Análisis lógico del flujo de información en el juego de dominó

Fernando Raymundo Velázquez Quesada

Noviembre, 2005

Universidad Nacional Autónoma de México
Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Computación) presenta:

Fernando Raymundo Velázquez Quesada
Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional Autónoma de México

Tesis dirigida por:

Dr. Francisco Hernández Quiroz
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

A mis papas, Fernando y Martha, Martha y Fernando.

Realmente no tengo palabras (y creo que nunca las tendré) para agradecerles todo lo que han hecho por mi. Mucho menos tengo palabras (y tampoco las tendré) para decirles todo lo que significan para mi. Gracias por ser mis padres, gracias por ayudarme siempre que los necesité, gracias por ayudarme a ser una mejor persona, gracias por ser parte de mi vida, pero sobre todo gracias, muchas gracias por ser mis amigos. Lo mucho o poco valioso que hay en mi se lo debo a ustedes. Los quiero mas (mucho, pero mucho mas) de lo que algún día se lleguen a imaginar.

Fernando Raymundo Velázquez Quesada
Noviembre, 2005

Resumen

Una de las metas de la lógica en ciencias de la computación es desarrollar lenguajes que nos permitan modelar diversas situaciones en las que nos podemos encontrar, de tal manera que nos sea posible razonar acerca de ellas. Razonar acerca de alguna situación nos permite entenderla mejor.

Diversos tipos de lógicas se utilizan en diversas situaciones: las lógicas proposicional y de predicados constituyen el lenguaje formal en el que descansan las matemáticas mientras que la lógica de Hoare y la lógica dinámica se utilizan en la verificación de sistemas de cómputo. El presente trabajo forma parte de aquellos que pretenden incorporar el uso de la lógica al análisis de situaciones de la vida real.

Mediante el uso de herramientas lógicas estudiamos la manera en que fluye la información en las situaciones de competencia comúnmente llamadas juegos. Nos enfocamos en un juego en particular: el dominó. Nuestra meta es construir un lenguaje lógico que nos permita describir, desde el punto de vista de un observador externo, situaciones posibles durante una partida, el conocimiento que los jugadores tienen acerca de estas situaciones y la forma en que estas situaciones y este conocimiento son modificados como consecuencia de las acciones que se realizan durante una partida. En el capítulo 1 se describen tanto algunas ideas básicas de teoría de juegos como diversos tipos de conocimiento que aparecen en una situación de competencia. También se describe el juego del dominó, sus reglas y trabajos anteriores desarrollados sobre él.

Este trabajo utiliza herramientas ya conocidas como la lógica epistémica y su modelo de mundos posibles, los cuales nos permiten expresar situaciones y el conocimiento de los jugadores. Este lenguaje y este modelo son descritos en el capítulo 2. A fin de expresar cómo afectan las acciones la situación de la partida y el conocimiento de los jugadores, es necesario añadir al lenguaje nuevas reglas que permitan construir fórmulas adecuadas. También es necesario definir la forma en que estas nuevas fórmulas serán interpretadas. En el capítulo 3 se describen algunos trabajos que tratan con la forma en que el conocimiento de un conjunto de agentes se modifica a consecuencia de acciones, y presentamos nuestra propia versión: una lógica dinámica epistémica que es útil para nuestros propósitos.

El lenguaje lógico dinámico epistémico para el dominó, llamado $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, se desarrolla en el capítulo 4. Presentamos primero un lenguaje epistémico y construimos su modelo semántico. Posteriormente, en base al lenguaje

dinámico epistémico general presentado en el capítulo 3, construimos el lenguaje dinámico epistémico completo. Definimos también la interpretación semántica de las acciones en este lenguaje. En el capítulo 5 se revisan las propiedades de decidibilidad del lenguaje, y en el capítulo 6 se presentan ejemplos tanto de su poder expresivo como de la forma en que evoluciona durante una partida el modelo en el cual son interpretadas las fórmulas. Es particularmente interesante el tercer ejemplo, en el cual se describe la forma en que evoluciona este modelo desde el punto de vista de un jugador en particular. Este ejemplo nos lleva a definir una relación para poder expresar cuando una fórmula en el lenguaje es verdadera, desde el punto de vista de un jugador. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones de este trabajo así como aspectos que consideramos sería interesante desarrollar a futuro.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a mis padres, a toda mi familia y a todos mis amigos por todos los momentos compartidos durante estos últimos dos años y medio. Sin su ayuda y apoyo, este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco a mi director de tesis, el Dr. Francisco Hernández Quiroz, por sus ideas, sus comentarios, pero sobre todo por ser mi guía durante el desarrollo del presente trabajo.

Agradezco también a mis sinodales, los doctores Axel A. Barceló Aspeitia, David A. Rosenblueth Laguette, Zbigniew Oziewicz y la doctora Atocha Aliseda Llera por dedicar parte de su valioso tiempo a leer este trabajo, y por las valiosas aportaciones que hicieron con sus comentarios. Todos ellos contribuyeron a hacer del presente trabajo un trabajo mejor.

Fernando Raymundo Velázquez Quesada
Noviembre, 2005

Capítulo 1

Introducción

1.1. Juegos, lógica y conocimiento

El tener información significa tener conocimiento y, en muchas situaciones, entre mayor información (mayor conocimiento) tenemos, mayor es la posibilidad de tener éxito en las tareas que emprendamos.

En prácticamente cualquier actividad humana la información nos da ventajas. En el mundo de la economía, la información nos da la posibilidad de escoger las inversiones que nos darán mayores ganancias y rechazar aquellas que nos ocasionarán pérdidas. Para las personas que hacen ciencia, el tener información acerca del trabajo desarrollado por otras personas en un área específica les permite atacar un problema desde el ángulo más adecuado. Inclusive en el mundo deportivo, un bateador que conoce los lanzamientos favoritos del lanzador tiene mayores probabilidades de dar un hit, así como un portero que conoce cómo tira los penales cierto jugador, tiene mayores probabilidades de detenerlos.

La información que poseemos no se comporta de manera estática. No es algo que se obtenga de una vez y para siempre. Constantemente conocemos cosas nuevas y reafirmamos o descartamos cosas viejas. Lo que damos hoy como un hecho puede ser rechazado mañana en presencia de nuevos datos. Aún más, la información no solo la obtenemos o desechamos al escuchar o leer algún hecho. A partir de estos últimos generalmente hacemos inferencias que nos permiten deducir más información.

En situaciones de competencia, la información puede decidir al vencedor. Entre mayor información se tenga, podemos tomar mejores decisiones para enfrentar lo que hagan nuestros rivales o para elegir lo que haremos nosotros. Los llamados juegos son las formas más comunes que podemos encontrar de situaciones de competencia. Con ellos podemos modelar competencia entre países, políticos, equipos deportivos o individuos, entre otros. En ellos, bajo un conjunto de reglas bien definidas, los jugadores compiten por llegar cada quien a su meta. En los casos en que la meta de un jugador no sea estrictamente opuesta a la meta de otro, se pueden establecer equilibrios que acercan lo más posible a ambos a sus respectivos fines. Cuando la meta de un jugador es estrictamente opuesta a la de otro, no es posible alcanzar este equilibrio, y entonces aquel que lleve a cabo una mejor estrategia será el que obtenga la mayor ganancia. Aquí, una vez más, la información (en este caso, de la situación de aquellos con los cuales competimos) es determinante para escoger la mejor estrategia y derrotar al adversario.

La teoría matemática de juegos, presentada por John von Neumann y Oskar Morgenstern por primera vez en [vNM44], tiene como propósito el análisis de una amplia variedad de situaciones en las cuales hay una interacción competitiva entre agentes. Entre estas se incluyen la mayoría de los comúnmente llamados juegos como ajedrez, poker, béisbol, etc. pero también se incluyen situaciones de competencia entre compañías, fuerzas militares y naciones. De acuerdo a P. Morris en [Mor94], este análisis tiene dos metas principales:

1. El estudio del juego para entender por qué los que participan en estas situaciones se comportan como lo hacen.

2. El estudio del juego para poder dar a los participantes una forma de juego que garantice una mayor ganancia, es decir, una estrategia que diga cuál es la *mejor* manera de jugar.

La teoría de juegos clasifica éstos según algunas características tales como:

- La información que tienen los jugadores acerca del juego. Si los jugadores no están completamente informados acerca de las condiciones para ganar en el juego o desconocen cuáles son las acciones que se pueden realizar, el juego es llamado *juego de información incompleta*. En caso contrario el juego es un *juego de información completa*.

- Las oportunidades que tienen los jugadores de elegir su plan de acción. En un *juego estratégico* cada jugador elige su plan de acción al inicio del mismo, y todos ellos toman su decisión simultáneamente, es decir, al elegir su plan de acción los jugadores no están informados del plan de acción elegido por los demás. En contraste, en un *juego extensivo* cada jugador puede considerar su plan de acción no solo al inicio del juego, sino en cualquier momento en el cual puede tomar una decisión.

- La información que tienen los jugadores sobre las acciones que se realizan durante el juego. Aquellos juegos donde los jugadores conocen *todas* las acciones que se realizan durante el desarrollo del mismo son llamados *juegos de información perfecta*. Cuando los jugadores no están completamente informados acerca de todas las acciones realizadas durante el juego, el juego es llamado *juego de información imperfecta*.

- Si los jugadores pueden coordinar esfuerzos durante el juego o no. En los llamados *juegos cooperativos* es posible trabajar en conjunto ya sea mediante la coordinación de estrategias o compartiendo las ganancias. En caso de no ser posible trabajar en conjunto el juego es llamado *juego no cooperativo*.

Esta teoría, sin embargo, no nos permite razonar de manera explícita acerca del conocimiento que posee cada agente. No podemos expresar qué es lo que conoce cada agente y cómo este conocimiento cambia durante el desarrollo del juego. El conocimiento tiene un papel muy importante en los juegos: entre mayor conocimiento se tenga acerca de la situación del juego y de la situación de nuestro adversario, es posible tomar mejores decisiones y realizar así las acciones que son más convenientes.

En años anteriores se han realizado trabajos en los cuales se analizan situaciones de competencia entre agentes o grupos de agentes desde el punto de vista lógico. En 1999, Jelle Gerbrandy presentó en [Ger99] un modelo semántico para lógica dinámica epistémica (*Dynamic Epistemic Semantics*) basado en conjuntos no bien fundados. En el mismo año, Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss and Slawomir Solecki presentaron en [BMS99] un modelo para lógica dinámica epistémica en el cual cada acción se interpreta como una transición entre modelos de mundos posibles. En 2000, Hans P. van Ditmarsch definió formalmente en [vD00] los *juegos de conocimiento* (*knowledge games*), aquellos en los cuales un número de cartas se distribuyen entre un número de jugadores, y donde las acciones consisten en intercambio de información (*Cluedo* es un juego de este tipo). Él caracterizó estados en este tipo de juegos, y además definió un lenguaje dinámico epistémico general en el cual pueden ser descritas las acciones que es posible realizar. En el mismo año, Boudewijn P. de Bruin modeló el conocimiento en juegos utilizando herramientas lógicas y topológicas [dB00]. En su tesis de maestría en 2002 [Dru02], Sjoerd Druiven introdujo una distinción entre los tipos de conocimiento que un jugador tiene: conocimiento de juego, conocimiento definitivo y conocimiento estratégico. Utilizando herramientas lógicas (lógica epistémica, lógica dinámica) y herramientas de teoría de juegos (estrategia y equilibrio Nash entre otros) modeló el conocimiento definitivo y estratégico que desarrollan los jugadores en juegos de información imperfecta. Barteld P. Kooi en 2003 estudió en [Koo03] inferencias acerca de cambios de información probabilistas utilizando una lógica obtenida como resultado de la combinación de lógica epistémica, lógica dinámica y lógica probabilista.

Además de las metas que comparten con la teoría de juegos, estos estudios han atacado el problema con otras perspectivas. Principalmente se han enfocado en *"la búsqueda de una concepción más amplia de la lógica, orientada hacia estructuras de información y acciones que las transforman"* (van Benthem en [vBDvE+01]).

El propósito del presente trabajo es desarrollar (sintáctica y semánticamente) un lenguaje lógico que nos permita expresar de manera explícita la forma en que la información (y por lo tanto el conocimiento) fluye durante el transcurso de un juego. Nos enfocamos en un juego en particular: el dominó. Este lenguaje a desarrollar tiene como metas el permitirnos expresar:

- situaciones posibles durante el desarrollo de una partida,
- el conocimiento que tienen los jugadores acerca de la situación de la partida,
- cómo se modifica este conocimiento por las acciones que se llevan a cabo.

El lenguaje que se desarrollará tiene la característica de presentar una perspectiva objetiva, distinta a la de los jugadores que participan en la partida. Supondremos que este observador externo conoce la situación real de la partida. En base a ella y con ayuda del lenguaje que construiremos, este observador será capaz de describir tanto el conocimiento que tienen los jugadores como la forma en que dicho conocimiento cambia al realizarse acciones.

1.2. El dominó

El dominó es un juego de gran popularidad en países de habla hispana. Un buen libro sobre el dominó que incluye las reglas, estrategias comunes así como algunas de sus variantes es [GS00]. Este juego consiste en un conjunto de fichas rectangulares, cada una de las cuales tiene en cada extremo un número entre 0 y 6, de la siguiente forma:

$$\boxed{2 \mid 6}$$

Este conjunto de fichas se conoce como doble 6. Existe el conjunto de fichas doble 9 e inclusive doble 12, dependiendo del número mayor que aparece en las fichas. Dado que el orden en el cual aparecen los números en una ficha no es importante, el conjunto doble 6 esta formado por un total de 28 fichas diferentes, como se muestra a continuación:

$\boxed{0 \mid 0}$	$\boxed{0 \mid 1}$	$\boxed{0 \mid 2}$	$\boxed{0 \mid 3}$	$\boxed{0 \mid 4}$	$\boxed{0 \mid 5}$	$\boxed{0 \mid 6}$
	$\boxed{1 \mid 1}$	$\boxed{1 \mid 2}$	$\boxed{1 \mid 3}$	$\boxed{1 \mid 4}$	$\boxed{1 \mid 5}$	$\boxed{1 \mid 6}$
		$\boxed{2 \mid 2}$	$\boxed{2 \mid 3}$	$\boxed{2 \mid 4}$	$\boxed{2 \mid 5}$	$\boxed{2 \mid 6}$
			$\boxed{3 \mid 3}$	$\boxed{3 \mid 4}$	$\boxed{3 \mid 5}$	$\boxed{3 \mid 6}$
				$\boxed{4 \mid 4}$	$\boxed{4 \mid 5}$	$\boxed{4 \mid 6}$
					$\boxed{5 \mid 5}$	$\boxed{5 \mid 6}$
						$\boxed{6 \mid 6}$

Pueden participar un máximo de cuatro jugadores. Las fichas se colocan boca abajo y, una vez revueltas, a cada jugador se le reparten 7 de estas. En caso de haber menos de 4 jugadores, las fichas restantes permanecen sobre la mesa (boca abajo).

El ganador de la última partida inicia la siguiente colocando cualquiera de sus fichas sobre la mesa. Si es la primera partida, el juego lo inicia aquel jugador que tenga la ficha $\boxed{6 \mid 6}$ colocando esta sobre la mesa. El turno cambia hacia la derecha. En cada turno, el jugador correspondiente coloca en la mesa una ficha que coincida en alguno de sus extremos con alguno de los lados libres de las fichas en la mesa. Si en su turno un jugador no tiene una ficha que pueda colocar, pierde su turno, o en caso de que hayan sobrado fichas en el reparto inicial, toma una de ellas al azar hasta obtener una que pueda ser colocada o hasta que estas fichas se terminen. En el caso en el que ningún jugador tenga ficha alguna que pueda ser jugada, finaliza la partida y se dice que esta se ha cerrado. El ganador de la partida es el primer jugador en quedarse sin fichas o, en el caso en el que la partida se haya cerrado, aquel cuyas fichas sumen la menor cantidad de puntos. En ambos casos el ganador obtiene como ganancia un número de puntos igual a la suma de los números en las fichas que quedan en poder de sus contrincantes. La cantidad de partidas se define de antemano, y el ganador final es aquel que reúne la mayor cantidad de puntos.

Las anteriores son las reglas básicas del dominó, y en base a ellas se pueden realizar partidas que exigen cierta habilidad a los jugadores, pero el juego se vuelve más complejo cuando se lleva a cabo por parejas. Los dos jugadores de cada equipo se sientan uno frente al otro para que sus turnos se intercalen con los turnos del equipo contrario, y el equipo ganador es aquel al que pertenece el jugador que se queda sin fichas primero. En este caso, la regla más importante es que no hay comunicación directa (por voz, señas, etc.) entre los integrantes de cada equipo.

El juego de dominó tiene las siguientes características:

- El número de jugadores es finito (de dos a cuatro jugadores).

- Cada jugador tiene un conocimiento completo de las reglas del juego.

- En cada momento de una partida, la acción que se realizará es elegida por uno de los jugadores.

- La acción que se realizará en cada turno se elige de entre un conjunto finito de acciones posibles.

- Las acciones que se llevan a cabo durante una partida son visibles para todos los jugadores; todos ellos saben qué acción se ha realizado.

- Cada partida finaliza después de un número finito de acciones.

- Al finalizar cada partida, cada jugador recibe una compensación numérica de acuerdo con estado final del juego. Esta compensación es una cantidad positiva en caso de ganar, o cero en caso de perder.

El dominó es un juego de información imperfecta, ya que aunque todos los jugadores observan las acciones que se llevan a cabo durante el juego, la distribución inicial de las fichas es hecha de manera aleatoria y cada jugador conoce tan solo aquellas fichas que le fueron asignadas. Es de información completa porque todos los jugadores están completamente informados acerca de las reglas del juego, así como de las acciones que se pueden realizar en cada turno. Es un juego extensivo ya que cada jugador puede considerar su plan de acción no solo al inicio del juego, sino en cada uno de sus turnos. En consecuencia puede cambiar su estrategia conforme obtenga más información acerca de las fichas que tengan los demás jugadores.

1.3. Tipos de conocimiento

Durante un juego, los jugadores tratan con conocimiento sobre diferentes aspectos. Por principio tenemos el conocimiento de las reglas del juego. Este involucra la situación inicial, las acciones que se pueden realizar, el conjunto de cartas o fichas con las que se realiza el juego de ser el caso, etc. Conforme se desarrolla el juego cada jugador obtiene conocimiento acerca de la situación del mismo como consecuencia de las acciones que realizan los demás jugadores. Aquellos jugadores experimentados conocen estrategias que es posible seguir durante el transcurso del juego y cuyo seguimiento les permite alcanzar más fácilmente sus metas. Finalmente, después de varias partidas, el jugador puede desarrollar conocimiento acerca de la preferencia o preferencias de los demás jugadores por alguna estrategia en particular, o la manera de actuar de cada uno de ellos en alguna situación específica. Dado que estos tipos de conocimiento provienen de distintas fuentes, seguiremos las definiciones hechas por S. Druiven en [Dru02] y daremos un nombre especial a cada uno de ellos.

Conocimiento de juego El *conocimiento de juego* es aquel que tienen los jugadores acerca del juego en que participan. Este incluye las reglas, las acciones que pueden realizarse en él y la forma de decidir al ganador.

Conocimiento definitivo El *conocimiento definitivo* es aquel que se tiene acerca de la situación actual del juego. Aquí se incluyen distribución de cartas o fichas, a quien le pertenece el turno, etcetera.

Conocimiento estratégico El *conocimiento estratégico* es aquel que se tiene acerca de las estrategias que es posible utilizar dentro del juego. Podemos entender una estrategia como un método que nos recomienda realizar cierta acción en alguna situación en particular. El conocimiento estratégico consiste en el conocimiento que los jugadores tienen acerca de estrategias relativas al juego en cuestión.

Conocimiento histórico El *conocimiento histórico* es aquel que se tiene acerca de las preferencias que en alguna situación tiene cada jugador o la forma de razonar de cada uno de ellos. Este conocimiento es formado con base en partidas realizadas anteriormente.

En el caso de los juegos de información imperfecta, el tener mayor información acerca de la situación actual del juego nos permite en nuestro turno elegir aquella acción que es más conveniente a nuestros intereses:

mientras mayor sea el conocimiento definitivo que tengamos, mayor es la probabilidad que tenemos de alcanzar nuestra meta. Con base en el conocimiento de las reglas del juego (conocimiento de juego), la acción realizada en cada turno, el conocimiento que tenemos de las estrategias del juego (conocimiento estratégico) y las preferencias que sabemos tiene el jugador en turno (conocimiento histórico) podemos conocer nuevos detalles acerca de la situación actual (conocimiento definitivo) y elegir así la acción más adecuada.

Es interesante conocer la forma en que estos tipos de conocimiento (de juego, estratégico e histórico) interactúan e influyen en la generación de conocimiento definitivo:

- Las reglas del juego nos indican en qué situación se puede realizar cada acción, es decir, qué situaciones deben ser ciertas para que dicha acción se lleve a cabo. A partir del conocimiento de estas reglas (el conocimiento de juego) y de la acción realizada podemos conocer más acerca de la situación actual del juego: deben ser ciertas aquellas situaciones que son prerrequisitos de la acción que se ha realizado. En este caso, adquirimos conocimiento definitivo ya que estos prerrequisitos deben ser forzosamente ciertos.

- El conocimiento estratégico no solo nos ayuda al elegir la acción que llevaremos a cabo. Las estrategias que lo conforman pueden ser entendidas de la manera antes mencionada: como un método que nos recomienda realizar cierta acción en alguna situación en particular. Cuando en algún momento del juego se realiza una acción recomendada por alguna estrategia que conocemos, y además sabemos que el jugador que realizó la acción conoce dicha estrategia, podemos suponer que nos encontramos en aquella situación en la cual se recomienda realizar la acción. En este caso obtenemos tan solo una suposición que, aunque probable, no es necesariamente cierta.

- Después de realizarse varias partidas, es posible *aprender* la forma de actuar de los demás jugadores en cierta situación. Podemos suponer que el jugador seguirá comportándose de la misma forma en situaciones parecidas y de esta manera, al ver que este realiza una acción similar a otra realizada en partidas anteriores, suponer que nos encontramos en una situación similar a aquella en la cual se realizó la acción anterior. En este caso, una vez más, obtenemos tan solo una suposición que no es necesariamente cierta.

En el presente trabajo nos enfocamos únicamente en la forma en la que el conocimiento del juego influye en la generación de conocimiento definitivo.

1.4. Otros trabajos sobre el dominó

El dominó es un juego que no ha recibido mucha atención de la comunidad científica. Aunque el nombre de "dominó" aparece en varios trabajos, la gran mayoría de estos son problemas de mosaicos (si es posible o no cubrir una superficie con fichas de dominó siguiendo ciertas reglas) o de complejidad.

La idea de utilizar la lógica para estudiar el dominó llego a nosotros por medio de Eric Schwarz. En [Sch01], Schwarz analizó una partida de dominó por parejas utilizando lógica de primer orden. Dentro del trabajo, él distinguió diferentes niveles en el juego, proporcionó un conjunto de reglas axiomáticas que expresan las reglas del juego, un conjunto de reglas epistémicas (las relacionadas con las propiedades del conocimiento que él describe) y estableció la forma en la cual se pueden expresar diferentes situaciones durante una partida. Su *nivel de acción* describe la acción que es realizada por el jugador en turno. En este nivel, la descripción completa de una acción es "pasa" o "tira ficha + extremo de la mesa (izquierda o derecha)". En el *nivel de referencia*, una acción se describe con respecto a las cantidades que aparecen en los extremos libres de la mesa antes y después de la acción. En el *nivel de juego* reside el estado actual de la partida incluyendo las reglas del juego, la distribución de las fichas, el conocimiento que de esta tienen los jugadores, y la secuencia de acciones realizadas hasta el momento. El *nivel estratégico* tiene como meta describir las intenciones de una acción, o al menos sus consecuencias. Finalmente, el *nivel de decisión* permite deducir una acción adecuada en términos del nivel de acción.

Como se mencionó anteriormente, en los últimos años se han desarrollado trabajos enfocados al análisis de juegos desde el punto de vista lógico. Estos trabajos se han enfocado principalmente en la forma en que cambia el conocimiento de los jugadores como consecuencia de las acciones que se realizan, con lo que tenemos una nueva perspectiva para atacar el juego de dominó.

Los niveles de acción y de referencia de Schwarz describen cada acción realizada. En nuestro caso, definimos un *historial* que nos indica la secuencia de acciones que se han realizado en la partida hasta el momento. Dada la distribución de fichas entre los jugadores, una partida puede describirse completamente con base en este historial. En su nivel de juego, Schwarz describe tanto el estado de la partida (la distribución de fichas y la secuencia de acciones realizadas) como el conocimiento que de este tienen los jugadores además de las reglas del juego. En el presente trabajo, el estado de la partida es completamente descrito por una función que indica la distribución de fichas y por el historial ya mencionado. Dado que utilizamos el lenguaje de la lógica epistémica, nos es posible expresar el conocimiento que tiene cada jugador acerca de la situación de la partida de una manera clara y compacta. Aún más; podemos expresar no solo conocimiento acerca de la situación del juego, sino también conocimiento acerca del conocimiento de los demás jugadores (conocimiento de orden superior). Las reglas del juego, a diferencia de Schwarz, no se describen con un sistema axiomático, sino que aparecen implícitas en la estructura que utilizamos para dar significado a las fórmulas del lenguaje y en las condiciones que deben de cumplirse para que cada acción se realice. En el nivel estratégico se describen las intenciones de una acción. En este trabajo cada acción se describe de una manera objetiva, por lo cual no nos enfocamos en las distintas interpretaciones que cada acción puede tener, sino en sus condiciones necesarias y sus consecuencias absolutas. De esta forma podemos distinguir mejor la manera en que cada jugador utiliza su conocimiento de juego, su conocimiento definitivo previo y su conocimiento acerca de la acción que se ha realizado para obtener nuevo conocimiento definitivo. La manera en que el conocimiento estratégico y el conocimiento histórico se utilizan en la obtención de conocimiento definitivo se presentará en trabajos posteriores.

Dado que el lenguaje desarrollado está basado en la lógica epistémica ($\mathcal{LE}$), evitamos el uso de fórmulas para describir las propiedades del conocimiento que estamos modelando, ya que estas están implícitas en las relaciones del modelo en el cual son interpretadas las fórmulas del lenguaje. Al ser $\mathcal{LE}$ una lógica multimodal, las fórmulas son claras y compactas. Más importante aún: el lenguaje $\mathcal{LE}$ es computacionalmente soluble mientras que la lógica de primer orden es indecidible (un sistema formal es decidible si y solo si, para toda fórmula en el sistema, existe un algoritmo que es capaz de decidir si dicha fórmula es válida o no), por lo cual la parte epistémica de nuestro lenguaje es decidible. Al añadirle acciones (volviéndolo un tipo de lógica dinámica epistémica), este es capaz de expresar la forma en que la situación del juego y el conocimiento de los jugadores es modificado. De igual forma, evitamos el uso de axiomas para describir cómo evoluciona el juego a través del tiempo, ya que esto está implícito en la manera en que estas acciones son interpretadas.

En términos prácticos, nuestro enfoque nos da entonces la facilidad de poder expresar de manera directa el conocimiento de los jugadores. El lenguaje que se construye es sintácticamente sencillo, pero es también lo suficientemente expresivo como para describir partidas de dominó completas, incluyendo tanto el conocimiento de los jugadores (inclusive conocimiento de orden superior) como la forma en que la situación y el conocimiento son modificados como consecuencia de las acciones que son realizadas. Semánticamente, el modelo en el cual son interpretadas las fórmulas es intuitivamente bastante claro, pues está basado en el modelo de mundos posibles para lógica epistémica. Gracias a las modificaciones hechas, este modelo expresa de manera simple y clara las restricciones que conforman las reglas del juego, por lo que su uso para situaciones de competencia que tiene características en común con el dominó es casi inmediato. Partes del presente trabajo ha sido presentadas en [VQHQ05] y en [VQHQ06].

Capítulo 2

Lógica epistémica proposicional

Nuestra meta es desarrollar un lenguaje lógico que nos permita expresar cómo interactúan los diferentes tipos de conocimiento dentro del dominó. Como primer paso, queremos desarrollar un lenguaje que nos permita expresar aquellas situaciones que pueden suceder durante una partida, y aún más, queremos que este lenguaje nos permita expresar también lo que cada jugador conoce acerca de estas situaciones. La lógica epistémica proposicional es un lenguaje que cumple nuestros dos requerimientos. Presentaremos en este capítulo la sintaxis, la semántica y las ideas que consideramos más importantes de este lenguaje.

2.1. Razonando acerca del conocimiento

La lógica epistémica proposicional nos permite razonar acerca del conocimiento. En muchas situaciones en la vida real (situaciones de competencia principalmente) es útil razonar no solo acerca de los hechos, sino acerca de lo que las demás personas (llamadas en este contexto agentes) conocen acerca de ellos. Para su proceso de razonamiento y toma de decisiones, un agente debe considerar en estas situaciones no solo los hechos que conoce acerca del mundo, sino también los hechos que él sabe que conocen los demás agentes: si estoy vendiendo un automóvil y sé que el posible comprador no sabe que el motor falla, probablemente obtendré un pago mayor al que obtendría si el comprador estuviera bien informado; si el portero sabe cómo tiro los penales, tiraré el siguiente de manera diferente; si sé que ciertas acciones que poseo bajarán de precio mañana, empezaré a venderlas ahora.

Para estudiar casos como estos es útil un lenguaje que nos permita expresar hechos acerca del mundo y también el conocimiento que cada agente tiene acerca de estos hechos.

Al considerar de manera separada los hechos y el conocimiento que tiene cada agente acerca de ellos, estamos implícitamente suponiendo que en algunas ocasiones alguno de estos agentes no conocerá todos estos hechos. En estos casos este agente, al no saber si es cierta o falsa alguna situación en particular, considerará posible un mundo en el cual dicha situación es cierta, pero también considerará posible otro mundo en el cual esta situación es falsa. Si su incertidumbre no es solo respecto a un hecho sino a varios, considerará entonces posibles una mayor cantidad de mundos.

Esta noción de mundos posibles, que es la idea intuitiva sobre la cual descansa la semántica de la lógica epistémica, se explica con mayor detalle a continuación.

2.2. Mundos posibles

Dentro de la lógica proposicional clásica, para poder decir si una fórmula (proposición) es verdadera o falsa, necesitamos conocer el valor de verdad de cada una de las proposiciones atómicas que la componen. Fórmulas tales como "está lloviendo en Puebla y está nevando en Londres" reciben un valor de verdad de acuerdo con el valor de verdad que tienen las proposiciones "está lloviendo en Puebla" y "está nevando en Londres". Sin embargo podemos encontrarnos en situaciones en las cuales, aunque sabemos que ciertas proposiciones son ciertas, no sabemos si otras lo son o no.

Supongamos que está lloviendo en Puebla y una persona (de aquí en adelante lo llamaremos agente) se encuentra ahí. Este agente sabe entonces que llueve en Puebla pero puede no saber si está nevando en Londres o no. El agente considera posible una situación en la cual está lloviendo en Puebla y nevando en Londres, y otra situación en la cual está lloviendo en Puebla y Londres está soleado. Nótese que lo único que sabe el agente es que está lloviendo en Puebla, que es precisamente aquello que es cierto en las dos situaciones que considera posibles. Intuitivamente entre menos situaciones considere posibles el agente, menor será su incertidumbre acerca de cual es la situación real. Él puede reducir el número de situaciones que considera posibles si se entera, de una fuente confiable, que está nevando en Londres. En este caso el agente ya no considerará posibles todas aquellas situaciones en las cuales Londres está soleado.

Esta noción de situaciones o mundos posibles fue presentada por Jaakko

Hintikka en *Knowledge and Belief* [Hin62] con la finalidad de estudiar situaciones en las cuales un agente no está seguro acerca de cuál es la situación real en la que se encuentra. Para estos casos, la descripción de la situación actual se debe dar no solo en términos de los hechos que son ciertos, sino también en términos de lo que cada agente conoce acerca de estos hechos. Dado entonces un conjunto de proposiciones atómicas (aquellas que expresan hechos básicos acerca del problema que estamos estudiando) podemos describir qué es lo que sabe un agente acerca de estas proposiciones mediante un conjunto de mundos o situaciones posibles (en cada uno de los cuales son ciertos o no estos hechos básicos) y relaciones entre estos mundos (que nos indican qué mundos considera posibles cada agente a partir de aquel mundo que representa la situación real).

Para poder utilizar esta idea de mundos posibles, es necesario un lenguaje que nos permita expresar estas nociones de conocimiento de una manera directa. En la siguiente sección se presenta formalmente el lenguaje de la lógica epistémica proposicional. Posteriormente se presenta el modelo de mundos posibles en el cual las fórmulas de dicho lenguaje son interpretadas.

2.3. Sintaxis

La fuente clásica del lenguaje de la lógica epistémica proposicional ($\mathcal{LE}$) es [Hin62]. Este lenguaje se construye a partir de:

- Un conjunto de proposiciones atómicas (denotado como Φ) en cuyos términos es posible describir el mundo sobre el cual deseamos que razonen los agentes.

- Un conjunto de agentes (denotado como $\mathcal{A}$).

- Un operador modal K_i por cada agente $i \in \mathcal{A}$, y los conectivos lógicos $\neg$ (negación) y $\vee$ (disyunción). Gracias a estos podemos construir nuevas proposiciones a partir de las proposiciones atómicas.

Este lenguaje se define formalmente de la siguiente manera.

Definición 2.3.1 (Lenguaje de lógica epistémica $\mathcal{LE}$). *Las fórmulas que conforman el lenguaje de la lógica epistémica proposicional $\mathcal{LE}$ se construyen a partir de un conjunto numerable no vacío de fórmulas atómicas Φ y un conjunto finito de agentes $\mathcal{A}$ siguiendo las reglas que se muestran a continuación:*

1.- $\top \in \mathcal{LE}$
2.- Si $p \in \Phi$ *entonces* $p \in \mathcal{LE}$
3.- Si $\varphi \in \mathcal{LE}$ *entonces* $\neg\varphi \in \mathcal{LE}$
4.- Si $\varphi \in \mathcal{LE}$ *y* $\psi \in \mathcal{LE}$ *entonces* $(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{LE}$
5.- Si $i \in \mathcal{A}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LE}$ *entonces* $K_i\varphi \in \mathcal{LE}$

Utilizando la notación BNF, las fórmulas φ *en* $\mathcal{LE}$ *se definen de manera equivalente con las siguientes reglas:*

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid K_i\varphi$$

donde $p \in \Phi$*,* $i \in \mathcal{A}$ *y* $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}$*.*

La fórmula $\top$ *representa la fórmula que es siempre verdadera, la fórmula* $\neg\varphi$ *representa la negación de* φ*,* $(\varphi \vee \psi)$ *representa la disyunción de* φ *y* ψ*, y* $K_i\varphi$ *expresa "el agente i sabe* φ*".*

Para referirnos a los elementos de un conjunto de proposiciones atómicas, también utilizaremos el término "fórmulas atómicas". Cuando hablemos de los elementos de un lenguaje, utilizaremos indistintamente los nombres "proposición" o "fórmula".

