UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA DESCOMPOSICION EN "ESPACIOS DE RAICES" DE UNA ALGEBRA DE LIE SEMISIMPLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ESTEBAN LIBRADO HERNANDEZ ESCAMILLA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FELIX RECILLAS JUAREZ

2005

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Esteban Librado Hernández Escamilla
FECHA: 11/Noviembre/2005
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"La descomposición en "espacios de raíces" de una álgebra de Lie semisimple"

realizado por Hernández Escamilla Esteban Librado

con número de cuenta 09653490-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Félix Recillas Juárez	F. Recillas J.
Propietario	Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon	
Propietario	Dr. Juan Morales Rodríguez	Juan Morales
Suplente	Dr. José Guadalupe Reyes Victoria	
Suplente	Dr. Rafael Villaroel Flores	R. Villarreal F.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

La descomposición en “espacios de raíces” de una álgebra de Lie semisimple.

Esteban Librado Hernández Escamilla

8 de noviembre de 2005

Que otros se jacten de las matemáticas
que han escrito y que escribirán;
A mí me enorgullecen las que
he leído y las que leeré.

A

ELEAZAR, SUSANA, MARISOL Y ANA

Contenido

Prólogo

Con rigor sin buscar lo fácil, pero sin renunciar por ello a la claridad asociada al conocimiento auténtico, la tesis pretende facilitar a los lectores el acceso a ese mundo de las álgebras de Lie.

El titulo, La descomposición en espacios de raíces de una álgebra de Lie semisimple, merece una aclaración por cuanto, como es lógico, no pretende esta modesta tesis ser una introducción, ni mucho menos, a la teoría de álgebras de Lie. Esto es evidente, y por el propio índice se observa que, entre otras carencias, sólo contiene algunos apuntes de la Teoría de Álgebras de Lie.

Existen en la literatura matemática tratados ya clásicos de las álgebras de Lie sumamente completos, excelentemente escritos, aunque escasean, sin embargo, en el idioma español. Queremos dejar constancia de la deuda que esta tesis tiene con todos ellos y, muy especialmente, con los espléndidos libros de Jumpreys y Bäuerle.

Agradecimientos. Deseo agradecer al Dr. Félix Recillas el tiempo y esfuerzo que me ha brindado y me sigue brindando para la elaboración y conclusión de ésta tesis, conjuntamente para la conclusión de mis estudios y debido al talento de tan singular persona; esta tesis tiene su razón de ser y de existir en el mundo matemático.

De igual manera agradesco a los sinodales su tiempo y talento empleado en la revisión y corrección de la tesis, asi como sus sugerencias hechas para mejorarla y pido una disculpa especial al Dr. Rafael Villarroel por escribir mal su nombre. De igual forma agradesco al Dr. Oscar Palmas, Dr. Santigo López de Medrano, Dr. Alberto Barajas, Dr. Max Neumann, Dr. Carlos Prieto por los conocimientos y la cultura que me brindarón y espero que me sigan brindando y por último a Leonardo Espinoza por su valiosa ayuda a la hora de resolver mis dudas sobre latex, pues de otra manera habría tardado más en la impresión de la tesis.

Agradesco especialmente a mi familia: hermanos y hermanas todo el apoyo economico, espiritual e intelectual que me han dado y que sé que me seguirán dando pase lo que pase y muy especialmente a mi Madre, ese ser tan noble y trabajador, a quien tantos quebrantos le he ocasionado con mi forma de proceder y de pensar, y, sin quien yo no tendría razón de ser ni de existir en éste bello evento pasajero llamado vida; si hubiese una forma de remediar el daño causado sirva aunque sea en lo minimo para tal fin, éste sencillo agradecimiento. De igual forma agradesco a mi esposa, su tiempo, paciencia y trabajo que ha brindadome en estos tres años de compartir día a día la alegría de vivir.

Quiero agradecer a los cuates de la Primaria: Juan David, el chino, Eleazar y los que falten; de la Secu: al camarón, Werner, leti, Lazaro, Pablo, las dos patys, meche, gordillo, Verdejo, Hector, Julio, tecalero, Mota y los que falten; del Bachiburros: al lalo, al enano, Luis, Onofre, Gisela y los que falten; de la Fac: al jim, Ana, germoto, anafre, nenuco, josefitas, josé físico, camajan, bambino, Hugo, Renato, Cesar, la funda, andy, zapato, rodas, chuchin, Hector, Pedro, chava, lulu y los que falten; del Instituto: Galo, Miguel, José, Preisser, Tona, Daniel, Paulina, Grecia, Abraham, Pietra, Octavio, Selene, Paulo, Pepe y los que falten; los cuates de la cuadra: guacha, satanas, vale, codigo, cejas, charly, patas, Alvaro, lengo, cheche, rale, fitos, lalo, rica, vaner, espanky, tanque y los que falten; a mis sobrinos y primos por todo el desmadre que he echado en su grata compañia.

Introducción

El capítulo uno es un resumen sobre nociones básicas y algunos ejemplos de las álgebras de Lie. En la sección 1.1 comenzamos con la definicion de una álgebra de Lie L. En la sección 1.2 damos la definición de un ideal I de una álgebra de Lie L. Las definiciones anteriores son ilustradas por las llamadas álgebras de Lie lineales, es decir, álgebras de Lie cuyos elementos son operadores lineales o matrices. En la sección 1.2 se da la construcción de la álgebra de Lie cociente, el concepto de homomorfismo para álgebras de Lie y varios conceptos más son introducidos, a saber, álgebra de Lie simple, el conmutador, el nornalizador, el centralizador, el centro y la representación adjunta de una álgebra de Lie. En la sección 1.3 dos tipos de álgebras de Lie son estudiadas; las álgebras de Lie solubles y nilpotentes. Ambas clases de álgebras son caracterizadas por una sucesión de ideales, los cuales son construidos apartir de la álgebra de Lie misma. El prototipo de las álgebras de Lie solubles es la álgebra de Lie de las matrices cuadradas de $n \times n$ triangulares superiores, es decir, las matrices con ceros abajo de la diagonal. El prototipo de las álgebras de Lie nilpotentes es la álgebra de Lie de las matrices cuadradas de $n \times n$ triangulares estrictamente superiores y se da la definición de álgebra de Lie semisimple. La sección 1.3 finaliza con la demostración del teorema de Engel que es un criterio para la nilpotencia. En el transcurso del capítulo uno se puede hacer el siguiente diagrama ilustrativo

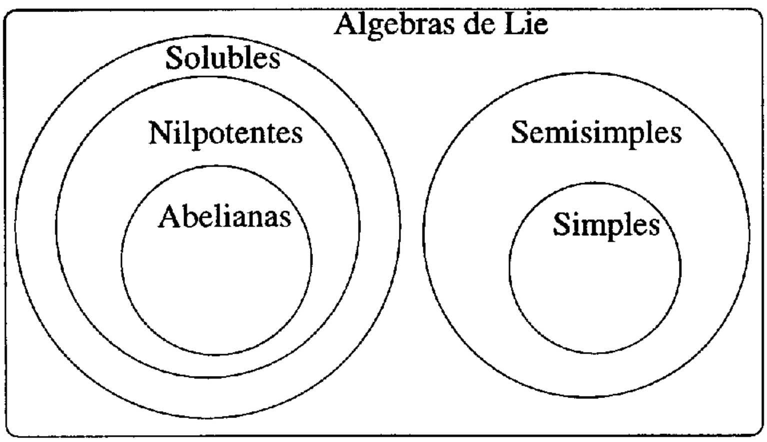

FIGURA 1. Varios tipos de álgebras de Lie

En el capítulo dos se habla esencialmente sobre propiedades de las álgebras de Lie semisimples. En la sección 2.1 se demuestra el teorema de Lie que es un criterio para que una álgebra de Lie L sea soluble; como de igual manera lo es el criterio de Cartan . En esta misma sección se da la *descomposición de Jordan-Chevalley* que nos dice que todo operador lineal se descompone únivocamente como la suma de dos operadores conmutativos, uno es diagonalizable y el otro es nilpotente. La parte importante de esto es la conmutatividad. Esta descomposición juega un papel muy importante en la teoría estructural de las álgebras de Lie semisimples y por último se da la definición de una derivación. En la sección 2.2 definimos la *forma de Killing*, damos un ejemplo y se prueba que la álgebra de Lie lineal $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ es semisimple.

En el capítulo tres se tratan esencialmente las representaciones y las descomposición en espacios de raíces de una álgebra de Lie L. En la sección 3.1 se da la definición de módulo y se indica la manera en la cual un módulo puede ser visto como una representación, de igual forma se define lo que es un módulo irreducible, completamente reducible, una representación fiel, el *elemento casimir* y el lema de Schur para una representación irreducible. Se finaliza la sección demostrando el gran teorema de Weyl sobre reducibilidad completa para represntaciones de dimensión finita de una álgebra de Lie semisimple. La sección 3.2 contiene en forma detallada las representaciones de dimensión finita de la álgebra de Lie simple $\mathfrak{sl}(2, F)$. Éstas representaciones son centrales en la teoría estructural de las álgebras de Lie simples. finalmente en la sección 3.3 se argumenta la existencia de subálgebras torales distintas de cero en una álgebra de Lie semisimple, se prueban que son abelianas e introducimos la noción de raíz de una álgebra de Lie semisimple; discutimos la descomposición en espacios de raíces de una álgebra de Lie semisimple y establecemos un isomorfismo natural entre la subálgebra toral H y su dual H^*.

En la sección 4.1 del capítulo cuatro consideramos en más detalle las propiedades de las raíces y probamos que toda raíz α es asociada a una subálgebra tridimensional de L; siendo ésta subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, F)$. En la sección 4.2 probamos que las raíces de una álgebra de Lie semisimple son no-degeneradas, es decir, los espacios de raíces son subálgebras de dimensión uno de L. Además de esto aplicamos la teoría de representaciones de $\mathfrak{sl}(2, F)$ a la llamada *cadena de raíces*; esto nos lleva al resultado importante de que $\beta(h_\alpha)$ para raíces β con elementos especiales $h_\alpha \in H$ son enteros. En la sección 4.3 definimos usando la forma de Killing, una forma bilineal no-degenerada sobre el espacio H^*. Introducimos el $\mathbb{R}$-generado E de el sistema de raíces Φ y demostramos que la restricción a E de la forma bilineal sobre H^* es no-degenerada y definida positiva, es decir, es un producto interior. Finalmente ilustramos algunos de los resultados obtenidos en éste capítulo, considerando su forma explícita para la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ en la última sección.

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1. Álgebra de Lie

La definición de una álgebra de Lie L consiste esencialmente de dos partes que se refieren a su estructura. En primer lugar una álgebra de Lie L es un espacio vectorial sobre un campo$F$; aquí consideramos dicho espacio vectorial como el espacio vectorial de las trasformaciones lineales, y en segundo lugar se define sobre L una operación binaria particular, denotada por $[-,-]$ y llamada el corchete de Lie.

DEFINICIÓN 1.1. Un espacio vectorial L sobre un campo F, con una operación binaria

$$[-,-] : L \times L \longrightarrow L$$

definida por la correspondencia

$$(X, Y) \mapsto [X, Y]$$

y llamado el corchete de Lie o el conmutador de X con Y; es llamado una *álgebra de Lie* sobre F si satisface los siguientes axiomas:

L1) La operación corchete de Lie es bilineal, es decir,

$$[\alpha X_1 + \beta X_2, y] = \alpha[X_1, Y] + \beta[X_2, Y] y [X, \alpha Y_1 + \beta Y_2] = \alpha[X, Y_1] + \beta[X, Y_2]$$

L2) [X,X] $= 0$ para todo $X \in L$

L3) [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] $= 0$ para todo $X, Y, Z \in L$. A ésta igualdad se le llama la *identidad de Jacobi.*

De la definición anterior se tiene que una álgebra de Lie L es llamada *abeliana* si $[x, y] = 0$ para toda x e y en L.

DEFINICIÓN 1.2. Un subespacio K de una álgebra de Lie L es llamado una *subálgebra* de Lie de L, si satisface que $[X, Y] \in K$ para todo X,Y en K

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F, denotemos por End(V) el conjunto de todas las transformaciones lineales $f : V \longrightarrow V$. Entonces se tiene que End(V) es un espacio vectorial de dimensión finita sobre F y además es un anillo relativo a la operación usual del producto, en este caso la composición de funciones. Definamos una nueva operación $[x, y] = xy - yx$, llamada el corchete de x con y. Con ésta operación End(V) se convierte en una álgebra de Lie sobre F. Para distinguir la nueva estructura algebraica de la anterior que tenia, escribimos $\mathfrak{gl}(V)$ en lugar de escribir End(V) vista como una álgebra de Lie, y la llamamos el *álgebra lineal general* porque ésta está fuertemente ligada con el *grupo lineal general* GL(V) consistente de todos los endomorfismos invertibles de V.

2. Ideales y homomorfismos en Álgebras de Lie

DEFINICIÓN 1.3. Un subespacio I de una álgebra de Lie L es llamado un *ideal derecho* de L si cumple que dado Y en I y X en L se implica que $[X, Y] \in I$ para todo X en L.

Análogamente se puede definir un ideal izquierdo y consecuentemente un ideal que sea derecho e izquierdo se llama ideal bilateral. Para las álgebras de Lie es posible definir ideales bilaterales y en lo sucesivo nos referiremos a ellos sólo como ideales.

PROPOSICIÓN 1.4. *Si I y J son ideales de una álgebra de Lie L, entonces*
a) $I + J = \{X + Y \mid X \in I, Y \in J\}$
b) $[I, J] = \{\sum_{i=1}^{n}[X_i, Y_i] \mid X_i \in I, Y_i \in J\}$
son ideales.

Demostración. La demostración es como sigue.

a) Sea Y en $(I + J)$ tal que $Y = S + T$, con S en I y T en J y sea X en L, esto implica que
$$\begin{aligned}[X, Y] &= XY - YX = X(S + T) - (S + T)X = XS + XT - SX - TX \\ &= XS - SX + XT - XT = [X, S] + [X, T]\end{aligned}$$
Como S está en I esto implica que $[X, S] \in I$ y analógamente $[X, T] \in J$, lo cual implica que $[X, S] + [X, T] \in (I + J)$, lo que a su vez implica que
$$[X, Y] = [X, S + T] = [X, S] + [X, T] \in (I + J)$$
con lo cual concluimos que $[X, Y] \in (I + J)$ y por lo tanto que $(I + J)$ es un ideal.

b) Sea Z en L, sea $\sum_{i=1}^{n} X_iY_i$ en $[I, J]$, tomando en cuenta la bilinealidad del corchete de Lie y asociando términos tenemos lo siguiente:
$$\begin{aligned}\left[Z, \sum_{i=1}^{n} X_i, Y_i\right] &= \sum_{i=1}^{n}[Z, X_iY_i] = \sum_{i=1}^{n}\{Z(X_iY_i) - (X_iY_i)Z\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} Z(X_iY_i) - \sum_{i=1}^{n}(X_iY_i)Z = \sum_{i=1}^{n}(ZX_i)Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_iZ)\end{aligned}$$
como (ZX_i) está en I y Y_i está en J, se obtiene que $\sum_{i=1}^{n}(ZX_i)Y_i \in [I, J]$. Análogamente se tiene que $\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_iZ) \in [I, J]$, con lo que se obtiene lo siguiente
$$\left[Z, \sum_{i=1}^{n} X_i, Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n}(ZX_i)Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i(Y_iZ) \in [I, J]$$
por lo cual concluimos que $[Z, \sum_{i=1}^{n} X_i, Y_i] \in [I, J]$ y por lo tanto que $[I, J]$ es un ideal. ■

Eligiendo una base en V se puede establecer un isomorfismo entre la álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ y la álgebra $\mathfrak{gl}(n, F) = \mathfrak{gl}(n)$ de todas las matrices cuadradas de $n \times n$, a la álgebra $\mathfrak{gl}(n, F)$ se le dota de un producto y de un corchete de Lie similar al de $\mathfrak{gl}(V)$ para que sea también una álgebra de Lie. Algunas subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, F)$ y que por lo tanto son álgebras de Lie son las siguientes:

(1) El conjunto de matrices triangulares superiores definidas por $\mathfrak{t}(n, F) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i > j\}$.

(2) El conjunto de matrices triangulares superiores estrictamente definidas por $\mathfrak{n}(n, F) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid a_{ij} = 0 \quad si \quad i \leqslant j\}$.
(3) El conjunto de matrices diagonales definidas por $\mathfrak{d}(n, F) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid a_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j\}$.
(4) Consideremos el conjunto de matrices dadas por $\mathfrak{sl}(n, F) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{Tr} A = 0\}$. Este conjunto es llamado la álgebra lineal especial.

El espacio euclideano $\mathbb{R}^3$ dotado con el corchete de Lie $[-,-]$, el cual es dado por $[x, y] = x \times y$, para x e y en $\mathbb{R}^3$ se convierte en una álgebra de Lie.
Notemos que $\mathfrak{n}(n, F)$ es una subálgebra de $\mathfrak{t}(n, F)$ y por lo tanto es un ideal en $\mathfrak{t}(n, F)$, es decir, $[\mathfrak{t}(n, F), \mathfrak{n}(n, F)] \subset \mathfrak{n}(n, F)$

DEFINICIÓN 1.5. Sea L una álgebra de Lie tal que los únicos ideales de L son el cero y L misma, y si además $[L, L] \neq 0$ entonces decimos que L es una álgebra de Lie *simple.*

La álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, F) = \mathfrak{sl}(n)$ es simple. Usualmente se pone $n = k + 1$ con $k \geqslant 1$ y se denota $\mathfrak{sl}(n)$ por $\mathfrak{sl}(k + 1, F)$.

DEFINICIÓN 1.6. Sean M y N dos subconjuntos de L los cuales no necesariamente son subespacios. Entonces el *conmutador* $[M, N]$ de M y N es definido como el generado lineal de el conjunto de elementos de la forma $[x, y]$ con $x \in M$ y $y \in N$, es decir,

$$[M, N] := \{z \in L \mid z = \sum \alpha_{ij}[x_i, y_j]; \quad x_i, y_j \quad \in \quad L; \quad \alpha_{ij} \quad \in \quad F\}$$

La *álgebra derivada* de una álgebra de Lie L, definida por $L^1 := [L, L]$ es un caso particular de el conmutador de L y es un ideal en L. En efecto, la álgebra derivada es por definición un subespacio de L. Entonces como $L^1 \subset L$ tenemos que $[L^1, L^1] \subset [L, L] = L^1$. Entonces L^1 es una subálgebra de L y como $L^1 := [L, L]$ esto implica que $[L, L^1] \subset [L, L] = L^1$, es decir, se tiene que $[L, L^1] \subset L^1$ y por lo tanto L^1 es un ideal. Notemos que para una álgebra de Lie abeliana se tiene $L^1 = [L, L] = 0$, un ejenplo de esto es la álgebra de matrices diagonales $\mathfrak{d}(n, F)$.
También se tiene que para una álgebra de Lie simple L la álgebra derivada L^1 es igual a L, en otras palabras, $L^1 = [L, L] = L$ y asi es en efecto, pues la álgebra derivada L^1 es un ideal en L y como L es simple implica que L^1 es un ideal trivial y sólo tenemos dos alternativas o $L^1 = 0$ o $L^1 = L$. La primera alternativa no se tiene pues L no es abeliana y por lo tanto se tiene $L^1 = L$.
Consideremos una subálgebra K de una álgebra de Lie L, esto implica que K es un ideal trivial de K y entonces puede pasar que L contenga una subálgebra mayor en la cual K es un ideal propio. Esto se formaliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.7. El *normalizador* de una subálgebra K de L es definido por

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}$$

Si $K = N_L(K)$, llamamos a K *auto-normalizador.*

El normalizador es una subálgebra de L y es la mayor subálgebra en la que K es un ideal. Por ejemplo las subálgebras $\mathfrak{t}(n)$ y $\mathfrak{d}(n)$ son auto-normalizadoras en la álgebra lineal general $\mathfrak{gl}(n)$.

DEFINICIÓN 1.8. El *centralizador* de un subconjunto $\mathfrak{X}$ de L se define como

$$C_L(\mathfrak{X}) = \{x \in L \mid [x, \mathfrak{X}] = 0\}$$

DEFINICIÓN 1.9. El centrtalizador $C_L(L)$ de L misma es llamado el *centro* de la álgebra de Lie L y se pone $C_L(L) = Z(L)$, el cual es definido por

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, z] = 0 \quad \forall x \in L\}$$

Se tiene que $Z(L)$ es un ideal abeliano en L.
Sea L una álgebra de Lie y supongamos que L tiene un ideal I distinto de cero, definimos sobre L una relación de equivalencia. Los elementos x e y en L son equivalentes si su diferencia $x - y$ vive en el ideal I. La equivalencia de los elementos x e y es denotada por $x \sim y$. Teniendo una tal relación de equivalencia, la álgebra de Lie puede ser partida en clases disjuntas de elementos mutuamente equivalentes. Éstas clases son llamadas *clases de equivalencia*. Más explicitamente, si $x \in L$ entonces definimos la clase $\overline{x}$ de elementos equivalentes con x por

$$\overline{x} = \{z \in L \mid x \sim z\} = \{z \in L \mid (x - z) \ \in I\}$$

Una notación alternativa es

$$\overline{x} \equiv x + I \equiv x \qquad \text{mod } I$$

Notemos que

$$\overline{0} = \{z \in l \mid (0 - z) \ \in I\} = I$$

Debido a que I es un ideal podemos definir una estructura de álgebra de Lie sobre el conjunto de clases de equivalencia. Sean y y x dos clases de equivalencia, usando la estructura lineal y el corchete de Lie en L definimos para α y β en el campo F las combinaciones lineales de $\overline{y}$ y $\overline{x}$ por

$$\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = \overline{\alpha x + \beta y}$$

y el corchete de Lie de $\overline{y}$ y $\overline{x}$ por

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]} = [x, y] + I$$

Con las definiciones anteriores el conjunto de clases de equivalencia se convierte en una álgebra de Lie, llamada la *álgebra de Lie cociente*.

DEFINICIÓN 1.10. sean L y L' álgebras de Lie sobre un mismo campo F

i) Una transformación lineal

$$\Phi : L \longrightarrow L'$$

se dice que es un *homomorfismo* si satisface que

$$\Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)] \quad \forall X, Y \in L.$$

ii) Φ es llamado un *morfismo inyectivo* si el $\operatorname{Ker}\Phi = 0$.
iii) Φ es llamado un *morfismo suprayectivo* si la $\Im\Phi = L'$.
iv) Φ es llamado un *isomorfismo* si es inyectivo y suprayectivo a la vez.

Aqui $\Im = Im$ es la imagen del morfismo.

PROPOSICIÓN 1.11. *Se tiene lo siguiente*

1) si

$$\Phi : L \longrightarrow L'$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces $L/\operatorname{Ker}\Phi \cong \Im\Phi$. *Si* I *es un ideal incluido en el* $\operatorname{Ker}\Phi$, *entonces existe un único homomorfismo*

$$\Psi : L/I \longrightarrow L'$$

que hace que el siguiente diagrama conmute, donde π *es el mapeo canónico de la proyección*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & L' \\ L/I \arrow[ur, "\exists!\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

En otras palabras $\Phi = \Psi \circ \pi$.

2) Si I *y* J *son dos ideales de* L *tales que* $I \subset J$, *entonces* J/I *es un ideal de* L/I *y además* $(L/I)/(J/I)$ *es isomorfo a* L/J, *es decir,* $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

3) Si I *y* J *son dos ideales de* L, *entonces existe un isomorfismo natural entre* $(I+J)/J$ *e* $I/(I\cap J)$, *es decir,* $(I+J)/J \cong I/(I\cap J)$.

Demostración. En efecto.

1) Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "h"] & \operatorname{Ker}\Phi \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \frac{L}{\operatorname{Ker}\Phi} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\exists!\Psi"] & 0 \\ & & \Im\Phi & & \end{tikzcd}$$

a) Sea $\overline{X}$ la clase de x, como π es un epimorfismo se tiene que existe x en L tal que $\pi(x) = \overline{X}$, se define $\Psi(\overline{X}) = \Phi(x)$. Supongamos que $\pi(x) = \pi(x') = \overline{X}$, como $\pi(x) = \pi(x')$ se tiene que $\pi(x) - \pi(x') = 0$ con lo cual se obtiene que $\pi(x - x') = 0$, lo que implica que $x - x'$ pertenece al $\operatorname{Ker}\pi = \Im f$ por ser una sucesión exacta, por lo tanto se obtiene que existe un elemento y en $\operatorname{Ker}\pi$ tal que $f(y) = x - x'$; aplicando Ψ a f se obtiene lo siguiente

$$0 = \Psi(f(y)) = \Psi(x - x') = \Psi(x) - \Psi(x') \Longrightarrow \Psi(x) - \Psi(x') = 0$$

Por lo tanto se tiene que $\Psi(x) = \Psi(x')$ y se concluye que Ψ está bien definida.

b) Supongamos que $\Psi(\overline{X}) = 0 = \Phi(x)$ esto implica que $\Psi(\overline{X}) = 0$, con lo cual se tiene que x está en el $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Ker}\pi$ y esto implica que $\overline{X} = \pi(x) = 0$ por lo cual concluimos que $\overline{X} = 0$ y por lo tanto que Ψ es un morfismo inyectivo.

c) Sea z en $\Im\Phi$. Como z está en la $\Im\Phi$ implica que existe un y en L tal que $\Phi(y) = z$. Se define $s = \pi(y)$, entonces tenemos que $\Psi(\pi(y)) = \Phi(y) = z$, con lo cual concluimos que Ψ es un morfismo suprayectivo.

d) Por definición del producto de Lie en el álgebra cociente y por definición de Ψ se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\Psi([X+\operatorname{Ker}\Phi, Y+\operatorname{Ker}\Phi]) &= \Psi([X,Y]+\operatorname{Ker}\Phi) = \Phi[X,Y] \\ &= [\Phi(X),\Phi(Y)] \\ &= [\Psi(X+\operatorname{Ker}\Phi),\Psi(Y+\operatorname{Ker}\Phi)]\end{aligned}$$

con lo cual se demuestra que Ψ es un homomorfismo y por lo tanto que Ψ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

2) Tomando en cuenta que $I \subset J \subset L$, consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, "h"] & I \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & J \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\imath"'] & J/I \arrow[r] \arrow[d, "\imath'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & L \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & L/I \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & 0 \\
 & & L/J \arrow[r, "\exists! g"] \arrow[d] & L/I/J/I \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Para $\overline{Y}$ en L/J existe y en L tal que $\pi_1(y) = \overline{Y}$ entonces definimos $g(\overline{Y}) := \pi_2 \circ \pi(y)$ y hacemos la observación de que $\imath' \circ \pi' = \pi \circ \imath$

i) Sean $\overline{Y}$ y $\overline{Y}'$ dos elementos de L/J tenemos por definición que

$$g(\overline{Y}) = \pi_2 \circ \pi(y)$$

$$g(\overline{Y'}) = \pi_2 \circ \pi(y')$$

suponiendo que $y = y'$ se tiene que $y - y'$ está en el $\operatorname{Ker}\pi_1$ y calculando se tiene que

$$\pi_2 \circ \imath' \circ \pi'(y-y') = \pi_2 \circ \pi'(y-y') = 0 \quad \text{pues } \pi'(y-y') \in L/I$$

$$\pi_2 \circ \pi \circ \imath(y-y') = \pi_2 \circ \pi(y-y') \Longrightarrow \pi_2 \circ \pi(y) - \pi_2 \circ \pi(y') = 0$$

de la última igualdad obtenemos que $\pi_2 \circ \pi(y) = \pi_2 \circ \pi(y')$, es decir,

$$g(\overline{Y}) = \pi_2 \circ \pi(y) = g(\bar{Y'}) = \pi_2 \circ \pi(y') \quad \Longrightarrow g(\overline{Y}) = g(\overline{Y'})$$

lo cual demuestra que g está bien definida.

ii) Supongamos que $g(\overline{Y}) = 0 = \pi_2 \circ \pi(y)$, lo anterior implica que $\pi_2 \circ \pi(y) = 0$, es decir que, $\pi(y)$ está en el $\operatorname{Ker}\pi_2 = J/I$ y esto implica que y vive en J por lo tanto $\overline{Y} = 0$, lo cual demuestra que g es un morfismo inyectivo.

iii) Como g es la composición de dos morfismos suprayectivos se tiene que g es un morfismo suprayectivo. Por lo tanto tenemos que g es un isomorfismo.

3) Consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \cap J \arrow[r, "\imath"] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\imath'"'] & I/I \cap J \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exists! h \ni h\circ\pi = \pi'\circ\imath'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & J \arrow[r] & I+J \arrow[r, "\pi'"'] & I+J/J \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

a) Sea x en $I \cap J$ se tiene que

$$\pi' \circ \imath' \circ \imath(x) = \pi' \circ \imath'(x) = \pi'(x) = 0$$

pues x está en J y usando un teorema se tiene que

$$h \circ \pi = \pi' \circ \imath'$$

b) Sea y en $I/I \cap J$ tal que $h(y) = 0$, puesto que π es un morfismo suprayectivo existe un x en I tal que $y = \pi(x)$. Supongamos que

$$0 = h(y) = h(\pi(x)) = h \circ \pi(x) = \pi' \circ \imath'(x) = \pi'(x)$$

esto implica que x está en J, de lo cual se deduce que x está en $I \cap J$, lo que a su vez implica que $\pi(x) = 0$, por lo cual concluimos que $y = 0$ y por lo tanto h es un morfismo inyectivo.

c) Sea $z \neq 0$ en $(I + J)/J$, es decir, z no está en J, como π' es un morfismo suprayectivo, implica que existe un t en $I+J$ tal que $\pi'(t) = z$, pero $t = r+s$ con r en I y s en J, entonces tenemos lo siguiente

$$\pi'(t) = \pi'(r+s) = \pi'(r) + \pi'(s) = \pi'(r) \Longrightarrow \pi'(t) = \pi'(r) = z$$

puesto que s está en J se tiene que $\pi'(s) = 0$, con r en I y además $\imath'(r) = r$ implica que $\pi(r)$ está en $I/(I \cap J)$, lo que implica que

$$h \circ \pi(r) = \pi' \circ \imath'(r) = \pi'(r) = \pi'(t) = z$$

Por lo tanto h es un morfismo suprayectivo y se concluye que h es un isomorfismo.

