

### Osciladores forzados con amortiguamiento

Para avanzar en generalidad, analizemos ahora el caso que combina los resultados de los apartados anteriores. La ecuación de movimiento que combina (2.11) y (2.22) es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot{x} = \frac{f}{m} \cos(\gamma t),$$

al igual que anteriormente, por simplificación y generalidad, reescribimos esto como

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda \dot{x} = \frac{f}{m} \exp(i\gamma t), \quad (2.25)$$

cuya solución particular

$$x = B \exp(i\gamma t), \quad (2.26)$$

al sustituirse en la ecuación de movimiento (2.25) da

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (2.27)$$

Para calcular la amplitud, definimos

$$B = b \exp i\delta, \quad (2.28)$$

por lo que de la ecuación (2.27) se obtiene:

$$b = \frac{f}{m[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + (2\lambda\gamma)^2]}, \quad \tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{-(\omega_0^2 - \gamma^2)}, \quad (2.29)$$

con lo que vemos que conforme  $\gamma \rightarrow \omega_0$ , aumenta la amplitud de las oscilaciones, aunque como era de esperarse, no en la medida de las oscilaciones sin amortiguamiento. Finalmente

$$x = B \exp(i\gamma t) = b \exp[i(\gamma t + \delta)],$$

esta última ecuación, junto con las soluciones encontradas para los osciladores amortiguados constituyen una solución general para el presente caso. Por ejemplo, si  $\lambda < \omega_0$

$$x = a \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta), \quad (2.30)$$

tenemos que, al caer exponencialmente la amplitud del primer término, luego de cierto tiempo el comportamiento del oscilador será el mismo del de uno en ausencia de fricción o forzamiento. Veamos que sucede en el caso cercano a la resonancia  $\gamma = \omega_0 + \epsilon$ . De (2.29a)

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega)(\gamma - \omega) \approx -2\omega_0\epsilon,$$

por tanto

$$B = \frac{f}{2m\omega_0(i\lambda - \epsilon)},$$

o en términos de la amplitud

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\lambda}{\epsilon}, \quad (2.31)$$

aquí la amplitud disminuye desde infinito de acuerdo a la separación con la resonancia y al coeficiente de amortiguamiento.

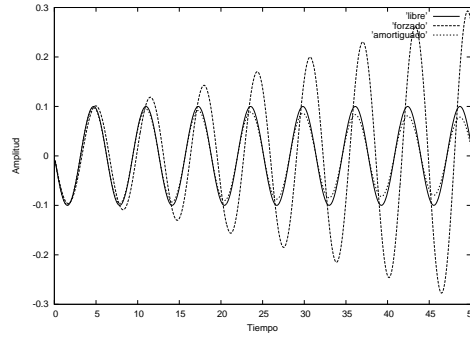
### Resonancia paramétrica

Hemos analizado el caso en que las frecuencias con que los campos externos que estimulan al oscilador se encuentran en resonancia con el mismo. Veamos ahora un caso similar, pero en el que el incremento de amplitud en la resonancia no es proporcional al tiempo (ver 2.16) ni tiene  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  como puntos de equilibrio estable. Supongamos que  $k$  es proporcional al tiempo, entonces

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0,$$

es la ecuación de movimiento. Escrita de otra forma

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (2.32)$$



**Figura 2.1:** Comparación entre los 3 tipos de osciladores vistos hasta ahora. Los coeficientes de amortiguamiento y forzamiento son iguales en ambos casos, con una frecuencia de forzamiento muy cercana a la de la oscilación

Por lo que hemos visto, podemos decir que  $\omega(t)$  es de período  $T = 2\pi/f$ , por lo que  $\omega(t + T) = \omega(t)$ . De esta manera, la ecuación (2.32) es invariante bajo la transformación  $t = t + T$  y cualquiera de los dos argumentos serán soluciones de la ecuación. Por tanto, es posible relacionar ambas soluciones mediante la multiplicación por alguna constante

$$x_1(t + T) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t + T) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (2.33)$$

donde  $\Pi_1(t)$ ,  $\Pi_2(t)$  son funciones de período T. En este caso, se puede demostrar que  $|\mu_1^2| = |\mu_2^2| = 1$ . Por otro lado, otra solución tiene la forma

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t), \quad (2.34)$$

para las que  $|\mu| \neq 1$ . Si  $|\mu| > 1$  ó  $|\mu| < 1$ , alguna de las soluciones de (2.34) crecerá exponencialmente en el tiempo, lo que significa que  $x = 0$  es un punto de equilibrio inestable. A diferencia de la resonancia vista en la sección de osciladores forzados, si  $x$  y  $\dot{x}$  son exactamente cero, su valor en el tiempo permanece igual.

Digamos que la frecuencia de oscilación del sistema  $\omega(t)$  varía periódicamente respecto de otra frecuencia constante  $\omega_1$ . Esto es

$$\omega^2(t) = \omega_1^2(1 + h \cos \omega_2 t),$$

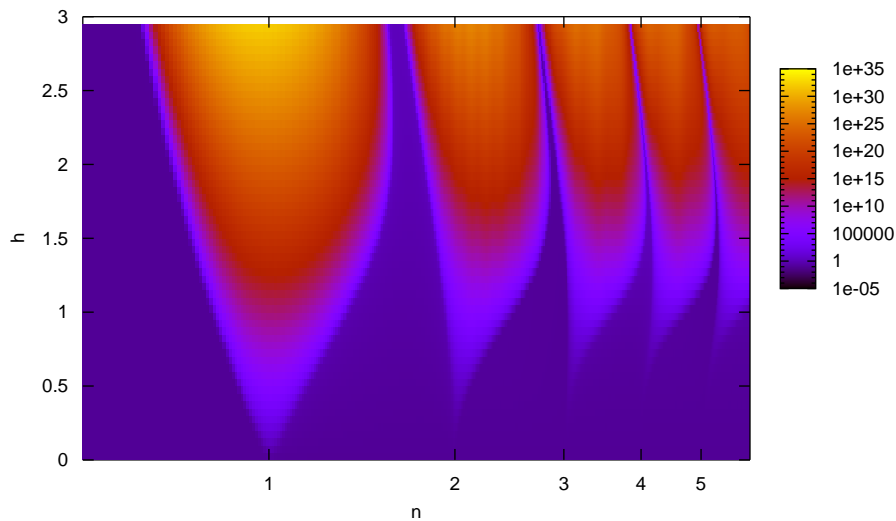
con  $h$  positiva. Con esto, la ecuación de movimiento de la resonancia paramétrica se escribe como

$$\ddot{x} + \omega_1^2[1 + h \cos(\omega_2 t)]x = 0. \quad (2.35)$$

A la anterior se le conoce como *ecuación de Mathieu*. En la figura (2.2) es posible ver que la amplitud de las oscilaciones está relacionada con el valor



de los cocientes de las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . La resonancia paramétrica describe los fenómenos en lo que la amplitud de una oscilación crece mediante un movimiento periódico externo. Un ejemplo de esto es la manera en que nos movemos al subirnos a un columpio, pues para ampliar el movimiento, nos balanceamos en los extremos de la oscilación, logrando que la amplitud del movimiento aumente. Otro ejemplo es la resonancia que se produce en las cuerdas de un instrumento musical: cuando tocamos una nota en alguna cuerda el sonido excitará el movimiento de otra si se trata de la misma nota, aunque de índice diferente (frecuencia), es decir, tocamos un *armónico* (una fracción de la frecuencia original) de la frecuencia de la otra cuerda, lo que provoca la resonancia.



**Figura 2.2:** La figura muestra las zonas de estabilidad en color azul oscuro. La resonancia (inestabilidad) puede verse en forma de “lenguas”. Nótese que la escala es logarítmica, por lo que el valor de la amplitud (mostrado en la barra de la derecha) para la primera resonancia es mucho mayor que el de las siguientes.

## §2.2. Osciladores No-Lineales

Hasta ahora hemos analizado distintos casos en los que los osciladores permiten soluciones analíticas. Sin embargo, cuando introducimos términos de orden mayor, dichas soluciones toman formas más complejas. Es decir,

para la ecuación (2.25) tenemos

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\lambda\dot{x} + \beta x^2 + \delta x^3 + \dots = \frac{f}{m} \cos(\gamma t),$$

con todos los términos de orden superior. Un resultado de la no-linealidad es que ahora la eigenfrecuencia  $\omega_0$  depende de la amplitud, de la forma  $\omega'_0 = \omega_0 + \kappa b^2$  donde  $\kappa$  es alguna constante. Al sustituir lo anterior en la ecuación (2.32) y utilizando  $\gamma - \omega_0 = \epsilon$  se obtiene:

$$b^2[(\epsilon - \kappa b^2)^2 + \lambda^2] = \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2}. \quad (2.36)$$

El valor máximo de la amplitud  $b$  se alcanza cuando  $db/d\epsilon = 0$ . Haciendo esto con la ecuación anterior se encuentra que  $\epsilon = \kappa b^2$ . Sustituyendo este resultado en la ec. (2.36) obtenemos el valor máximo de la amplitud:

$$b_{max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}. \quad (2.37)$$

Esto indica que, aunque se esté cerca de la resonancia, la amplitud sólo crecerá hasta un cierto valor, o dicho de otra forma, la amplitud se satura, debido a que la oscilación aumenta en forma tal que mueve a la eigenfrecuencia fuera de la resonancia.

Aunque existen métodos analíticos para resolver este tipo de ecuaciones, utilizaremos métodos numéricos. El método que se utiliza es el de Runge-Kutta, que se explica al final del presente capítulo.

