

00384



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS  
ALGEBRAICAS EN CATEGORÍAS DE LISTONES.

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
P R E S E N T A :  
RAÚL A. PÉREZ MARTÍNEZ  
*Américo*

TUTOR: CARLOS PRIETO DE CASTRO<sup>1</sup>, IMUNAM, UNAM, MÉXICO.

<sup>1</sup>con apoyo del Proyecto CONACYT 43724 y del Proyecto PAPIIT-UNAM IN110902

MÉXICO, D. F.

NOVIEMBRE 2005.

0350478



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recesional.

NOMBRE: Raúl Américo Pérez Martínez

FECHA: 11/11/05

FIRMA: Raúl Pérez

A la memoria de mi hermano Oscar

## Agradecimientos

A mi tutor Carlos Prieto quiero agradecer el haberme introducido en esta fascinante área de las matemáticas y su optimismo en todo momento. Estoy muy agradecido con mis sinodales N. Andruskiewitsch, R. Bautista, B. Keller, F. Marmolejo, J.A. de la Peña y N. Reshetikhin por haber revisado cuidadosamente este trabajo y haber contribuido con sugerencias a enriquecerlo.

A mis padres Hugo y Aurora, y a mi hermana Aurora, agradezco su apoyo incondicional.

Durante la realización de este trabajo hubo momentos difíciles y placenteros. Agradezco a Sandra el haberlos compartido conmigo.

Muchos amigos tuvieron fe en mí y me brindaron su apoyo a lo largo de estos años. Quisiera agradecer muy especialmente a Ricardo Mansilla por sus atinados consejos, comentarios alentadores y su ayuda con la parte gráfica de la tesis. A César y a mi hermana Aurora les estoy muy agradecido por su invaluable ayuda con el Latex.

A Laura del posgrado en Matemáticas le agradezco su guía en la madeja de trámites.

Por último, quisiera agradecer a la DGEP por la beca que me otorgó parcialmente, así como al Instituto de Matemáticas de la UNAM por todas las facilidades brindadas.

A todos, una vez más, muchas gracias.

## 0.1 Prefacio

Las categorías *monoidales* y monoidales *simétricas* fueron introducidas en los trabajos de Bénabou ([1] y [2]) y Mac Lane ([15]), en donde también se introduce la *dualidad* –una categoría monoidal con dualidad es llamada categoría *pivotal*– y fueron muy estudiadas en relación con la geometría y la topología algebraica. Dold y Puppe ([4], 1980), motivados por aplicaciones topológicas, analizan los conceptos de *dualidad fuerte*, *traza* y *tránsfer* en categorías monoidales simétricas. Para definir el concepto de tránsfer, estos autores introducen el concepto de *coálgebra* en una categoría monoidal. Más adelante, alrededor del año 1990, durante la efervescencia provocada por lo que se ha dado en llamar “The Jones Revolution”, se generalizan las categorías monoidales simétricas y aparece en los trabajos de Joyal y Street ([11] y [12]) la noción de categorías *trenzadas* (braiding category). En [12] y [8], se trata también la dualidad y en [12] se introduce el concepto de *torsión* (twist) en una categoría trezada. Una categoría trezada con torsión compatible con la dualidad, es llamada categoría de *listones* (“ribbon category”, término acuñado por Turaev en [33], aunque originalmente aparece en [12] como “tortile tensor category”; el término “balanced tensor category” es usado por Joyal y Street en la literatura mencionada arriba y por Shum ([27]) y Yetter ([36]), para designar una categoría monoidal trezada con torsión, no necesariamente compatible con la dualidad). El “modelo” (a la palabra modelo se le puede dar un significado categórico preciso) para las categorías trezadas, resulta ser la *categoría de trenzas* (braid category), para las categorías monoidales con dualidad, la *categoría de marañas* (tangle category) y para las categorías de listones la *categoría de marañas enmarcadas* (framed tangle category). En los trabajos de Turaev ([32] y [31]) e independientemente de Freyd y Yetter ([8]), se dan presentaciones de la categoría de marañas orientadas y no orientadas  $\mathcal{MO}$  y  $\mathcal{M}$  salvo isotopía (o salvo isotopía regular) por generadores y relaciones, de manera similar a como se presenta un grupo. Esto les permite obtener condiciones para la existencia de funtores pivotaes de  $\mathcal{MO}$  y  $\mathcal{M}$  en otras categorías, simplemente definiendo el funtor en los generadores y analizando bajo qué condiciones las imágenes del funtor satisfacen las relaciones correspondientes ([32]), o bien teniendo en un principio otra categoría pivotal trezada y definiendo un funtor monoidal que conserve dualidad y trenzamiento ([8]). Un tal funtor se conoce con el nombre de *representación* de la categoría dominio. Con este método, se encuentran invariantes de nudos y enlaces orientados y no orientados –algunos

conocidos, como el polinomio de Jones-Conway; el corchete de Kauffman se puede obtener también de esta forma, ver [25]— observando que la imagen por el funtor de un endomorfismo del objeto unidad es un invariante del endomorfismo, que no es otra cosa que un enlace orientado o no orientado. Con la misma idea, se obtienen invariantes de enlaces enmarcados, considerando funtores pivotaes que conserven trenzamiento y torsión de la categoría de marañas enmarcadas en otra categoría de listones. De aquí la importancia de tener ejemplos de categorías de listones: ellas nos proveen de un método para encontrar invariantes de enlaces enmarcados, de marañas enmarcadas, y por lo tanto de 3-variedades. Esto nos lleva en particular a los *grupos cuánticos*, término popularizado por Drinfeld para designar a ciertas álgebras de Hopf que son deformaciones no triviales de las álgebras envolventes de álgebras semisimples de Lie. Por ejemplo, la  $q$ -deformación del álgebra envolvente de  $\mathfrak{sl}(2)$ ,  $U_q$ , contiene una *subálgebra de listones*  $\overline{U}_q$ , lo cual implica que la categoría de sus representaciones es de listones. Usando este hecho, Reshetikhin y Turaev, encuentran invariantes de 3-variedades ([23]).

Este trabajo de tesis está basado, en esencia, en las nociones de representación de categorías (pivotaes, trenzadas y de listones) en el sentido arriba mencionado, de tránsfer, que generalizamos a categorías de listones y de coálgebras (y por lo tanto de manera dual, de álgebras), consideradas como en [4] en el contexto de las categorías monoidales. A diferencia de [4] nosotros incluimos en la definición al axioma de coasociatividad (respectivamente de asociatividad). En [16], Mac Lane le llama *monoide* a un objeto en una categoría monoidal con estructura de álgebra asociativa.

En el Capítulo 1 definimos los conceptos de categoría monoidal, pivotal, trenzada y de listones. Presentamos también un breve repaso de los conceptos de álgebras, biálgebras, álgebras de Hopf, álgebras de Hopf cuasitriangular y álgebras de Hopf de listones, con un doble propósito. Por una parte como ejemplos de las categorías previamente definidas, en donde, a un álgebra  $A$ , le vamos añadiendo sucesivamente, estructura de coálgebra compatible, de álgebra de Hopf, de álgebra de Hopf con  $R$ -matriz universal, y de álgebra de Hopf con  $R$ -matriz universal y torsión, para obtener en la categoría de  $A$ -módulos, estructura monoidal, pivotal, trenzada y de listones respectivamente. Por otra parte porque estos conceptos serán utilizados en otros capítulos. Concluimos con una introducción al cálculo gráfico, técnica que es extensamente utilizada en los capítulos subsiguientes.

En el capítulo 2 consideramos otros ejemplos geométricos y algebraicos. En particular exponemos con bastante detalle un ejemplo que aparece en [8], la

categoría de los  $G$ -conjuntos cruzados (Ejemplo 2.2.3), que es monoidal trenzada aunque no pivotal. Nosotros a este ejemplo le añadimos una torsión. Para considerar una dualidad, se construye una categoría asociada, que en cierto sentido extiende linealmente el trenzamiento original. No es difícil ver que en ese mismo sentido se extiende la torsión que encontramos, de manera que la categoría resulta ser de listones. También ilustramos el método de las representaciones de las categorías geométricas que mencionamos arriba, en particular, el Teorema 2.3.4, que es el último que se menciona en el capítulo, es usado en los capítulos 3 y 5. Este teorema se debe a Turaev ([34]) que lo obtiene como una generalización de un resultado previo de [22] y constituye entre otras cosas, un método para extraer invariantes de enlaces enmarcados “coloreados”, una justificación rigurosa para el cálculo gráfico definido en el capítulo 1 y un método para extraer morfismos en la categoría en estudio a partir de gráficas de listones. Nosotros lo usaremos en este último sentido. El material del Capítulo 3 puede ser considerado como la parte central de este trabajo. Comenzamos definiendo el conocido concepto de traza en una categoría de listones (algunos autores le llaman “traza cuántica”) y enumeramos sus propiedades. A continuación, definimos los conceptos de álgebra y coálgebra en categorías monoidales, que como ya mencionamos, difieren de las definiciones dadas en [4], en que allí no exigen los axiomas de asociatividad y coasociatividad y nosotros sí lo hacemos. La razón es que en categorías de listones arbitrarias, aparecen objetos con estructuras de álgebra y coálgebra de manera natural (Proposición 3.2.5) y además, porque tenemos en mente la idea de las representaciones de categorías monoidales, de manera que la imagen por una tal representación de un álgebra de una categoría monoidal arbitraria en la categoría de espacios vectoriales, es un álgebra en el sentido usual (en todo el trabajo, álgebra siempre significará álgebra asociativa). En la exposición subsiguiente consideramos principalmente álgebras, puesto que los resultados para coálgebras son duales. Si la categoría es trenzada y  $A$  tiene estructura de álgebra, entonces con el trenzamiento le damos a  $A \otimes A$  estructura de álgebra (proposición 3.2.2). En particular, podemos considerar biálgebras en categorías trenzadas. Sin embargo, aunque como ya mencionamos, en una categoría de listones existen de manera natural objetos con estructura de álgebra y coálgebra, no aparecen de la misma manera biálgebras (el Capítulo 5 está dedicado a la construcción de una categoría monoidal trenzada a partir de una categoría de listones, en donde existen objetos con estructura de biálgebra). Discutimos también el hecho de que si tenemos una representación en la categoría de espacios vectoriales, y  $A$

es álgebra, el espacio imagen de  $A \otimes A$  tiene, en general, dos estructuras distintas de álgebra con la misma unidad (Nota 3.2.11).

Por otra parte, el tener en un objeto  $A$  estructura de álgebra y en otro objeto  $C$  estructura de coálgebra, nos permite definir el “producto convolución” en el conjunto de morfismos de  $C \rightarrow A$  (Definición 3.2.14). Esta operación, la usamos en el Capítulo 4, para dar una descripción geométrica alternativa de las álgebras de Temperley-Lieb. Definimos además las trazas parciales (Definición 3.3.1) en una categoría de listones y analizamos algunas de sus propiedades. Por ejemplo demostramos que la traza parcial del trenzamiento es la torsión en una categoría de listones (Proposición 3.3.3). Recíprocamente, bajo ciertas condiciones, demostramos que en una categoría autónoma (o sea, con dualidad izquierda y derecha) el trenzamiento determina una torsión (Proposición 3.3.4). Aplicando esto último a la categoría de representaciones de dimensión finita del álgebra de Sweedler, encontramos la torsión ya mencionada en [13] (Ejemplo 3.3.7). Aplicamos también este método a la categoría de  $\bar{U}_q$ -módulos de dimensión finita y encontramos una torsión que coincide con la reportada en [23] (Ejemplo 3.3.9). La siguiente sección está dedicada a extender el concepto de tránsfer para endomorfismos de una coálgebra  $C$  en una categoría de listones (Definición 3.3.10) y a discutir sus propiedades de “punto fijo” (Proposición 3.3.12) y su relación con la traza (Proposición 3.3.14). Además, el tránsfer se relaciona, por adjunción, con la traza parcial cuando  $C$  tiene cierta estructura de coálgebra canónica (Proposición 3.3.15). Concluimos el capítulo proponiendo generalizaciones del tránsfer para endomorfismos de comódulos sobre un álgebra de Hopf de listones, de manera que se tenga una relación con la traza análoga a la del tránsfer (Definición 3.3.18 y Proposición 3.3.19). Para lograr una generalización del tránsfer en la que se tenga además una propiedad de punto fijo, consideramos  $H$ -módulos-coálgebras, si  $H$  es un álgebra de Hopf de listones (Definición 3.3.21 y Proposición 3.3.22). Pensamos que un tránsfer generalizado, con propiedad de punto fijo, puede relacionarse con las distintas cohomologías de bimódulos sobre un álgebra de Hopf, como las que aparecen por ejemplo en [9] o en [30]. Los resultados expuestos en este capítulo y la investigación en curso, están siendo reunidos en [19] para su posible publicación.

En el capítulo 4 introducimos brevemente las álgebras de Temperley-Lieb y temas asociados como el corchete de Kauffman, aunque nuestro objetivo es dar una definición geométrica alternativa de estas álgebras, como ya mencionamos (Teorema 4.2.2 de la Sección 4.2). Esta definición alternativa tiene

la ventaja de que de manera muy sencilla se observa que en ciertos rangos, un álgebra de Temperley-Lieb está contenida como ideal izquierdo y derecho de álgebras de ordenes superiores (Corolarios 4.2.2, 4.2.4 y Proposición 4.2.3). De aquí encontramos cadenas hereditarias de ideales bilaterales (Corolario 4.2.5 y Teorema 4.2.8), de manera distinta a como se encuentran en [35]. Pensamos que esta definición se puede considerar en el contexto de las álgebras de Temperley-Lieb ciclotómicas. Los resultados expuestos en este capítulo y la investigación en curso, están siendo reunidos en [18] para su posible publicación. Por último, en el capítulo 5, a partir de una Ab-categoría de listones pequeña  $\mathcal{C}$  construimos una  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  en la que existen objetos con estructura de biálgebra (Teoremas 5.1.3 y 5.2.1). La construcción se hace de manera que se extienden las representaciones de la categoría original. La imagen de estas biálgebras bajo una representación no es necesariamente una biálgebra en el sentido usual. Sin embargo, usando una representación asociada que definimos en el Capítulo 3, podemos obtener una biálgebra en el sentido usual. Así, coincidimos parcialmente con un teorema de Yetter ([36]). Además vinculamos la construcción  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  con el concepto de categoría modular (Proposiciones 5.4.5 y 5.4.7 y Lema 5.4.6).

# Contenido

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 0.1      | Prefacio . . . . .                                       | i         |
| <b>1</b> | <b>Preliminares</b>                                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | Categorías monoidales . . . . .                          | 1         |
| 1.2      | Trenzamientos y torsiones . . . . .                      | 6         |
| 1.3      | Dualidad . . . . .                                       | 9         |
| 1.4      | Biálgebras (co)cuasitriangulares y de listones . . . . . | 11        |
| 1.4.1    | Álgebras, coálgebras y biálgebras . . . . .              | 11        |
| 1.4.2    | Biálgebras cuasitriangulares . . . . .                   | 17        |
| 1.4.3    | Biálgebras cocuasitriangulares . . . . .                 | 18        |
| 1.4.4    | Algebras de listones . . . . .                           | 19        |
| 1.5      | Cálculo gráfico. . . . .                                 | 21        |
| <b>2</b> | <b>Ejemplos y funtores monoidales</b>                    | <b>34</b> |
| 2.1      | Ejemplos geométricos . . . . .                           | 34        |
| 2.1.1    | Elementos de la teoría de nudos . . . . .                | 34        |
| 2.1.2    | Categorías de marañas . . . . .                          | 37        |
| 2.2      | Ejemplos algebraicos . . . . .                           | 43        |
| 2.3      | Funtores monoidales . . . . .                            | 50        |
| <b>3</b> | <b>Trazas parciales y tránsfer</b>                       | <b>54</b> |
| 3.1      | Traza y dimensión . . . . .                              | 54        |
| 3.2      | Algebras en categorías monoidales. . . . .               | 58        |
| 3.3      | Trazas parciales y tránsfer. . . . .                     | 69        |
| 3.3.1    | Trazas parciales . . . . .                               | 69        |
| 3.3.2    | Tránsfer . . . . .                                       | 75        |
| 3.3.3    | Generalizaciones del tránsfer . . . . .                  | 80        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Algebras de Temperley-Lieb</b>                                  | <b>84</b>  |
| 4.1      | Introducción . . . . .   | 84         |
| 4.1.1    | El módulo de madejas $E_{k,l}$ . . . . .                           | 84         |
| 4.1.2    | El corchete de Kauffman . . . . .                                  | 86         |
| 4.1.3    | La categoría de madejas $\mathfrak{R}$ . . . . .                   | 88         |
| 4.1.4    | Definición del álgebra de Temperley-Lieb . . . . .                 | 89         |
| 4.2      | Una definición alternativa . . . . .                               | 91         |
| <b>5</b> | <b>Biálgebras en <math>\mathcal{C}^{S_0}</math></b>                | <b>101</b> |
| 5.1      | La categoría libre $\mathcal{C}^{S_0}$ . . . . .                   | 101        |
| 5.1.1    | Extensión del trenzamiento . . . . .                               | 111        |
| 5.2      | Biálgebras . . . . .   | 115        |
| 5.3      | Representaciones de $\mathcal{C}$ . . . . .                        | 124        |
| 5.4      | Relación de $\mathcal{C}^{S_0}$ con categorías modulares . . . . . | 126        |

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Categorías monoidales

La definición de categoría monoidal axiomatiza las propiedades del producto tensorial de módulos sobre un anillo conmutativo. Recordemos brevemente los conceptos de categoría y de categoría monoidal.

Una categoría  $\mathbf{V}$  consiste en una clase de objetos  $\text{Ob}(\mathbf{V})$ , una clase de morfismos  $\text{Hom}(\mathbf{V})$  y una ley de composición que satisface los siguientes axiomas. Cada morfismo  $f$  tiene asociados dos objetos de  $\mathbf{V}$  denotados por  $s(f)$  y  $t(f)$ . Es común usar la notación  $f : s(f) \rightarrow t(f)$ . Para cualquier par de objetos  $V, W$  de  $\mathbf{V}$ , los morfismos  $V \rightarrow W$  forman un conjunto denotado por  $\text{Hom}(V, W)$ . La composición  $f \circ g$  de dos morfismos está definida siempre que  $t(g) = s(f)$  y es tal que  $s(f \circ g) = s(g)$  y  $t(f \circ g) = t(f)$ . La composición es asociativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad (1.1)$$

siempre que ambos miembros de la igualdad estén definidos. Por último, cada objeto  $V$ , tiene asociado un morfismo  $\text{id}_V : V \rightarrow V$  tal que

$$f \circ \text{id}_V = f, \quad \text{id}_V \circ g = g \quad (1.2)$$

para cualquier par de morfismos  $f : V \rightarrow W, g : W \rightarrow V$ . Un morfismo  $f : V \rightarrow W$  se dice que es un isomorfismo, si existe un morfismo  $g : W \rightarrow V$  tal que  $f \circ g = \text{id}_W$  y  $g \circ f = \text{id}_V$ .

Sean  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  dos categorías. Un *functor covariante*,  $\mathcal{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ , consiste en dos aplicaciones  $\mathcal{F} : \text{Ob}(\mathbf{V}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{W})$  y  $\mathcal{F} : \text{Hom}(\mathbf{V}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{W})$  tales que

- (a) para cualquier objeto  $V \in \text{Ob}(\mathbf{V})$ , tenemos  $\mathcal{F}(\text{id}_V) = \text{id}_{\mathcal{F}(V)}$   
 (b) para cualquier morfismo  $f \in \text{Hom}(\mathbf{V})$ , tenemos

$$s(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(s(f)) \quad \text{y} \quad t(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(t(f))$$

- (c) si  $f, g$  son morfismos que se pueden componer en  $\mathbf{V}$ , tenemos

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

Sean  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  funtores de la categoría  $\mathbf{V}$  a la categoría  $\mathbf{W}$ . Una *transformación natural*  $\kappa$  de  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$ , denotada por  $\kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , es una familia de morfismos  $\kappa(V) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  indizada por los objetos de  $\mathbf{V}$  y tal que para cualquier morfismo  $f : V \rightarrow V'$  en  $\mathbf{V}$ , el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\kappa(V)} & \mathcal{G}(V) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(V') & \xrightarrow{\kappa(V')} & \mathcal{G}(V') \end{array}$$

Si además  $\kappa(V)$  es un isomorfismo para cada  $V$ , decimos que  $\kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  es un *isomorfismo natural*. Un *producto tensorial* en una categoría  $\mathbf{V}$  es un funtor covariante  $\otimes : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  que asocia a cada par de objetos  $V, W$  de  $\mathbf{V}$  un objeto  $V \otimes W$  de  $\mathbf{V}$  y a cada par de morfismos  $f : V \rightarrow V', g : W \rightarrow W'$  un morfismo  $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ . Que  $\otimes$  sea un funtor covariante significa que se cumplen las siguientes identidades

$$(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = (f \circ f') \otimes (g \circ g') \quad (1.3)$$

$$\text{id}_V \otimes \text{id}_W = \text{id}_{V \otimes W}. \quad (1.4)$$

Una *categoría monoidal estricta* (o *tensorial estricta*) es una categoría  $\mathbf{V}$  equipada con un producto tensorial y un objeto  $I = I_V$  llamado el *objeto unidad*, que es tal que se cumplen las siguientes condiciones. Para cualquier objeto  $V$  de  $\mathbf{V}$ , se cumple que

$$V \otimes I = V, \quad I \otimes V = V \quad (1.5)$$

y para cualesquiera  $U, V$  y  $W$  objetos de  $\mathbf{V}$ , se tiene

$$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W). \quad (1.6)$$

Para cualquier morfismo  $f$  en  $\mathbf{V}$ ,

$$f \otimes \text{id}_I = \text{id}_I \otimes f = f \quad (1.7)$$

y para cualesquiera  $f, g$  y  $h$  morfismos en  $\mathbf{V}$ ,

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h). \quad (1.8)$$

Una categoría monoidal (no necesariamente estricta) se define de manera similar, solo que en lugar de las igualdades en (1.5), (1.6) se supone que los lados derecho e izquierdo de esas igualdades están relacionados por isomorfismos. Más precisamente, se exige la existencia de isomorfismos naturales  $a : \otimes(\otimes \times \text{id}) \rightarrow \otimes(\text{id} \times \otimes)$  llamado *asociatividad*,  $l : \otimes(I \times \text{id}) \rightarrow \text{id}$  llamado *unidad izquierda* y  $r : \otimes(\text{id} \times I) \rightarrow \text{id}$  llamado *unidad derecha*. Que  $a$  sea natural significa que para cualesquiera objetos  $U, V, W$  en  $\mathbf{V}$ , existe un isomorfismo  $a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$  tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{a_{U,V,W}} & U \otimes (V \otimes W) \\ (f \otimes g) \otimes h \downarrow & & \downarrow f \otimes (g \otimes h) \\ (U' \otimes V') \otimes W' & \xrightarrow{a_{U',V',W'}} & U' \otimes (V' \otimes W') \end{array} \quad (1.9)$$

conmute, siempre que  $f, g, h$  sean morfismos en la categoría. El morfismo asociatividad  $a$  debe satisfacer el *Axioma Pentagonal*, o sea el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X & \xleftarrow{a_{U,V,W} \otimes \text{id}_X} & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \\ \downarrow a_{U,V \otimes W,X} & & \downarrow a_{U \otimes V,W,X} \\ U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes a_{V,W,X}} & U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \end{array} \quad (1.10)$$

debe conmutar para objetos  $U, V, W, X$  cualesquiera de  $\mathbf{V}$ . La naturalidad de  $l$  significa que para cualquier objeto  $V$  en  $\mathbf{V}$  se tiene un isomorfismo  $l_V : I \otimes V \rightarrow V$  de manera que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} I \otimes V & \xrightarrow{l_V} & V \\ \text{id}_I \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ I \otimes V' & \xrightarrow{l_{V'}} & V' \end{array} \quad (1.11)$$

conmuta para cualquier morfismo  $f$  en  $\mathbf{V}$ . La conmutatividad de un cuadrado análogo al anterior, con la variación obvia, refleja la naturalidad de  $\tau$ . Los morfismos  $a$ ,  $l$  y  $r$  deben satisfacer el *Axioma Triangular*, lo cual significa que el siguiente triángulo debe conmutar

$$\begin{array}{ccc} (V \otimes I) \otimes W & \xrightarrow{a_{V,I,W}} & V \otimes (I \otimes W) \\ & \searrow r_V \otimes \text{id}_W & \swarrow \text{id}_V \otimes l_W \\ & V \otimes W & \end{array} \quad (1.12)$$

Por ejemplo, la categoría de módulos sobre un anillo conmutativo con el producto tensorial usual es monoidal con objeto unidad el anillo base, sin embargo no es monoidal estricta, puesto que los módulos  $(U \otimes V) \otimes W$  y  $U \otimes (V \otimes W)$  son naturalmente isomorfos pero no iguales. En este caso los isomorfismos naturales  $a$ ,  $l$  y  $r$  son los usuales.

**Definición 1.1.1.** Si  $\mathbf{V}=(\mathbf{V}, \otimes, I, a, l, r)$  y  $\mathbf{V}'=(\mathbf{V}', \otimes', I', a', l', r')$  son dos categorías monoidales, un *functor monoidal estricto* (o *tensorial estricto*) es un functor  $\mathcal{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ , tal que  $\mathcal{F}(I) = I'$  y  $\mathcal{F}(U \otimes V) = \mathcal{F}(U) \otimes' \mathcal{F}(V)$  para todo par de objetos  $U, V$  en  $\mathbf{V}$ . En general un functor monoidal (no necesariamente estricto) es una terna  $(\mathcal{F}, \varphi_0, \varphi_2)$  donde  $\mathcal{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  es un functor,  $\varphi_0$  es un isomorfismo entre  $I'$  y  $\mathcal{F}(I)$ , y

$$\varphi_2(U, V) : \mathcal{F}(U) \otimes' \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \otimes V)$$

es una familia de isomorfismos naturales con índice la familia de todos los pares  $(U, V)$  de objetos de  $\mathbf{V}$  de manera que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}(U) \otimes' \mathcal{F}(V)) \otimes' \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{a'_{\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(V), \mathcal{F}(W)}}} & \mathcal{F}(U) \otimes' (\mathcal{F}(V) \otimes' \mathcal{F}(W)) \\ \varphi_2(U, V) \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(W)} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \otimes \varphi_2(V, W) \\ \mathcal{F}(U \otimes V) \otimes' \mathcal{F}(W) & & \mathcal{F}(U) \otimes' \mathcal{F}(V \otimes W) \\ \varphi_2(U \otimes V, W) \downarrow & & \downarrow \varphi_2(U, V \otimes W) \\ \mathcal{F}((U \otimes V) \otimes W) & \xrightarrow{\mathcal{F}(a_{U, V, W})} & \mathcal{F}(U \otimes (V \otimes W)) \end{array} \quad (1.13)$$

$$\begin{array}{ccc} I' \otimes \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{l'_{\mathcal{F}(U)}} & \mathcal{F}(U) \\ \varphi_0 \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}(l_U) \\ \mathcal{F}(I) \otimes \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_2(I, U)} & \mathcal{F}(I \otimes U) \end{array} \quad (1.14)$$

y

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) \otimes I' & \xrightarrow{r'_{\mathcal{F}(U)}} & \mathcal{F}(U) \\
 \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \otimes \varphi_0 \downarrow & & \uparrow \mathcal{F}(r_U) \\
 \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{F}(I) & \xrightarrow{\varphi_2(U,I)} & \mathcal{F}(U \otimes I)
 \end{array} \quad (1.15)$$

conmutan. Es claro que si los isomorfismos  $\varphi_0$  y  $\varphi_2$  son identidades en  $\mathbf{V}'$ , entonces el funtor  $\mathcal{F}$  es estricto.

Una *transformación natural monoidal* (o *transformación natural tensorial*)  $\eta : (\mathcal{F}, \varphi, \varphi_2) \rightarrow (\mathcal{F}', \varphi'_0, \varphi'_2)$  entre funtores monoidales de  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{V}'$ , es una transformación natural  $\eta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  tal que los siguientes diagramas conmutan para cualquier par de objetos  $(U, V)$  de  $\mathbf{V}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \mathcal{F}(I) & \\
 \varphi_0 \nearrow & \downarrow \eta(I) & \\
 I & & \\
 \varphi'_0 \searrow & & \\
 & \mathcal{F}(I') &
 \end{array} & \text{y} & \begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_2(U,V)} & \mathcal{F}(U \otimes V) \\
 \eta(U) \otimes \eta(V) \downarrow & & \downarrow \eta(U \otimes V) \\
 \mathcal{F}'(U) \otimes \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{\varphi'_2(U,V)} & \mathcal{F}'(U \otimes V)
 \end{array}
 \end{array} \quad (1.16)$$

Un *isomorfismo natural monoidal* es una transformación natural monoidal, que es además un isomorfismo natural. Por último, una equivalencia entre categorías monoidales es un funtor monoidal  $\mathcal{F} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$ , tal que existe un funtor monoidal  $\mathcal{F}' : \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{V}$  e isomorfismos naturales monoidales,  $\eta : \text{id}_{\mathbf{V}'} \rightarrow \mathcal{F}\mathcal{F}'$  y  $\theta : \mathcal{F}'\mathcal{F} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{V}}$ . En este último caso diremos que las categorías monoidales son *monoidalmente equivalentes*.

Resulta que cualquier categoría monoidal es equivalente a una que es monoidal estricta. Aunque no daremos la demostración (remitimos al lector a [13], por ejemplo) veremos rápidamente como se construye una categoría monoidal estricta  $\mathbf{V}^{est}$  a partir de un categoría monoidal  $\mathbf{V}$ .

Sea  $\mathcal{S}$  la clase de todas las sucesiones finitas  $S = (V_1, \dots, V_k)$  de objetos de  $\mathbf{V}$  incluyendo a la sucesión vacía  $\emptyset$ . Si  $S = (V_1, \dots, V_k)$  y  $S' = (V_{k+1}, \dots, V_{k+n})$ , denotamos por  $S \star S'$  a la sucesión

$$S \star S' = (V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_{k+n})$$

Convenimos en que  $S \star \emptyset = S = \emptyset \star S$ . A cualquier sucesión  $S$  de  $\mathcal{S}$ , le asignamos el objeto  $\mathcal{F}(S)$  de  $\mathbf{V}$ , definido inductivamente por

$$\mathcal{F}(\emptyset) = I, \quad \mathcal{F}((V)) = V, \quad \mathcal{F}(S \star (V)) = \mathcal{F}(S) \otimes V$$

En otras palabras,

$$\mathcal{F}((V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V_k)) = ((\dots(V_1 \otimes V_2) \otimes \dots) \otimes V_{k-1}) \otimes V_k$$

donde todos los paréntesis abiertos, están a la izquierda de  $V_1$ .

La categoría  $\mathbf{V}^{est.}$  se define tomando como sus objetos a los elementos de  $S$  y sus morfismos están dados por

$$\text{Hom}_{\mathbf{V}^{est.}}(S, S') = \text{Hom}_{\mathbf{V}}(\mathcal{F}(S), \mathcal{F}(S'))$$

La estructura monoidal de  $\mathbf{V}^{est.}$  se define por  $S \otimes S' = S \star S'$ . No veremos la definición del producto tensorial de morfismos pues requiere de un poco más de elaboración, ver por ejemplo [13] pero resulta entonces que la categoría  $\mathbf{V}^{est.}$  tiene la siguiente propiedad.

**Proposición 1.1.2.** *La categoría  $\mathbf{V}^{est.}$  es monoidal estricta y monoidalmente equivalente a  $\mathbf{V}$ .*

Esta proposición implica el teorema de coherencia de Mac Lane [16] que establece que en una categoría monoidal, cualquier diagrama construido a partir de  $a, l, r$  y  $\text{id}$ , realizando composiciones y productos tensoriales, conmuta. En la mayor parte de este trabajo de tesis, consideraremos solamente categoría monoidales estrictas. No obstante, en el Capítulo 5, trataremos con una categoría que no es monoidal estricta. Es por eso que a pesar de tener una proposición como la anterior, hemos incluido la definición de categoría monoidal en general.

*En lo que resta de este Capítulo y los siguientes hasta el Capítulo 4, trataremos solamente con categorías monoidales estrictas.*

## 1.2 Trenzamientos y torsiones

El producto tensorial de módulos sobre un anillo conmutativo es conmutativo en el sentido de que existe un isomorfismo natural  $P_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  llamado *trasposición* que transforma cualquier vector  $v \otimes w$  en  $w \otimes v$  y se extiende a  $V \otimes W$  por linealidad. El sistema de trasposiciones es compatible con el producto tensorial, es decir, para cualesquiera módulos  $U, V$  y  $W$  los

diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{P_{U,V} \otimes \text{id}_W} & V \otimes U \otimes W \\
 \searrow P_{U,V} \otimes \text{id}_W & & \swarrow \text{id}_V \otimes P_{U,W} \\
 & & V \otimes W \otimes U
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes P_{V,W}} & U \otimes W \otimes V \\
 \searrow P_{U,V} \otimes \text{id}_W & & \swarrow P_{U,W} \otimes \text{id}_V \\
 & & W \otimes U \otimes V
 \end{array}$$

conmutan. El sistema de trasposiciones también es compatible en el sentido de que  $P_{W,V}P_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}$ . Axiomatizando estas propiedades llegamos a los conceptos de trenzamiento y torsión en una categoría monoidal.

**Definición 1.2.1.** Un *trenzamiento* en una categoría monoidal (estricta) es una familia de isomorfismos naturales

$$c = \{c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V\}, \quad (1.17)$$

donde  $V, W$  varían en el conjunto de objetos de  $\mathbf{V}$ , tales que para cualquier trío de objetos  $U, V$  y  $W$ , se satisfacen las siguientes identidades:

$$c_{U,V} \otimes \text{id}_W = (\text{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W), \quad (1.18)$$

$$c_{U \otimes V, W} = (c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}). \quad (1.19)$$

O sea, los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U,V} \otimes \text{id}_W} & V \otimes U \otimes W \\
 \searrow c_{U,V} \otimes \text{id}_W & & \swarrow \text{id}_V \otimes c_{U,W} \\
 & & V \otimes W \otimes U
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{\text{id}_U \otimes c_{V,W}} & U \otimes W \otimes V \\
 \searrow c_{U,V} \otimes \text{id}_W & & \swarrow c_{U,W} \otimes \text{id}_V \\
 & & W \otimes U \otimes V
 \end{array}$$

conmutan. Una categoría con un trenzamiento diremos que es una *categoría trenzada*.

La naturalidad de los isomorfismos (1.17), significa que para cualquier par de morfismos  $f : V \rightarrow V'$  y  $g : W \rightarrow W'$ , tenemos

$$(g \otimes f)c_{V,W} = c_{V',W'}(f \otimes g). \quad (1.20)$$

O sea, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{f \otimes g} & V' \otimes W' \\ c_{V,W} \downarrow & & \downarrow c_{V',W'} \\ W \otimes V & \xrightarrow{g \otimes f} & W' \otimes V' \end{array}$$

conmuta. Aplicando (1.7), (1.18) y (1.19) con  $V = W = I$  y  $U = V = I$  y el hecho de que los morfismos  $c_{V,W}$  son isomorfismos, obtenemos

$$c_{V,I} = c_{I,V} = \text{id}_V \quad (1.21)$$

para cualquier morfismo  $V$  de  $\mathbf{V}$ . Más adelante, usando el cálculo gráfico, vamos a demostrar de forma muy sencilla la siguiente identidad, conocida como identidad de Yang-Baxter (ver la figura 1.20 de 1.5).

$$(\text{id}_W \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_U \otimes c_{V,W}) = (c_{V,W} \otimes \text{id}_U)(\text{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes \text{id}_W). \quad (1.22)$$

En el caso en que  $c_{V,W}$  sea involutiva como la trasposición, esto es, cuando tengamos que  $c_{W,V}c_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}$ , diremos que la categoría  $\mathbf{V}$  es *simétrica*. Axiomatizar la involutividad de la trasposición en un contexto más general nos lleva al concepto de torsión.

**Definición 1.2.2.** Una *torsión* en una **categoría** monoidal  $\mathbf{V}$  con trenzamiento  $c$ , se define como una familia de **isomorfismos** naturales

$$\theta = \{\theta_V : V \rightarrow V\}, \quad (1.23)$$

donde  $V$  varía en el conjunto de objetos de  $\mathbf{V}$ , tales que para cualquier par

de objetos  $V, W$  de  $\mathbf{V}$ , tenemos

$$\theta_{V \otimes W} = c_{W,V} c_{V,W} (\theta_V \otimes \theta_W) \quad (1.24)$$

Es decir el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{\theta_{V \otimes W}} & V \otimes W \\ \theta_V \otimes \theta_W \downarrow & & \uparrow c_{W,V} \\ V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \end{array}$$

conmuta.

De aquí que  $c_{W,V} c_{V,W} = \theta_{V \otimes W} (\theta_V^{-1} \otimes \theta_W^{-1})$ . La naturalidad de  $\theta$  significa que para cualquier morfismo  $f : U \rightarrow V$  en  $\mathbf{V}$ , se cumple que  $\theta_V f = f \theta_U$ . Usando la naturalidad del trenzamiento, podemos escribir a (1.24) como sigue

$$\theta_{V \otimes W} = c_{W,V} (\theta_W \otimes \theta_V) c_{V,W} = (\theta_V \otimes \theta_W) c_{W,V} c_{V,W}. \quad (1.25)$$

En efecto, de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{\theta_V \otimes \theta_W} & V \otimes W \\ c_{V,W} \downarrow & & \downarrow c_{V,W} \\ W \otimes V & \xrightarrow{\theta_W \otimes \theta_V} & W \otimes V \end{array}$$

se tiene que  $c_{V,W} (\theta_V \otimes \theta_W) = (\theta_W \otimes \theta_V) c_{V,W}$  lo que demuestra la primera igualdad; la segunda se obtiene de ésta intercambiando en la última relación  $V$  por  $W$ .

Además  $\theta_I = \text{id}_I$ . En efecto de (1.7), (1.3), (1.21), (1.24) obtenemos

$$(\theta_I)^2 = (\theta_I \otimes \text{id}_I)(\text{id}_I \otimes \theta_I) = \theta_I \otimes \theta_I = \theta_I.$$

La igualdad se deduce entonces de que  $\theta$  es isomorfismo.

## 1.3 Dualidad

Sea  $\mathbf{V}$  una categoría monoidal estricta. Supongamos que para cada objeto  $V$  de  $\mathbf{V}$ , hay asociado un objeto  $V^*$  y dos morfismos

$$b_V : I \longrightarrow V \otimes V^*, \quad d_V : V^* \otimes V \longrightarrow I. \quad (1.26)$$

Diremos que la asignación  $V \longmapsto (V^*, b_V, d_V)$  es una *dualidad izquierda* en  $\mathbf{V}$  si se cumplen las siguientes identidades

$$(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V. \quad (1.27)$$

$$(d_V \otimes id_{V \cdot})(id_{V \cdot} \otimes b_V) = id_{V \cdot}. \quad (1.28)$$

De la misma manera existe el concepto de dualidad derecha. Supongamos que para cada objeto  $V$ , hay asociado un objeto  ${}^*V$  y dos morfismos

$$\bar{b}_V : I \longrightarrow {}^*V \otimes V, \quad \bar{d}_V : V \otimes {}^*V \longrightarrow I. \quad (1.29)$$

Diremos que la asignación  $V \longmapsto ({}^*V, \bar{b}_V, \bar{d}_V)$  es una *dualidad derecha* en  $\mathbf{V}$  si se cumplen las siguientes identidades

$$(\bar{d}_V \otimes id_V)(id_V \otimes \bar{b}_V) = id_V. \quad (1.30)$$

$$(id_{V \cdot} \otimes \bar{d}_V)(\bar{b}_V \otimes id_{V \cdot}) = id_{V \cdot}. \quad (1.31)$$

En general, la dualidad izquierda y la dualidad derecha son diferentes, a menos que se impongan condiciones extras a la categoría  $\mathbf{V}$ . Sin embargo, puede ocurrir que la categoría sea *autónoma*, o sea, que tenga a la vez dualidad izquierda y derecha. En ese caso, hay isomorfismos

$${}^*(V^*) \cong V \cong ({}^*V)^* \quad (1.32)$$

Para la demostración de este hecho, ver [12]. En lo que resta de éste capítulo, dualidad significará dualidad izquierda.

**Definición 1.3.1.** Una categoría monoidal con dualidad es llamada *categoría rígida*.

Diremos que la dualidad es compatible con la torsión  $\theta$  y el trenzamiento  $c$  si se cumple además que

$$(\theta_V \otimes id_{V \cdot})b_V = (id_V \otimes \theta_{V \cdot})b_V. \quad (1.33)$$

En general en la definición de dualidad no se exige que  $(V^*)^* = V$ , pero la compatibilidad de la dualidad implicará como veremos más adelante que  $V^{**} = (V^*)^*$  es canónicamente isomorfo a  $V$ .

**Definición 1.3.2.** Una categoría monoidal  $\mathbf{V}$  con trenzamiento  $c$ , torsión  $\theta$  y dualidad compatible  $(*, b, d)$ , es llamada *categoría de listones*. Una categoría de listones es estricta, si la categoría monoidal base lo es.

## 1.4 Biálgebras (co)cuasitriangulares y de listones

En esta sección estableceremos, sin demostración, algunos preliminares algebraicos que serán usados en lo que sigue. En particular vamos a presentar los primeros ejemplos de categorías monoidales, rígidas, trenzadas y de listones. Remitimos en cada caso al lector a una fuente en donde se puede consultar el material expuesto.

### 1.4.1 Álgebras, coálgebras y biálgebras

Daremos a continuación un rápido repaso a los conceptos de álgebra, coálgebra, biálgebra y álgebra de Hopf. La idea de la exposición es ir añadiendo estructura a un álgebra  $A$ , para que la categoría de sus representaciones sea sucesivamente monoidal, rígida, trenzada y de listones. Un *álgebra*  $(A, \mu, \eta)$  es un espacio vectorial sobre un campo  $k$ , con dos aplicaciones lineales,  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  llamada *producto* y  $\eta : k \rightarrow A$  llamada *unidad*, que satisfacen las relaciones (ver 3.2.1 para los correspondientes diagramas conmutativos)

$$\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu), \quad \mu(\eta \otimes \text{id}_A) = \text{id}_A = \mu(\text{id}_A \otimes \eta) \quad (1.34)$$

Escribimos  $\mu(a \otimes b) = ab$ . Las relaciones anteriores significan que el producto es asociativo,  $a(bc) = (ab)c$ , y que tiene elemento neutro,  $a1 = a = 1a$ .

