

20485



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES  
ACATLÁN**

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE DEL  
CONOCIMIENTO DE DENSIDAD EN BASE A LA FUNCIÓN LINEAL  
Y A LA PROPORCIONALIDAD

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
*MAESTRA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*

**P R E S E N T A**

*MARÍA GUADALUPE CERVANTES OLIVARES*

DIRECTOR DE TESIS: M en C GUSTAVO MARQUINA ROJO

2005

m 352320



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

Al M. en C. Gustavo Marquina Rojo, por sus enseñanzas durante los cursos y por haber aceptado ser mi director de Tesis.

Al Mtro. Juan B. Recio Zubieta por sus valiosas observaciones y sugerencias.

A todos los profesores de la Maestría por su dedicación y paciencia.

A los maestros sinodales:

Mtra. María Eugenia Canut Díaz Velarde

Mtra. Nora del Consuelo Goris Mayans

Mtra. Silvia Larraza Hernández

Mtro. Gustavo Marquina Rojo

Mtro. Juan Recio Zubieta

A mis amadísimos:

Pili y Juan Carlos

Carlos Alberto y Ana Karen

Juan Manuel

Silvia y Otilia

...por su amor y apoyo incondicional

# Índice

Introducción .....	2
Capítulo 1 Marco teórico .....	6
¿A qué se debe el fracaso escolar?.....	7
El profesor .....	8
El aprendizaje .....	10
Principios del aprendizaje propuestos recientemente.....	13
El aprendizaje de los procesos de pensamiento.....	15
Constructivismo .....	22
Capítulo 2 La proporcionalidad y el desarrollo del conocimiento .....	34
La Proporcionalidad un esquema operatorio .....	37
La investigación directa de Piaget sobre proporciones.....	38
Realidades acerca del aprendizaje de la proporcionalidad en la escuela.....	42
¿Para qué enseñar la proporcionalidad?.....	45
Capítulo 3 El concepto de proporcionalidad y de función lineal.....	49
Historia.....	49
Las matemáticas en la antigüedad. ....	50
Conceptos básicos en matemáticas deseables en los estudiantes a nivel medio.....	53
El aprendizaje del concepto de proporcionalidad. ....	59
Concepto de función lineal en el nivel medio.....	62
La densidad. Una función lineal que se estudia en física y química .....	64
Capítulo 4 Estrategia didáctica para el estudio de la densidad.....	67
Capítulo 5 Aplicación de la estrategia y Resultados obtenidos.....	80
Conclusiones .....	89
Bibliografía .....	94

## ***Introducción***

Los estudiantes del nivel medio superior tanto en la vida cotidiana como en la escuela, a diario tienen necesidad de enfrentar y resolver problemas con cantidades proporcionales.

En la escuela, estos jóvenes no sólo en matemáticas resuelven ejercicios de este tipo; también en física, química y biología; muchos de los temas que se estudian involucran variables que se relacionan en forma proporcional.

Durante el estudio de los temas, los alumnos resuelven "correctamente" muchos de los "problemas" (ejercicios) que se les indica. Sin embargo, cuando se les interroga acerca de lo que significa un resultado o cómo se explica el proceso de resolución del ejercicio es poco lo que pueden contestar de forma coherente, lo que significa que aunque hayan logrado llegar a la respuesta, no han comprendido la relación entre los conceptos estudiados.

Los libros de texto de educación primaria, demuestran que nuestros estudiantes de bachillerato resolvieron en esa etapa problemas sencillos de "repartos" en los que se les solicitó una reflexión del significado de los resultados. En secundaria, seguramente resolvieron muchos ejercicios y/o realizaron trabajo en el laboratorio en el que estudiaron variables que son proporcionales. No obstante, pocos

tuvieron la posibilidad de trabajar más personalmente para reflexionar acerca de la relación de las variables involucradas y de poner en práctica, de forma correcta, los conocimientos de aritmética que son indispensables para el manejo de los datos y; en el mejor de los casos, los estudiantes mecanizaron como llegar a los resultados sin comprender la relación de proporcionalidad. Ejemplo de lo anterior, es que pueden calcular el porcentaje de mujeres y hombres en la clase sin explicar lo que esto significa. En cualquier nivel educativo, si se enseñan conocimientos a partir de modelos matemáticos que se aplican mecánicamente no se contribuye a la formación del estudiante.

Con respecto a la densidad, aunque los estudiantes encuentran en los libros que: "La densidad es la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo y, que su valor se obtiene dividiendo la masa entre el volumen", les resulta muy difícil explicar el concepto con sus propias palabras debido a que algunos no tienen un dominio del concepto de división y otros no han comprendido suficientemente el concepto de proporcionalidad, por lo que no pueden aplicar sus experiencias a nuevas situaciones.

Actualmente, se discute en diferentes foros acerca de la función principal de la escuela y cuál es la mejor forma de atacar los problemas que se presentan al interior del aula.

Se observa preocupación por que los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y sus deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje ciertos aspectos científicos y matemáticos.

Se discute lo importante que es desarrollar la habilidad para pensar de forma crítica sistemática e independiente y la forma para descubrir cuáles son los conocimientos indispensables para obtener resultados correctos en la solución de los problemas del mundo actual y

se ensayan nuevas formas de "enseñar".

Por otro lado, se sostiene que la escuela no puede asumir la responsabilidad completa de que el estudiante aprenda, ya que a éste le corresponde su propia parte aprendiendo activa y críticamente, traduciendo los conocimientos a su propio lenguaje, planteando preguntas significativas y encontrando la solución a los diferentes problemas que se le presentan, siempre guiado por el profesor.

Lo complejo y multifactorial de la misma naturaleza de la educación implica que con un trabajo serio y en equipo a la luz de la teoría que diferentes investigadores, sean personas críticas, conscientes y competentes en lo académico y pedagógico quienes se encarguen de la selección y organización, tanto de los materiales, como de las experiencias de aprendizaje para propiciar que los estudiantes tengan a su alcance la posibilidad de aprender. Con respecto al trabajo al interior del aula, y debido a que el aprendizaje deseado no puede tener lugar en un solo momento, la enseñanza debe pensarse y organizarse para que se dé, en una serie de pasos u ocasiones distintas, por todo lo que la planeación resulta ser la tarea más importante. En este sentido, (Ausubel 1980) indica que es necesario indagar lo que los alumnos saben y actuar en consecuencia durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además, Gagné<sup>1</sup> (Gagné 1970) propone que a intervalos periódicos se re-introduzcan sistemáticamente los temas de estudio con el fin de dar por un lado, un repaso al conocimiento aprendido previamente con lo que tiende a mejorar la retención del mismo y por otro, llegar a una comprensión más amplia y a una más probable transferencia del aprendizaje.

Una metodología intencionada para el estudio de los contenidos

---

<sup>1</sup> Robert Gagné (1916-2002) Psicólogo experimental. Desarrolló ideas de "Condiciones de aprendizaje", trabajó como profesor en las Universidades de Connecticut y Pensilvania y después como Profesor, Investigador y Director del Departamento de Investigación en Educación de la Universidad de la Florida.

que involucran proporcionalidad, puede contribuir a que los estudiantes desarrollen habilidades como son: identificar las variables implicadas en algún proceso, diseñar experimentos para medir dichas variables, encontrar relaciones entre éstas a partir de los datos recabados y durante el proceso, ser capaces de construir y aplicar de manera significativa el concepto de proporcionalidad. Con el desarrollo de las habilidades anteriores, el estudio de los temas de química, física y biología, puede contribuir a la formación del estudiante capacitándolo para que, posteriormente, pueda interpretar correctamente cualquier proceso que involucre la proporcionalidad.

Con base en mi experiencia y después de la investigación realizada puedo asegurar que cuando los estudiantes se enfrentan a fenómenos que observan y explican de acuerdo a sus ideas previas, para posteriormente someter sus hipótesis a comprobación con planteamientos en los que contrasten sus resultados con los de sus compañeros, con lo reportado en la bibliografía y con el trabajo experimental, se motivan, investigan y son capaces por llegar a las respuestas correctas.

En este trabajo se presenta una reflexión acerca del docente y de la importancia que tiene el que cada profesor identifique su concepto de aprendizaje; posteriormente se argumenta la base de la metodología que se propone para el estudio de la densidad en el que se explica el porque es necesario enseñar proporcionalidad; más adelante se presenta la descripción de la evolución histórica del concepto; después, se presenta una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de densidad y el aprendizaje de la proporcionalidad sustentada en los trabajos de Jean Piaget, y en el enfoque constructivista y; al final, se comparan los resultados obtenidos en un grupo académico del plantel Azcapotzalco, que estudió el tema apoyado con la secuencia didáctica y, otro grupo del mismo plantel que no hizo uso del material.

que involucran proporcionalidad, puede contribuir a que los estudiantes desarrollen habilidades como son: identificar las variables implicadas en algún proceso, diseñar experimentos para medir dichas variables, encontrar relaciones entre éstas a partir de los datos recabados y durante el proceso, ser capaces de construir y aplicar de manera significativa el concepto de proporcionalidad. Con el desarrollo de las habilidades anteriores, el estudio de los temas de química, física y biología, puede contribuir a la formación del estudiante capacitándolo para que, posteriormente, pueda interpretar correctamente cualquier proceso que involucre la proporcionalidad.

Con base en mi experiencia y después de la investigación realizada puedo asegurar que cuando los estudiantes se enfrentan a fenómenos que observan y explican de acuerdo a sus ideas previas, para posteriormente someter sus hipótesis a comprobación con planteamientos en los que contrasten sus resultados con los de sus compañeros, con lo reportado en la bibliografía y con el trabajo experimental, se motivan, investigan y son capaces por llegar a las respuestas correctas.

En este trabajo se presenta una reflexión acerca del docente y de la importancia que tiene el que cada profesor identifique su concepto de aprendizaje; posteriormente se argumenta la base de la metodología que se propone para el estudio de la densidad en el que se explica el porque es necesario enseñar proporcionalidad; más adelante se presenta la descripción de la evolución histórica del concepto; después, se presenta una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de densidad y el aprendizaje de la proporcionalidad sustentada en los trabajos de Jean Piaget, y en el enfoque constructivista y; al final, se comparan los resultados obtenidos en un grupo académico del plantel Azcapotzalco, que estudió el tema apoyado con la secuencia didáctica y, otro grupo del mismo plantel que no hizo uso del material.

## **Cápítulo 1**    *Marco teórico*

*Detrás de cualquier actividad de enseñanza  
hay una idea implícita de los mecanismos que emplean los alumnos para aprender  
aunque el maestro no sea consciente de este hecho.*

*Giordan<sup>2</sup>*

Es un hecho que el ciudadano común no puede comprender el mundo que le rodea sin entender los fenómenos científicos; además, todos los sistemas educativos incluyen en sus objetivos las bases fundamentales de esta cultura. En este contexto, el aprendizaje de los conocimientos científicos que permiten comprender el entorno, resulta sumamente significativo, tanto en el ámbito escolar como en el social. Sin embargo, existen muchas dificultades en el aprendizaje del conocimiento científico, lo que es reportado por diferentes investigadores alrededor del mundo.

Existen evidencias de que la formación que adquieren los estudiantes en el CCH es deficiente<sup>3</sup>. Al consultar algunas investigaciones al respecto, y a partir de la experiencia que un grupo de profesoras del Plantel Naucalpan del CCH, que hemos trabajado para conocer la problemática al interior del salón de clase, advertimos que la apropiación del saber no ocurre con facilidad y que los alumnos olvidan

---

<sup>2</sup> Profesor en la Universidad de Ginebra y Director del Laboratorio de Didáctica y Epistemología de la Ciencia. Ha escrito textos de divulgación, guiones para video y obras de teatro.

<sup>3</sup> Resultados reportados en la Revisión Curricular que se realizó en 1992 en el CCH y los obtenidos del examen diagnóstico aplicado a los alumnos de primer ingreso (generación 2005-1) a la Facultad de Medicina en la UNAM

los conocimientos científicos en horas, semanas o meses<sup>4</sup>, a pesar de que hayamos intentado transmitirlos laboriosamente.

### ¿A qué se debe el fracaso escolar?

Cuando se discute sorda y superficialmente, los diferentes actores que intervienen en la educación se culpan entre sí. De este modo, los maestros se quejan: de la preparación previa y de la falta de interés de los alumnos; de la monumental extensión de los programas y de exigencias de las autoridades en cuanto a "su cumplimiento"; por su parte, los alumnos se quejan de la forma inadecuada de enseñar de los docentes y de su "propia incapacidad" para aprender; finalmente, un buen número de autoridades educativas achacan el fracaso a la falta de empeño de profesores y alumnos.

La realidad es que el problema es mucho más complejo, no se limita a que los maestros enseñen mal o a que los alumnos no se esfuercen por aprender. Al respecto, José Ignacio Pozo (Pozo 1996) menciona que: "No es simplemente que aprendamos poco, ni que se enseñe mal. **Es que los escenarios de aprendizaje e instrucción muchas veces no están pensados tomando en cuenta las características de los aprendices y sus maestros**", éste autor también señala "...la escuela enseña contenidos del siglo XIX con maestros del siglo XX a alumnos del siglo XXI" (Monereo y Pozo 2001 ).

Lo anterior puede explicar porque gran parte de los educadores investigadores coinciden en que es indispensable introducir reformas a fondo en los sistemas educativos si se desea que la educación contribuya a que los estudiantes logren una autonomía moral e intelectual que les permita enfrentarse con éxito al mundo.

---

<sup>4</sup> Le Bon desde el año de 1874 planteó:

*... sería preferible suspender la enseñanza de la asignatura de Historia Natural en los Liceos, los alumnos no serían ni más, ni menos instruidos que hoy, pues seis meses después del examen han olvidado las definiciones y clasificaciones que han aprendido y al menos no habrían adquirido el horror profundo a una ciencia que es la más atrayente y fácil de enseñar*

Por lo anterior diversas líneas de investigación en todo el mundo se han encargado de encarar la problemática educativa y, de manera interdisciplinaria buscar sus posibles soluciones, en el caso de los países de habla hispana, el Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE) en España y Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IIICE) en Argentina son centros que han dado lugar a una abundante producción de materiales útiles para fomentar la investigación en otros países incluyendo el nuestro.

## **El profesor**

Muchos de los profesores en activo incursionamos en la enseñanza careciendo de sustento pedagógico y desconociendo totalmente la forma en que trabaja la mente humana para saber como nuestros alumnos pueden llegar al conocimiento, de ahí, que actuemos como simples transmisores de contenidos o ejecutores de programas de estudio en cuya elaboración no participamos (desconocemos las bases que los sustentan). Es decir, no somos sujetos de la propia práctica.

Con respecto a la labor docente, F. Lawrenz señala: "El trabajo del profesor, se asemeja más al arte, que al trabajo de la rutina de un ingeniero o un administrador; su perfeccionamiento se genera, en el proceso de fusión de ideas y acción, en que una, llegue a ser la completa expresión de la otra, es decir, la idea se modula por la forma artística y la forma es usada para expresar la idea... ...el arte de enseñar es un proceso dialéctico en que no se puede separar la idea y la práctica" (Lawrenz 1991). Por su parte Porfirio Morán Oviedo afirma que "Las características de la docencia universitaria deben basarse en la necesidad de ser crítica y creativa para dar cuenta tanto del proceso como de los resultados" (Morán 1990).

Éstos dos investigadores consideran que la experiencia docente solamente proporciona resultados óptimos cuando se emplean métodos y modelos educativos que estén sustentados en conocimientos pedagógicos básicos obtenidos de forma reflexiva y, que la práctica

docente por sí misma no desemboca en la adquisición de la capacidad de enseñar ni siquiera cuando ésta se comparte o analiza a través de varios años.

Los profesores debemos considerar que somos producto de nuestra historia y nuestra experiencia y que llevamos a cabo las actividades que constituyen una metodología de enseñanza sustentada en nuestra concepción respecto a cómo el ser humano aprende. Pero, nos hemos preguntado ¿Por qué creemos que el alumno va a aprender con tales actividades?

De lo anterior se desprende la importancia que tiene el análisis por parte del docente acerca de las actividades que propone, para descubrir cómo concibe el aprendizaje y posteriormente evaluar con humildad si realmente son útiles para lograr aprendizajes. Debido a la importancia que tiene para nosotros una reflexión, en este capítulo se hace una revisión de las teorías que lo explican.

Como se revisa más adelante, hoy en día se ha señalado que el proceso educativo tiene como meta enseñar a pensar, enseñar a aprender, enseñar a crear y lograr que el aprendiz sea capaz de actuar en forma autónoma y autorregulada (Varela 1990). Si se acepta que el docente es el responsable de la tarea evolutiva en el aula también debemos aceptar que antes de enseñar principios y teorías científicas deberíamos saber sobre teorías del aprendizaje del ser humano.

Además, si se pretende ayudar a los alumnos a pensar creativamente, los docentes necesitamos entender el proceso creativo y las cualidades que caracterizan a los individuos creativos, para así acondicionar el escenario para los estudiantes.

En este sentido, la teoría cognoscitiva y el enfoque sociocultural, representado principalmente por las aportaciones de Vigotsky y los teóricos neo-Vigotskianos ofrecen grandes posibilidades a la educación y una reconceptualización de su práctica educativa para muchos docentes.

## **El aprendizaje**

Dos de las corrientes filosóficas que más han influido en las teorías psicológicas sobre el aprendizaje y que, por tanto, han tenido gran trascendencia en la educación; son el empirismo (asociacionista) y el racionalismo, una de sus diferencias básicas se centra en la relación que se establece entre sujeto y objeto de conocimiento en el proceso de aprendizaje.

Dichas teorías proponen lo siguiente:

### ***Teoría empirista***

- \* El conocimiento humano está constituido por ideas y percepciones que se reciben a través de los sentidos
- \* Las ideas son copias de las impresiones que la mente recoge y que perduran en ella

### ***Teoría racionalista***

- \* El hombre tiene estructuras mentales que le permiten conocer el mundo.
- \* Cada persona percibe diferente

La corriente empirista es la que tiene mayor número de seguidores, enfoques educativos como el conductismo y la tecnología educativa se sustentan en concepciones empiristas del aprendizaje. Estas corrientes reaparecen en la actualidad en las escuelas bajo "nuevas formas" que utilizan técnicas modernas de informática, materiales novedosos y mejores procedimientos para transmitir la información e incidir en que el alumno la recuerde, y usa "pruebas" como procedimientos de evaluación para verificar que "aprendieron".

Los maestros que enfocan su práctica educativa hacia este tipo de estrategias, aunque sea de manera inconsciente, conciben a los alumnos como receptores de información y, al conocimiento, como una acumulación estática.

Mi propia formación ubicada en esta corriente me colocó en ella como docente y mi experiencia directa con los alumnos en los primeros años de trabajo, me mostró que a pesar de cumplir de manera comprometida y entusiasta con todo el programa, me percataba una y otra vez que algunos de los alumnos no aprendían y muchos que en

aparición habían aprendido, olvidaban muy rápidamente los conocimientos.

Las preguntas que año con año me planteé al final de los cursos, me condujo a iniciar la búsqueda de las respuestas y después de varios años de trabajo en un equipo de profesoras del Plantel Naucalpan , he llegado a la conclusión de que como mencionan diversos investigadores educativos: el conocimiento no se puede obtener por simple transmisión pasiva de una persona "que sabe" a otra "que no sabe" y que las actividades que se planean con base en una transmisión pasiva del conocimiento las más de las veces resultan inútiles.

Con respecto a las corrientes educativas, se consideran racionalistas las que conciben la enseñanza como un proceso complejo en el que el alumno se forma por su participación activa en la apropiación del saber. En este enfoque se agrupan los maestros e investigadores que concuerdan en que el aprendizaje se construye a partir de lo que el alumno "ya sabe" y que se les ha llamado constructivistas.