### Resonancia paramétrica

En el caso no-lineal de la resonancia paramétrica, partimos de la ecuación (2.35) para escribir la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \omega_1^2[1 + h \cos(\omega_2 t)]x + 2\lambda\dot{x} + \beta x^2 = 0; \quad (2.38)$$

por simplicidad, tomamos terminos hasta segundo orden. En la figura 2.2 podemos ver el comportamiento del oscilador de acuerdo a la relación entre las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$ : la resonancia ocurre cuando el cociente entre estas frecuencias es un múltiplo entero  $\omega_1/\omega_2 = n$ . Sin embargo, es costumbre utilizar la relación anterior de la siguiente manera:

$$\omega_2 = \frac{2\omega_1}{n}. \quad (2.39)$$

Para los discos de acreción, existe una restricción en los valores de  $n$  para los que es posible la resonancia, resultado de las relaciones entre las frecuencias orbitales alrededor de objetos compactos, como se verá en el siguiente capítulo.

### Osciladores Acoplados

En la sección de osciladores forzados se vió que si el forzamiento es de forma periódica, la amplitud varía con la frecuencia, lo que se conoce como batimientos. Algo similar sucede en el caso de un sistema de osciladores acoplados.

Sean  $z_1 = x_1 - x_2$  y  $z_2 = x_1 + x_2$  pequeños desplazamientos alrededor del equilibrio para dos osciladores armónicos simples y acoplados:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -kz_1, \quad (2.40)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -kz_2,$$

donde  $k$  es el *coeficiente de acoplamiento*. Restando y sumando ambas ecuaciones se obtienen

$$\ddot{z}_1 + (\omega_0^2 + 2k)z_1 = 0, \quad (2.41)$$

$$\ddot{z}_2 + \omega_0^2 z_2 = 0,$$

si suponemos que  $k$  es pequeña, entonces  $\Omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \simeq \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}$ ,  $\Omega_2 = \omega_0$  con lo que obtenemos las ecuaciones que describen los *modos normales* de oscilación del sistema. Las soluciones de éstas son de la forma (2.5):

$$z_1 = a_1 \cos \Omega_1 t + b_1 \sin \Omega_1 t, \quad (2.42)$$

$$z_2 = a_2 \cos \Omega_2 t + b_2 \sin \Omega_2 t.$$

Digamos que la velocidad inicial de ambos osciladores es nula, pero que uno de ellos esta fuera de la posición de equilibrio ( $\dot{x}_{1,2} = 0$ ,  $x_1 = C$ ), es decir

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0, \quad z_1 = z_2 = C,$$

de donde

$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_1 = a_2 = C,$$

entonces

$$z_1 = C \cos \Omega_1 t, \quad z_2 = C \cos \Omega_2 t.$$

Por tanto, las soluciones particulares para cada oscilador son

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} = C \cos \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t, \quad (2.43)$$

$$x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2} = -C \sin \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t,$$

donde podemos ver fácilmente la modulación de frecuencia (o de batimientos) entre los dos osciladores.

Veamos lo anterior de otra forma. Para un sistema de osciladores, las ecuaciones de movimiento pueden escribirse como

$$\sum_k (m_{ik}\ddot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0, \quad (2.44)$$

donde  $x_k$  representa los desplazamientos respecto del equilibrio. Como en las secciones anteriores, sea

$$x_k = A_k \exp(i\omega t),$$

donde  $A_k$  son constantes. Sustituyendo en (2.44) obtenemos

$$\sum_k (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) A_k \exp(i\omega t) = 0,$$

esto es, un sistema de  $i = N$  ecuaciones lineales homogéneas. Si éste tiene soluciones no triviales, se debe cumplir que el determinante

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (2.45)$$

En general, la *ecuación característica* (2.45) tiene  $N$  raíces reales positivas<sup>1</sup>  $\omega_i^2$ , las *eigenfrecuencias* del sistema.

### §2.3. Método de Runge-Kutta

Este método se utiliza para hallar la solución de ecuaciones diferenciales dadas las condiciones iniciales. Consideremos primero la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad (2.46)$$

con la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \quad (2.47)$$

para la que existe una única solución  $y = \Phi(x)$ . El procedimiento es construir valores aproximados  $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$  de la solución  $\Phi$  para los puntos  $x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$ . Lo primero es determinar  $y_1$  a partir de  $y_0$  desde la condición inicial  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ , -ec. (2.46)-. Una vez calculada  $y_1$ , podemos calcular  $y_2$  y así sucesivamente.

El método de Runge-Kutta<sup>2</sup> parte de la idea de utilizar un desarrollo tipo serie de Taylor pero que no involucre cálculos de las derivadas parciales. La formulación es equivalente, hasta el quinto término, al desarrollo de Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h y'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n + \frac{h^4}{4!} y^{iv}_n. \quad (2.48)$$

<sup>1</sup>Esto puede argumentarse pensando que de lo contrario, la parte imaginaria de  $\omega$  representaría una variación exponencial de  $x_k$  y  $\dot{x}_k$ , violando la conservación de energía del sistema.

<sup>2</sup>Desarrollado inicialmente por Carl Runge en 1895 y continuado por M. W. Kutta en 1901. Aparece en: *Zeits. Math. Phys.* 46, Numerische Rechnung, 435-453; Runge, C. y König, 1924.

El método calcula los promedios de los valores de  $f(x, y)$  sobre puntos del intervalo  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ . Esto es:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad (2.49)$$

donde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(x_n, y_n) \cdot h, \\ k_{n2} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_{n1}\right) \cdot h, \\ k_{n3} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_{n2}\right) \cdot h, \\ k_{n4} &= f(x_n + h, y_n + k_{n3}) \cdot h. \end{aligned} \quad (2.50)$$

De esta manera, la ecuación (2.49) calcula la solución aproximada a (2.46) a partir de las iteraciones de los valores  $k_{ni}$ , que al sumarse en la ecuación (2.49) dan un tipo de “promedio” de la pendiente. Evidentemente el número de iteraciones (ciclos) que se lleven a cabo para el cálculo de  $y_{n+1}$  será proporcional a la amplitud de muestreo de la solución; mientras que para la precisión, es posible demostrar que el error de los cálculos es de  $O(h^5)$  por paso, o proporcional a  $h^4$  para un intervalo.

Este mismo método se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales de orden mayor. Lo importante aquí es disminuir el orden de la ecuación hasta llegar a una de primer orden, mediante la construcción de un sistema de ecuaciones en que se incluyan todos los órdenes de diferenciación. Veamos que sucede para el caso de segundo orden, por simplicidad y por ser el caso que es de interés para el problema de oscilación que tratamos, como se verá más adelante. Sea

$$\ddot{x} = f(t, x, y), \quad (2.51)$$

la ecuación a resolver. Utilizamos una notación de derivada temporal de nuevo bajo el argumento de acercarnos directamente al problema de oscilaciones, pero sin perder generalidad. También tenemos

$$\dot{x}_0 = 0, \quad (2.52)$$

$$x_0 = a \quad y \quad a \in \mathfrak{R}$$

como las condiciones iniciales del problema. La manera de disminuir el orden es renombrando la variable  $x$  como

$$\dot{x} = p \quad (2.53)$$

$$x = q$$

Con  $q_0 = a$ ,  $p_0 = 0$ . De esta manera,  $p$  equivaldrá a una nueva función, digamos  $g(t, x, y)$  -estrictamente  $p = g$ -, mientras  $f$  queda como la función

con las variables originales. Las soluciones para ambas están entonces dadas por:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad (2.54)$$

$$q_{n+1} = q_n + \frac{1}{6}(l_{n1} + 2l_{n2} + 2l_{n3} + l_{n4}).$$

donde

$$k_{n1} = f(t_n, x_n, y_n) \cdot h,$$

$$k_{n2} = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{n1}, y_n + \frac{1}{2}l_{n1}) \cdot h,$$

$$k_{n3} = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{n2}, y_n + \frac{1}{2}l_{n2}) \cdot h,$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, x_n + k_{n3}, y_n + l_{n3}) \cdot h;$$

(2.55)

$$l_{n1} = g(t_n, x_n, y_n) \cdot h,$$

$$l_{n2} = g(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{n1}, y_n + \frac{1}{2}l_{n1}) \cdot h,$$

$$l_{n3} = g(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_{n2}, y_n + \frac{1}{2}l_{n2}) \cdot h,$$

$$l_{n4} = g(t_n + h, x_n + k_{n3}, y_n + l_{n3}) \cdot h.$$

Con lo que el problema queda resuelto por la ecuación (2.54b).

Por último, para el caso de osciladores acoplados, es evidente que ahora la solución implica resolver mas de una función como la de (2.51). Para ello, basta con proceder como se hizo para calcular  $p$ ,  $q$ , para cada una de las ecuaciones diferenciales. Es decir, encontrar  $k$ ,  $l$  (si el sistema es de segundo orden de diferenciación) tantas veces como ecuaciones halla en el sistema. Esta es la manera, sin entrar aún en detalles, en la que se resuelve el sistema de osciladores acoplados de la siguiente sección del presente trabajo.



## Capítulo 3

# Modelo de Resonancia Paramétrica para las Oscilaciones Cuasi-Periódicas

En esta sección hablaremos de como el modelo de resonancia paramétrica entre dos osciladores acoplados puede aplicarse al fenómeno de las oscilaciones cuasi-periódicas. Como se ha dicho, las OCP se observan como una variación en la curva de luz de algunos objetos compactos, y una de las posibilidades es que tal variación provenga de algún fenómeno en el disco de acreción, como se sostiene en la mayoría de los modelos mencionados en la sección §1.5. Bajo esta hipótesis, suponemos que las OCP resultan de la oscilación entre dos diferentes órbitas en el disco de acreción por lo que comenzaremos por explicar el origen de dichas órbitas en las cercanías de los objetos compactos.