Sean  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  y  $\varepsilon : A \rightarrow k$ , dos aplicaciones lineales. Si requerimos que  $A^*$  sea un álgebra con producto y unidad dados por las aplicaciones

$$A^* \otimes A^* \xrightarrow{\phi} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\Delta^*} A^*, \quad k = k^* \xrightarrow{\varepsilon^*} A^*$$

donde  $\phi : A^* \otimes A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$  es la aplicación canónica —que es isomorfismo si  $A$  es de dimensión finita— no es difícil demostrar que se le debe exigir a  $\Delta$  y a  $\varepsilon$ , que cumplan las siguientes condiciones duales de (1.34)

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta)\Delta, \quad (\varepsilon \otimes \text{id}_A)\Delta = \text{id}_A = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta \quad (1.35)$$

Si los morfismos  $\Delta$  y  $\varepsilon$  satisfacen las condiciones anteriores, diremos que  $(A, \Delta, \varepsilon)$  es una *coálgebra*. En general, una *coálgebra*  $(C, \Delta, \varepsilon)$  es un espacio vectorial  $C$  sobre  $k$ , con aplicaciones lineales  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y  $\varepsilon : C \rightarrow k$  que satisfacen (1.35), sustituyendo  $A$  por  $C$ .

Un *A-módulo izquierdo* o simplemente *A-módulo*, es un espacio vectorial  $V$  con una aplicación lineal  $\mu_V : A \otimes V \rightarrow V$ , tal que  $\mu_V(\mu \otimes \text{id}_V) = \mu_V(\text{id}_A \otimes \mu_V)$  y  $\mu_V(\eta \otimes \text{id}_V) = \text{id}_V$ . Si escribimos  $\mu_V(a \otimes v) = a \cdot v$ , entonces las relaciones anteriores se expresan como sigue:

$$a \cdot (a' \cdot v) = (aa') \cdot v \quad \text{y} \quad 1 \cdot v = v.$$

La categoría *A-Mod* de *A-módulos* (o categoría de representaciones de  $A$ ) tiene como objetos a los *A-módulos* y como morfismos a las aplicaciones *A-lineales*, es decir, aplicaciones tales que  $f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$ .

Supongamos que la categoría *A-Mod* es monoidal con el producto tensorial usual de espacios vectoriales (e isomorfismos naturales  $\alpha, l$  y  $r$  usuales) y con objeto identidad el campo base  $k$ , —lo cual significa que tenemos una acción de  $A$  en  $k$  y para cualesquiera *A-módulos*  $V$  y  $W$ , una acción de  $A$  en  $V \otimes W$  — pero vamos a exigir que la estructura de categoría monoidal en *A-Mod* satisfaga las dos condiciones siguientes:

1. La acción de  $A$  en  $A \otimes A$  ( $A$  es un *A-módulo* con la acción traslación izquierda,  $a \cdot a' = aa'$ ) es compatible con el producto en  $A \otimes A$ , esto es, se tiene que  $a \cdot (b \otimes c)(b' \otimes c') = (a \cdot (b \otimes c))(b' \otimes c')$ , para  $a, b, b', c, c' \in A$ .
2. La acción de  $A$  en  $k$  es compatible con la acción de  $k$  en  $A$ , o sea, se tiene que  $a \cdot \lambda = \lambda a \cdot 1_k$ , para  $a \in A$  y  $\lambda, 1_k \in k$ .

Entonces, si definimos la aplicación lineal  $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$  por  $\Delta(a) = a \cdot (1 \otimes 1)$ , resulta que  $\Delta$  es morfismo de álgebras. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \Delta(aa') &= (aa') \cdot (1 \otimes 1) \\
 &= a \cdot (a' \cdot (1 \otimes 1)) \\
 &= a \cdot (\Delta(a')) \\
 &= a \cdot ((1 \otimes 1)\Delta(a')) \\
 &= (a \cdot (1 \otimes 1))\Delta(a') \\
 &= \Delta(a)\Delta(a')
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado la compatibilidad 1.

Si definimos la aplicación lineal  $\varepsilon : A \longrightarrow k$  por  $\varepsilon(a) = a \cdot 1_k$ , entonces  $\varepsilon$  es también morfismo de álgebras. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(aa') &= (aa') \cdot 1_k \\
 &= a \cdot (a' \cdot 1_k) \\
 &= a \cdot \varepsilon(a') \\
 &= \varepsilon(a')a \cdot 1_k \\
 &= \varepsilon(\varepsilon(a')a) \\
 &= \varepsilon(a')\varepsilon(a) \\
 &= \varepsilon(a)\varepsilon(a')
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

donde se ha usado la compatibilidad 2 en la cuarta igualdad. Resumiendo, si la categoría  $A\text{-Mod}$  es monoidal, de forma tal que se satisfacen las condiciones de compatibilidad 1 y 2, podemos definir dos morfismos de álgebra  $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$  y  $\varepsilon : A \longrightarrow k$ . Si además,  $(A, \Delta, \varepsilon)$  es una coálgebra, entonces diremos que  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es una *biálgebra*. En general, una biálgebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es un espacio vectorial  $H$  con aplicaciones lineales  $\mu : H \otimes H \longrightarrow H$  y  $\eta : k \longrightarrow H$  que satisfacen (1.34) y morfismos de álgebra,  $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$  y  $\varepsilon : H \longrightarrow k$ , llamados *comultiplicación* y *counidad* respectivamente, que satisfacen (1.35), en cada caso sustituyendo  $A$  por  $H$ .

Recíprocamente, si  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es una biálgebra, entonces podemos dotar a  $A\text{-Mod}$  con una estructura de categoría monoidal tal que se satisfacen las condiciones de compatibilidad 1 y 2. Para esto, primero notemos que si  $V$  y  $W$  son  $A$ -módulos, entonces  $V \otimes W$  es  $(A \otimes A)$ -módulo con la acción  $(a \otimes b) \cdot (v \otimes w) = a \cdot v \otimes b \cdot w$  para  $a, b \in A$ ,  $v \in V$  y  $w \in W$ . El morfismo de álgebras  $\Delta$ , nos permite "jalar" la estructura a  $A$ , esto es, definimos

$$a \cdot (v \otimes w) = \Delta(a) \cdot (v \otimes w) \tag{1.38}$$

para  $a \in A$ ,  $v \in V$  y  $w \in W$ . Además, podemos definir

$$a \cdot \lambda = \varepsilon(a)\lambda \quad (1.39)$$

para  $a \in A$  y  $\lambda \in k$ . No es difícil ver que así  $A\text{-Mod}$  es monoidal, de manera que se satisfacen las condiciones de compatibilidad 1 y 2. Resumiendo, tenemos

**Proposición 1.4.1.** *Si  $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es una biálgebra, entonces la categoría  $A\text{-Mod}$  es monoidal con la estructura antes mencionada que satisface las relaciones de compatibilidad 1 y 2. Recíprocamente, si para un álgebra  $A$  tenemos que  $A\text{-Mod}$  es monoidal, de manera que se satisfacen 1 y 2, entonces existen morfismos de álgebra  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  y  $\varepsilon : A \rightarrow k$  como fueron definidos más arriba.*

**Nota 1.4.2.** Supongamos que  $A$  es un álgebra y que  $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$  y  $\varepsilon : A \rightarrow k$  son morfismos de álgebra. Puede demostrarse entonces que

**Proposición 1.4.3.**  *$A$  es una biálgebra con comultiplicación  $\Delta$  y counidad  $\varepsilon$ , si y sólo si la categoría  $A\text{-Mod}$  con  $(\otimes, a, l, r, k)$  usuales y con acciones como las descritas en (1.38) y (1.39) es monoidal.*

Por otra parte, si solo pedimos que  $A\text{-Mod}$  sea monoidal con  $\otimes$  de los espacios vectoriales, pero con otros posibles isomorfismos naturales  $a$ ,  $l$  y  $r$  llegamos al concepto de casibiálgebra. Un álgebra  $A$  con dos morfismos de álgebra  $\Delta$  y  $\varepsilon$  es una *casibiálgebra* si la categoría  $A\text{-Mod}$  es monoidal con el producto tensorial usual. Puede demostrarse entonces la siguiente caracterización, que es en realidad la definición original de casibiálgebra dada por Drinfeld en [7].

**Proposición 1.4.4.** *Sea  $A$  un álgebra con morfismos de álgebra  $\Delta$  y  $\varepsilon$  como antes. Entonces  $A$  es casibiálgebra si y solo si existe un elemento invertible  $\Phi$  en  $A \otimes A \otimes A$  y elementos invertibles  $l, r$  en  $A$  tales que*

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) &= \Phi((\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)))\Phi^{-1} \\ (\varepsilon \otimes \text{id})(\Delta(a)) &= lal^{-1}, \quad (\text{id} \otimes \varepsilon)(\Delta(a)) = r^{-1}ar \end{aligned}$$

para  $a \in A$ ,

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) = \Phi_{234}(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi)\Phi_{123}$$

y

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Phi) = r \otimes l^{-1}$$

donde  $\Phi_{123} = \Phi \otimes 1$  y  $\Phi_{234} = 1 \otimes \Phi$ .

Notemos que  $\Phi$ ,  $l$  y  $\tau$  "modulan" los axiomas (1.35). Cuando  $\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$  y  $l = \tau = 1$ , tenemos el concepto de biálgebra. El elemento  $\Phi$  es llamado "asociador de Drinfeld". Para más detalles ver [7].

Nosotros aquí hemos usado un enfoque distinto, pues hemos partido de una estructura monoidal cualquiera para  $A\text{-Mod}$ , es decir, de acciones cualesquiera, no necesariamente dadas por (1.38) y (1.39), que cumplan con las condiciones de compatibilidad 1 y 2, y hemos obtenido morfismos de álgebra,  $\Delta$  y  $\varepsilon$ .

Hemos visto hasta aquí condiciones que aseguran que la categoría  $A\text{-Mod}$  sea monoidal. Para lograr que  $A\text{-Mod}$  sea pivotal necesitamos tener una acción en  $V^*$  para cualquier  $A$ -módulo  $V$ . Esto se logra con una antípoda, que definimos a continuación.

**Definición 1.4.5.** Una *antípoda* para una biálgebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ , es un endomorfismo  $S$  de  $H$  que satisface la relación

$$\mu(S \otimes \text{id})\Delta = \mu(\text{id} \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon \quad (1.40)$$

Un *álgebra de Hopf* es una biálgebra  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  con una antípoda  $S$ .

Asociada a un álgebra  $A = (A, \mu, \eta)$ , tenemos otra álgebra llamada el *álgebra opuesta*,  $A^{\text{op}} = (A, \mu^{\text{op}}, \eta)$  que tiene el mismo conjunto subyacente, pero la multiplicación es invertida,  $\mu^{\text{op}} = \mu \circ P_{A,A}$ , donde  $P_{A,A}$  es la trasposición. O sea  $(ab)_{\text{op}} = ba$ . De manera dual, asociada a una coálgebra  $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ , tenemos asociada una *coálgebra opuesta*,  $C^{\text{op}} = (C, \Delta^{\text{op}} = P_{C,C} \circ \Delta, \varepsilon)$ . Se tiene entonces lo siguiente.

**Proposición 1.4.6.** Sea  $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  un álgebra de Hopf. Entonces  $H^{\text{opcop}} = (H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon, S)$  es otra álgebra de Hopf y

$$S : H \longrightarrow H^{\text{opcop}}$$

es morfismo de álgebras de Hopf. Si además,  $S$  es un isomorfismo con inversa  $S^{-1}$ , entonces  $H^{\text{op}} = (H, \mu^{\text{op}}, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$  y  $H^{\text{cop}} = (H, \mu, \eta, \Delta^{\text{op}}, \varepsilon)$  son álgebras de Hopf isomorfas, con isomorfismo dado por  $S$ .

Para una demostración de esta proposición, ver [13], página 55. Si  $H$  es un álgebra de Hopf con antípoda  $S$ , vamos a mostrar cómo dar una estructura natural de  $H$ -módulo en el espacio vectorial  $\text{Hom}(V, V')$  de aplicaciones

lineales de  $V$  en  $V'$ . Primero observemos que la relación  $((x \otimes x') \cdot f)(v) = x \cdot f(x' \cdot v)$ , le da una estructura de  $H \otimes H^{\text{op}}$ -módulo a  $\text{Hom}(V, V')$ . Ahora, si  $H$  es álgebra de Hopf con antípoda  $S$ , entonces  $(\text{id} \otimes S)\Delta : H \rightarrow H \otimes H^{\text{op}}$  es morfismo de álgebras en virtud de la proposición anterior. "Jalamos" la acción usando este morfismo para obtener una acción de  $H$  en  $\text{Hom}(V, V')$ . Explícitamente queda

$$(xf)(v) = \sum_{(x)} x' \cdot f(S(x'') \cdot v) \quad (1.41)$$

donde hemos usado la notación de Sweedler ([30]) para  $\Delta$ , o sea  $\Delta(x) = \sum_{(x)} x' \otimes x'' \in H \otimes H$ . En realidad la notación original de Sweedler usa subíndices:  $\Delta(x) = \sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ , pero las dos notaciones son aceptadas (la expuesta aquí es usada en el libro de Kassel). En particular, si tomamos  $V' = k$  con la acción (1.39), la relación (1.41) nos da una acción de  $H$  en el espacio vectorial dual  $V^*$ , quedando

$$(x \cdot f)(v) = f(S(x) \cdot v) \quad (1.42)$$

para  $f : V \rightarrow k$ ,  $x \in H$ . De esta manera la subcategoría de  $H$ -módulos de dimensión finita,  $H\text{-Mod}_f$ , es una categoría rígida, tomando  $b_V : k \rightarrow V \otimes V^*$  y  $d_V : V^* \otimes V \rightarrow k$  como los morfismos evaluación y coevaluación usuales. Si además, la antípoda  $S$  es invertible, para cada  $H$ -módulo  $V$  denotemos por  ${}^*V$  al espacio dual de  $V$  pero provisto ahora de una acción de  $H$  dada por

$$(x \cdot f)(v) = f(S^{-1}(x) \cdot v).$$

Definimos  $b'_V : k \rightarrow {}^*V \otimes V$  y  $d'_V : V \otimes {}^*V \rightarrow k$  por

$$b'_V(1) = \sum_i v^i \otimes v_i \quad \text{y} \quad d'_V(v_i \otimes v^j) = \delta_i^j$$

Fácilmente se verifica que estos morfismos son  $H$ -lineales, dotando a  $H\text{-Mod}_f$  con una dualidad derecha. Resumiendo:

**Proposición 1.4.7.** *Si  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$  es álgebra de Hopf, entonces la subcategoría  $H\text{-Mod}_f$  de  $H\text{-Mod}$ , de  $H$ -módulos de dimensión finita es rígida. Si además  $S$  es invertible, entonces la categoría  $H\text{-Mod}_f$  es autónoma.*

Para más detalles ver [13].

### 1.4.2 Biálgebras cuasitriangulares

**Definición 1.4.8.** Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  una biálgebra. Decimos que  $H$  es *casicoconmutativa*, si existe un elemento invertible  $R$  del álgebra  $H \otimes H$  tal que para todo  $x \in H$  tenemos

$$\Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}. \quad (1.43)$$

donde  $\Delta^{\text{op}} = P_{H,H} \circ \Delta$ , denota el coproducto opuesto en  $H$ . A un tal elemento le llamaremos *R-matriz universal*.

Si  $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ , entonces la relación (1.43) se puede expresar en la notación de Sweedler, por

$$\sum_{(x),i} x'' s_i \otimes x' t_i = \sum_{(x),i} s_i x' \otimes t_i x'' \quad (1.44)$$

Definimos un *álgebra de Hopf casicoconmutativa*, como un álgebra de Hopf cuya biálgebra estructural es casicoconmutativa.

**Definición 1.4.9.** Una biálgebra casicoconmutativa  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, R)$  o un álgebra de Hopf casicoconmutativa  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, S^{-1}, R)$ , es *cuasitriangular*, si la *R-matriz universal*  $R$  satisface las siguientes relaciones

$$(\Delta \otimes \text{id}_H)(R) = R_{13}R_{23}, \quad (\text{id}_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \quad (1.45)$$

donde  $R_{13} = \sum_i s_i \otimes 1 \otimes t_i$ ,  $R_{23} = \sum_i 1 \otimes s_i \otimes t_i$  y  $R_{12} = \sum_i s_i \otimes t_i \otimes 1$ .

Las biálgebras trenzadas juegan un papel muy importante en la teoría de los grupos cuánticos y las *R*-matrices (o soluciones de la ecuación de Yang-Baxter). En [5] y [6] donde el concepto se define por primera vez, aparece con el nombre de *biálgebras casitriangulares*, que usan muchos autores. Le llamamos biálgebra trenzada, siguiendo a Kassel en [13], denominación esta, que se justifica con la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.10.** Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  una biálgebra. La categoría  $H\text{-Mod}$ , de módulos sobre  $H$  es trenzada, si y sólo si la biálgebra  $H$  es trenzada.

La idea de la demostración es la siguiente: Si  $H$  tiene *R-matriz*  $R$  y  $V$  y  $W$  son  $H$ -módulos, entonces se demuestra que

$$c_{V,W}^R(v \otimes w) = P_{V,W}(R(v \otimes w)) \quad (1.46)$$

definido para todo  $v \in V$  y  $w \in W$  define un trenzamiento en la categoría  $H\text{-Mod}$ . Recíprocamente, si la categoría  $H\text{-Mod}$  tiene un trenzamiento  $c$ , se demuestra que  $R = P_{H,H}(c_{H,H}(1 \otimes 1))$  define una  $R$ -matriz universal para  $H$ . De esta proposición se deduce en particular, que si la biálgebra  $H$  tiene una  $R$ -matriz universal  $R$ , entonces  $c_{V,V}^R$  es una  $R$ -matriz para  $V$ , es decir es solución de la ecuación de Yang-Baxter para el  $H$ -módulo  $V$ .

### 1.4.3 Biálgebras cocuasitriangulares

De la misma manera en que las biálgebras trenzadas inducen trenzamientos en sus categorías de módulos, hay biálgebras que inducen trenzamientos en sus categorías de comódulos (ver la Definición 3.3.17). Estas son las biálgebras cotrenzadas, concepto dual al de biálgebra trenzada, que definimos a continuación.

**Definición 1.4.11.** Una biálgebra *cotrenzada*  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, r)$  es una biálgebra  $H$  junto con una forma lineal  $r$  definida en  $H \otimes H$  que satisface las siguientes condiciones

(i) existe una forma lineal  $\bar{r}$  en  $H \otimes H$  tal que

$$r * \bar{r} = \bar{r} * r = \varepsilon \quad (1.47)$$

(ii) se tiene que

$$\mu^{op} = r * \mu * \bar{r} \quad (1.48)$$

(iii) y por último

$$r(\mu \otimes \text{id}_H) = r_{13} * r_{23}, \quad r(\text{id}_H \otimes \mu) = r_{13} * r_{12} \quad (1.49)$$

donde  $*$  es el producto convolución de formas lineales, y  $r_{12} = r \otimes \varepsilon$ ,  $r_{23} = \varepsilon \otimes r$  y  $r_{13} = (\varepsilon \otimes r)(P_{H,H} \otimes \text{id}_H)$ . La forma lineal  $r$  es llamada la *R-forma universal* para  $H$ . Un álgebra de Hopf es cotrenzada, si su biálgebra estructural lo es.

Las relaciones anteriores se pueden expresar usando la notación de Sweedler, ver [13].

La relación (1.48) es dual de (1.43), mientras que las relaciones (1.49) corresponden a las relaciones (1.45). De la misma manera, tenemos un dual para 1.4.10.

**Proposición 1.4.12.** *Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, r)$  una biálgebra. La categoría  $H\text{-Comod}$  de comódulos sobre  $H$  es trenzada, si y sólo si la biálgebra  $H$  es cotrenzada.*

No daremos la demostración, pero vamos a dar la expresión para el trenzamiento, en el caso en que  $H$  sea cotrenzada con  $R$ -forma universal  $r$ . Si  $V$  y  $W$  son  $H$ -comódulos, entonces  $c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$  está dada por la composición

$$\begin{aligned} V \otimes W &\xrightarrow{P_{V,W}} W \otimes V \xrightarrow{\Delta_V \otimes \Delta_W} H \otimes W \otimes H \otimes V \xrightarrow{j_H \otimes P_{W,H} \otimes \text{id}_V} H \otimes H \otimes W \otimes V \longrightarrow \\ &\xrightarrow{r \otimes \text{id}_W \otimes \text{id}_V} W \otimes V \end{aligned}$$

Para más detalles ver [10], [17], o [27].

#### 1.4.4 Algebras de listones

Con lo visto hasta ahora, no estamos lejos de nuestro primer ejemplo de categoría de listones. Ya hemos visto que una  $R$ -matriz universal en un álgebra de Hopf  $H$ , induce un trenzamiento en la categoría de sus representaciones. La pregunta natural que surge entonces, es qué estructura en  $H$  inducirá una torsión en la categoría  $H\text{-Mod}$ . La respuesta la da la siguiente definición.

**Definición 1.4.13.** Un álgebra de Hopf trenzada  $H$  es un *álgebra de listones*, si existe un elemento  $\theta$  que pertenece al centro de  $H$  y que satisface las relaciones

$$\Delta(\theta) = (R_{21}R)^{-1}, \quad \varepsilon(\theta) = 1 \quad \text{y} \quad S(\theta) = \theta \quad (1.50)$$

Como ya mencionamos, las álgebras de listones inducen categorías de listones.

**Proposición 1.4.14.** *Para cualquier álgebra de listones  $H$ , la categoría pivotal  $H\text{-Mod}_f$  es una categoría de listones con torsión  $\theta_V : V \longrightarrow V$  dada por  $\theta_V(u) = \theta^{-1}u$ . Recíprocamente, si  $H$  es un álgebra de Hopf trenzada de dimensión finita y la categoría  $H\text{-Mod}_f$  con dualidad (izquierda) es de listones, entonces  $H$  es un álgebra de listones.*

Para una demostración de esta proposición, el lector puede consultar [13], pp. 365-366. Las álgebras de listones fueron definidas por primera vez por Reshetikhin y Turaev en [23].

**Ejemplo 1.4.15.** Vamos a considerar el álgebra envolvente cuántica de  $\mathfrak{sl}(2)$ ,  $U_q = U_q(\mathfrak{sl}(2))$  para  $q \neq 0$ , (definida por Kulish y Reshetikhin en [14] aunque

seguiremos a [13]) en lo sucesivo) que es una  $q$ -deformación del álgebra envolvente  $U$  de  $\mathfrak{sl}(2)$ . El álgebra  $U_q$  se puede presentar como el álgebra generada por las variables  $E, F, K, K^{-1}, L$  y las relaciones

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad (1.51)$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad (1.52)$$

$$[E, F] = L, \quad (q - q^{-1})L = K - K^{-1}, \quad (1.53)$$

$$[L, E] = q(EK + K^{-1}E), \quad [L, F] = q^{-1}(EF + K^{-1}F) \quad (1.54)$$

Resulta entonces que si  $q = 1$ , se tiene

$$U_1 \cong U[K]/(K^2 - 1) \quad y \quad U \cong U_1/(K - 1) \quad (1.55)$$

donde  $U$  es el álgebra envolvente de  $\mathfrak{sl}(2)$ . Sin embargo es posible dar una presentación más sencilla de  $U_q$  si  $q \neq \pm 1$ , a saber, como el álgebra generada por las variables  $E, F, K, K^{-1}$ , con las relaciones

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad (1.56)$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad [E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (1.57)$$

Con esta última presentación vamos a dar una estructura de álgebra de Hopf en  $U_q$ . Definimos

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \quad \Delta(K) = K \otimes K, \quad (1.58)$$

$$\Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}, \quad \varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad \varepsilon(K) = \varepsilon(K^{-1}) = 1, \quad (1.59)$$

$$S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(K) = K^{-1} \quad S(K^{-1}) = K \quad (1.60)$$

Se puede demostrar entonces que  $(U_q, \mu, 1, \Delta, \varepsilon, S)$  es un álgebra de Hopf. Por lo tanto, la categoría  $U_q\text{-Mod}_f$  es pivotal, según 1.4.7. Antes de seguir añadiendo estructura a  $U_q\text{-Mod}_f$ , vamos a considerar la subálgebra de Hopf  $\overline{U}_q$  de  $U_q$  definida como sigue. Supongamos que  $q$  es raíz de la unidad y sea  $d$  su orden. Vamos a suponer que  $d > 2$  y sea .

$$e = \begin{cases} d & \text{si } d \text{ es impar} \\ d/2 & \text{si } d \text{ es par} \end{cases}$$

**Definición 1.4.16.** El álgebra  $\overline{U}_q$  es el cociente de  $U_q$  con el ideal bilateral generado por los elementos (centrales)  $E^e, F^e$  y  $K^e - 1$ .

Puede demostrarse que la estructura de álgebra de Hopf dada en  $U_q$  induce una estructura de álgebra de Hopf en  $\overline{U}_q$  de manera que la aplicación cociente  $U_q \rightarrow \overline{U}_q$  es morfismo de álgebras de Hopf y que  $\overline{U}_q$  es de dimensión finita. Vamos a restringirnos a la categoría  $\overline{U}_q\text{-Mod}_f$ .

Para construir un trenzamiento en  $\overline{U}_q\text{-Mod}_f$  o equivalentemente, una  $R$ -matriz universal en  $\overline{U}_q$ , se usa la construcción *doble cuántico* de Drinfeld ([5]), que construye, a partir de un álgebra de Hopf con antípoda invertible y de dimensión finita  $H$ , un álgebra trenzada  $D(H)$ . Para este fin, se considera la subálgebra de  $\overline{U}_q$ ,  $B_q$  generada por el conjunto  $\{E^m K^n\}_{0 \leq m, n \leq d}$ . Como álgebra, es fácil ver que  $B_q$  está generada por  $E$  y  $K$  con las relaciones  $KEK^{-1} = q^2 E$ ,  $E^d = 0$  y  $K^d = 1$ . Se prueba entonces que existe un epimorfismo  $\chi : D(B_q) \rightarrow \overline{U}_q$  que es tal que si  $R_D$  es una  $R$ -matriz universal en  $D(B_q)$ , entonces  $(\chi \otimes \chi)(R_D)$  es una  $R$ -matriz universal en  $\overline{U}_q$ . Explícitamente, la  $R$ -matriz universal para  $\overline{U}_q$  queda

$$\overline{R} = \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i, j, k \leq d-1} \frac{(q - q^{-1})}{|k|!} q^{k(k-1)/2 + 2k(i-j) - 2ij} E^k K^i \otimes F^k K^j. \quad (1.61)$$

donde  $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$  y  $[n]! = [n][n-1]\dots[1]$ , para  $q^2 \neq 1$ .

Por último, Reshetikhin y Turaev demostraron en [24] que  $\overline{U}_q$  es un álgebra de listones, esto es

**Proposición 1.4.17.** *El álgebra de Hopf  $\overline{U}_q$  es de listones con  $\theta = K^{-1}u = uK^{-1}$ , donde  $u = \sum_i S(t_i)s_i$  y  $s_i$  y  $t_i$  están definidos por la igualdad  $\overline{R} = \sum_i s_i \otimes t_i \in \overline{U}_q \otimes \overline{U}_q$ .*

Así, la categoría  $\overline{U}_q\text{-Mod}_f$  es una categoría de listones.

## 1.5 Cálculo gráfico.

En esta sección discutiremos una técnica para representar morfismos en una categoría monoidal mediante diagramas en el plano. Veremos, al final del capítulo 2, su justificación para el caso en que la categoría sea de listones. Esta técnica se conoce como cálculo gráfico y nos permite sustituir razonamientos algebraicos que involucran diagramas conmutativos, por razonamientos geométricos sencillos. Por ejemplo, cuando se considera la dualidad en una categoría monoidal las fórmulas tienden a complicarse, por lo que este método será de gran utilidad para demostrar resultados en las

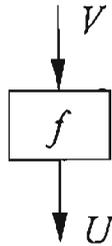


Figura 1.1: Representación de un morfismo  $f : U \longrightarrow V$ .

categorías pivotaes y de listones.

Representaremos un morfismo en una categoría monoidal  $\mathbf{V}$  por un rectángulo con dos flechas orientadas hacia abajo como se muestra en la figura 1.1. Nos referiremos a  $U$  y  $V$  como los “colores” de las flechas y a  $f$  como el “color” del rectángulo. La composición de un morfismo  $f : U \longrightarrow V$  con otro  $g : V \longrightarrow W$  se representa poniendo el diagrama de  $g$  encima del diagrama de  $f$  como se muestra en la figura 1.2. La identidad de  $V$  se representa por

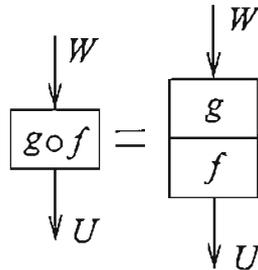


Figura 1.2: Composición de morfismos.

una flecha vertical  $\downarrow_V$  dirigida hacia abajo. El producto tensorial de dos morfismos se representa colocándolos uno al lado del otro como se muestra en la figura 1.3. Podemos también representar al morfismo  $f \otimes g : U \otimes W \longrightarrow V \otimes Z$  por el diagrama de la figura 1.4. Tenemos entonces la igualdad de diagramas de la figura 1.5. La identidad  $f \otimes g = (f \otimes \text{id})(\text{id} \otimes g)$  se ve gráficamente como el la figura 1.6. Esto nos lleva a un principio de isotopía parcial de diagramas: en cualquier diagrama que represente a un morfismo dado, la parte de la figura a la derecha (o a la izquierda) de una recta vertical se puede mover

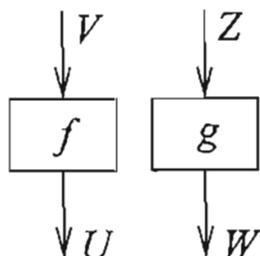
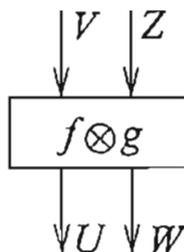


Figura 1.3: Producto tensorial de morfismos.

Figura 1.4: Un morfismo  $f \otimes g : U \otimes W \longrightarrow V \otimes Z$ .

hacia arriba o hacia abajo sin cambiar el morfismo.

Vamos ahora a dar una descripción gráfica de la dualidad introducida en la Sección 1.1.3. Representaremos la identidad de  $V^*$  por una flecha vertical dirigida hacia arriba  $\uparrow_V$ . De manera más general, usaremos la convención de que una flecha dirigida hacia arriba, estará coloreada con el objeto dual. De esta manera, por ejemplo, hay cuatro formas distintas de representar un morfismo  $f : U^* \longrightarrow V^*$  como se muestra en la figura 1.7. Los morfismos que definen la dualidad,  $b_V : I \longrightarrow V \otimes V^*$  y  $d_V : V^* \otimes V \longrightarrow I$  se representan en la figura 1.8 y las identidades 1.27, 1.28 toman la forma gráfica de la figura 1.9.

Definimos ahora la aplicación *dual*,  $f^* : V^* \longrightarrow U^*$  de un morfismo  $f : U \longrightarrow V$  en una categoría pivotal  $\mathbf{V}$  por

$$f^* = (d_V \otimes \text{id}_{U^*}) (\text{id}_{V^*} \otimes f \otimes \text{id}_{U^*}) (\text{id}_{V^*} \otimes b_U). \quad (1.62)$$

Gráficamente, la aplicación dual de una aplicación  $f : U \longrightarrow V$  se representa

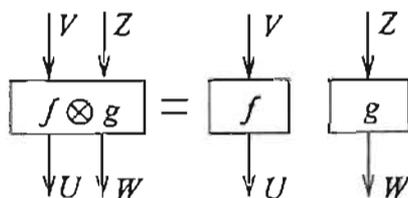
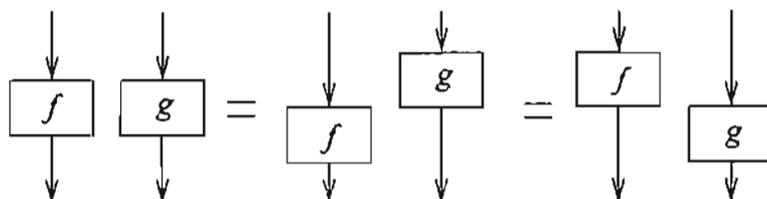
Figura 1.5: Igualdad de los diagramas para  $f \otimes g$ .

Figura 1.6: Isotopía parcial de diagramas.

entonces como en la figura 1.10.

**Proposición 1.5.1.** *Sea  $\mathcal{V}$  una categoría pivotal.*

(i) *Si  $f : V \rightarrow W$  y  $g : U \rightarrow V$  son morfismos de  $\mathcal{V}$ , entonces se cumple que  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ , y  $(\text{id}_V)^* = \text{id}_V$  para cualquier objeto  $V$ , esto es, la dualidad es un funtor contravariante  $*$  :  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ .*

(ii) *Si  $U, V, W$  son objetos de  $\mathcal{V}$ , tenemos biyecciones naturales*

$$\text{Hom}(U \otimes V, W) \cong \text{Hom}(U, W \otimes V^*) \quad (1.63)$$

y

$$\text{Hom}(U^* \otimes V, W) \cong \text{Hom}(V, U \otimes W) \quad (1.64)$$

*Esto es, el funtor que en objetos es  $W \mapsto W \otimes V$  (respectivamente, el funtor que en objetos es  $W \mapsto U^* \otimes W$ ) es adjunto izquierdo del funtor  $W \mapsto W \otimes V^*$  (resp. del funtor  $W \mapsto U \otimes W$ ).*

(iii) *Para cualquier par  $V, W$  de objetos de  $\mathcal{V}$ ,  $(V \otimes W)^*$  y  $W^* \otimes V^*$  son objetos isomorfos.*

*Demostración*

(i) Aunque una demostración directa es fácil de dar, usaremos el cálculo

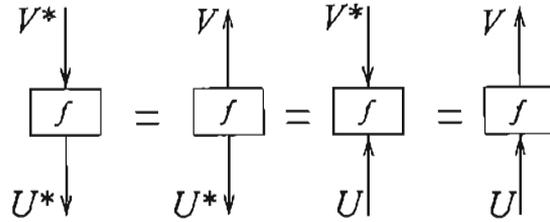


Figura 1.7: Distintas formas de representar a  $f : U^* \rightarrow V^*$ .



Figura 1.8: Los morfismos  $b_V$  y  $d_V$ .

gráfico. La demostración está dada en la figura 1.11. La primera igualdad se obtiene usando la figura 1.9 y la segunda igualdad en la gráfica usa la isotopía de diagramas mencionada antes, representada en la figura 1.6.

(ii) Definimos  $\varphi : \text{Hom}(U \otimes V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W \otimes V^*)$  y  $\psi : \text{Hom}(U, W \otimes V^*) \rightarrow \text{Hom}(U \otimes V, W)$  como sigue

$$\begin{aligned} \varphi(f) : U &\xrightarrow{\text{id}_U \otimes b_V} U \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{V^*}} W \otimes V^* \\ \psi(g) : U \otimes V &\xrightarrow{g \otimes \text{id}_V} W \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\text{id}_W \otimes d_V} W \end{aligned}$$

para  $f : U \otimes V \rightarrow W$  y  $g : U \rightarrow W \otimes V^*$ . Una demostración gráfica de que son inversas se da en la figura 1.12 aunque por supuesto es posible dar una demostración directa usando las relaciones 1.27 y 1.28.

(iii) Definimos los morfismos  $\gamma_{V,W} : W^* \otimes V^* \rightarrow (V \otimes W)^*$  y  $\nu_{V,W} : (V \otimes W)^* \rightarrow W^* \otimes V^*$  como las composiciones

$$\gamma_{V,W} = (d_W \otimes \text{id}_{(V \otimes W)^*}) \cdot (\text{id}_{W^*} \otimes d_V \otimes \text{id}_{W \otimes (V \otimes W)^*}) \cdot (\text{id}_{W^* \otimes V^*} \otimes b_{V \otimes W}) \quad (1.65)$$

$$\nu_{V,W} = (d_V \otimes \text{id}_{(V \otimes W)^*}) \cdot (\text{id}_{(V \otimes W)^* \otimes V^*} \otimes b_W \otimes \text{id}_{V^*}) \cdot (\text{id}_{(V \otimes W)^*} \otimes b_V) \quad (1.66)$$

Si hacemos las composiciones gráficas correspondientes, los morfismos  $\gamma_{V,W}$  y  $\nu_{V,W}$  quedan representados como en la figura 1.13 La demostración de que

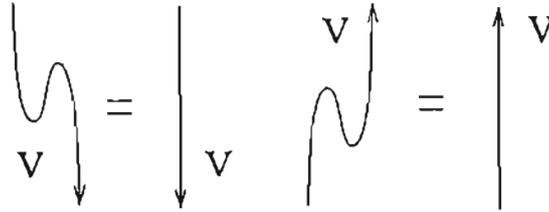


Figura 1.9: Identidades 1.27 y 1.28.

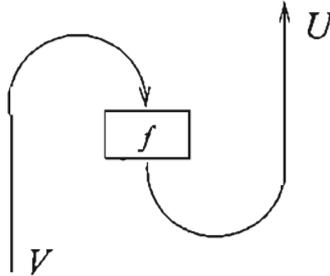


Figura 1.10: La aplicación dual de  $f$ .

son aplicaciones inversas una de otra es algo engorrosa si se hace de manera directa, sin embargo usando el cálculo gráfico es muy sencilla. En la figura 1.14 se demuestra que  $\nu_{V,W} \circ \gamma_{V,W} = \text{id}_{W \otimes V}$ . La demostración de que  $\gamma_{V,W} \circ \nu_{V,W} = \text{id}_{(V \otimes W)}$  es completamente análoga y la omitimos.

**Proposición 1.5.2.** *Sea  $f : V \rightarrow W$  un morfismo en una categoría pivotal. Entonces se tienen las identidades*

$$(f \otimes \text{id}_V) \cdot b_V = (\text{id}_W \otimes f^*) \cdot b_W, \quad d_V(f^* \otimes \text{id}_V) = d_W(\text{id}_W \cdot \otimes f) \quad (1.67)$$

La primera igualdad de 1.67 se ve en forma gráfica en la figura 1.15. La segunda es una variación obvia de ésta.

*Demostración.*

La demostración se da en la figura 1.16.

Supongamos ahora que la categoría es trenzada con trenzamiento  $c$ . Sean  $V$  y  $W$  objetos de la categoría. En la figura 1.17 damos las representaciones gráficas de  $c_{V,W}$ ,  $c_{W,V}^{-1}$ ,  $c_{W,V}^{-1} \circ c_{V,W}$ ,  $c_{V,W}^{-1}$ ,  $c_{V,W}$ ,  $c_{V,W}$  y  $c_{W,V}^{-1}$ . Por lo

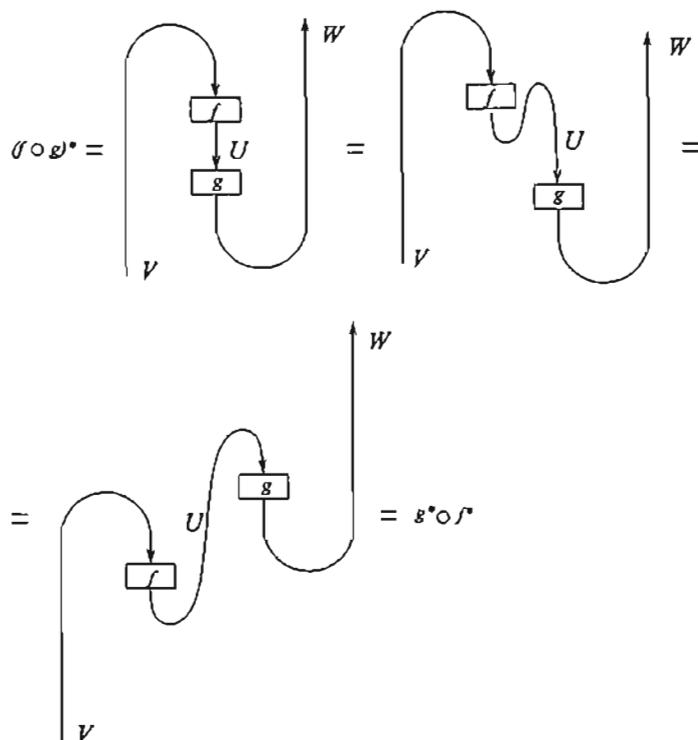


Figura 1.11: Demostración de 1.5.1 (i).

tanto se tienen las igualdades de diagramas como los de la figura 1.18. La naturalidad de  $c_{V,W}$  se ve en la figura 1.19

En la figura 1.20, se demuestra usando el cálculo gráfico la igualdad 1.22.

Supongamos ahora que la categoría tiene torsión  $\theta$ . Representaremos a la torsión  $\theta_V$  y su inversa en la figura 1.21. De aquí que se tengan las igualdades de diagramas de la figura 1.22. La relación 1.24 que define a la torsión  $\theta$  y las igualdades de 1.25 se representan en la figura 1.23.

De la proposición anterior se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.5.3.** *Una categoría pivotal  $V$  con torsión  $\theta$  es de listones si y sólo si se cumple  $\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$  para todo objeto  $V$  de  $V$ .*

*Demostración.* Debemos demostrar que la relación  $\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$  es equi-

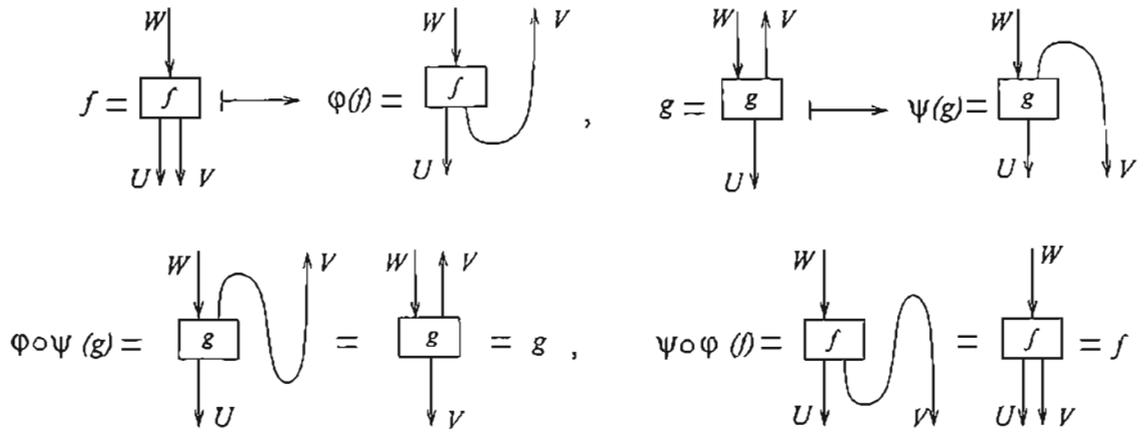


Figura 1.12: Demostración de 1.5.1 (ii).

valente a la relación  $(\text{id}_V \cdot \otimes \theta_V) b_V = (\text{id}_V \otimes \theta_V \cdot) b_V$ . La necesidad es consecuencia de 1.5.2 tomando  $W = V$ . La suficiencia se demuestra de manera análoga en la figura 1.24.