Como se puede observar, el lenguaje $\mathcal{LE}$ es un conjunto que se forma a partir de la proposición $\top$, las proposiciones atómicas $p \in \Phi$, y que es cerrado bajo la disyunción, la negación y los operadores modales K_i para cada agente $i \in \mathcal{A}$. Los conectivos lógicos $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ (conjunción, implicación y doble implicación respectivamente) y los operadores modales P (posibilidad) y E (todos saben) se definen como

$$\begin{aligned}
\bot &\equiv \neg\top \\
(\varphi \wedge \psi) &\equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\
(\varphi \rightarrow \psi) &\equiv (\neg\varphi \vee \psi) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &\equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\
P_i\varphi &\equiv \neg K_i \neg\varphi \\
E_{\mathcal{B}}\varphi &\equiv \textstyle\bigwedge_{i\in\mathcal{B}} K_i\varphi
\end{aligned}$$

Los conectivos $\wedge, \rightarrow$ y $\leftrightarrow$ tienen el significado habitual, las fórmulas del tipo $P_i\varphi$ tienen el significado intuitivo "no es cierto que el agente i sepa que no se cumple φ" o en otras palabras "el agente i considera posible φ". Finalmente, las fórmulas de la forma $E_{\mathcal{B}}\varphi$ se leen como "todos los agentes que pertenecen al conjunto $\mathcal{B}$ saben φ" para $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Nótese que la diferencia sintáctica entre la lógica proposicional clásica y la lógica epistémica proposicional es tan solo el operador modal K_i para cada agente $i \in \mathcal{A}$. Como se mencionó, cada fórmula de la forma $K_i\varphi$ se lee como "el agente i sabe (conoce) φ". Por ejemplo:

$K_i\varphi$	El agente i sabe φ.
$K_i\varphi \wedge K_j\psi$	El agente i sabe φ y el agente j sabe ψ.
$K_i(\varphi \rightarrow \psi)$	El agente i sabe que φ implica ψ.
$K_i\varphi \wedge \neg K_j\varphi$	El agente i sabe φ y no es cierto que el agente j sepa φ.

Este lenguaje tiene la ventaja de que podemos expresar conocimiento de orden superior; no solo podemos expresar lo que un agente sabe acerca de los hechos, sino también lo que él sabe acerca de lo que otros agentes saben.

$K_i\varphi$	El agente i sabe φ.
$K_iK_j\varphi$	El agente i sabe que el agente j sabe φ.
$K_iK_jp \wedge \neg K_jK_iK_jp$	El agente i sabe que el agente j sabe p, pero el agente j no sabe que el agente i sabe que el agente j sabe p.
$\neg K_i\psi \wedge P_jK_i\psi$	No es cierto que el agente i sepa ψ, pero el agente j lo considera posible.

Hasta ahora lo único que hemos hecho es presentar la sintaxis que se debe seguir para escribir fórmulas que pertenecen al lenguaje de la lógica epistémica, así como dar la interpretación intuitiva de estas fórmulas. A continuación presentaremos la semántica de este lenguaje, es decir, el modelo formal que se utiliza para determinar si una fórmula del lenguaje es verdadera o falsa.

2.4. Semántica

La lógica epistémica es una lógica modal (multimodal, por la existencia de una modalidad por cada agente), por lo que las fórmulas de este lenguaje se interpretan en estructuras llamadas *modelos de Kripke* en honor a Saul Kripke. Estas estructuras fueron presentadas formalmente en [Kri63] como modelo semántico para la lógica modal.

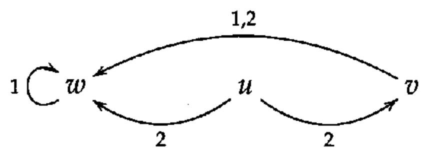
Como se mencionó, fue J. Hintikka quien presentó en [Hin62] las primeras nociones de una lógica epistémica. Fue también él quien presentó la interpretación intuitiva de estos modelos de Kripke (conocidos en este contexto como estructura o modelos de mundos posibles) para este lenguaje. Dada su información actual, un agente puede no distinguir entre el mundo real y otros que son posibles (compatibles con la información que posee) pero no reales, como se mencionó informalmente en 2.2. La definición formal de una estructura de mundos posibles se presenta a continuación.

Definición 2.4.1 (Estructura de mundos posibles). *Dado un conjunto de proposiciones atómicas Φ y un conjunto de agentes $\mathcal{A}$, una* estructura de mundos posibles *es una terna $M = (W, R_i, V)$ donde:*

- *W es un conjunto no vacío. Cada elemento de W es llamado un* mundo posible *o una* situación posible.
- *Para cada agente $i \in \mathcal{A}$, R_i es una relación binaria entre elementos de W ($R_i \subseteq (W \times W)$). R_i es llamada la* relación de accesibilidad *para el agente i.*
- *$V : \Phi \to 2^W$ es una función que asigna a cada proposición atómica un conjunto de mundos posibles.*

En ocasiones llamaremos a una estructura de mundos posibles estructura epistémica, modelo de mundos posibles, modelo epistémico *o* modelo de Kripke. *Al par (W, R_i) se le conoce como* marco de mundos posibles, marco epistémico *o* marco de Kripke.

Una de las ventajas de una estructura de mundos posibles $M = (W, R_i, V)$ es que su marco (W, R_i) puede representarse de manera gráfica. Basta con representar cada elemento $w \in W$ con un punto y trazar una flecha etiquetada con i de w a u si y solo si (w, u) es elemento de R_i. El marco (W, R_i) donde $W = \{w, u, v\}$, $R_1 = \{(w, w), (v, w)\}$ y $R_2 = \{(u, w), (v, w), (u, v)\}$ puede representarse como:



Así como las fórmulas de la lógica proposicional reciben un valor de verdad (verdaderas o falsas) de acuerdo con el valor de verdad de las fórmulas atómicas, las fórmulas de la lógica epistémica reciben un valor de verdad de acuerdo con una estructura de mundos posibles.

Intuitivamente, cada elemento de W representa uno de los mundos o situaciones posibles, la relación de accesibilidad nos dice cuáles de estas situaciones considera posible cada agente y la función V nos sirve para determinar el valor de verdad de cada proposición atómica en cada mundo posible. Si $w \in W$ es el mundo posible que describe la situación real, entonces gracias a V podemos determinar qué proposiciones atómicas son ciertas en

w y, utilizando R_i, podemos saber qué otros mundos considera posibles el agente i a partir de w.

El valor de verdad de fórmulas que no utilizan los operadores modales K_i se obtiene al conocer cuál es el mundo real w y qué proposiciones atómicas son ciertas en él. El valor de verdad de fórmulas del tipo $K_i\varphi$ se obtiene verificando el valor de verdad de φ en todos los mundos u tal que $(w, u) \in R_i$, que son precisamente aquellos mundos que el agente i considera posibles cuando el mundo real es w. Nótese que, entonces, para conocer el valor de verdad de las fórmulas en $\mathcal{LE}$ es necesario indicar cuál de los mundos posibles describe el mundo real. Al par (M, w), donde $M = (W, R_i, V)$ es una estructura de mundos posibles y $w \in W$, se le conoce como una *estructura acentuada*. Al trabajar con el par (M, w) estaremos suponiendo que w describe la situación real. En estos casos, w se conoce también como el punto de evaluación.

Definición 2.4.2 (Semántica para $\mathcal{LE}$). *Definimos la relación $\models$ entre una estructura acentuada (M, w) tal que $M = (W, R_i, V)$ y una fórmula φ en $\mathcal{LE}$ (con M y $\mathcal{LE}$ definidos ambos en términos del conjunto de proposiciones atómicas Φ y el conjunto de agentes $\mathcal{A}$) de manera inductiva sobre la estructura sintáctica de φ ("ssi" es la abreviatura de "si y solo si").*

$$
\begin{array}{lll}
(M, w) \models \top & & \\
(M, w) \models p & \textit{ssi} & w \in V(p) \\
(M, w) \models \neg\varphi & \textit{ssi} & \textit{no es cierto que } (M, w) \models \varphi \\
(M, w) \models (\varphi \vee \psi) & \textit{ssi} & (M, w) \models \varphi \;\; \textit{ó} \;\; (M, w) \models \psi \\
(M, w) \models K_i\varphi & \textit{ssi} & (M, u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que } (w, u) \in R_i
\end{array}
$$

donde $p \in \Phi$, $i \in \mathcal{A}$, y $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}$.

Cuando $(M, w) \models \varphi$, se dice que φ es verdadera en *(M, w). En el caso en que no sea cierto que $(M, w) \models \varphi$, se escribe $(M, w) \not\models \varphi$ y se dice que φ* es falsa en *(M, w).*

Como se mencionó, $\top$ es la proposición que es siempre verdadera, por lo cual es verdadera en cualquier estructura acentuada (M, w). La semántica para los conectivos lógicos $\neg$ y $\vee$ es la ya conocida: $\neg\varphi$ es verdadera en (M, w) si y solo si φ es falsa en (M, w), y $\varphi \vee \psi$ es verdadera en (M, w) si y solo si φ es verdadera en (M, w) ó ψ es cierta en (M, w). La semántica interesante es la correspondiente a fórmulas de la forma $K_i\varphi$. Decimos que $K_i\varphi$ es verdadera en (M, w) si y solo si φ es verdadera en toda estructura acentuada (M, u) tal que $(w, u) \in R_i$, es decir, el agente i sabe φ en (M, w) si y solo si φ es verdadera en todos aquellos mundos u que i considera posible a partir de w.

El valor de verdad de la fórmula $\perp$ y las fórmulas construidas con los conectivos $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y los operadores modales P y E se puede derivar a partir de la definición de estos conectivos y la definición 2.4.2, tal como se muestra en la tabla 2.1.

Definición 2.4.3 (Satisfactibilidad y validez). *Sea (M, w) una estructura acentuada tal que $M = (W, R_i, V)$, y sea φ una fórmula en $\mathcal{LE}$.*

1. *Se dice que φ es* satisfactible en *M si $(M, w) \models \varphi$ para algún $w \in W$.*
2. *Se dice que φ es* válida en *M si $(M, w) \models \varphi$ para todo $w \in W$. Cuando se dé este caso (φ válida en M) escribiremos*

$$M \models \varphi$$

3. *Se dice que φ es* satisfactible *si es satisfactible en alguna estructura M.*
4. *Se dice que φ es* válida *si es válida en cualquier estructura M. Cuando se dé este caso (φ válida) escribiremos*

$$\models \varphi$$

Como ejemplo, sea p la proposición "está lloviendo en Puebla" y sea q la proposición "está nevando en Londres". Sean w y u las dos situaciones que nuestro agente i considera posibles, de tal forma que w representa la situación en la cual está lloviendo en Puebla y está nevando en Londres, mientras que u representa la situación en la que está lloviendo en Puebla y no está nevando en Londres. La incertidumbre de i respecto a si está nevando o no en Londres se representa con el modelo $M = (W, R_i, V)$ donde

- $W = \{w, u\}$
- $R_i = \{(w, w), (w, u), (u, w), (u, u)\}$
- $V(p) = \{w, u\}$, $V(q) = \{w\}$

M se representa de manera gráfica como

$$\begin{tikzcd} w \arrow[loop left, "i"] \arrow[r, leftrightarrow, "i"] & u \arrow[loop right, "i"] \end{tikzcd}$$

En este modelo, en el cual w es el mundo posible que describe la situación real, tenemos:

$$
\begin{array}{lll}
(M,w) \not\models \bot & & \\
 & & \\
(M,w) \models (\varphi \wedge \psi) & \text{ssi} & (M,w) \models \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\
 & \text{ssi} & (M,w) \not\models (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\
 & \text{ssi} & (M,w) \not\models \neg\varphi \quad \text{y} \quad (M,w) \not\models \neg\psi \\
 & \text{ssi} & (M,w) \models \varphi \quad \text{y} \quad (M,w) \models \psi \\
 & & \\
(M,w) \models (\varphi \to \psi) & \text{ssi} & (M,w) \models (\neg\varphi \vee \psi) \\
 & \text{ssi} & (M,w) \models \neg\varphi \quad \text{ó} \quad (M,w) \models \psi \\
 & \text{ssi} & (M,w) \not\models \varphi \quad \text{ó} \quad (M,w) \models \psi \\
 & & \\
(M,w) \models (\varphi \leftrightarrow \psi) & \text{ssi} & (M,w) \models ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
 & \text{ssi} & (M,w) \models (\varphi \to \psi) \quad \text{y} \quad (M,w) \models (\psi \to \varphi)) \\
 & \text{ssi} & (\,(M,w) \not\models \varphi \quad \text{ó} \quad (M,w) \models \psi\,) \quad \text{y} \\
 & & \quad (\,(M,w) \not\models \psi \quad \text{ó} \quad (M,w) \models \varphi\,) \\
 & \text{ssi} & (\,(M,w) \not\models \varphi \;\; \text{y} \;\; (\,(M,w) \not\models \psi \;\; \text{ó} \;\; (M,w) \models \varphi\,)\,) \\
 & & \qquad\qquad\qquad \text{ó} \\
 & & (\,(M,w) \models \psi \;\; \text{y} \;\; (\,(M,w) \not\models \psi \;\; \text{ó} \;\; (M,w) \models \varphi\,)\,) \\
 & \text{ssi} & \big(\,(\,(M,w) \not\models \varphi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \not\models \psi\,) \;\; \text{ó} \\
 & & \qquad (\,(M,w) \not\models \varphi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \models \varphi\,)\big) \\
 & & \qquad\qquad\qquad \text{ó} \\
 & & \big(\,(\,(M,w) \models \psi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \not\models \psi\,) \;\; \text{ó} \\
 & & \qquad (\,(M,w) \models \psi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \models \varphi\,)\big) \\
 & \text{ssi} & (\,(M,w) \not\models \varphi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \not\models \psi\,) \;\; \text{ó} \\
 & & (\,(M,w) \models \varphi \;\; \text{y} \;\; (M,w) \models \psi\,) \\
 & & \\
(M,w) \models P_i\varphi & \text{ssi} & (M,u) \models \neg K_i \neg\varphi \\
 & \text{ssi} & (M,u) \not\models K_i \neg\varphi \\
 & \text{ssi} & \text{Existe } u \in W \text{ tal que } (w,u) \in R_i \text{ y } (M,w) \not\models \neg\varphi \\
 & \text{ssi} & \text{Existe } u \in W \text{ tal que } (w,u) \in R_i \text{ y } (M,w) \models \varphi \\
 & & \\
(M,w) \models E_{\mathcal{B}}\varphi & \text{ssi} & (M,w) \models \bigwedge_{i \in \mathcal{B}} K_i\varphi \\
 & \text{ssi} & (M,w) \models K_i\varphi \text{ para todo } i \in \mathcal{B}.
\end{array}
$$

Tabla 2.1: Semántica para la lógica epistémica proposicional

- $(M, w) \models K_i p$
  El agente i sabe que está lloviendo en Puebla ya que en los dos mundos que el considera posibles (w y u) la proposición p es verdadera.

- $(M, w) \models \neg K_i q \wedge \neg K_i \neg q$
  El agente i no sabe si en Londres nieva o no, ya que en uno de los mundos que considera posible se satisface q (w) y en otro no (u).

2.5. Conocimiento común

Existen situaciones de conocimiento que no pueden expresarse con el lenguaje que hemos definido hasta ahora. Cuando uno transita en automóvil, ¿el que todos sepan la ley de manejar por la derecha es suficiente para manejar seguro por la derecha? El problema del ataque coordinado es un buen ejemplo. Esta es una versión modificada a partir de la que aparece en [FHMV95].

> Dos divisiones de artillería, cada una de ellas comandadas por un general, acampan en dos colinas que rodean un valle. En el valle espera el enemigo. Si las dos divisiones atacan simultáneamente ganarán la batalla, pero si sólo una división lo hace, será derrotada. Por lo tanto, ningún general atacará a menos que esté seguro que el otro atacará también.
>
> El general de la primera división desea coordinar un ataque simultaneo. Los generales solo pueden comunicarse mediante mensajeros, pero es posible que este se pierda o sea capturado por el enemigo. ¿lograrán los dos generales coordinar un ataque?

Supongamos que el general de la primera división (llamado A) envía un mensaje al otro general (llamado B) diciendo "ataquemos al amanecer". ¿El general B debe atacar? Él puede razonar de la siguiente forma: "aunque yo recibí el mensaje, A no tiene manera de estar seguro que el mensaje realmente llegó hasta mí. Entonces A debe considerar posible que yo no haya recibido el mensaje en cuyo caso yo no atacaría. Como A no está seguro que yo atacaré, entonces el no atacará". Por este razonamiento, B concluye que A no atacará y entonces B no debe atacar.

B trata de arreglar este problema, y envía de regreso al mensajero avisándole a A que recibió el mensaje. Supongamos que A recibe el mensaje. ¿Debe atacar? El razonamiento de A es ahora: "B no sabe que yo he recibido su mensaje. B considera posible que el mensaje no haya llegado, por lo cual no está seguro que yo atacaré. Entonces B no atacará". Como consecuencia de este análisis, A no debe atacar. A podría intentar enviar un mensaje a B avisándole que sí recibió la confirmación, pero un razonamiento análogo nos llevará a concluir que aunque el mensaje llegue, ambos generales no conocerán este hecho al mismo tiempo y ninguno estará seguro que el otro atacará, por lo que no debe atacar.

¿Cual es la falla? Sea *recibido* la proposición que indica que el primer mensaje fue recibido. Al recibir B el primer mensaje, la proposición $K_B recibido$ es cierta, pero $K_A recibido$ es falsa. Al recibir A la confirmación, $K_A recibido$ es cierta, pero $K_B K_A recibido$ es falsa. Si A envía una confirmación más que llegue a B, entonces $K_B K_A recibido$ sería cierta, pero $K_A K_B K_A recibido$ no, y así sucesivamente. Para que el ataque se lleve a cabo es necesario que *recibido* sea *conocimiento común* entre A y B: que ambos sepan que se recibió el mensaje ($K_A recibido \wedge K_B recibido$), que ambos sepan que ambos saben que se recibió el mensaje ($K_A K_A recibido \wedge K_A K_B recibido \wedge K_B K_A recibido \wedge K_B K_B recibido$), que ambos sepan que ambos saben que ambos saben que se recibió el mensaje ($K_A K_A K_A recibido \wedge \cdots \wedge K_A K_B K_A recibido \wedge \cdots \wedge K_B K_B K_B recibido \wedge \cdots \wedge K_B K_A K_B recibido \wedge \cdots$), etc.

Una fórmula φ es conocimiento común entre un conjunto de agentes $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ si todos en el grupo saben φ, todos saben que todos saben φ, etc. La fórmula $C_{\mathcal{B}}\varphi$ expresa que φ es conocimiento común entre los agentes que pertenecen al grupo $\mathcal{B}$. El nuevo lenguaje, que se construye con el lenguaje de la lógica epistémica proposicional ya presentado (definición 2.3.1) más el operador modal C, se denota como $\mathcal{LE}^C$ y se define formalmente a continuación.

Definición 2.5.1 (Lenguaje de lógica epistémica con conocimiento común $\mathcal{LE}^C$). *El lenguaje de lógica epistémica con conocimiento común $\mathcal{LE}^C$ se define siguiendo las reglas que definen al lenguaje de lógica epistémica $\mathcal{LE}$ (reglas 1 a 5, véase la definición 2.3.1) mas la regla que permite crear nuevas fórmulas utilizando el operador modal C (regla 6). Esto es:*

1.- $\top \in \mathcal{LE}^C$		
2.- *Si* $p \in \Phi$	*entonces*	$p \in \mathcal{LE}^C$
3.- *Si* $\varphi \in \mathcal{LE}^C$	*entonces*	$\neg\varphi \in \mathcal{LE}^C$
4.- *Si* $\varphi \in \mathcal{LE}^C$ *y* $\psi \in \mathcal{LE}^C$	*entonces*	$(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{LE}^C$
5.- *Si* $i \in \mathcal{A}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LE}^C$	*entonces*	$K_i\varphi \in \mathcal{LE}^C$
6.- *Si* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LE}^C$	*entonces*	$C_{\mathcal{B}}\varphi \in \mathcal{LE}^C$

En notación BNF tenemos:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid K_i\varphi \mid C_{\mathcal{B}}\varphi$$

donde $p \in \Phi$, $i \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ *y* $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}^C$.

La fórmula $C_{\mathcal{B}}\varphi$ *expresa "*φ *es conocimiento común entre los agentes de* $\mathcal{B}$*".*

Para definir la semántica del operador C, recordemos que φ es conocimiento común entre los agentes que pertenecen a $\mathcal{B}$ si y solo si:

1. Todos en el grupo saben φ, y
2. todos saben que todos saben φ, y
3. todos saben que todos saben que todos saben φ, y ...

En términos del lenguaje de lógica epistémica, esto se escribe como:

1. $E_{\mathcal{B}}\varphi \wedge$
2. $E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi) \wedge$
3. $E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi)) \wedge \ \ldots$

Para que esto sea cierto en (M, w), es necesario que:

1. $(M, w) \models E_{\mathcal{B}}\varphi$, es decir,
   $(M, w) \models K_i\varphi$ para todo $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models \varphi$ para todo u tal que $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$; y
2. $(M, w) \models E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi)$, es decir,
   $(M, w) \models K_i(E_{\mathcal{B}}\varphi)$ para todo $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, u) \models E_{\mathcal{B}}\varphi$ para todo u tal que $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, u) \models K_i\varphi$ para todo u tal que $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, v) \models \varphi$ para todo u, v tal que $(w, u) \in R_i$ y $(u, v) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$; y
3. $(M, w) \models E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi))$, es decir,
   $(M, w) \models K_i(E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi))$ para todo $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi)$ para todo u tal que $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models K_i(E_{\mathcal{B}}\varphi)$ para todo u tal que $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models E_{\mathcal{B}}\varphi$ para todo v tal que $(u, v) \in R_i$ y $(w, u) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models K_i\varphi$ para todo u, v tal que $(w, u) \in R_i$ y $(u, v) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$, es decir,
   $(M, w) \models \varphi$ para todo u, v, t tal que $(w, u) \in R_i$, $(u, v) \in R_i$ y $(v, t) \in R_i$ donde $i \in \mathcal{B}$; y ...

Sea $R_{\mathcal{B}} = \bigcup_{i \in \mathcal{B}} R_i$. Entonces φ es conocimiento común entre los agentes en $\mathcal{B}$ si y solo si:

1. $(M, w) \models \varphi$ para todo u tal que $(w, u) \in R_{\mathcal{B}}$; y
2. $(M, v) \models \varphi$ para todo u, v tal que $(w, u) \in R_{\mathcal{B}}$ y $(u, v) \in R_{\mathcal{B}}$; y
3. $(M, w) \models \varphi$ para todo u, v, t tal que $(w, u) \in R_{\mathcal{B}}$, $(u, v) \in R_{\mathcal{B}}$ y $(v, t) \in R_{\mathcal{B}}$; y ...

Recordemos que la cerradura transitiva S^{+} de una relación $S \subseteq (A \times A)$ se define como:

$$S^1 = S$$
$$S^{n+1} = \{ (w, v) \mid \text{ existe } u \in A \text{ con } (w, u) \in S^n \text{ y } (u, v) \in S \}$$
$$S^{+} = \bigcup_{i \in \mathbb{N} - \{0\}} S^i$$

Sea $R^{+}_{\mathcal{B}}$ la cerradura transitiva de $R_{\mathcal{B}}$. Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.5.2 (Semántica para $\mathcal{LE}^C$). *Sea (M, w) una estructura acentuada en la cual $M = (W, R_i, V)$. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $\varphi \in \mathcal{LE}^C$.*

$$(M, w) \models C_{\mathcal{B}}\varphi \quad \textit{ssi} \quad (M, u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que } (w, u) \in R^{+}_{\mathcal{B}} \textit{ donde } R^{+}_{\mathcal{B}} \textit{ es la cerradura transitiva de } R_{\mathcal{B}} = \bigcup_{i \in \mathcal{B}} R_i$$

2.6. Propiedades del conocimiento

De acuerdo con la semántica dada para fórmulas del tipo $K_i\varphi$, un agente conoce φ si y solo si φ es cierto en todos los mundos que considera posibles. ¿Qué tanto se apega esta definición a la idea intuitiva que tenemos de conocimiento? Podemos revisar qué propiedades se atribuyen al conocimiento como consecuencia de nuestra definición revisando qué fórmulas son siempre verdaderas, es decir, qué fórmulas son válidas (véase la definición 2.4.3).

- Una consecuencia importante de nuestra definición es que todo agente conoce las consecuencias lógicas de su conocimiento. Si un agente sabe φ y sabe también $\varphi \to \psi$, entonces él sabe ψ. Esto es claro ya que si φ y $\varphi \to \psi$ son verdaderas en todos los mundos que él considera posibles, entonces ψ debe ser verdadera en cada uno de esos mundos. La fórmula siguiente, conocida como el *Axioma de Distribución* y denotada algunas veces como **K**, expresa este hecho

$$\textbf{(K)} \qquad \models (K_i\varphi \land K_i(\varphi \to \psi)) \to K_i\psi$$

- Otra propiedad es que cada agente conoce toda fórmula válida en alguna estructura dada M. Recordemos que para que φ sea válida en la estructura $M = (W, R_i, V)$, es necesario que $(M, w) \models \varphi$ para todo $w \in W$. Si φ es verdadera en todo mundo w, entonces es verdadera en todos los mundos que el agente considera posibles, por lo cual el agente debe saberla. La *Regla de Generalización del Conocimiento* expresa este hecho:

$$\text{Si } M \models \varphi \text{ entonces } M \models K_i\varphi$$

2.6.1. Tipos de relaciones y sus propiedades

En la definición de la estructura de mundos posibles no dimos ninguna restricción sobre la relación de accesibilidad. En general ésta puede cumplir varias propiedades como ser reflexiva, transitiva, euclidiana, serial, etc. Al restringir nuestras estructuras a aquellas cuyas relaciones sean de cierto tipo en particular, nuestra definición de conocimiento obtiene nuevas propiedades.

- Si la relación es *reflexiva* (para todo $u \in W, (u, u) \in R_i$), entonces el mundo actual w se encuentra entre los mundos que cada agente i considera posibles. Si $K_i\varphi$ se cumple, φ es cierto en todos los mundos que el agente considera posibles, incluyendo entre estos a w. Como consecuencia de esto, todo aquello que el agente sabe debe ser verdad. Esta propiedad es llamada *Axioma de Conocimiento* o *Axioma de verdad*, y se denota como **T**

$$\text{(T)} \qquad K_i\varphi \rightarrow \varphi$$

- Cuando la relación es *transitiva* (si $(w, u) \in R_i$ y $(u, v) \in R_i$, entonces $(w, v) \in R_i$) se cumple una propiedad llamada *Axioma de Introspección Positiva*, denotada como **4**

$$\text{(4)} \qquad K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$$

  Supongamos que $(M, w) \models K_i\varphi$. Dado que $K_i\varphi$ es cierto en w, entonces φ es cierto en todo mundo accesible desde w, es decir, $(M, u) \models \varphi$ para todo $u \in W$ tal que $(w, u) \in R_i$. Pero como R_i es transitiva, entonces $(w, v) \in R_i$ para todo $v \in W$ tal que $(u, v) \in R_i$. Como $(w, v) \in R_i$, tenemos también que $(M, v) \models \varphi$ para todo $v \in W$ tal que $(u, v) \in R_i$. Ya que φ es cierto en cualquier mundo accesible desde u, tenemos que $(M, u) \models K_i\varphi$ para cualquier u accesible desde w. Por lo tanto $(M, w) \models K_iK_i\varphi$. Este axioma nos dice que el agente es consciente de aquello que sabe.

- El *Axioma de Introspección Negativa*, denotado como **5**, se cumple cuando la relación de accesibilidad es *simétrica* (si $(w,u) \in R_i$ entonces $(u,w) \in R_i$) y *transitiva*. Este axioma nos dice que el agente es consciente acerca de aquello que no sabe.

$$(5) \qquad \neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i\varphi$$

Supongamos que $(M,w) \models \neg K_i\varphi$. Entonces $(M,u) \models \neg\varphi$ para un u tal que $(w,u) \in R_i$. Sea $v \in W$ tal que $(w,v) \in R_i$. Dado que R_i es simétrica, entonces $(v,w) \in R_i$, y como R_i es transitiva entonces $(v,u) \in R_i$. Como $(M,u) \models \neg\varphi$ y u es accesible desde v, entonces $(M,v) \models \neg K_i\varphi$. Esto es cierto para todo v tal que $(w,v) \in R_i$ entonces $(M,w) \models K_i\neg K_i\varphi$.

Tradicionalmente se han nombrado a los sistemas de acuerdo con los axiomas que se cumplen en ellos. Aquellas lógicas en las cuales se cumplen los axiomas **K** y **T** se conocen como KT. Dado que el axioma **K** se cumple en todos los sistemas (no depende de la relación de accesibilidad), es omitido algunas veces en el nombre del sistema. Así la lógica KT se le llama también T. Las lógicas más importantes son la llamada S4 o KT4 en la que se cumplen los axiomas **K**, **T** y **4**, y la lógica S5 o KT45 en la que se cumplen los axiomas **K**, **T**, **4** y **5**; la tabla 2.2 resume lo anterior. Nótese que la lógica S5 es precisamente aquella en la que las relaciones de accesibilidad son relaciones de equivalencia (relaciones reflexivas, transitivas y simétricas).

Nombre del sistema	**Axiomas**
KT	**K, T**
T	**K, T**
KT4	**K, T, 4**
S4	**K, T, 4**
KT45	**K, T, 4, 5**
S5	**K, T, 4, 5**

Tabla 2.2: Sistemas lógicos y sus axiomas

Capítulo 3

Lógica dinámica epistémica proposicional

En el capítulo anterior presentamos el lenguaje de lógica epistémica proposicional $\mathcal{LE}$. Este nos permite expresar no solo hechos, sino también el conocimiento que tienen un conjunto de agentes acerca de estos hechos. Sin embargo, los hechos y el conocimiento que tienen los agentes acerca de estos no permanece estático. En prácticamente cualquier situación es posible realizar acciones mediante las cuales los hechos y el conocimiento que tenemos de ellos cambia.

La lógica dinámica epistémica es un campo de investigación relativamente nuevo. Su meta es proporcionar métodos formales para el análisis del cambio en el conocimiento de un conjunto de agentes. Esta lógica está formada, por lo tanto, por dos partes: la parte que trata con la representación del conocimiento (comúnmente lógica epistémica) y la parte que trata con la forma en que este conocimiento es modificado (generalmente algún tipo de lógica dinámica). Varias lógicas dinámicas epistémicas se han desarrollado en los últimos años; las presentadas en este capítulo tienen, a nuestro juicio, características interesantes.

3.1. Un modelo epistémico diferente

El sistema DEL (*Dynamic Epistemic Logic*), desarrollado por Jelle Gerbrandy y Willem Groeneveld en [GG97] y [Ger99], fue inspirado por el trabajo de Frank Veltman ([Vel96]).

La característica a resaltar en este trabajo, desde nuestro punto de vista, es que para la parte epistémica se propone un modelo semántico distinto al modelo de mundos posibles. Gerbrandy menciona en [Ger99] que la idea detrás del modelo de mundos posibles es que podemos modelar el conocimiento de un agente como el conjunto de posibilidades que son compatibles con el conocimiento del agente o, alternativamente pero no incompatiblemente, como el conjunto de posibilidades que, con respecto al conocimiento del agente, pueden ser el mundo real.

Gerbrandy continúa: "Una estructura acentuada de Kripke es una representación de ciertos hechos acerca de la situación junto con la representación de la información que tienen un grupo de agentes acerca de esos hechos. Los hechos son modelados por los valores de las variables proposicionales mientras que la información de los agentes es modelada por la relación de accesibilidad. Si un mundo v es accesible desde un mundo w mediante una flecha dirigida etiquetada con a, entonces la información que tiene a en la situación modelada en la estructura de mundos posibles con v como punto de evaluación es compatible con la información que él mismo tiene en la situación modelada por la estructura teniendo a w como punto de evaluación". En otras palabras, si nos referimos al conjunto de estructuras acentuadas (M, v) tales que $(w, v) \in R_a$ como el *estado de información* para el agente a en la estructura acentuada (M, w) (denotado como $w(a)$), entonces la información representada por una estructura acentuada (M, w) está caracterizada por dos factores: el valor de las variables proposicionales y los estados de información de cada uno de los agentes.

Definición 3.1.1 (Posibilidad). *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de agentes y $\mathcal{P}$ un conjunto de variables proposicionales. La clase de posibilidades es la mayor clase tal que:*

- *Una* posibilidad *w es una función que asigna a cada variable proposicional $p \in \mathcal{P}$ un valor de verdad $w(p) \in \{0, 1\}$ y a cada agente i un estado de información $w(i)$.*
- *Un estado de información ω es un conjunto de posibilidades.*

De esta manera, una posibilidad w caracteriza cuáles proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas, y caracteriza también la información que tiene cada agente en forma de un estado de información, que es un conjunto de posibilidades. Esta definición es claramente circular pero, como observan Gerbrandy y Groeneveld, tiene sentido dentro de la teoría de conjuntos no bien fundados.

Para expresar cambios, se introducen *programas* en el lenguaje. Estos programas se interpretan como relaciones entre posibilidades. Si π es un programa, entonces su interpretación $[\![\pi]\!]$ será aquella relación entre dos posibilidades w y v que existe tan solo en el caso en que v sea un resultado posible de la ejecución de π en w. La sintaxis completa de DEL es la siguiente.

Definición 3.1.2 (Lenguaje DEL). *Dado un conjunto de agentes $\mathcal{A}$ y un conjunto de variables proposicionales $\mathcal{P}$, las fórmulas y los programas de DEL se definen simultáneamente de la siguiente forma.*

El conjunto de fórmulas *de DEL es el conjunto más pequeño que contiene a $\mathcal{P}$ de tal forma que si ϕ y ψ son fórmulas, π es un programa y a un agente, entonces $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $K_a\phi$ y $[\pi]\phi$ son fórmulas también:*

$$\phi ::= p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid K_a\phi \mid [\pi]\phi$$

El conjunto de programas *de DEL es el conjunto más pequeño que contiene al programa $?\phi$ para cada fórmula ϕ en DEL, y para el cual se cumple que si π y π' son programas y a un agente, entonces $\pi;\pi'$, $\pi \cup \pi'$ y $U_a\pi$ son programas también:*

$$\pi ::= ?\phi \mid \pi;\pi' \mid \pi \cup \pi' \mid U_a\pi$$

Las fórmulas de DEL se interpretan dentro de una posibilidad. Los programas se interpretan como relaciones entre posibilidades: el par (w, v) denotará al programa π solo en el caso en que la ejecución del programa π en la posibilidad w pueda tener a v como salida. En lugar de escribir $(w, v) \in [\![\pi]\!]$, se escribe $w[\![\pi]\!]v$ para indicar que (w, v) forma parte de la relación $[\![\pi]\!]$. La abreviación $w[a]v$ se utiliza para indicar que w difiere de v a lo más en el estado que asigna al agente a.