Las integrantes que participamos en el equipo de trabajo del plantel Naucalpan hemos: coincidido con estas ideas, estudiado los sustentos teóricos con discusiones periódicas en equipo, elaborado y puesto en marcha algunas propuestas de trabajo en los grupos con observaciones de clase entre nosotras. A partir de la puesta en marcha, encontramos que los resultados con los grupos han sido un poco más satisfactorios, no obstante, consideramos que aun falta mucho por conocer y por poner en práctica durante las clases.

Se ha mencionado, que el constructivismo es una teoría epistemológica, que sus raíces se pueden encontrar en las propuestas de Kant, Marx o Darwin, entre otros muchos. Sin embargo, se considera a la teoría propuesta por Jean Piaget como el punto de partida de algunas bases en las que se apoyan las corrientes constructivistas, y que tienen en común los siguientes puntos:

- Consideran que los sujetos aprenden a partir de sus ideas
- Conciben la docencia como un espacio y una práctica en donde se efectúa un proceso dinámico de enseñanza-aprendizaje.

Se ha concebido al aprendizaje como un proceso que se origina en la práctica y que conduce a cambios en el diario proceder. Como profesores, es de vital importancia que comprendamos el aprendizaje escolar, en el sentido de entender tanto la manera en que aprenden nuestros alumnos como las habilidades que apoyan el aprendizaje.

Una habilidad humana, es el resultado de un proceso que ligado a un contenido es desarrollado de manera intencional o no. Las habilidades pueden ser de tipo cognoscitivo o de tipo psicomotor aunque muchas contengan elementos de ambos. La comprensión oral, por ejemplo, es una habilidad cognoscitiva; en cambio, la destreza manual es una habilidad psico-motora que consiste en la disposición para realizar movimientos ágiles y controlados de los brazos y de las manos al manipular objetos.

Tanto la habilidades cognoscitivas como las psico-motoras, son el resultado de la maduración y del aprendizaje y al mismo tiempo son facilitadoras del aprendizaje posterior, razón por la cual, la enseñanza escolar debería estar encaminada a ayudar al alumno a desarrollar al máximo sus habilidades.

Debido a la importancia que tiene conocer los factores que inciden en el aprendizaje, hoy en día se realizan en diversas partes del mundo investigaciones en ambientes escolares reales y concretos, para entender lo complejo del proceso. La mayoría de los investigadores son psicólogos y muestran especial interés en explicar lo relacionado con las primeras adquisiciones de conocimientos, con la memoria y con la transferencia de los conocimientos a nuevas situaciones. Asimismo se interesan en determinar los efectos de los diversos tipos de enseñanza,

de la utilidad o inutilidad de las tareas y de otros muchos aspectos.

Las investigaciones se han centrado fundamentalmente en explicar la manera como tiene lugar el aprendizaje, para lo cual se elaboran teorías acerca de las estructuras y de los hechos que ocurren en el sistema nervioso central, los cuales dan cuenta de la conducta que se observa como "acto de aprendizaje". El resultado de las investigaciones en cuanto a hechos y principios del aprendizaje humano deben ser empleados por los educadores, tomando en cuenta que, todo principio debe enunciarse acompañado de las condiciones en que ocurre.

### **Principios del aprendizaje propuestos recientemente**

Es común encontrar en las conclusiones de las investigaciones, que las teorías en educación (como en cualquier otra teoría), deben perfeccionarse continuamente.

Los teóricos constructivistas señalan que la contigüidad (aprender algo simultáneamente con algo que produzca una huella) la repetición y el reforzamiento que en otros tiempos se consideraron pilares del aprendizaje son principios que, por sí solos, no garantizan que se obtenga una buena situación de aprendizaje debido a que falta tomar en cuenta los estados mentales que necesariamente posee todo individuo y que han mostrado ser sumamente importantes para garantizar el aprendizaje eficaz (Briggs 1970).

Lo anterior significa que, entre otras cosas, todo acto de aprendizaje requiere que haya varios conceptos aprendidos previamente. Así por ejemplo, el alumno que estudia el principio de las palancas, expresado en la ecuación  $Rb = Fa$ , debe saber que  $F$  es un símbolo que representa a la fuerza, y que ésta puede expresarse en newtons o en kilogramos; que  $b$  indica la distancia a partir del punto de apoyo expresada en metros o centímetros, que es deseable que

identifique variaciones directas e inversas y además, posea la habilidades de sustituir símbolos por valores y resolver ecuaciones sencillas -pero además, y lo que es más importante- saber que la tarea de aprender se le facilitará si conoce las formas que le pueden permitir atender, almacenar y recuperar la información para organizar la solución del problema (esquemas internos que dependen de aprendizajes previos). Es decir, para aprender cosas nuevas, el estudiante tiene que disponer de formas de "hacer las cosas" y de características individuales entre las que es de suma importancia el manejo del lenguaje.

Dos factores más, de tipo personal, de suma importancia para el aprendizaje son también, la motivación y una actitud de confianza en aprender. Pero para que éstas dos se tengan, deben recordarse una serie de habilidades intelectuales empleadas con eficacia en anteriores aprendizajes.

Finalmente, gran parte del aprendizaje, salvo en el caso de los niños muy pequeños, se requiere la capacidad de "autoadministración" del proceso de aprendizaje. Así, conforme el estudiante adquiere experiencia en el aprendizaje y cuenta con mejores estrategias, se hace cada vez más independiente del profesor.

Lo anterior, nos conduce a una seria reflexión acerca del papel que debe jugar el docente, porque no es suficiente con dominar la disciplina sino que necesitamos saber que tanto la información, como las estrategias cognoscitivas, las destrezas motoras y las actitudes deben ser enseñadas.

Algunos teóricos de la educación parecen darle una importancia especial a las estrategias cognoscitivas como objetivos de la enseñanza. Así, Brunner (1973) señala: "... uno de los propósitos fundamentales de la enseñanza es garantizar que el estudiante llegue a ser un autodidacta eficaz. No obstante, el aprendizaje de las estrategias

no puede darse de un momento a otro, estas mejoran de calidad y eficacia en periodos relativamente largos, del orden de meses y hasta años".

Ejercitar para mejorar el comprender información verbal, almacenar y recuperar lo que han aprendido, atacar y resolver problemas, deben ser parte del quehacer del alumno debido que el desarrollo requiere de tiempo y de diversas situaciones prácticas, ya que las habilidades intelectuales no pueden aprenderse mediante una simple consulta bibliográfica, ni tampoco enseñarse de manera verbal, es decir, deben aprenderse, recordarse y emplearse en el momento adecuado. Así, conforme el estudiante adquiera experiencia, contará cada vez con más y mejores estrategias que le harán cada vez más independiente del profesor.

El aprendizaje de una habilidad facilita al educando el aprendizaje de otras de "orden superior" debido a que las diferentes habilidades acaban por relacionarse estrechamente y constituir estructuras intelectuales internas más elaboradas y amplias. Si un estudiante ha aprendido la habilidad de relacionar las variables y no sólo de sustituir las literales por valores numéricos específicos, utilizar una expresión simbólica como:  $Q = mC_p\Delta T$ , le facilitará el aprendizaje de otros tipos de capacidades no sólo relativas a la química o a las matemáticas, sino a muchas ramas de las ciencias sociales.

Otros factores personales importantes para el aprendizaje son la motivación y una actitud de confianza en aprender, los cuales se tratan más adelante.

### **El aprendizaje de los procesos de pensamiento**

Otra discusión que se dio hacia la segunda mitad del SXX fue la relacionada con el conocimiento procedimental que dio lugar a que, éste, se considerara indispensable para el desarrollo integral del alumno.

Al debatir acerca de la importancia de la enseñanza de conceptos frente a la enseñanza de procedimientos (ya que hasta ese momento la enseñanza se hacía cargo fundamentalmente del conocimiento declarativo de los conceptos) se llegó a la conclusión de que si, el mundo actual enfrenta a los jóvenes a mostrar una mayor capacidad de respuesta, resulta indispensable proveerle de una formación más sólida y una educación más polivalente y flexible, que les permita encarar exitosamente las situaciones que se les presenten.

A partir de la discusión, se consideró preciso hacer consciente al alumno de los procesos que se emplean en la elaboración de los conocimientos, por lo que resultaba primordial facilitarle la reflexión metacognitiva (conocer lo que se conoce).

La respuesta a la interrogante: ¿Se debe enseñar contenidos o enseñar a aprender?, quedaba resuelta al conceder la importancia que no tenía hasta entonces el "aprender a aprender" y el "aprender a pensar". De inmediato surgió un nuevo reto ¿cómo hacer llegar al alumno este "nuevo" tipo de conocimientos? porque ya no se trataba de enseñar definiciones y hechos, sino procesos para elaborar conceptos y para resolver problemas.

A partir de entonces se empezaron a desarrollar diversas estrategias y herramientas de enseñanza centradas en el aprendizaje de los procesos de pensamiento.

En nuestro país, con la respuesta a la demanda de más y mejor educación, surge el CCH y con él los principios de "aprender a aprender", los cuales prontamente arrojaron resultados positivos, no sólo en el bachillerato universitario sino también en el incorporado.

En otros países, aparecieron variados programas a los que se llamó: programas de "enseñar a pensar" (enseñanza de procesos), o programas para la "mejora de la inteligencia" haciendo referencia al aspecto psicológico que pretendían mejorar.

Alrededor de los 80, comenzaron a difundirse estos programas y a plantearse investigaciones y estudios. Un poco más tarde, a principios de los 90, se editaron multitud de programas "de enseñar a pensar" que inundaron el mercado.

Las altas y apresuradas expectativas de algunos educadores, quizás propició que los programas se aplicaran de forma precipitada, sin una validación y experimentación suficiente y sin una necesaria formación previa por parte de los docentes, por lo que los resultados no fueron los esperados y esto provocó el desencanto de muchos profesores.

Al reflexionar sobre los resultados se detectó que:

- Los programas requieren de una metodología concreta, no muy diferente de la actuación del profesor aunque requiera de una sólida formación previa y de un cambio de actitud por parte del docente.

- La transferencia de los aprendizajes no es automática y que se necesita poner mucha atención y dedicar un gran esfuerzo para que estos aprendizajes se utilicen tanto en la escuela como en la vida cotidiana de los alumnos.

De los resultados ha surgido una discusión que ha desembocado en sostener que no se puede enseñar a aprender y a pensar independientemente de los contenidos sobre los que se aprende. Si queremos que un alumno se beneficie de un aprendizaje de un proceso de pensamiento tenemos que facilitarle, en primer lugar, las transferencias a otros aspectos de su vida, académicos o no, para que llegue a generalizarlo a cualquier situación que se le pueda presentar en su vida.

La forma de facilitar que los aprendizajes sobre los procesos de pensamiento se transfieran, es trabajar el control metacognitivo y el pensamiento reflexivo con las metodologías adecuadas para que una vez facilitada la primera transferencia de los procesos de pensamiento

Las metodologías de "enseñar a pensar" no requieren unas formas de actuación complejas por parte del profesorado, sino mas bien un cambio de actitud hacia sus enseñanzas y los aprendizajes de los alumnos de tal forma que permitan a estos trabajar y elaborar sus propios pensamientos, fomentando el pensamiento reflexivo en los alumnos, para poner atención no sólo en los resultados sino en el proceso que se ha seguido, y aprendiendo de los errores y de los aciertos, por lo que resulta conveniente que el profesor de a sus alumnos la oportunidad de pensar en cada situación de enseñanza y de aprendizaje.

"el dominio cognitivo es recompensador... señala Brunner<sup>5</sup> ... especialmente cuando el aprendiz reconoce el poder acumulativo del conocimiento y cuando se percata de que aprender una cosa le permite algo que antes estaba fuera de su alcance". Por lo que es importante presentar la tarea haciendo despertar interés por ella y hacer que el aprendiz se sienta competente para la realización de la tarea fomentando en él, una positiva autoestima, con la organización de los aprendizajes de forma que se adapten a las características de la o las personas en particular.

Para desarrollar el pensamiento reflexivo y regular la conducta se requiere de evitar respuestas impulsivas, esto es, realizar un proceso de pensamiento en tres fases: obtener la información de los conocimientos previamente adquiridos (recordarlos), utilizar éstos de forma coherente y expresar la respuesta después de un proceso de razonamiento (Monereo 1996).

Para lo anterior, el docente instará al alumno a que se tome tiempo antes de dar una respuesta, para que pueda sopesarla, y se percate de su propia forma de pensar y de sus conocimientos para que

---

<sup>5</sup> Tomado de Prieto (1989)

se de la trascendencia y el aprendizaje sea significativo.

Para lograr lo anterior se requiere de la participación activa y compartida del alumno y el docente, evidentemente, éste último ha de estar lo suficientemente preparado para saber encauzar la discusión de forma que los alumnos puedan ir captando cual es el proceso de pensamiento adecuado para lograr la solución de los problemas. En este sentido el profesor debe evitar señalar las soluciones, fomentando un pensamiento autónomo y reflexivo que lleve a razonar las respuestas. Lo anterior conducirá a los alumnos a actuar con independencia, sin esperar la respuesta del profesor.

También es importante la colaboración que puede establecerse entre los compañeros del grupo, en este sentido, el docente ha de fomentar el trabajo en equipo propiciando que se expresen puntos de vista diferentes que hay que respetar y sobre los que se puede y debe discutir para llegar a una conclusión de tal modo que los estudiantes perciban que el trabajo en equipo favorece la obtención de buenas respuestas en un menor tiempo. Recomendable también es fomentar en los alumnos la curiosidad intelectual, esto es, aprender a buscar el propósito de las tareas, a ser auto-críticos y a reconocer que los problemas se pueden solucionar de formas distintas. Finalmente, resulta muy atractivo y favorecedor de los aprendizajes, presentar las tareas de diferente forma utilizando diferentes recursos, metodologías y hasta modalidades de lenguaje.

Se trata pues, de que el alumno se perciba capaz: de generar y procesar información, de cambiar su forma de pensar para tener un conocimiento más objetivo de sí mismo y del propio potencial de cambio cognitivo, así como de fomentar el pensamiento reflexivo.

Por todo lo anterior es necesario basar la planificación de la enseñanza en el conocimiento de las condiciones en que se da el aprendizaje, pero ¿Qué tipo de conocimiento se necesita para plani-

ficar la enseñanza?, para responder la pregunta es preciso conocer y tomar en cuenta los principios del aprendizaje y las condiciones en que ocurre.

Las teorías del aprendizaje identifican las condiciones que lo facilitan y señalan, como ya se mencionó, en las teorías antiguas se enfatizó en la importancia de las condiciones externas del aprendizaje conforme a los principios de contigüidad, repetición y reforzamiento y que las modernas agregan a las anteriores condiciones internas del alumno que hacen posible el recuerdo del material aprendido y estructurado en la mente del estudiante.

De éstas últimas más comúnmente llamadas metodologías de "enseñar a pensar" son dos las más utilizadas como referencia para fomentar un cambio de actitud en los profesores. Un grupo de estrategias utilizadas para el control de los procesos de pensamiento a través del lenguaje interior, fomentan la flexibilidad y el autocontrol, y otro, denominada la metodología de la mediación docente de Feuerstein guía las actitudes docentes en la que el profesor es el mediador de los aprendizajes canalizando, seleccionando y presentado la información (Feuerstein 1992). Dentro de la primera, algunos autores como Vigotsky, apuntan la importancia del lenguaje interior como regulador del pensamiento y de la conducta en general, en los que el lenguaje verbal y las imágenes mentales constituyen el vehículo que conforma las estructuras cognitivas (Vygotski 1996).

El concepto Vigotskyano está más próximo al concepto Piagetiano de adaptación como un equilibrio de asimilación y acomodación que al conductismo. Vigotsky y Piaget hablan de una adaptación activa basada en la interacción del sujeto con su entorno. El desarrollo de la estructura cognoscitiva en el organismo es concebido como un producto de dos modalidades de interacción entre el organismo y su medio ambiente: la exposición directa a fuentes de estímulo y de aprendizaje mediado. La experiencia de Aprendizaje

Mediado es la manera en la que los estímulos remitidos por el ambiente son transformados por un agente mediador. Este agente mediador guiado por sus intenciones, su cultura y su inversión emocional, selecciona y organiza el mundo de los estímulos. Los 3 componentes de la interacción mediada son: el organismo receptor, el estímulo y el mediador. El efecto de la experiencia de aprendizaje mediado es la creación en los receptores de una disposición, de una propensión actitudinal para beneficiarse de la exposición directa a los estímulos. Esto se puede traducir en mediar para enseñar a aprender.

Como anteriormente se mencionó, existen básicamente dos paradigmas explicativos que cubren, de forma complementaria, las distintas posibilidades de aprendizaje en los seres humanos: El paradigma asociativo (empirista) y el paradigma constructivo (racionalista) que de compararse arrojan lo siguiente:

<b>Asociacionismo</b>	<b>Constructivismo</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>* El ser humano aprende asociando estímulos.</li> <li>* Los Aprendizajes se dirigen a extraer regularidades del entorno (no siempre son conscientes).</li> <li>* Aprendizajes memorísticos, repetitivos y mecánicos.</li> <li>* Aprendizajes menos duraderos.</li> </ul> <p>Los modelos más importantes corresponden a Pavlov, Skinner y Bandura</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* El ser humano aprende a través de construir esquemas mentales.</li> <li>* Aprendizajes dirigidos a la comprensión del entorno, son conscientes porque requieren actividad consciente del sujeto.</li> <li>* Aprendizajes significativos fruto de la reflexión.</li> <li>* Aprendizajes generalmente más duraderos.</li> <li>* Los modelos más importantes corresponden a Piaget, Vygotski y Ausubel.</li> </ul>

Debido a que el sustento de la propuesta que se presenta se ubica en el segundo, a continuación se presenta un breve resumen de las bases y el desarrollo del constructivismo a partir de los estudios de Piaget.

## Constructivismo

Jean Piaget concibió el desarrollo del conocimiento como: "la construcción de una serie ordenada de estructuras intelectuales que regulan los intercambios del sujeto con el medio", aseguró que el orden de construcción de esas estructuras es universal y que obedece al principio de "Equilibración" que supone que cada estructura que el ser humano adquiere, le permite una mayor riqueza de intercambios y una mayor capacidad de aprendizaje.

Aunque el aprendizaje, favorece la adquisición de información específica del medio, lo más importante de él, es que da lugar al progreso de estructuras cognitivas por procesos de equilibración.

El conocimiento en sí, es fruto de la interacción entre sujeto y objeto y corresponde a una construcción en la que se producen dos procesos:

- Asimilación. Interpretación de la información proveniente del medio en función de sus esquemas o estructuras conceptuales disponibles en el individuo.
- Acomodación. Adaptación de conceptos e ideas que supone una modificación de los esquemas previos en función de la nueva información y la interpretación de datos anteriores en función de esquemas recién contruidos.

El progreso de las estructuras cognitivas se basa en una tendencia a un equilibrio entre ambos procesos los cuales se implican mutuamente y están en permanente conflicto buscando el equilibrio.

La Equilibración, como motor del desarrollo, no es el único factor que interviene en el desarrollo cognitivo puesto que también intervienen la Maduración y la Interacción con objetos y personas que a su vez conducen a la Equilibración la cual se lleva a cabo en tres niveles: 1) Equilibrio entre esquemas y objetos que se asimilan, 2) Equilibrio entre los diversos esquemas que deben asimilarse y acomodarse mutuamente y 3) Integración jerárquica de los esquemas previamente diferenciados.

Los tres niveles están integrados jerárquicamente y un desequilibrio en ellos provoca conflictos y ante un desequilibrio hay dos tipos de respuesta: No adaptativa (sin conciencia del conflicto) y Adaptativa. En la que hay conciencia del conflicto y también intención de resolverlo.

La interpretación constructivista de Piaget señala la actividad auto-estructurante del alumno como el camino para conseguir un verdadero aprendizaje. Lo anterior, implica una acción pedagógica en la que se cree un ambiente estimulante en el que el alumno despliegue su actividad auto-estructurante en la que el docente participe pero no como mero expositor.