**Proposición 1.5.4.** *En una categoría de listones  $V$  se tiene un isomorfismo canónico entre  $V$  y  $V^{**}$ .*

*Demostración.* Es un ejercicio sencillo de cálculo gráfico.

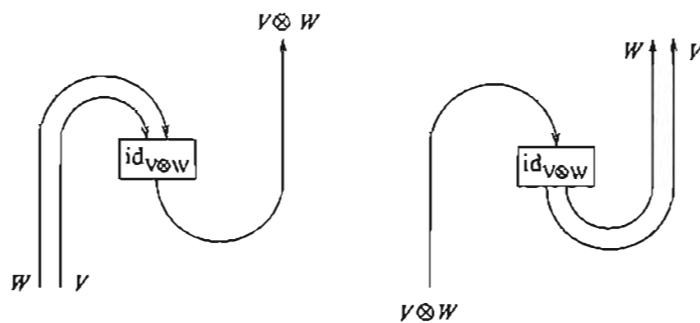


Figura 1.13: Los morfismos  $\gamma_{V,W}$  y  $\nu_{V,W}$ .

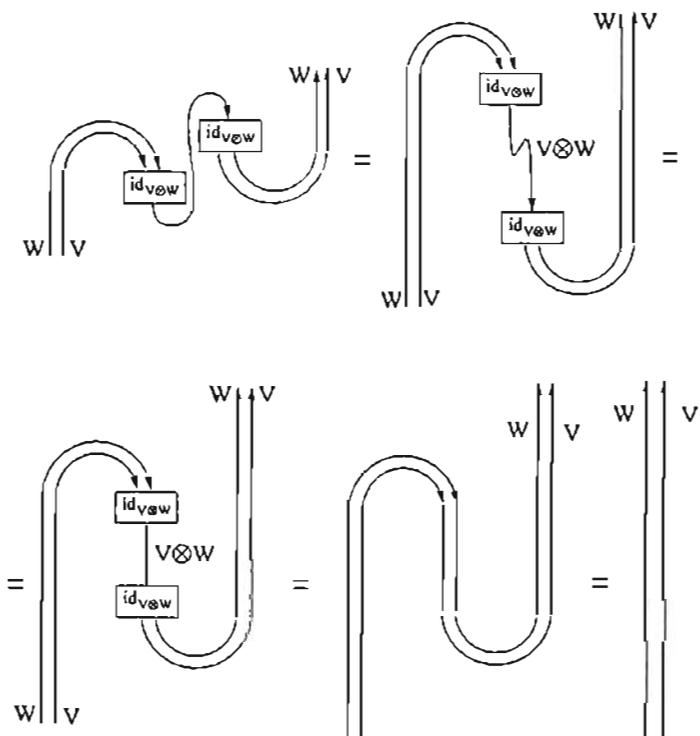


Figura 1.14:  $\nu_{V,W} \circ \gamma_{V,W} = id_{W \otimes V}$ .

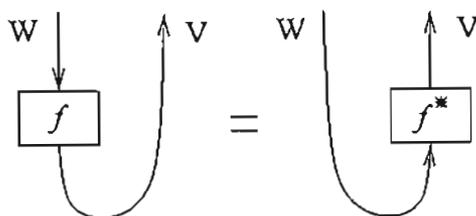


Figura 1.15:  $(f \otimes \text{id}_V) \cdot b_V = (\text{id}_W \otimes f^*) \cdot b_W$ .

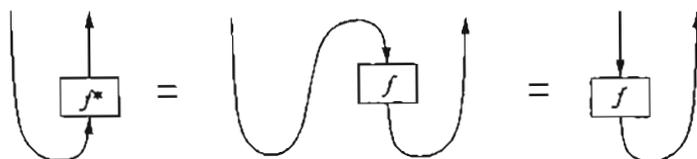


Figura 1.16: Demostración de 1.5.2.

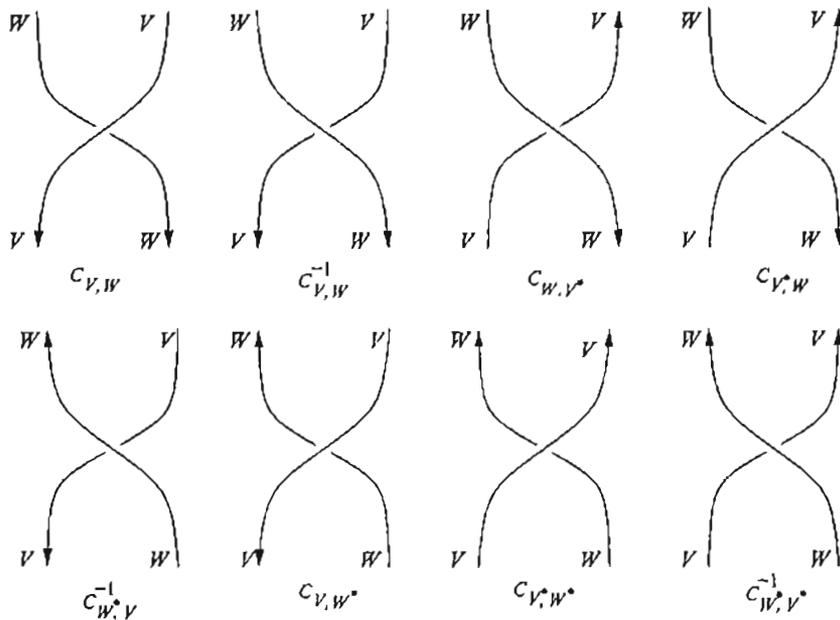


Figura 1.17: Representaciones del trenzamiento.

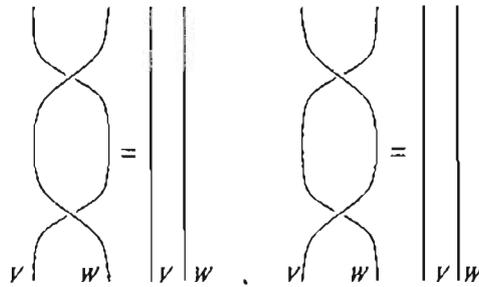


Figura 1.18: Invertibilidad de  $c_{V,W}$ .

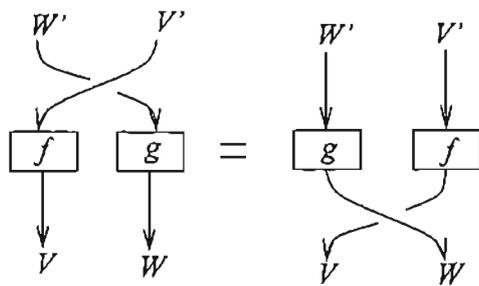


Figura 1.19: Naturalidad de  $c_{V,W}$ .

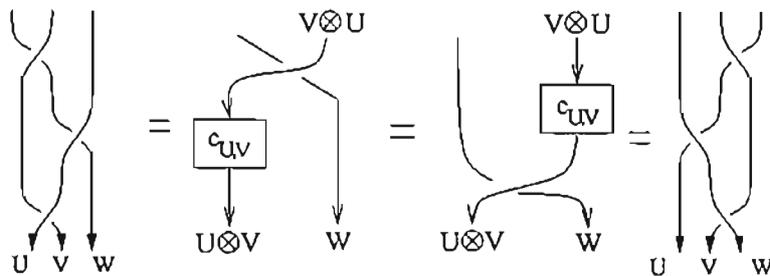
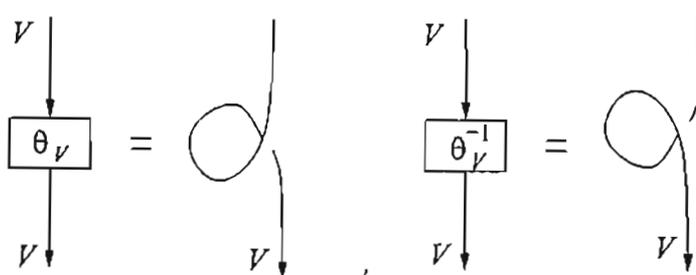
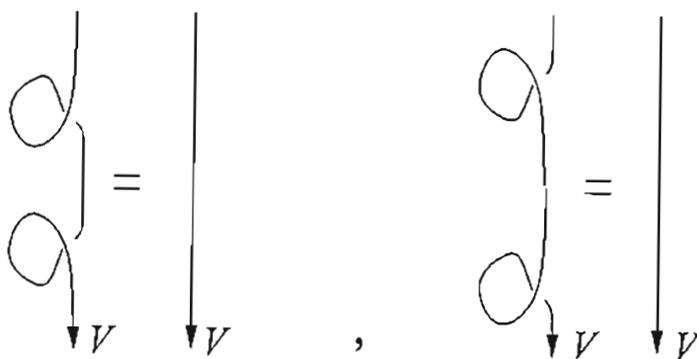


Figura 1.20: Demostración de 1.22.

Figura 1.21:  $\theta_V$  y  $\theta_V^{-1}$ .Figura 1.22:  $\theta_V \circ \theta_V^{-1} = \text{id}_V = \theta_V^{-1} \circ \theta_V$ .

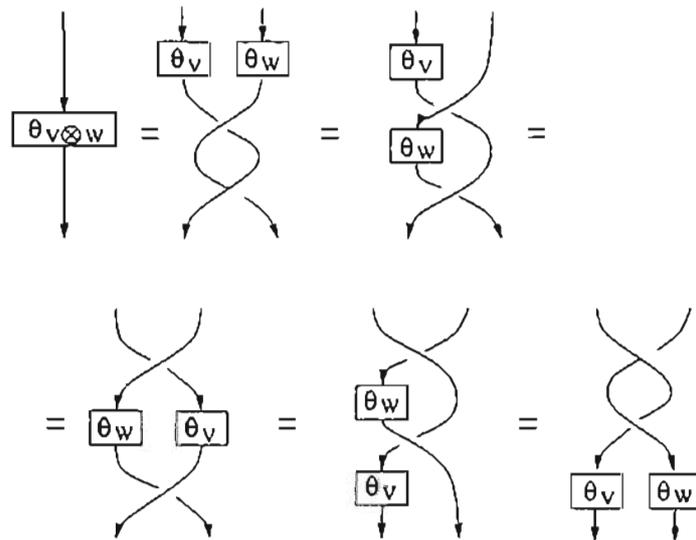


Figura 1.23: Relaciones 1.24 y 1.25.

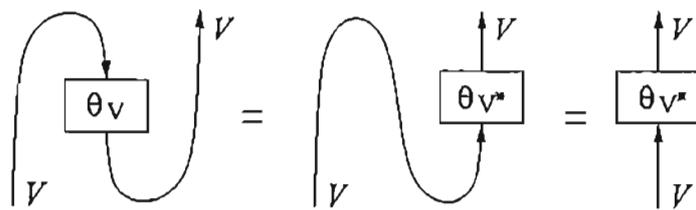


Figura 1.24: Suficiencia de 1.5.3.

# Capítulo 2

## Ejemplos y funtores monoidales

### 2.1 Ejemplos geométricos

En esta sección veremos algunos ejemplos geométricos de categorías monoidales. En cada ejemplo veremos si la categoría tiene trenzamiento, dualidad y torsión. Esta sección está tomada de [8], [13], [33], [21] y [35].

#### 2.1.1 Elementos de la teoría de nudos

**Definición 2.1.1.** Un *nudo* (knot) es un subespacio  $K$  de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ . Dos nudos  $K_0$  y  $K_1$  son *equivalentes*, si existe un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que conserva la orientación, tal que  $\varphi(K_0) = K_1$ . Un nudo *manso* es un nudo que es equivalente a un nudo *poligonal*, es decir, un nudo que está formado por un número finito de segmentos. En lo que sigue nos restringiremos a nudos mansos. (En contraposición a los nudos mansos, existen los nudos *salvajes*; ver por ejemplo [21]) Un *enlace* es una unión ajena de una familia finita de nudos en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, nudos que posiblemente se entrelacen, pero que no se intersectan. De esta manera, un nudo es un enlace con una sola componente.

**Nota 2.1.2.** Recordemos que un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es *isotópico* a la identidad, si existe una *isotopía*  $H : \varphi \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ , es decir, una homotopía, tal que para cada  $t \in I$ ,  $H_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un homeomorfismo,  $H_0 = \varphi$  y  $H_1 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ . Si  $K \subset \mathbb{R}^3$  es un nudo, entonces  $K_t = H_{1-t}(K) \subset \mathbb{R}^3$  es un nudo para cada  $t$ . Además,  $K_0 = K$  y cuando  $t$  varía de 0 a 1,  $K$  se deforma en

$\mathbb{R}^3$ . De un tal homeomorfismo  $\varphi$  decimos que *conserva la orientación*. Este es el concepto que hemos usado en la definición anterior.

**Definición 2.1.3.** Un *diagrama de enlace* es la proyección de un enlace en  $\mathbb{R}^3$  sobre un plano tal que la curva resultante tenga solo un número finito de puntos dobles aislados, con intersección transversal, en los que se ha seleccionado cual es la línea que va por encima y la que va por debajo (y si el enlace es orientado, la orientación inducida por el enlace). A una proyección de este tipo se le llama *proyección regular*.

Reidemeister [22] demostró el siguiente teorema que caracteriza la clase de isotopía de un enlace en términos de sus diagramas de enlaces.

**Teorema 2.1.4.** *Dos diagramas de enlaces representan enlaces equivalentes (ambientalmente isotópicos) en  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si uno se obtiene del otro aplicando un número finito de veces las transformaciones (o jugadas) de Reidemeister (I), (II) y (III), e isotopía de diagramas. Además la isotopía de diagramas puede ser reemplazada con las transformaciones (II.I) y (II.II).*

Todas estas transformaciones están representadas en la figura 2.1. Diremos

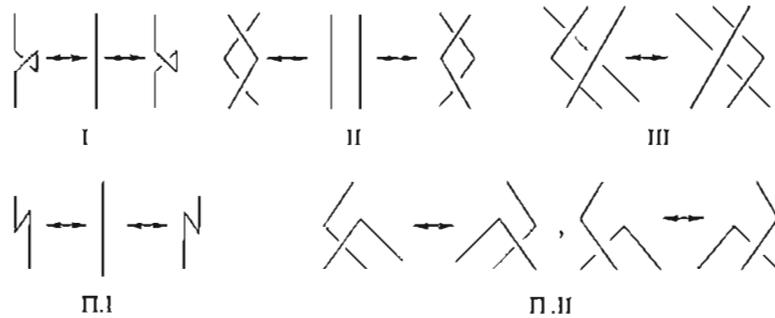


Figura 2.1: Jugadas de Reidemeister e isotopía de diagramas

abusando del lenguaje que dos diagramas relacionados por las transformaciones anteriores son *isotópicos*. La siguiente definición se debe a Kauffman.

**Definición 2.1.5.** Dos diagramas de enlaces son *regularmente isotópicos* si son equivalentes bajo las transformaciones (II), (III), (II.I) y (II.II). (Note que no se pide I).

Veremos ahora el concepto de maraña (tangle) y de marañas equivalentes.

**Definición 2.1.6.** Sean  $k$  y  $l$  dos enteros no negativos. Una  $(k, l)$ -maraña (o  $(k, l)$ -ovillo) es una subvariedad  $L$ , compacta, lisa y unidimensional de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , tal que  $\partial L = L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}) = \{(i, 0, 0) \mid i = 1, 2, \dots, k\} \cup \{(j, 0, 1) \mid j = 1, 2, \dots, l\}$ , y tal que en los puntos frontera,  $L$  es ortogonal a los planos  $\mathbb{R}^2 \times 0$  y  $\mathbb{R}^2 \times 1$ . Una *orientación* de una  $(k, l)$ -maraña es una orientación de la variedad  $L$ . A cada  $(k, l)$ -maraña orientada, le asociamos dos sucesiones de números,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$  y  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$ , denotadas  $s(L)$  y  $t(L)$  respectivamente. Los números  $\varepsilon_i$  se definen de forma que  $\varepsilon_i = 1$  si el vector unitario tangente a  $(i, 0, 0) \in L$  es el vector  $(0, 0, -1)$  y  $\varepsilon_i = -1$  si es el vector  $(0, 0, 1)$ . El número  $\nu_j = \pm 1$  se define exactamente de la misma manera por la dirección del vector unitario tangente en el punto  $(j, 0, 1)$ . Si  $k = 0$  (respectivamente  $l = 0$ ),  $s(L) = \emptyset$  (respectivamente  $t(L) = \emptyset$ ). Nótese que una  $(0, 0)$ -maraña no es más que un nudo (encajado en  $\mathbb{R} \times (0, 1)$ ).

**Definición 2.1.7.** Dos marañas  $L_1$  y  $L_2$ , son *equivalentes*, si existe una isotopía de  $X = \mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$ ,  $H : X \times I \rightarrow X$ , tal que  $H(x, 0) = x$  y  $H(L_1, 1) = L_2$ . O sea  $H$  es un homeomorfismo para cada  $t$ , que empieza en la identidad de  $X$  y tal que para cada  $t$ ,  $H(t, -)|_{\partial X} = \text{id}_{\partial X}$ .

Al igual que con los nudos, hay marañas salvajes y marañas mansas. A estas últimas nos restringiremos.

**Definición 2.1.8.** Un *diagrama de maraña* es la proyección regular de una maraña en el plano  $xz$ . Puede demostrarse al igual que en el caso de los diagramas de enlace, que una tal proyección siempre existe. De esta manera, un diagrama de maraña puede ser visto como una porción de un diagrama de enlace contenido en un rectángulo que se intersecta con la frontera de éste sólo en los lados superior e inferior.

Se tiene un resultado análogo a 2.1.4.

**Teorema 2.1.9.** *Dos diagramas de marañas representan marañas equivalentes en  $\mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$ , si y sólo si uno se obtiene del otro aplicando un número finito de veces, las transformaciones (I), (II), (III) e isotopías de diagramas, que equivalen a transformaciones del tipo  $\Pi.I$  y  $\Pi.II$ .*

### 2.1.2 Categorías de marañas

**Ejemplo 2.1.10. Categoría de marañas orientadas.** Los objetos de esta categoría son sucesiones finitas cuyos elementos son los números 1 y  $-1$ , incluyendo la sucesión vacía. Un morfismo de una sucesión  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$  a una sucesión  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$ , es una clase de isotopía de  $(k, l)$ -marañas orientadas  $L$ , tal que  $s(L) = \varepsilon$  y  $t(L) = \nu$ . La composición de los morfismos  $L : \varepsilon \rightarrow \nu$  y  $L' : \nu \rightarrow \lambda$ , es la clase de isotopía que se obtiene al escoger un representante de  $L'$ , situarlo encima de un representante de  $L$  y luego encogerlo de manera obvia, a una maraña en  $\mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$ . La identidad del objeto  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$  es la clase de la maraña que se obtiene tomando  $k$  segmentos verticales que unen los puntos  $(j, 0, 1)$  y  $(j, 0, 0)$  con la orientación como se explicó en la subsección anterior. La identidad del objeto  $\emptyset$  es el morfismo  $\emptyset \rightarrow \emptyset$  representado por la  $(0, 0)$ -maraña vacía. Denotaremos esta categoría por  $\mathcal{MO}$ . En la figura 2.2 mostramos un ejemplo de maraña y en la figura 2.3 un ejemplo de composición de marañas.

El producto tensorial de dos sucesiones  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$  y  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$

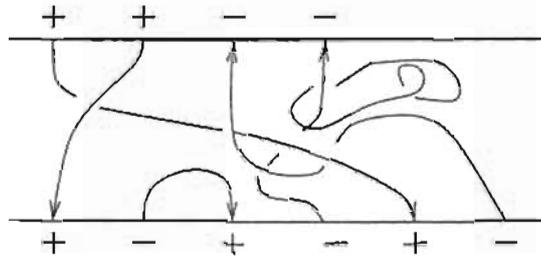


Figura 2.2: Una maraña que representa a un morfismo con dominio  $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$  y codominio  $(1, 1, -1, -1)$ .

es el objeto  $\varepsilon \otimes \nu = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_l)$  y el objeto identidad es la sucesión vacía  $\emptyset$ . De esta manera es fácil ver que la categoría  $(\mathcal{MO}, \otimes, \emptyset)$  es monoidal estricta. Además es de listones con las siguientes estructuras de trenzamiento, dualidad y torsión. Para cada objeto  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ , definimos su dual por  $\varepsilon^* = (-\varepsilon_k, -\varepsilon_{k-1}, \dots, -\varepsilon_1)$ . Definimos el trenzamiento  $c$  y la dualidad  $(*, b, d)$  como en la figura 4.6 (a), (c) y (d) respectivamente aunque en este caso los arcos son orientados. La torsión  $\theta$  se define como la identidad en los objetos  $(1)$  y  $(-1)$  y se extiende a cualquier objeto según la fórmula 1.24. Ver por ejemplo [33].

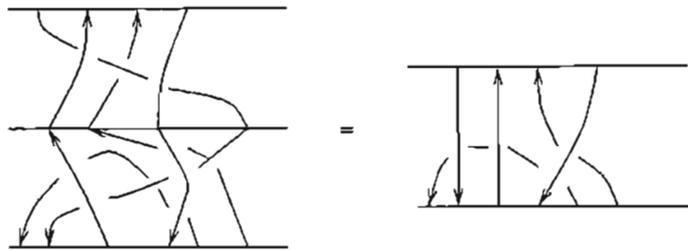


Figura 2.3: Composición de dos marañas

**Ejemplo 2.1.11. Categoría de marañas no orientadas.** Esta categoría es similar a la anterior, con la diferencia de que ahora los arcos no son orientados. Los objetos son entonces los números naturales, con el cero como objeto identidad, y los morfismos son clases de isotopías de marañas no orientadas. La estructura de categoría de listones es obviamente análoga a la del ejemplo anterior.

**Ejemplo 2.1.12. Categorías de diagramas de marañas .** (Este ejemplo está tomado de [8]). La categoría de diagramas de marañas orientadas salvo isotopía regular (respectivamente marañas orientadas salvo isotopía; marañas no orientadas salvo isotopía regular; marañas no orientadas salvo isotopía; marañas orientadas  $S$ -coloreadas salvo isotopía regular; etc), denotadas por  $\text{DOMR}$ ;  $\text{DOM}$ ;  $\text{DMR}$ ;  $\text{DMR}$ ;  $S - \text{DOMR}$ ; etc, es la categoría que tiene por objetos a sucesiones cuyos elementos son 1 y  $-1$  (respectivamente, sucesiones cuyos elementos son 1 y  $-1$ ; números naturales; números naturales; sucesiones cuyos elementos son elementos del conjunto  $\{1, -1\} \times S$ ; etc) y cuyos morfismos son clases de diagramas de marañas orientadas respecto a isotopía regular (respectivamente, clases de diagramas de marañas orientadas respecto a isotopía; clases de diagramas de marañas no orientadas respecto a isotopía regular; clases de diagramas de marañas no orientadas respecto a isotopía; clases de diagramas de marañas respecto a isotopía regular en la cual los arcos de un representante están "coloreados" con los elementos del conjunto  $S$  de manera tal que las isotopías no cambian los "colores"; etc). En todos los casos la composición  $f \circ g$  se realiza pegando el lado inferior de un representante de la clase de la maraña  $f$  con el lado superior de un representante de la clase de la maraña  $g$  y tomando su clase de isotopía respectiva. Además el producto tensorial se realiza, en todos los casos, como en el ejemplo anterior, o sea colocando uno al lado del otro de izquierda a derecha. El

objeto identidad es la sucesión vacía (respectivamente, la sucesión vacía;  $0$ ;  $0$ ; la sucesión vacía; etc). El dual de un objeto, lo definimos invirtiendo el orden de la sucesión y cambiando el signo de sus elementos (respectivamente, invirtiendo el orden de la sucesión y cambiando el signo de sus elementos; el mismo objeto; el mismo objeto; invirtiendo el orden de la sucesión y cambiando el signo de sus elementos sin cambiar el color; etc). El trenzamiento  $c$ , y la dualidad  $(*, b, d)$  se definen de manera análoga a como se definió en el ejemplo anterior tomando los arcos orientados y/o coloreados, si la categoría respectiva es orientada y/o coloreada.

**Ejemplo 2.1.13. Categoría de marañas enmarcadas.** La categoría de marañas enmarcadas  $\mathcal{ME}$  tiene los mismos objetos que  $\mathcal{MO}$ , pero un morfismo es una clase de isotopía de maraña enmarcada. Una maraña enmarcada  $L$  es una maraña con un campo vectorial normal de clase  $C^\infty$  definido en ella, tal que el campo nunca es tangente a  $L$  y está dado por el vector  $(0, -1, 0)$  en los puntos frontera  $\partial L$ . Podemos imaginar una maraña enmarcada, como una maraña en la que en lugar de arcos, tenemos listones, uno de cuyos bordes es la maraña en sí y el otro, es la maraña que se obtiene de la primera haciendo una pequeña traslación en la dirección del campo vectorial. Un *enmarcamiento* (framing) de una maraña enmarcada  $L$  es una clase de homotopía de campos vectoriales normales, donde dos campos vectoriales se dicen homotópicos si uno se puede transformar en el otro mediante una homotopía dentro de la clase de campos vectoriales normales.

Las marañas enmarcadas admiten también una representación como diagramas en el plano. En principio se pueden representar como diagramas de listones, proyectando los listones en el plano, de manera análoga a como se hace con marañas usuales, pero mejor aún, se pueden representar como diagramas de marañas usuales. Sea  $D$  un diagrama de marañas. Por definición, este diagrama va a representar la maraña enmarcada que tiene como maraña subyacente a la que ésta representa y cuyo enmarcamiento está dado por el campo vectorial constante  $(0, -1, 0)$ , que es perpendicular al plano del diagrama y que apunta hacia el lector. Para representar una maraña enmarcada en general, basta con saber cómo representar una maraña alrededor de la cual el campo vectorial rota un ángulo de  $2\pi$  o de  $-2\pi$ . Los diagramas correspondientes se representan en la figura 2.4. Los de listones en  $a$  y  $b$  y los diagramas de marañas, en  $c$  y  $d$ . La composición de morfismos, el producto tensorial, la dualidad y el trenzamiento se generalizan en este caso de manera natural. Sin embargo, la torsión ya no es trivial. Definimos  $\theta_{\pm 1} : (\pm 1) \rightarrow (\pm 1)$  como

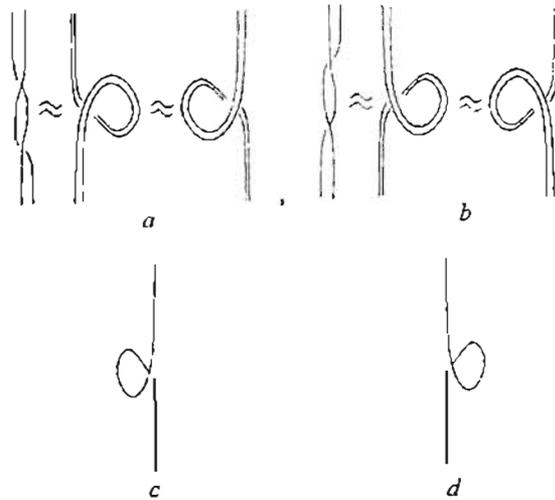


Figura 2.4: Representación de una torcedura completa en un listón.

la maraña enmarcada que tiene a  $\text{id}_{\pm 1}$  como maraña subyacente y en la que el campo vectorial da una vuelta completa de  $2\pi$ , si el objeto es 1 y  $-2\pi$  si el objeto es  $-1$  como en las figuras 2.4 *a* y *b*. La torsión se extiende al resto de los objetos, por la fórmula 1.24.

El siguiente ejemplo es una generalización de este último.

**Ejemplo 2.1.14.** Categoría de gráficas de listones sobre una categoría pivotal estricta. Una gráfica de listones es una superficie compacta y orientada de  $\mathbb{R}^3$ , que se puede descomponer en piezas básicas: *bandas*, *anillos* y *cupones*. Una banda es la imagen homeomorfa del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . A las imágenes de los intervalos  $[0, 1] \times 0$  y  $[0, 1] \times 1$  las llamamos bases de la banda, mientras que a la imagen del intervalo  $(1/2) \times [0, 1]$  la llamaremos el *alma* de la banda.

Un anillo es la imagen homeomorfa del cilindro  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ . La imagen del círculo  $\mathbb{S}^1 \times (1/2)$  se denominará el *alma* del anillo. Una banda o un anillo se dice que están *dirigidos*, si sus almas respectivas están orientadas.

Un cupón es una banda con una base distinguida, llamada base inferior. La base opuesta es llamada base superior.

**Definición 2.1.15.** Sean  $k, l$  enteros no negativos. Una  $(k, l)$ -gráfica de listones en  $\mathbb{R}^3$  es una superficie orientada  $\Omega$ , encajada en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , que

se puede descomponer en la unión de un número finito de bandas, anillos y cupones, de manera que:

(i)  $\Omega$  intersecta los planos  $\mathbb{R}^2 \times 0$  y  $\mathbb{R}^2 \times 1$  ortogonalmente en los siguientes segmentos, que son la bases de ciertas bandas de  $\Omega$  :

$$\{[i - (1/10), i + (1/10)] \times 0 \times 0 \mid i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$\{[j - (1/10), j + (1/10)] \times 0 \times 1 \mid j = 1, 2, \dots, l\}$$

En los puntos de esos segmentos, la orientación de  $\Omega$ , está determinada por el par de vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  tangentes a  $\Omega$ .

(ii) Las otras bases de las bandas yacen en las bases de los cupones; de otra forma, las bandas cupones y anillos son ajenos.

(iii) Las bandas y los anillos, están dirigidos.

Por una isotopía de gráficas de listones vamos a entender una isotopía en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  que es constante en los intervalos fronteras (mencionados en (i)) y que conserva la descomposición en bandas, anillos y cupones, así como las direcciones de las bandas y anillos y la orientación de la superficie. En el curso de la isotopía las bases de las bandas que yacen en las bases de cupones se pueden mover a lo largo de estas bases sin tocarse entre sí.

De manera similar al caso de enlaces y marañas las gráficas de listones se pueden representar por diagramas planos. La proyección la realizamos primero deformando la gráfica en  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$  a la posición general, o sea, de manera que quede casi paralela y muy cerca del plano  $\mathbb{R} \times 0 \times \mathbb{R}$ . En particular, los cupones deben quedar paralelos al plano de proyección de forma tal que las bases superiores queden por arriba de las inferiores. Proyectamos entonces los cupones y las almas (no toda la banda) de las bandas. Los puntos de cruce no deben solaparse con las proyecciones de los cupones.

Esperamos que al lector le quede clara la idea general de la definición de gráficas de listones y de diagramas de gráficas de listones. En la figura 2.5 mostramos ejemplos de gráficas de listones. Hay algunos detalles por precisar, pero harían esta sección, a mi juicio, innecesariamente larga; el lector interesado puede consultar la fuente original [35] de donde fue extraído este importante ejemplo.

Sea ahora  $\mathbf{V}$ , una categoría pivotal. Diremos que una gráfica de listones está coloreada sobre  $\mathbf{V}$  si cada banda y cada anillo de la gráfica tiene asociado un objeto de  $\mathbf{V}$ . A este objeto lo llamaremos el color de la banda o del

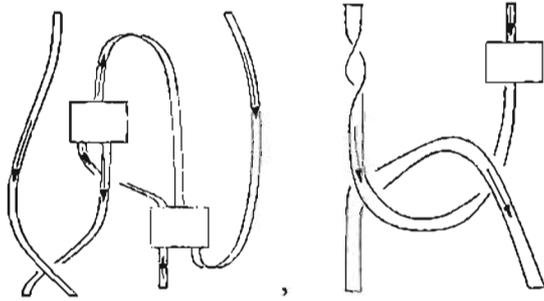
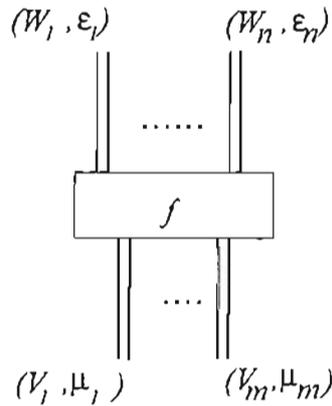


Figura 2.5: Ejemplos de gráficas de listones.

anillo. Los cupones del diagrama los coloreamos con morfismos de  $\mathbf{V}$  como sigue. Sea  $Q$  un cupón de una gráfica  $\Omega$  con bandas y anillos coloreados. Sean  $V_1, V_2, \dots, V_m$  los colores de las bandas de  $\Omega$  que tocan a la base inferior de  $Q$ , y que aparecen en el orden inducido por la orientación de  $\Omega$  restringida a  $Q$ , y sean  $W_1, W_2, \dots, W_n$  los colores de las bandas de  $\Omega$  que tocan a la base superior de  $Q$  y que aparecen en el orden inducido por la orientación opuesta. En la figura 2.6 hemos representado una gráfica en donde  $Q$  está orientado en sentido horario. Sean  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \{-1, 1\}$ , (respectivamente

Figura 2.6: Ejemplo de gráfica  $\mathbf{V}$ -coloreada

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ ) los números determinados por las direcciones de las bandas, o sea,  $\mu_i = 1$  (respectivamente  $\epsilon_i = -1$ ) si la orientación de la banda

sale del cupón y  $\mu_i = -1$  (respectivamente  $\varepsilon_i = 1$ ) si la orientación de la banda es hacia el cupón. Un color del cupón  $Q$  es un morfismo arbitrario  $f : V_1^{\mu_1} \otimes \dots \otimes V_m^{\mu_m} \longrightarrow W_1^{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes W_n^{\varepsilon_n}$ , donde para cada objeto  $V$  de  $\mathbf{V}$ , definimos  $V^1 = V$  y  $V^{-1} = V^*$ . Una gráfica de listones decimos entonces que está  $\mathbf{V}$ -coloreada, si todas sus bandas, anillos y cupones están coloreadas. La técnica de colorear gráficas de listones se extiende de manera obvia a los diagramas de gráficas de listones, en donde se colorean las proyecciones de la almas de bandas y anillos y las proyecciones de los cupones. Pasamos ahora a definir la categoría de gráficas de listones.

**Definición 2.1.16.** La categoría de gráficas de listones  $\mathbf{V}$ -coloreadas, denotada por  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  tiene como objetos a sucesiones finitas  $((V_1, \mu_1), \dots, (V_m, \mu_m))$ , donde  $V_1, \dots, V_m$  son objetos de  $\mathbf{V}$  y  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \{-1, 1\}$ . La sucesión vacía también se considera un objeto de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$ . Un morfismo  $\sigma \longrightarrow \sigma'$  es una clase de isotopía de gráficas de listones  $\mathbf{V}$ -coloreadas tal que  $\sigma$  (respectivamente  $\sigma'$ ) es la sucesión de objetos y direcciones de estos que inciden en la frontera inferior (respectivamente superior). El producto tensorial, la dualidad, el entrelazamiento y la torsión se definen de manera análoga a como se definieron en el ejemplo anterior.

## 2.2 Ejemplos algebraicos

En la sección anterior vimos algunos ejemplos geométricos de categorías de listones. Ya en el capítulo anterior, vimos un primer ejemplo algebraico de categoría de listones, a saber, la categoría  $\overline{U}_q\text{-Mod}_f$ . En esta sección veremos otros ejemplos algebraicos. La relación con los ejemplos geométricos la veremos en la siguiente sección.

**Ejemplo 2.2.1.** Sea  $K$  un anillo conmutativo con unidad. La categoría  $P(K)$  de los  $K$ -módulos proyectivos finitamente generados sobre  $K$  y aplicaciones  $K$ -lineales es una categoría de listones. A saber, el producto tensorial es el usual sobre  $K$ , pongamos  $I = K$ . Con el producto tensorial y el objeto unidad así definidos, es obvio que  $P(K)$  es una categoría monoidal. El entrelazamiento es el sistema de trasposiciones  $P_{V,W}$  mencionado al inicio de la sección 1.2. La torsión la definimos como la identidad  $\theta_V = \text{id}_V$  y la dualidad de la manera usual, o sea definimos  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ , el morfismo  $d_V : V^* \otimes V \longrightarrow K$  como la evaluación  $\alpha \otimes v \longmapsto \alpha(v)$ , para  $\alpha \in V^*$  y  $v \in V$  y el morfismo  $b_V : K \longrightarrow V \otimes V^*$  lo definimos como  $b_V = (d_V)^* : K^* = K \longrightarrow (V^* \otimes V)^* =$

$V^{**} \otimes V^* = V \otimes V^*$ , en donde hemos usado las identificaciones usuales  $K^* = K$  y  $V^{**} = V$ . Es fácil verificar que se cumplen los axiomas que definen a una categoría de listones.

Sea  $V$  un módulo libre finitamente generado con base  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  y  $(v^i)_{1 \leq i \leq n}$  la base dual de  $V^*$ . Es un hecho conocido del álgebra lineal que se tiene un isomorfismo  $\lambda_V : V \otimes V^* \rightarrow \text{End}(V)$ , definido por  $\lambda_V(\alpha \otimes v)(u) = \alpha(u)v$  para  $\alpha \in K$  y  $v, u \in V$ . En este caso  $b_V(1) = \lambda_V^{-1}(\text{id}_V)$ . Es fácil ver que expresado en las bases, tenemos que  $b_V(1) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v^i$ .

Nuestro segundo ejemplo es algo más interesante.

**Ejemplo 2.2.2.** Sea  $G$  un grupo abeliano escrito multiplicativamente,  $K$  un anillo conmutativo con unidad,  $K^*$  el grupo multiplicativo formado por los elementos invertibles en  $K$  y  $c : G \times G \rightarrow K^*$  bilineal, esto es,  $c$  cumple que  $c(gg', h) = c(g, h)c(g', h)$  y  $c(g, hh') = c(g, h)c(g, h')$  para  $g, g', h, h' \in G$ . Definimos una categoría  $\mathbf{V}$  como sigue. Los objetos de  $\mathbf{V}$  son los elementos de  $G$ . Para cualquier  $g \in G$  el conjunto  $\text{Hom}(g, g)$  es una copia de  $K$  y si  $g \neq h$ ,  $\text{Hom}(g, h) = 0$  es un conjunto unitario que llamaremos cero. La composición de dos morfismos  $g \rightarrow h \rightarrow f$  es la multiplicación de los elementos correspondientes en  $K$  si  $f = g = h$  y es cero en otro caso. Así, la unidad de  $K$  juega el papel del morfismo identidad de cualquier objeto.

Vamos a definir un producto tensorial en  $\mathbf{V}$ . Definimos  $g \otimes h := gh$  y el producto tensorial de dos morfismos  $g \rightarrow h$  y  $g' \rightarrow h'$  como el producto de los elementos correspondientes de  $K$  si  $g = h$  y  $g' = h'$  y como cero en otro caso. Es fácil ver que este producto tensorial hace de  $\mathbf{V}$  una categoría monoidal estricta con objeto unidad la identidad de  $G$ .

Definiremos ahora un trenzamiento y una torsión en  $\mathbf{V}$ . Para  $g, h \in G$  definimos  $c_{g,h} := c(g, h) \in K : g \otimes h = gh \rightarrow h \otimes g = hg = gh$  y la torsión  $\theta_g := c(g, g) \in K$ . Las igualdades (1.18), (1.19) y (1.24) son consecuencia de la bilinealidad y la naturalidad de  $c$  y  $\theta$  y se verifican fácilmente. Definimos el objeto dual de  $g$  como su inverso, esto es,  $g^* = g^{-1}$ . Entonces  $b_g : 1 \rightarrow g \otimes g^* = gg^{-1} = 1$  es el elemento unidad  $1 \in K$  al igual que el morfismo  $d_g : g^* \otimes g = g^{-1}g = 1 \rightarrow 1$ . Las identidades que deben cumplir  $b_V$  y  $d_V$  se trivializan y la compatibilidad de  $\theta$  se deduce de la identidad  $c(g^{-1}, g^{-1}) = c(g, g)$ . De esta manera,  $\mathbf{V}$  es una categoría de listones.

El siguiente ejemplo está tomado de [8] donde se dejan al lector muchas de las demostraciones que aquí hacemos. Además, nosotros le hemos añadido la torsión a la categoría que allí construyen.