La manera en que se interpretan las fórmulas en $\mathcal{DEL}$ se muestra a continuación.

Definición 3.1.3 (Interpretación de fórmulas). *Sean ϕ, ψ fórmulas en DEL, p una variable proposicional y π un programa en DEL; sea a un agente y w una posibilidad. Las fórmulas son interpretadas de acuerdo con las siguientes reglas:*

$$\begin{array}{lll}
w \models p & \textit{ssi} & w(p) = 1 \\
w \models \phi \wedge \psi & \textit{ssi} & w \models \phi \text{ } y \text{ } w \models \psi \\
w \models \neg\phi & \textit{ssi} & w \not\models \phi \\
w \models K_a\phi & \textit{ssi} & \textit{para todo } v \in w(a) : v \models \phi \\
w \models [\pi]\phi & \textit{ssi} & \textit{para todo } v, \textit{si } w[\![\pi]\!]v \textit{ entonces } v \models \phi
\end{array}$$

Definición 3.1.4 (Interpretación de programas). *Sean w, v posibilidades y sea $a \in \mathcal{A}$. Sean también ϕ una fórmula en DEL y π, π' programas en DEL. Los programas son interpretados de acuerdo con las siguientes reglas:*

$w[\![?\phi]\!]v$	*ssi*	$w \models \phi$ *y* $w = v$
$w[\![U_a\pi]\!]v$	*ssi*	$w[a]v$ *y* $v(a) = \{ v' \mid \exists w' \in w(a). \exists u : w'[\![\pi]\!]u[\![U_a\pi]\!]v' \}$
$w[\![\pi;\pi']\!]v$	*ssi*	*existe un* u *tal que* $w[\![\pi]\!]u[\![\pi']\!]v$
$w[\![\pi \cup \pi']\!]v$	*ssi*	$w[\![\pi]\!]v$ *ó* $w[\![\pi']\!]v$

El programa $?\phi$ se interpreta como una prueba que tiene éxito en una posibilidad w exactamente cuando ϕ es verdadera, y regresa w como salida. De otra manera, falla y no produce salida alguna. El programa $\pi;\pi'$ representa la ejecución secuencial de los programas π y π', mientras que $\pi \cup \pi'$ es la elección entre π y π'. El programa $U_a\pi$ expresa que el agente aprende conscientemente que el programa π ha sido ejecutado exitosamente. Aquí, con *conscientemente* entendemos que en el modelo resultante, a no solamente sabe que el programa ha sido ejecutado, sino también sabe que sabe que el programa ha sido ejecutado, sabe que sabe que sabe que el programa ha sido ejecutado, etc.

La aportación importante de este sistema (desde nuestro punto de vista) es un modelo semántico diferente para la lógica epistémica.

3.2. Lenguaje de acciones epistémicas

En [BMS99], Alexandru Baltag, Lawrence Moss y Slawomir Solecki presentan un punto de vista interesante acerca de las acciones que modifican el conocimiento de un conjunto de agentes.

La meta de dicho trabajo es representar formalmente actualizaciones epistémicas, es decir, cambios en la información que tienen un conjunto de agentes producidos como consecuencia de acciones que modifican específicamente esta información. Estas acciones pueden ser de varios tipos tales como recepción, ocultamiento, pérdida o sospecha de falta de información.

En su trabajo, ellos capturan tan solo las consecuencias epistémicas de las acciones, sin revisar la intención con que estas fueron realizadas. La idea principal es que un agente puede tener incertidumbre no solo acerca de la situación real, sino también acerca de acción que se ha realizado. Supongamos que tenemos tres agentes (a, b, c), los cuales no saben si está nevando en Londres (p) o no $(\neg p)$. Varios tipos de acciones pueden suceder, entre las cuales están las siguientes.

1. Supongamos que los tres agentes leen un mensaje que anuncia que p es cierto: está nevando en Londres. En esta caso, p se vuelve conocimiento común entre los tres agentes.

2. Supongamos que c se queda dormido por un instante, momento aprovechado por a y b para leer el mensaje. En este caso, a y b saben que p es cierto, mientras que c sigue sin saberlo. Si antes de que c cayera dormido era conocimiento común entre los tres agentes que ninguno sabía si p ó $\neg p$, c seguirá creyendo después de la acción que ninguno de ellos lo sabe.

3. Supongamos ahora que c tan solo fingió dormir, y que notó que a y b leyeron el mensaje, aunque él mismo no alcanzó a leerlo. Entonces, a y b creen ahora que c cree que ninguno de los tres sabe si p ó $\neg p$, cuando en realidad c sabe que a y b saben si p ó $\neg p$, aunque él mismo no sepa si p ó $\neg p$.

Dado que cada agente puede observar una acción de una manera distinta, cada uno de ellos tendrá entonces su interpretación particular sobre las consecuencias de dicha acción. Si la diferente perspectiva que tienen los agentes acerca de la situación del mundo real es representada mediante la estructura de mundos posibles, entonces la diferente perspectiva que tienen los agentes acerca de la acción realizada puede representarse de la misma forma.

Cada acción se describe entonces con una estructura de mundos posibles en la cual en lugar de la función V que asigna un valor de verdad a las variables proposicionales, tenemos una función de precondición. La idea intuitiva es que en general podemos tratar con acciones no totalmente claras, acerca de las cuales los agentes pueden estar informados de manera incompleta, o no informados del todo. Además de la estructura, las acciones tienen precondiciones que definen su dominio de aplicación: no toda acción es posible en cualquier situación. La forma en que la estructura de mundos posibles es modificada a consecuencia de una acción es básicamente el producto de las dos estructuras (la que describe el conocimiento de los agentes acerca de la situación y la que describe el conocimiento de los agentes acerca de la acción); las incertidumbres de cada agente respecto a la situación se *multiplican* por sus incertidumbres respecto a la acción realizada, mientras que las combinaciones imposibles entre las situaciones y la perspectiva de la acción son eliminadas. Aquí, la idea intuitiva es que para un agente, sus incertidumbres respecto a la situación y a la acción son independientes, con excepción de la consistencia de la acción con la situación.

El lenguaje epistémico, denotado como $\mathcal{L}$, se define de la siguiente forma.

Definición 3.2.1 (Lenguaje $\mathcal{L}$). *Sea* AtSen *un conjunto de proposiciones atómicas, y sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de agentes. El lenguaje $\mathcal{L}$ es el conjunto más pequeño que incluye* AtSen *y que es cerrado bajo los conectivos $\neg$, $\wedge$, y el operador modal K_a para $a \in \mathcal{A}$:*

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi$$

La semántica para el lenguaje $\mathcal{L}$ es similar a la semántica que se definió en 2.4.2. Las estructuras de acciones se definen a continuación.

Definición 3.2.2 (Estructura de acción). *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de agentes. Una* estructura de acción *es una tupla $A = (K, S_i, \text{pre})$ en la cual:*

- *K es un conjunto no vacío. Podemos llamar a cada elemento de K una* perspectiva de la acción.
- *R_i es la relación de accesibilidad para el agente i.*
- pre : *$K \rightarrow \mathcal{L}$ es un mapeo que asigna a cada perspectiva de la acción en K una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}$.*

El lenguaje $\mathcal{L}$ es un lenguaje tan solo epistémico. El lenguaje dinámico epistémico, llamado $\mathcal{L}([\alpha])$, es el siguiente.

Definición 3.2.3 (Lenguaje de acciones epistémicas). *Sea* AtSen *un conjunto de proposiciones atómicas, y sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito de agentes. El lenguaje de acciones epistémicas, denotado como $\mathcal{L}([\alpha])$, es el conjunto más pequeño que incluye* AtSen *y que es cerrado bajo los conectivos $\neg$, $\wedge$, y los operadores modales K_a para $a \in \mathcal{A}$ y $[\alpha]$ donde α es una acción sobre $\mathcal{L}([\alpha])$:*

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid [\alpha]\varphi$$

El lenguaje $\mathcal{L}([\alpha])$ se define en términos de acciones sobre $\mathcal{L}([\alpha])$. Cada una de estas acciones es precisamente una estructura de acción, en la cual señalamos una perspectiva en particular. Esta perspectiva se interpreta como la perspectiva correcta de la acción.

Definición 3.2.4 (Acción). *Una* acción sobre *$\mathcal{L}([\alpha])$ es una tupla (A, k) donde $A = (K, S_i, \text{pre})$ y $k \in K$.*

Dada una estructura de mundos posibles $M = (W, R_i, V)$ y una estructura de acción $A = (K, S_i, \text{pre})$, se define la estructura de mundos posibles $M^A = (W_{M^A}, T_i, V_{M^A})$ en la cual:

- Los mundos en W_{M^A} son aquellos pares $(w,k) \in (W \times K)$ tales que la precondición para la perspectiva k se satisface en el mundo w:

$$W_{M^A} = \{ (w,k) \in (W \times K) \mid (M,w) \models \text{pre}(k) \}$$

- La relación de accesibilidad T_i para el jugador i está formada por aquellos pares $\big((w,k),(w',k')\big)$ para los cuales se cumple que (w,w') esta en R_i y (k,k') esta en S_i:

$$\big((w,k),(w',k')\big) \in T_i \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} (w,k),(w',k') \in W_{M^A}, \\ (w,w') \in R_i \quad \text{y} \\ (k,k') \in S_i \end{array}$$

- La función $V_{M^A} : \mathsf{AtSen} \to 2^{W_{M^A}}$ debe regresar, dada una proposición atómica, los mundos posibles en los cuales es verdadera esta proposición. En nuestro caso, tenemos que la proposición p es verdadera en el mundo (w,k) de la estructura M^A si y solo si p era verdadera en el mundo w de la estructura M:

$$(w,k) \in V_{M^A}(p) \qquad \text{ssi} \qquad w \in V(p)$$

Recordemos que así como en una estructura acentuada (M,w) el mundo w representa el mundo real de entre todos aquellos que son considerados posibles, en una acción (A,k) la perspectiva k representa la perspectiva correcta de la acción. La estructura M^A tiene sentido solo si la precondición de la acción real se satisface en el mundo real. Se dice entonces que la estructura M^A está definida para la estructura acentuada (M,w) y para la acción (A,k) si y solo si $(M,w) \models \text{pre}(k)$ (recuérdese que $\text{pre}(w) \in \mathcal{L}$). En este caso, la estructura acentuada resultante es $(M^A,(w,k))$.

La semántica para el lenguaje $\mathcal{L}([\alpha])$ está dada por las siguientes reglas.

Definición 3.2.5 (Semántica del lenguaje de acciones epistémicas). *Sea* $M = (W,R_i,V)$ *una estructura de mundos posibles, y sea* $w \in W$. *Entonces:*

$$\begin{array}{lll} (M,w) \models p & \textit{ssi} & w \in V(p) \\ (M,w) \models \neg\varphi & \textit{ssi} & (M,w) \not\models \varphi \\ (M,w) \models (\varphi \wedge \psi) & \textit{ssi} & (M,w) \models \varphi \ \ \textit{y} \ \ (M,w) \models \psi \\ (M,w) \models K_i\varphi & \textit{ssi} & (M,u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que } (w,u) \in R_i \\ (M,w) \models [\alpha]\varphi & \textit{ssi} & \alpha = (A,k), M^A \textit{ está definida y } (M^A,(w,k)) \models \varphi \end{array}$$

donde $p \in \mathsf{AtSen}$, $i \in \mathcal{A}$, $\varphi,\psi \in \mathcal{L}([\alpha])$ *y* α *es una acción sobre* $\mathcal{L}([\alpha])$.

La aportación importante es la nueva perspectiva que se le da a las acciones. La observación de que las acciones pueden no ser completamente claras para todos los jugadores es la que provoca que se busque la forma de representar estas diferentes perspectivas que cada agente puede tener. Es natural entonces elegir un marco de mundos posibles como la estructura que cumplirá esta función.

Aunque en el dominó las acciones son claras para todos los jugadores (todos saben qué acción se realiza y quién la realiza), el concepto de precondición nos es útil ya que, como observan Baltag, Moss y Solecki, no toda acción es posible en cualquier situación.

3.3. Acciones de conocimiento

Hans P. Van Ditmarsch presenta en [vD00] un lenguaje lógico enfocado sobre un tipo particular de juegos. Los llamados *juegos de conocimiento* (*knowledge games*) consisten en un conjunto de cartas que se reparten entre los jugadores, y un conjunto de acciones posibles, un orden que determina quién es el jugador en turno y un procedimiento para determinar quién gana. Las cartas no cambian de jugador durante el transcurso del juego, aunque se pueden mostrar. Los jugadores conocen sus cartas y conocen cuántas cartas tienen los demás. El estado del juego está completamente determinado por el reparto de cartas y por la secuencia de acciones en el juego, inicialmente vacía. Aunque las cartas no cambian de jugador, el conocimiento que tienen estos acerca de la distribución de ellas sí. De aquí el nombre de juegos de conocimiento. Un ejemplo bastante conocido de este tipo de juegos es el llamado *Cluedo*, conocido en nuestro país como *Quién es el culpable*.

Definición 3.3.1 (Lenguaje $\mathcal{L}_n^{\Box}$). *Sean* **P** *un conjunto de proposiciones atómicas y* **A** *un conjunto de agentes* ($|\mathbf{A}| = n$). *Las fórmulas* φ *y las acciones* π *del lenguaje* $\mathcal{L}_n^{\Box}$ *se definen simultáneamente de la siguiente forma:*

El conjunto de fórmulas es el conjunto más pequeño que contiene a las proposiciones atómicas en **P** *y es cerrado bajo los conectivos lógicos* $\neg$, $\wedge$ *y los operadores modales* K_a *para* $a \in \mathbf{A}$, C_B *para* $B \subseteq \mathbf{A}$ *y* $[\pi]$ *para una acción* π:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid K_a\varphi \mid C_B\varphi \mid [\pi]\varphi$$

El conjunto de acciones es el conjunto más pequeño que contiene una acción $?\varphi$ *por cada fórmula* φ *en el lenguaje, y además es cerrado bajo la composición* *secuencial* $(\pi;\pi')$, *la elección no determinista* $(\pi \cup \pi')$, *el operador de elección local* $(\pi!\pi')$ *y el operador de aprendizaje* $(L_B\pi)$ *para* $B \subseteq \mathbf{A}$.

$$\pi ::= ?\varphi \mid \pi;\pi' \mid \pi \cup \pi \mid \pi!\pi' \mid L_B\pi$$

En la definición de las acciones, "!" es el operador de elección local. La acción $\pi!\pi'$ es interpretada como "de entre las acciones π y π', se elige localmente π", por lo que su interpretación es similar a la de la acción π. L_B es el operador de aprendizaje: $L_B\pi$ se interpreta como "el grupo B aprende que π" (se vuelve conocimiento común entre los agentes en B que π está siendo ejecutada). Pero los agentes en B no saben necesariamente *qué* acción es π. En un juego de información, por ejemplo, si un jugador a le muestra a otro jugador b una carta, un tercer jugador no sabe exactamente qué acción está siendo ejecutada (no sabe qué carta le está mostrando a a b), pero sabe qué *tipo* de acción está siendo ejecutada.

Definición 3.3.2 (Tipo de una acción). *El* tipo *de una acción es una función t sobre las acciones del lenguaje, definida de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcl} t(?\varphi) & = & ?\varphi \\ t(\pi;\pi') & = & t(\pi);t(\pi') \\ t(\pi \cup \pi') & = & t(\pi) \cup t(\pi') \\ t(\pi!\pi') & = & t(\pi) \cup t(\pi') \\ t(L_B\pi) & = & L_Bt(\pi) \end{array}$$

Básicamente, el tipo de una acción es una expresión que es obtenida al reemplazar todas las ocurrencias del operador de elección local por elecciones no deterministas, excepto aquellas que ocurren dentro del alcance de una prueba. La semántica del lenguaje es similar a las anteriores (las acciones se interpretan como relaciones entre las estructuras sobre las que se interpreta la parte epistémica) Lo interesante en este caso es la forma en que se define la interpretación para la acción $L_B\pi$. Para ello se utiliza la definición de bisimulación, que es básicamente una definición de equivalencia entre estructuras de mundos posibles: se dice que $M = (W, R_i, V)$ y $M' = (W', R_i', V')$ (definidas ambas sobre el conjunto de agentes $\mathbf{A}$ y el conjunto de variables proposicionales $\mathbf{P}$) son *bisimilares* si existe una relación $\mathfrak{R} \subseteq (W \times W')$ tal que para todo $(w, w') \in \mathfrak{R}$:

1. $w \in V(p)$ si y solo si $w' \in V'(p)$, para todo $p \in \mathbf{P}$.

2. Para todo $a \in \mathbf{A}$ y todo $u \in W$, si $(w, u) \in R_a$, entonces existe un $u' \in W'$ tal que $(w', u') \in R_a'$,y este u' es tal que $(u, u') \in \mathfrak{R}$.

3. Para todo $a \in \mathbf{A}$ y todo $v' \in W'$, si $(w', v') \in R_a$, entonces existe un $v \in W$ tal que $(w, v) \in R_a$, y este v es tal que $(v, v') \in \mathfrak{R}$.

Si $\mathfrak{R}$ cumple lo anterior, entonces se dice es una *bisimulación* entre M y M'. Escribiremos $((M, w) \leftrightarroweq (M', w'))$ (y llamaremos a (M, w) y (M', w') bisimilares) cuando exista una bisimulación $\mathfrak{R}$ entre M y M' tal que $(w, w') \in \mathfrak{R}$. La semántica completa del lenguaje es la siguiente.

Definición 3.3.3 (Semántica de fórmulas en $\mathcal{L}_n^{\Box}$). *Sea $M = (W, R_i, V)$ una estructura de mundos posibles, y sea $w \in W$.*

$(M, w) \models p$	*ssi*	$w \in V(p)$
$(M, w) \models \neg\varphi$	*ssi*	$(M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models (\varphi \wedge \psi)$	*ssi*	$(M, w) \models \varphi$ *y* $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models K_i\varphi$	*ssi*	$(M, u) \models \varphi$ *para todo* $u \in W$ *tal que* $(w, u) \in R_i$
$(M, w) \models C_B\varphi$	*ssi*	$(M, u) \models \varphi$ *para todo* $u \in W$ *tal que* $(w, u) \in R_B^+$ *(ver def. 2.5.2)*
$(M, w) \models [\pi]\varphi$	*ssi*	$(M', w') \models \varphi$ *para todo* (M', w') *tal que* $(M, w)[\![\pi]\!](M', w')$

donde $p \in \mathbf{P}$, $i \in \mathbf{A}$, φ, ψ son fórmulas en $\mathcal{L}_n^{\Box}$ y π es una acción, también en $\mathcal{L}_n^{\Box}$.

Definición 3.3.4 (Semántica de las acciones $?\varphi$, $\pi;\pi'$, $\pi \cup \pi$ y $\pi!\pi$). *Sea W_φ el conjunto de mundos posibles en W en donde se satisface la fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_n^{\Box}$, y sea V_φ la función V restringida a elementos de W_φ:*

$$W_\varphi = \{ w \in W \mid (M, w) \models \varphi \}$$
$$w \in V_\varphi(p) \quad ssi \quad w \in V(p) \quad \text{y} \quad w \in W_\varphi$$

La relación $(M, w)[\![\pi]\!](M', w')$ entre dos estructuras acentuadas ((M, w) y (M', w')) y una acción (π) se define de la siguiente forma:

$(M, w)[\![?\varphi]\!](M', w')$	*ssi*	$M' = (W_\varphi, \emptyset, V_\varphi)$ *y* $w = w'$
$(M, w)[\![\pi;\pi']\!](M', w')$	*ssi*	$(M, w)([\![\pi]\!] \circ [\![\pi']\!])(M', w')$
$(M, w)[\![\pi \cup \pi']\!](M', w')$	*ssi*	$(M, w)[\![\pi]\!](M', w')$ *ó* $(M, w)[\![\pi']\!](M', w')$
$(M, w)[\![\pi!\pi']\!](M', w')$	*ssi*	$(M, w)[\![\pi]\!](M', w')$

Para completar la definición de la semántica, es necesario especificar cuál es la estructura de mundos posibles a la que se llega después de ejecutarse una acción del tipo $L_B\pi$. Cuando un grupo de agentes B aprende que π está ejecutandose en una estructura acentuada (M, w), se pasa a una estructura acentuada (M', w'). Los mundos en esta nueva estructura son estructuras; aquellas a las que puede llegarse al ejecutarse una acción del tipo π en la estructura acentuada (M, u) tal que u es accesible a partir de w para los agentes en B. La evaluación de las variables proposicionales consiste simplemente en aquellas estructuras acentuadas donde la variable proposicional es cierta. Para la relación de accesibilidad, una estructura acentuada (M''', u''') es accesible desde (M'', w'') para el agente a si y solo si existe un mundo en M'' bisimilar a (M''', u''') que es accesible para a desde w'', o si el agente a no está envuelto en ninguna de las acciones de tipo π.

Definición 3.3.5 (Semántica de la acción $L_B\pi$). *Sea $M = (W, R_i, V)$ una estructura de mundos posibles, y sea $w \in W$. Sea B un subconjunto de agentes ($B \subseteq \mathbf{A}$), y π una acción en $\mathcal{L}_n^{\square}$:*

$$(M, w)[\![L_B\pi]\!](M', w') \quad \text{ssi} \quad (M, w)[\![\pi]\!]w' \ \text{ y } \ M' = (W', R_i', V')$$

donde M', R_a' y V' se definen de la siguiente forma:

- $W' = \{ (M'', w'') \mid \exists u \in W : (w, u) \in R_B^+ \text{ y } (M, u)[\![t(\pi)]\!](M'', w'') \}$
- $\big((M'', w''), (M''', u''')\big) \in R_a'$ *ssi*
  existe un $v'' \in M''$ tal que $(w'', v'') \in R_a$ y
  $(M'', v'') \leftrightarrows (M''', u''')$, ó
  $a \notin (gr(M'') \cup gr(M'''))$ y existen $u, v \in W$
  tal que $(u, v) \in R_a$, $(M, u)[\![t(\pi)]\!](M'', w'')$
  y $(M, v)[\![t(\pi)]\!](M'', v'')$

  donde $gr(M)$ es el conjunto de agentes que aparecen en la estructura M (aquellos para los cuales la relación de accesibilidad está definida).
- $V'(p) = \{ (M'', w'') \in W' \mid (M'', w'') \models p \}$

El lenguaje $\mathcal{L}_n^{\square}$ está definido entonces específicamente para juegos de conocimiento. Lo interesante, como se mencionó, es la idea de que las acciones tienen tipos. Con esta idea, podemos decir que un jugador conoce el tipo de acción que se realiza (se muestra una carta), aunque no sepa específicamente qué acción es (qué carta se ha mostrado). Mientras que ambos, el jugador que muestra la carta y el que la observa, saben exactamente qué acción se ha realizado (qué carta se ha mostrado), los demás tan solo pueden suponer qué carta se ha mostrado, aunque saben quién la ha mostrado y a quién lo ha hecho. Es por esta razón que los nuevos mundos posibles son aquellas estructuras a las que puede llegarse al ejecutarse una acción del tipo correspondiente en la estructura original. Este es un ejemplo interesante de una lógica dinámica epistémica que se enfoca a un tipo de juegos en particular.

3.4. Una lógica dinámica epistémica general

Hasta ahora se han mostrado las ideas principales de algunas lógicas dinámicas epistémicas; precisamente aquellas que consideramos presentan ideas interesantes. Algunas de las ideas en el desarrollo de dichos lenguajes son útiles para el presente trabajo. Sin embargo, hay un detalle importante que diferencia los trabajos ya mencionados del nuestro: todos ellos consideran acciones que cambian tan solo el conocimiento que tienen los agentes de la situación: la interpretación que se le da a estas acciones contempla tan solo la forma en que estas afectan el conocimiento de los agentes. En nuestro caso, además de describir la forma en que se modifica el conocimiento, necesitamos también describir la forma en que el mundo real cambia.

3.4.1. Sintaxis

Con el lenguaje $\mathcal{LE}$ (recuérdese la def. 2.3.1) podemos expresar en fórmulas simples una situación y el conocimiento de un conjunto de agentes acerca de ella. Para nuestro trabajo es necesario expresar también cómo cambia esta situación y este conocimiento en función de las acciones que se llevan a cabo. La situación y el conocimiento de los jugadores se modifica al realizarse acciones durante el juego, por lo tanto necesitamos aumentar nuestro lenguaje para expresar la forma en que estos son modificados.

Para esto, necesitamos primero definir el lenguaje con el cual podremos expresar las acciones que vamos a considerar. De manera análoga a la definición de un lenguaje por medio de proposiciones atómicas y constructores para crear nuevas proposiciones a partir de las anteriores, podemos crear un lenguaje de acciones con base en un conjunto de acciones básicas y un conjunto de constructores que nos permitan combinarlas. Si α y β son dos acciones, entonces podemos crear nuevas acciones a partir de estas mediante

- La *composición secuencial* de α y β: $\alpha;\beta$
- La *elección no determinista* de α ó β: $\alpha \cup \beta$
- La *repetición* de α un número indeterminado de veces: α^*

Definimos a continuación el lenguaje de las acciones que utilizaremos.

Definición 3.4.1 (Lenguaje de acciones $\mathcal{LA}$). *Sea Ω un conjunto numerable no vacío de acciones atómicas. Las acciones en el lenguaje $\mathcal{LA}$ se construyen siguiendo estas reglas:*

1.-	$\varepsilon \in \mathcal{LA}$		
2.- Si	$\omega \in \Omega$	*entonces*	$\omega \in \mathcal{LA}$
3.- Si	$\alpha, \beta \in \mathcal{LA}$	*entonces*	$(\alpha;\beta) \in \mathcal{LA}$
4.- Si	$\alpha, \beta \in \mathcal{LA}$	*entonces*	$(\alpha \cup \beta) \in \mathcal{LA}$
5.- Si	$\alpha \in \mathcal{LA}$	*entonces*	$\alpha^* \in \mathcal{LA}$

En notación BNF, α es una acción en $\mathcal{LA}$ si y solo si está formada a partir de las siguientes reglas:

$$\alpha ::= \varepsilon \mid \omega \mid (\alpha;\beta) \mid (\alpha \cup \beta) \mid \alpha^*$$

donde la acción ε representa la acción nula: aquella que hace nada.

El lenguaje $\mathcal{LE}$ nos permite expresar hechos y aquello que sabe un conjunto de agentes acerca de estos hechos en un momento dado. El lenguaje de la lógica dinámica epistémica proposicional, llamado $\mathcal{LDE}$, se forma a partir del lenguaje $\mathcal{LE}$ añadiendo una regla para crear fórmulas epistémicas que nos permiten expresar cómo afectan las acciones en $\mathcal{LA}$ los hechos y el conocimiento de los agentes.

Definición 3.4.2 (Lenguaje de lógica dinámica epistémica $\mathcal{LDE}$). *Las fórmulas φ del lenguaje de la lógica dinámica epistémica proposicional $\mathcal{LDE}$ se forman siguiendo las reglas para construir fórmulas en $\mathcal{LE}$ (véase la definición 2.3.1) más la regla*

$$\varphi ::= [\alpha]\varphi$$

donde $\varphi \in \mathcal{LDE}$ y $\alpha \in \mathcal{LA}$.

Más formalmente, sea Φ un conjunto numerable no vacío de fórmulas atómicas y $\mathcal{A}$ un conjunto finito de agentes. Las fórmulas φ del lenguaje de la lógica dinámica epistémica $\mathcal{LDE}$ se forman a partir de las reglas:

1.-	$\top \in \mathcal{LDE}$		
2.- Si	$p \in \Phi$	*entonces*	$p \in \mathcal{LDE}$
3.- Si	$\varphi \in \mathcal{LDE}$	*entonces*	$\neg\varphi \in \mathcal{LDE}$
4.- Si	$\varphi \in \mathcal{LDE}$ *y* $\psi \in \mathcal{LDE}$	*entonces*	$(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{LDE}$
5.- Si	$i \in \mathcal{A}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LDE}$	*entonces*	$K_i\varphi \in \mathcal{LDE}$
6.- Si	$\alpha \in \mathcal{LA}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LDE}$	*entonces*	$[\alpha]\varphi \in \mathcal{LDE}$

que en notación BNF se escriben como:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid K_i\varphi \mid [\alpha]\varphi$$

donde $p \in \Phi$, $i \in \mathcal{A}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{LDE}$ y $\alpha \in \mathcal{LA}$.

El significado intuitivo de $[\alpha]\varphi$ es "después de ejecutarse la acción α, la fórmula φ es verdadera".

Los conectivos lógicos $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ (conjunción, implicación y doble implicación respectivamente) y los operadores modales P (posibilidad) y E (todos saben) se definen de la misma forma que para la lógica epistémica. La fórmula $\langle\alpha\rangle\varphi$ se define como:

$$\langle\alpha\rangle\varphi \quad \equiv \quad \neg([\alpha]\neg\varphi)$$

y se lee como "no es cierto que después de ejecutarse la acción α la fórmula $\neg\varphi$ sea siempre verdadera" o, equivalentemente, "es posible que después de ejecutarse α, φ sea verdadera".

3.4.2. Semántica

Hemos mostrado la sintaxis de un lenguaje que nos permite expresar no solo hechos y el conocimiento que acerca de estos tiene un conjunto agentes en un momento determinado, sino también acciones que pueden modificarlos. Recordemos que, semánticamente, estos hechos y este conocimiento se describen mediante estructuras de mundos posibles. Si decidimos que las acciones que hemos definido serán capaces de modificar hechos y conocimiento, entonces cada una de estas acciones debe ser capaz de llevarnos de una estructura de mundos posibles que describe hechos y conocimiento *antes* de que se realice la acción a otra estructura de mundos posibles que describa hechos y conocimiento *después* de que se realizó la acción. Podemos entender entonces estas acciones como mapeos (funciones) que nos llevan de una estructura de mundos posibles a otra. La definición formal de estos mapeos depende obviamente de la idea intuitiva que tengamos acerca de la forma en que estas acciones afectan hechos y conocimiento.

Nuestro lenguaje de acciones $\mathcal{LA}$ se define con base en un conjunto de acciones básicas Ω y al conjunto de constructores $\{;, \cup, ^*\}$. Por esta razón, la manera más sencilla de asociar a cada acción en $\mathcal{LA}$ una función que indique la forma en que esta modifica la estructura epistémica es asociar una función a cada acción básica y utilizar estas funciones para definir aquellas que corresponden a las fórmulas que se crean con los constructores: $(\alpha;\beta)$, $(\alpha \cup \beta)$ y α^*.

Estas acciones básicas tienen una interpretación abstracta que depende de la idea intuitiva que se tenga de ellas. La interpretación en lenguaje natural del mismo lenguaje $\mathcal{LDE}$ depende del significado que se le dé a las proposiciones atómicas. Por lo tanto se supondrá la existencia de estas funciones de transición para las acciones básicas. La definición formal de estas funciones se dará cuando estas acciones básicas tengan una interpretación concreta.

Definición 3.4.3 (Función de transición para acciones en $\mathcal{LA}$). *Sean* (M_1, w_1) *y* (M_2, w_2) *dos estructuras acentuadas tales que* $M_1 = (W_1, R1_i, V)$ *y* $M_2 = (W_2, R2_i, V_2)$ *son dos estructuras de mundos posibles definidas ambas sobre el conjunto de proposiciones atómicas* Ω *y el conjunto de agentes* $\mathcal{A}$.

Las funciones de transición ρ_ε, $\rho_{(\alpha;\beta)}$, $\rho_{(\alpha\cup\beta)}$ *y* ρ_{α^*}, *que corresponden a las acciones* ε, $(\alpha;\beta)$, $(\alpha \cup \beta)$ *y* α^* *respectivamente, se definen como:*

- $\rho_\varepsilon(M_1, w_1) = (M_1, w_1)$
- $\rho_{(\alpha;\beta)}(M_1, w_1) = (M_2, w_2)$ *si y solo si* *existe una estructura* $M' = (W', R'_i, V')$ *(definida también sobre el conjunto de proposiciones atómicas* Ω *y el conjunto de agentes* $\mathcal{A}$*) con* $w' \in W'$ *tal que*
  $$\rho_\alpha(M_1, w_1) = (M', w') \qquad \text{y} \qquad \rho_\beta(M', w') = (M_2, w_2)$$
- $\rho_{(\alpha\cup\beta)}(M_1, w_1) = (M_2, w_2)$ *si y solo si*
  $$\rho_\alpha(M_1, w_1) = (M_2, w_2) \qquad \text{y} \qquad \rho_\beta(M_1, w_1) = (M_2, w_2)$$
- $\rho_{\alpha^*}(M_1, w_1) = (M_2, w_2)$ *si y solo si*
  $$\rho^n_\alpha(M_1, w_1) = (M_2, w_2) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$
  donde $\rho^0_\alpha = \rho_\varepsilon$, $\quad \rho^1_\alpha = \rho_\alpha \quad$ *y* $\quad \rho^{n+1}_\alpha = \rho^n_\alpha \circ \rho_\alpha$.

donde ρ_α *y* ρ_β *son las funciones de transición para las acciones* α *y* β, *respectivamente.*

Definiremos ahora una semántica para las fórmulas $\varphi \in \mathcal{LDE}$ utilizando para cada acción $\alpha \in \mathcal{LA}$ su función de transición ρ_α correspondiente. Llamaremos a esta semántica *semántica abstracta de* $\mathcal{LDE}$ porque estas funciones de transición no están definidas para las acciones básicas en Ω.

Nótese que, dado que no definimos las funciones de transición para las acciones básicas, no sabemos si en general la función de transición nos regresa una estructura acentuada o un conjunto de estructuras acentuadas: si una acción básica $\omega \in \Omega$ nos lleva de una estructura acentuada a un conjunto de estructuras acentuadas, la composición secuencial y la elección no determinista entre acciones que involucren a ω se comportarán de la misma manera. Por lo tanto, para dar valor de verdad a fórmulas de la forma $[\alpha]\varphi$ en una estructura acentuada (M, w), es necesario verificar el valor de verdad de la fórmula φ en *todas* aquellas estructuras acentuadas a las que nos lleve α a partir de (M, w).