■

DEFINICIÓN 1.12. Una *representación* de una álgebra de Lie L es un homomorfismo de álgebras de Lie Φ

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

donde V es un espacio vectorial sobre un campo F y $\mathfrak{gl}(V)$ es el conjunto de endomorfismos de V, es decir, $\mathfrak{gl}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{es lineal}\}$

Por ejemplo sea L una álgebra de Lie y sea

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(F^n)$$

donde $\Phi = \mathrm{Id}$, entonces (F^n, Id) es una representación de L.
Sea el siguiente mapeo

$$\mathrm{ad}_X : L \longrightarrow L$$

definido por la correspondencia

$$Y \longmapsto \mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

si X está en L, ad_X es un endomorfismo de L.

PROPOSICIÓN 1.13. *Consideremos el siguiente mapeo*

$$\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

definido por la correspondencia

$$X \longmapsto \mathrm{ad}(X) = \mathrm{ad}_X$$

donde

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

entonces el mapeo ad *es una representación, llamada la representación adjunta de L.*

Demostración. En efecto.

i) Que ad es una transformación lineal es inmediato, pues el corchete de Lie es bilineal.
ii) Teniendo encuenta la identidad de Jacobi en la segunda igualdad y la antisimetria del corchete de Lie en la tercera igualdad se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}[X,Y](Z) &= \mathrm{ad}_{[X,Y]}(Z) = [[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] \\
&= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = \mathrm{ad}_X([Y,Z]) - \mathrm{ad}_Y([X,Z]) \\
&= \mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y(Z) - \mathrm{ad}_Y\,\mathrm{ad}_X(Z) = (\mathrm{ad}_X\,\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\,\mathrm{ad}_X)(Z) \\
&= [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z)
\end{aligned}$$

lo anterior implica que

$$\mathrm{ad}[X,Y](Z) = [\mathrm{ad}(X), \mathrm{ad}(Y)](Z)$$

y por lo tanto que ad es un homomorfismo. Con lo cual concluimos que ad es una representación. ■

3. Álgebras de Lie solubles y nilpotentes

Se define una sucesión de ideales de L; llamada *la serie derivada* de L, por

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \ldots, L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$$

tal que $L^{(i)}$ es un ideal de L y además satisfacen que

$$L \supset L^{(1)} \supset \ldots \supset L^{(i)} \supset \ldots$$

DEFINICIÓN 1.14. Se dice que la álgebra de Lie L es *soluble* si $L^{(n)} = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Toda álgebra de Lie soluble $L \neq 0$ tiene un ideal abeliano $I \neq 0$. En verdad, para $L \neq 0$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] = 0$ y $L^{(i-1)} \neq 0$, entonces $L^{(i-1)}$ es un ideal abeliano en L. Como ejemplo tenemos que el prototipo de álgebras solubles es el conjunto de matrices triangulares superiores $\mathfrak{t}(n)$.

DEFINICIÓN 1.15. Una álgebra de Lie L se llama *semisimple* si el único ideal soluble que contiene es el ideal cero.

Por un lado, en vista de la definición se tiene que como el $Z(L)$ es un ideal abeliano en L, implica que para álgebras de Lie semisimples el centro contiene sólo al vector cero,en otras palabras, se tiene que $Z(L) = 0$ y además de esto las álgebras de Lie simples son también semisimples.
Por otro lado, para álgebras de Lie semisimples se tiene que $L \cong \mathrm{ad}(L)$. Éste es un resultado importante porque entonces uno puede estudiar las álgebras de Lie semisimples por medio de la representación adjunta, en otra palabras, la representación adjunta de una álgebra de Lie L semisimple es inyectiva. En efecto, mostremos que el mapeo

$$\mathrm{ad} : x \longmapsto \mathrm{ad}_x$$

es biyectivo. Esto se logra mostrando que el kernel de ad contiene sólo el elemento cero. Notemos que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = \{x \in L \mid \mathrm{ad}_x = 0\}$$

Esto significa que $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ si y sólo sí para toda $y \in L$

$$0 = \mathrm{ad}_z(y) = [z, y]$$

esto pasa si y sólo sí $z \in Z(L)$, entonces $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad})$ coincide con el $Z(L)$, es decir, $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(L)$. Sabemos que $Z(L)$ es un ideal abeliano en L y como L es semisimple implica que L no tiene ideales abelianos distintos de cero, lo cual quiere decir que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(L) = 0$ y la demostración esta términada. Como una álgebra de Lie simple es semisimple entonces la representación adjunta de una álgebra de Lie simple también es inyectiva.

PROPOSICIÓN 1.16. *Sea L una álgebra de Lie*

1) Si L es soluble, entonces todas las subálgebras de L son solubles y las imagenes homomorficas de L son solubles.
2) Si I es un ideal soluble de L tal que L/I es soluble, entonces L misma es soluble.
3) Si I,J son ideales solubles de L, entonces I+J es un ideal soluble.

Para la demostración se usaran los siguientes dos lemas.

LEMA 1.17. *Sean A y B dos álgebras de Lie. Si*

$$f : A \longrightarrow B$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces $f(A^{(n)}) \subset B^{(n)}$.

Demostración. Se hará por inducción sobre n.
Para $n = 1$ se cumple, pues $f(A^{(1)}) \subset B^{(1)}$ por ser f un morfismo.
Supongamos que se vale para $(n - 1)$. Por definición de la serie derivada se tiene que

$$f(A^{(n)}) = f([A^{(n-1)}, A^{(n-1)}])$$

y por ser f un homomorfismo tenemos que

$$f([A^{(n-1)}, A^{(n-1)}]) = [f(A^{(n-1)}), f(A^{(n-1)})]$$

Tomando en cuenta la hipótesis de inducción, junto con lo anterior obtenemos lo siguiente

$$f(A^{(n)}) = f([A^{(n-1)}, A^{(n-1)}]) = [f(A^{(n-1)}), f(A^{(n-1)})] \subset [B^{(n-1)}, B^{(n-1)}] =: B^{(n)}$$

Por lo tanto tenemos que $f(A^{(n)}) \subset B^{(n)}$. ∎

LEMA 1.18. *Sean A,B y C álgebras de Lie. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

Entoces B es soluble si y sólo si A y C son solubles.

Demostración. En efecto, tenemos lo siguiente.

$\Longrightarrow$) Como B es soluble implica que existe una n tal que $B^{(n)} = 0$, esto implica por el lema 1.17 que $f(A^{(n)}) = 0$ y esto implica por ser f inyectiva que $A^{(n)} = 0$, con lo cual concluimos que A es soluble.
Por ser g suprayectiva se tiene que $g(B) = C$, lo que implica que $g(B^{(m)}) = C^{(m)}$, la contención del lema 1.17 es igualdad por ser g suprayectiva y como B es soluble se tiene que $m = n$, lo que implica que $C^{(n)} = 0$ y por lo tanto que C es soluble.

$\Longleftarrow$) Como A y C son solubles implica que existen r y s tales que $A^{(r)} = 0$ y $C^{(s)} = 0$, esto implica que

$$g(B^{(s)}) = C^{(s)} = 0 \Longrightarrow B^{(s)} \subset \operatorname{Ker} g = \Im f = f(A) \Longrightarrow B^{(s+m)} \subset f(A^{(m)}) = 0$$

Si $m = 0$ implica que $B^{(s+r)} = (B^{(s)})^r \subset f(A^{(r)})$ lo que implicaria que $B^{(s+r)} = 0$ y por lo tanto B es soluble.

■

Demostración. (de 1.16)

1) De la definición si K es una subálgebra de L entonces se tiene que $K \subset L$, lo que implica que $K^{(i)} \subset L^{(i)}$, como L es soluble implica que existe una n tal que $L^{(n)} = 0$ y como $K^{(n)} \subset L^{(n)} = 0$ implica que $K^{(n)} = 0$ y por lo tanto K es soluble, como K se eligio arbitrariamente lo anterior vale para toda subálgebra de L.
Si

$$\Phi : L \longrightarrow M$$

es un morfismo suprayectivo por el lema 1.17 se tiene que $\Phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$, la igualdad se da por ser Φ un morfismo suprayectivo. Como L es soluble implica que existe una n tal que $L^{(n)} = 0$ y esto implica que

$$0 = \Phi(0) = \Phi(L^{(n)}) = M^{(n)} \Longrightarrow M^{(n)} = 0$$

Por lo tanto M es soluble y por lo tanto las imagenes homomorficas son solubles.

2) Sea la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\imath} L \xrightarrow{\pi} L/I \longrightarrow 0$$

Como I es soluble y (L/I) es soluble por hipótesis, por el lema 1.18 se tiene que L es soluble.

3) Sea la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\imath} I + J \xrightarrow{\pi} \frac{I+J}{I} \longrightarrow 0$$

Se ha demostrado en la proposición 1.11 inciso 3) que $(I + J)/I$ es isomorfo a $J/(I \cap J)$ el cual es soluble pues J es soluble, entonces tenemos la sucesión exacta corta siguiente

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\imath} I + J \xrightarrow{h} \frac{J}{I \cap J} \longrightarrow 0$$

Por el lema 1.18 se tiene que $(I + J)$ es un ideal soluble.

■

Como una aplicación directa del inciso 3) obtenemos que toda álgebra de Lie L deberá contener un único ideal soluble máximo. En efecto, sea $\mathfrak{R}(L)$ el generado por todos los ideales solubles de L. Puesto que L es de dimensión finita existe un número finito de ideales solubles que generan a $\mathfrak{R}(L)$, en tonces su suma es un ideal soluble máximo.

DEFINICIÓN 1.19. Al único ideal soluble máximo de L le llamaremos el *radical* de L y lo denotaremos por $\mathfrak{R}(L)$.

Para una álgebra de Lie L se puede dar una definición alternativa de semisimplicidad, a saber, una álgebra de Lie L es semisimple si y sólo sí $\mathfrak{R}(L) = 0$. En efecto, primero probaremos que $\mathfrak{R}(L) = 0$ implica que L es semisimple. Asumamos que $A \neq 0$ es un ideal abeliano en L entonces A es un ideal soluble y tenemos que $0 \neq A \subset \mathfrak{R}(L)$ por la definición de $\mathfrak{R}(L)$ y esto contradice que $\mathfrak{R}(L) = 0$, entonces $A = 0$ y L es semisimple.
Ahora asumamos que $\mathfrak{R}(L) \neq 0$. Como $\mathfrak{R}(L)$ es soluble entonces existe en su serie derivada un ideal $\mathfrak{R}(L)^{i-1}$ tal que

$$\mathfrak{R}(L)^{i} = [\mathfrak{R}(L)^{i-1}, \mathfrak{R}(L)^{i-1}]$$

De la igualdad anterior uno ve que $\mathfrak{R}(L)^{i-1} \neq 0$ es abeliano y esto contradice la semisimplicidad de L.

A una álgebra de Lie L le podemos asociar otra serie de ideales llamada *la serie central descendente* la cual esta definida como:

$$L^0 = L, L^1 = [L, L] = L^{(1)}, L^2 = [L, L^1], \ldots, L^i = [L, L^{i-1}]$$

DEFINICIÓN 1.20. Se dice que la álgebra de Lie L es *nilpotente* si $L^n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Se tiene que cualquier álgebra abeliana es nilpotente. También tenemos como ejemplo que el prototipo de álgebras nilpotentes es el conjunto de matrices triangulares superiores estrictamente $\mathfrak{n}(n)$. Ahora sea $L \neq 0$ y sea $L^i = 0$, entonces tenemos que $[L, L^{i-1}] = 0$ y $L^{i-1} \neq 0$. Esto significa que L^{i-1} es un ideal abeliano en L, entonces cada álgebra de Lie nilpotente $L \neq 0$ contiene un ideal abeliano distinto de cero. Además de esto tenemos de la definición de una álgebra de Lie semisimple que las álgebras de Lie nilpotentes no son semisimples y que para álgebras de Lie nilpotentes el operador ad_x es nilpotente para toda $x \in L$. En efecto, recordemos que un operador A es llamado nilpotente si $A^r = 0$ para alguna $r \in \mathbb{N}$.Entonces aplicando el operador ad_x k veces a un elemento arbitrario y de L y de la definición de ad_x se tiene

$$(\mathrm{ad}_x)^k(y) = (\mathrm{ad}_x)^{k-1}[x, y] = (\mathrm{ad}_x)^{k-2}[x, [x, y]] = [x, [x, \ldots, [x, y], \ldots]] \in L^k$$

como $L^k = 0$ para alguna k obtenemos que $(\mathrm{ad}_x)^k(y) = 0$ para toda $y \in L$ y consecuentemente existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathrm{ad}_x)^k = 0$ y por lo tanto ad_x es nilpotente para toda $x \in L$. Con esto hemos visto que si L es nilpotente entonces los elementos de L son ad-nilpotentes, más adelante se ve que la inversa es cierta y esto lleva al teorema de Engel.

PROPOSICIÓN 1.21. *Sea L una álgebra de Lie*

1) Si L es nilpotente, entonces todas las subálgebras de L son nilpotentes y las imagenes homomorficas de L son nilpotentes.
2) Si $L/Z(L)$ es nilpotente, entonces L misma es nilpotente.
3) Si L es nilpotente, entonces $Z(L) \neq 0$.

Para la demostración se usaran los siguientes dos lemas.

LEMA 1.22. *Sean L y N dos álgebras de Lie. Si f es un homomorfismo de álgebras de Lie*

$$f : L \longrightarrow N$$

entonces $f(L^n) \subset N^n$

Demostración. Se hará por inducción sobre n.
Para $n = 1$ se cumple, pues $f(L^1) \subset N^1$ por ser f un morfismo.
Supongamos que se vale para $(n-1)$. Por definición de la serie central decendente se tiene que

$$f(L^n) = f([L, L^{n-1}])$$

y por ser f un homomorfismo tenemos que

$$f([L, L^{n-1}]) = [f(L), f(L^{n-1}]$$

Tomando en cuenta la hipótesis de inducción, junto con lo anterior obtenemos lo siguiente

$$f(L^n) = f([L, L^{n-1}]) = [f(L), f(L^{n-1}] \subset [N, N^{n-1}] =: N^n$$

Por lo tanto tenemos que $f(L^n) \subset N^n$. ∎

LEMA 1.23. *sean L,M y N álgebras de Lie. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Entoces M es nilpotente si y sólo si L y N son nilpotentes.

Demostración. Tenemos lo siguiente.

$\Longrightarrow$) Como M es nilpotente implica que existe una n tal que $M^n = 0$, esto implica por el lema 1.22 que $f(L^n) = 0$ y esto implica que $L^n \subset \operatorname{Ker} f$ y por ser f inyectiva se tiene que $L^n = 0$, con lo cual concluimos que L es nilpotente.
Por ser g suprayectiva se tiene que $g(M) = N$, lo que implica que $g(M^s) = N^s$, la contención del lema 1.22 es igualdad por ser g suprayectiva y como M es nilpotente se tiene que $s = n$, lo que implica que $N^n = 0$ y por lo tanto que N es nilpotente.

$\Longleftarrow$) Como L y N son nilpotentes implica que existen p y q tales que $L^p = 0$ y $N^q = 0$, esto implica que

$$g(M^q) = N^q = 0 \Longrightarrow M^q \subset \operatorname{Ker} g = \Im f = f(L) \Longrightarrow M^{q+s} \subset f(L^s) = 0$$

si $s = p$ implica que $M^{q+p} = (M^q)^p \subset f(L^p) = 0$, lo que implica que $M^{q+p} = 0$ y por lo tanto M es nilpotente.

■

Demostración. (de 1.21)

1) Sea K una subálgebra de L entonces se tiene que $K \subset L$, lo que implica que $K^i \subset L^i$, como L es nilpotente implica que existe una n tal que $L^n = 0$ y como $K^n \subset L^n = 0$, implica que $K^n = 0$ y por lo tanto K es nilpotente.
Si

$$\Phi : L \longrightarrow M$$

es un morfismo suprayectivo, por el lema 1.22 se tiene que $\Phi(L^i) = M^i$. Como L es nilpotente implica que existe una n tal que $L^n = 0$ y esto implica que

$$0 = \Phi(0) = \Phi(L^n) = M^n \Longrightarrow M^n = 0$$

Por lo tanto M es nilpotente.

2) Sea la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z(L) \xrightarrow{\imath} L \xrightarrow{\pi} L/Z(L) \longrightarrow 0$$

Por el regreso del lema 1.23 se tiene que L es nilpotente.

3) Sea la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z(L) \xrightarrow{\imath} L \xrightarrow{\pi} L/Z(L) \longrightarrow 0$$

Por la ida del lema 1.23 se tiene que $Z(L)$ es nilpotente, es decir, existe una n tal que $Z(L)^n = 0$, lo cual implica que $Z(L)^{n-1} \neq 0$ y por lo tanto $Z(L) \neq 0$

■

DEFINICIÓN 1.24. sea L una álgebra de Lie y x en L, decimos que x es *ad-nilpotente* si ad_x es un endomorfismo nilpotente, es decir, $(\operatorname{ad}_x)^n = 0$ para alguna n en $\mathbb{N}$.

Por ejemplo para la base de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, F)$ dada por

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene que los elementos y y x en $\mathfrak{sl}(2, F)$ son ad-nilpotentes, pues $(\operatorname{ad}_x)^3 = (\operatorname{ad}_y)^3 = 0$

LEMA 1.25. *sea x en $\mathfrak{gl}(V)$ un endomorfismo nilpotente entonces ad_x támbien es nilpotente.*

Demostración. Asociamos a x dos endomorfismos de $\operatorname{End} V = \mathfrak{gl}(V)$, la traslación izquierda y la traslación derecha, a saber $\lambda_x(y) = xy$ y $\rho_x(y) = yx$ respectivamente las cuales son nilpotentes. En efecto, tomando en cuenta que x es nilpotente, se tiene que

$$(\lambda_x(y))^n = (xy)^n = x^n y^n = 0.y^n = 0 \Longrightarrow (\lambda_x)^n = 0.$$

Analogamente se tiene que $(\rho_x)^n = 0$ y por lo tanto que λ_x y ρ_x son nilpotentes.
Se tiene que λ_x y ρ_x conmutan. En efecto, evaluando tenemos lo siguiente

$$\rho_x\lambda_x(y) = \rho_x(xy) = xyx = \lambda_x(yx) = \lambda_x\rho_x(y) \Longrightarrow \rho_x\lambda_x(y) = \lambda_x\rho_x(y)$$

de lo cual concluimos que λ_x y ρ_x conmutan. Se sabe que en cualquier anillo la suma o diferencia de dos nilpotentes que conmutan es otra vez un nilpotente, en particular aquí el anillo es End(End(V)). En efecto sea R un anillo con t y s elementos nilpotentes en el anillo tal que $st = ts$. Como s es nilpotente implica que existe una n tal que $s^n = 0$, analogamente existe una m tal que $t^m = 0$ con $n \neq m$.
Por el binomio de Newton y tomando encuenta que s y t son nilpotentes, se tiene que

$$(s-t)^q = \sum_{i=1}^{q} \binom{q}{i} (\lambda_x^i)(-\rho_x^i)^{m-i}$$

lo cual es cero para $q \geqslant m + n$. Por lo tanto $(s - t)$ es nilpotente. Análogamente $(s + t)$ es nilpotente. Al evaluar $(\lambda_x - \rho_x)$ tenemos lo siguiente

$$(\lambda_x - \rho_x)(y) = \lambda_x(y) - \rho - x(y) = xy - yx = [x, y] = \mathrm{ad}_x(y)$$

y llegamos a que

$$\mathrm{ad}_x = \lambda_x - \rho_x$$

como λ_x y ρ_x son nilpotentes, se tiene que $(\lambda_x - \rho_x)$ es un elemento nilpotente y por lo atanto ad_x es nilpotente. ■

El inverso de este lema no es cierto. Por ejemplo si tomamos el operador identidad $\mathbf{1}$ en $\mathfrak{gl}(V)$, se tiene que este operador es ad-nilpotente pues $\mathrm{ad}_{\mathbf{1}}(x) = [\mathbf{1}, x] = \mathbf{1}.x - x.\mathbf{1} = 0$ pero el operador identidad $\mathbf{1}$ no es nilpotente.

TEOREMA 1.26. *Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, con V de dimensión finita. Si L consiste de endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$, entonces existe un vector $v \neq 0$ en V, con eigenvalor cero para todos los endomorfismos $x \in L$, es decir, que $L.v = 0 \cdot v = 0$.*

Demostración. Se usara inducción sobre la dimension de L. Sea $n = \dim L \leqslant \dim V < \infty$. Si $\dim L = 1$ implica que existe un endomorfismo nilpotente x

$$x : V \longrightarrow V$$

tal que x tiene almenos un eigenvector u correspondiente a su unico eigenvalor 0, es decir,

$$x.u = \lambda.u \quad y \quad \lambda = 0 \Longrightarrow x.u = 0 \cdot u = 0 \Longrightarrow x.u = 0$$

por lo tanto para $\dim L = 1$ se cumple, supongamos que se cumple para $\dim L \leqslant n - 1$. Sea $K \neq L$ cualquier subálgebra de L. Por el lema 1.25 K actua, via el ad, como una álgebra de Lie de transformaciones lineales nilpotentes sobre el espacio vectorial L, es decir,

$$\mathrm{ad} : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

definido por la regla de correspondencia siguiente

$$x \longmapsto \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x$$

donde

$$\mathrm{ad}_x : L \longrightarrow L$$

con regla de correspondencia

$$y \longmapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$$

Por lo anterior tambien actua de igual manera sobre L/K, es decir,

$$\mathrm{ad} : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L/K)$$

definida por la regla de correspondencia

$$x \longmapsto \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x$$

donde

$$\mathrm{ad}_x : L/K \longrightarrow L/K$$

definido por la regla

$$\overline{y} \longmapsto \mathrm{ad}_x(\overline{y}) = \overline{[x, y]}$$

Como la $\dim K < \dim L$, la hipotesis de inducción garantiza la existencia de un vector $\overline{y} = x + K \neq K$ en L/K, anulado por la imagen de K en $\mathfrak{gl}(L/K)$, es decir,

$$\mathrm{ad} : K \longrightarrow \mathfrak{gl}(L/K)$$

tal que

$$x \longmapsto \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x(\overline{y}) = \overline{[x, y]} = 0$$

De este modo tenemos justamente que $[x, y]$ esta en K, para todo y en K, considerando que x no esta en K. En otras palabras, K esta propiamente incluido en el normalizador de K en L, es decir,

$$K \subset N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}$$

Ahora tomamos a K como una subálgebra propia maximal de L. Con el argumento anterior se tiene que $K \subset N_L(K)$ y ello fuerza a que $N_L(K) = L$ y como $N_L(K)$ es la mayor subálgebra de L que contiene a K como un ideal, se concluye que K es un ideal de L.

Sea J una subálgebra de L/K y π la proyección canónica

$$\pi : L \longrightarrow L/K$$

Si la $\dim(L/K)$ fuera mayor que uno, entonces la imagen inversa $\pi^{-1}(J)$ en L de una subálgebra de dimensión uno J de L/K, la cual siempre existe, debería ser una subálgebra propia de L que contiene propiamente a K, es decir $K \subset \pi^{-1}(J)$, lo cual es una contradicción porque K es maximal en L, por consiguiente K tiene codimensión uno. Esto nos permite escribir $L = K + Fz$ para toda z en $(L - K)$.

Por hipotesis de inducción se tiene que el conjunto

$$W = \{v \in V \mid K(v) = 0\} \subset V$$

es distinto del vacío. Puesto que K es un ideal de L, implica que W es estable bajo L:

$$L : V \longrightarrow V \Longrightarrow L(W) = W$$

Ahora si x esta en L, y está en K y w esta en W, se obtiene lo siguiente

$$yx(w) = xy(w) - xy(w) + yx(w) = xy(w) - (xy(w) - yx(w)) =$$

$$xy(w) - (xy - yx)(w) = xy(w) - [x, y](w) = 0$$

Sabiendo que xy esta en L y que yx junto con $[x, y]$ estan en K por ser K un ideal, elegimos $z = yx$ en $(L - K)$ como arriva, así el endomorfismo nilpotente z, actuando ahora sobre el subespacio W tiene un eigenvector, es decir $v \neq 0$ en W para el cual $z.v = 0$. Finalmente tenemos que

$$L.v = K.v + z.v = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow L.v = 0$$

por lo tanto existe $v \neq 0$ en V tal que $L.v = 0$, con lo cual se acaba la demostración. ■

El punto crucial del teorema 1.26 es que garantiza la existencia de un vector $v \neq 0$ el cual es un eigenvector simultaneo para todos los operadores en la álgebra entonces todos los eigenvalores de un operador nilpotente son cero. En efecto, supongamos que λ es un eigenvalor de x, es decir, $x.w = \lambda w$ entonces $x^n = 0$ implica que $\lambda^n = 0$ y por lo tanto $\lambda = 0$.

TEOREMA 1.27. **(Engel)** *Si todos los elementos de L son ad-nilpotentes, entoces L es nilpotente.*

Demostración. Sea L una álgebra de Lie dada con $L \neq 0$, cuyos elementos son todos ad-nilpotentes, por lo tanto, el álgebra de Lie $\mathrm{ad}(L) \subset \mathfrak{gl}(L)$ satisface las hipotesis del teorema 1.26, esto implica que existe x en L para el cual $\mathrm{ad}\,L(x) = [L, x] = 0$, es decir el $Z(L) \neq 0$. Ahora $L/Z(L)$ consiste de elementos ad-nilpotentes. En efecto, por hipotesis todos los elementos de L son ad-nilpotentes y como $Z(L)$ es un ideal de L, el álgebra cociente $L/Z(L)$ es de elementos ad-nilpotentes y tiene dimensión menor que L. Usaremos inducción sobre la dimensión de L.
Supongamos que se vale para $\dim L \leqslant n - 1$. Como $L/Z(L)$ consta de elementos ad-nilpotentes y es de dimensión menor que L, implica por hipotesis de inducción que $L/Z(L)$ es nilpotente y por la proposición 1.21 inciso 2), obtenemos que L es nilpotente. ■

DEFINICIÓN 1.28. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, es decir $\dim V = n$, una *bandera* en V es una cadena de subespacios con la siguiente propiedad

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$$

y tal que $\dim V_i = i$.

DEFINICIÓN 1.29. Sea x en $\mathrm{End}(V)$, decimos que x *estabiliza* o deja *invariante* a una bandera de V si $x(V_i) \subset V_i$ para toda i.

COROLARIO 1.30. *Sea $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra consistente de endomorfismos nilpotentes, $V \neq 0$, $\dim V < \infty$. Entoces existe una bandera de subespacios*

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$$

tales que $x(V_i) \subset V_{i-1}$ para toda i. En otras palabras podemos elegir una base de V tal que en esta base las transformaciones x son matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal.

Demostración. Sea $v \neq 0$ anulado por L, es decir $L.v = 0$, la existencia de v es asegurada por el teorema 1.26. Definamos el conjunto $V_1 = Fv$ y sea $W = V/V_1$, observemos que la acción inducida por L sobre W es por endomorfismos nilpotentes, es decir, tenemos un homomorfismo

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$$

definido por la correspondencia

$$x \longmapsto \Phi(x)$$

con

$$\Phi(x) : W \longrightarrow W$$

definida por

$$v + V_1 \longmapsto \Phi(x)(v + V_1) = x.v + V_1$$

donde todos los homomorfismos $\Phi(x)$ son nilpotentes. Ahora se procede por inducción sobre la dimensión de V.
Como $\dim W < \dim V$ esto implica por hipotesis de inducción que W tiene una bandera estabilizada por L, en otras palabras tenemos que

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_{n-1} = W \tag{1}$$

tal que $L(W_i) \subset W_i$. Consideremos la proyección canonica

$$\pi : V \longrightarrow W = V/V_1$$

entonces aplicando la imagen inversa de π a (1) obtenemos

$$0 = V_0 \subset V_1 = \pi^{-1}(W_0) \subset V_2 = \pi^{-1}(W_1) \subset V_3 = \pi^{-1}(W_2) \subset V_4 = \pi^{-1}(W_3) \ldots$$
$$\ldots \subset V_n = \pi^{-1}(W_{n-1}) = W$$

tal que $L(V_i) \subset V_i$, la cual es una bandera estabilizada por L.
Sea x en L, esto implica que $x(V_i) \subset V_i$. Si $i = 1$ se tiene que

$$x(V_1) = x(Fv) = Fx.v = F0 = 0 \subset 0 = V_0$$

por lo tanto $x(V_1) \subset V_0$. Sea $\{v_i\}$ una base de V tal que v está en $\{v_i\}$, sin perdida de generalidad supongamos que $v = v_1$. Sea z en V, lo cual implica que z es de la forma $z = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ y sea x en L. Evaluando obtenemos

$$x.z = x.\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x.v_i = a_1 x.v_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x(v_i) = \sum_{i=2}^{n} a_i x.v_i$$

ya que $x(v_1) = x(v) = 0$ y $\{v_i\}_{i=2}^{n}$ es una base de V_{n-1}, se tiene que $x(z)$ pertenece a V_{n-1} para toda z en V, es decir $x(V) = x(V_n) \subset V_{n-1}$ y por lo tanto $x(V_i) \subset V_{i-1}$ para toda i como se deseaba. En otras palabras todo elemento x en L estabiliza a la bandera.
Ahora tomemos la base v_i de el espacio vectorial V, adaptada a la bandera dada, la cual es invariante bajo todos los elementos x de L. Tal base la construimos de la siguiente forma. Comenzamos con el vector $v_1 \neq 0 \in V_1$ lo que implica que $\dim V_1 = 1$. En V_2 tomamos v_2 linealmente independiente de v_1 entonces $\dim V_2 = 2$. De esta manera elejimos $v_i \in V_i$ pero $v_i \notin V_j$ para toda $j < i$. Como sabemos que $x(V_i) \subset V_{i-1}$ tenemos lo siguiente

$$xv_i = \sum_{k=1}^{n} v_k x_{ki} \quad \in \quad V_{i-1}$$

Esto significa que la matriz (x_{ki}) correspondiente al operador x tiene $x_{ki} = 0$ para $k \leqslant i$. Entonces la matriz es triangular superior estrictamente y esto se tiene para todos los operadores en la álgebra y concluimos que todos los operadores de la álgebra de Lie L nilpotente son representados, con respecto a la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adaptada a la bandera, por matrices triangulares estrictamente superiores, es decir, matrices que pertenecen a $\mathfrak{n}(n)$. ∎

De éste teorema se concluye que toda "algebra de Lie nilpotente es una subálgebra de $\mathfrak{n}(n)$ e inversamente toda subálgebra de $\mathfrak{n}(n)$ es nilpotente.

