UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSIDERACIONES SOBRE ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA:

LUIS ENRIQUE CALVA SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Luis Enrique Calva Sánchez

FECHA: 10 Nov 2005

FIRMA:

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Consideraciones sobre algunos conceptos básicos de probabilidad"

realizado por *Calva Sánchez Luis Enrique*

con número de cuenta *09528232-3* , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	*Dr. Luis Antonio Rincón Solís*	
Propietario	*Mat. Margarita Elvira Chávez Cano*	
Propietario	*M. en C. Hugo Villaseñor Hernández*	
Suplente	*M. en D. Yvon Angulo Reyes*	
Suplente	*M. en D. Diana Esther Avila García*	

Consejo Departamental de *Matemáticas*

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mi familia, maestros y amigos, en especial al Dr. Luis Antonio Rincón Solis por su paciencia

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSIDERACIONES SOBRE ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

PRESENTA:

LUIS ENRIQUE CALVA SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2005

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Luis Enrique Calva Sánchez

FECHA: 10 Nov 2005

FIRMA:

UNIVERSIDAD NACIONAL AVTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Consideraciones sobre algunos conceptos básicos de probabilidad"

realizado por *Calva Sánchez Luis Enrique*

con número de cuenta *09528232-3*, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director Propietario	*Dr. Luis Antonio Rincón Solís*	
Propietario	*Mat. Margarita Elvira Chávez Cano*	
Propietario	*M. en C. Hugo Villaseñor Hernández*	
Suplente	*M. en D. Yvon Angulo Reyes*	
Suplente	*M. en D. Diana Esther Avila García*	

Consejo Departamental de *Matemáticas*

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mi familia, maestros y amigos, en especial al Dr. Luis Antonio Rincón Solis por su paciencia

Contenido

Introducción

En el presente trabajo de tesis se desarrollan algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad haciendo énfasis en la intuición, los aspectos históricos y procurando que las ideas y notación utilizados parezcan más simples y naturales, en contraste con la forma en que tradicionalmente se presentan en los libros de texto usuales. La idea de un escrito de esta naturaleza surgió a partir de la percepción del autor en el sentido de que la probabilidad es enseñada en los cursos regulares de una forma poco natural, con medianos o altos niveles de abstracción, y poca o nula atención a los aspectos intuitivos e históricos de los conceptos. Muy posiblemente los altos niveles de reprobación y el bajo nivel de entendimiento de las ideas elementales de esta parte de las matemáticas pueda ser explicado por la forma poco natural en la que se presentan sus conceptos y definiciones. En este trabajo se plantean, explican y revisan algunos de estos conceptos con el fin de motivar y mejorar su entendimiento.

El texto esta dirigido a estudiantes de nivel medio superior y superior, y al público en general con cierto entrenamiento en el manejo de fórmulas matemáticas. El objetivo es atraer la atención hacia el estudio de los fenómenos probabilísticos, y fomentar tres habilidades principales: utilizar algunas de las técnicas de conteo, aplicar las fórmulas para calcular probabilidades e interpretar los resultados.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primero se describen los orígenes de la teoría de la probabilidad y se resaltan algunas de las aportaciones de Gerolamo Cardano, Galileo Galilei, Pierre de Fermat y Blaise Pascal. El segundo capítulo se centra en la descripción de las técnicas de conteo básicas para la resolución de problemas de probabilidad, y se proporcionan algunos ejemplos de su aplicación. En el tercer capítulo se presentan tres formas o fórmulas para calcular la probabilidad de eventos, así como la terminología que se utiliza en la teoría de la probabilidad. En el cuarto capítulo se introduce el concepto de independencia probabilista, así como algunas de las fórmulas o teoremas como el de Bayes, de probabilidad total y de Bernoulli. Por último, en el capítulo cinco se estudia el concepto de esperanza matemática.

Para realizar este trabajo han sido utilizados algunos escritos relacionados con la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. En estos escritos se exponen algunas dificultades principales que tienen las personas para resolver e interpretar problemas de esta disciplina, y que han sido identificadas por psicólogos y matemáticos, entre otros, en sus investigaciones. Así, en los ejemplos que se presentan en este trabajo, se hace hincapié en que el lector reconozca los razonamientos erróneos que a menudo son usados en la percepción, entendimiento e interpretación de algunos conceptos y resultados de la probabilidad.

Capítulo 1

Inicios

Los aleatorizadores más antiguos que se conocen son los astrágalos o huesos de taba. Estos instrumentos del azar eran huesos del talón de algún animal como el caballo, los cuales estaban conformados de tal manera que al ser lanzados sobre una superficie uniforme se pudieran obtener cuatro resultados; la peor tirada era llamada perro, tenía un valor de 1, la cara opuesta era llamada Venus, que tenía un valor de 6 puntos y era la mejor tirada. Los astrágalos son la versión primitiva de lo que hoy conocemos como dados, cuya existencia se remonta, por lo menos, 3000 años antes de Cristo, por ello han estado presentes en muchas culturas y épocas de la historia.

Existen muchos pasajes históricos donde se utilizan los dados para jugar y apostar. Por ejemplo, en el tercer libro de la epopeya hindú el Mahábarata, se narra la historia de Nala, el cual es poseído por Kala, un semidios de los dados, provocando con esto que Nala pierda su reino jugando y apostando. Después de vagar por algunos años, Nala se encuentra con Rtuparna, quien presume de sus habilidades matemáticas, afirmando que en dos grandes ramas de un árbol hay un cierto número de hojas y frutos. Para hacer esta afirmación Rtuparna cuenta las hojas y los frutos de una pequeña rama. Nala pasa toda una noche contando para verificar lo que Rtuparna afirma, quedando sorprendido por su exactitud. En una traducción hecha por H. H Milman [1860, p 76] se puede leer lo que dice Rtuparna acerca de sus habilidades: "Yo de los dados poseo su ciencia y así en los números diestro soy".

Así pues, el dado es el utensilio por excelencia en los juegos de azar, y de ahí que los primeros escritos que se pueden asociar al surgimiento de estudios de probabilidad se encuentren tan relacionados con éste.

1.1 Gerolamo Cardano

La obra de Cardano *Liber de Ludo Aleae*[3], escrita aproximadamente en 1564, es considerada como uno de los primeros intentos para descifrar los misterios que envolvían al principal utensilio de los juegos de azar: el dado.

Antes de iniciar con el aspecto matemático, veamos algunas de las frases que muestran la ideología que presenta Cardano en su obra.

> "[...] cuanto mayor es la apuesta mayor es el deshonor" [...][3]

> "[...] nunca es tan grande la ganancia del victorioso como la pérdida del vencido"[3]

> "[...] lo mismo sucede si el Fritillo recibe la luz de la parte opuesta, esto es perjudicial pues perturba la mente [...] también se dice que es beneficioso si se toma posición frente a la luna en máximo ascenso."

En principio, podemos decir que la obra de Cardano refleja su pasión por el juego, las apuestas y sus experiencias en este ámbito. Es importante ver el vínculo que Cardano crea entre las matemáticas, la moral y los juegos, pues siendo él un jugador, busca que los juegos sean justos y que las cantidades apostadas no reflejen codicia más que diversión o pasión. De la última cita donde se hace referencia a la posición de la luna, podemos suponer un cierto grado de "fe" por alguna divinidad que intercede a favor de algunos, a esto le llamaríamos suerte.

En general, lo que se espera de un juego de azar es que sea justo, y cuando se utilizan los dados para obtener un triunfador, los jugadores se preocupan

Figura 1.1: Gerolamo Cardano.

porque el número de combinaciones que dan el triunfo a cada jugador sea el mismo. Cardano observa esto y lo denomina *igualdad*. Con base en dicho término analizaremos dos propuestas que presenta en su obra.

Propuesta 1: La *igualdad* se encontrará si lanzamos un dado y tratamos de obtener un número impar o un número par.

Sabemos que un dado tiene seis lados o caras. Cada lado está marcado con uno de los seis primeros números naturales 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. La mitad de los números son pares y la otra mitad impares, por lo anterior resulta lógico pensar que, si el dado no está cargado para ninguna de sus caras, la *igualdad* que plantea Cardano es cierta, es decir, existe la misma posibilidad de obtener un número impar o uno par.

Propuesta 2: Si lanzamos tres veces un dado tendremos la *igualdad* si nuestro objetivo es obtener un número en particular. Por ejemplo, si queremos obtener un 2 y tenemos tres oportunidades para lanzar el dado, estaremos en una igualdad de posibilidades respecto a que obtengamos el 2 o no lo hagamos.

¿Cómo podemos confirmar la certeza o falsedad de la afirmación anterior? Cardano hace esta afirmación en el capítulo noveno, llamado *Del lanzamiento de un dado*, y hace el siguiente razonamiento.

> "[...] la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto sale con tres tiradas pues en seis se completa la revolución [...]"

Parece lógico pensar que al lanzar tres veces un dado obtendremos la *igualdad*, sin embargo, si quisiéramos defender esta propuesta ¿qué podemos argumentar? Supongamos que al lanzar el dado tres veces se obtienen tres números diferentes, que es la mitad del total, en éstos puede estar o no el número deseado. Como tenemos la mitad de los números, podemos decir que se tiene la igualdad. Claro está que no siempre al lanzar un dado tres veces se obtienen tres números diferentes. Por lo cual, todo el argumento anterior es falso y, al parecer, la propuesta también.

En capítulos subsecuentes de su libro, Cardano corrige sus disertaciones con respecto al lanzamiento de los dados y los resultados cambian. Ya no toma como eje de comparación la *igualdad*, sino que hace ver que algunos eventos pueden ocurrir con más frecuencia que otros. Debido a lo extenso del procedimiento para mostrar lo anterior, dejaremos a Cardano para desplazarnos un poco en el tiempo y llegar al siglo XVII.

1.2 Galileo Galilei

Alrededor de 1615, otro importante científico estudiaba ya los posibles resultados al lanzar los dados. Se trataba de un matemático, físico y astrónomo, nacido en Pisa, Italia, que llevaba por nombre *Galileo Galilei (1564-1642)*. Galileo mostró de una forma más clara que Cardano, los posibles resultados de lanzar uno, dos y tres dados. Y, al igual que Cardano, no propone o enuncia ningún concepto de probabilidad (de hecho, este término no se utiliza en su obra).

Los estudios de Galileo referentes al azar se enfocan a los juegos, en particular en aquellos donde se emplean dados. Al lanzar los dados, se apuesta a poder obtener cierta combinación con dos o más dados; por ejemplo, podemos apostar que obtendremos un 5 y un 6 al lanzar dos dados. De esta forma apostaban algunas personas en la época de Galileo, y fue por eso que él estudió las posibilidades de estas combinaciones. Para hacerlo, simplemente se

Figura 1.2: Galileo Galilei(1564-1642).

apoyó en contabilizar los casos con que se obtenía cierta combinación y los comparó con el total de casos. Con ello, Galileo comienza a buscar formas o técnicas para el conteo de todos lo posibles casos resultantes de lanzar uno, dos o tres dados.

Para poder contar los posibles casos resultantes del lanzamiento de un dado no se necesita mucho esfuerzo, son seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pero, contar los casos posibles al lanzar dos dados, simultáneamente o uno después de otro, representa una tarea ligeramente más compleja. Los casos posibles son 36, y el mismo Galileo explica por qué.

> "[...] pero si nosotros arrojamos el segundo dado, que también tiene otras seis caras, junto con el primero, podemos hacer 36 tiradas diferentes entre sí puesto que cada una del primer dado puede emparejarse con cualquiera del segundo [...]"[1]

Para ejemplificar, supongamos que lanzamos los dos dados. En el primero obtenemos un 2. El segundo puede mostrar cualquiera de sus seis caras originando alguna de las siguientes combinaciones, escritas en paréntesis como:

$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6).$$

[1]Sopra le scoperte dei dadi(Sobre las tiradas de dados)[3].

El resultado anterior es válido cuando obtenemos el 2 en el primer dado - y decimos "el primer dado" sólo para distinguirlos-, pero, como podemos obtener cualquiera de los 6 números en ese "primer dado", entonces el total de casos posibles es

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Por lo anterior, sabemos que al lanzar dos dados los posibles resultados son 36. ¿Y qué sucede si lanzamos tres dados? Veamos qué dice Galileo:

> "[...]y si añadimos un tercer dado, como cada una de sus 6 caras se pueden emparejar con una de las 36 tiradas de los otros dos dados, tendremos que las tiradas de tres dados serán 6 veces 36, es decir 216, todas diferentes entre sí[...][3]"

Uno de los juegos de azar en los que se utilizaban los dados consistía en lanzar dos dados y obtener una suma determinada, por ejemplo un 7, que es resultado de obtener un 5 y un 2, o un 4 y un 3. Los apostadores pensaban que algunos números eran más fáciles de obtener que otros, pero no sabían por qué. Galileo mostró con tres dados y de una manera clara la causa de este fenómeno numérico. Nosotros usaremos sólo dos dados para hacer más simple la explicación.

Las posibles sumas al lanzar dos dados son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Si alguien nos propusiera apostar a un número resultado de la suma de los dados, ¿cuál elegiríamos? Muchos incautos perdieron todo su dinero por no saber que no todos las sumas tienen las mismas posibilidades de ocurrir. Para no acabar como alguno de ellos, veamos qué hizo Galileo.

En la siguiente tabla, en la primera y tercera columna, describimos todos los posibles resultados de lanzar los dados. En las columnas segunda y cuarta están las sumas para cada uno de los casos.

Resultado al lanzar los dados	Suma	Resultado al lanzar los dados	Suma
(1,1)	2	(4,1)	5
(1,2)	3	(4,2)	6
(1,3)	4	(4,3)	7
(1,4)	5	(4,4)	8
(1,5)	6	(4,5)	9
(1,6)	7	(4,6)	10
(2,1)	3	(5,1)	6
(2,2)	4	(5,2)	7
(2,3)	5	(5,3)	8
(2,4)	6	(5,4)	9
(2,5)	7	(5,5)	10
(2,6)	8	(5,6)	11
(3,1)	4	(6,1)	7
(3,2)	5	(6,2)	8
(3,3)	6	(6,3)	9
(3,4)	7	(6,4)	10
(3,5)	8	(6,5)	11
(3,6)	9	(6,6)	12

Para obtener por suma un 2 necesariamente debemos conseguir un doble uno al lanzar los dados, pero para otras casos existen más combinaciones. Veamos cuantas combinaciones producen cada una de las sumas en la siguiente tabla.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de combinaciones	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Así, podemos confirmar que hay sumas que son más fáciles de obtener que otras. Las más difíciles de obtener son 2 y 12, pues sólo hay una combinación que produce a cada una de ellas. La suma más sencilla de obtener es 7, pues es resultado de seis combinaciones.

Ejemplo 1 *Supongamos que estamos en una mesa de juego de algún lujoso castillo del siglo XVII. En esta mesa se encuentra un caballero elegante que* *nos propone una apuesta. La apuesta consiste en que él puede obtener como suma, al lanzar dos dados, un número mayor o igual que 7; de conseguirlo, nosotros le daremos 5 monedas, de lo contrario él tendrá que pagarnos dicha cantidad.*

Utilizando las tablas anteriores, podemos ver que al aceptar la apuesta tendriamos desventaja, pues de las 36 posibles combinaciones de puntos, 21 suman un número mayor o igual que 7; mientras que sólo 15 suman lo contrario. Por lo tanto "la suerte" no estaría de nuestro lado y no sería una buena idea aceptar la apuesta del astuto caballero.

Dejemos a Galileo, de quien debemos recordar, entre otras cosas, que logró contar los posibles resultados de lanzar los dados y hacer comparaciones entre diferentes combinaciones o eventos.

1.3 Correspondencia

Durante el siglo XVII algunas personas dedicadas a las matemáticas intercambiaban sus ideas y descubrimientos por correspondencia. Entre los personajes que utilizaban este medio para difundir su pensamiento encontramos a *Pierre de Fermat (1601-1665)* y *Blaise Pascal (1623-1662)*.

Estos dos grandes genios de su época lograron resolver un problema relacionado con los juegos de azar conocido como el problema de la división. Este problema trata de lo siguiente: dos personas, que llamaremos A y B, apuestan 30 monedas en un juego donde el ganador será el primero que logre vencer en 10 partidas. Sin embargo, un evento inesperado provoca que los jugadores tengan que cancelar el juego. Hasta ese momento A tenía ganadas 9 partida, y B sólo 7. ¿Cómo debe entonces repartirse el dinero si no se concluyó el juego?

El problema de la división era conocido antes de que nacieran Pascal y Fermat, sin embargo, nadie lo había podido resolver. En el siglo XVI *Giobattista Francesco Peverone* propuso una solución. Textualmente la propuesta de Peverone es la siguiente:

Figura 1.3: Pierre de Fermat (1601-1665).

> "[...] al que ha ganado siete le faltan tres, igualmente al que ha ganado nueve de diez le falta uno, la progresión de tres es seis, la de uno es uno; por lo tanto, dividiendo el depósito en siete partes, seis le tocan al segundo y una parte al primero [...]"[2]

La solución anterior es falsa pero muy próxima a la correcta. Un pequeño error fue lo que hizo que Peverone no haya pasado a la historia como el que lograra encontrar la solución al problema de la división. Para ver cuál es la respuesta correcta hagamos uso de lo escrito por Fermat.

La propuesta de Fermat consiste en contar todas las posibles combinaciones de resultados que se pueden dar entre los dos jugadores en caso de seguir con las partidas, contar en cuántas ganaría A y en cuántas B y, basados en esto, calcular una proporción. Supongamos el caso donde son diez las partidas a ganar, A tiene ganadas nueve mientras que B sólo siete. Por ejemplo, una posible solución es que A gane la siguiente partida y finalice el juego, pues llegaría a diez partidas ganadas, o que B gane una partida y luego A y

[2]De la obra de Peverone intitulada "Dos breves y fáciles tratados, el uno de aritmética, el otro de geometría, en los que están contenidas algunas cosas nuevas, divertidas y útiles, tanto para gentilhombres como para artesanos."[3]

finalice el juego. No es difícil ver que con un máximo de tres partidas jugadas tendremos un ganador. En la siguiente tabla se muestran todos resultados posibles de las partidas, si se continúa con el juego.

Primera partida	a	a	a	a	b	b	b	b
Segunda partida	a	a	b	b	a	a	b	b
Tercera partida	a	b	a	b	a	b	a	b
Ganador	A	A	A	A	A	A	A	B

Se representa con una "a" el hecho de que A ganó la partida y con "b" que la partida fue ganada por B. Como podemos ver, del total de posibilidades en 7 ocasiones A gana el juego, por lo tanto el dinero de la apuesta deberá repartirse en una proporción de 7 a 1. Es decir, como son 8 los posibles "caminos" que podría seguir el juego, y en 7 de ellos gana A, lo justo sería repartir la apuesta en 8 partes iguales y darle 7 de éstas a A y el resto a B.

La solución anterior fue muy discutida por Pascal, quien argumentaba, en una de las cartas que escribe a Fermat, que no todas las posibles combinaciones eran reales, por ejemplo, la combinación "a, a, b" no tiene sentido real puesto que si A gana una partida inmediatamente finaliza el juego, y no tiene sentido ver quién gana las dos siguientes. Además propone como ejemplo, para demostrar que el método de Fermat no es correcto, el caso de tres jugadores, A, B y C. En su ejemplo, A necesita una partida para ganar, mientras que B y C necesitan dos, respectivamente. Pascal, siguiendo el método de Fermat, dice que la solución sería la que se muestra en la siguiente tabla.

	Primera partida	Segunda partida	Tercera partida			
1	a	a	a	A		
2	a	a	b	A		
3	a	a	c	A		
4	a	b	a	A		
5	a	b	b	A	B	
6	a	b	c	A		
7	a	c	a	A		
8	a	c	b	A		
9	b	c	c	A		C
10	b	a	a	A		
11	b	a	b	A	B	
12	b	a	c	A		
13	b	b	a	A	B	
14	b	b	b		B	
15	b	b	c		B	
16	b	c	a	A		
17	b	c	b		B	
18	b	c	c			C
19	c	a	a	A		
20	c	a	b	A		
21	c	a	c	A		C
22	c	b	a	A		
23	c	b	b		B	
24	c	b	c			C
25	c	c	a	A		C
26	c	c	b			C
27	c	c	c			C

Las combinaciones posibles son 27. Pascal, según la tabla anterior, da 19 combinaciones con triunfo para A, 7 para B y 7 para C. Con este razonamiento, Pascal escribe lo siguiente:

Figura 1.4: Blaise Pascal (1623-1662).

> "[...] si de aquí se concluyera que hay que dar a cada uno según la proporción 19, 7, 7, se cometería un error demasiado grosero, [...]"[3]

Pascal observa que una misma combinación da el triunfo a dos personas, por ejemplo la combinación a, c, c, en la que A obtiene la partida que le hace ganar y C obtiene las dos partidas que igualmente lo hacen ganar. De esta forma, Pascal afirma que esa combinación debe ser dividida entre los dos, es decir, un medio para A y un medio para B. Al hacer la suma de esa manera llega a la conclusión de que la repartición debe ser con una proporción de 16 de 27 para A y 5.5 de 27 para cada uno de los dos restantes. Pero no nos adelantemos a los hechos pues este tampoco es el resultado correcto.

Hoy en día, algunos estudiosos del tema opinan que tal vez Pascal no entendía el procedimiento de Fermat y es por eso que argumentaba en contra de dicha solución, pues tenía otra forma de llegar al resultado correcto (que dicho sea de paso, no expone en la carta, quizás debido al resentimiento que sentía al verse superado en su propia área por alguien que ni siquiera era un matemático de formación, pues cabe mencionar que Fermat no estudió matemáticas sino leyes, pero era tan grande su capacidad para los cálculos

[3] Carta de Pascal a Fermat, lunes, 24 de agosto de 1654.[3]

matemáticos que algunos le consideraban uno de los más grandes genios del siglo XVII).

Como es de suponer, Fermat defiende su método y responde a Pascal lo siguiente:

> "[...] no encuentro más que 17 combinaciones para el primero y 5 para cada uno de los otros dos; pues cuando dice Vd. que la combinación acc es buena para el primero y para el tercero, parece no recordar que todo lo que se hace después de que uno de los jugadores ha ganado, ya no sirve para nada. Puesto que esta combinación ha hecho ganar al primero desde la primera partida, ¿qué importa que el tercero gane dos a continuación ya que, aunque ganase treinta, todo eso sería superfluo? [...]"[4]

Además, Fermat argumentaba que el hecho de escribir las combinaciones de las tres partidas sólo es para facilitar el conteo de las posibilidades.

La respuesta que da Fermat, que es 17 de 27 para el jugador A, y 5 de 27 para cada uno de B y C, es la correcta. Pascal también había obtenido dicha solución, pero con otro método.

Para terminar, cabe aclarar que, como lo menciona Fermat, su método sirve para contabilizar de una forma sencilla todas las posibilidades que pueden darse en el problema de la división, pero si pretendemos ser rigurosos, como lo hizo Pascal, podemos advertir el defecto de encontrarnos con combinaciones que no tienen sentido en la realidad, pero si se estipulan las condiciones necesarias, que ya hemos visto, el método es sencillo y claro.

En capítulos siguientes resolveremos el problema de la división de una forma más simple.

[4] Fermat a Pascal, viernes 25 de septiembre de 1654.[3]

Capítulo 2

Combinatoria

Al enfrentar el problema de saber por qué algunos eventos suceden con mayor o menor frecuencia, se observa una actitud recurrente, la de contar. Cardano, Pascal, Fermat, Galileo, todos coincidieron en ello.

Contar, de la forma en que lo hicieron Pascal y Fermat, se convirtió en algo innovador y útil, a tal grado que surgió una nueva rama de las matemáticas, **la combinatoria**, que es un conjunto de técnicas enfocadas a los problemas sobre saber contar las distintas combinaciones que, sometidas a unas u otras condiciones, se pueden formar con objetos dados.

Es por lo anterior que este capítulo lo destinaremos para aprender algunas de las fórmulas que se utilizan para contar.

2.1 Regla de la multiplicación

¿Por qué contar una por una las casillas del tablero de ajedrez, si contando las casillas que hay horizontal y verticalmente, y multiplicando estos números, obtenemos el número total de casillas?

En efecto, multiplicando el número de casillas horizontales del tablero de ajedrez, por el número casillas verticales, $8 \times 8 = 64$, obtenemos el mismo resultado que si contamos cada una de las casillas.

La multiplicación es el primer recurso que usamos para contar de una forma más simple, o rápida. Además es el principio fundamental de la combinatoria, y se conoce como **la regla de la multiplicación**.

Regla de la multiplicación. Esta regla establece que, al realizar una tarea A con n posibles resultados distintos y después una tarea B que puede tener m resultados diferentes, los posibles resultados de realizar ambas tareas en el orden indicado son $n \times m$.

La palabra "tarea", que utilizamos para enunciar la regla de la multiplicación, puede sustituirse por otras como "experimento", o cualquier otra que se adapte a la situación.

Ejemplo 2 *¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar un dado y una moneda?*

Solución. Parece que después de leer lo que hizo Galileo esta pregunta resulta un tanto sencilla, pero obtendremos la respuesta para ejercitar el uso de la regla de la multiplicación. Supongamos que la tarea A consiste en lanzar el dado y la tarea B en lanzar la moneda. De A se pueden obtener 6 resultados, mientras que de B sólo 2, entonces $6 \times 2 = 12$ es el total de resultados posibles al realizar la tarea A y B.

■

Tenemos muchas formas de representar los posibles resultados al realizar una o varias tarea. Por ejemplo, mediante el empleo de paréntesis. Los paréntesis se utilizan para encerrar o asociar las tareas que deseamos representar. Abrimos los paréntesis y escribimos los resultados de las tareas separándolos mediante comas. Utilizando paréntesis, los resultados de las tareas A y B se representan de la siguiente forma:

(1, águila), (1, sol),
(2, águila), (2, sol),
(3, águila), (3, sol),
(4, águila), (4, sol),
(5, águila), (5, sol),
(6, águila), (6, sol).

Otra forma de representar los posibles resultados es el diagrama de árbol (figura 2.1).

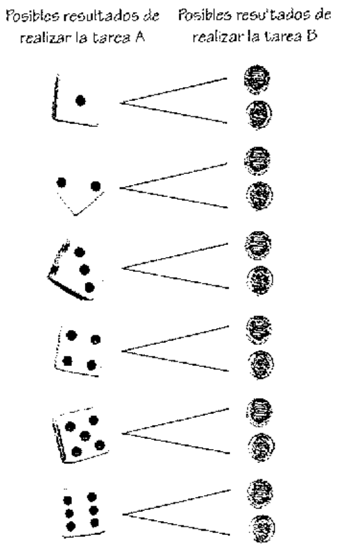


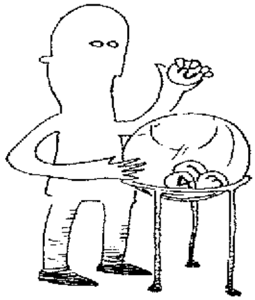
Figura 2.1: Diagrama de árbol

Usaremos la palabra arreglo para referirnos a cada uno de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar una o varias tareas, y los representaremos como fue descrito anteriormente.

2.2 Técnicas de conteo

A continuación veremos algunos problemas de conteo, daremos una solución a cada problema utilizando la regla de la multiplicación y, a partir de las soluciones, expondremos algunas fórmulas que nos serán muy útiles.

Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Extraemos al azar dos bolas, una por una. Notemos que el orden importa. Al extraer la primera bola registramos el número de ésta y la devolvemos a la urna, así podrá ser contemplada como un posible resultado de la segunda extracción ¿Cuáles son



todos los posibles resultados al realizar este experimento? Podemos representar los resultados con arreglos de tamaño dos. Cada uno de los lugares del arreglo puede tomar 1 de 4 valores, 1, 2, 3 ó 4, utilizando la regla de la multiplicación sabemos que son 16 los posibles resultados. Los podemos representar como sigue

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4). \end{array}$$

Si en un arreglo de tamaño k, cada uno de los k lugares del arreglo toma uno de n valores, sin importar que algún valor aparezca más de una vez, e incluso con la posibilidad de repetirse en los k lugares, entonces se esta hablando de *arreglos con repetición.*

Arreglos con repetición. El número de arreglos con repetición de tamaño k, donde cada lugar del arreglo puede tomar uno de n valores, es k^n

Los siguientes son algunos ejemplos de problemas de conteo que podemos solucionar usando los arreglos con repetición:

1. ¿Cuáles son los posibles resultados de lanzar un dado tres veces. *Solución.* Necesitamos tres lugares para representar el resultado de cada uno de los tres dados, es decir, $k = 3$. Son seis los posibles resultados del dado,

entonces $n = 6$: El total de posibles resultados al lanzar tres dados es $6^3 = 216$.

2. ¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar 5 veces una moneda. *Solución.* Para este caso $k = 5$ y $n = 6$, el resultado es $2^5 = 32$.

Regresemos al problema de la urna y modifiquémoslo un poco. En lugar de devolver la bola en la primera extracción, la dejaremos fuera de la urna para que ya no pueda ser un posible resultado de la segunda extracción. ¿Cuántos son los posibles resultados o arreglos bajo esta consideración?

De nuevo tenemos arreglos de tamaño dos. En el primer lugar del arreglo anotamos el resultado de la primera extracción, este lugar puede tomar uno de cuatro valores. En la segunda extracción, cuyo resultado anotamos en el segundo lugar del arreglo, sólo podemos obtener tres valores, pues sólo hay tres bolas en la urna. Por lo tanto, el número de arreglos en este caso es 12.

$$
\begin{array}{cccc}
\cancel{(1,1)} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
(2,1) & \cancel{(2,2)} & (2,3) & (2,4) \\
(3,1) & (3,2) & \cancel{(3,3)} & (3,4) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & \cancel{(4,4)}
\end{array}
$$

Si en un arreglo de tamaño k, el primer lugar puede tomar uno de n valores, y el segundo puede tomar uno de n - *1* valores, excluyendo el valor que ya fue asignado al lugar uno, y así sucesivamente hasta el lugar k que puede tomar uno de n - *(k - 1)* valores exceptuando los k - *1* valores ya asignados a los anteriores k - *1* lugares, entonces estaremos hablando de *arreglos sin repetición.*

Arreglos sin repetición. El número de arreglos de tamaño k sin repetición, tomados de un conjunto de n valores es: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n-(k-1)]$.

Los siguientes son algunos problemas de conteo que podemos solucionar usando los arreglos sin repetición:

1. Seleccionar al presidente y vicepresidente de un club de entre 10 personas. *Solución* 10×9.

2. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar si se dispone de cuatro colores? *Solución* $4 \times 3 \times 2$.

Si en los arreglos sin repetición k es igual a n, tenemos un caso particular que se conoce como *Permutaciones*. La fórmula para las permutaciones es $n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1$, lo cual se suele denotar con $n!$, y se lee n *factorial*. Entonces $n!$ es el total de formas, pensando en el orden, en que se pueden colocar n objetos.

1. Cuál es el total de formas en que se pueden asignar tres tareas diferentes a tres obreros? *Solución* $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

2. El número de permutaciones de cuatro letras diferentes. *Solución* $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Nuevamente modifiquemos el problema de la urna para mostrar otra situación. Hagamos dos extracciones sin reposición. El orden de las extracciones no es importante. Puede ser que extraigamos las dos bolas al mismo tiempo. El orden en que registramos los resultados de cada extracción tampoco es importante. ¿Cuántos son los posibles resultados de este experimento?

En el caso de los arreglos sin repetición obtuvimos 12 posibilidades, notemos que en éstos hay elementos como (1,2) y (2,1) que son distintos por el orden, pero ahora ya no importa el orden, por lo que de los 12 arreglos sin repetición sólo nos interesan 6.

$$\begin{array}{cccc}
\cancel{(1,1)} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
\cancel{(2,1)} & \cancel{(2,2)} & (2,3) & (2,4) \\
\cancel{(3,1)} & \cancel{(3,2)} & \cancel{(3,3)} & (3,4) \\
\cancel{(4,1)} & \cancel{(4,2)} & \cancel{(4,3)} & \cancel{(4,4)}
\end{array}$$

Los resultados de problemas de este tipo, donde *no hay reposición y no importa el orden*, se conocen como *combinaciones*.

Si deseamos obtener una fórmula para calcular el número de combinaciones debemos observar que éstas tienen una relación con los arreglos sin repetición, por cada combinación de tamaño k existen $k!$ arreglos sin repetición. Es decir, el número de combinaciones se obtiene dividiendo el número de arreglos sin repetición entre el número de arreglos que se forman con los k elementos.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}.$$

Combinaciones. El número de combinaciones de tamaño k tomadas de un grupo de n objetos distintos es

$$C_k^n = \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}}{\mathrm{(k!)}}\left(\frac{\mathrm{(n-k)!}}{\mathrm{(n-k)!}}\right) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(n-k)!k!}}.$$

Cuando establecimos las diferentes situaciones para extraer las dos bolas de la urna, fijamos nuestra atención en dos circunstancias especialmente; considerar el orden en que se extraían las bolas, y si había o no reposición. En base a estas dos circunstancias, podemos dividir algunos de los problemas de conteo en uno de cuatro grupos. En la siguiente tabla se pueden distinguir los cuatro grupos, además, se presentan las fórmulas que pueden utilizarse cuando de un grupo de n elementos se toman k.

	Sin reposición	**Con reposición**
Sin orden	$C_k^n = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(n-k)!k!}}$	$C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{\mathrm{(n+k-1)!}}{\mathrm{n!(k-1)!}}$
Con orden	$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]$	k^n

En el caso de que haya reposición y no importe el orden al extraer las bolas de la urna, la fórmula que se presenta será explicada en el ejemplo 12.

2.3 Ejemplos

Ejemplo 3 *¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en una mesa redonda con 5 asientos?*

Solución. En este problema nos interesa la posición de las personas respecto a las demás. Elijamos un lugar de los 5 y asignémoslo a algunas de las personas. Ahora, a la derecha de esta persona podemos sentar a cualquiera de las 4 restantes, y luego a la derecha de esta última persona podemos sentar a una de las tres restantes, así hasta que asignemos un lugar a cada una de las personas. En total tenemos 4! formas de sentar a 5 personas en un mesa redonda con 5 asientos.

■

Ejemplo 4 *Un grupo de 15 soldados, al que llamaremos grupo beta, hará un entrenamiento para combate cuerpo a cuerpo. Se efectuarán enfrentamientos entre dos personas. Si cada uno de los 15 soldados debe enfrentarse con los 14 restantes, ¿cuántos combates se deben realizar?*

Solución. Para cada combate debemos elegir a 2 de los 15 soldados. En cada combate un soldado no se puede enfrentar a él mismo, así que estamos en una situación donde no hay reposición. Además, no importa el orden en que se seleccionan a los dos soldados para el enfrentamiento. Como tenemos las condiciones de que no hay reposición y el orden no importa, entonces el número de posibles enfrentamientos es igual a las combinaciones de tamaño 2 tomadas de un conjunto de tamaño 15, es decir,

$$C_2^{15} = \frac{15!}{(15-2)!(2!)} = 105.$$

■

Ejemplo 5 *En una de tantas misiones secretas del grupo beta, los 15 soldados deben separarse en dos equipos, uno con 5 soldados y el otro con 10. ¿De cuántas formas se pueden hacer los equipos?*

Solución. Observemos que basta con formar un equipo, el otro se formará automáticamente con los soldados restantes. Pensemos en el equipo de 10 integrantes. La situación es como la de una urna con 15 bolas, de la cual sacaremos 10 bolas, sin reposición, pues un soldado no puede ser asignado dos veces, y no importa el orden. Es decir, el número de equipos que se pueden formar es igual a las combinaciones de tamaño 10 tomadas de un conjunto de 15 objetos.

$$C_{10}^{15} = \frac{15!}{(15-10)!(10!)} = 3,003.$$

Son 3,003 las formas en que se pueden formar los equipos. Verifiquemos que el resultado es el mismo si en lugar de ocuparnos en formar el equipo de 10 soldados elegimos el de 5.

$$C_{5}^{15} = \frac{15!}{(15-5)!(5!)} = 3,003.$$

Por lo anterior, y como se muestra a continuación, sabemos que

$$C_{k}^{n} = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})!(\mathrm{k}!)} = \frac{\mathrm{n}!}{[\mathrm{n}-(\mathrm{n}-\mathrm{k})]!(\mathrm{n}-\mathrm{k}!)} = C_{n-k}^{n}.$$

■

Ejemplo 6 *En efecto, el grupo beta se dividió en dos equipos. Al equipo de 5 soldados le corresponde recuperar las joyas de la Reina, que están en una bóveda secreta. Un soplón les informó que para abrir la bóveda deben teclear un código de acceso que consta de 5 letras (h, z, r, i, a), estas letras deben forman el nombre de una moneda de 20 centavos que circulaba en Buenos Aires alrededor de 1929, lo anterior es según un cuento del escritor Jorge Luis Borges*[1]*. Como los soldados no saben de qué moneda es, y no han leído "El Aleph", es probable que tengan que hacer muchos intentos antes de poder abrir la bóveda ¿Cuál es el número máximo de intentos que podrían hacer?*

[1]Poeta, cuentista y ensayista, nacido en Buenos Aires, Argentina, en el año de 1899.

Solución. Para elegir la primera letra tenemos 5 opciones, para la segunda 4, para la tercera 3, para la cuarta 2 y para la quinta una. El número de intentos que pueden realizar es igual al número de arreglos sin repetición de tamaño 5 tomados de un conjunto de 5 elementos, o permutaciones de tamaño 5.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Por lo tanto, los soldados pueden hacer hasta 120 intentos para abrir la bóveda. Por cierto, la moneda a la cual se hace referencia en el ejemplo anterior, según un cuento de Jorge Luis Borges, se conocía con el nombre de Zahir.

■

Ejemplo 7 *Al segundo equipo le fue asignada la misión de capturar a Juan, conocido contrabandista de joyas, que se presume está disfrutando de unas vacaciones en las Vegas. Los soldados se encuentran en un casino mientras esperan noticias. Para no fastidiarse con la espera los soldados observan cómo la gente juega al cubilete, y uno de ellos se pregunta: ¿Cuántos son todos los posibles resultados de una tirada de los dados en el cubilete?*

Solución. En el cubilete se lanzan 5 dados y se observan las figuras que muestran las caras que quedan hacia arriba. Podemos responder a la pregunta del soldado haciendo uso de los arreglos. Debido a que son 5 dados necesitamos arreglos de tamaño 5 (suponemos que los dados son distinguibles). Sabemos que cada dado tiene 6 caras, por lo tanto cada uno de los lugares del arreglo puede tomar 1 de 6 valores. El número total de posibles resultados de lanzar los dados es $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7,776$.

■

Al ver que no hay noticias de Juan, los soldados se disponen a divertirse. Elsa, que es una bella mujer soldado de este equipo, quiere aprender a jugar póker, y gracias a su belleza no faltarán los caballeros dispuestos a mostrarle cómo funciona el juego... ya se acerca uno de ellos. Después de los clásicos diálogos, el caballero, que dice llamarse G. Hamon, explica a Elsa lo siguiente: La baraja de póker contiene 52 cartas, cada carta tiene dos particularidades, que están marcadas con uno de los 13 símbolos siguientes: *A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q* y *R* (también se les suele llamar números). La segunda particularidad es pertenecer a uno los siguientes cuatro grupos o palos: espadas ($\spadesuit$), tréboles ($\clubsuit$), corazones ($\heartsuit$) o diamantes ($\diamondsuit$).

Cuando se juega al póker se reparten un conjunto de cinco cartas que suele llamarse una *mano* de póker. De ésta se puede formar:

1. **Par**, cuando se tienen dos cartas con el mismo número.
2. **Tercia**, tres cartas del mismo número.
3. **Póker**, cuatro cartas del mismo número.
4. **Full**, una tercia y un par.
5. **Flor**, las cinco cartas del mismo palo.
6. **Corrida**, es cuando los cinco números son sucesivos, el as (A), funciona como 1 ó 14.

Elsa le pregunta a Hamon *"¿cuál es la mano de póker que más valor tiene?"*. Éste responde que la importancia de cada mano depende del número de posibilidades en las que se obtiene dicha mano. Hamon le muestra a Elsa cómo puede calcular el número de posibilidades para los siguientes casos.

Ejemplo 8 *Total de posibles manos de póker.*

Solución. Son 5 cartas las que componen una *mano* de poker, que tomamos al azar de un mazo de 52. El orden en que las obtenemos no importa, y claramente no hay reposición. Entonces, el número total de posibles *manos* lo podemos obtener mediante combinaciones.

$$C_5^{52} = 2,598,960.$$

■

Ejemplo 9 *Obtener póker.*

Solución. Podemos tener poker de unos, de doces, de treces, etc. En total son trece tipos diferentes. La quinta carta puede ser cualquiera de las 48 restantes. El número de formas de obtener poker es $13 \times 48 = 624$.