Definición 3.4.4 (Semántica abstracta de $\mathcal{LDE}$). *Definimos la relación $\models$ entre una estructura acentuada (M, w) tal que $M = (W, R_i, V)$ y una fórmula φ en $\mathcal{LDE}$ (con M y $\mathcal{LDE}$ definidos ambos en términos del conjunto de proposiciones atómicas Φ y el conjunto de agentes $\mathcal{A}$) de manera inductiva sobre la estructura sintáctica de φ.*

$$\begin{array}{lll}
(M,w) \models \top & & \\
(M,w) \models p & \textit{ssi} & w \in V(p) \\
(M,w) \models \neg\varphi & \textit{ssi} & \textit{no es cierto que } (M,w) \models \varphi \\
(M,w) \models (\varphi \vee \psi) & \textit{ssi} & (M,w) \models \varphi \textit{ ó } (M,w) \models \psi \\
(M,w) \models K_i\varphi & \textit{ssi} & (M,u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que } (w,u) \in R_i \\
(M,w) \models [\alpha]\varphi & \textit{ssi} & (M',w') \models \varphi \textit{ para todo } (M',w') \textit{ tal que} \\
 & & \rho_\alpha(M,w) = (M',w')
\end{array}$$

donde $p \in \Phi$, $i \in \mathcal{A}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}$ y $\alpha \in \mathcal{LA}$.

Cuando $(M, w) \models \varphi$, diremos que φ es verdadera *en (M, w). En el caso en que no sea cierto que $(M, w) \models \varphi$, escribiremos $(M, w) \not\models \varphi$ y diremos que φ* es falsa *en (M, w).*

Las definiciones de satisfactibilidad y validez para fórmulas de $\mathcal{LDE}$ son similares que aquellas para fórmulas de $\mathcal{LE}$.

Definición 3.4.5 (Satisfactibilidad y validez). *Sea (M, w) una estructura acentuada tal que $M = (W, R_i, V)$, y sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}$.*

1. *Decimos que φ es* satisfactible *en M si $(M, w) \models \varphi$ para algún $w \in W$.*

2. *Decimos que φ es* válida *en M si $(M, w) \models \varphi$ para todo $w \in W$. Cuando sea este el caso (φ válida en M) escribiremos*

$$M \models \varphi$$

3. *Decimos que φ es* satisfactible *si es satisfactible en alguna estructura M.*

4. *Decimos que φ es* válida *si es válida en cualquier estructura M. Cuando sea este el caso (φ válida) escribiremos*

$$\models \varphi$$

Capítulo 4

Conocimiento definitivo en el dominó

En el presente trabajo distinguimos el conocimiento que posee un jugador durante un juego, tal y como se mencionó en la sección 1.3. En el presente capítulo presentamos un lenguaje lógico que nos permite expresar el conocimiento definitivo que posee cada agente, así como la forma en que este se modifica como consecuencia de las acciones que se llevan a cabo durante el juego. Recordemos que el conocimiento definitivo es aquel que se tiene acerca de la situación actual del juego. En el caso del dominó, este conocimiento comprende principalmente la distribución de las fichas entre los jugadores y la mesa.

El lenguaje que desarrollaremos se basará en el lenguaje de lógica dinámica epistémica proposicional presentado en el capítulo 3. Para que el lenguaje sea apropiado para el juego que nos interesa, definiremos primero las proposiciones atómicas que nos servirán para expresar situaciones dentro del juego.

4.1. Proposiciones atómicas

Nuestra meta es desarrollar un lenguaje que nos permita, primero, expresar situaciones posibles en el juego, para lo cual debemos definir el conjunto de proposiciones atómicas que nos permitirán expresar los hechos básicos. Debemos ser capaces de expresar información tal como la distribución de las fichas entre los jugadores, el número de fichas que tiene cada uno, qué fichas ya han sido jugadas, la secuencia de acciones que se han realizado y la situación de la mesa antes de una acción en particular.

Entre los hechos básicos, el más importante es la distribución de fichas entre los jugadores y la mesa. Es conveniente definir proposiciones que nos permitan expresar quién tiene cada ficha. La proposición $\boxed{x|y}^{i}$ nos permitirá expresar que el jugador i tiene la ficha $\boxed{x|y}$ en su mano. De la misma forma, la proposición $\boxed{x|y}^{t}$ nos permitirá expresar que la ficha $\boxed{x|y}$ está sobre la mesa.

También es importante el saber con cuántas fichas cuenta cada jugador. Recordemos que la meta del juego es ser el primer jugador en terminar sus fichas, por lo que cada jugador debe enfocarse en tratar de encaminar el juego a una situación en la cual sea fácil deshacerse de sus propias fichas y que los jugadores contrarios no puedan. La proposición fichas^{i}_{n} nos indicará que el jugador i tiene n fichas en su mano, mientras que la proposición fichas^{t}_{n} nos indicará que hay n fichas sobre la mesa.

En aquellos casos en los cuales ningún jugador haya terminado sus fichas y no sea posible colocar ninguna sobre la mesa, el ganador se decide en base a los puntos que suman las fichas de cada jugador. Las proposiciones pts^{i}_{n}, pts^{t}_{n} y $\mathit{menosPuntos}^{i,j}$ expresarán "las fichas que tiene en su mano el jugador i suman n puntos", "las fichas que hay en la mesa suman n puntos" y "las fichas que tienen los jugadores i y j suman menos puntos que las que tienen los demás jugadores", respectivamente.

La ficha que se jugará depende de a qué jugador le corresponde el turno así como de los extremos libres en la mesa. Cuando sea el turno del jugador i escribiremos turno^{i} mientras que la proposición (u, v) nos indicará que u y v son los extremos libres.

También es posible obtener información importante sobre el estado del juego si sabemos cuáles eran los extremos libres de la mesa en el momento en el que se jugó una ficha en particular; cada jugador coloca fichas de acuerdo a aquellas que tiene. De la misma forma, es útil saber cuál fue la situación en la mesa *después* de que se jugó alguna ficha; cada jugador intenta colocar fichas de tal forma que le sea mas fácil deshacerse de las fichas que le restan. Las proposiciones ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{i}$ ("los extremos libres en la mesa eran u y v antes de que i tirara la ficha $\boxed{x|y}$") y $\boxed{x|y}^{i}_{(u,v)}$ ("los extremos libres en la mesa fueron u y v después de que i tirara la ficha $\boxed{x|y}$") nos ayudarán a indicar estas situaciones.

A continuación definimos el conjunto de proposiciones atómicas que expresan hechos importantes dentro del juego.

Definición 4.1.1 (Proposiciones atómicas Φ_{D}). *Sea*

$$\mathcal{J} = \{a, b, c, d\}$$

el conjunto de jugadores, y sea

$$\mathcal{F} = \{\boxed{0|0}, \boxed{0|1}, \ldots, \boxed{5|6}, \boxed{6|6}\}$$

el conjunto de fichas de dominó. Definimos el conjunto de proposiciones atómicas para el juego de domino como

$$\Phi_{\mathbb{D}} = \{\boxed{x|y}^{\,i}, \boxed{x|y}^{\,t}, \mathit{fichas}^i_n, \mathit{fichas}^t_n, \mathit{pts}^i_n, \mathit{pts}^t_n, \mathit{menosPuntos}^{i,j}, \\ \mathit{turno}^i, (u,v), {}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}, \boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)}\}$$

donde $i, j \in \mathcal{J}$, $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* u, v *son valores posibles de un extremo de las fichas* ($u, v \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$).

Cada proposición tiene el siguiente significado intuitivo mostrado en la tabla 4.1.

Proposición	**Significado intuitivo**
$\boxed{x\|y}^{\,i}$	El jugador i tiene la ficha $\boxed{x\|y}$.
$\boxed{x\|y}^{\,t}$	La ficha $\boxed{x\|y}$ está en la mesa.
fichas^i_n	El jugador i tiene n fichas en su mano.
fichas^t_n	Hay n fichas en la mesa.
pts^i_n	Las fichas que tiene el jugador i suman n puntos.
pts^t_n	Las fichas que hay en la mesa suman n puntos.
$\mathit{menosPuntos}^{i,j}$	Las fichas que tienen los jugadores i y j suman menos puntos que las fichas que tienen los demás jugadores.
turno^i	Es el turno del jugador i.
(u, v)	Los extremos libres en la mesa son u y v. Nótese que (u, v) es equivalente a (v, u).
${}_{(u,v)}\boxed{x\|y}^{\,i}$	Los extremos libres en la mesa eran u y v antes de que i tirara la ficha $\boxed{x\|y}$.
$\boxed{x\|y}^{\,i}_{(u,v)}$	Los extremos libres en la mesa fueron u y v después de que i tirara la ficha $\boxed{x\|y}$.

Tabla 4.1: Significado intuitivo de las proposiciones atómicas

Es importante hacer una aclaración respecto al conjunto de fichas $\mathcal{F}$. En dicho conjunto aparece, o bien $\boxed{x|y}$ o bien $\boxed{y|x}$ (para x y y en $\{0,1,2,3,4,5,6\}$). Recordemos que en el dominó, la ficha $\boxed{x|y}$ es exactamente la misma ficha que $\boxed{y|x}$. Para evitar confusiones, cuando digamos que $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}$ estaremos entendiendo que en $\mathcal{F}$ aparece $\boxed{x|y}$ o su permutación ($\boxed{y|x}$).

4.2. Sintaxis de lenguaje proposicional y el lenguaje epistémico

En la sección anterior se hizo un pequeño análisis de las situaciones que necesitamos expresar dentro del juego. También definimos el conjunto de proposiciones atómicas $\Phi_{\mathcal{D}}$ que nos servirán para definir el lenguaje lógico epistémico para el dominó que será utilizado. Este lenguaje, llamado $\mathcal{LE}_{\mathcal{D}}$, nos permitirá expresar tanto situaciones dentro del juego como el conocimiento que tienen los jugadores acerca de estas situaciones.

Con ayuda de los conectivos lógicos $\neg$ y $\vee$ se define primero el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, que nos permite simplemente expresar situaciones dentro del juego.

Definición 4.2.1 (Lenguaje lógico para el dominó $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$). *Las fórmulas del lenguaje lógico proposicional para el dominó $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ se construyen a partir del conjunto de fórmulas atómicas $\Phi_{\mathcal{D}}$ siguiendo las reglas que se muestran a continuación:*

1.-	$\top \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$		
2.-	*Si* $p \in \Phi_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$p \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$
3.-	*Si* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$\neg\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$
4.-	*Si* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ *y* $\psi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$

Utilizando la notación BNF, las fórmulas φ en $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ se definen de manera equivalente con las siguientes reglas:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi)$$

donde $p \in \Phi_{\mathcal{D}}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.

La fórmula $\top$ representa la fórmula que es siempre verdadera, $\neg\varphi$ representa la negación de φ y $(\varphi \vee \psi)$ representa la disyunción de φ y ψ.

Si agregamos al lenguaje un operador modal K_i por cada jugador i, podemos construir fórmulas con las cuales es posible describir el conocimiento que tiene cada jugador acerca de la situación del juego en un momento dado.

Definición 4.2.2 (Lenguaje lógico epistémico para el dominó $\mathcal{LE}_{\mathcal{D}}$). *Las fórmulas del lenguaje lógico epistémico proposicional para el dominó $\mathcal{LE}_{\mathcal{D}}$ se construyen a partir del conjunto de fórmulas atómicas $\Phi_{\mathcal{D}}$ y el conjunto de jugadores $\mathcal{J}$ siguiendo las reglas que se muestran a continuación:*

1.- $\top \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$			
2.- Si	$p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$p \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$
3.- Si	$\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$\neg\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$
4.- Si	$\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ *y* $\psi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$
5.- Si	$i \in \mathcal{J}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$K_i\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$
6.- Si	$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$C_{\mathcal{B}}\varphi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$

Utilizando la notación BNF, las fórmulas φ en $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$ se definen de manera equivalente con las siguientes reglas:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid K_i\varphi \mid C_{\mathcal{B}}\varphi$$

donde $p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$, $i \in \mathcal{J}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$.

La fórmula $\top$ representa la fórmula que es siempre verdadera, la fórmula $\neg\varphi$ representa la negación de φ, $(\varphi \vee \psi)$ representa la disyunción de φ y ψ, $K_i\varphi$ expresa que el jugador i sabe φ y $C_{\mathcal{B}}\varphi$ expresa que φ es conocimiento común entre los jugadores en $\mathcal{B}$.

4.3. Semántica del lenguaje proposicional

Presentaremos primero la semántica del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$, que es una lenguaje en el cual es posible expresar situaciones dentro del juego de dominó, pero no el conocimiento de los jugadores acerca del mismo. Posteriormente presentaremos la semántica para el lenguaje $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ que, gracias al operador modal K_i, sí nos permite expresar conocimiento.

Para dar un valor de verdad a las fórmulas que podemos construir con el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$, necesitamos dar valor de verdad a cada una de las proposiciones atómicas que conforman el conjunto $\Phi_{\mathfrak{D}}$. Una primera opción es asignar valores de verdad a cada una de estas proposiciones de manera independiente, pero esto nos llevaría a un problema: nada nos impide que proposiciones como $\boxed{4|5}^c$ y $\boxed{4|5}^d$ sean ambas verdaderas y sabemos que la distribución de fichas es excluyente en el sentido en que si el jugador c tiene cierta ficha, ninguno de los otros jugadores la tiene; no hay en el dominó una distribución de fichas tal que las proposiciones $\boxed{4|5}^c$ y $\boxed{4|5}^d$ sean ciertas al mismo tiempo.

Una posible solución es, una vez definido completamente el lenguaje para el juego, añadir como axioma una fórmula que impida casos como el anterior. La fórmula $\boxed{x|y}^a \rightarrow \neg(\boxed{x|y}^b \vee \boxed{x|y}^c \vee \boxed{x|y}^d)$ cumpliría esta función. Sin embargo, esto nos llevaría posteriormente a agregar fórmulas que expresen hechos tales como "si la ficha $\boxed{x|y}$ está en la mesa entonces no está en la mano de jugador alguno", "solo hay 28 fichas", etc. con lo cual aumentaríamos la complejidad del trabajo. Una mejor manera de solucionar el problema es que el modelo en el cual interpretamos las fórmulas sea de tal forma que proposiciones como las anteriores no puedan ser verdaderas al mismo tiempo, sin necesidad de fórmulas extras.

Nótese como el valor de verdad de las proposiciones atómicas $\boxed{x|y}^{\,i}$, $\boxed{x|y}^{\,t}$, fichas^i_n, fichas^t_n, pts^i_n, pts^t_n y $\mathit{menosPuntos}^{i,j}$ depende de la distribución de fichas entre los jugadores y la mesa. Con esto queremos decir que si conocemos qué fichas tiene cada jugador y qué fichas ya han sido jugadas, podemos decidir si las proposiciones anteriores son verdaderas o falsas. Podemos caracterizar esta distribución con una función que tome como argumento una ficha y nos diga dónde se encuentra esta. Definimos la función de distribución de fichas de la siguiente forma.

Definición 4.3.1 (Función de distribución de fichas δ). *Sea δ una función del conjunto de fichas al producto cartesiano del conjunto de jugadores y el conjunto $\{0,1\}$:*

$$\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{J} \times \{0,1\}$$

Sea $\mathcal{F}_\delta(i)$ el conjunto de fichas asignadas al jugador i de acuerdo con la función δ:

$$\mathcal{F}_\delta(i) = \left\{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta(\boxed{x|y}) = (i, \_) \right\}$$

Decimos que la función δ es una función de distribución de fichas *si asigna exactamente siete fichas a cada jugador, es decir, si:*

$$|\mathcal{F}_\delta(i)| = 7 \qquad \text{para todo} \quad i \in \mathcal{J}$$

Una función de distribución de fichas nos dice qué jugador tiene (o tuvo) cada ficha, y si esta ha sido jugada (1) o no (0).

Sea δ una función de distribución. Las proposiciones atómicas mencionadas anteriormente reciben un valor de verdad con base en esta función de la siguiente forma:

- $\boxed{x|y}^{\,i}$ es verdadera si y solo si la función δ nos indica que el jugador i tiene la ficha $\boxed{x|y}$ en sus manos.
- $\boxed{x|y}^{\,t}$ es verdadera si y solo si la función δ nos indica que la ficha $\boxed{x|y}$ está en la mesa.
- fichas^i_n es verdadera si y solo si el jugador i tiene n fichas en sus manos, de acuerdo a δ, es decir, si $|\mathcal{F}^i_\delta| = n$ donde $\mathcal{F}^i_\delta$ es el conjunto de fichas

que el jugador i tiene en sus manos. Nótese la diferencia entre $\mathcal{F}_\delta(i)$ y $\mathcal{F}_\delta^i$: el primero es el conjunto de fichas que le fueron asignados a i al inicio de la partida, mientras que el segundo es el conjunto de fichas que i tiene en sus manos durante cierta partida en el momento de evaluar las proposiciones.

- fichas_n^t es verdadera si y solo si hay n fichas en la mesa de acuerdo a δ, es decir, si $|\mathcal{F}_\delta^t| = n$ donde $\mathcal{F}_\delta^t$ es el conjunto de fichas que están sobre la mesa.
- pts_n^i es verdadera si y solo si $\mathrm{PTS}(\mathcal{F}_\delta^i) = n$, donde la función PTS : $2^{\mathcal{F}} \to \mathbb{N}$ regresa los puntos que suman un conjunto de fichas.
- pts_n^t es verdadera si y solo si $\mathrm{PTS}(\mathcal{F}_\delta^t) = n$.
- $\mathit{menosPuntos}^{i,j}$ es verdadera si y solo si la suma de $\mathrm{PTS}(\mathcal{F}_\delta^i)$ y $\mathrm{PTS}(\mathcal{F}_\delta^j)$ es menor a la suma de los puntos de los otros jugadores.

Con δ no puede suceder que $\boxed{4|5}^{\,c}$ y $\boxed{4|5}^{\,d}$ sean ciertas al mismo tiempo, pues esto implicaría que $\delta(\boxed{4|5}) = (c, 0)$ y $\delta(\boxed{4|5}) = (d, 0)$ lo cual es imposible al ser δ una función.

La función de distribución de fichas tan solo nos indica dónde se encuentra cada ficha en un momento dado, pero no nos da ninguna información acerca de la forma en que se ha desarrollado el juego. A partir de ella no podemos deducir el valor de verdad de las proposiciones atómicas restantes (turno^i, (u, v), ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}$ y $\boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)}$).

La información necesaria para dar valor de verdad a estas proposiciones está relacionada no con la distribución actual de las fichas, sino con las acciones que se han realizado durante la partida y la situación de la misma al realizarse dichas acciones. Es necesario entonces que por cada acción realizada guardemos un registro de aquellos datos que sean importantes; llamaremos a este registro el *historial de la partida*. ¿Qué necesitamos registrar por cada acción para obtener posteriormente la información que necesitamos? Conocer los extremos libres antes y después de la acción no es suficiente, ya que puede suceder que los extremos libres sean 3 y 1, y el jugador pase, en cuyo caso los extremos libres seguirían siendo 3 y 1, o que el jugador tire $\boxed{3|3}$ lo que dejaría la mesa en la misma situación. Es necesario, por lo tanto, indicar qué ficha se tiró en cada turno. Tampoco es suficiente el conocer simplemente qué ficha ha sido jugada, ya que si los extremos libres son 3 y 1, y se tira la ficha $\boxed{1|3}$, esta puede tirarse de dos formas distintas. Es necesario entonces indicar tanto los extremos libres en la mesa antes y después del tiro, como la ficha que fue colocada a fin de poder distinguir situaciones como las anteriores. Este pequeño análisis nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.3.2 (Historial de una partida). *Definimos el* historial de una partida *$\mathcal{H}$ como una secuencia (posiblemente vacía) en la cual, por cada acción realizada durante la partida agregamos dos entradas, la primera de la forma*

$$\alpha^i_f$$

indicando la acción que se realizó ($i \in \mathcal{J}$ y $f \in \mathcal{F} \cup \{\varepsilon\}$), y la segunda de la forma

$$(u, v)$$

indicando los extremos libres en la mesa después de la acción. Nótese que (u, v) es equivalente a (v, u)

La acción $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ indica que el jugador i colocó la ficha $\boxed{x|y}$ en la mesa haciéndola coincidir con el extremo libre x, mientras que α^i_ε indica que el jugador i pasó sin jugar ficha alguna. La idea de subsecuencia es análoga a la idea de subcadena: diremos que $\hbar$ es una subsecuencia de *$\mathcal{H}$ si $\hbar$ aparece en $\mathcal{H}$.*

Nótese que no toda secuencia compuesta por entradas de la forma mencionada describe una partida realizada correctamente. Para que esto suceda es necesario que:

1. *En cada subsecuencia de la forma $(u, v)\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ que aparece en $\mathcal{H}$ se cumpla que $x = u$ ó $x = v$.*

2. *En cada subsecuencia de la forma $\alpha^i_{\boxed{x|y}}(u, v)$ que aparece en $\mathcal{H}$ se cumpla que $y = u$ ó $y = v$.*

3. *En cada subsecuencia de la forma $(u_1, v_1)\alpha^i_\varepsilon(u_2, v_2)$ que aparece en $\mathcal{H}$ se cumpla que $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.*

4. *Si una ficha $\boxed{x|y}$ aparece en $\mathcal{H}$, entonces ni $\boxed{x|y}$ ni su permutación ($\boxed{y|x}$) vuelven a aparecer en $\mathcal{H}$.*

5. *La secuencia de acciones se ha realizado siguiendo correctamente el turno de los jugadores.*

Cuando se cumplan estas condiciones, diremos que $\mathcal{H}$ es el historial de una partida válida.

Obsérvese un detalle importante respecto a las entradas en un historial. Una entrada de la forma $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ representa una acción *diferente* a la representada por la entrada $\alpha^i_{\boxed{y|x}}$, ya que la primera indica que la ficha se colocó cubriendo un extremo libre x, mientras que la segunda indica que la ficha se colocó cubriendo un extremo libre y. Por otro lado, ambas acciones involucran al mismo jugador y a la misma ficha. Definiremos la siguiente relación entre secuencias de la forma $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(u, v)$, que se da cuando ambas involucran al mismo jugador, a la misma ficha y los mismos extremos libres.

Definición 4.3.3 (Permutaciones de una secuencia $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(u, v)$). *Sea* $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(u, v)$ *una secuencia. Llamamos* permutaciones de $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(u, v)$ *a las siguientes secuencias:*

$$\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}(u, v), \quad \alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(v, u), \quad \alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}(v, u)$$

Nótese la diferencia entre dichas secuencias:

- $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(u, v)$ *indica que la ficha se colocó sobre el extremo libre* x, *y los extremos libres resultantes fueron* (u, v).
- $\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}(u, v)$ *indica que la ficha se colocó sobre el extremo libre* y, *y los extremos libres resultantes fueron* (u, v).
- $\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}(v, u)$ *indica que la ficha se colocó sobre el extremo libre* x, *y los extremos libres resultantes fueron* (v, u).
- $\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}(v, u)$ *indica que la ficha se colocó sobre el extremo libre* y, *y los extremos libres resultantes fueron* (v, u).

La definición de permutaciones para una secuencia de la forma $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$ es similar a la definición anterior.

Definición 4.3.4 (Permutaciones de una secuencia $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$). *Sea* $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$ *una secuencia. Llamamos* permutaciones de $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$ *a las siguientes secuencias:*

$$(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}, \quad (v, u)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}, \quad (v, u)\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}$$

Nótese la diferencia entre dichas secuencias:

- $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$ *indica que los extremos libres eran* (u, v), *y la ficha se colocó sobre el extremo libre* x.
- $(u, v)\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}$ *indica que los extremos libres eran* (u, v), *y la ficha se colocó sobre el extremo libre* y.
- $(v, u)\alpha^{i}_{\boxed{x}\boxed{y}}$ *indica que los extremos libres eran* (v, u), *y la ficha se colocó sobre el extremo libre* x.
- $(v, u)\alpha^{i}_{\boxed{y}\boxed{x}}$ *indica que los extremos libres eran* (u, v), *y la ficha se colocó sobre el extremo libre* x.

Como ejemplo del historial de una partida, supóngase una primera ronda en la que el jugador a tiró la ficha $\boxed{6|6}$, b tiró la ficha $\boxed{4|6}$, c tiró $\boxed{1|4}$ y d tiró $\boxed{3|6}$. El historial es

$$\alpha^{a}_{\boxed{6|6}}(6,6)\alpha^{b}_{\boxed{6|4}}(4,6)\alpha^{c}_{\boxed{4|1}}(1,6)\alpha^{d}_{\boxed{6|3}}(1,3)$$

Utilizando el historial de una partida $\mathcal{H}$, podemos decir cuándo son verdaderas o no las proposiciones atómicas restantes.

- $turno^{i}$ es verdadera en la partida con historial $\mathcal{H}$ si y solo si el número de acciones que se han realizado más uno dividido entre 4 resulta i (recordemos que hay cuatro jugadores).

- (u,v) es verdadera en la partida con historial $\mathcal{H}$ si y solo si la última acción que se registró en $\mathcal{H}$ (la última realizada en el juego hasta este momento) dejó a u y a v como los extremos libres en la mesa.

  Obsérvese que, aunque sintácticamente la proposición (u,v) es diferente a la proposición (v,u), para propósitos del dominó, ambas tienen el mismo significado: el decir que los extremos libres son u y v es equivalente a decir que los extremos libres son v y u. Entonces la proposición (u,v) será verdadera en la partida con el historial $\mathcal{H}$ si de acuerdo a $\mathcal{H}$ los extremos libres a consecuencia de la última acción son (u,v) ó (v,u).

- ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}$ es verdadera en la partida con historial $\mathcal{H}$ si y solo si existe en $\mathcal{H}$ una subsecuencia que indica que el jugador i colocó la ficha $\boxed{x|y}$ cuando los extremos libre en la mesa eran u y v. Nótese que esto es indicado no solo por la secuencia $(u,v)\alpha^{i}_{\boxed{x|y}}$, sino también por sus permutaciones. Por lo tanto, diremos que la proposición ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}$ es verdadera en la partida con historial $\mathcal{H}$ si y solo si $(u,v)\alpha^{i}_{\boxed{x|y}}$ o alguna de sus permutaciones aparece en $\mathcal{H}$.

- $\boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)}$ es verdadera en la partida con historial $\mathcal{H}$ si y solo si $\alpha^{i}_{\boxed{x|y}}(u,v)$ o alguna de sus permutaciones aparece en $\mathcal{H}$.

Contamos ahora con la función de distribución de fichas δ y el historial de la partida $\mathcal{H}$ para dar valor de verdad a las proposiciones atómicas en $\Phi_{\mathcal{D}}$. Nótese que no cualquier par $(\mathcal{H},\delta)$ describe una situación posible durante una partida válida. Para esto, es necesario que se cumplan ciertas condiciones.

Definición 4.3.5 (Descripción consistente de situación). *Decimos que el par* $(\mathcal{H}, \delta)$ *formado por el historial de una partida* $\mathcal{H}$ *y la función de distribución de fichas* δ *es una* descripción consistente de la situación de una partida *si y solo si:*

1. *$\mathcal{H}$ es el historial de una partida válida (véase la def. 4.3.2).*

2. *$\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ aparece en $\mathcal{H}$ si y solo si $\delta(\boxed{x|y}) = (i,1)$ (ó $\delta(\boxed{y|x}) = (i,1)$, si la permutación que aparece en $\mathcal{F}$ es $\boxed{y|x}$.*

3. *$\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ aparece en $\mathcal{H}$ si y solo si $\delta(\boxed{x|y}) = (i,0)$ (ó $\delta(\boxed{y|x}) = (i,0)$, si la permutación que aparece en $\mathcal{F}$ es $\boxed{y|x}$.*

Presentamos primero la semántica de las fórmulas atómicas en $\Phi_{\mathfrak{D}}$. A fin de facilitar el trabajo, hacemos las siguientes definiciones:

- El conjunto de fichas que tiene el jugador i en su mano de acuerdo a la función δ se define la siguiente manera:

$$\mathcal{F}^i_\delta = \left\{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta(\boxed{x|y}) = (i,0) \right\}$$

- El conjunto de fichas que aparecen en la mesa de acuerdo a la función δ se define la siguiente manera:

$$\mathcal{F}^t_\delta = \left\{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta(\boxed{x|y}) = (\_,1) \right\}$$

- La función que nos regresa la cantidad de puntos que suman un conjunto de fichas se define de la siguiente manera:

$$\mathrm{PTS}(A) = \sum_{\boxed{x|y} \in A} (x+y) \quad \text{para} \quad A \subseteq \mathcal{F}$$

- Para trabajar con la proposición atómica *turno^i*, definimos la función $\tau : \mathcal{J} \to \{1,2,3,4\}$ que al iniciar la partida asigna a cada jugador un número de acuerdo al orden de tiro, de la siguiente forma:

Primer turno	**Función τ**
a	$\tau(a) = 1, \tau(b) = 2, \tau(c) = 3, \tau(d) = 4$
b	$\tau(a) = 4, \tau(b) = 1, \tau(c) = 2, \tau(d) = 3$
c	$\tau(a) = 3, \tau(b) = 4, \tau(c) = 1, \tau(d) = 2$
d	$\tau(a) = 2, \tau(b) = 3, \tau(c) = 4, \tau(d) = 1$

Nótese que τ es una función biyectiva, por lo cual existe su inversa τ^{-1}.

Definición 4.3.6 (Semántica de $\Phi_{\mathfrak{D}}$ en $\mathfrak{L}_{\mathfrak{D}}$). *Sea $(\mathcal{H},\delta)$ una descripción consistente de la situación de una partida. Definimos la relación $\models_\Phi$ entre el par $(\mathcal{H},\delta)$ y una proposición atómica $p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$ de la siguiente forma.*

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \boxed{x|y}^{\,i} & \textit{ssi} & \boxed{x|y} \in \mathcal{F}^i_\delta \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \boxed{x|y}^{\,t} & \textit{ssi} & \boxed{x|y} \in \mathcal{F}^t_\delta \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{fichas}^i_n & \textit{ssi} & |\mathcal{F}^i_\delta| = n \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{fichas}^t_n & \textit{ssi} & |\mathcal{F}^t_\delta| = n \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{pts}^i_n & \textit{ssi} & \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^i_\delta) = n \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{pts}^t_n & \textit{ssi} & \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^t_\delta) = n \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{menosPuntos}^{i,j} & \textit{ssi} & \left(\mathrm{PTS}(\mathcal{F}^i_\delta) + \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^j_\delta)\right) < \sum_{k\in\mathcal{J}-\{i,j\}} \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^k_\delta) \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \textit{turno}^i & \textit{ssi} & \tau^{-1}\Big((|\mathcal{H}| \mod 4) + 1\Big) = i \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi (u,v) & \textit{ssi} & \mathcal{H} = \ldots\alpha^i_f(u,v) \quad \text{ó} \quad \mathcal{H} = \ldots\alpha^i_f(v,u) \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi {}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i} & \textit{ssi} & (u,v)\alpha^i_{\boxed{x|y}} \textit{ (o alguna de sus permutaciones)} \\
 & & \textit{aparece en } \mathcal{H} \\
(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi \boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)} & \textit{ssi} & \alpha^i_{\boxed{x|y}}(u,v) \textit{ (o alguna de sus permutaciones)} \\
 & & \textit{aparece en } \mathcal{H}
\end{array}
$$

Cuando $(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi p$, diremos que p es verdadera en $(\mathcal{H},\delta)$. *En el caso en que no sea cierto que $(\mathcal{H},\delta) \models_\Phi p$, escribiremos $(\mathcal{H},\delta) \not\models_\Phi p$ y diremos que p* es falsa en $(\mathcal{H},\delta)$.

Utilizando la definición semántica para proposiciones atómicas, definimos la semántica para fórmulas del lenguaje $\mathfrak{L}_{\mathfrak{D}}$.

Definición 4.3.7 (Semántica de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{D}}$). *Sea $(\mathcal{H},\delta)$ una descripción consistente de la situación de una partida. Definimos la relación $\models$ entre el par $(\mathcal{H},\delta)$ y una fórmula φ en $\mathfrak{L}_{\mathfrak{D}}$ de manera inductiva sobre la estructura sintáctica de φ.*

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{H},\delta) \models \top & & \\
(\mathcal{H},\delta) \models p & \textit{ssi} & p \in \Phi_{\mathfrak{D}} \textit{ y } (\mathcal{H},\delta) \models_\Phi p \quad \textit{(ver def. 4.3.6)} \\
(\mathcal{H},\delta) \models \neg\varphi & \textit{ssi} & \textit{no es cierto que } (\mathcal{H},\delta) \models \varphi \\
(\mathcal{H},\delta) \models (\varphi \vee \psi) & \textit{ssi} & (\mathcal{H},\delta) \models \varphi \quad \textit{ó} \quad (\mathcal{H},\delta) \models \psi
\end{array}
$$

donde $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{D}}$.

Cuando $(\mathcal{H},\delta) \models \varphi$, diremos que φ es verdadera en $(\mathcal{H},\delta)$. *En el caso en que no sea cierto que $(\mathcal{H},\delta) \models \varphi$, escribiremos $(\mathcal{H},\delta) \not\models \varphi$ y diremos que φ* es falsa en $(\mathcal{H},\delta)$.

La relación "$\models$" es usualmente utilizada para describir consecuencia lógica. En lógica proposicional clásica, $\Sigma \models \varphi$ expresa que la fórmula φ es una consecuencia lógica del conjunto de fórmulas Σ. Es interesante revisar que propiedades *estructurales* cumple la relación "$\models$" bajo esta idea. Es, por ejemplo, monótona, ya que si φ es consecuencia lógica de Σ ($\Sigma \models \varphi$) entonces el agregar una fórmula nueva a Σ ($\Sigma' = \Sigma \cup \{\sigma\}$) no modifica este hecho: φ sigue siendo consecuencia lógica de este nuevo conjunto ($\Sigma' \models \varphi$).

En nuestro caso, aunque "$\models$" es también utilizada con fin de describir consecuencia lógica, la idea es un poco diferente. El conjunto de fórmulas Σ es substituido por un par $(\mathcal{H}, \delta)$, donde $\mathcal{H}$ es una secuencia que cumple ciertas propiedades y δ es una función definida también de manera especial. Además, el historial $\mathcal{H}$ y la función δ deben de satisfacer ciertas condiciones a fin de formar un par en el cual podamos evaluar una fórmula del lenguaje. Sería interesante revisar que propiedades estructurales cumple esta relación, a fin de entender que tipo de relación estamos definiendo. Sin embargo, para hacerlo tendríamos que definir, en el caso de monotonía, que entenderíamos por "agregar una nueva fórmula" al par $(\mathcal{H}, \delta)$. En el presente trabajo no se hace un análisis acerca de las propiedades estructurales de la relación "$\models$" que estamos definiendo.