**Ejemplo 2.2.3.** Sea  $G$  un grupo. Un  $G$ -conjunto cruzado (derecho) es un conjunto  $X$  en el que  $G$  actúa por la derecha  $X \times G \rightarrow X$  y una aplicación  $|\cdot| : X \rightarrow G$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow |\cdot| \times \text{id}_G & & \downarrow |\cdot| \\ G \times G & \xrightarrow{\text{conj}} & G \end{array}$$

donde  $\text{conj} : G \times G \rightarrow G$  es la acción derecha de  $G$  en sí mismo dada por conjugación. En otras palabras, se satisface la relación  $g^{-1}|x|g = |x \cdot g|$ . Una aplicación entre  $G$ -conjuntos cruzados  $f : X \rightarrow Y$ , es una aplicación  $G$ -equivariante (o sea  $f(x \cdot g) = f(x) \cdot g$ ) tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow |\cdot| & \swarrow |\cdot| \\ & G & \end{array}$$

Vamos a denotar la categoría de los  $G$ -conjuntos cruzados y aplicaciones entre estos por  $\mathcal{X}(G)$ . Definimos un producto tensorial en  $\mathcal{X}(G)$  por  $X \otimes Y := X \times Y$  con la  $G$ -acción diagonal dada por  $(x, y) \cdot g = (x \cdot g, y \cdot g)$  y con la aplicación  $X \otimes Y = X \times Y \rightarrow G$  dada por  $|(x, y)| = |x||y|$ . La igualdad

$$\begin{aligned} g^{-1}|(x, y)|g &= g^{-1}|x||y|g = g^{-1}|x|gg^{-1}|y|g = |x \cdot g||y \cdot g| \\ &= |(x \cdot g, y \cdot g)| = |(x, y) \cdot g| \end{aligned} \quad (2.1)$$

demuestra que  $X \otimes Y$  es un objeto de  $\mathcal{X}(G)$ . De la misma manera, si dados dos morfismos  $f$  y  $h$ , definimos  $f \otimes h := f \times h$ , las igualdades

$$(f \times h)((x, y) \cdot g) = (f(x \cdot g), h(y \cdot g)) = (f \times h)(x, y) \cdot g$$

$$|(f \times h)(x, y)| = |(f(x), h(y))| = |f(x)h(y)| = |x||y| = |(x, y)|$$

demuestran que  $f \otimes h = f \times h$  es un morfismo en  $\mathcal{X}(G)$ . Así,  $\mathcal{X}(G)$  es una categoría monoidal estricta con objeto unidad el  $G$ -conjunto  $\{1\}$ , con  $|1| = 1$ . Definimos las aplicaciones  $c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$  por  $c_{X,Y}(x, y) = (y, x \cdot |y|)$ , para  $x \in X$  y  $y \in Y$ . Tenemos entonces que:

**Proposición 2.2.4.** *Las aplicaciones  $c_{X,Y} : X \otimes Y \longrightarrow Y \otimes X$  definen un trenzamiento en la categoría  $\mathcal{X}(G)$ .*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
c_{X,Y}((x, y) \cdot g) &= c_{X,Y}(x \cdot g, y \cdot g) \\
&= (y \cdot g, (x \cdot g) \cdot |y \cdot g|) \\
&= (y \cdot g, (x \cdot g) \cdot g^{-1}|y|g) \\
&= (y \cdot g, x \cdot |y|g) \\
&= (y, x \cdot |y|) \cdot g \\
&= (c_{X,Y})(x, y) \cdot g
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Así,  $c$  es  $G$ -equivariante. Además,

$$\begin{aligned}
|c_{X,Y}(x, y)| &= |(y, x \cdot |y|)| \\
&= |y||x \cdot |y|| \\
&= |y||y|^{-1}|x||y| \\
&= |x||y| \\
&= |(x, y)|
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Luego  $c_{X,Y}$  es un morfismo en  $\mathcal{X}(G)$ . Por último, las igualdades:

$$\begin{aligned}
(\text{id}_Y \otimes c_{X,Z})(c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z)(x, y, z) &= (\text{id}_Y \otimes c_{X,Z})(y, x \cdot |y|, z) \\
&= (y, z, x \cdot |y| \cdot |z|) \\
&= (y, z, x \cdot |(y, z)|) \\
&= c_{X,Y \otimes Z}(x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
(c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_U \otimes c_{Y,Z})(x, y, z) &= (c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y)(x, z, y \cdot |z|) \\
&= (z, x \cdot |z|, y \cdot |z|) \\
&= (z, (x, y) \cdot |z|) \\
&= c_{X \otimes Y, Z}(x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
(c_{X',Y'})(f \otimes h)(x, y) &= c_{X',Y'}(f(x), h(y)) \\
&= (h(y), f(x) \cdot |h(y)|) \\
&= (h(y), f(x) \cdot |y|) \\
&= (h(y), f(x \cdot |y|)) \\
&= (h \otimes f)(c_{X,Y})(x, y)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

donde en la última igualdad  $f : X \rightarrow X'$  y  $h : Y \rightarrow Y'$ , son morfismos en  $\mathcal{X}(G)$ , demuestran que  $c_{X,Y}$  es un trenzamiento en la categoría  $\mathcal{X}(G)$ .

Con esto tenemos entonces que la categoría  $\mathcal{X}(G)$  es monoidal estricta con trenzamiento. Sin embargo no es pivotal, puesto que no hay un candidato natural para  $X^*$ . Este ejemplo está tomado de [8] y también aparece con algunas variaciones en [13]. En [8] se construye una categoría asociada que sí resulta ser pivotal con trenzamiento, y en [13] se ve que ésta, para el caso particular en que  $X$  es una potencia de  $G$ , resulta ser de listones. No obstante, debemos hacer notar que  $\mathcal{X}(G)$  así definida tiene torsión. Tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.5.** *Sea  $\theta_X : X \rightarrow X$  definido por  $\theta_X(x) = x \cdot |x|$ . Entonces la familia de isomorfismos  $\theta_X$  es una torsión en  $\mathcal{X}(G)$ .*

*Demostración.* Es claro que  $(\theta_X)^{-1}(x) = x \cdot |x|^{-1}$ , luego  $\theta_X$  es isomorfismo para cada  $X$ . La igualdad

$$\theta_X(x \cdot g) = x \cdot g \cdot |x \cdot g| = x \cdot g \cdot (g^{-1} |x| g) = x \cdot (|x| g) = (x \cdot |x|) \cdot g = \theta_X(x) \cdot g \quad (2.7)$$

demuestra que  $\theta_X$  es  $G$ -equivariante. Concluimos que  $\theta_X$  es morfismo de  $G$ -conjuntos cruzados, de la igualdad

$$|\theta_X(x)| = |x \cdot |x|| = |x|^{-1} |x| |x| = |x| \quad (2.8)$$

Por otra parte, tenemos que

$$\theta_{X \otimes Y}(x, y) = (x, y) \cdot |(x, y)| = (x, y) \cdot |x| |y| \quad (2.9)$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} c_{Y \otimes X} c_{X \otimes Y} (\theta_X \otimes \theta_Y)(x, y) &= c_{Y \otimes X} c_{X \otimes Y} (x \cdot |x|, y \cdot |y|) \\ &= c_{Y \otimes X} (y \cdot |y|, (x \cdot |x|) \cdot |y \cdot |y||) \\ &= c_{Y \otimes X} (y \cdot |y|, x \cdot (|x| |y|^{-1} |y| |y|)) \\ &= c_{Y \otimes X} (y \cdot |y|, x \cdot |x| |y|) \\ &= (x \cdot |x| |y|, (y \cdot |y|) \cdot |x \cdot |x| |y|) \\ &= (x \cdot |x| |y|, y \cdot (|y| |y|^{-1} |x|^{-1} |x| (|x| |y|))) \\ &= (x \cdot |x| |y|, y \cdot |x| |y|) \\ &= (x, y) \cdot |x| |y| \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por lo tanto,  $\theta_{X \otimes Y} = c_{Y \otimes X} c_{X \otimes Y} (\theta_X \otimes \theta_Y)$  y con esto termina la demostración.

Para poder definir una dualidad en  $\mathcal{X}(G)$ , tomamos un anillo conmutativo con unidad  $R$  y pasamos a matrices sobre  $R$ .

**Definición 2.2.6.** Definimos la categoría  $\mathcal{X}(G)/R$  como sigue. Los objetos de  $\mathcal{X}(G)/R$  son los  $G$ -conjuntos cruzados finitos, pero  $\text{Hom}(X, Y)$  es el conjunto de matrices indiciadas por pares  $(x, y) \in X \times Y$  tales que:

- i.  $M_{x.g, y.g} = M_{x, y}, \forall g \in G$
- ii.  $M_{x, y} = \delta_{|x|, |y|} M_{x, y}$ .

**Proposición 2.2.7.**  $\mathcal{X}(G)/R$  es en efecto una categoría monoidal con objeto unidad  $\{1\}$  y con la composición y el producto tensorial de morfismos, dados por la multiplicación y el producto tensorial de matrices respectivamente.

**Nota 2.2.8.** Producto tensorial de matrices.

Recordemos cómo se realiza el producto tensorial de matrices. Sean  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$  y  $B = (b_{kl})_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n}$  dos matrices sobre un anillo conmutativo  $R$ . La matriz  $A \otimes B$  es una matriz de orden  $pm \times qn$  que se define como sigue. Indizamos las filas del producto tensorial con los pares  $(i, k), 1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq m$  y las columnas con los pares  $(j, l), 1 \leq j \leq q, 1 \leq l \leq n$  siguiendo el orden lexicográfico, esto es,  $(i, k) < (i', k')$  si  $i < i'$  o si  $i = i'$  y  $k < k'$ . Entonces el elemento en la fila  $(i, k)$  y la columna  $(j, l)$  es  $a_{ij} b_{kl}$ . Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av & bu & bv \\ au' & av' & bu' & bv' \\ au'' & av'' & bu'' & bv'' \\ cu & cv & du & dv \\ cu' & cv' & du' & dv' \\ cu'' & cv'' & du'' & dv'' \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

*Demostración.* Sean  $M : X \rightarrow Y$  y  $N : Y \rightarrow Z$  morfismos en  $\mathcal{X}(G)/R$ . Entonces

$$(N \circ M)_{x.g, z.g} = \sum_{y \in Y} M_{x.g, y} N_{y.g, z.g} = \sum_{y \in Y} M_{x.g, y.g} N_{y.g, z.g} = \sum_{y \in Y} M_{x, y} N_{y, z}$$

La segunda igualdad se deduce de que  $y \mapsto y.g$  es una biyección de  $Y$  en sí mismo. Además

$$(N \circ M)_{x,z} = \sum_{y \in Y} M_{x,y} N_{y,z} = \sum_{y \in Y} \delta_{|x|,|y|} \delta_{|y|,|z|} M_{x,y} N_{y,z} = \delta_{|x|,|z|} (N \circ M)_{x,z}.$$

En otras palabras,  $(N \circ M)_{x,z}$  es cero si  $|x| \neq |z|$ . Esto prueba que la composición está bien definida y es claro que  $\text{id}_X$  es la matriz  $(\delta_{x,x'})_{x,x' \in X}$ . Supongamos ahora que  $M : X \rightarrow X'$  y  $N : Y \rightarrow Y'$  son dos morfismos en  $\mathcal{X}(G)/R$  y que  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ ,  $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_q\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  y  $Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\}$  y sea  $Q = M \otimes N$ . Las filas de  $Q$  están indizadas por las parejas  $(x_i, y_k)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq m}$  y las columnas por las parejas  $(x'_j, y'_l)_{1 \leq j \leq q, 1 \leq l \leq n}$ . El elemento de  $Q$  en la fila  $(x_i, y_k)$  y la columna  $(x'_j, y'_l)$  es  $M_{x_i, x'_j} N_{y_k, y'_l}$ . Luego

$$Q_{(x_i, y_k).g, (x'_j, y'_l).g} = Q_{(x_i.g, y_k.g), (x'_j.g, y'_l.g)} = M_{x_i.g, x'_j.g} N_{y_k.g, y'_l.g} = M_{x_i, x'_j} N_{y_k, y'_l} = Q_{(x_i, y_k), (x'_j, y'_l)}$$

y  $|x_i, y_k| \neq |x'_j, y'_l| \Leftrightarrow |x_i| |y_k| \neq |x'_j| |y'_l| \Rightarrow |x_i| \neq |x'_j| \text{ o } |y_k| \neq |y'_l| \Rightarrow M_{x_i, x'_j} = 0 \text{ o } N_{y_k, y'_l} = 0$ . Por lo tanto  $Q_{(x_i, y_k), (x'_j, y'_l)} = 0$ . Luego  $M \otimes N \in \text{Hom}(X \otimes X', Y \otimes Y')$ . Además es claro que el objeto unidad  $\{1\}$  tiene las propiedades deseadas.

La categoría  $\mathcal{X}(G)/R$ , así definida, es pivotal con trenzamiento inducido por el de  $\mathcal{X}(G)$  como veremos a continuación, pero de la misma manera tiene torsión inducida por la que encontramos en 2.2.5.

**Proposición 2.2.9.**  $\mathcal{X}(G)/R$  es una categoría pivotal, con  $X^*$  definido como el mismo conjunto  $X$ , pero con la aplicación  $|\cdot|^{-1}$  en lugar de  $|\cdot|$ , y con  $b$  y  $d$ , definidos por

$$b_X(1) = \sum_{x \in X} (x, x)$$

y

$$d_X(x, x') = \delta_{x, x'}.$$

Además es de listones con trenzamiento  $M_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$  definido de manera que

$$M_{(x,y), (y',x')} = \delta_{c_{X,Y}(x,y), (y',x')} = \delta_{(y,y')} \delta_{(x,|y|,x')}$$

y la torsión como la matriz  $\Theta_X : X \rightarrow X$  definida por

$$\Theta_{(x,x')} = \delta_{0_X(x),x'}$$

*Demostración.* Ver [8]. Lo nuevo aquí es la torsión, y la demostración de que se cumplen las condiciones requeridas, se deduce de las propiedades del producto tensorial de matrices y de la delta de Kronecker.

### 2.3 Funtores monoidales

Nuestro primer ejemplo de functor monoidal estricto, relaciona las categorías de los ejemplos 2.1.10 y 2.2.1. A un tal functor lo llamaremos una *representación* de la categoría  $\mathcal{MO}$ . La importancia de tener una representación de  $\mathcal{MO}$ , radica en el hecho de que cada representación  $\mathcal{F}$  determina un invariante de isotopía de enlaces orientados con valores en el campo  $K$ . En efecto, un enlace orientado  $L$  en  $\mathbb{R}^2 \times ]0, 1[$  (este espacio es difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ ) se puede considerar como un endomorfismo del objeto identidad  $\emptyset$ . Por lo tanto, la imagen  $\mathcal{F}(L)$  es un endomorfismo de  $K$ , o sea multiplicación por un escalar en  $K$ . Por definición este escalar depende solamente de la clase de isotopía de  $L$ .

Denotemos por  $X_+$ ,  $X_-$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\bar{\cap}$  y  $\bar{\cup}$  respectivamente a los morfismos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , y  $f$  de  $\mathcal{MO}$  mostrados en la figura 2.7. Turaev en [33] e inde-

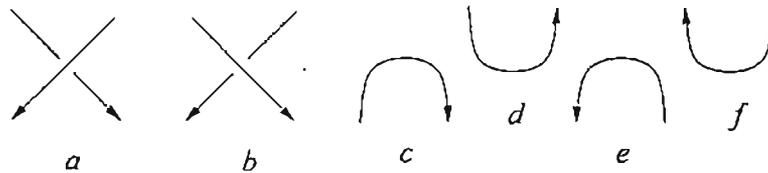


Figura 2.7: Generadores de  $\mathcal{MO}$

pendientemente Freyd y Yetter en [8], demostraron que la categoría  $\mathcal{MO}$ , se puede presentar como generada por los morfismos anteriores con relaciones entre ellos y los morfismos  $\text{id}_1$  e  $\text{id}_{-1}$ .

Por ejemplo, Turaev usa las relaciones siguientes:

$$(\downarrow \cap) \circ (\cup \downarrow) = \downarrow = (\overline{\cap} \downarrow) \circ (\downarrow \overline{\cup}) \quad (2.12)$$

$$(\uparrow \overline{\cap}) \circ (\overline{\cup} \uparrow) = \uparrow = (\cap \uparrow) \circ (\uparrow \cup) \quad (2.13)$$

$$X_+ \circ X_- = X_- \circ X_+ = \downarrow \downarrow \quad (2.14)$$

$$(X_+ \downarrow) \circ (\downarrow X_+) \circ (X_+ \downarrow) = (\downarrow X_+) \circ (X_+ \downarrow) \circ (\downarrow X_+) \quad (2.15)$$

$$(\downarrow \overline{\cap}) \circ (X_{\pm} \uparrow) \circ (\downarrow \cup) = \downarrow \quad (2.16)$$

$$(\cap \downarrow \uparrow) \circ (\uparrow X_{\mp} \uparrow) \circ (\uparrow \downarrow \cup) \circ (\uparrow \downarrow \overline{\cap}) \circ (\uparrow X_{\pm} \uparrow) \circ (\overline{\cup} \downarrow \uparrow) = \downarrow \uparrow \quad (2.17)$$

$$(\uparrow \downarrow \overline{\cap}) \circ (\uparrow X_{\pm} \uparrow) \circ (\overline{\cup} \downarrow \uparrow) \circ (\cap \downarrow \uparrow) \circ (\uparrow X_{\mp} \uparrow) \circ (\uparrow \downarrow \cup) = \downarrow \uparrow \quad (2.18)$$

y

$$\begin{aligned} & (\cap \uparrow \uparrow) \circ (\uparrow \cap \downarrow \uparrow \uparrow) \circ (\uparrow \uparrow X_{\pm} \uparrow \uparrow) \circ (\uparrow \uparrow \downarrow \cup \uparrow) \circ (\uparrow \uparrow \cup) = \\ & = (\uparrow \uparrow \overline{\cap}) \circ (\uparrow \uparrow \downarrow \overline{\cap} \uparrow) \circ (\uparrow \uparrow X_{\pm} \uparrow \uparrow) \circ (\uparrow \uparrow \overline{\cup} \downarrow \uparrow \uparrow) \circ (\overline{\cap} \uparrow \uparrow) \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde, para simplificar la notación, hemos escrito  $ab$  en lugar de  $a \otimes b$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{F}$  es un funtor monoidal estricto de  $\mathcal{MO}$  a la categoría  $\mathcal{K}_{af}$  de espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $K$ , con la estructura de listones que hereda como subcategoría del ejemplo 2.2.1. Entonces, si  $\mathcal{F}(1) = V$ , debido a que  $X_+$  es isomorfismo en  $\mathcal{MO}$  y en virtud de (1.22),  $\mathcal{F}(X_+) = R$  satisface la ecuación de Yang-Baxter para  $V$ , o sea, es un automorfismo de  $V \otimes V$  que cumple que:

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R).$$

En ese caso diremos también que  $R$  es una  $R$ -matriz para  $V$ . Recíprocamente, sea  $R : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$  un automorfismo en  $V \otimes V$  que es solución de la ecuación de Yang-Baxter y  $\mu : V \longrightarrow V$  automorfismo de  $V$  que satisfacen las relaciones:

$$R(\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu)R \quad (2.20)$$

$$\text{tr}_2(R^{\pm}(\text{id}_V \otimes \mu)) = \text{id}_V \quad (2.21)$$

$$(\tau R^{\mp})^+(\text{id}_V \otimes \mu)(R^{\pm} \tau)^+(\text{id}_V \otimes \mu^{-1}) = \text{id}_{V \otimes V}. \quad (2.22)$$

El siguiente teorema se debe a Turaev, [33]

**Teorema 2.3.1.** *Dadas una  $R$ -matriz  $R$  y un automorfismo  $\mu$  en un espacio de dimensión finita  $V$  que satisfacen las relaciones (2.20), (2.21) y (2.22),*

existe un único funtor tensorial estricto  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{MO}$  a  $\mathcal{K}_{df}$ , tal que  $\mathcal{F}(1) = V$ ,  $\mathcal{F}(-1) = V^*$ , y

$$\mathcal{F}(X_+) = R, \quad \mathcal{F}(U) = b_V, \quad \mathcal{F}(\overline{U}) = (\text{id}_V \cdot \otimes \mu^{-1})b_V. \quad (2.23)$$

Necesariamente entonces se tiene

$$\mathcal{F}(X_-) = R^{-1}, \quad \mathcal{F}(\cap) = d_V, \quad \mathcal{F}(\overline{\cap}) = d_V \cdot (\mu \otimes \text{id}_V). \quad (2.24)$$

No veremos la demostración del teorema, remitimos al lector a [33] o [13], aunque la idea de la demostración es clara: los generadores de  $\mathcal{MO}$  satisfacen ciertas relaciones que deben satisfacer las imágenes por  $\mathcal{F}$ . Las condiciones (2.20), (2.21) y (2.22) garantizan que así sea.

**Ejemplo 2.3.2.** Sea  $m > 1$  y  $V_m$  un espacio vectorial sobre  $k$  de dimensión  $m$ , con base  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Definimos  $R_m : V_m \otimes V_m \rightarrow V_m \otimes V_m$ , por

$$R_m(v_i \otimes v_j) = \begin{cases} q^{-m+1}v_i \otimes v_i & \text{si } i = j, \\ q^{-m}v_j \otimes v_i & \text{si } i < j, \\ q^{-m}v_j \otimes v_i + q^{-m}(q - q^{-1})v_i \otimes v_j & \text{si } j > i \end{cases} \quad (2.25)$$

y

$$\mu_m(v_i) = q^{m-2i+1} \text{id}_{V_m \otimes V_m} \quad (2.26)$$

Puede demostrarse entonces que el par  $(R_m, \mu_m)$  satisface las condiciones del teorema 2.3.1, luego este par da lugar a un invariante de isotopía de  $\mathcal{MO}$ . De este invariante se puede derivar el conocido polinomio de Jones-Conway para nudos y enlaces. Ver [33].

Consideremos la categoría  $\mathcal{ME}$  del ejemplo 2.1.13. Esta categoría tiene una propiedad universal que establecemos a continuación.

**Teorema 2.3.3.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de listones y  $V$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Entonces existe un único funtor monoidal estricto  $\mathcal{F}_V$  de  $\mathcal{ME}$  a  $\mathcal{C}$  que conserva el trenzamiento, la dualidad (izquierda) y la torsión, y tal que  $\mathcal{F}(+1) = V$ .*

El teorema anterior nos da un método para encontrar invariantes de enlaces enmarcados. Por ejemplo, tomemos en el ejemplo 2.2.3, la subcategoría  $\mathcal{X}_G(G)/R$  de  $\mathcal{X}(G)/R$  cuya colección de objetos es el conjunto  $\{1, G, G^{\otimes 2}, \dots\}$ . Si aplicamos el teorema anterior a la categoría  $\mathcal{X}_G(G)/R$  y al objeto  $G$ ,

obtenemos un endomorfismo  $\mathcal{F}_G(L)$  del objeto  $\{1\}$ , o sea un número entero, para cada enlace enmarcado  $L$ . Por ejemplo,  $\mathcal{F}_G(L)$  es el número de pares  $(g_1, g_2) \in G \otimes G$  que conmutan,  $g_1 g_2 = g_2 g_1$ , si  $L$  es el enlace de Hopf, y que cumplen la condición  $g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2^{-1} g_1 g_2$ , si  $L$  es el nudo trébol. En general, en [8] se demuestra que  $\mathcal{F}_G(L)$  es el número de homomorfismos de grupo del grupo fundamental de  $L$  a  $G$ .

Por último, consideremos para una categoría de listones  $\mathbf{V}$ , la categoría  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  del ejemplo 2.1.16. Se tiene que ([35]):

**Teorema 2.3.4.** *Sea  $\mathbf{V}$  una categoría de listones estricta con trenzamiento  $c$ , torsión  $\theta$  y dualidad compatible  $(*, b, d)$ . Existe un único funtor covariante  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{V}} : \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{V}$  que conserva el producto tensorial y que satisface las siguientes condiciones:*

(i)  $\mathcal{F}$  transforma cualquier objeto  $(V, +1)$  en  $V$  y cualquier objeto  $(V, -1)$  en  $V^*$ ,

(ii) para cualesquiera objetos  $V$  y  $W$  de  $\mathbf{V}$ , tenemos

$$\mathcal{F}(X_{V,W}^+) = c_{V,W}, \quad \mathcal{F}(\varphi_V) = \theta_V, \quad \mathcal{F}(U_V) = b_V, \quad \mathcal{F}(\cap_V) = d_V,$$

donde  $X_{V,W}^+$  es el morfismo de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  que corresponde a la figura 2.7 (a) coloreada con los objetos  $V$  y  $W$ ,  $\varphi_V$  es el morfismo de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  que corresponde a la figura 2.4 (c) coloreada con el objeto  $V$ , y  $U_V$  y  $\cap_V$ , son los morfismos que corresponden a las figuras 2.7 (c) y (d) respectivamente, coloreadas con el objeto  $V$ ,

(iii)  $\mathcal{F}$  realiza la correspondencia entre los morfismos de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  representados en la figura 1.17, y sus correspondientes etiquetas.

Este teorema, entre otras cosas, (ver [35]), constituye un soporte riguroso para el cálculo gráfico visto en el capítulo anterior. Si  $\Omega, \Omega'$  son gráficas de listones  $\mathbf{V}$ -coloreadas, y  $f$  es un morfismo en  $\mathbf{V}$ , en 1.5 hemos escrito  $f = \Omega$  o  $\Omega = \Omega'$ , en cualquiera de los siguientes casos:

(i)  $f = \mathcal{F}(\Omega)$ ,

(ii)  $\Omega \simeq \Omega'$  (o sea, si son isotópicos) o, si

(iii)  $\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{F}(\Omega')$ .

# Capítulo 3

## Trazas parciales y tránsfer

### 3.1 Traza y dimensión

Sea  $\mathbf{V}$  una categoría de listones y sea  $K = K_{\mathbf{V}}$  el semigrupo  $\text{End}(I)$  con la multiplicación inducida por la composición de morfismos y el elemento unidad  $\text{id}_I$ . El semigrupo  $K$  es conmutativo, pues si  $k, k' : I \rightarrow I$ , entonces

$$kk' = (k \otimes \text{id}_I)(\text{id}_I \otimes k') = k \otimes k' = (\text{id}_I \otimes k')(k \otimes \text{id}_I) = k'k.$$

Definiremos para endomorfismos en  $\mathbf{V}$  un concepto de traza que toma valores en  $K$ .

**Definición 3.1.1.** Sea  $f : V \rightarrow V$  un endomorfismo del objeto  $V$ . Definimos su *traza*  $\text{tr}(f) \in K$  como la composición

$$\text{tr}(f) = d_V c_{V,V} \cdot (\theta_V f \otimes \text{id}_{V \cdot}) b_V : I \rightarrow I. \quad (3.1)$$

Para un objeto  $V$  de  $\mathbf{V}$  definimos su dimensión  $\text{Dim}(V)$  por la fórmula

$$\text{Dim}(V) = \text{tr}(\text{id}_V) = d_V c_{V,V} \cdot (\theta_V \otimes \text{id}_{V \cdot}) b_V \in K. \quad (3.2)$$

Sean  $\bar{b}_V : I \rightarrow V^* \otimes V$  y  $\bar{d}_V : V \otimes V^* \rightarrow I$  los morfismos representados en la figura 3.1. (En la definición de estos morfismos estamos usando el teorema 2.3.4).

**Proposición 3.1.2.** En una categoría de listones  $\mathbf{V}$  se cumple

$$\bar{d}_V = d_V c_{V,V} \cdot (\theta_V \otimes \text{id}_{V \cdot}) \quad (3.3)$$

$$\bar{b}_V = (\text{id}_{V \cdot} \otimes \theta_V) c_{V,V} \cdot b_V \quad (3.4)$$

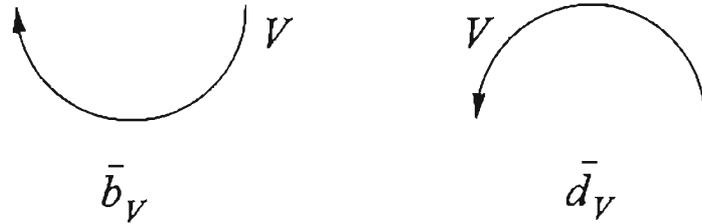


Figura 3.1: Los morfismos  $\bar{b}_V$  y  $\bar{d}_V$

*Demostración.*

La demostración de (3.3) se da gráficamente en la figura 3.2. La identidad (3.4) se demuestra análogamente.

No es difícil ver que la asignación  $V \mapsto (V^*, \bar{b}_V, \bar{d}_V)$  es una dualidad derecha en  $\mathbf{V}$ . Por lo tanto, la proposición anterior nos da un método para construir una dualidad derecha, a partir de una dualidad izquierda, usando el trenzamiento y la torsión.

En lo que sigue, vamos a deducir algunas consecuencias de la proposición anterior.

**Corolario 3.1.3.** *Tenemos las siguientes expresiones equivalentes para la traza:*

$$\text{tr}(f) = \bar{d}_V(f \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V = d_V(\text{id}_{V \cdot} \otimes f)\bar{b}_V \quad (3.5)$$

*Demostración.* Para la primera igualdad tenemos,

$$\begin{aligned} \text{tr}(f) &= d_V c_{V, V \cdot}(\theta_V f \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V \\ &= d_V c_{V, V \cdot}(\theta_V \otimes \text{id}_{V \cdot})(f \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V \\ &= \bar{d}_V(f \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde en la última igualdad se ha usado la identidad (3.3). Por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{tr}(f) &= d_V c_{V, V \cdot}(\theta_V f \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V \\ &= d_V c_{V, V \cdot}(f \theta_V \otimes \text{id}_{V \cdot})b_V \\ &= d_V(\text{id}_{V \cdot} \otimes f \theta_V)c_{V, V \cdot}b_V \\ &= d_V(\text{id}_{V \cdot} \otimes f)(\text{id}_{V \cdot} \otimes \theta_V)c_{V, V \cdot}b_V \\ &= d_V(\text{id}_{V \cdot} \otimes f)\bar{b}_V \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde en la segunda igualdad se ha usado la naturalidad de  $\theta_V$ , en la tercera la naturalidad de  $c_{V,V}$  y en la última, la igualdad (3.4). De aquí obtenemos dos representaciones geométricas equivalentes para la traza.

**Corolario 3.1.4.** *La traza  $\text{tr}(f)$  de un endomorfismo  $f : V \rightarrow V$  se ve geoméricamente uniendo por un arco simple los extremos inferior y superior de la representación gráfica de  $f$  de cualquiera de las formas mostradas en la figura 3.3.*

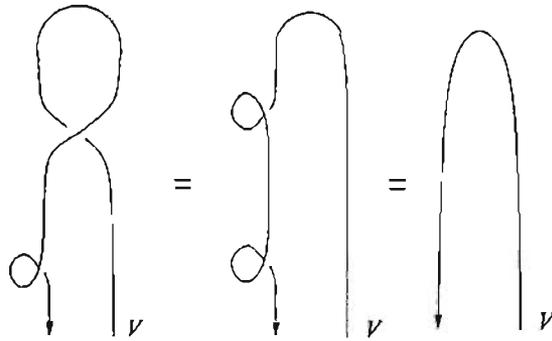


Figura 3.2:  $\bar{d}_V = d_V c_{V,V} \cdot (\theta_V \otimes \text{id}_V)$

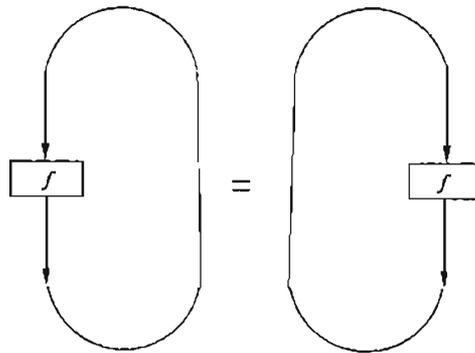


Figura 3.3: Representaciones equivalentes de  $\text{tr}(f)$

**Nota 3.1.5.** En el caso en que el morfismo  $f$  represente a una maraña (orientada o no orientada), la construcción geométrica a la que se refiere el corolario anterior, se conoce como la *cerradura de la maraña  $f$* . Por extensión, en el caso general nos referiremos a esta construcción, como la *cerradura del morfismo  $f$* .

**Corolario 3.1.6.** Para cualquier endomorfismo  $f$  de un objeto  $V$  en una categoría de listones, se tiene que  $\text{tr}(f^*) = \text{tr}(f)$ .

*Demostración.* Se da en la figura 3.4, donde hemos representado a  $\text{tr}(f^*)$  como la cerradura del morfismo definido en (1.62).

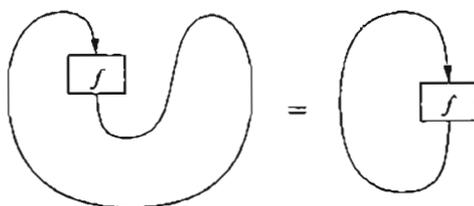


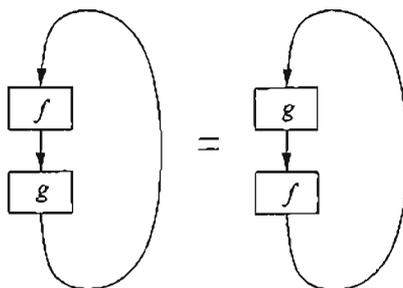
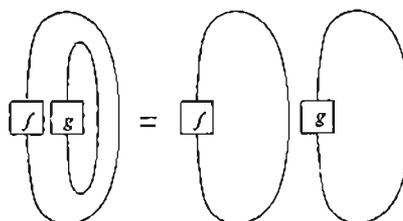
Figura 3.4:  $\text{tr}(f^*) = \text{tr}(f)$ .

La traza así definida tiene propiedades análogas a las de la traza usual definida en la categoría de módulos finitamente generados.

**Proposición 3.1.7.** (i) Para cualquier par de morfismos  $f : V \rightarrow W$ ,  $g : W \rightarrow V$  se tiene que  $\text{tr}(fg) = \text{tr}(gf)$ ,  
(ii) Para cualquier par de endomorfismos  $f, g$  de objetos de  $\mathcal{V}$ , se tiene que  $\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f)\text{tr}(g)$ ,  
(iii) Para cualquier morfismo  $k : 1 \rightarrow 1$  se tiene  $\text{tr}(k) = k$

La condición de conmutatividad (i) de 3.1.7 implica la invariancia de la traza bajo la conjugación en  $\text{End}(V)$ , o sea  $\text{tr}(g^{-1}fg) = \text{tr}(f)$ .

*Demostración.* Para (i) y (ii), ver las figuras 3.5 y 3.6. La relación (iii), se deduce fácilmente de (3.1) puesto que todos los morfismos involucrados se convierten en  $\text{id}_1$ , salvo  $f$  que es igual a  $k$ . El resultado es  $\text{tr}(k) = k$ .

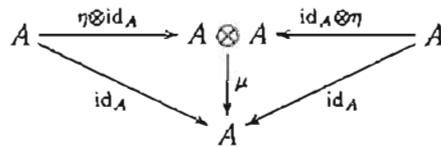
Figura 3.5:  $tr(fg) = tr(gf)$ Figura 3.6:  $tr(f \otimes g) = tr(f)tr(g)$ 

## 3.2 Algebras en categorías monoidales.

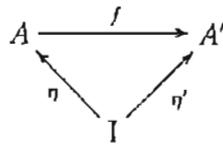
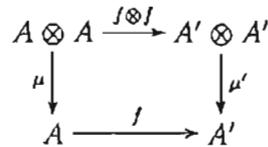
En esta sección extenderemos los conceptos de álgebra y coálgebra a las categorías monoidales.

**Definición 3.2.1.** Sea  $\mathbf{V}$  una categoría monoidal con objeto unidad  $I$ . Decimos que un objeto  $A$  de  $\mathbf{V}$  es un *álgebra* o que tiene *estructura de álgebra* en  $\mathbf{V}$ , si existen morfismos  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  y  $\eta : I \rightarrow A$ , tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}_A} & A \otimes A \\
 \text{id}_A \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array}$$

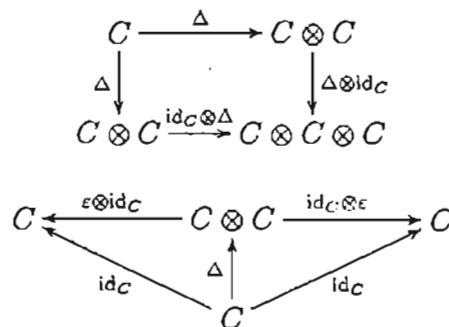


o sea se cumple que  $\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \mu)$  y  $\mu(\text{id}_A \otimes \eta) = \text{id}_A = \mu(\eta \otimes \text{id}_A)$ . En este caso decimos que se satisfacen los axiomas de *asociatividad* y de *unidad* respectivamente. Si  $(A, \mu, \eta)$  y  $(A', \mu', \eta')$  son álgebras en  $\mathbf{V}$ , un morfismo  $f : A \rightarrow A'$  diremos que es un *morfismo de álgebras*, si los diagramas



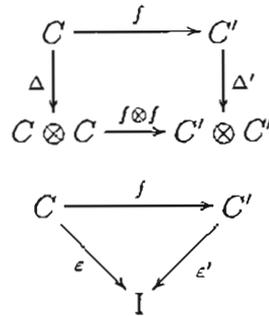
conmutan.

De manera dual tenemos el concepto de coálgebra. Un objeto  $C$  de  $\mathbf{V}$  decimos que es una *coálgebra* o que tiene *estructura de coálgebra* en  $\mathbf{V}$  si existen morfismos  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y  $\varepsilon : C \rightarrow I$  de manera que conmutan los siguientes diagramas



O sea se cumple que  $(\Delta \otimes \text{id}_C)\Delta = (\text{id}_C \otimes \Delta)\Delta$  y  $(\text{id}_C \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}_C = (\varepsilon \otimes \text{id}_C)\Delta$ . Decimos en este caso, que se satisfacen los axiomas de *coasociatividad* y de *counidad* respectivamente. Si  $(C, \Delta, \varepsilon)$  y  $(C', \Delta', \varepsilon')$  son coálgebras en  $\mathbf{V}$ , diremos que un morfismo  $f : C \rightarrow C'$  es *morfismo de coálgebras* si los

siguientes diagramas



conmutan.

En la figura 3.7 damos una representación diagramática de los morfismos  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\Delta$  y  $\varepsilon$  y de los axiomas de asociatividad, unidad, coasociatividad y counidad. Los diagramas correspondientes los etiquetamos con los números 1, ..., 8 respectivamente.

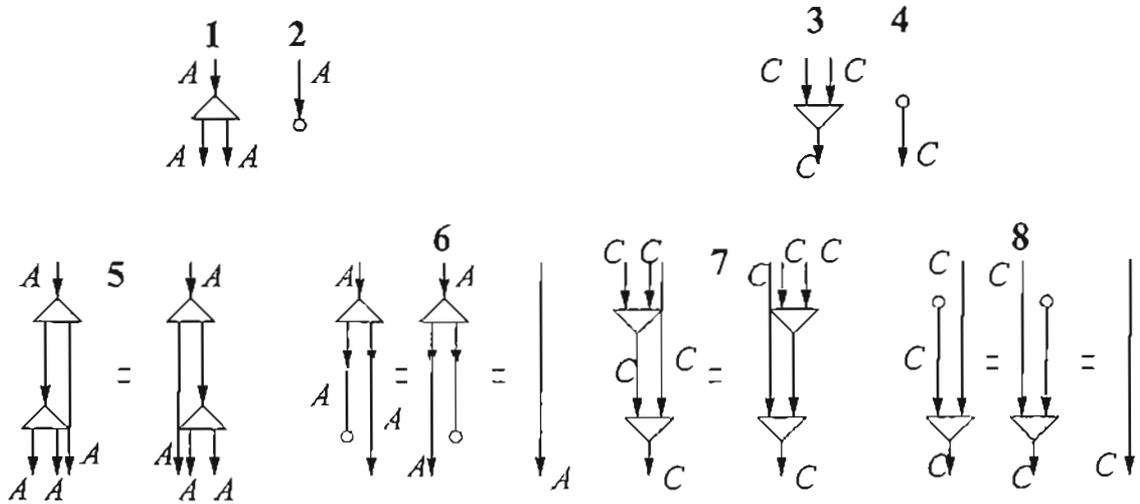


Figura 3.7: Axiomas de álgebra y de coálgebra.

Supongamos que  $\mathbf{V}$  es una categoría monoidal con trenzamiento  $c$ , y sea  $A$  un álgebra en  $\mathbf{V}$ . Podemos dotar a  $A \otimes A$  con una estructura de álgebra de manera canónica usando el trenzamiento  $c$ .

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $A$  un álgebra en la categoría monoidal  $\mathbf{V}$  que tiene trenzamiento  $c$ . Entonces  $(A \otimes A, \hat{\mu}, \eta \otimes \eta)$  es álgebra, donde  $\hat{\mu}$  está dado por*

$$\hat{\mu} : A \otimes A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\text{id}_A \otimes c_{A,A} \otimes \text{id}_A} A \otimes A \otimes A \otimes A \xrightarrow{\mu \otimes \mu} A \otimes A$$

*Demostración* En la figura 3.8 se demuestra la proposición. En la segunda igualdad en la parte superior se ha usado dos veces el axioma de asociatividad, en tanto que en la segunda igualdad de la parte inferior se ha usado dos veces el axioma de unidad. Aunque no se ha señalado en el dibujo, todos los arcos están coloreados con el objeto  $A$ .

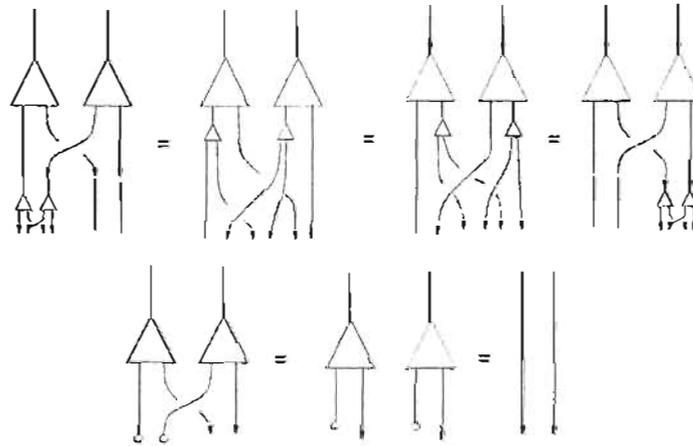


Figura 3.8: Estructura de álgebra en  $A \otimes A$ .

Si  $C$  es una coálgebra en  $\mathbf{V}$ , entonces de manera dual  $C \otimes C$  tiene estructura de coálgebra, dada por

$$\hat{\Delta} : C \otimes C \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} C \otimes C \otimes C \otimes C \xrightarrow{\text{id}_C \otimes c_{C,C} \otimes \text{id}_C} C \otimes C \otimes C \otimes C.$$

El objeto  $I$  tiene estructura de álgebra y de coálgebra trivial, o sea, la multiplicación, unidad, comultiplicación y counidad son todos iguales a  $\text{id}_I$ .

**Proposición 3.2.3.** *Si  $(H, \mu, \eta)$  es álgebra y  $(H, \Delta, \epsilon)$  es coálgebra, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- i.  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  y  $\epsilon : H \rightarrow I$  son morfismos de álgebras.
- ii.  $\mu : H \otimes H \rightarrow H$  y  $\eta : I \rightarrow H$  son morfismos de coálgebras.