La disciplina que estudia los mecanismos y procesos mediante los cuales se pasa de los "estados de menor conocimiento a los de conocimiento más avanzado" es la epistemología genética la que considera al desarrollo cognitivo como una sucesión de estadios y sub-estadios organizados y combinados entre sí formando estructuras.

Durante la observación de respuestas en los individuos, se encuentra que el nivel de competencia depende de: La naturaleza de los esquemas, del número de los mismos y de la manera en que se combinan y coordinan entre sí.

### Vygotski

Para este autor las teorías asociacionistas son insuficientes y asegura: la unidad Estímulo-Respuesta no es una unidad de análisis adecuada pues: El Ser Humano no se limita a responder a estímulos, sino que actúa sobre los estímulos transformándolos y ello es posible por la mediación de instrumentos que se interponen entre los estímulos y las respuestas, es decir, el ser humano se auto-condiciona. Por lo que Vygotski propugna por una Psicología basada en la actividad, donde una actividad, es un proceso de transformación del medio a través del uso de Instrumentos.

Tales instrumentos pueden ser: Herramientas (actúan materialmente sobre el estímulo, transformándolo) y los Signos (conceptos y estructuras de conceptos organizados). Herramientas y signos son proporcionados por la cultura, pero interiorizados por los individuos.

El Aprendizaje de signos se da a través de la actividad práctica e instrumental, pero no individual, sino en interacción o cooperación social. "En el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica) y después en el interior del propio niño (Intrapsicológica)". Así, la generalización de la palabra aprendida y ya interiorizada da origen del concepto.

Vigotsky discrepa de la posición piagetiana que propone que: "el desarrollo precede siempre al aprendizaje"; sostiene que el desarrollo no es un requisito anterior sino que es un producto derivado del aprendizaje y que las funciones mentales superiores (Pensamiento, atención, conciencia) tienen su origen en la vida social e interindividual, las cuales son interiorizadas paulatinamente por los individuos.

Los "mediadores" del aprendizaje ya interiorizados en el individuo, forman el nivel de desarrollo efectivo, que determina lo que un sujeto logra hacer de un modo autónomo y lo que una persona logra hacer con la ayuda de "mediadores" externos da lugar al nivel de desarrollo potencial.

Entre ambos niveles tiene que darse un "desajuste óptimo", de forma que si el contenido que ha de aprender el estudiante está excesivamente alejado de sus posibilidades de comprensión, no se producirá un desequilibrio entre los esquemas o bien se producirá un desequilibrio tal que el cambio resultará imposible.

La diferencia entre ambos niveles en la que se da este desajuste óptimo llamada por Vigotsky: zona de desarrollo próximo (ZDP) es "...la

distancia entre el nivel real del desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración de otro compañero más capaz".

Así, el desarrollo cultural del niño se origina socialmente porque tanto las funciones psicológicas superiores como los contenidos culturales son construcciones sociales cuya interiorización se realiza a través de las interacciones del niño con el adulto y otros mediadores. Estas situaciones de interacción social con otros son las que estimulan y activan en el niño los procesos internos del desarrollo. Para Vigotsky, la tarea fundamental es indagar cómo la interacción social en el nivel de funcionamiento interpsicológico puede conducir a la resolución independiente de problemas en el nivel intrapsicológico.

Mediante el método de la doble estimulación Vygotski Identifica tres fases: Cúmulos no organizados, Complejos y Conceptos.

1) Cúmulos no organizados. Agrupaciones de objetos diversos sin rasgos comunes en el que las palabras hacen referencia a algo pero sin tener un determinado significado (es propio de niños preescolares). 2) Complejos. Asociaciones de objetos en los que las palabras tienen referencia y significado, el complejo más común agrupa adecuadamente los objetos a partir características captadas por el niño sin que se tenga una idea precisa de su similitud. Los complejos pueden ser permanentes y 3) Los Conceptos. Consisten en la abstracción de un rasgo que se presenta en una serie de objetos. Hay dos tipos: Los Conceptos espontáneos que pueden estar generalizados entre las personas de diferentes lugares y que se adquieren de la observación y, los conceptos científicos considerados "verdaderos" por la comunidad.

Los conceptos científicos tienen las siguientes características:

Forman parte de un sistema. Se adquieren a través de una toma de conciencia de la propia actividad mental. Implican una relación especial en el objeto basada en la interiorización de la "esencia" del concepto. La referencia se determina por vía asociativa. El sentido se determina por procesos de reestructuración del sistema de conceptos. Se aprende por instrucción. Los conocimientos científicos son la vía por la que se forma en la mente la Conciencia Reflexiva que, posteriormente se transfiere a los conceptos espontáneos.

Más tarde se formula el concepto de Andamiaje por Brunner en 1976 a partir del concepto de ZDP. El supuesto fundamental del andamiaje es que las intervenciones tutoriales del adulto deben mantener una relación inversa con el nivel de competencia en la tarea del niño. (Menos nivel - más ayuda, más nivel - menos ayuda). Lo que el profesor ofrece es sólo ayuda, porque el verdadero artífice del proceso de aprendizaje es el alumno. Es importante señalar aquí que sin la ayuda es muy difícil que los conceptos científicos que se aprendan en el sentido de que los significados construidos por el alumno se aproximen a los significados que representan los contenidos escolares.

Se llama andamio porque la ayuda que presta es indispensable pero también porque es transitorio. El profesor eficaz debe tener una buena formación referida al conocimiento del alumno y a la metodología educativa y ser crítico y reflexivo porque será el contexto, el grupo con el que trabaja, el que le indicará qué tipo de ayuda en concreto debe prestar.

### **Ausubel.**

Este autor:

Comienza por distinguir dos sucesos distintos que están estrechamente relacionados: Instrucción y Aprendizaje.

Señala que el aprendizaje debe ser significativo, es decir que el alumno reorganice su conocimiento del mundo, de acuerdo a la manera en

que se le presente la nueva información y a sus conocimientos previos, para que logre transferir el nuevo conocimiento a otras situaciones.

Asegura que para que un estudiante logre adquirir conocimientos, es necesario que cuente con: Material potencialmente significativo es decir: Debe estar compuesto por elementos organizados en una estructura cuyas partes no se relacionan arbitrariamente. Una estructura cognitiva capaz de tener ideas inclusoras y presentar predisposición para el aprendizaje, es decir actitud positiva y activa.

En colaboración con Ausubel, Novak y Hanesian consideraron tres tipos básicos de Aprendizajes significativos (Ausubel 1998).

#### 1. Aprendizaje de representaciones (Adquisición de vocabulario)

- \* Previo a los conceptos (Palabras referentes a hechos/objetos).
- \* Posterior a los conceptos (Palabras referentes a conceptos).

#### 2. Aprendizaje de conceptos:

- \* Formación de conceptos: Abstracción inductiva a partir de experiencias concretas.
- \* Aprendizaje por descubrimiento.
- \* Asimilación de conceptos: relación de nuevos conceptos con otros ya existentes.
- \* Aprendizaje por instrucción receptiva.

#### 3. Aprendizaje de Proposiciones

Se da por asimilación. Consiste en aprendizajes de ideas que se expresan en proposiciones que contienen 2 o más conceptos.

Ausubel sostiene que, para que el aprendizaje sea significativo se llevan a cabo dos procesos: La diferenciación progresiva y la reconciliación progresiva. La primera afirma que a medida que el aprendizaje significativo se desarrolla, los conceptos que incluye se modifican y desarrollan, haciéndose cada vez más claros y en la reconciliación

progresiva las modificaciones producidas en la estructura cognoscitiva permiten el establecimiento de nuevas relaciones.

Los tipos de Aprendizaje significativo relacionados con la información que se tiene pueden ser: Subordinado, cuando lo nuevo tiene carácter de ejemplo o ilustración de lo ya existente o donde lo nuevo es una modificación de lo existente; Supraordenado, cuando el sujeto integra conceptos ya aprendidos a un nuevo concepto más amplio e inclusivo y Combinatorio donde los nuevos conceptos no son ni sub, ni supraordenados, estos nuevos conceptos se relacionan de una forma general con la estructura cognitiva ya existente.

Con lo anterior, se resumen brevemente los tres modelos constructivistas más importantes

Las investigaciones de Piaget y su teoría se enfocaron básicamente hacia la epistemología, pero, tuvieron mucha influencia en el enfoque de la educación a todos los niveles durante los años setenta y principios de los ochenta, la enseñanza de las ciencias en el bachillerato empezó a dejar de centrarse en los contenidos y se le dio más énfasis al desarrollo de los procesos generales del pensamiento que al aprendizaje de los conocimientos disciplinarios. Los currícula basados en esta teoría, se centraron en el fomento de habilidades y estrategias de pensamiento científico (formulación y comprobación de hipótesis, control de variables y experimentación, razonamiento combinatorio, solución de problemas), más que en la transmisión del conocimiento.

Consecuentemente, la metodología didáctica se basó en la investigación o el descubrimiento, a partir de la solución de problemas para propiciar que el alumno desarrollara la habilidad de descubrir y construir los conocimientos científicos por sí mismo.

La propuesta pedagógica del CCH en su creación, tuvo gran influencia del modelo piagetiano ya que sus principales características son:

- Se enfoca al desarrollo de habilidades de pensamiento científico más que a la transmisión de conceptos.
- Propone una metodología de enseñanza basada en el descubrimiento y en la solución de problemas.
- Se basa en la formación psicológica del adolescente
- Propone la enseñanza de dos métodos y dos lenguajes

Como modelo didáctico, a la teoría piagetana se le han señalado limitaciones, la principal, es que supone que una vez que el sujeto ha alcanzado el pensamiento formal, posee un pensamiento científico (independiente de los conceptos implicados) que es capaz de aplicarlo a cualquier tarea o área. Sin embargo, investigaciones posteriores, relacionadas con el aprendizaje, principalmente encabezadas por Vigotsky y Ausubel han encontrado que el pensamiento formal no es tan general e independiente del contenido como Piaget suponía.

Igualmente, en el modelo piagetiano los contenidos y las situaciones particulares son casi siempre un recurso metodológico y rara vez se consideran objeto de estudio por sí mismos, por lo que no se le puede considerar como un modelo didáctico.

### ***Las ideas previas o concepciones alternativas***

Como ya se ha apuntado, en los años setenta las ideas de Piaget influyeron de manera importante en las currículum, pero, a raíz de las objeciones y señalamientos hechos al concepto de estadio propuesto por este investigador, en los ochenta se inició una línea de investigación enfocada a lo que se llamó las "ideas de los niños" que fueron detectadas al explicar fenómenos específicos de la ciencia. Aunque esto parece un cambio en el enfoque de las ideas piagetanas, no lo es, porque los primeros estudios de las ideas científicas de los niños se deben precisamente a Piaget.

A pesar de las opiniones en contra de la idea de estadio; los enfoques constructivistas tienen estrecha relación con las propuestas de

Piaget aunque se centren en la construcción de conceptos y no en el desarrollo de estructuras de pensamiento. Con respecto al estudio de la proporcionalidad, como en el siguiente capítulo se menciona, diversas investigaciones encuentran sustento importante al relacionar los estadios con los resultados encontrados.

En general, se puede decir que el enfoque constructivista piensa que las personas al interactuar con la enseñanza, con los medios de comunicación, con las noticias científicas, con los inventos tecnológicos y por las experiencias de su vida cotidiana, se forman modelos mentales de ellos mismos y sobre todo lo que los rodea.

De esta forma, una persona no es un saco vacío, sino que ha construido en el transcurso de su historia social, ideas e interpretaciones de los fenómenos, a estas interpretaciones se les ha dado en llamar "ideas científicas" de los niños, "conceptos erróneos", "concepciones alternativas" etcétera.

Para conocer las ideas de los alumnos y saber como aprende, existen puntos de vista que difieren en una serie de supuestos de gran importancia que llevan a enfoques distintos. En este sentido, Ignacio Pozo y colaboradores plantean: ... "en nuestra opinión ha habido en las últimas décadas dos formas fundamentales de investigar lo que el alumno piensa sobre los conocimientos científicos que han tenido una notable influencia en los desarrollos curriculares en esta área. Se trata por un lado de la teoría piagetiana de las operaciones formales y por otro del enfoque de ideas previas o concepciones alternativas de los alumnos sobre los fenómenos científicos. Aunque ambos enfoques coinciden en algunos supuestos básicos difieren en otros igualmente importantes que conducen a opciones curriculares claramente distintas" (Pozo 1996).

A diferencia de la coherencia y consistencia de la teoría piagetana, el enfoque de las ideas alternativas está constituido por una serie de aportes de diferentes investigadores que no coinciden totalmente, este hecho pudiera producir dispersión y dificultar el análisis

de este enfoque. No obstante, de acuerdo con Ignacio Pozo, hay una serie de puntos relacionados con las concepciones en las que coinciden las diferentes corrientes y que se pueden considerar como el "núcleo firme" del enfoque (Pozo 1994). Éstos son:

- Las concepciones son elaboradas de una forma más o menos natural por la interacción con el entorno (familia, escuela, medios de comunicación, entre otros).
- No son coherentes desde el punto de vista científico, aunque no es necesario que lo sean para los individuos que las construyen.
- Con estas concepciones alternativas, es posible hacer predicciones más o menos correctas de algunos hechos cotidianos.
- Se producen tanto en niños y adolescentes como en personas adultas, incluso en universitarios y en su área de especialidad.
- Se utilizan en forma vaga, en función del contexto y son bastante difusas.
- No son explícitas como los conceptos científicos.
- Algunas veces se expresan mediante el lenguaje pero la mayor parte de ellas se descubren por las actitudes o las predicciones que hacen los alumnos al elaborar explicaciones.
- Son muy estables y persisten a pesar de varios años de cursos científicos.

Se sabe, que aunque las concepciones se construyen de forma personal, diversos individuos pueden tener ideas semejantes e incluso algunas concepciones de personas que vivimos en esta época pueden coincidir con las que tenían los filósofos y hombres de ciencia en épocas pasadas

La dispersión de las diferentes corrientes hace patente la necesidad de realizar un análisis más detallado de cada una, así como de las repercusiones que podrían provocar tanto en la metodología de la enseñanza como en el diseño curricular.

Por ejemplo, Giordan y Vecchi<sup>6</sup> señalan haber encontrado hasta 28 formas diferentes para designar las "ideas científicas de los niños" (conceptos erróneos, ideas alternativas, ideas previas, concepciones, etcétera) aunque este desacuerdo en la forma de denominar a las "ideas previas" no implique sólo una diferencia en cuanto a la denominación si no que se ubique en la corriente epistemológica con la que coincide cada autor.

Al igual que sobre las ideas previas, también podemos encontrar diversas posiciones en cuanto a la forma en que los factores del medio influyen en la construcción de las concepciones alternativas. El carácter fragmentario y únicamente descriptivo de los estudios realizados en torno a estas "ideas" no aporta mucha información respecto a cómo se construyen éstas.

Pero a pesar del carácter descriptivo de las concepciones alternativas de los niños y adolescentes, desde los años ochenta existe una cantidad impresionante de datos para mostrar que los alumnos tienen concepciones para dar significado a los hechos, probablemente esto ha provocado que el enfoque tenga cada vez un mayor número de adeptos en diferentes países con el consiguiente abandono de las concepciones empiristas de la enseñanza.

Si se compara la corriente piagetana con la de las concepciones alternativas podría suponerse que mientras Piaget consideraba que el alumno poseía un sistema cognitivo organizado y predecible; para las concepciones alternativas el alumno posee una serie de ideas en torno a los conceptos científicos independientes y no organizados. Sin embargo algunos estudios que intentan relacionar las concepciones de los alumnos en diversas tareas, han podido demostrar que éstas tienen cierta relación, aunque no constituyen un sistema único como planteaba Piaget.

---

<sup>6</sup> Citado por José I. Pozo y Mario Carretero (1994)

Todas las corrientes constructivistas plantean que conocemos el mundo de una forma personal, es decir el conocimiento que adquirimos de lo que nos rodea no sólo está determinado por las características de los objetos que conocemos sino por nuestras propias ideas y expectativas; esta idea es cada vez más generalizada entre los investigadores en el terreno de la psicología y la educación.

De la misma forma, la psicología cognitiva asume que la explicación de la conducta está en las representaciones que las personas tienen del mundo y no en las características reales que éste tenga. A pesar de las críticas hechas al enfoque de concepciones alternativas; considero que tomar en cuenta lo que el alumno sabe es un gran paso en el camino que lleva a la adquisición de los conocimientos científicos, nos ayuda a comprender cuáles son los problemas para lograr que los alumnos cambien sus concepciones y cómo podemos incidir los maestros en este proceso.

El presente trabajo, tiene el propósito de compartir una propuesta que ha sido elaborada a partir de la búsqueda realizada por el equipo del Colegio al que pertenezco y que intenta responder a las preguntas ¿qué enseñar?, ¿cómo enseñar? y ¿para qué enseñar?,

## **Capítulo 2**    *La proporcionalidad y el desarrollo del conocimiento*

*Todo ocurre en nuestro universo mental*

*René Magritte<sup>7</sup>*

Con el fin de contar con una base que sustente una propuesta de secuencia didáctica para el estudio de la densidad y el aprendizaje de la proporcionalidad en el bachillerato, se revisan en este capítulo las aportaciones que al respecto hace la Dra. María Luisa Fiol Mora<sup>8</sup>.

Como se dijo ya, uno de los primeros estudiosos del desarrollo del conocimiento fue Jean Piaget quien con un gran equipo de colaboradores, ordenó lo que, en conjunto, llamaron estadios en la evolución intelectual del niño. Si se resumen las más importantes características de cada uno de éstos con relación al concepto de proporcionalidad empezando desde el segundo (dos a siete años), se tiene que<sup>9</sup>:

En el **estadio II** el conocimiento del niño está íntimamente relacionado con lo que percibe por los sentidos. Puesto frente a un material, instintivamente manipula y sin duda observa. Para que esta observación sea interiorizada convendrá orientar las actividades de manera que lleven a la comparación, clasificación y ordenación de objetos a partir de sus propiedades o atributos. Estos deben estar referidos a los sentidos: forma, tamaño, temperatura, sonido, etc.

---

<sup>7</sup> Pintor y escultor belga (1898-1967)

<sup>8</sup> Directora del Área de Investigación e innovación educativa. UAB., España. Sus investigaciones y aportes, acerca del aprendizaje sobre la proporcionalidad en la escuela, son fundamento de este trabajo

<sup>9</sup> Tomado de Fiol (1990)

En el **estadio III** (siete a doce años). El niño es capaz de realizar la operación entendida como acción interiorizada que ha sido posible después de la acción real con los objetos y la reflexión sobre ella. Esto implica que las estructuras específicas de la inteligencia en esta época, la forma de conocer y el pensamiento mismo, se han interiorizado suficientemente (por un lado las representaciones y por otro las acciones) como para realizar a nivel interno operaciones con imágenes de las cosas externas y sus acciones sobre éstas.

Es característico de este estadio un tipo de pensamiento atado siempre a la realidad fenoménica, a la que el chico necesita manipular directamente o con la imaginación, con una constatación de los fenómenos reales como única manera de entenderlos y sin posibilidad de operar mentalmente con los conceptos de estos fenómenos. Sin embargo, en este estadio, se posee ya una cierta estructura lógica caracterizada por las «operaciones» que puede realizar. Éstas consisten en operaciones reversibles, cuya reversibilidad puede consistir: en inversiones y negaciones o bien en reciprocidades. Sin embargo, no hay aún, siguiendo el pensamiento de Piaget, una estructura de conjunto general que fusione en un sistema único las transformaciones por inversión y las transformaciones por reciprocidad, es decir, todavía no puede combinarlas.