4.4. Semántica del lenguaje epistémico

La estructura que se debe construir para el lenguaje epistémico $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ debe ser capaz de describir el conocimiento de los jugadores acerca de la situación del juego. La estructura de mundos posibles (véase la definición 2.4.1) que sirve de modelo para la lógica epistémica proposicional es la base para la estructura que será utilizada como modelo para el lenguaje lógico epistémico proposicional para el dominó. Cada uno de estos mundos posibles expresa una de las situaciones que es considerada como posible por algún agente.

En el caso del dominó, la información sobre la situación de una partida puede clasificarse en dos grupos, como se observa en la definición semántica para el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$: aquella información sobre la distribución de las fichas entre la mesa y los jugadores, y aquella información sobre la secuencia de acciones que se han realizado durante la partida. Dado que los jugadores en general no conocen la distribución de fichas (al inicio de cada partida, cada jugador conoce tan solo las fichas que él tiene y desconoce las fichas que tienen los demás jugadores), entonces pueden considerar como posibles diferentes distribuciones. Un mundo posible, por lo tanto, debe describir una de estas posibles distribuciones. Sin embargo, a excepción del reparto de fichas, todas las acciones que se realizan durante una partida son acciones públicas, es decir, todos saben que acción se realizó y quien la realizó, todos saben que todos saben que acción se realizo y quien la realizó, y así sucesivamente. En otras palabras, cada acción que se realiza se vuelve *conocimiento común* entre todos los jugadores. Por lo tanto, no es necesario que cada mundo posible describa también una secuencia de acciones posible.

Sea (W, R_i) un marco de mundos posibles. Intuitivamente, a cada mundo posible le debe corresponder una de las distribuciones de fichas que consideran posibles los jugadores. Para lograr esto, a cada mundo posible $w \in W$ le asociamos una función δ_w que indicará la distribución de fichas en esa situación posible.

Definición 4.4.1 (Estructura de mundos posibles para el dominó). *Dado el conjunto de jugadores $\mathcal{J}$, una* estructura de mundos posibles para el juego de dominó *es una dupla $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ donde:*

- *W es un conjunto no vacío. Cada elemento de W es llamado un* mundo posible *o una* situación posible.
- *Para cada $i \in \mathcal{J}$, R_i es una relación binaria entre elementos de W ($R_i \subseteq (W \times W)$). R_i es llamada la* relación de accesibilidad *para el jugador i.*
- *Para cada mundo posible $w \in W$, $\delta_w : \mathcal{F} \to \mathcal{J} \times \{0, 1\}$ es la función de distribución de fichas en el mundo W, que indica quién tiene (o tuvo) qué fichas en ese mundo, y si estas están sobre la mesa (1) o no (0).*

En ocasiones llamaremos a una estructura de mundos posibles para dominó estructura epistémica para el dominó, modelo de mundos posibles para el dominó *o* modelo epistémico para el dominó. *Al par $(M_{\mathfrak{D}}, w)$, donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ es una estructura de mundos posibles para el dominó y $w \in W$, se le conoce como una* estructura acentuada para el dominó.

De esta forma, cada fórmula en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ tendrá asociado un valor de verdad en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ que está formada por

1. $\mathcal{H}$, el historial de una partida que describe la secuencia de acciones que se han llevado a cabo durante esa partida.
2. $(M_{\mathfrak{D}}, w)$, una estructura acentuada para el dominó, que describe el conocimiento que tienen los jugadores acerca de la distribución de fichas en la partida, así como el mundo posible que describe la distribución real de las fichas.

De la misma forma que el par $(\mathcal{H}, \delta)$ debe cumplir ciertas condiciones para que sea una descripción consistente de la situación de una partida, la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ debe cumplir ciertas condiciones a fin de que sea la descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores.

Definición 4.4.2 (Descripción consistente de situación y de conocimiento). *Decimos que el par $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ formada por el historial de una partida $\mathcal{H}$ y la estructura de mundos posibles para el dominó $M_{\mathfrak{D}}$ (donde $M = (W, R_i)$) es una* descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores *si y solo si*

1. *$\mathcal{H}$ es el historial de una partida válida (véase la definición 4.3.2).*

2. *Para cada $w \in W$, el par $(\mathcal{H}, \delta_w)$ forma una descripción consistente de la situación de una partida (véase la definición 4.3.5).*

Si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ es una descripción consistente y $w \in W$, diremos también que la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ es una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores.

Hacemos las siguientes definiciones a fin de facilitar la definición semántica de proposiciones atómicas en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$.

- El conjunto de fichas que tiene el jugador i en su mano en el mundo posible w se define la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_w^i = \left\{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta_w(\boxed{x|y}) = (i, 0) \right\}$$

- El conjunto de fichas que aparecen en la mesa en el mundo posible w se define la siguiente manera:

$$\mathcal{F}_w^t = \left\{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta_w(\boxed{x|y}) = (\_, 1) \right\}$$

Definición 4.4.3 (Semántica de $\Phi_{\mathfrak{D}}$ en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$). *Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, de tal forma que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$. Definimos la relación $\models_{\Phi}$ entre la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ y una proposición atómica $p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$ de la siguiente forma:*

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \boxed{x|y}^{\,i} & \textit{ssi} & \boxed{x|y} \in \mathcal{F}^i_w \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \boxed{x|y}^{\,t} & \textit{ssi} & \boxed{x|y} \in \mathcal{F}^t_w \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{fichas}^i_n & \textit{ssi} & |\mathcal{F}^i_w| = n \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{fichas}^t_n & \textit{ssi} & |\mathcal{F}^t_w| = n \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{pts}^i_n & \textit{ssi} & \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^i_w) = n \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{pts}^t_n & \textit{ssi} & \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^t_w) = n \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{menosPuntos}^{i,j} & \textit{ssi} & \Big(\mathrm{PTS}(\mathcal{F}^i_w) + \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^j_w)\Big) \\
 & & \qquad < \Big(\sum_{k \in \mathcal{J}-\{i,j\}} \mathrm{PTS}(\mathcal{F}^k_w)\Big) \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \mathit{turno}^i & \textit{ssi} & \tau^{-1}\Big((|\mathcal{H}| \mod 4) + 1\Big) = i \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} (u, v) & \textit{ssi} & \mathcal{H} = \ldots \alpha^i_f(u, v) \quad \textit{ó} \quad \mathcal{H} = \ldots \alpha^i_f(v, u) \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} {}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i} & \textit{ssi} & (u, v)\alpha^i_{\boxed{x|y}} \textit{ (o alguna de sus permutacio-} \\
 & & \textit{nes) aparece en } \mathcal{H} \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} \boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)} & \textit{ssi} & \alpha^i_{\boxed{x|y}}(u, v) \textit{ (o alguna de sus permutacio-} \\
 & & \textit{nes) aparece en } \mathcal{H}
\end{array}
$$

Cuando $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} p$*, diremos que* p es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$*. En el caso en que no sea cierto que* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} p$*, escribiremos* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \not\models_{\Phi} p$ *y diremos que* p es falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.

Utilizando la definición anterior, definimos la semántica para fórmulas del lenguaje $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$.

Definición 4.4.4 (Semántica de $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$). *Sea* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ *una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, de tal forma que* $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ *y* $w \in W$*. Definimos la relación* $\models$ *entre la terna* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ *y una fórmula* φ *en* $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ *de manera inductiva sobre la estructura sintáctica de* φ.

$$
\begin{array}{lll}
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \top & & \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models p & \textit{ssi} & p \in \Phi_{\mathfrak{D}} \textit{ y } (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} p \quad \textit{(ver def. 4.4.3)} \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \neg\varphi & \textit{ssi} & \textit{no es cierto que } (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models (\varphi \vee \psi) & \textit{ssi} & (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi \quad \textit{ó} \quad (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \psi \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models K_i\varphi & \textit{ssi} & (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que} \\
 & & (w, u) \in R_i \\
(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models C_{\mathcal{B}}\varphi & \textit{ssi} & (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi \textit{ para todo } u \in W \textit{ tal que} \\
 & & (w, u) \in R^+_{\mathcal{B}} \textit{ (ver def. 2.5.2)}
\end{array}
$$

donde $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$*,* $i \in \mathcal{J}$ *y* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$.

Cuando $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$*, diremos que* φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$*. En el caso en que no sea cierto que* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$*, escribiremos* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \not\models \varphi$ *y diremos que* φ es falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.

Hay un punto importante en la definición anterior. Nótese que la definición semántica de fórmulas de conocimiento ($K_i\varphi$) y fórmulas de conocimiento común ($C_{\mathcal{B}}\varphi$) es igual a la utilizada para la lógica epistémica general descrita en el capítulo 2 (véanse def. 2.4.2 y def. 2.5.2). Sin embargo, en el caso del juego del dominó, hay fórmulas de conocimiento y de conocimiento común para las cuales no necesitamos de dicha definición para comprobar su valor de verdad. Recordemos que, a excepción del reparto de fichas, todas las acciones durante una partida de dominó son acciones públicas que, al realizarse, se vuelven conocimiento común entre todos los jugadores. Por lo tanto, el valor de verdad de toda fórmula de conocimiento $K_i\varphi$ donde φ involucre tan solo proposiciones atómicas relativas al historial de acciones ($turno^i$, (u, v), ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}$ y $\boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)}$) puede obtenerse sin verificar el valor de verdad de φ en todos los mundos que considera posibles el jugador i. Esto es porque el valor de verdad de φ depende no de las distribuciones de fichas que considere posibles i, sino del historial de las acciones que se han realizado. Para fórmulas de conocimiento común $C_{\mathcal{B}}\varphi$ donde φ involucre tan solo proposiciones atómicas relativas al historial de acciones, sucede lo mismo: el valor de verdad de φ depende únicamente del historial $\mathcal{H}$.

Las definiciones de satisfactibilidad y validez para fórmulas en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ son las siguientes.

Definición 4.4.5 (Satisfactibilidad y validez). *Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, de tal forma que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$.*

1. *Decimos que φ es* satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ *si es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para* algún $w \in W$.

2. *Decimos que φ es* válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ *si es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para* todo $w \in W$. *En este caso escribiremos*

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$$

3. *Decimos que φ es* satisfactible en $\mathcal{H}$ *si es satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para* alguna *estructura $M_{\mathfrak{D}}$.*

4. *Decimos que φ es* válida en $\mathcal{H}$ *si es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para* toda *estructura $M_{\mathfrak{D}}$. En este caso escribiremos*

$$\mathcal{H} \models \varphi$$

5. *Decimos que φ es* satisfactible *si es satisfactible en $\mathcal{H}$ para* algún *historial $\mathcal{H}$*

6. *Decimos que* φ *es* válida *si es válida en* $\mathcal{H}$ *para* todo *historial* $\mathcal{H}$. *En este caso escribiremos*

$$\models \varphi$$

4.5. Sintaxis del lenguaje dinámico epistémico

El lenguaje definido hasta ahora nos permite expresar situaciones dentro del juego de dominó así como el conocimiento que tienen los jugadores sobre esta situación, pero no nos permite expresar cómo esta situación y este conocimiento son modificados a consecuencia de las acciones que se realizan. El lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$, presentado a continuación, añade al lenguaje $\mathcal{LE}_{\mathcal{D}}$ una regla sintáctica que nos permite construir fórmulas que pueden expresar acciones dentro del juego y sus consecuencias. Definiremos este lenguaje de manera análoga a la definición del lenguaje $\mathcal{LDE}$ en el capítulo 3.

En el juego de dominó cada jugador puede realizar, en su turno correspondiente, una acción que puede ser de alguno de los tipos siguientes:

- Colocar una ficha en la mesa (siguiendo las reglas del juego).
- No colocar ficha alguna.

Estos dos tipos de acciones nos permiten definir nuestro conjunto de acciones básicas dentro del juego, como se hace a continuación.

Definición 4.5.1 (Acciones atómicas para el dominó). *Definimos el conjunto de acciones atómicas* $\Omega_{\mathcal{D}}$ *para el juego de dominó como*

$$\Omega_{\mathcal{D}} = \{\, \alpha^i_{\boxed{x|y}} \;,\; \alpha^i_{\epsilon} \,\}$$

donde $i \in \mathcal{J}$ *y* $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}$. *Cada acción tiene el siguiente significado intuitivo:*

Acción	*Significado intuitivo*
$\alpha^i_{\boxed{x|y}}$	*"el jugador i tira la ficha* $\boxed{x|y}$ *en un extremo libre* χ*"*
α^i_{ϵ}	*"el jugador i pasa sin tirar"*

Para definir el lenguaje $\mathcal{LDE}$, definiremos primero el lenguaje de acciones dentro del dominó $\mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$. Este lenguaje, al igual que el lenguaje $\mathcal{LA}$ definido en 3.4.1, se basa en un conjunto de acciones básicas o atómicas y en un conjunto de constructores que nos permiten formar nuevas acciones a partir de las básicas. Revisemos cuáles de los constructores utilizados anteriormente (";", "∪" y " *") nos son útiles para trabajar dentro del juego.

La composición secuencial (";") es necesaria ya que su uso nos permitirá razonar acerca del efecto que una secuencia de acciones tenga dentro del juego. La elección no determinista ("∪") nos permitirá saber cuándo dos acciones, aunque diferentes, comparten alguna consecuencia en común.

El operador " *" es el único que no tiene utilidad alguna sobre nuestro trabajo. No nos es útil razonar acerca de acciones que se repiten ya que no es posible que una acción se realice e inmediatamente después vuelva a ser realizada. Esto es gracias a que cada acción se caracteriza por la ficha jugada (ε en caso de que no se juegue ficha alguna) y el jugador que la realiza. Por lo tanto toda acción que involucre fichas no puede repetirse ya que cualquier ficha que ha sido jugada no puede volver a utilizarse. Por otro lado, aunque es posible que un jugador pase en varias ocasiones durante una partida, no puede hacerlo de manera consecutiva ya que entre cada uno de sus turnos los demás jugadores deben realizar alguna acción y, aunque todos ellos pasen, eso significa que realizaron una acción: la acción de pasar.

Definición 4.5.2 (Lenguaje de acciones en el dominó $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$). *Las fórmulas α del* lenguaje de acciones para el dominó $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ *se construyen a partir de las siguientes reglas:*

1.-	$\varepsilon \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$		
2.- Si	$\omega \in \Omega_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$\omega \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$
3.- Si	$\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ *y* $\beta \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$(\alpha;\beta) \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$
4.- Si	$\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ *y* $\beta \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$	*entonces*	$(\alpha \cup \beta) \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$

donde, recordemos, $\Omega_{\mathfrak{D}}$ es el conjunto de acciones atómicas para el juego de dominó.

En notación BNF, α es una acción en $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ si y solo si está construida a partir de las siguientes reglas:

$$\alpha ::= \varepsilon \mid \omega \mid (\alpha;\beta) \mid (\alpha \cup \beta)$$

donde $\omega \in \Omega_{\mathfrak{D}}$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$.

La acción ε representa la acción nula: aquella que hace nada; $(\alpha;\beta)$ representa la composición secuencial de las acciones α y β, y $(\alpha \cup \beta)$ representa la elección no determinista entre α y β.

Definición 4.5.3 (Lenguaje lógico dinámico epistémico en el dominó $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$). *Las fórmulas φ del* lenguaje lógico dinámico epistémico proposicional para el dominó $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ *se forman siguiendo las reglas para construir fórmulas en $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ (véase la definición 4.2.2) más la regla*

$$\varphi ::= [\alpha]\varphi$$

donde $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ *y* $\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$.

Más formalmente, sea $\Phi_{\mathcal{D}}$ *el conjunto de proposiciones atómicas del juego,* $\mathcal{J}$ *el conjunto de jugadores y* $\mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$ *el lenguaje de acciones para el dominó. Las fórmulas* φ *del lenguaje lógico dinámico epistémico para el dominó* $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ *se construyen a partir de las reglas:*

1.-	$\top \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$		
2.-	*Si* $p \in \Phi_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$p \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$
3.-	*Si* $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$\neg\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$
4.-	*Si* $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ *y* $\psi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$(\varphi \vee \psi) \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$
5.-	*Si* $i \in \mathcal{J}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$K_i\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$
6.-	*Si* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$C_{\mathcal{B}}\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$
7.-	*Si* $\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$ *y* $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$	*entonces*	$[\alpha]\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$

que en notación BNF se escriben como:

$$\varphi ::= \top \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \psi) \mid K_i\varphi \mid C_{\mathcal{B}}\varphi \mid [\alpha]\varphi$$

donde $p \in \Phi_{\mathcal{D}}$, $i \in \mathcal{J}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ *y* $\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$.

La idea intuitiva de la proposición $[\alpha]\varphi$ *es "después de ejecutarse la acción* α*,* φ *es verdadera".*

4.6. Semántica del lenguaje dinámico epistémico

Como se mencionó anteriormente, las acciones en un lenguaje lógico dinámico epistémico pueden entenderse como funciones que van de una estructura de mundos posibles a otra. En el caso particular del juego de dominó, cada acción nos debe llevar de la estructura de mundos posibles para el dominó que describe hechos y conocimiento antes de la acción a la estructura que describe hechos y conocimiento después de la acción. Debemos estudiar entonces de qué manera modifica cada acción la situación del juego y el conocimiento que los agentes tienen sobre este.

Analicemos primero la forma en que cada acción modifica el estado del juego. Nuestro lenguaje de acciones $\mathcal{LA}_{\mathcal{D}}$ se basa en las acciones $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ y α^i_{ε}, que forman el conjunto de acciones básicas $\Omega_{\mathcal{D}}$. Recordemos que el estado de la partida es descrito por su historial $\mathcal{H}$ y por la función de distribución de fichas δ, por lo cual:

- Si se realiza la acción $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$, el historial de la partida $\mathcal{H}$ se modifica al serle agregada la entrada $\alpha^i_{\boxed{x|y}}(u, v)$ de tal forma que $y = u$ ó $y = v$. La función δ se modifica al hacer $\delta(\boxed{x|y})$ (que anteriormente valía $(i, 0)$) igual a $(i, 1)$.

- Si se realiza la acción α_{ε}^{i}, el historial de la partida $\mathcal{H}$ se modifica al serle agregada una entrada de la forma $\alpha_{\varepsilon}^{i}(u, v)$ de tal forma que u y v son igual a los extremos libres antes de la acción. La función δ no sufre modificaciones pues la distribución de fichas permanece igual.

El conocimiento de los jugadores se describe con la estructura de mundos posibles, en la cual tenemos una función de distribución de fichas δ_w para cada mundo w que algún jugador considera posible. ¿Cómo modifican las acciones el conocimiento que tienen los jugadores acerca de la distribución de fichas? Nótese que aunque las acciones básicas que conforman $\Omega_{\mathfrak{D}}$ son acciones que pueden realizarse en algún momento de alguna partida, no todas ellas son posibles en una situación en particular. Si los extremos libres en la mesa son 3 y 4, no es posible tirar la ficha $\boxed{5|1}$. De la misma forma, si es turno del jugador b no es posible que el jugador a tire ficha alguna. En general, para que la acción $\alpha_{\boxed{\chi|y}}^{i}$ se lleve a cabo es necesario que el turno corresponda al jugador i, que este tenga la ficha $\boxed{\chi|y}$ y que al menos uno de los extremos libres en la mesa sea χ. Para la acción α_{ε}^{i} es necesario que le corresponda el turno al jugador i y además que este no tenga en su mano ninguna ficha que coincida con algunos de los extremos libres. Además, debemos recordar que se pueden realizar acciones solamente si la partida no ha terminado. Todos estos requisitos pueden entenderse como precondiciones necesarias para que la acción se pueda realizar. Obsérvese que estas precondiciones son situaciones de la partida, y por lo tanto pueden expresarse con fórmulas en $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$. Son precisamente estas precondiciones los hechos que cada jugador aprende de cada acción, pues son aquellos que necesariamente deben de haber sido ciertos para que la acción se haya llevado a cabo.

La idea de precondición para acciones que modifican el conocimiento de un conjunto de agentes (acciones epistémicas) se estudió en [BMS99], donde Baltag, Moss y Solecki definieron una *estructura de acción* como un par (K, pre) donde $K = (W, R_i)$ es un marco de mundos posibles (sobre un conjunto de agentes $\mathcal{A}$) y pre es una función que asigna a cada mundo posible en W una fórmula en $\mathcal{LE}$. La idea es que cada agente puede no tener toda la información acerca de la acción que se ha realizado (de ahí el marco de mundos posibles, que en este caso describe qué tanto saben los agentes acerca de la acción). Cada acción se define entonces como un conjunto finito W con relaciones R_i para cada agente i en $\mathcal{A}$ (que conforman el marco de mundos posibles) junto con una función de precondición pre y un mundo real $w \in W$ que indica cuál de los mundos posibles representa la acción que realmente se llevó a cabo.

En el caso del dominó, todas las acciones son públicas (es decir, visibles para todos los jugadores) por lo que no necesitamos una estructura de acción, pero sí necesitamos la función de precondición a fin de expresar qué hechos son necesarios para que cada acción se lleve a cabo, y por lo tanto qué es lo que aprenden los jugadores.

Para definir formalmente esta función de precondición, utilizaremos las siguientes abreviaturas de fórmulas en $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$:

$$
\begin{array}{rcl}
(x, \_) & \equiv & (x, 0) \vee (x, 1) \vee (x, 2) \vee (x, 3) \vee (x, 4) \vee (x, 5) \vee (x, 6) \\
\boxed{x|-}^{\,i} & \equiv & \boxed{x|0}^{\,i} \vee \boxed{x|1}^{\,i} \vee \boxed{x|2}^{\,i} \vee \boxed{x|3}^{\,i} \vee \boxed{x|4}^{\,i} \vee \boxed{x|5}^{\,i} \vee \boxed{x|6}^{\,i} \\
\boxed{x|y}^{\,\mathcal{J}} & \equiv & \boxed{x|y}^{\,a} \vee \boxed{x|y}^{\,b} \vee \boxed{x|y}^{\,c} \vee \boxed{x|y}^{\,d} \\
\textit{cerrado} & \equiv & (x, x) \wedge \neg\boxed{x|-}^{\,\mathcal{J}} \\
\textit{finalizó} & \equiv & \textit{fichas}_0^a \vee \textit{fichas}_0^b \vee \textit{fichas}_0^c \vee \textit{fichas}_0^d \vee \textit{cerrado}
\end{array}
$$

Las dos últimas abreviaturas merecen ser descritas: se dice que la partida esta cerrada si ningún jugador ha terminado sus fichas y ninguna ficha puede ser jugada. La única forma en que esto puede suceder es que los dos extremos libres en la mesa sean iguales y que todas las fichas de ese número ya hayan sido jugadas (es decir, que ningún jugador tenga alguna de ellas). La fórmula *cerrado* expresa este hecho. La fórmula *finalizó* indica que la partida actual ha finalizado, ya sea porque alguno de los jugadores termino sus fichas o porque la partida se cerró.

Definición 4.6.1 (Precondiciones para acciones atómicas). *La función de precondición* pre : $\Omega_{\mathcal{D}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ *asigna a cada acción atómica* $a \in \Omega_{\mathcal{D}}$ *una fórmula* $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ *que debe ser cierta para que se realice la acción.*

1. *De acuerdo con las reglas del dominó, para que se realice la acción* $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ *es necesario que la partida no haya finalizado, que sea el turno del jugador i, que este tenga la ficha* $\boxed{x|y}$ *y que en el momento de la acción alguno de los extremos libres del tablero sea* x. *Esto es,* $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ *se puede realizar si y solo si la fórmula*

$$\neg\textit{finalizó} \wedge \textit{turno}^i \wedge \boxed{x|y}^{\,i} \wedge (x, \_)$$

es verdadera en la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathcal{D}}, w)$ *que describe la situación del juego justo antes de la acción.*

2. *Para que se realice* α^i_{ε} *es necesario que la partida no haya finalizado, que sea el turno de i y que este no tenga ninguna de las fichas que coinciden con los extremos libres del tablero, es decir, es necesario que*

$$\neg\textit{finalizó} \wedge \textit{turno}^i \wedge (x, y) \wedge \neg\boxed{x|-}^{\,i} \wedge \neg\boxed{y|-}^{\,i}$$

sea verdadera en la terna que describe la situación del juego justo antes de la acción.

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{pre}(\alpha^i_{\boxed{x|y}}) &= \neg \mathit{finaliz\acute{o}} \wedge \mathit{turno}^i \wedge \boxed{x|y}^{\,i} \wedge (x, \_) \\ \mathrm{pre}(\alpha^i_\epsilon) &= \neg \mathit{finaliz\acute{o}} \wedge \mathit{turno}^i \wedge (x, y) \wedge \neg\boxed{x|-}^{\,i} \wedge \neg\boxed{y|-}^{\,i} \end{aligned}$$

Con la ayuda de la función pre definiremos ahora las funciones de transición para cada una de las acciones básicas en $\Omega_{\mathfrak{D}}$. Estas funciones deben llevarnos de una terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ (con $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$) a otra terna consistente $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ (con $M'_{\mathfrak{D}} = (W', R'_i)$ y $w' \in W'$). Estas funciones nos indican cómo modifica cada acción el conocimiento de los jugadores y el estado del juego.

La idea básica es que la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ describe la situación del juego *antes* de que se realice la acción mientr que la terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ describe la situación del juego *después* de que se realizó la acción. ¿Cómo se relacionan estas dos ternas? Intuitivamente, cada jugador aprende algo como consecuencia de cada acción. Entonces, después de realizada la acción, él ya no debe considerar como posibles aquellos mundos en los cuales lo que acaba de aprender no se satisface. En términos de nuestra estructura de mundos posibles, y siendo φ la fórmula que expresa lo que el jugador acaba de aprender, esto consiste en eliminar de su relación de accesibilidad aquellos pares (u, v) tales que $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \not\models \varphi$ ó $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \not\models \varphi$.

Lo que aprenden los jugadores como consecuencia de cada acción α es precisamente la precondición de la acción. Ya que la acción se ha realizado, su precondición $\mathrm{pre}(\alpha)$ debió de ser verdadera antes de realizarse la acción. Ya que en el dominó toda acción (exceptuando el reparto de fichas) es pública, todo jugador aprende $\mathrm{pre}(\alpha)$. Por cada acción que realiza durante el transcurso de una partida debemos eliminar entonces los pares correspondientes en la relación de accesibilidad de *todo* jugador.

Una vez eliminados de las relaciones de accesibilidad los pares correspondientes, es posible eliminar del conjunto de mundos posibles aquellos que no son accesibles a jugador alguno. Esto puede hacerse sin problemas porque estos mundos, inaccesibles ahora, son precisamente aquellos que ningún jugador considera posibles. Utilizaremos la abreviatura $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, U) \models \varphi$ para indicar que $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi$ para todo $u \in U$, donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $U \subseteq W$.

1. Para que $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ se realice, es necesario que se satisfaga su precondición, es decir, es necesario que $\mathcal{H}$, $M_{\mathfrak{D}}$ y w sean tales que

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \neg \mathit{finaliz\acute{o}} \wedge \mathit{turno}^i \wedge \boxed{x|y}^{\,i} \wedge (x, \_)$$

Sean $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $M'_{\mathfrak{D}} = (W', R'_i)$ con $w \in W$ y $w' \in W'$. Para que la función de transición para la acción $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ nos lleve de la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ a la terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ es necesario que:

- $\mathcal{H}' = \mathcal{H}\alpha^i_{\boxed{x|y}}(y, \_)$
- $R'_i = \{ (u,v) \in R_i \mid (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \mathrm{pre}(\alpha^i_{\boxed{x|y}}) \}$
- $W' = \{ u \in W \mid (u, \_) \in R'_i$ ó $(\_, u) \in R'_i$ para algún jugador $i \}$
- $w = w'$
- Para todo $w \in W'$, $\delta'_w(\boxed{m|n}) = \begin{cases} (\_, 1) & \text{si } \boxed{m|n} = \boxed{x|y} \\ \delta_w(\boxed{m|n}) & \text{si } \boxed{m|n} \neq \boxed{x|y} \end{cases}$

2. Para que α^i_ϵ se realize, es necesario que

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \neg \textit{finalizó} \wedge \textit{turno}^i \wedge (x, y) \wedge \neg\boxed{x|-}^{\,i} \wedge \neg\boxed{y|-}^{\,i}$$

Para que la función de transición para la acción α^i_ϵ nos lleve de la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ a la terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ es necesario que:

- $\mathcal{H}' = \mathcal{H}\alpha^i_\epsilon(x, y)$
- $R'_i = \{ (u,v) \in R_i \mid (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \mathrm{pre}(\alpha^i_\epsilon) \}$
- $W' = \{ u \in W \mid (u, \_) \in R'_i$ ó $(\_, u) \in R'_i$ para algún jugador $i \}$
- $w = w'$
- Para todo $w \in W'$, $\delta'_w(\boxed{m|n}) = \delta_w(\boxed{m|n})$

Las funciones de transición, denotadas como ρ_ω para cada acción ω, se definen formalmente de la siguiente manera.

Definición 4.6.2 (Función de transición para acciones en $\Omega_{\mathfrak{D}}$). *Definimos las funciones de transición $\rho_{\alpha^i_\epsilon}$ y $\rho_{\alpha^i_{\boxed{x|y}}}$ para las acciones α^i_ϵ y $\alpha^i_{\boxed{x|y}}$ respectivamente de la siguiente forma.*

Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, tal que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$.

1. $\rho_{\alpha^i_{\boxed{x|y}}}(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) = (\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ *si y solo si*

- $\mathcal{H}' = \mathcal{H}\alpha^i_{\boxed{x|y}}(y, \_)$
- $R'_i = \{ (u,v) \in R_i \mid (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \mathrm{pre}(\alpha^i_{\boxed{x|y}}) \}$
- $W' = \{ u \in W \mid (u,v) \in R'_i$ ó $(v,u) \in R'_i$ para algún jugador $i \}$

- *Para todo* $w \in W'$, $\delta'_w(\boxed{x|y}) = (i, 1)$.
- $w = w'$

2. $\rho_{\alpha^i_\epsilon}(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) = (\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ *si y solo si*
   - $\mathcal{H}' = \mathcal{H}\alpha^i_\epsilon(x, y)$
   - $R'_i = \{ (u, v) \in R_i \mid (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, \{u, v\}) \models \mathrm{pre}(\alpha^i_\epsilon) \}$
   - $W' = \{ u \in W \mid (u, v) \in R'_i$ ó $(v, u) \in R'_i$ para algún jugador $i \}$
   - *Para todo* $w \in W'$, $\delta'_w(\boxed{x|y}) = \delta_w(\boxed{x|y})$
   - $w = w'$

Obsérvese que si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ *es una descripción consistente,* $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ *también lo es.*

Se han definido entonces las funciones de transición para las acciones atómicas de nuestro lenguaje $\mathcal{LA}$. A continuación se definen las funciones de transición para el resto de acciones en $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$.

Definición 4.6.3 (Función de transición para acciones en $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$). *Sean las dos ternas* $(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1)$ *y* $(\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$ *descripciones consistentes. Sean* α, β *acciones en* $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$.

Las funciones de transición ρ_ε, $\rho_{(\alpha;\beta)}$ *y* $\rho_{(\alpha\cup\beta)}$, *que corresponden a las acciones* ε, $(\alpha;\beta)$ *y* $(\alpha \cup \beta)$ *respectivamente, se definen como:*

- $\rho_\varepsilon(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1)$
- $\rho_{(\alpha;\beta)}(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$ *si y solo si existe una terna consistente* $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ *tal que*

$$\rho_\alpha(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$$
$$y$$
$$\rho_\beta(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w') = (\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$$

- $\rho_{(\alpha\cup\beta)}(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$ *si y solo si*

$$\rho_\alpha(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$$
$$y$$
$$\rho_\beta(\mathcal{H}1, M1_{\mathfrak{D}}, w1) = (\mathcal{H}2, M2_{\mathfrak{D}}, w2)$$

donde ρ_α *y* ρ_β *son las funciones de transición para las acciones* α *y* β, *respectivamente.*

Nótese como las funciones de transición para las acciones atómicas nos regresan, dada una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, una *única* terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$. Gracias a esto, las funciones de transición para toda acción en $\mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ nos regresan, dada una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, una *única* terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$.

Con ayuda de estas funciones, definimos ahora la semántica para el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$.

Definición 4.6.4 (Semántica para $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$). *Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, tal que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$. Diremos que la fórmula $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es* verdadera *en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ (y escribiremos $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$) si φ cumple alguna de las siguientes reglas de acuerdo con su estructura sintáctica.*

$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \top$		
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models p$	*ssi*	$p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$ *y* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models_{\Phi} p$ *(véase def. 4.4.3)*
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \neg\varphi$	*ssi*	*no es cierto que* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models (\varphi \vee \psi)$	*ssi*	$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$ *ó* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \psi$
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models K_i\varphi$	*ssi*	$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi$ *para todo* $u \in W$ *tal que* $(w, u) \in R_i$
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models C_{\mathcal{B}}\varphi$	*ssi*	$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi$ *para todo* $u \in W$ *tal que* $(w, u) \in R^+_{\mathcal{B}}$ *(véase def. 2.5.2)*
$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models [\alpha]\varphi$	*ssi*	$(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w') \models \varphi$ *donde* $\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$ *tal que* $\rho_\alpha(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) = (\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$

donde $\varphi, \psi \in \mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$, $\alpha \in \mathcal{LA}_{\mathfrak{D}}$, $i \in \mathcal{J}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$.

Cuando $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$, diremos también que $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ satisface *a φ o que φ* es satisfactible *en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. En el caso en que no sea cierto que $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$, escribiremos $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \not\models \varphi$ y diremos que φ* es falsa *en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. La regla nueva es aquella relativa a fórmulas del tipo $[\alpha]\varphi$ que nos expresa cómo modifica cada acción el modelo que representa tanto el estado del juego como el conocimiento de los jugadores.*

Las definiciones de satisfactibilidad y validez para fórmulas en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ son las siguientes.

Definición 4.6.5 (Satisfactibilidad y validez). *Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, de tal forma que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$.*

1. *Decimos que φ es* satisfactible *en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ si es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para* algún *$w \in W$.*

2. *Decimos que* φ *es* válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathrm{D}})$ *si es verdadera en* $(\mathcal{H}, M_{\mathrm{D}}, w)$ *para* todo $w \in W$. *En este caso escribiremos*

$$(\mathcal{H}, M_{\mathrm{D}}) \models \varphi$$

3. *Decimos que* φ *es* satisfactible en $\mathcal{H}$ *si es satisfactible en* $(\mathcal{H}, M_{\mathrm{D}})$ *para* alguna *estructura* M_{D}.

4. *Decimos que* φ *es* válida en $\mathcal{H}$ *si es válida en* $(\mathcal{H}, M_{\mathrm{D}})$ *para* toda *estructura* M_{D}. *En este caso escribiremos*

$$\mathcal{H} \models \varphi$$

5. *Decimos que* φ *es* satisfactible *si es satisfactible en* $\mathcal{H}$ *para* algún *historial* $\mathcal{H}$.