### §3.1. Desacoplamiento de Órbitas

Clásicamente, el potencial efectivo gravitacional es:

$$\mathcal{U} = -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}, \quad (3.1)$$

en el que el lado derecho corresponde a los potenciales central gravitacional y centrífugo (donde  $\ell = r^2\dot{\phi}$ ), respectivamente. La frecuencia con la que una partícula de prueba orbitará alrededor del objeto que origina dicho potencial es:

$$\Omega = \left(\frac{GM}{r^3}\right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

como se ha visto en la sección §1.3.2. Para calcular la frecuencia con la que la partícula oscilará en la trayectoria de la órbita luego de alguna pequeña



perturbación, hacemos un desarrollo el Taylor del potencial efectivo alrededor del punto de equilibrio (manteniendo el momento angular constante) y tomamos el primer término no nulo del desarrollo (como en la sec. §2.1). Sin embargo, podemos calcular el valor de la oscilación simultáneamente en todos los planos si para derivar tomamos el laplaciano de  $\mathcal{U}$ . Debido a la simetría de las órbitas, esto puede hacerse en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2\mathcal{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2}. \quad (3.3)$$

Entonces, utilizando la ec. (3.1), para la parte radial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right) = -\frac{GM}{r^3} + \frac{2\ell^2}{r^4}. \quad (3.4)$$

El momento angular evaluado en la órbita es igual

$$\ell = \sqrt{GM}r, \quad (3.5)$$

por lo que si sustituímos lo anterior en la ec. 3.4 y obtenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right) = \frac{GM}{r^3}. \quad (3.6)$$

Esto nos indica que en la coordenada  $r$ , la partícula oscilará en un movimiento armónico simple, con una frecuencia de oscilación  $\omega_r^2 = GM/r^3$ . Es decir, la frecuencia orbital (ec. 3.2) es igual que la frecuencia de oscilación en la coordenada radial. Ahora, para calcular la frecuencia de oscilación en el caso de que la perturbación ocurra en  $\theta$ , suponemos que dichas oscilaciones son lo suficientemente pequeñas de forma que las perturbaciones angulares puedan escribirse como perturbaciones puramente verticales. Por tanto, bajo la anterior aproximación y con  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , las oscilaciones en  $\theta$  y  $z$  tendrán la misma frecuencia, es decir:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} \approx \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z^2} = \frac{GM}{r^3}. \quad (3.7)$$

Con esto podemos ver que todas las frecuencias de oscilación y angular en una órbita bajo la acción de un potencial newtoniano serán las mismas:

$$\omega_r^2 = \omega_\theta^2 = \Omega^2, \quad (3.8)$$

o dicho de otra forma, *las frecuencias están degeneradas*. Lo anterior no sucede en el caso relativista, pues el valor de las frecuencias cambia según el plano de oscilación, como veremos a continuación.

Como se ha dicho, el campo gravitacional de un objeto puede ser tan grande que la dinámica a su alrededor (o de otra forma, la geometría) se modifique respecto a la formulación newtoniana. Esto se traduce, en primera

instancia, en un cambio en la forma de medir las distancias en las vecindades del objeto. Clásicamente, un intervalo  $s$  en un espacio 4-dimensional (que incluye al tiempo como coordenada) se mide de la forma  $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$  donde  $c$  es la velocidad de la luz. Si asumimos una notación tensorial, lo anterior puede escribirse como:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.9)$$

en donde  $g_{ik}$  representa la métrica del espacio-tiempo, por lo que se conoce como *tensor métrico*. En el caso donde la geometría del espacio es plana, el tensor  $dx^i dx^k$  tiene entradas  $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  por lo que el tensor métrico toma los valores:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (3.10)$$

con lo que recuperamos la métrica del espacio de Minkowski (euclidiana). Esto sucede siempre que se quiera transformar un sistema de referencia cualquiera a uno inercial. Sin embargo, es muy importante notar que no es posible llevar el tensor métrico en su forma general a la forma de la ec. (3.10) mediante únicamente una transformación de coordenadas, con lo que se demuestra que los campos gravitacionales no pueden ser eliminados totalmente por una transformación de coordenadas, o dicho de otra forma, mediante la elección de un sistema de referencia adecuado. De esta manera, el campo gravitacional modifica los intervalos de espacio-tiempo haciendo los 4-espacios *curvos*.

La conclusión anterior nos indica que bajo la acción de potenciales gravitatorios lo suficientemente intensos debemos considerar la curvatura que le produce la geometría del espacio-tiempo, lo que implica la utilización de una métrica distinta. Esta métrica resulta ser la solución de las ecuaciones de campo gravitacional (ecuaciones de Einstein) que, sólo por mencionar, son

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \quad (3.11)$$

donde  $R_{ik}$  es el *tensor de Ricci*, que resulta de la contracción del *tensor de Riemann*  $R_{limk}$  (el tensor de curvatura de una variedad),  $R_{ik} \equiv g^{lm}R_{limk}$ ;  $R$  es el *escalar de Ricci* o la *curvatura escalar del espacio* que es a su vez la contracción del tensor del mismo nombre,  $R = R^i_i = g^{il}g^{km}R_{iklm}$ .  $T_{ik}$  es el *tensor de energía momento*, que es la fuente de campo gravitacional.

A pesar de la dificultad que desde un principio representaba resolver la ecuación (3.11), sólo un año después de su publicación, Schwarzschild presentó la primera solución, para una distribución esférica de materia. En este caso, la métrica que describe el campo gravitacional está dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} - r^2 d\Omega^2, \quad (3.12)$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Esta ecuación es válida para puntos externos a la distribución de materia. De acuerdo a lo anterior, el tensor métrico en este caso será:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

con  $dx^i = (dt, -dr, -d\Omega)$ , -ver ec. (3.9)-.

La ecuación de movimiento en relatividad general se calcula utilizando el principio de mínima acción  $\delta S = 0$ , con lo que se obtiene que para la cuatro velocidad  $u^i$ ,  $du^i/ds = 0$ . En coordenadas curvilíneas esto equivale a  $Du^i/ds = 0$ , donde  $D$  es la *derivada covariante*, definida como

$$DA^k = A^k_{;p} dx^p, \quad (3.14)$$

donde

$$A^k_{;p} = \left( \frac{\partial A^k}{\partial x^p} + \Gamma^k_{mp} A^m \right). \quad (3.15)$$

Análogamente, podemos calcular también la derivada contravariante, siguiendo las reglas de contracción tensorial. A las cantidades  $\Gamma^k_{mp} A^m$  se les conoce como *símbolos de Christoffel* o la *conexión* y usualmente se definen por la ecuación (3.15). Para un espacio plano,  $\Gamma^k_{mp} = 0$ .

Entonces, para calcular  $Du^i/ds = 0$  utilizamos las ecuaciones (3.14) y (3.15), con lo que obtenemos

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (3.16)$$

que es la ecuación de movimiento de una partícula de prueba en un campo gravitacional. Esto nos demuestra en primera instancia que cuando la partícula se encuentra el dicho campo, su movimiento no será uniforme ni rectilíneo, sino en trayectorias *geodésicas*.

A partir de la ecuación anterior, pueden calcularse las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(\tau) + \frac{E^2}{2g_{\theta\theta}} \frac{\partial \mathcal{U}(r, \theta)}{\partial \theta} + 2\Gamma^{\theta}_{r\theta} \dot{r}(\tau) \dot{\theta}(\tau) &= 0, \\ \ddot{r}(\tau) + \frac{E^2}{2g_{rr}} \frac{\partial \mathcal{U}(r, \theta)}{\partial r} + \Gamma^r_{\theta\theta} \dot{\theta}(\tau)^2 + \Gamma^r_{rr} \dot{r}(\tau)^2 &= 0, \\ \ddot{\phi}(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aquí  $\tau$  es el tiempo propio, el potencial efectivo es:

$$\mathcal{U} = g^{tt} + l g^{t\phi} + l^2 g^{\phi\phi}, \quad (3.18)$$

y  $E = -u_t$  es la energía, la componente temporal de la 4-velocidad (tomando en cuenta que  $u_i = (-c, \vec{v})$ ).

Al igual que antes, consideremos una perturbación en la órbita de la partícula en el plano ecuatorial ( $r_0, \theta_0 = \pi/2, \phi = \Omega\tilde{\tau}, \tilde{\tau} = \tau/r_G$ ) manteniendo constante el momento angular:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\tau) &= r_0 + \rho(\tau) \quad \rho \ll r_0, \\ \tilde{\theta}(\tau) &= \frac{\pi}{2} + z(\tau) \quad z \ll \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde  $\tilde{\rho}(\tau)$  y  $\tilde{\theta}(\tau)$  denotan las pequeñas perturbaciones a lo largo de las órbitas respectivas, con  $z = r_0\theta$ . Esto describe, a primer orden, dos osciladores armónicos acoplados donde

$$\omega_{\tilde{\theta}}^2 = \left( \frac{1}{g_{\theta\theta}} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} \right)_{\ell, r_0, \pi/2}, \quad y \quad \omega_r^2 = \left( \frac{1}{g_{rr}} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right)_{\ell, r_0, \pi/2}, \quad (3.20)$$

son los valores de las frecuencias de oscilación (Rebusco, 2004). Como puede verse, esto es distinto al caso newtoniano donde, como vimos, el valor de las frecuencias de oscilación radiales y verticales es el mismo que el de la frecuencia orbital.

Si continuamos a mayor orden en la expansión de Taylor, los osciladores se acoplan por lo que la resonancia paramétrica es posible. A tercer orden aparecerán términos de saturación que limitan las amplitudes. Ambas situaciones se verán a continuación.