LEMA 1.31. *Sea L una álgebra de Lie nilpotente, K un ideal de L. Entoces si $K \neq 0$, se tiene que $K \cap Z(L) \neq 0$.*

Demostración. En particular $Z(L) \neq 0$ por la proposición 1.21 inciso 3).Como L actua sobre K via la representación adjunta ponemos $\Phi(x)(y) = ad_x(y)$ para y en K y x en L, esto implica que L y K cumplen con las hipótesis del teoerema 1.26 y por lo tanto existe $0 \neq y$ en K tal que $\Phi(L)(y) = ad_L(y) = [L, y] = 0$ y por definición de $Z(L)$ implica que y esta en $Z(L)$, lo que a su vez implica que $y \in K \cap Z(L)$, concluyendo que $K \cap Z(L) \neq 0$ como se quería. ∎

CAPÍTULO 2

ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES

1. Teoremas de Lie y Cartan

En este capitulo consideraremos al campo F, como álgebraicamente cerrado y de caracteristica cero.

PROPOSICIÓN 2.1. *Dada la serie derivada*

$$L^{(0)} = L, L^{(1)} = [L, L], \ldots, L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]$$

de una álgebra de Lie L, se tiene lo siguiente:

a) $L^{(n+1)}$ *es un ideal en* $L^{(n)}$

b) $L^{(n)}/L^{(n+1)}$ *es una álgebra abeliana*

Demostración. Se Procede como sigue.

a) Se hará por inducción sobre n. Sea x en L y z en $L^{(1)}$, entonces para $n = 0$ y usando la identidad de Jacobi en la tercera igualdad y la antisimetria en la cuarta igualdad, se tiene

$$\begin{aligned}[x, z] = [x, [L, L]] &= -[L, [L, x]] - [L, [x, L]] = [L, [x, L]] - [L, [x, L]] \\ &= [L, L] - [L, L] \in [L, L] = L^{(1)}\end{aligned}$$

y esto implica que $[x, z] \subset L^{(1)}$ para todo x en L. Ahora supongamos que se vale para $(n - 1)$, por demostrar que se cumple para n.
Sea x en $L^{(n-1)}$ y usando la identidad de Jacobi en la tercera igualdad, junto con la antisimetria en la cuarta igualdad se tiene que:

$$\begin{aligned}[x, L^{(n)}] &= [x, [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]] = -[L^{(n-1)}, [L^{(n-1)}, x]] - [L^{(n-1)}, [x, L^{(n-1)}]] \\ &= [L^{(n-1)}, [x, L^{(n-1)}]] - [L^{(n-1)}, [x, L^{(n-1)}]] \\ &= [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] - [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] \in [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] = L^{(n)}\end{aligned}$$

de lo anterior se infiere que $[x, L^{(n)}] \subset L^{(n)}$ para toda x en $L^{(n-1)}$ y por lo tanto que $L^{(n+1)}$ es un ideal en $L^{(n)}$.

b) Se hará por inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos que

$$L/L^{(1)} = L/[L, L]$$

es abeliano, es decir se debe demostrar que $[L, L] \subset L^{(1)}$. En efecto, como $L^{(1)} = [L, L] \subset L^{(1)}$, para $n = 1$ se cumple.

Ahora supongamos que se cumple para $(n-1)$. Por demostrar que $L^{(n)}/L^{(n+1)}$ es abeliana, es decir, que $[L^{(n)}, L^{(n)}] \subset L^{(n+1)}$. En efecto, se tiene lo siguiente

$$[L^{(n)}, L^{(n)}] = \left[[L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}]\right] \subset [L^{(n)}, L^{(n)}] = L^{(n+1)}$$

la incusión se da por hipotesis de inducción. Lo anterior implica que $[L^{(n)}, L^{(n)}] \subset L^{(n+1)}$ y por lo tanto $L^{(n)}/L^{(n+1)}$ es abeliana para toda n.

∎

COROLARIO 2.2. *Sea V un espacio vectorial, L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, H un ideal en L y λ una función lineal*

$$\lambda : H \longrightarrow F$$

definida por la regla de correspondencia

$$h \to \lambda(h)(v) = h(v)$$

Entonces el subespacio

$$W = \{v \in V \mid \lambda(h)(v) = h(v) \quad \forall h \in H\}$$

es L-invariante, es decir, $x(w) \in W$ para toda x en L y w en W o en otras W es unvariante bajo L.

Demostración. Tomamos w en W, x en L y h en H. Entonces por definición de el conmutador de $[x, h](w) = xh(w) - hx(w)$ ponemos

$$h(x(w)) = x(h(w)) - [x, h](w)$$

Como x es lineal, el primer sumando del lado derecho nos da

$$x(\lambda(h)(w)) = \lambda(h)x(w)$$

lo cual es lo que queremos, y, como H es un ideal tenemos que $[x, h]$ está en H, por lo tanto el segundo sumando del lado derecho da

$$[x, h](w) = \lambda([x, h])(w)$$

La demostración estará completa si mostramos que $\lambda([x, h]) = 0$ para toda x en L y h en H.

En efecto, fijemos x en L, $w \neq 0$ en W y consideremos $(n-1)$ en $\mathbb{N}$ el minimo entero tal que los vectores

$$\{w, x(w), x^2(w) = x(x(w)), \ldots, x^{(n-1)}(w)\}$$

son linealmente independientes. Sea W_i el subespacio de V generado por $\{w, x(w), \ldots, x^i(w)\}$ y definimos $W_0 = 0$.

Afirmamos que para w en W_i también se tiene $x(w)$ ésta en W_i. Es suficiente verificar esto para los elementos de la base. En efecto sea w en W_i, lo cual implica que

$$w = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i(w)$$

evaluando por x y por ser x lineal se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} x(w) &= x\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i(w)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x(x^i(w)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x(x^i(w)) + a_{n-1} x(x^{n-1}(w)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x(x^i(w)) + a_{n-1} x^n(w) \end{aligned}$$

Como por construcción el conjunto $\{w, x(w), x^2(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$ es linealmente independiente, implica que $x^n(w)$ puede ser escrito como una combinación lineal de

$$\{w, x(w), x^2(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$$

a saber,

$$x^n(w) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k(w)$$

Sustituyendo a $x^n(w)$ en la anterior igualdad se tiene

$$\begin{aligned} x(w) &= x\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i(w)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x(x^i(w)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x(x^i(w)) + a_{n-1} x(x^{n-1}(w)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x(x^i(w)) + a_{n-1} x^n(w) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} a_i x(x^i(w)) + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k(w) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j(w) \end{aligned}$$

donde $c_j = a_j + b_j$ y por lo tanto $x(w)$ ésta en W_i. De lo anterior deducimos que $\dim W_n = n$ y $W_{n+i} = W_n$ para toda $i > 0$. Ahora denotamos por

$$\rho_x : W_i \longrightarrow W_i$$

el endomorfismo definido por la regla de correspondencia

$$w \rightarrow \rho_x(w) = x(w)$$

Veamos ahora que toda h en H satisface que $h(W_i)$ ésta contenida en W_i y que por lo tanto la representación matricial de los elementos de H, es por medio de matrices triangulares superiores, tales que en la diagonal principal tienen por entrada a $\lambda(h)$.

Basta demostrar que

$$h(x^i(w)) \equiv \lambda(h)x^i(w) \quad \text{mod} \quad W_i$$

es decir, que $h(x^i(w))$ y $\lambda(h)x^i(w)$ difieren por un elemento en W_i. Se hará la demostración por inducción sobre i.

1) para $i = 0$ se tiene

$$h(x^0(w)) = h(w) = \lambda(h)x^0(w) = \lambda(h)(w)$$

que es la definición de la función λ y por lo tanto se cumple.

2) Supongamos que se vale para $(i-1)$, es decir, se tiene lo siguiente

$$h(x^i(w)) = h(x(x^{i-1}(w))) = x(h(x^{i-1}(w))) = x(h(x^{i-1}(w))) - ([x,h])(x^{i-1}(w))$$

usando la hipótesis inductiva, obtenemos

$$h(x^{i-1}(w)) = \lambda(h)x^{i-1}(w) + w' \quad \text{con } w' \in W_{i-1}$$

y

$$[x,h]x^{i-1}(w) = \lambda([x,h])x^{i-1}(w) + w'' \quad \text{con } w'' \in W_{i-1}$$

con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} h(x^i(w)) &= x(h(x^{i-1}(w))) - ([x,h])(x^{i-1}(w)) \\ &= x(\lambda(h)x^{i-1}(w) + w') - \lambda([x,h])x^{i-1}(w) + w'') \end{aligned}$$

Ahora como $x(W_{i-1}) \subset W_{i-1}$ por hipótesis de inducción y $W_{i-1} \subset W_{i-1}$ tenemos que

$$h(x^i(w)) \equiv \lambda(h)x^i(w) \quad \text{mod} \quad W_i$$

Por lo tanto W_i es invariante bajo H para toda h en H.

Lo anterior muestra que $h(w)$ ésta en W_i para toda h en H y w en W_i, por lo tanto también tenemos el siguiente mapeo definido para toda h en H

$$\rho_h : W_i \longrightarrow W_i$$

Pero tenemos mucho más, a saber que la representación matricial de ρ_h en la base $\{w, x(w), x^2(w), \ldots, x^{n-1}(w)\}$ es por matrices triangulares superiores, con todas las entradas en la diagonal principal igual a $\lambda(h)$. Como W_n es invariante bajo H se tiene que

$$\operatorname{Tr} \rho_h = n\lambda(h)$$

en particular x y h dejan invariante a W_n y como $[x,h]$ vive en H por ser H un ideal, se tiene que

$$\operatorname{Tr} \rho_h = n\lambda([x,h])$$

sabemos que la traza de un conmutador es cero. En efecto,

$$\operatorname{Tr}([x,y]) = \operatorname{Tr}(xy - yx) = \operatorname{Tr}(xy) - \operatorname{Tr}(yx) = \operatorname{Tr}(xy) - \operatorname{Tr}(xy) = 0$$

por tanto obtenemos

$$\operatorname{Tr} \rho_h[x,h] = n\lambda([x,h]) = 0$$

como $n \neq 0$, implica que $\lambda([x,h]) = 0$, es decir,

$$[x,h](w) = \lambda([x,h])(w) = 0 \Longrightarrow [x,h](w) = 0 \Longrightarrow (xh-hx)(w) = 0 \Longrightarrow (xh)(w)-(hx)(w) = 0$$

lo cual implica que

$$h(x(w)) = x(h(w))$$

y por lo tanto W es L-invariante como se deseaba. ■

TEOREMA 2.3. *Sea L una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$, V de dimensión finita. Si $V \neq 0$, entonces V contiene un eigenvector comun para todos los endomorfismos en L.*

Demostración. Se hará por inducción sobre la dimensión de L.

1) Para $n = 1$ se cumple; porque todo endomorfismo tiene siempre un eingenvector asociado al eigenvalor cero.
2) Supongamos que es valído para $(n-1)$. Como L es soluble y tiene dimensión positiva, entonces L contiene extrictamente a $[L, L] = L^{(1)}$, que es un ideal en L por la proposición 2.1 inciso a). De igualmanera L/L^1 es una álgebra abeliana por la proposición 2.1 inciso b); esto implica que cualquier subespacio en L/L^1 es un ideal por ser una álgebra abeliana. Consideremos la proyección canónica π

$$\pi : L \longrightarrow L/L^1$$

definida por la correspondencia

$$x \rightarrow \pi(x) = x + L^1$$

Ahora tomemos un subespacio J en L/L^1 de codimensión uno, entonces su imajen inversa $\pi^{-1}(J)$, llamemosla H también es un ideal en L, tiene codimensión uno y además contiene a L^1. H es soluble por ser una subálgebra de L. Usando la hipótesis de inducción, existe un vector propio v de V, para toda h en H. Si $H = 0$, entonces L es abeliana de dimensión uno y la demostración esta concluida. Supongamos que $H \neq 0$; la existenacia del vector v nos permite construir una función lineal, digamos λ sobre el campo F como sigue

$$\lambda : H \longrightarrow F$$

definida por la regla de correspondencia

$$h \rightarrow \lambda(h)(v) = h(v)$$

Sea ahora W el subespacio de V definido por

$$W = \{w \in V \mid \lambda(h)(w) = h(w), \quad \forall h \in H\}$$

Notamos que $W \neq 0$, pues por hipótesis de inducción existe v en V tal que

$$h(v) = \lambda(h)(v)$$

provaremos ahora que en realidad

$$x(W) \subset Wx \in L$$

para toda $x \in L$, es decir, que L deja invariante al subespacio W, o en otras palabras que W es L-invariante. En efecto, la afirmación es cierta por el lema 2.2.

Tomemos w en W, x en L y h en H, entonces por definición del conmutador ponemos

$$h(x(w)) = x(h(w)) + [h, x](w) \qquad I)$$

como x es lineal , el primer término del lado derecho nos da $\lambda(h)x(w)$, es decir

$$x(h(w)) = \lambda(h)x(w)$$

sustituyendo lo anterior en $I)$ obtenemos

$$\begin{aligned} h(x(w)) &= x(h(w)) + [h,x](w) = x(\lambda(h)(w)) + [h,x](w) \\ &= \lambda(h)x(w) + [h,x](w) \qquad\qquad II) \end{aligned}$$

lo cual es lo que queremos y como H es un ideal tenemos que $[h,x]$ vive en H, por lo tanto el segundo sumando da $\lambda([h,x])(w)$, es decir

$$[h,x](w) = \lambda([h,x])(w)$$

sustituyendo lo anterior en $II)$ se obtiene

$$h(x(w)) = x(h(w)) + [h,x](w) = \lambda(h)x(w) + \lambda([h,x])(w)$$

Devido a que H es de codimensión uno, podemos escribir a L como

$$L = H + Fz$$

para alguna z en L. Como $z(W) \subset W$ por hipótesis de inducción, implica que existe un eingenvector $v_0 \neq 0$ de z en W tal que

$$z.v_0 = \lambda z.v_0$$

Entonces podemos extender el mapeo lineal λ

$$\lambda : H \longrightarrow F$$

a un mapeo lineal

$$\lambda : L \longrightarrow F$$

definido por la regla de correspondencia

$$x \to \lambda(x)(v_0) = x.v_0 x \in L$$

para toda $x \in L$. Con lo cual queda concluida la demostración. ∎

TEOREMA 2.4. **(Lie)** *Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n$. Entonces L estabiliza alguna bandera en V (en otras palabras, los elementos de L son representados por matrices triangulares superiores relativas a una base apropiada de V).*

Demostración. Usaremos el teorema 2.3 junto con inducción sobre la dimensión de V.

1) La afirmación es cierta para la $\dim V = 1$. En efecto por el lema 2.2 el mapeo lineal

$$\rho_x : V \longrightarrow V$$

es representado en la base $\{v_i\}$ por una matriz con entradas en la diagonal dadas por $\lambda(x)$.

2) Ahora supongamos que la afirmación es cierta para $(n-1)$. Por el teorema anterior existe un vector $v_1 \neq 0$ en V tal que

$$x(v_1) = \lambda(x)(v_1)$$

para alguna función lineal λ sobre L. Entoces pasamos al espacio cociente $V_1 = V/Fv_1$ que tiene dimensión menor que V.
Usando la hipótesis de inducción sobre V_1, vemos que existe una base $\{v_i' + Fv_1\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ de V_1 tal que los elementos de L son representados por matrices triangulares superiores. Tomemos la proyección canónica entre los espacios vectoriales V y V_1

$$\pi : V \longrightarrow V_1 = V/Fv_1$$

entonces aplicando la imagen inversa de π a la base $\{v_i' + Fv_1\}$ de V_1, obtenemos $\{v_i\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$; que es la base de V con la propiedad deseada.

Hemos visto que el espcio vectorial V tiene la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ la cual esta adaptada a la bandera de subespacios de V, es decir, la base satisface que $v_i \in V_i$ y $v_i \notin V_j$ para $j < i$. Para la representación matricial de el operador x de L con respecto a esta base tenemos que

$$xv_i = \sum_{k=1}^{n} v_k x_{ki} \quad \in \quad V_i$$

Tomando en cuenta la estabilidad de la bandera encontramos que $x_{ki} = 0$ para $k > i$. Entonces todas las matrices que representan a los elementos de una álgebra de Lie soluble, con respecto a la base adaptada a la bandera, son matrices triangulares superiores. ■

De éste teorema se desprende que las subálgebras de $\mathfrak{t}(n)$ son el prototipo de las álgebras de Lie solubles. Se sabe que todo operador lineal x sobre un espacio vectorial V puede ser representado por una matriz triangular superior. El caso especial de las álgebras de Lie solubles es la existencia de una base de V en la cual todos sus operadores tienen simultaneamente la forma de una matriz triangular superior.

COROLARIO 2.5. *Sea L soluble. Entonces existe una cadena de ideales de L*

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$$

talque $\dim(L_i) = i$.

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de L y consideremos la representación adjunta de L

$$\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

entonces ad es una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(L)$ debido a la proposición 1.16 inciso 1); por el teorema de Lie 2.4 L estabiliza una bandera de subespacios de L relativa a la base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, es decir, se tiene que

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$$

con $\dim(L_i) = i$ y tal que $L(L_i) \subset L_i$, pero para x en L se tiene

$$\mathrm{ad}(x)(L_i) = \mathrm{ad}_x(L_i) = [x, L_i] \subset L_i$$

Lo anterior se cumple para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ y por lo tanto se tiene que L_i es un ideal en L para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, finalizando la demostración. ∎

COROLARIO 2.6. *Sea L soluble. Entonces $x \in [L, L]$ implca que $\mathrm{ad}_L(x)$ es nilpotente. En particular $[L, L]$ es nilpotente.*

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de L, por el corolario 2.5 existe una cadena de ideales de L

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$$

tal que el conjunto dado por $\{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ genera a L_i y $\dim(L_i) = i$, los elementos de $\mathrm{ad}\, L$ son representados por matrices triangulares superiores, esto es debido al teorema de Lie 2.4. En efecto, hemos visto en la demostración del corolario 2.5 que $\mathrm{ad}(x)(L_i) \subset L_i$, entonces para toda $x \in L$ se cumple que

$$(\mathrm{ad}\, x)x_i = \sum_{k=1}^{n} x_k (\mathrm{ad}\, x)_{ki} \quad \in \quad L_i$$

pues la base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ está acomodada a los requerimientos de la bandera.Entonces $(\mathrm{ad}\, x)_{ki} = 0$ y con respecto a esta base la matriz de $(\mathrm{ad}\, x)_{ki}$ es tringular superior. Ahora tomemos $x \in L^1 = [L, L]$. entonces x es una combinación lineal de conmutadores de elementos de L, en otras palabras,

$$x = \sum_{p,q} \lambda_{pq} [y_p, z_q]$$

entonces

$$\mathrm{ad}_L\, x = \sum_{p,q} \lambda_{pq}\, \mathrm{ad}_L [y_p, z_q] = \sum_{p,q} \lambda_{pq} [\mathrm{ad}\, y_p, \mathrm{ad}\, z_q]$$

Ahora $[\mathrm{ad}\, y_p, \mathrm{ad}\, z_q]$ es el conmutador de dos matrices triangulares superiores y es entonces una matriz triangular estrictamente superior, que son el álgebra derivada de las matrices triangulares superiores. Entonces $\mathrm{ad}_L\, x$ es una matriz triangular estrictamente superior y consecuentemente $\mathrm{ad}_L\, x$ esta representado por una matriz nilpotente y por lo tanto es nilpotente. Para x en $[L, L]$ se tiene que $\mathrm{ad}_L\, x$ es nilpotente, lo que implica que $\mathrm{ad}_{[L,L]}\, x$ es nilpotente para x en $[L, L]$ según hemos demostrado y esto implica que x es ad-nilpotente para todo x en $[L, L]$ y por el teorema de Engel 1.27 se tiene que $[L, L]$ es nilpotente, con lo cual acaba la demostración. ∎

Ahora que ya hemos visto los teorema clásicos de Lie y Engel que versan sobre álgebras de Lie solubles y nilpotentes respectivamente; discutiremos las álgebras de Lie simples y semisimples. Cartan dio un criterio para que una álgebra de Lie sea soluble o semisimple en términos de una forma bilineal, la llamada forma de Cartan-Killing o de Killing. La representación adjunta juega un papel crucial en esto. Antes de ir a éste tema necesitamos un resultado del álgebra lineal, llamado la descomposición de Jordan-Chevalley de un operador lineal sobre un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 2.7. Sea x en $\mathrm{End}(V)$, V de dimensión finita decimos que x es *semisimple* si las raíces de su polinomio minimo sobre F son todas distintas. Equivalentemente (F algebraicamente cerrado) decimos que x es *semisimple* si y sólo si x es diagonalizable.

Aquí se considerará una propiedad de los operadores lineales sobre un espacio vectorial V. Se sabe que toda matriz es equivalente a una matriz triangular superior; esto significa que toda matriz puede con respecto a una base apropiada, ser escrita como la suma de una matriz diagonal y una matriz triangular estrictamente superior. Entonces todo operador lineal se puede descomponer en dos partes, una que es diagonal y otra que es nilpotente. En general estas dos partes no conmutan.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre F, x en* $\mathrm{End}(V)$.

a) *Existen elementos únicos x_s, x_n en* $\mathrm{End}(V)$ *satisfaciendo las condiciones*
   1) $x = x_s + x_n$
   2) x_s *es semisimple y* x_n *es nilpotente*
   3) x_s *y* x_n *conmutan*
b) *Existen polinomios $p(T)$ y $q(T)$ en una indeterminada, sin términos constantes tales que $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. En particular, x_s y x_n conmutan con cualquier endomorfismo que conmute con x*
c) *Si $A \subset B \subset V$ son subespacios, y x mapea a B sobre A, entonces x_s y x_n también mapean a B sobre A*

Demostración. El polinomio caracteristico p_x de x puede ser escrito como

$$p_x(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}\dots(t-\lambda_k)^{n_k}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los eigenvalores diferentes de x y n_i es la multiplicidad algebraica de λ_i. La suma $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ de estas multiplicidades es igual a la dimensión de V; recordemos que para cualquier polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_N t^n$$

uno tiene el mapeo lineal

$$p(x) = a_0 Id + a_1 x + \dots + a_N t^n$$

Si p y q son polinomios entonces $p(x) \circ q(x) = pq(x)$ y en particular estos dos mapeos conmutan, porque el producto de polinomios es conmutativo. Además el teorema de Cayley-Hamilton dice que

$$p_x(x) = 0$$

Ahora para cualquier eigenvalor λ_i el eigenespacio generalizado $V_i = V_{\lambda_i}$ de x con eigenvalor λ_i es definido como el kernel de $(x - \lambda_i Id)^{n_i}$, es decir

$$V_i = V_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(x - \lambda_i Id)^{n_i}$$

Para todo v en V_i tenemos $(x(v) - \lambda_i(v))$ vive en V_i y puesto que

$$x(v) - \lambda_i(v) = 0 \quad \Longrightarrow x(v) = \lambda_i(v)$$

y debido a que $\lambda_i(v)$ vive en el subespacio V_i de cualquier modo, se concluye que $x(v)$ pertenece a V_i y como v se eligio arbitrariamente en V_i implica que

$$x(V_i) \subset V_i$$

para toda $i = 1, 2, \ldots, k$. En otras palabras, los subespacios V_i son invariantes bajo x. Afirmamos que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$$

y que la proyección

$$\pi : V \longrightarrow V_i$$

puede ser escrita como un polinomio en x. Probaremos esto por inducción sobre k, el número de eigenvalores diferentes.
En efecto, para $k = 1$; el teorema de Cayley-Hamilton implica que

$$(x - \lambda_1 Id)^{n_1} = 0$$

y entonces $V = V_1$ y la proyección es el mapeo identidad, que puede escribirse como

$$Id = Id + 0_1 x + \ldots + 0_k x^k$$

Asumamos que la afirmación es cierta para $(k-1)$ eigenvalores diferentes. Definamos $p_1 := (t - \lambda_1)^{n_1}$ y sea p_2 el producto de los otros factores en p_x, es decir,

$$p_x = p_1 p_2 = (t - \lambda_1)^{n_1} \prod_{i=2}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}$$

y entonces

$$p_x(x) = p_1 p_2(x) = p_1(x) \circ p_2(x) = 0$$

Además p_1 y p_2 son primos relativos, es decir, si tenemos polinomios r, s_1, s_2 tales que $p_1 = rs_1$ y $p_2 = rs_2$, entonces r es una constante. En efecto, supongamos que $r(z_0) = 0$; esto implica que

$$p_1(z_0) = r(z_0)s_1(z_0) = 0s_1(z_0) = 0 \quad y \quad p_2(z_0) = 0$$

Por un lado se tiene que

$$p_1(z_0) = 0 = (z_0 - \lambda_1)^{n_1} \Longrightarrow 0 = z_0 - \lambda - 1 \Longrightarrow z_0 = \lambda_1$$

y por otro lado se tiene que

$$\prod_{i=2}^{k} (z_0 - \lambda_i)^{n_i} = 0 \qquad \Longrightarrow z_0 = \lambda_i$$

con $i = 2, 3, \ldots, k$, es decir, se tiene que z_0 pertenece al conjunto $\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k\}$; lo cual es una contradicción, pues todos los λ_i son diferentes. Entonces r no tiene ceros y debe ser una constante.
Como p_1 y p_2 son primos relativos, la teoria de polinomios dice que existen polinomios q_1 y q_2 tales que

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1$$

y entonces

$$p_1 q_1(x) + p_2 q_2(x) = Id$$

Ahora definamos $\pi_i := p_i q_i(x)$ para $i = 1, 2$, entonces por definición $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$, es decir

$$v = \mathrm{Id}(v) = \pi_1(v) + \pi_2(v)$$

para toda v en V. Además

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_1\pi_2 = p_1q_1p_2q_2(x) = p - 1p_2q_1q_2(x) = p_1(x) \circ p_2(x) \circ q_1q_2(x)$$

y $p_1(x) \circ p_2(x) = 0$; por lo tanto $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ y analógamente $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$. De esta manera $\pi_1(v)$ pertenece al kernel de π_2 para toda v en V y similarmente $\pi_2(v)$ pertenece al kernel de π_1 y de esto dedudcimos que

$$\operatorname{Ker}\pi_1 \cap \operatorname{Ker}\pi_2 = 0$$

Asi, vemos que

$$V = \operatorname{Ker}\pi_1 \oplus \operatorname{Ker}\pi_2$$

y las proyecciones sobre los dos factores son justo los mapeos π_i, los cuales son polinomios en x. Puesto que $\pi_1 = p_1q_1(x) = q_1p_1(x) = q_1(x) \circ p_1(x)$ ponemos

$$V_1 = \operatorname{Ker}(p_1(x)) \subset \operatorname{Ker}\pi_1$$

Inversamente si $\pi_1(v) = 0$, entonces $v = \pi_2(v)$ y entonces

$$p_1(x)(v) = p_1(x) \circ p_2(x) \circ q_2(x)(v) = 0$$

entonces concluimos que $\operatorname{Ker}\pi_1 = V_1$. La proyección sobre este sumando esta dada por π_2; el cual es un polinomio en x.
Definimos $W := \operatorname{Ker}\pi_2$; si v pertenece a W, entonces

$$\pi_2(x(v)) = x(\pi_2(v)) = 0$$

y entonces $x(W)$ esta contenido en W, en otras palabras W es invariante bajo x y por lo tanto la descomposición

$$V = V_1 \oplus W$$

es compatible con x. Pero esto implica que p_x es el producto de p_{x_1} y p_{x_2}, donde los x_i son las restricciones de x a los dos sumandos. Asi, $p_{x_2} = p_2$, por lo tanto x_2 tiene eigenvalores $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ y se observa que el eigenespacio generalizado de x_2; es exactamente el eigenespacio generalizado de x con respecto a estos $(k-1)$ eigenvalores. Aplicando la hipótesis de inducción a x_2, vemos que

$$W = V_2 \oplus V_3 \oplus \ldots \oplus V_k$$

y las proyecciones sobre los sumandos son polinomios en x_2 y entonces polinomios en $x \circ \pi_2$ y por lo tanto polinomios en x. Lo cual nos permite escribir lo que buscabamos

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$$

y asi, la afirmación esta demostrada.
Ahora apliquemos el teorema chino del residuo para el anillo $F[x]$, para localizar un polinomio $p(x)$ que satisface las congruencias

$$p(x) \equiv \lambda_i \mod (x - \lambda_i)^{n_i}$$

y

$$p(x) \equiv 0 \mod x$$

Definimos $q(x) = x - p(x)$ lo que nos dice que $p(x)$ y $q(x)$ tienen término contante cero pues se sabe que $p(x) \equiv 0 \mod x$.
Ahora denotamos por π_i la proyección sobre V_i y definimos

$$x_s := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i$$

Entonces de lo anterior x_s es diagonalizable (pues todos los λ_i son diferentes), con eigenvalores λ_i y eigenvectores v_i. Definimos

$$x_n := x - x_s$$

Entonces x_s y x_n son polinomios en x por la afirmación anterior y ellos conmutan. En efecto, evaluendo se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
x_s x_n(v) = x_s(x - x_s)(v) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i (x - x_s)(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i (x(v) - x_s(v)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\pi_i x(v) - \pi_i x_s(v)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\pi_i \circ x(v) - \pi_i \circ x_s(v)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x(v) - x_s(v)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x \circ \pi_i(v) - x_s \circ \pi_i(v)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x - x_s) \circ \pi_i(v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x - x_s) \pi_i(v) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_n \circ \pi_i(v) = x_n \circ (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_i)(v) \\
&= x_n \circ x_s(v) = x_n x_s(v)
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$x_s x_n = x_n x_s \implies x_s x_n - x_n x_s = 0 \implies [x_s, x_n] = 0$$

por lo atnto x_s y x_n conmutan entre si. Ahora mostremos que x_n es nilpotente. En efecto, debido a que cualquier v en V puede ser escrito como una combinación lineal, de elementos de los espacios V_i, es suficiente verificar esto para v en V_i. Por construcción para tales elementos tenemos $x_s(v) = \lambda_i(v)$, lo cual implica que

$$(x - x_s)(v) = (x - \lambda_i Id)(v)$$

y por construcción se sabe que

$$x_n^{n_i}(v) = (x - x_s)(v)^{n_i}(v) = (x - \lambda_i Id)^{n_i}(v) = 0$$

lo cual dice que x_n es cero para alguna n_i y por lo tanto es nilpotente, como se quería.
Ahora supongamos que existen x'_s y x'_n tales que

$$x = x_s + x_n = x'_s + x'_n \implies x_s + x_n = x'_s + x'_n$$

lo anterior implica que

$$x_s - x'_s = x'_n - x_n$$

Como x_s y x'_s son diagonalizables, entonces son simultaneamente diagonalizables, es decir, $x_s - x'_s$ es diagonalizable. Debido a que x_n y x'_n son nilpotentes, la demostración de 1.25 afirma que $x'_n - x_n$ es nilpotente. Ahora $x_s - x'_s$ es un operador diagonalizable y nilpotente; un tal operador es el operador cero, pues como $x_s - x'_s$ es nilpotente, el polinomio caracteristico del operador es de la forma

$$p(x) = x^n$$

como el operador $x_s - x'_s$ es diagonalizable, el polinomio caracteristica no puede tener raíces repetidas, luego $n = 1$ y el polinomio es

$$p(x) = x$$

lo que indica que el operador; es el operador cero, es decir,

$$x_s - x'_s = x'_n - x_n = 0$$

con lo cual tenemos que $x_s = x'_s$ y $x_n = x'_n$ y por lo tanto que x_s y x_n son únicos.
Ahora como

$$x(B) \subset A$$

se tiene que

$$x(B) = (x_s + x_n)(B) = x_s(B) + x_n(B) \subset A \Longrightarrow x_s(B) \subset A - x_n(B) = A$$

por lo tanto se tiene que x_s también mapea a B sobre A. Analógamente se tiene que x_n mapea a B sobre A y la demostración de la proposición esta concluida. ■

La descomposición $x = x_s + x_n$ es llamada la *descomposición aditiva de Jordan-Chevalley* de x o la *descomposición de Jordan*; x_s y x_n son llamados respectivamente la *parte semisimple* y la *parte nilpotente* de x.
Como ejemplo de la descomposición de Jordan-Chevalley tenemos la matriz de 2×2 dada por

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que puede ser descompuesta como $x = x_1 + x_2$, con

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La descomposición de x en la matriz diagonal x_1 y la matriz nilpotente x_2 no es la descomposición de Jordan-Chevalley de x. Se puede verificar que x_1 y x_2 no conmutan y en éste caso la matriz x tiene dos eigenvalores diferentes, lo que implica que x es diagonalizable y entonces $x = x_s = x_1$. Otro ejemplo es la matriz de 2×2 dada por

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

que se puede descomponer como $x = x_s + x_n$, con

$$x_s = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y ésta es la descomposición de Jordan-Chevalley de x. Un último ejemplo es la matriz

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya descomposición es dada por

$$x_s = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz x_s es posible transformarla en una matriz diagonal.
Considerando la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$, con V de dimensión finita; sabemos por el lema 1.25 que si x pertenece a $\mathfrak{gl}(V)$ y es nilpotente, entonces ad_x también es nilpotente. Analógamente se tiene lo siguiente.