*Demostración.* El hecho de que  $\Delta$  y  $\varepsilon$  sean morfismos de álgebras equivale a la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & H \otimes H \otimes H \otimes H \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \widehat{\mu} \\
 H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & I \otimes I \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 H & \xrightarrow{\varepsilon} & I
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 I \otimes I & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & H \otimes H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \text{id} \searrow & & \swarrow \varepsilon \\
 & I &
 \end{array}$$

En tanto que  $\mu$  y  $\eta$  son morfismos de coálgebras si los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\mu} & H \\
 \widehat{\Delta} \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\mu \otimes \mu} & H \otimes H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} & I \otimes I \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \text{id} \\
 H & \xrightarrow{\varepsilon} & I
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \text{id} \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 I \otimes I & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & H \otimes H
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \text{id} \searrow & & \swarrow \varepsilon \\
 & I &
 \end{array}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de  $\widehat{\Delta}$  y de  $\widehat{\mu}$  vemos que son exactamente los mismos diagramas. La siguiente definición se debe a Majid (1991), (ver por ejemplo [29]).

**Definición 3.2.4.** Sea  $H$  un objeto en una categoría monoidal  $\mathbf{V}$ , que tiene simultáneamente estructura de álgebra  $(H, \mu, \eta)$  y de coálgebra  $(H, \Delta, \varepsilon)$ . Diremos que  $H$  es un *biálgebra*, si los morfismos  $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$  satisfacen una de las dos condiciones equivalentes siguientes:

- i.  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  y  $\varepsilon : H \rightarrow I$  son morfismos de álgebras.
- ii.  $\mu : H \otimes H \rightarrow H$  y  $\eta : I \rightarrow H$  son morfismos de coálgebras.

Veremos en la siguiente proposición que en una categoría pivotal, aparecen de manera natural objetos con estructura de álgebra y de coálgebra.

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $\mathcal{V}$  una categoría que es pivotal autónoma tal que para todo objeto  $X$  se tiene  ${}^*X = X^*$ , o es de listones, y  $X$  un objeto de  $\mathcal{V}$ . Entonces el objeto  $B = X \otimes X^*$  tiene estructura de álgebra con  $\mu$  y  $\eta$  dadas por*

$$\mu : B \otimes B = X \otimes X^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{id}_X \otimes \text{id}_{X^*}} X \otimes X^* = B$$

y

$$\eta : \mathbb{1} \xrightarrow{b_X} B$$

y tiene estructura de coálgebra con  $\Delta$  y  $\varepsilon$  dadas por

$$\Delta : B = X \otimes X^* \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \overline{b_X} \otimes \text{id}_{X^*}} X \otimes X^* \otimes X \otimes X^* = B \otimes B$$

y

$$\varepsilon : B = X \otimes X^* \xrightarrow{\overline{d_X}} \mathbb{1}$$

*Demostración.* En la figura 3.9 simultáneamente se representan los morfismos  $\mu$  y  $\eta$  y se demuestran los axiomas de asociatividad y de unidad, o sea que se cumplen las condiciones que definen a un álgebra  $\mu(\mu \otimes \text{id}_X) = \mu(\text{id}_X \otimes \mu)$  y  $\mu(\text{id}_X \otimes \eta) = \text{id}_X = \mu(\eta \otimes \text{id}_X)$ . Los morfismos  $\Delta$  y  $\varepsilon$  los representamos en la figura 3.10 La demostración de los axiomas de coasociatividad y de counidad es dual a ésta y la omitimos.

Sin embargo, el objeto  $B = X \otimes X^*$  no tiene estructura de biálgebra, pues no se cumplen las condiciones de compatibilidad de 3.2.4. En el Capítulo 5 veremos cómo construir, a partir de una categoría pivotal, una en donde existen objetos con estructura de biálgebra.

**Nota 3.2.6.** Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una *representación* de la categoría  $\mathcal{V}$ , es decir, un funtor monoidal estricto de  $\mathcal{V}$  en la categoría de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión finita, y que  $A$  es un álgebra en  $\mathcal{V}$ . Entonces  $\mathcal{F}(A)$  es un álgebra en el sentido usual. Análogamente, si  $C$  es una coálgebra en  $\mathcal{V}$ , entonces  $\mathcal{F}(C)$  es una coálgebra en el sentido usual. Para  $\mathcal{F}(A \otimes A) = \mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(A)$ , tenemos dos estructuras de álgebra, a saber, una dada por  $(\mathcal{F}(A \otimes A), \mathcal{F}(\widehat{\mu}), \mathcal{F}(\eta \otimes \eta))$ , donde  $(A \otimes A, \widehat{\mu}, \eta \otimes \eta)$  es la estructura de 3.2.2 y otra dada por la estructura usual o canónica para  $\mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(A)$ , es decir  $(\mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(A), (\mathcal{F}(\mu) \otimes \mathcal{F}(\mu))(\text{id}_{\mathcal{F}(A)} \otimes P_{\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A)} \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(A)}), \mathcal{F}(\eta) \otimes \mathcal{F}(\eta))$ .

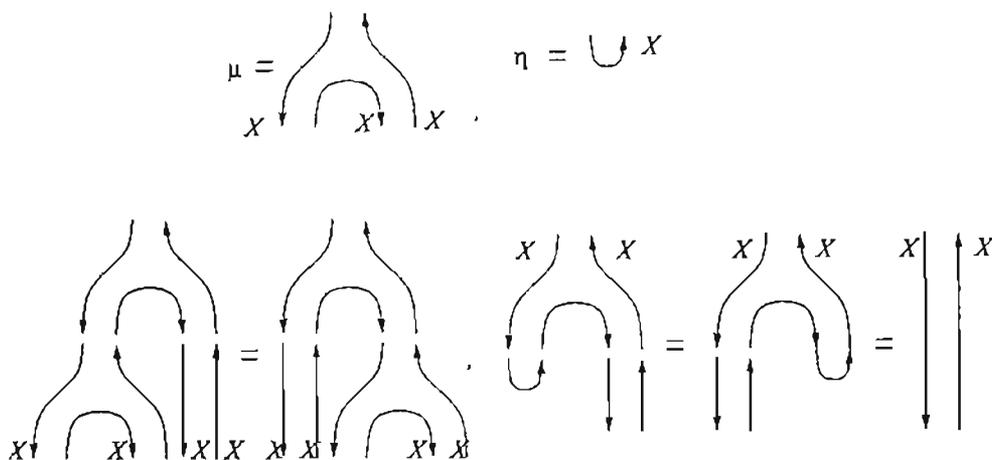


Figura 3.9:  $\mu(\mu \otimes \text{id}_B) = \mu(\text{id}_B \otimes \mu)$  y  $\mu(\eta \otimes \text{id}_B) = \mu(\text{id}_B \otimes \eta) = \text{id}_B$ .

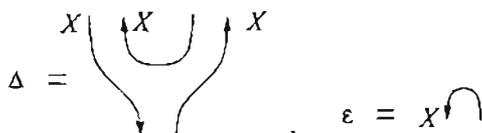


Figura 3.10: La comultiplicación  $\Delta$  y la counidad  $\varepsilon$

Vamos a escribir  $\widetilde{\mathcal{F}(A)} \otimes \mathcal{F}(A)$  y  $\mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(A)$  para denotar las álgebras con las estructuras no canónica y canónica respectivamente. Notemos que la diferencia radica en el producto, pues  $\mathcal{F}(\widehat{\mu}) = (\mathcal{F}(\mu) \otimes \mathcal{F}(\mu))(\text{id}_{\mathcal{F}(A)} \otimes \mathcal{F}(c_{A \otimes A}) \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(A)})$  y  $\mathcal{F}(c_{A \otimes A})$  es una  $R$ -matriz en  $\mathcal{F}(A)$ , que no coincide con la trasposición  $P_{A,A}$  en general.

Es por esto último, que si  $H$  es una biálgebra en  $\mathcal{V}$ , entonces no necesariamente  $\mathcal{F}(H)$  es una biálgebra en el sentido usual, puesto que  $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$  es un morfismo de álgebras en  $\mathcal{V}$ , o sea, con el producto  $(\mu \otimes \mu)(\text{id}_H \otimes c_{H,H} \otimes \text{id}_H)$  en  $H \otimes H$ . Luego lo que tenemos es que  $\mathcal{F}(\Delta) : \mathcal{F}(H) \rightarrow \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$  es un morfismo de álgebras, pero no necesariamente lo es  $\mathcal{F}(\Delta) : \mathcal{F}(H) \rightarrow \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$ .

Sin embargo, es posible obtener al álgebra  $\mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$  como la imagen de un functor si la categoría  $\mathcal{V}$  es de listones y  $\mathcal{F}$  es un functor monoidal estricto que conserva la dualidad de  $\mathcal{V}$  a la categoría de espacios vectoriales de

dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ , que denotaremos por  $\mathbb{C}_{df}$ , considerada como categoría de listones con la estructura usual (en particular el trenzamiento es la trasposición). Sean  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  y  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}_{df}}$  las categorías de gráficas de listones asociadas a  $\mathbf{V}$  y  $\mathbb{C}_{df}$  respectivamente y  $\mathcal{Q}_{\mathbf{V}}, \mathcal{Q}_{\mathbb{C}_{df}}$  los funtores de la proposición 2.3.4. Podemos extender el funtor  $\mathcal{F}$ , a un funtor  $\widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}_{df}}$  que transforma el objeto  $((V_1, \beta_1), \dots, (V_m, \beta_m))$  de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$ , donde  $\beta = \pm 1$ , en el objeto  $((\mathcal{F}(V_1), \beta_1), \dots, (\mathcal{F}(V_m), \beta_m))$  de  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}_{df}}$  y a una gráfica de listones  $\mathbf{V}$ -coloreada, le cambia el color de las bandas, los cupones y anillos, por la imagen bajo el funtor  $\mathcal{F}$  de estos colores, quedando una gráfica de listones  $\mathbb{C}_{df}$ -coloreada. Sean

$$\mathcal{R} = \mathcal{F} \circ \mathcal{Q}_{\mathbf{V}} : \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathbf{V}}} \mathbf{V} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbb{C}_{df}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{Q}_{\mathbb{C}_{df}} \circ \widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{L}_{\mathbf{V}} \xrightarrow{\widehat{\mathcal{F}}} \mathbb{C}_{df} \xrightarrow{\mathcal{Q}_{\mathbb{C}_{df}}} \mathbb{C}_{df} \quad (3.8)$$

Entonces, si denotamos por  $\Gamma_{\mathbf{V}}$  al trenzamiento de  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}$  coloreado con el objeto  $V$  de  $\mathbf{V}$ , tenemos que  $\mathcal{R}(\Gamma_{\mathbf{V}}) = \mathcal{F}(c_{V,V})$ , en tanto que  $\mathcal{S}(\Gamma_{\mathbf{V}}) = P_{\mathcal{F}(V), \mathcal{F}(V)}$ . Sea  $\Omega$  el diagrama de gráfica de listones  $\mathbf{V}$ -coloreada de la figura 3.11 (a). La imagen  $\widehat{\mathcal{F}}(\Omega)$  está representada en el diagrama de la figura 3.11 (b). De aquí que  $\mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{F}(\widehat{\mu}) : \mathcal{F}(H)^{\otimes 4} \rightarrow \mathcal{F}(H)^{\otimes 2}$ , mientras que  $\mathcal{S}(\Omega) = (\mathcal{F}(\mu) \otimes \mathcal{F}(\mu))(\text{id}_{\mathcal{F}(H)} \otimes P_{\mathcal{F}(H), \mathcal{F}(H)} \otimes \text{id}_{\mathcal{F}(H)}) : \mathcal{F}(H)^{\otimes 4} \rightarrow \mathcal{F}(H)^{\otimes 2}$ . Es decir,  $\mathcal{R}((H, 1) \otimes (H, 1)) = \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$ , en tanto que  $\mathcal{S}((H, 1) \otimes (H, 1)) = \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$ . Luego las estructuras de álgebra  $\mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$  y  $\mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$

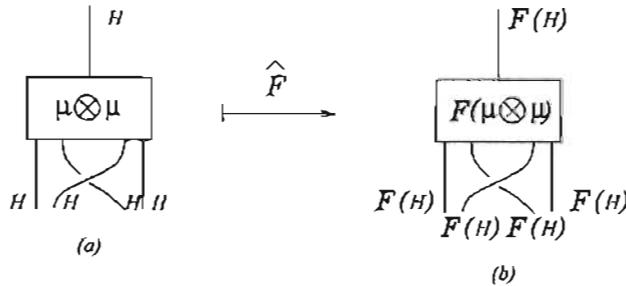


Figura 3.11:  $\mathcal{S}(\Omega) = \mathcal{F}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$

$\mathcal{F}(H)$  se obtienen de una misma gráfica  $\mathbf{V}$ -coloreada, como imágenes de dos funtores distintos.

Haremos uso del funtor  $\mathcal{S}$  en el Capítulo 5.

**Ejemplo 3.2.7.** Si la categoría  $\mathbf{V}$  es la categoría de espacios vectoriales, con el trenzamiento dado por la trasposición, los conceptos anteriores son entonces los conceptos usuales de álgebras, coálgebras y biálgebras. A continuación veremos cual es la estructura de álgebra y coálgebra en el espacio vectorial  $V \otimes V^*$  si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Estableceremos el siguiente lema del álgebra lineal, sin dar la demostración.

**Lema 3.2.8.** *La aplicación  $\chi_{U,V} : V \otimes U^* \rightarrow \text{Hom}(U, V)$  dada por  $\chi_{U,V}(v \otimes \alpha)(u) = \alpha(u)v$  para  $u \in U$ ,  $v \in V$  y  $\alpha \in U^*$  es un isomorfismo si  $U$  o  $V$  son espacios vectoriales de dimensión finita. En particular, si  $V$  es de dimensión finita, la aplicación  $\chi_{V,V} : V \otimes V^* \rightarrow \text{End}(V)$  es un isomorfismo.*

Entonces tenemos que

**Proposición 3.2.9.** *El producto en  $V \otimes V^*$  definido en 3.2.5 corresponde bajo la aplicación  $\chi$  del lema anterior, a la composición de aplicaciones. En otras palabras  $\chi$  es un isomorfismo de álgebras.*

*Demostración.* Sean  $f : V \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow V$  dos endomorfismos de  $V$ . Entonces es fácil ver que

$$\chi_{V,V}^{-1}(f) = \sum_{i,j} f_{ij} v_j \otimes v^i.$$

En efecto,

$$\chi_{V,V} \left( \sum_{i,j} f_{ij} v_j \otimes v^i \right) (v_k) = \sum_j f_{kj} v_j = f(v_k)$$

Análogamente, tenemos

$$\chi_{V,V}^{-1}(g) = \sum_{m,n} g_{mn} v_n \otimes v^m.$$

Multiplicando en  $V \otimes V^*$ , queda

$$\left( \sum_{i,j} f_{ij} v_j \otimes v^i \right) \left( \sum_{m,n} g_{mn} v_n \otimes v^m \right) = \sum_{j,m,i} g_{mi} f_{ij} v_j \otimes v^m$$

que es el morfismo que corresponde bajo  $\chi$  a  $g \circ f$ . Además, tenemos que  $\chi_{V,V}^{-1}(\text{id}_V) = \sum_i v_i \otimes v^i$ .

La siguiente proposición es un conocido resultado del álgebra lineal que establecemos sin demostración.

**Proposición 3.2.10.** *El espacio dual de un álgebra de dimensión finita tiene estructura de coálgebra.*

De aquí, que la estructura de coálgebra en  $V \otimes V^*$  corresponda a la estructura de coálgebra dual a  $\text{End}(V)$ .

**Nota 3.2.11.** Supongamos ahora que  $\mathcal{F}$  es una representación de la categoría de listones  $\mathcal{X}$  y sean  $X$  un objeto de  $\mathcal{X}$ ,  $V = \mathcal{F}(X)$  y  $W = \mathcal{F}(X \otimes X^*) = V \otimes V^*$ . Entonces  $R = \mathcal{F}(c_{X \otimes X^*, X \otimes X^*}) : W \otimes W \rightarrow W \otimes W$  es una  $R$ -matriz en  $W \otimes W$ , que corresponde bajo el isomorfismo de 3.2.8 a una  $R$ -matriz,  $\hat{R}$  en  $\text{End}(V) \otimes \text{End}(V)$ . Por lo visto en 3.2.6,  $W \otimes W$  y por lo tanto  $\text{End}(V) \otimes \text{End}(V)$  tiene dos estructuras de álgebra con la misma unidad  $\text{id}_V \otimes \text{id}_V$ , a saber, la usual, y  $(f \otimes g) \otimes (h \otimes i) \mapsto (f \circ h') \otimes (g' \circ i)$ , donde  $h' \otimes g' = \hat{R}(g \otimes h)$ , que satisface  $(f \otimes g) \otimes (\text{id}_V \otimes \text{id}_V) \mapsto f \otimes g$  y  $(\text{id}_V \otimes \text{id}_V) \otimes (h \otimes i) \mapsto h \otimes i$ , para  $f, g, h$  e  $i$  endomorfismos de  $V$ .

**Ejemplo 3.2.12.** Consideremos la categoría  $\mathcal{X}(G)$  del ejemplo 2.2.3.

**Proposición 3.2.13.** *El objeto  $G$  es un álgebra en  $\mathcal{X}(G)$ .*

*Demostración.*  $G$  es un  $G$ -conjunto en  $\mathcal{X}(G)$  con la acción dada por conjugación y  $|\cdot| = \text{id}_G$ . Definimos  $\mu : G \otimes G = G \times G \rightarrow G$  como el producto en el grupo,  $\mu(x, y) = xy$  y  $\eta : \{1\} \rightarrow G$ , por  $\eta(1) = 1$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \mu((x, y) \cdot g) &= \mu(g^{-1}xg, g^{-1}yg) \\ &= g^{-1}xyg \\ &= \mu(x, y) \cdot g \end{aligned}$$

para  $x, y, g \in G$ , luego  $\mu$  es  $G$ -equivariante, y

$$|\mu(x, y)| = xy = |(x, y)|$$

Es decir,  $|\cdot| \mu = |\cdot|$ . Por lo tanto,  $\mu$  es morfismo en  $\mathcal{X}(G)$  y es trivial ver que también lo es  $\eta$ .

Los axiomas de asociatividad y de unidad que se deben satisfacer en  $\mathcal{X}(G)$  son los correspondientes axiomas de asociatividad y de unidad en el grupo  $G$ . Luego  $(G, \mu, \eta)$  es un álgebra en  $\mathcal{X}(G)$ .

Sin embargo no existe una estructura de coálgebra visible para  $G$ .

Supongamos que  $A$  tiene estructura de álgebra  $(A, \mu, \eta)$  y  $C$  de coalgebra  $(C, \Delta, \epsilon)$ . Concluimos esta sección definiendo una operación en  $\text{Hom}(C, A)$  que llamaremos *producto convolución*.

**Definición 3.2.14.** Sean  $A$  un álgebra y  $C$  una coalgebra en  $V$ . Para  $f, g \in \text{Hom}(C, A)$  definimos el *producto convolución de  $f$  y  $g$* ,  $f * g \in \text{Hom}(C, A)$  por

$$f * g : C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

Supongamos que  $A$  es de la forma  $A = X \otimes X^*$  y  $C$  es de la forma  $C = Y \otimes Y^*$  con las estructuras de álgebra y coalgebra de la proposición 3.2.5. Geométricamente, en este caso, el producto convolución de los morfismos  $f$  y  $g$ , se representa en la figura 3.12.

Definimos  $\tilde{\mu} : \text{Hom}(C, A) \times \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, A)$  y  $\tilde{\eta} : \{*\} \rightarrow$

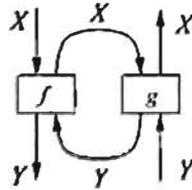


Figura 3.12: Representación gráfica de  $f * g$ .

$\text{Hom}(C, A)$  por  $\tilde{\mu}(f, g) = f * g$  y  $\tilde{\eta} = \eta\epsilon$ . Podemos considerar a  $\tilde{\mu}$  y  $\tilde{\eta}$  como morfismos en la categoría monoidal de conjuntos,  $(C, \times, \star)$ . Tenemos entonces que

**Proposición 3.2.15.**  $(\text{Hom}(C, A), \tilde{\mu}, \tilde{\eta})$  es un álgebra en la categoría monoidal de conjuntos  $(C, \times, \star)$ .

*Demostración.* En la figura 3.13 se demuestran los axiomas de asociatividad y unidad.

Vamos a usar este producto en el siguiente capítulo para dar una descripción alternativa de las álgebras de Temperley-Lieb.

**Nota 3.2.16.** Si la categoría  $V$  es la categoría de espacios vectoriales, la definición anterior es el conocido producto convolución de aplicaciones lineales. Si  $H = A = C$  recordemos que en este caso,  $(\text{End}(H), *, \eta\epsilon)$  es un álgebra, y si las estructuras son compatibles, esto es, si  $H$  es una biálgebra,

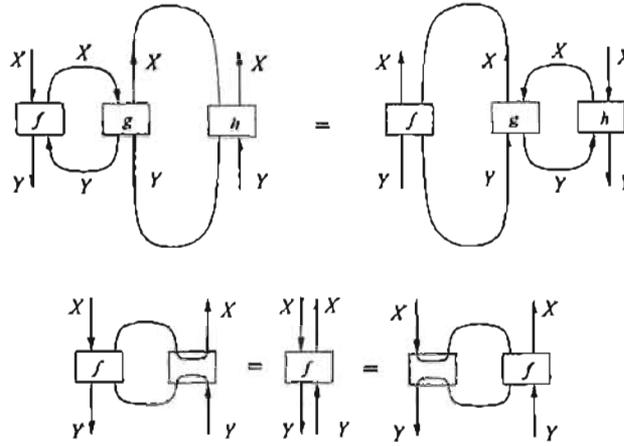


Figura 3.13:  $(f * g) * h = f * (g * h)$  y  $f * \eta\varepsilon = f = \eta\varepsilon * f$

entonces una *antípoda*  $S$  para  $H$  es un endomorfismo que es inverso de la identidad para este producto, o sea,  $S * \text{id} = \text{id} * S = \eta\varepsilon$  y que un *álgebra de Hopf* es una biálgebra  $H$  con una antípoda  $S$ .

### 3.3 Trazas parciales y tránsfer.

#### 3.3.1 Trazas parciales

En esta sección vamos a extender el concepto de traza a *trazas parciales* y veremos su relación con el tránsfer que es un concepto de la topología algebraica, categorizado por Dold y Puppe en [4].

**Definición 3.3.1.** Sea  $f : X \otimes Y \rightarrow X \otimes Y$  un endomorfismo en una categoría de listones  $\mathcal{X}$ . Definimos un endomorfismo de  $Y$ , denotado por  $\text{tr}_{1,X}(f)$  y otro de  $X$ , denotado por  $\text{tr}_{2,Y}(f)$  y que llamaremos la *primera traza parcial de  $f$  respecto a  $X$*  y la *segunda traza parcial de  $f$  respecto a  $Y$*  respectivamente, como las composiciones

$$\text{tr}_{1,X}(f) : Y \xrightarrow{\bar{b}_X \otimes \text{id}_Y} X^* \otimes X \otimes Y \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes f} X^* \otimes X \otimes Y \xrightarrow{d_X \otimes \text{id}_Y} Y$$

$$\text{tr}_{2,Y}(f) : X \xrightarrow{\text{id}_X \otimes b_Y} X \otimes Y \otimes Y^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{Y^*}} X \otimes Y \otimes Y^* \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \bar{d}_Y} X$$

Las trazas parciales se representan gráficamente en la figura 3.14. A continuación veremos algunas de sus propiedades.

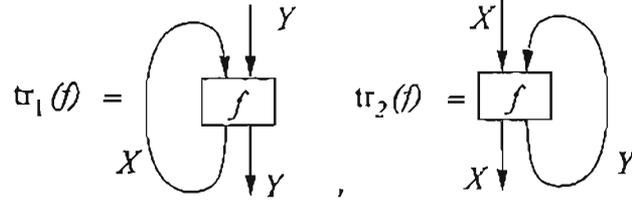


Figura 3.14: Trazas parciales.

**Proposición 3.3.2.** Sea  $f : X \otimes Y \rightarrow X \otimes Y$  un endomorfismo en una categoría de listones  $\mathcal{X}$ . Entonces

(i)  $\text{tr}(\text{tr}_{1,X}(f)) = \text{tr}(\text{tr}_{2,Y}(f)) = \text{tr}(f)$

(ii) si  $Y = X^*$ ,  $f * \text{id}_{X \otimes X} = (\text{tr}_{2,X}(f) \otimes \text{id}_X)$  y  $\text{id}_{X \otimes X} * f = (\text{id}_X \otimes \text{tr}_{1,X}(f))$ .

*Demostración.*

(i) La traza de cada una de las trazas parciales se representa como la cerradura del morfismo  $f$ , luego el resultado se deduce del corolario 3.1.4.

(ii) La primera igualdad se demuestra gráficamente en la figura 3.15. La segunda igualdad se demuestra análogamente.

La siguiente proposición relaciona mediante la traza parcial, al trenzamiento

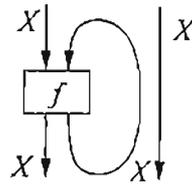


Figura 3.15:  $f * \text{id}_{X \otimes X} = \text{tr}_{2,X}(f) \otimes \text{id}_X$ .

y la torsión en una categoría de listones.

**Proposición 3.3.3.** En una categoría de listones  $\mathcal{X}$  con trenzamiento  $c$  y torsión  $\theta$ , se satisfacen las relaciones

$$\text{tr}_{1,X}(c_{X,X}) = \text{tr}_{2,X}(c_{X,X}) = \theta_X \quad (3.9)$$

*Demostración.* Se da en la figura 3.16.

Supongamos a la inversa, que la categoría  $V$  es trenzada –no suponemos que

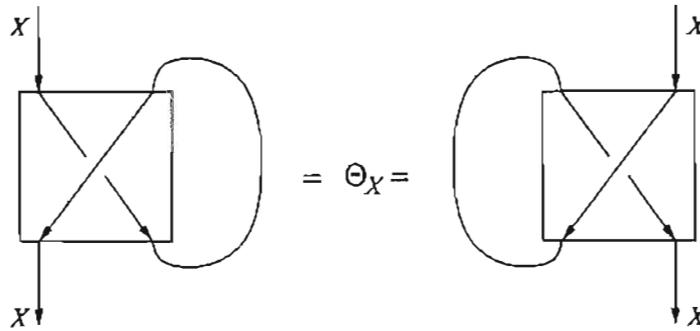


Figura 3.16:  $\text{tr}_{2,V}(c_{X,X}) = \theta_X = \text{tr}_{1,X}(c_{X,X})$ .

tiene torsión– y autónoma, o sea, que tiene dualidad izquierda  $(V^*, b_V, d_V)$  y derecha  $({}^*V, \bar{b}_V, \bar{d}_V)$ , de forma tal que  ${}^*V = V^*$  y  $V^{**}$  es naturalmente isomorfo a  $V$ . La última condición implica que  $f^{**}$  corresponde a  $f$  bajo el isomorfismo natural. Podemos entonces definir las trazas parciales, según las fórmulas 3.3.1. Tenemos entonces que:

**Teorema 3.3.4.** *Supongamos que para cada objeto  $V$  de  $V$ , el morfismo  $\text{tr}_{1,V}(c_{V,V}) = \text{tr}_1(c_{V,V}) : V \rightarrow V$  es un isomorfismo. Entonces la fórmula  $\theta_V = \text{tr}_1(c_{V,V})$  define una torsión en  $V$ .*

*Demostración.* Por hipótesis  $\theta_V$  es isomorfismo. Demostraremos que  $\theta_{V \otimes W} = c_{W,V}c_{V,W}(\theta_V \otimes \theta_W)$  y que  $\theta$  es natural. La primera relación se demuestra usando el cálculo gráfico en la figura 3.17, donde se ha usado la naturalidad del trenzamiento en los cruces encerrados en los círculos  $A$  y  $C$ , y la relación de Yang-Baxter para  $c$  en los cruces encerrados en el círculo  $B$ . La figura 3.18 demuestra la naturalidad de  $\text{tr}_1(c_{V,V})$ . La primera y última igualdades se deducen de la naturalidad de  $c$ . La segunda igualdad se deduce de la proposición correspondiente a (1.67) para la dualidad derecha, la tercera por isotopía de diagramas y la cuarta de (1.67) teniendo en cuenta que podemos sustituir a  $f^{**}$  por  $f$  en la figura.

Supongamos que  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$  es un álgebra de Hopf cuasitriangular con antípoda  $S$ .  $S$  es entonces invertible, pues en este caso  $S^2$  resulta

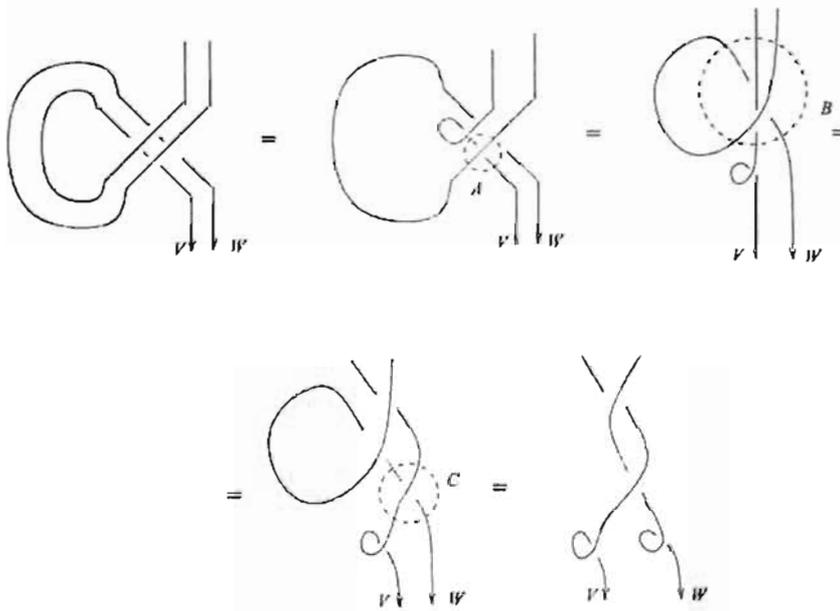


Figura 3.17:  $\text{tr}_1(c_{V \otimes W, V \otimes V}) = c_{W, V} c_{V, W} (\text{tr}_1(c_{V, V}) \otimes \text{tr}_1(c_{W, W}))$

ser un automorfismo interno (ver por ejemplo, [13], sección VIII.4 página 179). Sabemos por 1.4.7 y 1.4.10 que la categoría  $H\text{-Mod}_f$  es una categoría trenzada con dualidad izquierda. Podemos dotar a  $H\text{-Mod}_f$  de una dualidad derecha, si tomamos para un módulo  $V$  en  $H\text{-Mod}_f$ ,  ${}^*V = V^*$  y

$$(x \cdot f)(v) = f(S^{-1}(x) \cdot v) \quad (3.10)$$

para  $x \in H$  y  $f \in V^*$ . Se puede comprobar sin dificultad que las aplicaciones  $\bar{b}_V : k \rightarrow V^* \otimes V$  y  $\bar{d} : V \otimes V^* \rightarrow k$  definidas por  $\bar{b}_V(1) = \sum_i v^i \otimes v_i$  y  $\bar{d}(v_i \otimes v^j) = \delta_{ij}$  define una dualidad derecha en  $H\text{-Mod}_f$  de manera tal que se satisfacen las condiciones previas a la proposición anterior, o sea,  ${}^*V = V^*$  y  $V^{**}$  es naturalmente isomorfo a  $V$ . Por lo tanto, tenemos:

**Corolario 3.3.5.** *Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, R)$  un álgebra de Hopf cuasitriangular con antípoda invertible, y supongamos que para cada  $H$ -módulo  $V$  en  $H\text{-Mod}_f$ , se tiene que  $\theta_V = \text{tr}_1(c_{V, V})$  es un isomorfismo en  $V$ . Entonces la familia  $(\theta_V)_V$  es una torsión compatible con la dualidad. Por lo tanto  $H\text{-Mod}_f$  es una categoría de listones o equivalentemente,  $H$  es un álgebra de listones.*

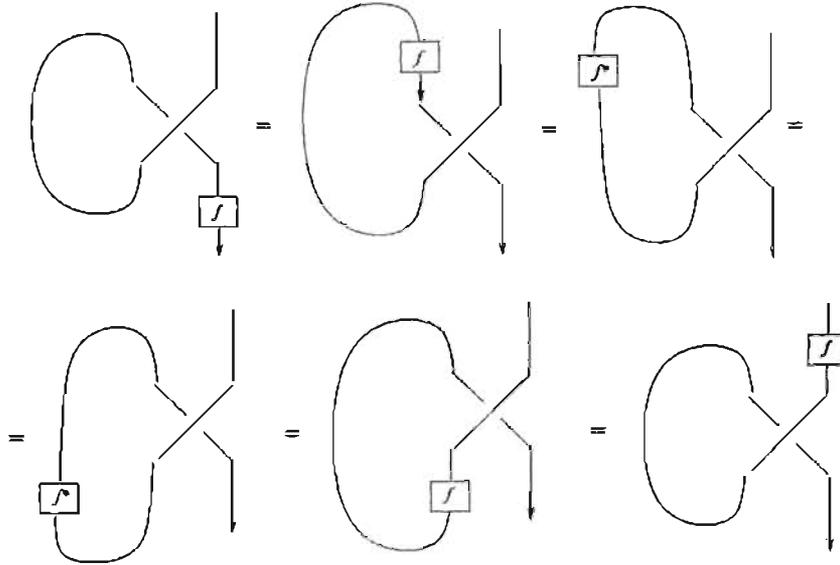


Figura 3.18: Naturality of  $\text{tr}_1(c_{V,V})$

*Demostración.* Sabemos por la proposición anterior, que  $\theta_V = \text{tr}_1(c_{V,V})$  es una torsión en  $H\text{-Mod}_f$ . Faltaría por demostrar que la torsión es compatible con la dualidad, o equivalentemente, por 1.5.3, que  $\text{tr}_1(c_{V^*,V^*}) = (\text{tr}_1(c_{V,V}))^*$ . Notemos primero que la noción de traza parcial en  $H\text{-Mod}_f$  coincide con la noción usual, a saber, si  $f : U \otimes V \rightarrow U \otimes V$  es un endomorfismo de espacios vectoriales de dimensión finita  $U$  y  $V$  con bases  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  y  $(v_j)_{1 \leq j \leq m}$  respectivamente, y si  $f(u_i \otimes v_j) = \sum_{k,l} f_{ij}^{kl} u_k \otimes v_l$ , entonces

$$\text{tr}_1(f)(v_j) = \sum_{i,l} f_{ij}^{il} v_l \quad \text{y} \quad \text{tr}_2(f)(u_i) = \sum_{j,k} f_{ij}^{kj} u_k \quad (3.11)$$

Se cumple entonces que:

**Lema 3.3.6.** *Las trazas parciales satisfacen  $\text{tr}_\alpha(f^*) = (\text{tr}_\alpha(f))^*$  para  $\alpha = 1, 2$ .*

*Demostración.* Haremos la demostración para cuando  $\alpha = 1$ . El caso  $\alpha = 2$  es análogo. Tenemos  $f^*(u^i \otimes v^j) = \sum_{k,l} f_{kl}^{ij} u^k \otimes v^l$ , luego  $\text{tr}_1(f^*)(v^j) = \sum_{i,l} f_{il}^{ij} v^l = (\text{tr}_1(f))^*(v^j)$ . Por lo tanto  $\text{tr}_1(f^*) = (\text{tr}_1(f))^*$ .

Aplicando el lema anterior para  $f = c_{V,V}$ , obtenemos el resultado deseado.

**Ejemplo 3.3.7.** Sea  $k$  un campo y  $H$  el cociente del álgebra libre  $k\{t, x\}$  por el ideal bilateral generado por  $t^2 - 1, x^2, xt + tx$ . Así,  $H$  es un álgebra de cuatro dimensiones, con base  $\{1, x, t, xt\}$ . No es difícil demostrar que

$$\Delta(t) = t \otimes t, \quad \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes t, \quad \varepsilon(t) = 1 \quad (3.12)$$

$$\varepsilon(x) = 0, \quad S(t) = t, \quad S(x) = tx \quad (3.13)$$

le dan a  $H$  una estructura de álgebra de Hopf con antípoda  $S$  de orden de 4. Este ejemplo se debe a Sweedler ([30]). Se puede demostrar también que

$$R_\lambda = \frac{1}{2}(1 \otimes 1 + 1 \otimes x + x \otimes 1 - x \otimes x) + \frac{\lambda}{2}(t \otimes t + t \otimes xt + xt \otimes tx - tx \otimes t)$$

dota a  $H$  con una estructura de álgebra de Hopf trenzada, para cualquier escalar  $\lambda$ . Además es fácil ver que  $R_\lambda^{-1} = P_{H,H}(R_\lambda)$ . Esta última condición implica que el trenzamiento dado por  $R$  es simétrico, igual a la trasposición, en virtud de (1.46), esto es,  $c_{V,V} = P_{V,V}$  para cualquier  $H$ -módulo  $V$  de dimensión finita. Luego  $\text{tr}_1(c_{V,V}) = \text{id}_V$  y por lo tanto,  $\theta_V = \text{id}_V$  es una torsión compatible con la dualidad que hace de  $H\text{-Mod}_f$  una categoría de listones

**Nota 3.3.8.** La estructura de listones que hemos obtenido aquí con el método expuesto, coincide con la dada en [13], aunque allí no dicen cómo obtenerla.

**Ejemplo 3.3.9.** Consideremos el  $\overline{U}_q$ -módulo  $V_n = V_{1,n}$  definido en [13], para  $0 < n < d$ . Como módulo, está generado por un vector de peso máximo  $v_0$ , y la acción de  $\overline{U}_q$  en la base canónica  $\{v_0^n, \dots, v_m^n\}$  está dada por las relaciones

$$Kv_p^n = q^{m-2p}v_p^n, \quad Ev_p^n = [m-p+1]v_{p-1}^n, \quad Fv_p^n = [p+1]v_{p+1}^n. \quad (3.14)$$

Si  $V_m$  es otro  $\overline{U}_q$ -módulo, aplicando (1.46) a la  $R$ -matriz universal de (1.61) podemos encontrar explícitamente a  $c_{V_n, V_m}^{\overline{K}} : V_n \otimes V_m \rightarrow V_m \otimes V_n$ . Queda entonces,

$$c_{V_n, V_m}^{\overline{K}}(v_p^n \otimes v_r^m) = \sum_{0 \leq k \leq r-1} \frac{(q - q^{-1})^k [n-p+k]![p+r]!}{[k]! [n-p]![r]!} \mathcal{G}_{pr}^{\text{am}}(\alpha) v_{r+k}^m \otimes v_{p-k}^n \quad (3.15)$$

donde  $\alpha$  es cualquier entero tal que  $m + \alpha d$  sea un número par, y

$$q_{pr}^{nm}(\alpha) = q^{k(k-1)/2+k(m-n)-pm-rn-2(k-p)(k+r)+(m+\alpha d)n/2} \quad (3.16)$$

Si  $U = V$ , calculando, nos da

$$\text{tr}_1(c^{\bar{R}})(v_r) = \left[ \sum_{k=0}^{n-r} \Gamma_{r+k,r}^k \right] v_r \quad (3.17)$$

donde

$$\Gamma_{r+k,r}^k = \frac{(q - q^{-1})^k [n - r]! [2r + k]!}{[k]! [n - r - k]! [r]!} q_r^n(\alpha), \quad (3.18)$$

$$q_r^n(\alpha) = q^{k(k-1)/2-(r+k)n-rn+2r(k+r)+(n+\alpha d)n/2} \quad (3.19)$$

y  $\alpha$ , como antes, es cualquier entero tal que  $n + \alpha d$  es un número par. Es decir, la traza parcial es multiplicación por un escalar. Este resultado para la torsión en  $\bar{U}_q\text{-Mod}_f$ , coincide con el dado en 1.4.17 si realizamos el cálculo correspondiente de la acción  $(Ku^{-1})v_p$ , usando la fórmula general  $u^{-1} = \sum_i S^{-2}(t_i)s_i$ , siendo  $R = \sum_i s_i \otimes t_i$  la  $R$ -matriz universal.

### 3.3.2 Tránsfer

En [4], Dold y Puppe dan una definición de tránsfer para categorías pivotaes simétricas. Nosotros consideraremos el **tránsfer**, en el contexto de las categorías de listones.

Supongamos que el objeto  $C$  de  $\mathbf{V}$  tiene estructura de coálgebra  $(C, \Delta, \epsilon)$ , y sea  $f : C \rightarrow C$  un endomorfismo de  $C$ .

**Definición 3.3.10.** El *transfer*  $\tau f$  de  $f$  se define como la composición

$$\tau f : I \xrightarrow{b_C} C \otimes C^* \xrightarrow{c_{C,C^*}} C^* \otimes C \xrightarrow{\text{id}_{C^*} \otimes \theta_C} C^* \otimes C \xrightarrow{f^* \otimes \Delta} C^* \otimes C \otimes C \xrightarrow{d_C \otimes \text{id}_C} C \quad (3.20)$$

o bien, en virtud de (3.4), como la composición

$$\tau f : I \xrightarrow{b_V} C^* \otimes C \xrightarrow{f^* \otimes \Delta} C^* \otimes C \otimes C \xrightarrow{d_C \otimes \text{id}_C} C \quad (3.21)$$

**Proposición 3.3.11.** Sin cambiar el morfismo  $\tau f$  podemos reemplazar en (3.20) a  $f^* \otimes \Delta$  por cualquiera de los siguientes morfismos

- (i)  $C^* \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes \Delta} C^* \otimes C \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes f \otimes id_C} C^* \otimes C \otimes C$
  - (ii)  $C^* \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes f} C^* \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes \Delta} C^* \otimes C \otimes C$
  - (iii)  $C^* \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes \Delta} C^* \otimes C \otimes C \xrightarrow{id_{C^*} \otimes f \otimes f} C^* \otimes C \otimes C$
- si  $f$  es morfismo de coálgebras en el caso (iii).

*Demostración.* El tránsfer y las igualdades que plantea la proposición están dadas en la figura 3.19. Las primeras dos igualdades, se obtienen de 1.5.2. La tercera es obvia.