### Modelo de Paczyński-Wiita

Como vimos, las ecuaciones (3.20) nos dan las frecuencias de oscilación si el potencial efectivo es el de la ecuación (3.18). Sin embargo, podemos simplificar en gran medida los cálculos si en vez de utilizar dicho potencial utilizamos un potencial pseudo-newtoniano que reproduce correctamente distintos aspectos de la métrica de Schwarzschild, como las posiciones de la última órbita circular estable  $r_{ms}$  y de la última órbita circular  $r_{ml}$  que es de interés pues el borde interior del disco de acreción puede encontrarse entre estos puntos. Este potencial es de la forma:

$$\mathcal{U} = \Phi(r, \theta) + \frac{\ell^2}{2r^2 \sin^2 \theta}, \quad (3.21)$$

con el momento angular específico  $\ell = \dot{\phi} r^2 \sin^2 \theta$ . El potencial gravitatorio  $\Phi$  es de la forma:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM}{r - r_s}, \quad (3.22)$$

donde  $r_s$  es el radio de Schwarzschild  $r_s = 2GM/c^2$ . Con lo anterior, ahora las frecuencias se calculan de forma análoga al caso clásico:

$$\omega_\theta^2 = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \theta^2} \right)_\ell, \quad \omega_r^2 = \left( \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial r^2} \right)_\ell. \quad (3.23)$$

Sustituyendo (3.21) en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\omega_\theta^2 = \frac{GM}{r(r - r_s)^2}, \quad \omega_r^2 = \frac{GM}{(r - r_s)^3} \left( 1 - \frac{r_{ms}}{r} \right), \quad (3.24)$$

donde  $r_{ms} = 3r_s$ . Con esto podemos ver que al igual que en el caso relativista y a diferencia del clásico, las degeneración de las frecuencias se rompe, además de obtener la desigualdad  $\omega_r^2 < \omega_\theta^2$ . Esta relación es muy importante, pues nos permitirá identificar las resonancias que en nuestro modelo pueden identificarse con las observadas en el disco, como veremos a continuación.

### §3.2. Resonancia Paramétrica en un Oscilador

Ahora veamos cual es el comportamiento del oscilador tipo Mathieu, para tener una idea de cómo tiene lugar la resonancia, antes de pasar al caso del acoplamiento. Como hemos visto en la sección §2.2, la resonancia paramétrica tiene lugar en un oscilador tipo Mathieu (ec. 2.38), de la forma:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 [1 + h \cos(\omega_2 t)] x + 2\lambda \dot{x} + \beta x^2 = 0.$$

Si identificamos los términos  $\omega_1 \equiv \omega_\theta^2$ ,  $\omega_2 \equiv \omega_r^2$  y las perturbaciones en  $x$  con  $\delta\theta$ , obtenemos:

$$\delta\ddot{\theta} + \omega_\theta^2 [1 + h \cos(\omega_r t)] \delta\theta + 2\lambda \delta\dot{\theta} + \beta \delta\theta^3 = 0. \quad (3.25)$$

Los términos  $2\lambda \delta\dot{\theta}$  y  $\beta \delta\theta^3$  corresponden al amortiguamiento y a la saturación, respectivamente. En la saturación hemos cambiado la potencia del término no lineal por  $\delta\theta^3$  debido a que es necesario cumplir con la simetría ecuatorial del disco, por lo que si el potencial tiene un término de orden cuarto (por ser resultado de un desarrollo en serie de Taylor, como se verá en el caso del acoplamiento) la derivada que corresponda a dicho término tendrá un orden de potencia menos, representada por éste valor.

Este oscilador entra en resonancia cuando la relación entre las frecuencias es igual a  $\omega_r = 2\omega_\theta/n$  (ec. 2.39), para  $n \in \mathbb{N}$ ; sin embargo, de acuerdo al valor obtenido para las frecuencias en 3.23 se debe cumplir que  $\omega_r^2 < \omega_\theta^2$

### §3.2. RESONANCIA PARAMÉTRICA EN UN OSCILADOR<sup>51</sup>

por lo que ahora  $n \geq 3$ . Esto implica que a pesar de que tengamos resonancias en  $n = 1, 2$ , las que tendrán un sentido físico serán sólo las que cumplan con  $n$  mayor que 3, es decir, la resonancia mas fuerte ocurre cuando la razón entre frecuencias es de 2:3; con lo que se apoya la hipótesis de la resonancia paramétrica para las OCP, pues en algunas fuentes la razón de las frecuencias a las cuales ocurren los picos en el espectro es de ésta magnitud.

Para llevar a cabo la simulación, se utiliza un código en *Fortran 77* en el que se resuelve la ecuación (3.25) por el método de Runge-Kutta (sección §2.3); esto es, se construyen dos ciclos mediante los que se calculan las iteraciones en  $\delta\theta$  y  $\delta\dot{\theta}$  vistas en las ecuaciones 2.50 <sup>1</sup> para encontrar los elementos de la suma  $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})$  -ec. 2.49- con la que se calcula el valor de  $\theta$ . Sin embargo, como se explica mas adelante en la misma sección, nuestro problema implica la solución de una ecuación de orden dos en la derivada temporal de  $\theta$ , por lo que si procedemos como ahí se indica, primero se definen las funciones:

$$f(t, \delta\theta, \delta\dot{\theta}) = \delta\dot{\theta}, \tag{3.26}$$

$$g(t, \delta\theta, \delta\dot{\theta}) = -\omega_\theta^2[1 + h \cos(\omega_r t)]\delta\theta - \lambda\delta\dot{\theta} - \beta\delta\dot{\theta}^3,$$

cuyas soluciones estarán dadas por las ecuaciones (2.54), de las cuales,  $k$  y  $l$  se calculan mediante las iteraciones de las funciones anteriores (ec. 3.26). Las condiciones iniciales son, para todos los casos:  $0 < \delta\theta < 1$  (posición) y  $\delta\dot{\theta} = 0$  (velocidad).

Luego, para ver el comportamiento del oscilador, se añaden ciclos en los que se varían los valores de  $h$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  y  $n$  (el cociente las frecuencias) de manera que es fácil ver lo que sucede en diferentes casos y sobre todo, como varía la amplitud respecto de las frecuencias, es decir, la resonancia paramétrica. Finalmente todos los resultados se grafican utilizando el programa *Gnuplot*.

Ahora veamos distintos casos de este oscilador. Un oscilador tipo Mathieu sin términos no-lineales o amortiguamiento se comporta como en la figura 3.1, donde podemos ver claramente la amplitud de las oscilaciones así como las zonas de inestabilidad en forma de “lenguas” donde se producen las resonancias alrededor de los valores enteros de  $n$ . Además, puede verse que el rango de frecuencias para las que el oscilador se vuelve inestable aumenta con  $h$ . Las zonas de inestabilidad pueden verse más fácilmente en la figura 3.2, donde sólo se muestra la base de la figura anterior.

Como puede verse, la amplitud de las resonancias disminuye por varios órdenes de magnitud al aumentar  $n$ , es decir, conforme el valor de  $\omega_\theta$  crece

---

<sup>1</sup>Es importante no confundir  $h$  de esta ecuación (que solo se utiliza en dicha sección) con  $h$  en la ecuación del oscilador. La  $h$  de las ecuaciones (2.50) y (2.55) es un incremento que determina el número de valores de la amplitud que obtendremos en el programa, y por tanto, la precisión de éste, por lo que puede pensarse en dicho valor como el incremento usual  $dx$ .

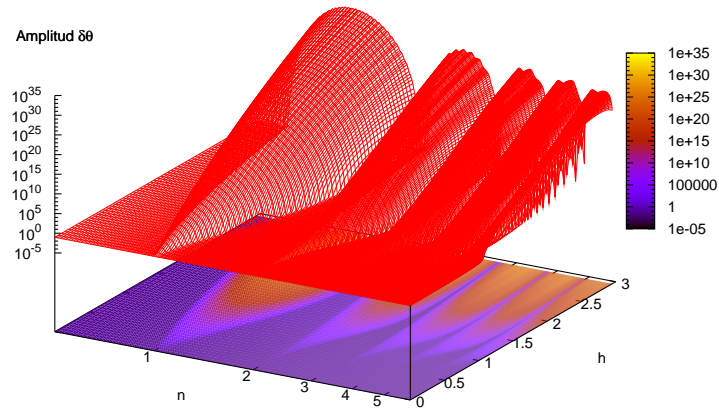


Figura 3.1: Amplitud de un oscilador libre tipo Mathieu.

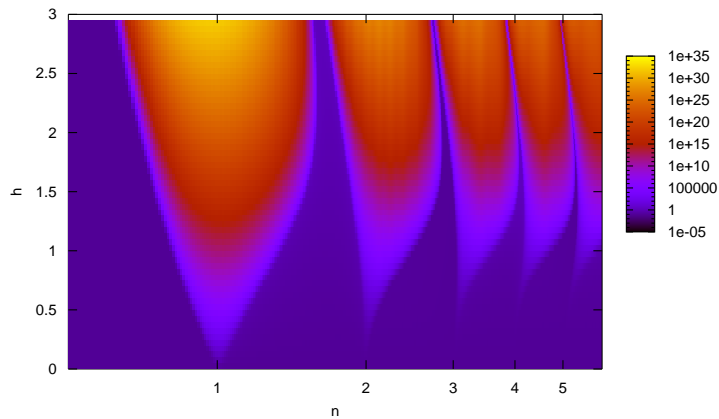
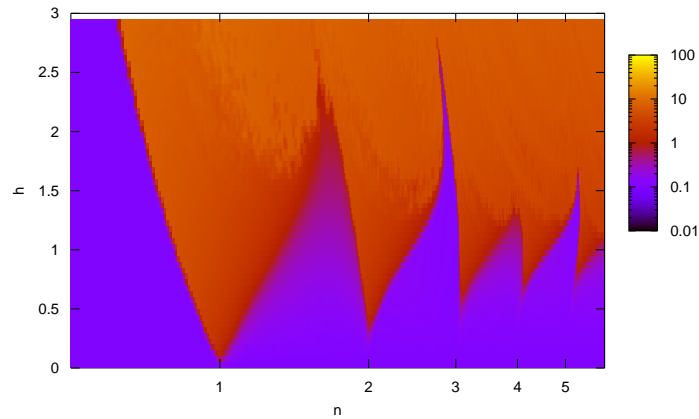


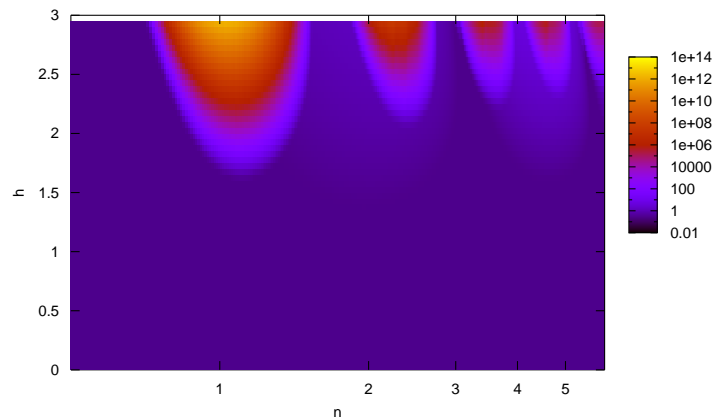
Figura 3.2: Zonas de inestabilidad de la resonancia paramétrica. Aquí  $n = 2\omega_\theta/\omega_r$ ,  $\lambda, \beta = 0$ , la amplitud  $\delta\theta$  varía de acuerdo a la escala mostrada del lado derecho.

respecto de  $\omega_r$ .