6. *Decimos que* φ *es* válida *si es válida en* $\mathcal{H}$ *para* todo *historial* $\mathcal{H}$. *En este caso escribiremos*

$$\models \varphi$$

Capítulo 5

Satisfactibilidad, validez y decidibilidad

En el capítulo anterior definimos formalmente el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$. Este lenguaje nos permite describir, desde la perspectiva de un observador externo, situaciones posibles durante una partida de dominó, el conocimiento que de estas situaciones tienen los jugadores y la manera en que estas situaciones y este conocimiento cambia como consecuencia de las acciones que se llevan a cabo.

Nos gustaría poder no solo describir la situación de una partida, sino también ser capaces de decidir si en un momento dado durante una partida una fórmula dada es verdadera o no. Dada la descripción de la situación de una partida (secuencia de acciones realizadas, conocimiento de los jugadores acerca de la distribución de fichas y distribución real), podemos preguntarnos si son ciertas o no afirmaciones tales como *"el jugador a sabe que d tiene la ficha* $\boxed{0|3}$*", "es conocimiento común entre todos los jugadores que b no tiene algún 2", "a sabe que c sabe que a no tiene algún 3", "si b tira la ficha* $\boxed{2|5}$*, entonces la partida estará cerrada"* o *"la ficha* $\boxed{6|6}$ *está ahorcada"*.

Podemos también, en algunas situaciones, preguntarnos si una afirmación es cierta o no durante cierta partida dada la secuencia de acciones que se han realizado y el conocimiento de los jugadores, sin importar cuál sea la distribución de fichas real. Inclusive podemos llegar a preguntarnos si alguna afirmación es cierta de acuerdo con el historial de la partida, sea cual sea el conocimiento de los jugadores acerca de la distribución de fichas, o preguntarnos por la certeza o no de alguna afirmación en cualquier partida en general. En el presente capítulo revisaremos si el sistema lógico desarrollado nos permite responder a este tipo de preguntas.

5.1. Satisfactibilidad y validez

En el capítulo anterior definimos las condiciones bajo las cuales afirmamos que una fórmula φ en el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es verdadera, dada la secuencia de acciones de la partida (el historial $\mathcal{H}$), el conocimiento que tienen los jugadores acerca de la distribución de fichas (la estructura de mundos posibles $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$) y la distribución real (el mundo posible $w \in W$) (véase la definición 4.6.4). Denotamos este hecho mediante $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$. También hicimos las siguientes definiciones (siempre restringidas al hecho de que la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ sea una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores):

1. Decimos que φ es *satisfactible en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ si y solo si φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ $\big((\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi\big)$ para *algún* mundo posible $w \in W$. En caso contrario diremos que φ es *no satisfactible en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$.

2. Decimos que φ es *válida en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ si y solo si φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para *todo* $w \in W$. Este hecho se denota como

   $$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$$

   Utilizando esta notación, $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$ si y solo si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$ para *todo* $w \in W$.

3. Decimos que φ es *satisfactible en* $\mathcal{H}$ si y solo si φ es satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para *alguna* estructura $M_{\mathfrak{D}}$. En caso contrario diremos que φ es *no satisfactible en* $\mathcal{H}$.

4. Decimos que φ es *válida en* $\mathcal{H}$ si y solo si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para *toda* estructura $M_{\mathfrak{D}}$. En este caso escribimos

   $$\mathcal{H} \models \varphi$$

   Utilizando esta notación, $\mathcal{H} \models \varphi$ si y solo si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$ para *toda* estructura $M_{\mathfrak{D}}$.

5. Decimos que φ es *satisfactible* si y solo si φ es satisfactible en $\mathcal{H}$ para algún historial $\mathcal{H}$. En caso contrario diremos que φ es *no satisfactible.*

6. Decimos que φ es *válida* si y solo si φ es válida para todo historial $\mathcal{H}$. Este hecho se denota como

   $$\models \varphi$$

   Utilizando la notación, $\models \varphi$ si y solo si $\mathcal{H} \models \varphi$ para *todo* historial $\mathcal{H}$.

Tenemos entonces cuatro niveles de verdad para una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores, tal que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$. Decimos que

φ **es verdadera en** $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si φ es satisfecha en la partida en la cual el conocimiento de los jugadores es descrito por la estructura acentuada $(M_{\mathfrak{D}}, w)$ y cuyo historial es $\mathcal{H}$.

φ **es válida en** $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ si φ es satisfecha en todo mundo posible $w \in W$ de la partida cuyo historial es $\mathcal{H}$ y en la cual el conocimiento de los jugadores es descrito por la estructura $M_{\mathfrak{D}}$.

φ **es válida en** $\mathcal{H}$ si φ es satisfecha en la partida con historial $\mathcal{H}$, sin importar cual sea la situación real o el conocimiento que los jugadores tengan acerca de esta situación.

φ **es válida** si φ es satisfecha en toda partida posible.

Sea $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$. Obsérvese las siguientes equivalencias entre satisfactibilidad y validez para una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$:

1. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ si y solo si φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para todo $w \in W$. Como el lenguaje es cerrado bajo la negación, entonces $\neg\varphi$ también está en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. En este caso, decir que φ es verdadera en todo mundo posible w es equivalente a decir que $\neg\varphi$ es falsa en todo mundo posible w. Esto significa que no existe un mundo $w \in W$ en el cual $\neg\varphi$ sea verdadera, por lo cual $\neg\varphi$ es no satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, es decir:

$$\begin{array}{rcl} \varphi \text{ es válida en } (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible en } (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \\ & \text{o} & \\ (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible en } (\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \end{array}$$

2. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. φ es válida en $\mathcal{H}$ si y solo si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para toda estructura $M_{\mathfrak{D}}$. La fórmula $\neg\varphi$ también esta en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. Por el inciso anterior, si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para *alguna* $M_{\mathfrak{D}}$, entonces $\neg\varphi$ es no satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para esa misma $M_{\mathfrak{D}}$. Por lo tanto, si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$ para *toda* estructura $M_{\mathfrak{D}}$, entonces $\neg\varphi$ es no satisfactible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para *toda* estructura $M_{\mathfrak{D}}$. Esto significa que $\neg\varphi$ es no satisfactible en $\mathcal{H}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi \text{ es válida en } \mathcal{H} & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible en } \mathcal{H} \\ & \text{o} & \\ \mathcal{H} \models \varphi & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible en } \mathcal{H} \end{array}$$

3. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. φ es válida si y solo si φ es válida para todo historial $\mathcal{H}$, pero φ es válida en un historial $\mathcal{H}$ si y solo si $\neg\varphi$ es no satisfactible en ese mismo historial (inciso anterior). Si φ es válida en *todo* historial entonces $\neg\varphi$ es satisfactible en *todo* historial. Esto significa que $\neg\varphi$ es no satisfactible.

$$\begin{array}{rcl} \varphi \text{ es válida} & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible} \\ & \text{o} & \\ \models \varphi & \text{ssi} & \neg\varphi \text{ es no satisfactible} \end{array}$$

5.2. Decidibilidad del lenguaje

La primera pregunta que queremos responder es si, dada una fórmula en el lenguaje y una descripción del estado del juego, existe una forma de saber si la fórmula es verdadera o no. En otras palabras, queremos saber si dada una fórmula $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ y una terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ podemos decidir si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$. Recordemos que un problema es decidible si existe un algoritmo que tome como entrada una instancia del problema y determine si la respuesta correspondiente a dicha instancia es *si* o *no*. Para demostrar, entonces, que el problema *¿*$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$*?* es decidible, debemos presentar dicho algoritmo.

Teorema 1. *En el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, es decidible si una fórmula φ es verdadera en una terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.*

Demostración. Podemos decidir si una fórmula es verdadera o no siguiendo el método descrito a continuación que es, básicamente, la definición 4.6.4. Nótese que toda fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es sintácticamente finita (tiene un número finito de símbolos). Esto y la definición sintáctica del lenguaje nos permite garantizar que de caer en los casos 3, 4, 5 ó 6, el proceso de reducir la pregunta original a preguntas más simples utilizado en dichos casos nos llevará eventualmente a los casos 1 ó 2, que se resuelven directamente.

Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, y sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ una terna consistente tal que $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$:

1. Si φ es la fórmula siempre verdadera ($\varphi = \top$), entonces φ es verdadera en cualquier terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.

2. Si φ es una proposición atómica ($\varphi = p$ con $p \in \Phi_{\mathfrak{D}}$), podemos utilizar la definición 4.4.3 para decidir si p es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. El problema de decidir si una proposición atómica es verdadera o no es decidible ya que la definición 4.4.3 es un conjunto de reglas que, recibiendo como entrada la proposición atómica p y la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, nos dicen siempre si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models p$ ó $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \not\models p$.

3. Si φ es la negación de otra fórmula ($\varphi = \neg\psi$), entonces φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si y solo si ψ es falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. Nótese que en este paso reducimos la pregunta *¿es φ verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$?* a la pregunta *¿es ψ falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$?*, que es una pregunta más sencilla porque ψ es una fórmula sintácticamente más pequeña que φ (tiene un símbolo menos: el conectivo $\neg$).

4. Si φ es la disyunción de dos fórmulas ($\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$), entonces φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si y solo si ψ_1 es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ ó ψ_2 es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. En este caso se reduce la pregunta original a una de dos preguntas: *¿es ψ_1 verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$?* o *¿es ψ_2 es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$?*, siendo ambas ψ_1 y ψ_2 fórmulas sintácticamente mas pequeñas que φ.

5. Si φ es una fórmula encabezada por el operador modal de conocimiento ($\varphi = K_i\psi$), decimos entonces que φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si y solo si ψ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u)$ tal que $(w, u) \in R_i$. Dado que W es finito (hay un número finito de mundos posibles, cada uno de los cuales representa una de las distintas formas de repartir las fichas entre los cuatro jugadores), entonces el proceso de verificar si ψ es verdadera en todo $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u)$ tal que $(w, u) \in R_i$ es un proceso finito. Nótese otra vez que ψ es una fórmula sintácticamente más pequeña que φ. Esta vez la pregunta inicial es reducida a una cantidad finita de preguntas, todas ellas mas sencillas.

6. Si φ es una fórmula encabezada por el operador modal de conocimiento común ($\varphi = C_{\mathcal{B}}\psi$), decimos entonces que φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si y solo si ψ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u)$ tal que $(w, u) \in R^+_{\mathcal{B}}$, donde $R^+_{\mathcal{B}}$ es la cerradura transitiva de la relación de accesibilidad para el conjunto de jugadores $\mathcal{B}$. Dado que $R^+_{\mathcal{B}}$ está definida correctamente (dados los jugadores en $\mathcal{B}$ y la relación de accesibilidad de cada uno, siempre podemos construir $R^+_{\mathcal{B}}$), entonces siempre es posible saber si un par (w, u) está o no ahí. Dado que W es finito, entonces el proceso de verificar si ψ es verdadera en todo $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u)$

tal que $(w, u) \in R^+_{\mathcal{B}}$ es un proceso finito. Nótese otra vez que ψ es una fórmula sintácticamente más pequeña que φ. Otra vez, la pregunta inicial se reduce a una cantidad finita de preguntas, todas ellas más sencillas.

7. Si φ es de la forma $[\alpha]\psi$ ($\varphi = [\alpha]\psi$), entonces φ es verdadera en la terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ si y solo si ψ es verdadera en la terna $(\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')$ que se obtiene como resultado de aplicar la función ρ_α a la terna original $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ $\left(\rho_\alpha(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) = (\mathcal{H}', M'_{\mathfrak{D}}, w')\right)$. Dado que la función de transición ρ_α está bien definida para toda acción $\alpha \in \mathcal{LA}$ (existe un algoritmo que, dada una terna de entrada, siempre nos regresa una terna de salida; véase la def. 4.6.2 y la def. 3.4.3), la aplicación de la función siempre termina, dejándonos como tarea simplemente verificar si ψ es verdadera en la nueva terna.

□

El hecho de que sea decidible el saber si una fórmula φ es verdadera en una terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ parte entonces de los siguientes hechos:

1. Toda fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es sintácticamente finita.

2. Dada una función de transición ρ_α para una acción α, siempre podemos conocer la terna que resulta de aplicar ρ_α a una terna dada $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.

3. Existe un número finito de fichas (28).

4. Existe un número finito de jugadores (4).

5. Existe, por 3 y 4, un número finito de distribuciones de fichas posibles.

6. Cada mundo posible corresponde a una distribución de fichas posible. Existe, por lo anterior y por 5, un número finito de mundos posibles.

7. Por lo tanto, *es decidible si una fórmula φ es verdadera en una terna* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$.

Obsérvese que este teorema afirma que, si conocemos el historial completo de la partida ($\mathcal{H}$), el conocimiento que tienen cada uno de los jugadores ($M_{\mathfrak{D}}$) y la distribución real de las fichas en el juego (w), siempre podemos decidir si una fórmula arbitraria dentro del lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es verdadera o no.

Como se mencionó anteriormente, en algunas situaciones puede ser necesario preguntarnos si una afirmación es cierta o no durante cierta partida dada la secuencia de acciones que se han realizado y el conocimiento de los jugadores, sin importar cuál sea la distribución real de fichas. Esto puede ser porque no sabemos cuál de entre todos los mundos posibles es el verdadero. En los términos definidos en la sección anterior, lo que queremos saber es si dado un par $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, podemos decidir si una fórmula es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ o no.

Teorema 2. *En el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, es decidible si una fórmula φ es válida en un par consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$.*

Demostración. Sea $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$. Para verificar que φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, tenemos que verificar que φ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $w \in W$. Sabemos, por el teorema 1, que siempre podemos decidir si una fórmula es verdadera o no en una terna consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$. Sabemos también que el número de mundos posibles en W debe ser finito, puesto que existe una cantidad finita de formas en que pueden distribuirse las 28 fichas entre los 4 jugadores, y en el peor de los casos existe un $w \in W$ por cada distribución posible (hay menos mundos posibles si la distribución de fichas representada por algunos de ellos ya ha sido descartada por todos los jugadores). Una revisión exhaustiva terminará finalmente y, por lo tanto, es decidible si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$. □

Entonces, dada una fórmula arbitraria φ dentro del lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, y un par formada por el historial de una partida $\mathcal{H}$ y una estructura de mundos posibles para el dominó $M_{\mathfrak{D}}$, siempre podemos decidir si:

- φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$. Esto se da cuando φ es verdadera en todo mundo posible $w \in W$.
- $\neg\varphi$ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$. Esto se da cuando $\neg\varphi$ es verdadera en todo mundo posible $w \in W$.
- No tenemos información suficiente para afirmar que φ es válida $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ ni para afirmar que $\neg\varphi$ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$. Esto se da cuando existe al menos un mundo posible $u \in W$ tal que φ es verdadera ($\neg\varphi$ falsa) en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u)$, y también existe al menos un mundo posible $v \in W$ tal que $\neg\varphi$ es verdadera (φ falsa) en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, v)$.

En términos del juego, esto significa que en una partida de dominó, si no sabemos la distribución real de las fichas pero sabemos qué es lo que conoce cada jugador y conocemos la secuencia de acciones que se han realizado, siempre podemos saber si:

- la afirmación es válida, es decir, si la afirmación es verdadera en todos las situaciones que se consideran posibles.
- la negación de la afirmación es válida, es decir, si la afirmación es falsa en todos las situaciones que se consideran posibles.
- no tenemos información suficiente para decidir si la afirmación es válida o no, es decir, si en al menos una de las situaciones que consideramos posibles la afirmación es cierta, pero también en al menos una de las situaciones que consideramos posibles, la afirmación es falsa.

El proceso mediante el cual se puede verificar que una fórmula es válida en un par consistente $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ (donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$) consiste en verificar de manera exhaustiva que dicha fórmula es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ con $w \in W$. Cada mundo posible representa una distribución de fichas. Dado que hay 4 jugadores y a cada uno le corresponden 7 fichas, existen $\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}$ distribuciones posibles; esto es 472,518,347,558,400 formas diferentes de repartir las fichas entre los jugadores. Si la estructura $M_{\mathfrak{D}}$ contiene un mundo posible por cada distribución posible (algunas distribuciones se descartan conforme avanza la partida; precisamente aquellas que no son compatibles con las acciones que se han realizado), el proceso exhaustivo tomará un tiempo considerable. En el presente trabajo no se hace análisis acerca del grado de complejidad del problema de decidibilidad del lenguaje.

Podemos también preguntarnos si una fórmula es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para *toda* estructura $M_{\mathfrak{D}}$, es decir, si dicha afirmación es cierta en la partida con historial $\mathcal{H}$, sin importar cuál sea la situación real o el conocimiento que los jugadores tengan acerca de esta situación. Esta pregunta puede ser siempre respondida, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema 3. *En el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, es decidible si una fórmula φ es válida en un historial válido $\mathcal{H}$.*

Demostración. Para verificar que φ es válida en $\mathcal{H}$, es necesario verificar que φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para toda estructura de mundos posibles $M_{\mathfrak{D}}$. Sabemos, por el teorema 2 que dada una estructura $M_{\mathfrak{D}}$, siempre podemos saber si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$. Si la cantidad de estructuras de mundos posibles que se pueden construir es finita, entonces será posible verificar si

φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para toda estructura $M_{\mathfrak{D}}$ y, por lo tanto, el saber si φ es válida en un historial $\mathcal{H}$ será decidible.

Las estructuras de mundos posibles para el dominó se diferencian entre ellas por dos factores: los mundos posibles y la relación de accesibilidad para cada agente. Para construir entonces una estructura $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$, el primer paso es elegir los mundos posibles que pertenecerán a W. Como se mencionó, la cantidad de formas distintas en que pueden distribuirse las 28 fichas entre los 4 jugadores es finita (igual a $\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}$), y recordemos que cada mundo posible representa una de las formas en que se pueden distribuir las fichas. Podemos entonces formar tan solo una cantidad finita de conjuntos de mundos posibles W, ya que existe una cantidad finita de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto de $\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}$ elementos ($2^{\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}}$). Nótese que todos los subconjuntos son finitos.

Por otro lado, la relación de accesibilidad R_i para el jugador i es un subconjunto del producto cartesiano de los mundos posibles ($R_i \subseteq (W \times W)$). Dado que W siempre es finito, entonces $(W \times W)$ es siempre finito ($|W \times W| = |W|^2$). Dado entonces un conjunto de mundos posibles W, existe una cantidad finita de relaciones de accesibilidad distintas que se pueden asignar al jugador i porque existe un número finito de subconjuntos de $(W \times W)$ (la cantidad de relaciones de accesibilidad posibles es $2^{|W|^2}$). Dado que el número de jugadores es finito, hay entonces un número finito de formas de asignar relaciones de accesibilidad a todos los jugadores dado un conjunto de mundos posibles W ($4 \cdot 2^{|W|^2}$).

Sabemos entonces que podemos formar tan solo una cantidad finita de conjuntos de mundos posibles W y, dado uno de esos conjuntos, hay un número finito de formas de asignar relaciones de accesibilidad a los cuatro jugadores. Por lo tanto, el número de estructuras de mundos posibles para el dominó que podemos formar es finito. Por lo tanto, es posible verificar si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ para toda estructura $M_{\mathfrak{D}}$ y, por lo tanto, el saber si una fórmula φ es válida en un historial $\mathcal{H}$ es decidible. □

Nos queda tan solo por responder una pregunta. ¿Es decidible si una fórmula φ es válida? La respuesta se da en el siguiente teorema.

Teorema 4. *En el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, es decidible si una fórmula φ es válida.*

Demostración. Para poder decidir si una fórmula φ es válida, debemos poder decidir si esta fórmula es válida en todo historial válido $\mathcal{H}$. Por el teorema anterior sabemos que, dado un historial válido $\mathcal{H}$, es decidible si φ es válida en $\mathcal{H}$. Si la cantidad de historiales válidos es finita, entonces será decidible si φ es válida.

Sabemos que el número de distribuciones posibles de fichas es finito. En cada turno, un jugador elige la acción que realizará de entre un conjunto finito de acciones posibles (que en ocasiones tiene un solo elemento); a lo más, escoge de entre siete acciones posibles (una por cada ficha que tiene) en el caso en el que él inicie la partida. Además, toda partida es finita (termina después de un número finito de acciones). Existe, por lo tanto, un número finito de historiales válidos. Es decidible, por lo tanto, si una fórmula φ es válida. □

El que sea decidible el saber si una fórmula es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, si una fórmula es válida en $\mathcal{H}$ y si una fórmula es válida, depende del hecho de que es decidible si una fórmula φ es verdadera en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, y de la finitud de los conjuntos en los que se basa el juego.

1. Es decidible si una fórmula φ es verdadera en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$.

2. Existe un número finito de fichas (28).

3. Existe un número finito de jugadores (4).

4. Existe, por 2 y 3, un número finito de distribuciones de fichas posibles.

5. Cada mundo posible corresponde a una distribución de fichas posible. Por lo anterior y por 4, existe un número finito de mundos posibles.

6. Por lo tanto, *es decidible si una fórmula φ es válida en un par $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$* (podemos verificar que φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ para todo $w \in W$).

7. Por 5, existe un cantidad finita de conjuntos diferentes de mundos posibles.

8. Por 5, cualquier conjunto de mundos posibles es siempre finito.

9. Por 8, dado un conjunto de mundos posibles W, su producto cartesiano $W \times W$ es también un conjunto finito.

10. Una relación de accesibilidad es un subconjunto del producto cartesiano de los mundos posibles. Por lo anterior y por 9, existe una cantidad finita de relaciones de accesibilidad distintas que pueden ser asignadas a un jugador.

11. Por 3 y 10, el número de formas diferentes de asignar relaciones de accesibilidad a los jugadores es finito.
12. Por 7 y 11, existe un número finito de estructuras de mundos posibles para el dominó.
13. Por lo tanto, *es decidible si una fórmula* φ *es válida en un historial válido* $\mathcal{H}$ (podemos verificar que φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathcal{D}})$ para toda $M_{\mathcal{D}}$).
14. En cada turno, cada jugador tiene un número finito de acciones posibles de entre las cuales elige la que realizará.
15. Toda partida termina después de un número finito de acciones.
16. De 4, 14 y 15 se concluye que existe un número finito de historiales válidos.
17. Por lo tanto, *es decidible si una fórmula* φ *es válida* (podemos verificar que φ es válida en $\mathcal{H}$ para todo $\mathcal{H}$).

Capítulo 6

Ejemplos del uso del lenguaje

En el presente capítulo se muestran tres ejemplos del uso del lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$. El primero de ellos es un ejemplo puramente sintáctico, y sirve para mostrar que el lenguaje es lo suficientemente expresivo como para describir una partida de dominó completa. El segundo ejemplo muestra la forma en que evoluciona la estructura en la cual se interpretan las fórmulas del lenguaje. Para esto, se describe una partida completa de una versión reducida del juego de dominó (menos fichas y menos jugadores). El tercero presenta la misma partida que en el segundo, esta vez desde el punto de vista de un jugador en particular.

6.1. Ejemplo sintáctico

Este primer ejemplo muestra el uso del lenguaje para describir una partida de dominó completa. Se utilizarán las siguientes abreviaturas:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{J}^{-i} & = & \{ j \in \mathcal{J} \mid j \neq i \} \\
\boxed{x|y}^{\mathcal{J}} & \equiv & \boxed{x|y}^{a} \vee \boxed{x|y}^{b} \vee \boxed{x|y}^{c} \vee \boxed{x|y}^{d} \\
\boxed{x|-}^{i} & \equiv & \boxed{x|0}^{i} \vee \boxed{x|1}^{i} \vee \boxed{x|2}^{i} \vee \boxed{x|3}^{i} \vee \boxed{x|4}^{i} \vee \boxed{x|5}^{i} \vee \boxed{x|6}^{i} \\
\mathit{cerrado} & \equiv & (x, x) \wedge \neg \boxed{x|-}^{\mathcal{J}} \\
\mathit{fichas}_{n}^{\mathcal{J}^{-i}} & \equiv & \bigvee_{j \in \mathcal{J}^{-i}} (\mathit{fichas}_{n}^{j})
\end{array}
$$

y se indicará con

$$i \leftarrow \{ \boxed{x|y}, \ldots, \boxed{u|v} \}$$

que al jugador i le fueron asignadas en el reparto las fichas $\boxed{x|y}, \ldots, \boxed{u|v}$.

Recordemos que la partida es jugada por equipos. Los jugadores a y c forman un equipo, mientras que los jugadores b y d forman el otro equipo. Definimos las siguientes fórmulas para indicar que alguno de los equipos ha ganado:

$$
\begin{aligned}
\mathit{ganó}_{a,c} &\equiv (\mathit{fichas}_0^a \wedge \neg \mathit{fichas}_0^{\mathcal{J}-a}) \vee (\mathit{fichas}_0^c \wedge \neg \mathit{fichas}_0^{\mathcal{J}-c}) \\
&\quad \vee (\mathit{cerrado} \wedge \mathit{menosPuntos}^{a,c}) \\
\mathit{ganó}_{b,d} &\equiv (\mathit{fichas}_0^b \wedge \neg \mathit{fichas}_0^{\mathcal{J}-b}) \vee (\mathit{fichas}_0^d \wedge \neg \mathit{fichas}_0^{\mathcal{J}-d}) \\
&\quad \vee (\mathit{cerrado} \wedge \mathit{menosPuntos}^{b,d})
\end{aligned}
$$

Nos enfocaremos en el jugador a (siendo c su compañero de equipo). Supongamos a ganó la partida anterior, por lo que él inicia la siguiente. Antes de la distribución de las fichas, la siguiente fórmula es verdadera:

$$K_a\, \mathit{turno}^a \wedge C_{\mathcal{J}}\, \mathit{turno}^a$$

El reparto de fichas es tal que :

$$a \leftarrow \{\boxed{1|6}, \boxed{5|5}, \boxed{2|6}, \boxed{3|4}, \boxed{0|6}, \boxed{0|1}, \boxed{2|3}\}$$

El jugador a sabe cuáles fichas tiene y cuáles no tiene:

$$
\begin{aligned}
&K_a\, (\boxed{1|6}^{\,a} \wedge \boxed{5|5}^{\,a} \wedge \ldots \wedge \boxed{2|3}^{\,a}) \\
&K_a\, (\neg\boxed{6|6}^{\,a} \wedge \neg\boxed{5|6}^{\,a} \wedge \neg\boxed{4|6}^{\,a} \wedge \ldots \neg\boxed{0|2}^{\,a} \wedge \neg\boxed{0|0}^{\,a})
\end{aligned}
$$

Él sabe, además, que ningún otro jugador tiene las fichas que él tiene:

$$K_a\, (\neg K_b \boxed{1|6}^{\,a} \wedge \neg K_b \boxed{5|5}^{\,a} \wedge \ldots \wedge \neg K_b \boxed{2|3}^{\,a})$$

Además, es cierto que

$$\mathit{fichas}_7^a \rightarrow [\alpha^a_{\boxed{x|y}}]\mathit{fichas}_6^a$$

Al iniciar la partida, a juega la ficha $\boxed{2|6}$, b juega $\boxed{6|6}$ y c juega $\boxed{0|2}$. En este punto en el juego las siguientes fórmulas son verdaderas:

$$
\begin{aligned}
&\boxed{2|6}^{\,t} \wedge \boxed{6|6}^{\,t} \wedge \boxed{0|2}^{\,t} \\
&(0,6) \wedge \mathit{turno}^d \\
&C_{\mathcal{J}}\, (\boxed{2|6}^{\,t} \wedge \boxed{6|6}^{\,t} \wedge \boxed{0|2}^{\,t}) \\
&C_{\mathcal{J}}\, (\neg\boxed{2|6}^{\,a} \wedge \neg\boxed{2|6}^{\,b} \wedge \neg\boxed{2|6}^{\,c} \wedge \neg\boxed{2|6}^{\,d}) \\
&((0,6) \wedge \mathit{turno}^d) \rightarrow [\alpha^d_\epsilon] C_{\mathcal{J}}\, (\neg\boxed{0|-}^{\,d} \wedge \neg\boxed{6|-}^{\,d}) \\
&C_{\mathcal{J}}\, (\mathit{fichas}_6^a \wedge \mathit{fichas}_6^b \wedge \mathit{fichas}_6^c \wedge \mathit{fichas}_7^d)
\end{aligned}
$$

El jugador d pasa. Entonces:

$$C_{\mathcal{J}}\,(\neg\boxed{0|-}^{\,d} \wedge \neg\boxed{6|-}^{\,d})$$

La siguiente ronda se juega de la siguiente forma: a tira la ficha $\boxed{0|6}$, b tira la ficha $\boxed{3|6}$, c tira $\boxed{3|5}$ y d $\boxed{4|5}$. En este punto a sabe cuáles fichas tiene y cuáles han sido jugadas hasta este momento:

$$K_a\,(\boxed{0|6}^{\,t} \wedge \boxed{2|6}^{\,t} \wedge \boxed{3|6}^{\,t} \wedge \boxed{6|6}^{\,t}) \qquad K_a\,\boxed{1|6}^{\,a}$$
$$K_a\,\neg\boxed{6|-}^{\,d} \qquad K_a\,(\neg\boxed{4|6}^{\,a} \wedge \neg\boxed{5|6}^{\,a})$$
$$K_a\,(\boxed{4|6}^{\,b} \vee \boxed{4|6}^{\,c}) \qquad K_a\,(\boxed{5|6}^{\,b} \vee \boxed{5|6}^{\,c})$$
$$\neg K_d\,(\boxed{4|6}^{\,b} \vee \boxed{4|6}^{\,c})$$

Es el turno de a y él tira la ficha $\boxed{3|4}$. Entonces las siguientes fórmulas son verdaderas:

$$(3,6) \wedge turno^b \qquad ((3,6) \wedge turno^b) \rightarrow [\alpha^b_\epsilon]C_{\mathcal{J}}\,\neg\boxed{6|-}^{\,d}$$
$$\neg\boxed{6|-}^{\,d} \qquad [\alpha^b_\epsilon]K_a\,(\boxed{4|6}^{\,c} \wedge \boxed{5|6}^{\,c})$$

El jugador b no pasa, por lo que a no puede concluir que $\boxed{4|6}^{\,c} \wedge \boxed{5|6}^{\,c}$. Él ($b$) juega $\boxed{5|6}$, c juega $\boxed{0|5}$ y d juega $\boxed{3|3}$. El historial de la partida después de tres rondas es

$$\alpha^a_{\boxed{2|6}}(2,6)\alpha^b_{\boxed{6|6}}(2,6)\alpha^c_{\boxed{2|0}}(0,6)\alpha^d_\epsilon(0,6)\alpha^a_{\boxed{0|6}}(6,6)\alpha^b_{\boxed{6|3}}(3,6)\alpha^c_{\boxed{3|5}}(5,6)$$
$$\alpha^d_{\boxed{5|4}}(4,6)\alpha^a_{\boxed{4|3}}(3,6)\alpha^b_{\boxed{6|5}}(3,5)\alpha^c_{\boxed{5|0}}(3,0)\alpha^d_{\boxed{3|3}}(3,0)$$

Entonces a tira $\boxed{2|3}$. En este momento es cierto que

$$\boxed{2|3}^{\,t} \wedge \boxed{3|3}^{\,t} \wedge \boxed{3|4}^{\,t} \wedge \boxed{3|5}^{\,t} \wedge \boxed{3|6}^{\,t}$$
$$C_{\mathcal{J}}(\boxed{2|3}^{\,t} \wedge \boxed{3|3}^{\,t} \wedge \boxed{3|4}^{\,t} \wedge \boxed{3|5}^{\,t} \wedge \boxed{3|6}^{\,t})$$
$$K_a(\neg\boxed{0|3}^{\,a} \wedge \neg\boxed{1|3}^{\,a})$$
$$P_a\boxed{0|3}^{\,b} \wedge P_a\boxed{0|3}^{\,c}$$
$$P_a\boxed{1|3}^{\,b} \wedge P_a\boxed{1|3}^{\,c} \wedge P_a\boxed{1|3}^{\,d}$$

El jugador b tira $\boxed{0|0}$, c tira $\boxed{0|4}$ y d tira $\boxed{2|4}$. Ahora es cierto (después de cuatro rondas) que

$$\boxed{0|0}^{\,t} \wedge \boxed{0|2}^{\,t} \wedge \boxed{0|4}^{\,t} \wedge \boxed{0|5}^{\,t} \wedge \boxed{0|6}^{\,t}$$
$$K_a(\boxed{0|1}^{\,a} \wedge \neg\boxed{0|3}^{\,a})$$
$$C_{\mathcal{J}}(fichas^a_3 \wedge fichas^b_3 \wedge fichas^c_3 \wedge fichas^d_4)$$

Además es cierto que ($turno^a \wedge (4,4) \wedge \neg\boxed{4|-}^{\,a}$). El jugador a pasa y b pasa también, pero c no y tira $\boxed{4|6}$. Entonces d tira $\boxed{4|4}$. Ahora las siguientes fórmulas son ciertas:

$$C_{\mathcal{J}}(\neg\boxed{4|-}^{a} \wedge \neg\boxed{4|-}^{b})$$
$$C_{\mathcal{J}}(\boxed{4|0}^{t} \wedge \boxed{4|2}^{t} \wedge \boxed{4|3}^{t} \wedge \boxed{4|4}^{t} \wedge \boxed{4|5}^{t} \wedge \boxed{4|6}^{t})$$
$$C_{\mathcal{J}}(\boxed{4|1}^{c} \vee \boxed{4|1}^{d})$$

Ahora que $(turno^{a} \wedge (4,6) \wedge \boxed{6|-}^{a})$ es verdadera, a puede jugar, y lo hace jugando la ficha $\boxed{1|6}$. Dado que

$$(turno^{a} \wedge (4,6)) \rightarrow [\alpha^{a}_{\boxed{6|u}}](u,4)$$

es cierto, entonces después del turno de a, $(1,4)$ es verdadera. Este (a) sabe que $\neg\boxed{4|-}^{b}$ y por lo tanto $[\alpha^{b}_{\boxed{4|-}}]\bot$ es verdadera. Entonces b tira $\boxed{1|3}$ y c pasa cuando $(3,4)$ es verdadera. Esto hace cierto que $K_a(\neg\boxed{3|-}^{c} \wedge \neg\boxed{4|-}^{c})$. Dado que $\neg\boxed{1|4}^{t} \wedge \neg\boxed{4|-}^{a} \wedge \neg\boxed{4|-}^{b} \wedge \neg\boxed{4|-}^{c}$ es verdadero y que a lo sabe, entonces es cierto que $K_a\boxed{1|4}^{d}$.