Es en este estadio, cuando se empiezan a adquirir las nociones de ciertas cantidades físicas (longitud, tiempo, masa, área, velocidad, fuerza, etc.), se llegan a comparar e identificar variables que intervienen en un fenómeno y a iniciar la cuantificación de las cualidades. Aparece la posibilidad de medir. La operación con distintas cualidades físicas y la adquisición y extensión de la noción de número natural lleva al niño a desarrollar una primera noción de medida y de proporcionalidad.

**Estadio IV** (a partir de los once-doce años). En este, el niño no sólo opera con objetos concretos y con las relaciones entre objetos sino que ya intenta partir de hipótesis que el mismo enuncia. Se desprende pues de «lo concreto» y sitúa «lo real» en un conjunto de transformaciones. La

realidad, que antes era punto de partida, se convierte poco a poco en una parte del conjunto de posibilidades mucho más amplia. Los hechos reales son concebidos como parte de todo un universo de transformaciones posibles. Por tanto hay un rasgo esencial propio de este estadio: la última separación en relación con lo concreto, frente a un progresivo egocentrismo del pensamiento. El pensamiento separado del nivel de lo concreto se extiende con libertad al campo de lo posible a través de las nuevas operaciones de la lógica de proposiciones que se adquiere paulatinamente.

En este estadio, ante un fenómeno cualquiera, antes de hallar la causa concreta que lo produce, el pre-adolescente se sitúa en un plano hipotético-deductivo y, mediante las operaciones proposicionales, va separando las hipótesis verdaderas de las que no lo son hasta dar con la específica del caso que estudia. Hay que tener en cuenta que la deducción no trabaja sobre los datos que se ven, sino que trabaja sobre hipótesis. Este es el razonamiento hipotético-deductivo.

A nivel de lenguaje, el chico no sólo ha adquirido la posibilidad de formular más proposiciones (hacer más frases) sino que puede combinarlas entre sí (más frases y más relacionadas), disocia la forma del contenido, y gracias a las operaciones proposicionales, puede combinarlas con todo el conjunto de posibilidades.

Las operaciones formales son, como dice Piaget, operaciones de segunda potencia, o sea operaciones sobre operaciones concretas (así, por ejemplo la proporción es una relación de relaciones). Presuponen las operaciones del estadio anterior que quedan agrupadas en estructuras superiores que las integran en un solo conjunto. Hay que tener en cuenta que a pesar de que en el estadio IV el pre-adolescente dispone teóricamente de estas capacidades, la experiencia en gran cantidad de estudios hechos mundialmente, se encuentra que esta situación no es real. Por ejemplo, en Gran Bretaña los estudios de Wollman y Lawson, muestran que mucho menos de la mitad de los adolescentes no han alcanzado el estadio de las operaciones formales

(Wollman 1978)<sup>10</sup>. En México, en un estudio realizado en los 90 en la Facultad de Química de la UNAM, el Dr. Mauricio Castro Acuña<sup>11</sup> encontró que un 20 % de estudiantes a punto de egresar no habían superado el estadio de las operaciones concretas o estaban en fase de transición de un estadio a otro (Conferencia dictada en el Plantel Naucalpan en 1996). De todas formas vale la pena tener en cuenta que una persona puede en un momento utilizar modos de pensamiento formal en relación a ideas que le son familiares y utilizar el razonamiento concreto en otros momentos y situaciones.

### **La Proporcionalidad un esquema operatorio**

Inhelder y Piaget, abordaron el estudio del paso de la lógica del niño a la lógica del adolescente. Los datos recogidos gracias a este estudio del razonamiento experimental muestran que el razonamiento formal no consiste sólo en razonamientos verbales (desarrollo de la lógica de las proposiciones), sino que implica la formación de una serie de esquemas operatorios como: probabilidades, dobles sistemas de referencia, **proporciones**, combinatoria, compensaciones multiplicativas, correlaciones, etcétera (Inhelder 1958). Estos esquemas operatorios, a parte de la importancia que tienen en sí mismos, están absolutamente interrelacionados. Inhelder y Piaget dicen que aparecen de forma sincrónica. Para explicar la aparición simultánea de estos esquemas operatorios hay que recurrir no sólo a las operaciones propias de la lógica de las proposiciones, sino sobre todo y especialmente a las estructuras de conjunto que las fundamentan. Es indispensable tener en cuenta que una acción básica en las construcciones de la inteligencia es la reversibilidad. Ésta se presenta desde los primeros estadios bajo dos

---

<sup>10</sup> Tomado de Fiol (1990) p 98

<sup>11</sup> Profesor de Físicoquímica la Facultad de Química y de Electroquímica en el Posgrado, ha realizado investigación educativa y es autor de libros de texto, de libros de divulgación y de un gran número de artículos publicados en México y el extranjero.

formas complementarias: 1) la negación o inversión, y 2) la reversibilidad o compensación.

Con estudios en niños en estadio III acerca de cómo resuelven el problema de formar sombras del mismo tamaño sobre una pantalla que dista de un foco utilizando círculos de diferente tamaño, se encontró que se dan cuenta de que la sombra formada por un círculo grande se compensa con un disco pequeño si se disminuye su distancia a la pantalla. El niño en estadio III consigue interpretar numéricamente las medidas que toma de forma aditiva e intenta mantener las constantes diferencias en la distancia. De lo anterior se desprende que la comprensión de la proporcionalidad en el estadio IV es el resultado de la comprensión de una compensación multiplicativa.

### **La investigación directa de Piaget sobre proporciones**<sup>12</sup>

Piaget estudió diversos aspectos y presentaciones del concepto de proporcionalidad. Al estudiar el movimiento y la velocidad encontrando que la noción de proporción interviene cuando se trata de comparar dos movimientos siendo distintos las distancias recorridas y los tiempos empleados. El equipo de Piaget también se ocupó del estudio de las funciones, entre las que se encuentra el de la función lineal, la que se estudió en unos ejemplos hoy ya clásicos (peces que comen según su longitud), considerando primero ejemplos de magnitudes discontinuas, y en segundo lugar, de magnitudes continuas, pero también, en colaboración con Inhelder estudió de forma más específica "el equilibrio de la balanza", así como "la proyección de sombras" para llegar a conclusiones acerca de las proporciones como uno de los esquemas operativos fundamentales (combinaciones, *proporción*, coordinación de los sistemas de referencia, probabilidad, etc.).

Debido a que una proporción es una relación que se establece entre

---

<sup>12</sup> Tomado de Fiol (1990) p104

relaciones, explica Piaget, el niño no puede construirla en el estadio de las operaciones concretas pero, puede gradualmente en el estadio III puede constituir una culminación (alrededor de los catorce a quince años aunque puede ocurrir más tarde según los factores puestos en juego), para lograr:

a) Establecer compensaciones aditivas  $a + b = e + d$ .

b) Comparar por diferencia  $a - e = d - b$ .

c) Formular las correlaciones cualitativas, como por ejemplo: árbol es a bosque como abeja es a enjambre, o ladrido es a perro como maullido es a gato.

d) Comparar cualitativamente la relación entre variables, por ejemplo: a más... más, o a menos... menos... etc.

e) Concebir fracciones, e incluso en algunos casos comprender la igualdad de dos fracciones: uno es a dos, como cincuenta es a cien.

f) Iniciar las compensaciones multiplicativas del tipo  $xy = zv$  lo que le llevará más adelante a la idea de conservación de áreas de rectángulos, a la comprensión de la ley de la palanca, y el volumen de paralelepípedos, etc.

En todo caso, es menester tener en cuenta que las compensaciones multiplicativas se relacionan directamente con la noción de proporción. En este sentido y desde el punto de vista psicológico, aseguran que comprender la proporción empieza por el descubrimiento de una compensación, pero en cambio parece que comprender una compensación multiplicativa no tiene por qué pasar por la comprensión inicial de la proporción.

Desde la enseñanza de las matemáticas (tanto en el trabajo en clase, como en el laboratorio o taller), se puede ir avanzando en la comprensión si se toman en cuenta los siguientes aspectos:

I. *Buscar qué variables intervienen* en los distintos fenómenos.

II. *Buscar experimentalmente, relaciones cualitativas de dependencia* entre dos variables.

III. *Tantear experimentalmente, con materiales, para conseguir la*

conservación de un resultado, y con una reflexión posterior sobre ello. Por ejemplo: conseguir sobre una pantalla: la misma sombra de dos círculos distintos variando la distancia al foco.

IV. *Siempre que el material experimental lo permita, obtener datos numéricos, y si es posible trazar gráficos.* Por ejemplo, hacer tablas y después de analizar las relaciones funcionales entre las variables pasar a representarlas sobre coordenadas cartesianas. Es a partir de situaciones «concretas», donde aparece la importancia de herramientas lógicas como las proporciones y su relación con las funciones lineales. Las funciones lineales deberían entenderse como métodos simples de expresión de una relación entre dos variables que permite, por ejemplo, interpolar y extrapolar sin dificultad.

V. *Asumir las matemáticas como un lenguaje semántico, o sea que «dice» algo sobre alguna cosa.* En este sentido tenemos varios aspectos a considerar: Debe decirnos algo, de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, o de los objetos con los que nos encontramos, ayudar o a clasificarlos, compararlos, ordenarlos, cuantificarlos, etc. En el caso de la proporcionalidad lo que interesa es que la expresión lineal de la relación entre dos variables aparezca como una relación operativa relacionada con conocimientos anteriores.

Excelente sería que, junto a los ejemplos de relaciones lineales, se estudiaran relaciones no lineales entre otras variables, y se explicaran los modelos. La escritura propia de las matemáticas debe ir progresando a lo largo de los años, a través de los diferentes estadios. Así como no hemos aprendido a hablar y a escribir en un día, también la introducción y, en general, el tratamiento de la escritura algebraica (necesaria para el manejo de tantos conceptos matemáticos), debe realizarse de forma muy graduada a lo largo de varios años de escolaridad. Pero lo cual se puede realizar lo siguiente:

VI. *Buscar una prudente y progresiva utilización de las fórmulas.* No puede pedirse que los alumnos de primaria que plasmen los resultados obtenidos durante el trabajo experimental en fórmulas; pero en

secundaria se puede iniciar a los chicos, con el apoyo del profesor, a la deducción algebraica de fórmulas sencillas, hacer ejercicios de codificación como: representar variables utilizando diversas letras, cambio de notación para las variables y expresión de la interrelación entre ellas por un determinado algoritmo; si así fuera, en bachillerato bien se podría lograr que los alumnos, a partir de datos numéricos hallados experimentalmente, obtengan relaciones sencillas entre variables. Del mismo modo que dar definiciones es cuestión de técnicas de lenguaje, ocurre con «descubrir fórmulas». Si se intentara (incluso desde el estadio de las operaciones concretas) que los alumnos expliquen con sus propias palabras los fenómenos y las relaciones que se producen entre diversos objetos, se lograría que el lenguaje se fuera perfeccionando más y más a lo largo de sucesivas descripciones en los diferentes niveles educativos.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que el repetir perfectamente una definición no quiere decir que el que la dice lo entiende y además, como dice Novak (1985)<sup>13</sup>: «El conocimiento adquirido de memoria pronto se pierde, pronto se olvida, y no puede ser utilizado de una manera efectiva para resolver problemas». Es posible encontrar, no sólo alumnos si no personas en general, que sin tener grandes habilidades en la resolución de problemas matemáticos, pueden solucionar problemas tipo, aplicando la regla de tres. Esto, sin duda es útil pero, lo que hay que puntualizar es que el aprendizaje de una fórmula que sólo se puede aplicar mecánicamente no sirve para resolver un problema en el sentido epistemológico del término, es decir, no conduce a pensar, y por tanto tampoco ayuda a hacer un salto cualitativo desde la zona del pensamiento. Por que no se trata de aplicar algoritmos sino también, saber identificar los problemas de proporcionalidad, ponderar cuándo es adecuado o no utilizar el algoritmo, comprender el tipo de relación que se establece entre las

---

<sup>13</sup> Tomado de Fiol (1990) p111

variables para saber qué se está haciendo al aplicar el algoritmo. Por tanto, el énfasis deberá ponerse en diseñar estrategias de enseñanza más eficaces.

### **Realidades acerca del aprendizaje de la proporcionalidad en la escuela<sup>14</sup>**

Durante el estudio de la proporcionalidad se presenta la dualidad de: parecer un concepto sencillo, pero mostrarse como una noción difícil en las aplicaciones. Así, en la educación básica, la proporcionalidad aparece con las tablas de multiplicar, pero su estudio desde la Geometría se realiza hasta la educación secundaria. No obstante, esta aplicación se presenta en los mapas o gráficas circulares en libros de texto de educación básica.

Parece que la precipitación en extender la noción de proporcionalidad a casos nuevos conduce al alumno a utilizar algoritmos de manera automática sin comprender la relación y sin reflexionar sobre los resultados, lo que favorece que los estudiantes presenten respuestas erróneas.

Situar al alumno frente a problemas prácticos estructurados de forma que lo sitúen frente al error puede contribuir a que se eviten, pero el problema no es tan elemental. Si el problema es de estructura, (es decir se relaciona con lo que ya-se-sabe), no bastará la presentación de «contraejemplos», sino que habrá que introducirse en un estudio en profundidad sobre lo que quiere decir cometer un error y porqué éste se produce en una determinada forma y no en otra, con una tan alta frecuencia.

Al decir de la Doctora Fiol: "sin duda el punto de partida para el moderno interés en el desarrollo de proporción hay que buscarlo en el fértil trabajo de Piaget y de sus colaboradores. No se puede obviar que

---

<sup>14</sup> Tomado de Fiol (1990) p113

se han detectado diversos problemas en estos trabajos y que han quedado abiertos distintos interrogantes. Uno de ellos es que entre la mayor parte de las tareas de razonamiento que utilizaron figuraban problemas de proporcionalidad inversa junto a problemas de proporcionalidad directa".

Se afirma, a partir de algunas investigaciones (Lovell, 1961) que el razonamiento de proporcionalidad inversa se adquiere después de los catorce años. Afirmación sorprendente puesto que, por otra parte, la comprensión de la compensación multiplicativa es algo anterior a la noción de proporción. De todas formas Piaget y sus colaboradores situaron la edad de la utilización correcta de la estrategia proporcional de los once a los catorce años. Sin embargo, otros investigadores como Karplus y colaboradores pusieron en evidencia que un gran número de alumnos al final de la escuela secundaria e incluso en edad universitaria no han logrado adquirir el entendimiento funcional de la proporcionalidad. Driver (1979) se preguntó sobre los estadios piagetianos. Su conclusión fue que hay que resituar a Piaget como epistemólogo y replantear el problema desde el punto de vista de la didáctica en el contenido de los problemas, más que en el estadio formal en que se encuentra o no el alumno. Sin embargo, no hay que perder de vista que a pesar de estas dificultades, en el trabajo de Piaget y colaboradores se halla una excelente descripción del crecimiento del concepto de proporcionalidad.

Otros investigadores han confirmado observaciones concernientes al espectro del crecimiento y han contribuido al cuadro con detalles interesantes. Dada la importancia de la proporcionalidad no extraña que haya sido objeto de muchos estudios en los últimos años. Seguramente lo más interesante ha sido el cambio del punto de vista desde donde se llevaba a cabo, se ha pasado de considerar el razonamiento proporcional como una manifestación de una estructura cognitiva o habilidad global, a un trabajo más diferenciado centrado en el estudio de los procedimientos usados de forma espontánea por los alumnos en

la resolución, con éxito o sin él, de los problemas de proporcionalidad, lo que lleva a estudiar diversas estrategias y las variables que intervienen en su resolución.

El estudio de las contestaciones dadas por los alumnos ha hecho necesario profundizar sobre lo que se toma en cuenta tanto para elegir las estrategias correctas más usuales, como para elegir las estrategias inapropiadas como son: utilizar la diferencia entre los valores dados (estrategia aditiva, que es la estrategia errónea más común y más conocida); elegir buenas estrategias pero utilizadas de forma parcial como pueden ser: utilizar parte de la información, relacionar datos sólo de forma cualitativa, contestar comparando razones y utilizando la estructura multiplicativa; o en su caso, elegir una estrategia para la resolución de un problema diferente por no entender el enunciado.

Al mismo tiempo que se estudiaron las estrategias de razonamiento proporcional utilizadas, se ampliaron trabajos centrados en el estudio de las variables o parámetros que afectan a la resolución de los problemas como son: a) las variables centradas en los alumnos (edad, sexo y condiciones socioeconómicas entre otros; b) las variables centradas en el problema, como son: el contexto y las variables estructurales (estructura de los números, la presencia de una unidad, etc.) y; quizás la más compleja y menos estudiada: la relación entre la enseñanza y el aprendizaje.

Muchos investigadores han trabajado en este sentido. Para algunos tiene influencia en el progreso del razonamiento proporcional la enseñanza activa (Wollman y Lawson, 1978), la utilización de material y la descripción (Almató y otros, 1986,) y la importancia de proveer representaciones simbólicas para plantear el problema y para ayudar a los alumnos en la formulación de sus respuestas (Streefland, 1984-1985).

## ¿Para qué enseñar la proporcionalidad?<sup>15</sup>

Una serie de estudios realizada en los Estados Unidos con respecto al manejo del racionamiento proporcional nos puede dar idea de la importancia del estudio serio e intencionado de la proporcionalidad. Esta investigación denominada: Proyecto 2061 de la *American Association for the Avancement of Sience 1200 New York Av., NW Washington, D.C. 20005*<sup>16</sup> indica que: Los adolescentes jóvenes y también muchos adultos presentan dificultades con el razonamiento proporcional (Behr, 1987), (Hart 1988). Los alumnos de nivel medio pueden resolver problemas de proporciones en que intervengan números y redacción sencillos (Séller et al. 1989), (Karplus et. al. 1983), (Tournaire y Pulos 1985), (Vergnaud 1988). Los alumnos de nivel medio pueden resolver problemas de proporciones en que intervengan números y redacción sencillos (Vergnaud 1988), pero los problemas se presentan con valores numéricos o contextos de problemas más difíciles. Los problemas en los cuales se usan relaciones de 2:1 resultan más fáciles que aquellos con relaciones de  $n:1$ , y hasta pueden ser resueltos por niños de enseñanza elemental (Shayer en Adey, 1981). Los problemas con relaciones  $n:1$  son más fáciles que los que tienen otras relaciones de valor entero, como  $6/2$ , que a su vez son más fáciles que los que tienen relaciones no enteras como  $6/4$  (Tournaire y Pulos, 1985). Los diversos tipos de relación como rapidez, intercambio y mezcla parecen ocasionar ciertas dificultades, los problemas de rapidez parecen ser más difíciles que los de intercambio (Séller et al 1989) (Vergnaud 1988). La falta de familiaridad con el caso del problema origina todavía más dificultades cuando se aplica un tipo difícil de relación (Séller et al. 1989).

Para intentar resolver el problema del manejo de la proporcionalidad,

---

<sup>15</sup> Tomado de Fiol (1990) p

<sup>16</sup> Fuente: [www.proyect.2061.org](http://www.proyect.2061.org)

desde la Didáctica de las Matemáticas hay dos preguntas básicas que se plantean cada vez más como marco de reflexión: ¿Qué procedimientos espontáneos son los utilizados para matematizar? ¿Cómo hacer matemáticas de forma que sea un lenguaje semántico, o sea, que digan algo sobre el mundo que nos rodea?

La pregunta inicial incide en los métodos que de forma espontánea utilizan los niños y muchas veces los adultos en la resolución de problemas. La segunda pretende llevar a la reflexión sobre las matemáticas, pero no como un juego vacío de sentido que sólo atenta a sus propias leyes de estructura interna, sino a las Matemáticas como un lenguaje en el más elemental y cotidiano sentido de la palabra. Un lenguaje que dice algo, que es transmisor de ideas, imágenes, etc., en fin, a un lenguaje de relación.