Una de las características que hacen al tránsfer interesante es que tiene una

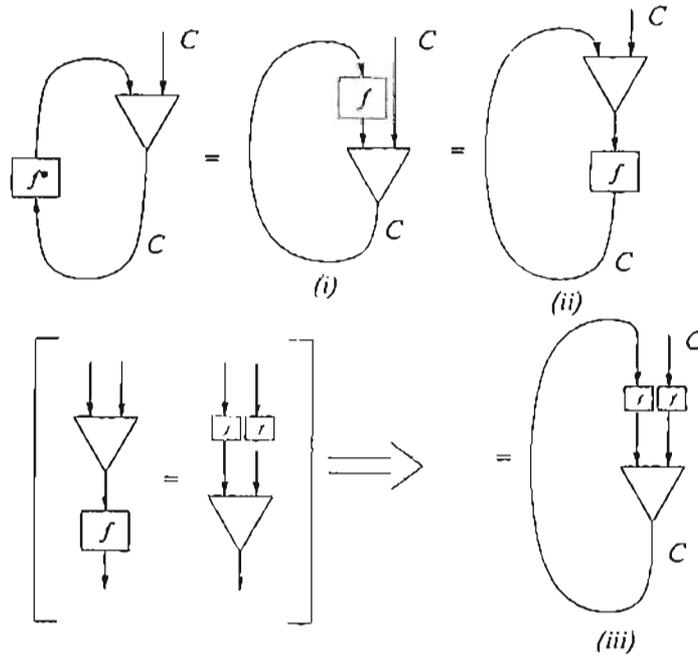
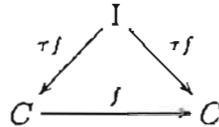


Figura 3.19: Demostración de 3.3.11.

propiedad de "punto fijo", como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.12.** Si  $f : C \rightarrow C$  es morfismo de coálgebras, entonces el diagrama



conmuta.

Salvo por la generalidad categórica, podemos decir entonces, que la imagen de  $\tau f$  yace en el "conjunto de puntos fijos de  $f$ ."

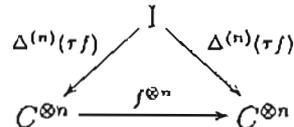
*Demostración.* Tomando como representación para  $\tau f$  el diagrama 3.19 (i) el resultado se deduce de la igualdad de los diagramas 3.19 (ii) y (iii).

Si  $C$  es una coálgebra en  $V$ , podemos definir al igual que en el caso clásico,  $\Delta^{(n)} : C \rightarrow C^{\otimes(n+1)}$  inductivamente para  $n \geq 1$  por  $\Delta^{(1)} = \Delta$  y

$$\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes \text{id}_{C^{\otimes(n-1)}}) \circ \Delta^{(n-1)} = (\text{id}_{C^{\otimes(n-1)}} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)} \quad (3.22)$$

Una sencilla inducción demuestra entonces que:

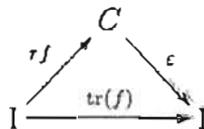
**Corolario 3.3.13.** Si  $f : C \rightarrow C$  es morfismo de coálgebras, entonces el diagrama



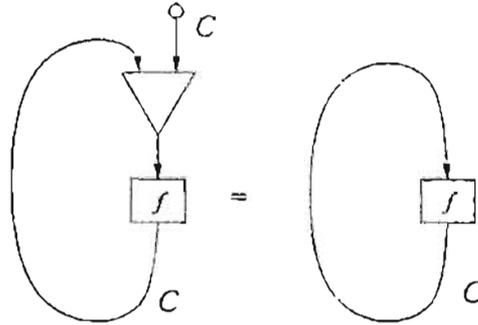
conmuta.

Otra propiedad interesante del tránsfer es que "est  a un paso de la traza" en el siguiente sentido.

**Proposición 3.3.14.** Si  $C$  es una coálgebra en una categoría  $V$ , la traza de un endomorfismo  $f : C \rightarrow C$  factoriza a través de  $C$  como muestra el siguiente diagrama



*Demostración.* Ver la figura 3.20, donde se ha usado el axioma de counidad.

Figura 3.20:  $\varepsilon(\tau f) = \text{tr}(f)$ 

**Proposición 3.3.15.** Si  $C = X \otimes X^*$  tiene la estructura canónica de coálgebra dada en 3.2.5, entonces el transfer corresponde por la adjunción  $f \mapsto (f \otimes \text{id}_V \cdot)(\text{id}_V \otimes b_V)$  de (1.63) a la traza parcial  $\text{tr}_{1,X}(f)$ .

*Demostración.* Ver la figura 3.21, en donde hemos usado para el transfer la representación de la figura 3.19 (ii).

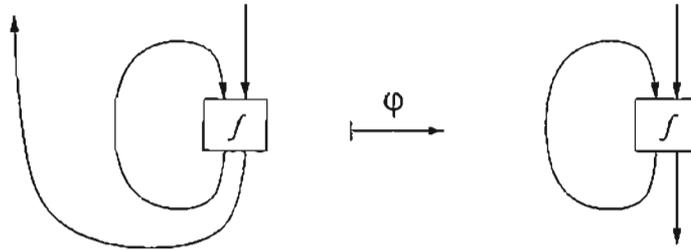


Figura 3.21: Demostración de 3.3.15

Sea  $K = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  y consideremos la categoría  $K_{df}$  de espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $K$ . Sabemos que  $K_{df}$  es de listones con la estructura trivial, o sea,  $c_{V,W} = P_{V,W}$  y  $\theta_V = \text{id}_V$  para cualesquiera espacios vectoriales de dimensión finita  $V$  y  $W$ . Si  $C$  es un objeto en  $K_{df}$  y  $f : C \rightarrow C$  es un endomorfismo, podemos considerar su transfer  $\tau f : K \rightarrow C$ , que es un punto fijo del endomorfismo  $f$ .

Supongamos ahora que la coálgebra  $C$  tiene un elemento  $1$  tal que  $\Delta(1) = 1 \otimes 1$  (lo cual implica que  $\varepsilon(1) = 1$ ). Pongamos  $T^n(C) = C^{\otimes n}$  si  $n > 0$  y

### 3.3. TRAZAS PARCIALES Y TRÁNSFER.

79

$T^0(C) = K$ . Definamos las aplicaciones lineales  $\delta_n^0, \dots, \delta_n^{n+1}$  de  $T^n$  en  $T^{n+1}$  por:

$$\begin{aligned}\delta_n^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= 1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n, \\ \delta_n^{n+1}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes 1, \\ \delta_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes \Delta(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n\end{aligned}\quad (3.23)$$

si  $1 \leq i \leq n$ . Si  $n = 0$ , definimos  $\delta_0^0(1) = \delta_0^1(1) = 1$  y  $\delta : T^n \rightarrow T^{n+1}$  por

$$\delta_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \delta_n^i$$

resulta entonces que  $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$ , luego  $(T^*(C), \delta)$  es un complejo de cocadenas llamado el *complejo cobar* (cobar complex).

Notemos que  $H^0(C) = \{x \in C \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ . Si  $x$  es un elemento en  $H^0(C)$ , se dice que  $x$  es un elemento *primitivo* de  $C$  y el subespacio de elementos primitivos de  $C$  se denota por  $\text{Prim}(C)$ . La siguiente proposición es bien conocida (ver por ejemplo, [3] Cap. II, §1.2, Prop. 4, o [13], Cap III, Proposición III.2.6)

**Proposición 3.3.16.** *Si  $x \in \text{Prim}(C)$ , entonces  $\varepsilon(x) = 0$ . Además, si  $C$  es una biálgebra, entonces  $\text{Prim}(C)$  es cerrado bajo el conmutador  $[x, y] = xy - yx$ .*

*Demostración.* Tenemos

$$x = \varepsilon(1)x + \varepsilon(x)1 = x + \varepsilon(x)1$$

luego  $\varepsilon(x) = 0$ . Por otra parte si  $C$  es biálgebra, entonces

$$\begin{aligned}\Delta(xy) &= (1 \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes y + y \otimes 1) \\ &= 1 \otimes xy + x \otimes y + y \otimes x + xy \otimes 1\end{aligned}\quad (3.24)$$

luego  $\Delta([x, y]) = 1 \otimes xy + xy \otimes 1$ .

Supongamos que  $f : C \rightarrow C$  es un morfismo de coálgebras tal que  $\tau f \in \text{Prim}(C)$ . Necesariamente entonces se tiene que  $\text{tr}(f) = 0$ , en virtud de 3.3.14 y de la proposición anterior. En este caso,  $\tau f : K \rightarrow C$  es una coamentación del complejo de cocadenas, induciendo una cohomología reducida

que denotamos por  $\widetilde{H}^\bullet(C)$ . Además, si  $f(1) = 1$ ,  $f^{\otimes n} : T^n \rightarrow T^n$  es un morfismo de cocadenas, pues

$$\begin{aligned}
 f^{\otimes(n+1)}\delta_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= f(1) \otimes f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n) \\
 &\quad - (f \otimes f)\Delta(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n) \\
 &\quad + f(x_1) \otimes (f \otimes f)\Delta(x_2) \otimes \dots \otimes f(x_n) - \dots \\
 &\quad + (-1)^{n+1}f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n) \otimes f(1) \\
 &= 1 \otimes f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n) - \Delta(f(x_1)) \otimes \dots \otimes f(x_n) \\
 &\quad + f(x_1) \otimes \Delta(f(x_2)) \otimes \dots \otimes f(x_n) - \dots \\
 &\quad + (-1)^{n+1}f(x_1) \otimes \dots \otimes f(x_n) \otimes 1 \\
 &= \delta_n f^{\otimes n}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Por lo tanto, en este caso,  $f$  induce un endomorfismo en las cohomologías reducidas  $f^\bullet : \widetilde{H}^\bullet(C) \rightarrow H^\bullet(C)$ .

### 3.3.3 Generalizaciones del tránsfer

Sea  $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S, \theta)$ , un álgebra de listones y consideremos la categoría  $H\text{-Mod}_f$  de módulos de dimensión finita sobre  $H$ . Vamos a definir una generalización del tránsfer para endomorfismos de ciertos objetos de  $H\text{-Mod}_f$ , de manera que se tenga una propiedad análoga a 3.3.14. Necesitamos el concepto de com dulo, dual al de módulo, esto es,

**Definición 3.3.17.** Sea  $H$  una coálgebra. Un espacio vectorial  $V$  provisto de una aplicación lineal  $\Delta_V : V \rightarrow H \otimes V$ , es un  $H$ -com dulo, si los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\Delta_V} & H \otimes V \\
 \Delta_V \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \Delta_V \\
 H \otimes V & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}} & H \otimes H \otimes V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H \otimes V & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & k \otimes V \\
 \Delta_V \uparrow & \cong \nearrow & \\
 V & & 
 \end{array}$$

Diremos que  $f : U \rightarrow V$  es morfismo de comódulos si  $\Delta_V f = (\text{id}_H \otimes f) \Delta_U$ .

Supongamos que  $V$  es  $H$ -módulo, con  $\mu_V : H \otimes V \rightarrow V$  y a la vez es  $H$ -com dulo con  $\Delta_V : V \rightarrow H \otimes V$ . Podemos dotar a  $H \otimes V$  con las estructuras inducidas de  $H$ -módulo y de  $H$ -com dulo. No es difícil demostrar entonces

que  $\mu_V$  es morfismo de comódulos si y sólo si  $\Delta_V$  es morfismo de módulos (la demostración es análoga a la demostración de 3.2.3). Si se satisfacen esas dos condiciones de compatibilidad equivalentes, se dice que  $V$  es un *bimódulo* (algunos autores prefieren la denominación *Módulo de Hopf*).

**Definición 3.3.18.** Si  $V$  es un  $H$ -bimódulo de dimensión finita, y  $f : V \rightarrow V$  es un endomorfismo, definimos el *tránsfer de  $f$  asociado a  $H$* , como la composición

$$(\tau f)_H : 1 \xrightarrow{b_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{\Delta_V \otimes \text{id}_{V^*}} H \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\bar{a}_V} H \quad (3.26)$$

De esta manera, a un endomorfismo  $f$  de  $V$  le asociamos un elemento en el álgebra de listones  $H$ , que tiene la siguiente propiedad (ver 3.3.14).

**Proposición 3.3.19.**  $\varepsilon((\tau f)_H) = \text{tr}(f)$ .

*Demostración.* Véase la figura 3.22 *a*, *b* y *c* donde se han representado el morfismo  $\Delta_V$ , la conmutatividad del triángulo de 3.3.17 y la demostración de la proposición respectivamente.

Otra opción es definir el tránsfer como una aplicación que asocie a cada morfismo  $f \in \text{End}(V)$  una aplicación lineal  $\tau' f \in \text{End}(H)$ . Definimos

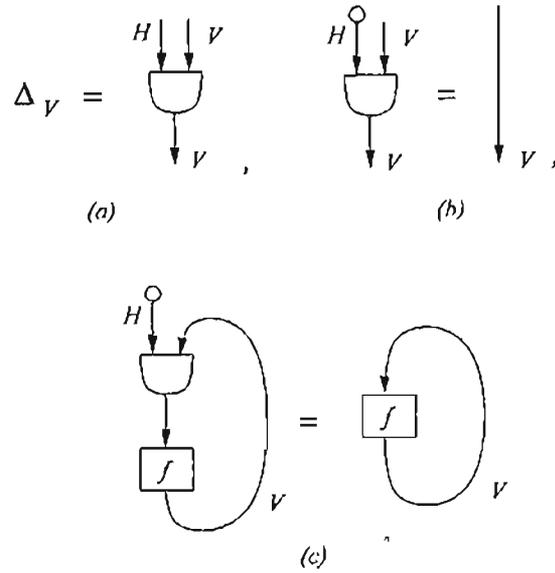
$$\begin{aligned} (\tau' f)_H : H \xrightarrow{\text{id}_H \otimes b_V} H \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\mu_V \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{\Delta_V \otimes \text{id}_{V^*}} H \otimes V \otimes V^* \longrightarrow \\ \xrightarrow{\text{id}_H \otimes \bar{a}_V} H \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tenemos entonces:

**Proposición 3.3.20.**  $\varepsilon((\tau' f)_H) = \text{tr}(f)$ .

*Demostración.* Véase la figura 3.23.

Por último,

Figura 3.22:  $\varepsilon((\tau f)_H) = \text{tr}(f)$ .

**Definición 3.3.21.** Si  $V$  es un  $H$ -módulo-coálgebra, para cada  $f : V \rightarrow V$  en  $H\text{-Mod}_f$ , asociamos una aplicación lineal  $(\tau f)_{H,V} : H \rightarrow V$ , por

$$\begin{aligned}
 (\tau f)_{H,V} : H &\xrightarrow{\text{id}_H \otimes \text{bv}} H \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\mu_V \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id}_{V^*}} V \otimes V \otimes V^* \longrightarrow \\
 &\xrightarrow{\text{id}_V \otimes \bar{\text{d}}_V} V
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Este tránsfer generalizado tiene las dos propiedades del tránsfer, a saber, tenemos:

**Proposición 3.3.22.** Si  $V$  es un  $H$ -módulo-coálgebra y  $f$  es un morfismo en  $H\text{-Mod}_f$  que es a su vez morfismo de coálgebras, entonces:

- i.  $\varepsilon_V \circ (\tau f)_{H,V} \circ \eta = \text{tr}(f)$ ,
- ii.  $f \circ (\tau f)_{H,V} = (\tau f)_{H,V}$ , si  $f : V \rightarrow V$  es además un morfismo de coálgebras.

*Demostración.* Es similar a las anteriores usando el cálculo gráfico y la omitimos.

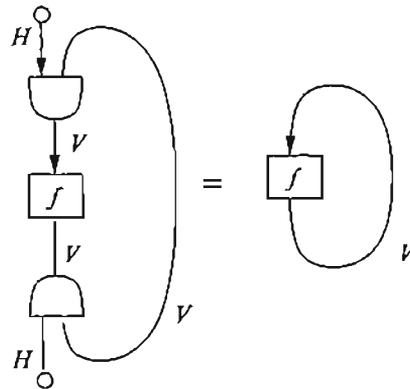


Figura 3.23:  $\varepsilon(\tau f)_H \eta = \text{tr}(f)$ .

En estos momentos se está analizando la relación del transfer generalizado, con las diversas cohomologías de bimódulos de álgebras de Hopf introducidas en [9]. El contenido de este capítulo y la investigación en curso esperamos que aparezcan en [20]. Vale la pena mencionar que el concepto de traza y dualidad en categoríamomoidales también ha sido considerado por Maltsiniotis en [18].

# Capítulo 4

## Algebras de Temperley-Lieb

### 4.1 Introducción

#### 4.1.1 El módulo de madejas $E_{k,l}$

Sean  $k, l$  dos enteros no negativos. Consideraremos  $(k, l)$ -diagramas de marañas no orientadas con  $k$  entradas y  $l$  salidas. Sea  $K$  un anillo conmutativo y  $a \in K$  un elemento invertible y sea  $E_{k,l} = E_{k,l}(a)$  el  $K$ -módulo libre generado por todos los  $(k, l)$ -diagramas, cociente las relaciones:

- (i) isotopía en  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  que deja fija la frontera de  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ .
- (ii) la relación  $D \sqcup O = -(a^2 + a^{-2})D$  donde  $D$  es un diagrama arbitrario y  $O$  es una curva cerrada simple en  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  que es frontera de un disco en el complemento de  $D$ . En otras palabras  $O$  no se cruza con los arcos y lazos que definen a  $D$ .
- (iii) la identidad de la figura 4.1

La fórmula (iii), conocida como la *identidad de Kauffman* involucra a tres

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = a \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} + a^{-1} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$$

Figura 4.1: Relación de Kauffman

diagramas idénticos salvo en un pequeño disco donde aparecen como en la figura. Los diagramas del lado derecho de la igualdad se obtienen defor-

mando el cruce del diagrama del lado izquierdo y aparecen con coeficientes  $a$  y  $a^{-1}$ . Podemos determinar el coeficiente del diagrama deformado siguiendo la siguiente regla: si nos movemos por el arco que va por arriba, justo antes de llegar al cruce damos vuelta en sentido izquierdo (o levógiro) hasta encontrar al arco que va por abajo. El diagrama así obtenido adquiere el coeficiente  $a$  y el otro posible (con el desvío en el sentido dextrógiro) adquiere el coeficiente  $a^{-1}$ .

El módulo  $E_{k,l}$  es llamado el  $(k,l)$ -módulo de madejas correspondiente a  $a \in K$ . Cada  $(k,l)$ -diagrama de maraña  $D$  representa un elemento de  $E_{k,l}$  denotado por  $\langle D \rangle$  que es llamado la clase de madeja de  $D$ . Es claro que si  $k+l$  es impar, no hay  $(k,l)$ -diagramas de marañas y  $E_{k,l} = 0$ .

Aplicando la relación de Kauffman a cada cruce del  $(k,l)$ -diagrama  $D$  podemos expresar a  $D$  como una combinación lineal formal con coeficientes en  $K$  de diagramas sin cruces, con  $(k+l)/2$  arcos en la que no aparecen lazos, en virtud de la relación (ii). Un diagrama de maraña con estas características es llamado *simple*.

En particular  $E_{0,0} = K$  está generado por la clase del diagrama vacío. Puede demostrarse que el número de  $(k,l)$ -diagramas simples es igual al número de Catalán  $C_m^{2m}/(m+1)$  donde  $C_m^{2m} = \binom{2m}{m}$  y  $m = (k+l)/2$ .

**Teorema 4.1.1.** *La clase de madeja de cualquier  $(k,l)$ -diagrama de maraña es invariante bajo los movimientos mostrados en la figura 4.2*

Es bien conocido que dos  $(k,l)$ -diagramas representan marañas enmarcadas isotópicas en  $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$  si y sólo si los diagramas están relacionados por los movimientos de la figura 4.2 y los movimientos inversos a éstos. De aquí que la clase de madeja  $\langle D \rangle \in E_{k,l}$  de un diagrama de maraña  $D$  es un invariante de isotopía de  $(k,l)$ -marañas enmarcadas.

*Demostración del Teorema.* Sea  $D'$  el diagrama obtenido de  $D$  insertando una coca positiva, como en la parte superior del movimiento (a) en 4.2. La figura 4.3 muestra que  $\langle D' \rangle = -a^3 \langle D \rangle$ . Análogamente si  $D'$  se obtiene de  $D$  insertando una coca negativa como en la parte inferior del movimiento (a) en 4.2, entonces  $\langle D' \rangle = -a^{-3} \langle D \rangle$ . Luego  $\langle D \rangle$  es invariante bajo el movimiento (a) de la figura 4.2. La invariancia de  $\langle D \rangle$  bajo el movimiento (b) es mostrada en la figura 4.4 y la invariancia de (c) en la figura 4.5

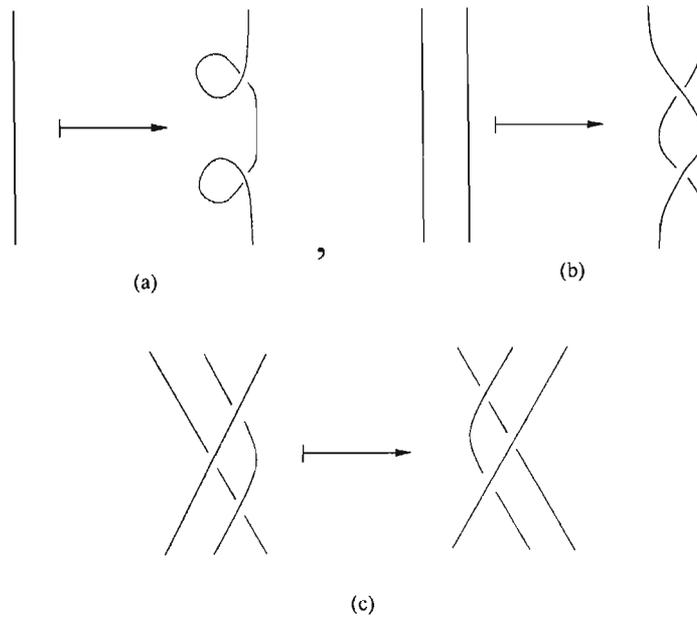


Figura 4.2: Invariancia de la clase

### 4.1.2 El corchete de Kauffman

Sea  $K = \mathbb{R}$ . Para cualquier enlace enmarcado  $L \subset \mathbb{R}^3$ , su clase de madeja  $\langle L \rangle \in E_{0,0} = \mathbb{R}$  nos da un invariante de isotopía de  $L$ . Más precisamente, es fácil ver que aplicando la relación de Kauffman recursivamente, se obtiene un polinomio de Laurent en  $a \in \mathbb{R}$  que es llamado el *corchete de Kauffman* de  $L$ . El corchete se normaliza de manera que su valor en el nudo trivial con marco (framing) cero es igual a  $-(a^2 + a^{-2})$ .

El corchete de Kauffman, se puede obtener de un teorema similar a 2.3.1 para el caso de enlaces enmarcados y no orientados (este teorema aparece también en [33]). Para este fin, tomemos  $V = \mathbb{C}^2$ , visto como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ , y la base de  $V \otimes V$  dada por  $(1, 0) \otimes (1, 0)$ ,  $(1, 0) \otimes (0, 1)$ ,  $(0, 1) \otimes (1, 0)$  y  $(0, 1) \otimes (0, 1)$ . En este caso los generadores son  $X_+$ , sin orientar,  $X_-$  sin orientar,  $|$ ,  $\cup$  y  $\cap$ . El funtor monoidal está definido entonces en los

$$\left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| = a \left| \begin{array}{c} \text{link with negative rotation} \end{array} \right| + a^{-1} \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| = (-a^3 - a^{-1} + a^{-1}) \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| = -a^3 \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right|$$

Figura 4.3: Efecto de una rotación positiva

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| &= a \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| + a^{-1} \left| \begin{array}{c} \text{link with negative rotation} \end{array} \right| = \\ &= a^2 \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| - a^2 \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{link with positive rotation} \end{array} \right| \end{aligned}$$

Figura 4.4: Invariancia bajo (b)

generadores por

$$\mathcal{F}(X_+) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1} & a - a^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(X_-) = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} - a^3 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{F}(\cap) = (0 \ a \ -a^{-1} \ 0) \quad \mathcal{F}(\cup) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(\cup) = (0 \ -a \ a^{-1} \ 0)^T$$

para más detalles ver [26]. Usando el corchete de Kauffman, podemos definir un invariante polinomial de enlaces (no enmarcados) en  $\mathbb{R}^3$ . Este polinomio es una versión del polinomio de Jones para enlaces orientados.

Todo enlace orientado  $\langle L \rangle \subset \mathbb{R}^3$  admite un marco tal que el enlazamiento (*linking*) de  $L$  con el enlace obtenido al desplazar  $L$  en la dirección del campo vectorial correspondiente (en otras palabras con el otro borde del marco) es

Figura 4.5: Invariancia bajo (c)

igual a cero. Este marco asociado no es único, pero los corchetes asociados a dos cualesquiera de éstos son iguales. Esto nos da un invariante polinomial de  $L$  denotado por  $V_L(a)$ . El polinomio  $V_L(a)$  se puede calcular a partir de cualquier diagrama  $D$  de  $L$  como sigue. La orientación de  $L$  determina signos  $\pm 1$  en todos los puntos de cruce de  $D$  (por definición el cruce del lado izquierdo de 4.1 tiene signo  $+1$ , el otro cruce posible tiene signo  $-1$ ). Sea  $w(D) \in \mathbb{Z}$  la suma de los signos sobre cada cruce de  $D$ . (El número  $w(D)$  es llamado el *torcimiento* (*writhe*) de  $D$ ). Entonces

$$V_L(a) = (-a^3)^{-w(D)} \langle D \rangle(a)$$

donde  $\langle D \rangle(a)$  es el corchete de Kauffman de  $D$ . El polinomio original de Jones se obtiene de éste sustituyendo  $a = t^{-1/4}$  y dividiendo entre  $-(t^{1/2} + t^{-1/2})$ . Para más detalles ver [21].

### 4.1.3 La categoría de madejas $\mathfrak{R}$

Definimos la categoría  $\mathfrak{R}$  como sigue. Los objetos de  $\mathfrak{R}$  son enteros no negativos  $0, 1, 2, \dots$ . Un morfismo  $k \rightarrow l$  de  $\mathfrak{R}$  es un elemento de  $E_{k,l}$ . La composición

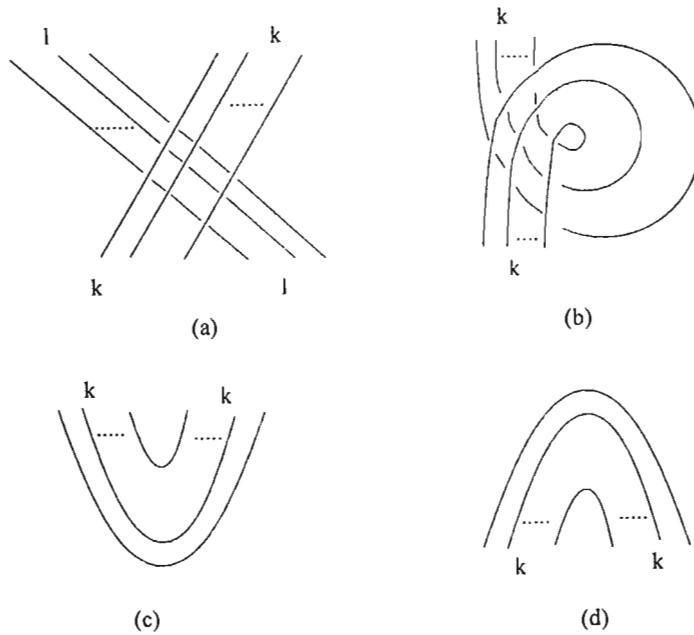
de morfismos representados por diagramas de marañas se realiza como en la categoría de diagramas de marañas y se extiende a morfismos arbitrarios por linealidad. El diagrama que consiste en  $k$  arcos verticales paralelos representa el morfismo identidad  $\text{id}_k : k \rightarrow k$ . (El morfismo identidad del objeto 0 se representa por el diagrama vacío.) La categoría  $\mathfrak{R}$  resulta ser de listones y a continuación vamos a definir el producto tensorial, el trenzamiento, la torcedura y la dualidad en  $\mathfrak{R}$ .

El producto tensorial de objetos  $k, l \in \{0, 1, 2, \dots\}$  es el objeto  $k + l$ . El producto tensorial de dos morfismos representados por diagramas de marañas  $D$  y  $D'$  se define por el diagrama que resulta de poner a  $D'$  a la derecha de  $D$  y se extiende a morfismos arbitrarios por linealidad. El objeto identidad es  $I_{\mathfrak{R}} = 0$  de manera que la categoría es monoidal estricta. Además la operación suma definida en los módulos  $\text{Hom}(k, l) = E_{k,l}$  hace de  $\mathfrak{R}$  una categoría abeliana con anillo base  $\text{End}(I_{\mathfrak{R}}) = E_{0,0} = K$ .

Las clases de los diagramas (a), (b), (c) y (d) en la figura 4.6 representan respectivamente el trenzamiento  $c_{k,l} : k \otimes l = k + l \rightarrow l \otimes k = l + k$ , la torcedura  $\theta_k : k \rightarrow k$  y la dualidad  $b_k : 0 \rightarrow k \otimes k^* = 2k$  y  $d_k : k^* \otimes k = 2k \rightarrow 0$ , donde se ha definido  $k^* = k$ . Es fácil demostrar que se tienen las propiedades deseadas. En las dos secciones que siguen vamos a dar dos definiciones de las álgebras de Temperley-Lieb, en la siguiente sección, en la definición conocida, haremos uso de la estructura abeliana de la categoría de madejas, en la otra, de su estructura de listones.

#### 4.1.4 Definición del álgebra de Temperley-Lieb

Para cada  $k \geq 0$ , el módulo  $\text{End}_{\mathfrak{R}}(k) = E_{k,k}$  adquiere una estructura de álgebra sobre  $K$ . El producto  $xy$  de  $x, y \in E_{k,k}$  es la composición de  $x$  y  $y$  vistos como morfismos de  $k \rightarrow k$ . Así definida, el álgebra es asociativa y con unidad  $1_k$  representada por la identidad en  $E_{k,k}$ . La llamaremos la  $k$ -ésima álgebra de Temperley-Lieb y la denotaremos por  $E_k$ . Por ejemplo,  $E_0 = K$  y  $E_1 = K$ . Además para  $k \geq 3$ ,  $E_k$  no es conmutativa. Considerada como  $K$ -módulo,  $E_k$  admite una base cuyos elementos están representados por  $(k, k)$ -diagramas de marañas simples, pero como álgebra posee un conjunto más elemental de generadores. En efecto, sea  $e_i$  el diagrama de la figura 4.7. Para simplificar abusaremos de la notación y denotaremos la clase de madeja  $\langle e_i \rangle$  con el mismo símbolo  $e_i$ .

Figura 4.6: Definiciones de  $c$ ,  $\theta$ ,  $b$  y  $d$ 

**Teorema 4.1.2.** *Los elementos  $1_k, e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$  generan a  $E_k$  como  $K$ -álgebra.*

La demostración del teorema se puede encontrar en [35].

**Lema 4.1.3.** *Los elementos  $1_k, e_1, e_2, \dots, e_{k-1} \in E_k$  satisfacen las siguientes relaciones:*

$$e_i^2 = -(a^2 + a^{-2})e_i \quad (4.1)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \quad (4.2)$$

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \quad (4.3)$$

donde  $i, j = 1, 2, \dots, k - 1$ .

La demostración de este lema es geoméricamente simple como se muestra en la figura 4.8

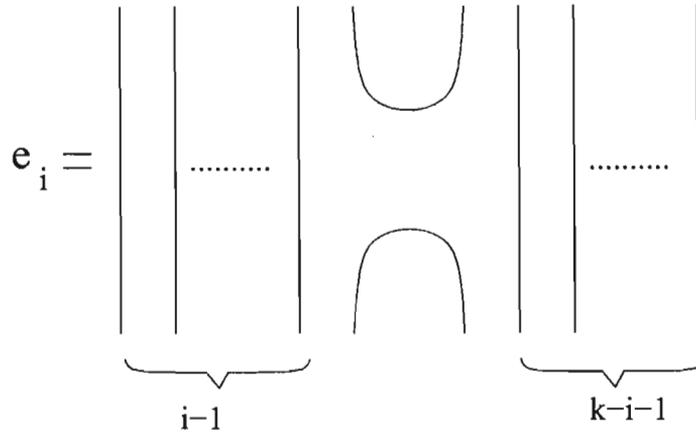


Figura 4.7: Generadores de  $E_k$

## 4.2 Una definición alternativa

En esta sección vamos a dar otra presentación geométrica de las álgebras de Temperley-Lieb y deduciremos algunas propiedades que resultan muy claras desde este punto de vista.

Notemos primero que todo número par  $2n = n \otimes n$  en  $\mathfrak{R}$  tiene la estructura de álgebra y coálgebra dada en 3.2.5. Si  $x, y \in E_{2m, 2n}$  son básicos, consideremos el producto convolución  $x * y \in E_{2m, 2n}$  dado en 3.2.14, y extendamos el producto a todos los elementos de  $E_{2m, 2n}$  por linealidad. De esta manera,  $E_{2m, 2n}$  se convierte en un álgebra sobre  $K$  con unidad  $\eta_n \varepsilon_m \in E_{2m, 2n}$ , que denotaremos por  $\tilde{E}_{2m, 2n}$ . El teorema fundamental de esta sección, es el siguiente.

**Teorema 4.2.1.** *El álgebra  $\tilde{E}_{2m, 2n}$  es isomorfa al álgebra de Temperley-Lieb  $E_{n+m}$ .*

*Demostración.* Definimos  $\Phi : \tilde{E}_{2m, 2n} \longrightarrow E_{n+m}$  y  $\Psi : E_{n+m} \longrightarrow \tilde{E}_{2m, 2n}$  en los básicos, como se muestra en la figura 4.9 (a) y (b) y los extendemos por linealidad. Es fácil ver que  $\Phi$  y  $\Psi$  son aplicaciones inversas una de la otra. La figura 4.9 (c) demuestra que  $\Phi$  conserva el producto, y la figura 4.9 (d) demuestra que  $\Phi$  conserva la unidad de las álgebras. Por lo tanto,  $\tilde{E}_{2m, 2n}$  y  $E_{n+m}$ , son isomorfas.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos:

(a)  $e_i^2 = \dots = -(a^2 + a^{-2}) \dots = -(a^2 + a^{-2}) e_i$

(b)  $e_i e_j = \dots = e_j e_i$

(c)  $e_i e_{i+1} e_i = \dots = e_i$

Figura 4.8: Relaciones entre los generadores de  $E_k$ 

**Corolario 4.2.2.**  $E_k$  es un  $E_m$ -módulo izquierdo para  $k \geq \frac{m}{2}$  si  $m$  es par, y para  $k \geq \frac{m+1}{2}$  si  $m$  es impar.

*Demostración.* Usaremos los isomorfismos  $E_{2n} \cong \tilde{E}_{2n,2n}$  y  $E_{2n+1} \cong \tilde{E}_{2n,2n+2}$  del teorema anterior. Supongamos que  $m = 2p$  es par, y sean  $x \in \tilde{E}_{2p,2p}$  y  $v \in E_k$  básicos. Definimos  $x \cdot v$  como se muestra en la figura 4.10 (a) si  $k = 2l$  es par, y como se muestra en la figura 4.10 (b) si  $k = 2l + 1$  es impar. Es fácil ver que se cumple  $(x * y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$  y  $(\eta\varepsilon) \cdot v = v$ , luego tenemos una acción en los básicos que extendemos linealmente.

En ambos casos para tener bien definida la acción, debe cumplirse que  $2l \geq p$ , o sea  $k \geq p = \frac{m}{2}$ . Supongamos ahora que  $m = 2p + 1$  y sean  $x \in \tilde{E}_{2p,2p+2}$  y  $v \in E_k$  básicos. Definimos  $x \cdot v$  como se muestra en la figura 4.10 (c) si  $k = 2l$  es par, y como se muestra en la figura 4.10 (d) si  $k = 2l + 1$  es impar y extendemos como antes por linealidad. En ambos casos debe cumplirse que  $k \geq p + 1 = \frac{m+1}{2}$ , para tener definida la acción.

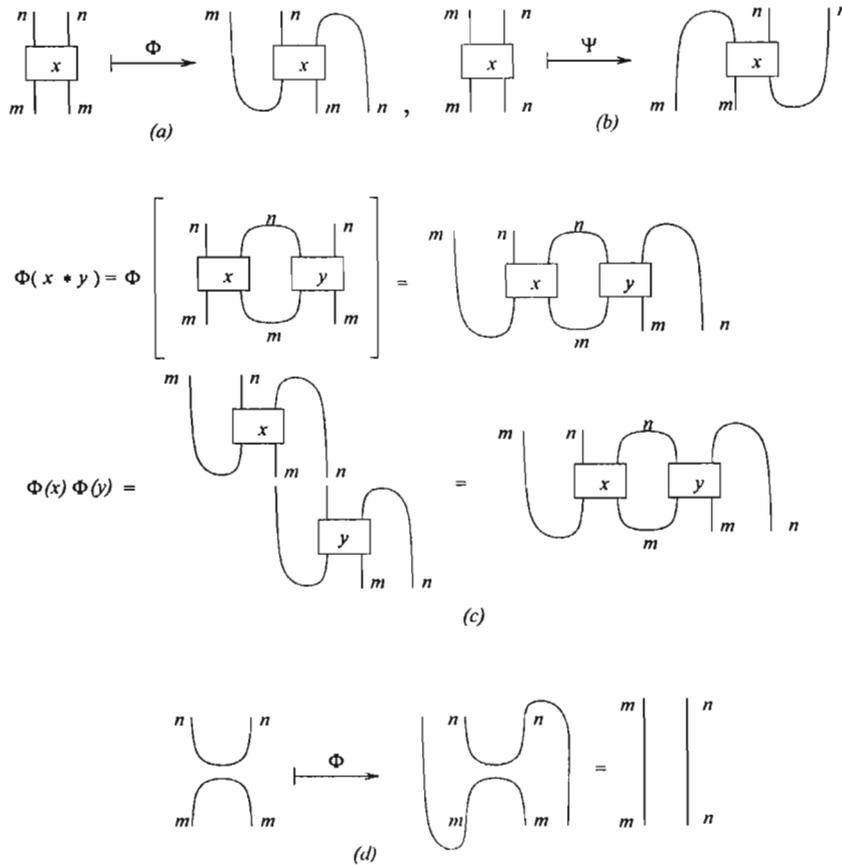
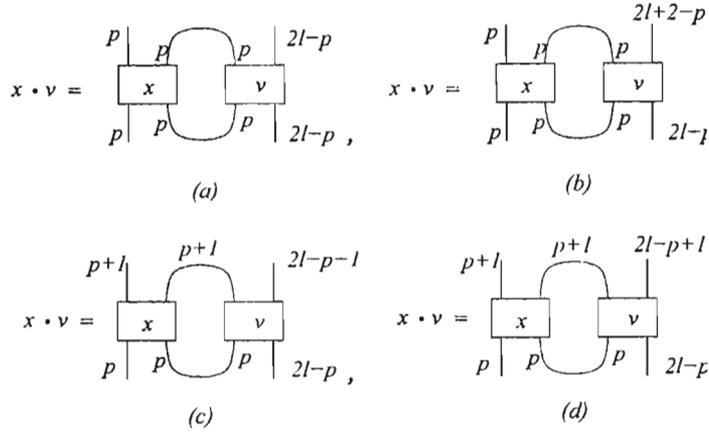


Figura 4.9:  $\tilde{E}_{2m,2n}$  es isomorfa a  $E_{n+m}$

**Proposición 4.2.3.** Sean  $k < l$  y  $E_k$  y  $E_l$  dos  $E_m$ -módulos, con las acciones definidas en 4.2.2. Entonces existe un  $E_m$ -monomorfismo de módulos,  $j_{k,l} : E_k \rightarrow E_l$ .

*Demostración.* Definimos  $j_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$ , en los básicos, como se muestra en las figuras 4.11 (a) y (b) si  $k$  es par o impar respectivamente, y extendemos por linealidad. Las figuras 4.11 c y d demuestran que  $j_k$  es inyectiva en el caso par e impar respectivamente. En la figura 4.12 demostramos que  $j_k$  es  $E_m$ -lineal para el caso en que  $m$  y  $k$  son pares. Los otros casos son análogos. El monomorfismo está dado entonces por la composición  $j_{k,l} = j_{l-1} \circ \dots \circ j_k : E_k \rightarrow E_l$ .

Figura 4.10: Acciones de  $E_m$  en  $E_k$ 

Luego, si identificamos a  $E_k$  con su imagen  $j_{k,m}(E_k) \subset E_m$ , obtenemos:

**Corolario 4.2.4.** Para  $m > 0$ ,  $E_h \subset E_{h+1} \subset \dots \subset E_{m-1} \subset E_m$  es una sucesión creciente de ideales izquierdos en  $E_m$ , donde  $h = \frac{m}{2}$  si  $m$  es par y  $h = \frac{m+1}{2}$  si  $m$  es impar.

Es fácil ver que podemos reformular todo lo anterior para acciones derechas de  $E_m$ , de manera que existen  $E_m$ -monomorfismos  $i_{k,l} : E_k \rightarrow E_l$ . En la figura 4.13 (a) representamos la acción derecha de  $E_m$  en  $E_k$  en el caso en que  $m = 2p$  y  $k = 2l$ . Los otros casos son análogos. En las figuras 4.13 (b) y (c) representamos los monomorfismos  $i_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$  para cuando  $k$  es par o impar respectivamente.

Por lo tanto, en el corolario anterior, podemos sustituir ideales izquierdos por ideales derechos, si identificamos a  $E_k$  con su imagen  $i_{k,m}(E_k) \subset E_m$ .

Sea  $I_h$  el subespacio generado por  $j_{h,m}(E_h)i_{h,m}(E_h) \subset E_m$ . Tenemos entonces que:

**Corolario 4.2.5.** Supongamos que  $\delta = -(a^2 + a^{-2})$  es invertible en  $K$ . Entonces para  $m > 0$ ,  $I_h \subset I_{h+1} \subset \dots \subset I_{m-1} \subset I_m = E_m$  es una sucesión creciente de ideales bilaterales de  $E_m$ , donde  $h = \frac{m}{2}$  si  $m$  es par, y  $h = \frac{m+1}{2}$  si  $m$  es impar.

*Demostración.* En las figuras 4.14 (a) y (b), representamos el producto  $j_{k,m}(E_k) * i_{k,m}(E_k)$  para cuando  $m$  es par y  $k$  es par e impar respectivamente.