LEMA 2.9. *Sea x en $\mathfrak{gl}(V)$ un endomorfismo semisimple, entoces ad_x también es semisimple.*

Demostración. Elejimos una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V relativa a la cual x tiene una matriz diagonal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Sea $\{e_{ij}\}$ la base estandar de $\mathfrak{gl}(V)$, donde e_{ij} es la matriz que tiene un uno en el lugar (i,j) y cero en todos los demaás lugares. Así, tenemos que $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$. Calculando la representación adjunta en la base $\{e_{ij}\}$ tenemos que

$$\mathrm{ad}_x(e_{ij}) = [x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x$$

por definición de multiplicación de matrices, se sabe que

$$(xe)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj}$$

pero como x es diagonal y e_{kj} es uno cuando $k = i$ y es cero cuando $k \neq i$, se tiene un único sumando, es decir,

$$(xe)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_{kj} = a_{ii}e_{ij} = a_{ij} = a_{ii}$$

éste elemento ocupa el lugar (i, j) en la matriz $(xe)_{ij}$ y es el único elemento a_{ii}. Analógamente se tiene para $k = j$ que

$$(ex)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj} = e_{ij}a_{jj} = a_{ij} = a_{jj}$$

éste elemento ocupa el lugar (i, j) en la matriz $(e_{ij}x)$ y es el único elemento a_{jj}. Como $a_{ii} \neq a_{jj}$ se tiene

$$\mathrm{ad}_x(e_{ij}) = [x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x = a_{ii} - a_{jj} = (a_i - a_j)e_{ij}$$

Esto nos dice que ad_x es una matriz diagonal con respecto a la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V; en el espacio espacio de operadores lineales de V, es decir, en $\mathfrak{gl}(V)$ y por lo tanto ad_x es semisimple. ∎

LEMA 2.10. *Sea x en* $\mathrm{End}(V)$, *V de dimensión finita, $x = x_s + x_n$ su descomposición de Jordan. Entonces* $\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$ *es la descomposición de Jordan de* ad_x *en* $\mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$.

Demostración. Hemos visto que ad_{x_s} y ad_{x_n} son respectivamente semisimple y nilpotente, debido a los lemas 2.9 y 1.25 respectivamente; ellos conmutan, pues debido a que ad es un homomorfismo se tiene

$$[\mathrm{ad}_{x-s}, \mathrm{ad}_{x_n}] = \mathrm{ad}[x_s, x_n] = \mathrm{ad}\cdot 0 = 0$$

Aplicando el inciso a) del teorema 2.8, pues ad_{x_s}, ad_{x_n} son respectivamente semisimple y nilpotente y además conmutan se tiene que

$$\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{x_s} + \mathrm{ad}_{x_n}$$

y la demostración esta concluida. ■

DEFINICIÓN 2.11. Por una *F-álgebra* (no necesariamente asociativa) entenderemos simplemente un espacio vectorial $\mathfrak{U}$ sobre F dotada con una operación bilineal

$$: \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

definida por la correspondencia de yuxtaposición

$$(x, y) \mapsto xy$$

Si $\mathfrak{U}$ sea una álgebra de Lie, usaremos siempre el corchete de Lie.

DEFINICIÓN 2.12. Por una *derivación* de $\mathfrak{U}$ entenderemos un mapeo lineal

$$\delta : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

que satisfaga la regla de Leibniz, a saber $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$. Si $\mathfrak{U}$ es una álgebra de Lie se escribira $\delta[x, y] = [\delta x, y] + [x, \delta y]$.

Se denota por $\mathrm{Der}\,\mathfrak{U}$ al conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{U}$ y éstas forman un subespacio de los $End(\mathfrak{U})$.

LEMA 2.13. *Sea δ una derivación en* $\mathrm{Der}\,\mathfrak{U}$, *sean x, y en la F-álgebra $\mathfrak{U}$ y a, b en el campo F. Entonces*

$$(\delta - a - b)^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ((\delta - a)^{n-i}x)((\delta - b)^i y)$$

para cualquier n en $\mathbb{N}$

Demostración. Usaremos inducción sobre n.

1) Para $n = 0$ se tiene

$$(\delta - a - b)^0(xy) = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} ((\delta - a)^{0-i}x)((\delta - b)^i y)$$

es decir se tiene que

$$(xy) = (xy)$$

y por lo tanto que es valído para $n = 0$.

2) Supongamoslo cierto para n y demostremos que se vale para $(n+1)$. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}(\delta-a-b)^{n+1}(xy) &= (\delta-a-b)(\delta-a-b)^n(xy)\\ &= (\delta-a-b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((\delta-a)^{n-i}x)((\delta-b)^i y)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\delta-a-b)((\delta-a)^{n-i}x)((\delta-b)^i y)\end{aligned}$$

Ahora tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}(\delta-a-b)((\delta-b)^i y) &= \delta(\delta-b)^i y-(\delta-b)^i y\\ &= (\delta-b)^i y\delta+\delta(\delta-b)^i y-(\delta-b)^i y\delta-(a+b)(\delta-b)^i y\\ &= (\delta-b)^i y\delta+[\delta,(\delta-b)^i y]-(a+b)(\delta-b)^i y\\ &= (\delta-b)^i y(\delta-a)+(\delta-b)(\delta-b)^i y\\ &= (\delta-b)^i y(\delta-a)+(\delta-b)^{i+1} y\end{aligned}$$

entonces podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\delta-a-b)((\delta-a)^{n-i}x)((\delta-b)^i y)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((\delta-a)^{n-i+1}x)((\delta-b)^i y)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((\delta-a)^{n-i}x)((\delta-b)^{i+1} y)=$$

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}((\delta-a)^{n-i+1}x)((\delta-b)^i y)$$

Lo anterior es valído puesto que

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}$$

con lo cual queda demostrado el lema.

■

LEMA 2.14. *Sea* $\mathfrak{U}$ *una* F*-álgebra de dimensión finita. Entonces* $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ *contiene las partes semisimple y nilpotentes (en* $\operatorname{End}(\mathfrak{U})$*) de todos sus elementos*

Demostración. Sea δ una derivación en $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$, sean σ y τ en $\operatorname{End}\mathfrak{U}$ y pongamos $\delta=\sigma+\tau$, como la descomposición de Jordan de δ con σ y τ sus partes semisimple y nilpotentes respectivamente. Entonces es suficiente mostrar que σ es una derivación, es decir, que σ pertenece a $\operatorname{Der}\mathfrak{U}$ y puesto que el conjunto de las derivaciones forman un espacio vectorial se tendrá $\tau=\delta-\sigma$. Si a pertenece al campo F, definimos

$$\mathfrak{U}_a=\{x\in\mathfrak{U}\mid(\delta-a)^k x=0$$

para alguna k dependiendo sobre x. Entonces $\mathfrak{U}$ es la suma directa de estas $\mathfrak{U}_a$ para lo cual a es un eigenvalor de δ o de σ. En efecto, podemos verificar que para a y b arbitrarios en el campo F, se tiene

$$\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b \subset \mathfrak{U}_{a+b}$$

por medio de la fórmula general

$$(\delta - a - b)^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} ((\delta - a)^{n-i}x)((\delta - b)^i y)$$

la cual es verdadera por el 2.13. Ahora fijemos x en $\mathfrak{U}_a$ y y en $\mathfrak{U}_b$; si x e y son eigenvectores generalizados con eigenvalores a y b, entonces para n suficientemente grande, uno de los términos en cada parentesis de la suma $(\delta - a - b)^n(xy)$ es cero. Esto implica que (xy) esta en el eigenespacio generalizado de δ, para el eigenvalor $(a+b)$ y puesto que a es un eigenvalor de δ, también lo es de σ, es decir, si x pertenece a $\mathfrak{U}_a$, y pertenece a $\mathfrak{U}_b$ se tiene que

$$(\sigma - (a+b))(xy) = 0 \Longrightarrow \sigma(xy) - (a+b)(xy) = 0$$

lo que a su vez implica que

$$\sigma(xy) = (a+b)(xy) \qquad 1)$$

por que (xy) pertenece a $\mathfrak{U}_{a+b}$. Por otro lado se tiene que

$$(a+b)(xy) = a(xy) + b(xy) = (ax)y + x(by) = \sigma(x)y + x\sigma(y) \qquad 2)$$

Combinando 1) y 2) tenemos

$$\sigma(xy) = \sigma(x)y + x\sigma(y)$$

debido a que la suma es directa, es decir,

$$\mathfrak{U} = \oplus\mathfrak{U}_a$$

se sigue que σ es una derivación como se quería. ∎

LEMA 2.15. *Sean A y B dos subespacios de $\mathfrak{gl}(V)$, V de dimensión finita. Ponemos $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, B] \subset A\}$. Supongamos que x está en M y satisface que* $\operatorname{Tr}(xy) = 0$ *para toda y en M. Entonces x es nilpotente.*

Demostración. Sea $x = x_s + x_n$ la descomposición de Jordan de x. Fijemos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, relativa a la cual x tiene matriz diagonal $(a_1, \ldots, a_n)$. Sea E el subespacio vectorial de F (sobre el campo primo $\mathbb{Q}$), generado por los eigenvalores $a_1, \ldots, a_n$. Tenemos que mostrar que $x_s = 0$, o equivalentemente que $E = 0$. Puesto que E tiene dimensión finita sobre $\mathbb{Q}$ (por construcción), será suficiente mostrar que el espacio dual E^* de E es cero, es decir, que cualquier función lineal f

$$f : E \longrightarrow \mathbb{Q}$$

es cero.

En efecto, dada f sea y un elemento de $\mathfrak{gl}(V)$ cuya matriz relativa a nuestra base dada es la matriz diagonal $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Sea $\{e_{ij}\}$ la correspondiente base de $\mathfrak{gl}(V)$; vimos en el lema 2.9 que

$$\operatorname{ad} x_s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$$

y analógamente tenemos

$$\operatorname{ad} y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j)).$$

Ahora sea $r(t)$ un polinomio en $F(t)$ sin término constante que satisface

$$r(a_i - a_j) = f(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$$

para todos los pares i, j. La existencia de un tal $r(t)$ se sigue de la interpolación de Lagrange, pues

$$f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i)p_i$$

No existe confusión en los valores asignados, debido a que $a_i - a_j = a_k - a_l$ implica por la linealidad de f que

$$f(a_i - a_j) = f(a_k - a_l) \quad \Longrightarrow f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$$

y además

$$\operatorname{ad} y = f(a_i) - f(a_j) = r(a_i - a_j) = r(\operatorname{ad} x_s).$$

Como $\operatorname{ad} x_s$ es la parte semisimple de $\operatorname{ad} x$, debido al lema 2.10; podemos escribirlo como un polinomio en $\operatorname{ad} x$ sin término constante debido a la proposición 2.8 inciso b). Por lo tanto $\operatorname{ad} y$ es también un polinomio en $\operatorname{ad} x$ sin término constante. Debido a la definición del conjunto M, $\operatorname{ad} x$ mapea a B sobre A y de este modo tenemos que $\operatorname{ad} y(B) \subset A$, es decir, que y pertenece a M. Usando la hipotesís de que $\operatorname{Tr}(xy) = 0$ se tiene que

$$\operatorname{Tr}(xy) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i) = 0$$

El lado izquierdo es una combinación $\mathbb{Q}$-lineal de elementos de E, entonces aplicando f y la igualdad anterior obtenemos

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i)\right) = f(0) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f(a_i)f(a_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f(a_i)^2 = 0.$$

Pero los números $f(a_i)$ son racionales, forzando a que todos ellos sean cero y por lo tanto que f deba ser identicamente la función cero; ya que los a_i generan al espacio E, es decir, se tiene que $x_s = 0$ y por lo tanto que

$$x = x_s + x_n = 0 + x_n = x_n$$

en otras palabras, x es nilpotente como se queria. ■

LEMA 2.16. *Sean x,y,z endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces* $\operatorname{Tr}([x, y]z) = \operatorname{Tr}(x[y, z])$

Demostración. En efecto, escribamos lo siguiente

$$[x, y]z = xyz - yxz \qquad 1)$$

$$x[yz] = xyz - xzy \qquad 2)$$

Tomamos la traza y teniendo en cuenta que la traza es lineal, tenemos que

$$\operatorname{Tr}([x, y]z) = \operatorname{Tr}(xyz - yxz) = \operatorname{Tr}(xyz) - \operatorname{Tr}(y(xz)) \qquad 3)$$

$$\operatorname{Tr}(x[yz]) = \operatorname{Tr}(xyz - xzy) = \operatorname{Tr}(xyz) - \operatorname{Tr}((xz)y) \qquad 4)$$

Sabiendo que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ en 4) se tiene lo siguiente

$$\mathrm{Tr}((xz)y) = \mathrm{Tr}(y(xz)) \qquad 5)$$

Sustituyendo 5) en 4) obtenemos

$$\mathrm{Tr}(x[yz]) = \mathrm{Tr}(xyz - xzy) = \mathrm{Tr}(xyz) - \mathrm{Tr}(y(xz)) \qquad 6)$$

Entonces uniendo 3) y 6) se tiene

$$\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(xyz) - \mathrm{Tr}(yxz) = \mathrm{Tr}(x[y,z])$$

de lo cual se concluye que

$$\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(x[y,z])$$

como se deseaba. ■

TEOREMA 2.17. **(Criterio de Cartan)** *Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, V de dimensión finita. Supongamos que $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ para toda x en $[L,L]$, y en L. Entonces L es soluble.*

Demostración. Notemos primero que $[L,L]$ nilpotente implica que L es soluble. En efecto, se hará por inducción sobre i.
Por definición de la serie derivada y de la serie central para L se tiene para $i = 1$ que

$$L^{(1)} = [L,L] = L^1$$

por lo tanto para $i = 1$ se cumple.
Supongamos que se cumple para $(i-1)$. Entonces

$$L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \subset [L^{i-1}, L^{i-1}] \subset [L, L^{i-1}] = L^i$$

Por lo tanto $L^{(i)} \subset L^i$ para toda i en $\mathbb{N}$ y entonces todas las álgebras nilpotentes son soluble. Por este argumento será suficiente demostrar que $[L,L]$ es nilpotente o que todo x en $[L,L]$ es un endomorfismo nilpotente, pues recurriendo al lema 1.25 y al teorema de Engel 1.27 se tendrá que $[L,L]$ es nilpotente.
Usamos el lema 2.15 definiendo $A = [L,L]$, $B = L$ y $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x,L] \subset [L,L]\}$ como en el lema. Se sabe que $L \subset M$, puesto que $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ por hipótesis. Para hacer valer el lema debemos probar que si k pertenece a $[L,L]$ tal que $[L,L] \subset L \subset M$, sucede que

$$\mathrm{Tr}(kz) = 0$$

para toda z en M. En efecto, puesto que k pertenece a $[L,L]$ significa que es de la forma $k = [x,y]$ con x, y en L y sea z en M, por lo que el lema 2.16 muestra que

$$\mathrm{Tr}(kz) = \mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(x[y,z]) = \mathrm{Tr}([y,z]x) = 0$$

Debido a la definición de M se sigue que $[y,z]$ pertenece a $[L,L]$ y como x pertenece a L, la hipótesis del teorema dice que $\mathrm{Tr}([y,z]x) = 0$, es decir, se tiene que $\mathrm{Tr}([x,y]z) = 0$ para $[x,y]$ en $[L,L]$, z en M y por el lema 2.15 se concluye que $[x,y]$ es nilpotente. Como $[x,y]$ se eligio arbitrariamente en $[L,L]$ implica que $[L,L]$ es nilpotente y por lo tanto L es soluble. ■

COROLARIO 2.18. *Sea L una álgebra de Lie tal que $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$ para toda x en $[L,L]$, y en L. Entonces L es soluble.*

Demostración. Para este caso tengamos en cuenta a la representación adjunta de L

$$\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

es decir, $\mathrm{ad}\, L$ es una subalgebra de $\mathfrak{gl}(L)$ por lo cual tenemos que $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y) = 0$ para toda $x \in \mathrm{ad}_{[L,L]} = [\mathrm{ad}_L, \mathrm{ad}_L]$ y para toda $\mathrm{ad}_y \in \mathrm{ad}_L = \mathrm{ad}\, L$ y por el criterio de Cartan 2.17 se tiene que $\mathrm{ad}\, L$ es soluble. Por definición se tiene que

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x,y] = 0 \quad \forall y \in L\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, L)$$

como el $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, L)$ es un ideal de la álgebra soluble $\mathrm{ad}\, L$, se tiene que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, L)$ es suluble por la proposición 1.16 inciso 1). Lo anterior implica que $\mathrm{ad}\, L \cong L/Z(L)$ y por la misma proposición inciso 2) se tiene que L misma es soluble. ■

2. Forma de Killing

DEFINICIÓN 2.19. Sea L una álgebra de Lie. Si x, y estan en L, definimos

$$\mathcal{K}(x,y) = \mathrm{Tr}(ad_x \circ ad_y)$$

Entonces $\mathcal{K}$ es una forma bilineal simetrica sobre L, llamada la *forma de Killing*.

Haremos la convensión de que $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y = \mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y$
$\mathcal{K}$ es también *asociativa*, en el sentido de que $\mathcal{K}([x,y],z) = \mathcal{K}(x,[y,z])$. Esto se sigue de la identidad $\mathrm{Tr}([x,y]z) = \mathrm{Tr}(x[y,z])$, según se vio en el lema 2.16, válida para endomorfismos x, y, z de un espacio vectorial de dimensión finita.

LEMA 2.20. *Sea I un ideal de L. Si $\mathcal{K}$ es la forma de Killing para L y $\mathcal{K}_I$ es la forma de Killing para I (vista como una álgbra de Lie), entonces $\mathcal{K}_I = \mathcal{K}|_{I\times I}$*

Demostración. Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita y sea Φ un endomorfismo de V

$$\Phi : V \longrightarrow W$$

entonces $\mathrm{Tr}\,\Phi = \mathrm{Tr}(\Phi|_W)$, para ver esto tomemos una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ de W y extendamos ésta base a una base de V y observamos que para la matriz resultante de Φ, se tiene que $\Phi_{kl} = 0$ para $k > r$ y $l = 1, 2, \ldots, n$.Entonces en particular tenemos que $\Phi_{kl} = 0$ para $k > r$ y entonces $\mathrm{Tr}\,\Phi = \mathrm{Tr}(\Phi|_W)$. Para todo x e y en el ideal I, se tiene que $\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y$ es un endomorfismo de L

$$\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y : L \longrightarrow I \subset L$$

entonces su traza

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y\, |_I)$$

coincide con la de $\mathcal{K}_I$, es decir,

$$\mathcal{K}(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y\, |_I) = \mathcal{K}_I(x,y)$$

Pero como

$$\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y\, |_I = \mathrm{ad}_x\, |_I\, \mathrm{ad}_y\, |_I$$

implica que

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y\, |_I) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, |_I\, \mathrm{ad}_y\, |_I) = \mathcal{K}_{I\times I}(x,y)$$

y por lo tanto $\mathcal{K}_I(x,y) = \mathcal{K}_{I\times I}(x,y)$. ■

DEFINICIÓN 2.21. Una forma bilineal simetrica $\beta(x, y)$ es llamada *no-degenerada* si su *radical* S es 0, donde $\mathfrak{R}(\beta) = S = \{x \in L | \beta(x, y) = 0 \quad \forall Y \in L\}$.

Porque la forma de Killing es asociativa, su radical es mas que un subespacio: S es un ideal de L. En efecto, sea $z \in S$, entonces tenemos que mostrar que para toda $x \in L$ se cumple que $[z, x] \in S$. Usando la invarianza o asociatividad de la forma de Killing, tenemos que para una $z \in S$ y para toda $x, y \in L$ se cumple que $\mathcal{K}([z, x], y) = \mathcal{K}(z, [x, y])$ y como $\mathcal{K}([z, x], y) = 0$ para toda $y \in L$ tenemos que $[z, x] \in S$ para toda $x \in L$ y toda $z \in S$. Por lo tanto S es un ideal de L.
Alternativamente se tiene, dada una base fija $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de L, que $\mathcal{K}$ es *no-degenerada* si y sólo si la matriz de $n \times n$ cuya (i, j)-esíma entrada es $\mathcal{K}(x_i, x_j)$ tiene determinante distinto de cero, en otras palabras, la matriz es no-singular.
Como un ejemplo calcularemos la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2, F)$ usando la base $\{x, h, y\}$ donde

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Primero calculamos la representación adjunta $\operatorname{ad} x$, donde

$$\operatorname{ad} x : \mathfrak{sl}(2, F) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, F)$$

Entonces se tiene que

$$(\operatorname{ad} x)(x) = [x, x] = 0 = 0x + 0h + 0y$$

$$(\operatorname{ad} x)(h) = [x, h] = xh - hx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual obtenemos que

$$(\operatorname{ad} x)(h) = [x, h] = -2x + 0h + 0y$$

De forma similar se obtiene que

$$(\operatorname{ad} x)(y) = [x, y] = 0x + 1h + 0y$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $\operatorname{ad} h$, donde

$$\operatorname{ad} h : \mathfrak{sl}(2, F) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, F)$$

y se obtiene de manera similar a como se hizo con $\operatorname{ad} x$ que

$$(\operatorname{ad} h)(x) = [h, x] = 2x + 0h + 0y$$
$$(\operatorname{ad} h)(h) = [h, h] = 0x + 0h + 0y$$
$$(\operatorname{ad} h)(y) = [h, y] = 0x + 0h - 2y$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\operatorname{ad} h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos $\operatorname{ad} y$, donde

$$\operatorname{ad} y : \mathfrak{sl}(2, F) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, F)$$

y se obtiene de manera similar a como se hizo con anteriormente que

$$(\operatorname{ad} y)(x) = [y, x] = 0x - 1h + 0y$$
$$(\operatorname{ad} y)(h) = [y, h] = 0x + 0h + 2y$$
$$(\operatorname{ad} y)(y) = 0x + 0h + 0y$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\operatorname{ad} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En base a estos resultados procedemos a calcular la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(2, F)$:

$$\mathcal{K}(x, x) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} x) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{K}(x, h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} h) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathcal{K}(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\mathcal{K}(h, h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h \operatorname{ad} h) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$$

Como $\mathcal{K}(x, y)$ es simetrica, la forma de Killing de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, F)$ es igual a:

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es -128, lo que quiere decir que $\mathcal{K}$ es no-degenerada y por lo tanto $\mathfrak{sl}(2, F)$ es semisimple según el teorema 2.22.
Recordemos que una álgebra de Lie L es llamada semisimple si su radical $\mathfrak{R}(L) = 0$. Esto es equivalente a pedir que L no tenga ideales abelianos distintos de cero.

TEOREMA 2.22. *Sea L una álgebra de Lie distinta de cero. Entonces L es semisimple si y sólo si su forma de Killing es no-degenerada.*

Demostración. Sea S el radical de $\mathcal{K}$, entonces tenemos que

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_g \operatorname{ad}_h) = 0$$

para g en S, h en L y de acuerdo con el criterio de Cartan 2.17 $\operatorname{ad} S$ es soluble.
Supongamos que $\mathfrak{R}(L) = 0$, entonces el $Z(L) = 0$. Entonces tenemos que $S \cong \operatorname{ad} S$; por lo tanto S es soluble y como S es un ideal de L se tiene que

$$S \subset \mathfrak{R}(L) = 0$$

En consecuencia S es igual a cero y por lo tanto $\mathcal{K}$ es no-degenerada.
Por otro lado, para probar que L es semisimple, es suficiente probar que todo ideal abeliano I de L; esta contenido en S. En efecto, sea I un ideal abeliano de L y sea x en I, y en L. Entonces tenemos

$$L \longrightarrow L \longrightarrow I$$

debido a $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$, es decir, $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ mapea a L sobre I y por lo tanto $(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y)^2$ mapea a L en $[I, I] = 0$ (el corchete de Lie de I es cero, por que I es abeliano):

$$(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y)^2 : L \longrightarrow [I, I] = 0$$

o lo que es lo mismo, $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ es nilpotente, esto es, tiene una matriz triangular superior lo que implica que los elementos en la diagonal de $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ son eigenvalores de $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ y como $\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y$ es nilpotente entonces todos sus eigenvalores son cero. Por lo tanto

$$\mathcal{K}(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y) = 0$$

pero y es cualquier elemento en L, por lo tanto

$$I \subset S$$

Si $\mathcal{K}$ es no-degenerada implica $S = 0$, entonces L no contiene ningún ideal abeliano distinto de cero, luego entonces L es semisimple. ∎

La demostración de arriba muestra que siempre tenemos $S \subset \mathfrak{R}(L)$. De cualquier modo, la inclusión inversa $\mathfrak{R}(L) \subset S$ no siempre se tiene.
En base a éste teorema 2.22 veremos que $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ es semisimple. En efecto, como se vio antes los elementos de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ son las matrices sin traza, además se sabe que la forma de Killing para la álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, F)$ esta dada por

$$\mathcal{K}(A, B) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} A \operatorname{ad} B) = 2n \operatorname{Tr}(AB) - 2(\operatorname{Tr} A)(\operatorname{Tr} B)$$

Aplicando la fórmula anterior a la subálgebra $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ de $\mathfrak{gl}(k+1, F)$, obtenemos la forma de Killing para $\mathfrak{sl}(k+1, F)$, a saber,

$$\mathcal{K}(A, B) = 2(k+1) \operatorname{Tr}(AB)$$

para matrices $A, B \in \mathfrak{sl}(k+1, F)$. Para mostrar que $\mathcal{K}$ es no-degenerada debemos mostrar que si $\operatorname{Tr}(AB) = 0$ para toda B entonces $A = 0$, para ésto tomamos como B a los elementos de la base standar de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$. Como cualquier matriz $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{sl}(k+1, F)$ se puede descomponer como

$$A = A_- + A_d + A_+$$

con A_- llamada la parte triangular estrictamente inferior, A_d la parte diagonal y A_+ la parte triangular estrictamente superior. Una base para A_+ es constituida por la matrices e_{pq} con $1 \leqslant p < q \leqslant k+1$. Las matrices e_{pq} son definidas por

$$(e_{pq})_i j = \delta_{pi}\delta_{qj} \qquad i)$$

Estas matrices tienen un 1 en lugar (p,q) y ceros en todos los demás lugares. Para la parte A_- se toman como base las matrices e_{pq} con $1 \leqslant q < p \leqslant k+1$. Para la parte diagonal se necesitan matrices diagonales sin traza y las definimos por

$$h_p = e_{pp} - e_{p+1\ p+1} \qquad ii)$$

con $p = 1, 2, \ldots, k$. Estas matrices e_{pq} y h_p forman la base standar de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$. Con esta base en mente, entonces debemos mostrar que

$$\mathrm{Tr}(Ae_{pq}) = 0 \qquad iii)$$

con $p \neq q$ y $p, q = 1, 2, \ldots, k+1$ y además

$$\mathrm{Tr}(Ah_r) = 0 \qquad iv)$$

con $r = 1, 2, \ldots, k$ y esto implicarque $A = 0$. Asi es, la sustitución de $i)$ en $iii)$ da $a_{qp} = 0$ si $p \neq q$. De igual modo, la sustitución de $ii)$ en $iv)$ nos da $a_{rr} = a_{r+1\ r+1}$ con $r = 1, 2, \ldots, k$. Puesto que A tiene traza igual a cero, esto nos da $a_{pp} = 0$ con $p = 1, 2, \ldots, k+1$. entonces $A = 0$ y esto afirma la no degeneracidad de la forma de Killing de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$. Finalmente del teorema 2.22 se sigue que $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ es semisimple.