Los 2 siguientes casos ilustran como se comporta el oscilador cuando se introducen los términos de no-linealidad y amortiguamiento, respectivamente (fig. 3.3 y 3.4 ).



**Figura 3.3:** Aquí podemos ver como el término no-lineal  $\delta\theta^3$  satura la amplitud en pocos órdenes de magnitud respecto del caso libre, manteniendo su valor durante mas ciclos, como puede verse mediante la escala de colores. En este caso  $\beta = 0.6$

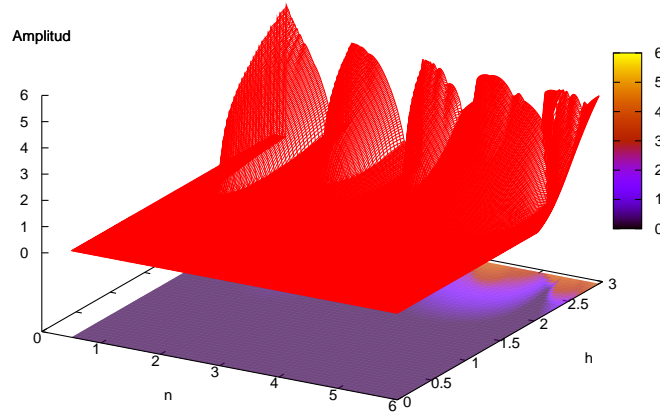


**Figura 3.4:** La amplitud disminuye con los ciclos además de aumentar el valor de  $h$  para el que existe inestabilidad. Aquí  $\lambda = 2$

Finalmente, la figura 3.5 muestra el comportamiento del oscilador con los 2 términos anteriores, que será del tipo que se utilice en la siguiente sección. En estas últimas dos figuras podemos ver como la amplitud de las



oscilaciones varía en mucho menor medida que en el oscilador libre, así como el cambio en los valores de las frecuencias a las que ocurren las resonancias (las lenguas de inestabilidad se mueven respecto de  $n$ ). Ambas circunstancias se asocian a la aparición de  $\delta\theta^3$ , pues como vimos en la sección §2.2, la no-linealidad conduce a que la amplitud dependa de la eigenfrecuencia del oscilador, y puesto que la oscilación mueve a la eigenfrecuencia fuera de la resonancia, la amplitud alcanza un valor máximo.



**Figura 3.5:** Oscilador tipo Mathieu con términos no-lineal y de amortiguamiento. Los valores de  $\lambda$  y  $\beta$  son los mismos que en los ejemplos anteriores.

### §3.3. Resonancia Paramétrica en Osciladores Acoplados

En esta sección veremos finalmente como funciona el modelo de osciladores y de que manera pueden ser interpretados los resultados de tal simulación a fin de servir de hipótesis en los mecanismos que conducen la aparición de los OCP en sistemas compactos.

#### §3.3.1. Modelo de los Osciladores

Nuestro modelo se restringe a partículas de prueba en órbitas cuasi-geodésicas, por lo que consideraremos líneas de flujo en el disco de acreción bajo tales condiciones (ecs. 3.19).

Ahora debemos encontrar las ecuaciones de movimiento en cada dirección ( $r$  y  $\theta$ ). Para ello, utilizamos las ecuaciones (3.17) para las que se

sustituye  $\mathcal{U}$  por un desarrollo de Taylor del mismo potencial efectivo hasta el cuarto orden, para luego perturbar las ecuaciones en las variables respectivas ( $\theta + \delta\theta$  y  $r + \delta r$ ). De acuerdo con Abramowicz *et. al.* (2003)<sup>2</sup>, utilizando  $g_{ik}$  de la métrica de Schwarzschild, descartando términos nulos por argumentos de paridad y al evaluar en el equilibrio se obtiene que las ecuaciones de movimiento geodésico son:

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\theta} + \omega_\theta^2 \left[ 1 + \frac{(\omega_\theta^2)'}{\omega_\theta^2} \delta r + \frac{1}{2} \frac{(\omega_\theta^2)''}{\omega_\theta^2} \delta r^2 \right] \delta\theta + \frac{2}{r} \left( 1 - \frac{\delta r}{r} \right) \delta\dot{\theta} \delta\dot{r} + \\ + \frac{1}{6r^2} \left( \frac{\partial^4 \mathcal{U}}{\partial \theta^4} \right)_\ell \delta\theta^3 = f_\theta, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\delta\ddot{r} + \omega_r^2 \delta r + \frac{1}{2} (\omega_r^2)' \delta r^2 + \frac{1}{6} (\omega_r^2)'' \delta r^3 - r(\delta\dot{\theta})^2 + \delta r(\delta\dot{\theta})^2 = f_r, \quad (3.28)$$

$$\dot{\ell} = r^2 \sin^2 \theta f_\phi. \quad (3.29)$$

En éstas ecuaciones, el potencial que se utilizará es el de Paczyński-Witta, a partir del que también se calculan las frecuencias. Las  $f_i$  son fuerzas que pueden tener origen en la viscosidad, presión, campo magnético, etc., pero no gravitacional. Con lo anterior, se justifica el porque se ha revisado la ecuación de Mathieu a lo largo de este trabajo: las ecuaciones (3.27) y (3.28) describen dos osciladores no-lineales acoplados en resonancia paramétrica, con términos de amortiguamiento y saturación. Estas son las ecuaciones que se resolverán mediante una simulación numérica.

### §3.3.2. Acoplamiento

En nuestro modelo de osciladores acoplados (ecs. 3.27 y 3.28) hemos dicho que ambos se encuentran bajo condiciones de forzamiento, sin precisar su origen. La naturaleza de tales fuerzas en los discos de acreción es un problema que hasta hoy no cuenta con una solución satisfactoria, por lo que es muy difícil presentar un modelo para simularlas. Sin embargo, para los fines de las matemáticas de la simulación, podemos considerar las  $f_i$  de forma tal que los términos de perturbación (no-geodésicos) se anulen. Esto lo podemos hacer introduciendo un parámetro  $\alpha_i$  que varíe desde cero hasta uno para los términos del lado derecho de las ecuaciones de movimiento. De nuevo, en Abramowicz *et al.* (2003) se dice que tales componentes son de la forma:

$$f_\theta = \alpha_\theta \left[ \frac{1}{2} (\omega_\theta^2)'' \delta r^2 + \frac{1}{6r^2} \left( \frac{\partial^4 \mathcal{U}}{\partial \theta^4} \right)_\ell \delta\theta^2 \right] \delta\theta, \quad (3.30)$$

---

<sup>2</sup>En Rebusco (2004) encontramos otra manera, partiendo de principios mas generales, de deducir las ecuaciones de movimiento geodésico

$$f_r = \alpha_r \left[ \frac{\delta r}{r} - 1 \right] r (\delta \dot{\theta})^2. \quad (3.31)$$

De forma que sólo la ecuación 3.30 tiene la forma de un oscilador de Mathieu, pues es de donde se obtendrán las resonancias. Lo anterior con la intención de que este oscilador sea “alimentado” por el radial (ec. 3.31), que sólo se distingue de un oscilador libre por incluir términos no-lineales. Con el fin de simplificar los cálculos, suponemos que  $\alpha_\theta = \alpha_r = \alpha$ . De esta manera es posible estudiar el comportamiento de los osciladores en distintos niveles de acoplamiento; y, lo que es más importante, establecer un sistema cerrado en el que se den las condiciones para una posible retroalimentación de la energía entre ambos osciladores, lo que representa un soporte a la hipótesis de la resonancia paramétrica para las OCP, pues demuestra que los picos de amplitud pueden originarse a partir de perturbaciones en las órbitas de los flujos de acreción, dando como resultado la autoexcitación de las oscilaciones, lo cual provoca la resonancia.

### §3.4. Simulaciones

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones numéricas hechas con el modelo de osciladores de la sección anterior.