Tomando como referencia estas reflexiones, podemos justificar la enseñanza de la proporcionalidad porque:

1. Es núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de nociones como:

- Razón y proporción.
- Fracción y número racional.
- Número decimal y problema de la medida.
- Cambio de unidades, cambio de escalas.
- Problemas de repartos proporcionales.
- Problemas «clásicos» de regla de tres.
- Porcentajes.
- Probabilidad.
- Gráficas de funciones lineales.
- Teorema de Thales.
- Semejanza de figuras.
- Problemas de mezclas y aleaciones.
- Escalas, mapas y maquetas.
- Funciones trigonométricas.

- El número  $n$ .

2. En las Ciencias y la Técnica la proporcionalidad es uno de los instrumentos más importantes. Muchos de los conceptos de Física y Química son en realidad nombres dados a relaciones de proporcionalidad como por ejemplo: la velocidad, la aceleración, *la densidad*, la presión, las concentraciones, las dilataciones; o la formulación de leyes como: la ley de Ohm, la ley de Hooke o la ley de Proust. Incluso es la idea de proporcionalidad entre magnitudes la que da lugar a buena parte de los instrumentos de medida utilizados en estas Ciencias.
3. El concepto de proporcionalidad aparece incluso a finales de Primaria en el curriculum de Ciencias Sociales bajo distintas formas: densidad de población, tasa de natalidad, así como en la lectura de mapas y de diversos tipos de gráficos.
4. La proporcionalidad no es importante sólo desde el punto de vista de las Ciencias, sino que también tiene una importancia fundamental desde el punto de vista del desarrollo de la inteligencia. Así la epistemología genética la considera uno de los esquemas operativos fundamentales del estadio de las operaciones formales Inhelder y Piaget, (1955). Aparte de estas consideraciones, hay un hecho evidente: el niño ya desde los primeros años de su vida, para moverse en su entorno físico, utiliza la noción de proporcionalidad en: estimar el tamaño real del objeto que está lejos o en interpretar imágenes tan cotidianas como dibujos, fotos, cine, posters, carteles, etc. Sin embargo, es un concepto que presenta muchas dificultades a nivel de aplicación y, sobre todo formulación, como lo han comprobado diversos investigadores, y seguramente la mayoría de nosotros en nuestro trabajo en la escuela y en general en nuestro entorno.
5. Ofrece a los profesores una serie de materiales de trabajo fáciles de manejar, que les permite crear un ambiente de trabajo estimulante,

situarse como observador de una situación de aprendizaje que provoque una nueva interrelación niño-adulto

Una metodología tendiente a la formación del estudiante en el nivel medio debe partir de la manipulación de materiales y trabajar en equipos para favorecer el intercambio de ideas para que los alumnos hablen, busquen esquemas, escriban y se relacionen respetuosamente durante el trabajo. Sabemos que los alumnos de 14 o 15 años tienen múltiples experiencias físicas del concepto que utilizan de forma espontánea para resolver problemas, pero que no pueden generalizar. Un trabajo reflexionado e intencionado, que busque esquemas cada vez más precisos, puede ayudar a los estudiantes reelaborar los conceptos relacionados con el razonamiento proporcional.

## **Capítulo 3**     *El concepto de proporcionalidad y de función lineal*

*El manejo de la proporcionalidad  
no solo permite poner palabras al conocimiento intuitivo,  
sino también,  
comprender un poco mejor el mundo que nos rodea.*

*Fiol*

La noción de proporcionalidad es un concepto potente con un amplio espectro de aplicabilidad y de gran importancia en la matemática, demanda una teoría matemática que empieza hablando de magnitudes y proporcionalidad de magnitudes para formalizarse después estudiando la función lineal. En este capítulo, se describe la historia y la importancia del concepto.

### **Historia<sup>17</sup>.**

De manera general, se puede decir que las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad, que surgieron como un lenguaje necesario para expresar el mundo circundante. Para describir los fenómenos, hubo necesidad de crear signos y posteriores reglas que finalmente dieron lugar al lenguaje lógico-matemático. Los sistemas de cálculo primitivos, seguramente estuvieron basados, en el uso de los

---

<sup>17</sup> Boyer, C.B. (1986)

dedos de una o las dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

### **Las matemáticas en la antigüedad.**

Las primeras referencias a matemáticas avanzadas y organizadas datan del tercer milenio antes de nuestra era en Babilonia y Egipto. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos y, sin mención de conceptos matemáticos como los axiomas o las demostraciones.

Los primeros escritos egipcios, datan del 1800 a.n.e. y muestran un sistema de numeración decimal con distintos símbolos para las sucesivas potencias de 10 (1, 10, 100...), similar al sistema utilizado por los romanos. Los números se representaban escribiendo el símbolo del 1 tantas veces como unidades tenía el número dado, el símbolo del 10 tantas veces como decenas había en el número, y así sucesivamente. Para sumar números, se sumaban por separado las unidades, las decenas, las centenas... de cada número. La multiplicación estaba basada en duplicaciones sucesivas y la división era el proceso inverso.

Los egipcios utilizaron sumas de fracciones para resolver problemas aritméticos y algebraicos elementales. En geometría encontraron las reglas correctas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de figuras como ortoedros, cilindros y, por supuesto, pirámides. Para calcular el área de un círculo, los egipcios utilizaron un cuadrado de lado  $U$  del diámetro del círculo, valor muy cercano al que se obtiene utilizando la constante "pi" ( $\pi$ ).

El sistema babilónico de numeración era bastante diferente del egipcio. En el babilónico se utilizaban tablillas con varias muescas o marcas en forma de cuña (cuneiforme); una cuña sencilla representaba al 1 y una marca en forma de flecha representaba al 10. Los números menores que 59 estaban formados por estos símbolos utilizando un

proceso aditivo, como en las matemáticas egipcias. El número 60, sin embargo, se representaba con el mismo símbolo que el 1, y a partir de ahí, el valor de un símbolo venía dado por su posición en el número completo. Por ejemplo, un número compuesto por el símbolo del 2, seguido por el del 27 y terminado con el del 10, representaba  $2 \times 60 + 27 \times 60 + 10$ . Este mismo principio fue ampliado a la representación de fracciones. Este sistema, denominado sexagesimal (base 60), resultaba tan útil como el sistema decimal (base 10).

Con el tiempo, los babilonios desarrollaron unas matemáticas más sofisticadas que les permitieron encontrar las raíces positivas de cualquier ecuación de segundo grado. Fueron incluso capaces de encontrar las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado, y resolvieron problemas más complicados utilizando el teorema de Pitágoras. Los babilonios compilaron una gran cantidad de tablas, incluyendo tablas de multiplicar y de dividir, tablas de cuadrados y tablas de interés compuesto. Además, calcularon no sólo la suma de progresiones aritméticas y de algunas geométricas, sino también de sucesiones de cuadrados.

Desde sus orígenes la proporcionalidad ha estado presente en el estudio del mundo que rodea al hombre. Así, por ejemplo, al no poder medir directamente distancias, el método consistió en buscar recursos para compararlas. La noción apareció primero en Astronomía y después en las ciencias en general, tanto a nivel de definir nuevas magnitudes como para expresar relaciones numéricas, trabajar con índices, constantes o con tasas.

La noción de proporción surgió asociada con la idea de precisar cuantitativamente la noción de semejanza, la cual bajo la forma del teorema de Thales (636 a 546 a.n.e.) se remonta a la más alta antigüedad y era de uso corriente entre los arquitectos.

La semejanza tiene sus antecedentes en la de comparar cosas de

la misma especie, de hallar sus razones en el sentido corriente del término, es decir, de querer medir sus magnitudes.

En los documentos babilónicos, egipcios y chinos, se encuentran siempre las razones y las proporciones en situaciones particulares, eventualmente llamadas *medida*. Posteriormente se trabajó en el cálculo numérico determinando el valor de algunos números irracionales especialmente relevantes o calculando distancias inaccesibles: grandes y pequeñas (por tanto, con grandes y pequeños números).

En el pasado, las matemáticas fueron consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra).

Fue hacia mediados del siglo XIX que las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica —ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos—.

Hoy en día, corresponde a las matemáticas el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades así como el de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas.

En el mundo moderno, el conocimiento matemático está avanzando más rápido que nunca, se reúnen teorías completamente distintas en teorías más completas y abstractas. No obstante, aunque la mayoría de los problemas más importantes se han resuelto, otros siguen sin solución, al tiempo que siguen apareciendo otros nuevos y

sumamente estimulantes. Incluso a las matemáticas más abstractas se les está encontrando aplicación.

## **Conceptos básicos en matemáticas deseables en los estudiantes a nivel medio**

Las matemáticas en la escuela involucran grandes ramas: La aritmética, la geometría y la geometría analítica. La más básica, la aritmética, (arte de contar) deriva del griego arithmetique, que combina dos palabras: arithmos, que significa 'número', y techne, que se refiere a un arte o habilidad. Los números usados para contar son los naturales o enteros positivos, que se obtienen al añadir 1 al número anterior en una serie sin fin.

Las distintas civilizaciones han desarrollado a lo largo de la historia diversos tipos de sistemas numéricos. Uno de los más comunes es el usado en las culturas modernas, donde los objetos se cuentan en grupos de 10. Se le denomina sistema en base 10 o decimal.

En el sistema en base 10, los enteros se representan mediante cifras cada una de las cuales representa potencias de 10. Tomemos el número 1 534 como ejemplo. Cada cifra de este número tiene su propio valor según el lugar que ocupa; estos valores son potencias de 10 crecientes hacia la izquierda. El valor de la primera cifra es en unidades ( $4 \times 1=4$ ); el de la segunda es ( $3 \times 10 =30$ ); el valor del tercer lugar es ( $5 \times 100 = 500$ ), y el valor del cuarto lugar es ( $1 \times 1\,000 = 1\,000$ ).

La aritmética, es la parte de las matemáticas que se ocupa del modo en que los números se pueden combinar mediante adición, sustracción, multiplicación y división. La palabra número se refiere también a los negativos, irracionales, algebraicos y fracciones. Las propiedades aritméticas de la suma y la multiplicación y la propiedad distributiva son las mismas que las del álgebra.

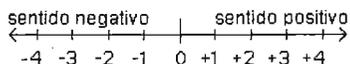
Adición. La operación aritmética de la adición (suma) se indica con el signo más (+) y es una manera de contar utilizando incrementos

mayores que 1. Por ejemplo, cuatro manzanas y cinco manzanas se pueden sumar poniéndolas juntas y contándolas a continuación de una en una hasta llegar a 9. La adición, sin embargo, hace posible calcular sumas más fácilmente. Las sumas más sencillas deben aprenderse de memoria. En aritmética, es posible sumar largas listas de números con más de una cifra si se aplican ciertas reglas que simplifican bastante la operación.

**Sustracción.** La operación aritmética de la sustracción (resta) se indica con el signo menos (-) y es la operación opuesta, o inversa, de la adición. De nuevo, se podría restar 23 de 66 contando al revés 23 veces empezando por 66 o eliminando 23 objetos de una colección de 66, hasta encontrar el resto, 43. Sin embargo, las reglas de la aritmética para la sustracción ofrecen un método más sencillo para encontrar la solución.

**Números negativos.** El cálculo de la sustracción aritmética no es difícil siempre que el sustraendo sea menor que el minuendo. Sin embargo, si el sustraendo es mayor que el minuendo, la única manera de encontrar un resultado para la resta es la introducción del concepto de números negativos.

La idea de los números negativos se comprende más fácilmente si primero se toman los números más familiares de la aritmética, los enteros positivos, y se colocan en una línea recta en orden creciente hacia el sentido positivo. Los números negativos se representan de la misma manera empezando desde 0 y creciendo en sentido contrario. La recta numérica que se muestra a continuación representa los números positivos y negativos:



Para poder trabajar adecuadamente con operaciones aritméticas que contengan números negativos, primero se ha de introducir el concepto

del valor absoluto. Dado un número cualquiera, positivo o negativo, el valor absoluto de dicho número es su valor sin el signo. Así, el valor absoluto de +5 es 5, y el valor absoluto de -5 es también 5. En notación simbólica, el valor absoluto de un número cualquiera  $a$  se representa  $|a|$  y queda definido así: el valor absoluto de  $a$  (positivo) es  $a$  y el valor absoluto de  $-a$  ( $a$  con signo negativo) también es  $a$ .

**Multiplicación.** La operación aritmética de la multiplicación se indica con el signo por ( $\times$ ). Algunas veces se utiliza un punto para indicar la multiplicación de dos o más números, y otras se utilizan paréntesis. Por ejemplo,  $3 \times 4$ ,  $3 \cdot 4$  y  $(3)(4)$  representan todos el producto de 3 por 4. La multiplicación es simplemente una suma repetida. La expresión  $3 \times 4$  significa que 3 se ha de sumar consigo mismo 4 veces, o también que 4 se ha de sumar consigo mismo 3 veces. En ambos casos, la respuesta es la misma.

**División.** La operación aritmética de la división es la operación recíproca o inversa de la multiplicación. Usando como ejemplo 12 dividido por 4, la división se indica con el signo de dividir ( $12 \div 4$ ), una línea horizontal ( $\frac{12}{4}$ ) o una raya inclinada ( $12/4$ ). La división es la operación aritmética usada para determinar el número de veces que un número dado contiene a otro. Por ejemplo, 12 contiene a 4 tres veces; por eso 12 dividido por 4, es 3.

**Teorema fundamental de la aritmética:** "Todo entero mayor que 1 y que no sea un número primo es igual al producto de un y sólo un conjunto de números primos". Este teorema fue demostrado por primera vez por el matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Dado un cierto número, por ejemplo 14, el teorema dice que se puede escribir de manera única como el producto de sus factores primos, en este caso  $14 = 2 \cdot 7$ . El menor múltiplo y el mayor divisor común a varios números se pueden calcular utilizando sus descomposiciones en factores primos.

Un número primo es cualquier entero positivo mayor que 1 y que

sólo es divisible por sí mismo y por 1. Algunos ejemplos de números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... El único número primo par es el 2. Los enteros que no son primos se denominan compuestos, y todos se pueden expresar como producto de números primos.

Mínimo común múltiplo. El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor número que puede ser dividido exactamente por todos y cada uno de ellos.

Máximo común divisor. El mayor factor común a un conjunto dado de números es su máximo común divisor (m.c.d.).

Fracciones. Los números que representan partes de un todo se denominan números racionales o fracciones. En general, las fracciones se pueden expresar como el cociente de dos números enteros  $a$  y  $b$ :

$$\frac{a \text{ (numerador)}}{b \text{ (denominador)}}$$

Existen dos tipos de fracciones, propias e impropias. Una fracción propia es aquella en la que el numerador es menor que el denominador, una fracción impropia, es aquella en que el numerador es mayor que el denominador.

Decimales. El concepto de valores posicionales se puede extender para incluir a las fracciones. En vez de escribir  $(2/10)$  dos décimos, se puede utilizar un punto decimal (.) de manera que 0.2 representa también a la fracción. Del mismo modo que las cifras a la izquierda del punto decimal representan las unidades, decenas, centenas..., aquéllas a la derecha de la coma representan los lugares de las décimas  $(1/10)$ , centésimas  $(1/100)$ , milésimas  $(1/1000)$  y así sucesivamente. Estos valores posicionales siguen siendo potencias de 10, que se escriben como  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ .

Razón: Se llama razón a la relación de comparación de dos números Reyes (1982). La comparación se puede hacer por medio de diferencia o por medio del cociente. La comparación por diferencia se

llama "razón aritmética" y a la comparación por cociente se le llama "razón geométrica"

La razón geométrica puede escribirse de la siguiente forma:

$6:3=2$ , pero también en forma de fracción, es decir, el cociente de dos números.  $6/3=2$

Se dice que la razón está formada por dos términos: el antecedente, numerador o dividendo y el consecuente, denominador o divisor, en el caso anterior, 6 es el antecedente y 3 el consecuente. Esta fracción expresa una relación por lo que tiene un carácter puramente abstracto. Las propiedades de las razones son las mismas que las de las fracciones, es decir: Una razón no se altera, si sus dos términos se multiplican o dividen por un mismo número. Así, si a la razón  $6/3$  es multiplicada por 4 (ambos términos, se tiene:  $24/12$ ) cuyos cocientes son  $= 2$ , de lo que se deduce que ambas fracciones son equivalentes.

Proporción: Se llama así a la igualdad de dos razones.

Ejemplos:  $6/3 = 24/12$       ó       $6:3::24:12$

La propiedad más importante de la proporciones es que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Geometría analítica, dentro de las matemáticas, se llama así a la rama de la geometría en la que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas. Cualquier punto del plano se puede localizar con respecto a un par de ejes perpendiculares dando las distancias del punto a cada uno de los ejes. En la figura 1, el punto A está a 1 unidad del eje vertical (y) y a 4 unidades del horizontal (x). Las coordenadas del punto A son por tanto 1 y 4, y el punto queda fijado dando las expresiones  $x = 1$ ,  $y = 4$ . Los valores positivos de x están situados a la derecha del eje y, y los negativos a la izquierda; los valores positivos de y están por encima del

eje x y los negativos por debajo. Así, el punto B de la figura 1 tiene por coordenadas  $x = 5$ ,  $y = 0$ . En un espacio tridimensional, los puntos se pueden localizar de manera similar utilizando tres ejes, el tercero de los cuales, normalmente llamado z, es perpendicular a los otros dos en el punto de intersección, también llamado origen.

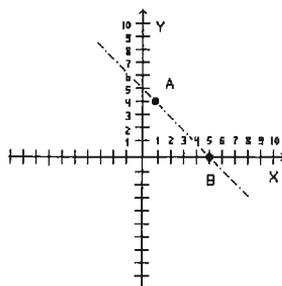


Figura 1

En general, una línea recta se puede representar siempre utilizando una ecuación lineal en dos variables:  $x$  ,  $y$  de la forma  $ax + by + c = 0$ . La geometría analítica ha tenido gran importancia en el desarrollo de las matemáticas pues ha unificado los conceptos de análisis (relaciones numéricas) y geometría (relaciones espaciales).

Los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado con la noción de función lineal. "Esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos. La función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad" Fiol (1990).

Podría sostenerse que los conceptos antes mencionados son antecedentes indispensables para nuestros estudiantes de nivel medio superior ya que han sido ampliamente estudiados por los niños y adolescentes en los diferentes tiempos de la educación básica (primaria y secundaria). Sin embargo no siempre y no todos los alumnos que ingresan al bachillerato del Colegio dominan su uso en la escuela, pero tampoco en la vida cotidiana. Los profesores debemos tomar en cuenta esta situación al momento de hacer la planeación al inicio de los cursos si pretendemos lograr buenos resultados al implementar los

programas operativos.

## **El aprendizaje del concepto de proporcionalidad**

La proporcionalidad como concepto es de suma importancia, tanto en el aspecto teórico como en el aspecto práctico, pero además es fundamental desde el punto de vista del desarrollo del conocimiento. Piaget lo consideró uno de los esquemas operatorios a los que el ser humano debe acceder para pasar de a la etapa de las operaciones formales, señalando también que su manejo es propio del estadio de las operaciones formales y que los niños la logran comprender hacia los 12 ó 13 años.

Algunos maestros e investigadores piensan que es mejor esperar a que los niños estén maduros para iniciarlos en el estudio de este concepto, otros en cambio, piensan que poner a los niños y jóvenes en contacto con los conceptos los ayuda a evolucionar intelectualmente. En lo personal, considero que no es indispensable colocarse en los extremos y bien puede, en función de las características de los grupos, adoptar posturas intermedias o mixtas.

En un primer nivel de conceptualización, lo que los niños comprenden de la variación proporcional directa entre dos conjuntos de datos es, que si en los valores de un conjunto hay aumento, hay aumento en los valores del otro conjunto, y que hay una disminución en el segundo, si el valor del primero disminuye.