DEFINICIÓN 2.23. Una álgebra de Lie L se dice ser la *suma directa* de ideales $I_1, \ldots, I_n$ y escribimos

$$L = I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$$

Si sucede que

$$L = I_1 + \ldots + I_n$$

y se tiene que $[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0$ si $i \neq J$

TEOREMA 2.24. *Sea L semisimple. Entonces existen ideales $L_1, L_2, \ldots, L_t$ de L los cuales son simples (como álgebras de Lie), tales que $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_t$. Todos los ideales simples de L coinciden con alguno de los L_i. Además, la forma de Killing de L_i es la restricción de $\mathcal{K}$ a $L_i \times L_i$, es decir, $\mathcal{K}_{L_i} = \mathcal{K}|_{L_i \times L_i}$.*

Demostración. Sea I un ideal arbitrario de L, entonces el complemento ortogonal o el anulador de I, definido como

$$I^\perp = \{y \in L \mid \mathcal{K}(x, y) = 0 \quad \forall y \in L\}$$

es un ideal también en L. En efecto, para y que pertenece a $I^\perp$, z a L y x a I tenemos

$$\mathcal{K}([y, z]x) = \mathcal{K}(y[z, x]) = 0$$

por la asociatividad de $\mathcal{K}$ la igualdad es cero; puesto que $[z, x]$ pertenece a I y por lo tanto $I^\perp$ es un ideal de L. Como $I \cap I^\perp$ es un ideal sobre el cual $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x\, \mathrm{ad}_y) \equiv 0$ y por el criterio de Cartan 2.17 $I \cap I^\perp$ es soluble.
Como L es semisimple, no existen ideales solubles distintos de cero y de L misma, luego entonces $I \cap I^\perp = 0$, entonces la forma de Killing de I es la restricción de la forma de Killing de L y de aquí que sea no-degenerada. Entonces I es semisimple y el resultado se

sigue por inducción.
En efecto, si L no tiene ideales propios distintos de cero, entonces L es simple y hemos términado. Por otro lado sea L_1 un ideal minimal distinto de cero. Por el parrafo anterior se tiene que

$$L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$$

En particular un ideal de L_1 es un ideal de L, lo que implica que L_1 es semisimple y por lo tanto simple debido a su minimalidad. Por la misma razón $L_1^{\perp}$ es semisimple y usando la hipotesis de inducción sabemos que $L_1^{\perp}$ se descompone en suma directa de ideales simples, los cuales son tambien ideales de L, en otras palabras tenemos que

$$L = L_1 \oplus L_1^{\perp} = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$$

Con lo cual se términa la inducción. Resta probar la unicidad de la descomposición, es decir, que esto ideales simples son únicos.
Sea I cualquier ideal simple de L, entonces $[I, L]$ es tambien un ideal de L distinto de cero, por que $Z(L) = 0$, ya que L es semisimple; esto obliga a que $[I, L] = I$. Por otro lado, tenemos lo siguiente

$$[I, L] = [I, L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n] = [I, L_1] \oplus [I, L_2] \oplus \ldots \oplus [I, L_n]$$

por lo tanto, todos los sumando deben ser cero, exepto uno. Digamos que el sumando que es distinto de cero es $[I, L_i] = I$, entonces tenemos que

$$0 \neq I \subset L_i$$

como L_i es simple, se debe tener $I = L_i$ y por lo tanto la descomposición es única. La última afirmación del teorema se sigue del lema 2.20 ■

COROLARIO 2.25. *Si L es semisimple, entonces $L = [L, L]$, y todos los ideales e imagenes homomorficas de L son semisimples o cero. Además, cada ideal de L es una suma de ciertos ideales simples de L.*

Demostración. En efecto, sabemos que L se descompone de la siguiente forma por ser L semisimple

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$$

donde los L_i son ideales simples. Entonces escribimos

$$\begin{aligned}
[L, L] &= [L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n, L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n] \\
&= [L_1, L_1] \oplus [L_2, L_2] \oplus \ldots \oplus [L_n, L_n] \\
&= L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n = L
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se debe a que L_i es simple, lo que implica que $[L_i, L_i] = L_i$ y por lo tanto se tiene $[L, L] = L$.
Ahora, sea Φ un homomorfismo entre las álgebras de Lie L y M

$$\Phi : L \longrightarrow M$$

Entonces sabemos que el $\operatorname{Ker}\Phi$ es un ideal de L y entonces este es la suma de algunos de los L_i, es decir,

$$\operatorname{Ker}\Phi = L_1 + L_2 + \ldots + L_i$$

y como sabemos que $\Im\Phi \cong L/\operatorname{Ker}\Phi$, entonces la $\Im\Phi$ es isomorfa a la suma de los restantes ideales simples, es decir,

$$\Im\Phi \cong L_{i+1} + \ldots + L_n$$

y por lo tanto los ideales e imagenes homomorficas de L son ideales semisimples. ■

PROPOSICIÓN 2.26. *Sea L una álgebra de Lie, entonces* $\operatorname{ad} L$ *es un ideal en* $\operatorname{Der}(L)$.

Demostración. En efecto, para δ en $\operatorname{Der} L$, para toda x, y en L y usando que δ es una derivación en la igualdad cuatro y la definición $\operatorname{ad}_x(y) = [x,y]$ en la igualdad tres, tenemos

$$\begin{aligned}[][\delta, \operatorname{ad}_x](y) &= (\delta \operatorname{ad}_x - \operatorname{ad}_x \delta)(y) = \delta \operatorname{ad}_x y - \operatorname{ad}_x \delta y \\ &= \delta([x,y]) - [x, \delta y] = [\delta x, y] + [x, \delta y] - [x, \delta y] \\ &= [\delta x, y] = \operatorname{ad}_{\delta x}(y)\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$[\delta, \operatorname{ad}_x] = \operatorname{ad}_{\delta x}$$

que pertenece a $\operatorname{ad} L$ y por lo tanto $\operatorname{ad} L$ es un ideal de $\operatorname{Der} L$. ■

TEOREMA 2.27. *Si L es semisimple, entonces* $\operatorname{ad}_L = \operatorname{Der}(L)$, *es decir, toda derivación de L es interior.*

Demostración. Debido a que L es semisimple se tiene que $Z(L) = 0$. Además tenemos que

$$\varphi : L \longrightarrow adL$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie, pues se demostro anteriormente que existe una biyección y por lo tanto $\operatorname{ad} L$ es semismple y entonces $\operatorname{ad} L = M$ tiene forma de Killing no-degenerada por el teorema 2.22. Si hacemos $D = \operatorname{Der} L$, observamos por la proposición 2.26 que $[D, M] \subset M$. Esto implica por el lema 2.20 que $\mathcal{K}_M = \mathcal{K}_M|_{M \times M}$ es la restricción de la forma de Killing $\mathcal{K}_D$ de D.
Sea

$$M^\perp = \{\delta \in D \mid \mathcal{K}_D(\delta, ad_x) = 0 \;\; \forall x \in L\}$$

un subespacio ortogonal de D a M, entonces

$$D = M \oplus M^\perp$$

pues $\mathcal{K}_M$ es no-degenerada y esto fuerza a que $M \cup M^\perp = 0$. Más como M y $M^\perp$ son ideales de D, por que $\mathcal{K}_D$ es asociativa, se sigue que $[M, M^\perp] = 0$. Sea δ en $M^\perp$, entonces

$$\operatorname{ad}_{\delta x} = [\delta, \operatorname{ad}_x] = 0$$

para todo x en L, entonces $\delta x = 0$ para toda x en L debido a la inyectividad de ad y por lo tanto se tiene que $\delta = 0$, concluyendo que $M^\perp = 0$. Por lo tanto $D = M$, es decir, $\operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$. ■

Este resultado nos permite introducir una descomposición de Jordan en una álgebra de Lie semisimple arbitraria L, denominada *descomposición de Jordan abstracta.* Como $L \cong \operatorname{ad} L = \operatorname{Der} L$ y $\operatorname{Der} L$ contiene las partes semisimples y nilpotentes de todos sus elementos; cada x en L determina, en vista de la inyectividad de ad, elementos únicos s, n en L; tales que

$$\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} s + \operatorname{ad} n$$

es la descomposición de Jordan usual de $\operatorname{ad} x$. Por lo tanto $x = s + n$, donde s es ad-semisimple, n es ad-nilpotente y $[s, n] = 0$. Escribimos $s = x_s$ y $n = x_n$. Por abuso de lenguaje les llamamos a s y n respectivamente, las partes semisimple y nilpotente de x.

CAPÍTULO 3

REPRESENTACIONES

1. Reducibilidad completa de representaciones

En ésta sección todas las representaciones son de dimensión finita. Estudiaremos una álgebra de Lie semisimple L por medio de su representación adjunta.

DEFINICIÓN 3.1. Sea L una álgebra de Lie. Un espacio vectorial V, dotado con una operación binaria

$$(-,-) : L \times V \longrightarrow V$$

definida por la correspondencia

$$(x,v) \longmapsto x.v \quad \text{o simplemente} \quad xv$$

es llamado un *L-módulo* si satisface las siguientes condiciones:

(M1) $(ax+by).v = a(x.v)+b(y.v)$
(M2) $x.(av+bw) = a(x.v)+b(x.w)$
(M3) $[x,y].v = x.y.v - y.x.v \quad (x,y \in L; v,w \in V; a,b \in F)$

Si Φ es un representación de L, que en particular es un homomorfismo

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

definida por la correspondencia

$$x \longmapsto \Phi(x)$$

donde

$$\Phi(x) : V \longrightarrow V$$

es definido por

$$v \longmapsto \Phi(x)(v)$$

y si escribimos

$$\Phi(x)(v) = x.v$$

entonces hacemos de V un L-módulo. Inversamente, dado un L-módulo V, la ecuación $\Phi(x)(v) = x.v$ define una representación

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

DEFINICIÓN 3.2. Sean V y W dos L-módulos, entonces un *homomorfismo* de L-módulos es un mapeo lineal Φ

$$\Phi : V \longrightarrow W$$

tal que $\Phi(x.v) = x.\Phi(v)$

El kernel de tal homomorfismo es entonces un L-submódulo de V y los teoremas de homomorfismos standar se pueden demostrar, como se hizo en el capitulo uno.

DEFINICIÓN 3.3. Cuando Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales, lo llamamos un *isomorfismo* de L-módulos.

En este caso los dos módulos se dicen ser representaciones equivalentes de L.

DEFINICIÓN 3.4. Un L-módulo V es llamado *irreducible* si éste tiene exactamente dos L-submódulos, el cero y el mismo.

DEFINICIÓN 3.5. Un L-módulo V es llamado *completamente reducible* si es la suma directa de L-submódulos irreducibles o equivalentemente, si cada L-submódulo W de V tiene un L-submódulo complementario W' tal que $V = W \oplus W'$.

En este capítulo la términologia de irreducible y completamente irreducible se aplicará de manera indistinta a las representaciones de la álgebra de Lie L.
Dada una representación

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

el álgebra asociativa con 1 generada por $\Phi(L)$ en $\mathrm{End}(V)$ deja invariantes, precisamente los mismos subespacios que L. Además, todos los resultados usuales para módulos sobre un anillo asociativo se cumplen tambien para el álgebra de Lie L.

LEMA 3.6. **(de Schur)** *Sea*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

una representación irreducible de una álgebra de Lie L. Entonces los únicos endomorfismos de V conmutando con todas las $\Phi(x)$ (x en L) son los escalares.

Demostración. Sea f un endomorfismo de V distinto de cero, es decir,

$$f : V \longrightarrow V$$

entonces para cada λ en el campo F se tiene que $f - \lambda Id$ tambien es un homomorfismo. Puesto que f debe tener un eigenvalor λ_0 concluimos que $f - \lambda_0 Id$ tiene kernel no trivial y de arriba sabemos que $f - \lambda_0 Id = 0$ y esto implica que $f = \lambda_0 Id$. Además, se tiene que

$$\Phi(x)f = \Phi\lambda_0 Id = \lambda_0 Id\Phi(x) = f\Phi(x) \Longrightarrow \Phi(x)f = f\Phi(x)$$

lo que a su vez implica que

$$[\Phi(x), f] = \Phi(x)f - f\Phi(x) = 0$$

y por lo tanto Φ conmuta soló con los escalares. ∎

El álgebra de Lie L es ella misma un L-módulo para la representación adjunta. Un L-submódulo es un ideal, lo que implica que una álgebra de Lie simple L es irreducible como un L-módulo, a la vez que una álgebra semisimple L es completamente reducible como L-módulo por el teorema 2.24. Fabricaremos nuevos L-módulos a partir de los ya dados.
Sea V un L-módulo entonces el espacio vectorial dual V^* se convierte en un L-módulo, llamado el dual o contragradiente, si definimos para f en V^*, v en V y x en L

$$(-, -) : L \times V^* \longrightarrow V^*$$

dado por la correspondencia siguiente

$$(x, f)(v) = (x.f)(v) = -f(x.v)$$

Los axiomas (M1) y (M2) se satisfacen con cierta facilidad, de aquí que sólo resta probar el axioma (M3), es decir, que $([x, y].f)(v) = ((x.y - y.x).f)(v)$. En efecto, por definición se tiene

$$\begin{aligned}([x,y].f)(v) &= -f([x,y].v) = -f((xy-yx).v) = -f(xy.v - yx.v) = -f(xy.v) + f(yx.v)\\ &= (x.f)(y.v) - (y.f)(x.v) = -(y.x.f)(v) + (x.y.f)(v) = (x.y.f)(v) - (y.x.f)(v)\\ &= ((x.y.f) - (y.x.f))(v) = ((x.y - y.x).f)(v)\end{aligned}$$

y por lo tanto se tiene que en efecto V^* es un L-módulo.

Ahora sean V, W dos L-módulos y sea $V \otimes W$ el producto tensorial sobre F de los espacios vectoriales V y W. Recordemos que si V y W tienen bases $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ y $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ respectivamente, entonces $V \otimes W$ tiene una base consistente de mn vectores $v_i \otimes w_i$. Para darle una estructura de módulo al producto tensorial de dos módulos para un grupo G, se define sobre los generadores $v \otimes w$ la siguiente operación $g.(v \otimes w) = g.v \otimes g.w$. Para una álgebra de Lie L definimos

$$(-,-) : L \times (V \otimes W) \longrightarrow V \otimes W$$

dada por la correspondencia

$$x.(v \otimes w) = x.v \otimes w + v \otimes x.w$$

Como antes los axiomas (M1) y (M2) son sencillos de comprobar y resta verificar el axioma (M3). En efecto, por definición se tiene

$$\begin{aligned}[x,y].(v \otimes w) &= [x,y].v \otimes w + v \otimes [x,y].w\\ &= (xy - yx).v \otimes w + v \otimes (xy - yx).w\\ &= (xy.v - yx.v) \otimes w + v \otimes (xy.w - yx.w)\\ &= (xy.v) \otimes w - (yx.v) \otimes w + v \otimes (xy.w) - v \otimes (yx.w)\\ &= (xy.v \otimes w + v \otimes xy.w) - (yx.v \otimes w + v \otimes yx.w)\\ &= (xy)(v \otimes w) - (yx)(v \otimes w) = (xy - yx)(v \otimes w)\end{aligned}$$

y por lo tanto $V \otimes W$ es un L-módulo.

Dado un espacio vectorial V sobre el campo F, existe un isomorfismo bastante útil de espacios vectoriales, a saber, entre $V^* \otimes V$ y $\mathrm{End}(V)$. En virtud de lo anterior definimos para f en V^*, v en V y w en V

$$(-,-) : V^* \otimes V \longrightarrow End(V)$$

dada por la regla de correspondencia cuyo valor en w es

$$(f \otimes v) \to f(w)v$$

puesto que ambos espacios tienen dimensión n^2, donde $\dim V = n$, entonces la operación definida anteriormente es un isomorfismo.

Ahora si V es un L-módulo, como lo es V^*, entonces $V^* \otimes V$ se convierte en un L-módulo como se describio anteriormente, Además, $\mathrm{End}(V)$ puede tambien ser visto como un L-módulo via el isomorfismo de arriba. La acción de L sobre sobre $\mathrm{End}(V)$ puede ser descrita directamente por $(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$ para x en L, f en $\mathrm{End}(V)$ y v en V. Más generalmente si V y W son dos L-módulos, entonces L actua sobre el espacio $\mathrm{Hom}(V, W)$ de mapeos lineales, por la regla de correspondencia $(x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$. Esta acción surge del isomorfismo entre $\mathrm{Hom}(V, W)$ y $V^* \otimes W$.

DEFINICIÓN 3.7. Sea L una álgebra de Lie semisimple, se dice que Φ

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

es una *representación fiel* si es uno a uno, es decir, si es inyectiva.

Se define una forma bilineal $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\Phi(x), \Phi(y))$ sobre L. La forma bilineal β es asociativa por el lema 2.16 y su radical S es un ideal de L. Además, β es no-degenerada pues usando el criterio de Cartan, teorema 2.17 para $\Phi(S) \subset \Phi(L)$ y como $\Phi(S) \cong S$ es un ideal soluble de L, entonces $S = 0$. Tomando $\Phi = \mathrm{ad}$ resulta que $\Phi = \mathcal{K}$ es la forma de Killing en este caso especial.
Ahora sea L una álgebra de Lie semisimple, β cualquier forma bilineal simetrica, asociativa y no-degenerada sobre L. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una base ordenada de L, entonces β determina una base única $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de L^*, llamada la base dual de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en relación a β, la cual satisface que $\beta(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Si x pertenece a L, podemos escribir $[x, x_i] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ y $[x, y_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j$. Usando la asociatividad de β en la cuarta igualdad, podemos calcular lo siguiente

$$\begin{aligned}
a_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta(x_j, y_k) = \beta([x, x_i], y_k) = \beta(-[x_i, x], y_k) \\
&= \beta(x_i, -[x, y_k]) = -\beta(x_i, [x, y_k]) = -\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\beta(x_i, y_j) \\
&= -b_{ki}
\end{aligned}$$

Si

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

es cualquier representación de L, entonces escribimos

$$C_\Phi(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Phi(y_i)$$

en $\mathrm{End}(V)$, donde x_i, y_i corren sobre las bases duales relativas a β como se indico arriba. En $\mathrm{End}(V)$ tenemos la siguiente identidad

$$[x, yz] = xyz - yzx = xyz - yxz + yxz - yzx = [x, y]z + y[x, z]$$

para toda x, y, z en $\mathrm{End}(V)$. De este modo se tiene para x en L como arriba y usando la identidad anterior en la tercera igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}
[\Phi(x), C_\Phi(\beta)] &= \left[\Phi(x), \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Phi(y_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} [\Phi(x), \Phi(x_i)\Phi(y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big([\Phi(x), \Phi(x_i)]\Phi(y_i) + \Phi(x_i)[\Phi(x), \Phi(y_i)] \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\Phi(x), \Phi(x_i)]\Phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)[\Phi(x), \Phi(y_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Phi(x_j)\Phi(y_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Phi(x_i)\Phi(y_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Phi(x_j)\Phi(y_i) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\Phi(x_i)\Phi(y_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

la igualdad a cero es porque sabemos que $a_{ij} = -b_{ji}$ lo que implica que $-a_{ij} = b_{ji}$ y como x se eligio arbitrariamente en L, lo anterior vale para toda x en L, esto significa que $C_\Phi(\beta)$ es un endomorfismo de V que conmuta con todos los elemetos de $\Phi(L)$.

Volvamos al caso en que $\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es una representación fiel de L, con forma bilineal asociativa, simetrica y no-degenerada β. Como arriba $\beta(x, y) = \mathrm{Tr}(\Phi(x), \Phi(y))$. En este caso fijamos una base ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de L, entonces escribimos simplemente C_Φ para $C_\Phi(\beta)$ al cual llamaremos *el elemento casimir de* Φ.

Una propiedad interesante del elemento casimir de Φ es obtenida de su traza, a saber

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(C_\Phi) &= \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i)\Phi(y_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(\Phi(x_i)\Phi(y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta(x_i, y_i) = \dim L \neq 0
\end{aligned}$$

En el caso de que Φ sea una representación irreducible, entonces el lema de Schur 3.6 garantiza que C_Φ es un escalar igual a $\dim L / \dim V$ en vista de la sentencia anterior; en este caso se ve que C_Φ es independiente de la base escojida de L.

En caso de que Φ no sea fiel, podemos definir un elemento casimir para Φ. El $\operatorname{Ker}\Phi$ es un ideal de L, luego es suma de algunos ideales simples de L debido al colorario 2.25. Sea L' la suma de los ideales simples restantes de L, en concordancia con el teorema 2.24. Entonces la restricción de Φ a L' es fiel y podemos construir un elemento casimir como se dijo anteriormente, usando bases duales de L'. Un elemento de $\mathrm{End}(V)$ obtenido de esta manera, es también llamado el elemento casimir de Φ y es denotado por C_Φ. Este conmuta con $\Phi(L) = \Phi(L')$. En efecto, la demostración es enteramente analóga a la que se hizo para demostrar que $[\Phi(L), C_\Phi(\beta)] = 0$.

LEMA 3.8. *Sea*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

una representación de una álgebra de Lie semisimple L. Entonces $\Phi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$. En particular, L actua trivialmente en cualquier L-módulo de dimensión uno.

Demostración. Se usará el hecho de que $L = [L, L]$, junto con el hecho de que $\mathfrak{sl}(V)$ es la álgebra derivada de $\mathfrak{gl}(V)$, es decir, $\mathfrak{sl}(V) = [\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(V)]$; en otras palabras, por el colorario 2.25 tenemos que $L = [L, L] = L'$ para L semisimple, entonces $\Phi(L) = \Phi(L') = \Phi(L)' \subset \mathfrak{gl}'(V)$. Los elementos de $\mathfrak{gl}'(V)$ tienen traza cero, pues son combinaciones lineales de conmutadores de $\mathfrak{gl}(V)$ y por lo tanto $\mathfrak{gl}'(V) \subset \mathfrak{sl}(V)$ y como $\Phi(L) \subset \mathfrak{gl}'(V)$ esto implica que $\Phi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$ con lo cual concluimos la prueba. ■

TEOREMA 3.9. **(Weyl)** *Sea*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

una representación (de dimensión finita) de una álgebra de Lie semisimple L. $V \neq 0$. Entonces Φ es completamente reducible.

Demostración. Comenzamos con el caso en que V tiene un L-submódulo W de codimensión uno; por el lema 3.8 L actua trivialmente sobre $V/W = T$ y tenemos la sucesión exacta corta siguiente

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0$$

Usaremos inducción sobre la dimensión de W, vamos a mostrar que si W no es irreducible entonces la sucesión exacta anterior se escinde, es decir, W tiene un complemento en V. En efecto, sea W' un L-submódulo propio distinto de cero de W, entonces tenemos la sucesión exacta corta dada como sigue

$$0 \longrightarrow W/W' \xrightarrow{f'} V/W' \xrightarrow{g'} T \longrightarrow 0$$

como se cumple que $\dim(W/W') < \dim W$ la hipótesis de inducción nos dice que la sucesión anterior se escinde, es decir, existe un L-módulo unidimensional $\widetilde{W}/W'$ de V/W' complementario de W/W', tal que

$$\dim(\widetilde{W}/W') = \dim(V/W') - \dim(W/W') = 1$$

Consecuentemente tenemos otra sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow W' \xrightarrow{h} \widetilde{W} \xrightarrow{j} T \longrightarrow 0$$

Esta situación es parecida a la que se trato al comenzar la demostración, exepto que si tomamos en cuenta que $\dim W' < \dim W$ y usamos la hipótesis de inducción para obtener un L-módulo X de $\tilde{W}$ complementario a W' tal que

$$\dim X = \dim \widetilde{W} - \dim W' = 1$$

Como tenemos que

$$V/W \cong W/W' \oplus \widetilde{W}/W'$$

lo anterior es porque las sucesiones se escinden, entonces tenemos que $W \cap \widetilde{W} = W'$ y como $\widetilde{W} = W' \oplus X$; concluimos que $W \cap X = 0$ y por lo tanto que $V = W \oplus X$ como se quería.

Por otro lado, si W es irreducible el trabajo es un poco más complicado y vamos a usar el lenguaje de las representaciones, teniendo a la mano el elemento casimir. Por conveniencia asumimos que la representación Φ

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

es fiel sobre V. Sea $C = C_\Phi$ el elemento casimir de Φ. Como C conmuta con $\Phi(L)$, implica que C es un endomorfismo de L-módulos de V. En particular W es estable bajo C, es decir, $C(W) \subset W$ y el $\operatorname{Ker} C$ es un L-módulo de V.
Que L actua trivialmente sobre V/W, equivale a decir que L lleva a V sobre W y lo mismo hace C pues éste es una combinación lineal de elementos de $\Phi(L)$. Entonces C tiene traza cero en V/W, más no puede tener traza cero en W. Por otro lado, C actua como un escalar sobre el L-módulo irreducible W y esto es por el lema de Schur 3.6, este escalar no puede ser cero, porque ello forzaría a que

$$\dim L = \operatorname{Tr}_V(C) = 0$$

lo cual sería una contradicción pues la $\dim L \neq 0$. De esto se sigue que $\operatorname{Ker} C$ es un L-módulo unidimensional de V, tal que $\operatorname{Ker} C \cap W = 0$ y por lo tanto $V = W \oplus \operatorname{Ker} C$ como queríamos.
Ahora podemos ir al caso general en que W es un L-submódulo distinto de cero de V y mostrar así que la sucesion exacta corta

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{h'} V \xrightarrow{j'} V/W \longrightarrow 0$$

se escinde. Para esto consideremos $\operatorname{Hom}(V, W)$ el espacio vectorial de mapeos lineales de V en W, visto como un L-módulo. Sea $\mathbb{V}$ el subespacio de $\operatorname{Hom}(V, W)$ consistente de aquellos mapeos cuya restricción a W es multiplicación por un escalar: $\mathbb{V}$ es un L-submódulo. Si f pertenece a $\mathbb{V}$, entonces $f|_W = a.\operatorname{Id}_W$ para algún escalar a en F, de modo que para todo x en L y w en W tenemos

$$(x.f)(w) = x.f(w) - f(x.w) = x.aw - a(x.w) = a(x.w) - a(x.w) = 0$$

donde $x.(f|_W) = 0$. Sea $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ consistente de aquellos endomorfismos escalares f cuya restricción a W es cero. El cálculo anterior muestra que $\mathbb{W}$ es también un L-submódulo de $\operatorname{Hom}(V, W)$ y que L mapea $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{W}$. Además de esto $\mathbb{W}$ tiene codimensión uno en $\mathbb{V}$, porque cada elemento f en $\mathbb{V}$ es determinado módulo $\mathbb{W}$ por el escalar $f|_W$. Con esto estamos en el siguiente caso especial

$$0 \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}/\mathbb{W} \longrightarrow 0$$

que mencionamos al comenzar este parrafo.
De acuerdo a la primera parte de la demostración $\mathbb{V}$ tiene un L-submódulo de dimensión uno X complementario a $\mathbb{W}$. Sea

$$f : V \longrightarrow W$$

uno de los generadores de X. Sin perdida de generalidad podemos asumir que $f|_W = \operatorname{Id}_W$, basta multiplicar a f por un escalar adecuado. Decimos que L anula a f, es decir,

$$0 = (x.f)(v) = x.f(v) - f(x.v)$$

esto es que f es un homomorfismo de L-módulos, entonces el $\operatorname{Ker} f$ es un L-submódulo de V. Puesto que f mapea a V sobre W y f actua como la Id_W sobre W, concluimos que $V = W \oplus \operatorname{Ker} f$ como se deseaba y con lo cual concluimos la demostración. ■

Como una aplicación inmediata del teorema de Weyl, vamos a mostrar que la descomposición de Jordan es compatible con las representaciones lineales de la álgebra de Lie L.

TEOREMA 3.10. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo algebraivamente cerrado F y sea $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una álgebra de Lie lineal semisimple sobre F. Entonces L contiene las partes semisimple y nilpotente en $\mathfrak{gl}(V)$ de todos sus elementos.*

Demostración. Sea x en L arbitraria y sea $x = x_s + x_n$ su descomposición de Jordan en $\mathfrak{gl}(V)$. El problema es mostrar que x_s y x_n viven en L. Se define

$$N = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid [A, x] \in L \quad \forall x \in L\}$$

Debido a que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x(L) \subset L$, se sigue de la proposición 2.8 inciso c) que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_s(L) \subset L$ y $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}\, x_n(L) \subset L$, lo que es equivalente a decir que x_s y x_n pertenecen a $N_{\mathfrak{gl}(V)}(L) = N$. Este normalizador es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ (la demostración se hace utilizando la identidad de Jacobi), la cual contiene a L como un ideal. Nos gustaria mostrar que $N = L$; con lo cual acabaria la demostración, pero desafortunadamente esto es falso, es decir, debido a que $L \subset \mathfrak{sl}(V)$ según indica el lema 3.8, los escalares viven en N pero no viven en L y por lo tanto $N \neq L$. Entonces necesitamos que x_s y x_n esten contenidos en una subálgebra de N, tal que esta subálgebra tenga a L como un ideal y probaremos que esta nueva subálgebra es igual a L.
En efecto, si W es cualquier L-submódulo de V, definimos

$$L_W = \{y \in \mathfrak{gl}(V) \mid y(W) \subset W \quad y \quad \mathrm{Tr}(y|_W) = 0\}$$

Sea z en L, se ve de la definición anterior que $z(W) \subset W$ y como $L = [L, L]$, tenemos que

$$z = \sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$$

para algunas x_i, y_i en L, luego entonces

$$\mathrm{Tr}(z|_W) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]|_W\right) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{n} [x_i|_W, y_i|_W]\right) = 0$$

es decir, z vive en L_W y L_W es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. Además, si $A = S + N'$ es la decomposición de Jordan de A que pertenece a L_W, visto como un mapeo lineal

$$A : V \longrightarrow V$$

tenemos que $S(W) \subset W$ y $N'(W) \subset W$ por la proposición 2.8 inciso c). Como N' es nilpotente se tiene que la restricción $N'|_W$ es también nilpotente entonces $\mathrm{Tr}(N'|_W) = 0$ y por lo tanto N' vive en L_W. Haciendo $S = A - N'$ se tiene que $S(W) \subset W$ y

$$\mathrm{Tr}(S|_W) = \mathrm{Tr}(A - N'|_W) = \mathrm{Tr}(A|_W - N'|_W) = 0$$

por lo tanto S vive en L_W.
Ahora, L^* denota la intersección de N con las subálgebras L_W de todos los espacios L-invariantes de V. Como una intersección de subálgebras, ésta es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ y de lo anterior vemos que $L \subset L^*$ y que L es un ideal en L^*. Para A en L^* con descomposición de Jordan $A = S + N'$ tenemos que S, N' viven en L^*, pues S y N' viven en L_W y entonces concluiremos la demostración mostrando que $L = L^*$. En efecto, puesto que L es una subálgebra de L^* tenemos que $\mathrm{ad}(x)(L^*) \subset L^*$ para toda x en L y esto implica que L^* es una representación de L, es decir, L^* es un L-módulo y el teorema de Weyl 3.9 nos permite ecribir

$$L^* = L \oplus M$$

para algún L-submódulo M. Además, puesto que $L^* \subset N$ vemos que $[L, L^*] \subset L$, por lo tanto la acción de L sobre M es trivial. Sea y en M cualquier elemento. V puede ser escrito como una suma directa de L-submódulos irreducibles por el teorema de Weyl 3.9. Sea W cualquier L-submódulos irreducible de V, entonces por construcción y vive en L_W, lo que implica que $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$. Por otro lado, como M es un L-módulo trivial implica que $[x, y] = 0$ para toda x en L y por lo tanto el lema de Schur 3.6 implica que y actua sobre W como un escalar, es decir, $y|_W$ es un multiplo de la identidad, pero esto junto con que $\mathrm{Tr}(y|_W) = 0$ implica que $y|_W = 0$ para toda y en M y por lo tanto $M = 0$, lo que nos permite escribir

$$L^* = L$$

y la última afirmación del teorema se sigue de la primera, porque cada tipo de descomposición de Jordan es única segun la proposición 2.8. ∎

COROLARIO 3.11. *Sea L una álgebra de Lie semisimple y*

$$\Phi : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

una representación de dimensión finita de L. Si $x = s + n$ es la descomposición abstracta de Jordan de x que está en L, entonces $\Phi(x) = \Phi(s) + \Phi(n)$ es la decomposición usual de Jordan de $\Phi(x)$.