Para los cálculos se han tomado unidades naturales ( $G = c = 1$ ) y se ha tomado como 1 el valor de la masa. Los valores de las frecuencias y sus derivadas se obtienen de las ecuaciones 3.24, es decir:

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{GM}{(r-r_s)^3} \left(1 - \frac{r_{ms}}{r}\right), \\ (\omega_r^2)' &= -\frac{3GM}{(r-r_s)^4} \left(1 - \frac{r_{ms}}{r}\right) + \frac{GM}{(r-r_s)^3} \left(\frac{r_{ms}}{r^2}\right), \\ (\omega_r^2)'' &= \frac{12GM}{(r-r_s)^5} \left(1 - \frac{r_{ms}}{r}\right) - \frac{6GM}{(r-r_s)^4} \left(\frac{r_{ms}}{r^2}\right) - \frac{2GM}{(r-r_s)^3} \left(1 - \frac{r_{ms}}{r^3}\right), \\ \omega_\theta^2 &= \frac{GM}{r(r-r_s)^2}, \\ (\omega_\theta^2)' &= -\frac{2GM}{r(r-r_s)^3} - \frac{GM}{r^2(r-r_s)^2}, \\ (\omega_\theta^2)'' &= \frac{6GM}{r(r-r_s)^4} + \frac{4GM}{r^2(r-r_s)^3} + \frac{2GM}{r^3(r-r_s)^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por otro lado, para el término del potencial del oscilador en  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta^4}\right)_\ell &= \frac{24\ell^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^4 \theta} + \frac{8\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{60\ell^2 \cos^3 \theta}{r^2 \sin^6 \theta} + \frac{24\ell^2 \cos \theta}{r^2 \sin^4 \theta}, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \theta^4}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{8\ell^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

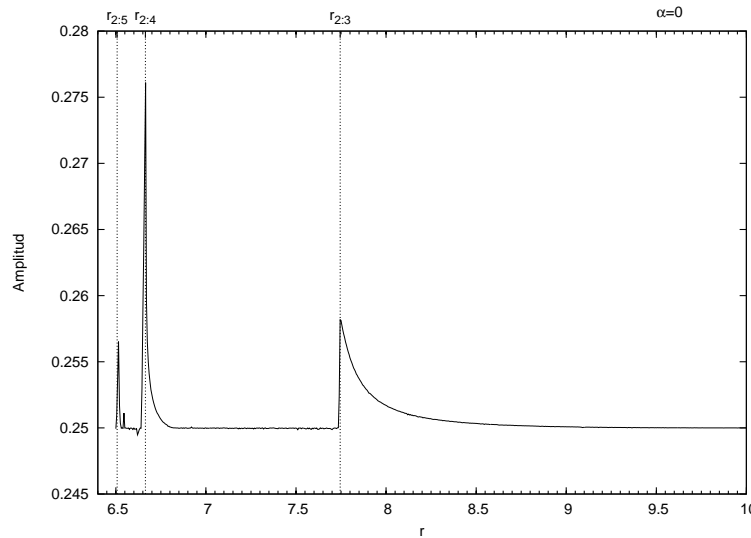
con

$$\ell = \Omega r^2; \quad \Omega = \sqrt{\frac{GM}{r(r-r_s)^2}}. \quad (3.34)$$

Para resolver el sistema, procedemos igual que como se explicó en el caso de un oscilador (método de Runge-Kutta) aunque esta vez se construirán los ciclos correspondientes a la solución en  $r$ . También se construyen los ciclos que iteran los valores de  $\alpha$  y de  $r$  con el fin de observar los cambios en la amplitud conforme a la variación la posición de la órbita de la línea de flujo de acreción y del acoplamiento entre los osciladores. En las simulaciones, las condiciones iniciales son  $\delta\theta = \delta r = 0.5$  y  $\delta\dot{\theta} = \delta\dot{r} = 0$ .

### §3.5. Resultados

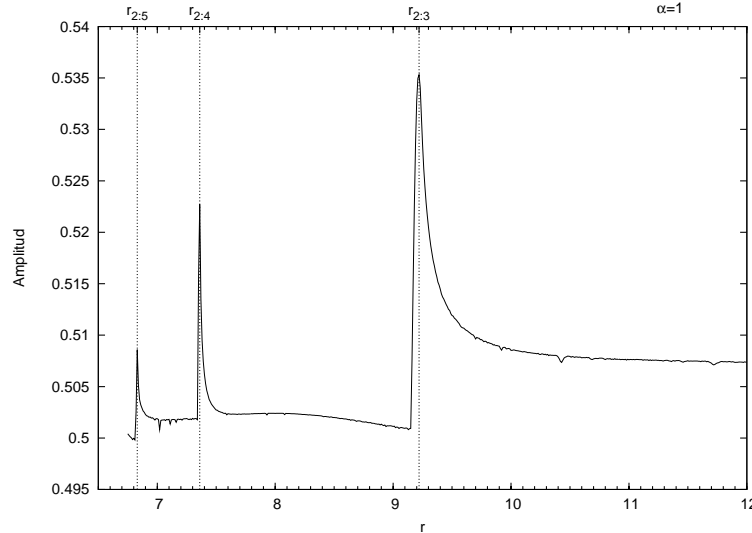
Veamos en primer lugar lo que sucede en el caso  $\alpha = 0$ . En la figura 3.6 podemos ver como aparecen las resonancias en la amplitud de  $\delta\theta$  de acuerdo a los distintos valores de  $r$ , como se señala en la figura. Los efectos no-lineales de los osciladores (máximos para este valor  $\alpha$ ) pueden causar que la segunda resonancia tenga mayor amplitud que la primera.



**Figura 3.6:** Resonancias en  $\alpha = 0$ . Aquí se identifican las 3 primeras resonancias  $n = 5$ ,  $n = 4$  y  $n = 3$ .

En la figura 3.7 vemos el caso contrario, cuando el acoplamiento es máximo. Los valores de  $r$  para los que hay resonancias son menores, además de que los valores de saturación de la amplitud son mayores que cuando  $\alpha = 0$ . En la figura 3.9 vemos que incluso muy cerca del acoplamiento los valores

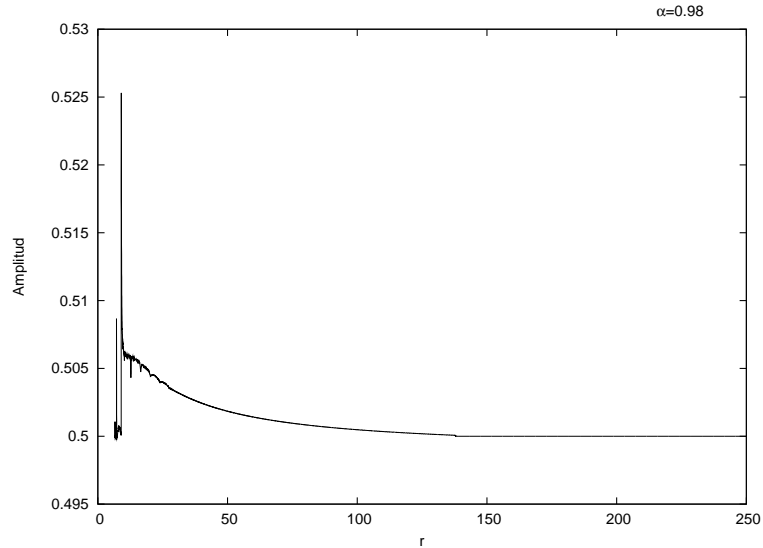
de  $r$  para las resonancias también disminuyen. En el caso de  $\alpha = 0$  las condiciones iniciales son menores ( $\delta\theta, \delta r = 0.25$ ) que los del segundo caso ( $\delta\theta, \delta r = 0.5$ ). En la figura 3.8 sólo se ilustra la curva de disminución de la amplitud al aumentar  $r$ .



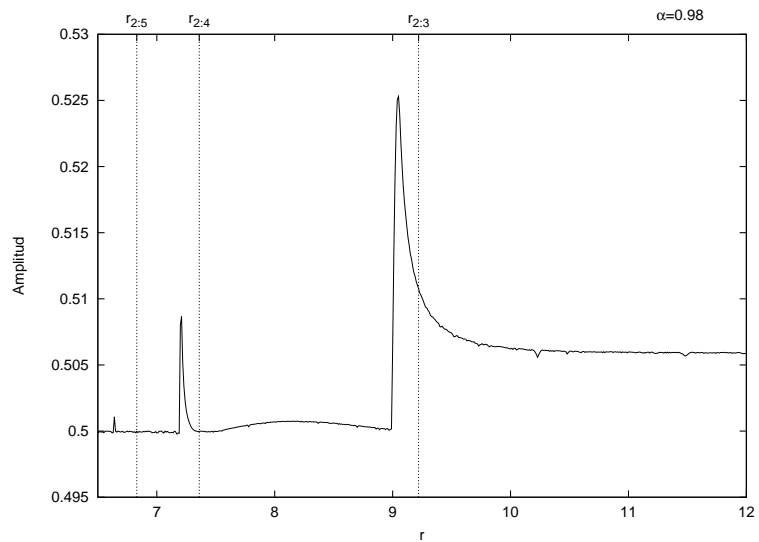
**Figura 3.7:** Resonancias en  $\alpha = 1$ . Al igual que en la figura anterior, se identifican las 3 primeras resonancias  $n = 5$ ,  $n = 4$  y  $n = 3$ .

Los cambios en las frecuencias y en las amplitudes de saturación con  $\alpha$  y  $r$  pueden verse mejor en la figura 3.10, cerca del acoplamiento, que es la zona de mayor interés, pues reproduce las condiciones en que los osciladores son perturbados ligeramente. Ahí vemos que conforme  $\alpha$  disminuye, los valores de  $r$  para las resonancias también lo hacen, así como las amplitudes de saturación.