■

Ejemplo 10 *Obtener full.*

Solución. El full se forma de una tercia y un par. La tercia la podemos tener de 13 números diferentes. Por cada número podemos tener C_3^4 tercias diferentes. En total son $13 \times C_3^4$ tercias diferentes. Para el par ya sólo podemos elegir un número de entre 12. Ya elegido el número, el par se puede formar de C_2^4 posibilidades, por lo tanto el número de posibles formas de obtener full es $13 \times C_3^4 \times 12 \times C_2^4 = 3,744$.

Para saber qué sucede con los demás casos se pide al lector que realice los cálculos correspondientes.

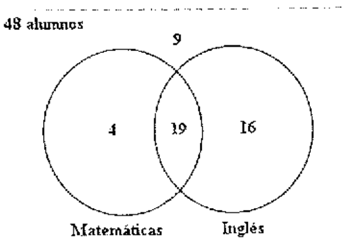
■

Ejemplo 11 *En un salón de clase hay 48 alumnos. De éstos, 23 aprobaron matemáticas, 35 inglés y 19 ambos cursos. ¿Cuántos alumnos del salón no aprobaron ni matemáticas ni inglés?*

Solución. La idea para resolver este problema es separar a los alumnos en grupos, uno donde estén los que sólo aprobaron matemáticas, otro donde estén los que sólo hayan aprobado inglés, otro donde estén los que aprobaron ambas materias, y un último donde estén los que no aprobaron ni matemáticas ni inglés.

Si hay 35 alumnos que aprobaron inglés y 19 que aprobaron ambas materias, entonces hay 16 que sólo aprobaron inglés $(35 - 19 = 16)$. Si hay 23 que aprobaron matemáticas y 19 de ellos aprobaron ambas materias, entonces hay 4 que sólo aprobaron matemáticas, $(23 - 19 = 4)$.

Hemos formado tres grupos: los que sólo aprobaron inglés, que son 16, los que sólo aprobaron matemáticas, que son 4, y los que aprobaron ambas materias

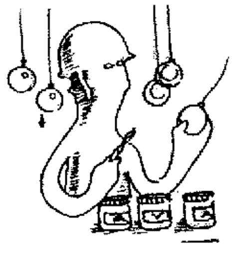


que son 19. Para saber cuántos alumnos no aprobaron ni matemáticas ni inglés, sumamos $16 + 4 + 19 = 39$, es decir, 39 alumnos aprobaron al menos una materia y, por lo tanto, 9 de los estudiantes no aprobaron ni matemáticas ni inglés.

■

Ejemplo 12 *La navidad llegó y los soldados se disponen a llenar de adornos la base militar. Un soldado tiene 5 esferas idénticas. Él piensa pintar cada una de las esferas con alguno de siguientes colores: azul, rojo o verde. La cantidad de cada color es suficiente para pintar las 5 esferas ¿De cuántas formas diferentes se pueden pintar las esferas?*

Solución.



Para resolver este problema usaremos un método que consiste en el uso de separadores (utilizaremos el símbolo ► para denotarlos). Debido a que las esferas son indistinguibles, no interesará el color con que se pinte cada esfera, lo importante será la cantidad de esferas pintadas con cada color. Representemos a las 5 esferas usando estrellas, así tendremos: ★ ★ ★ ★ ★. El primer color que usaremos es el azul. Si deseamos pintar 2 esferas de azul, las pintamos y colocamos un separador para indicar que las siguientes esferas no son azules, es decir, ★ ★ ▶ ★ ★ ★. De las tres esferas restantes pintemos una de rojo, y coloquemos otro separador después de ésta para indicar que las siguientes esferas no son rojas, ★ ★ ▶ ★ ▶ ★ ★. Las dos últimas esferas tendrán que ser verdes.

La idea es que las esferas que estén antes del primer separador sean las azules, las que estén después del primer separador y antes del segundo serán rojas, y las que se encuentran después del segundo separador serán verdes. En el caso de que antes, entre o después de los separadores no haya esferas, se entenderá que ninguna fue pintada con el color asignado a ese espacio. La siguiente tabla contiene la lista de todas las formas de pintar las esferas.

	Azul	Rojo	Verde	Representación
1	★★★★★			★★★★★▶▶
2	★★★★	★		★★★★▶★▶
3	★★★	★★		★★★▶★★▶
4	★★	★★★		★★▶★★★▶
5	★	★★★★		★▶★★★★▶
6	★★★★		★	★★★★▶▶★
7	★★★		★★	★★★▶▶★★
8	★★		★★★	★★▶▶★★★
9	★		★★★★	★▶▶★★★★
10			★★★★★	▶▶★★★★★
11		★★★★★		▶★★★★★▶
12		★★★★	★	▶★★★★▶★
13		★★★	★★	▶★★★▶★★
14		★★	★★★	▶★★▶★★★
15		★	★★★★	▶★▶★★★★
16	★★★	★	★	★★★▶★▶★
17	★★	★★	★	★★▶★★▶★
18	★★	★	★★	★★▶★▶★★
19	★	★★★	★	★▶★★★▶★
20	★	★★	★★	★▶★★▶★★
21	★	★	★★★	★▶★▶★★★

Si ya logramos entender cómo es que se usan los separadores, la pregunta será: ¿de qué sirve usar esta representación? No siempre será necesario representar todos los resultados mediante los separadores. En esta ocasión lo hicimos sólo para poder entender la idea. Observemos que cada forma de pintar las esferas se representó mediante siete símbolos, cinco ★ y dos ►. Lo interesante es la facilidad con la que podemos contar las representaciones, sólo debemos elegir los dos lugares donde pondremos los separadores. En total tenemos siete lugares y tomaremos dos de estos, el número de formas en que podemos elegir estos dos lugares es igual a

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!(5!)} = 21.$$

En ocasiones posteriores, cuando usemos este método sólo debemos saber el número de separadores que necesitamos y obtener las respectivas combinaciones.

■

Ejemplo 13 *¿Cuántas son las soluciones enteras positivas para la siguiente ecuación?*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n.$$

Solución. Tenemos que separar n unidades en k grupos. Las unidades son indistinguibles entre sí (★), por lo tanto sólo nos interesa el número de unidades en cada uno de los k grupos. Este es un problema similar al de las esferas, pero para n esferas y k colores. Como son k "colores" necesitamos $k-1$ separadores (►). En total son $n+k-1$ símbolos, es decir, necesitamos arreglos de tamaño $n+k-1$, pero ya no hay que representarlos, pues sabemos que basta con asignar lugar a los $k-1$ separadores. El número total de formas en que se pueden separar las n unidades es

$$C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)!}{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1-(\mathrm{k}-1))!(\mathrm{k}-1)!} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)!}{\mathrm{n}!(\mathrm{k}-1)!}.$$

■

Ejemplo 14 *¿De cuántas maneras se pueden acomodar 6 personas en una habitación sencilla, una doble y una triple?*

Solución. Primero elijamos a las personas que han de ocupar la habitación doble. Debemos elegir a 2 personas de 6, no importa el orden y no hay reposición, por lo tanto el número de formas de seleccionar a las 2 personas es C_2^6. De las 4 personas restantes seleccionemos a las tres que ocuparán la habitación triple. El número de formas de elegirlas es C_3^4. Finalmente la persona restante será asignada a la habitación sencilla. El número de formas en que podemos asignar a las personas es

$$C_2^6 \times C_3^4 = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60.$$

En situaciones donde hay que dividir un conjunto de n objetos en r subconjuntos, con n_1 elementos en el subconjunto uno, n_2 elementos en el segundo subconjunto, y así, sucesivamente, el número de formas de repartirlos es

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \cdots \times n_r!},$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

■

Ejemplo 15 *Para una reunión, los 15 alumnos del salón deben seleccionar a 5 de ellos para que los representen, este grupo debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres. ¿De cuántas formas se puede hacer este grupo? En el grupo hay 7 mujeres y 8 hombres.*

Solución. Primero seleccionemos a las mujeres. El total de formas para seleccionarlas es C_3^7 formas. Luego para elegir a los hombres tenemos C_2^8 formas. Aplicando la regla de la multiplicación obtenemos el número total de formas para elegir al grupo de 5 personas, que es

$$C_3^7 \times C_2^8 = 980.$$

■

Ejemplo 16 *Si en lugar de pedir que sean tres mujeres, pedimos que al menos sean tres, ¿Cuántos grupos de cinco integrantes se podrán formar? Para contestar a esta pregunta se presentan dos opciones.*

Solución. Opción 1. Primero seleccionaremos a las tres mujeres de entre las 7. Las 4 mujeres que no fueron seleccionadas las unimos al grupo de los 8 hombres para formar un conjunto de 12 personas, de estas seleccionaremos a las 2 que hacen falta para formar al grupo de 5. En la última selección podrán ser elegidos hombres o mujeres. El número total de formas de elegir al grupo es

$$C_3^7 \times C_2^{12} = 2,310.$$

Opción 2. Contamos los grupos compuestos de exactamente 3, 4 y 5 mujeres y luego los sumamos.

Si son exactamente 5 mujeres el número de posibles grupos es $C_5^7 = 21$.

Si son exactamente 4 mujeres el número de posibles grupos es $C_4^7 C_1^8 = 280$.

Y cuando son exactamente tres mujeres el número de posibles grupos es 980.

El número total de formas en que se puede elegir el grupo con al menos 5 mujeres es

$$21 + 280 + 980 = 1,281.$$

¿Cuál es la opción correcta? ¿Por qué?

Simulemos hacer la elección como se indica en la opción uno. Para esto, representemos a las 7 mujeres con las primeras siete letras mayúsculas del abecedario.

Al seleccionar a las 3 de 7 mujeres, supongamos que obtenemos a A, B y C. Después, con las 4 mujeres restantes y los 8 hombres se forma un nuevo grupo de 12 personas. De este grupo se seleccionan a 2 personas. Supongamos que obtenemos seleccionadas a D y E. Es decir, los representantes serán A, B, C, D, y E.

Nuevamente pensemos en elegir a las 3 mujeres de entre las 7, sólo que ahora las seleccionadas son B, C, y D. En la segunda selección obtenemos A y E. El grupo de representantes será A, B, C, D y E.

Así, pues, mostramos como se pueden seleccionar de dos formas a un mismo grupo de representantes, con lo que deducimos que la opción uno no es correcta. Tratemos de corregir la respuesta de la opción uno. Dado que estamos contando de más, restémonos los casos necesarios, y veamos que resultado obtenemos.

El grupo A, B, C, D, E, es considerado C_3^5 veces, pues son las formas en que pueden ser seleccionadas las tres representantes de las cinco en la primera etapa. Pero no sólo es este grupo de 5, sino que puede ser cualquiera de C_5^7. En total hay $C_3^5 C_5^7 = 210$ casos que se toman en cuenta, de los cuales sólo se deben considerar a 21. Entonces del total que teníamos debemos restar 189.

Cuando son cuatro mujeres las que están en el grupo de representantes, también se están contando casos de más. Cada caso de estos se considera C_3^4 veces. Tenemos C_4^7 posibles grupos de cuatro mujeres. Finalmente, cada grupo de cuatro mujeres esta acompañado por un hombre, él cual puede ser cualquiera de los 8. Es decir, como estos casos hay $C_4^7 C_3^4 8 = 1120$, y de estos sólo se deben considerar a 280. Es decir, que debemos restar 840 casos.

Así, del resultado de la opción uno restamos 189 y 840, y obtenemos

$$2310 - 840 - 189 = 1,281,$$

que es el resultado de la opción 2.

■

Ejemplo 17 *El Obispo Wibold de Cambray, en el año 960, propuso un juego de dados piadosos. En este juego se lanzaban tres dados, la combinación obtenida se asociaba a una virtud, y el jugador debía comportarse conforme a esta virtud por un periodo de tiempo determinado. El Obispo Wibold de Cambray tenía una lista de 56 virtudes asociadas a los posibles resultados de los dados, es decir, él suponía que al lanzar tres dados los posibles resultados serían 56. Con lo que hemos visto sabemos que al lanzar tres dados los* *posibles resultados son 216. ¿Por qué habrá hecho el obispo Wibold una lista con 56 virtudes?*

En un principio se podría pensar que el obispo no sabía contar, pues el vivió seis siglos antes de que surgiera la combinatoria, mas dicen que las personas que gustaban de los juegos con dados sabían muy bien contar, y entre 216 y 56 hay una gran diferencia, diferencia que nos obliga a buscar otra explicaión para el posible error.

Pensemos que posiblemente el Obispo no tomó en cuenta el orden en que caían los dados. Es decir, quizás el obispo Wibold de Cambray no hacía diferencia entre (1,1,2) y (1,2,1). Para confirmar esta suposición, contemos los casos que hay al lanzar tres dados, pero suponiendo que éstos son indistinguibles.

Iniciemos nuestro conteo con los casos más simples, cuando se obtiene tres números iguales. Podemos obtener tres veces uno, tres veces dos, etc., es claro que son 6 las posibilidades.

El siguiente caso es cuando obtenemos dos números iguales. Por ejemplo, (1,1,2). Para los números iguales tenemos 6 opciones, y después para el tercer número sólo tendremos 5. En total son $6 \times 5 = 30$ las posibilidades.

Por último, cuando obtenemos tres números diferentes. Aquí sólo tenemos que elegir 3 números de 6, no importa el orden, por lo tanto, el total de posibilidades para este caso son $C_2^6 = 20$.

Sumando lo que obtuvimos en los tres casos, $6 + 30 + 20 = 56$, confirmamos nuestra suposición, el obispo Wibold de Cambray no tomó en cuenta el orden en que caían los dados.

■

2.4 Ejercicios

Ejercicio 1 *En una carrera de bicicletas, que va desde la ciudad A hasta la B, se pueden tomar tres rutas. Al llegar a la ciudad B comienza la segunda etapa, que va desde la ciudad B hasta la C. En la segunda etapa se puede* *elegir una de cinco rutas ¿Cuantas rutas puede tomar un competidor para llegar desde la ciudad A hasta la C?*

Respuesta. 15.

Ejercicio 2 *PROGOL es un concurso donde el ganador es aquel que adivine el resultado de 14 partidos de fútbol. Los resultados pueden ser: triunfo para el local, para el visitante o empate. ¿Cuántos son los posibles resultados que se pueden dar en los 14 partidos?*

Respuesta. 4,782,969.

Ejercicio 3 *En una dulcería se ofrecen piezas de chocolate en cinco presentaciones: con café, amargo, blanco, con almendras, y con arroz inflado. Cada pieza de chocolate tiene vale un peso. Un niño entra a la dulcería dispuesto a gastar 10 pesos en chocolates. ¿De cuantas formas puede el niño comprar los chocolates, pensando en las diferentes presentaciones?*

Respuesta. 1,001.

Ejercicio 4 *Los reyes magos después de repartir regalos toda la noche, se encuentran en la última casa, donde habitan dos niños. Para estos niños han guardado 6 regalos diferentes, tres para cada uno. ¿De cuantas formas pueden los reyes magos distribuir los 6 regalos?*

Respuesta. 20.

Ejercicio 5 *Un anciano a punto de morir, quiere heredar sus 5 pertenencias entre sus dos hijos. ¿De cuantas formas puede repartir sus pertenencias?*

Respuesta. 32.

Ejercicio 6 *¿Cuántas manos de póker hay que tengan sólo tercia?*

Respuesta. 54,912.

Ejercicio 7 *¿Cuántas manos de póker hay que sólo tengan un par?*

Respuesta. 6,589,440.

Ejercicio 8 *¿Cuántas manos de póker hay que tengan sólo dos pares?*

Respuesta. 247,104.

Capítulo 3

Probabilidad

> "Es imposible que un dado, con una determinada fuerza y dirección, no caiga sobre una cara determinada, sólo que yo no conozco la fuerza y la dirección que le hace caer sobre una cara determinada y por lo tanto le llamo a eso chance, aunque no es sino falta de arte (conocimiento) [...]" *John Arbuthnot*[3]

La palabra probabilidad (probabilité) se utiliza por primera vez para denotar algo medible, en la obra de Antonie Arnauld-Pierre Nicole. Este autor usa la palabra al considerar la diferencia que existe entre la posible ocurrencia de eventos. Esta diferencia la hacía de manera empírica. Al igual que Arnauld, nosotros utilizaremos la palabra probabilidad para atribuir un grado de ocurrencia a determinados eventos.

Al tratar de obtener la probabilidad de un evento, lo ideal será expresarla de forma tal que pueda ser aplicable a diversas situaciones. No servirá de mucho decir que es probable ganar un juego, ya que lo que realmente deseamos saber es qué tan probable lo es. Además, para facilitar las comparaciones, debemos llevar el concepto a términos numéricos y para esto necesitamos alguna fórmula o método que nos arroje un número. Para lo cual, a continuación veremos tres fórmulas para el cálculo de probabilidades que se desarrollaron en los inicios de esta teoría.

3.1 Fórmula clásica

Como mencionamos en los capítulos anteriores, Galileo, Cardano, Pascal y Fermat, mostraron por qué algunos eventos ocurrían con mayor frecuencia que otros, para lo cual contaban todos los posibles resultados del juego o experimento, y los comparaban con los que favorecían la ocurrencia del evento de interés, y es precisamente esta idea la que da origen a la primera fórmula que veremos para el cálculo de probabilidades.

$$P(\text{“Ocurrencia de un evento”}) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}}.$$

La fórmula anterior fue desarrollada y utilizada de manera empírica más de un siglo, pero fue hasta la principios del siglo XIX que Pierre Simon de Laplace, en su *"Ensayo filosófico sobre las probabilidades"*, sintetizó todo lo desarrollado en probabilidad y la enunció. Esta fórmula se conoce como **fórmula de probabilidad clásica** o **fórmula de Laplace**.

Un ejemplo clásico de cómo se aplica esta fórmula es en el lanzamiento de una moneda. Todos sabemos, o al menos intuimos, que al lanzar una moneda equilibrada la probabilidad de obtener *sol* es un medio. Calculemos la probabilidad para verificar lo que empíricamente suponemos. Al lanzar una moneda los casos totales son dos, *águila* o *sol*, casos favorables sólo hay uno. Por lo tanto

$$P(\text{“sol”}) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{2},$$

que es el resultado que esperábamos.

Analizando el cociente de casos favorables y totales, podemos deducir que el número de casos totales siempre será mayor o igual que el de casos favorables. Por lo tanto, el valor máximo de la probabilidad de un evento será 1, y el menor 0. Es decir, si A es un evento cualquiera entonces

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Al utilizar la fórmula de probabilidad clásica debemos ser capaces de identificar y contar los posibles resultados del experimento, verificar que sea un número de posibilidades finito, y además, suponer igual probabilidad de ocurrencia. Ejemplos de este tipo de experimentos son: lanzar una moneda, donde hay dos posibles resultados con igual probabilidad, un medio. Lanzar un dado, con seis posibles resultados y probabilidad de un sexto para cada uno de ellos. Tener el boleto ganador de una rifa donde existen n boletos, donde cada boleto tiene probabilidad $\frac{1}{n}$ de ser el ganador, etc.

3.2 Probabilidad geométrica

Pensemos en el problema de elegir un punto que esté en el intervalo (0,1), y supongamos que cada punto tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. Para utilizar la fórmula de probabilidad clásica tenemos que calcular los casos favorables y los totales; por ejemplo, para saber cuál es la probabilidad de que el punto seleccionado sea 0.5, tenemos que contar los casos favorables, que es uno, hasta aquí vamos bien, pero al tratar contar los casos totales es donde surge el problema ¿cuántos puntos hay en el intervalo (0,1)? ¿Mil? ¿Un millón? No es recomendable tratar de contarlos pues son una infinidad.

Si ahora nos interesa saber cuál es la probabilidad de acertar con un dardo al centro de un círculo, tendremos problemas si pensamos que podemos utilizar la fórmula de probabilidad clásica, ¿por qué? Porque el centro de un círculo es un punto, por lo tanto hay un caso favorable, y nuevamente una infinidad de casos totales. Sin embargo, es posible acertar al centro. Aquí lo que hay que cuestionar es si realmente el centro de un círculo es un punto, o si el dardo con el que intentaremos dar al centro cubrirá sólo un punto. En la práctica no pensamos que el centro de un círculo sea un punto sino que es un círculo de radio muy pequeño.

El problema al que llegamos es el de no poder contar los casos favorables o totales, así que es conveniente cambiar la idea de lo que serían los casos totales y los favorables. Como ya vimos, el centro de la diana no es, en la práctica, un punto, si no un círculo pequeño, del que podemos obtener un área, la que sería el *área favorable*. Asi pues, para este tipo de problemas no calcularemos casos, sino que calcularemos áreas. La fórmula que utilizaremos para obtener la probabilidad de un evento es

$$P(A) = \frac{\text{Área favorable al evento A}}{\text{Área Total}}.$$

3.3 Probabilidad frecuencial

Entre los muchos intentos por tener alguna ventaja al jugar con los dados había, o hay, personas que introducían bolitas de plomo en estos para favorecer a alguna de las caras.

Si lanzamos un dado cargado, los posibles resultados son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, pero ya no podremos asignar igual probabilidad a cada resultado, es decir, si deseamos conocer la probabilidad de obtener un "1", no bastará con pensar en casos favorables y totales.

Imaginemos que lanzamos 10 veces un dado que está cargado, y que en 9 de los lanzamientos se obtuvo el 1. Bajo esta situación no es natural pensar que todas las caras tienen igual probabilidad de ocurrir. Nuevamente lanzamos el dado pero en esta ocasión veinte veces y de estas veinte resultó que el 1 se obtuvo 19 veces ¿es lógico pensar que las caras en el dado tienen la misma probabilidad? Pues no, pero ahora nos enfrentamos al problema de asignar probabilidad a cada uno de los posibles resultados del experimento.

Hay que aclarar que al lanzar 20 veces un dado honesto es posible que se obtenga en los veinte lanzamientos el 1, pero es muy difícil, la probabilidad es

$$P(A) = \frac{1}{6^{20}} = \frac{1}{3656158440062976},$$

y si bien, no es posible concluir que el dado no es honesto por obtener 19 veces el 1 al lanzarlo veinte veces, un resultado así al menos debe ser suficiente para dudar. En caso de que el dado esté cargado, lo que podemos hacer para asignar probabilidades, por ejemplo, es lanzar el dado cien veces, y observar en cuantas de estas se obtuvo el 1 y asignar la probabilidad con la fórmula

$$P(\text{"Obtener 1"}) = \frac{x}{n}$$

Donde x es el número de veces que se obtuvo el 1, y n el número de veces que se lanzó el dado. Esta forma de asignar probabilidad nos debe resultar natural pues la usamos en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando estamos esperando a una persona y ésta suele llegar tarde, suponemos que llegará tarde por experiencias pasadas.

La asignación de probabilidades de acuerdo con el comportamiento a largo plazo en los experimentos es conocida como probabilidad frecuentista o teoría frecuentista.

Entre la teoría frecuentista y la clásica existe una relación. Se espera que si el número de ensayos que se realizan para obtener la probabilidad con el método frecuentista crece indefinidamente, la probabilidad que se obtenga para el evento será la misma que si se pudiera calcular mediante la fórmula clásica. Por ejemplo, sabemos que la probabilidad de obtner un *dos* al lanzar un dado es un sexto; ahora, si lanzamos el dado n veces, y contamos las ocasiones en que se obtuvo el *dos*, y hacemos el cociente para obtener la probabilidad mediante el método frecuentista, se espera que el valor del cociente sea próximo a un sexto. La idea anterior la expresó, tres siglos átras, James Bernoulli de la siguiente forma.

3.4 Primer teorema del límite

James Bernoulli (1654-1705), enunció un resultado fundamental en su obra llamada *"Ars conjectandi"*[1] , el denominado **"Teorema de Bernoulli"** o **ley débil de los grandes números.**

El teorema parte de la suposición de que para todo evento que podamos definir en un experimento aleatorio existe una probabilidad p, conocida o desconocida, de que ocurra. Si dicho experimento lo realizamos n veces, y contamos el número de ocasiones en las que ocurrió el evento (a este número lo llamamos x), y comparamos el cociente $\frac{x}{n}$ con el valor de p, observaremos que estos valores serán muy próximos, además, si el número de ensayos aumenta la diferencia entre p y $\frac{x}{n}$ será menor.

[1] Arte de la conjura

Figura 3.1: James Bernoulli (1654-1705).

Del teorema de Bernoulli se puede enunciar la **ley de los grandes números**, que es una versión moderna de dicho teorema.

Ley de los grandes números. Dado un número ϵ (epsilon) positivo, la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre la frecuencia relativa del evento favorable en n pruebas y la probabilidad de ese evento, sea mayor que ϵ tiende a cero cuando el número de pruebas crece indefinidamente. Lo que podemos representar como

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| > \epsilon\right) = 0,$$

donde x es el número de veces que ocurrió el evento, y n crece indefinidamente.

Ya hemos revisado cómo calcular probabilidades, pero antes de hacer algunos ejercicios, convendrá especificar el lenguaje que utilizaremos para referirnos, en general, a los casos totales, o área total, evento, etc.

3.5 Espacio muestral

Al conjunto de todos los posibles resultados del fenómeno o experimento que observemos lo llamaremos espacio muestral y lo denotaremos con la letra griega Ω (omega). Por ejemplo, al lanzar un dado tendremos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Para no confundirnos es preciso unificar el lenguaje que debemos utilizar para referirnos a los elementos del espacio muestral. Usaremos la frase *punto muestral* para referirnos a cada posible resultado básico que resulta de realizar el experimento. La palabra *evento* la usaremos para nombrar cualquier conjunto que contenga a uno o más puntos muestrales.

Ejemplo 18 *Lanzar un dado.*

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Puntos muestrales: son los resultados básicos o simples del experimento, en este caso 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Evento: Obtener un número menor o igual que 3. En este caso, el evento está compuesto por tres puntos muestrales, $\{1, 2, 3\}$.

■

3.6 Reglas aditivas

Pascal tuvo un amigo llamado Antoine Gombauld, conocido como el caballero Méré, un apostador apasionado. Buscando alguna forma de ganar más dinero, pensó en apostar que en cuatro tiradas de un solo dado podría, al menos, obtener un 6. Las personas aceptaban su apuesta y él empezó a ganar más dinero que el que perdía. La forma en que razonó fue la siguiente: un 6 se obtiene con probabilidad $1/6$, por lo tanto si se tienen cuatro oportunidades, sumando obtenemos que: $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6$, ó $2/3$, cuyo resultado nos hace suponer que se ganarán 2 de cada 3 juegos.

Tal vez aburrido de este juego, Méré buscó uno más interesante. Pensó en lanzar dos dados y obtener un doble seis al menos en 24 tiradas, pero con este juego no fue tan afortunado. No obstante, razonando como antes se llega a que un doble 6 se obtiene con probabilidad $1/36$, pues si se tienen 24 oportunidades, la probabilidad de obtener el doble 6 es $24/36$, simplificando obtenemos $2/3$. Méré pensó que la aritmética no funcionaba y consultó a Pascal para que diera respuesta a su problema.

Calculemos la probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado, y comparemos el resultado con lo propuesto por Méré.

Sea A el evento en el que se obtiene al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado.
Sea A_1 el evento donde se obtiene un 6 en el primer intento.
Sea A_2 el evento donde se obtiene un 6 en el segundo intento.
Sea A_3 el evento donde se obtiene un 6 en el tercer intento.
Sea A_4 el evento donde se obtiene un 6 en el cuarto intento.

Siguiendo el razonamiento de Méré podemos escribir

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Este razonamiento erróneo es usual, muchas personas que empiezan a resolver problemas de probabilidad lo repiten. No siempre es posible sumar las probabilidades de la forma anterior, ya que los eventos no siempre son ajenos o excluyentes (decimos que dos eventos A y B son ajenos si no tienen elementos en común).

El evento A_1, como fue descrito, pide que se obtenga un 6 en el primer lanzamiento, pero no dice nada de los tres lanzamientos restantes, por ejemplo, (6,2,4,3) y (6,6,5,4) son dos posibles resultados de lanzar el dado las cuatro veces que satisfacen lo necesario para ser considerados en el evento A_1, sin embargo, (6,6,5,4) también debe ser tomado en cuenta para el evento A_2, es decir, estamos tomando en cuenta un posible resultado dos veces, o más. Por lo anterior podemos decir que A_1 y A_2 no son eventos ajenos, pues comparten algo.

Utilizando la idea de los eventos ajenos podemos resolver el problema planteado por el caballero Méré. Sea A^c el evento en el que se obtienen números diferentes al 6 en las cuatro tiradas.

Ya sabemos que los eventos ajenos son aquellos en los que no se comparte algo. En este caso A y A^c son eventos ajenos y además complementarios, es decir, sucede A o A^c, pero no ambos. Por lo tanto, no será muy difícil concluir que,

$$P(A) + P(A^c) = 1,$$

y despejando $P(A)$ obtenemos que,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

La probabilidad de A^c es muy sencilla de obtener, así que es mejor obtener la probabilidad de A haciendo uso de la última ecuación.

$$P(A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0.48225.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.48225 = 0.5177.$$

Este resultado sustenta las hipótesis del caballero Méré, pues en las apuestas le favorece aproximadamente 52 veces de cada 100, aunque realmente no es una ventaja desmedida o muy significativa, además, debemos notar que realmente la probabilidad no es $2/3$ como suponía Méré.

Veamos ahora cuál es la probabilidad de obtener al menos un doble 6 cuando se lanzan 24 veces 2 dados.

Sea B el evento en el que se obtiene al menos un doble seis al lanzar 24 veces dos dados. Sea B^c el evento en el cual no se obtiene ningún doble seis en las 24 tiradas de los dados.

$$P(B^c) = \underbrace{\frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \cdots \times \frac{35}{36}}_{24-veces} = 0.50859612.$$

Por lo tanto,

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.50859612 = 0.49140388.$$

La probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado es 0.5177, es decir, de cada 100 juegos ganaremos 52 aproximadamente. La probabilidad de obtener un doble 6, al menos, al lanzar dos dados 24 veces es de 0.49, y con esta opción se espera que ganemos 49 veces de cada 100 juegos.

Con lo anterior podemos verificar que realmente el razonamiento de Méré respecto a la forma de calcular probabilidades era erróneo. Sin embargo, es meritorio que haya notado, al observar los resultados de los juegos que, en efecto, es más probable obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado, que obtener al menos un doble 6 al lanzar dos dados 24 veces. Su observación fue tan exacta que le permitió darse cuenta que en un juego tenía la ventaja y en el otro no. Aunque cabe mencionar que es casi imposible percibir, o diferenciar, situaciones donde las probabilidades de dos eventos tienen una diferencia tan pequeña.

Antes de proponer una fórmula para calcular la probabilidad de la *unión* de dos o más eventos, veamos un ejemplo más.[2]

Supongamos que se tienen los siguientes eventos: Sea A el evento en el que se obtiene un número menor o igual a cuatro al lanzar un dado, es decir, que ocurre A cuando se obtiene el 1, 2, 3 ó 4. Sea B el evento en el que se obtiene un número par al lanzar un dado, es decir, 2, 4 ó 6.

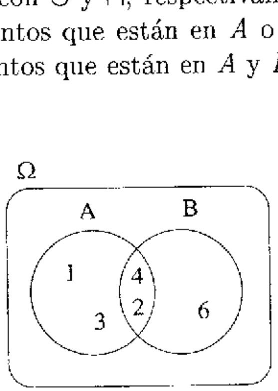
Los eventos A y B no son ajenos pues comparten dos puntos muestrales, el 4 y el 2. Si deseamos obtener la probabilidad de obtener A o B, podemos intentar sumar las probabilidades, es decir,

[2]Denotaremos a la *unión* de dos eventos como suele hacerse en la teoría de conjuntos, es decir, haciendo uso del símbolo $\cup$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \tfrac{4}{6} + \tfrac{3}{6} = \tfrac{7}{6},$$

llegando a una contradicción, pues convenimos que no existe evento cuya probabilidad sea mayor a uno. Como hemos mencionado, el problema reside en que los eventos A y B no son ajenos, pues comparten dos puntos muestrales y, por tal motivo, los puntos que comparten están siendo tomados en cuenta tanto en P(A) como en P(B). De allí que la probabilidad que obtenemos sea mayor a uno.

Utilizando la teoría de conjuntos podemos resolver este problema de otra forma. En esta teoría se tiene los conceptos de la unión e intersección de conjuntos, que se denotan con $\cup$ y $\cap$, respectivamente. El conjunto $A \cup B$ consiste de todos los elementos que están en A o en B. El conjunto $A \cap B$ consiste de todos los elementos que están en A y B.



En nuestro problema $A \cap B$ se conforma de los puntos muestrales 4 y 2, y $A \cup B$ por puntos 1, 2, 3, 4 y 6. Los elementos que se encuentran en la intersección son los que estamos contando de más, pues están en A y B, como los estamos contando dos veces, tenemos que restar una vez la probabilidad de la intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

De los ejemplos ilustrados hasta aquí, podemos deducir los siguientes resultados.

Conclusión 1 *Sean A y B cualesquiera dos eventos, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Conclusión 2 *Si A y B son mutuamente excluyentes o ajenos, sucede que*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Conclusión 3 *Si A y A^c son eventos complementarios, entonces*

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Podemos demostrar la conclusión 3 utilizamos el hecho de que la probabilidad de Ω es igual a 1, y que A y A^c son ajenos.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ P(A \cup A^c) &= 1 \\ P(A) + P(A^c) &= 1. \end{aligned}$$

3.7 Ejemplos

Ejemplo 19 *¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 o 5 águilas al lanzar 5 veces una moneda honesta?*

Solución. Sea A el evento en el que se obtienen 4 águilas al lanzar 5 veces una moneda, y sea B el evento en el que se obtienen 5 águilas al lanzar 5 veces una moneda.

Lo que nos interesa es que ocurra A o B, es decir, necesitamos calcular $A \cup B$. Los eventos A y B son ajenos pues no pueden ocurrir simultáneamente. Por lo tanto

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Los casos totales al lanzar 5 veces una moneda son 2^5, los casos favorables al evento A son 5, y sólo hay un caso favorable al evento B. Utilizando la fórmula de probabilidad clásica obtenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{6}.$$

Así la probabilidad de obtener 4 o 5 águilas al lanzar cinco veces una moneda honestas es de $1/6$.

■

Ejemplo 20 *Se lanzarán dos monedas, una de cobre y otra de plata. Las monedas son honestas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sol? Elije una de las siguientes opciones:*

a) La probabilidad es 1.
b) La probabilidad es $3/4$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución. Si nuestra respuesta es "Ninguna de las anteriores", debemos regresar al capítulo uno. Si nuestra respuesta es "1", seguramente estamos cometiendo el mismo error que el caballero Méré, repasa la sección 3.6. Si nuestra respuesta es "3/4", estamos en lo correcto.

Definamos como A al evento de obtener sol con la moneda de plata, y como B al evento de obtener sol con la moneda de cobre. La probabilidad de que ocurra A o B, es decir, la probabilidad de obtener al menos un sol, es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Tanto la probabilidad de A como la de B están definidas en el enunciado del problema, sólo falta calcular la probabilidad de $A \cap B$. Para lo anterior debemos definir el espacio muestral de este experimento.

$$\Omega = \{(a, s), (s, a), (a, a), (s, s)\}.$$

Los casos totales son 4, y sólo hay un caso favorable. Por lo tanto

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{4}.$$

Ahora para calcular la probabilidad de $A \cup B$ tenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener al menos un sol al lanzar la moneda de cobre y la de plata es $3/4$. Obsérvese que a este resultado se puede llegar escribiendo sólo el espacio muestral, y a partir de allí calcular casos favorables y totales, es decir, sin hacer uso de $P(A \cup B)$.

■

Ejemplo 21 ***En** el capítulo uno citamos dos propuestas de Cardano. Una de ellas planteaba que la probabilidad de obtener un número en particular, el dos por ejemplo, al lanzar un dado tres veces es un medio. , ¿ la propuesta es verdadera?*

Solución. Sea A el evento de obtener al menos un 2 al lanzar tres veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de A? Para calcular esta probabilidad hagamos uso de la fórmula de probabilidad clásica. Los casos totales los podemos obtener haciendo uso de la regla de la multiplicación, adaptándola para el caso de tres tareas, donde cada tarea es lanzar el dado una vez, o la repetición de una tarea tres veces, de cualquier forma llegamos a: $6 \times 6 \times 6 = 216$, resultado que ya conocíamos gracias a Galileo y a Cardano.

Obtener el número de casos favorables es un poco más complicado, pero con la práctica resultará sencillo. Si queremos obtener un 2 con tres lanzamientos, los casos favorables son todos aquellos donde al menos aparece un 2, por ejemplo: (1,2,3), (4,2,5), (3,2,2), (2,2,2), etc. Todos los casos anteriores son favorables; pero ¿cómo contarlos a todos? Podemos separarlos en tres grupos, uno donde sólo aparezca una vez el 2, otro donde aparezca dos veces el 2, y un último grupo donde el 2 aparezca las tres veces.

Cuando sólo hay un 2, por ejemplo, $(2,\cdot,\cdot)$, podemos tener en lugar de los espacios vacíos cualquier número del dado exceptuando el dos, es decir, cualquiera de cinco números.

Hay 25 posibilidades del caso $(2, \cdot, \cdot)$.
Hay 25 posibilidades del caso $(\cdot, 2, \cdot)$.
Hay 25 posibilidades del caso $(\cdot, \cdot, 2)$.

Por lo tanto hay 75 casos favorables donde sólo hay un 2. De manera similar obtenemos que los casos favorables cuando hay dos veces 2, por ejemplo, (2,1,2). El número de casos es 15. Cuando tenemos tres veces el 2 sólo hay un caso, (2,2,2). Sumando todos los casos favorables obtenemos por resultado $75 + 15 + 1 = 91$.

Ya que hemos calculado los casos favorables y totales, aplicamos la fórmula,

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{91}{216} = 0.4212962$$

Con lo que probamos que no existe la igualdad que suponía Cardano; para que exista la igualdad se debe obtener un medio de probabilidad.

Existe una forma más sencilla de obtener los casos favorables. Sabemos que en total hay 216 casos, de estos algunos son favorables al evento A, y hay otros que no lo son. Para facilitar el trabajo contemos los casos que no son favorables, es decir, contemos los casos donde no aparece el 2. En estos casos podrán aparecer cualquiera de las cinco caras restantes del dado. En total son $5 \times 5 \times 5 = 125$ casos.

De los 216 casos totales 125 no son favorables, por lo tanto, los casos favorables se obtienen restando $216 - 125 = 91$, que es el resultado que obtuvimos anteriormente.

■

Ejemplo 22 *En una de tantas ferias de la ciudad hay un personaje pintoresco de nombre Solín. Éste atrae a los paseantes con un juego. Él muestra tres cartas, la primera con ambas caras azules, la segunda con ambas blancas y la tercera con una cara blanca y una azul, después las introduce en un sombrero, y deja que uno de los espectadores extraiga una. Solín pide al espectador que coloque la carta sobre una mesa, sin mostrar de qué color es la cara que queda boca abajo. Supongamos que la cara que podemos ver de la carta es azul, entonces Solín dirá: "al parecer la cara oculta puede ser blanca o azul, apuesto 10 pesos contra 12 a que la cara oculta también es azul".*

Parece ser una buena oportunidad para que el espectador gane una apuesta. Sabemos que la carta con las dos caras blancas ya no está en juego, es decir, la carta sobre la mesa es la que tiene ambas caras azules o la carta que tiene una cara de cada color. Solín nos dará 12 pesos si es que la cara oculta es blanca, mientras que nosotros sólo le daremos 10 pesos en caso de que sea azul, todo indicaría que nosotros tenemos la ventaja, ¿o no? Para saber si es una oportunidad de ganar dinero o nos quieren estafar, mejor obtengamos la probabilidad de que la cara oculta sea azul.

Solución. Como es costumbre, definamos primero el evento de interés: sea A el evento en que la cara oculta es azul. ¿Cuál es la probabilidad de A?

Necesitamos obtener los casos favorables y los totales. Para esto no necesitamos fórmulas, sólo visualizar correctamente el problema. Hasta cierto punto es bueno el argumento que nos da Solín, son dos cartas en juego y una le da el triunfo, parecería que la probabilidad del evento A es un medio, sin embargo, no debemos centrar la atención en el número de cartas, sino en el número de caras. Es una de tres caras la que esta oculta, dos azules y una blanca, es decir, son tres los casos totales contra dos favorables, por lo que podemos decir que:

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

En teoría Solín gana dos de cada tres juegos, es decir, si nosotros jugáramos tres veces se esperaría que en dos ocaciones gane Solín y en una nosotros, el nos pagaría 12 pesos y nosotros a él 20. Después de todo, no parece tan conveniente aceptar apuestas de este tipo.