Demostración. Se tiene que $\mathrm{ad}_L\, s(x) = \lambda(x)$ entonces $\mathrm{ad}_{\Phi(L)}(s)(\Phi(x)) = \Phi(\mathrm{ad}_L\, s(x)) = \lambda\Phi(x)$. Esto muestra que $\Phi(L)$ es generada por eigenvectores de $\mathrm{ad}_{\Phi(L)}\, \Phi(s)$, entonces $\Phi(s)$ es ad-semisimple. Del mismo modo, $\Phi(n)$ es ad-nilpotente y conmutan, es decir,

$$[\mathrm{ad}_{\Phi(L)}\, \Phi(s), \mathrm{ad}_{\Phi(L)}\, \Phi(n)] = \mathrm{ad}_{\Phi(L)}[\Phi(s), \Phi(n)] = 0$$

por el lema 2.10 y por lo tanto $\Phi(x) = \Phi(s) + \Phi(n)$ es la descomposición de Jordan abstracta de $\Phi(x)$ en la álgebra de Lie semisimple $\Phi(L)$. Aplicando el teorema 3.10 ésta coincide con la descomposición de Jordan usual de $\Phi(x)$ en $\Phi(L)$. ∎

2. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2, F)$

Las representaciones de $\mathfrak{sl}(2, F)$ cuando F es un campo algebraicamente cerrado de caracteristica cero, constituyen el caso más simple de la teoria de representaciones de álgebras de Lie. Más adelante veremos que toda álgebra de Lie semisimple de dimensión finita es constituida por copias de $\mathfrak{sl}(2, F)$, de modo que estudiar sus representaciones significa atender lo básico. De esto, vamos a obtener una caracterización completa de las representaciones de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, F)$.

En esta sección todos los módulos serán tomados de dimensión finita sobre el campo F, F es algebraicamente cerrado y de caracteristica cero. Además, $L = \mathfrak{sl}(2, F)$ y $\{x, h, y\}$ es la base canonica de L,

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con las reglas de conmutación siguientes

$$[h, x] = 2x, \qquad [h, y] = -2y, \qquad [x, y] = h$$

Entonces todo elemento de $\mathfrak{sl}(2, F)$ puede ser expresado como una suma de corchetes de elementos de $\mathfrak{sl}(2, F)$, en otras palabras, $[\mathfrak{sl}(2, F), \mathfrak{sl}(2, F)] = \mathfrak{sl}(2, F)$.
Sea V un L-módulo irreducible de dimensión finita, debido a que h es semisimple, es decir, tiene matriz diagonal; por el corolario 3.11 se sabe que h actua diagonalmente sobre V. La afirmación de que F es algebraicamente cerrado, garantiza que todos los eigenvalores requeridos vivan en F. Como h actua diagonalmente sobre V implica que tenemos una descomposición de V como suma directa de eigenespacios $V_\lambda = \{v \in V | hv = \lambda v\}$, es decir,

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \qquad (*)$$

con λ en F y notemos que es una suma finita.

Definición 3.12. Sea $V_\lambda \neq 0$, decimos que λ es un *peso* de h y llamamos a V_λ un *espacio peso.*

Lema 3.13. *Si v pertenece a V_λ entonces $x.v$ pertenece a $V_{\lambda+2}$ y además $y.v$ pertenece a $V_{\lambda-2}$.*

Demostración. Por la propiedad (M3) de la definición de módulo se tiene que

$$[h, x].v = h.(x.v) - x.h.v$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} h.(x.v) &= [h, x].v + x.h.v = 2x.v + x.\lambda v = 2x.v + \lambda x.v \\ &= \lambda x.v + 2x.v = (\lambda + 2)x.v \end{aligned}$$

y entonces $x.v$ es otra vez un eigenvector de h, pero esta vez con eigenvalor $(\lambda + 2)$, en otras palabras, la acción de x sobre los diversos espacios V_λ esta dada por

$$x : V_\lambda \longrightarrow V_{\lambda+2}$$

Analogamente se tiene que

$$[h, y].v = h.(y.v) - y.h.v$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} h.(y.v) &= [h, y].v + y.h.v = -2y.v + y.\lambda v = -2y.v + \lambda y.v \\ &= \lambda y.v - 2y.v = (\lambda - 2)y.v \end{aligned}$$

y entonces $y.v$ es otra vez un eigenvector de h, pero esta vez con eigenvalor $(\lambda - 2)$, en otras palabras, la acción de y sobre los diversos espacios V_λ esta dada por

$$y : V_\lambda \longrightarrow V_{\lambda-2}$$

y la demostración esta concluida. ∎

El lema implica que x, y son representados por endomorfismos nilpotentes, pero esto realmente se sigue del colorario 3.11. Como la suma en (*) es finita, debe existir un λ tal que $V_\lambda \neq 0$ y $V_{\lambda+2} = 0$. Gracias al lema 3.13 se tiene que $x.v = 0$ para toda $v \in V_\lambda$. Para tal λ, todo vector $v \neq 0$ en V_λ es llamado un *vector máximo* de peso λ.
Asumamos ahora que V es un L-módulo irreducible. Eligamos un vector máximo, digamos v_0 en V_λ; ponemos $v_{-1} = 0$, $v_i = (\frac{1}{i!})y^i.v_0$ con $i \geqslant 0$. Se tiene el siguiente lema.

LEMA 3.14. *Sea*

1) $h.v_i = (\lambda - 2i)v_i$
2) $y.v_i = (i+1)v_{i+1}$
3) $x.v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} \quad (i \geqslant 0)$

Demostración. En efecto,

1) se hará por inducción sobre i. Para $i = 0$ se tiene

$$h(v_0) = \lambda v_0$$

La identidad es cierta por definición de V_λ y debido a que $v_0 \in V_\lambda$. Ahora supongamos que se cumple para i y por demostrar que se cumple para $(i+1)$. En efecto, usando la definición de v_i y (M3) en la sexta igualdad se tiene que

$$\begin{aligned}
h.v_{i+1} &= h.\left(\frac{1}{(i+1)!}y^{i+1}.v_0\right) = h.\left(\frac{1}{i+1}\frac{1}{i!}yy^i.v_0\right) = h.\left(\frac{1}{i+1}y\frac{1}{i!}y^i.v_0\right)\\
&= h.\left(\frac{1}{i+1}y.v_i\right) = \frac{1}{i+1}h.(y.v_i) = \frac{1}{i+1}\Big(yhv_i + [h,y]v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big(y(\lambda-2i)v_i - 2yv_i\Big) = \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i)yv_i - 2yv_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\left((\lambda-2i)y\frac{1}{i!}y^iv_0 - 2y\frac{1}{i!}y^iv_0\right) = \frac{1}{i+1}(\lambda-2i)y\frac{1}{i!}y^iv_0 - \frac{1}{i+1}2y\frac{1}{i!}y^iv_0\\
&= (\lambda-2i)\frac{1}{i+1}\frac{1}{i!}yy^iv_0 - 2\frac{1}{i+1}\frac{1}{i!}yy^iv_0 = (\lambda-2i)\frac{1}{(i+1)!}y^{i+1}v_0 - 2\frac{1}{(i+1)!}y^{i+1}v_0\\
&= (\lambda-2i)v_{i+1} - 2v_{i+1} = ((\lambda-2i)-2)v_{i+1} = (\lambda - 2(i+1))v_{i+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la fórmula 1) es válida.

2) Se sigue directamente de la definición de v_i, a saber,

$$\begin{aligned}
y.v_i &= y\frac{1}{i!}y^iv_0 = \frac{i+1}{i+1}y\frac{1}{i!}y^iv_0 = (i+1)\frac{1}{i+1}\frac{1}{i!}yy^iv_0\\
&= (i+1)\frac{1}{(i+1)!}y^{i+1}v_0 = (i+1)v_{i+1}
\end{aligned}$$

3) Por inducción sobre i. Para $i = 0$ se tiene

$$x.v_0 = (\lambda-1)v_{-1} = (\lambda-1)\cdot 0 = 0$$

Lo cual es válido por el lema 3.13. Supongamos que se vale para i, por demostrar que se cumple para $(i+1)$. En efecto, usando la definición de v_i y aplicando el inciso 1), junto con la hipótesis de inducción en la igualdad ocho se tiene

$$
\begin{aligned}
x.v_{i+1} &= x.\left(\frac{1}{(i+1)!}y^{i+1}.v_0\right) = x.\left(\frac{1}{i+1}\frac{1}{i!}yy^{i}.v_0\right) = x.\left(\frac{1}{i+1}y\frac{1}{1!}y^{i}.v_0\right)\\
&= \frac{1}{i+1}x.\left(y\frac{1}{i!}y^{i}.v_0\right) = \frac{1}{i+1}x.(y.v_i) = \frac{1}{i+1}\Big([x,y]v_i + yxv_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big(hv_i + yxv_i\Big) = \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i)v_i + y(\lambda-i+1)v_{i-1}\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i)v_i + (\lambda-i+1)yv_{i-1}\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\left((\lambda-2i)v_i + (\lambda-i+1)y\frac{1}{(i-1)!}y^{i-1}v_0\right)\\
&= \frac{1}{i+1}\left((\lambda-2i)v_i + (\lambda-i+1)i\frac{1}{i}\frac{1}{(i-1)!}yy^{i-1}v_0\right)\\
&= \frac{1}{i+1}\left((\lambda-2i)v_i + (\lambda-i+1)i\frac{1}{i!}y^{i}v_0\right)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i)v_i + (\lambda-i+1)iv_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i)v_i + (\lambda i-i^2+i)v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big(\Big((\lambda-2i) + (\lambda i-i^2+i)\Big)v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-2i+\lambda i-i^2+i)v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda i+\lambda-i^2-i)v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda i+\lambda-i^2-i-i-1+i+1)v_i\Big)\\
&= \frac{1}{i+1}\Big((\lambda-i-1+1)(i+1)v_i\Big)\\
&= \frac{i+1}{i+1}\Big((\lambda-i-1+1)v_i\Big) = 1(\lambda-i-1+1)v_i\\
&= (\lambda-(i+1)+1)v_i
\end{aligned}
$$

Como se quería y la demostración esta concluida.

■

Para obtener una representación de una álgebra de Lie es suficiente construir una representación para una base en ésta álgebra, es decir, en una base que genere a la álgebra de Lie. Para $\mathfrak{sl}(2,F)$ tomamos la base dada anteriormente por $\{x,h,y\}$.

Sea V un $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo de dimensión finita. Denotamos a los operadores lineales representando la acción de x, y, h por $x.$, $y.$ y $h.$, hay que hacer incapie en que $x.$, $y.$ y $h.$ son operadores lineales sobre el espacio vectorial V. Ahora un operador lineal sobre un espacio vectorial sobre un campo F de dimensión finita tiene almenos un eigenvector.Si $v \in V$ es un eigenvector del operador $h.$, entonces $v \neq 0$ y

$$h.v = \lambda v \qquad 1)$$

con $\lambda \in F$. Como vimos en el lema 3.13 cuando $x.v \neq 0$, entonces éste es un eigenvector de $h.$ y su eigenvalor, comparado con el eigenvalor del vector v es incrementado en 2. Por otro lado si $y.v \neq 0$, entonces éste es un eigenvector de $h.$ y su eigenvalor, comparado con el eigenvalor del vector v es disminuido en 2. Repitiendo estas acciones obtenemos una cadena de eigenvectores independientes de $h.$ y esta cadena debe de ser finita, puesto que V es de dimensión finita, es decir, en algun momento se estaciona la cadena. procedamos formalmente a la construcción.

TEOREMA 3.15. *Sea V un $L = \mathfrak{sl}(2, F)$-módulo irreducible*

i) Relativo a h, V es la suma directa de espacios peso V_μ, con $\mu = m, m-2, \ldots, -(m-2), -m$, donde $m + 1 = \dim V$ y $\dim V_\mu = 1$ para cada μ.

ii) V tiene (salvo multiplos escalares distintos de cero) un único vector maximo, cuyo peso (llamado el peso maximo de V) es m.

iii) La acción de $L = \mathfrak{sl}(2, F)$ sobre V es dada explicitamente por las fórmulas del lema 3.14, sí la base es elegida en la forma indicada. En particular, existe a lo más un $L = \mathfrak{sl}(2, F)$-módulo irreducible (salvo isomorfismo) de cada dimensión posible $m + 1$, $m \geqslant 0$.

Demostración. En efecto, se tiene lo sigiente.

i) Consideremos el procedimiento anterior. Supongamos que $v_\lambda \neq 0$ en V, es un eigenvector del operador $h.$ con eigenvalor λ, es decir,

$$h.v_\lambda = \lambda v_\lambda \qquad 2)$$

La acción repetida de $x.$ sobre v_λ da una cadena de eigenvectores y apartir de un cierto momento da vectores cero. Estos eigenvectores son linealmente independientes puesto que ellos tienen eigenvalores diferentes. Entonces uno tiene

Cadena de vectores	v_λ	$x.v_\lambda$	$(x.)^2 v_\lambda$	$\ldots$	$(x.)^p v_\lambda$
Eigenvalores posibles	λ	$\lambda + 2$	$\lambda + 4$	$\ldots$	$(\lambda + 2p)$

como V es un espacio vectorial de dimensión finita la cadena de eigenvectores es finita, es decir, debe existir un entero n tal que $(x.)^n v_\lambda \neq 0$ y $(x.)^p v_\lambda = 0$ para $p > n$, ponemos

$$v_0 = (x.)^n v_\lambda \neq 0 \qquad 3)$$

y obtenemos

$$h.v_0 = h.(x.)^n v_\lambda = (\lambda + 2n) v_0 := \mu v_0 \qquad 4)$$

y

$$x.v_0 = x.(x.)^n v_\lambda = x.^{n+1} v_\lambda = 0 \qquad 5)$$

El vector v_0 se toma como punto de partida para la construcción de una base del espacio de representaciones de una representación irreducible. Esto se logra por repetidas aplicaciones del operador $y.$ sobre v_0 y obtenemos otra vez una cadena consistente de eigenvectores del operador $h.$ y vectores cero. Esto es

Cadena de vectores	v_0	$y.v_0 = v_1$	$(y.)^2 v_0 = v_2$	$\ldots$	$(y.)^m v_0 = v_m$	$\ldots$
Eigenvalores posibles	μ	$\mu - 2$	$\mu - 4$	$\ldots$	$(\mu - 2m)$	$\ldots$

En vista de que el espacio de representaciones es de dimensión finita, esta cadena debe de dar cero despues de un número finito de pasos. Supongamos $v_m \neq 0$ y $0 = v_{m+1} = y.v_m$. Usando 3) del lema 3.14 se tiene de esta afirmación que

$$0 = x.v_{m+1} = (\mu - m)v_m \qquad 6)$$

Esto nos lleva a que la incognita μ debe cumplir la condición

$$\mu = m \geqslant 0 \qquad 7)$$

Entonces μ es un entero no negativo. Como $h.$ es diagonal los eigenvalores asociados aparecen con multiplicidad uno, de modo que $\dim v_\mu = 1$.
El espacio vectorial generado por la cadena $\{v_0, y.v_0 = v_1, \ldots, y.^m v_0 = v_m\}$ es invariante bajo la acción de $x.$, $y.$ y $h.$. En efecto, sea W el subespacio de V generado por $A = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$. Por definición de W se tiene que $y.(W) \subset W$. Además de esto notamos que $y.^i v_0 \in V_{\mu-2i}$ de donde $h.y.^i v_0 = (\mu - 2i)y.^i v_0$ y por lo tanto $h.(W) \subset W$. Esta observación garantiza que los elementos de A son linealmente independientes, como eigenvectores de $h.$ asociados a eigenvalores distintos. Finalmente usando un argumento de inducción se tiene que $x.y.^i v_0 = i(\mu - i + 1)y.^{i-1} v_0$ y de este modo tenemos que $x.(W) \subset W$ y como V es irreducible por hipótesis se tiene que $W = V$ y por lo tanto $\dim V = m + 1$.
Llamando a los eigenvalores de $h.$ los pesos de la representación, tenemos una serie decendente de pesos, a saber,

$$m, m-2, \ldots, -m$$

Como h actua diagonalmente sobre V implica que tenemos una descomposición de V como suma directa de eigenespacios $V_\mu = \{v \in V | hv = \mu v\}$, es decir,

$$V = \bigoplus_\mu V_\mu$$

ii) El vector peso v_0 es llamado el vector de peso máximo. El peso máximo es m y el peso minimo es $-m$, damos otravez la cadena de eigenvectores y sus correspondientes eigenvalores

Cadena de vectores	v_0	v_1	v_2	$\ldots$	v_m
Eigenvalores posibles	m	$m-2$	$m-4$	$\ldots$	$-m$

iii) La demostración de éste inciso se desprende del inciso I) y la demostración del teorema está concluida.

■

COROLARIO 3.16. *Sea V cualquier L-módulo de dimensión finita, $L = \mathfrak{sl}(2, F)$. Entonces los eigenvalores de h sobre V son todos enteros, y cada uno aparece con su negativo en igual número de veces. Además, en cualquier descomposición de V en suma directa de submódulos irreducibles, el número de sumandos es precisamente* $\dim V_0 + \dim V_1$.

Demostración. Si $V = 0$ no hay nada que probar. Por otro lado si $V \neq 0$ por el teorema de Weyl 3.9 escribimos a V como suma directa de submodulos irreducibles. La primera afirmación se sigue del teorema 3.15 inciso I). Por el inciso I) del teorema 3.15 cada peso aparece simultaneamente con su opuesto, todos los pesos tienen la misma paridad y aparecen con multiplicidad 1, formando una cadena simetrica en relación al origen $\mathbb{Z} \subset F$, es decir,

$$-m, -m+2, \ldots, m-2, m$$

Para ver que el número de sumandos es precisamente $\dim V_0 + \dim V_1$, basta notar que en la descomposición de V, para cada factor irreducible tenemos una única correspondencia del peso 0 o del peso 1 pero no de ambos, debido a la paridad. ■

3. Descomposición del espacio L en espacios de raíces

En ésta sección L denota una álgebra de Lie semisimple distinta de cero. Vamos a estudiar en detalle la estructura de L, via su representación adjunta. La herramienta principal será la forma de Killing y los teoremas 3.10 y 3.15.
Sea L una álgebra de Lie semisimple, entonces L debe tener elementos semisimples distintos de cero. En efecto, supongamos que L no tiene elementos semisimples. Entonces cada elemento x en L puede ser descompuesto en una parte x_s semisimple y una parte x_n nilpotente, según nos dice la descomposición de Jordan-Chevalley y ambas partes pertenecen a L. como supusimos que L no tiene elementos semisimples implica que $x_s = 0$. Entonces $x = x_n$ para toda $x \in L$, en otras palabras, todos los elementos de L son ad-nilpotentes. Entonces $\operatorname{ad} x$ es nilpotente para toda $x \in L$ y por el teorema de Engel se tiene que L es nilpotente. Como $L \neq 0$, la álgebra de Lie L contiene un ideal abeliano distinto de cero y esto contradice la semisimplicidad de L, lo cual nos dice que L contiene elementos semisimples y por lo tanto subálgebras distintas de cero formadas por los elementos semisimples x_s.

DEFINICIÓN 3.17. Una subálgebra H de una álgebra de Lie semisimple L, generada por elementos semisimples es llamada una subálgebra *toral.*

LEMA 3.18. *Sea H una subálgebra toral de una álgebra de Lie semisimple L. Entonces H es abeliana.*

Demostración. Sea H una subálgebra toral de L, sea $x \neq 0 \in H$, mostraremos que $[x, y] = 0$ para toda y en H, es decir, que el $\operatorname{ad}_H(x) = 0$ para toda x en H. En efecto, como x es semisimple implica que $\operatorname{ad}_H(x)$ es semisimple, es decir, $\operatorname{ad}_H(x)$ es diagonalizable y como F es un campo algebraicamente cerrado se tiene que $\operatorname{ad}_H(x)$ actua diagonalmente sobre H, entonces basta mostrar que $\operatorname{ad}_H(x)$ no tiene eigenvalores distintos de cero. En efecto, supongamos lo contrario y asumamos que y es un eigenvector de $\operatorname{ad}_H(x)$, es decir, $\operatorname{ad}_H(x)(y) = [x, y] = ay$ para alguna $a \neq 0 \in F$ y $y \neq 0 \in H$. Por otro lado, $\operatorname{ad}_H(y)$

también es diagonalizable pues $y \in H$, entonces podemos escribir a x como una combinación lineal de eigenvectores linealmente independientes de $\mathrm{ad}_H(y)$. Por comodidad ponemos $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ y ponemos $[y, x_j] = a_j x_j$ para una $a_j \in F$ apropiada, de este modo tenemos que

$$\mathrm{ad}_H(y)(x) = [y,x] = -[x,y] = -\mathrm{ad}_H(x)(y) = -ay = [y,x] = \left[y, \sum_{j=1}^{n} x_j\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}[y, x_j] = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

y aplicando una vez más $\mathrm{ad}_H(y)$, se obtiene

(1) $\mathrm{ad}_H(y)(\mathrm{ad}_H(y)(x)) = \mathrm{ad}_H(y)(-ay) = [y, -ay] = -a[y,y] = -a \cdot 0 = 0$

(2) $\mathrm{ad}_H(y)(\mathrm{ad}_H(y)(x)) = \mathrm{ad}_H(y)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right) = \left[y, \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right] = \sum_{j=1}^{n} a_j [y, x_j] = \sum_{j=1}^{n} a_j a_j x_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 x_j$

Juntando 1 y 2 se tiene que

$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 x_j$$

lo cual implica que $a_j = 0$ para toda j, lo que a su vez implica que $a = 0$; lo que contradice que $a \neq 0$ y por lo tanto $\mathrm{ad}_H(x)$ no tiene eigenvalores distintos de cero, con lo cual queda términada la demostración. ■

Una lgebra de Lie L semisimple puede contener varias subálgebras torales, algunas contenidas en otras. Una subálgebra toral es llamada *máxima* si ésta no está contenida propiamente en cualquier otra subálgebra toral. Como L es de dimesnsión finita la subálgebra toral máxima existe.

Fijemos una *subálgebra toral maxima* H de L, es decir, una subálgebra no incluida en otra. Como H es abeliana por el lema 3.18, se tiene que $\mathrm{ad}_L H$ es una familia de endomorfismos diagonalizables (semisimples) sobre el espacio vectorial L que conmutan entre si. Un resultado de álgebra lineal nos garantiza que endomorfismos con esa propiedad son simultaneamente diagonalizables. Esto equivale a decir que L se descompone bajo $\mathrm{ad}_L H$ como suma directa de subespacios.

Estos subespacios serán denotados por L_α y surgen como sigue. Los vectores $x \neq 0 \in L_\alpha \subset L$ son por definición eigenvectores de $\mathrm{ad}_L h$ para toda $h \in H$. Denotamos el eigenvalor de $\mathrm{ad}_L h$ por $\alpha(h)$ y tenemos que para toda $h \in H$

$$\mathrm{ad}_L h(x) = \alpha(h)x$$

La etiqueta α es la función

$$\alpha : H \longrightarrow F$$

definida por la correspondencia

$$h \longmapsto \alpha(h)$$

la cual asocia el eigenvalor $\alpha(h)$ de el eigenvector x a el elemento h. Entonces sea H una subálgebra toral máxima de una álgebra de Lie semisimple L de dimensión finita.

Los eigenvalores de el operador lineal $\operatorname{ad}_L h$ serán denotados por $\alpha(h)$ y definimos es subespacio L_α de L por

$$L_\alpha = \{x \in L \mid \operatorname{ad}_L h(x) = [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in H\}$$

donde $\alpha \in H^*$. Entonces la álgebra de Lie vista como un espacio vectorial es la suma directa de los subespacios L_α:

$$L = \bigoplus_\alpha L_\alpha$$

Notemos que L_0 corresponde al eigenvalor cero y es simplemente $C_L(H)$, el centralizador de H, es decir,

$$L_0 = C_L(H) = \{x \in L \mid \operatorname{ad}_L h(x) = [h, x] = 0 \quad \forall h \in H\}$$

éste contiene a H, debido al lema 3.18. El conjunto de todas las $\alpha \neq 0 \in H^*$ para los cuales $L_\alpha \neq 0$ es denotado por Φ, es decir,

$$\Phi = \{\alpha \in H^* \mid L_\alpha \neq 0 \quad \forall \alpha \in H^*\}$$

Los elementos de Φ son llamados *raíces* de L relativas a H y son un número finito, los L_α son llamados *espacios de raíces* y a Φ se le llama *un sistema de raíces* de L. Con esta notación podemos escribir una descomposición del espacio L en espacios de raíces con respecto a H o también llamada *descomposición de Cartan*, a saber,

$$L = C_L(H) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right) \qquad **)$$

Nuestra meta en lo que sigue es primero mostrar que $H = C_L(H)$, entonces describir el conjunto de raíces en más detalle, y por último mostrar que Φ caracteriza a L completamente.

PROPOSICIÓN 3.19. *Para toda α, β en H^*, $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Si x pertenece a L_α, $\alpha \neq 0$, entonces* $\operatorname{ad} x$ *es nilpotente. Si α, β pertenecen a H^* y $\alpha + \beta \neq 0$, entonces L_α es ortogonal a L_β, relativo a la forma de Killing $\mathcal{K}$ de L.*

Demostración. La primera afirmación se sigue de la identidad de Jacobi. En efecto, sea $h \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$. Usando la identidad de Jacobi y la definición de L_α tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} h([x, y]) &= [h, [x, y]] = -[x, [y, h]] - [y, [h, x]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] \\ &= [\operatorname{ad}_L(h)(x), y] + [x, \operatorname{ad}_L(h)(y)] = \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] \\ &= (\alpha(h) + \beta(h))[x, y] = (\alpha + \beta)(h)[x, y] \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos que

$$[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$$

La segunda afirmación es consecuencia de la primera. En efecto, de la primera afirmación obtenemos para $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$ lo siguiente

$$(\operatorname{ad} x)^k(y) \in L_{\alpha+\beta} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

De esta manera obtenemos desde L_β nuevos espacios de raíces $L_{k\alpha+gb}$. Puesto que los espacios de raíces con diferentes raíces son linealmente independientes y el álgebra L es de dimensión finita, este proceso de crear nuevos espacios de raíces debe de detenerse en algún momento. De este modo, existe un entero positivo N_β tal que para $x \in L_\alpha$, uno tiene para toda $y \in L_\beta$ que

$$(\operatorname{ad} x)^{N_\beta}(y) = 0$$

dejando que y corra atravez de toda L, llegamos desde la finitud del sistema de raíces a que

$$(\operatorname{ad} x)^N(y) = 0 \qquad A)$$

con y en L, donde $N = \underset{\beta\in\Phi}{m}axN_\beta$. De $A)$ vemos que $\operatorname{ad} x$ es nilpotente. ■

COROLARIO 3.20. *La restricción de la forma de Killing a $L_0 = C_L(H)$ es no-degenerada.*

Demostración. Supongamos que la restricción de $\mathcal{K}$ a L_0 es degenerada. Entonces existe un elemento $z \neq 0$ en L_0tal que $\mathcal{K}(z, y) = 0$ $\forall y \in L_0$ o en otras palabras

$$\mathcal{K}(z, L_0) = 0 \qquad 1)$$

con $z \neq 0$, $z \in L_0$. Como $z \in L_0$ tenemos que $\forall\alpha \in \Phi$

$$\mathcal{K}(z, L_\alpha) = 0 \qquad 2)$$

porque $\alpha \neq 0$ y debido a la proposición 3.19, pues L_0 y L_α son ortogonales. Como sabemos que

$$L = C_L(H) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right)$$

junto con 1) y 2) se sigue que $\mathcal{K}(z, L) = 0$. Como $z \neq 0$ esto implica que $\mathcal{K}$ es degenerada sobre L. Esto contradice al teorema 2.22 pues L es semisimple. ■

LEMA 3.21. *Si x, y son dos endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita que conmutan, con y nilpotente, entonces xy es nilpotente y en particular* $\operatorname{Tr}(xy) = 0$

Demostración. Como $xy = yx$ y $y^k = 0$ para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$(xy)^k = x^k y^k = x^k \cdot 0 = 0$$

y

$$(yx)^k = y^k x^k = 0 \cdot x^k = 0$$

lo cual implica que xy es nilpotente. Además por ser xy nilpotente implica que tiene una matriz triangular estrictamente superior y por lo tanto que $\operatorname{Tr}(xy) = 0$ ■

PROPOSICIÓN 3.22. *Sea H una subálgebra toral maximal de L. Entonces $H = C_L(H)$.*

Demostración. Procedemos en varios pasos para la demostración y escribimos por simplicidad $C = C_L(H)$.

(1) C contiene las partes semisimple y nilpotente de sus elementos. En efecto, decir que x pertenece a C, es decir que $\operatorname{ad} x$ mapea el subespacio H de L sobre el subespacio cero, pues $L_0 = C_L(H)$. Por la proposición 2.8 inciso c) $(\operatorname{ad} x)_s$ y $(\operatorname{ad} x)_n$ tienen la misma propiedad, pero por el comentario hecho al final del capitulo dos se tiene $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_s$ y $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_n$, con lo cual se demuestra la afirmación hecha.

(2) Todos los elementos semisimples de C viven en H. En efecto, si x es semisimple y centaliza a H entonces la subálgebra abeliana $H + Fx$ de L es toral; porque la suma de elementos semisimples que conmutan es otra vez un elemento semisimple. Como H es máxima se tiene que $H = H + Fx$ y por lo tanto $x \in H$.

(3) La restricción de $\mathcal{K}$ a H es no-degenerada. En efecto, sea $\mathcal{K}(h, H) = 0$ para alguna $h \in H$, debemos mostrar que $h = 0$. Si $x \in C$ es nilpotente entonces del caso de que $[x, H] = 0$ y de que $\operatorname{ad} x$ es nilpotente porque x es nilpotente; juntos implican por el lema 3.21 que $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0\ \forall y \in H$ o equivalentemente $\mathcal{K}(x, H) = 0$, pero entonces los incisos 1) y 2) implican que $(h, C) = 0$ por consiguiente se tiene $h = 0$ y la restricción de $\mathcal{K}$ a C es no-degenerada por el corolario 3.20.