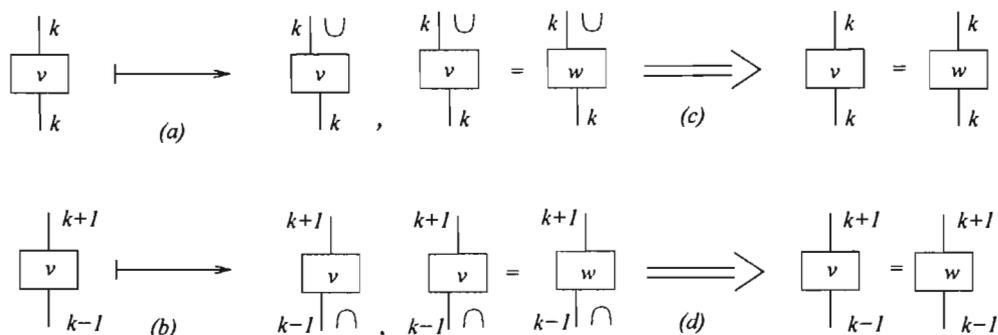


Figura 4.11: Definición e inyectividad de  $j_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$

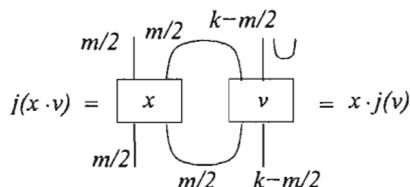


Figura 4.12:  $j_k : E_k \rightarrow E_{k+1}$  es  $E_m$ -lineal

El caso en que  $m$  es impar, es análogo. En la figura 4.14 (c) vemos que, siendo  $\delta$  invertible, el subespacio generado por estos productos, es un ideal izquierdo de  $E_m$  para  $m$  par. Con la variación obvia— reflexión en un eje vertical— la figura demuestra que también es un ideal derecho de  $E_m$  para  $m$  par. El caso en que  $m$  es impar es análogo.

El enfoque diagramático que hemos usado aquí difiere del dado en [36], en donde demuestran que si  $K$  es semisimple y  $\delta$  es invertible entonces el álgebra de Temperley-Lieb  $E_m$  es casi-hereditaria. A continuación vamos a usar el enfoque geométrico que hemos usado para dar otra demostración de este hecho.

**Definición 4.2.6.** Un ideal bilateral  $J$  de un álgebra  $A$  es un *ideal hereditario*, si :

- (i)  $JJ = J$
- (ii)  $JNJ=0$

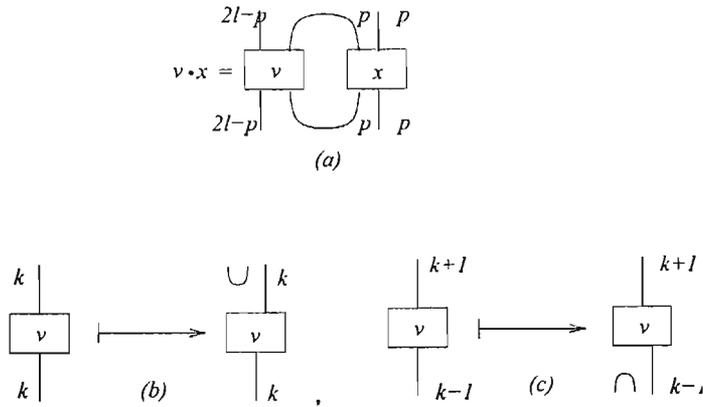


Figura 4.13: Acción derecha y definición de  $i_k : E_k \longrightarrow E_{k+1}$

(iii)  $J_A$  y  ${}_A J$  son  $A$ -módulos proyectivos.

donde  $N$  es el radical de Jacobson de  $A$ .

**Definición 4.2.7.** Un álgebra  $A$  es casi-hereditaria si existe una cadena de ideales bilaterales

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \dots \subset J_m = A$$

tal que para  $1 \leq i \leq m$ ,  $J_i/J_{i-1}$  es un ideal bilateral de  $A/J_{i-1}$ . Una cadena que cumpla con lo anterior es llamada *cadena hereditaria*.

**Teorema 4.2.8.** Si  $K$  es semisimple y  $\delta$  es invertible, entonces  $E_m$  es casi-hereditaria y

$$0 \subset I_h \subset \dots \subset I_{m-1} \subset I_m = E_m$$

es una cadena hereditaria con  $h = \frac{m}{2}$  si  $m$  es par y  $h = \frac{m+1}{2}$  si  $m$  es impar.

*Demostración.* Vamos a hacer la demostración para el caso en que  $m$  y  $k$  son pares. Los otros casos son análogos.

Denotemos por  $J = I_k/I_{k-1}$  y por  $A = E_m/I_{k-1}$ . La figura 4.15 demuestra que, siendo  $\delta$  invertible,  $JJ = J$ . Por otra parte, la figura 4.16, demuestra que, siendo  $\delta$  invertible,  $AxA = J$  donde  $x \in I_k$  es el elemento representado en el centro. De aquí que  ${}_A J$  y  $J_A$  son proyectivos. Por último, si  $t \in JNJ$ ,  $t = \sum_i t_i x_i$ , donde  $t_i \in K$  y  $x_i$  es un conjunto generador de  $I_k$ . No es difícil ver que entonces  $t_i$  es nilpotente en  $K$  para todo  $i$ . Como  $K$  es semisimple,

entonces  $t_i = 0$  para todo  $i$ , luego  $t = 0$ .

El contenido de esta sección está siendo reunido en [19] para su posible publicación. En estos momentos se está analizando la aplicabilidad de este enfoque en el contexto de las álgebras de Temperley-Lieb ciclotómicas. Éstas son una generalización de las álgebras clásicas de Temperley-Lieb y en este caso el enfoque gráfico usa diagramas cuyos arcos están etiquetados con elementos del grupo  $\mathbb{Z}_m$ . (El álgebra  $TL_{n,m}(\delta_0, \dots, \delta_{m-1})$  depende de  $m$  parámetros  $\delta_{i \in \{0 \leq i \leq m-1\}}$ , y tiene generadores  $1, e_1, \dots, e_{n-1}, t_1, \dots, t_n$  con relaciones en las que aparecen los parámetros  $\delta_i$ , jugando un papel similar a  $\delta = -a^2 - a^{-2}$  en el caso clásico. Para una definición de las álgebras de Temperley-Lieb ciclotómicas y sus representaciones, ver [25]).

Es por eso que pensamos que el método geométrico que hemos usado parece apropiado también para este caso.

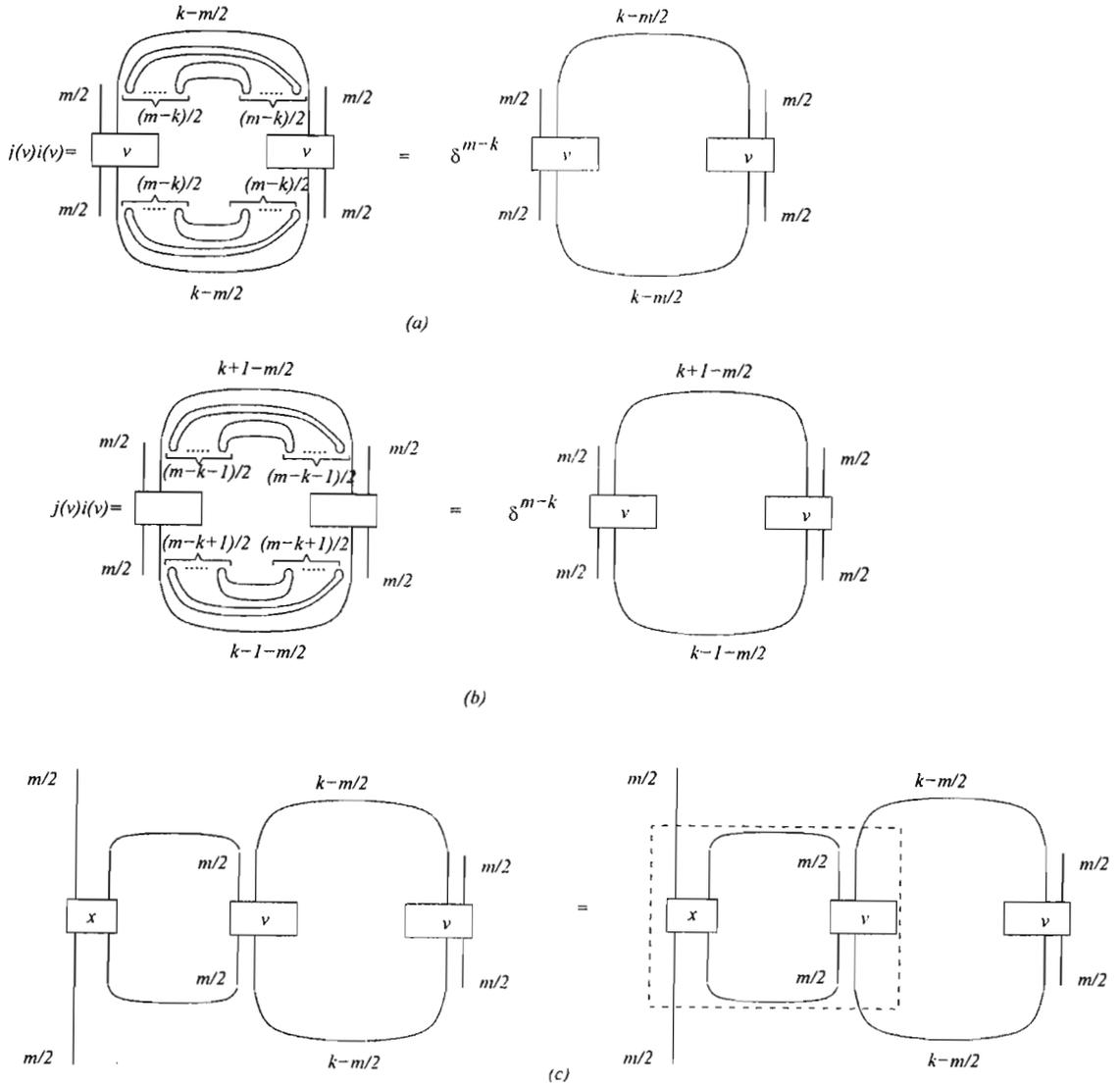


Figura 4.14:  $I_k$  en  $E_m$  es ideal bilateral

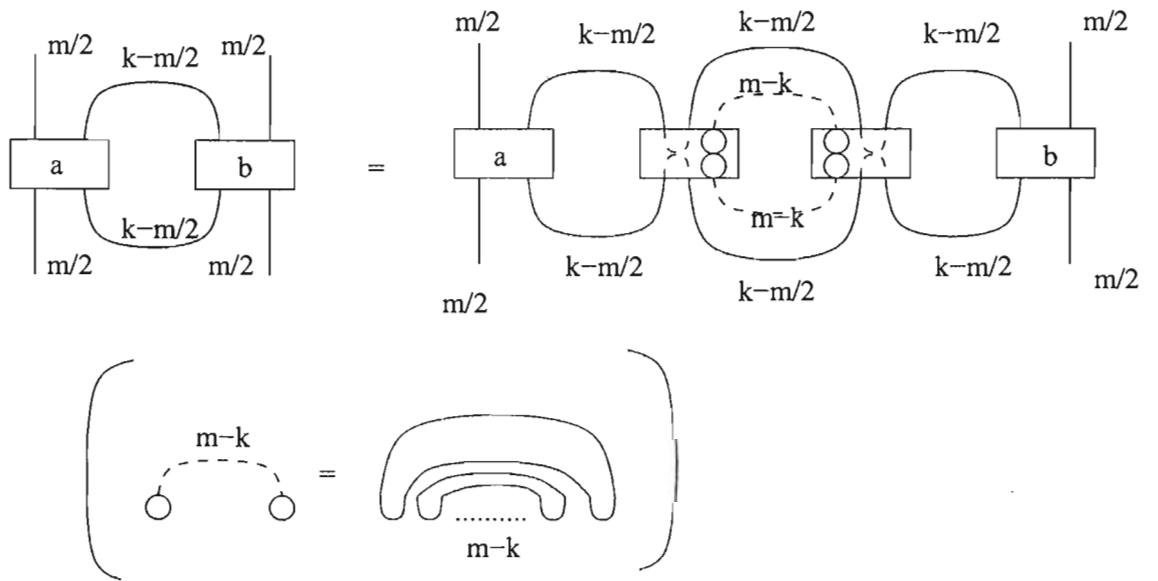


Figura 4.15:  $JJ = J$

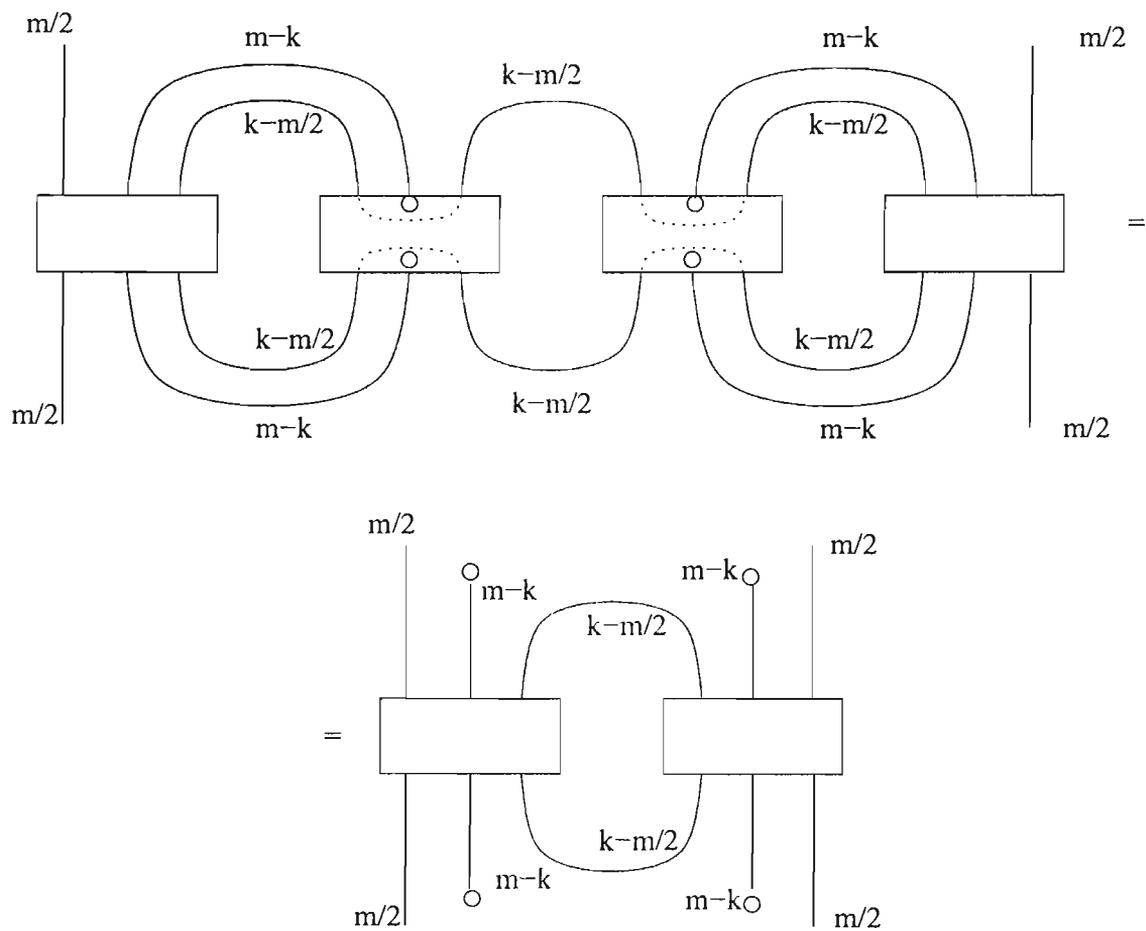


Figura 4.16:  $J = AxA$

# Capítulo 5

## Biálgebras en $\mathcal{C}^{\mathbf{S}_0}$

### 5.1 La categoría libre $\mathcal{C}^{\mathbf{S}_0}$

Sea  $\mathcal{C}$  una Ab-categoría pequeña. Denotemos por  $Obj(\mathcal{C})$  y  $\mathcal{H}$  sus conjuntos de objetos y morfismos respectivamente. Asociaremos a  $\mathcal{C}$  una nueva categoría  $\mathcal{C}^{\mathbf{S}_0}$  como sigue. Tomemos un conjunto fijo  $\mathbf{S}_0$  y consideremos el conjunto  $\mathcal{M}(\mathbf{S}_0, Obj(\mathcal{C})) = \{ \mathbf{S}_0 \supset \mathbf{S} \xrightarrow{f} Obj(\mathcal{C}) \}$ , donde  $\mathbf{S}$  es un subconjunto cualquiera de  $\mathbf{S}_0$  y  $f$  es una función de conjuntos. Los *objetos* de  $\mathcal{C}^{\mathbf{S}_0}$  serán los elementos de  $\mathcal{M}(\mathbf{S}_0, Obj(\mathcal{C}))$ . Sean  $f : \mathbf{S}_f \rightarrow Obj(\mathcal{C})$  y  $g : \mathbf{S}_g \rightarrow Obj(\mathcal{C})$  dos objetos. Un *morfismo*  $F : f \rightarrow g$  será una función de dos variables  $F : \mathbf{S}_f \times \mathbf{S}_g \rightarrow \mathcal{H}$  tal que:

- (i) Para todo  $(x, y) \in \mathbf{S}_f \times \mathbf{S}_g$ , tenemos  $F(x, y) : f(x) \rightarrow g(y)$ ,
- (ii) Si  $\mathbf{S}_g$  es infinito, para todo  $x \in \mathbf{S}_f$  existe un conjunto finito  $\mathbf{S}_x^F \subset \mathbf{S}_g$ , con  $F(x, y) = 0$  si  $y \in \mathbf{S}_g - \mathbf{S}_x^F$ .

Sean  $f : \mathbf{S}_f \rightarrow Obj(\mathcal{C})$ ,  $g : \mathbf{S}_g \rightarrow Obj(\mathcal{C})$  y  $h : \mathbf{S}_h \rightarrow Obj(\mathcal{C})$  objetos, y  $F : f \rightarrow g$ ,  $G : g \rightarrow h$  morfismos. Definimos  $G \circ F : f \rightarrow h$ , como la función  $G \circ F : \mathbf{S}_f \times \mathbf{S}_h \rightarrow \mathcal{H}$  dada por:

$$(G \circ F)(x, y) = \sum_{z \in \mathbf{S}_y} G(z, y) \circ F(x, z) \quad (5.1)$$

para  $x \in S_f$  y  $y \in S_h$ . Esta suma es siempre finita. En efecto, si escribimos  $S_x^F = \{z_1, \dots, z_k\}$ , entonces la suma se convierte en

$$(G \circ F)(x, y) = \sum_{i=1}^k G(z_i, y) \circ F(x, z_i) \quad (5.2)$$

Es claro que la función  $G \circ F$  satisface la condición (i). Además, si  $y \notin S_{z_1}^G \cup \dots \cup S_{z_k}^G$ , entonces  $G(z_i, y) = 0$  para  $1 \leq i \leq k$ , luego podemos tomar  $S_x^{(G \circ F)} = S_{z_1}^G \cup \dots \cup S_{z_k}^G$  y tenemos que si  $y \in S_h - S_x^{(G \circ F)}$ , entonces  $(G \circ F)(x, y) = 0$ . Por lo tanto también satisface la condición (ii). Para cualquier objeto  $f : S_f \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  definimos  $\text{Id}_f : f \rightarrow f$  como la función  $\text{Id}_f : S_f \times S_f \rightarrow \mathcal{H}$ , dada por  $\text{Id}_f(x, y) = \delta_{x,y} \text{id}_{f(x)} : f(x) \rightarrow f(y)$  para  $(x, y) \in S_f \times S_f$ . Si  $G : f \rightarrow g$ , entonces  $(G \circ \text{Id}_f) : f \rightarrow g$  está dada por

$$\begin{aligned} (G \circ \text{Id}_f)(x, y) &= \sum_{z \in S_f} G(z, y) \circ \text{Id}(x, z) \\ &= \sum_{z \in S_f} G(z, y) \circ \delta_{x,z} \text{id}_{f(x)} \\ &= G(x, y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Luego  $G \circ \text{Id}_f = G$ . Análogamente se demuestra que  $\text{Id}_g \circ G = G$  para cualquier morfismo  $G : f \rightarrow g$ .

Además, la composición es asociativa, es decir, si  $F : f \rightarrow g$ ,  $G : g \rightarrow h$  y  $H : h \rightarrow i$ , entonces  $(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$ . En efecto, para  $w \in S_f$ ,  $x \in S_g$ ,  $y \in S_h$  y  $z \in S_i$ , tenemos:

$$\begin{aligned} ((H \circ G) \circ F)(w, z) &= \sum_{x \in S_g} (H \circ G)(x, z) \circ F(w, x) \\ &= \sum_{x \in S_g} \sum_{y \in S_h} (H(y, z) \circ G(x, y)) \circ F(w, x) \\ &= \sum_{y \in S_h} H(y, z) \circ \left( \sum_{x \in S_g} G(x, y) \circ F(w, x) \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

y (ii), vemos que  $\mathcal{C}^{S_0}$  es también una Ab-categoría. La siguiente proposición demuestra que la suma directa está definida para ciertas colecciones de objetos en  $\mathcal{C}^{S_0}$ .

**Proposición 5.1.1.** *Sea  $\{f_i : S_i \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$  cualquier colección de funciones tales que  $\{S_i\}_{i \in I}$  son subconjuntos de  $S$  disjuntos dos a dos. Entonces  $(f : \coprod_{i \in I} S_i \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C}), J_i)$ , donde  $f|_{S_i} = f_i$  y  $J_k : S_k \times \coprod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathcal{H}$  está dada por  $J_k(x, y) = \delta_{xy} \text{id}_x : S_k \rightarrow \coprod_{i \in I} S_i$ , es el coproducto de la familia  $\{f_i : S_i \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\}_{i \in I}$  en  $\mathcal{C}^{S_0}$ .*

*Demostración.* Supongamos que tenemos dados un objeto  $g : S_g \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  y una familia de morfismos  $T_i : \{f_i : S_i \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\} \rightarrow \{g : S_g \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\}$ . Definimos  $T : \{f : \coprod_{i \in I} S_i \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\} \rightarrow \{g : S_g \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\}$  por  $T(t, y) = T_k(t, y) : f(t) \rightarrow g(y)$  si  $t \in S_k$ . Entonces si  $x \in S_k$  y  $y \in S_g$ , tenemos

$$\begin{aligned} (T \circ J_k)(x, y) &= \sum_{t \in \coprod_{i \in I} S_i} T(t, x) \circ J_k(x, t) \\ &= \sum_{t \in \coprod_{i \in I} S_i} \delta_{xt} T(t, y) \circ \text{id}_x \\ &= T(x, y) \\ &= T_k(x, y) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Además, la última igualdad demuestra la unicidad de  $T$ .

Tenemos en particular que:

**Corolario 5.1.2.** *Si  $S \subset S_0$  es no vacío, entonces cualquier objeto  $f : S \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  se puede descomponer como la suma directa de la familia de objetos  $\{f|_{\{x\}} : \{x\} \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})\}_{x \in S}$ .*

Supongamos ahora que la categoría  $\mathcal{C}$  es monoidal estricta de manera que el producto tensorial de morfismos es bilineal en  $\mathcal{C}$  y que el conjunto  $S_0$  es infinito. En lo que sigue, dotaremos a  $\mathcal{C}^{S_0}$  de una estructura monoidal que extiende a la dada en  $\mathcal{C}$ . Sin embargo la estructura monoidal que definiremos en  $\mathcal{C}^{S_0}$  no es en general estricta, por lo que además de las definiciones de producto tensorial de objetos y morfismos, deberemos definir una asociatividad  $A : (f \otimes g) \otimes h \rightarrow f \otimes (g \otimes h)$ , y habiendo definido un objeto unidad  $I$ , una unidad izquierda  $L : I \otimes f \rightarrow f$  y una unidad derecha  $R : f \otimes I \rightarrow f$ . Comenzaremos por definir el producto tensorial de objetos y morfismos, luego

definiremos los isomorfismos naturales  $A$ ,  $L$  y  $R$  y luego demostraremos que se satisfacen las propiedades requeridas.

Fijemos primero una biyección  $\gamma : \mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_0$ . Para dos objetos  $f : \mathcal{S}_f \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  y  $g : \mathcal{S}_g \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$ , definimos  $f \otimes g$  como la función dada por la siguiente composición

$$f \otimes g : \gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \xrightarrow{\gamma^{-1}} \mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g \xrightarrow{f \times g} \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\otimes} \text{Obj}(\mathcal{C}) \quad (5.6)$$

Elegimos un punto cualquiera  $*$  en  $\mathcal{S}_0$  y definimos  $I : \{*\} \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  por  $I(*) = I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

Ahora, para dos morfismos  $F : f \longrightarrow f'$ ,  $G : g \longrightarrow g'$ , y  $(z, z') \in \gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \times \gamma(\mathcal{S}_{f'} \times \mathcal{S}_{g'})$ , definimos  $F \otimes G : f \otimes g \longrightarrow f' \otimes g'$  por

$$(F \otimes G)(z, z') := F(x_z, x'_{z'}) \otimes G(y_z, y'_{z'}) : f(x_z) \otimes g(y_z) \longrightarrow f'(x'_{z'}) \otimes g'(y'_{z'}) \quad (5.7)$$

donde  $\gamma^{-1}(z) = (x_z, y_z) \in \mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g$  y  $\gamma^{-1}(z') = (x'_{z'}, y'_{z'}) \in \mathcal{S}_{f'} \times \mathcal{S}_{g'}$ , de manera que  $(f \otimes g)(z) = f(x_z) \otimes g(y_z)$  y  $(f' \otimes g')(z') = f'(x'_{z'}) \otimes g'(y'_{z'})$ .

Es claro que  $\gamma(\mathcal{S}_{x_z}^F \times \mathcal{S}_{y_z}^G) \subset \gamma(\mathcal{S}_{x'_{z'}}^{F'} \times \mathcal{S}_{y'_{z'}}^{G'})$  es un conjunto finito y que si  $z' \in \gamma(\mathcal{S}_{f'} \times \mathcal{S}_{g'}) - \gamma(\mathcal{S}_{x_z}^F \times \mathcal{S}_{y_z}^G)$ , entonces  $\gamma^{-1}(z') \notin \mathcal{S}_{x_z}^F \times \mathcal{S}_{y_z}^G$ , luego  $x'_{z'} \notin \mathcal{S}_{x_z}^F$  o  $y'_{z'} \notin \mathcal{S}_{y_z}^G$  y por lo tanto  $(F \otimes G)(z, z') = 0$  si  $z' \notin \gamma(\mathcal{S}_{x_z}^F \times \mathcal{S}_{y_z}^G)$ .

Para definir la asociatividad  $A$ , notemos primero que si  $f : \mathcal{S}_f \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $g : \mathcal{S}_g \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  and  $h : \mathcal{S}_h \longrightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  son tres objetos, entonces los dominios de las funciones  $(f \otimes g) \otimes h$  y  $f \otimes (g \otimes h)$  son  $\mathcal{S}_{(f \otimes g) \otimes h} = \gamma(\gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \times \mathcal{S}_h)$  y  $\mathcal{S}_{f \otimes (g \otimes h)} = \gamma(\mathcal{S}_f \times \gamma(\mathcal{S}_g \times \mathcal{S}_h))$  respectivamente. Así por ejemplo, si  $v \in \gamma(\gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \times \mathcal{S}_h)$ , entonces  $\gamma^{-1}(v) = (t_v, z_v)$ ; donde  $t_v \in \gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g)$  y  $z_v \in \mathcal{S}_h$ . Por lo tanto,  $(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}(v) = ((x_{t_v}, y_{t_v}), z_v)$ .

Como  $(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}$  es una biyección entre los conjuntos  $\mathcal{S}_{(f \otimes g) \otimes h} = \gamma(\gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \times \mathcal{S}_h)$  y  $\mathcal{S}_f \otimes \mathcal{S}_g \otimes \mathcal{S}_h$ , cada  $v \in \gamma(\gamma(\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g) \times \mathcal{S}_h)$  determina unívocamente una terna  $(x_v, y_v, z_v)$  y recíprocamente, luego, con el fin de no complicar aun más la notación introduciendo más variables, vamos a denotar a  $t_v$  por  $(x, y)_v$ , o sea, usaremos la notación  $\gamma^{-1}(v) = ((x, y)_v, z_v)$  y escribiremos además

$$(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}(v) = (\gamma^{-1} \times \text{id})((x, y)_v, z_v) := ((x_v, y_v), z_v) \in \mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g \times \mathcal{S}_h$$

donde el paréntesis interior indicará la posición del segundo  $\gamma^{-1}$  en la composición  $(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}$ , aunque donde no haya lugar a confusión, escribiremos simplemente  $(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}(v) = (x_v, y_v, z_v)$ . Análogamente, para  $w \in$

$\gamma(S_f \times \gamma(S_g \times S_h))$  escribiremos

$$(\text{id} \times \gamma^{-1})\gamma^{-1}(w) = (x_w, (y_w, z_w)) \in S_f \times S_g \times S_h$$

o si no hay lugar a confusión,  $(\text{id} \times \gamma^{-1})\gamma^{-1}(w) = (x_w, y_w, z_w)$ . De la misma manera, por ejemplo, si  $v \in S_{(f \otimes (g \otimes h)) \otimes i} = \gamma(\gamma(S_f \times \gamma(S_g \times S_h)) \times S_i)$ , escribiremos

$$(\text{id} \times \gamma^{-1} \times \text{id})(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}(v) = ((x_v, (y_v, z_v)), t_v) \in S_f \times S_g \times S_h \times S_i,$$

o  $(\text{id} \times \gamma^{-1} \times \text{id})(\gamma^{-1} \times \text{id})\gamma^{-1}(v) = (x_v, y_v, z_v, t_v)$ , etc. Con esta notación, tenemos por ejemplo que:

$$\begin{aligned} ((F \otimes G) \otimes H)(v, w) &= (F \otimes G)((x, y)_v, (x, y)_w) \otimes H(z_v, z_w) \\ &= F(x_v, x_w) \otimes G(y_v, y_w) \otimes H(z_v, z_w). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Definimos ahora  $A_{f,g,h} : (f \otimes g) \otimes h \longrightarrow f \otimes (g \otimes h)$  por

$$A_{f,g,h}(v, w) = \delta_{x,y,z}^{v,w} \text{id}_{f(x_v) \otimes g(y_v) \otimes h(z_v)} : ((f \otimes g) \otimes h)(v) \longrightarrow (f \otimes (g \otimes h))(w) \quad (5.9)$$

donde, para simplificar la notación, hemos escrito  $\delta_{x,y,z}^{v,w}$  en lugar de  $\delta_{x_v, x_w} \delta_{y_v, y_w} \delta_{z_v, z_w}$ .

Es claro de aquí que la inversa de  $A_{f,g,h}$ , está dada por

$$A_{f,g,h}^{-1}(w, v) = \delta_{x,y,z}^{w,v} \text{id}_{f(x_w) \otimes g(y_w) \otimes h(z_w)} : (f \otimes (g \otimes h))(w) \longrightarrow ((f \otimes g) \otimes h)(v) \quad (5.10)$$

Pasamos ahora a definir a la unidad derecha  $R_f : f \otimes I \longrightarrow f$ . Para cualquier objeto  $f$ , tenemos que:

$$f \otimes I : \gamma(S_f \times \{*\}) \xrightarrow{\gamma^{-1}} S_f \times \{*\} \xrightarrow{f \times I} \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\otimes} \text{Obj}(\mathcal{C}) \quad (5.11)$$

Para  $z \in \gamma(S_f \times \{*\})$ , escribimos  $\gamma^{-1}(z) = (x_z, *) \in S_f \times *$  y definimos  $R_f : f \otimes I \longrightarrow f$  por

$$R_f(z, x) = \delta_{x,z} \text{id}_{f(x_z)} : (f \otimes I)(z) = f(x_z) \longrightarrow f(x) \quad (5.12)$$

para  $(z, x) \in \gamma(S_f \times \{*\}) \times S_f$ . Es fácil ver que  $R_f$  es un isomorfismo con inversa  $R_f^{-1} : f \longrightarrow f \otimes I$  dada por la función

$$R_f^{-1}(x, z) = \delta_{x,z} \text{id}_{f(x)} : f(x) \longrightarrow (f \otimes I)(z) = f(x_z) \quad (5.13)$$

Definimos la unidad izquierda  $L_f : I \otimes f \longrightarrow f$  de manera análoga, o sea si para  $z \in \gamma(* \times S_f)$  escribimos  $\gamma^{-1}(z) = (*, x_z)$ , entonces

$$L_f(z, x) = \delta_{x_z, x} \text{id}_{f(x_z)} : (I \otimes f)(z) = f(x_z) \longrightarrow f(x) \quad (5.14)$$

De la misma manera,  $L_f$  es un isomorfismo con inversa

$$L_f^{-1}(x, z) = \delta_{x, x_z} \text{id}_{f(x)} : f(x) \longrightarrow (\text{id} \otimes f)(z) = f(x_z) \quad (5.15)$$

**Teorema 5.1.3.** *La categoría  $\mathcal{C}^{\mathcal{S}_0}$  es una categoría monoidal con el producto tensorial de objetos y morfismos, asociatividad, y unidad izquierda y derecha que hemos definido.*

*Demostración.* Dividiremos la demostración en cuatro lemas.

**Lema 5.1.4.** *Si  $F : f \longrightarrow f'$ ,  $F' : f' \longrightarrow f''$ ,  $G : g \longrightarrow g'$  y  $G' : g' \longrightarrow g''$  son morfismos en  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}_0}$ , entonces:*

$$(i) (F' \otimes G') \circ (F \otimes G) = (F' \circ F) \otimes (G' \circ G)$$

$$(ii) \text{Id}_f \otimes \text{Id}_g = \text{Id}_{f \otimes g}$$

*Demostración.*

(i) Para  $z \in \gamma(S_f \times S_g)$  y  $z'' \in \gamma(S_{f''} \times S_{g''})$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} ((F' \otimes G') \circ (F \otimes G))(z, z'') &= \sum_{z' \in \gamma(S_{f'} \times S_{g'})} (F' \otimes G')(z', z'') \circ (F \otimes G)(z, z') \\ &= \sum_{z' \in \gamma(S_{f'} \times S_{g'})} (F'(x'_{z'}, x''_{z''}) \circ F(x_z, x'_{z'})) \\ &\quad \otimes (G'(y'_{z'}, y''_{z''}) \circ G(y_z, y'_{z'})) \\ &= \left( \sum_{x' \in S_{f'}} F'(x', x''_{z''}) \circ F(x_z, x') \right) \\ &\quad \otimes \left( \sum_{y' \in S_{g'}} G'(y', y''_{z''}) \circ G(y_z, y') \right) \\ &= (F' \circ F)(x_z, x''_{z''}) \otimes (G' \circ G)(y_z, y''_{z''}) \\ &= ((F' \circ F) \otimes (G' \circ G))(z, z'') \end{aligned} \quad (5.16)$$

La tercera igualdad se deduce del hecho de que  $\gamma$  establece una biyección entre  $S_{f'} \times S_{g'}$  y  $\gamma(S_{f'} \times S_{g'})$ .

(ii) Para  $z, z' \in \gamma(S_f \times S_g)$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 (\text{Id}_f \otimes \text{Id}_g)(z, z') &= \text{Id}_f(x_z, x_{z'}) \otimes \text{Id}_g(y_z, y_{z'}) \\
 &= \delta_{x_z, x_{z'}} \text{id}_{f(x_z)} \otimes \delta_{y_z, y_{z'}} \text{id}_{g(y_z)} \\
 &= \delta_{z, z'} \text{id}_{f(x_z)} \otimes \text{id}_{g(y_z)} \\
 &= \delta_{z, z'} \text{id}_{f(x_z) \otimes g(y_z)} \\
 &= \delta_{z, z'} \text{id}_{(f \otimes g)(z)} \\
 &= \text{Id}_{f \otimes g}(z, z')
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

**Lema 5.1.5.** *La asociatividad  $A$  definida más arriba es un isomorfismo natural, o sea  $A_{f,g,h}$  es un isomorfismo para cualesquiera objetos  $f, g$  y  $h$ , de manera tal que si  $F : f \rightarrow f'$ ,  $G : g \rightarrow g'$  y  $H : h \rightarrow h'$  son morfismos, el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc}
 (f \otimes g) \otimes h & \xrightarrow{A_{f,g,h}} & f \otimes (g \otimes h) \\
 (F \otimes G) \otimes H \downarrow & & \downarrow F \otimes (G \otimes H) \\
 (f' \otimes g') \otimes h' & \xrightarrow{A_{f',g',h'}} & f' \otimes (g' \otimes h')
 \end{array} \tag{5.18}$$

*conmuta, y además satisface el Axioma Pentagonal, o sea para cualesquiera objetos  $f, g, h, i$ , el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
 (f \otimes (g \otimes h)) \otimes i & \xleftarrow{A_{f,g,h} \otimes \text{id}_i} & ((f \otimes g) \otimes h) \otimes i \\
 \downarrow A_{f,g \otimes h, i} & & \downarrow A_{f \otimes g, h, i} \\
 f \otimes ((g \otimes h) \otimes i) & \xrightarrow{\text{id}_f \otimes A_{g,h,i}} & f \otimes (g \otimes (h \otimes i))
 \end{array} \tag{5.19}$$

*conmuta.*

*Demostración.* Ya vimos que  $A$  es isomorfismo. Para demostrar la naturalidad, por una parte tenemos:

$$\begin{aligned}
((F \otimes (G \otimes H)) \circ A_{f,g,h})(v, w') &= \sum_{w \in \gamma(S_f \times \gamma(S_g \times S_h))} (F \otimes (G \otimes H))(w, w') \circ \\
&\quad \circ A_{f,g,h}(v, w) \\
&= \sum_{w \in \gamma(S_f \times \gamma(S_g \times S_h))} (F(x_w, x_{w'}) \otimes G(y_w, y_{w'}) \otimes \\
&\quad \otimes H(z_w, z_{w'})) \circ \delta_{x; y; z}^{v, w} \text{id}_{f(x_w) \otimes g(y_w) \otimes h(z_w)} \\
&= F(x_v, x_{w'}) \otimes G(y_v, y_{w'}) \otimes H(z_v, z_{w'}).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
(A_{f',g',h'} \circ ((F \otimes G) \otimes H))(v, w') &= \sum_{v' \in \gamma(\gamma(S_{f'} \times S_{g'}) \times S_{h'})} A_{f',g',h'}(v', w') \circ ((F \otimes G) \otimes \\
&\quad \otimes H)(v, v') \\
&= \sum_{v' \in \gamma(\gamma(S_{f'} \times S_{g'}) \times S_{h'})} \delta_{x'; y'; z'}^{v', w'} \text{id}_{f'(x'_{v'}) \otimes g'(y'_{v'}) \otimes h'(z'_{v'})} \circ \\
&\quad \circ (F(x_v, x'_{v'}) \otimes G(y_v, y'_{v'}) \otimes H(z_v, z'_{v'})) \\
&= F(x_v, x_{w'}) \otimes G(y_v, y_{w'}) \otimes H(z_v, z_{w'}).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Por lo tanto,  $A_{f',g',h'} \circ ((F \otimes G) \otimes H) = (F \otimes (G \otimes H)) \circ A_{f,g,h}$ , luego  $A$  es un isomorfismo natural.

Vamos a demostrar ahora que  $A$  satisface el axioma pentagonal. Sea  $M(s, w) = ((\text{id}_f \otimes A_{g,h,i}) \circ A_{f,g \otimes h, i} \circ (A_{f,g,h} \otimes \text{id}_i))(s, w)$ . Para  $s \in \gamma(\gamma(\gamma(S_f \times S_g) \times S_h) \times S_i)$  y  $w \in \gamma(S_f \times \gamma(S_g \times \gamma(S_h \times S_i)))$  tenemos

$$\begin{aligned}
M(s, w) &= \sum_{\substack{u \in S_f \otimes ((g \otimes h) \otimes i) \\ v \in S_f \otimes ((g \otimes h) \otimes i)}} (\text{id}_f \otimes A_{g,h,i})(v, w) \circ A_{f,g \otimes h, i}(u, v) \circ (A_{f,g,h} \otimes \text{id}_i)(s, u) \\
&= \sum_{\substack{u \in S_f \otimes ((g \otimes h) \otimes i) \\ v \in S_f \otimes ((g \otimes h) \otimes i)}} (\delta_{x_v, x_w} \text{id}_{f(x_v)} \otimes \delta_{y; z; t}^{v, w} \text{id}_{g(y_v) \otimes h(z_v) \otimes i(t_v)}) \circ \delta_{x; y; z; t}^{u, v} \\
&\quad \text{id}_{f(x_u) \otimes g(y_u) \otimes h(z_u) \otimes i(t_u)} \circ (\delta_{x; y; z}^{s, u} \text{id}_{f(x_s) \otimes g(y_s) \otimes h(z_s)} \otimes \delta_{t_s, t_u} \text{id}_{i(t_s)}) \\
&= \delta_{x; y; z; t}^{s, w} \text{id}_{f(x_s) \otimes g(y_s) \otimes h(z_s) \otimes i(t_s)}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Sea ahora  $N(s, w) = (A_{f,g,h\otimes i} \circ A_{f\otimes g,h,i})(s, w)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 N(s, w) &= \sum_{r \in \mathcal{S}_{(f\otimes g)\otimes(h\otimes i)}} (A_{f,g,h\otimes i})(r, w) \circ (A_{f\otimes g,h,i})(s, r) \\
 &= \sum_{r \in \mathcal{S}_{(f\otimes g)\otimes(h\otimes i)}} \delta_{x;y;z;t}^{r,w} \text{id}_{f(x_r)\otimes g(y_r)\otimes h(z_r)\otimes i(t_r)} \circ \delta_{x;y;z;t}^{s,r} \text{id}_{f(x_s)\otimes g(y_s)\otimes h(z_s)\otimes i(t_s)} \\
 &= \delta_{x;y;z;t}^{s,w} \text{id}_{f(x_s)\otimes g(y_s)\otimes h(z_s)\otimes i(t_s)}.
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Así,  $M(s, w) = N(s, w)$  y con esto hemos demostrado que  $A$  cumple con el Axioma Pentagonal.

**Lema 5.1.6.** *Las unidades derecha  $R$  e izquierda  $L$  son isomorfismos naturales.*

*Demostración.* Haremos la demostración solamente para  $R$ , puesto que para  $L$  es completamente análoga.