■

Ejemplo 23 *En un cajón hay 4 calcetines negros, 4 azules y 2 verdes. Se sacarán al azar dos calcetines, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules? ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?*

Solución. Sea A el evento en que los dos calcetines obtenidos al azar sean azules. Sea B el evento en que los dos calcetines obtenidos al azar son del mismo color. Para el evento A los casos favorables se pueden calcular con las combinaciones de 4 en 2, es decir, de los cuatro calcetines azules que hay en el cajón debemos elegir dos, sin importar el orden ya que son indistinguibles, y los casos totales con las combinaciones de 10 en 2, es decir, elegir 2 calcetines de 10 sin importar color u orden, entonces la probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{C_2^4}{C_2^{10}} = \frac{6}{45}.$$

En el cálculo de la probabilidad de B los casos totales son los mismos. Los casos favorables se forman de todas las posibles elecciones de pares de calcetines del mismo color. De los azules, como sabemos, hay 6 formas. Por otra parte, los calcetines negros son 4, al igual que los azules, por lo que también hay 6 formas de obtener un par de estos calcetines; al haber sólo dos calcetines verdes, solamente hay una forma de obtener un par de dicho color. Así llegamos a que

$$P(B) = \frac{C_2^4 + C_2^4 + C_2^2}{C_2^{10}} = \frac{6+6+1}{45} = \frac{13}{45}.$$

■

Ejemplo 24 (El problema de los cumpleaños) . *En una fiesta, donde hay 23 personas, uno de los invitados propone lo siguiente: "Si en este lugar* *hay al menos dos personas que cumplan años el mismo día, me llevaré todo el pastel a casa, de lo contrario compraré otro igual para ustedes" ¿Deben los demás invitados aceptar la propuesta?*

Solución. Dado que hay 365 días, no parece muy probable que haya dos personas de entre las 23 que cumplan años en la misma fecha. Pero, para verificarlo, hay que obtener la probabilidad. Sea el evento A aquel en el que hay al menos dos personas con la misma fecha de cumpleaños. ¿Cómo obtenemos la probabilidad de A? En muchos de los problemas de probabilidad donde se menciona la frase "al menos" debemos tomar el tiempo necesario para pensar si sería mejor calcular lo contrario a lo que nos piden. Esto ya lo hemos hecho anteriormente.

En este caso, de no hacer uso de la recomendación, debemos contar primero los casos donde sólo dos personas tienen el mismo día de cumpleaños, luego si son tres, o cuatro, o si hay dos personas que cumplan el mismo día y otras dos en otro día, y así lo podemos hacer tan difícil como queramos, pero mejor hay que hacerlo de la manera sencilla. Utilicemos el evento A^c que es aquel donde no coinciden en ningún caso las fechas de cumpleaños.

La probabilidad de A^c es muy fácil de obtener. Cada una de las personas nos dirá su fecha de cumpleaños, la primera podrá decir cualquier día de los 365, la segunda podrá decir cualquiera de 364, para no coincidir con el día de la primera persona, y así hasta que las 23 personas hayan dicho su fecha de cumpleaños. Los casos favorables para el evento A^c son: $365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - 22)$, los casos totales son 365^{23}. La probabilidad de A^c es entonces,

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 22)}{365^{23}} = 0.49270277.$$

Finalmente la probabilidad de que el invitado, que hace la propuesta, se lleve el pastel a su casa es

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.49271277 = 0.50729723.$$

La propuesta parece ser justa, pues la probabilidad es muy próxima a un medio, pero si el número de invitados fueran mayor, el que hace la propuesta tendría ventaja. Observemos la siguiente tabla que muestra las probabilidades de que en un grupo de n personas haya al menos dos personas con la misma fecha de cumpleaños.

Número de invitados	Probabilidad
1	0
2	0.002
3	0.008
$\vdots$	$\vdots$
21	0.443
22	0.475
23	0.507
24	0.538
25	0.568
26	0.598
27	0.626
$\vdots$	$\vdots$
43	0.923
44	0.932
45	0.940

Observemos que para 45 invitados la probabilidad de perder el pastel, que es de 0.94, es bastante considerable. Es un buen ejercicio tratar de explicar el porqué de tal probabilidad cuando hay 45 personas, que parecerían ser pocas respecto de los 365 días del año.

■

Ejemplo 25 *Dos personas, A y B, juegan a los dados de la siguiente forma: B lanza dos dados y toma el mayor de los valores obtenidos; A sólo lanza un dado. El jugador B gana si el valor que obtuvo es estrictamente mayor que el obtenido por A. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?*

Solución. Para encontrar la solución, obtengamos la probabilidad de que A gane. Debemos contar todos lo posibles resultados que se pueden dar para que éste gane; por ejemplo, si A obtiene un 2 entonces B debe obtener a lo más 2, pues A gana con el empate. Observemos el siguiente gráfico:

A	B					
1	**(1,1)**	**(1,2)**	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

La parte sombreada muestra lo que debe obtener B para que gane A cuando este último haya obtenido un 2, es decir, si A obtiene 2, B puede obtener (1,1) ó (1,2) ó (2,1) ó (2,2). Siguiendo la misma lógica podemos contar los casos favorables para A como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91.$$

Lo que quiere decir que, del total de las posibilidades en el juego, en 91 de ellas gana A. Los casos totales son 216, pues se lanzan tres dados. Utilizando la fórmula clásica de probabilidad tenemos que

$$P(A) = \frac{91}{216} = 0.4212962.$$

■

Ejemplo 26 *Se tienen 3 parejas de personas, que representaremos con las letras A, a, B, b, C y c. Estas personas se sentarán al azar en una banca. ¿Cuál es la probabilidad de que las personas se sienten sin que haya alguna pareja junta?*

Solución. Contemos todas las posibles formas en que las seis personas pueden sentarse en la banca. Utilizando la fórmula de arreglos obtenemos 6!, es decir, el resultado es que hay 720 formas distintas de sentar a las seis personas en una banca. Para obtener los casos favorables, del total de casos restemos los casos donde al menos alguna persona está con su pareja, que son $6!$ menos el número de arreglos donde al menos hay una persona junto a su pareja.

Si pensamos en la pareja Aa como un solo elemento, nos aseguraremos de que siempre se sentarán juntos. Contamos los arreglos que resultan de acomodar a los 5 elementos, Aa, B, b, C y c, que son $5!$, tenemos arreglos donde al menos aseguramos que hay una pareja junta, que es Aa. Este resultado lo multiplicamos por 2, para hacer distinción entre Aa y aA. Como tenemos 3 parejas para elegir a la que vamos a unir, el resultado lo multiplicamos por 3, por lo tanto llegamos a que el número de arreglos que representan las formas en que las seis parejas se pueden sentar de modo tal que al menos haya una persona junto a su pareja es $3 \times 2 \times 5!$. Si al total le restamos el número anterior, obtenemos

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) = 0.$$

Este resultado no es posible, necesariamente hay formas de sentar a las personas de manera que estas no estén junto a su pareja. ¿Dónde está el error? El error es que restamos de más algunos casos. Por ejemplo cuando unimos Aa y acomodamos los 5 elementos, en algunos de estos arreglos B y b quedan juntos, y luego cuando unimos Bb y acomodamos los 5 elementos, sucede que aquí también pueden quedar juntos Aa.

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + error.$$

Para medir ese error contemos los arreglos en los que hay, por lo menos, dos personas sentadas con su pareja. Por ejemplo, podemos unir a la pareja Aa y también a la Bb, con esto obtenemos 4 elementos para acomodar, Aa, Bb, C y c, entonces tenemos $4!$ arreglos donde por lo menos hay dos personas que están sentadas junto a su pareja. Dado que fijar Aa y Bb es distinto a fijar aA y Bb, entonces debemos multiplicar nuestro resultado, $4!$, por 4, que son todas las formas en que se pueden fijar las parejas. Por último, contemos las formas en que podemos elegir a esas dos parejas, que son 3. Con lo anterior llegamos al siguiente resultado:

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + (3 \times 4 \times 4!) = 288.$$

Este resultado ya está más cerca de ser el que buscamos, pero aún no lo es. Nuevamente cometimos un error, y es que estamos sumando arreglos de más. Cuando elegimos a las dos parejas, por ejemplo Aa y Bb, y hacemos los arreglos de 4 elementos, C y c pueden quedar o no juntas; luego, si las parejas que unimos son las Aa y Cc, B y b pueden o no quedar juntos. Si quedan juntos, nuevamente las tres parejas están juntas y estaremos contando de más. El número de arreglos donde sucede lo anterior lo podemos calcular si unimos a todas las parejas, con lo que tenemos tres elementos para distribuir, Aa, Bb y Cc, y contamos las formas en que se pueden sentar, que son de 3! formas, y multiplicando por el número de formas en que las parejas, ya unidas, se puede sentar entre si, que son 8, llegando así a la repuesta del problema que es

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + (3 \times 4 \times 4!) - (1 \times 8 \times 3!) = 240.$$

La probabilidad de que ninguna persona esté sentada junta a su pareja es

$$P = \frac{240}{720} = 0.3333.$$

■

Ejemplo 27 *En el juego del dominó se reparten, al azar, 28 fichas entre 4 jugadores. Todas las fichas son distintas. Una ficha de domino se caracteriza por tener dos números, los cuales pueden ser el 0, 1, 2, 3, 4, 5 o el 6. Así, hay 7 fichas con un mismo número, por ejemplo, las fichas que tienen el número 6 y otro (6 : 0, 6 : 1, 6 : 2, 6 : 3, 6 : 4, 6 : 5 y 6 : 6). ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador obtenga 7 fichas con un mismo número?*

Solución. Sea A el evento de que un jugador obtenga 7 fichas con un mismo número.Calculemos primero el número de casos totales. El primer jugador puede elegir sus 7 fichas de entre 28, por lo tanto, tendrá C_7^{28} posibilidades, pues el orden de las 7 fichas no importa. El siguiente jugador que tome sus fichas elegirá de entre las 21 restantes, y tendrá C_7^{21} posibles formas de hacerlo. El tercer jugador dispondrá de las 14 fichas restantes, por lo cual dispone de C_7^{14} posibilidades de elección. Por último, el cuarto jugador tendrá

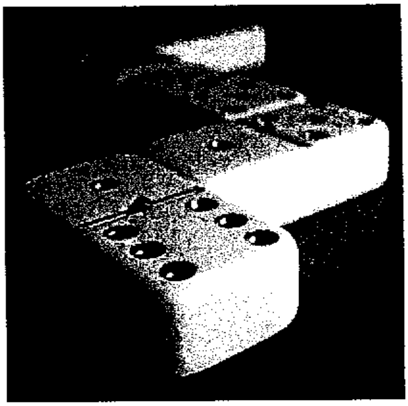


Figura 3.2: Dominó.

sólo C_7^7 formas de seleccionar sus fichas. Utilizando la regla de la multiplicación tenemos que el número total de formas en que se pueden repartir las fichas los 4 jugadores es

$$C_7^{28} \times C_7^{21} \times C_7^{14} \times C_7^7 = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Por la forma en que están marcadas las fichas del dominó, en un juego, sólo una persona puede tener las 7 fichas con el mismo número. Entonces los casos favorables serán todos aquellos donde alguno de los jugadores tenga las 7 fichas con el cero, o las 7 fichas con el uno, etc., en total hay 7 casos. Pero hay que ver como quedan distribuidas las 21 fichas restantes entre los otros jugadores. Supongamos que el jugador que ha de tener las 7 fichas con un mismo número es el primero en elegir, y en efecto toma 7 las fichas deseadas. El siguiente jugador dispone de C_7^{21} formas de elegir sus 7 fichas. Para el tercer jugador restan 14 fichas, por lo cual tendrá C_7^{14} posibilidades de elegir sus fichas. El cuarto jugador se conformará con las 7 fichas restantes (C_7^7). Usando la regla de la multiplicación el número total de casos favorables para el evento A es

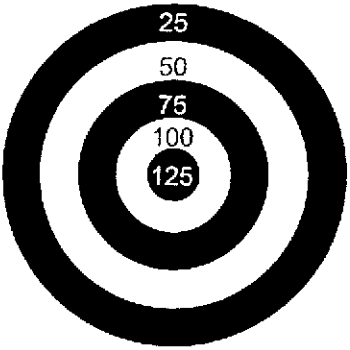
$$7 \times C_7^{21} \times C_7^{14} \times C_7^7 = \frac{7 \times (21!)}{(7!)^3}.$$

La probabilidad del evento A es,

$$P(A) = \frac{\left(\frac{7\times(21!)}{(7!)^3}\right)}{\left(\frac{28!}{(7!)^4}\right)} = 0.000005912.$$

■

Ejemplo 28 *Lanzaremos un dardo sobre la siguiente figura:*



Si suponemos que el dardo forzosamente caerá al menos en la franja de los 25 puntos, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 125 puntos? El radio del círculo mayor es de 25 cm. y el radio del círculo de los 125 puntos es de 5 cm.

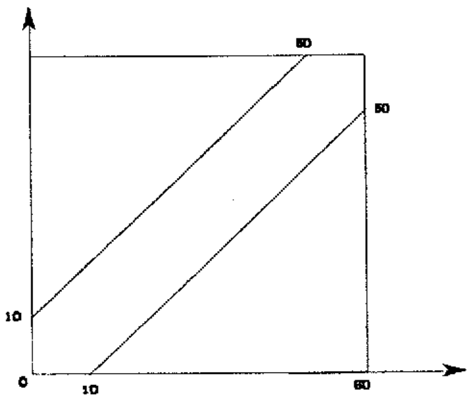
Solución. El área del círculo mayor es de: $\pi \times r^2 = 3.1416 \times 25^2 = 1963.5$. El área del círculo de los 125 puntos es: $\pi \times r^2 = 3.1416 \times 5^2 = 78.54$. Sea A el evento de que el dardo acierta en el círculo de los 125 puntos. Utilizando la fórmula de probabilidad geométrica, la probabilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{78.54}{1963.5} = 0.04.$$

■

Ejemplo 29 *Juan y Alma concertaron una cita para el próximo lunes entre 15 y las 16 horas en un café. Debido a sus ocupaciones ninguno está dispuesto a esperar más de diez minutos ¿cuál es la probabilidad de que Juan y Alma, que llegarán al azar entre las 15 y 16 horas, se encuentren en el café el próximo lunes?*

Solución. Sea A el evento en el que Juan y Alma se encuentran. Para calcular la probabilidad del evento A necesitamos obtener el área favorable y el área total, para ello nos auxiliaremos del siguiente diagrama.



Alma y Juan pueden llegar en cualquier momento entre las 15 y 16 horas. Lo anterior se representa en el dibujo con una recta horizontal y una vertical, que indican el momento de llegada y partida de Alma y Juan respectivamente. Para que se dé el encuentro, si Alma llega en punto de las 15 horas, minuto cero, y parte al minuto diez, Juan debe llegar antes del minuto diez, si Alma llega en el minuto uno se irá al minuto 11, por lo que Juan deberá llegar antes del minuto once, etc.

La probabilidad del evento A se obtiene con el cociente del área sombreada, área favorable, y el área del cuadro de 60 por 60, que es el área total. Para obtener el área de la zona sombreada podemos restar a 3600, área total, el área de los triángulos blancos. Cada triángulo tiene base de 50 y altura de 50, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{Área sombreada} &= 3600 - ((50 \times 50)/2) \times 2 \\
&= 3600 - 2500 \\
&= 1100.
\end{aligned}$$

Así la probabilidad de que Alma y Juan se encuentren es

$$P(A) = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

■

Ejemplo 30 *Pensemos en una circunferencia de radio 1. Dibujemos en esta circunferencia un triangulo equilátero de forma tal que los tres vértices del triangulo sean puntos de la circunferencia, como se muestra en la figura 3.3. A la longitud de cada lado del triángulo la llamaremos L. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar una cuerda de la circunferencia con longitud mayor a L?*[3]

Calculemos el valor de L. Para obtener el valor de L, tracemos las alturas del triángulo y prolonguemos éstas para que sean diámetros del círculo (figura 3.4). Observemos que al trazar las alturas, se obtienen seis nuevos triángulos, estos triángulos son iguales; los ángulos internos son de 30, 60 y 90 grados, además sabemos que la hipotenusa mide una unidad. El valor de L es igual a dos veces el valor de x, donde x es igual a coseno de 30 grados, ($\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Veamos las siguientes posibles soluciones:

Solución 1. Para la primera solución usaremos que toda cuerda tiene un punto medio, así, elegiremos al azar un punto dentro de la circunferencia, y a partir de este punto se generará la cuerda, la cual podrá ser mayor o no a L.

[3]Este problema fue planteado por Joseph Louis Bertrand y publicado en 1888 es su libro *Calcul des probabilities.*

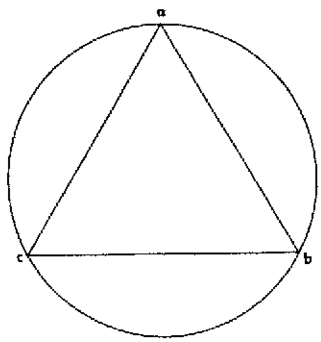


Figura 3.3:

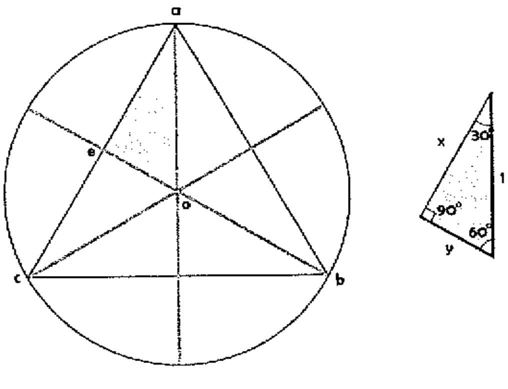


Figura 3.4:

Definamos el área favorable al evento, que llamaremos A. Para definir el área favorable nos auxiliaremos de la figura 3.5. En esta figura podemos ver el triángulo equilátero y un segmento de recta que se extiende desde el punto a' hasta el punto a, este último punto es uno de los vértices del triángulo, además el segmento de recta pasa por el centro del círculo. Supongamos por un momento que sólo podemos elegir puntos que estén contenidos en

$\overline{aa'}$, y que las cuerdas que se generen con dichos puntos tendrán que ser perpendiculares al segmento $\overline{aa'}$. Todos los puntos que elijamos entre d y d' serán puntos medios de cuerdas con longitud mayor a L.

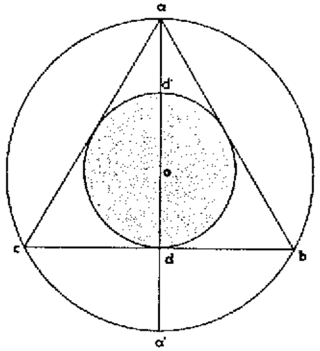


Figura 3.5: Área favorable.

Si giramos $\overline{dd'}$ manteniendo al punto o fijo, obtendremos un círculo contenido en el triángulo, y dentro de esta circunferencia estarán todos los puntos que pueden ser centros de cuerdas con longitud mayor a L (figura 3.5). La circunferencia sombreada es el área favorable. Para obtener el radio del la circunferencia sombreada auxiliémonos de la figura 3.4, de esta figura podemos deducir que el radio de la circunferencia es igual a $\frac{1}{2}$ (seno de 30 grados). Aplicando la fórmula para calcular probabilidad en base a áreas obtenemos que

$$P(A) = \frac{\pi \times 0.5^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{4}.$$

Solución 2. Situémonos en un punto de la circunferencia, por ejemplo, el punto a. A partir de este punto construyamos una cuerda elijando al azar un segundo punto. En la figura 3.6 podemos ver cómo sólo los puntos contenidos en el arco bc generarán cuerdas con longitud mayor a L.

Los tres arcos que se forman con los vértices del triángulo miden lo mismo, y si suponemos que la probabilidad de elegir un punto en éstos es la misma,

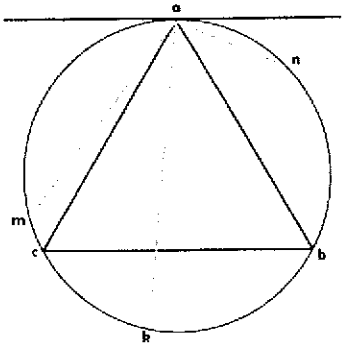


Figura 3.6:

por lo tanto para obtener la probabilidad de elegir una cuerda con longitud mayor a L es $\frac{1}{3}$.

■

Hemos llegado a dos soluciones diferentes, con este ejemplo Bertran trató de mostrar que existen algunas inconsistencias en la teoría de la probabilidad geométrica. A juicio de muchos, los diferentes resultados son consecuencia de diferentes interpretaciones del problema.

Ejemplo 31 *Si se lanza una moneda honesta 300 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 150 veces sol y 150 veces águila?"*

Solución. Esta pregunta la he hecho en repetidas ocasiones obteniendo dos repuestas; un medio y algo próximo a uno.

Los que dijeron un medio

La siguiente pregunta que formulo, con el fin de sacarlos de su error es: ¿cuál es entonces la probabilidad de obtener 151 veces sol y 149 veces águila? Y con mayor sorpresa escucho que la probabilidad en este caso es próxima a 0.5.

Después intento con una tercer pregunta esperando que esta vez sí salgan de su error. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 149 veces sol y 151 águilas? Sin embargo obtengo por respuesta, que la probabilidad es muy cercana a 0.5.

Después de comprender que las tres preguntas son incapaces de lograr su objetivo, utilizo el siguiente argumento para lograrlo:

Sea A el evento en el cual se obtiene 150 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Sea B el evento en el cual se obtiene 149 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Sea C el evento en el cual se obtiene 151 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Por lo que expresaron las personas, las probabilidades de estos eventos son las siguientes:

$$P(A) = 0.5, \qquad P(B) = 0.49, \qquad P(C) = 0.49.$$

Claro, tomando 0.49 como un número próximo a 0.5, sólo para fines de cálculo. Como es conocido, cuando tenemos eventos ajenos la probabilidad de la unión de éstos es la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.5 + 0.49 + 0.49 = 1.48.$$

Con lo que llegamos a una contradicción, pues no existe evento cuya probabilidad sea mayor a uno.

La probabilidad de obtener 150 soles al lanzar una moneda 300 veces se obtiene de la siguiente manera: para los casos totales, pensemos en éstos como arreglos con repetición de tamaño 300, cada uno de los 300 lugares puede tomar uno de dos valores, águila o sol, es decir, tenemos 2^{300} casos totales. Para los casos favorables necesitamos que en los 300 lanzamientos se obtengan 150 soles y 150 águilas. Si contamos de cuantas formas podemos distribuir 150 soles en 300 lanzamientos estaremos contando los casos favorables, es decir, necesitamos elegir 150 números de entre el 1 y el 300 para asignar a esos lugares los 150 soles, ¿de cuántas formas puedo elegir 150 números de entre 300 si no importa el orden? Pues de C_{150}^{300}, por lo tanto la probabilidad de obtener 150 soles al lanzar 300 veces una moneda es:

$$P(A) = \frac{C_{150}^{300}}{2^{300}} = \frac{300!}{150!(150!)}\left(\frac{1}{2^{300}}\right) = 0.04602751.$$

La probabilidad resulta ser muy pequeña y lejana al 0.5 que la mayoría suponía. Ya que muchas personas pensaban incorrectamente que la probabilidad era 0.5, es interesante tratar de encontrar una explicación para esto.

Es difícil tratar de explicar cuál es la causa principal que lleva a dar como respuesta "un medio", pero con frecuencia se observa un razonamiento semejante, y es el de dividir 150 entre 300, pues al obtener un medio la respuesta coincide con la probabilidad de obtener un sol al lanzar una moneda.

Buscando otra explicación, se cree que las personas no hacen diferencia entre "los tamaños de los experimentos "[4]. Por ejemplo, si se tiene una urna con 100 bolas de color azul y 100 bolas de color rojo, las personas opinan que es igualmente posible obtener 4 bolas rojas y 6 azules al realizar 10 extracciones que obtener 40 bolas rojas y 60 azules al hacer 100 extracciones. Lo cual no es cierto.

Para el caso de la moneda, supongamos que se lanza 4 veces en lugar de trescientas y se desean obtener 2 soles en lugar de 150. Las personas siguen pensado que esta probabilidad es un medio, es decir, no hacen diferencia entre el número de lanzamientos, simplemente se fijan en que el número de soles que se desean obtener es un medio del total de lanzamientos.

Obtengamos la probabilidad para el caso de cuatro lanzamientos para mostrar que sigue sin ser un medio.

¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 soles al lanzar 4 veces una moneda que suponemos honesta?

Sea D la probabilidad de obtener 2 soles al lanzar una moneda honesta 4 veces.

Para llegar al resultado utilicemos la fórmula de probabilidad clásica. De forma explícita, el espacio muestral es el siguiente:

[4]Shuaghness (1976)[8]

1	S, S, S, S
2	S, S, S, A
3	S, S, A, S
4	S, A, S, S
5	A, S, S, S
6	**S, S, A, A**
7	**S, A, S, A**
8	**S, A, A, S**
9	**A, S, A, S**
10	**A, A, S, S**
11	**A, S, S, A**
12	A, A, A, A
13	A, A, A, S
14	A, A, S, A
15	A, S, A, A
16	S, A, A, A

Los casos totales son 16 y los favorables 6, por lo tanto

$$P(D) = \frac{6}{16} = 0.37.$$

Obtenemos un número menor que 0.5, pero diferente de 0.046275 correspondiente a la probabilidad de obtener 150 soles al lanzar trescientas veces la moneda.

Los que dijeron que la probabilidad es algo próximo a uno

Si se lanza un moneda $2n$ veces y se desean obtener n soles tendremos pocas posibilidades de lograr nuestro objetivo. El caso en el que mayor probabilidad tenemos de lograrlo es con n = 1, es decir, cuando lanzamos 2 veces la moneda.

1	S, S
2	**S, A**
3	**A, S**
4	A, A

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

Exceptuando este caso, todos los demás tienen probabilidad menor a un medio. Aun así, cuando se realiza la pregunta: *"si se lanza una moneda honesta 300 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 150 veces sol y 150 veces águila?"*, un número reducido de personas, pero convencido, responden que esta probabilidad es aproximadamente uno.

Mientras la respuesta *"un medio"* la podemos asociar, hasta cierto punto, con personas que tienen poca experiencia en la teoría de probabilidad, la respuesta *"algo próximo a uno"*, está relacionada con personas de cierta experiencia en dicha teoría.

Para la respuesta *"algo próximo a uno"* no hay gran misterio, esta respuesta es obra de un descuido en la aplicación del Teorema de Bernoulli. La interpretación del teorema en este caso, es que al realizar el experimento de lanzar la moneda en repetidas ocasiones y contar el número de soles que se obtienen, y compararlos con el total de lanzamientos mediante un cociente, éste será próximo a un medio, entonces las personas, conocedoras de este teorema razonan que como 300 lanzamientos son muchos, entonces el cociente será muy próximo a un medio, es decir, piensan que casi es seguro que el número de soles será la mitad, y dan por respuesta "algo próximo a uno". Sin embargo la pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 150 soles? Y como ya vimos, esta probabilidad es muy pequeña, y entre más grande sea el número de lanzamientos más pequeña es la probabilidad.

■

Capítulo 4

Independencia

Entre los hombres dedicados al estudio de la probabilidad, se reconoce a Pierre de Simon Laplace, principalmente por su obra intitulada "Ensayo filosófico sobre las probabilidades", que como mencionamos en el capítulo anterior, tiene el mérito de haber sintetizado y estructurado los resultados que hasta ese momento se tenían sobre la teoría de las probabilidades.

Laplace expone 11 principios, de éstos, 7 se evocan al cálculo de probabilidades, y los restantes al cálculo de esperanzas, tema que veremos en el siguiente capítulo. Aunque no lo mencionamos, en el capítulo anterior tratamos los dos primeros principios, que se refieren al la fórmula clásica y a la probabilidad de la unión de eventos. Por lo cual este capítulo lo dedicaremos exclusivamente al estudio de los principios: tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo.

4.1 Eventos idependientes

El tercer principio de Laplace es el siguiente:

> "Si los eventos son independientes unos de otros, la probabilidad de la existencia de su conjunto es el producto de sus probabilidades particulares."[5]

Podemos percatarnos fácilmente de que en este principio se expone un nuevo término, el de eventos independientes. Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos, no afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Por ejemplo, si tenemos los eventos: obtener *sol* al lanzar una moneda, y obtener *dos* al lanzar un dado, tendremos dos eventos independientes, pues que obtengamos *sol* con la moneda no afectará en nada la probabilidad de obtener *dos* con el dado, y viceversa.

Un ejemplo de eventos que no son independientes es el siguiente: se tiene una urna con 5 bolas blancas y 5 bolas negras, y de ésta extraemos dos bolas sin reposición. Los eventos serán:

Evento A: obtener una bola negra en la primera extracción.

Evento B: obtener una bola blanca en la segunda extracción.

Observemos que la probabilidad del evento A es $5/10$, (casos favorables entre casos totales), pero al calcular la probabilidad del evento B, tendremos que preguntarnos por el resultado de la primera extracción, es decir, la probabilidad del evento B depende del resultado de la primera extracción, por lo tanto los eventos A y B son dependientes, o no independientes.

En el tercer principio se afirma que la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes es el producto de las probabilidades particulares. En nuestro ejemplo (el evento de lanzar una moneda y obtener *sol*, que llamaremos evento S, y el de obtener *dos* al lanzar un dado, que nombraremos evento D), la probabilidad de que ocurran los eventos D y S es

$$P(D \cap S) = P(D)P(S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Como podemor ver el tercer principio expresa cómo calcular la probabilidad de eventos que sabemos son independientes, pero ¿qué sucede si no sabemos si los eventos son independientes? Por lo anterior, suele decirse que n eventos, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, son independientes si cumplen las siguientes condiciones:

Si se toman 2 eventos cualesquiera, A_i y A_j con $i \neq j$, de los n, entonces se debe cumplir que

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Si se toman 3 eventos cualesquiera, A_i, A_j y A_k con $i \neq j \neq k$, de los n, entonces

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k).$$

Así sucesivamente hasta que se confirme la independencia entre los n eventos,

$$P(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Uno de los primeros problemas estudiados referentes al uso del concepto de independencia, fue investigado por diferentes personajes (J. Bernoulli, De Moivre, Laplace, entre otros). El problema es semejante al siguiente: se lanza una moneda n veces ¿Cuál es la probabilidad de obtener k soles? (El valor de k puede ser mayor que o igual a cero pero menor o igual que n).

Para resolver este problema se puede prescindir del concepto de independencia, pero hacer uso de éste nos hará más sencillo el trabajo. Representemos con un 0 el hecho de obtener sol, y con un 1 el hecho de obtener águila. Un posible resultado de nuestro experimento es obtener águila en todos los lanzamientos, y lo podemos representar como

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1, 1}_{n-veces}.$$

El número total de sucesiones compuestas de unos y ceros es 2^n, y cada una de éstas tiene igual probabilidad de ocurrir. Pensemos en un espacio muestral que esté compuesto de 2^n elementos, y obtengamos la probabilidad de que ocurra cada punto muestral. Cada lanzamiento de la moneda es independiente del resto, entonces la probabilidad de cualquier sucesión, o punto muestral, es el producto de las probabilidades de cada lanzamiento, que es

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)}_{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Ya describimos el espacio muestral y obtuvimos la probabilidad de cada punto muestral. Definamos ahora el evento A como aquel en que se obtienen k soles al lanzar n veces una moneda. La probabilidad de A es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales que están contenidos en dicho evento. Para contar los puntos muestrales que están contenidos en A usamos un artificio.

Imaginemos que en una urna tenemos n bolas numeradas con los primeros n números naturales, además tenemos arreglos con n lugares. Extraeremos k bolas de la urna para seleccionar k lugares del arreglo, en estos lugares acomodaremos los k ceros y en los restantes $n-k$ lugares los unos. Para saber cual es el número de sucesiones formadas de k ceros y $n-k$ unos, bajo las anteriores especificaciones, sólo debemos saber de cuantas formas diferentes pueden ser los números que se obtienen en las bolas que se extraen de la urna, como no importa el orden en que las bolas son extraídas, sólo debemos calcular las combinaciones de tamaño k tomadas de un conjunto de tamaño n, que son

$$C_k^n = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-k})!\mathrm{k!}}.$$

Sabemos de cuantos puntos muestrales esta compuesto el evento A, entonces la probabilidad de A la podemos obtener sumando las probabilidades de los puntos muestrales

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{C_k^n} = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Así concluimos que la probabilidad de obtener k soles al lanzar n veces una moneda es

$$P(A) = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4.2 Experimentos Bernoulli

Existe una gran variedad de situaciones o experimentos que tienen sólo dos posibles resultados, a estos se les conoce como: ensayos Bernoulli.

Formalmente los ensayos Bernoulli son una serie de experimentos independientes, donde cada ensayo tiene dos posibles resultados y sus probabilidades permanecen constantes. Se utilizan las letras p y q para representar estas probabilidades, además, se acostumbra decir que los dos posibles resultados son éxito y fracaso. El problema de la moneda es un ejemplo de los ensayos Bernoulli, donde la p y q son iguales.

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que se realizarán n ensayos Bernoulli, la probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es q. ¿Cuál es la probabilidad de obtener k éxitos? En este caso tendremos 2^n sucesiones de éxitos y fracasos, ¿Cuántos de estos contienen exactamente k éxitos y $n-k$ fracasos? Como ya vimos son C_k^n. La probabilidad de cada una de estas sucesiones de eventos independientes es $p^k q^{n-k}$. Así pues, podemos concluir que la probabilidad de obtener k éxitos al realizar n ensayos Bernoulli es

$$P(A) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}.$$

La expresión anterior se conoce como Fórmula de Bernoulli.

Ejemplo 32 *En un examen de opción múltiple, una persona pretende contestar a las diez preguntas de forma aleatoria. Si cada pregunta tiene tres posibles respuestas ¿Cuál es la probabilidad de que la persona acierte en todas las preguntas?*

Pensemos que cada pregunta es un ensayo Bernoulli, donde p es, la probabilidad de acertar, q la probabilidad de fallar, siendo fácil determinar que $p = \frac{1}{3}$

y $q = \frac{2}{3}$. Así, la probabilidad de que la persona acierte a todas las preguntas es

$$P = C_k^n p^k q^{n-k} = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

■

Ejemplo 33 *Al lanzar 5 veces un dado, nos interesa obtener exactamente dos veces un seis en cualquiera de los cinco lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra esto?*

Solución. Sea A el evento en que se obtiene exactamente dos veces seis al lanzar cinco veces un dado. Cada lanzamiento es un ensayo que tiene probabilidad de éxito de 1/6 y probabilidad de fracaso de 5/6. Como sólo nos interesa tener dos éxitos, entonces

$$P(A) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{5!}{(5-2)!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{3} = 0.16075103.$$

■

4.3 Probabilidad condicional

Cuarto principio de Laplace:

> "Cuando dos eventos dependen uno del otro, la probabilidad del evento compuesto es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad de que, habiendo sucedido éste, tenga lugar el otro." [5]

Con el ejemplo de eventos dependientes que expusimos anteriormente mostremos cómo emplear el cuarto principio (una urna con 10 bolas, 5 blancas y 5 negras, donde el evento A es sacar la bola negra en la primera extracción, y el evento B es obtener la bola blanca en la segunda).

Como ya sabemos, el evento A ocurre con probabilidad igual a $\frac{5}{10}$. El evento B depende del resultado de la primera extracción, si ocurrió A, que es lo que nos interesa, la probabilidad de B será $\frac{5}{9}$, pues para la segunda extracción en la urna tendremos 5 bolas blancas y 4 negras. Así, la probabilidad de que ocurran los eventos A y B es

$$P(A)P(B \mid A) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{90}.$$

La expresión $P(B \mid A)$ se lee: probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurrió el evento A. A esta probabilidad se le llama probabilidad condicional.

Quinto principio:

> "Si se calcula a priori la probabilidad de un evento acaecido y la probabilidad de un evento compuesto de éste y de otro que se espera, la segunda probabilidad dividida por la primera constituir la probabilidad del evento esperado, inferida del observado." [5]

El quinto principio es un resultado del cuarto. Matemáticamente lo podemos deducir de la expresión $P(A)P(B \mid A) = P(A \cap B)$ despejando $P(B \mid A)$.

La probabilidad condicional es básicamente una reducción, o reconsideración del espacio muestral debido a que poseemos información referente al fenómeno aleatorio. Por ejemplo, si lanzamos un dado con los ojos vendados y pretendemos adivinar el resultado, pensaremos que cada valor tiene un sexto de probabilidad, pero si alguien nos dice que el resultado es mayor que dos, no tomaremos en cuenta ni al uno ni al dos y pensaremos que cada uno de los cuatro posibles resultados restantes tiene igual probabilidad, es decir, un cuarto.

Sean A y B dos eventos donde $0 < P(B)$, entonces la probabilidad condicional de A dado B, que denotamos como $P(A \mid B)$, se podrá calcular mediante la siguiente fórmula

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 34 *Según una encuesta, el 50 por ciento de una población fuma y el 10 por ciento fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?*

Solución. Definimos: evento A, persona fumadora, evento B, persona que fuma y es hipertensa. Aplicando la fórmula de probabilidad condicional obtenemos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$$

■

Si meditamos un poco sobre la relación que existe entre el concepto de la probabilidad condicional y el de eventos independientes no será difícil llegar a la siguiente conclusión:

Cuando los eventos A y B sean independientes, la probabilidad de A dado B será igual a la probabilidad de A.

Sabemos que dos eventos son independientes si se cumple la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, por anterior es fácil ver que $P(A \mid B) = P(A)$.

Ejemplo 35 *Se lanza una dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener águila con la moneda, cuando sabemos que se obtuvo un seis en el dado?*

Solución. Definimos: evento A, obtener águila con la moneda, evento B, obtener seis con el dado. La probabilidad de de $A \cap B$ es $\frac{1}{12}$ y la probabilidad de B es $\frac{1}{6}$, as, la probabilidad condicional es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad es un medio y es la misma de obtener águila al lanzar la moneda, es decir, el resultado del dado no influye en la moneda.

■

4.4 Regla de probabilidad total

Un acontecimiento puede tener muchas causas, en ocasiones para obtener la probabilidad de un evento dado, es necesario valorar qué tan probable es que se presenten dichas causas; o en su defecto que tan probable es que haya sido consecuencia de cierta causa, si es que el evento ya ocurrió.

Para ello, es necesario una partición del espacio muestral. Pensemos en un conjunto de sucesos, o causas, que denotamos como $B_1, B_2, \ldots, B_n$, y que tendrán las siguientes particularidades:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ para toda i diferente de j.
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$, es decir, las intersecciones de cualquiera dos sucesos, o causas, será siempre el vacio.

Ahora pensemos en un evento A definido en este espacio muestral. La probabilidad del evento A se puede obtener como

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n)P(B_n).$$

A esta fórmula se le conoce como *Regla de probabilidad total.* Para mostrar cómo se obtiene la fórmula, observemos que al evento A lo podemos expresar como $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$, que es la unión de ventos ajenos, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)) \\ P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n). \end{aligned}$$

Observemos que la probabilidad de $A \cap B_1$ la podemos expresar como

$$P(A \mid B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(A \mid B_1)P(B_1) \;=\; P(A \cap B_1).$$

Sustituyendo $P(A \cap B_1)$ por $P(A \mid B_1)P(B_1)$ en cada uno de los elementos de la suma, (cada elemento de la suma se refiere a una B distinta pero el despeje es igual), llegamos a

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n)P(B_n).$$

Ejemplo 36 *En cierto Estado hay tres candidatos para gobernador,A, B y C. Por el contenido de su propaganda se piensa que de llegar el candidato A al gobierno, los impuestos subirán con probabilidad 0.6, en caso de que sea B el candidato ganador, la probabilidad de que los impuestos suban es de 0.4, y si es C es el vencedor la probabilidad es de 0.2. Con base en las últimas encuestas se cree que hasta ahora el candidato A tiene un 50 por ciento de los votos, el candidato B el 30 por ciento y el resto son para el candidato C ¿Cuál es la probabilidad de que suban lo impuestos?*

Solución. Sea K el evento de que suban los impuestos, y las letras A, B y C representan el triunfo de cada uno de los candidatos. Los impuestos tienen una probabilidad diferente de subir para cada candidato, por ejemplo, para el candidato A la podemos expresar como P(K/A), pero antes de esto, tiene que ganar el candidato A , lo que podemos representar como P(A), así, la probabilidad de que los impuestos suban a causa del candidato A es P(K/A)P(A), pues los eventos que acabamos de describir son independientes. Lo anterior es similar con los tres candidatos, así que la probabilidad de que suban los impuestos, que representamos con P(K), es

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \mid A)P(A) + P(K \mid B)P(B) + P(K \mid C)P(C) \\ P(K) &= 0.6(0.5) + 0.4(0.3) + 0.2(0.2) = 0.46. \end{aligned}$$

■

4.5 Teorema de Bayes

Pensando en el ejemplo anterior. Supongamos que fuimos de viaje y nos perdimos las elecciones. Al regresar sabemos que ya han subido los impuestos pero no sabemos quien es el candidato que resultó electo, ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato A sea el gobernador?