Lo que se ha visto en las simulaciones y en las gráficas anteriores sugiere que las OCP son el resultado de pequeñas perturbaciones no-geodésicas, pues de acuerdo con las condiciones iniciales, hemos visto que la amplitudes aumentan cuando  $\alpha$  se acerca a cero. Lo anterior también sucede cuando  $r$  disminuye a 6, que es de esperar pues debido a las unidades que se han tomado ( $G = M = c = 1$ ), corresponde al radio de la última órbita estable  $r_{ms}$ . A pesar de que el modelo es muy simple y no se han hecho consideraciones termodinámicas que incluyan la posible disipación de la energía, los osciladores con factores de acoplamiento  $\alpha \sim 1$  parecen representar sistemas con mayor sentido físico, pues es natural pensar que las perturbaciones de las líneas de los flujos de acreción son muy pequeñas, pues se observó que de lo contrario, no es claro que la resonancia paramétrica tenga lugar. Por lo tanto, para observar las resonancias, los parámetros de perturbación ( $\delta\theta, \delta r$ ) deben permanecer bajos ( $\alpha$  cerca de 1), lo que indica, como se dijo, un me-



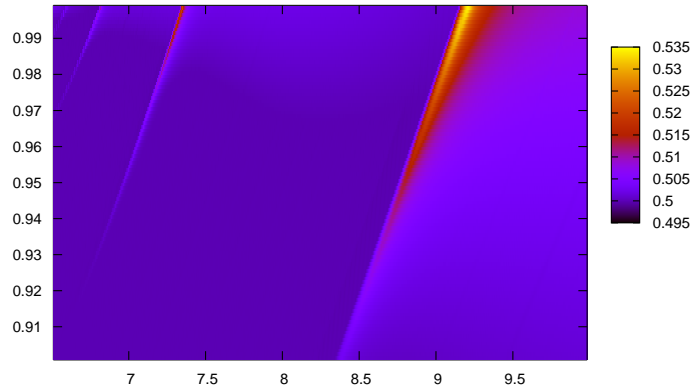
**Figura 3.8:** Esta figura tiene los mismos parámetros que la anterior (fig. 3.7), aunque para valores de  $r$  mayores. Podemos ver como decae la saturación de la amplitud de  $\delta\theta$  conforme las oscilación se aleja del objeto central.



**Figura 3.9:** Aquí se muestra cómo cambian los valores de  $r$ , respecto de  $\alpha = 1$ , para las resonancias al cambiar el nivel de acoplamiento.

canismo que en efecto puede ocurrir en la naturaleza.

Lo siguiente es buscar las frecuencias de cada oscilador. Para esto, primero se calcula la modulación de las oscilaciones en  $\delta r$  y  $\delta\theta$ , esto es, como

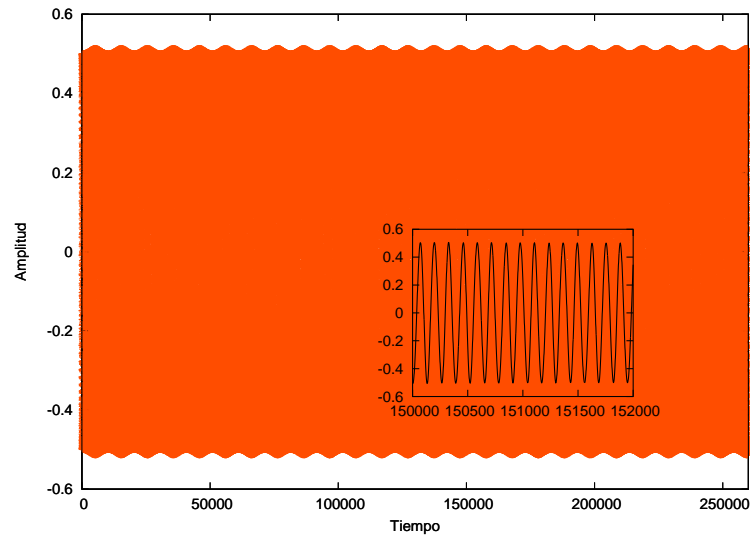


**Figura 3.10:** En esta figura podemos ver claramente como es que los valores de  $r$  para los que hay resonancia disminuyen con  $\alpha$ , al igual que las amplitudes de saturación.

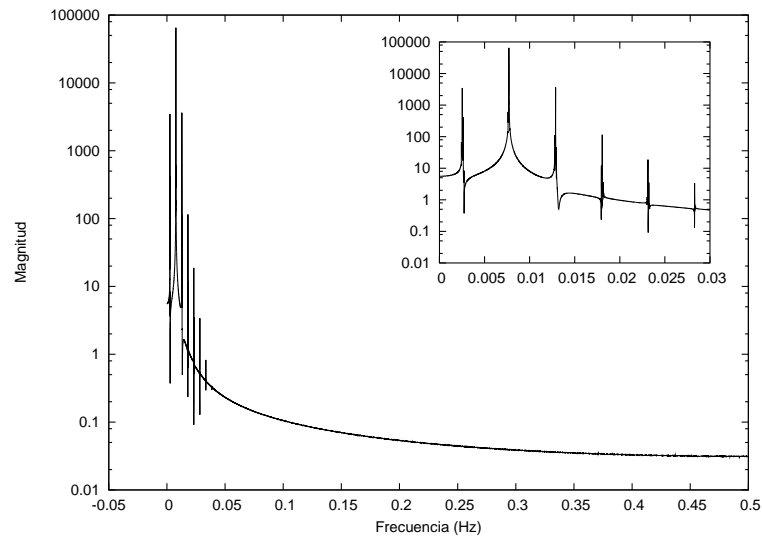
las amplitudes a lo largo del tiempo varían en forma de una oscilación periódica (donde los máximos representan a las resonancias), de manera que es posible obtener una frecuencia clara. Esto lo vemos en la figura 3.11, que es una modulación para  $\delta\theta$ . La modulación en  $\delta r$  es opuesta a la de ésta figura, debido al intercambio de energía entre los osciladores.

Para determinar los valores que forman la gráfica anterior (3.11), se establecen antes (analíticamente) los valores de  $\alpha$  y  $r$  para los que la amplitud es máxima en los intervalos de  $\alpha[0.95, 0.99]$  y de  $r[6.5, 9.9]$ , para conseguir que los datos con que se calcularían las frecuencias fuesen en efecto los de las resonancias. Una vez hecho esto, se escribió un programa que calculara la transformada de Fourier de los datos de las modulaciones, es decir, una vez fijos los valores de  $\alpha$  y  $r$ , se inicia de nuevo la simulación cuyos resultados (modulaciones) constituyen los valores de entrada del programa que calcula las frecuencias. Así, la transformada correspondiente a los valores anteriores se muestra en la figura 3.12.

Se definieron 7 valores máximos por cada simulación, por lo que se obtuvieron igual número de transformadas, en cada plano de resonancia. Debido a que el código utiliza unidades adimensionales, los resultados se han reescalado con las unidades de las ecs. (3.24). Esto es importante debido a que la utilización del factor de escala permite, en el sentido inverso, calcular la masa del objeto compacto. Y en efecto, se ha podido encontrar que para la renormalización de la frecuencia, el uso de factores de escala donde se varía el radio de la misma forma que en las simulaciones (el parámetro libre



**Figura 3.11:** Modulación en  $\delta\theta$ . Aquí podemos ver cómo oscila la amplitud de manera periódica a lo largo del tiempo (que representa el número de incrementos  $dx$  en la rutina de Runge-Kutta). En el recuadro podemos ver como la modulación se forma por la variación de los ciclos de la oscilación.



**Figura 3.12:** Transformada de Fourier de la figura 3.14. En el recuadro de acercamiento podemos ver los primeros picos de frecuencia de la modulación. Nótese sin embargo, que aún no se han considerado los factores de escala, por lo que la frecuencia está en Hz sí  $G = M = 1$ .



para tal caso) conduce a cálculos donde la masa del objeto está alrededor de  $1.4M_{\odot}$ , la masa de una estrella de neutrones.

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias obtenidas para  $\delta\theta$  y  $\delta r$ , tomando los 3 picos de mayor magnitud en la transformada.

$\delta\theta$	$\omega_{\theta}$ (Hz)	$\delta r$	$\omega_r$ (Hz)
0.5137	216.5, 658.54, 1100.58	0.5051	422.23, 845.38, 1275.92
0.5164	215.47, 653.5, 1091.61	0.5048	439.27, 879.05, 1322.47
0.5179	212.91, 647.77, 1083.33	0.5045	435.56, 871.87, 1306.95
0.5203	211.88, 643.08, 1074.35	0.5039	432.82, 864.87, 1300.17
0.5229	209.66, 638.46, 1066.07	0.5033	429.23, 858.55, 1291.44
0.5256	208.64, 632.65, 1058.21	0.5023	425.56, 851.58, 1281.74
0.5288	207.61, 628.9, 1050.18	0.5015	423.07, 845.21, 1272.05

Como podemos ver, las frecuencias caen en los rangos de las OCP de kHz observadas (ver tablas 1.1 y 1.2). Sin embargo, a pesar de que la correlación 3:2 o 4:3 no se mantiene de manera exacta, sí podemos asumir que los resultados concuerdan cualitativamente (pues el escalamiento de los valores obtenidos del código es sólo para efectos de comparación).

Cuando se habló de los candidatos a hoyos negros (sec. §1.4.4) se vió que las CPO de kHz que se observan en binarias con estos objetos mantienen claramente una correlación 3:2, sin observar corrimiento de frecuencias en el espectro, a diferencia de las binarias con estrellas de neutrones, como en Sco X-1, donde las CPO varían considerablemente en frecuencia, pero mostrando una población considerable en la distribución de las mismas para la relación 3:2 (Abramowicz et al. 2002).

### §3.6. Conclusiones

Las características de las oscilaciones cuasi-periódicas de kHz en los sistemas binarios sugieren que éstas son generadas en los discos de acreción, pues entre otras cosas, se han observado únicamente en sistemas binarios de baja masa, en los que el objeto compacto puede ser un hoyo negro, una estrella de neutrones o una enana blanca, sistemas que comparten el mismo tipo de acreción (de disco). Debido a que los picos de amplitud se presentan en la mayoría de los casos en una correlación de frecuencias 3:2, se ha propuesto que tales picos pueden producirse por una resonancia entre las frecuencias epicíclicas de los flujos de acreción en el disco, específicamente, por resonancia paramétrica. Tomando lo anterior como hipótesis, se construyeron programas que permitieran explorar las características de la resonancia paramétrica no-lineal, así como las condiciones que produce un sistema de osciladores de éste tipo en las líneas de movimiento geodésico del flujo de acreción de un objeto compacto. Un bajo acoplamiento entre

los osciladores indica una ligera perturbación no-geodésica de las ecuaciones, que es lo que conduce a la resonancia, observándose la aparición de picos de amplitud en distintas frecuencias, como lo demostraron los datos arrojados por la simulación numérica de tal sistema.