(4) C es nilpotente. En efecto, si $x \in C$ es semisimple entonces $x \in H$ por el inciso 2) y $\operatorname{ad}_C x = 0$, es decir, $\operatorname{ad}_C x$ es nilpotente. Por otro lado, si $x \in C$ es nilpotente entonces $\operatorname{ad} x$ es nilpotente. Ahora, sea $x \in C$ arbitrario, $x = x_s + x_n$. Puesto que x_s, x_n viven en C por el inciso 1), $\operatorname{ad}_C x$ es la suma de nilpotentes que conmutan y es en consecuencia $ad_C x$ nilpotente. Por el teorema de Engel 1.27, C es nilpotente.

(5) $H \cap [C, C] = 0$. Puesto que $\mathcal{K}$ es asociativa y $[H, C] = 0$, se tiene que $(H, [C, C]) = 0$ y como la restricción de $\mathcal{K}$ a H es no-degenerada por el inciso 3) se tiene que $H \cap [C, C] = 0$.

(6) C es abeliana. En efecto, supongamos lo contrario, es decir, que $[C, C] \neq 0$. C es nilpotente por el inciso 4) entonces $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$ por el lema 1.31 con $[C, C]$ un ideal de C. Ahora sea $z \neq 0$ que vive en la intersección. Por los incisos 2) y 5) z no puede ser semisimple y su parte nilpotente n es en consecuencia distinta de cero y vive en C por el inciso 1), entonces también vive en $Z(C)$, pero entonces el lema 3.21 implica que $\mathcal{K}(n, C) = 0$, lo que contradice al corolario 3.20.

(7) $C = H$. En efecto, supongamos lo contrario, que C contiene un elemento $x \neq 0$ nilpotente, lo cual es posible por los incisos 1) y 2). De acuerdo con el lema 3.21 y el inciso 6)

$$\mathcal{K}(x, y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$$

para toda y en C. Lo que contradice al corolario 3.20 y por lo tanto $H = C_L(H) = L_0$.

■

COROLARIO 3.23. *La restricción de $\mathcal{K}$ a H es no-degenerada.*

Demostración. Se aplica el colorario 3.20, pues tenemos que $L_0 = C_L(H) = H$. ■

Sea $t \in H$, la aplicación $h \to \mathcal{K}(t, h)$ define una aplicación lineal

$$\alpha_t : H \longrightarrow F$$

Además de esto, sea $t, u \in H$ y $a, b \in F$ entonces $\alpha_{at+bu}(h) = a\alpha_t(h) + b\alpha_u(h)$ por la bilinealidad de $\mathcal{K}$. Esto define una aplicación lineal

$$\varphi : H \longrightarrow H^*$$

definida por la correspondencia

$$h \mapsto \varphi(h)$$

donde $\varphi(h)$ se define especificamente como sigue

$$\varphi(h)(h') := \mathcal{K}(h, h') \quad (h' \in H) \qquad 1)$$

LEMA 3.24. *Sea H una subálgebra toral máxima de una álgebra de Lie semisimple L y H^* su espacio dual. Entonces el mapeo*

$$\varphi : H \longrightarrow H^*$$

definido como en 1) es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. La linealidad de φ se sigue de 1) pues la forma de Killing es bilineal. Además $\varphi(h) = 0$ implica que $\mathcal{K}(h, h') = 0$ para toda $h' \in H$. Como la forma de Killing es no-degenerada sobre H por el corolario 3.23, implica que $h = 0$ para toda h y esto nos dice que $\operatorname{Ker} \varphi = 0$. Por lo tanto φ es inyectiva.
Como $\dim H = \dim H^* < \infty$ implica que φ es suprayectiva y por lo tanto tenemos que φ es un isomorfismo de espacios vectoriales. ■

Como φ establece un isomorfismo entre H y H^*, esto nos permite identificar los dos espacios como sigue: a todo elemento $\alpha \in H^*$ le corresponde un único elemento $\varphi^{-1}(\alpha) = t_\alpha \in H$.

DEFINICIÓN 3.25. Sea H una subálgebra toral máxima de una álgebra de Lie semisimple L y sea H^* el espacio dual de H. El elemnto

$$t_\alpha := \varphi^{-1}(\alpha) \quad \in \quad H \qquad \alpha \in H^*$$

es llamado el *vector inicio* asociado a α.

Como $\alpha = \varphi(t_\alpha)$, ésta satisface la ecuación

$$\alpha(h) = \varphi(t_\alpha)(h) := \mathcal{K}(t_\alpha, h)$$

para toda h en H. Particularmente, Φ corresponde a el subconjunto $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ de H.

CAPÍTULO 4

PROPIEDADES

1. Propiedades "ortogonales"

En esta sección obtendremos información más precisa sobre la descomposición del espacio en espacios de raíces, usando la forma de Killing. Ya hemos observado en la proposición 3.19 que $\mathcal{K}(L_\alpha, L_\beta) = 0$ si $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$; en particular $\mathcal{K}(H, L_\alpha) = 0$ $\forall \alpha \in \Phi$, por lo tanto según el corolario 3.20 la restricción de $\mathcal{K}$ a H es no-degenerada.

PROPOSICIÓN 4.1. *Se tiene*

1) Φ genera a H^*.

2) si $\alpha \in \Phi$ entonces $-\alpha \in \Phi$.

3) Sea $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Entonces

$$[L_\alpha, L_{-\alpha}] = [x, y] = \mathcal{K}(x, y)t_\alpha$$

4) si $\alpha \in \Phi$ entonces $[L_\alpha, L_-\alpha]$ es de dimensión uno, con base t_α.

5) $\alpha(t_\alpha) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$, para $\alpha \in \Phi$.

6) Si $\alpha \in \Phi$ y x_α es cualquier elemento de L_α, entonces existe $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ tal que $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ generan una subálgebra simple de L, de dimensión tres isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, F)$ via

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7) $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}$, $\quad h_\alpha = -h_{-\alpha}$.

Demostración. En efecto.

1) Supongamos que Φ no genera a H^*, es decir, $< \Phi = \Phi(L, H) > \subset H^*$. En otras palabras, el conjunto de vectores $\{t_\alpha | \alpha \in \Phi\}$ no genera a H, pero H es isomorfa a H^* y como está definido t_α, este conjunto genera un subespacio lineal propio $S =< \{t_\alpha | \alpha \in \Phi\} >$ de H. Entoces el complemento ortogonal $S^\perp$, con respecto a la forma de Killing es no trivial, es decir, $S^\perp \neq 0$. Entonces existe un elemento $h \neq 0 \in H$ el cual es ortogonal a todos los vectores t_α. Esto es, $\forall \alpha \in \Phi$ tenemos que $\alpha(h) = \mathcal{K}(t_\alpha, h) = 0$. Esto significa que $\forall \alpha \in \Phi$ se tiene que $[h, L_\alpha] = \alpha(h)L_\alpha$ debido a la definición de L_α. Combinando esto con la afirmación de que $[h, H] = 0$ y usando que

$$L = C_L(H) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right) \qquad **)$$

tenemos que $[h, L] = 0$. Esto muestra que el elemento h pertenece al centro de L, es decir, $h \in Z(L)$, pero para las álgebras de Lie semisimples L tenemos que $Z(L) = 0$ y entonces se tiene que $h = 0$, con lo cual hemos obtenido una contradicción, con el hecho de que $h \neq 0$ y por lo tanto Φ genera a H^*.

2) Sea $\alpha \in \Phi$. Supongamos que que $-\alpha \notin \Phi$ entonces por definición $L_{-\alpha} = 0$ y consecuentemente $\mathcal{K}(L_\alpha, L_\beta) = 0$ para toda $\beta \in H^*$ por la proposición 3.19. Usando **) esto nos lleva a que $\mathcal{K}(L_\alpha, L) = 0$. Como $\mathcal{K}$ es no-degenerada esto obliga a que $L_\alpha = 0$, lo que contradice la no degeneracidad de $\mathcal{K}$ y por lo tanto $-\alpha \in \Phi$.

3) Sea $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_-\alpha$. Escojemos $h \in H$ arbitraria y obtenemos un único $t_\alpha \in H$ tal que $\alpha(h) = \mathcal{K}(t_\alpha, h)$. Entonces definimos

$$z := [x, y] - \mathcal{K}(x, y)t_\alpha \quad \in \quad H$$

Usando la bilinealidad y asociatividad de $\mathcal{K}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(h, z) &= \mathcal{K}(h, [x, y] - \mathcal{K}(x, y)t_\alpha) = \mathcal{K}(h, [x, y]) - \mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(h, t_\alpha)\\ &= \mathcal{K}([h, x], y) - \mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(t_\alpha, h) = \mathcal{K}([h, x], y) - \mathcal{K}(t_\alpha, h)\mathcal{K}(x, y)\\ &= \mathcal{K}([h, x], y) - \alpha(h)\mathcal{K}(x, y) = \alpha(h)\mathcal{K}(x, y) - \alpha(h)\mathcal{K}(x, y) = 0\end{aligned}$$

La no degeneracidad de la forma de Killing $\mathcal{K}$ sobre H nos lleva a que $z = 0$, es decir, tenemos

$$z = [x, y] - \mathcal{K}(x, y)t_\alpha$$

lo que implica

$$[x, y] = \mathcal{K}(x, y)t_\alpha$$

como se quería.

4) Por el inciso 3) sabemos que $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ es igual a un subespacio de dimensión cero o es igual a un subespacio de dimensión uno dado por Ct_α. Si $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = 0$ entonces $\mathcal{K}(L_\alpha, L_{-\alpha}) = 0$ por el inciso 2) y en consecuencia $\mathcal{K}(L_\alpha, L_\beta) = 0$ para toda β por la proposición 3.19, entonces $\mathcal{K}(L_\alpha, L) = 0$ y esto implica que la forma de Killing es degenerada; contradiciendo que $\mathcal{K}$ es no-degenerada y por lo tanto

$$[L_\alpha, L_{-\alpha}] = Ct_\alpha$$

5) Sea $\alpha \in \Phi$, supongamos lo contrario, es decir,

$$\alpha(t_\alpha) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) = 0 \qquad A)$$

Como $t_\alpha \in H$ obtenemos de la afirmación A) que $\forall x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ lo siguiente

$$[t_\alpha, x] = \alpha(t_\alpha) = 0 \qquad B)$$

y

$$[t_\alpha, y] = -\alpha(t_\alpha) = 0 \qquad C)$$

Por lo anterior se tiene que los elementos $t_\alpha \in H$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ generan una subálgebra tridimensional S de L. Esta álgebra S tiene las siguientes propiedades

$$S_1 = [S, S] = Ct_\alpha, \quad S_2 = [S_1, S_1] = 0 \qquad D)$$

Esto muestra que S es una subálgebra soluble, pero entonces $\mathrm{ad}_L S$ es una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(L)$. Usando el corolario 2.4 se sigue que $\mathrm{ad}_L S$ es nilpotente $\forall s \in S_1$. Como $S_1 \subset H$ el operador lineal $\mathrm{ad}_L S$ también es semisimple. Un operador el cual es semisimple y nilpotente, es el operador cero, entonces obtenemos que $\mathrm{ad}_L S = 0$ o equivalentemente $[L, s] = 0$ para toda $s \in S_1$. Esto nos lleva a que $S_1 \subset Z(L)$ y como L es semisimple se tiene que $Z(L) = 0$ y por lo tanto $S_1 = 0$. Entonces $D)$ nos da que $t_\alpha = 0$, contradiciendo nuestra elelcción de t_α.

6) Para $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ tenemos que

$$[x, y] = \mathcal{K}(x, y)t_\alpha$$

por el inciso 3). Para $x \neq 0$, $y \neq 0$ tenemos $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$. En efecto, si no fuera así tendríamos que $[L_\alpha, L_{-\alpha}] = 0$ y esto contradice que $\dim[L_\alpha, L_{-\alpha}] = 1$ según el inciso 4) y por lo tanto $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$. Los elementos x, y, t_α cumplen las siguientes reglas de conmutación

$$[t_\alpha, x] = \alpha(t_\alpha)x = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)x \neq 0 \qquad I)$$

$$[t_\alpha, y] = \alpha(t_\alpha)y = -\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)y \neq 0 \qquad II)$$

$$[x, y] = \mathcal{K}(x, y)t_\alpha \neq 0 \qquad III)$$

Definimos

$$x_\alpha := x \qquad IV)$$

$$y_\alpha := \frac{2}{\mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}y \qquad V)$$

$$h_\alpha := [x_\alpha, y_\alpha] \qquad VI)$$

De la definición de h_α y el inciso 3) en la tercera igualdad tenemos que

$$\begin{aligned} h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha] &= \left[x, \frac{2}{\mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}y\right] \\ &= \frac{2}{\mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}[x, y] = \frac{2}{\mathcal{K}(x, y)\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}\mathcal{K}(x, y) \\ &= \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} \qquad VII)$$

Aplicando I), II) y VII) obtenemos

$$\begin{aligned} [h_\alpha, x_\alpha] &= \left[\frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}, x\right] = \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}[t_\alpha, x] = \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)x \\ &= 2x = 2x_\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha \qquad VIII)$$

y

$$\begin{aligned}
[h_\alpha, y_\alpha] &= \left[\frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)}, \frac{2}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)}y\right] \\
&= \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)}\frac{2y}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} - \frac{2y}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)}\frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} \\
&= \frac{2t_\alpha 2y\Big(\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big) - 2y2t_\alpha\Big(\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big)}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} \\
&= \frac{\Big(2t_\alpha 2y - 2y2t_\alpha\Big)\Big(\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big)}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big(\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big)} \\
&= \frac{2t_\alpha 2y - 2y2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} \\
&= \frac{[2t_\alpha, 2y]}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} = \frac{2[t_\alpha, 2y]}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} \\
&= \frac{-2\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)2y}{\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} = \frac{-2(2y)\Big(\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big)}{\Big(\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)\Big)\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} \\
&= \frac{-2(2y)}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)} = -2\frac{2}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_\alpha,t_\alpha)}y \\
&= -2y_\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha \qquad IX)$$

y por lo tanto tenemos que x_α, y_α, h_α generan una subálgebra S_α tridimensional de L, que satisface la misma tabla de multiplicación que tiene $\mathfrak{sl}(2, F)$ y por lo tanto $S_\alpha \cong \mathfrak{sl}(2, F)$.

7) El elemento h_α definido en VI) satisface

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}$$

según se vio en VII).

Ahora se $\alpha \in \Phi$ entonces tenemos que $-\alpha \in \Phi$ por el inciso II) y

$$t_{-\alpha} = \varphi^{-1}(-\alpha) = -t_\alpha \quad \in \quad H \qquad X)$$

Además,usando X) en la segunda igualdad se tiene

$$\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha}) = \mathcal{K}(-t_\alpha, -t_\alpha) = (-)(-)\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha}) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) \qquad XI)$$

Usando VI) en la primera igualdad, junto con X) y XI) en la quinta igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} h_{-\alpha} = [x_{-\alpha}, y_{-\alpha}] &= \left[x, \frac{2}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha})} y\right] \\ &= \frac{2}{\mathcal{K}(x,y)\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha})}[x,y] \\ &= \frac{2}{\Big(\mathcal{K}(x,y)\Big)\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha})}\Big(\mathcal{K}(x,y)\Big)t_{-\alpha} = \frac{2t_{-\alpha}}{\mathcal{K}(t_{-\alpha}, t_{-\alpha})} \\ &= \frac{-2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} = -\frac{2t_\alpha}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} = -h_\alpha \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$h_{-\alpha} = -h_\alpha \quad \Longrightarrow \quad -h_{-\alpha} = h_\alpha$$

Con lo cual concluimos la demostración de la proposición.

■

2. Propiedades "integrales"

De la proposición 4.1 inciso VI) tenemos que toda raíz $\alpha \in \Phi$ caracteriza a una subálgebra S_α tridimensional de L. Gracias al teorema de Weyl 3.9 y teorema 3.15 tenemos una descripción completa de todos los S_α-módulos de dimensión finita. En particular podemos describir $\mathrm{ad}_L S_\alpha$, es decir, derivaremos unas propiedades de las raíces y de los espacios de raíces, las cuales se siguen de la teoria de representaciones de la álgebra $\mathfrak{sl}(2, F)$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Tenemos*

i) Si $\alpha \in \Phi$ implica que $\dim L_\alpha = 1$. *En particular, $S_\alpha = L_\alpha + L_{-\alpha} + H_\alpha$ ($H_\alpha = [L_\alpha, L_{-\alpha}]$) y para $x_\alpha \neq 0$ existe un único $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ satisfaciendo $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$.*
ii) Si $\alpha \in \Phi$, los únicos multiplos escalares de α los cuales son también raíz son α y $-\alpha$.
iii) Si α, $\beta \in \Phi$, entonces $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ y $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$. Los números $\beta(h_\alpha)$ son llamados **enteros de Cartan**.
iv) Si α, β, $\alpha + \beta \in \Phi$ entonces $[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$.
v) Si α, $\beta \in \Phi$, $\beta \neq \pm\alpha$. Sea r, q los mayores enteros para los cuales $\beta - r\alpha$, $\beta + q\alpha$ son raíces rescpectivamente. entonces todos las $\beta + i\alpha \in \Phi$ $(-r \leqslant i \leqslant q)$ y $\beta(h_\alpha) = r - q$.
vi) L es generada como álgebra de Lie por los espacios de raíces L_α.

Demostración. En efecto.

I) Sea α una raíz fija en Φ. Definimos el subespacio M de L generado por H junto con todos los espacios de raíz de la forma $L_{\lambda\alpha}$, es decir,

$$M = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_{\lambda\alpha} \right) \qquad 1)$$

Puesto que una álgebra de Lie semisimple de dimensión finita tiene sólo un número finito de espacios de raíces, la suma directa en 1) tiene sólo un número finito de espacios $L_{\lambda\alpha} \neq 0$. Usando la definición de L_α y que $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$ de la proposición 3.19, vemos que M es invariante bajo $\operatorname{ad}_L S_\alpha$. Esto significa que M es el espacio de representación de una representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, F)$. El teorema de Weyl3.9 afirma que esta representación es completamente reducible, es decir,

$$M = \oplus_{k,a_k} M^{(k,a_k)} \qquad 2)$$

donde $M^{(k,a_k)}$ es un $\mathfrak{sl}(2, F)$-submódulo irreducible $(k + 1)$-dimensional. La etiqueta a_k es para el caso en que el $\mathfrak{sl}(2, F)$-submódulo irreducible $(k + 1)$-dimensional pueda aparecer varias veces en la suma directa. Por el colorario 3.16 sabemos que los eigenvalores de h_α en un submódulo $M^{(k,a_k)}$ irreducible son enteros. Usando 2) vemos que los eigenvalores de $\operatorname{ad} h_\alpha$ que actua sobre M son enteros. De 1) se sigue $\operatorname{ad} h_\alpha$ actuando sobre M tiene eigenvalores $\{0, \lambda\alpha(h_\alpha)\} = \{0, 2\lambda\}$, pues

$$\lambda\alpha(h_\alpha) = \lambda\mathcal{K}(t_\alpha, h_\alpha) = \lambda\frac{2\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} = \lambda 2 = 2\lambda$$

Por lo tanto 2λ es un entero. Ahora ponemos $\lambda = \frac{1}{2}n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Consideraremos dos casos, el caso cuando n es par y cuando n es impar.
Para el caso de n par tenemos $\lambda \in \mathbb{Z}$ y consideremos el subespacio V de L dado por

$$V = Cy_\alpha \oplus Ch_\alpha \oplus L_{+\alpha} \oplus L_{+2\alpha} \oplus \ldots \oplus L_{+N\alpha} \qquad 3)$$

donde N es el mayor número natural para el cual $N\alpha$ es una raíz. Este es otra vez un subespacio de L, el cual es invariante bajo la acción de $\operatorname{ad}_L S_\alpha$. El operador $\operatorname{ad} h_\alpha$ actua diagonalmente sobre V y podemos calcular la traza de $\operatorname{ad} h_\alpha$ sobre V

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} h_\alpha|_V) &= -\alpha(h_\alpha) + 0 + \alpha(h_\alpha)\dim L_\alpha + 2\alpha(h_\alpha)\dim L_{2\alpha} + \ldots + N\alpha(h_\alpha)\dim L_{N\alpha} \\ &= \alpha(h_\alpha)\left(-1 + \sum_{n=1}^{N} n \dim L_{n\alpha} \right) \qquad 4) \end{aligned}$$

Sabiendo que $[h_\alpha, y_\alpha] = -2y_\alpha$ y de la invarianza de V bajo la acción de $\operatorname{ad} x_\alpha$ y $\operatorname{ad} y_\alpha$ vemos que

$$\operatorname{ad} h_\alpha|_V = [\operatorname{ad} x_\alpha, \operatorname{ad} y_\alpha]|_V = [\operatorname{ad} x_\alpha|_V, \operatorname{ad} y_\alpha|_V] \qquad 5)$$

y como la traza de un comutador de operadores lineales es cero, obtenemos

$$\operatorname{ad} h_\alpha|_V = 0 \qquad 6)$$

De 4) y 6) tenemos que

$$-1 + \dim L_\alpha + 2\dim L_{2\alpha} + \ldots + N \dim L_{N\alpha} = 0 \qquad 7)$$

Puesto que $\dim L_{n\alpha} \geqslant 0$ la única solución de 7) es

$$\dim L_\alpha = 1, \quad \dim L_{n\alpha} = 0 \qquad (2 \leqslant n \leqslant N) \qquad 8)$$

Como un caso especial se concluye de 8) que el doble de una raíz no es una raíz, es decir, $2\alpha \notin \Phi$.
Tomando $-\alpha$ en lugar de α en la definición de V, obtenemos de manera analoga que

$$\dim L_{-\alpha} = 1, \quad \dim L_{-n\alpha} = 0 \qquad (2 \leqslant n \leqslant N) \qquad 9)$$

Ahora consideremos el caso n impar. Entonces $\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Del caso n par sabemos que si α es una raíz entonces $\frac{1}{2}\alpha$ no puede ser una raíz. Similar al caso de n par uno encuentra que los únicos multiplos de una raíz α los cuales son otra vez raíz son α y $-\alpha$.

II) Se sigue del inciso I).

IV) Probaremos primero éste inciso que se usa en el inciso V).
De la proposición 3.19 tenemos

$$[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta} \qquad A_1)$$

Notemos que

$$\dim L_{\alpha+\beta} = 1 \qquad A_2)$$

y tenemos dos alternativas o

$$\dim[L_\alpha, L_\beta] = 0$$

o

$$\dim[L_\alpha, L_\beta] = 1 \qquad A_3)$$

Que $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 0$ significa que $(\operatorname{ad} x_\alpha)x_\beta = 0$. En el contexto del teorema 3.15 $v_0 = x_\beta$ es un vector de peso máximo de una representación irreducible de $\operatorname{ad}_L S_\alpha$. De $\operatorname{ad} h_\alpha(x_\beta) = \beta(h_\alpha)x_\beta$ se sigue que para la k más grande, uno tiene que $k = \beta(h_\alpha)$. Entonces $k+2 = (\alpha+\beta)(h_\alpha)$ no es un eigenvalor, pues $[h_\alpha, x_\alpha] = 2x_\alpha$. Entonces $\alpha + \beta$ no es una raíz, lo cual es una contradicción; lo que asegura que $\dim[L_\alpha, L_\beta] = 1$ y juntando A_1), A_2) y A_3) obtenemos que

$$[L_\alpha, L_\beta] = L_{\alpha+\beta}$$

V) Se prueba primero éste inciso pues el inciso III) se desprende con cierta facilidad de este inciso.
Sea $N = \{i \in \mathbb{Z} \mid \beta + i\alpha \in \Phi\}$. Consideremos el subespacio V de L generado por los espacios de raíz unidimensional $L_\beta + i\alpha$ con i en N, es decir,

$$V = \bigoplus_{i \in N} L_\beta + i\alpha$$

Bajo la representación adjunta de la subálgebra S_α éste subespacio de dimensión finita V es un S_α-módulo. Por lo tanto V es una suma directa de S_α-módulos irreducibles debido al teorema de Weyl3.9, es decir, tenemos

$$V = \bigoplus_{k,a_k} U^{k,a_k} \qquad B_1)$$

donde k se refiere a el S_α-módulo irreducible $(2k+1)$-dimensional y la etiqueta a_k es para el caso en que el S_α-módulo irreducible pueda aparecer varias veces. Lo proxímo que demostraremos es que la suma directa $B_1)$ contiene un único S_α-módulo irreducible, en otras palabras, S_α-módulo original V es irreducible. En efecto, primero notemos que la suma directa $B_1)$ puede escribirse como

$$V = \left(\bigoplus_{k \ par, a_k} U^{k,a_k} \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{k \ impar, a_k} U^{k,a_k} \right) \qquad B_2)$$

Todas las U^{k,a_k} con k par contienen un eigenvector de $\operatorname{ad} h_\alpha$ con eigenvalor cero, es decir,

$$\operatorname{ad} h_\alpha \left(x^{k,a_k}_{\beta+s\alpha} \right) = (\beta(h_\alpha) + 2s) x^{k,a_k}_{\beta+s\alpha} = 0$$

donde $x^{k,a_k}_{\beta+s\alpha}$ pertenece a U^{k,a_k}. Debido a que los espacios de raíces son de dimensión uno, solamente un subespacio U^{k,a_k} con k par aparecerá en la suma directa $B_2)$. Para k impar se procede similarmente considerando un eigenvector de $\operatorname{ad} h_\alpha$ con eigenvalor uno. Por lo tanto la suma directa $B_1)$ contiene almenos un valor par e impar de k. Mostraremos que ellos no pueden aparecer simultaneamente. En efecto, supongamos lo contrario, que la suma en $B_1)$ contiene un valor par y uno impar de k simultaneamente. Entonces existe un eigenvector $x_{\beta+t\alpha}$ de $\operatorname{ad} h_\alpha$ con eigenvalor cero y un eigenvector $x_{\beta+t'\alpha}$ de $\operatorname{ad} h_\alpha$ con eigenvalor uno. Entonces

$$\beta(h_\alpha) + 2t = 0 \qquad y \qquad \beta(h_\alpha) + 2t' = 1$$

Esto implica que $2(t'-t) = 1$ y esto es una contradicción, pues t, t' estan en $\mathbb{Z}$. Consecuentemente el S_α-módulo V es irreducible como se quería.
Tomando x_β en L_β tenemos

$$\operatorname{ad} h_\alpha(x_\beta) = \beta(h_\alpha) x_\beta$$

La acción repetida con $\operatorname{ad} x_\alpha$ sobre x_β da de acuerdo con el inciso IV) una sucesión de vectores

$$x_\beta, x_{\beta+\alpha}, \ldots, x_{\beta+q\alpha}, \ldots$$

Estos son o eigenvectores de $\operatorname{ad} h_\alpha$ o son el vector cero. Como L es de dimensión finita, ésta sucesión debe de estacionarse en algún momento, esto es apartir de un cierto momento los vectores son cero. Repitiendo la acción con $\operatorname{ad} y_\alpha$ sobre x_β obtenemos también otra sucesión de vectores

$$x_{\beta-\alpha}, x_{\beta-2\alpha}, \ldots, x_{\beta-r\alpha}, \ldots$$

Ésta sucesión también se debe de estacionar en algún momento debido a que L es de dimensión finita. La sucesión de raíces

$$\beta - r\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + q\alpha$$

es llamada la *α-cadena a travez de β*.Todos los vectores distintos de cero en ésta cadena,

$$x_{\beta-r\alpha}, \ldots, x_{\beta-\alpha,\beta}, x_{\beta+\alpha}, \ldots, x_{\beta+q\alpha}$$

también son eigenvectores de $\operatorname{ad} h_\alpha$. Los eigenvectores de $\operatorname{ad} h_\alpha$ son nombrados como pesos según el teorema 3.15. Los eigenvectores de ambas sucesiones y sus correspondientes pesos son tabulados como sigue

Vectores	Pesos
$X_{\beta+q_\alpha}$	$\beta(h_\alpha) + 2q$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{\beta+\alpha}$	$\beta(h_\alpha) + 2$
x_β	$\beta(h_\alpha)$
$x_{\beta-\alpha}$	$\beta(h_\alpha) - 2$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{\beta-r\alpha}$	$\beta(h_\alpha) - 2r$

Los eigenvectores $x_{\beta-r\alpha}, \ldots, x_{\beta-\alpha,\beta}, x_{\beta+\alpha}, \ldots, x_{\beta+q\alpha}$ generan un $\mathfrak{sl}(2, F)$-módulo irreducible. Tales módulos son caracterizados por números enteros no negativos k según indica el corolario 3.16. El mayor y el menor entero son denotados k y $-k$ respectivamente. Entonces tenemos

$$\beta(h_\alpha) + 2q = k \qquad B_3)$$

y

$$\beta(h_\alpha) - 2r = -k \qquad B_4)$$

Sumando $B_3)$ y $B_4)$ tenemos

$$\beta(h_\alpha) + 2q + \beta(h_\alpha) - 2r = k - k = 0 \Longrightarrow 2\beta(h_\alpha) + 2q - 2r = 0$$

lo cual implica que

$$2(\beta(h_\alpha) + q - r) = 0 \Longrightarrow \beta(h_\alpha) + q - r = 0$$

y por lo tanto tenemos que

$$\beta(h_\alpha) = r - q \quad \in \mathbb{Z} \qquad B_5)$$

De manera analoga si restamos $B_3)$ y $B_4)$ tenemos $r + q = k$. Todas las $\beta + i\alpha$ con i en $[-r, q] \cap \mathbb{Z} = N$, aparecen en la cadena

$$x_{\beta-r\alpha}, \ldots, x_{\beta-\alpha,\beta}, x_{\beta+\alpha}, \ldots, x_{\beta+q\alpha}$$

y son raíces.

III) Que $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ se sigue de B_5) y de que $r + q = k$ con k un entero. Puesto que $r, q \geqslant 0$ tenemos que $-r \leqslant q - r \geqslant q$ o $q - r \in [-r, q]$. Además $q - r \in \mathbb{Z}$, entonces $q - r \in N$. Esto significa que

$$\beta + (q - r)\alpha = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha$$

está en la α-cadena atravez de β, es decir, es una raíz y por lo tanto $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$ Este resultado es importante al tratar el grupo de Weyl de un sistemas de raíces.