La probabilidad que deseamos calcular es $P(A \mid K)$, es decir, estamos buscando la probabilidad de que el candidato ganador sea el A dado que han subido los impuestos. Por la forma en que definimos la probabilidad condicional, y lo obtenido en el ejemplo anterior sabemos que

$$P(A \mid K) = \frac{P(K \cap A)}{P(K)} = \frac{P(K \cap A)}{P(K \mid A)P(A) + P(K \mid B)P(B) + P(K \mid C)P(C))}.$$

La probabilidad de $K \cap A$ la podemos calcular como $P(K \mid A)P(A) = (0.5)(.06) = 0.3$.

La probabilidad de K ya la conocíamos y es 0.46. Así, pues, el resultado que buscamos es

$$P(A \mid K) = \frac{P(0.3)}{P(.046)} = 0.6521.$$

Entonces, dado que subieron los impuestos es muy probable que el candidato A haya sido electo como gobernador.

El problema anterior fue resuelto haciendo uso de un interesante teorema conocido como Teorema de Bayes. El teorema dice lo siguiente:

Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituyen una división del espacio muestral Ω, donde $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A que esté contenido en Ω, se tiene que

$$\begin{aligned} P(B_j \mid A) &= \frac{P(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} \\ &= \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}. \end{aligned}$$

Laplace expone el teorema de Bayes en el sexto de sus principios, y dice lo siguiente:

> "Cada una de las causas a la que puede atribuirse un acontecimiento observado se halla indicada con una verosimilitud tanto mayor cuanto más probable sea que ocurra el acontecimiento si se supone existente dicha causa. La probabilidad de la existencia de cualquiera de estas causa es, pues, una fracción cuyo numerador la probabilidad del acontecimiento resultante de la de la causa en cuestión y cuyo denominador es la suma de las probabilidades semejantes relativas a todas las causas. Si estas distintas causas, consideradas a priori, son desigualmente probables, entonces, en lugar de la probabilidad del acontecimiento resultante de cada causa, debemos emplear el producto de dicha probabilidad, por la de la causa misma. Este es el principio fundamental de la rama del análisis del azar que consiste en remontarse de los acontecimientos a las causas."[5]

Ya hemos estudiado los seis principios básicos que expone Laplace en su ensayo filosófico de las probabilidades. A continuación veremos algunos ejemplos y en el siguiente capítulo, y último, revisaremos el concepto de esperanza.

4.6 Ejemplos

Ejemplo 37 *En una cárcel hay tres prisioneros, que llamaremos A, B y C, dos de ellos serán liberados sin importar el crimen que hayan cometido, pero los prisioneros desconocen quienes son los favorecidos. El carcelero, que es amigo de A, tiene la información. A le pregunta al carcelero si será liberado, el carcelero no piensa que sea buena idea decírselo, pero accede a informarle el nombre de un prisionero que quedará libre, (C o B). A rechaza esta propuesta argumentando que antes de saber quien es el otro prisionero que será liberado, el tiene una probabilidad de $2/3$ de quedar libre, pero al saber el nombre su probabilidad disminuiría a $1/2$. El prisionero argumenta su postura de la siguiente forma: al ser tres los prisioneros, A, B y C, las posibles parejas de liberados son AB, AC o BC. Al ser 3 las posibles parejas,* *y al estar A en 2 de ellas, la probabilidad de que salga es de 2/3, pero al saber A si B, por ejemplo, será liberado, habría sólo dos posibles parejas, AB o BC, por lo tanto la probabilidad de A disminuiría a 1/2. ¿Será cierto lo que argumenta el prisionero A?*

Solución. El espacio muestral del problema anterior es $\{AB, AC, BC\}$. Los puntos muestrales son igualmente probables, el prisionero A tiene razón al decir que su probabilidad de ser liberado es de $2/3$. Sin embargo, al hacer los cálculos tomando en cuenta la información brindada por el carcelero comete errores; el prisionero A no contempla el hecho de que el carcelero puede dar las respuestas B o C, con diferentes probabilidades, y estas dependerán de la pareja que sea liberada. Por ejemplo, si la pareja liberada es AB el carcelero mencionará a B con probabilidad 1, pues no puede mencionar a A, mientras que si la pareja liberada es BC, entonces el carcelero mencionará a B con probabilidad $1/2$. El nuevo espacio muestral, tomando en consideración la información que proporciona el carcelero, consta de los cuatro casos siguientes:

1. AB son liberados y el carcelero dice B.
2. AC son liberados y el carcelero dice C.
3. BC son liberados y el carcelero dice B.
4. BC son liberados y el carcelero dice C.

En el caso 1, al ser liberados A y B, lo cual ocurre con una probabilidad de $1/3$, el carcelero se verá obligado a mencionar a B. Por lo tanto la probabilidad de que ocurra el caso 1 es de $1/3$. El caso 2 es similar al 1, y ocurre con probabilidad igual a $1/3$.

En el caso 3 la pareja BC es liberada con una probabilidad de $1/3$, pero el carcelero tendrá dos posibles alternativas a saber B y C, por lo tanto dirá B con probabilidad $1/2$, así que la probabilidad de que ocurra el caso 3 es de $(1/3)(1/2) = 1/6$. La situación es similar en el caso 4.

Al calcular la probabilidad de que el prisionero A salga de prisión dado que el carcelero menciona que B será liberado obtenemos que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Mostrando así que la probabilidad de que A sea liberado, dado que A sabe que B será liberado, es la misma que cuando lo desconoce.

■

Ejemplo 38 *Ian Hacking, según escribe en su libro, "El surgimiento de la probabilidad"*[1]*, expresa que si alguien puede resolver el siguiente problema es que sabe bastante de probabilidades.*

Un hombre tiene 37 cerillos en una caja en su bolsillo izquierdo y 21 en una caja en su bolsillo derecho, toma cualquiera de las cajas al azar y utiliza un cerillos ¿cuál es la probabilidad de que llegue a un punto en que tenga un fósforo en cada bolsillo?

Solución. Denotemos con una I el evento de que el hombre seleccione el bolsillo izquierdo para sacar de este la caja de cerillos, de forma similar usaremos la letra D para la bolsa derecha. Del enunciado sabemos que

$$P(I) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

Lo que se desea es tener al final un cerillo en cada caja. En total tenemos $37 + 21 = 58$ cerillos, de los cuales debemos utilizar 56, cuidando que los 2 restantes no estén en la misma caja, pensemos en A como el evento que acabamos de describir.

Para resolver este problema, nos auxiliaremos del probelma d ela moneda. Pensemos en lanzar 56 veces una moneda que tiene una I en una de sus caras y en la otra una D, deseamos que al lanzar la moneda obtengamos 36 veces la I y 20 D, por lo tanto

$$P(A) \;=\; C^{56}_{36}\left(\frac{1}{2}\right)^{36}\left(\frac{1}{2}\right)^{56-36}$$

[1] Ian Hacking, El surgimiento de la probabilidad, 1995.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{56!}{(56-36)!36!}\left(\frac{1}{2}\right)^{36}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\
&= 0.01090258.
\end{aligned}
$$

Así pues, la probabilidad de que al final haya un cerrillo en cada caja es 0.01090258, y al parecer, ya sabemos un poco de probabilidad.

Ejemplo 39 *En el capítulo 1 enunciamos el problema de la división, que trataba lo siguiente: dos personas, que llamaremos A y B, apuestan 30 monedas cada una. El ganador será aquel que primero acumule cuatro partidas ganadas, las partidas pueden ser, por ejemplo, lanzamientos de monedas. En cierta etapa del juego, donde A tiene ganadas dos partidas y B sólo una, el juego debe ser cancelado ¿Cómo debe entonces repartirse el dinero si no se concluyó el juego?*

Solución. Con A_i denotemos la probabilidad de que A gane la partida i, y con A_i^c que la pierda, donde i puede tomar los valores 1, 2 ó 3, pues de seguir el juego después de tres partidas seguro tendríamos un ganador.

Existen tres formas o combinaciones que dan el triunfo a A; si A gana la primera partida, o si pierde la primera y gana la segunda, o si pierde la primera y la segunda y gana la tercera. Lo anterior lo podemos expresar en términos de probabilidad como sigue:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{7}{8}.
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que A gane es de $7/8$, por lo tanto la cantidad acumulada debe dividirse en 8 partes y entregarle 7 de estas al jugador A. ■

Ejemplo 40 *En una urna hay tres bolas azules, tres blancas y tres rojas. Se sacan dos bolas una tras otra, sin reposición. Dado que en la segunda extracción se obtuvo una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido roja? Lo anterior suponiendo que por alguna razón no sabemos lo que se obtuvo en la primera extracción.*

Solución. Denotemos con Ai el hecho de que en la extracción i se obtuvo una bola azul, con $i = 1, 2$. De forma similar usaremos Bi y Ri. Por ejemplo, $B2$ denota que obtuvimos una bola blanca en la segunda extracción.

Lo que deseamos calcular es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, $R1$, dado que la segunda fue blanca, $B2$, es decir

$$\begin{aligned}
P(R1 \mid B2) &= \frac{P(R1 \cap B2)}{P(B2)} \\
&= \frac{P(B2 \mid R1)P(R1)}{P(B2 \mid R1)P(R1) + P(B2 \mid A1)P(A1) + P(B2 \mid B1)P(B1)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right)} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Observación: $P(B2)$ es la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga un bola blanca, notemos que no se dice nada de la primera extracción, podemos suponer fue una bola azul, y que la segunda fue blanca, lo anterior lo podemos representar como $P(B2 \cap R1) = P(B2 \mid R1)P(R1)$. Al ser tres los posibles colores para la primera extracción llegamos a que

$$P(B2) = P(B2 \mid R1)P(R1) + P(B2 \mid A1)P(A1) + P(B2 \mid B1)P(B1).$$

■

Ejemplo 41 *Pensemos nuevamente en una urna con tres bolas rojas, tres azules y tres blancas. Se sacan dos bolas, sin reemplazo. En la primera extracción se obtuvo una bola que no es roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción se obtenga una bola blanca?*

Solución. Con la notación que definimos en el ejemplo anterior, podemos representar la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca, $B2$, dado que la primera no fue roja, $A1$ unión $B1$, como sigue

$$\begin{aligned}
P(B2 \mid A1 \cup B1) &= \frac{P\Big(B2 \cap (A1 \cup B1)\Big)}{P(A1 \cup B1)} \\
&= \frac{P(B2 \cap A1) + P(B2 \cap B1)}{P(A1) + P(B1)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{6}{9}} \\
&= \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Así concluimos que la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga una bola blanca dado que en la primera extracción se obtuvo una bola que no es roja es $5/16$.

■

Ejemplo 42 *Problema del taxi. Un taxi se vio envuelto en un choque nocturno de "pega y corre". Existen dos compañías de taxis en la ciudad, la compañía de taxis azules y la compañía de taxis verdes. Se sabe que el 85 por ciento de los taxis de la ciudad son verdes y 15 por ciento azules. Un testigo de la escena identificó el taxi que participó en el accidente como azul. Este testigo fue probado bajo similares condiciones de visibilidad e hizo las identificaciones correctas del color en el 80 por ciento de las instancias de prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente fuera azul y no verde?*

Solución. Este problema (extraído del libro de J. Michael Shaughnessy [8]), puede causar confusión. Michael Shaughnessy menciona que incluso personas que ya han estudiado probabilidad, tienen dificultad para resolver problemas como el del taxi. Antes de leer la solución se recomienda tratar de resolverlo, aunque no se llegue a la solución.

Intuitivamente ¿cuál es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente fuera azul? Se ha hecho el experimento de preguntar, a estudiantes y maestros, por un resultado intuitivo para este problema, y las respuestas tienden a ser 0.8, es decir, se desprecia la información relacionada con la proporción de taxis azules y verdes que hay en la ciudad, y se guían sólo por la información que brinda el testigo.

La solucion al problema que se propone es la siguiente. Supongamos que se hace una prueba con 1000 taxis, según lo enunciado en el problema, el testigo identificará el color correctamente de un 80 por ciento, es decir, se espera que de los 150 taxis azules que hay en la prueba, identificará a 120 como azules y se equivocará en 30 ocasiones diciendo que son verdes; para los taxis azules sucede lo mismo, se equivocará en 170 ocasiones identificando a los taxis verdes como azules y en 680 acertará. Con lo anterior podemos construir el siguiente cuadro.

	Azul	Verde
150 Azul	120 acierta	30
850 Verde	170	680 acierta
	290	710

Para saber cual es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente sea azul, debemos fijarnos en el total de taxis que el testigo identifica como azules y compararlo con el número de estos que realmente son azules. Por lo tanto la probabilidad de que el taxi que participó en el accidentes sea azul es de 120/290=0.4137. Notemos que el hecho de tomar a mil taxis como prueba no afecta en nada el resultado.

Otra forma de solucionar el problema es haciendo uso del teorema de Bayes. La partición del espacio muestral estará constituida por los eventos V y A, es decir, por taxis verdes y azules. Tenemos que calcular la probabilidad de que el taxi haya sido azul dado que el testigo lo identifico como azul, es decir, $P(A \mid TA)$, donde TA representa el hecho de que el testigo haya identificado al taxi como azul. Haciendo uso del teorema de Bayes tenemos que

$$P(A \mid TA) = \frac{P(A \cap TA)}{P(A \cap TA) + P(V \cap TA)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(A)P(TA \mid A)}{P(A)P(TA \mid A) + P(V)P(TA \mid V)} \\
&= \frac{(0.15)(0.8)}{(0.15)(0.8) + (0.85)(0.2)} \\
&= 0.4137.
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que el taxi haya sido azul dado que el testigo lo identificó como azul, es 0.41 y no 0.8 como algunos piensan.

■

Ejemplo 43 *Un argumento en favor de La Divina Providencia mediante el uso de la teoría de la probabilidad de John Arbuthnot.[3]*

John Arbuthnot compara el número de niños y niñas bautizados entre los años de 1629 y 1710, observando que en estos 82 años el número de niños supera al de las niñas, es decir, que nacen más niños que niñas. Al suponer que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma, es decir un medio, es extraño que durante estos 82 años el nacimiento de niños sea superior. Pensemos que en cada año puede haber más hombres o mujeres con la misma probabilidad, entonces la probabilidad de que en cada uno de los 82 años hayan nacido más hombres que mujeres es

$$\frac{1}{2^{82}} = \frac{1}{4835703278458521669882970 4}.$$

La probabilidad es muy pequeña, por lo que Arbuthnot atribuye el hecho de que nazcan más hombres que mujeres a una intervención Divina. Él argumenta que al ser los hombres los que van a las guerras, y en general que sus labores son más peligrosas, hay más probabilidad de muerte para ellos, así que para compensarlo nacen más hombres que mujeres. Lo cual resulta un ingenioso argumento, y es, de hecho, la primer prueba de hipótesis estadística que se haya publicado.

■

Capítulo 5

Esperanza

Cuando decidimos comprar un boleto para una rifa o apostamos en un juego de azar estamos cambiando nuestro dinero, o el bien que apostemos, por el derecho a esperar lo que el azar nos pueda devolver, pero esperando ganancias, claro está. La esperanza es, dicen algunos, algo que no debemos perder. Los pioneros en los estudios de probabilidad, no se conformaron con no perderla, sino que quisieron cuantificarla o mediarla, y con base en ésta tomar decisiones.

5.1 Esperanza matemática

En la teoría de la probabilidad también existe el concepto de la esperanza que se conoce como "esperanza matemática". La palabra que se utilizó para definir la esperanza fue *expectatio*, que es una palabra en latín, de allí viene el término en inglés *expectation*, que se utiliza en lugar del término *hope* (esperanza). Básicamente la esperanza matemática es un promedio ponderado mediante la probabilidad de cada uno de los posibles resultados de un experimento.

Entre los primeros escritos que se tienen sobre alguna idea intuitiva de la esperanza están los de Cardano [3], donde se expone una relación entre la cantidad apostada y las posibilidades de ganar. Por ejemplo, si dos jugadores,

A y B, compiten para ganar un cantidad M de monedas, donde M se forma con contribuciones equitativas de A y B, entonces las posibilidades de ganar, para cada jugador también deberán ser iguales; de no ser así alguno de los jugadores tendrá ventaja, es decir, alguno tendrá mayor esperanza de ganar.

Quien por primera vez expuso de manera concreta el concepto de esperanza fue un joven holandés de nombre Christian Huygens, (1629-1695) [3]. Él explica que, si bien en los juegos de azar los resultados son inciertos, la esperanza que tiene un jugador de perder o ganar es un valor calculable e invariable si persisten las condiciones del juego. La idea de Huygens se expone en la siguiente proposición.

Si el número de los azares que hay a favor de b es p, y el número de azares que hay a favor de c es q, eso vale tanto como si tuviéramos

$$\frac{bp+cq}{p+q}.$$

Si reinterpretamos la fórmula de Huygens podemos llegar a una expresión como

$$\frac{bp+cq}{p+q} = b\frac{p}{p+q} + c\frac{q}{p+q} = b(p) + c(q).$$

Aunque en el teorema de Huygens no se especifica, suponemos que $p + q$ suma uno. Si se está tratando de un problema de apuestas, las letras b y c representan pérdida y ganancia de un jugador y los cocientes son las probabilidades de que ocurra b o c.

Podemos reescribir esta proposición para un experimento aleatorio que tenga infinidad de posibles resultados.

Si un experimento aleatorio puede tomar los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y conocemos las probabilidades de cada uno de estos valores, entonces la esperanza de este experimento aleatorio que llamaremos X es

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Para ejemplificar, supongamos que dos jugadores, A y B, compiten por un premio de 10 monedas de oro, de las cuales cada jugador aportó 5. Por experiencia se cree que la probabilidad de ganar para A es de $6/10$, y la de B es $4/10$. Por lo tanto la esperanza de A es

$$E(A) = (5)\frac{6}{10} + (-5)\frac{4}{10} = 3 - 2 = 1.$$

Y la esperanza de B es

$$E(A) = (5)\frac{4}{10} + (-5)\frac{6}{10} = 2 - 3 = -1.$$

En todos los problemas donde participen dos jugadores, y la cantidad de dinero que esté en juego sea contribución de los dos, la esperanza será simétrica, a menos de que ambas sean cero.

La esperanza de A es de 1, pero ¿cómo se interpreta esto? Para Huygens la esperanza matemática es la utilidad promedio que se obtiene al realizar una serie de juegos bajo las mismas condiciones. Es decir, si los jugadores realizaran 50 juegos, se esperaría que al final A obtenga una ganancia de $50 \times 1 = 50$ monedas. La anterior es una buena interpretación de la esperanza, ¿pero qué sucede si sólo se juega una vez? Existe un problema, y es que al efectuar sólo un juego, es imposible que el jugador obtenga una ganancia de 1 moneda, pues pierde sus 5 monedas o gana las 5 del adversario, así que aquí tenemos un problema en dicha interpretación.

Otro enfoque para la esperanza es el que usa Pascal, éste relaciona la esperanza matemática con derechos sobre la cantidad apostada. Recordemos el problema de la división y resolvámoslo usando el concepto de esperanza matemática. Supongamos que son 20 las monedas que están en juego, son dos los jugadores, A y B. Para que gane A debe obtener una partida, por su parte B debe obtener 3, la probabilidad de ganar una partida es un medio para cada jugador. Bajo los supuestos anteriores podemos obtener la probabilidad de ganar para cada jugador. Sea A_i el evento en el que A gana la partida i, con $i = 1, 2, 3$, y A_i^c el evento en que pierde la partida. La probabilidad de que A gane el juego es

$$P(A) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Entonces la esperanza de A es

$$E(A) = (10)\frac{7}{8} + (-10)\frac{1}{8} = \frac{60}{8} = 7.5.$$

La esperanza de A es 7.5, esto es, la ganancia promedio que tendrá en caso de continuar con el juego. El dinero que gana el jugador A lo pierde B, por lo tanto, B deberá pagar 7.5 monedas de las 10 que en un principio apostó.

Con el concepto de esperanza podemos mostrar de una forma más sencilla cuando un juego es justo. Paradójicamente un juego será justo cuando la esperanza sea cero para cada jugador. Es decir, si la teoría se refleja en la practica, después de una noche completa de estar jugando, cada jugador se irá a casa con su dinero y ni una moneda más. La siguiente ecuación representa la situación típica en un juego de azar que se supone es justo

$$E(A) = bp - aq = 0.$$

$$bp = aq.$$

Donde p es la probabilidad de que A gane el juego, q es la probabilidad de que pierda, a es la cantidad que puede perder y b la que puede ganar. Observemos que $bp = aq$ refleja la idea intuitiva de esperanza que manejaba Cardano; si la probabilidad de un jugador es un medio, éste debe aportar la mitad del monto que está en juego, si la probabilidad de ganar es menor que un medio deberá contribuir con un cantidad menor a la mitad del monto apostado, es decir, se debe cumplir una relación entre la cantidad que aporta el jugador y la probabilidad que tenga de ganar.

5.2 Paradoja de San Petersburgo

La esperanza puede tomar valores negativos o positivos y hasta llegar a ser un valor infinito; por ejemplo, en la Paradoja de San Petersburgo se muestra una situación en la que la esperanza es infinita. Este problema fue planteado por el matemático suizo Nicolás Bernoulli en 1713, y posteriormente modificado y publicado por su sobrino Daniel Bernoulli en las *Transactions* de la Academia de San Petersburgo, Rusia[4].

Podemos describir la situación que genera una esperanza infinita como sigue: Un hombre dadivoso, un rey por ejemplo, decide regalar monedas de oro a uno de sus súbditos, ¿cuántas monedas? Eso dependerá de la suerte. El rey le ofrece al plebeyo dos opciones: una es tomar todas las monedas que pueda guardar en sus bolsillos e irse con ellas, que podrían ser 100 aproximadamente; la otra, más interesante, es el pago de 2^n monedas de oro, donde n es el número de lanzamientos de una moneda hasta que se obtenga cruz. Por ejemplo, si en el primer lanzamiento se obtiene cruz, el rey entregará 2 monedas de oro, si es en el segundo lanzamiento el rey entregará 4 monedas, etc. Así, todas las posibles cantidades en monedas de oro, que el rey puede regalar al plebeyo, están contempladas en la siguiente sucesión

$$2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$$

Representemos con X la cantidad de monedas de oro que el rey regala al plebeyo mediante la opción dos. La probabilidad de que X sea igual a 2 es $\frac{1}{2}$, pues es la misma que obtener cruz en el primer lanzamiento. Para que X sea igual a 4, el plebeyo debe obtener cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo, cada uno de estos sucesos ocurre con probabilidad igual a $\frac{1}{2}$, y al ser eventos independientes, la probabilidad de que ocurran ambos es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Es fácil deducir que la probabilidad de que X sea igual a 2^n es $\frac{1}{2^n}$, es decir, $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

Para obtener la ganancia promedio del plebeyo, si éste decide elegir la opción dos, debemos calcular la esperanza de X. Recordemos que la esperanza de un experimento aleatorio, es la suma de los valores que puede tener el experimento, ponderados mediante la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos. Es decir,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} \\
&= 2\frac{1}{2} + \frac{4}{1}4 + 8\frac{1}{8} + \ldots \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Si el plebeyo opta por la opción uno, la de llenar sus bolsillos con monedas de oro, ganará aproximadamente 100 monedas. Con la otra opción, la de lanzar una moneda hasta obtener cruz, se espera que gane ¡una infinidad de monedas de oro! El plebeyo no tendrá que pensar mucho para elegir una de las opciones ¡una infinidad de monedas de oro!... Yo tomaría las monedas que pudiera guardar en mis bolsillos.

¿Por qué no elegir la opción dos? El primer argumento en contra es que, el número de monedas que el rey tiene, seguramente es finito, (exceptuando el caso en que sea un rey mago). Y podemos pensar que ciertamente no hay una ganancia infinita, pero el resultado nos augura que ganaremos una cantidad grande de monedas, veamos el siguiente argumento para desengañarnos.

Con la opción dos no hay forma de ganar 100 monedas pero un número próximo es 128, para esto se debe obtener cruz hasta el séptimo lanzamiento, la probabilidad de que ocurra esto es $P(X = 7) = \frac{1}{2^7} = 0.0078125$, es decir, ocurre aproximadamente 8 de cada 1000 veces. Es decir, la probabilidad de ganar una cantidad de monedas similar lo que se puede ganar con la primera opción es muy pequeña.

Podemos ser un poco más persistentes y argumentar que la probabilidad que debemos calcular para la segunda opción es la de obtener una ganancia mayor o igual a 128 monedas, y al hacerlo obtenemos que

$$
P(X \geq 128) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 4) + \ldots + P(X = 64)]
$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 0.984375 \\ &= 0.015625. \end{aligned}$$

Lo que podemos interpretar como tener 1.5 oportunidades de 100 para obtener una ganancia mayor con la segunda opción. Así que definitivamente es mejor la primera opción.

Recordemos, pues, que el valor que puede tomar la esperanza matemática es cualquier número real, pero hay que hacer nuestras interpretaciones con cuidado.

5.3 Suma de precios justos

Huygens da por válidos varios principios de la teoría de la esperanza, por ejemplo que los precios justos son aditivos. Supongamos que participamos en dos loterías, en la primera el premio es 1000 pesos, el número de boletos es 100, y en la otra hay 500 boletos y el premio es de 10000 pesos. Para que una lotería sea justa el valor del boleto debe ser igual al premio entre el número de boletos, por lo tanto el costo por boleto en la primera lotería es de 10 pesos y en la otra lotería de 20 pesos. Como las loterías son justas si compramos un boleto para cada una de ellas estaremos nuevamente en una situación de juego justo.

Representemos con X la situación de participar en la primera lotería y con Y en la segunda, entonces tenemos que

$$E(X) + E(Y) = E(X + Y).$$

Un juego es justo si la esperanza es cero, las loterías X y Y tienen esperanza cero: En la lotería X podemos ganar 990 pesos, 1000 menos los 10 que pagamos, con probabilidad $1/100$, y perdemos 10 con probabilidad $99/100$.

$$E(X) = (990)\frac{1}{100} + (-10)\frac{99}{100} = 9.9 - 9.9 = 0.$$

De forma análoga para Y, tenemos

$$E(Y) = (9980)\frac{1}{500} + (-20)\frac{499}{500} = 19.96 - 19.96 = 0.$$

Con lo anterior podemos verificar que $E(X) + E(Y) = 0$.

Para obtener la probabilidad de $E(X+Y)$ primero debemos entender lo que significa $X + Y$. Con X representamos un experimento aleatorio, en este caso la primera lotería, la cual puede tener dos resultados: ganar 990 pesos o perder 10, y a cada uno de estos le asociamos una probabilidad. Semejante para la segunda lotería. No hay que complicarnos mucho, pensemos en un nuevo experimento Z, los valores que puede tomar Z son los posibles resultados de jugar en las dos loterías, es decir, todas las posibles combinaciones de $X + Y$.

$$Z = \begin{cases} -10 + (-20) = -30 & \text{si } X = -10 \text{ y } Y = -20, \\ -10 + 9980 = 9970 & \text{si } X = -10 \text{ y } Y = 9980, \\ 970 + (-20) = 970 & \text{si } X = 970 \text{ y } Y = -20, \\ 990 + (9980 = 10970 & \text{si } X = 970 \text{ y } Y = 9980. \end{cases}$$

hemos construido el espacio muestral de Z, por lo que Z puede tomar 1 de 4 valores: -30, 9970, 970 ó 10970. La probabilidad de cada uno de los puntos muestrales es

$$\begin{aligned} P(Z = -30) &= P(X = -10, Y = -20) \\ &= P(X = -10)P(Y = -20) \\ &= \left(\frac{99}{100}\frac{499}{500}\right) \\ &= 0.98802, \end{aligned}$$

$$P(Z = 9970) = \left(\frac{99}{100}\frac{1}{500}\right) = 0.00198,$$

$$P(Z = 9970) = \left(\frac{1}{100}\frac{499}{500}\right) = 0.00998,$$

$$P(Z = 10970) = \left(\frac{1}{100}\frac{1}{500}\right) = 0.00002.$$

Ya definimos el espacio muestral de Z, y asociadomos una probabilidad a cada uno de los puntos muestrales. En base a lo anterior es relativamente fácil obtener la esperanza de Z.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= E(Z) \\ &= (-30)(0.98802) + 9970(0.00198) + 997(0.00998)10970(0.00002) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior confirma que la suma de precios justos es también un precio justo. Además la igualdad

$$E(X) + E(Y) = E(X+Y),$$

se cumple siempre.

5.4 Ejemplos

Ejemplo 44 *Una persona puede elegir entre dos opciones para que le salden una deuda de 100 pesos. La primera opción es recibir los 100 pesos, la segunda es recibir un boleto para una rifa de 1000 pesos, en total son 10 boletos. ¿Cuál es la mejor opción?*

Solución. Utilizando al concepto de esperanza podemos tomar la mejor decisión. La esperanza de la primera opción es de 100. Para obtener la esperanza en la segunda opción primero obtengamos la probabilidad de que gane los 900 pesos (1000 menos los 100 que le debían), y la de que pierda sus 100 pesos.

$$P(\text{ganar 900 pesos}) = \frac{1}{10}$$
$$P(\text{perder 100 pesos}) = \frac{9}{10}.$$

La esperanza de la segunda opción es

$$E(X) = (900)\frac{1}{10} + (-100)\frac{9}{10} = 90 - 90 = 0.$$

Como en la segunda opción su esperanza es cero, será mejor que pida que le sean pagados sus 100 pesos.

En la conclusión anterior se esta cometiendo un error ¿cuál es? En realidad la esperanza para la primera opción, quedarse con los 100 pesos, no es 100, sino cero, ¿por qué? Observemos que la esperanza que obtuvimos para la segunda opción, es para calcular la ganancia esperada, y la ganancia esperada es cero, al igual que en la primera opción. Al ser las dos esperanzas iguales a cero, debemos entender que se espera que no ganemos y perdamos nada en ambos casos, sin embargo hay que diferenciar que en un caso tenemos comprada una oportunidad para ganar 1000 pesos, y en el otro caso tenemos los 100 en efectivo. Así, pues, en teoría las dos opciones son "iguales".

■

Ejemplo 45 *La ruleta que se usa para apostar en los casinos consta de 38 áreas identificadas por los números del 1 al 36 y los símbolos 0 y 00. Los jugadores apuestan a uno de los 36 números y en caso de que salga su número reciben 36 veces lo que hayan apostado. La casa siempre gana cuando sale el 0 y el 00. ¿Cuál es la ganancia promedio del jugador?*

Solución. Pensemos que la apuesta del jugador es de una moneda. El jugador ganará 35 monedas con probabilidad $1/38$, y perderá su moneda con probabilidad $37/38$, así la esperanza para el jugador es

$$E(\text{jugador}) = (-1)P(\text{pierda}) + (35)P(\text{gane}) = -\frac{37}{38} + \frac{35}{38} = -\frac{2}{38}.$$

La esperanza del jugador es de -2/38, que es aproximadamente - 0.052, y se espera que pierda aproximadamente 5.2 por ciento de su dinero.

■

Ejemplo 46 *Alicia se encuentra prisionera en una habitación con cuatro puertas idénticas. Detrás de cada puerta se esconde un duende. Alicia tendrá que abrir las puertas para conocer a cada uno de los duendes, una vez que lo logre será libre. Sin embargo, existe un problema, y es que los duendes pueden moverse, es decir, cambiar de puerta, excepto el duende de la última puerta que Alicia abrió. ¿Cuál es el número esperado de veces que Alicia tendrá que abrir las puertas para poder conocer a los cuatro duendes y ser libre?*

Solución. Sea N el número de veces que Alicia abre las puertas. N se puede calcular como

$$N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

donde X_1 representa el número de puertas que Alicia abre hasta conocer al primer duende, X_2 el número de puertas que abre hasta conocer al segundo duende, etc.

Debemos calcular $E(N)$, o calcular $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$, para conocer el número esperado de veces que Alicia debe abrir las puertas. Recordemos el principio que Huygens aplica en las loterías donde se muestra que $E(X) + E(Y) = E(X + Y)$, y apliquémoslo a este problema para llegar a la siguiente igualdad.

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4).$$

La esperanza de X_1 es 1, lo anterior se debe al hecho de que cuando Alicia abra la primera puerta seguro conocerá a un duende. Como el duende que se encuentra detrás de la puerta que Alicia recién abrió no puede moverse, en su segundo intento Alicia seguramente conocerá a un nuevo duende, por lo que la esperanza de X_2 es también 1.

Hasta aquí todo marcha bien, pero para conocer al tercer duende empiezan los problemas. Al abandonar la segunda puerta Alicia debe elegir una de las tres restantes y al hacerlo no necesariamente conocerá a un nuevo duende, pues de los tres restantes ya conoce a uno. Para obtener la esperanza de X_3 describamos su espacio muestral y asignémosle a cada elemento su probabilidad.

Denotemos con una F el hecho de que en su siguiente intento Alicia falle y no conozca a un nuevo duende, y con una C el hecho de que tenga éxito y conozca a un nuevo duende. Puede ser que Alicia al abrir la siguiente puerta conozca a un nuevo duende, o puede ser que no, es más puede abrir diez o más veces las puertas sin conocer al duende diferente. Lo anterior lo podemos representar con las siguientes cadenas de F's y una C.

Cadena de intentos.	Número de intentos (k)
C	k = 1
F C	k = 2
F F C	k = 3
...F F C	Pueden ser infinitos

Ya describimos el espacio muestral, ahora para asignar probabilidades supongamos que cada vez que Alicia elige una puerta lo hace de manera independiente. Expresemos con la letra p la probabilidad de conocer a un nuevo duende y con la letra q la probabilidad del complemento, es decir, q es la probabilidad de no conocer a un nuevo duende. Por ejemplo, la probabilidad de que Alicia conozca al tercer duende en su primer intento es

$$P(X_3 = 1) = p.$$

Para que Alicia conozca al tercer duende en su segundo intento, en el primer intento debe fallar y esto curre con probabilidad q, y en el segundo debe tener éxito, y esto ocurre con probabilidad p.

$$P(X_3 = 2) = qp.$$

La fórmula para que Alicia conozca al tercer duende hasta el intento k es

$$P(X_3 = k) = q^{k-1}p.$$

Es decir, *k-1* fracasos antes del primer éxito. Para obtener la esperanza aplicamos la fórmula y llegamos a

$$E(X_3) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_3 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p.$$

Desarrollando la última suma obtenemos

$$E(X_3) = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots \tag{5.1}$$

Si multiplicamos (5.1) por q

$$q(E(X_3)) = q(p+2qp+3q^2p+4q^3p+\dots) = qp+2q^2p+3q^3p+4q^4p+\dots \tag{5.2}$$

Al restar (5.1) menos (5.2) obtenemos

$$E(X_3) - q[E(X_3)] = p + qp + q^2p + q^3 \dots$$

Enfoquemos nuestra atención sólo en la parte derecha de la última expresión para mostrar que $p + qp + q^2p + q^3 \dots$ es igual a uno. Para empezar sea $S = p + qp + q^2p + q^3 \dots$.

Si multiplicamos S por q obtenemos

$$qS = qp + 2q^2p + 3q^3p + 4q^4p \dots$$

Ahora restemos S menos qS.

$$S - qS = p.$$

Despejando S

$$S - qS = S(1-q) = p$$

$$S = \frac{p}{1-q}.$$

Pero como sabemos que $(1-q) = p$, entonces

$$S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Sabiendo que $p + qp + q^2p + q^3 \ldots = 1$, entonces

$$E(X_3) - q(E(X_3) = p + qp + q^2p + q^3 \ldots = 1$$

$$E(X_3) - q(E(X_3) = 1$$

$$E(X_3)(1-q) = 1$$

$$E(X_3) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

La probabilidad de conocer a un nuevo duende, dado que son tres las posibles puertas y ya conocemos a uno, es de $2/3$, es decir, $p = 2/3$ y $q = 1/3$, sustituyendo el valor de p llegamos a

$$E(X_3) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

La esperanza de X_4 se obtiene procediendo análogamente, la única variante es el valor de p, que será igual a $1/3$, es decir, la esperanza de X_4 es

$$E(X_4) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Así, pues, podemos concluir que el número promedio de veces que Alicia debe abrir las puertas para conocer a los cuatro duendes es

$$E(N) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 1 + 1 + \frac{3}{2} + 3 = 6.5.$$

■

Conclusiones

El objetivo principal del presente texto es trasmitir conocimiento e ideas sobre la teoría de la probabilidad. Como consecuencia de esto, la mayoría de las conclusiones que obtuve están orientadas a la forma en que desarrollé los conceptos básicos de dicha teoría.

A través de la escritura del presente texto se ha logrado constatar algunos de los supuestos que exponen los investigadores de la enseñanza de la probabilidad, basándome principalmente en la discusión con diversas personas de algunos de los ejemplos que presento, y observando los razonamientos que se utilizaron para resolverlos. Resalta que en muchos casos uno de los errores más recurrentes es el no hacer distinción entre el tamaño del experimento. Por ejemplo, al preguntar a una persona por la probabilidad de obtener cinco veces sol al lanzar una moneda diez veces, generalmente se obtiene una respuesta similar a la que nos daría si preguntásemos por la probabilidad de obtener cincuenta veces sol al lanzar cien veces una moneda, siendo que estas dos probabilidades son distintas. A este fenómeno se le conoce como representatividad.

Para solucionar problemas de enseñanza como el de la representatividad, una posibilidad es la de escribir textos cortos que se centren en los dificultades que se han identificado, y se pongan al alcance de los estudiantes de bachillerato y licenciatura. Lo anterior puede funcionar no sólo para la enseñanza de la probabilidad, sino de todas las áreas del conocimiento.

Algunas de las características que propongo para estos textos cortos son: que se utilice el menor número posible de expresiones matemáticas, que se interpreten los resultados obtenidos y los razonamientos que se utilizaron, que se ofrezca más de una solución a los problemas planteados y, si es posible, soluciones erróneas que parecieran ser correctas para así mostrar al estudiante el razonamiento erróneo en el que se puede incurrir.

En este texto desarrollé algunas de las propuestas anteriores, mas aún creo que es mucho lo que se puede hacer. Me gustaría en un futuro, hacer una investigación donde pudiera encontrar los principales temas o conceptos de probabilidad con los que los estudiantes de bachillerato tienen problemas y probar diferentes formas de explicar esos conceptos, para posteriormente elaborar un texto más didáctico.

Bibliografía

[1] Blom, Gunnar, Holst Lars, Sandell Dennis. *Problems and snapshots from the world of probability.* Springer-Verlag, 1994 .

[2] Borel, Émile, *Las probabilidades y la vida.* Oikos-tau, Barcelona, 1971.

[3] De Mora, Charles Marisol. *Los inicios de la teoría de la probabilidad: siglos XVI y XVII.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Pais Vasco, 1972.

[4] Hacking, Ian. *El surgimiento de la probabilidad.* Gedisa, 1995.

[5] Laplace, Pierre Simon Márques de. *Ensayo filosófico de las probabilidades.* Alianza Editorial Mexicana, S.A., México, 1988.

[6] Pérez Seguí, María Luisa. *Combinatoria.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2000.

[7] Rincón Mejía, Hugo Alberto. *Cuando cuentes cuántos...* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

[8] Shaughnessy, J. Michael. *Investigación en probabilidad y estadística: Reflexiones y orientaciones.* Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, 1972.

[9] Vilenkin, N., *¿De cuántas formas? (Combinatoria).* Editorial Mir, Moscú, 1972.

Introducción

En el presente trabajo de tesis se desarrollan algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad haciendo énfasis en la intuición, los aspectos históricos y procurando que las ideas y notación utilizados parezcan más simples y naturales, en contraste con la forma en que tradicionalmente se presentan en los libros de texto usuales. La idea de un escrito de esta naturaleza surgió a partir de la percepción del autor en el sentido de que la probabilidad es enseñada en los cursos regulares de una forma poco natural, con medianos o altos niveles de abstracción, y poca o nula atención a los aspectos intuitivos e históricos de los conceptos. Muy posiblemente los altos niveles de reprobación y el bajo nivel de entendimiento de las ideas elementales de esta parte de las matemáticas pueda ser explicado por la forma poco natural en la que se presentan sus conceptos y definiciones. En este trabajo se plantean, explican y revisan algunos de estos conceptos con el fin de motivar y mejorar su entendimiento.