En este momento también es verdadero que

$$\boxed{0|0}^{t} \wedge \boxed{0|2}^{t} \wedge \boxed{0|4}^{t} \wedge \boxed{0|5}^{t} \wedge \boxed{0|6}^{t} \wedge \neg\boxed{0|3}^{t}$$
$$K_a\boxed{0|1}^{a} \wedge K_a\neg\boxed{0|3}^{a}$$
$$K_a\neg\boxed{3|-}^{c} \wedge K_a(\neg\boxed{3|-}^{c} \rightarrow \neg\boxed{3|0}^{c})$$
$$K_a\neg\boxed{0|-}^{d} \wedge K_a(\neg\boxed{0|-}^{d} \rightarrow \neg\boxed{3|0}^{d})$$
$$K_a\boxed{0|3}^{b}$$

Después de que d juega $\boxed{1|4}$, las siguientes fórmulas son ciertas:

$$turno^{a} \wedge (3,1) \wedge fichas^{a}_{2} \wedge \boxed{0|1}^{a} \wedge \boxed{5|5}^{a}$$
$$[\alpha^{a}_{\boxed{1|0}}](3,0) \wedge K_a\boxed{0|3}^{b}$$
$$K_a\Big([\alpha^{a}_{\boxed{1|0}} ; (\alpha^{b}_{\boxed{3|0}} \cup \alpha^{b}_{\boxed{0|3}})](cerrado \wedge pts^{a}_{10})\Big)$$

El jugador a hace lo único que puede hacer; tira la ficha $\boxed{0|1}$ y b tira $\boxed{0|3}$. Entonces *cerrado* y $C_{\mathcal{J}}(fichas^{a}_{1} \wedge fichas^{b}_{1} \wedge fichas^{c}_{2} \wedge fichas^{d}_{2})$ son verdaderas. Cada jugador muestra sus fichas y entonces las siguientes fórmulas son ciertas:

$$C_{\mathcal{J}}(\boxed{5|5}^{a} \wedge \boxed{1|2}^{c} \wedge \boxed{1|5}^{c})$$
$$C_{\mathcal{J}}(\boxed{2|2}^{b} \wedge \boxed{1|1}^{d} \wedge \boxed{2|5}^{d})$$
$$(pts^{a}_{10} \wedge pts^{b}_{4} \wedge pts^{c}_{9} \wedge pts^{d}_{9}) \rightarrow menosPuntos^{b,d}$$
$$ganó_{b,d}$$

6.2. Ejemplo desde una perspectiva externa

En este nuestro segundo ejemplo, nos enfocamos en la forma en que evoluciona la estructura en la que se interpretan las fórmulas del lenguaje.

Para simplificar el ejemplo, consideraremos una versión reducida del juego de dominó. Esta versión reducida consiste en un conjunto de seis fichas $\mathcal{F}' = \{\boxed{0|0}, \boxed{0|1}, \boxed{0|2}, \boxed{1|1}, \boxed{1|2}, \boxed{2|2}\}$ y un conjunto de tres jugadores $\mathcal{J}' = \{a, b, c\}$. Al inicio de cada partida, a cada jugador le corresponden dos fichas.

La abreviatura $\boxed{x|-}^{\,i}$ definida para el ejemplo anterior se interpretará ahora de acuerdo al nuevo conjunto de fichas y al nuevo conjunto de jugadores:

$$\boxed{x|-}^{\,i} \;\equiv\; \boxed{x|0}^{\,i} \vee \boxed{x|1}^{\,i} \vee \boxed{x|2}^{\,i} \text{ para } i \in \mathcal{J}'$$

Utilizaremos, además, la siguiente abreviatura:

$$(\mathcal{H}, M_{\mathcal{D}}, U) \models \varphi \;\equiv\; (\mathcal{H}, M_{\mathcal{D}}, u) \models \varphi \text{ para todo } u \in U$$
$$\text{donde } U \subseteq W \text{ y } M_{\mathcal{D}} = (W, R_i).$$

Durante este ejemplo mantendremos una perspectiva externa, que es la perspectiva que adopta el lenguaje que hemos desarrollado. Existen $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 15(6) = 90$ formas posibles de distribuir las 6 fichas entre los 3 jugadores. Antes de repartirlas, cada jugador considera posibles estas 90 distribuciones. La estructura de mundos posibles $M^0_{\mathcal{D}} = (W^0, R^0_i)$, que describe la situación exactamente antes de que las fichas sean repartidas, es de la siguiente forma:

- $|W^0| = 90$, indicando que hay 90 distribuciones posibles.
- $R^0_i = W \times W$ para todo $i \in \mathcal{J}'$, indicando que todo jugador considera posibles todas las distribuciones.
- $\delta_w(\boxed{x|y}) = (\_\,, 0)$ para todo $w \in W^0$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$, indicando así que ninguna ficha ha sido jugada.

El historial de la partida $\mathcal{H}^0$ que corresponde a este momento del juego es la secuencia vacía.

6.2.1. Reparto de fichas

El reparto de fichas es tal que :

$$a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}, \quad b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}, \quad c \leftarrow \{\boxed{2|2}, \boxed{0|0}\}$$

Recordemos que al realizarse una acción, cada jugador elimina de su relación de accesibilidad aquellos pares que involucran mundos en los cuales no se cumple lo que aprenden como consecuencia de dicha acción. En este caso, cada jugador ha aprendido qué fichas le corresponden, por lo que eliminaremos de su relación de accesibilidad los pares que involucran mundos donde ellos no tienen las fichas que les han correspondido. El historial $\mathcal{H}^1$ que proporciona el historial de las acciones durante la partida, y la estructura $M^1_{\mathcal{D}} = (W^1, R^1_i)$, que describe el conocimiento de los jugadores después de repartirse las fichas, son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^1$ es la secuencia vacía (no se ha realizado acción alguna).
- $R^1_a = \{(u,v) \in R^0_a \mid (\mathcal{H}^0, M^0_{\mathcal{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|2}^{\,a} \wedge \boxed{0|2}^{\,a}\}$,
  $R^1_b = \{(u,v) \in R^0_b \mid (\mathcal{H}^0, M^0_{\mathcal{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|1}^{\,b} \wedge \boxed{0|1}^{\,b}\}$,
  $R^1_c = \{(u,v) \in R^0_c \mid (\mathcal{H}^0, M^0_{\mathcal{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{2|2}^{\,c} \wedge \boxed{0|0}^{\,c}\}$.
- $W^1 = \{w \in W^0 \mid (w, \_) \in R^1_i$ ó $(\_, w) \in R^1_i$ para algún jugador $i\}$.
- $\delta^1_w(\boxed{x|y}) = \delta^0_w(\boxed{x|y})$ para todo $w \in W^1$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$.

En este punto, es conveniente eliminar aquellos mundos posibles que ya no son accesibles para algún jugador. Esos mundos son aquellos que corresponden a distribuciones que los tres jugadores han juzgado como imposibles. Es por esto que W^1 es diferente a W^0. ¿Qué distribuciones considera posibles cada jugador? Dado que cada uno de ellos ya sabe qué fichas le corresponden, tan solo tienen incertidumbre acerca de las fichas que les corresponden a los jugadores restantes. Cada uno de ellos consideran 6 mundos como posibles, los correspondientes a las $\binom{4}{2}$ formas de distribuir las cuatro fichas restantes entre los otros dos jugadores. El jugador a considera posibles las siguientes distribuciones:

$\mathfrak{D}_1$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|0}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_2$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_3$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$.

$\mathfrak{D}_4$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_5$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$.

$\mathfrak{D}_6$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|0}\}$.

El jugador b considera posibles, además de la distribución $\mathfrak{D}_2$, las siguientes:

$\mathfrak{D}_7$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|0}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_8$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{2|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{0|2}\}$.

$\mathfrak{D}_9$: $a \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{10}$: $a \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{2|2}, \boxed{1|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{11}$: $a \leftarrow \{\boxed{2|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|2}\}$.

Mientras tanto, c considera posibles

$\mathfrak{D}_{12}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{13}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{1|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{14}$: $a \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{15}$: $a \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{16}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

además de $\mathfrak{D}_2$. Tenemos entonces 16 mundos posibles en W^1.

6.2.2. Primer turno de c

El primero en tirar es aquel jugador que tiene la ficha $\boxed{2|2}$. El jugador c inicia colocando dicha ficha sobre la mesa. La precondición de esa acción es que c posea la ficha $\boxed{2|2}$, por lo que todos los jugadores aprenden que la fórmula $\boxed{2|2}^{\,c}$ era cierta antes de que c realizara la acción (aunque c ya lo sabía). El historial del juego $\mathcal{H}^2$ y el modelo resultante $M^2_{\mathfrak{D}} = (W^2, R^2_i)$ son tales que

- $\mathcal{H}^2 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)$.
- $R^2_i = \{(u,v) \in R^1_i \mid (\mathcal{H}^1, M^1_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{2|2}^{\,c}\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.
- $W^2 = \{w \in W^1 \mid (w, \_) \in R^2_i$ ó $(\_, w) \in R^2_i$ para algún jugador $i\}$.
- Para todo $w \in W^2$, $\delta^2_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{2|2} \\ \delta^1_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{2|2} \end{cases}$

En este punto, tan solo quedan 10 mundos posibles en nuestro modelo. Para a y b han quedado descartadas aquellos mundos que corresponden a distribuciones donde c no tiene $\boxed{2|2}$. Mientras tanto, c sigue considerando posibles los mismos 6 mundos posibles, ya que él no aprendió nada nuevo como consecuencia de la acción que él realizó. Los jugadores consideran ahora como posibles las distribuciones iniciales siguientes:

a: $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{D}_4$.

b: $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_7$ y $\mathfrak{D}_{10}$.

c: $\mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_{12}, \mathfrak{D}_{13}, \mathfrak{D}_{14}, \mathfrak{D}_{15}$ y $\mathfrak{D}_{16}$.

6.2.3. Primer turno de *a*

El turno le corresponde al jugador a. Él decide tirar la ficha $\boxed{1|2}$. Al igual que en la acción anterior, todos los jugadores aprenden la precondición para esta acción, que consiste en:

1. Que sea el turno de a (todos ya sabían esto).
2. Que alguno de los extremos libres en la mesa sean 1 ó 2 (también ya conocido por todos).
3. Que a tenga la ficha $\boxed{1|2}$ (lo que es nuevo para b y c).

A consecuencia de esta acción, el modelo de mundos posibles y el historial del juego cambian. Ahora son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^3 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^a_{\boxed{2|1}}(2,1)$.
- $R_i^3 = \{(u,v) \in R_i^2 \mid (\mathcal{H}^2, M^2_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|2}^{\,a}\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.
- $W^3 = \{w \in W^2 \mid (w,\_) \in R_i^3$ ó $(\_,w) \in R_i^3$ para algún jugador $i\}$.
- Para todo $w \in W^3$, $\delta^3_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{1|2} \\ \delta^2_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{1|2} \end{cases}$

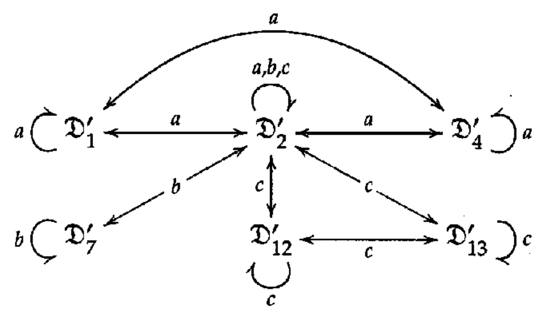
Como se indica, eliminamos de la relación de accesibilidad de cada jugador aquellos pares que involucran mundos donde $\boxed{1|2}^{\,a}$ no se cumplía. Una vez hecho esto, eliminamos aquellos mundos posibles que quedaron inaccesibles para todos los jugadores. El resultado es que W^3 tiene tan solo seis mundos posibles. Indicamos con $\mathfrak{D}'_i$ la distribución que es idéntica a $\mathfrak{D}_i$ excepto en que las fichas $\boxed{2|2}$ y $\boxed{1|2}$ están ahora sobre la mesa. Cada jugador considera aun como posibles las distribuciones siguientes:

a: $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ y $\mathfrak{D}'_4$.

b: $\mathfrak{D}'_2$ y $\mathfrak{D}'_7$.

c: $\mathfrak{D}'_2, \mathfrak{D}'_{12}$ y $\mathfrak{D}'_{13}$.

El jugador b considera posibles menos mundos que los jugadores a y c. Esto es debido a que él es el único que ha aprendido algo nuevo como consecuencia de cada una de las dos acciones realizadas hasta el momento. El modelo $M^3_{\mathfrak{D}}$ es de la siguiente forma:



6.2.4. Primer turno de *b*

Le corresponde el turno a b. Él decide tirar la ficha $\boxed{1|1}$, a consecuencia de lo cual a y c aprenden que él tenía dicha ficha. La situación de la partida es ahora descrita por el historial $\mathcal{H}^4$ y el modelo $M^4_{\mathfrak{D}}$:

- $\mathcal{H}^4 = \alpha^{c}_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^{a}_{\boxed{2|1}}(2,1)\alpha^{b}_{\boxed{1|1}}(2,1)$.

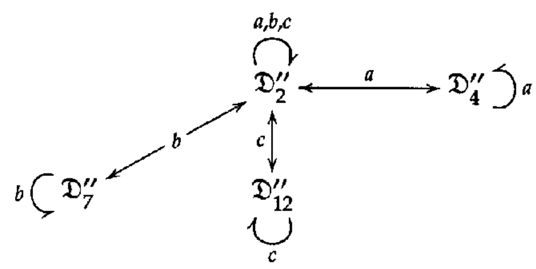
- $R^4_i = \{\, (u,v) \in R^3_i \mid (\mathcal{H}^3, M^3_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|1}^{\,b} \,\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.

- $W^4 = \{\, w \in W^3 \mid (w,\_) \in R^4_i$ ó $(\_,w) \in R^4_i$ para algún jugador $i \,\}$.

- Para todo $w \in W^4$, $\delta^4_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{1|1} \\ \delta^3_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{1|1} \end{cases}$

Con la nueva información, a y c ya no consideran posibles aquellos mundos donde a b no le corresponde la ficha $\boxed{1|1}$. El modelo $M^4_{\mathfrak{D}}$ tiene la siguiente forma, donde indicamos con $\mathfrak{D}''_i$ las distribuciones idénticas a $\mathfrak{D}'_i$

excepto que la ficha $\boxed{1|1}$ está sobre la mesa:



de donde notamos que a ahora considera posibles tan solo $\mathfrak{D}''_2$ y $\mathfrak{D}''_4$, b sigue considerando posibles $\mathfrak{D}''_2$ y $\mathfrak{D}''_7$ mientras que c considera ahora posibles tan solo $\mathfrak{D}''_2$ y $\mathfrak{D}''_{12}$.

6.2.5. Segundo turno de c

Los extremos libres son ahora $(1, 2)$, y el jugador c pasa. Las precondiciones de esta acción son:

1. Que sea el turno de c (todos ya sabían esto).
2. Que alguno de los extremos libres en la mesa sean 1 ó 2 (también ya conocido por todos).
3. Que c no tenga ficha alguna que coincida con alguno de los extremos libres en la mesa (lo que es nuevo para a y b).

Por lo tanto, los jugadores aprenden que $\neg\boxed{2|-}^{\,c} \wedge \neg\boxed{1|-}^{\,c}$ debió ser cierta antes de esta acción, lo que nos permite descartar de su relación de accesibilidad aquellos mundos. Como resultado de la acción obtenemos el historial del juego $\mathcal{H}^5$ y el modelo $M^5_{\mathfrak{D}} = (W^5, R^5_i)$, que son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^5 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^a_{\boxed{2|1}}(2,1)\alpha^b_{\boxed{1|1}}(2,1)\alpha^c_\epsilon(2,1)$.
- $R^5_i = \{(u,v) \in R^4_i \mid (\mathcal{H}^4, M^4_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \neg\boxed{2|-}^{\,c} \wedge \neg\boxed{1|-}^{\,c}\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.
- $W^5 = \{w \in W^4 \mid (w,\_) \in R^5_i$ ó $(\_,w) \in R^5_i$ para algún jugador $i\}$.
- $\delta^5_w(\boxed{x|y}) = \delta^4_w(\boxed{x|y})$ para todo $w \in W^5$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$.

El modelo $M^5_{\mathfrak{D}}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{D}''_2 \arrow[loop above, "a{,}b{,}c"] \arrow[d, leftrightarrow, "c"'] \\ \mathfrak{D}''_{12} \arrow[loop below, "c"] \end{tikzcd}$$

En este momento del juego, *a* y *b* conocen ya cual fue la distribución inicial de fichas, y saben ahora qué fichas tiene cada uno de los demás jugadores. En el modelo esto se representa al ser tan solo el mundo correspondiente a la distribución $\mathfrak{D}_2$ accesible para ambos. El jugador *c*, en cambio, todavía considera dos mundos como posibles.

Los extremos libres son (*2*, *1*) y le corresponde el turno a *a*. Este coloca la ficha $\boxed{0|2}$ y gana la partida.

6.3. Ejemplo desde la perspectiva de un jugador

El lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ presenta una perspectiva objetiva, externa a los jugadores que participan en el juego. Esto se observa al notar que, para podar dar valor de verdad a cada fórmula, es necesaria una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $\mathcal{H}$ es el historial de la partida, $M_{\mathfrak{D}}$ es la estructura de mundos posibles que describe el conocimiento de los jugadores, y w es el mundo que describe la situación real. En otras palabras, necesitamos conocer el historial completo de la partida ($\mathcal{H}$), el conocimiento de *todos* los jugadores ($M_{\mathfrak{D}}$) y la situación real (w) para poder decidir si una fórmula es verdadera o no.

Un enfoque desde una perspectiva subjetiva, es decir, desde la perspectiva de un jugador en particular, nos permite entender de mejor forma la manera en que va cambiando el conocimiento de este jugador en particular. En especial, podremos entender mejor no solo cómo evoluciona el conocimiento del jugador acerca de la situación acerca del juego, sino acerca del conocimiento que él tiene acerca del conocimiento de los demás jugadores.

Presentaremos, como ejemplo final, la misma partida presentada en el ejemplo anterior. En este ejemplo se mostrará cómo evoluciona la estructura de mundos posibles pero manteniendo en esta ocasión el punto de vista de un jugador en particular. Este ejemplo nos servirá para entender las diferencias que hay entre los dos puntos de vista.

Para este ejemplo, supondremos que somos el jugador a. Como se mencionó, hay $\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ formas posibles de repartir las 6 fichas entre los 3 jugadores, esto es $15(6) = 90$ distribuciones de fichas posibles en cada partida. Antes de la repartición, el jugador a considera posibles las 90 diferentes distribuciones y sabe además que b y c también consideran posibles cualquiera de estas distribuciones. Sea $M^0_{\mathcal{D}} = (W^0, R^0_i)$ la estructura que describe el conocimiento de a acerca de la situación del juego y del conocimiento de todos los jugadores antes del reparto de fichas. Entonces:

- $|W^0| = 90$, indicando que hay 90 distribuciones posibles.
- $R^0_i = W \times W$ para todo $i \in \mathcal{J}'$, indicando que a considera posibles todas las distribuciones, y que él sabe que los demás jugadores también.
- $\delta_w(\boxed{x|y}) = (\_\,, 0)$ para todo $w \in W^0$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$, indicando así que ninguna ficha ha sido jugada.

6.3.1. Reparto de fichas

El reparto de fichas es tal que :

$$a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$$

¿Qué aprende a como consecuencia del reparto de fichas? Aprende que tiene las fichas $\boxed{1|2}$ y $\boxed{0|2}$, por lo que ya no considera posibles aquellos mundos donde dichas fichas no están en su poder. Sin embargo, no aprende nada relativo a lo que aprenden los jugadores b y c. Nótese que aunque a no sabe qué fue lo que aprendieron los jugadores b y c, sí considera que b y c son jugadores racionales, por lo que a sabe que b y c son conscientes de las fichas que poseen, cualesquiera que sean estas. Esto significa que si b cree, por ejemplo, que la distribución de fichas $a \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{0|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{2|2}\}$ es posible, entonces no puede considerar como posibles otras distribuciones donde él (b) no tenga las fichas $\boxed{0|2}$ y $\boxed{1|1}$.

En términos del modelo de mundos posibles, a debe entonces descartar de su relación de accesibilidad aquellos pares que involucran mundos posibles en los cuales él mismo no tiene $\boxed{1|2}$ y $\boxed{0|2}$. Nótese que no puede eliminar del modelo los mundos que él no considera posibles, porque desde su punto de vista, pueden ser considerados posibles por algún otro jugador. En otras palabras, no puede eliminar del modelo los mundos que él no considera posibles porque aun después de modificar su propia relación de accesibilidad, todavía pueden ser accesibles por medio de la relación de accesibilidad de algún otro jugador. Lo que sí puede hacer es eliminar de las relaciones de accesibilidad que él considera para b aquellos pares que unen mundos que son incompatibles desde el punto de vista de b, y lo mismo para c. El concepto de mundos incompatibles se define formalmente a continuación.

Definición 6.3.1 (Mundos compatibles e incompatibles). *Sea* $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ *una estructura de mundos posibles para el dominó, y sean* $u, v \in W$. *Recordemos que* $\mathcal{F}_u^i$ *es el conjunto de fichas que tiene el jugador* i *en el mundo posible* u*, es decir:*

$$\mathcal{F}_u^i = \{ \boxed{x|y} \in \mathcal{F} \mid \delta_u(\boxed{x|y}) = (i, 0) \}$$

Decimos que los mundos u y v son compatibles para el jugador i *si las fichas que tiene* i *en* u *son las mismas fichas que tiene* i *en* v*, es decir, si* $\mathcal{F}_u^i = \mathcal{F}_v^i$. *En este caso, escribiremos* $u \leftrightarrow^i v$.

Decimos que los mundos u y v son incompatibles para el jugador i *si las fichas que tiene* i *en* u *son distintas a las fichas que tiene* i *en* v*, es decir, si* $\mathcal{F}_u^i \neq \mathcal{F}_v^i$. *En este caso, escribiremos* $u \not\leftrightarrow^i v$.

Después de repartirse las fichas, el historial de la partida $\mathcal{H}^1$ (consideramos que $\mathcal{H}^0$ es la secuencia vacía) y el modelo resultante $M_{\mathfrak{D}}^1 = (W^1, R_i^1)$, que describe el conocimiento de todos los jugadores desde el punto de vista del jugador a, es el siguiente:

- $\mathcal{H}^1$ es la secuencia vacía.
- $R_a^1 = \{ (u,v) \in R_a^0 \mid (\mathcal{H}^0, M_{\mathfrak{D}}^0, \{u,v\}) \models \boxed{1|2}^a \wedge \boxed{0|2}^a \}$ y $R_j^1 = \{ (u,v) \in R_j^0 \mid u \leftrightarrow^j v) \}$ para $j \in \{b,c\}$.
- $W^1 = \{ w \in W^0 \mid (w, \_) \in R_i^1$ ó $(\_, w) \in R_i^1$ para algún jugador $i \}$.
- $\delta_w^1(\boxed{x|y}) = \delta_w^0(\boxed{x|y})$ para todo $w \in W^1$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$.

En este punto, aunque todos los mundos en W^1 son accesibles para al menos algún jugador desde el punto de vista de a, para él tan solo son accesibles seis de ellos, ya que ha descartado de su relación de accesibilidad (pero no eliminado del modelo) aquellos pares que involucran mundos en los cuales él no tiene las fichas $\boxed{1|2}$ y $\boxed{0|2}$. Su incertidumbre se ha reducido de considerar 90 mundos posibles a considerar tan solo 6, que son todas las formas posibles en que pueden estar distribuidas las restantes cuatro fichas entre los otros dos jugadores ($\binom{4}{2} = 6$). Esto se muestra en el modelo al notar que solo los mundos posibles que corresponden a estas 6 distribuciones son accesibles por medio de relaciones R_a; todos los demás han quedado aislados incluso para ellos mismos (es decir, no hay ni siquiera relaciones de accesibilidad reflexivas en ellos).

Los mundos accesibles para a desde su punto de vista son los que corresponden a las distribuciones siguientes:

$\mathfrak{D}_1$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|0}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_2$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_3$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$.

$\mathfrak{D}_4$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_5$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$.

$\mathfrak{D}_6$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{2|2}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|0}\}$.

6.3.2. Primer turno de c

La partida la inicia el jugador que tiene la ficha $\boxed{2|2}$ colocando esta sobre la mesa. El jugador c es quien realiza esta acción y, como consecuencia, a aprende que la fórmula $\boxed{2|2}^c$ es cierta. Aún más, al ser esta una acción publica, a aprende que *todos* aprendieron que la fórmula $\boxed{2|2}^c$ es cierta.

Una vez realizada esta acción, el modelo cambia. Como a sabe que c tiró la ficha $\boxed{2|2}$, a elimina de su relación de accesibilidad aquellos pares que involucran mundos posibles donde $\boxed{2|2}^c$ no es cierta. Como a sabe que b y c saben que c tiró la ficha $\boxed{2|2}$, a elimina de la relación de accesibilidad que contempla para b y c aquellos pares que involucran mundos donde $\boxed{2|2}^c$ no es cierta. El historial del juego $\mathcal{H}^2$ y el modelo resultante $M^2_{\mathcal{D}} = (W^2, R^2_i)$ son tales que:

- $\mathcal{H}^2 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)$.
- $R^2_i = \{(u,v) \in R^1_i \mid (\mathcal{H}^1, M^1_{\mathcal{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{2|2}^c\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.
- $W^2 = \{w \in W^1 \mid (w,\_) \in R^2_i$ ó $(\_,w) \in R^2_i$ para algún jugador $i\}$.
- Para todo $w \in W^2$, $\delta^2_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{2|2} \\ \delta^1_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{2|2} \end{cases}$

Nótese que después de actualizar las relaciones de accesibilidad, algunos mundos posibles quedan inaccesibles. Son precisamente estos los mundos que, desde la perspectiva de a, ningún jugador considera posibles (en este caso, aquellos mundos donde $\boxed{2|2}^c$ no es cierta en el modelo $M^1_{\mathfrak{D}}$). Podemos entonces eliminar ahora estos mundos de nuestro modelo. El otro cambio importante es la función de distribución de fichas para cada mundo que permanece en el modelo. Esta función se actualiza para indicar que la ficha jugada ($\boxed{2|2}$ en este caso) se encuentra ahora sobre la mesa, con lo cual la fórmula $\boxed{2|2}^c$ tampoco es cierta en el modelo $M^2_{\mathfrak{D}}$.

Dado que hemos eliminado aquellos mundos posibles donde c no tiene (o tuvo) la ficha $\boxed{2|2}$, los mundos restantes son aquellos que corresponden a las $\binom{5}{2}\binom{3}{2}$ formas distintas de distribuir las cinco fichas restantes entre los tres jugadores, es decir, $|W^2| = 10(3) = 30$. Estos son aquellos mundos posibles que son accesibles para alguno de los jugadores, desde el punto de vista de a.

Sin embargo, para a tan solo son accesibles tres mundos, los que son consistentes con las distribuciones siguientes. Recordemos que en todos los mundos posibles en W^2, la proposición $\boxed{2|2}^c$ es falsa, ya que esta ficha está ahora sobre la mesa. Estos mundos posibles son, sin embargo, consistentes con distribuciones en las cuales a c le corresponde la ficha $\boxed{2|2}$, ya que esta estuvo en manos de c.

$$\mathfrak{D}_1\!: \; a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}, \; b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{0|0}\} \text{ y } c \leftarrow \{\boxed{1|1}, \boxed{2|2}\}.$$

$$\mathfrak{D}_2\!: \; a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}, \; b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\} \text{ y } c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}.$$

$$\mathfrak{D}_4\!: \; a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}, \; b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\} \text{ y } c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}.$$

Estas son precisamente las $\binom{3}{1} = 3$ formas posibles de distribuir las tres fichas restantes entre los otros dos jugadores, ya que a sabe que el tiene $\boxed{1|2}$ y $\boxed{0|2}$, y que c tuvo $\boxed{2|2}$.

6.3.3. Primer turno de a

Le corresponde el turno a a. Él decide tirar $\boxed{1|2}$. Como consecuencia de esta acción, a no aprende nada nuevo acerca de la distribución de fichas ya que la única información revelada es que el mismo tenía $\boxed{1|2}$. Aprende, sin embargo, que b y c saben ahora que el tenía $\boxed{1|2}$. Debe, entonces, eliminar de la relación de accesibilidad que él considera para b y para c los pares que involucran mundos donde $\boxed{1|2}^a$ no es cierta. El historial del juego $\mathcal{H}^3$ y el modelo resultante $M^3_{\mathfrak{D}} = (W^3, R^3_i)$ son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^3 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^a_{\boxed{2|1}}(2,1)$.
- $R^3_j = \{(u,v) \in R^2_j \mid (\mathcal{H}^2, M^2_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|2}^a\}$ para $j \in \{b,c\}$; $R^3_a = R^2_a$.
- $W^3 = \{w \in W^2 \mid (w,\_) \in R^3_i$ ó $(\_,w) \in R^3_i$ para algún jugador $i\}$.
- Para todo $w \in W^3$, $\delta^3_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{1|2} \\ \delta^2_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{1|2} \end{cases}$

Después de esta acción, hemos eliminado los mundos en los cuales, o no se cumple $\boxed{2|2}^c$ o no se cumple $\boxed{1|2}^a$ (ambos en el modelo M^2). Esto nos deja con 12 mundos posibles ($|W^3| = 12$), que son los correspondientes a las $\binom{4}{2}\binom{2}{1}$ formas posibles de distribuir las cuatro fichas restantes entre los tres jugadores (recordemos que a cada jugador le corresponden tan solo dos fichas).

Dado que a no aprendió nada sobre la distribución de fichas a consecuencia de la última acción (que él mismo realizó), él sigue considerando como posibles las tres distribuciones iniciales $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{D}_4$.

6.3.4. Primer turno de b

Ahora le corresponde el turno a b. Supongamos que b tira $\boxed{1|1}$. El jugador a sabe ahora que $\boxed{1|1}^b$ fue cierta, y sabe además que b y c lo saben también. Actualiza, por lo tanto, la relación de accesibilidad para todos los jugadores. El historial del juego $\mathcal{H}^4$ y el modelo resultante $M^4_{\mathfrak{D}} = (W^4, R^4_i)$ son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^4 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^a_{\boxed{2|1}}(2,1)\alpha^b_{\boxed{1|1}}(2,1)$.
- $R^4_i = \{(u,v) \in R^3_i \mid (\mathcal{H}^3, M^3_{\mathfrak{D}}, \{u,v\}) \models \boxed{1|1}^b\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.
- $W^4 = \{w \in W^3 \mid (w,\_) \in R^4_i$ ó $(\_,w) \in R^4_i$ para algún jugador $i\}$.
- Para todo $w \in W^4$, $\delta^4_w(\boxed{x|y}) = \begin{cases} (\_,1) & \text{si } \boxed{x|y} = \boxed{1|1} \\ \delta^3_w(\boxed{x|y}) & \text{si } \boxed{x|y} \neq \boxed{1|1} \end{cases}$

En la estructura $M^4_{\mathfrak{D}}$ quedan ahora tan solo 6 mundos posibles. Dado que ahora a sabe que todos saben que $\boxed{2|2}^t \wedge \boxed{1|2}^t \wedge \boxed{1|1}^t$ es cierto, estos 6 mundos posibles corresponden a las $\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 3(2) = 6$ formas posibles de distribuir las restantes tres fichas entre los tres jugadores. Veamos cuáles distribuciones iniciales considera posible cada jugador desde el punto de vista de a.

Desde su punto de vista, a considera posibles las distribuciones iniciales que son consistentes con la fórmula $\boxed{1|2}^{a} \wedge \boxed{0|2}^{a} \wedge \boxed{2|2}^{c} \wedge \boxed{1|1}^{b}$. Estas distribuciones son:

$\mathfrak{D}_2$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_4$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$.

las cuales corresponden a las $\binom{2}{1} = 2$ formas posibles de distribuir las dos fichas restantes entre b y c.

Desde el punto de vista de a, los jugadores b y c consideran posibles tan solo distribuciones que son consistentes con la fórmula $\boxed{2|2}^{c} \wedge \boxed{1|2}^{a} \wedge \boxed{1|1}^{b}$. Estas distribuciones son:

$\mathfrak{D}_2$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_4$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|2}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_7$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|0}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{2|2}\}$.

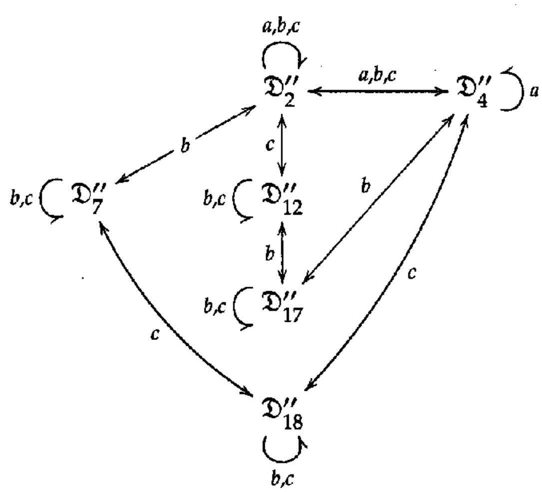
$\mathfrak{D}_{12}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{17}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|0}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|1}, \boxed{2|2}\}$.

$\mathfrak{D}_{18}$: $a \leftarrow \{\boxed{1|2}, \boxed{0|1}\}$, $b \leftarrow \{\boxed{0|0}, \boxed{1|1}\}$ y $c \leftarrow \{\boxed{0|2}, \boxed{2|2}\}$.

que corresponden, como se mencionó, a las $\binom{3}{1}\binom{2}{1}$ formas posibles de distribuir las tres fichas restantes entre a, b y c.

El modelo $M^4_{\mathfrak{D}}$ es de la siguiente forma:



6.3.5. Segundo turno de c

Los extremos libres son ahora $(2, 1)$. El jugador c pasa. De esto, a aprende que el jugador c no tiene ficha alguna que coincida con los extremos libres del tablero. Como la información es pública, modifica entonces la relación de accesibilidad de todos los jugadores para descartar los mundos posibles donde c tiene alguna ficha que contenga 1 ó 2. El resultado es el historial del juego $\mathcal{H}^5$ y el modelo $M^5_{\mathcal{D}} = (W^5, R^5_i)$, que son de la siguiente forma:

- $\mathcal{H}^5 = \alpha^c_{\boxed{2|2}}(2,2)\alpha^a_{\boxed{2|1}}(2,1)\alpha^b_{\boxed{1|1}}(2,1)\alpha^c_{\epsilon}(2,1)$.

- $R^5_i = \{(u,v) \in R^4_i \mid (\mathcal{H}^4, M^4_{\mathcal{D}}, \{u,v\}) \models \neg\boxed{2|-}^{\,c} \wedge \neg\boxed{1|-}^{\,c}\}$ para todo $i \in \mathcal{J}'$.