La construcción del modelo se ha llevado a cabo bajo suposiciones puramente matemáticas. Se ha elegido incluso la manera en que varía el parámetro de acoplamiento no-geodésico  $\alpha$ , seleccionando los términos que deberán desaparecer cuando  $\alpha \rightarrow 1$  (o en general, que los términos de velocidad sólo se mantengan en un oscilador, mientras en el otro se eliminan los de tercer orden). En una elección más general de parámetros  $\alpha_\theta \neq \alpha_r$ , con lo que los valores de la resonancia cambiarían, mas no la correlación. Las características de la acreción en los sistemas binarios es algo que hasta el día de hoy permanece como un problema abierto, por lo que es difícil asumir un modelo en el que se incluyan explícitamente los aspectos que rodean al mecanismo de generación de las CPO de kHz, como el tipo de perturbaciones de las órbitas, la disipación de la energía o la aparición de algún tipo de forzamiento en las oscilaciones. Sin embargo la construcción del sistema es relativamente general y puede incluir sin mayores modificaciones éstos u otros elementos.

Dos elementos de consistencia que sostienen la afirmación anterior de generalidad son a) el escalamiento de las OCP de kHz con el radio y b) el escalamiento con la masa. Para el primero vemos que se cumple la condición  $\nu \propto r^{-3/2}$ , como lo indica la deducción de las frecuencias de acuerdo a la suposición de órbitas keplerianas. Y para el segundo, debido a que la frecuencia es proporcional al radio de Schwarzschild, entonces  $\nu \propto 1/M$  (el factor de escala de las frecuencias es proporcional a la frecuencia fundamental  $\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ , y  $r$  puede expresarse en términos de  $r_s$ ). Es decir, para una estrella de neutrones de  $\sim 1M_\odot$  tenemos  $\nu \approx 1kHz$ , y para un hoyo negro de  $\sim 10M_\odot$ ,  $\nu \approx 0.1kHz$ .

De otra manera, puede darse un tratamiento más general a los osciladores que originan la resonancia. En diversos artículos (Rebusco 2004, Horák 2004) se hace una deducción de las ecuaciones de los osciladores a partir de sistemas de ecuaciones diferenciales, que se resuelven mediante el *método de escalas múltiples*. También se han hecho modelos numéricos donde además de incluir términos de forzamiento, se sustituye el disco de acreción por un toro (Lee, Abramowicz & Kluźniak 2004), obteniendo resultados similares.

Todo lo anterior indica que el sistema de resonancia paramétrica funciona como un mecanismo generador de las OCP de kHz. A pesar del avance que en esta línea se ha logrado en los últimos años, aún hay mucho por descubrir. Las OCP, como se ha dicho, brindan una singular ventana de observación de los efectos de relatividad general; lo que representa por sí mismo un interés para su estudio.



# Bibliografía

- [1] Abramowicz, M., Karas, V., Kluźniak, W., Lee, W., y Rebusco, P., 2003. Non linear resonance in nearly geodesic motion in low-mass X-ray binaries. *Publications of the astronomical society of Japan* 55, no. 2., pp. 467-470.
- [2] Abramowicz, M., Kluźniak, W., Stuchlík, Z. y Török, G., 2004. *Astronomy and Astrophysics manuscript*. Publicado en vol. 436, no. 1, pp. 1-8.
- [3] Chakrabarty, D. et al., 2003. Nuclear-powered millisecond pulsars and the maximum spin frequency of neutron stars. *Nature* 424, pp. 42-44.
- [4] Etter, D., 1992. *Fortran 77 with numerical methods for engineers and scientists*. Benjamin-Cummings, Redwood city, E.U.
- [5] Gottlieb, E.; Wright, E. y Liller, W., 1975. Optical studies of UHURU sources XI. A probable period for Scorpius X-1 = V818 Sco. *Astrophysical Journal* 195, pp. L33-L35.
- [6] Gursky, H. et al., 1966. A measurement of the location of the X-ray source Sco-1. *Astrophysical Journal* 146, pp. 320-316.
- [7] Horák, J., Abramowicz, M., Karas, V. y Kluźniak, W., 2004. Of NBOs and kHz QPOs: a low frequency modulations in resonant oscillations of relativistic accretion disks. *Publications of the astronomical society of Japan* 56, no. 5, pp. 819-922.
- [8] Horák, J., 2004. Parametric resonance as a model for QPO sources - I. A general approach to multiple scales. *Process in the vicinity of black holes and neutron stars workshop*. Universidad Silesiana, Opava, República Checa.
- [9] Klein, R. et al., 1996. GRO J1744-28 and Scorpius X-1: First evidence for photon bubble oscillations and turbulence. *Astrophysical Journal Letters* 469, pp. L119.
- [10] Kluźniak, W. y Abramowicz, M., 2002. Millisecond oscillators in accreting neutron stars and black holes. *12th workshop on general relativity and gravitation (12 JGRG) Tokyo, Noviembre 25-28*.

- [11] Kluźniak, W., Abramowicz, M., Kato, S., Lee, W y Stergioulas, N., 2004. Nonlinear resonance in the accretion disk of a millisecond pulsar. *Astrophysical Journal* 603, pp 89-92.
- [12] Kluźniak, W., Abramowicz, M. y Lee, W., 2004. High-frequency QPOs as a problem in physics: non-linear resonance. Conferencia presentada en el simposium: X-ray timing 2003: Rossi and Beyond, Boston, E.U.
- [13] Landau, L. y Lifshitz E. M., 1994. *Mechanics. Course of theoretical physics vol. 1*. 3a. edición. Pergamon, Elmsford, Nueva York.
- [14] Lee, W. y Kluźniak, W., 2004. Resonance in forced oscillations of an accretion disk and kilohertz quasi-periodic oscillations. *Astrophysical Journal* 603, pp. L93-L96.
- [15] Lewin, W., Van Paradjis, Jan. y Van den Heuvel, E., 1997. *X-ray binaries*. Cambridge Astrophysics Series. Cambridge University Press, Cambridge, R.U.
- [16] Miller, M., Frederik, K. y Dimitrios, P., 1998. Sonic point model of kilohertz quasi-periodic brightness oscillations in low-mass X-ray binaries. *Astrophysical Journal* 508, pp. 791-830.
- [17] Mendoza, S., 2003. *Astrofísica Relativista*. Notas para el Seminario de Física Teórica de la Facultad de Ciencias, UNAM. Disponible en: [www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion](http://www.astroscu.unam.mx/~sergio/gravitacion).
- [18] Paczyński, B. y Wiita, P. 1980. Thick Accretion Disks and supercritical luminosities. *Astronomy and Astrophysics* 88, pp. 23-31.
- [19] Padmanabhan, T., 2001. *Theoretical astrophysics. Vol 1: astrophysical processes*. Cambridge University Press, Cambridge, R.U.
- [20] Padmanabhan, T., 2001. *Theoretical astrophysics. Vol 2: Stars and stellar systems*. Cambridge University Press, Cambridge, R.U.
- [21] Press, W. et al. 1996. *Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, R.U.
- [22] Rebusco, P., 2004. Twin peaks kHz QPOs: mathematics of the 3:2 orbital resonance. *Publications of the astronomical society of Japan* 56, no. 3, pp. 553-557.
- [23] Sandage, A. et al., 1966. On the optical identification of the Sco X-1. *Astrophysical Journal* 146, pp. 316.
- [24] Shapiro, S. Teukolsky, S., 1983. *Black holes, white dwarfs and neutron stars. The physics of compact objects*. Wiley, Nueva York, E.U.

- [25] Sommerfeld, A., 1964. *Mechanics*. Academic, Nueva York, E.U.
- [26] Stella, L. y Vietri, M., 1998. kHz quasi-periodic oscillations in low mass X-ray binaries as probes of general relativity in the strong field regime. 19th Texas symposium on relativistic astrophysics and cosmology; París, Francia, dic. 14-18. Editores: Paul, J., Montmerle, T. y Aubourg, E.
- [27] Thornton, S., Marion, J., 2004. *Classical dynamics of particles and systems*. Thomson, Belmont, E.U.
- [28] Titarchuk, L., Lapidus, I. y Muslimov, A., 1998. Mechanisms for high-frequency quasi-periodic oscillations in neutron stars and black hole binaries. *Astrophysical Journal* 499, pp. 315.
- [29] Titarchuk, L. 2002. Effects of resonance in quasiperiodic oscillators of neutron stars binaries. *Astrophysical Journal* 578, pp. L71-L74.
- [30] Titarchuk, L. y Wood, K., 2002. On the low and high frequency correlation in quasi-periodic oscillations among white dwarfs, neutron star and black hole binaries. *Astrophysical Journal* 557, pp. L23-L26.
- [31] Titarchuk, L. y Shaposhnikov, N., 2005. How to distinguish neutron star and black hole X-ray binaries?. Spectral index and quasi-periodic oscillation frequency correlation. *Astrophysical Journal* 626, pp. 298-306.
- [32] Ulrich, R., 1976. An infall model for the T Tauri phenomenon. *Astrophysical Journal* 210, pp. 377-391.
- [33] van der Klis, M. et al., 1985. Intensity-dependent quasi-periodic oscillations in the X-ray flux of GX5-1. *Nature* 316, pp. 225-230.
- [34] van der Klis, M. et al., 1996. Discovery of submillisecond quasi-periodic oscillations in the X-ray flux of Scorpius X-1. *Astrophysical Journal Letters* 469, pp. L1.
- [35] van der Klis, M., 2000. Millisecond oscillations in X-ray binaries. *Annual review of astronomy and astrophysics* 38, pp. 717-780.
- [36] Wijnands, R. y van der Klis, M., 1998. Discovery of the first accretion-powered millisecond X-ray pulsar. Enviado a la revista *Nature* el 20 de abril de 1998. Embargo de prensa hasta publicación.