El texto esta dirigido a estudiantes de nivel medio superior y superior, y al público en general con cierto entrenamiento en el manejo de fórmulas matemáticas. El objetivo es atraer la atención hacia el estudio de los fenómenos probabilísticos, y fomentar tres habilidades principales: utilizar algunas de las técnicas de conteo, aplicar las fórmulas para calcular probabilidades e interpretar los resultados.

El trabajo está dividido en cinco capítulos. En el primero se describen los orígenes de la teoría de la probabilidad y se resaltan algunas de las aportaciones de Gerolamo Cardano, Galileo Galilei, Pierre de Fermat y Blaise Pascal. El segundo capítulo se centra en la descripción de las técnicas de conteo básicas para la resolución de problemas de probabilidad, y se proporcionan algunos ejemplos de su aplicación. En el tercer capítulo se presentan tres formas o fórmulas para calcular la probabilidad de eventos, así como la terminología que se utiliza en la teoría de la probabilidad. En el cuarto capítulo se introduce el concepto de independencia probabilista, así como algunas de las fórmulas o teoremas como el de Bayes, de probabilidad total y de Bernoulli. Por último, en el capítulo cinco se estudia el concepto de esperanza matemática.

Para realizar este trabajo han sido utilizados algunos escritos relacionados con la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. En estos escritos se exponen algunas dificultades principales que tienen las personas para resolver e interpretar problemas de esta disciplina, y que han sido identificadas por psicólogos y matemáticos, entre otros, en sus investigaciones. Así, en los ejemplos que se presentan en este trabajo, se hace hincapié en que el lector reconozca los razonamientos erróneos que a menudo son usados en la percepción, entendimiento e interpretación de algunos conceptos y resultados de la probabilidad.

Capítulo 1

Inicios

Los aleatorizadores más antiguos que se conocen son los astrágalos o huesos de taba. Estos instrumentos del azar eran huesos del talón de algún animal como el caballo, los cuales estaban conformados de tal manera que al ser lanzados sobre una superficie uniforme se pudieran obtener cuatro resultados; la peor tirada era llamada perro, tenía un valor de 1, la cara opuesta era llamada Venus, que tenía un valor de 6 puntos y era la mejor tirada. Los astrágalos son la versión primitiva de lo que hoy conocemos como dados, cuya existencia se remonta, por lo menos, 3000 años antes de Cristo, por ello han estado presentes en muchas culturas y épocas de la historia.

Existen muchos pasajes históricos donde se utilizan los dados para jugar y apostar. Por ejemplo, en el tercer libro de la epopeya hindú el Mahábarata, se narra la historia de Nala, el cual es poseído por Kala, un semidios de los dados, provocando con esto que Nala pierda su reino jugando y apostando. Después de vagar por algunos años, Nala se encuentra con Rtuparna, quien presume de sus habilidades matemáticas, afirmando que en dos grandes ramas de un árbol hay un cierto número de hojas y frutos. Para hacer esta afirmación Rtuparna cuenta las hojas y los frutos de una pequeña rama. Nala pasa toda una noche contando para verificar lo que Rtuparna afirma, quedando sorprendido por su exactitud. En una traducción hecha por H. H Milman [1860, p 76] se puede leer lo que dice Rtuparna acerca de sus habilidades: "Yo de los dados poseo su ciencia y así en los números diestro soy".

Así pues, el dado es el utensilio por excelencia en los juegos de azar, y de ahí que los primeros escritos que se pueden asociar al surgimiento de estudios de probabilidad se encuentren tan relacionados con éste.

1.1 Gerolamo Cardano

La obra de Cardano *Liber de Ludo Aleae*[3], escrita aproximadamente en 1564, es considerada como uno de los primeros intentos para descifrar los misterios que envolvían al principal utensilio de los juegos de azar: el dado.

Antes de iniciar con el aspecto matemático, veamos algunas de las frases que muestran la ideología que presenta Cardano en su obra.

> "[...] cuanto mayor es la apuesta mayor es el deshonor" [...][3]

> "[...] nunca es tan grande la ganancia del victorioso como la pérdida del vencido"[3]

> "[...] lo mismo sucede si el Fritillo recibe la luz de la parte opuesta, esto es perjudicial pues perturba la mente [...] también se dice que es beneficioso si se toma posición frente a la luna en máximo ascenso."

En principio, podemos decir que la obra de Cardano refleja su pasión por el juego, las apuestas y sus experiencias en este ámbito. Es importante ver el vínculo que Cardano crea entre las matemáticas, la moral y los juegos, pues siendo él un jugador, busca que los juegos sean justos y que las cantidades apostadas no reflejen codicia más que diversión o pasión. De la última cita donde se hace referencia a la posición de la luna, podemos suponer un cierto grado de "fe" por alguna divinidad que intercede a favor de algunos, a esto le llamaríamos suerte.

En general, lo que se espera de un juego de azar es que sea justo, y cuando se utilizan los dados para obtener un triunfador, los jugadores se preocupan

Figura 1.1: Gerolamo Cardano.

porque el número de combinaciones que dan el triunfo a cada jugador sea el mismo. Cardano observa esto y lo denomina *igualdad*. Con base en dicho término analizaremos dos propuestas que presenta en su obra.

Propuesta 1: La *igualdad* se encontrará si lanzamos un dado y tratamos de obtener un número impar o un número par.

Sabemos que un dado tiene seis lados o caras. Cada lado está marcado con uno de los seis primeros números naturales 1, 2, 3, 4, 5 ó 6. La mitad de los números son pares y la otra mitad impares, por lo anterior resulta lógico pensar que, si el dado no está cargado para ninguna de sus caras, la *igualdad* que plantea Cardano es cierta, es decir, existe la misma posibilidad de obtener un número impar o uno par.

Propuesta 2: Si lanzamos tres veces un dado tendremos la *igualdad* si nuestro objetivo es obtener un número en particular. Por ejemplo, si queremos obtener un 2 y tenemos tres oportunidades para lanzar el dado, estaremos en una igualdad de posibilidades respecto a que obtengamos el 2 o no lo hagamos.

¿Cómo podemos confirmar la certeza o falsedad de la afirmación anterior? Cardano hace esta afirmación en el capítulo noveno, llamado *Del lanzamiento de un dado*, y hace el siguiente razonamiento.

> "[. . .] la igualdad se encuentra siempre en la mitad de los números, y así un punto sale con tres tiradas pues en seis se completa la revolución [. . .]"

Parece lógico pensar que al lanzar tres veces un dado obtendremos la *igualdad*, sin embargo, si quisiéramos defender esta propuesta ¿qué podemos argumentar? Supongamos que al lanzar el dado tres veces se obtienen tres números diferentes, que es la mitad del total, en éstos puede estar o no el número deseado. Como tenemos la mitad de los números, podemos decir que se tiene la igualdad. Claro está que no siempre al lanzar un dado tres veces se obtienen tres números diferentes. Por lo cual, todo el argumento anterior es falso y, al parecer, la propuesta también.

En capítulos subsecuentes de su libro, Cardano corrige sus disertaciones con respecto al lanzamiento de los dados y los resultados cambian. Ya no toma como eje de comparación la *igualdad*, sino que hace ver que algunos eventos pueden ocurrir con más frecuencia que otros. Debido a lo extenso del procedimiento para mostrar lo anterior, dejaremos a Cardano para desplazarnos un poco en el tiempo y llegar al siglo XVII.

1.2 Galileo Galilei

Alrededor de 1615, otro importante científico estudiaba ya los posibles resultados al lanzar los dados. Se trataba de un matemático, físico y astrónomo, nacido en Pisa, Italia, que llevaba por nombre *Galileo Galilei (1564-1642).* Galileo mostró de una forma más clara que Cardano, los posibles resultados de lanzar uno, dos y tres dados. Y, al igual que Cardano, no propone o enuncia ningún concepto de probabilidad (de hecho, este término no se utiliza en su obra).

Los estudios de Galileo referentes al azar se enfocan a los juegos, en particular en aquellos donde se emplean dados. Al lanzar los dados, se apuesta a poder obtener cierta combinación con dos o más dados; por ejemplo, podemos apostar que obtendremos un 5 y un 6 al lanzar dos dados. De esta forma apostaban algunas personas en la época de Galileo, y fue por eso que él estudió las posibilidades de estas combinaciones. Para hacerlo, simplemente se

Figura 1.2: Galileo Galilei(1564-1642).

apoyó en contabilizar los casos con que se obtenía cierta combinación y los comparó con el total de casos. Con ello, Galileo comienza a buscar formas o técnicas para el conteo de todos lo posibles casos resultantes de lanzar uno, dos o tres dados.

Para poder contar los posibles casos resultantes del lanzamiento de un dado no se necesita mucho esfuerzo, son seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pero, contar los casos posibles al lanzar dos dados, simultáneamente o uno después de otro, representa una tarea ligeramente más compleja. Los casos posibles son 36, y el mismo Galileo explica por qué.

> "[...] pero si nosotros arrojamos el segundo dado, que también tiene otras seis caras, junto con el primero, podemos hacer 36 tiradas diferentes entre sí puesto que cada una del primer dado puede emparejarse con cualquiera del segundo [...]"[1]

Para ejemplificar, supongamos que lanzamos los dos dados. En el primero obtenemos un 2. El segundo puede mostrar cualquiera de sus seis caras originando alguna de las siguientes combinaciones, escritas en paréntesis como:

$$(2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6).$$

[1]Sopra le scoperte dei dadi(Sobre las tiradas de dados)[3].

El resultado anterior es válido cuando obtenemos el 2 en el primer dado -y decimos "el primer dado" sólo para distinguirlos-, pero, como podemos obtener cualquiera de los 6 números en ese "primer dado", entonces el total de casos posibles es

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Por lo anterior, sabemos que al lanzar dos dados los posibles resultados son 36. ¿Y qué sucede si lanzamos tres dados? Veamos qué dice Galileo:

> "[...]y si añadimos un tercer dado, como cada una de sus 6 caras se pueden emparejar con una de las 36 tiradas de los otros dos dados, tendremos que las tiradas de tres dados serán 6 veces 36, es decir 216, todas diferentes entre sí[...][3]"

Uno de los juegos de azar en los que se utilizaban los dados consistía en lanzar dos dados y obtener una suma determinada, por ejemplo un 7, que es resultado de obtener un 5 y un 2, o un 4 y un 3. Los apostadores pensaban que algunos números eran más fáciles de obtener que otros, pero no sabían por qué. Galileo mostró con tres dados y de una manera clara la causa de este fenómeno numérico. Nosotros usaremos sólo dos dados para hacer más simple la explicación.

Las posibles sumas al lanzar dos dados son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Si alguien nos propusiera apostar a un número resultado de la suma de los dados, ¿cuál elegiríamos? Muchos incautos perdieron todo su dinero por no saber que no todos las sumas tienen las mismas posibilidades de ocurrir. Para no acabar como alguno de ellos, veamos qué hizo Galileo.

En la siguiente tabla, en la primera y tercera columna, describimos todos los posibles resultados de lanzar los dados. En las columnas segunda y cuarta están las sumas para cada uno de los casos.

Resultado al lanzar los dados	Suma	Resultado al lanzar los dados	Suma
(1,1)	2	(4,1)	5
(1,2)	3	(4,2)	6
(1,3)	4	(4,3)	7
(1,4)	5	(4,4)	8
(1,5)	6	(4,5)	9
(1,6)	7	(4,6)	10
(2,1)	3	(5,1)	6
(2,2)	4	(5,2)	7
(2,3)	5	(5,3)	8
(2,4)	6	(5,4)	9
(2,5)	7	(5,5)	10
(2,6)	8	(5,6)	11
(3,1)	4	(6,1)	7
(3,2)	5	(6,2)	8
(3,3)	6	(6,3)	9
(3,4)	7	(6,4)	10
(3,5)	8	(6,5)	11
(3,6)	9	(6,6)	12

Para obtener por suma un 2 necesariamente debemos conseguir un doble uno al lanzar los dados, pero para otras casos existen más combinaciones. Veamos cuantas combinaciones producen cada una de las sumas en la siguiente tabla.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de combinaciones	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Así, podemos confirmar que hay sumas que son más fáciles de obtener que otras. Las más difíciles de obtener son 2 y 12, pues sólo hay una combinación que produce a cada una de ellas. La suma más sencilla de obtener es 7, pues es resultado de seis combinaciones.

Ejemplo 1 *Supongamos que estamos en una mesa de juego de algún lujoso castillo del siglo XVII. En esta mesa se encuentra un caballero elegante que* *nos propone una apuesta. La apuesta consiste en que él puede obtener como suma, al lanzar dos dados, un número mayor o igual que 7; de conseguirlo, nosotros le daremos 5 monedas, de lo contrario él tendrá que pagarnos dicha cantidad.*

Utilizando las tablas anteriores, podemos ver que al aceptar la apuesta tendriamos desventaja, pues de las 36 posibles combinaciones de puntos, 21 suman un número mayor o igual que 7; mientras que sólo 15 suman lo contrario. Por lo tanto "la suerte" no estaría de nuestro lado y no sería una buena idea aceptar la apuesta del astuto caballero.

Dejemos a Galileo, de quien debemos recordar, entre otras cosas, que logró contar los posibles resultados de lanzar los dados y hacer comparaciones entre diferentes combinaciones o eventos.

1.3 Correspondencia

Durante el siglo XVII algunas personas dedicadas a las matemáticas intercambiaban sus ideas y descubrimientos por correspondencia. Entre los personajes que utilizaban este medio para difundir su pensamiento encontramos a *Pierre de Fermat (1601-1665)* y *Blaise Pascal (1623-1662)*.

Estos dos grandes genios de su época lograron resolver un problema relacionado con los juegos de azar conocido como el problema de la división. Este problema trata de lo siguiente: dos personas, que llamaremos A y B, apuestan 30 monedas en un juego donde el ganador será el primero que logre vencer en 10 partidas. Sin embargo, un evento inesperado provoca que los jugadores tengan que cancelar el juego. Hasta ese momento A tenía ganadas 9 partida, y B sólo 7. ¿Cómo debe entonces repartirse el dinero si no se concluyó el juego?

El problema de la división era conocido antes de que nacieran Pascal y Fermat, sin embargo, nadie lo había podido resolver. En el siglo XVI *Giobattista Francesco Peverone* propuso una solución. Textualmente la propuesta de Peverone es la siguiente:

Figura 1.3: Pierre de Fermat (1601-1665).

> "[...] al que ha ganado siete le faltan tres, igualmente al que ha ganado nueve de diez le falta uno, la progresión de tres es seis, la de uno es uno; por lo tanto, dividiendo el depósito en siete partes, seis le tocan al segundo y una parte al primero [...]"[2]

La solución anterior es falsa pero muy próxima a la correcta. Un pequeño error fue lo que hizo que Peverone no haya pasado a la historia como el que lograra encontrar la solución al problema de la división. Para ver cuál es la respuesta correcta hagamos uso de lo escrito por Fermat.

La propuesta de Fermat consiste en contar todas las posibles combinaciones de resultados que se pueden dar entre los dos jugadores en caso de seguir con las partidas, contar en cuántas ganaría A y en cuántas B y, basados en esto, calcular una proporción. Supongamos el caso donde son diez las partidas a ganar, A tiene ganadas nueve mientras que B sólo siete. Por ejemplo, una posible solución es que A gane la siguiente partida y finalice el juego, pues llegaría a diez partidas ganadas, o que B gane una partida y luego A y

[2]De la obra de Peverone intitulada "Dos breves y fáciles tratados, el uno de aritmética, el otro de geometría, en los que están contenidas algunas cosas nuevas, divertidas y útiles, tanto para gentilhombres como para artesanos."[3]

finalice el juego. No es difícil ver que con un máximo de tres partidas jugadas tendremos un ganador. En la siguiente tabla se muestran todos resultados posibles de las partidas, si se continúa con el juego.

Primera partida	a	a	a	a	b	b	b	b
Segunda partida	a	a	b	b	a	a	b	b
Tercera partida	a	b	a	b	a	b	a	b
Ganador	A	A	A	A	A	A	A	B

Se representa con una "a" el hecho de que A ganó la partida y con "b" que la partida fue ganada por B. Como podemos ver, del total de posibilidades en 7 ocasiones A gana el juego, por lo tanto el dinero de la apuesta deberá repartirse en una proporción de 7 a 1. Es decir, como son 8 los posibles "caminos" que podría seguir el juego, y en 7 de ellos gana A, lo justo sería repartir la apuesta en 8 partes iguales y darle 7 de éstas a A y el resto a B.

La solución anterior fue muy discutida por Pascal, quien argumentaba, en una de las cartas que escribe a Fermat, que no todas las posibles combinaciones eran reales, por ejemplo, la combinación "a, a, b" no tiene sentido real puesto que si A gana una partida inmediatamente finaliza el juego, y no tiene sentido ver quién gana las dos siguientes. Además propone como ejemplo, para demostrar que el método de Fermat no es correcto, el caso de tres jugadores, A, B y C. En su ejemplo, A necesita una partida para ganar, mientras que B y C necesitan dos, respectivamente. Pascal, siguiendo el método de Fermat, dice que la solución sería la que se muestra en la siguiente tabla.

	Primera partida	**Segunda partida**	**Tercera partida**			
1	a	a	a	A		
2	a	a	b	A		
3	a	a	c	A		
4	a	b	a	A		
5	a	b	b	A	B	
6	a	b	c	A		
7	a	c	a	A		
8	a	c	b	A		
9	b	c	c	A		C
10	b	a	a	A		
11	b	a	b	A	B	
12	b	a	c	A		
13	b	b	a	A	B	
14	b	b	b		B	
15	b	b	c		B	
16	b	c	a	A		
17	b	c	b		B	
18	b	c	c			C
19	c	a	a	A		
20	c	a	b	A		
21	c	a	c	A		C
22	c	b	a	A		
23	c	b	b		B	
24	c	b	c			C
25	c	c	a	A		C
26	c	c	b			C
27	c	c	c			C

Las combinaciones posibles son 27. Pascal, según la tabla anterior, da 19 combinaciones con triunfo para A, 7 para B y 7 para C. Con este razonamiento, Pascal escribe lo siguiente:

Figura 1.4: Blaise Pascal (1623-1662).

> "[...] si de aquí se concluyera que hay que dar a cada uno según la proporción 19, 7, 7, se cometería un error demasiado grosero, [...]"[3]

Pascal observa que una misma combinación da el triunfo a dos personas, por ejemplo la combinación a, c, c, en la que A obtiene la partida que le hace ganar y C obtiene las dos partidas que igualmente lo hacen ganar. De esta forma, Pascal afirma que esa combinación debe ser dividida entre los dos, es decir, un medio para A y un medio para B. Al hacer la suma de esa manera llega a la conclusión de que la repartición debe ser con una proporción de 16 de 27 para A y 5.5 de 27 para cada uno de los dos restantes. Pero no nos adelantemos a los hechos pues este tampoco es el resultado correcto.

Hoy en día, algunos estudiosos del tema opinan que tal vez Pascal no entendía el procedimiento de Fermat y es por eso que argumentaba en contra de dicha solución, pues tenía otra forma de llegar al resultado correcto (que dicho sea de paso, no expone en la carta, quizás debido al resentimiento que sentía al verse superado en su propia área por alguien que ni siquiera era un matemático de formación, pues cabe mencionar que Fermat no estudió matemáticas sino leyes, pero era tan grande su capacidad para los cálculos

[3] Carta de Pascal a Fermat, lunes, 24 de agosto de 1654.[3]

matemáticos que algunos le consideraban uno de los más grandes genios del siglo XVII).

Como es de suponer, Fermat defiende su método y responde a Pascal lo siguiente:

> "[...] no encuentro más que 17 combinaciones para el primero y 5 para cada uno de los otros dos; pues cuando dice Vd. que la combinación acc es buena para el primero y para el tercero, parece no recordar que todo lo que se hace después de que uno de los jugadores ha ganado, ya no sirve para nada. Puesto que esta combinación ha hecho ganar al primero desde la primera partida, ¿qué importa que el tercero gane dos a continuación ya que, aunque ganase treinta, todo eso sería superfluo? [...]"[4]

Además, Fermat argumentaba que el hecho de escribir las combinaciones de las tres partidas sólo es para facilitar el conteo de las posibilidades.

La respuesta que da Fermat, que es 17 de 27 para el jugador A, y 5 de 27 para cada uno de B y C, es la correcta. Pascal también había obtenido dicha solución, pero con otro método.

Para terminar, cabe aclarar que, como lo menciona Fermat, su método sirve para contabilizar de una forma sencilla todas las posibilidades que pueden darse en el problema de la división, pero si pretendemos ser rigurosos, como lo hizo Pascal, podemos advertir el defecto de encontrarnos con combinaciones que no tienen sentido en la realidad, pero si se estipulan las condiciones necesarias, que ya hemos visto, el método es sencillo y claro.

En capítulos siguientes resolveremos el problema de la división de una forma más simple.

[4]Fermat a Pascal, viernes 25 de septiembre de 1654.[3]

Capítulo 2

Combinatoria

Al enfrentar el problema de saber por qué algunos eventos suceden con mayor o menor frecuencia, se observa una actitud recurrente, la de contar. Cardano, Pascal, Fermat, Galileo, todos coincidieron en ello.

Contar, de la forma en que lo hicieron Pascal y Fermat, se convirtió en algo innovador y útil, a tal grado que surgió una nueva rama de las matemáticas, **la combinatoria**, que es un conjunto de técnicas enfocadas a los problemas sobre saber contar las distintas combinaciones que, sometidas a unas u otras condiciones, se pueden formar con objetos dados.

Es por lo anterior que este capítulo lo destinaremos para aprender algunas de las fórmulas que se utilizan para contar.

2.1 Regla de la multiplicación

¿Por qué contar una por una las casillas del tablero de ajedrez, si contando las casillas que hay horizontal y verticalmente, y multiplicando estos números, obtenemos el número total de casillas?

En efecto, multiplicando el número de casillas horizontales del tablero de ajedrez, por el número casillas verticales, $8 \times 8 = 64$, obtenemos el mismo resultado que si contamos cada una de las casillas.

La multiplicación es el primer recurso que usamos para contar de una forma más simple, o rápida. Además es el principio fundamental de la combinatoria, y se conoce como **la regla de la multiplicación**.

Regla de la multiplicación. Esta regla establece que, al realizar una tarea A con n posibles resultados distintos y después una tarea B que puede tener m resultados diferentes, los posibles resultados de realizar ambas tareas en el orden indicado son $n \times m$.

La palabra "tarea", que utilizamos para enunciar la regla de la multiplicación, puede sustituirse por otras como "experimento", o cualquier otra que se adapte a la situación.

Ejemplo 2 *¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar un dado y una moneda?*

Solución. Parece que después de leer lo que hizo Galileo esta pregunta resulta un tanto sencilla, pero obtendremos la respuesta para ejercitar el uso de la regla de la multiplicación. Supongamos que la tarea A consiste en lanzar el dado y la tarea B en lanzar la moneda. De A se pueden obtener 6 resultados, mientras que de B sólo 2, entonces $6 \times 2 = 12$ es el total de resultados posibles al realizar la tarea A y B.

■

Tenemos muchas formas de representar los posibles resultados al realizar una o varias tarea. Por ejemplo, mediante el empleo de paréntesis. Los paréntesis se utilizan para encerrar o asociar las tareas que deseamos representar. Abrimos los paréntesis y escribimos los resultados de las tareas separándolos mediante comas. Utilizando paréntesis, los resultados de las tareas A y B se representan de la siguiente forma:

(1, águila), (1, sol),
(2, águila), (2, sol),
(3, águila), (3, sol),
(4, águila), (4, sol),
(5, águila), (5, sol),
(6, águila), (6, sol).

Otra forma de representar los posibles resultados es el diagrama de árbol (figura 2.1).

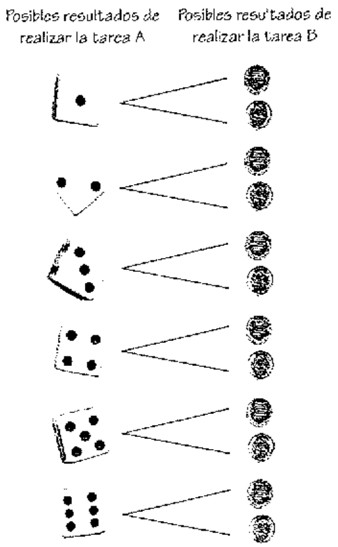


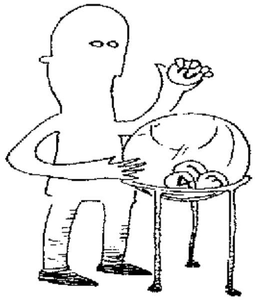
Figura 2.1: Diagrama de árbol

Usaremos la palabra arreglo para referirnos a cada uno de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar una o varias tareas, y los representaremos como fue descrito anteriormente.

2.2 Técnicas de conteo

A continuación veremos algunos problemas de conteo, daremos una solución a cada problema utilizando la regla de la multiplicación y, a partir de las soluciones, expondremos algunas fórmulas que nos serán muy útiles.

Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Extraemos al azar dos bolas, una por una. Notemos que el orden importa. Al extraer la primera bola registramos el número de ésta y la devolvemos a la urna, así podrá ser contemplada como un posible resultado de la segunda extracción ¿Cuáles son



todos los posibles resultados al realizar este experimento? Podemos representar los resultados con arreglos de tamaño dos. Cada uno de los lugares del arreglo puede tomar 1 de 4 valores, 1, 2, 3 ó 4, utilizando la regla de la multiplicación sabemos que son 16 los posibles resultados. Los podemos representar como sigue

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4). \end{array}$$

Si en un arreglo de tamaño k, cada uno de los k lugares del arreglo toma uno de n valores, sin importar que algún valor aparezca más de una vez, e incluso con la posibilidad de repetirse en los k lugares, entonces se esta hablando de *arreglos con repetición.*

Arreglos con repetición. El número de arreglos con repetición de tamaño k, donde cada lugar del arreglo puede tomar uno de n valores, es k^n

Los siguientes son algunos ejemplos de problemas de conteo que podemos solucionar usando los arreglos con repetición:

1. ¿Cuáles son los posibles resultados de lanzar un dado tres veces. *Solución.* Necesitamos tres lugares para representar el resultado de cada uno de los tres dados, es decir, $k = 3$. Son seis los posibles resultados del dado,

entonces $n = 6$: El total de posibles resultados al lanzar tres dados es $6^3 = 216$.

2. ¿Cuáles son los posibles resultados al lanzar 5 veces una moneda. *Solución.* Para este caso $k = 5$ y $n = 6$, el resultado es $2^5 = 32$.

Regresemos al problema de la urna y modifiquémoslo un poco. En lugar de devolver la bola en la primera extracción, la dejaremos fuera de la urna para que ya no pueda ser un posible resultado de la segunda extracción. ¿Cuántos son los posibles resultados o arreglos bajo esta consideración?

De nuevo tenemos arreglos de tamaño dos. En el primer lugar del arreglo anotamos el resultado de la primera extracción, este lugar puede tomar uno de cuatro valores. En la segunda extracción, cuyo resultado anotamos en el segundo lugar del arreglo, sólo podemos obtener tres valores, pues sólo hay tres bolas en la urna. Por lo tanto, el número de arreglos en este caso es 12.

$$\begin{array}{cccc}
\cancel{(1,1)} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
(2,1) & \cancel{(2,2)} & (2,3) & (2,4) \\
(3,1) & (3,2) & \cancel{(3,3)} & (3,4) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & \cancel{(4,4)}
\end{array}$$

Si en un arreglo de tamaño k, el primer lugar puede tomar uno de n valores, y el segundo puede tomar uno de n - *1* valores, excluyendo el valor que ya fue asignado al lugar uno, y así sucesivamente hasta el lugar k que puede tomar uno de n - *(*k - *1)* valores exceptuando los k - *1* valores ya asignados a los anteriores k - *1* lugares, entonces estaremos hablando de *arreglos sin repetición.*

Arreglos sin repetición. El número de arreglos de tamaño k sin repetición, tomados de un conjunto de n valores es: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times [n-(k-1)]$.

Los siguientes son algunos problemas de conteo que podemos solucionar usando los arreglos sin repetición:

1. Seleccionar al presidente y vicepresidente de un club de entre 10 personas. *Solución* 10×9.

2. ¿Cuántas banderas tricolores se pueden formar si se dispone de cuatro colores? *Solución* $4 \times 3 \times 2$.

Si en los arreglos sin repetición k es igual a n, tenemos un caso particular que se conoce como *Permutaciones*. La fórmula para las permutaciones es $n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1$, lo cual se suele denotar con $n!$, y se lee n *factorial*. Entonces $n!$ es el total de formas, pensando en el orden, en que se pueden colocar n objetos.

1. Cuál es el total de formas en que se pueden asignar tres tareas diferentes a tres obreros? *Solución* $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

2. El número de permutaciones de cuatro letras diferentes. *Solución* $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Nuevamente modifiquemos el problema de la urna para mostrar otra situación. Hagamos dos extracciones sin reposición. El orden de las extracciones no es importante. Puede ser que extraigamos las dos bolas al mismo tiempo. El orden en que registramos los resultados de cada extracción tampoco es importante. ¿Cuántos son los posibles resultados de este experimento?

En el caso de los arreglos sin repetición obtuvimos 12 posibilidades, notemos que en éstos hay elementos como (1,2) y (2,1) que son distintos por el orden, pero ahora ya no importa el orden, por lo que de los 12 arreglos sin repetición sólo nos interesan 6.

$$\begin{array}{cccc}
\cancel{(1,1)} & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\
\cancel{(2,1)} & \cancel{(2,2)} & (2,3) & (2,4) \\
\cancel{(3,1)} & \cancel{(3,2)} & \cancel{(3,3)} & (3,4) \\
\cancel{(4,1)} & \cancel{(4,2)} & \cancel{(4,3)} & \cancel{(4,4)}
\end{array}$$

Los resultados de problemas de este tipo, donde *no hay reposición y no importa el orden*, se conocen como *combinaciones*.

Si deseamos obtener una fórmula para calcular el número de combinaciones debemos observar que éstas tienen una relación con los arreglos sin repetición, por cada combinación de tamaño k existen $k!$ arreglos sin repetición. Es decir, el número de combinaciones se obtiene dividiendo el número de arreglos sin repetición entre el número de arreglos que se forman con los k elementos.

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}.$$

Combinaciones. El número de combinaciones de tamaño k tomadas de un grupo de n objetos distintos es

$$C_k^n = \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}}{\mathrm{(k!)}}\left(\frac{\mathrm{(n-k)!}}{\mathrm{(n-k)!}}\right) = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(n-k)!k!}}.$$

Cuando establecimos las diferentes situaciones para extraer las dos bolas de la urna, fijamos nuestra atención en dos circunstancias especialmente; considerar el orden en que se extraían las bolas, y si había o no reposición. En base a estas dos circunstancias, podemos dividir algunos de los problemas de conteo en uno de cuatro grupos. En la siguiente tabla se pueden distinguir los cuatro grupos, además, se presentan las fórmulas que pueden utilizarse cuando de un grupo de n elementos se toman k.

	Sin reposición	**Con reposición**
Sin orden	$C_k^n = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(n-k)!k!}}$	$C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{\mathrm{(n+k-1)!}}{\mathrm{n!(k-1)!}}$
Con orden	$n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]$	k^n

En el caso de que haya reposición y no importe el orden al extraer las bolas de la urna, la fórmula que se presenta será explicada en el ejemplo 12.

2.3 Ejemplos

Ejemplo 3 *¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas en una mesa redonda con 5 asientos?*

Solución. En este problema nos interesa la posición de las personas respecto a las demás. Elijamos un lugar de los 5 y asignémoslo a algunas de las personas. Ahora, a la derecha de esta persona podemos sentar a cualquiera de las 4 restantes, y luego a la derecha de esta última persona podemos sentar a una de las tres restantes, así hasta que asignemos un lugar a cada una de las personas. En total tenemos 4! formas de sentar a 5 personas en un mesa redonda con 5 asientos.

■

Ejemplo 4 *Un grupo de 15 soldados, al que llamaremos grupo beta, hará un entrenamiento para combate cuerpo a cuerpo. Se efectuarán enfrentamientos entre dos personas. Si cada uno de los 15 soldados debe enfrentarse con los 14 restantes, ¿cuántos combates se deben realizar?*

Solución. Para cada combate debemos elegir a 2 de los 15 soldados. En cada combate un soldado no se puede enfrentar a él mismo, así que estamos en una situación donde no hay reposición. Además, no importa el orden en que se seleccionan a los dos soldados para el enfrentamiento. Como tenemos las condiciones de que no hay reposición y el orden no importa, entonces el número de posibles enfrentamientos es igual a las combinaciones de tamaño 2 tomadas de un conjunto de tamaño 15, es decir,

$$C_2^{15} = \frac{15!}{(15-2)!(2!)} = 105.$$

■

Ejemplo 5 *En una de tantas misiones secretas del grupo beta, los 15 soldados deben separarse en dos equipos, uno con 5 soldados y el otro con 10. ¿De cuántas formas se pueden hacer los equipos?*

Solución. Observemos que basta con formar un equipo, el otro se formará automáticamente con los soldados restantes. Pensemos en el equipo de 10 integrantes. La situación es como la de una urna con 15 bolas, de la cual sacaremos 10 bolas, sin reposición, pues un soldado no puede ser asignado dos veces, y no importa el orden. Es decir, el número de equipos que se pueden formar es igual a las combinaciones de tamaño 10 tomadas de un conjunto de 15 objetos.

$$C_{10}^{15} = \frac{15!}{(15-10)!(10!)} = 3,003.$$

Son 3,003 las formas en que se pueden formar los equipos. Verifiquemos que el resultado es el mismo si en lugar de ocuparnos en formar el equipo de 10 soldados elegimos el de 5.

$$C_{5}^{15} = \frac{15!}{(15-5)!(5!)} = 3,003.$$

Por lo anterior, y como se muestra a continuación, sabemos que

$$C_k^n = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-k})!(\mathrm{k!})} = \frac{\mathrm{n!}}{[\mathrm{n-(n-k)}]!(\mathrm{n-k!})} = C_{n-k}^n.$$

∎

Ejemplo 6 *En efecto, el grupo beta se dividió en dos equipos. Al equipo de 5 soldados le corresponde recuperar las joyas de la Reina, que están en una bóveda secreta. Un soplón les informó que para abrir la bóveda deben teclear un código de acceso que consta de 5 letras (h, z, r, i, a), estas letras deben forman el nombre de una moneda de 20 centavos que circulaba en Buenos Aires alrededor de 1929, lo anterior es según un cuento del escritor Jorge Luis Borges*[1]. *Como los soldados no saben de qué moneda es, y no han leído "El Aleph", es probable que tengan que hacer muchos intentos antes de poder abrir la bóveda ¿Cuál es el número máximo de intentos que podrían hacer?*

[1] Poeta, cuentista y ensayista, nacido en Buenos Aires, Argentina, en el año de 1899.

Solución. Para elegir la primera letra tenemos 5 opciones, para la segunda 4, para la tercera 3, para la cuarta 2 y para la quinta una. El número de intentos que pueden realizar es igual al número de arreglos sin repetición de tamaño 5 tomados de un conjunto de 5 elementos, o permutaciones de tamaño 5.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Por lo tanto, los soldados pueden hacer hasta 120 intentos para abrir la bóveda. Por cierto, la moneda a la cual se hace referencia en el ejemplo anterior, según un cuento de Jorge Luis Borges, se conocía con el nombre de Zahir.

■

Ejemplo 7 *Al segundo equipo le fue asignada la misión de capturar a Juan, conocido contrabandista de joyas, que se presume está disfrutando de unas vacaciones en las Vegas. Los soldados se encuentran en un casino mientras esperan noticias. Para no fastidiarse con la espera los soldados observan cómo la gente juega al cubilete, y uno de ellos se pregunta: ¿Cuántos son todos los posibles resultados de una tirada de los dados en el cubilete?*

Solución. En el cubilete se lanzan 5 dados y se observan las figuras que muestran las caras que quedan hacia arriba. Podemos responder a la pregunta del soldado haciendo uso de los arreglos. Debido a que son 5 dados necesitamos arreglos de tamaño 5 (suponemos que los dados son distinguibles). Sabemos que cada dado tiene 6 caras, por lo tanto cada uno de los lugares del arreglo puede tomar 1 de 6 valores. El número total de posibles resultados de lanzar los dados es $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7,776$.

■

Al ver que no hay noticias de Juan, los soldados se disponen a divertirse. Elsa, que es una bella mujer soldado de este equipo, quiere aprender a jugar póker, y gracias a su belleza no faltarán los caballeros dispuestos a mostrarle cómo funciona el juego... ya se acerca uno de ellos. Después de los clásicos diálogos, el caballero, que dice llamarse G. Hamon, explica a Elsa lo siguiente: La baraja de póker contiene 52 cartas, cada carta tiene dos particularidades, que están marcadas con uno de los 13 símbolos siguientes: *A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q* y *R* (también se les suele llamar números). La segunda particularidad es pertenecer a uno los siguientes cuatro grupos o palos: espadas ($\spadesuit$), tréboles ($\clubsuit$), corazones ($\heartsuit$) o diamantes ($\diamondsuit$).

Cuando se juega al póker se reparten un conjunto de cinco cartas que suele llamarse una *mano* de póker. De ésta se puede formar:

1. **Par**, cuando se tienen dos cartas con el mismo número.
2. **Tercia**, tres cartas del mismo número.
3. **Póker**, cuatro cartas del mismo número.
4. **Full**, una tercia y un par.
5. **Flor**, las cinco cartas del mismo palo.
6. **Corrida**, es cuando los cinco números son sucesivos, el as (A), funciona como 1 ó 14.

Elsa le pregunta a Hamon *"¿cuál es la mano de póker que más valor tiene?"*. Éste responde que la importancia de cada mano depende del número de posibilidades en las que se obtiene dicha mano. Hamon le muestra a Elsa cómo puede calcular el número de posibilidades para los siguientes casos.

Ejemplo 8 *Total de posibles manos de póker.*

Solución. Son 5 cartas las que componen una *mano* de poker, que tomamos al azar de un mazo de 52. El orden en que las obtenemos no importa, y claramente no hay reposición. Entonces, el número total de posibles *manos* lo podemos obtener mediante combinaciones.

$$C_5^{52} = 2,598,960.$$

■

Ejemplo 9 *Obtener póker.*

Solución. Podemos tener poker de unos, de doces, de treces, etc. En total son trece tipos diferentes. La quinta carta puede ser cualquiera de las 48 restantes. El número de formas de obtener poker es $13 \times 48 = 624$.

■

Ejemplo 10 *Obtener full.*

Solución. El full se forma de una tercia y un par. La tercia la podemos tener de 13 números diferentes. Por cada número podemos tener C_3^4 tercias diferentes. En total son $13 \times C_3^4$ tercias diferentes. Para el par ya sólo podemos elegir un número de entre 12. Ya elegido el número, el par se puede formar de C_2^4 posibilidades, por lo tanto el número de posibles formas de obtener full es $13 \times C_3^4 \times 12 \times C_2^4 = 3,744$.

Para saber qué sucede con los demás casos se pide al lector que realice los cálculos correspondientes.

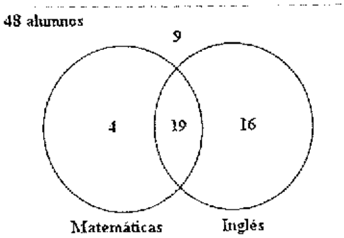
■

Ejemplo 11 *En un salón de clase hay 48 alumnos. De éstos, 23 aprobaron matemáticas, 35 inglés y 19 ambos cursos. ¿Cuántos alumnos del salón no aprobaron ni matemáticas ni inglés?*

Solución. La idea para resolver este problema es separar a los alumnos en grupos, uno donde estén los que sólo aprobaron matemáticas, otro donde estén los que sólo hayan aprobado inglés, otro donde estén los que aprobaron ambas materias, y un último donde estén los que no aprobaron ni matemáticas ni inglés.

Si hay 35 alumnos que aprobaron inglés y 19 que aprobaron ambas materias, entonces hay 16 que sólo aprobaron inglés ($35 - 19 = 16$). Si hay 23 que aprobaron matemáticas y 19 de ellos aprobaron ambas materias, entonces hay 4 que sólo aprobaron matemáticas, ($23 - 19 = 4$).