- $W^5 = \{w \in W^4 \mid (w, \_) \in R^5_i$ ó $(\_, w) \in R^5_i$ para algún jugador $i\}$.

- $\delta^5_w(\boxed{x|y}) = \delta^4_w(\boxed{x|y})$ para todo $w \in W^5$ y toda $\boxed{x|y} \in \mathcal{F}'$.

Los mundos posibles que permanecen en W^5 son los correspondientes a las distribuciones consistentes con

$$\boxed{2|2}^{\,c} \wedge \boxed{1|2}^{\,a} \wedge \boxed{1|1}^{\,b} \wedge \neg\boxed{2|-}^{\,c} \wedge \neg\boxed{1|-}^{\,c}$$

El modelo $M^5_{\mathcal{D}}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}''_2 \arrow[loop above, "{a,b,c}"] \arrow[d, leftrightarrow, "c"'] \\
\mathfrak{D}''_{12} \arrow[loop below, "{b,c}"]
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que a conoce ya cuál fue la distribución inicial de fichas ($\mathfrak{D}_2$ es el único mundo posible accesible para a). También se observa que, desde su punto de vista, b también conoce cual es la situación real (sea cual sea el mundo real, b tan solo puede accesar a ese mismo mundo) y c todavía considera posibles $\mathfrak{D}_2$ y $\mathfrak{D}_{12}$.

6.3.6. Segundo turno de a

Los extremos libres son $(2, 1)$ y le corresponde el turno a a. Este coloca la ficha $\boxed{0|1}$ y gana la partida. Al realizar esta acción, a sabe que c aprendió que $\boxed{0|1}^{a}$ era cierta en M^5.

Nótese como, aunque antes del reparto de fichas había 90 distribuciones posibles, estas se redujeron rápidamente conforme se realizaban acciones en el juego. La cantidad de mundos posibles del modelo siguió siendo 90 aun después del reparto de fichas. Sin embargo bajó de 90 a 30 después de que c tiró $\boxed{2|2}$, llegó a 12 al tirar a $\boxed{1|2}$, llegó a 6 cuando b tiró $\boxed{1|1}$, se redujo a 2 al no tirar c, y finalmente llegó a 1 cuando a tiró su última ficha.

Para a, los mundos que consideraba posibles disminuyeron mas rápidamente. Las distribuciones que consideraba posibles pasaron de 90 a 6 con el reparto de fichas y de 6 a 3 al tirar c $\boxed{2|2}$. No se alteró al tirar él mismo $\boxed{1|2}$ pero pasó de 3 a 2 al tirar b $\boxed{1|1}$ y finalmente llegó a 1 al pasar c.

6.4. Fórmulas verdaderas desde la perspectiva de un jugador

La característica más importante del ejemplo anterior fue que en ningún momento tomamos en cuenta cuál era el mundo real. Como los modelos describían en cada momento el conocimiento de los jugadores desde el punto de vista de uno de ellos en particular, solo pudimos conocer el mundo real hasta casi el final de la partida (que fue el momento en el cual este jugador obtuvo la información suficiente para poder reducir la cantidad de mundos que él consideraba posibles a 1). Nótese que, además de esta característica, los modelos son modelos normales. La diferencia es que fueron interpretados como el conocimiento de los jugadores desde el punto de vista de uno de ellos.

Al no conocer el mundo real, no podemos utilizar la relación $\models$ (def. 4.6.4) para saber cuándo una fórmula φ es verdadera desde el punto de vista de un jugador en particular. Esto es debido a que esta relación se da entre la fórmula φ y una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ en la cual el mundo real está indicado por w.

Dado que este jugador no conoce el mundo real, para verificar el valor de verdad de una fórmula en un modelo dado, tendría que verificar el valor de verdad de dicha fórmula en todos los mundos posibles. Obsérvese, sin embargo, que aunque el jugador no puede distinguir el mundo real, no necesariamente considera posibles todos los mundos que conforman W. En el modelo $M^2_{\mathfrak{D}} = (W^2, R^2_i)$ del ejemplo anterior, a tan solo considera posibles 3 distribuciones (solo tres mundos posibles son accesibles para él en M^2) mientras que el número de mundos posibles en W^2 es de 30. Es posible, por lo tanto, obtener el valor de verdad de una fórmula desde el punto de vista de un jugador en particular si verificamos el valor de verdad de esta fórmula tan solo en todos los mundos que el jugador considera posibles.

Denotaremos como $\mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$ los mundos posibles que son accesibles para el jugador i en el modelo $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$, es decir:

$$\mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i) = \{\, w \in W \mid (w, \_) \in R_i \;\text{ ó }\; (\_\,, w) \in R_i \,\}$$

donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $i \in \mathcal{J}$. Definimos la relación $\models^i$ de la siguiente manera.

Definición 6.4.1 (Semántica para $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ desde la perspectiva de un jugador). *Sea $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ una descripción consistente de la situación de una partida así como del conocimiento de los jugadores. Sea φ una fórmula en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$.*

Diremos que φ es verdadera *en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$* desde el punto de vista del jugador *i si y solo si*

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$$

En este caso escribiremos $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models^i \varphi$.

Diremos que $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es posible *en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista de *i si y solo si*

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \varphi \qquad \text{para algún } u \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$$

Diremos que $\varphi \in \mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es falsa *en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista de *i si y solo si*

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \not\models \varphi \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$$

lo que es equivalente a

$$(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, u) \models \neg\varphi \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$$

En este caso escribiremos $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models^i \neg\varphi$.

Según la definición anterior, la fórmula φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i si y solo si esta fórmula es verdadera en todo los mundos que i considera posibles. La pregunta "¿es decidible si φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i?" tiene una respuesta afirmativa, pues esta pregunta es, en el peor de los casos (cuando i considera posibles todos los mundos en W) equivalente a la pregunta "¿es decidible si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$?" cuya respuesta, de acuerdo al teorema 2 es afirmativa. Esto se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 5. *En el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, siempre podemos responder si una fórmula φ es verdadera, posible o falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista de un jugador i.*

Demostración. Sea $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$. Para verificar que φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i, tenemos que verificar que φ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $w \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$. En el peor de los casos, el jugador i considera posibles todos los mundos en W ($\mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i) = W$), por lo que tendríamos que verificar que φ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ con $w \in W$. Pero esto último es precisamente el método a seguir para decidir si φ es válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}) \models \varphi$. Por el teorema 2, este método termina eventualmente. Entonces, aun en el peor de los casos, podemos decidir si φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i.

Para verificar que φ es posible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i, tenemos que verificar que φ es verdadera en al menos una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $w \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$. En el peor de los casos, $\mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i) = W$. Aún así, W es siempre finito, por lo que es posible verificar si $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w) \models \varphi$ en algún $w \in W$. Entonces siempre podemos saber si φ es posible en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i

Para verificar que φ es falsa en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista de i, tenemos que verificar que φ es falsa en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $w \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$. Esto es equivalente a verificar que $\neg\varphi$ es verdadera en toda terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $w \in \mathbb{A}_{M_{\mathfrak{D}}}(i)$ lo cual, como se explica en el primer párrafo de esta demostración, es posible. □

Nótese cómo el decir que una fórmula φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i es equivalente a decir que en todos los mundos que el jugador i considera posibles, φ es verdadera, y el decir que una fórmula no es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde el punto de vista del jugador i, es equivalente a decir que existe por lo menos alguna situación que i considera posible en la cual φ fórmula es falsa.

Sea $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$. Dada una fórmula φ dentro del lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$, todo jugador i puede entonces decidir siempre si

- φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde su punto de vista. Esto se da cuando φ es verdadera en todos los mundos que i considera posibles.
- $\neg\varphi$ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ desde su punto de vista. Esto se da cuando $\neg\varphi$ es verdadera en todos los mundos que i considera posibles.
- No tiene información suficiente para afirmar que φ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$ ni para afirmar que $\neg\varphi$ es verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, desde su

punto de vista. Esto se da cuando φ es verdadera ($\neg\varphi$ falsa) en al menos uno de los mundos que i considera posibles, pero también $\neg\varphi$ es verdadera (φ falsa) en al menos uno de los mundos que él considera posibles.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

El objetivo principal del presente trabajo fue estudiar la forma en que cambia el conocimiento de un conjunto de agentes al realizarse acciones durante una situación de competencia. Se eligió analizar en particular el juego de dominó, porque este presenta características interesantes.

El dominó es un juego de gran popularidad en países de habla hispana, y existen muchas variantes del juego que se distinguen entre sí por el número de jugadores (4 en nuestro caso), la cantidad de fichas (que depende del tamaño del conjunto del cual se pueden elegir los lados de cada ficha: en nuestro caso, el conjunto $\{0, 1, \ldots, 6\}$ produce el dominó clásico de 28 fichas), las reglas extras que se añaden a cada versión (iniciar forzosamente con una ficha doble, jugar en parejas, puntos al realizar cierto tipo de acciones, etc.) y la forma en que se decide quién gana la partida (el que finalice primero sus fichas, el que sume mas puntos por las acciones que realizó, etc.). Una descripción buena del juego de dominó, de sus variantes y de las estrategias utilizadas durante una partida es la hecha por José Luis González Sanz en [GS00].

En el dominó, aunque existe una parte dependiente del azar (la distribución inicial de fichas), también existe otra parte (muy importante) que depende de la habilidad en el juego: "Entre las cualidades que deben adornar al buen jugador ... están: la disciplina, la psicología, memoria y la capacidad deductiva." ([GS00]). Una vez hecho el reparto de fichas, es tarea de cada jugador el elegir la acción que realizará en su turno. Esta acción debe llevar la partida a una situación en la cual él tenga mayores probabilidades de alcanzar su meta.

Nótese que, aunque a primera vista la gran cantidad de formas distintas en que se pueden distribuir las fichas entre los jugadores podría hacer suponer que este es un juego demasiado complejo (hay $\binom{28}{7}\binom{21}{7}\binom{14}{7}$ distribuciones posibles; inclusive, aun al conocer un jugador sus propias fichas, existen $\binom{21}{7}\binom{14}{7} = 399,072,960$ formas distintas en que se pueden distribuir las demás fichas entre los jugadores restantes), muchas personas son capaces de jugar partidas con una gran eficiencia. En nuestro trabajo hemos dejado a un lado los detalles psicológicos y nos hemos enfocado en comprender los métodos utilizados por estas personas a fin de conocer tanto los tipos de razonamiento que utilizan como las observaciones en que se basan sus inferencias. Una buena comprensión de estos métodos nos permite, entre otras cosas, aplicarlos en áreas importantes como la inteligencia artificial.

7.1. El presente trabajo

Hemos desarrollado un lenguaje lógico dinámico epistémico para el juego de dominó ($\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$). Este lenguaje, basado en el lenguaje de la lógica epistémica proposicional, nos permite, desde el punto de vista de un observador externo:

- Expresar situaciones posibles durante una partida de dominó.
- Expresar el diferente conocimiento que los jugadores pueden tener en un momento dado no solo acerca de estas situaciones, sino acerca del conocimiento que tienen los demás jugadores sobre estas situaciones (conocimiento de alto orden).
- Expresar la manera en que estas situaciones y este conocimiento cambian como consecuencia de las acciones realizadas durante una partida.

Como primer paso, hicimos un pequeño análisis para conocer cuáles son los hechos básicos que necesitamos expresar a fin de describir la situación de una partida de una manera clara y sin ambigüedades. Estos hechos básicos conforman nuestro conjunto de proposiciones atómicas para el dominó ($\Phi_{\mathfrak{D}}$). En base a estas proposiciones atómicas y a los conectivos lógicos $\neg$ y $\vee$ construimos el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_{\mathfrak{D}}$ (def. 4.2.1).

Para poder expresar el conocimiento que los jugadores tienen sobre la situación de una partida, se añadieron dos reglas: la primera nos permite construir fórmulas del tipo $K_i\varphi$, cuyo significado intuitivo es: *el jugador i sabe que φ*, mientras que la segunda nos permite construir fórmulas del tipo

$C_{\mathcal{B}}\varphi$, cuyo significado intuitivo es: *φ es conocimiento común entre los jugadores en $\mathcal{B}$*. Este nuevo lenguaje se llamó $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$: lenguaje lógico epistémico para el dominó (def. 3.4.2). En este lenguaje podemos expresar tanto situaciones posibles dentro del juego (aquellas fórmulas en las que no aparece ningún operador modal K_i) como el conocimiento que tienen los jugadores acerca de estas situaciones (aquellas fórmulas del tipo $K_i\varphi$) y aún más: podemos expresar el conocimiento que tienen los jugadores acerca del conocimiento de otros jugadores (fórmulas del tipo $K_iK_j\varphi$). Por otra parte, recordemos que φ es conocimiento común entre los jugadores en $\mathcal{B}$ si todos en $\mathcal{B}$ saben φ, todos saben que todos saben φ, todos saben que todos saben que todos saben φ, etc. Con ayuda del operador modal $C_{\mathcal{B}}$ podemos expresar directamente que φ es conocimiento común entre los jugadores de $\mathcal{B}$ ($C_{\mathcal{B}}\varphi$); de otra forma tendríamos que recurrir a fórmulas sintácticamente infinitas ($E_{\mathcal{B}}\varphi \wedge E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi) \wedge E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}(E_{\mathcal{B}}\varphi)) \wedge \cdots$).

La semántica del lenguaje $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ se basa en la semántica para la lógica epistémica $\mathcal{LE}$. Las fórmulas de la lógica epistémica se interpretan generalmente en estructuras de mundos posibles, las cuales se definen (dado un conjunto de agentes $\mathcal{A}$ y un conjunto de proposiciones atómicas Φ) como una tupla $M = (W, R_i, V)$ donde:

- $W \neq \emptyset$ es el conjunto de mundos posibles.
- R_i es una relación binaria sobre W para cada agente $i \in \mathcal{A}$ ($R_i \subseteq (W \times W)$).
- $V : \Phi \to 2^W$ es una función que asigna a cada proposición atómica el conjunto de mundos posibles en el que esta proposición se satisface.

Para que esta estructura sea adecuada a nuestros propósitos, se tuvieron que realizar algunas modificaciones. Las razones fueron las siguientes:

1. La función V nos dice en qué mundos posibles es verdadera cada una de las proposiciones atómicas. Como consecuencia, cada proposición atómica tiene, en un mundo posible, un valor de verdad que es independiente del valor de verdad de otras proposiciones en el mismo mundo. En el dominó, esto es un problema, ya que el valor de verdad de proposiciones como "el jugador a tiene la ficha $\boxed{0|2}$" tiene relación con el valor de verdad de proposiciones como "el jugador b tiene la ficha $\boxed{0|2}$". Necesitamos definir una manera de asignar valores de verdad a proposiciones atómicas de tal forma que el valor de verdad de una proposición p tenga relación con el valor de verdad de las otras proposiciones a las que está asociada.

2. Cada mundo posible corresponde intuitivamente a una de las distribuciones de las fichas posibles entre los jugadores. Sin embargo, algunos de los hechos básicos que necesitamos expresar (como *"es el turno del jugador a"* o *"los extremos libres en la mesa son 3 y 6"*) no dependen de la distribución de las fichas entre los jugadores y la mesa, sino de la secuencia de acciones realizadas hasta este momento. Para dar valor de verdad a estas proposiciones, necesitamos entonces mantener un registro de todas las acciones que se van realizando durante una partida.

Las modificaciones que se realizaron fueron las siguientes:

1. Dado que intuitivamente cada mundo posible corresponde a una de las posibles distribuciones de fichas, a cada mundo posible w se le asignó una *función de distribución de fichas* (véase la def. 4.3.1) que nos indica en poder de qué jugador está (o estuvo) determinada ficha, y si esta se encuentra sobre la mesa (1) o no (0), en el mundo posible w. El valor de verdad de las proposiciones atómicas relacionadas con la distribución de fichas entre los jugadores y la mesa ($\boxed{x|y}^{\,i}$, $\boxed{x|y}^{\,t}$, $fichas^i_n$, $fichas^t_n$, pts^i_n, pts^t_n y $menosPuntos^{i,j}$) en un mundo w está entonces definido en términos de la función δ_w. Gracias a esto, proposiciones tales como $\boxed{4|5}^{\,c}$ y $\boxed{4|5}^{\,d}$ no pueden ser ciertas al mismo tiempo en el mismo mundo posible w, pues esto implicaría que $\delta_w(\boxed{4|5}) = (c, 0)$ y $\delta_w(\boxed{4|5}) = (d, 0)$, lo cual es imposible. La estructura de mundos posibles para el dominó se definió entonces como un par $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ donde W es el conjunto de mundos posibles con una función de distribución de fichas δ_w asociada a cada $w \in W$ y R_i es la relación de accesibilidad para los jugadores. Una estructura acentuada para el dominó es, por lo tanto, un par $(M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $M_{\mathfrak{D}} = (W, R_i)$ y $w \in W$ (definición 4.4.1).

2. Para dar valor de verdad a las proposiciones atómicas que no están relacionadas con la distribución de fichas ($turno^i$, (u, v), ${}_{(u,v)}\boxed{x|y}^{\,i}$ y $\boxed{x|y}^{\,i}_{(u,v)}$) definimos el *historial de una partida* $\mathcal{H}$ como una secuencia (posiblemente vacía) en la cual, por cada acción realizada durante la partida, se agrega una entrada de la forma $\alpha^i_f(u, v)$ para indicar la acción realizada y los extremos libres que resultan de tal acción. La estructura en la cual se interpretan las fórmulas del lenguaje $\mathcal{LE}_{\mathfrak{D}}$ es definida entonces como una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $\mathcal{H}$ es el historial de la partida y $(M_{\mathfrak{D}}, w)$ es una estructura acentuada para el dominó (véanse las restricciones correspondientes en las definiciones 4.3.2 y 4.4.2).

Para poder expresar la forma en que las acciones realizadas modifican la situación de la partida y el conocimiento de los jugadores, se añadió una regla a la sintaxis del lenguaje. Esta regla nos permite expresar que una fórmula φ es verdadera después de ser ejecutada una acción α ($[\alpha]\varphi$). Este nuevo lenguaje lleva por nombre lenguaje lógico dinámico epistémico para el dominó $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ (def. 4.5.3).

Para dar valor de verdad a fórmulas que involucran acciones, necesitamos saber la forma en que estas acciones modifican no solo la situación de la partida, sino el conocimiento que acerca de esta situación tienen los jugadores. Cada acción α se interpreta entonces como una función ρ_α que toma la estructura acentuada para el dominó y el historial que describe la situación de la partida *antes* de la acción y regresa la estructura acentuada y el historial que describen la situación de la partida *después* de la acción. El historial se modifica al serle agregada la entrada correspondiente a la acción realizada. Para modificar la estructura acentuada, notamos que no toda acción es posible en toda situación; cada acción tiene asociada una *precondición* que debe ser satisfecha para que la acción se lleve a cabo. Dado que toda acción dentro del juego es pública para los jugadores (todos saben qué acción se realiza y quién la realiza), la precondición de la acción se vuelve conocimiento común entre todos los jugadores y, de esta forma, cada uno de ellos elimina de los mundos que considera posibles aquellos donde la precondición de la acción no se cumplía. Los mundos que ya no son accesibles para ningún jugador en la nueva estructura son eliminados (ningún jugador los considera posibles, y todos saben que los demás tampoco) llegando de esta forma a la estructura acentuada resultante. Las fórmulas en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ se interpretan entonces en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$ donde $\mathcal{H}$ es el historial de la partida y $(M_{\mathfrak{D}}, w)$ es una estructura acentuada para el dominó. Las acciones se interpretan como funciones entre estas ternas (def. 4.6.4).

Con el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ sintáctica y semánticamente definido, se dieron las definiciones de *fórmula verdadera en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, *fórmula válida en* $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, *fórmula válida en* $\mathcal{H}$ y *fórmula válida* para fórmulas φ en $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$. Se reviso entonces la decidibilidad de las preguntas *¿es φ verdadera en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$?*, *¿es φ válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$?*, *¿es φ válida en $\mathcal{H}$?* y *¿es φ válida?*.

Para finalizar el trabajo, se presentaron tres ejemplos. El primero de ellos es un ejemplo puramente sintáctico en el que mostramos que el lenguaje es lo suficientemente expresivo como para describir una partida de dominó completa. El segundo es una partida completa de una versión reducida del juego (menos fichas y menos jugadores) en la cual se muestra cómo evoluciona la estructura de mundos posibles y el historial que describen la partida. El tercer ejemplo es el más interesante: dado que nuestro lenguaje se basa en el de la lógica epistémica, el lenguaje presenta un punto de vista objetivo, externo a los jugadores que participan en la partida: somos capaces de describir la situación y cómo evoluciona esta, pero en ningún momento nos colocamos en el lugar de un jugador en particular. Nuestro tercer ejemplo es la misma partida del segundo ejemplo, pero vista desde la perspectiva de un jugador. Podemos entonces notar las diferencias que hay entre la estructura y el historial desde el punto de vista de un jugador y desde un punto de vista externo, así como las diferencias en la forma en que estos son modificados por las acciones realizadas.

7.2. Aportaciones

De acuerdo a nuestro conocimiento, el presente trabajo es el segundo en el que se estudia el conocimiento que tienen los jugadores acerca de la situación del juego durante una partida de dominó. El primer trabajo ([Sch01]), ha sido descrito en la sección 1.4. El presente trabajo es el primero en el que se hace dicho estudio utilizando la lógica epistémica. Es, también, el primer trabajo en el que se presenta un lenguaje lógico que permite expresar la forma en que la situación del juego y el conocimiento de los jugadores cambia al realizarse acciones durante una partida de dominó.

El lenguaje construido $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ es (consideramos nosotros) interesante, por las siguientes razones:

- Podemos expresar, desde el punto de vista de un observador externo, situaciones posibles dentro de una partida de dominó, el conocimiento que tienen los jugadores acerca de esta situación, y la forma en que estas situaciones y este conocimiento cambian a consecuencia de las acciones que los mismos jugadores llevan a cabo.
- El lenguaje está basado en el de lógica epistémica proposicional, en vez del de lógica de primer orden utilizada en [Sch01].
- A estar $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ basado en la lógica epistémica proposicional, evitamos el uso de fórmulas para describir las propiedades del conocimiento que estamos modelando, ya que estas aparecen implícitas en el tipo de relaciones de accesibilidad para cada agente, dentro del modelo. No es necesario fórmulas que indiquen que un jugador tiene introspección positiva, o que en la noción de conocimiento utilizada, si un jugador sabe que φ, entonces φ debe ser verdadera. En otras palabras,

evitamos la definición explícita de un conjunto de reglas axiomáticas que describan las propiedades del conocimiento que modelamos. Esto simplifica bastante el sistema.

- Al ser $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ una lógica multimodal, las fórmulas son transparentes y compactas. Evitamos también así el uso de cuantificadores y, en consecuencia, el uso de predicados.
- El uso de acciones sintácticas nos permite evitar el uso de fórmulas relacionadas con el tiempo, ya que este está implícito en la secuencia de estas acciones. Evitamos, nuevamente, la definición explícita de un conjunto de reglas axiomáticas.
- El lenguaje es decidible: siempre podemos saber si una fórmula dada es verdadera en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, válida en $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, válida en $\mathcal{H}$ o válida.

Al enfocar el presente estudio de situaciones de competencia sobre una de ellas en particular, obtuvimos las siguientes ventajas.

- Es posible comparar las hipótesis que planteamos con observaciones en la situación real.
- En el caso del dominó, los requisitos necesarios para organizar una partida son bastantes accesibles (las 28 fichas y tres amigos).

Sin embargo, el dominó comparte características importantes con muchas otras situaciones de competencia: es un juego finito y de información completa; los jugadores tienen información imperfecta acerca de la situación; es extensivo y la acción que se realizará en cada momento es elegida por el jugador en turno de entre un conjunto finito de acciones posibles; puede realizarse de manera cooperativa o no cooperativa; al final de cada partida, cada jugador recibe una compensación numérica de acuerdo al estado final del juego. El trabajo que se ha realizado es fácilmente aplicable (con algunos pequeños cambios tales como los conjuntos $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}$) a situaciones de competencia con dichas características.

Un aporte interesante del trabajo es la forma en que el lenguaje recoge las reglas del juego sin necesidad de sistemas axiomáticos: el número de jugadores (4) aparece en la definición del conjunto $\mathcal{J}$; la restricción de 7 fichas a cada jugador aparecen en la función de distribución de fichas mientras que la restricción de 28 fichas en total, cada una de ellas en la mano de un solo jugador o en la mesa, se muestran en la definición del conjunto $\mathcal{F}$ y, en consecuencia, en la función de distribución de fichas para cada uno de los mundos posibles; las reglas que indican la forma en que las fichas pueden ser jugadas se encuentran en las precondiciones para cada acción. En [Sch01] es necesario un conjunto de reglas axiomáticas que definen las reglas del juego.

Recordemos también que al utilizar la lógica epistémica, no es necesario un conjunto de axiomas que definan las propiedades del conocimiento que estamos modelando, ya que estas propiedades dependen del tipo de relaciones de accesibilidad para cada uno de los jugadores dentro de la estructura de mundos posibles (véase la subsección 2.6.1). De igual manera son innecesarios axiomas para el tiempo ya que la evolución de la partida está marcada por la secuencia de acciones.

Gracias a la finitud sintáctica de las fórmulas y a la finitud de los conjuntos involucrados (fichas y jugadores), el lenguaje tiene la ventaja de ser decidible: siempre podemos saber si una fórmula es verdadera en una terna $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}}, w)$, válida en la tupla $(\mathcal{H}, M_{\mathfrak{D}})$, válida en $\mathcal{H}$ o simplemente válida. En términos del juego, esto significa que siempre podemos saber si alguna afirmación (dada en términos del lenguaje) es cierta, falsa, o no tenemos la suficiente información para decidirlo.

7.3. Trabajo a futuro

Hemos definido un lenguaje lógico dinámico epistémico para el dominó $\mathfrak{LDE}_{\mathfrak{D}}$. Como ya se ha mencionado varias veces, este lenguaje nos permite expresar situaciones posibles durante una partida de dominó, el conocimiento que pueden tener los jugadores acerca de estas situaciones, y la manera en que las acciones realizadas durante la partida modifican esta situación y este conocimiento. Quedan, como en todo trabajo, algunos puntos sobre los cuales sería interesante trabajar. Mencionamos a continuación algunos de los que consideramos más interesantes.

7.3.1. Representación de conocimiento estratégico

El lenguaje $\mathfrak{LDE}_{\mathfrak{D}}$ describe solamente conocimiento definitivo de manera que, tal y como está definido ahora, no puede describir conocimiento estratégico. El conocimiento estratégico, como se mencionó en la introducción, es el conocimiento que tiene el jugador acerca de estrategias que corresponden al juego en cuestión. En teoría de juegos, una estrategia se define usualmente como una función que, dada la situación del juego, nos regresa la acción que se debe realizar en esa situación de acuerdo a esa estrategia. Una definición de estrategia que se acerque más al punto de vista lógico del presente trabajo nos permitiría representar cada estrategia de una manera más sencilla, y nos facilitaría la representación del conocimiento estratégico de los jugadores.

7.3.2. Representación de conocimiento histórico

En su versión actual, el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ tampoco puede describir conocimiento histórico. Después de jugar varias partidas con los mismos compañeros, un jugador va conociendo la forma en que estos compañeros se comportan en diversas situaciones. Si a lo largo de varias partidas hemos observado que un compañero inicia con la ficha $\boxed{6|6}$ cuando la tiene, podemos entonces suponer que si inicia con otra ficha es porque no tiene el doble 6. En general, si observamos que un jugador tiene por costumbre realizar la acción α en la situación φ, entonces es razonable suponer que al realizar él una acción α' nos encontramos en una situación φ'.

Es interesante entonces extender el lenguaje a fin de que también sea capaz de representar este tipo de conocimiento. Nótese que esto involucra no solo el recordar partidas anteriores, sino también los criterios necesarios para identificar las similitudes y las diferencias entre las acciones α y α', y entre las situaciones φ y φ' así como la forma de representar estas "reglas" de comportamiento.

7.3.3. Otros tipos de razonamiento

Como se menciono, el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathfrak{D}}$ describe únicamente conocimiento definitivo de manera que, tal y como está definido ahora, no puede describir conocimiento estratégico. En el primer ejemplo (el ejemplo sintáctico), el jugador a pudo haber notado después de que c tiró la ficha $\boxed{3|5}$ (durante la segunda ronda) que era casi seguro que d tenía la ficha $\boxed{0|3}$; ¿por qué? El jugador c comenzó jugando fichas con 0, por lo que debió continuar tirando ese número (es una estrategia común el tirar en nuestro primer turno una ficha que indique cuál es nuestro número fuerte); ¿por qué no lo hizo? El tres ($\boxed{3|6}$) no lo tiró el jugador a, en cuyo caso c lo habría respetado (es una estrategia común el no bloquear las fichas tiradas por el compañero de equipo), así que c debió bloquear el 3 y seguir jugando a 0. Dado que los extremos libres en ese momento eran 3 y 6, y que la ficha $\boxed{3|6}$ ya estaba sobre la mesa, la única forma en que c podía bloquear el 3 y seguir en 0 era jugando la ficha $\boxed{0|3}$; si no lo hizo entonces es muy probable que él no tenga dicha ficha. Pero *d* tampoco la tiene (pasó siendo 0 uno de los extremos libres), y *a* sabe que él mismo no la tiene, por lo que para él tenía que ser casi seguro que la ficha estaba en manos de *b*.

Como se puede observar, este tipo de razonamiento está basado no solamente en el conocimiento de *a* acerca de la distribución de las fichas y el historial de acciones de la partida, sino también en las estrategias en el dominó que él conoce y las estrategias que él sabe que *c* conoce. En este momento, el modelo semántico de $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ tan solo puede describir conocimiento definitivo. Por lo tanto no hay forma de expresar conocimiento acerca de estrategias y cómo este conocimiento influye en la forma en que cada acción afecta el conocimiento de cada jugador. En el párrafo anterior, el conocimiento de *a* se modifica no solo por la acción realizada, sino por el conocimiento que él tiene acerca de estrategias y el conocimiento que él tiene acerca de las estrategias que conoce *c*.

Nótese además que el razonamiento que debió utilizar *a* es distinto al utilizado anteriormente. Cuando *d* pasó siendo 0 y 6 los extremos libres en la mesa, *a* dedujo que *d* no tenía 0 ni 6 porque una de las reglas del juego establece que "un jugador pasa si y solo si no tiene ficha que coincida con alguno de los extremos libres en la mesa". Por otro lado, cuando *a* infiere que es casi seguro que *b* tiene $\boxed{0|3}$ no está aplicando una regla; está generando una hipótesis mediante la cual puede justificar el comportamiento (la acción realizada) de *c*. Esta hipótesis (*b* tiene $\boxed{0|3}$) puede justificar lo que *a* ha observado, pero no es la única hipótesis que puede hacerlo; tal vez *c* no conoce la estrategia de continuar con el número que inició, tal vez supuso que fue *a* quien colocó la ficha $\boxed{3|6}$ o tal vez simplemente *c* no quiso tirar $\boxed{0|3}$. Este proceso de generar hipótesis que justifiquen nuestras observaciones es usualmente llamado *razonamiento abductivo*.

Con el lenguaje $\mathcal{LDE}_{\mathcal{D}}$ tampoco es posible describir conocimiento histórico. Pudo haber sucedido que *a* y *c* hubieran formado equipo desde mucho tiempo atrás, y tal vez *a* sabía por su conocimiento de las partidas anteriores (conocimiento histórico) que generalmente *c* no repite el número que comenzó tirando. Es entonces posible que *a* generalizara esta observación y supusiera entonces que *c* nunca repite el número que comenzó a jugar. Con este conocimiento adicional, *a* no puede estar tan seguro que *d* tiene $\boxed{0|3}$. Este proceso de generalizar observaciones para hacer predicciones de comportamiento futuro es usualmente llamado *razonamiento inductivo*. Nos gustaría entender las diferentes formas en que estos tres tipos de razonamiento (deducción, abducción e inducción) interactúan durante una partida.

Bibliografía

[BMS99] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The logic of public announcements, common knowledge and private suspicious. Technical Report SEN-R9922, CWI, Amsterdam, 1999.

[dB00] Boudewijn P. de Bruin. Modeling knowledge in games, topology and logic. Master's thesis, Institute for Logic, Language and Computation (University of Amsterdam), 2000.

[Dru02] Sjoerd Druiven. Knowledge development in games of imperfect information. Master's thesis, Institute for Knowledge and Agent Technology (University Maastricht) & Artificial Intelligence (University of Groningen), 2002.

[FHMV95] Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses, and Moshe Y. Vardi. *Reasoning about knowledge.* The MIT Press, 1995.

[Ger99] Jelle Douwe Gerbrandy. *Bisimulations on Planet Kripke.* PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation (University of Amsterdam), 1999.

[GG97] Jelle Douwe Gerbrandy and Willem Groeneveld. Reasoning about information change. *Journal of Logic, Language, and Information*, 6:147–196, 1997.

[GS00] José Luis González Sanz. *El arte del dominó.* Editorial Paidotribo, 2000.

[Hin62] Jaakko Hintikka. *Knowledge and Belief.* Ithaca, N.Y. Cornell University Press, 1962.

[Koo03] Barteld P. Kooi. *Knowledge, chance, and change.* PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation (University of Amsterdam), 2003.

[Kri63] Saul A. Kripke. Semantical analysis of modal logic i. normal modal propositional calculi. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 9:67–96, 1963.

[Mor94] Peter Morris. *Introduction to Game Theory.* Springer-Verlag, 1994.

[Sch01] Erik Schwarz. An instance of a complete communication cycle within co-operative games: the case of domino. No publicado, 2001.

[vBDvE+01] Johan van Benthem, Paul Dekker, Jan van Eijk, Maarten de Rijke, and Yve Venema. Logic in action. Institute for Logic, Language and Computation (University of Amsterdam), 2001.

[vD00] Hans Pieter van Ditmarsch. *Knowledge games.* PhD thesis, Institute for Logic, Language and Computation (University of Amsterdam), 2000.

[Vel96] Frank Veltman. Defaults in update semantics. *Journal of Philosophical Logic*, 25:221–261, 1996.

[vNM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princenton University Press, 1944.

[VQHQ05] Fernando Raymundo Velázquez-Quesada and Francisco Hernández-Quiroz. A logical language for dominoes. Accepted as a short paper for the *12th International Conference on Logic for Programming Artificial Intelligence and Reasoning (LPAR)*, Montego Bay, Jamaica, 2005.

[VQHQ06] Fernando Raymundo Velázquez-Quesada and Francisco Hernández-Quiroz. Some semantics for a logical language for the game of dominoes. Accepted at the *IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications*, Innsbruck, Austria, 2006.