VI) En efecto, como hemos visto, para una álgebra de Lie semisimple todos los espacios de raíces son de dimensión uno y como tenemos que

$$\begin{aligned} L = C_L(H) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right) &= H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right) \\ = L_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha\right) &= \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$L = \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$$

Por lo tanto L es generada por los espacios de raíces.

■

La relación $III)$ es importante. Muestra que todos los números $\beta(h_\alpha)$ que aparecen en las relaciones de conmutación

$$[h_\alpha, x_\beta] = \beta(h_\alpha)x_\beta$$

son enteros si α y β son raíces. Hemos visto que esto viene o es la teoria de representación de $\mathfrak{sl}(2, F)$.

Ahora que ya hemos visto las propiedades de las raíces y de los espacios de raíces, procedemos a dar un ejemplo.

3. Sistema de raíces de $\mathfrak{sl}(k + 1, F)$

Para obtener el sistema de raíces de $\mathfrak{sl}(k + 1, F)$, primero consideramos el sistema de raíces de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, F)$. La estructura de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, F)$ esta dada de la siguiente forma.

La álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, F)$ tiene dimensión 8, pues $\dim \mathfrak{sl}(k + 1, F) = k(k + 2)$. La base standar de $\mathfrak{sl}(3, F)$ esta dada por:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las reglas de conmutación se resumen en la siguiente tabla:

	h_1	h_2	e_1	e_2	e_{13}	f_1	f_2	f_3
h_1	0	0	$2e_1$	$-e_2$	e_{13}	$-2f_1$	f_2	$-f_{13}$
h_2	·	0	$-e_1$	$2e_2$	e_{13}	f_1	$-2f_2$	$-f_{13}$
e_1	·	·	0	e_{13}	0	h_1	0	$-f_2$
e_2	·	·	·	0	0	0	h_2	f_1
e_{13}	·	·	·	·	0	$-e_2$	e_1	h_1+h_2
f_1	·	·	·	·	·	$-e_2$	$-f_{13}$	0
f_2	·	·	·	·	·	·	0	0
f_{13}	·	·	·	·	·	·	·	0

Como subálgebra toral H tomamos la subálgebra generada por las matrices diagonales h_1 y h_2. Los espacios de raíces son las subálgebras de dimensión uno generadas por los elementos $e_1, e_2, e_{13}, f_1, f_2$ y f_{13}. En particular, consideremos el espacio de raíz generado por el elemento e_1. Denotamos su correspondiente raíz por α_1 entonces usando la tabla anterior se obtiene

$$[h_1, e_1] = \alpha_1(h_1)e_1 = 2e_1 \tag{1}$$

y

$$[h_2, e_1] = \alpha_1(h_2)e_1 = -e_1 \tag{2}$$

Esto significa que la función lineal $\alpha_1 \in H^*$ mapea a $h_1, h_2 \in H$ a los números 2 y -1 respectivamente. Aunque esta es la manera general de introducir raíces, sería más conveniente que las raíces pudieran de algún modo ser relacionadas a la estructura matricial de la subálgebra toral. La subálgebra toral H consiste de matrices diagonales de 3×3 sin traza. Se denota un elemento cualquiera por

$$h = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) \tag{3}$$

con

$$0 = a_1 + a_2 + a_3 \tag{4}$$

Definimos elementos λ_1, λ_2 y λ_3 en H^* por

$$\lambda_i(h) = \lambda_i(\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)) = a_i \tag{5}$$

Las funciones lineales λ_i con $i = 1, 2, 3$ no son independientes. De 4) y 5) se sigue que ellas satisfacen

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{6}$$

De 5) se sigue que λ_i es la función lineal sobre H la cual toma la i-ésima entrada de la matriz diagonal $h \in H$. Ahora expresamos la raíz λ_1 que aparece en 1) y 2) en términos de las funciones lineales λ_i. Pa ra hacer esto calculamos $\lambda_i(h_j)$. Usando 5) y las formas explícitas de las matrices h_1 y h_2, en cuyo caso obtenemos lo siguiente

$$\lambda_1(h_1) = 1, \quad \lambda_2(h_1) = -1, \quad \lambda_3(h_1) = 0 \tag{7}$$

y

$$\lambda_1(h_2) = 0, \quad \lambda_2(h_2) = 1, \quad \lambda_3(h_2) = -1 \qquad 8)$$

de estos resultados y conjuntamente con 1) y 2) obtenemos

$$[h_1, e_1] = 2e_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(h_1)e_1 \qquad 9)$$

$$[h_2, e_1] = -e_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(h_2)e_1 \qquad 10)$$

Comparando con 1) y 2) damos una expresi"on para la raíz α_1, en términos de las funciones λ_i.

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \qquad 11)$$

Haciendo calculos similares para el espacio de raíz generado por e_2 obtenemos

$$[h_1, e_2] = \alpha_2(h_1)e_2 = -e_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)(h_1)e_2 \qquad 12)$$

$$[h_2, e_2] = \alpha_2(h_2)e_2 = 2e_2 = (\lambda_2 - \lambda_3)(h_2)e_2 \qquad 13)$$

donde α_2 es la raíz de e_2. Entonces

$$\alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \qquad 14)$$

Las ra'ices α_1 y α_2 son elementos en el espacio vectorial bi-dimensional H^*, lo que implica que ellas son una base de H^* y el resto de las raíces pueden ser expresadas en términos de estas dos. Como un ejemplo consideremos el espacio de raíz Fe_{13}. Como el elemento $e_{13} = [e_1, e_2]$ según nos indica la tabla entonces podemos usar la identidad de Jacobi, conjuntamente con 9) y 13) para calcular la raíz α_{13} del espacio de raíz Fe_{13}. Entonces usando 1) y 12) tenemos

$$[h_1, e_{13}] = [h_1, [e_1, e_2]] = [e_1, [h_1, e_2]] + [[h_1, e_1], e_2] = (\alpha_1 + \alpha_2)(h_1)e_{13} \qquad 15)$$

lo que nos lleva a obtener en vista de 11) y 14)

$$\alpha_{13} = \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 - \lambda_3 \qquad 16)$$

El resto de las raíces son $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ y $-(\alpha_1 + \alpha_2)$. Entonces el sistema de raíces Φ para la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(3, F)$ es dado por

$$\Phi = \{\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} \qquad 17)$$

Éste sistema de raíces tiene la base dada por

$$\{\alpha_1, \alpha_2\} \qquad 18)$$

Con este ejemplo en mente pasemos a considerar el caso general.

Para determinar el sistema de raíces de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(k+1, F)$, tomamos como subálgebra toral H la subálgebra de matrices diagonales sin traza como se defini en *ii*) de la pagina 42. Denotamos un elemento cualquiera en H por

$$h = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}) \qquad 19)$$

donde $a_i \in F$ y con

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0 \qquad 20)$$

Definimos elementos λ_i en H^* por

$$\lambda_i(h) = \lambda_i(\text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})) = a_i \tag{21)}$$

sumando esta ecuación sobre i da

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 0 \tag{22)}$$

Obtenemos las raíces considerando el conmutador de h con los elementos e_{pq} como se definieron en i) de la pagina 42. Haciendo operaciones obtenemos

$$[h, e_{pq}] = (a_p - a_q)e_{pq} \tag{23)}$$

Usando 21) podemos reescribir esto en la forma

$$[h, e_{pq}] = (\lambda_p - \lambda_q)(h)e_{pq} \tag{24)}$$

De estos resultados concluimos que Fe_{pq} es un espacio de raíz con raíz $\lambda_p - \lambda_q$. En otras palabras

$$L_{\lambda_p - \lambda_q} = Fe_{pq} \tag{25)}$$

con $p, q = 1, 2, \ldots, k+1; p \neq q$. Como en el ejemplo anterior podemos encontrar una base B para el sistema de raíces Φ. Para hacer esto consideremos los generadores de *Cartan-Chevalley* $\{e_i, f_i, h_i \mid i = 1, 2, \ldots, k+1\}$ de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$, donde

$$e_1 = e_{12}, \quad e_2 = e_{23}, \quad \ldots, \quad e_k = e_{k,k+1}$$
$$f_1 = e_{21}, \quad f_2 = e_{32}, \quad \ldots, \quad f_k = e_{k+1,k}$$
$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_k$$

Denotando la raíz que pertenece al subespacio $Fe_i \equiv Fe_{i,i+1}$ por α_i tenemos

$$[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i \tag{26)}$$

De 24) obtenemos

$$[h, e_i] = (\alpha_i - \lambda_{i+1})(h)e_i \tag{27)}$$

Entonces

$$\alpha_i = \alpha_i - \lambda_{i+1} \tag{28)}$$

con $i = 1, 2, \ldots, k+1$. El subconjunto B dado por

$$B = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \tag{29)}$$

es una base para el sistema de raíces Φ de la álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(k+1, F)$. Las raíces α_i son llamadas las *raíces simples* de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$. Para $p < q$ la raíz $(\lambda_p - \lambda_q)$ correspondiente al espacio de raíz Fe_{pq}, puede ser expresada por medio de raíces de la base B, a saber,

$$\lambda_p - \lambda_q = (\lambda_p - \lambda_{p+1}) + (\lambda_{p+1} - \lambda_{p+2}) + \ldots + (\lambda_{q-1} - \lambda_q) = \alpha_p + \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_{q-1} \tag{30)}$$

El elemento $e_{1,k+1}$ correspondiente a la raíz $\lambda_1 - \lambda_{k+1}$, si denotamos esta raíz por

$$\mu = \lambda_1 - \lambda_{k+1} \tag{31)}$$

Usando 30) para expresar a μ en la base B nos da

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$$

La raíz μ es llamada la raíz máxima de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$.

4. Propiedades "racionales"

L es una álgebra de Lie semisimple sobre un campo algebraicamente cerrado de caracteristica cero, H una subálgebra toral máxima, $\Phi \subset H^*$ es el conjunto de raíces de L relativas a H, $L = H \oplus (\underset{\alpha\in\Phi}{\oplus} L_\alpha)$ la descomposición del espacio L en espacios de raíces. Vamos a mostrar que las propiedades obtenidas anteriormente permiten la definición de una forma bilineal; sobre el $\mathbb{R}$-subespacio de el sistema de raíces Φ de una álgebra de Lie semisimple L. Ésta forma bilineal tendrá la propiedad de ser definida positiva. Los ingredientes pricipales para mostrar lo anterior son la no degeneracidad de la forma de Killing restringida a la subálgebra toral máxima H y el resultado obtenido que nos afirma que $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ para raíces α y $\beta \neq \pm\alpha$.
Recordemos que el isomorfismo φ entre H y H^* dado por

$$\varphi(h)(h') = \mathcal{K}(h, h')$$

con h, h' en H nos da que $t_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$, usando esto y que

$$h_\alpha = \frac{2}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)}$$

obtenemos para las raíces α y $\beta \neq \pm\alpha$ la siguiente expresión para los enteros de Cartan

$$\beta(h_\alpha) = \mathcal{K}(t_\beta, h_\alpha) = \frac{2\mathcal{K}(t_\beta, t_\alpha)}{\mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad C_1)$$

además

$$\alpha(t_\alpha) = \mathcal{K}(t_\beta, t_\alpha) \neq 0 \qquad C_2)$$

Ahora definimos una forma bilineal simetrica sobre H^*.

Definición 4.3. Para α y β en H^* definimos

$$(\beta, \alpha) = \mathcal{K}'(\beta, \alpha) := \mathcal{K}(\varphi^{-1}(\beta), \varphi^{-1}(\alpha)) = \mathcal{K}(t_\beta, t_\alpha) \qquad C_3)$$

La forma $(\cdot,\cdot)$ es no-degenerada sobre H^* debido a que $\mathcal{K}$ es no-degenerada sobre H y φ es un isomorfismo.En efecto, supongamos que$(\cdot,\cdot)$ es degenerada, esto implica que $(\beta, \alpha) = 0$ para alguna β fija y para toda $\alpha \neq 0$ y esto implica que $\mathcal{K}(t_\beta, t_\alpha) = 0$ lo que implica que $\alpha = 0$ contradiciendo la no degeneracidad de $\mathcal{K}$. Resultados especiales son dados por $C_2)$ y $C_3)$, a saber

$$(\alpha, \alpha) = \mathcal{K}(t_\alpha, t_\alpha) = \alpha(t_\alpha) \neq 0 \qquad C_4)$$

Además los enteros de Cartan pueden ser expresados por medio de la forma $(\cdot,\cdot)$, a saber

$$\beta(h_\alpha) = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad C_5)$$

con α, β en Φ. En la proposición 4.1 inciso 1) demostramos que Φ genera a H^*. Podemos entonces elegir en H^* una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ que consiste de raíces y toda β en H^* puede ser escrita únivocamente con respecto a ésta base como

$$\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i \qquad C_6)$$

Obtenemos un importante resulato si tomamos β en Φ; usando el caso de que los enteros de Cartan $\beta(h_\alpha)$ son enteros para α y β en Φ. Ahora probaremos que los coeficientes c_i en $C_6)$ son números racionales.

LEMA 4.4. *Sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ raíces linealmente independientes que generan a H^*. Entonces los coeficientes c_i en la expansión $C_6)$ son números racionales.*

Demostración. Consideremos para β en Φ

$$\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i$$

y tomemos h_{α_j} y $j = 1, 2, \ldots, l$. Esto da un sistema de l ecuaciones lineales no homogeneas, en l incógnitas c_i, es decir,

$$\beta(h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i(h_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{l} c_i(\alpha_i, \alpha_j) \qquad C_7)$$

con $j = 1, 2, \ldots, l$, donde $\beta(h_{\alpha_j})$ y $\alpha_i(h_{\alpha_j})$ son enteros de Cartan. Puesto que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ es una base de H^* y la forma es no-degenerada la matriz $(\alpha_i, \alpha_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant l}$ con elementos $(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i(h_{\alpha_j})$ es no singular y por lo tanto lo mismo es cierto para la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones, resolviendo así $C_7)$. Con la regla de Cramer, obtenemos que

$$c_i \in \mathbb{Q} \qquad C_8)$$

donde $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales. ■

Motivados por este resultado consideremos el $\mathbb{Q}$-subespacio $E_\mathbb{Q}$ de el sistema de raíces Φ. Éste es un subespacio de H^* definido por

$$E_\mathbb{Q} = \{\sum_{\alpha \in \Phi} r_\alpha \beta \mid r_\alpha \in \mathbb{Q}\} \qquad C_9)$$

Ahora se tiene el siguiente lema.

LEMA 4.5. *Afirmamos que*

a) *la dimensión de $E_\mathbb{Q}$ considerado como un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ es igual a $l = \dim H^*$.*
b) *Los valores de la restricción de la forma bilineal $\mathcal{K}' = (\cdot, \cdot)$ a $E_\mathbb{Q}$ son números racionales, es decir, para λ y μ en $E_\mathbb{Q}$ tenemos que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}$.*
c) *Sobre $E_\mathbb{Q}$ la forma bilineal $\mathcal{K}' = (\cdot, \cdot)$ es no-degenerada y definida-positiva.*

Demostración. La demostración es como sigue.

a) Sea $\lambda \in E_\mathbb{Q}$. Entonces de $C_6)$, $C_8)$ y $C_9)$ tenemos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} r_\alpha \beta = \sum_{i=1}^{l} (\sum_{\alpha \in \Phi} r_\alpha c_i) \alpha_i \qquad C_{10})$$

donde $r_\alpha, c_i \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$\sum_{\alpha \in \Phi} r_\alpha c_i \quad \in \mathbb{Q}$$

y $\{\alpha_i \mid i = 1, 2, \ldots, l\}$ es una base para $E_{\mathbb{Q}}$ y por lo tanto $\dim E_{\mathbb{Q}} = \dim H^* = l$.

b) Para la demostración de éste inciso necesitamos una expresión para

$$(\lambda, \mu) := \mathcal{K}(t_\lambda, t_\mu) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, t_\lambda \, \mathrm{ad}\, t_\mu) \qquad C_{11})$$

con $\lambda, \mu \in H^*$. Para obtener la expresión deseada consideremos la acción del operador $(\mathrm{ad}\, t_\lambda)(\mathrm{ad}\, t_\mu)$ sobre la descomposición de la álgebra de Lie L

$$L = H \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha) \qquad C_{12})$$

puesto que $t_\mu \in H$, tenemos para $h \in H$ que

$$\Big((\mathrm{ad}\, t_\lambda)(\mathrm{ad}\, t_\mu)\Big)(h) = (\mathrm{ad}\, t_\lambda)[t_\mu, h] = [t_\lambda, [t_\mu, h]] = 0 \qquad C_{13})$$

Para $x \in L_\alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}\Big((\mathrm{ad}\, t_\lambda)(\mathrm{ad}\, t_\mu)\Big)(x) &= (\mathrm{ad}\, t_\lambda)[t_\mu, x] = (\mathrm{ad}\, t_\lambda)\alpha(t_\mu)x \\ &= \alpha(t_\mu)(adt_\lambda)x = \alpha(t_\mu)[t_\alpha, x] = \alpha(t_\mu)\alpha(t_\lambda)(x)\end{aligned} \qquad C_{14})$$

El operador $((\mathrm{ad}\, t_\lambda)(\mathrm{ad}\, t_\mu))$ es representado por una matriz diagonal con respecto a la base adoptada en la descomposición $C_{12})$. Como todos los espacios de raíces son de dimensión uno la traza es dada por

$$\mathrm{Tr}\Big((\mathrm{ad}\, t_\lambda)(\mathrm{ad}\, t_\mu)\Big) = \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha(t_\mu)\alpha(t_\alpha) \qquad C_{15})$$

entonces como sabemos que $\alpha(h) = \mathcal{K}(t_\alpha, h)$ y $(\beta, \alpha) = \mathcal{K}'(\beta, \alpha) = \mathcal{K}(t_\beta, t_\alpha)$ tenemos lo siguiente

$$(\lambda, \mu) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \mu)(\alpha, \lambda) \qquad C_{16})$$

Esto da en particular para $\beta \in \Phi$ lo siguiente

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \in \Phi} (\alpha, \beta)^2 \qquad C_{17})$$

dividiendo ambos lados de $C_{17})$ por $(\beta, \beta)^2$ tenemos

$$\frac{(\beta, \beta)}{(\beta, \beta)^2} = \sum_{\alpha \in \Phi} \frac{(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)^2}$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{(\beta, \beta)} = \sum_{\alpha \in \Phi} \left(\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\right)^2 \qquad C_{18})$$

para $\alpha, \beta \in \Phi$ concluimos que el lado derecho de $C_{18})$ es un número racional positivo. Entonces (β, β) es un número racional positivo. Esto implica que (α, β) es un número racional, pues

$$(\beta, \beta) = \frac{(\beta, \beta)}{2}\alpha(h_\beta) \quad \in \mathbb{Q} \qquad C_{19})$$

Hemos probado que (α, β) es un número racional para todas las raíces α y β. Esta propiedad se extiende a los valores de la forma bilineal sobre $E_{\mathbb{Q}}$. Para demostrar esto tomamos una base $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ en Φ. Entonces que $\lambda, \mu \in E_{\mathbb{Q}}$ significa

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i \quad , \qquad \mu = \sum_{i=1}^{l} r_i\alpha_i \qquad\qquad C_{20})$$

con $c_i, r_i \in \mathbb{Q}$ y tenemos $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$. Esto da

$$(\lambda, \mu) = \sum_{i,j} c_i r_i(\alpha_i, \alpha_j) \quad \in \mathbb{Q}$$

Por lo tanto la restricción de la forma bilineal a $E_{\mathbb{Q}}$ toma sólo valores racionales.

c) Aunque la demostración de éste inciso puede talvez ser ya clara a partir del inciso *b*), damos su demostración explicita. En efecto, de C_{16} se sigue que

$$(\lambda, \lambda) = \sum_{\alpha\in\Phi} (\alpha, \lambda)^2 \qquad\qquad C_{21})$$

Esta es una suma de cuadrados de números racionales no negativos, entonces

$$(\lambda, \lambda) \geqslant 0 \qquad\qquad C_{22})$$

Además, $(\lambda, \lambda) = 0$ si y sólo si $(\lambda, \lambda) = \lambda(t_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in \Phi$. Esto significa que $(\lambda, \lambda) = \lambda(t_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in \Phi$ y esto implica que $\lambda = 0$. Consucuentemente $(\cdot, \cdot)$ es definida positiva y esto en cambio implica que $(\cdot, \cdot)$ es no-degenerada.

■

Ahora extendemos el subespacio $E_{\mathbb{Q}}$ de H^* a el espacio vectorial real E. Esto es posible porque los números reales $\mathbb{R}$ son la extensión del campo $\mathbb{Q}$. Esto significa que podemos considerar el $\mathbb{R}$-subespacio de Φ

$$E = \{\sum_{\alpha\in\Phi} r_\alpha \alpha \mid r_\alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} E_{\mathbb{Q}}$$

La forma bilineal no-degenerada y definida positiva sobre $E_{\mathbb{Q}}$ tiene una extensión a E. Ésta es la restricción de $(\cdot, \cdot)$ a E. De esta manera obtenemos un subespacio euclideano E en H^* y además

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_F H^* = l$$

Resumimos estos resultados en un teorema.

TEOREMA 4.6. *Sea L una álgebra de Lie semisimple, H una subálgebra toral máxima de L t sea Φ es sistema de raíces de L. Entonces*

1) Φ genera a E, es decir, H^* contiene un subespacio euclideano real generado por Φ y $0 \notin \Phi$.

2) Si $\alpha \in \Phi$ entonces $-\alpha \in \Phi$, pero ningún otro multiplo escalar es raíz.

3) Si $\alpha, \beta \in \Phi$ entonces $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi$.

4) Si $\alpha, \beta \in \Phi$ entonces $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \mathbb{Z}$.

5) La restricción de la forma no-degenerada $(\cdot, \cdot)$ a el subespacio euclideano E es definida positiva. Esto significa que la restricción a E es un **producto interior**.

Demostración. En efecto, tenemos

1) Por la proposición 4.1 inciso 1).
2) Por la proposición 4.1 inciso 2).
3) Por la proposición 4.2 inciso III) y C_5).
4) Por C_5.
5) Por el lema 4.5 inciso c).

■

El teorema afirma que Φ es un sistema de raíces en el subespacio euclideano E. Con lo anterior hemos establecido una correspondencia, entre una álgebra de Lie L y su subálgebra toral H por un lado, y con el conjunto de raíces Φ y un subespacio euclideo E por el otro lado, es decir,

$$(L, H) \mapsto (\Phi, E)$$

Se puede demostrar que esta correspondencia es uno a uno, pero la demostracion no corresponde a esta tesís. Además con los resultados obtenidos podemos definir mapeos sobre H^* y E, los cuales pueden ser interpretados como reflexiones. Esto llevará a lo que se llama el grupo de Weyl de un sistema de raíces que aquí no es tratado.

5. Propiedades de las raíces de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$

En ésta sección damos propiedades de la forma de Killing, de las raíces y de los espacios de raíces discutidos en éste capítulo para el caso especial de la "algebra de Lie lineal $\mathfrak{sl}(k+1, F)$, aqui se usara la sección 4.3 donde discutimos ésta álgebra. Comenzamos con la forma de Killing para los elementos e_{pq}. Como sabemos que $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ es semisimple vease sección 2.2 pagina 41 y de la forma explícita de las matrices e_{pq} vease también pagina 42, obtenemos para $p \neq q$ y $r \neq s$

$$\mathcal{K}(e_{pq}, e_{rs}) = 2(k+1)\operatorname{Tr}(e_{pq}e_{rs}) = 2(k+1)\delta_{qr}\delta_{ps} \qquad 1)$$

Usando este resultado calculamos la forma de Killing sobre el conjunto de generadores de Cartan-chevalley

$$\mathcal{K}(e_i, e_j) = \mathcal{K}(e_{i,i+1}, e_{j,j+1}) = 0 \qquad 2)$$

$$\mathcal{K}(f_i, f_j) = \mathcal{K}(e_{i+1,i}, e_{j+1,j}) = 0 \qquad 3)$$

$$\mathcal{K}(e_i, f_j) = \mathcal{K}(e_{i,i+1}, e_{j+1,j}) = 2(k+1)\delta_{ij} \qquad 4)$$

$$\mathcal{K}(h_i, e_j) = \mathcal{K}(e_{i,i} - e_{i+1,i+1}, e_{j,j+1}) = 0 \qquad 5)$$

$$\mathcal{K}(h_i, f_j) = \mathcal{K}(e_{i,i} - e_{i+1,i+1}, e_{j+1,j}) = 0 \qquad 6)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(h_i,h_j) &= \mathcal{K}(e_{i,i}-e_{i+1,i+1},e_{j,j}-e_{j+1,j+1})\\ &= 2(k+1)(2\delta_{ij}-\delta_{i+1,j}-\delta_{i,j+1})\end{aligned} \qquad 7)$$

Definiendo la forma bilineal $\mathcal{K}'$ por $\mathcal{K} = 2(k+1)\mathcal{K}'$, de 7) obtenemos

$$\mathcal{K}'(h_i,h_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

se puede ver que esta matriz es no singular, es decir, tiene determinante distinto de cero y esto expresa la no degeneracidad de la forma de Killing sobre H. Denotando el determinante de la matriz $k \times k$ de $\mathcal{K}'(h_i,h_j)$ por $\mathcal{K}_k$ se puede demostrar que

$$\mathcal{K}_k = 2\mathcal{K}_{k-1} - \mathcal{K}_{k-2} \qquad 8)$$

Para $k \geqslant 2$, esta relación es satisfecha por $\mathcal{K}_k = k+1$. De la no degeneracidad de la forma de Killing sobre H, obtenemos un isomorfismo φ entre H y H^*. Para $h \in H$ definimos $\varphi(h)$ por

$$\varphi(h)(h') = \mathcal{K}(h,h') \qquad 9)$$

cuyo vector inicio $t_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha) \in H^*$ satisface

$$\varphi(t_\alpha)(h) = \alpha(h) = \mathcal{K}(t_\alpha,h) \qquad 10)$$

ahora determinamos el vector inicio asociado a la raíz $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Tomando $h = \operatorname{diag}(a_1,a_2,\ldots,a_{k+1})$, obtenemos usando 21) y 28) de la sección 4.3 página 79, conjuntamente con iv) de la página 42, lo siguiente

$$\varphi(t_{\alpha_i})(h) = \alpha_i(h) = \mathcal{K}(t_{\alpha_i},h) = 2(k+1)\operatorname{Tr}(t_{\alpha_i}h) \qquad 11)$$

con unos cálculos adecuados obtenemos

$$t_{\alpha_i} = \varphi^{-1}(\alpha_i) = \frac{1}{2(k+1)}h_i \qquad 12)$$

para $i = 1,2,\ldots,k$,con h_i un generador de Cartan-chevalley. Para el elemento diagonal de $\mathcal{K}(t_{\alpha_i},t_{\alpha_i})$ de la forma de Killing se encuentra, usando 7) y 12) que

$$\mathcal{K}(t_{\alpha_i},t_{\alpha_i}) = \frac{1}{k+1} \qquad 13)$$

para $i = 1,2,\ldots,k$ y esto es distinto de cero por la propiedad 5) de la proposici'on 4.1. Para el elemento h_i, vease propiedad 7) de la proposici'on 4.1, se obtiene usando los resultados de arriva que

$$h_{\alpha_i} = \frac{2}{\mathcal{K}(t_{\alpha_i},t_{\alpha_i})}t_{\alpha_i} = h_i \qquad 14)$$

para $i = 1,2,\ldots,k$. Acorde con IX) de la página 70 este elemento debe ser igual al conmutador $[e_{\alpha_i},f_{\alpha_i}]$ donde $e_{\alpha_i} = e_i$ vease 26) página 81 y $f_{\alpha_i} = f_i = e_{-\alpha_i}$. Ahora regresamos a la forma bilineal sobre H^* dada en 9) arriva. Restringiendo las raíces α_i

consideramos (α_i, α_j), usando la definición de la forma bilineal y 13) que todas las raíces tienen norma

$$(\alpha_i, \alpha_i) = \mathcal{K}(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_i}) = \frac{1}{k+1} \qquad 15)$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$ y para $i \neq j$ se tiene

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \mathcal{K}(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_j}) = \left(\frac{1}{2(k+1)}\right)^2 (h_i, h_j) \qquad 16)$$

de 7) y para $i \neq j$ vemos que el lado derecho de 16) es diferente de cero si y sólo si $i = j \pm 1$. Esto da

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| > 1 \\ -\frac{1}{2(k+1)} & \text{si } |i-j| = 1 \end{cases} \qquad 17)$$

De 15), 17) y la estructura del sistema de raíces de $\mathfrak{sl}(k+1, F)$ (vease sección 4.3), se sigue que todas las ra"ices tienen la misma norma. Se puede demostrar que la raíz $\alpha_{pq} = \alpha_p + \alpha_{p+1} + \ldots + \alpha_{q-1}$ asociada a el elemento e_{pq} satisface

$$(\alpha_{pq}, \alpha_{pq}) = \frac{1}{k+1} \qquad 18)$$

De 15) y 16) podemos obtener también un ángulo entre las raíces α_i y α_j. Definimos éste ángulo ϕ_{ij} por

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \| \alpha_i \| \| \alpha_j \| \cos \phi_{ij} \qquad 19)$$

Se encuentra desde 17) que el ángulo entre raíces adyacentes α_i y α_{i+1} es obtuso, es decir, con exactitud $\phi_{i,i+1} = \frac{2\pi}{3}$; si las raíces no son adyacentes entonces son ortogonales.
Terminamos ésta sección calculando los enteros de Cartan $\alpha_i(h_{\alpha_j})$, los cuales satisfacen $[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha)e_\beta$ y la fórmula C_5 de la página 81. De las relaciones 15) y 16) obtenemos

$$\alpha_i(h_{\alpha_i}) = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = 2 \qquad 20)$$

$$\alpha_i(h_{\alpha_j}) = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = 0 \qquad (|i-j| > 1) \qquad 21)$$

$$\alpha_i(h_{\alpha_i+1}) = -1 = \alpha_{i+1}(h_{\alpha_i}) \qquad 22)$$

Los enteros de Cartan son las entradas de la llamada *matriz de Cartan* (A_{ij}) la cual es definida por

$$A_{ij} = \alpha_j(h_{\alpha_i}) = 2\frac{(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \qquad 23)$$

De 7),15) y 16) encontramos que

$$A_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1} \qquad 24)$$

o equivalentemente

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Notemos que $A = \mathcal{K}'$.

Bibliografía

[1] Bäuerle, G. G. A.; De Kerf, E. A.;
Lie algebras;
Norht-Holland, 1990, Volume 1

[2] Humphreys, J. E.;
Introduction to Lie algebras and representation theory;
Springer, Berlin, 1972

[3] Jacobson, N.;
Lie algebras;
Dover, New york, 1979