Hemos formado tres grupos: los que sólo aprobaron inglés, que son 16, los que sólo aprobaron matemáticas, que son 4, y los que aprobaron ambas materias

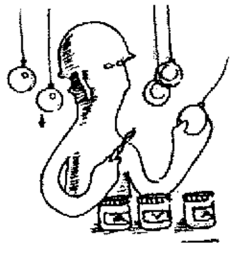


que son 19. Para saber cuántos alumnos no aprobaron ni matemáticas ni inglés, sumamos $16 + 4 + 19 = 39$, es decir, 39 alumnos aprobaron al menos una materia y, por lo tanto, 9 de los estudiantes no aprobaron ni matemáticas ni inglés.

$\blacksquare$

Ejemplo 12 *La navidad llegó y los soldados se disponen a llenar de adornos la base militar. Un soldado tiene 5 esferas idénticas. Él piensa pintar cada una de las esferas con alguno de siguientes colores: azul, rojo o verde. La cantidad de cada color es suficiente para pintar las 5 esferas ¿De cuántas formas diferentes se pueden pintar las esferas?*

Solución.



Para resolver este problema usaremos un método que consiste en el uso de separadores (utilizaremos el símbolo $\blacktriangleright$ para denotarlos). Debido a que las esferas son indistinguibles, no interesará el color con que se pinte cada esfera, lo importante será la cantidad de esferas pintadas con cada color. Representemos a las 5 esferas usando estrellas, así tendremos: $\bigstar\ \bigstar\ \bigstar\ \bigstar\ \bigstar$. El primer color que usaremos es el azul. Si deseamos pintar 2 esferas de azul, las pintamos y colocamos un separador para indicar que las siguientes esferas no son azules, es decir, ★ ★ ▶ ★ ★ ★. De las tres esferas restantes pintemos una de rojo, y coloquemos otro separador después de ésta para indicar que las siguientes esferas no son rojas, ★ ★ ▶ ★ ▶ ★ ★. Las dos últimas esferas tendrán que ser verdes.

La idea es que las esferas que estén antes del primer separador sean las azules, las que estén después del primer separador y antes del segundo serán rojas, y las que se encuentran después del segundo separador serán verdes. En el caso de que antes, entre o después de los separadores no haya esferas, se entenderá que ninguna fue pintada con el color asignado a ese espacio. La siguiente tabla contiene la lista de todas las formas de pintar las esferas.

	Azul	Rojo	Verde	Representación
1	★ ★ ★ ★ ★			★ ★ ★ ★ ★ ▶ ▶
2	★ ★ ★ ★	★		★ ★ ★ ★ ▶ ★ ▶
3	★ ★ ★	★ ★		★ ★ ★ ▶ ★ ★ ▶
4	★ ★	★ ★ ★		★ ★ ▶ ★ ★ ★ ▶
5	★	★ ★ ★ ★		★ ▶ ★ ★ ★ ★ ▶
6	★ ★ ★ ★		★	★ ★ ★ ★ ▶ ▶ ★
7	★ ★ ★		★ ★	★ ★ ★ ▶ ▶ ★ ★
8	★ ★		★ ★ ★	★ ★ ▶ ▶ ★ ★ ★
9	★		★ ★ ★ ★	★ ▶ ▶ ★ ★ ★ ★
10			★ ★ ★ ★ ★	▶ ▶ ★ ★ ★ ★ ★
11		★ ★ ★ ★ ★		▶ ★ ★ ★ ★ ★ ▶
12		★ ★ ★ ★	★	▶ ★ ★ ★ ★ ▶ ★
13		★ ★ ★	★ ★	▶ ★ ★ ★ ▶ ★ ★
14		★ ★	★ ★ ★	▶ ★ ★ ▶ ★ ★ ★
15		★	★ ★ ★ ★	▶ ★ ▶ ★ ★ ★ ★
16	★ ★ ★	★	★	★ ★ ★ ▶ ★ ▶ ★
17	★ ★	★ ★	★	★ ★ ▶ ★ ★ ▶ ★
18	★ ★	★	★ ★	★ ★ ▶ ★ ▶ ★ ★
19	★	★ ★ ★	★	★ ▶ ★ ★ ★ ▶ ★
20	★	★ ★	★ ★	★ ▶ ★ ★ ▶ ★ ★
21	★	★	★ ★ ★	★ ▶ ★ ▶ ★ ★ ★

Si ya logramos entender cómo es que se usan los separadores, la pregunta será: ¿de qué sirve usar esta representación? No siempre será necesario representar todos los resultados mediante los separadores. En esta ocasión lo hicimos sólo para poder entender la idea. Observemos que cada forma de pintar las esferas se representó mediante siete símbolos, cinco $\bigstar$ y dos $\blacktriangleright$. Lo interesante es la facilidad con la que podemos contar las representaciones, sólo debemos elegir los dos lugares donde pondremos los separadores. En total tenemos siete lugares y tomaremos dos de estos, el número de formas en que podemos elegir estos dos lugares es igual a

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!(5!)} = 21.$$

En ocasiones posteriores, cuando usemos este método sólo debemos saber el número de separadores que necesitamos y obtener las respectivas combinaciones.

■

Ejemplo 13 *¿Cuántas son las soluciones enteras positivas para la siguiente ecuación?*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n.$$

Solución. Tenemos que separar n unidades en k grupos. Las unidades son indistinguibles entre sí ($\bigstar$), por lo tanto sólo nos interesa el número de unidades en cada uno de los k grupos. Este es un problema similar al de las esferas, pero para n esferas y k colores. Como son k "colores" necesitamos $k-1$ separadores ($\blacktriangleright$). En total son $n+k-1$ símbolos, es decir, necesitamos arreglos de tamaño $n+k-1$, pero ya no hay que representarlos, pues sabemos que basta con asignar lugar a los $k-1$ separadores. El número total de formas en que se pueden separar las n unidades es

$$C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)!}{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1-(\mathrm{k}-1))!(\mathrm{k}-1)!} = \frac{(\mathrm{n}+\mathrm{k}-1)!}{\mathrm{n}!(\mathrm{k}-1)!}.$$

■

Ejemplo 14 *¿De cuántas maneras se pueden acomodar 6 personas en una habitación sencilla, una doble y una triple?*

Solución. Primero elijamos a las personas que han de ocupar la habitación doble. Debemos elegir a 2 personas de 6, no importa el orden y no hay reposición, por lo tanto el número de formas de seleccionar a las 2 personas es C_2^6. De las 4 personas restantes seleccionemos a las tres que ocuparán la habitación triple. El número de formas de elegirlas es C_3^4. Finalmente la persona restante será asignada a la habitación sencilla. El número de formas en que podemos asignar a las personas es

$$C_2^6 \times C_3^4 = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = 60.$$

En situaciones donde hay que dividir un conjunto de n objetos en r subconjuntos, con n_1 elementos en el subconjunto uno, n_2 elementos en el segundo subconjunto, y así, sucesivamente, el número de formas de repartirlos es

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \cdots \times n_r!},$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

∎

Ejemplo 15 *Para una reunión, los 15 alumnos del salón deben seleccionar a 5 de ellos para que los representen, este grupo debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres. ¿De cuántas formas se puede hacer este grupo? En el grupo hay 7 mujeres y 8 hombres.*

Solución. Primero seleccionemos a las mujeres. El total de formas para seleccionarlas es C_3^7 formas. Luego para elegir a los hombres tenemos C_2^8 formas. Aplicando la regla de la multiplicación obtenemos el número total de formas para elegir al grupo de 5 personas, que es

$$C_3^7 \times C_2^8 = 980.$$

∎

Ejemplo 16 *Si en lugar de pedir que sean tres mujeres, pedimos que al menos sean tres, ¿Cuántos grupos de cinco integrantes se podrán formar? Para contestar a esta pregunta se presentan dos opciones.*

Solución. Opción 1. Primero seleccionaremos a las tres mujeres de entre las 7. Las 4 mujeres que no fueron seleccionadas las unimos al grupo de los 8 hombres para formar un conjunto de 12 personas, de estas seleccionaremos a las 2 que hacen falta para formar al grupo de 5. En la última selección podrán ser elegidos hombres o mujeres. El número total de formas de elegir al grupo es

$$C_3^7 \times C_2^{12} = 2,310.$$

Opción 2. Contamos los grupos compuestos de exactamente 3, 4 y 5 mujeres y luego los sumamos.

Si son exactamente 5 mujeres el número de posibles grupos es $C_5^7 = 21$.

Si son exactamente 4 mujeres el número de posibles grupos es $C_4^7 C_1^8 = 280$.

Y cuando son exactamente tres mujeres el número de posibles grupos es 980.

El número total de formas en que se puede elegir el grupo con al menos 5 mujeres es

$$21 + 280 + 980 = 1,281.$$

¿Cuál es la opción correcta? ¿Por qué?

Simulemos hacer la elección como se indica en la opción uno. Para esto, representemos a las 7 mujeres con las primeras siete letras mayúsculas del abecedario.

Al seleccionar a las 3 de 7 mujeres, supongamos que obtenemos a A, B y C. Después, con las 4 mujeres restantes y los 8 hombres se forma un nuevo grupo de 12 personas. De este grupo se seleccionan a 2 personas. Supongamos que obtenemos seleccionadas a D y E. Es decir, los representantes serán A, B, C, D, y E.

Nuevamente pensemos en elegir a las 3 mujeres de entre las 7, sólo que ahora las seleccionadas son B, C, y D. En la segunda selección obtenemos A y E. El grupo de representantes será A, B, C, D y E.

Así, pues, mostramos como se pueden seleccionar de dos formas a un mismo grupo de representantes, con lo que deducimos que la opción uno no es correcta. Tratemos de corregir la respuesta de la opción uno. Dado que estamos contando de más, restémonos los casos necesarios, y veamos que resultado obtenemos.

El grupo A, B, C, D, E, es considerado C^5_3 veces, pues son las formas en que pueden ser seleccionadas las tres representantes de las cinco en la primera etapa. Pero no sólo es este grupo de 5, sino que puede ser cualquiera de C^7_5. En total hay $C^5_3 C^7_5 = 210$ casos que se toman en cuenta, de los cuales sólo se deben considerar a 21. Entonces del total que teníamos debemos restar 189.

Cuando son cuatro mujeres las que están en el grupo de representantes, también se están contando casos de más. Cada caso de estos se considera C^4_3 veces. Tenemos C^7_4 posibles grupos de cuatro mujeres. Finalmente, cada grupo de cuatro mujeres esta acompañado por un hombre, él cual puede ser cualquiera de los 8. Es decir, como estos casos hay $C^7_4 C^4_3 8 = 1120$, y de estos sólo se deben considerar a 280. Es decir, que debemos restar 840 casos.

Así, del resultado de la opción uno restamos 189 y 840, y obtenemos

$$2310 - 840 - 189 = 1,281,$$

que es el resultado de la opción 2.

■

Ejemplo 17 *El Obispo Wibold de Cambray, en el año 960, propuso un juego de dados piadosos. En este juego se lanzaban tres dados, la combinación obtenida se asociaba a una virtud, y el jugador debía comportarse conforme a esta virtud por un periodo de tiempo determinado. El Obispo Wibold de Cambray tenía una lista de 56 virtudes asociadas a los posibles resultados de los dados, es decir, él suponía que al lanzar tres dados los posibles resultados serían 56. Con lo que hemos visto sabemos que al lanzar tres dados los* *posibles resultados son 216. ¿Por qué habrá hecho el obispo Wibold una lista con 56 virtudes?*

En un principio se podría pensar que el obispo no sabía contar, pues el vivió seis siglos antes de que surgiera la combinatoria, mas dicen que las personas que gustaban de los juegos con dados sabían muy bien contar, y entre 216 y 56 hay una gran diferencia, diferencia que nos obliga a buscar otra explicaión para el posible error.

Pensemos que posiblemente el Obispo no tomó en cuenta el orden en que caían los dados. Es decir, quizás el obispo Wibold de Cambray no hacía diferencia entre (1,1,2) y (1,2,1). Para confirmar esta suposición, contemos los casos que hay al lanzar tres dados, pero suponiendo que éstos son indistinguibles.

Iniciemos nuestro conteo con los casos más simples, cuando se obtiene tres números iguales. Podemos obtener tres veces uno, tres veces dos, etc., es claro que son 6 las posibilidades.

El siguiente caso es cuando obtenemos dos números iguales. Por ejemplo, (1,1,2). Para los números iguales tenemos 6 opciones, y después para el tercer número sólo tendremos 5. En total son $6 \times 5 = 30$ las posibilidades.

Por último, cuando obtenemos tres números diferentes. Aquí sólo tenemos que elegir 3 números de 6, no importa el orden, por lo tanto, el total de posibilidades para este caso son $C_2^6 = 20$.

Sumando lo que obtuvimos en los tres casos, $6 + 30 + 20 = 56$, confirmamos nuestra suposición, el obispo Wibold de Cambray no tomó en cuenta el orden en que caían los dados.

■

2.4 Ejercicios

Ejercicio 1 *En una carrera de bicicletas, que va desde la ciudad A hasta la B, se pueden tomar tres rutas. Al llegar a la ciudad B comienza la segunda etapa, que va desde la ciudad B hasta la C. En la segunda etapa se puede* *elegir una de cinco rutas ¿Cuantas rutas puede tomar un competidor para llegar desde la ciudad A hasta la C?*

Respuesta. 15.

Ejercicio 2 *PROGOL es un concurso donde el ganador es aquel que adivine el resultado de 14 partidos de fútbol. Los resultados pueden ser: triunfo para el local, para el visitante o empate. ¿Cuántos son los posibles resultados que se pueden dar en los 14 partidos?*

Respuesta. 4,782,969.

Ejercicio 3 *En una dulcería se ofrecen piezas de chocolate en cinco presentaciones: con café, amargo, blanco, con almendras, y con arroz inflado. Cada pieza de chocolate tiene vale un peso. Un niño entra a la dulcería dispuesto a gastar 10 pesos en chocolates. ¿De cuantas formas puede el niño comprar los chocolates, pensando en las diferentes presentaciones?*

Respuesta. 1,001.

Ejercicio 4 *Los reyes magos después de repartir regalos toda la noche, se encuentran en la última casa, donde habitan dos niños. Para estos niños han guardado 6 regalos diferentes, tres para cada uno. ¿De cuantas formas pueden los reyes magos distribuir los 6 regalos?*

Respuesta. 20.

Ejercicio 5 *Un anciano a punto de morir, quiere heredar sus 5 pertenencias entre sus dos hijos. ¿De cuantas formas puede repartir sus pertenencias?*

Respuesta. 32.

Ejercicio 6 *¿Cuántas manos de póker hay que tengan sólo tercia?*

Respuesta. 54,912.

Ejercicio 7 *¿Cuántas manos de póker hay que sólo tengan un par?*

Respuesta. 6,589,440.

Ejercicio 8 *¿Cuántas manos de póker hay que tengan sólo dos pares?*

Respuesta. 247,104.

Capítulo 3

Probabilidad

> "Es imposible que un dado, con una determinada fuerza y dirección, no caiga sobre una cara determinada, sólo que yo no conozco la fuerza y la dirección que le hace caer sobre una cara determinada y por lo tanto le llamo a eso chance, aunque no es sino falta de arte (conocimiento) [...]" *John Arbuthnot*[3]

La palabra probabilidad (probabilité) se utiliza por primera vez para denotar algo medible, en la obra de Antonie Arnauld-Pierre Nicole. Este autor usa la palabra al considerar la diferencia que existe entre la posible ocurrencia de eventos. Esta diferencia la hacía de manera empírica. Al igual que Arnauld, nosotros utilizaremos la palabra probabilidad para atribuir un grado de ocurrencia a determinados eventos.

Al tratar de obtener la probabilidad de un evento, lo ideal será expresarla de forma tal que pueda ser aplicable a diversas situaciones. No servirá de mucho decir que es probable ganar un juego, ya que lo que realmente deseamos saber es qué tan probable lo es. Además, para facilitar las comparaciones, debemos llevar el concepto a términos numéricos y para esto necesitamos alguna fórmula o método que nos arroje un número. Para lo cual, a continuación veremos tres fórmulas para el cálculo de probabilidades que se desarrollaron en los inicios de esta teoría.

3.1 Fórmula clásica

Como mencionamos en los capítulos anteriores, Galileo, Cardano, Pascal y Fermat, mostraron por qué algunos eventos ocurrían con mayor frecuencia que otros, para lo cual contaban todos los posibles resultados del juego o experimento, y los comparaban con los que favorecían la ocurrencia del evento de interés, y es precisamente esta idea la que da origen a la primera fórmula que veremos para el cálculo de probabilidades.

$$P(\text{"Ocurrencia de un evento"}) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}}.$$

La fórmula anterior fue desarrollada y utilizada de manera empírica más de un siglo, pero fue hasta la principios del siglo XIX que Pierre Simon de Laplace, en su *"Ensayo filosófico sobre las probabilidades"*, sintetizó todo lo desarrollado en probabilidad y la enunció. Esta fórmula se conoce como **fórmula de probabilidad clásica** o **fórmula de Laplace**.

Un ejemplo clásico de cómo se aplica esta fórmula es en el lanzamiento de una moneda. Todos sabemos, o al menos intuimos, que al lanzar una moneda equilibrada la probabilidad de obtener *sol* es un medio. Calculemos la probabilidad para verificar lo que empíricamente suponemos. Al lanzar una moneda los casos totales son dos, *águila* o *sol*, casos favorables sólo hay uno. Por lo tanto

$$P(\text{"sol"}) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{2},$$

que es el resultado que esperábamos.

Analizando el cociente de casos favorables y totales, podemos deducir que el número de casos totales siempre será mayor o igual que el de casos favorables. Por lo tanto, el valor máximo de la probabilidad de un evento será 1, y el menor 0. Es decir, si A es un evento cualquiera entonces

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Al utilizar la fórmula de probabilidad clásica debemos ser capaces de identificar y contar los posibles resultados del experimento, verificar que sea un número de posibilidades finito, y además, suponer igual probabilidad de ocurrencia. Ejemplos de este tipo de experimentos son: lanzar una moneda, donde hay dos posibles resultados con igual probabilidad, un medio. Lanzar un dado, con seis posibles resultados y probabilidad de un sexto para cada uno de ellos. Tener el boleto ganador de una rifa donde existen n boletos, donde cada boleto tiene probabilidad $\frac{1}{n}$ de ser el ganador, etc.

3.2 Probabilidad geométrica

Pensemos en el problema de elegir un punto que esté en el intervalo (0,1), y supongamos que cada punto tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. Para utilizar la fórmula de probabilidad clásica tenemos que calcular los casos favorables y los totales; por ejemplo, para saber cuál es la probabilidad de que el punto seleccionado sea 0.5, tenemos que contar los casos favorables, que es uno, hasta aquí vamos bien, pero al tratar contar los casos totales es donde surge el problema ¿cuántos puntos hay en el intervalo (0,1)? ¿Mil? ¿Un millón? No es recomendable tratar de contarlos pues son una infinidad.

Si ahora nos interesa saber cuál es la probabilidad de acertar con un dardo al centro de un círculo, tendremos problemas si pensamos que podemos utilizar la fórmula de probabilidad clásica, ¿por qué? Porque el centro de un círculo es un punto, por lo tanto hay un caso favorable, y nuevamente una infinidad de casos totales. Sin embargo, es posible acertar al centro. Aquí lo que hay que cuestionar es si realmente el centro de un círculo es un punto, o si el dardo con el que intentaremos dar al centro cubrirá sólo un punto. En la práctica no pensamos que el centro de un círculo sea un punto sino que es un círculo de radio muy pequeño.

El problema al que llegamos es el de no poder contar los casos favorables o totales, así que es conveniente cambiar la idea de lo que serían los casos totales y los favorables. Como ya vimos, el centro de la diana no es, en la práctica, un punto, si no un círculo pequeño, del que podemos obtener un área, la que sería el *área favorable*. Asi pues, para este tipo de problemas no calcularemos casos, sino que calcularemos áreas. La fórmula que utilizaremos para obtener la probabilidad de un evento es

$$P(A) = \frac{\text{Área favorable al evento A}}{\text{Área Total}}.$$

3.3 Probabilidad frecuencial

Entre los muchos intentos por tener alguna ventaja al jugar con los dados había, o hay, personas que introducían bolitas de plomo en estos para favorecer a alguna de las caras.

Si lanzamos un dado cargado, los posibles resultados son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, pero ya no podremos asignar igual probabilidad a cada resultado, es decir, si deseamos conocer la probabilidad de obtener un "1", no bastará con pensar en casos favorables y totales.

Imaginemos que lanzamos 10 veces un dado que está cargado, y que en 9 de los lanzamientos se obtuvo el 1. Bajo esta situación no es natural pensar que todas las caras tienen igual probabilidad de ocurrir. Nuevamente lanzamos el dado pero en esta ocasión veinte veces y de estas veinte resultó que el 1 se obtuvo 19 veces ¿es lógico pensar que las caras en el dado tienen la misma probabilidad? Pues no, pero ahora nos enfrentamos al problema de asignar probabilidad a cada uno de los posibles resultados del experimento.

Hay que aclarar que al lanzar 20 veces un dado honesto es posible que se obtenga en los veinte lanzamientos el 1, pero es muy difícil, la probabilidad es

$$P(A) = \frac{1}{6^{20}} = \frac{1}{3656158440062976},$$

y si bien, no es posible concluir que el dado no es honesto por obtener 19 veces el 1 al lanzarlo veinte veces, un resultado así al menos debe ser suficiente para dudar. En caso de que el dado esté cargado, lo que podemos hacer para asignar probabilidades, por ejemplo, es lanzar el dado cien veces, y observar en cuantas de estas se obtuvo el 1 y asignar la probabilidad con la fórmula

$$P(\text{“Obtener 1”}) = \frac{x}{n}$$

Donde x es el número de veces que se obtuvo el 1, y n el número de veces que se lanzó el dado. Esta forma de asignar probabilidad nos debe resultar natural pues la usamos en la vida cotidiana, por ejemplo, cuando estamos esperando a una persona y ésta suele llegar tarde, suponemos que llegará tarde por experiencias pasadas.

La asignación de probabilidades de acuerdo con el comportamiento a largo plazo en los experimentos es conocida como probabilidad frecuentista o teoría frecuentista.

Entre la teoría frecuentista y la clásica existe una relación. Se espera que si el número de ensayos que se realizan para obtener la probabilidad con el método frecuentista crece indefinidamente, la probabilidad que se obtenga para el evento será la misma que si se pudiera calcular mediante la fórmula clásica. Por ejemplo, sabemos que la probabilidad de obtner un *dos* al lanzar un dado es un sexto; ahora, si lanzamos el dado n veces, y contamos las ocasiones en que se obtuvo el *dos*, y hacemos el cociente para obtener la probabilidad mediante el método frecuentista, se espera que el valor del cociente sea próximo a un sexto. La idea anterior la expresó, tres siglos átras, James Bernoulli de la siguiente forma.

3.4 Primer teorema del límite

James Bernoulli (1654-1705), enunció un resultado fundamental en su obra llamada *"Ars conjectandi"*[1] , el denominado **"Teorema de Bernoulli"** o **ley débil de los grandes números.**

El teorema parte de la suposición de que para todo evento que podamos definir en un experimento aleatorio existe una probabilidad p, conocida o desconocida, de que ocurra. Si dicho experimento lo realizamos n veces, y contamos el número de ocasiones en las que ocurrió el evento (a este número lo llamamos x), y comparamos el cociente $\frac{x}{n}$ con el valor de p, observaremos que estos valores serán muy próximos, además, si el número de ensayos aumenta la diferencia entre p y $\frac{x}{n}$ será menor.

[1] Arte de la conjura

Figura 3.1: James Bernoulli (1654-1705).

Del teorema de Bernoulli se puede enunciar la **ley de los grandes números**, que es una versión moderna de dicho teorema.

Ley de los grandes números. Dado un número ϵ (epsilon) positivo, la probabilidad de que la diferencia, en valor absoluto, entre la frecuencia relativa del evento favorable en n pruebas y la probabilidad de ese evento, sea mayor que ϵ tiende a cero cuando el número de pruebas crece indefinidamente. Lo que podemos representar como

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| > \epsilon\right) = 0,$$

donde x es el número de veces que ocurrió el evento, y n crece indefinidamente.

Ya hemos revisado cómo calcular probabilidades, pero antes de hacer algunos ejercicios, convendrá especificar el lenguaje que utilizaremos para referirnos, en general, a los casos totales, o área total, evento, etc.

3.5 Espacio muestral

Al conjunto de todos los posibles resultados del fenómeno o experimento que observemos lo llamaremos espacio muestral y lo denotaremos con la letra griega Ω (omega). Por ejemplo, al lanzar un dado tendremos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Para no confundirnos es preciso unificar el lenguaje que debemos utilizar para referirnos a los elementos del espacio muestral. Usaremos la frase *punto muestral* para referirnos a cada posible resultado básico que resulta de realizar el experimento. La palabra *evento* la usaremos para nombrar cualquier conjunto que contenga a uno o más puntos muestrales.

Ejemplo 18 *Lanzar un dado.*

Espacio muestral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Puntos muestrales: son los resultados básicos o simples del experimento, en este caso 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Evento: Obtener un número menor o igual que 3. En este caso, el evento está compuesto por tres puntos muestrales, $\{1, 2, 3\}$.

■

3.6 Reglas aditivas

Pascal tuvo un amigo llamado Antoine Gombauld, conocido como el caballero Méré, un apostador apasionado. Buscando alguna forma de ganar más dinero, pensó en apostar que en cuatro tiradas de un solo dado podría, al menos, obtener un 6. Las personas aceptaban su apuesta y él empezó a ganar más dinero que el que perdía. La forma en que razonó fue la siguiente: un 6 se obtiene con probabilidad $1/6$, por lo tanto si se tienen cuatro oportunidades, sumando obtenemos que: $1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6$, ó $2/3$, cuyo resultado nos hace suponer que se ganarán 2 de cada 3 juegos.

Tal vez aburrido de este juego, Méré buscó uno más interesante. Pensó en lanzar dos dados y obtener un doble seis al menos en 24 tiradas, pero con este juego no fue tan afortunado. No obstante, razonando como antes se llega a que un doble 6 se obtiene con probabilidad $1/36$, pues si se tienen 24 oportunidades, la probabilidad de obtener el doble 6 es $24/36$, simplificando obtenemos $2/3$. Méré pensó que la aritmética no funcionaba y consultó a Pascal para que diera respuesta a su problema.

Calculemos la probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado, y comparemos el resultado con lo propuesto por Méré.

Sea A el evento en el que se obtiene al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado.
Sea A_1 el evento donde se obtiene un 6 en el primer intento.
Sea A_2 el evento donde se obtiene un 6 en el segundo intento.
Sea A_3 el evento donde se obtiene un 6 en el tercer intento.
Sea A_4 el evento donde se obtiene un 6 en el cuarto intento.

Siguiendo el razonamiento de Méré podemos escribir

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

Este razonamiento erróneo es usual, muchas personas que empiezan a resolver problemas de probabilidad lo repiten. No siempre es posible sumar las probabilidades de la forma anterior, ya que los eventos no siempre son ajenos o excluyentes (decimos que dos eventos A y B son ajenos si no tienen elementos en común).

El evento A_1, como fue descrito, pide que se obtenga un 6 en el primer lanzamiento, pero no dice nada de los tres lanzamientos restantes, por ejemplo, (6,2,4,3) y (6,6,5,4) son dos posibles resultados de lanzar el dado las cuatro veces que satisfacen lo necesario para ser considerados en el evento A_1, sin embargo, (6,6,5,4) también debe ser tomado en cuenta para el evento A_2, es decir, estamos tomando en cuenta un posible resultado dos veces, o más. Por lo anterior podemos decir que A_1 y A_2 no son eventos ajenos, pues comparten algo.

Utilizando la idea de los eventos ajenos podemos resolver el problema planteado por el caballero Méré. Sea A^c el evento en el que se obtienen números diferentes al 6 en las cuatro tiradas.

Ya sabemos que los eventos ajenos son aquellos en los que no se comparte algo. En este caso A y A^c son eventos ajenos y además complementarios, es decir, sucede A o A^c, pero no ambos. Por lo tanto, no será muy difícil concluir que,

$$P(A) + P(A^c) = 1,$$

y despejando $P(A)$ obtenemos que,

$$P(A) = 1 - P(A^c).$$

La probabilidad de A^c es muy sencilla de obtener, así que es mejor obtener la probabilidad de A haciendo uso de la última ecuación.

$$P(A^c) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0.48225.$$

Por lo tanto,

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.48225 = 0.5177.$$

Este resultado sustenta las hipótesis del caballero Méré, pues en las apuestas le favorece aproximadamente 52 veces de cada 100, aunque realmente no es una ventaja desmedida o muy significativa, además, debemos notar que realmente la probabilidad no es $2/3$ como suponía Méré.

Veamos ahora cuál es la probabilidad de obtener al menos un doble 6 cuando se lanzan 24 veces 2 dados.

Sea B el evento en el que se obtiene al menos un doble seis al lanzar 24 veces dos dados. Sea B^c el evento en el cual no se obtiene ningún doble seis en las 24 tiradas de los dados.

$$P(B^c) = \underbrace{\frac{35}{36} \times \frac{35}{36} \times \cdots \times \frac{35}{36}}_{24-veces} = 0.50859612.$$

Por lo tanto,

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.50859612 = 0.49140388.$$

La probabilidad de obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado es 0.5177, es decir, de cada 100 juegos ganaremos 52 aproximadamente. La probabilidad de obtener un doble 6, al menos, al lanzar dos dados 24 veces es de 0.49, y con esta opción se espera que ganemos 49 veces de cada 100 juegos.

Con lo anterior podemos verificar que realmente el razonamiento de Méré respecto a la forma de calcular probabilidades era erróneo. Sin embargo, es meritorio que haya notado, al observar los resultados de los juegos que, en efecto, es más probable obtener al menos un 6 al lanzar cuatro veces un dado, que obtener al menos un doble 6 al lanzar dos dados 24 veces. Su observación fue tan exacta que le permitió darse cuenta que en un juego tenía la ventaja y en el otro no. Aunque cabe mencionar que es casi imposible percibir, o diferenciar, situaciones donde las probabilidades de dos eventos tienen una diferencia tan pequeña.

Antes de proponer una fórmula para calcular la probabilidad de la *unión* de dos o más eventos, veamos un ejemplo más.[2]

Supongamos que se tienen los siguientes eventos: Sea A el evento en el que se obtiene un número menor o igual a cuatro al lanzar un dado, es decir, que ocurre A cuando se obtiene el 1, 2, 3 ó 4. Sea B el evento en el que se obtiene un número par al lanzar un dado, es decir, 2, 4 ó 6.

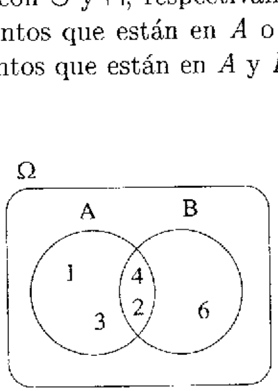
Los eventos A y B no son ajenos pues comparten dos puntos muestrales, el 4 y el 2. Si deseamos obtener la probabilidad de obtener A o B, podemos intentar sumar las probabilidades, es decir,

[2] Denotaremos a la *unión* de dos eventos como suele hacerse en la teoría de conjuntos, es decir, haciendo uso del símbolo $\cup$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \tfrac{4}{6} + \tfrac{3}{6} = \tfrac{7}{6},$$

llegando a una contradicción, pues convenimos que no existe evento cuya probabilidad sea mayor a uno. Como hemos mencionado, el problema reside en que los eventos A y B no son ajenos, pues comparten dos puntos muestrales y, por tal motivo, los puntos que comparten están siendo tomados en cuenta tanto en P(A) como en P(B). De allí que la probabilidad que obtenemos sea mayor a uno.

Utilizando la teoría de conjuntos podemos resolver este problema de otra forma. En esta teoría se tiene los conceptos de la unión e intersección de conjuntos, que se denotan con $\cup$ y $\cap$, respectivamente. El conjunto $A \cup B$ consiste de todos los elementos que están en A o en B. El conjunto $A \cap B$ consiste de todos los elementos que están en A y B.



En nuestro problema $A \cap B$ se conforma de los puntos muestrales 4 y 2, y $A \cup B$ por puntos 1, 2, 3, 4 y 6. Los elementos que se encuentran en la intersección son los que estamos contando de más, pues están en A y B, como los estamos contando dos veces, tenemos que restar una vez la probabilidad de la intersección.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

De los ejemplos ilustrados hasta aquí, podemos deducir los siguientes resultados.

Conclusión 1 *Sean A y B cualesquiera dos eventos, entonces*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Conclusión 2 *Si A y B son mutuamente excluyentes o ajenos, sucede que*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Conclusión 3 *Si A y A^c son eventos complementarios, entonces*

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Podemos demostrar la conclusión 3 utilizamos el hecho de que la probabilidad de Ω es igual a 1, y que A y A^c son ajenos.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ P(A \cup A^c) &= 1 \\ P(A) + P(A^c) &= 1. \end{aligned}$$

3.7 Ejemplos

Ejemplo 19 *¿Cuál es la probabilidad de obtener 4 o 5 águilas al lanzar 5 veces una moneda honesta?*

Solución. Sea A el evento en el que se obtienen 4 águilas al lanzar 5 veces una moneda, y sea B el evento en el que se obtienen 5 águilas al lanzar 5 veces una moneda.

Lo que nos interesa es que ocurra A o B, es decir, necesitamos calcular $A \cup B$. Los eventos A y B son ajenos pues no pueden ocurrir simultáneamente. Por lo tanto

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Los casos totales al lanzar 5 veces una moneda son 2^5, los casos favorables al evento A son 5, y sólo hay un caso favorable al evento B. Utilizando la fórmula de probabilidad clásica obtenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{6}.$$

Así la probabilidad de obtener 4 o 5 águilas al lanzar cinco veces una moneda honestas es de $1/6$.

■

Ejemplo 20 *Se lanzarán dos monedas, una de cobre y otra de plata. Las monedas son honestas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sol? Elije una de las siguientes opciones:*

a) La probabilidad es 1.
b) La probabilidad es $3/4$.
c) Ninguna de las anteriores.

Solución. Si nuestra respuesta es "Ninguna de las anteriores", debemos regresar al capítulo uno. Si nuestra respuesta es "1", seguramente estamos cometiendo el mismo error que el caballero Méré, repasa la sección 3.6. Si nuestra respuesta es "3/4", estamos en lo correcto.

Definamos como A al evento de obtener sol con la moneda de plata, y como B al evento de obtener sol con la moneda de cobre. La probabilidad de que ocurra A o B, es decir, la probabilidad de obtener al menos un sol, es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Tanto la probabilidad de A como la de B están definidas en el enunciado del problema, sólo falta calcular la probabilidad de $A \cap B$. Para lo anterior debemos definir el espacio muestral de este experimento.

$$\Omega = \{(a,s),(s,a),(a,a),(s,s)\}.$$

Los casos totales son 4, y sólo hay un caso favorable. Por lo tanto

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{4}.$$

Ahora para calcular la probabilidad de $A \cup B$ tenemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener al menos un sol al lanzar la moneda de cobre y la de plata es $3/4$. Obsérvese que a este resultado se puede llegar escribiendo sólo el espacio muestral, y a partir de allí calcular casos favorables y totales, es decir, sin hacer uso de $P(A \cup B)$.

■

Ejemplo 21 *En el capítulo uno citamos dos propuestas de Cardano. Una de ellas planteaba que la probabilidad de obtener un número en particular, el dos por ejemplo, al lanzar un dado tres veces es un medio. , ¿ la propuesta es verdadera?*

Solución. Sea A el evento de obtener al menos un 2 al lanzar tres veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de A? Para calcular esta probabilidad hagamos uso de la fórmula de probabilidad clásica. Los casos totales los podemos obtener haciendo uso de la regla de la multiplicación, adaptándola para el caso de tres tareas, donde cada tarea es lanzar el dado una vez, o la repetición de una tarea tres veces, de cualquier forma llegamos a: $6 \times 6 \times 6 = 216$, resultado que ya conocíamos gracias a Galileo y a Cardano.

Obtener el número de casos favorables es un poco más complicado, pero con la práctica resultará sencillo. Si queremos obtener un 2 con tres lanzamientos, los casos favorables son todos aquellos donde al menos aparece un 2, por ejemplo: (1,2,3), (4,2,5), (3,2,2), (2,2,2), etc. Todos los casos anteriores son favorables; pero ¿cómo contarlos a todos? Podemos separarlos en tres grupos, uno donde sólo aparezca una vez el 2, otro donde aparezca dos veces el 2, y un último grupo donde el 2 aparezca las tres veces.

Cuando sólo hay un 2, por ejemplo, $(2,\cdot,\cdot)$, podemos tener en lugar de los espacios vacíos cualquier número del dado exceptuando el dos, es decir, cualquiera de cinco números.

Hay 25 posibilidades del caso $(2, \cdot, \cdot)$.
Hay 25 posibilidades del caso $(\cdot, 2, \cdot)$.
Hay 25 posibilidades del caso $(\cdot, \cdot, 2)$.

Por lo tanto hay 75 casos favorables donde sólo hay un 2. De manera similar obtenemos que los casos favorables cuando hay dos veces 2, por ejemplo, (2,1,2). El número de casos es 15. Cuando tenemos tres veces el 2 sólo hay un caso, (2,2,2). Sumando todos los casos favorables obtenemos por resultado $75 + 15 + 1 = 91$.

Ya que hemos calculado los casos favorables y totales, aplicamos la fórmula,

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables al evento}}{\text{Casos totales}} = \frac{91}{216} = 0.4212962$$

Con lo que probamos que no existe la igualdad que suponía Cardano; para que exista la igualdad se debe obtener un medio de probabilidad.

Existe una forma más sencilla de obtener los casos favorables. Sabemos que en total hay 216 casos, de estos algunos son favorables al evento A, y hay otros que no lo son. Para facilitar el trabajo contemos los casos que no son favorables, es decir, contemos los casos donde no aparece el 2. En estos casos podrán aparecer cualquiera de las cinco caras restantes del dado. En total son $5 \times 5 \times 5 = 125$ casos.

De los 216 casos totales 125 no son favorables, por lo tanto, los casos favorables se obtienen restando $216 - 125 = 91$, que es el resultado que obtuvimos anteriormente.

■

Ejemplo 22 *En una de tantas ferias de la ciudad hay un personaje pintoresco de nombre Solín. Éste atrae a los paseantes con un juego. Él muestra tres cartas, la primera con ambas caras azules, la segunda con ambas blancas y la tercera con una cara blanca y una azul, después las introduce en un sombrero, y deja que uno de los espectadores extraiga una. Solín pide al espectador que coloque la carta sobre una mesa, sin mostrar de qué color es la cara que queda boca abajo. Supongamos que la cara que podemos ver de la carta es azul, entonces Solín dirá: "al parecer la cara oculta puede ser blanca o azul, apuesto 10 pesos contra 12 a que la cara oculta también es azul".*

Parece ser una buena oportunidad para que el espectador gane una apuesta. Sabemos que la carta con las dos caras blancas ya no está en juego, es decir, la carta sobre la mesa es la que tiene ambas caras azules o la carta que tiene una cara de cada color. Solín nos dará 12 pesos si es que la cara oculta es blanca, mientras que nosotros sólo le daremos 10 pesos en caso de que sea azul, todo indicaría que nosotros tenemos la ventaja, ¿o no? Para saber si es una oportunidad de ganar dinero o nos quieren estafar, mejor obtengamos la probabilidad de que la cara oculta sea azul.

Solución. Como es costumbre, definamos primero el evento de interés: sea A el evento en que la cara oculta es azul. ¿Cuál es la probabilidad de A?

Necesitamos obtener los casos favorables y los totales. Para esto no necesitamos fórmulas, sólo visualizar correctamente el problema. Hasta cierto punto es bueno el argumento que nos da Solín, son dos cartas en juego y una le da el triunfo, parecería que la probabilidad del evento A es un medio, sin embargo, no debemos centrar la atención en el número de cartas, sino en el número de caras. Es una de tres caras la que esta oculta, dos azules y una blanca, es decir, son tres los casos totales contra dos favorables, por lo que podemos decir que:

$$P(A) = \frac{2}{3}.$$

En teoría Solín gana dos de cada tres juegos, es decir, si nosotros jugáramos tres veces se esperaría que en dos ocaciones gane Solín y en una nosotros, el nos pagaría 12 pesos y nosotros a él 20. Después de todo, no parece tan conveniente aceptar apuestas de este tipo.