En el salón de clases, la matemática, como cualquier otra área puede trabajarse desde la experiencia cotidiana y a partir de los saberes previos de los alumnos a través de situaciones problemáticas en distintos contextos y significados. En México, los libros de texto gratuitos del nivel básico, inician y tratan los contenidos relacionados con la proporcionalidad con este enfoque. Hoy en día, algunas escuelas (desafortunadamente no todas) cuentan además con materiales didácticos como regletas y geoplanos, forman equipos flexibles de

alumnos y siguen un enfoque práctico de la enseñanza. Ejemplos de las importantes actividades empleadas son:

- Iniciales de diagnóstico.
- De introducción y con propósito motivador.
- Propias de aprendizaje en las que se integran conceptos, procedimientos y actitudes.
- Para la comprensión de conceptos.
- Destinadas a que los alumnos vean la utilidad de los contenidos.
- Ejercicios de adquisición o de mejora de destrezas.
- Trabajos prácticos.
- Actividades de entretenimiento matemáticos.
- Actividades de evaluación coherentes con la metodología.

A decir de los profesores, con estas actividades se están obteniendo excelentes resultados. No obstante, el número de las escuelas que las realizan son muy escasas y lo que más comúnmente ocurre en éstas es: El punto de partida en la elaboración de las estrategias didácticas, parte de los conocimientos propios de los profesores, las propuestas de los libros de texto se siguen textualmente y sin contrastación de los ideas de los niños y además, no cuentan con materiales y recursos suficientes.

Con respecto a los estudiantes del nivel medio superior, la enseñanza de los conceptos de proporcionalidad y de densidad es, las más de las veces, expositiva.

En los últimos años, en el caso del CCH los profesores de matemáticas, física y química hemos utilizado más, textos apegados a los programas actuales para apoyar nuestra labor y aunque, esto limita la posibilidad de tener acceso a amplia bibliografía, afortunadamente para el estudio de estos conceptos, en buena parte de los textos recientes, se puede observar un enfoque actual más activo y en ellos es

posible encontrar algunos elementos e ideas didácticas diferentes a lo puramente expositivo.

Por fortuna también, en muchos de los docentes de matemáticas se manifiesta un importante esfuerzo para lograr una adaptación a las nuevas tendencias en la enseñanza como es: el uso de la computadora en la resolución de problemas, el intentar conectar cada tema con sus aspectos históricos y con la realidad y, proponer actividades utilizando distintos materiales didácticos visuales más concretos, aunque no necesariamente sea un cambio profundo (parece que hay más cerrazón que en otras áreas por reflexionar para innovar)

A pesar de los nuevos enfoques, en los textos correspondientes a la proporcionalidad se observa que varían muy poco en cuanto a la secuencia de presentación. Prácticamente, todos los libros hacen un tratamiento conjunto de las proporcionalidades numéricas y geométricas, tratándolas ambas como proporcionalidad de magnitudes; además; reflejan lo que se podría llamar una concepción estática de su enseñanza y aprendizaje, ya que presentan a las matemáticas como un cuerpo cerrado, perfectamente estructurado, en la que todos los conocimientos se basan en los anteriores, así, se pasa de los conceptos más simples a otros más generales que sólo aprecian los alumnos que ya "saben".

Seguir los textos únicamente, no favorece el desarrollo de la intuición y la creatividad. La experimentación es muy útil como paso previo a la formalización de los conceptos, en este sentido, la manipulación necesaria en todos los niveles escolares como: dibujar figuras, medirlas, recortarlas, superponerlas, observar sombras, observar proyecciones, efectuar predicciones y proponer respuestas para problemas no numéricos como proponen Gil y Martínez-Torregrosa (2002), son aspectos olvidados en la mayoría de los libros. Éstos, no sólo son muy útiles, sino que son imprescindibles si se pretende saltar cualitativamente de un aprendizaje puramente formal y verbalista a un

aprendizaje significativo.

El profesor, con base en la experiencia compartida y de acuerdo a las características de sus grupos, debiera introducir actividades más interesantes, que se adapten no sólo al proceso de aprendizaje de la diversidad de los estudiantes, sino también a los intereses concretos de un determinado grupo de clase. La conclusión es: los libros de texto son útiles, pero en ningún momento deben ser el único recurso del profesor.

Por otro lado, mi experiencia indica que la mayoría de los estudiantes del bachillerato no dominan el manejo de los conceptos relacionados con la proporcionalidad, pero con el fin de tener un mejor conocimiento de esto, se elaboró un instrumento para ser aplicado a una muestra de estudiantes de tres instituciones de nivel medio superior. El cuestionario y los datos se proporcionan en los anexos.

### **Concepto de función lineal en el nivel medio.**

El concepto de función lineal es central en la enseñanza de las matemáticas. El término, se originó del cambio que depende de otros cambios, posteriormente adquirió el significado de una expresión con valor numérico. Hoy en día se le reconoce como un subconjunto especial de un producto cartesiano. Este concepto es fundamental, pero difícil para muchos estudiantes.

"El papel de las funciones en el mundo de las matemáticas prácticamente es imposible resumir en breve. No existe rama de las matemáticas cuyo desarrollo desde 1800 pueda estudiarse sin antes haber entendido el concepto general de función" Padilla (2001)

Por lo anterior, los docentes debemos planear actividades en las que los estudiantes ejerciten los dos casos: Dada la función encontrar la gráfica y dada la gráfica encontrar la función para tener una visión global. Algunos paquetes como Derive, Maple, y Matemática pueden

apoyar a los alumnos para desarrollar de forma intuitiva y formal el entendimiento de las funciones.

La función lineal representa la estructura de la proporcionalidad y expresa un comportamiento cualitativo, es decir, sirve para visualizar los diferentes estados de variación. No obstante, la construcción mental del concepto de función lineal puede apoyarse a partir de una fase previa de experimentación de la variabilidad, para que se favorezca el proceso abstracto de relacionar mentalmente números que representan las medidas de objetos y cantidades (Fiol 1990).

La proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable, en ella están implícitos los tres aspectos que caracterizan a la noción de función: variación, dependencia y correspondencia. En este sentido se pone de manifiesto la esencia del concepto de proporcionalidad como correspondencia específica entre cantidades conservándose invariante la noción de razón (Fiol 1990).

Una metodología muy útil al interior del salón de clases es, pasar de la situación verbal a la tabla de valores y a la gráfica, como de la gráfica a la situación verbal, ya que aunque la descripción verbal favorece mucho a la formación del concepto, el análisis de todas las formas de representación contribuyen al desarrollo de habilidades en los estudiantes.

En las gráficas de las funciones lineales, se ilustra el concepto de variación, caracterizando el cambio proporcional. Todos los puntos de la gráfica de la función proporcional, están sobre una recta. La expresión de proporcionalidad es del tipo  $y=kx$  siendo  $k$ , la constante de proporcionalidad. En una correspondiente tabla de valores se tienen pares de números  $(x,y)$  de los que obtenemos puntos de la gráfica de la función en un sistema de coordenadas cartesianas y como el par de valores  $(0, 0)$  aparece en ella, la gráfica pasa por el origen. En este caso

los valores numéricos de  $y$  son directamente proporcionales a los de  $x$ .

## **La densidad. Una función lineal que se estudia en física y química**

El documento "Plan y programas de estudio. Educación básica. Secundaria" publicado por la SEP, dentro de los contenidos de Química 1 que se estudia en el segundo grado, señala dentro del tema denominado "Mediciones de materia", el estudio de la densidad. No obstante, los profesores de bachillerato encontramos que, al igual que se asegura en otras fuentes<sup>18</sup>, el concepto que poseen los estudiantes que ingresan al Colegio de Ciencias y Humanidades sobre este tema, es muy semejante al de los chicos que egresan de la Primaria.

Durante los cursos de química de primero y segundo semestres, al ser interrogados mediante preguntas escolares, muchos estudiantes reconocen haber estudiado a la densidad y emplean el término en sus explicaciones. Sin embargo, pocos son los que, de forma correcta pueden explicar el concepto con sus propias palabras. Considero que algunas razones que provocan dicha confusión están relacionadas con las experiencias de vida y con el uso del lenguaje cotidiano.

Los fenómenos observables más próximos a los estudiantes, relacionados con la densidad, corresponden a la flotabilidad de algunos materiales sobre el agua; pero cuando se les pregunta, al observar situaciones de este tipo, una buena parte de los estudiantes lo explican mencionando al peso como la causa y otros, aunque mencionan el término densidad, lo usan como sinónimo de peso o la confunden con la viscosidad.

Considero que para comprender el concepto de densidad es indispensable haber anteriormente comprendido los conceptos de masa y volumen en cuanto a ser capaces de describirlos y de medirlos explicando formas de medición y unidades empleadas.

Si los estudiantes, después de estudiar el tema de densidad logran

---

<sup>18</sup> [www.ideasprevias.cinstrumum](http://www.ideasprevias.cinstrumum)

comprender las siguientes afirmaciones: "a una determinada temperatura, la masa de un material es proporcional a su volumen", y explican las condiciones en las que la densidad de una sustancia puede variar, los estudiantes estarán habilitados para analizar otros fenómenos en los que se mencione esta relación entre las variables por lo que es importante que el estudio de la densidad los provea de esta posibilidad.

La respuesta a la pregunta ¿Qué significado físico tiene el resultado obtenido después de dividir la masa de un cuerpo entre su volumen? es la que puede darnos idea de la comprensión que se haya logrado después del estudio de la densidad.

En resumen, el aprendizaje de la densidad no debe reducirse a conocer la fórmula y resolver ejercicios numéricos, sino que es necesario que los estudiantes sepan explicar como medir la densidad de cualquier cuerpo y puedan resolver la pregunta anterior elaborando explicaciones coherentes al respecto. Si esto se logra, los estudiantes podrán explicarse y predecir situaciones de su entorno en que intervengan variables proporcionales y, no sólo resuelvan problemas matemáticos de forma mecánica. Ejemplos de situaciones de la vida cotidiana relacionados con la densidad son: el comportamiento de la leche y la crema, el agua y el hielo, el aire frío y el aire caliente, el aceite y el agua, porque flotan algunos globos y la inversión térmica entre otros; pero lo más importante es que puedan explicar lo que significa "variar de forma directamente proporcional" para que se les facilite entender en sus clases de física y química otros conceptos como son los relacionados con las leyes de los gases, la ley de Proust, la ley de Hooke y la ley de Ohm.

Finalmente, que el estudio de la densidad les provea de la capacidad de plantear preguntas para ser resueltas experimentalmente y explicarse, o proponer ellos mismos, los modelos matemáticos que representen esta variación.

En el siguiente capítulo se presenta una secuencia didáctica que se elaboró para ser aplicada durante el estudio de densidad y cuyo

propósito principal es que los estudiantes logren reflexionar sobre lo que significa la variación proporcional.

## **Capítulo 4**      *Estrategia didáctica para el estudio de la densidad*

*"La mayoría de las ideas científicas son esencialmente simples  
y pueden expresarse en un lenguaje comprensible para cualquiera."*

*Einstein*

Cómo se mencionó ya, la densidad es un ejemplo de propiedad de la materia que relaciona a la masa y al volumen. La gráfica de masa vs. volumen corresponde a una función lineal en la que la densidad es la constante de proporcionalidad.

En este capítulo se hace una revisión del concepto de densidad en el contexto de los programas de estudio de química del CCH y se presenta una secuencia didáctica para su estudio basada en los principios mencionados en el capítulo 1, a través de un trabajo que comprende la observación de un fenómeno que se presenta a los estudiantes y que los induzca a manifestar sus ideas previas, para que mediante el trabajo en equipo, a partir de una investigación experimental y bibliográfica los estudiantes puedan explicar lo ocurrido.

### **La densidad. Ejemplo de propiedad característica de las sustancias**

Materia a "todo lo que ocupa un lugar en el espacio". Al conjunto de las diferentes propiedades de la materia se les clasifica en propiedades generales y propiedades características.

La masa y el volumen son propiedades generales de la materia, pero cuando estas dos magnitudes se relacionan dividiendo masa sobre volumen, lo que se obtiene es otra magnitud llamada densidad. La densidad es una propiedad característica que se puede definir como: "la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo".

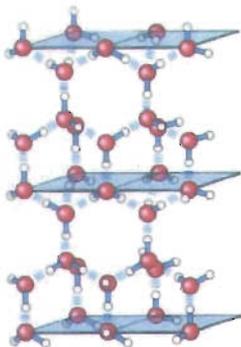
Durante el estudio del tema, los alumnos al hacer sus investigaciones encuentran en la bibliografía que el valor máximo para la densidad del agua es  $1\text{g/cm}^3$  si ésta se le determina a la temperatura de  $4^\circ\text{C}$  y lo repiten en el salón pero no lo explican (de lo anterior puede deducirse que, a cualquier otra temperatura, el valor de la densidad para el agua es menor pero para los alumnos esta información es prácticamente irrelevante).

También encuentran que: el valor de la densidad para las sustancias en general es mayor en el estado sólido y menor en el gaseoso debido a que las partículas que forman a las sustancias se encuentran un poco más cercanas en el estado sólido que en el líquido y muy pero muy distantes entre sí en el estado gaseoso (esto último parecen explicarlo bien pero sin relacionarlo con el concepto de densidad).

Si leen que el agua es una sustancia anómala, es decir, que su comportamiento es diferente al de la mayoría de las sustancias que presentan una composición semejante porque a la temperatura ambiente es líquida (debiera ser gaseosa). En determinado rango de temperatura se comporta de forma semejante a las demás en el sentido de que con la disminución de la temperatura del vapor de agua, ésta pasa al estado líquido en el que sus partículas se encuentran más cercanas, pero al seguirse enfriando (disminuyendo su temperatura) ocurre que, casi en el cambio al estado sólido se produce un distanciamiento de moléculas que al solidificarse provoca que los hielos floten sobre el agua,

Lo que ocurre es que la interacción entre las moléculas (con carácter polar) del agua líquida al enfriarse, da lugar a que una masa

determinada de ésta, ocupe menos espacio, pero al llegar a los 4°C que es la temperatura a la que el agua alcanza su mayor densidad, el arreglo molecular entre cada 6 moléculas provoca que queden espacios vacíos al interior de la estructura de modo que al solidificarse el agua, ésta ocupa un mayor espacio y por tanto la densidad disminuye.



El arreglo entre las moléculas de agua que se solidifica, propicia que entre ellas aumente el espacio que ocupan dando en lugar a un aumento del volumen total del cuerpo acuoso y por ende a una disminución en la densidad. Lo anterior provoca que el hielo flote sobre el agua.

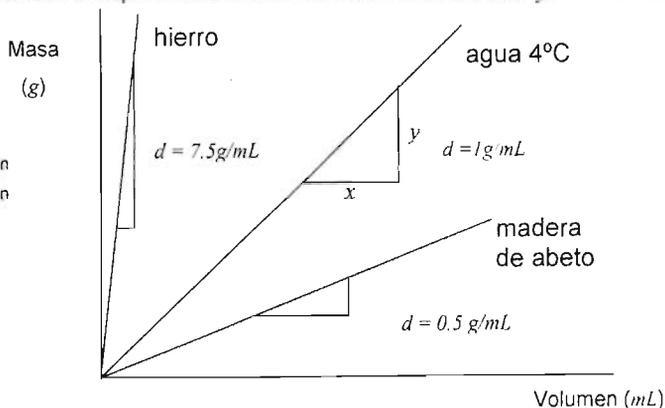
Esta característica del agua permite que las bajas temperaturas que se presentan en algunos lugares del planeta, no provoquen la solidificación completa de los lagos y que la vida acuática se conserve.

El agua a 4°C "cae" al fondo de los lagos y solo la superficie se congela.

### Gráficas de masa vs. volumen

Cuando se miden los volúmenes y las correspondientes masas de diferentes sustancias, y estos datos se grafican, se obtienen rectas que pasan por el origen. En la siguiente tabla se muestran las gráficas de las densidades del hierro, el agua (4°C) y la madera (abeto). Como se observa, las diferentes rectas corresponden a gráficas de la forma  $y=kx$ , pero la del agua, al caso específico de la función idéntica  $x=y$ .

La gráfica de la masa y volumen del agua corresponde a la función  $x=y$

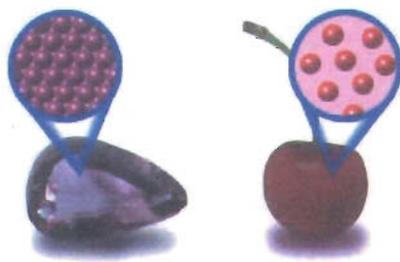


Para estudiar la densidad como un caso específico de función lineal se puede aplicar una metodología que tienda a desarrollar habilidades además de construir los conceptos.

En este trabajo se propone abordar el estudio de la densidad con una metodología que propicie el desarrollo de habilidades y el aprendizaje de los conceptos relacionados con la proporcionalidad a partir de una secuencia didáctica que tiene por nombre: "Una propiedad de la materia, que entre otras permite identificar a las sustancias".

La propuesta metodológica que se presenta a continuación, se centra en el alumno porque parte de las ideas alternativas o las concepciones de los estudiantes relacionadas con el tema, busca que el conflicto surja y se resuelva por medio de la reflexión y de la investigación bibliográfica y experimental.

La secuencia didáctica que se propone para la propuesta metodológica se aplicará a un grupo de estudiantes y posteriormente se reconocerá su validez al contrastar los resultados obtenidos en la resolución de un cuestionario por parte de este grupo y de otro grupo de alumnos que haya estudiado el tema sin la secuencia didáctica.



La densidad de un cuerpo esta relacionada con la cercanía de las partículas que lo conforman.

# *Una propiedad de la materia que, entre otras, permite identificar a las sustancias.*

Dentro del tema la materia y sus propiedades, encontramos que éstas, se clasifican en propiedades generales o extensivas y propiedades características o intensivas. Ejemplos de propiedades generales son: el volumen, el peso y la masa y, entre las propiedades características, se encuentran el punto de ebullición, el punto de fusión y la que a continuación se estudia.

## **Actividad 1 Una propiedad característica.**

### *Lo que necesitas:*

Algunos cuerpos como una canica, una figurilla de madera de unos 10cm de largo, un tapón de corcho, una moneda, una botella pequeña de polietileno vacía con tapa, otra del mismo tamaño llena con aceite comestible y tapada, otra igual, llena con una disolución concentrada de agua y sal y un recipiente con suficiente agua, en el que además quepan, todos los objetos mencionados.

### *Cómo trabajar:*

En tu libreta describe los objetos y señala las semejanzas y diferencias entre ellos. Deposita los objetos uno a uno sobre el agua, pero antes de depositarlos, anota el nombre y predice lo que ocurrirá cuando los dejes caer y anótalo.

1er cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

2º cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

3er cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

4º cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

5º cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

6º cuerpo \_\_\_\_\_ Predicción \_\_\_\_\_ Resultado \_\_\_\_\_

Explica a que se debe que hayan ocupado la posición que cada uno tomó (hipótesis).

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Elabora un plan (diseño experimental) para demostrar, experimentalmente, que tu explicación (hipótesis) es correcta, debes emplear instrumentos de medida para la demostración.

Diseño experimental:

---

---

Realiza el experimento y anota ordenadamente todas las medidas que obtengas.

Datos

---

---

Reflexiona acerca de los resultados para que obtengas conclusiones.

Conclusiones

---

---

Elabora un reporte de lo realizado.

Expón ante tus compañeros tus conclusiones.

**Lectura: ¿Cómo se mide la cantidad de las diferentes clases de materia?:**

Se sabe que la medición de la cantidad de materia se inició con fines comerciales, y no precisamente para conocer el comportamiento de los objetos que nos rodean. Desde que el ser humano empezó a intercambiar diversos objetos y sustancias tuvo necesidad de saber la cantidad con la cual comerciaba.

En el mundo de las mercaderías, surgieron sistemas de pesas y medidas que se han desarrollado a lo largo de la historia de la humanidad. Actualmente, no podríamos concebir el mundo sin las mediciones, no obstante, cada una de éstas requiere de una unidad especial.