■

Ejemplo 23 *En un cajón hay 4 calcetines negros, 4 azules y 2 verdes. Se sacarán al azar dos calcetines, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean azules? ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?*

Solución. Sea A el evento en que los dos calcetines obtenidos al azar sean azules. Sea B el evento en que los dos calcetines obtenidos al azar son del mismo color. Para el evento A los casos favorables se pueden calcular con las combinaciones de 4 en 2, es decir, de los cuatro calcetines azules que hay en el cajón debemos elegir dos, sin importar el orden ya que son indistinguibles, y los casos totales con las combinaciones de 10 en 2, es decir, elegir 2 calcetines de 10 sin importar color u orden, entonces la probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{C_2^4}{C_2^{10}} = \frac{6}{45}.$$

En el cálculo de la probabilidad de B los casos totales son los mismos. Los casos favorables se forman de todas las posibles elecciones de pares de calcetines del mismo color. De los azules, como sabemos, hay 6 formas. Por otra parte, los calcetines negros son 4, al igual que los azules, por lo que también hay 6 formas de obtener un par de estos calcetines; al haber sólo dos calcetines verdes, solamente hay una forma de obtener un par de dicho color. Así llegamos a que

$$P(B) = \frac{C_2^4 + C_2^4 + C_2^2}{C_2^{10}} = \frac{6+6+1}{45} = \frac{13}{45}.$$

■

Ejemplo 24 (El problema de los cumpleaños) . *En una fiesta, donde hay 23 personas, uno de los invitados propone lo siguiente: "Si en este lugar* *hay al menos dos personas que cumplan años el mismo día, me llevaré todo el pastel a casa, de lo contrario compraré otro igual para ustedes" ¿Deben los demás invitados aceptar la propuesta?*

Solución. Dado que hay 365 días, no parece muy probable que haya dos personas de entre las 23 que cumplan años en la misma fecha. Pero, para verificarlo, hay que obtener la probabilidad. Sea el evento A aquel en el que hay al menos dos personas con la misma fecha de cumpleaños. ¿Cómo obtenemos la probabilidad de A? En muchos de los problemas de probabilidad donde se menciona la frase "al menos" debemos tomar el tiempo necesario para pensar si sería mejor calcular lo contrario a lo que nos piden. Esto ya lo hemos hecho anteriormente.

En este caso, de no hacer uso de la recomendación, debemos contar primero los casos donde sólo dos personas tienen el mismo día de cumpleaños, luego si son tres, o cuatro, o si hay dos personas que cumplan el mismo día y otras dos en otro día, y así lo podemos hacer tan difícil como queramos, pero mejor hay que hacerlo de la manera sencilla. Utilicemos el evento A^c que es aquel donde no coinciden en ningún caso las fechas de cumpleaños.

La probabilidad de A^c es muy fácil de obtener. Cada una de las personas nos dirá su fecha de cumpleaños, la primera podrá decir cualquier día de los 365, la segunda podrá decir cualquiera de 364, para no coincidir con el día de la primera persona, y así hasta que las 23 personas hayan dicho su fecha de cumpleaños. Los casos favorables para el evento A^c son: $365 \times 364 \times 363 \times \ldots \times (365 - 22)$, los casos totales son 365^{23}. La probabilidad de A^c es entonces,

$$P(A^c) = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - 22)}{365^{23}} = 0.49270277.$$

Finalmente la probabilidad de que el invitado, que hace la propuesta, se lleve el pastel a su casa es

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.49271277 = 0.50729723.$$

La propuesta parece ser justa, pues la probabilidad es muy próxima a un medio, pero si el número de invitados fueran mayor, el que hace la propuesta tendría ventaja. Observemos la siguiente tabla que muestra las probabilidades de que en un grupo de n personas haya al menos dos personas con la misma fecha de cumpleaños.

Número de invitados	Probabilidad
1	0
2	0.002
3	0.008
$\vdots$	$\vdots$
21	0.443
22	0.475
23	0.507
24	0.538
25	0.568
26	0.598
27	0.626
$\vdots$	$\vdots$
43	0.923
44	0.932
45	0.940

Observemos que para 45 invitados la probabilidad de perder el pastel, que es de 0.94, es bastante considerable. Es un buen ejercicio tratar de explicar el porqué de tal probabilidad cuando hay 45 personas, que parecerían ser pocas respecto de los 365 días del año.

■

Ejemplo 25 *Dos personas, A y B, juegan a los dados de la siguiente forma: B lanza dos dados y toma el mayor de los valores obtenidos; A sólo lanza un dado. El jugador B gana si el valor que obtuvo es estrictamente mayor que el obtenido por A. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?*

Solución. Para encontrar la solución, obtengamos la probabilidad de que A gane. Debemos contar todos lo posibles resultados que se pueden dar para que éste gane; por ejemplo, si A obtiene un 2 entonces B debe obtener a lo más 2, pues A gana con el empate. Observemos el siguiente gráfico:

A	B					
1	**(1,1)**	**(1,2)**	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	**(2,1)**	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

La parte sombreada muestra lo que debe obtener B para que gane A cuando este último haya obtenido un 2, es decir, si A obtiene 2, B puede obtener (1,1) ó (1,2) ó (2,1) ó (2,2). Siguiendo la misma lógica podemos contar los casos favorables para A como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91.$$

Lo que quiere decir que, del total de las posibilidades en el juego, en 91 de ellas gana A. Los casos totales son 216, pues se lanzan tres dados. Utilizando la fórmula clásica de probabilidad tenemos que

$$P(A) = \frac{91}{216} = 0.4212962.$$

■

Ejemplo 26 *Se tienen 3 parejas de personas, que representaremos con las letras A, a, B, b, C y c. Estas personas se sentarán al azar en una banca. ¿Cuál es la probabilidad de que las personas se sienten sin que haya alguna pareja junta?*

Solución. Contemos todas las posibles formas en que las seis personas pueden sentarse en la banca. Utilizando la fórmula de arreglos obtenemos 6!, es decir, el resultado es que hay 720 formas distintas de sentar a las seis personas en una banca. Para obtener los casos favorables, del total de casos restemos los casos donde al menos alguna persona está con su pareja, que son $6!$ menos el número de arreglos donde al menos hay una persona junto a su pareja.

Si pensamos en la pareja Aa como un solo elemento, nos aseguraremos de que siempre se sentarán juntos. Contamos los arreglos que resultan de acomodar a los 5 elementos, Aa, B, b, C y c, que son $5!$, tenemos arreglos donde al menos aseguramos que hay una pareja junta, que es Aa. Este resultado lo multiplicamos por 2, para hacer distinción entre Aa y aA. Como tenemos 3 parejas para elegir a la que vamos a unir, el resultado lo multiplicamos por 3, por lo tanto llegamos a que el número de arreglos que representan las formas en que las seis parejas se pueden sentar de modo tal que al menos haya una persona junto a su pareja es $3 \times 2 \times 5!$. Si al total le restamos el número anterior, obtenemos

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) = 0.$$

Este resultado no es posible, necesariamente hay formas de sentar a las personas de manera que estas no estén junto a su pareja. ¿Dónde está el error? El error es que restamos de más algunos casos. Por ejemplo cuando unimos Aa y acomodamos los 5 elementos, en algunos de estos arreglos B y b quedan juntos, y luego cuando unimos Bb y acomodamos los 5 elementos, sucede que aquí también pueden quedar juntos Aa.

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + error.$$

Para medir ese error contemos los arreglos en los que hay, por lo menos, dos personas sentadas con su pareja. Por ejemplo, podemos unir a la pareja Aa y también a la Bb, con esto obtenemos 4 elementos para acomodar, Aa, Bb, C y c, entonces tenemos $4!$ arreglos donde por lo menos hay dos personas que están sentadas junto a su pareja. Dado que fijar Aa y Bb es distinto a fijar aA y Bb, entonces debemos multiplicar nuestro resultado, $4!$, por 4, que son todas las formas en que se pueden fijar las parejas. Por último, contemos las formas en que podemos elegir a esas dos parejas, que son 3. Con lo anterior llegamos al siguiente resultado:

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + (3 \times 4 \times 4!) = 288.$$

Este resultado ya está más cerca de ser el que buscamos, pero aún no lo es. Nuevamente cometimos un error, y es que estamos sumando arreglos de más. Cuando elegimos a las dos parejas, por ejemplo Aa y Bb, y hacemos los arreglos de 4 elementos, C y c pueden quedar o no juntas; luego, si las parejas que unimos son las Aa y Cc, B y b pueden o no quedar juntos. Si quedan juntos, nuevamente las tres parejas están juntas y estaremos contando de más. El número de arreglos donde sucede lo anterior lo podemos calcular si unimos a todas las parejas, con lo que tenemos tres elementos para distribuir, Aa, Bb y Cc, y contamos las formas en que se pueden sentar, que son de 3! formas, y multiplicando por el número de formas en que las parejas, ya unidas, se puede sentar entre si, que son 8, llegando así a la repuesta del problema que es

$$6! - (3 \times 2 \times 5!) + (3 \times 4 \times 4!) - (1 \times 8 \times 3!) = 240.$$

La probabilidad de que ninguna persona esté sentada junta a su pareja es

$$P = \frac{240}{720} = 0.3333.$$

■

Ejemplo 27 *En el juego del dominó se reparten, al azar, 28 fichas entre 4 jugadores. Todas las fichas son distintas. Una ficha de domino se caracteriza por tener dos números, los cuales pueden ser el 0, 1, 2, 3, 4, 5 o el 6. Así, hay 7 fichas con un mismo número, por ejemplo, las fichas que tienen el número 6 y otro (6 : 0, 6 : 1, 6 : 2, 6 : 3, 6 : 4, 6 : 5 y 6 : 6). ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador obtenga 7 fichas con un mismo número?*

Solución. Sea A el evento de que un jugador obtenga 7 fichas con un mismo número.Calculemos primero el número de casos totales. El primer jugador puede elegir sus 7 fichas de entre 28, por lo tanto, tendrá C_7^{28} posibilidades, pues el orden de las 7 fichas no importa. El siguiente jugador que tome sus fichas elegirá de entre las 21 restantes, y tendrá C_7^{21} posibles formas de hacerlo. El tercer jugador dispondrá de las 14 fichas restantes, por lo cual dispone de C_7^{14} posibilidades de elección. Por último, el cuarto jugador tendrá

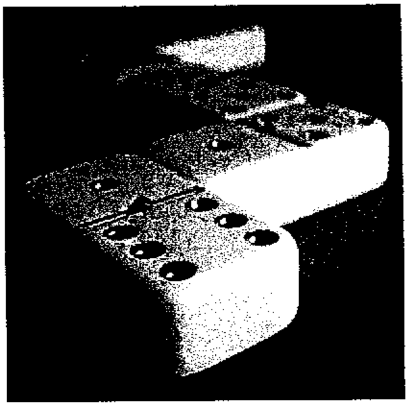


Figura 3.2: Dominó.

sólo C_7^7 formas de seleccionar sus fichas. Utilizando la regla de la multiplicación tenemos que el número total de formas en que se pueden repartir las fichas los 4 jugadores es

$$C_7^{28} \times C_7^{21} \times C_7^{14} \times C_7^7 = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Por la forma en que están marcadas las fichas del dominó, en un juego, sólo una persona puede tener las 7 fichas con el mismo número. Entonces los casos favorables serán todos aquellos donde alguno de los jugadores tenga las 7 fichas con el cero, o las 7 fichas con el uno, etc., en total hay 7 casos. Pero hay que ver como quedan distribuidas las 21 fichas restantes entre los otros jugadores. Supongamos que el jugador que ha de tener las 7 fichas con un mismo número es el primero en elegir, y en efecto toma 7 las fichas deseadas. El siguiente jugador dispone de C_7^{21} formas de elegir sus 7 fichas. Para el tercer jugador restan 14 fichas, por lo cual tendrá C_7^{14} posibilidades de elegir sus fichas. El cuarto jugador se conformará con las 7 fichas restantes (C_7^7). Usando la regla de la multiplicación el número total de casos favorables para el evento A es

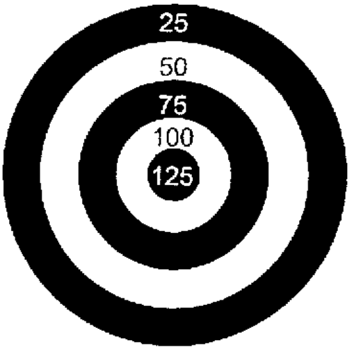
$$7 \times C_7^{21} \times C_7^{14} \times C_7^7 = \frac{7 \times (21!)}{(7!)^3}.$$

La probabilidad del evento A es,

$$P(A) = \frac{\left(\frac{7\times(21!)}{(7!)^3}\right)}{\left(\frac{28!}{(7!)^4}\right)} = 0.000005912.$$

■

Ejemplo 28 *Lanzaremos un dardo sobre la siguiente figura:*



Si suponemos que el dardo forzosamente caerá al menos en la franja de los 25 puntos, ¿Cuál es la probabilidad de obtener 125 puntos? El radio del círculo mayor es de 25 cm. y el radio del círculo de los 125 puntos es de 5 cm.

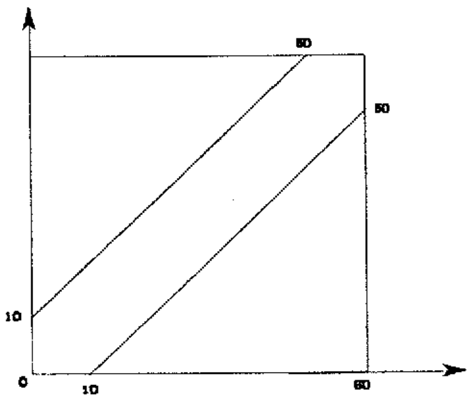
Solución. El área del círculo mayor es de: $\pi \times r^2 = 3.1416 \times 25^2 = 1963.5$. El área del círculo de los 125 puntos es: $\pi \times r^2 = 3.1416 \times 5^2 = 78.54$. Sea A el evento de que el dardo acierta en el círculo de los 125 puntos. Utilizando la fórmula de probabilidad geométrica, la probabilidad del evento A es

$$P(A) = \frac{78.54}{1963.5} = 0.04.$$

■

Ejemplo 29 *Juan y Alma concertaron una cita para el próximo lunes entre 15 y las 16 horas en un café. Debido a sus ocupaciones ninguno está dispuesto a esperar más de diez minutos ¿cuál es la probabilidad de que Juan y Alma, que llegarán al azar entre las 15 y 16 horas, se encuentren en el café el próximo lunes?*

Solución. Sea A el evento en el que Juan y Alma se encuentran. Para calcular la probabilidad del evento A necesitamos obtener el área favorable y el área total, para ello nos auxiliaremos del siguiente diagrama.



Alma y Juan pueden llegar en cualquier momento entre las 15 y 16 horas. Lo anterior se representa en el dibujo con una recta horizontal y una vertical, que indican el momento de llegada y partida de Alma y Juan respectivamente. Para que se dé el encuentro, si Alma llega en punto de las 15 horas, minuto cero, y parte al minuto diez, Juan debe llegar antes del minuto diez, si Alma llega en el minuto uno se irá al minuto 11, por lo que Juan deberá llegar antes del minuto once, etc.

La probabilidad del evento A se obtiene con el cociente del área sombreada, área favorable, y el área del cuadro de 60 por 60, que es el área total. Para obtener el área de la zona sombreada podemos restar a 3600, área total, el área de los triángulos blancos. Cada triángulo tiene base de 50 y altura de 50, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\text{Área sombreada} &= 3600 - ((50 \times 50)/2) \times 2 \\
&= 3600 - 2500 \\
&= 1100.
\end{aligned}$$

Así la probabilidad de que Alma y Juan se encuentren es

$$P(A) = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

■

Ejemplo 30 *Pensemos en una circunferencia de radio 1. Dibujemos en esta circunferencia un triangulo equilátero de forma tal que los tres vértices del triangulo sean puntos de la circunferencia, como se muestra en la figura 3.3. A la longitud de cada lado del triángulo la llamaremos L. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar una cuerda de la circunferencia con longitud mayor a L?*[3]

Calculemos el valor de L. Para obtener el valor de L, tracemos las alturas del triángulo y prolonguemos éstas para que sean diámetros del círculo (figura 3.4). Observemos que al trazar las alturas, se obtienen seis nuevos triángulos, estos triángulos son iguales; los ángulos internos son de 30, 60 y 90 grados, además sabemos que la hipotenusa mide una unidad. El valor de L es igual a dos veces el valor de x, donde x es igual a coseno de 30 grados, ($\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Veamos las siguientes posibles soluciones:

Solución 1. Para la primera solución usaremos que toda cuerda tiene un punto medio, así, elegiremos al azar un punto dentro de la circunferencia, y a partir de este punto se generará la cuerda, la cual podrá ser mayor o no a L.

[3]Este problema fue planteado por Joseph Louis Bertrand y publicado en 1888 es su libro *Calcul des probabilities*.

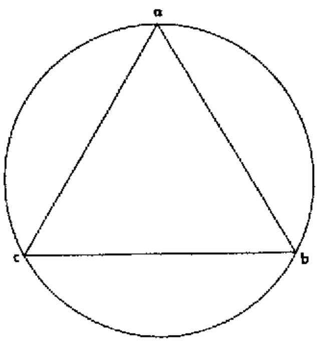


Figura 3.3:

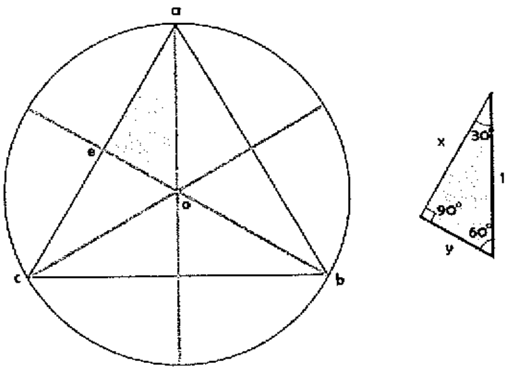


Figura 3.4:

Definamos el área favorable al evento, que llamaremos A. Para definir el área favorable nos auxiliaremos de la figura 3.5. En esta figura podemos ver el triángulo equilátero y un segmento de recta que se extiende desde el punto a' hasta el punto a, este último punto es uno de los vértices del triángulo, además el segmento de recta pasa por el centro del círculo. Supongamos por un momento que sólo podemos elegir puntos que estén contenidos en

$\overline{aa'}$, y que las cuerdas que se generen con dichos puntos tendrán que ser perpendiculares al segmento $\overline{aa'}$. Todos los puntos que elijamos entre d y d' serán puntos medios de cuerdas con longitud mayor a L.

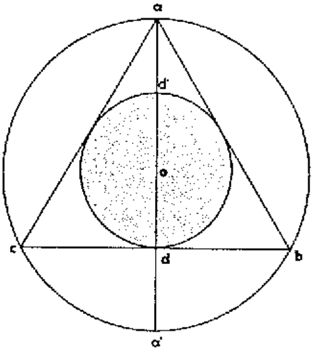


Figura 3.5: Área favorable.

Si giramos $\overline{dd'}$ manteniendo al punto o fijo, obtendremos un círculo contenido en el triángulo, y dentro de esta circunferencia estarán todos los puntos que pueden ser centros de cuerdas con longitud mayor a L (figura 3.5). La circunferencia sombreada es el área favorable. Para obtener el radio del la circunferencia sombreada auxiliémonos de la figura 3.4, de esta figura podemos deducir que el radio de la circunferencia es igual a $\frac{1}{2}$ (seno de 30 grados). Aplicando la fórmula para calcular probabilidad en base a áreas obtenemos que

$$P(A) = \frac{\pi \times 0.5^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{4}.$$

Solución 2. Situémonos en un punto de la circunferencia, por ejemplo, el punto a. A partir de este punto construyamos una cuerda elijando al azar un segundo punto. En la figura 3.6 podemos ver cómo sólo los puntos contenidos en el arco bc generarán cuerdas con longitud mayor a L.

Los tres arcos que se forman con los vértices del triángulo miden lo mismo, y si suponemos que la probabilidad de elegir un punto en éstos es la misma,

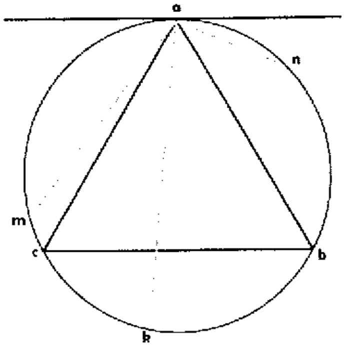


Figura 3.6:

por lo tanto para obtener la probabilidad de elegir una cuerda con longitud mayor a L es $\frac{1}{3}$.

■

Hemos llegado a dos soluciones diferentes, con este ejemplo Bertran trató de mostrar que existen algunas inconsistencias en la teoría de la probabilidad geométrica. A juicio de muchos, los diferentes resultados son consecuencia de diferentes interpretaciones del problema.

Ejemplo 31 *Si se lanza una moneda honesta 300 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 150 veces sol y 150 veces águila?"*

Solución. Esta pregunta la he hecho en repetidas ocasiones obteniendo dos repuestas; un medio y algo próximo a uno.

Los que dijeron un medio

La siguiente pregunta que formulo, con el fin de sacarlos de su error es: ¿cuál es entonces la probabilidad de obtener 151 veces sol y 149 veces águila? Y con mayor sorpresa escucho que la probabilidad en este caso es próxima a 0.5.

Después intento con una tercer pregunta esperando que esta vez sí salgan de su error. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 149 veces sol y 151 águilas? Sin embargo obtengo por respuesta, que la probabilidad es muy cercana a 0.5.

Después de comprender que las tres preguntas son incapaces de lograr su objetivo, utilizo el siguiente argumento para lograrlo:

Sea A el evento en el cual se obtiene 150 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Sea B el evento en el cual se obtiene 149 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Sea C el evento en el cual se obtiene 151 veces sol al lanzar una moneda 300 veces. Por lo que expresaron las personas, las probabilidades de estos eventos son las siguientes:

$$P(A) = 0.5, \qquad P(B) = 0.49, \qquad P(C) = 0.49.$$

Claro, tomando 0.49 como un número próximo a 0.5, sólo para fines de cálculo. Como es conocido, cuando tenemos eventos ajenos la probabilidad de la unión de éstos es la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.5 + 0.49 + 0.49 = 1.48.$$

Con lo que llegamos a una contradicción, pues no existe evento cuya probabilidad sea mayor a uno.

La probabilidad de obtener 150 soles al lanzar una moneda 300 veces se obtiene de la siguiente manera: para los casos totales, pensemos en éstos como arreglos con repetición de tamaño 300, cada uno de los 300 lugares puede tomar uno de dos valores, águila o sol, es decir, tenemos 2^{300} casos totales. Para los casos favorables necesitamos que en los 300 lanzamientos se obtengan 150 soles y 150 águilas. Si contamos de cuantas formas podemos distribuir 150 soles en 300 lanzamientos estaremos contando los casos favorables, es decir, necesitamos elegir 150 números de entre el 1 y el 300 para asignar a esos lugares los 150 soles, ¿de cuántas formas puedo elegir 150 números de entre 300 si no importa el orden? Pues de C_{150}^{300}, por lo tanto la probabilidad de obtener 150 soles al lanzar 300 veces una moneda es:

$$P(A) = \frac{C_{150}^{300}}{2^{300}} = \frac{300!}{150!(150!)}\left(\frac{1}{2^{300}}\right) = 0.04602751.$$

La probabilidad resulta ser muy pequeña y lejana al 0.5 que la mayoría suponía. Ya que muchas personas pensaban incorrectamente que la probabilidad era 0.5, es interesante tratar de encontrar una explicación para esto.

Es difícil tratar de explicar cuál es la causa principal que lleva a dar como respuesta "un medio", pero con frecuencia se observa un razonamiento semejante, y es el de dividir 150 entre 300, pues al obtener un medio la respuesta coincide con la probabilidad de obtener un sol al lanzar una moneda.

Buscando otra explicación, se cree que las personas no hacen diferencia entre "los tamaños de los experimentos "[4]. Por ejemplo, si se tiene una urna con 100 bolas de color azul y 100 bolas de color rojo, las personas opinan que es igualmente posible obtener 4 bolas rojas y 6 azules al realizar 10 extracciones que obtener 40 bolas rojas y 60 azules al hacer 100 extracciones. Lo cual no es cierto.

Para el caso de la moneda, supongamos que se lanza 4 veces en lugar de trescientas y se desean obtener 2 soles en lugar de 150. Las personas siguen pensado que esta probabilidad es un medio, es decir, no hacen diferencia entre el número de lanzamientos, simplemente se fijan en que el número de soles que se desean obtener es un medio del total de lanzamientos.

Obtengamos la probabilidad para el caso de cuatro lanzamientos para mostrar que sigue sin ser un medio.

¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 soles al lanzar 4 veces una moneda que suponemos honesta?

Sea D la probabilidad de obtener 2 soles al lanzar una moneda honesta 4 veces.

Para llegar al resultado utilicemos la fórmula de probabilidad clásica. De forma explícita, el espacio muestral es el siguiente:

[4]Shuaghness (1976)[8]

1	S, S, S, S
2	S, S, S, A
3	S, S, A, S
4	S, A, S, S
5	A, S, S, S
6	**S, S, A, A**
7	**S, A, S, A**
8	**S, A, A, S**
9	**A, S, A, S**
10	**A, A, S, S**
11	**A, S, S, A**
12	A, A, A, A
13	A, A, A, S
14	A, A, S, A
15	A, S, A, A
16	S, A, A, A

Los casos totales son 16 y los favorables 6, por lo tanto

$$P(D) = \frac{6}{16} = 0.37.$$

Obtenemos un número menor que 0.5, pero diferente de 0.046275 correspondiente a la probabilidad de obtener 150 soles al lanzar trescientas veces la moneda.

Los que dijeron que la probabilidad es algo próximo a uno

Si se lanza un moneda $2n$ veces y se desean obtener n soles tendremos pocas posibilidades de lograr nuestro objetivo. El caso en el que mayor probabilidad tenemos de lograrlo es con n = 1, es decir, cuando lanzamos 2 veces la moneda.

1	S, S
2	**S, A**
3	**A, S**
4	A, A

$$P(A) = \frac{2}{4} = 0.5.$$

Exceptuando este caso, todos los demás tienen probabilidad menor a un medio. Aun así, cuando se realiza la pregunta: *"si se lanza una moneda honesta 300 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 150 veces sol y 150 veces águila?"*, un número reducido de personas, pero convencido, responden que esta probabilidad es aproximadamente uno.

Mientras la respuesta *"un medio"* la podemos asociar, hasta cierto punto, con personas que tienen poca experiencia en la teoría de probabilidad, la respuesta *"algo próximo a uno"*, está relacionada con personas de cierta experiencia en dicha teoría.

Para la respuesta *"algo próximo a uno"* no hay gran misterio, esta respuesta es obra de un descuido en la aplicación del Teorema de Bernoulli. La interpretación del teorema en este caso, es que al realizar el experimento de lanzar la moneda en repetidas ocasiones y contar el número de soles que se obtienen, y compararlos con el total de lanzamientos mediante un cociente, éste será próximo a un medio, entonces las personas, conocedoras de este teorema razonan que como 300 lanzamientos son muchos, entonces el cociente será muy próximo a un medio, es decir, piensan que casi es seguro que el número de soles será la mitad, y dan por respuesta "algo próximo a uno". Sin embargo la pregunta es: ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 150 soles? Y como ya vimos, esta probabilidad es muy pequeña, y entre más grande sea el número de lanzamientos más pequeña es la probabilidad.

■

Capítulo 4

Independencia

Entre los hombres dedicados al estudio de la probabilidad, se reconoce a Pierre de Simon Laplace, principalmente por su obra intitulada "Ensayo filosófico sobre las probabilidades", que como mencionamos en el capítulo anterior, tiene el mérito de haber sintetizado y estructurado los resultados que hasta ese momento se tenían sobre la teoría de las probabilidades.

Laplace expone 11 principios, de éstos, 7 se evocan al cálculo de probabilidades, y los restantes al cálculo de esperanzas, tema que veremos en el siguiente capítulo. Aunque no lo mencionamos, en el capítulo anterior tratamos los dos primeros principios, que se refieren al la fórmula clásica y a la probabilidad de la unión de eventos. Por lo cual este capítulo lo dedicaremos exclusivamente al estudio de los principios: tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo.

4.1 Eventos idependientes

El tercer principio de Laplace es el siguiente:

> "Si los eventos son independientes unos de otros, la probabilidad de la existencia de su conjunto es el producto de sus probabilidades particulares."[5]

Podemos percatarnos fácilmente de que en este principio se expone un nuevo término, el de eventos independientes. Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos, no afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Por ejemplo, si tenemos los eventos: obtener *sol* al lanzar una moneda, y obtener *dos* al lanzar un dado, tendremos dos eventos independientes, pues que obtengamos *sol* con la moneda no afectará en nada la probabilidad de obtener *dos* con el dado, y viceversa.

Un ejemplo de eventos que no son independientes es el siguiente: se tiene una urna con 5 bolas blancas y 5 bolas negras, y de ésta extraemos dos bolas sin reposición. Los eventos serán:

Evento A: obtener una bola negra en la primera extracción.

Evento B: obtener una bola blanca en la segunda extracción.

Observemos que la probabilidad del evento A es $5/10$, (casos favorables entre casos totales), pero al calcular la probabilidad del evento B, tendremos que preguntarnos por el resultado de la primera extracción, es decir, la probabilidad del evento B depende del resultado de la primera extracción, por lo tanto los eventos A y B son dependientes, o no independientes.

En el tercer principio se afirma que la probabilidad de que sucedan dos eventos independientes es el producto de las probabilidades particulares. En nuestro ejemplo (el evento de lanzar una moneda y obtener *sol*, que llamaremos evento S, y el de obtener *dos* al lanzar un dado, que nombraremos evento D), la probabilidad de que ocurran los eventos D y S es

$$P(D \cap S) = P(D)P(S) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Como podemor ver el tercer principio expresa cómo calcular la probabilidad de eventos que sabemos son independientes, pero ¿qué sucede si no sabemos si los eventos son independientes? Por lo anterior, suele decirse que n eventos, $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, son independientes si cumplen las siguientes condiciones:

Si se toman 2 eventos cualesquiera, A_i y A_j con $i \neq j$, de los n, entonces se debe cumplir que

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

Si se toman 3 eventos cualesquiera, A_i, A_j y A_k con $i \neq j \neq k$, de los n, entonces

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k).$$

Así sucesivamente hasta que se confirme la independencia entre los n eventos,

$$P(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Uno de los primeros problemas estudiados referentes al uso del concepto de independencia, fue investigado por diferentes personajes (J. Bernoulli, De Moivre, Laplace, entre otros). El problema es semejante al siguiente: se lanza una moneda n veces ¿Cuál es la probabilidad de obtener k soles? (El valor de k puede ser mayor que o igual a cero pero menor o igual que n).

Para resolver este problema se puede prescindir del concepto de independencia, pero hacer uso de éste nos hará más sencillo el trabajo. Representemos con un 0 el hecho de obtener sol, y con un 1 el hecho de obtener águila. Un posible resultado de nuestro experimento es obtener águila en todos los lanzamientos, y lo podemos representar como

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1, 1}_{n-veces}.$$

El número total de sucesiones compuestas de unos y ceros es 2^n, y cada una de éstas tiene igual probabilidad de ocurrir. Pensemos en un espacio muestral que esté compuesto de 2^n elementos, y obtengamos la probabilidad de que ocurra cada punto muestral. Cada lanzamiento de la moneda es independiente del resto, entonces la probabilidad de cualquier sucesión, o punto muestral, es el producto de las probabilidades de cada lanzamiento, que es

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)}_{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Ya describimos el espacio muestral y obtuvimos la probabilidad de cada punto muestral. Definamos ahora el evento A como aquel en que se obtienen k soles al lanzar n veces una moneda. La probabilidad de A es la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales que están contenidos en dicho evento. Para contar los puntos muestrales que están contenidos en A usamos un artificio.

Imaginemos que en una urna tenemos n bolas numeradas con los primeros n números naturales, además tenemos arreglos con n lugares. Extraeremos k bolas de la urna para seleccionar k lugares del arreglo, en estos lugares acomodaremos los k ceros y en los restantes $n-k$ lugares los unos. Para saber cual es el número de sucesiones formadas de k ceros y $n-k$ unos, bajo las anteriores especificaciones, sólo debemos saber de cuantas formas diferentes pueden ser los números que se obtienen en las bolas que se extraen de la urna, como no importa el orden en que las bolas son extraídas, sólo debemos calcular las combinaciones de tamaño k tomadas de un conjunto de tamaño n, que son

$$C_k^n = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-k})!\mathrm{k!}}.$$

Sabemos de cuantos puntos muestrales esta compuesto el evento A, entonces la probabilidad de A la podemos obtener sumando las probabilidades de los puntos muestrales

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{C_k^n} = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Así concluimos que la probabilidad de obtener k soles al lanzar n veces una moneda es

$$P(A) = C_k^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4.2 Experimentos Bernoulli

Existe una gran variedad de situaciones o experimentos que tienen sólo dos posibles resultados, a estos se les conoce como: ensayos Bernoulli.

Formalmente los ensayos Bernoulli son una serie de experimentos independientes, donde cada ensayo tiene dos posibles resultados y sus probabilidades permanecen constantes. Se utilizan las letras p y q para representar estas probabilidades, además, se acostumbra decir que los dos posibles resultados son éxito y fracaso. El problema de la moneda es un ejemplo de los ensayos Bernoulli, donde la p y q son iguales.

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que se realizarán n ensayos Bernoulli, la probabilidad de éxito es p y la probabilidad de fracaso es q. ¿Cuál es la probabilidad de obtener k éxitos? En este caso tendremos 2^n sucesiones de éxitos y fracasos, ¿Cuántos de estos contienen exactamente k éxitos y $n-k$ fracasos? Como ya vimos son C_k^n. La probabilidad de cada una de estas sucesiones de eventos independientes es $p^k q^{n-k}$. Así pues, podemos concluir que la probabilidad de obtener k éxitos al realizar n ensayos Bernoulli es

$$P(A) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}.$$

La expresión anterior se conoce como Fórmula de Bernoulli.

Ejemplo 32 *En un examen de opción múltiple, una persona pretende contestar a las diez preguntas de forma aleatoria. Si cada pregunta tiene tres posibles respuestas ¿Cuál es la probabilidad de que la persona acierte en todas las preguntas?*

Pensemos que cada pregunta es un ensayo Bernoulli, donde p es, la probabilidad de acertar, q la probabilidad de fallar, siendo fácil determinar que $p = \frac{1}{3}$

y $q = \frac{2}{3}$. Así, la probabilidad de que la persona acierte a todas las preguntas es

$$P = C_k^n p^k q^{n-k} = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

■

Ejemplo 33 *Al lanzar 5 veces un dado, nos interesa obtener exactamente dos veces un seis en cualquiera de los cinco lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra esto?*

Solución. Sea A el evento en que se obtiene exactamente dos veces seis al lanzar cinco veces un dado. Cada lanzamiento es un ensayo que tiene probabilidad de éxito de 1/6 y probabilidad de fracaso de 5/6. Como sólo nos interesa tener dos éxitos, entonces

$$P(A) = C_k^n p^k q^{n-k} = \frac{5!}{(5-2)!2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.16075103.$$

■

4.3 Probabilidad condicional

Cuarto principio de Laplace:

> "Cuando dos eventos dependen uno del otro, la probabilidad del evento compuesto es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad de que, habiendo sucedido éste, tenga lugar el otro."[5]

Con el ejemplo de eventos dependientes que expusimos anteriormente mostremos cómo emplear el cuarto principio (una urna con 10 bolas, 5 blancas y 5 negras, donde el evento A es sacar la bola negra en la primera extracción, y el evento B es obtener la bola blanca en la segunda).

Como ya sabemos, el evento A ocurre con probabilidad igual a $\frac{5}{10}$. El evento B depende del resultado de la primera extracción, si ocurrió A, que es lo que nos interesa, la probabilidad de B será $\frac{5}{9}$, pues para la segunda extracción en la urna tendremos 5 bolas blancas y 4 negras. Así, la probabilidad de que ocurran los eventos A y B es

$$P(A)P(B \mid A) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{90}.$$

La expresión $P(B \mid A)$ se lee: probabilidad de que ocurra el evento B dado que ocurrió el evento A. A esta probabilidad se le llama probabilidad condicional.

Quinto principio:

> "Si se calcula a priori la probabilidad de un evento acaecido y la probabilidad de un evento compuesto de éste y de otro que se espera, la segunda probabilidad dividida por la primera constituir la probabilidad del evento esperado, inferida del observado." [5]

El quinto principio es un resultado del cuarto. Matemáticamente lo podemos deducir de la expresión $P(A)P(B \mid A) = P(A \cap B)$ despejando $P(B \mid A)$.

La probabilidad condicional es básicamente una reducción, o reconsideración del espacio muestral debido a que poseemos información referente al fenómeno aleatorio. Por ejemplo, si lanzamos un dado con los ojos vendados y pretendemos adivinar el resultado, pensaremos que cada valor tiene un sexto de probabilidad, pero si alguien nos dice que el resultado es mayor que dos, no tomaremos en cuenta ni al uno ni al dos y pensaremos que cada uno de los cuatro posibles resultados restantes tiene igual probabilidad, es decir, un cuarto.

Sean A y B dos eventos donde $0 < P(B)$, entonces la probabilidad condicional de A dado B, que denotamos como $P(A \mid B)$, se podrá calcular mediante la siguiente fórmula

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ejemplo 34 *Según una encuesta, el 50 por ciento de una población fuma y el 10 por ciento fuma y es hipertensa. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?*

Solución. Definimos: evento A, persona fumadora, evento B, persona que fuma y es hipertensa. Aplicando la fórmula de probabilidad condicional obtenemos

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$$

■

Si meditamos un poco sobre la relación que existe entre el concepto de la probabilidad condicional y el de eventos independientes no será difícil llegar a la siguiente conclusión:

Cuando los eventos A y B sean independientes, la probabilidad de A dado B será igual a la probabilidad de A.

Sabemos que dos eventos son independientes si se cumple la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, por anterior es fácil ver que $P(A \mid B) = P(A)$.

Ejemplo 35 *Se lanza una dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener águila con la moneda, cuando sabemos que se obtuvo un seis en el dado?*

Solución. Definimos: evento A, obtener águila con la moneda, evento B, obtener seis con el dado. La probabilidad de de $A \cap B$ es $\frac{1}{12}$ y la probabilidad de B es $\frac{1}{6}$, as, la probabilidad condicional es

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

La probabilidad es un medio y es la misma de obtener águila al lanzar la moneda, es decir, el resultado del dado no influye en la moneda.

■

4.4 Regla de probabilidad total

Un acontecimiento puede tener muchas causas, en ocasiones para obtener la probabilidad de un evento dado, es necesario valorar qué tan probable es que se presenten dichas causas; o en su defecto que tan probable es que haya sido consecuencia de cierta causa, si es que el evento ya ocurrió.

Para ello, es necesario una partición del espacio muestral. Pensemos en un conjunto de sucesos, o causas, que denotamos como $B_1, B_2, \ldots, B_n$, y que tendrán las siguientes particularidades:

1. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ para toda i diferente de j.
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$, es decir, las intersecciones de cualquiera dos sucesos, o causas, será siempre el vacio.

Ahora pensemos en un evento A definido en este espacio muestral. La probabilidad del evento A se puede obtener como

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n)P(B_n).$$

A esta fórmula se le conoce como *Regla de probabilidad total.* Para mostrar cómo se obtiene la fórmula, observemos que al evento A lo podemos expresar como $(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$, que es la unión de ventos ajenos, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)) \\ P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n). \end{aligned}$$

Observemos que la probabilidad de $A \cap B_1$ la podemos expresar como

$$P(A \mid B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(A \mid B_1)P(B_1) \;=\; P(A \cap B_1).$$

Sustituyendo $P(A \cap B_1)$ por $P(A \mid B_1)P(B_1)$ en cada uno de los elementos de la suma, (cada elemento de la suma se refiere a una B distinta pero el despeje es igual), llegamos a

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n)P(B_n).$$

Ejemplo 36 *En cierto Estado hay tres candidatos para gobernador,A, B y C. Por el contenido de su propaganda se piensa que de llegar el candidato A al gobierno, los impuestos subirán con probabilidad 0.6, en caso de que sea B el candidato ganador, la probabilidad de que los impuestos suban es de 0.4, y si es C es el vencedor la probabilidad es de 0.2. Con base en las últimas encuestas se cree que hasta ahora el candidato A tiene un 50 por ciento de los votos, el candidato B el 30 por ciento y el resto son para el candidato C ¿Cuál es la probabilidad de que suban lo impuestos?*

Solución. Sea K el evento de que suban los impuestos, y las letras A, B y C representan el triunfo de cada uno de los candidatos. Los impuestos tienen una probabilidad diferente de subir para cada candidato, por ejemplo, para el candidato A la podemos expresar como P(K/A), pero antes de esto, tiene que ganar el candidato A , lo que podemos representar como P(A), así, la probabilidad de que los impuestos suban a causa del candidato A es P(K/A)P(A), pues los eventos que acabamos de describir son independientes. Lo anterior es similar con los tres candidatos, así que la probabilidad de que suban los impuestos, que representamos con P(K), es

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \mid A)P(A) + P(K \mid B)P(B) + P(K \mid C)P(C) \\ P(K) &= 0.6(0.5) + 0.4(0.3) + 0.2(0.2) = 0.46. \end{aligned}$$

■

4.5 Teorema de Bayes

Pensando en el ejemplo anterior. Supongamos que fuimos de viaje y nos perdimos las elecciones. Al regresar sabemos que ya han subido los impuestos pero no sabemos quien es el candidato que resultó electo, ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato A sea el gobernador?