Si revisas los paquetes de los productos que se venden en el supermercado notarás que los líquidos como el agua, la leche, el refresco y el champú se venden en litros (L) y mililitros (mL); en cambio, los productos sólidos como frutas, legumbres, carnes, sal, azúcar y cereales, se cuantifican en kilogramos (kg), y, en el caso de los medicamentos, observamos que se reportan en gramos y en miligramos (mg). No obstante, tú sabes que en la elaboración de alimentos, por rapidez o facilidad, los ingredientes también se miden en tazas o cucharadas.

**REFLEXIONA:**

¿Se le mide a la materia "la misma propiedad" cuando se usan los litros que cuando se usan los kilogramos? \_\_\_\_ Justifica tu respuesta.

---

¿Qué de los productos es lo que se mide cuando se mide en litros y qué de ellos se mide en kilogramos?

---

¿Cuáles son los instrumentos que se usan al medir si se reportan las cantidades en litros? \_\_\_\_\_

¿Con qué instrumentos se mide para reportar las cantidades en kilogramos?

¿Por qué en diversas ocasiones es útil medir en tazas o cucharadas?

Pregunta a alguno de tus abuelos, o investiga con algún "marchante" de edad avanzada ¿Qué es un cuartillo y cómo se usaba para comprar y vender en los mercados?

Comenta las respuestas con tus compañeros y el profesor.

El tamaño de los cuerpos es una propiedad que, en la vida cotidiana se emplea para comparar la cantidad de algunos productos. Un caso muy común en el que se usa esta forma de comparación es la compra y venta de líquidos como son la leche, el aceite, el agua y la gasolina, los cuales se miden en \_\_\_\_\_

**Al la extensión o el espacio ocupado por un cuerpo se le llama volumen.**

REFLEXIONA: ¿Cómo cambia el volumen al cambiar la cantidad de mercancía que se compra?

¿Cómo cambia el importe que hay que pagar al cambiar (aumentar o disminuir) la cantidad de mercancía que se compra?

Para medir el volumen o cualquier otra magnitud se usan unidades. La unidad para medir volúmenes en el SI (Sistema Internacional de unidades) es el metro cúbico ( $m^3$ ). El metro cúbico es el espacio ocupado por un cubo cuyas aristas miden un metro de longitud. Imagínate que frente a ti tienes un metro cúbico de madera señala cuánto espacio ocupa este cuerpo.

Un metro cúbico, como cualquier unidad de medida, tiene múltiplos y submúltiplos. Uno de los submúltiplos de esta unidad, muy útil para medir el volumen de los líquidos usados en la vida cotidiana, es el decímetro cúbico ( $dm^3$ ) ¿Cómo definirías al decímetro cúbico?

Si se construye un cubo cuyas caras midan 1 dm por lado, lo que se obtiene es un cuerpo cuyo volumen es de  $1 dm^3$ . Si dicho cubo es un recipiente, se dice que la capacidad de ese recipiente es de un litro.

Un litro es una unidad que también tiene múltiplos y submúltiplos. Un submúltiplo muy comúnmente empleado es el mililitro (mL) y corresponde a la milésima parte del litro.

RESPONDE LO SIGUIENTE:

¿Cuántos mililitros le caben a un litro? \_\_\_\_\_

¿Cuántos mililitros le caben a 2 L? \_\_\_\_\_

¿Cuántos mililitros le caben a 2.5 L? \_\_\_\_\_

¿Cuántos mililitros le caben a 5 L? \_\_\_\_\_

¿Cuántos mililitros le caben a 3 L? \_\_\_\_\_

REFLEXIONA:

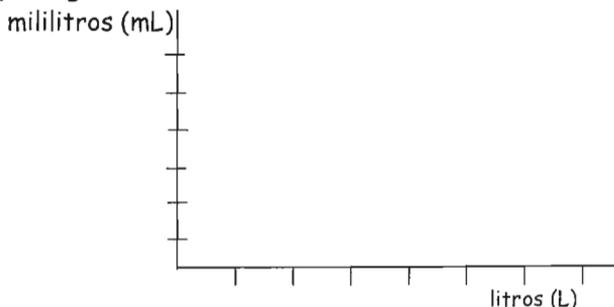
¿Cómo planteaste la solución de las preguntas anteriores?

\_\_\_\_\_  
 ¿Qué operaciones realizaste para hallar las respuestas?

\_\_\_\_\_  
 ¿Cómo cambia la cantidad de mililitros al variar la cantidad de litros?

Llena la siguiente tabla con los valores de los litros y los mililitros, en el sistema de ejes coordenados grafica los valores. Anota en los ejes las magnitudes y las unidades que registres:

Litros (L)	mililitros (mL)



(Nota: cada vez que registres datos, de ser posible ordénalos en registros como el anterior y grafícalos)

### FUNCIONES Y PROPORCIONALIDAD

En el ejercicio anterior, habrás observado que la cantidad de mililitros siempre estuvo determinada por la cantidad de litros que se indicara. Así, si se aumenta el número de litros, el número de mililitros aumenta y por el contrario, si se disminuye el número de litros, por ende, el número de mililitros también decrece. Más aún, si se duplica el número de litros, el número de mililitros también se duplica y si el número de litros se divide por la mitad, el número de los mililitros también se reduce a la mitad,

De forma general:

... si dos cantidades aumentan y disminuyen en la misma proporción, se dice que son proporcionales entre sí

Otro submúltiplo del metro cúbico es el centímetro cúbico ( $\text{cm}^3$ ),  $1 \text{ cm}^3$  es la millonésima parte de  $1 \text{ m}^3$ , pero también la milésima parte de  $1 \text{ dm}^3$ . Por otro lado, a la milésima parte de un litro se le llama mililitro (mL). Un litro (L) es equivalente a  $1 \text{ dm}^3$  y que un mililitro equivale a  $1 \text{ cm}^3$ .

**EJERCICIO:** ¿Cuántos mililitros ocupan  $1500 \text{ cm}^3$ ?

En el laboratorio escolar, la probeta graduada es el instrumento que más se emplea para medir el volumen tanto de líquidos, como el de sólidos o el de los gases.

Cuando un volumen se ha reportado en litros se concluye que, para medirlo, se usó un recipiente con determinada capacidad. No obstante, tú sabes que el volumen de los cuerpos de forma regular, se puede calcular si se conocen las medidas del largo, ancho y alto, por lo que el resultado de dicho cálculo, se reporta en  $\text{m}^3$ ,  $\text{dm}^3$  o  $\text{cm}^3$  dependiendo de las unidades en que se hayan determinado sus dimensiones.

Durante la actividad 1, al medir las masa y los volúmenes de los diferentes cuerpos, pudiste observar que un cuerpo voluminoso no necesariamente contiene una gran cantidad de materia, por lo que los cuerpos pesados no siempre se hunden en el agua debido a que la relación entre su masa y el espacio que ocupan da lugar a una propiedad que en ocasiones se confunde con la ligereza o la pesadez.

### Una mejor forma de medir cantidades. La masa

Durante la misma actividad 1, te diste cuenta que una mejor manera para cuantificar la materia es, "pesar". El instrumento que se emplea para ello es la balanza, la cual, se conoce desde hace más de 7000 años.

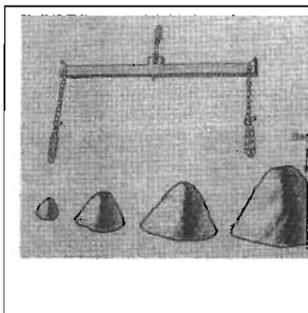
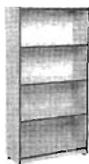


Figura 1: En una tumba egipcia fue encontrada una balanza de "brazos iguales" como la que se muestra en la figura, la distancia entre las cuerdas laterales, en las que se colgaban platillos y el punto en donde se coloca el cordón en que se cuelga la balanza, es la misma. Como pesas se usaban pesas de cobre llamadas "begas".

El funcionamiento de la balanza se basa en

la relación que existe entre la masa y el peso de los cuerpos. La balanza funciona mediante el equilibrio, la propiedad de la materia que se compara por medio de la balanza es la masa. La masa está definida como la medida de la inercia que tiene un cuerpo y la inercia, como la resistencia que tienen los cuerpos a ser movidos si están inmóviles o, a ser detenidos si es que se están moviendo.

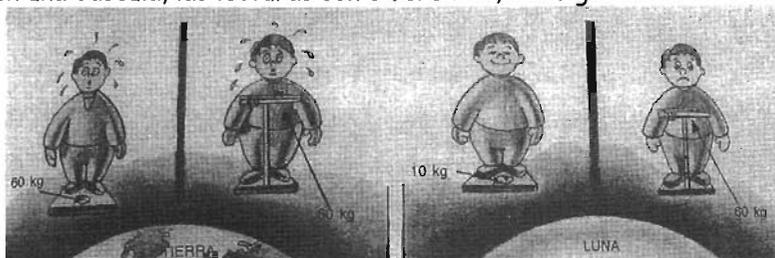


*Figura 2. La resistencia que ofrece un librero lleno a ser movido, es mayor que la resistencia que ofrece cuando no tiene libros. A mayor inercia, mayor masa y a menor inercia menor masa.*

Se sabe que, por la acción de la gravedad y debido a la masa de los cuerpos, éstos son atraídos hacia el centro de la Tierra y que los cuerpos que tienen más materia, poseen mayor peso, por lo que su masa se puede medir, al compararlo con otro de masa conocida, a través de su peso. Tu has comprobado en un sube y baja, el equilibrio y el desequilibrio cuando se comparan masas iguales y masas diferentes al ser "jalados hacia abajo" con igual o diferente fuerza.

La masa y el peso son propiedades generales de la materia. El peso se hay definido como la fuerza con la que un cuerpo "es atraído por la Tierra". El aparato usado para medir el peso en el laboratorio, es el dinamómetro, sin embargo, en la vida cotidiana son las básculas los instrumentos más empleados para medir el peso y comparar la cantidad de materia. Éstos, están constituidos por resortes que se estiran o se contraen por la acción del peso de los cuerpos.

La mejor forma de cuantificar la cantidad de materia es medir a masa ya que ésta tiene la ventaja de no cambiar al cambiar la gravedad. Lo anterior significa, que un cuerpo tendrá la misma masa en la Tierra y en la Luna, pero su peso es diferente porque la gravedad en la Tierra es mayor que en la Luna. Una balanza en la Tierra o en la Luna da la misma lectura, pero en una báscula, las lecturas son diferentes, ver figura.



*Figura 3. La masa se mide con la balanza, el peso con la báscula. Una persona, en la Tierra y en la Luna, tiene la misma masa pero diferente peso (aunque no es claro en la figura, las 4 imágenes corresponden a la misma persona).*

Es importante ahora, reconocer que el peso es una magnitud directamente proporcional a la masa (siempre que exista fuerza por la

gravedad) y que la masa es directamente proporcional a la inercia. Las tres propiedades: inercia, masa y peso son magnitudes que dependen de la cantidad de materia.

En la vida cotidiana no necesariamente se requiere diferenciar los conceptos masa y peso ya que sobre la superficie de la Tierra, que es donde se realiza el comercio, la gravedad es prácticamente la misma. La unidad que se utiliza en el Sistema Internacional de unidades para cuantificar la masa es el kilogramo (kg), por lo que éste se usa para reportar las medidas de masa aunque es común emplear múltiplos como la tonelada (1 000 kg) y los submúltiplos como el gramo (milésima parte del kilogramo) o los miligramos (milésima parte de los gramos).

### **Actividad 2 La relación entre la masa y el volumen de los cuerpos**

En equipos: Realicen la medición de la masa de 3 diferentes barras metálicas (hierro, cobre y aluminio) del mismo tamaño.

Midan el volumen de las diferentes barras.

Reflexionen sobre los resultados de las masas y los volúmenes de las barras.

Dividan masa entre volumen para cada barra.

Respondan individualmente y con una discusión en equipo: ¿Qué significa dividir? ¿Qué se obtiene al realizar cualquier división? ¿Qué resultado se obtiene al dividir (sacar la relación que existe) masa y volumen? ¿Qué unidades tienen cada resultado de las divisiones? ¿Qué significado tiene cada resultado?

*Con el fin de desarrollar el manejo de la proporcionalidad se requiere que los alumnos se percaten de que la densidad no cambia al aumentar la cantidad de sustancia debido a que la masa y el volumen son directamente proporcionales, para lo cual pueden resolver lo siguiente<sup>19</sup>:*

### **Actividad 3 ¿Cómo cambia la densidad al cambiar la cantidad de una sustancia?**

En equipos: Planteen una hipótesis que responda a la pregunta: ¿Qué resultados se obtendrán al determinar la densidad de tres cantidades distintas de agua (por ejemplo: 10, 50 y 250 mL)?

Diseñen un procedimiento para demostrar su hipótesis.

Realicen el experimento para obtener conclusiones.

Elaboren una tabla de datos y grafiquen los datos registrando el volumen en el eje de las "x" y la masa en el eje de las "y".

Empleando la gráfica elaborada calculen la masa de 200 mL de agua y el volumen que ocuparían 150 g de agua.

---

<sup>19</sup> Lo escrito en este tipo de letra son notas al profesor por lo que no están en el material para alumnos.

Al realizar el experimento y encontrar que, a pesar de colocar dos cantidades (10 mL y 250 mL) la segunda 25 veces mayor que la primera, el cociente resulta "casi igual", lo que les lleva a la reflexión sobre la razón por la que el cociente es prácticamente el mismo. Siempre hay uno o varios estudiantes que son capaces de hacer la reflexión y llegar a la conclusión correcta, la cual debe ser discutida por todo el grupo (a pesar de que haya estudiantes que aseguren que el resultado "no es idéntico"). Finalmente, es muy útil hacer siempre la pregunta: ¿Que significa el decir que la densidad del agua es 1g/mL?

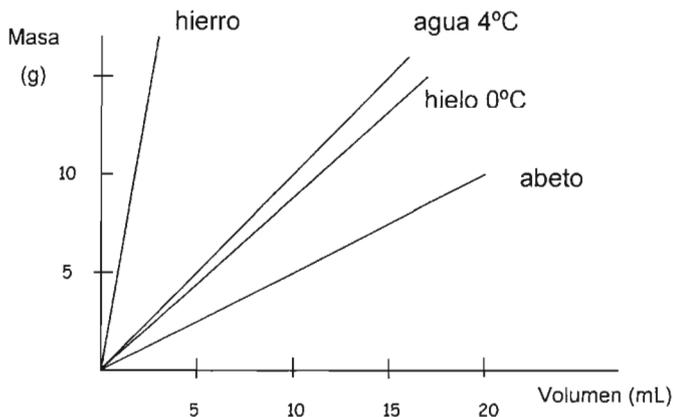
## CUESTIONARIO PARA EVALUAR LOS AVANCES EN EL MANEJO DE LOS CONCEPTOS DESPUÉS DE APLICADA LA SECUENCIA DIDÁCTICA

1. ¿Cómo se mide el volumen de los cuerpos?
2. ¿Cómo se procede para medir la masa de los cuerpos?
3. Explica con tus palabras el concepto de densidad.
4. ¿Qué significa el decir que la densidad del aluminio es 2.7g/mL?
5. Si 200 mL de una sustancia tienen una masa de 400 g ¿Cuál es la masa de 100 mL de esa sustancia?
6. Si la densidad de 100g de madera es 0.6g/cm<sup>3</sup> ¿Cuál es la densidad de 200 g de la misma madera?
7. Calcula la densidad del material de un dado que mide 1.5 cm por lado y tiene una masa de 3g
8. Consulta la siguiente tabla para responder las preguntas 9 y 10.

TABLA

<i>Sustancia</i>	<i>Densidad (g/mL a 20°C)</i>
Madera (abeto)	0.5
Magnesio	1.7
Aluminio	2.7
Mercurio	13.5
Oro	19.3

9. Calcula el volumen de 500 g de aluminio.
10. Calcula la masa de 1 litro de mercurio.
11. Analiza la gráfica y responde: ¿Qué volumen ocuparán 10 gramos de agua? ¿Qué volumen ocuparán 10 g de hierro? ¿Qué volumen ocuparán 10 g de madera de abeto?
12. ¿Qué utilidad tiene elaborar gráficas?



Esta gráfica se proyectó en acetato para hacer la discusión grupal

## CIERRE

Como parte de la evaluación en el caso del grupo 167, que fue más activo y entusiasta se solicitó que por equipos resolvieran los siguientes problemas: Determinar por medio de medidas indirectas, la masa y el volumen de: el vidrio de uno de los edificios; de los tabiques de un edificio; de la madera de uno de los árboles; de la "tierra" de una de las jardineras, de la "piedra" de alguna de las bardas y la del agua del tinaco de una de las casas de los estudiantes.

Cuatro de los cinco equipos emplearon el concepto de densidad con suficiente dominio, solo uno (tabiques) lo resolvió por imitación del trabajo realizado por los otros grupos.

Se evaluó: Originalidad y eficacia del diseño empleado, el manejo adecuado y el análisis de los datos y de los resultados reportados y la claridad de la exposición que hicieron frente al grupo.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

## **Capítulo 5**

### *Aplicación de la estrategia y Resultados obtenidos*

En este capítulo se describe la metodología y el resultado de la investigación efectuada en el aula con estudiantes de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Azcapotzalco.

Para realizar la investigación fue necesario:

- Consultar la página de ideas previas del Centro de instrumentos UNAM.
- Elaborar una secuencia didáctica para mejorar el aprendizaje de la proporcionalidad con el estudio de la densidad (se presentó en el capítulo anterior).
- Elaborar un cuestionario de evaluación final.
- Aplicar la secuencia durante el estudio del tema en el curso de Química I del semestre 2005-1 con 25 estudiantes del grupo 158 A y con 25 estudiantes del grupo 167 A.

- Aplicar el cuestionario de evaluación a los estudiantes de los dos grupos académicos 158 y 167 completos (El A que estudiaron el tema con el paquete didáctico el B que fue grupo testigo).

Las preguntas del cuestionario de evaluación son las siguientes:

1. Menciona dos formas en que se puede medir la cantidad de un líquido que se quiere comprar como agua o leche.
2. Menciona dos formas en que se puede medir un cuerpo sólido como por ejemplo un cubo de madera.
3. ¿Con qué instrumentos se puede medir el tamaño de un cuerpo?
4. Explica porque el hielo flota en el agua.
5. ¿A qué se refieren las palabras "densidad de una sustancia"?
6. ¿Qué pasa con el volumen de un material si su masa se aumenta al doble?
7. ¿Qué significa decir que la densidad del aluminio es de  $2.7\text{g/cm}^3$ ?
8. ¿Qué ocurre con la densidad de un cuerpo si se aumenta al doble su masa?
9. Si la densidad de un litro de agua es 1, cuál es la densidad de dos litros de agua?
10. ¿Qué significa decir que la masa varía directamente proporcional con el volumen?
11. ¿Qué volumen ocupa una barra metálica 10g si su densidad es  $2.5\text{g/cm}^3$ ?

A continuación se describen los resultados obtenidos después de la aplicación del cuestionario de evaluación

Para realizar el conteo, las respuestas se analizaron y se agruparon según las afirmaciones que consideré iguales o equivalentes.

En las siguientes tablas se muestran los porcentajes redondeados correspondientes a las respuestas dadas para cada una de las preguntas. La primera, corresponde a las respuestas de los estudiantes que no trabajaron con el paquete didáctico y la segunda a los estudiantes que si lo trabajaron.

PRIMER TABLA

**1. Menciona dos formas en que se puede medir la cantidad de un líquido que se quiere comprar como agua o leche.**

<b>%</b>	<b>Respuestas</b>
<b>3</b>	Pesar y medir el volumen
<b>14</b>	medir (sin especificar la magnitud) y pesar
<b>71</b>	Usando dos instrumentos graduados
<b>11</b>	Mediante formulas
<b>1</b>	No sé

**2. Menciona dos formas en que se puede medir un cuerpo sólido como por ejemplo un cubo de madera.**

<b>%</b>	<b>Respuestas</b>
<b>20</b>	Pesar y medir el volumen
<b>22</b>	Pesar y medir (sin especificar la magnitud)
<b>15</b>	Usando una regla y una báscula
<b>24</b>	Usando una báscula o balanza e instrumentos graduados
<b>17</b>	Pesar y mediante formulas
<b>2</b>	No sé

**3. ¿Con qué instrumentos se puede medir el tamaño de un cuerpo?**

<b>%</b>	<b>Respuestas</b>
<b>27</b>	Regla, e instrumentos graduados o de capacidad conocida
<b>49</b>	Instrumentos graduados y balanza o báscula
<b>16</b>	Regla, balanza o báscula e instrumentos graduados o de capacidad conocida
<b>6</b>	Regla y balanza o báscula
<b>2</b>	No sé

**4. Explica porque el hielo flota en el agua.**

%	Respuestas
38	Porque es menos denso
39	Porque es más ligero
10	Porque es más denso
13	Otros

**5. ¿A qué se refieren las palabras “densidad de una sustancia”?**

%	Respuestas
20	A la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo
22	A lo espeso o viscoso
34	A la pesadez
12	Al espacio ocupado por la sustancia o al lugar que ocupan los gramos.
9	A los gramos de la sustancia
3	Otros

**6. ¿Qué pasa con el volumen de un material si su masa se aumenta al doble?**

%	Respuestas
60	Se duplica
27	Aumenta
9	Nada
4	Otros

**7. ¿Qué significa decir que la densidad del aluminio es de 2.7 g/cm<sup>3</sup>?**

%	Respuestas
16	Que hay 2.7 gramos en cada centímetro cúbico
22	Es lo que pesa
14	Es el volumen que tiene
17	Esa es su densidad o, es lo que resulta de la fórmula
28	No sé o, no respondieron
3	Otros

**8. ¿Qué ocurre con la densidad de un cuerpo si se aumenta al doble su masa?**

%	Respuestas
18	La densidad no cambia
56	Aumenta
19	Disminuye
7	No sé

**9. Si la densidad de un litro de agua es 1, cuál es la densidad de dos litros de agua?**

%	Respuestas
29	La densidad es la misma
30	Es la misma por que ya está dada en los libros
36	La densidad es 2
5	Otros

**10. ¿Qué significa decir que la masa varía directamente proporcional con el volumen?**

%	Respuestas
33	Que al aumentar la masa, el volumen aumenta
37	Que cambian en la misma cantidad
18	No sé
12	Otros

**11. ¿Qué volumen ocupa una barra metálica de 10g si su densidad es 2.5 g/cm<sup>3</sup>?**

%	Respuestas
6	4 cm <sup>3</sup>
13	Diferentes cantidades con unidades de volumen 25 cm <sup>3</sup>
9	Diferentes cantidades con unidades de densidad
8	Diferentes cantidades con unidades de masa
54	No sé o no contestaron
10	Otros

## SEGUNDA TABLA

La siguiente tabla muestra los porcentajes de las respuestas dadas por los estudiantes de los grupos 158 A y 167 A de Química I que estudiaron el tema de densidad apoyados con el paquete didáctico.

### **1. Menciona dos formas en que se puede medir la cantidad de un líquido que se quiere comprar como agua o leche.**

<i>%</i>	<i>Respuestas</i>
39	Pesar y medir el volumen
10	medir (sin especificar la magnitud) y pesar
41	Usando dos instrumentos graduados
9	Mediante formulas
1	No sé

### **2. Menciona dos formas en que se puede medir un cuerpo sólido como por ejemplo un cubo de madera.**

<i>%</i>	<i>Respuestas</i>
44	Pesar y medir el volumen
12	Pesar y medir (sin especificar la magnitud)
5	Usando una regla y una báscula
32	Usando una báscula o balanza e instrumentos graduados
6	Pesar y mediante formulas
1	No sé

### **3. ¿Con qué instrumentos se puede medir el tamaño de un cuerpo?**

<i>%</i>	<i>Respuestas</i>
57	Regla, e instrumentos graduados o de capacidad conocida
26	Instrumentos graduados y balanza o báscula
12	Regla, balanza o báscula e instrumentos graduados o de capacidad conocida
4	Regla y balanza o báscula
1	No sé

**4. Explica porque el hielo flota en el agua.**

%	Respuestas
62	Porque es menos denso
29	Porque es más ligero
6	Porque es más denso
3	Otros

**5. ¿A qué se refieren las palabras “densidad de una sustancia”?**

%	Respuestas
35	A la relación entre la masa y el volumen de un cuerpo
19	A lo espeso o viscoso
25	A la pesadez
8	Al espacio ocupado por la sustancia o al lugar que ocupan los gramos
9	A los gramos de la sustancia
4	Otros

**6. ¿Qué pasa con el volumen de un material si su masa se aumenta al doble?**

%	Respuestas
69	Se duplica
27	Aumenta
4	Nada

**7. ¿Qué significa decir que la densidad del aluminio es de  $2.7 \text{ g/cm}^3$ ?**

%	Respuestas
44	Que hay 2.7 gramos en cada centímetro cúbico
18	Es lo que pesa
7	Es el volumen que tiene
16	Esa es su densidad o, es lo que resulta de la fórmula
12	No sé o, no respondieron
3	Otros

**8. ¿Qué ocurre con la densidad de un cuerpo si su masa se aumenta al doble?**

%	Respuestas
49	La densidad no cambia
25	Aumenta
19	Disminuye
7	No sé

**9. Si la densidad de un litro de agua es 1, ¿Cuál es la densidad de dos litros de agua?**

%	Respuestas
57	La densidad es la misma
22	Es la misma por que ya está dada en los libros
18	La densidad es 2
3	Otros

**10. ¿Qué significa decir que la masa varía en forma directamente proporcional con el volumen?**

%	Respuestas
67	Que al aumentar la masa, el volumen aumenta
15	Que cambian en la misma cantidad
9	No sé
9	Otros

**11. ¿Qué volumen ocupa una barra metálica de 10g si su densidad es 2.5 g/cm<sup>3</sup>?**

%	Respuestas
39	4 cm <sup>3</sup>
31	Diferentes cantidades con unidades de volumen
3	Diferentes cantidades con unidades de densidad
5	Diferentes cantidades con unidades de masa
14	No sé o no contestaron
8	Otros

Los resultados muestran que el empleo del paquete mejoró el aprendizaje del concepto de densidad y permitió una mejor interpretación de las gráficas. Sin embargo, hay que aclarar que aunque el programa de Química I del PEA incluía en los contenidos a la densidad (sin que necesariamente se graficara), en el programa "revisado" del PEA que se aplicó por vez primera en el semestre 2005-1 no se incluye como tal el tema de propiedades de la materia y por tanto, tampoco aparece explícitamente el concepto de densidad, no obstante, el grupo estudió el tema de forma muy semejante a como se había tratado en semestres anteriores.

Considero, con base en mi experiencia a partir de incursionar en esta nueva forma de trabajo que lo más importante de cada actividad realizada en el salón es la discusión que se realice después de cada una de ellas. El ambiente de trabajo en estas sesiones de discusión final, serán en las que los docentes podamos brindar la mayor apertura.

## **Conclusiones**

*“Si los profesores desconocen  
en qué consiste el aprendizaje,  
tienen las mismas posibilidades  
de favorecerlo que de obstaculizarlo”.*

*Claxton<sup>20</sup>*

En la discusión acerca de cómo mejorar la enseñanza que hoy en día ocupa un lugar predominante en el mundo actual, es necesaria la participación de todos los actores que intervienen en la docencia en la búsqueda de las soluciones a la problemática educativa.

Al analizar lo que expresaron los alumnos en las entrevistas, los cuestionarios y las estrategias realizadas; pude inferir algunas de las ideas de los estudiantes respecto a los conceptos relacionados con la proporcionalidad, me indica que los jóvenes manejan en su lenguaje conceptos escolares, pero expresan contradicciones y confusiones. Después de realizar este trabajo, concuerdo con lo que han reportado Ana Isabel León<sup>21</sup>, Pilar Segarra<sup>22</sup>, Ignacio Pozo<sup>23</sup> y Rosalind Driver,<sup>24</sup> acerca de que algunos de los esquemas de los alumnos de

---

<sup>20</sup> Tomado de Pozo (1989)

<sup>21</sup> León Ana Isabel Profesora Investigadora de la Fundación SENTE para la formación del maestro.

<sup>22</sup> Segarra María del Pilar Profesora – Investigadora de la Facultad de Ciencias

<sup>23</sup> Pozo José, Ignacio Director del Departamento de Psicología Básica de la Facultad de Psicología de la Universidad Autónoma de Madrid, campus de Canto-Blanco

<sup>24</sup> Driver Rosalind (1941-1997). Centro para los estudios en la educación de la ciencia y de las matemáticas. Universidad de Leeds. Reino Unido.

preparatoria resultan similares a los de los niños de primaria, solamente, que están enmascarados por una terminología aprendida de memoria y descontextualizada.

Con respecto a las respuestas de los estudiantes me di cuenta, de que efectivamente, "no es posible tomar como una concepción cualquier respuesta de los alumnos independientemente de las condiciones en las que ésta se produce" como aseguran los especialistas antes citados. Sin embargo, No es que los alumnos carezcan de capacidad para aprender y que el conjunto de los maestros no pongan empeño en la enseñanza, hay que reconocer que el problema es mucho más complejo, no obstante, el papel conciente del docente toma relevancia para encontrar soluciones eficaces debido a que si desconocemos los factores involucrados en el proceso a través del cual el ser humano llega al conocimiento, nuestra participación no sólo no contribuirá a la solución a los problemas que existen en educación, sino que se puede convertir en un serio obstáculo.

La presente investigación me permitió corroborar que para realizar cambios que se manifiesten en el salón de clase, no es suficiente con tomar cursos de actualización y superación académica, sino que es imprescindible una permanente reflexión entre pares que conlleve a:

- Definir el tipo de formación que se quiere lograr.
- Hacernos conscientes de nuestras concepciones acerca del aprendizaje.
- Concretar un programa que no pierda de vista el enfoque general para propiciar una formación integral.
- Conocer las características de los alumnos a los que se dirige, indagar cuales son sus intereses y en lo posible su nivel de desarrollo intelectual.
- Generar nuevas estrategias de enseñanza, llevarlas a la práctica

y evaluarlas para cuestionar si realmente los alumnos aprenden con ellas.

Hoy en día la escuela requiere una renovación y por ello, los docentes debemos dejar de ser "transmisores de conocimientos y repetidores de técnicas que no comprendamos", ya que la nuestra, es una de las labores de mayor nivel y el alumno debe ser siempre el centro de la enseñanza en todos los aspectos para evitar que haya rechazo y falta de interés por adquirir conocimientos y así, disminuir la posibilidad del fracaso escolar. Estoy convencida de que en el aula, el conocimiento se puede construir a través de un proceso de interacción entre los alumnos, los contenidos y el maestro, por lo que es importante conocer como éstos factores se interrelacionan.

La presente investigación me permitió reconocer que una metodología de investigación centrada en el estudiante es importante porque hace a los estudiantes concientes de sus concepciones y de sus dificultades, los obliga a fundamentar sus ideas y los estimula a diseñar experimentos y a buscar información bibliográfica para comprobar sus hipótesis y/o sustituirlas por otras.

Encuentro en el enfoque constructivista una alternativa que promueve en los estudiantes aprendizajes significativos, despierta su interés por el aprendizaje y logra un cambio de actitud en relación con el aprendizaje.

A manera de síntesis anexo los diez mandamientos del maestro que propone Ignacio Pozo en su libro "*aprendices y maestros*" para que los profesores hagamos una reflexión continua y permanente sobre ellos.

El papel que juega el docente en la educación y especialmente en el enfoque constructivista requiere además de una formación teórica, un entrenamiento dentro del aula y desde luego, no es suficiente haber comprendido los fundamentos teóricos de este enfoque.

El avance personal que conseguí al poner en práctica mi propuesta significó una oportunidad para desarrollar habilidades como son: escuchar pacientemente a los alumnos; inferir las concepciones que hay detrás de lo que dicen y encontrar las contradicciones entre las ideas expuestas para replantear la problemática desde la lógica del estudiante, etcétera. El material elaborado y aplicado, es de gran importancia para mí porque será utilidad en lo futuro para la planeación de otras secuencias didácticas que den continuidad a la estrategia.

Reconozco que cada vez me resulta menos difícil no sugerirles o darles las repuestas que espero de ellos, así como, mostrar la misma aceptación a sus afirmaciones cuando contestan de acuerdo a lo deseado como a lo no deseado. Otro problema más al que me enfrenté es que, no es fácil sacar a los estudiantes del discurso escolar para que pongan en juego sus concepciones. Sin embargo, a pesar de los problemas encontrados en la aplicación de esta metodología, las posibilidades de lograr que los alumnos realmente aprendan y se interesen en el conocimiento científico me alienta a continuar en el la búsqueda de la mejor aplicación de este enfoque, ya que por el momento es la mejor alternativa que he encontrado para realizar mi labor y obtener mejores resultados en las calificaciones de los estudiantes.

Al mismo tiempo, pude corroborar que la discusión con los alumnos acerca de los propósitos de una sesión (o de un curso), el programa de trabajo y la forma de evaluación, contribuyen a incrementar el sentido de responsabilidad en los estudiantes y el compromiso con su formación y creación de una conciencia crítica. Las discusiones en equipos y grupales contribuyen a que el alumno se haga consciente de sus ideas, se cuestione, conteste y busque argumentos para sustentar sus respuestas y contrastarlas con las de sus compañeros.

Después de la investigación realizada puedo asegurar que

cuando los estudiantes se enfrentan a fenómenos que observan y explican de acuerdo a sus ideas previas, para posteriormente someter sus hipótesis a comprobación con planteamientos en los que contrasten sus resultados con los de sus compañeros, con lo reportado en la bibliografía y con el trabajo experimental, se motivan, investigan y son capaces por llegar a las respuestas correctas sintiéndose más plenos y felices.

## ***Bibliografía***

- Ausubel, P.D. (1980) *Psicología de la Educación, Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Ausubel, P.D., Novak, D.J. Y Hanesian, H. (1998). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, México: Trillas.
- Baquero, R. (1995) *Vygotsky y el aprendizaje escolar*, Madrid: AIQUE
- Boyer, C.B. (1986) *Historia de la matemática*, Madrid: Alianza
- Briggs L. J. (1970), *Handbook of procedures for the design of instruction*, s/n Pittsburgh: American Institute for Research
- Brunner, J. (1973) *El ir más allá de la información dada*, Nueva York: Norton.
- Cataño, S., Cervantes G. Valdés O. (s/f) *Los conceptos básicos para Química 1 y 2 y las concepciones de los alumnos: Punto de partida para la formación del alumno*, México: Inédito
- Driver, R. (1992) *Ideas Científicas en la infancia y en la adolescencia*, Madrid: Morata
- Gagné, R. (1970) *Las condiciones del aprendizaje*, Madrid: Aguilar
- Gil, D., Martínez-Torregrosa, J. (1999) *¿Cómo evaluar si se "hace" ciencia en el aula?*, Alambique N. 20 p 17-27
- Giordan, A., Vecchi G. (1999) *Los orígenes del saber*, Sevilla: Díada.
- Feuerstein, R. (1992) *Programa de Enriquecimiento Instrumental*, Madrid: Bruño.
- Fiol, M. M.L. (1990) *Proporcionalidad directa. La forma y el número*, Matemáticas: Cultura y Aprendizaje # 20 Madrid: Síntesis
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1958) *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basic Books
- Klausmeier, H. J. y Goodwin, W. (1993). *Habilidades humanas y aprendizaje. Psicología educativa*, México: Harla
- Lawrenz, F., et al (1992) *Research Matters to the Science Teacher*. Manhattan, KS: National Association of research in Science Teaching
- León A.I. y Venegas, N. (1998) *El maestro: Dificultades para modificar su papel en la enseñanza de las ciencias naturales*, México: CINESTAV
- Martínez-Torregrosa, J., Osuna, L., Verdú, R (2002) *Enseñar y aprender en una estructura problematizada*. Alambique vol. 34, pp. 47-55,
- Monereo, C., Pozo, J.I. (2001) *¿En que siglo vive la escuela? El reto de la nueva Cultura educativa*, Cuadernos de Pedagogía, N. 298
- Monereo, C. (1996) *Las estrategias de aprendizaje. Perspectiva escolar*, N. 206

- Morán, O. P. (1990) *Instrumentación didáctica*, en Fundamentación didáctica. México
- Padilla., S.A. (2001) *Tesis de licenciatura*, UNAM. México
- Piaget, J. (1984) *La representación del mundo en el niño*, Madrid: Morata
- Piaget, J. (1999) *Psicología y Pedagogía*, México: Ariel
- Pozo, J.I. (1994) *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Madrid: Morata
- Pozo, M. J.I. (1996) *Aprendices y maestros*, México: Alianza Editorial Mexicana.
- Pozo, J.I., Gómez M., Limón M. Sanz A. (1991) *Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia. Las ideas de los adolescentes sobre química*, Madrid: Ministerio de Educación y ciencia CIDE
- Prieto, S. M. D. (1987) *El potencial del Aprendizaje: Un modelo y un sistema aplicado a la educación*, ICE Universidad de Murcia
- Reyes, J. (1982) *Un maestro en el hogar*, México: Mudar
- Segarra, P., (1993) *Esquemas alternativos. enfoque general*, México: inédito.
- Varela, F (1990) *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas. Cartografía de las ideas actuales*. Barcelona: Gedisa.
- Vygotski L.S. (1996) *Pensamiento y lenguaje*, México: Quinto Sol
- Wollman,W. y Lowson, A. (1977) *Teaching the procedure of controlled experimentation: A Piagetian Approach Science Education* 61, 57-70

#### Internet

<http://enciclopedia.us.es>

<http://ideasprevias.cinstrum.unam.mx:2048/preconceptos.htm>

[www.metabase.net/docs/upan/01204.html](http://www.metabase.net/docs/upan/01204.html)

## ANEXO

Los diez mandamientos del maestro que propone Ignacio Pozo en su libro *aprendices y maestros*<sup>1</sup> para que los profesores hagan una reflexión sobre ellos.

*I Partirás de los intereses y motivos de los aprendices*

*II Partirás de los conocimientos previos de los aprendices para cambiarlos.*

*III Dosificarás la cantidad de información nueva presentada en cada tarea.*

*IV Harás que condensen y automaticen los conocimientos básicos que sean necesarios para futuros aprendizajes.*

*V Diversificarás las tareas y los escenarios de aprendizaje para un mismo contenido.*

*VI Diseñarás situaciones de aprendizaje en función de los contextos y tareas en los que los aprendices deban recuperar lo aprendido.*

*VII Organizarás y conectarás unos aprendizajes con otros, de forma que el aprendiz perciba las relaciones entre ellos.*

*VIII Promoverás en los aprendices la reflexión sobre sus conocimientos, ayudándoles a resolver los conflictos cognitivos que se les planteen.*

*IX Planearás problemas o tareas abiertas y fomentará la cooperación de los aprendices para su resolución.*

*X Instruirás a los aprendices en la planificación y organización de su propio aprendizaje utilizando las estrategias adecuadas.*

*Estos diez mandamientos se encierran en dos*

- 1. Reflexionarás sobre las dificultades a que se enfrentan tus aprendices y buscarás modos de ayudarles a superarlas.*
- 2. Transferirás paulatinamente a los aprendices el control de su aprendizaje sabiendo que la meta última de todo maestro es volverse innecesario".*

---

<sup>1</sup> Pozo I. *aprendices y maestros*, Ed. Morata, Madrid, 1990.