La probabilidad que deseamos calcular es $P(A \mid K)$, es decir, estamos buscando la probabilidad de que el candidato ganador sea el A dado que han subido los impuestos. Por la forma en que definimos la probabilidad condicional, y lo obtenido en el ejemplo anterior sabemos que

$$P(A \mid K) = \frac{P(K \cap A)}{P(K)} = \frac{P(K \cap A)}{P(K \mid A)P(A) + P(K \mid B)P(B) + P(K \mid C)P(C))}.$$

La probabilidad de $K \cap A$ la podemos calcular como $P(K \mid A)P(A) = (0.5)(.06) = 0.3$.

La probabilidad de K ya la conocíamos y es 0.46. Así, pues, el resultado que buscamos es

$$P(A \mid K) = \frac{P(0.3)}{P(.046)} = 0.6521.$$

Entonces, dado que subieron los impuestos es muy probable que el candidato A haya sido electo como gobernador.

El problema anterior fue resuelto haciendo uso de un interesante teorema conocido como Teorema de Bayes. El teorema dice lo siguiente:

Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituyen una división del espacio muestral Ω, donde $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, entonces para cualquier evento A que esté contenido en Ω, se tiene que

$$\begin{aligned} P(B_j \mid A) &= \frac{P(B_j \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} \\ &= \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A \mid B_i)}. \end{aligned}$$

Laplace expone el teorema de Bayes en el sexto de sus principios, y dice lo siguiente:

> "Cada una de las causas a la que puede atribuirse un acontecimiento observado se halla indicada con una verosimilitud tanto mayor cuanto más probable sea que ocurra el acontecimiento si se supone existente dicha causa. La probabilidad de la existencia de cualquiera de estas causa es, pues, una fracción cuyo numerador la probabilidad del acontecimiento resultante de la de la causa en cuestión y cuyo denominador es la suma de las probabilidades semejantes relativas a todas las causas. Si estas distintas causas, consideradas a priori, son desigualmente probables, entonces, en lugar de la probabilidad del acontecimiento resultante de cada causa, debemos emplear el producto de dicha probabilidad, por la de la causa misma. Este es el principio fundamental de la rama del análisis del azar que consiste en remontarse de los acontecimientos a las causas."[5]

Ya hemos estudiado los seis principios básicos que expone Laplace en su ensayo filosófico de las probabilidades. A continuación veremos algunos ejemplos y en el siguiente capítulo, y último, revisaremos el concepto de esperanza.

4.6 Ejemplos

Ejemplo 37 *En una cárcel hay tres prisioneros, que llamaremos A, B y C, dos de ellos serán liberados sin importar el crimen que hayan cometido, pero los prisioneros desconocen quienes son los favorecidos. El carcelero, que es amigo de A, tiene la información. A le pregunta al carcelero si será liberado, el carcelero no piensa que sea buena idea decírselo, pero accede a informarle el nombre de un prisionero que quedará libre, (C o B). A rechaza esta propuesta argumentando que antes de saber quien es el otro prisionero que será liberado, el tiene una probabilidad de $2/3$ de quedar libre, pero al saber el nombre su probabilidad disminuiría a $1/2$. El prisionero argumenta su postura de la siguiente forma: al ser tres los prisioneros, A, B y C, las posibles parejas de liberados son AB, AC o BC. Al ser 3 las posibles parejas,* *y al estar A en 2 de ellas, la probabilidad de que salga es de 2/3, pero al saber A si B, por ejemplo, será liberado, habría sólo dos posibles parejas, AB o BC, por lo tanto la probabilidad de A disminuiría a 1/2. ¿Será cierto lo que argumenta el prisionero A?*

Solución. El espacio muestral del problema anterior es $\{AB, AC, BC\}$. Los puntos muestrales son igualmente probables, el prisionero A tiene razón al decir que su probabilidad de ser liberado es de $2/3$. Sin embargo, al hacer los cálculos tomando en cuenta la información brindada por el carcelero comete errores; el prisionero A no contempla el hecho de que el carcelero puede dar las respuestas B o C, con diferentes probabilidades, y estas dependerán de la pareja que sea liberada. Por ejemplo, si la pareja liberada es AB el carcelero mencionará a B con probabilidad 1, pues no puede mencionar a A, mientras que si la pareja liberada es BC, entonces el carcelero mencionará a B con probabilidad $1/2$. El nuevo espacio muestral, tomando en consideración la información que proporciona el carcelero, consta de los cuatro casos siguientes:

1. AB son liberados y el carcelero dice B.
2. AC son liberados y el carcelero dice C.
3. BC son liberados y el carcelero dice B.
4. BC son liberados y el carcelero dice C.

En el caso 1, al ser liberados A y B, lo cual ocurre con una probabilidad de $1/3$, el carcelero se verá obligado a mencionar a B. Por lo tanto la probabilidad de que ocurra el caso 1 es de $1/3$. El caso 2 es similar al 1, y ocurre con probabilidad igual a $1/3$.

En el caso 3 la pareja BC es liberada con una probabilidad de $1/3$, pero el carcelero tendrá dos posibles alternativas a saber B y C, por lo tanto dirá B con probabilidad $1/2$, así que la probabilidad de que ocurra el caso 3 es de $(1/3)(1/2) = 1/6$. La situación es similar en el caso 4.

Al calcular la probabilidad de que el prisionero A salga de prisión dado que el carcelero menciona que B será liberado obtenemos que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Mostrando así que la probabilidad de que A sea liberado, dado que A sabe que B será liberado, es la misma que cuando lo desconoce.

■

Ejemplo 38 *Ian Hacking, según escribe en su libro, "El surgimiento de la probabilidad"*[1]*, expresa que si alguien puede resolver el siguiente problema es que sabe bastante de probabilidades.*

Un hombre tiene 37 cerillos en una caja en su bolsillo izquierdo y 21 en una caja en su bolsillo derecho, toma cualquiera de las cajas al azar y utiliza un cerillos ¿cuál es la probabilidad de que llegue a un punto en que tenga un fósforo en cada bolsillo?

Solución. Denotemos con una I el evento de que el hombre seleccione el bolsillo izquierdo para sacar de este la caja de cerillos, de forma similar usaremos la letra D para la bolsa derecha. Del enunciado sabemos que

$$P(I) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

Lo que se desea es tener al final un cerillo en cada caja. En total tenemos $37 + 21 = 58$ cerillos, de los cuales debemos utilizar 56, cuidando que los 2 restantes no estén en la misma caja, pensemos en A como el evento que acabamos de describir.

Para resolver este problema, nos auxiliaremos del probelma d ela moneda. Pensemos en lanzar 56 veces una moneda que tiene una I en una de sus caras y en la otra una D, deseamos que al lanzar la moneda obtengamos 36 veces la I y 20 D, por lo tanto

$$P(A) = C^{56}_{36} \left(\frac{1}{2}\right)^{36} \left(\frac{1}{2}\right)^{56-36}$$

[1] Ian Hacking, El surgimiento de la probabilidad, 1995.

$$\begin{aligned} &= \frac{56!}{(56-36)!36!}\left(\frac{1}{2}\right)^{36}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\ &= 0.01090258. \end{aligned}$$

Así pues, la probabilidad de que al final haya un cerrillo en cada caja es 0.01090258, y al parecer, ya sabemos un poco de probabilidad.

Ejemplo 39 *En el capítulo 1 enunciamos el problema de la división, que trataba lo siguiente: dos personas, que llamaremos A y B, apuestan 30 monedas cada una. El ganador será aquel que primero acumule cuatro partidas ganadas, las partidas pueden ser, por ejemplo, lanzamientos de monedas. En cierta etapa del juego, donde A tiene ganadas dos partidas y B sólo una, el juego debe ser cancelado ¿Cómo debe entonces repartirse el dinero si no se concluyó el juego?*

Solución. Con A_i denotemos la probabilidad de que A gane la partida i, y con A_i^c que la pierda, donde i puede tomar los valores 1, 2 ó 3, pues de seguir el juego después de tres partidas seguro tendríamos un ganador.

Existen tres formas o combinaciones que dan el triunfo a A; si A gana la primera partida, o si pierde la primera y gana la segunda, o si pierde la primera y la segunda y gana la tercera. Lo anterior lo podemos expresar en términos de probabilidad como sigue:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

La probabilidad de que A gane es de $7/8$, por lo tanto la cantidad acumulada debe dividirse en 8 partes y entregarle 7 de estas al jugador A.

■

Ejemplo 40 *En una urna hay tres bolas azules, tres blancas y tres rojas. Se sacan dos bolas una tras otra, sin reposición. Dado que en la segunda extracción se obtuvo una bola blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido roja? Lo anterior suponiendo que por alguna razón no sabemos lo que se obtuvo en la primera extracción.*

Solución. Denotemos con Ai el hecho de que en la extracción i se obtuvo una bola azul, con $i = 1, 2$. De forma similar usaremos Bi y Ri. Por ejemplo, $B2$ denota que obtuvimos una bola blanca en la segunda extracción.

Lo que deseamos calcular es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja, $R1$, dado que la segunda fue blanca, $B2$, es decir

$$\begin{aligned}
P(R1 \mid B2) &= \frac{P(R1 \cap B2)}{P(B2)} \\
&= \frac{P(B2 \mid R1)P(R1)}{P(B2 \mid R1)P(R1) + P(B2 \mid A1)P(A1) + P(B2 \mid B1)P(B1)} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{3}{9}\right)} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Observación: $P(B2)$ es la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga un bola blanca, notemos que no se dice nada de la primera extracción, podemos suponer fue una bola azul, y que la segunda fue blanca, lo anterior lo podemos representar como $P(B2 \cap R1) = P(B2 \mid R1)P(R1)$. Al ser tres los posibles colores para la primera extracción llegamos a que

$$P(B2) = P(B2 \mid R1)P(R1) + P(B2 \mid A1)P(A1) + P(B2 \mid B1)P(B1).$$

■

Ejemplo 41 *Pensemos nuevamente en una urna con tres bolas rojas, tres azules y tres blancas. Se sacan dos bolas, sin reemplazo. En la primera extracción se obtuvo una bola que no es roja, ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción se obtenga una bola blanca?*

Solución. Con la notación que definimos en el ejemplo anterior, podemos representar la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca, $B2$, dado que la primera no fue roja, $A1$ unión $B1$, como sigue

$$\begin{aligned} P(B2 \mid A1 \cup B1) &= \frac{P\Big(B2 \cap (A1 \cup B1)\Big)}{P(A1 \cup B1)} \\ &= \frac{P(B2 \cap A1) + P(B2 \cap B1)}{P(A1) + P(B1)} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{6}{9}} \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Así concluimos que la probabilidad de que en la segunda extracción se obtenga una bola blanca dado que en la primera extracción se obtuvo una bola que no es roja es $5/16$.

■

Ejemplo 42 *Problema del taxi. Un taxi se vio envuelto en un choque nocturno de "pega y corre". Existen dos compañías de taxis en la ciudad, la compañía de taxis azules y la compañía de taxis verdes. Se sabe que el 85 por ciento de los taxis de la ciudad son verdes y 15 por ciento azules. Un testigo de la escena identificó el taxi que participó en el accidente como azul. Este testigo fue probado bajo similares condiciones de visibilidad e hizo las identificaciones correctas del color en el 80 por ciento de las instancias de prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente fuera azul y no verde?*

Solución. Este problema (extraído del libro de J. Michael Shaughnessy [8]), puede causar confusión. Michael Shaughnessy menciona que incluso personas que ya han estudiado probabilidad, tienen dificultad para resolver problemas como el del taxi. Antes de leer la solución se recomienda tratar de resolverlo, aunque no se llegue a la solución.

Intuitivamente ¿cuál es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente fuera azul? Se ha hecho el experimento de preguntar, a estudiantes y maestros, por un resultado intuitivo para este problema, y las respuestas tienden a ser 0.8, es decir, se desprecia la información relacionada con la proporción de taxis azules y verdes que hay en la ciudad, y se guían sólo por la información que brinda el testigo.

La solucion al problema que se propone es la siguiente. Supongamos que se hace una prueba con 1000 taxis, según lo enunciado en el problema, el testigo identificará el color correctamente de un 80 por ciento, es decir, se espera que de los 150 taxis azules que hay en la prueba, identificará a 120 como azules y se equivocará en 30 ocasiones diciendo que son verdes; para los taxis azules sucede lo mismo, se equivocará en 170 ocasiones identificando a los taxis verdes como azules y en 680 acertará. Con lo anterior podemos construir el siguiente cuadro.

	Azul	Verde
150 Azul	120 acierta	30
850 Verde	170	680 acierta
	290	710

Para saber cual es la probabilidad de que el taxi que participó en el accidente sea azul, debemos fijarnos en el total de taxis que el testigo identifica como azules y compararlo con el número de estos que realmente son azules. Por lo tanto la probabilidad de que el taxi que participó en el accidentes sea azul es de 120/290=0.4137. Notemos que el hecho de tomar a mil taxis como prueba no afecta en nada el resultado.

Otra forma de solucionar el problema es haciendo uso del teorema de Bayes. La partición del espacio muestral estará constituida por los eventos V y A, es decir, por taxis verdes y azules. Tenemos que calcular la probabilidad de que el taxi haya sido azul dado que el testigo lo identifico como azul, es decir, $P(A \mid TA)$, donde TA representa el hecho de que el testigo haya identificado al taxi como azul. Haciendo uso del teorema de Bayes tenemos que

$$P(A \mid TA) = \frac{P(A \cap TA)}{P(A \cap TA) + P(V \cap TA)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(A)P(TA \mid A)}{P(A)P(TA \mid A) + P(V)P(TA \mid V)} \\
&= \frac{(0.15)(0.8)}{(0.15)(0.8) + (0.85)(0.2)} \\
&= 0.4137.
\end{aligned}
$$

La probabilidad de que el taxi haya sido azul dado que el testigo lo identificó como azul, es 0.41 y no 0.8 como algunos piensan.

■

Ejemplo 43 *Un argumento en favor de La Divina Providencia mediante el uso de la teoría de la probabilidad de John Arbuthnot.[3]*

John Arbuthnot compara el número de niños y niñas bautizados entre los años de 1629 y 1710, observando que en estos 82 años el número de niños supera al de las niñas, es decir, que nacen más niños que niñas. Al suponer que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma, es decir un medio, es extraño que durante estos 82 años el nacimiento de niños sea superior. Pensemos que en cada año puede haber más hombres o mujeres con la misma probabilidad, entonces la probabilidad de que en cada uno de los 82 años hayan nacido más hombres que mujeres es

$$\frac{1}{2^{82}} = \frac{1}{4835703278458521669882970 4}.$$

La probabilidad es muy pequeña, por lo que Arbuthnot atribuye el hecho de que nazcan más hombres que mujeres a una intervención Divina. Él argumenta que al ser los hombres los que van a las guerras, y en general que sus labores son más peligrosas, hay más probabilidad de muerte para ellos, así que para compensarlo nacen más hombres que mujeres. Lo cual resulta un ingenioso argumento, y es, de hecho, la primer prueba de hipótesis estadística que se haya publicado.

■

Capítulo 5

Esperanza

Cuando decidimos comprar un boleto para una rifa o apostamos en un juego de azar estamos cambiando nuestro dinero, o el bien que apostemos, por el derecho a esperar lo que el azar nos pueda devolver, pero esperando ganancias, claro está. La esperanza es, dicen algunos, algo que no debemos perder. Los pioneros en los estudios de probabilidad, no se conformaron con no perderla, sino que quisieron cuantificarla o mediarla, y con base en ésta tomar decisiones.

5.1 Esperanza matemática

En la teoría de la probabilidad también existe el concepto de la esperanza que se conoce como "esperanza matemática". La palabra que se utilizó para definir la esperanza fue *expectatio*, que es una palabra en latín, de allí viene el término en inglés *expectation*, que se utiliza en lugar del término *hope* (esperanza). Básicamente la esperanza matemática es un promedio ponderado mediante la probabilidad de cada uno de los posibles resultados de un experimento.

Entre los primeros escritos que se tienen sobre alguna idea intuitiva de la esperanza están los de Cardano [3], donde se expone una relación entre la cantidad apostada y las posibilidades de ganar. Por ejemplo, si dos jugadores,

A y B, compiten para ganar un cantidad M de monedas, donde M se forma con contribuciones equitativas de A y B, entonces las posibilidades de ganar, para cada jugador también deberán ser iguales; de no ser así alguno de los jugadores tendrá ventaja, es decir, alguno tendrá mayor esperanza de ganar.

Quien por primera vez expuso de manera concreta el concepto de esperanza fue un joven holandés de nombre Christian Huygens, (1629-1695) [3]. Él explica que, si bien en los juegos de azar los resultados son inciertos, la esperanza que tiene un jugador de perder o ganar es un valor calculable e invariable si persisten las condiciones del juego. La idea de Huygens se expone en la siguiente proposición.

Si el número de los azares que hay a favor de b es p, y el número de azares que hay a favor de c es q, eso vale tanto como si tuviéramos

$$\frac{bp+cq}{p+q}.$$

Si reinterpretamos la fórmula de Huygens podemos llegar a una expresión como

$$\frac{bp+cq}{p+q} = b\frac{p}{p+q} + c\frac{q}{p+q} = b(p) + c(q).$$

Aunque en el teorema de Huygens no se especifica, suponemos que $p + q$ suma uno. Si se está tratando de un problema de apuestas, las letras b y c representan pérdida y ganancia de un jugador y los cocientes son las probabilidades de que ocurra b o c.

Podemos reescribir esta proposición para un experimento aleatorio que tenga infinidad de posibles resultados.

Si un experimento aleatorio puede tomar los valores x_1, x_2, ...,x_n, y conocemos las probabilidades de cada uno de estos valores, entonces la esperanza de este experimento aleatorio que llamaremos X es

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Para ejemplificar, supongamos que dos jugadores, A y B, compiten por un premio de 10 monedas de oro, de las cuales cada jugador aportó 5. Por experiencia se cree que la probabilidad de ganar para A es de $6/10$, y la de B es $4/10$. Por lo tanto la esperanza de A es

$$E(A) = (5)\frac{6}{10} + (-5)\frac{4}{10} = 3 - 2 = 1.$$

Y la esperanza de B es

$$E(A) = (5)\frac{4}{10} + (-5)\frac{6}{10} = 2 - 3 = -1.$$

En todos los problemas donde participen dos jugadores, y la cantidad de dinero que esté en juego sea contribución de los dos, la esperanza será simétrica, a menos de que ambas sean cero.

La esperanza de A es de 1, pero ¿cómo se interpreta esto? Para Huygens la esperanza matemática es la utilidad promedio que se obtiene al realizar una serie de juegos bajo las mismas condiciones. Es decir, si los jugadores realizaran 50 juegos, se esperaría que al final A obtenga una ganancia de $50 \times 1 = 50$ monedas. La anterior es una buena interpretación de la esperanza, ¿pero qué sucede si sólo se juega una vez? Existe un problema, y es que al efectuar sólo un juego, es imposible que el jugador obtenga una ganancia de 1 moneda, pues pierde sus 5 monedas o gana las 5 del adversario, así que aquí tenemos un problema en dicha interpretación.

Otro enfoque para la esperanza es el que usa Pascal, éste relaciona la esperanza matemática con derechos sobre la cantidad apostada. Recordemos el problema de la división y resolvámoslo usando el concepto de esperanza matemática. Supongamos que son 20 las monedas que están en juego, son dos los jugadores, A y B. Para que gane A debe obtener una partida, por su parte B debe obtener 3, la probabilidad de ganar una partida es un medio para cada jugador. Bajo los supuestos anteriores podemos obtener la probabilidad de ganar para cada jugador. Sea A_i el evento en el que A gana la partida i, con $i = 1, 2, 3$, y A_i^c el evento en que pierde la partida. La probabilidad de que A gane el juego es

$$P(A) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Entonces la esperanza de A es

$$E(A) = (10)\frac{7}{8} + (-10)\frac{1}{8} = \frac{60}{8} = 7.5.$$

La esperanza de A es 7.5, esto es, la ganancia promedio que tendrá en caso de continuar con el juego. El dinero que gana el jugador A lo pierde B, por lo tanto, B deberá pagar 7.5 monedas de las 10 que en un principio apostó.

Con el concepto de esperanza podemos mostrar de una forma más sencilla cuando un juego es justo. Paradójicamente un juego será justo cuando la esperanza sea cero para cada jugador. Es decir, si la teoría se refleja en la practica, después de una noche completa de estar jugando, cada jugador se irá a casa con su dinero y ni una moneda más. La siguiente ecuación representa la situación típica en un juego de azar que se supone es justo

$$E(A) = bp - aq = 0.$$

$$bp = aq.$$

Donde p es la probabilidad de que A gane el juego, q es la probabilidad de que pierda, a es la cantidad que puede perder y b la que puede ganar. Observemos que $bp = aq$ refleja la idea intuitiva de esperanza que manejaba Cardano; si la probabilidad de un jugador es un medio, éste debe aportar la mitad del monto que está en juego, si la probabilidad de ganar es menor que un medio deberá contribuir con un cantidad menor a la mitad del monto apostado, es decir, se debe cumplir una relación entre la cantidad que aporta el jugador y la probabilidad que tenga de ganar.

5.2 Paradoja de San Petersburgo

La esperanza puede tomar valores negativos o positivos y hasta llegar a ser un valor infinito; por ejemplo, en la Paradoja de San Petersburgo se muestra una situación en la que la esperanza es infinita. Este problema fue planteado por el matemático suizo Nicolás Bernoulli en 1713, y posteriormente modificado y publicado por su sobrino Daniel Bernoulli en las *Transactions* de la Academia de San Petersburgo, Rusia[4].

Podemos describir la situación que genera una esperanza infinita como sigue: Un hombre dadivoso, un rey por ejemplo, decide regalar monedas de oro a uno de sus súbditos, ¿cuántas monedas? Eso dependerá de la suerte. El rey le ofrece al plebeyo dos opciones: una es tomar todas las monedas que pueda guardar en sus bolsillos e irse con ellas, que podrían ser 100 aproximadamente; la otra, más interesante, es el pago de 2^n monedas de oro, donde n es el número de lanzamientos de una moneda hasta que se obtenga cruz. Por ejemplo, si en el primer lanzamiento se obtiene cruz, el rey entregará 2 monedas de oro, si es en el segundo lanzamiento el rey entregará 4 monedas, etc. Así, todas las posibles cantidades en monedas de oro, que el rey puede regalar al plebeyo, están contempladas en la siguiente sucesión

$$2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$$

Representemos con X la cantidad de monedas de oro que el rey regala al plebeyo mediante la opción dos. La probabilidad de que X sea igual a 2 es $\frac{1}{2}$, pues es la misma que obtener cruz en el primer lanzamiento. Para que X sea igual a 4, el plebeyo debe obtener cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo, cada uno de estos sucesos ocurre con probabilidad igual a $\frac{1}{2}$, y al ser eventos independientes, la probabilidad de que ocurran ambos es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Es fácil deducir que la probabilidad de que X sea igual a 2^n es $\frac{1}{2^n}$, es decir, $P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

Para obtener la ganancia promedio del plebeyo, si éste decide elegir la opción dos, debemos calcular la esperanza de X. Recordemos que la esperanza de un experimento aleatorio, es la suma de los valores que puede tener el experimento, ponderados mediante la probabilidad de que ocurra cada uno de ellos. Es decir,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} \\
&= 2\frac{1}{2} + \frac{4}{1}4 + 8\frac{1}{8} + \ldots \\
&= 1 + 1 + 1 + \cdots \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Si el plebeyo opta por la opción uno, la de llenar sus bolsillos con monedas de oro, ganará aproximadamente 100 monedas. Con la otra opción, la de lanzar una moneda hasta obtener cruz, se espera que gane ¡una infinidad de monedas de oro! El plebeyo no tendrá que pensar mucho para elegir una de las opciones ¡una infinidad de monedas de oro!... Yo tomaría las monedas que pudiera guardar en mis bolsillos.

¿Por qué no elegir la opción dos? El primer argumento en contra es que, el número de monedas que el rey tiene, seguramente es finito, (exceptuando el caso en que sea un rey mago). Y podemos pensar que ciertamente no hay una ganancia infinita, pero el resultado nos augura que ganaremos una cantidad grande de monedas, veamos el siguiente argumento para desengañarnos.

Con la opción dos no hay forma de ganar 100 monedas pero un número próximo es 128, para esto se debe obtener cruz hasta el séptimo lanzamiento, la probabilidad de que ocurra esto es $P(X = 7) = \frac{1}{2^7} = 0.0078125$, es decir, ocurre aproximadamente 8 de cada 1000 veces. Es decir, la probabilidad de ganar una cantidad de monedas similar lo que se puede ganar con la primera opción es muy pequeña.

Podemos ser un poco más persistentes y argumentar que la probabilidad que debemos calcular para la segunda opción es la de obtener una ganancia mayor o igual a 128 monedas, y al hacerlo obtenemos que

$$
P(X \geq 128) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 4) + \ldots + P(X = 64)]
$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 0.984375 \\ &= 0.015625. \end{aligned}$$

Lo que podemos interpretar como tener 1.5 oportunidades de 100 para obtener una ganancia mayor con la segunda opción. Así que definitivamente es mejor la primera opción.

Recordemos, pues, que el valor que puede tomar la esperanza matemática es cualquier número real, pero hay que hacer nuestras interpretaciones con cuidado.

5.3 Suma de precios justos

Huygens da por válidos varios principios de la teoría de la esperanza, por ejemplo que los precios justos son aditivos. Supongamos que participamos en dos loterías, en la primera el premio es 1000 pesos, el número de boletos es 100, y en la otra hay 500 boletos y el premio es de 10000 pesos. Para que una lotería sea justa el valor del boleto debe ser igual al premio entre el número de boletos, por lo tanto el costo por boleto en la primera lotería es de 10 pesos y en la otra lotería de 20 pesos. Como las loterías son justas si compramos un boleto para cada una de ellas estaremos nuevamente en una situación de juego justo.

Representemos con X la situación de participar en la primera lotería y con Y en la segunda, entonces tenemos que

$$E(X) + E(Y) = E(X + Y).$$

Un juego es justo si la esperanza es cero, las loterías X y Y tienen esperanza cero: En la lotería X podemos ganar 990 pesos, 1000 menos los 10 que pagamos, con probabilidad $1/100$, y perdemos 10 con probabilidad $99/100$.

$$E(X) = (990)\frac{1}{100} + (-10)\frac{99}{100} = 9.9 - 9.9 = 0.$$

De forma análoga para Y, tenemos

$$E(Y) = (9980)\frac{1}{500} + (-20)\frac{499}{500} = 19.96 - 19.96 = 0.$$

Con lo anterior podemos verificar que $E(X) + E(Y) = 0$.

Para obtener la probabilidad de $E(X+Y)$ primero debemos entender lo que significa $X + Y$. Con X representamos un experimento aleatorio, en este caso la primera lotería, la cual puede tener dos resultados: ganar 990 pesos o perder 10, y a cada uno de estos le asociamos una probabilidad. Semejante para la segunda lotería. No hay que complicarnos mucho, pensemos en un nuevo experimento Z, los valores que puede tomar Z son los posibles resultados de jugar en las dos loterías, es decir, todas las posibles combinaciones de $X + Y$.

$$Z = \begin{cases} -10 + (-20) = -30 & \text{si } X = -10 \text{ y } Y = -20, \\ -10 + 9980 = 9970 & \text{si } X = -10 \text{ y } Y = 9980, \\ 970 + (-20) = 970 & \text{si } X = 970 \text{ y } Y = -20, \\ 990 + (9980 = 10970 & \text{si } X = 970 \text{ y } Y = 9980. \end{cases}$$

hemos construido el espacio muestral de Z, por lo que Z puede tomar 1 de 4 valores: -30, 9970, 970 ó 10970. La probabilidad de cada uno de los puntos muestrales es

$$\begin{aligned} P(Z = -30) &= P(X = -10, Y = -20) \\ &= P(X = -10)P(Y = -20) \\ &= \left(\frac{99}{100}\frac{499}{500}\right) \\ &= 0.98802, \end{aligned}$$

$$P(Z = 9970) = \left(\frac{99}{100}\frac{1}{500}\right) = 0.00198,$$

$$P(Z = 9970) = \left(\frac{1}{100}\frac{499}{500}\right) = 0.00998,$$

$$P(Z = 10970) = \left(\frac{1}{100}\frac{1}{500}\right) = 0.00002.$$

Ya definimos el espacio muestral de Z, y asociadomos una probabilidad a cada uno de los puntos muestrales. En base a lo anterior es relativamente fácil obtener la esperanza de Z.

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= E(Z) \\
&= (-30)(0.98802) + 9970(0.00198) + 997(0.00998)10970(0.00002) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Lo anterior confirma que la suma de precios justos es también un precio justo. Además la igualdad

$$E(X) + E(Y) = E(X+Y),$$

se cumple siempre.

5.4 Ejemplos

Ejemplo 44 *Una persona puede elegir entre dos opciones para que le salden una deuda de 100 pesos. La primera opción es recibir los 100 pesos, la segunda es recibir un boleto para una rifa de 1000 pesos, en total son 10 boletos. ¿Cuál es la mejor opción?*

Solución. Utilizando al concepto de esperanza podemos tomar la mejor decisión. La esperanza de la primera opción es de 100. Para obtener la esperanza en la segunda opción primero obtengamos la probabilidad de que gane los 900 pesos (1000 menos los 100 que le debían), y la de que pierda sus 100 pesos.

$$P(\text{ganar 900 pesos}) = \frac{1}{10}$$
$$P(\text{perder 100 pesos}) = \frac{9}{10}.$$

La esperanza de la segunda opción es

$$E(X) = (900)\frac{1}{10} + (-100)\frac{9}{10} = 90 - 90 = 0.$$

Como en la segunda opción su esperanza es cero, será mejor que pida que le sean pagados sus 100 pesos.

En la conclusión anterior se esta cometiendo un error ¿cuál es? En realidad la esperanza para la primera opción, quedarse con los 100 pesos, no es 100, sino cero, ¿por qué? Observemos que la esperanza que obtuvimos para la segunda opción, es para calcular la ganancia esperada, y la ganancia esperada es cero, al igual que en la primera opción. Al ser las dos esperanzas iguales a cero, debemos entender que se espera que no ganemos y perdamos nada en ambos casos, sin embargo hay que diferenciar que en un caso tenemos comprada una oportunidad para ganar 1000 pesos, y en el otro caso tenemos los 100 en efectivo. Así, pues, en teoría las dos opciones son "iguales".

■

Ejemplo 45 *La ruleta que se usa para apostar en los casinos consta de 38 áreas identificadas por los números del 1 al 36 y los símbolos 0 y 00. Los jugadores apuestan a uno de los 36 números y en caso de que salga su número reciben 36 veces lo que hayan apostado. La casa siempre gana cuando sale el 0 y el 00. ¿Cuál es la ganancia promedio del jugador?*

Solución. Pensemos que la apuesta del jugador es de una moneda. El jugador ganará 35 monedas con probabilidad $1/38$, y perderá su moneda con probabilidad $37/38$, así la esperanza para el jugador es

$$E(\text{jugador}) = (-1)P(\text{pierda}) + (35)P(\text{gane}) = -\frac{37}{38} + \frac{35}{38} = -\frac{2}{38}.$$

La esperanza del jugador es de -2/38, que es aproximadamente - 0.052, y se espera que pierda aproximadamente 5.2 por ciento de su dinero.

■

Ejemplo 46 *Alicia se encuentra prisionera en una habitación con cuatro puertas idénticas. Detrás de cada puerta se esconde un duende. Alicia tendrá que abrir las puertas para conocer a cada uno de los duendes, una vez que lo logre será libre. Sin embargo, existe un problema, y es que los duendes pueden moverse, es decir, cambiar de puerta, excepto el duende de la última puerta que Alicia abrió. ¿Cuál es el número esperado de veces que Alicia tendrá que abrir las puertas para poder conocer a los cuatro duendes y ser libre?*

Solución. Sea N el número de veces que Alicia abre las puertas. N se puede calcular como

$$N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

donde X_1 representa el número de puertas que Alicia abre hasta conocer al primer duende, X_2 el número de puertas que abre hasta conocer al segundo duende, etc.

Debemos calcular $E(N)$, o calcular $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$, para conocer el número esperado de veces que Alicia debe abrir las puertas. Recordemos el principio que Huygens aplica en las loterías donde se muestra que $E(X) + E(Y) = E(X + Y)$, y apliquémoslo a este problema para llegar a la siguiente igualdad.

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4).$$

La esperanza de X_1 es 1, lo anterior se debe al hecho de que cuando Alicia abra la primera puerta seguro conocerá a un duende. Como el duende que se encuentra detrás de la puerta que Alicia recién abrió no puede moverse, en su segundo intento Alicia seguramente conocerá a un nuevo duende, por lo que la esperanza de X_2 es también 1.

Hasta aquí todo marcha bien, pero para conocer al tercer duende empiezan los problemas. Al abandonar la segunda puerta Alicia debe elegir una de las tres restantes y al hacerlo no necesariamente conocerá a un nuevo duende, pues de los tres restantes ya conoce a uno. Para obtener la esperanza de X_3 describamos su espacio muestral y asignémosle a cada elemento su probabilidad.

Denotemos con una F el hecho de que en su siguiente intento Alicia falle y no conozca a un nuevo duende, y con una C el hecho de que tenga éxito y conozca a un nuevo duende. Puede ser que Alicia al abrir la siguiente puerta conozca a un nuevo duende, o puede ser que no, es más puede abrir diez o más veces las puertas sin conocer al duende diferente. Lo anterior lo podemos representar con las siguientes cadenas de F's y una C.

Cadena de intentos.	Número de intentos (k)
C	k = 1
F C	k = 2
F F C	k = 3
...F F C	Pueden ser infinitos

Ya describimos el espacio muestral, ahora para asignar probabilidades supongamos que cada vez que Alicia elige una puerta lo hace de manera independiente. Expresemos con la letra p la probabilidad de conocer a un nuevo duende y con la letra q la probabilidad del complemento, es decir, q es la probabilidad de no conocer a un nuevo duende. Por ejemplo, la probabilidad de que Alicia conozca al tercer duende en su primer intento es

$$P(X_3 = 1) = p.$$

Para que Alicia conozca al tercer duende en su segundo intento, en el primer intento debe fallar y esto curre con probabilidad q, y en el segundo debe tener éxito, y esto ocurre con probabilidad p.

$$P(X_3 = 2) = qp.$$

La fórmula para que Alicia conozca al tercer duende hasta el intento k es

$$P(X_3 = k) = q^{k-1}p.$$

Es decir, *k-1* fracasos antes del primer éxito. Para obtener la esperanza aplicamos la fórmula y llegamos a

$$E(X_3) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X_3 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p.$$

Desarrollando la última suma obtenemos

$$E(X_3) = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots \tag{5.1}$$

Si multiplicamos (5.1) por q

$$q(E(X_3)) = q(p+2qp+3q^2p+4q^3p+\dots) = qp+2q^2p+3q^3p+4q^4p+\dots \tag{5.2}$$

Al restar (5.1) menos (5.2) obtenemos

$$E(X_3) - q[E(X_3)] = p + qp + q^2p + q^3 \dots$$

Enfoquemos nuestra atención sólo en la parte derecha de la última expresión para mostrar que $p + qp + q^2p + q^3 \dots$ es igual a uno. Para empezar sea $S = p + qp + q^2p + q^3 \dots$.

Si multiplicamos S por q obtenemos

$$qS = qp + 2q^2p + 3q^3p + 4q^4p \dots$$

Ahora restemos S menos qS.

$$S - qS = p.$$

Despejando S

$$S - qS = S(1-q) = p$$

$$S = \frac{p}{1-q}.$$

Pero como sabemos que $(1-q) = p$, entonces

$$S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Sabiendo que $p + qp + q^2p + q^3 \ldots = 1$, entonces

$$E(X_3) - q(E(X_3) = p + qp + q^2p + q^3 \ldots = 1$$

$$E(X_3) - q(E(X_3) = 1$$

$$E(X_3)(1-q) = 1$$

$$E(X_3) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

La probabilidad de conocer a un nuevo duende, dado que son tres las posibles puertas y ya conocemos a uno, es de $2/3$, es decir, $p = 2/3$ y $q = 1/3$, sustituyendo el valor de p llegamos a

$$E(X_3) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

La esperanza de X_4 se obtiene procediendo análogamente, la única variante es el valor de p, que será igual a $1/3$, es decir, la esperanza de X_4 es

$$E(X_4) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$$

Así, pues, podemos concluir que el número promedio de veces que Alicia debe abrir las puertas para conocer a los cuatro duendes es

$$E(N) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 1 + 1 + \frac{3}{2} + 3 = 6.5.$$

■

Conclusiones

El objetivo principal del presente texto es trasmitir conocimiento e ideas sobre la teoría de la probabilidad. Como consecuencia de esto, la mayoría de las conclusiones que obtuve están orientadas a la forma en que desarrollé los conceptos básicos de dicha teoría.

A través de la escritura del presente texto se ha logrado constatar algunos de los supuestos que exponen los investigadores de la enseñanza de la probabilidad, basándome principalmente en la discusión con diversas personas de algunos de los ejemplos que presento, y observando los razonamientos que se utilizaron para resolverlos. Resalta que en muchos casos uno de los errores más recurrentes es el no hacer distinción entre el tamaño del experimento. Por ejemplo, al preguntar a una persona por la probabilidad de obtener cinco veces sol al lanzar una moneda diez veces, generalmente se obtiene una respuesta similar a la que nos daría si preguntásemos por la probabilidad de obtener cincuenta veces sol al lanzar cien veces una moneda, siendo que estas dos probabilidades son distintas. A este fenómeno se le conoce como representatividad.

Para solucionar problemas de enseñanza como el de la representatividad, una posibilidad es la de escribir textos cortos que se centren en los dificultades que se han identificado, y se pongan al alcance de los estudiantes de bachillerato y licenciatura. Lo anterior puede funcionar no sólo para la enseñanza de la probabilidad, sino de todas las áreas del conocimiento.

Algunas de las características que propongo para estos textos cortos son: que se utilice el menor número posible de expresiones matemáticas, que se interpreten los resultados obtenidos y los razonamientos que se utilizaron, que se ofrezca más de una solución a los problemas planteados y, si es posible, soluciones erróneas que parecieran ser correctas para así mostrar al estudiante el razonamiento erróneo en el que se puede incurrir.

En este texto desarrollé algunas de las propuestas anteriores, mas aún creo que es mucho lo que se puede hacer. Me gustaría en un futuro, hacer una investigación donde pudiera encontrar los principales temas o conceptos de probabilidad con los que los estudiantes de bachillerato tienen problemas y probar diferentes formas de explicar esos conceptos, para posteriormente elaborar un texto más didáctico.

Bibliografía

[1] Blom, Gunnar, Holst Lars, Sandell Dennis. *Problems and snapshots from the world of probability.* Springer-Verlag, 1994 .

[2] Borel, Émile, *Las probabilidades y la vida.* Oikos-tau, Barcelona, 1971.

[3] De Mora, Charles Marisol. *Los inicios de la teoría de la probabilidad: siglos XVI y XVII.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Pais Vasco, 1972.

[4] Hacking, Ian. *El surgimiento de la probabilidad.* Gedisa, 1995.

[5] Laplace, Pierre Simon Márques de. *Ensayo filosófico de las probabilidades.* Alianza Editorial Mexicana, S.A., México, 1988.

[6] Pérez Seguí, María Luisa. *Combinatoria.* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2000.

[7] Rincón Mejía, Hugo Alberto. *Cuando cuentes cuántos...* Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2002.

[8] Shaughnessy, J. Michael. *Investigación en probabilidad y estadística: Reflexiones y orientaciones.* Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, 1972.

[9] Vilenkin, N., *¿De cuántas formas? (Combinatoria).* Editorial Mir, Moscú, 1972.