Ya vimos que  $R_f$  es isomorfismo. Debemos demostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 f \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{R_f} & f \\
 F \otimes \text{id}_{\mathbb{1}} \downarrow & & \downarrow F \\
 f' \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow{R_{f'}} & f'
 \end{array} \tag{5.24}$$

conmuta para cualquier morfismo  $F : f \longrightarrow f'$ . Para  $z \in \gamma(\mathcal{S}_f \times *)$  y  $x' \in \mathcal{S}_{f'}$  tenemos por una parte

$$\begin{aligned}
 (F \circ R_f)(z, x') &= \sum_{x \in \mathcal{S}_f} F(x, x') \circ R_f(z, x) \\
 &= F(x, x') \circ \delta_{x,z,x'} \text{id}_{f(x_z)} \\
 &= F(x_z, x').
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 (R_{f'} \circ (F \otimes \text{Id}_{\mathbb{1}}))(z, x') &= \sum_{z' \in \gamma(\mathcal{S}_{f'} \times *)} R_{f'}(z', x') \circ (F \otimes \text{Id}_{\mathbb{1}})(z, z') \\
 &= \delta_{x'_z, x'} \text{id}_{f(x'_z)} \circ (F(x_z, x'_z) \otimes \text{Id}_{\mathbb{1}}(*, *)) \\
 &= \delta_{x'_z, x'} \text{id}_{f(x'_z)} \circ F(x_z, x'_z) \\
 &= F(x_z, x').
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Luego el cuadrado conmuta.

**Lema 5.1.7.** *Los morfismos  $A$ ,  $R$  y  $L$  satisfacen el Axioma Triangular, o sea, el triángulo*

$$\begin{array}{ccc}
 (f \otimes 1) \otimes g & \xrightarrow{A_{f,1,g}} & f \otimes (1 \otimes g) \\
 \searrow R_f \otimes \text{Id}_g & & \swarrow \text{Id}_f \otimes L_g \\
 & f \otimes g &
 \end{array} \quad (5.27)$$

conmuta.

*Demostración.* Sea  $P(v, w) = ((\text{Id}_f \otimes L_g) \circ A_{f,1,g})(v, w)$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 P(v, w) &= \sum_{u \in S_{f \otimes (1 \otimes g)}} (\text{Id}_f \otimes L_g)(u, w) \circ A_{f,1,g}(v, u) \\
 &= (\delta_{x_u, x_w} \text{id}_{f(x_u)} \otimes \delta_{y_u, y_w} \text{id}_{g(y_u)}) \circ \delta_{x,v}^{u,u} \text{id}_{f(x_v) \otimes 1} \otimes \delta_{y,v} \text{id}_{g(y_v)} \\
 &= \delta_{x_v, x_w} \text{id}_{f(x_v)} \otimes \delta_{y_v, y_w} \text{id}_{g(y_v)} \\
 &= (R_f \otimes \text{Id}_g)(v, w).
 \end{aligned} \quad (5.28)$$

**Proposición 5.1.8.** *La categoría  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  contiene una subcategoría completa que es tensorialmente equivalente a  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Definimos un funtor  $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{So}}$ , seleccionando para cada objeto  $V$  en  $\mathcal{C}$ , un punto  $x_V$  y una función  $f_V : \{x_V\} \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$ , definida por  $f_V(x_V) = V$ , de manera que  $x_V \neq x_U$  si  $V \neq U$ . Definimos entonces  $J(V) = f_V$ . A un morfismo  $\alpha : V \rightarrow W$  le asignamos una función  $F_\alpha(x_V, x_W) = \alpha : f_V(x_V) = V \rightarrow f_W(x_W) = W$  y definimos  $J(\alpha) = F_\alpha$ . Para el objeto unidad  $I$  de  $\mathcal{C}$  seleccionamos el punto fijo que habíamos tomado antes,  $*$  de manera que  $J(I) = I \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{\text{So}})$ . Para  $U, V$  objetos de  $\mathcal{C}$ , definimos  $\varphi_2(U, V) : J(U) \otimes J(V) = f_U \otimes f_V \rightarrow J(U \otimes V) = f_{U \otimes V}$ , como sigue. Si  $\gamma^{-1}(\{x_U\} \times \{x_V\}) = \{x'_{U,V}\}$ , entonces  $(f_U \otimes f_V)(x'_{U,V}) = U \otimes V$  y  $f_{U \otimes V}(x_{U \otimes V}) = U \otimes V$ , luego tomamos  $\varphi_2(U, V)(x'_{U,V}, (x_U, x_V)) = \text{id}_{U \otimes V}$ . La demostración de que se cumplen las condiciones de la Definición 1.1.1 es directa pues los morfismos  $\varphi_0$  y  $\varphi_2$  son identidades. En particular el funtor  $J$  es estricto. Es obvio entonces que  $J$  es una equivalencia entre categorías monoidales.

### 5.1.1 Extensión del trenzamiento

Supongamos ahora que la categoría  $\mathcal{C}$  es trenzada con trenzamiento  $c$ . Vamos a extender este trenzamiento a un trenzamiento en la categoría  $\mathcal{C}^{S_0}$  como sigue. Para  $v \in \gamma(S_f \times S_g)$  y  $w \in \gamma(S_g \times S_f)$ , definimos  $C_{f,g}(v, w)$  por

$$\begin{aligned} C_{f,g}(v, w) &= \delta_{x; y}^{v, w} C_{f(x_u), g(y_u)} : (f \otimes g)(v) = f(x_v) \otimes g(y_v) \rightarrow g(y_w) \otimes f(x_w) \\ &= (g \otimes f)(w) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Es claro entonces que  $C_{f,g}$  es invertible con inversa dada por  $C_{f,g}^{-1}(w, v) = \delta_{x; y}^{w, v} C_{f(x_w), g(y_w)}^{-1}$ .

**Proposición 5.1.9.** *La familia de isomorfismos  $C_{f,g}$  es un trenzamiento en la categoría  $\mathcal{C}^{S_0}$ .*

Para demostrar que  $\mathcal{C}$  es un trenzamiento en  $\mathcal{C}^{S_0}$ , debemos demostrar que es natural y que satisface el *Axioma Hexagonal*. O sea debemos demostrar que si  $F : f \rightarrow f'$  y  $G : g \rightarrow g'$ , entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} f \otimes g & \xrightarrow{C_{f,g}} & g \otimes f \\ F \otimes G \downarrow & & \downarrow G \otimes F \\ f' \otimes g' & \xrightarrow{C_{f',g'}} & g' \otimes f' \end{array} \tag{5.30}$$

conmuta y que los hexágonos

$$\begin{array}{ccccc} & & f \otimes (g \otimes h) & \xrightarrow{C_{f,g \otimes h}} & (g \otimes h) \otimes f & & \\ & \nearrow A_{f,g,h} & & & & \searrow A_{g,h,f} & \\ (f \otimes g) \otimes h & & & & & & g \otimes (h \otimes f) \\ & \searrow C_{f,g} \otimes \text{Id}_h & & & & \nearrow \text{Id}_g \otimes C_{f,h} & \\ & & (g \otimes f) \otimes h & \xrightarrow{A_{g,f,h}} & g \otimes (f \otimes h) & & \end{array} \tag{5.31}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (f \otimes g) \otimes h \xrightarrow{C_{f \otimes g, h}} h \otimes (f \otimes g) & \\
 A_{f, g, h}^{-1} \nearrow & & \searrow A_{h, f, g}^{-1} \\
 f \otimes (g \otimes h) & & (h \otimes f) \otimes g \\
 \searrow \text{Id}_f \otimes C_{g, h} & & \nearrow C_{f, h} \otimes \text{Id}_g \\
 & f \otimes (h \otimes g) \xrightarrow{A_{f, h, g}^{-1}} (f \otimes h) \otimes g &
 \end{array} \quad (5.32)$$

conmutan para cualesquiera objetos  $f, g, h$ . Comenzamos con la naturalidad. Por una parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
 ((G \otimes F) \circ C_{f, g})(v, w') &= \sum_{w \in \gamma(S_g \otimes S_f)} (G \otimes F)(w, w') \circ C_{f, g}(v, w) \\
 &= \sum_{w \in \gamma(S_g \otimes S_f)} (G(y_w, y_{w'}) \otimes F(x_w, x_{w'})) \circ \delta_{x, y}^{v, w} c_{f(x_w), g(y_w)} \\
 &= (G(y_v, y_{w'}) \otimes F(x_v, x_{w'})) \circ c_{f(x_v), g(y_v)}.
 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 C_{f', g'} \circ (F \otimes G)(v, w') &= \sum_{v' \in \gamma(S_{f'} \times S_{g'})} C_{f', g'}(v', w') \circ (F \otimes G)(v, v') \\
 &= \sum_{v' \in \gamma(S_{f'} \times S_{g'})} \delta_{x, y}^{v', w'} c_{f'(x_{v'}), g'(y_{v'})} \circ F(x_v, x_{v'}) \otimes G(y_v, y_{v'}) \\
 &= c_{f'(x_{v'}), g'(y_{v'})} \circ (F(x_v, x_{v'}) \otimes G(y_v, y_{v'})).
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Las dos sumas resultan iguales pues  $c$  es un trenzamiento en  $\mathcal{C}$  y por lo tanto es natural. Así,  $C$  es natural. Comprobaremos ahora que el primer hexágono

conmuta. Sea  $M(w, w') = (A_{g,h,f} \circ C_{f,g \otimes h} \circ A_{f,g,h})(w, w')$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 M(w, w') &= \sum_{\substack{u \in S_{(f \otimes g) \otimes h} \\ v \in S_{f \otimes (g \otimes h)}}} A_{f,g,h}(u, w') \circ C_{f,g \otimes h}(v, u) \circ A_{f,g,h}(w, v) \\
 &= \sum_{\substack{u \in S_{(f \otimes g) \otimes h} \\ v \in S_{f \otimes (g \otimes h)}}} \delta_{x;y;z}^{u,w'} \text{id}_{f(x_u) \otimes g(y_u) \otimes h(z_u)} \circ \delta_{x;y;z}^{v,u} c_{f(x_v), g(y_v) \otimes h(z_v)} \\
 &\quad \circ \delta_{x;y;z}^{w,v} \text{id}_{f(x_w) \otimes g(y_w) \otimes h(z_w)} \\
 &= \delta_{x;y;z}^{w,w'} c_{f(x_w), g(y_w) \otimes h(z_w)}.
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Sea  $N(w, w') = ((\text{Id}_g \otimes C_{f,h}) \circ A_{g,f,h} \circ (C_{f,g} \otimes \text{Id}_h))(w, w')$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 N(w, w') &= \sum_{\substack{u \in S_{g \otimes (f \otimes h)} \\ v \in S_{(g \otimes f) \otimes h}}} (\text{Id}_g \otimes C_{f,h})(u, w') \circ A_{g,f,h}(v, u) \circ (C_{f,g} \otimes \text{Id}_h)(w, v) \\
 &= \sum_{\substack{u \in S_{g \otimes (f \otimes h)} \\ v \in S_{(g \otimes f) \otimes h}}} (\delta_{y_u, y_{w'}} \text{id}_{g(y_u)} \otimes \delta_{x;z}^{u,w'} c_{f(x_u), h(z_u)}) \circ \delta_{x;y;z}^{v,u} \text{id}_{g(y_v) \otimes f(x_v) \otimes h(z_v)} \\
 &\quad \circ (\delta_{x;y}^{w,v} c_{f(x_w), g(y_w)} \otimes \delta_{z_w, z_v} \text{id}_{h(z_w)}) \\
 &= \delta_{x;y;z}^{w,w'} (\text{id}_{g(y_w)} \otimes c_{f(x_w), h(z_w)}) \circ (c_{f(x_w), g(y_w)} \otimes \text{id}_{h(z_w)}).
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

De nuevo, puesto que  $c$  es un trenzamiento estricto en  $\mathcal{C}$ , se tiene la igualdad  $M(w, w') = N(w, w')$ . La conmutatividad del segundo hexágono se demuestra análogamente.

Con esto terminamos la demostración del teorema.

De la misma manera, si la categoría  $\mathcal{C}$  tiene torsión, cálculos del mismo tipo de los anteriores demuestran entonces que:

**Proposición 5.1.10.** *Si la categoría  $\mathcal{C}$  tiene torsión  $\theta$ , entonces la categoría  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  tiene torsión  $\Theta_f : f \longrightarrow f$  dada por:*

$$\Theta_f(x, y) = \delta_{x,y} \theta_{f(x)} : f(x) \longrightarrow f(y) \tag{5.37}$$

para cualquier objeto  $f$  en  $\mathcal{C}^{\text{So}}$ .

Sin embargo no es posible extender una dualidad de  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  puesto que, aunque para cada  $f : S_f \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  tenemos un candidato canónico para  $f^* : S_f \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$ , a saber,  $f^*$  es la función definida por  $f^*(x) = (f(x))^*$  y un candidato canónico para la evaluación  $D_f : f^* \otimes f \rightarrow I$ , dado por  $D_f(v, \{*\}) = \delta_{x_v^*, x_v} d_{f(x_v)} : f^*(x_v^*) \otimes f(x_v) \rightarrow I(*) = I$ , donde  $\gamma^{-1}(v) = (x_v^*, x_v) \in S_f \times S_f$ , no es así para la coevaluación, pues la extensión canónica  $B_f : I \rightarrow f \otimes f^*$  dada por  $B_f(*, v) = \delta_{x_v^*, x_v} b_{f(x_v)} : I \rightarrow f(x_v) \otimes f^*(x_v^*)$  no es un morfismo en  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  si  $S_f$  es infinito, pues no se satisface la condición (ii) (página 101) de la definición de morfismo en  $\mathcal{C}^{\text{So}}$ . No obstante, si consideramos la subcategoría completa  $\mathcal{C}_f^{\text{So}}$  que tiene como objetos a funciones  $f$  con dominio  $S_f$  finito, entonces sí es posible extender la dualidad según las fórmulas dadas a  $\mathcal{C}_f^{\text{So}}$ . No es difícil ver que entonces el funtor inclusión  $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{So}}$  factoriza a través de  $\mathcal{C}_f^{\text{So}}$ , o sea

$$J : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}_f^{\text{So}} \hookrightarrow \mathcal{C}^{\text{So}} \quad (5.38)$$

Además:

**Proposición 5.1.11.** *Si la categoría  $\mathcal{C}$  es de listones, entonces la estructura extendida da lugar en  $\mathcal{C}_f^{\text{So}}$  a una estructura pivotal trenzada (no estricta).*

La demostración de esta proposición y de todo lo anterior se basa, como antes, en propiedades de la delta de Kronecker y de la estructura de  $\mathcal{C}$ .

**Nota 5.1.12.** Para simplificar los cálculos en lo que sigue, adoptaremos la siguiente notación. Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto de isomorfismos de  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  generado bajo productos tensoriales y composiciones de morfismos por el conjunto  $(\text{Id}_\chi, A_{\kappa, \lambda, \mu})$ , donde  $\chi, \kappa, \lambda$  y  $\mu$  son objetos cualesquiera en  $\mathcal{C}^{\text{So}}$ . En otras palabras  $\mathcal{A}$  es el conjunto de isomorfismos que relacionan objetos distintos por asociatividad. Si  $F, G : \alpha \rightarrow \beta$  son morfismos en  $\mathcal{C}^{\text{So}}$ , escribiremos  $F \doteq G$  si  $C \circ G \circ B = X \circ F \circ Y$ , donde  $B, C, X$  y  $Y$  son elementos de  $\mathcal{A}$ .

Por ejemplo,  $F \doteq G$  si el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 (((f_1 \otimes f_2) \otimes f_3) \otimes f_4) \otimes f_5 & \xrightarrow{F} & (g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 \\
 \downarrow A_{f_1 \otimes f_2, f_3, f_4} \otimes \text{id}_{f_5} & & \downarrow A_{g_1, g_2, g_3} \\
 ((f_1 \otimes f_2) \otimes (f_3 \otimes f_4)) \otimes f_5 & & \\
 \downarrow A_{f_1 \otimes f_2, f_3 \otimes f_4, f_5} & & \\
 (f_1 \otimes f_2) \otimes ((f_3 \otimes f_4) \otimes f_5) & & \\
 \downarrow \text{id}_{f_1 \otimes f_2} \otimes A_{f_3, f_4, f_5}^{-1} & & \\
 (f_1 \otimes f_2) \otimes (f_3 \otimes (f_4 \otimes f_5)) & \xrightarrow{G} & g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)
 \end{array}$$

Es claro que  $\doteq$  es una relación de equivalencia en el conjunto de morfismos de  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  que es además compatible con la composición en el sentido de que si  $F \doteq G$  y  $F' \doteq G'$  entonces  $F' \circ F \doteq G' \circ G$ , si las composiciones están definidas. En efecto, supongamos que  $C \circ F \circ B = X \circ G \circ Y$  y que  $D \circ F' \circ E = Z \circ G' \circ W$ , para  $B, C, D, E, X, Y, Z$  y  $W$  elementos en  $\mathcal{A}$ . Entonces  $Z \circ G' \circ G \circ Y = D \circ F' \circ E \circ W^{-1} \circ X^{-1} \circ C \circ F \circ B$ . El morfismo  $E \circ W^{-1} \circ X^{-1} \circ C$  es un endomorfismo del dominio  $\text{dom}(F')$  de  $F'$  que es igual al codominio  $\text{cod}(F)$  de  $F$  y es un elemento de  $\mathcal{A}$ . Por el teorema de coherencia de Mac Lane, tiene que ser igual al morfismo identidad  $\text{Id}_{\text{dom}(F')}$ . Por lo tanto  $Z \circ G' \circ G \circ Y = D \circ F' \circ F \circ B$ .

Esta notación se puede introducir, por supuesto, en cualquier categoría monoidal no estricta. En el desarrollo posterior usaremos esta notación sin comentarios adicionales.

## 5.2 Biálgebras

En el capítulo 3, definimos los conceptos de álgebra, coálgebra y biálgebra en una categoría monoidal *estricta*. En el caso que nos ocupa, diremos que un objeto  $A$  de  $\mathbf{V}$  es un álgebra en  $\mathbf{V}$ , si existen morfismos  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  y  $\eta : I \rightarrow A$ , tales que

$$\mu(\mu \otimes \text{id}_A) \doteq \mu(\text{id}_A \otimes \mu) \quad (5.39)$$

$$\mu(\eta \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_A \otimes \eta) = \text{id}_A \quad (5.40)$$

Análogamente, diremos que  $C$  es una coálgebra en  $\mathbf{V}$  si existen morfismos  $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$  y  $\varepsilon : C \rightarrow 1$  tales que

$$(\Delta \otimes \text{id}_C)\Delta \doteq (\text{id}_C \otimes \Delta)\Delta \quad (5.41)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}_C)\Delta = (\text{id}_C \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}_C \quad (5.42)$$

Si  $H$  es álgebra, entonces el producto en  $H \otimes H$  lo definimos como la siguiente composición:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} : (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) &\xrightarrow{A_{H \otimes H, H, H}^{-1}} ((H \otimes H) \otimes H) \otimes H \xrightarrow{A_{H, H, H} \otimes \text{id}_H} \\ &(H \otimes (H \otimes H)) \otimes H \xrightarrow{\text{id}_H \otimes c_{H, H} \otimes \text{id}_H} (H \otimes (H \otimes H)) \otimes H \xrightarrow{A_{H, H, H}^{-1} \otimes \text{id}_H} \\ &((H \otimes H) \otimes H) \otimes H \xrightarrow{A_{(H \otimes H), H, H}} (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \xrightarrow{\mu \otimes \mu} \\ &\xrightarrow{\hspace{10em}} H \otimes H \end{aligned} \quad (5.43)$$

Por último diremos que  $H$  es biálgebra en  $\mathbf{V}$ , si  $\widehat{\mu}(\Delta \otimes \Delta) \doteq \Delta \mu$  y  $\varepsilon \mu = \varepsilon \otimes \varepsilon$ .

En esta sección encontraremos biálgebras en  $\mathcal{C}^{\mathcal{S}_0}$ , en el caso en que  $\mathcal{C}$  sea una categoría monoidal con trenzamiento y dualidad izquierda.

Sea  $h : S_h \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  una función inyectiva tal que  $h(S_h) \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$  sea cerrado bajo  $\otimes$ , es decir, para todo par  $(x, y) \in S_h \times S_h$ , existe un único  $z \in S_h$  tal que  $h(x) \otimes h(y) = h(z)$  y tal que  $1 \in h(S_h)$ . Por ejemplo, si la cardinalidad de  $S_0$  es igual a la cardinalidad de  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ , entonces podemos tomar  $h : S_0 \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  como cualquier función biyectiva.

Sea  $\Delta_h = \{(x, x) \mid x \in S_h\} \subset S_h \times S_h$  y sea  $\bar{h}$  el objeto definido por la siguiente composición:

$$\bar{h} : \gamma(\Delta_h) \xrightarrow{\gamma} \Delta_h \xrightarrow{h^* \times h} \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\otimes} \text{Obj}(\mathcal{C}) \quad (5.44)$$

donde  $h^*(x) := (h(x))^*$ . Es decir,  $\bar{h}$  está definida por la relación  $\bar{h}(\gamma(x, x)) = h^*(x) \otimes h(x)$ , para  $\gamma(x, x) \in S_{\bar{h}} = \gamma(\Delta_h)$ .

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

**Teorema 5.2.1.** *El objeto  $\bar{h}$  de  $C^{S_0}$  tiene estructura de biálgebra.*

Estableceremos dos lemas previos a la demostración.

Sea  $\chi : S_h \times S_h \rightarrow S_h$  la función definida por la relación  $h(\chi(x, y)) = h(x) \otimes h(y)$ .

**Lema 5.2.2.** *La aplicación  $\chi$  satisface la relación  $\chi(\chi(x, y), z) = \chi(x, \chi(y, z))$ .*

*Demostración.*  $h(\chi(\chi(x, y), z)) = h(\chi(x, y)) \otimes h(z) = h(x) \otimes h(y) \otimes h(z) = h(x) \otimes h(\chi(y, z)) = h(\chi(x, \chi(y, z)))$ . Luego  $\chi(\chi(x, y), z) = \chi(x, \chi(y, z))$ .

Para enunciar y demostrar el siguiente lema usaremos las letras  $x, y$  y  $z$ , que habíamos usado para designar puntos en  $S_0$ , para designar objetos de  $\mathcal{C}$ . Esperamos que esto no traiga confusión.

Sean  $x, y$  objetos de  $\mathbf{V}$ . Recordemos primeramente el isomorfismo  $\gamma_{x,y} : y^* \otimes x^* \rightarrow (x \otimes y)^*$ , definido en (1.65) y representado en la figura 1.13. Definimos ahora el isomorfismo  $\Gamma_{x,y} : y^* \otimes y \otimes x^* \otimes x \rightarrow (x \otimes y)^* \otimes (x \otimes y)$ , como la composición

$$\Gamma_{x,y} : y^* \otimes y \otimes x^* \otimes x \xrightarrow{\text{id}_{y^*} \otimes c_{y,x^*} \otimes \text{id}_x} y^* \otimes x^* \otimes y \otimes x \xrightarrow{\gamma_{x,y} \otimes c_{y,x}} (x \otimes y)^* \otimes (x \otimes y)$$

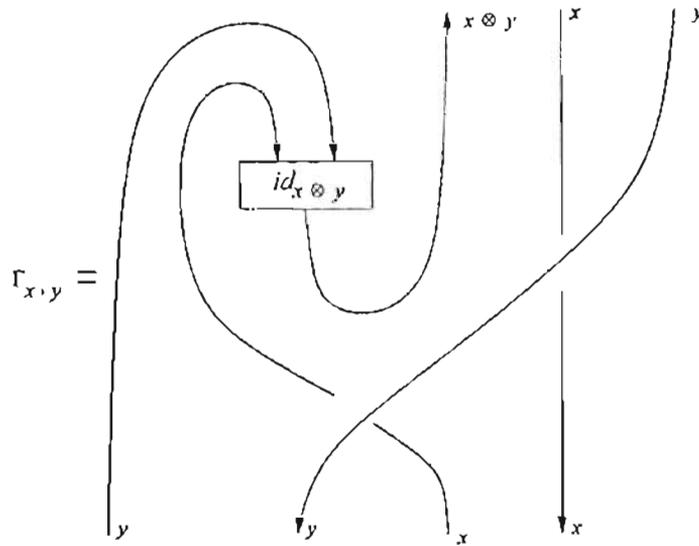
**Lema 5.2.3.** *Los isomorfismos  $\Gamma_{x,y}$  satisfacen la relación*

$$\Gamma_{x,y \otimes z}(\Gamma_{y,z} \otimes \text{id}_{x^* \otimes x}) = \Gamma_{x \otimes y, z}(\text{id}_{x^* \otimes x} \otimes \Gamma_{x,y}).$$

En otras palabras, si  $x, y$  y  $z$  son objetos en  $\mathbf{V}$  el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} z^* \otimes z \otimes y^* \otimes y \otimes x^* \otimes x & \xrightarrow{\Gamma_{y,z} \otimes \text{id}_{x^* \otimes x}} & (y \otimes z)^* \otimes (y \otimes z) \otimes x^* \otimes x \\ \downarrow \text{id}_{z^* \otimes z} \otimes \Gamma_{x,y} & & \downarrow \Gamma_{x,y \otimes z} \\ z^* \otimes z \otimes (x \otimes y)^* \otimes (x \otimes y) & \xrightarrow{\Gamma_{x \otimes y, z}} & (x \otimes y \otimes z)^* \otimes (x \otimes y \otimes z) \end{array}$$

*Demostración.* La demostración la haremos usando el cálculo gráfico. En la figura 5.1 se muestran los morfismos  $\Gamma_{x,y}$ . En la figura 5.2 se demuestra el Lema. Las figuras superior izquierda e inferior derecha, representan a los

Figura 5.1: El morfismo  $\Gamma_{x,y}$ 

morfismos  $\Gamma_{x,y} \otimes z (\Gamma_{y,z} \otimes id_{x \cdot \otimes x})$  y  $\Gamma_{x \otimes y, z} (id_{z \cdot \otimes z} \otimes \Gamma_{x,y})$  respectivamente.

*Demostración de 5.2.1.* Definimos  $\mu : \bar{h} \otimes \bar{h} \longrightarrow \bar{h}$  por

$$\mu(v, \gamma(z, z)) : (\bar{h} \otimes \bar{h})(v) = h^*(x_v) \otimes h(x_v) \otimes$$

$$\otimes h^*(y_v) \otimes h(y_v) \xrightarrow{\delta_{z, \gamma(y_v, z)} \Gamma_{h(y_v), h(x_v)}} \bar{h}(\gamma(z, z)) = h^*(z) \otimes h(z) \quad (5.45)$$

Puesto que existe un único  $x_0 \in S_h$  tal que  $h(x_0) = I \in Obj(\mathcal{C})$ , podemos definir  $\eta : I \longrightarrow \bar{h}$  por

$$\eta(*, \gamma(y, y)) = \delta_{x_0, y} id_I : I = h^*(x_0) \otimes h(x_0) \longrightarrow h^*(y) \otimes h(y)$$

Debemos probar ahora que  $\mu(\mu \otimes Id_{\bar{h}}) \doteq \mu(Id_{\bar{h}} \otimes \mu)$  y que  $\mu(\eta \otimes Id_{\bar{h}}) = Id_{\bar{h}} = \mu(Id_{\bar{h}} \otimes \eta)$ .

Sean  $S = \mu(\mu \otimes Id_{\bar{h}})(w, \gamma(t, t))$  y  $R = \mu(Id_{\bar{h}} \otimes \mu)(w', \gamma(t, t))$ . Por una parte

tenemos que:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \mu(v, \gamma(t, t)) \circ (\mu \otimes \text{Id}_{\bar{h}})(w, v) \\
&= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \delta_{t, \chi(y_v, x_v)} \Gamma_{h(y_v), h(x_v)} \circ (\delta_{x_v, \chi(y_w, x_w)} \Gamma_{h(y_w), h(x_w)} \otimes \delta_{z_w, y_v} \text{id}_{h^*(z_w) \otimes h(z_w)}) \\
&= \delta_{t, \chi(z_w, \chi(y_w, x_w))} \Gamma_{h(z_w), h(\chi(y_w, x_w))} \circ (\Gamma_{h(y_w), h(x_w)} \otimes \text{id}_{h^*(z_w) \otimes h(z_w)}) \\
&= \delta_{t, \chi(z_w, \chi(y_w, x_w))} \Gamma_{h(z_w), h(y_w) \otimes h(x_w)} \circ (\Gamma_{h(y_w), h(x_w)} \otimes \text{id}_{h^*(z_w) \otimes h(z_w)})
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \mu(v, \gamma(t, t)) \circ (\text{Id}_{\bar{h}} \otimes \mu)(w', v) \\
&= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \delta_{t, \chi(y_v, x_v)} \Gamma_{h(y_v), h(x_v)} \circ (\delta_{x_{w'}, z_v} \text{id}_{h^*(x_{w'}) \otimes h(x_{w'})} \otimes \delta_{y_v, \chi(z_{w'}, y_{w'})} \Gamma_{h(z_{w'}), h(y_{w'})}) \\
&= \delta_{t, \chi(\chi(z_{w'}, y_{w'}), x_{w'})} \Gamma_{h(\chi(z_{w'}, y_{w'})), h(x_{w'})} \circ (\text{id}_{h^*(x_{w'}) \otimes h(x_{w'})} \otimes \Gamma_{h(z_{w'}), h(y_{w'})}) \\
&= \delta_{t, \chi(\chi(z_{w'}, y_{w'}), x_{w'})} \Gamma_{h(z_{w'}) \otimes h(y_{w'}), h(x_{w'})} \circ (\text{id}_{h^*(z_{w'}) \otimes h(x_{w'})} \otimes \Gamma_{h(z_{w'}), h(y_{w'})})
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Según el Lema 5.2.2, tenemos  $\chi(\chi(z_{w'}, y_{w'}), x_{w'}) = \chi(z_{w'}, \chi(y_{w'}, x_{w'}))$ . De aquí y del Lema 5.2.3 es fácil deducir que  $R \circ A_{\bar{h}, \bar{h}, \bar{h}} = S$  y por lo tanto  $R \doteq S$ .

Vamos a demostrar ahora que  $\mu(\eta \otimes \text{Id}_{\bar{h}}) = \text{Id}_{\bar{h}}$ . Sea  $J = \mu(\eta \otimes \text{Id}_{\bar{h}})(u, \gamma(z, z))$ . De la relación  $h(\chi(x_u, x_0)) = h(x_u) \otimes h(x_0) = h(x_u) \otimes I = h(x_0)$  deducimos que  $\chi(x_u, x_0) = x_u$  y puesto que  $\Gamma_{a, I} = \text{id}_{h^*(a) \otimes h(a)}$  para todo objeto  $a$  de  $\mathcal{C}$ ,

tenemos:

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \mu(v, \gamma(z, z)) \circ (\eta \otimes \text{Id}_{\bar{h}})(u, v) \\
 &= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \delta_{z, \chi(y_v, x_v)} \Gamma_{h(y_v), h(x_v)} \circ (\eta(*, \gamma(x_v, x_v)) \otimes \text{Id}_{\bar{h}}(\gamma(x_u, x_u), \gamma(y_v, y_v))) \\
 &= \sum_{v \in S_{\bar{h} \otimes \bar{h}}} \delta_{z, \chi(y_v, x_v)} \Gamma_{h(y_v), h(x_v)} \circ (\delta_{x_v, x_v} \text{id}_I \otimes \delta_{x_v, y_v} \text{id}_{h^*(x_u) \otimes h(x_u)}) \\
 &= \delta_{z, \chi(x_u, x_u)} \Gamma_{h(x_u), h(x_u)} \\
 &= \delta_{z, x_u} \Gamma_{h(x_u), I} \\
 &= \delta_{z, x_u} \text{id}_{h^*(x_u) \otimes h(x_u)} \\
 &= \text{Id}_{\bar{h}}(u, \gamma(z, z))
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

La igualdad  $\mu(\text{Id}_{\bar{h}} \otimes \eta) = \text{Id}_{\bar{h}}$  se demuestra análogamente.

Con esto hemos demostrado que  $(\bar{h}, \mu, \eta)$  es un álgebra en  $\mathcal{C}^{S_0}$ .

Definimos ahora  $\Delta : \bar{h} \rightarrow \bar{h} \otimes \bar{h}$  como la función

$$\Delta(\gamma(x, x), v) : h^*(x) \otimes h(x) \rightarrow h^*(y_v) \otimes h(y_v) \otimes h^*(z_v) \otimes h(z_v)$$

igual al siguiente morfismo

$$\begin{aligned}
 \delta_{x, y_v} \delta_{x, z_v} \text{id}_{h^*(x)} \otimes b_{h(x)} \otimes \text{id}_{h(x)} : h^*(x) \otimes h(x) \rightarrow h^*(y_v) \otimes h(y_v) \otimes \\
 h^*(z_v) \otimes h(z_v)
 \end{aligned}$$

Definimos a  $\varepsilon : \bar{h} \rightarrow I$  como la función dada por

$$\varepsilon(\gamma(x, x), *) = d_{h(x)} : h^*(x) \otimes h(x) \rightarrow I$$

Vamos a demostrar que  $(\text{Id}_{\bar{h}} \otimes \Delta) \Delta = (\Delta \otimes \text{Id}_{\bar{h}}) \Delta$  y que  $(\varepsilon \otimes \text{Id}_{\bar{h}}) \Delta = \text{Id}_{\bar{h}} =$

$(\text{Id}_{\overline{h}} \otimes \varepsilon)$ . Sea  $L = (\text{Id}_{\overline{h}} \otimes \Delta)\Delta(\gamma(t, t), w)$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{v \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} (\text{Id}_{\overline{h}} \otimes \Delta)(v, w') \circ \Delta(\gamma(t, t), v) \\
&= \sum_{v \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} (\delta_{x_v, z_w} \text{id}_{h^*(x_v) \otimes h(x_v)} \otimes \delta_{y_v, y_{w'}} \delta_{y_v, z_{w'}} \text{id}_{h^*(y_v)} \otimes b_{h(y_v)} \otimes \text{id}_{h(y_v)}) \circ \\
&\quad (\delta_{t, x_v} \delta_{t, y_v} \text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)}) \\
&= \delta_{t, x_v} \delta_{t, y_v} \delta_{t, z_v} (\text{id}_{h^*(t) \otimes h(t)} \otimes \text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)}) \circ (\text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)})
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Sea ahora  $R = (\Delta \otimes \text{Id}_{\overline{h}})\Delta(\gamma(t, t), w)$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{v \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} (\Delta \otimes \text{Id}_{\overline{h}})(v, w) \circ \Delta(\gamma(t, t), v) \\
&= \sum_{v \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} \delta_{x_v, x_w} \delta_{x_v, y_{w'}} (\text{id}_{h^*(x_v)} \otimes b_{h(x_v)} \otimes \text{id}_{h(x_v)} \otimes \delta_{y_v, z_w} \text{id}_{h^*(y_v) \otimes h(y_v)}) \circ \\
&\quad (\delta_{t, x_v} \delta_{t, y_v} \text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)}) \\
&= \delta_{t, x_v} \delta_{t, y_v} \delta_{t, z_v} (\text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)} \otimes \text{id}_{h^*(t) \otimes h(t)}) \circ (\text{id}_{h^*(t)} \otimes b_{h(t)} \otimes \text{id}_{h(t)})
\end{aligned} \tag{5.50}$$

En la figura 5.3, si tomamos  $x = h(t)$ , vemos que  $R$  y  $L$  son iguales salvo asociatividad, es decir,  $A_{\overline{h}, \overline{h}, \overline{h}}(w, w') \circ R = L$ , luego  $L \doteq R$ .

Comprobaremos ahora que  $(\varepsilon \otimes \text{Id}_{\overline{h}})\Delta = \text{Id}_{\overline{h}}$ .

Sea  $J = (\varepsilon \otimes \text{Id}_{\overline{h}})\Delta(\gamma(x, x), \gamma(y, y))$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{x \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} (\varepsilon \otimes (\text{Id}_{\overline{h}}))(v, \gamma(y, y)) \circ \Delta(\gamma(x, x), v) \\
&= \sum_{x \in S_{\overline{h}} \otimes S_{\overline{h}}} (\varepsilon(\gamma(x_v, x_v), *) \otimes \text{Id}_{\overline{h}}(\gamma(y_v, y_v), \gamma(y, y))) \circ \\
&\quad (\delta_{x, x_v} \delta_{x, y_v} \text{id}_{h^*(x)} \otimes b_{h(x)} \otimes \text{id}_{h(x)}) \\
&= (d_{h(x_v)} \otimes \delta_{y_v, y} \text{id}_{h^*(y_v) \otimes h(y_v)}) \circ (\delta_{x, x_v} \delta_{x, y_v} \text{id}_{h^*(x)} \otimes b_{h(x)} \otimes \text{id}_{h(x)}) \\
&= \delta_{x, y} (d_{h(x)} \otimes \text{id}_{h^*(x) \otimes h(x)}) \circ (\text{id}_{h^*(x)} \otimes b_{h(x)} \otimes \text{id}_{h(x)})
\end{aligned} \tag{5.51}$$

De la definición de dualidad izquierda tenemos que  $(d_{h(x)} \otimes \text{id}_{h^*(x)})(\text{id}_{h^*(x)} \otimes b_{h(x)}) = \text{id}_{h^*(x)}$ , luego  $J = \delta_{x, y} \text{id}_{h^*(x) \otimes h(x)} = \text{Id}_{\overline{h}}(\gamma(x, x), \gamma(y, y))$ .

La igualdad  $\text{Id}_{\overline{h}} = (\text{Id}_{\overline{h}} \otimes \varepsilon)$  se demuestra de forma análoga y con esto hemos

demostrado que  $(\bar{h}, \Delta, \varepsilon)$  es una coálgebra en  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}_0}$ .

Resta demostrar que  $\Delta$  y  $\varepsilon$  son morfismos de álgebra. Para demostrar que  $\Delta$  es morfismo de álgebras debemos demostrar que el siguiente diagrama conmuta salvo por la relación  $\hat{=}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \bar{h} \otimes \bar{h} & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \hat{\mu} \\ \bar{h} & \xrightarrow{\Delta} & \bar{h} \otimes \bar{h} \end{array}$$

donde  $\hat{\mu}$  es el producto en  $\bar{h} \otimes \bar{h}$  y está definido como en (5.43), por la composición

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) &\xrightarrow{A_{\bar{h} \otimes \bar{h}, \bar{h}, \bar{h}}^{-1}} ((\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes \bar{h}) \otimes \bar{h} \\ &\xrightarrow{(\text{Id}_{\bar{h}} \otimes C_{\bar{h}, \bar{h}} \otimes \text{Id}_{\bar{h}}) A_{\bar{h}, \bar{h}, \bar{h}}^{-1}} (\bar{h} \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h})) \otimes \bar{h} \\ &\xrightarrow{(\mu \otimes \mu) A_{\bar{h} \otimes \bar{h}, \bar{h}, \bar{h}} (A_{\bar{h}, \bar{h}, \bar{h}}^{-1} \otimes \text{id}_{\bar{h}})} \bar{h} \otimes \bar{h} \end{aligned}$$

El morfismo  $\text{Id}_{\bar{h}} \otimes C_{\bar{h}, \bar{h}} \otimes \text{Id}_{\bar{h}}(v, w) : (\bar{h} \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes \bar{h})(v) \rightarrow (\bar{h} \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes \bar{h})(w)$  está relacionado con el morfismo  $F_w(v, w) : (\bar{h} \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes \bar{h})(v) \rightarrow (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h})$  representado por la siguiente flecha vertical:

$$\begin{array}{c} h(x_v)^* \otimes h(x_v) \otimes h(y_v)^* \otimes h(y_v) \otimes h(z_v)^* \otimes h(z_v) \otimes h(t_v)^* \otimes h(t_v) \\ \downarrow F_w(v, w) = \delta_x^{v, w} \text{Id}_{h(x_v)^* \otimes h(x_v)} \otimes \delta_{y, z}^{v, w} \otimes h(y_v)^* \otimes h(y_v) \otimes h(z_v)^* \otimes h(z_v) \otimes h(t_v)^* \otimes h(t_v) \\ h(x_w)^* \otimes h(x_w) \otimes h(z_w)^* \otimes h(z_w) \otimes h(y_w)^* \otimes h(y_w) \otimes h(t_w)^* \otimes h(t_w) \end{array}$$

puesto que los codominios están relacionados por asociatividad.

El morfismo  $(\mu \otimes \mu)(w, u) : (\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}) \rightarrow \bar{h} \otimes \bar{h}$ , está representado en el siguiente diagrama vertical:

$$\begin{array}{c} h(x_w)^* \otimes h(x_w) \otimes h(z_w)^* \otimes h(z_w) \otimes h(y_w)^* \otimes h(y_w) \otimes h(t_w)^* \otimes h(t_w) \\ \downarrow \delta_{x_u, \chi(z_w, x_w)} \Gamma_{h(z_w), h(x_w)} \otimes \delta_{y_u, \chi(t_w, y_w)} \Gamma_{h(t_w), h(y_w)} \\ h(x_u)^* \otimes h(x_u) \otimes h(y_u)^* \otimes h(y_u) \end{array}$$

Es claro entonces que  $\hat{\mu} \doteq \sum_w (\mu \otimes \mu) \circ F_w$  y que este morfismo resulta ser igual a

$$\begin{array}{c} h(x_u)^* \otimes h(x_u) \otimes h(y_u)^* \otimes h(y_u) \otimes h(z_u)^* \otimes h(z_u) \otimes h(t_u)^* \otimes h(t_u) \\ \delta_{x_u, \chi(z_u, x_u)} \delta_{y_u, \chi(t_u, y_u)} (\Gamma_{h(z_u), h(x_u)} \otimes \Gamma_{h(t_u), h(y_u)}) (\text{id}_{h(x_u)} \otimes \text{id}_{h(y_u)}) \otimes c_{h(y_u)^* \otimes h(y_u), h(z_u)^* \otimes h(z_u)} \otimes \text{id}_{h(t_u)^* \otimes h(t_u)} \\ \downarrow \\ h(x_u)^* \otimes h(x_u) \otimes h(y_u)^* \otimes h(y_u) \end{array}$$

Por lo tanto  $\hat{\mu}(\Delta \otimes \Delta) \doteq \sum_v G_v \circ (\Delta \otimes \Delta)$ , donde  $G_v$  es la flecha vertical anterior. Teniendo en cuenta que  $(\Delta \otimes \Delta)(p, v) : (\bar{h} \otimes \bar{h})(p) \rightarrow ((\bar{h} \otimes \bar{h}) \otimes (\bar{h} \otimes \bar{h}))(v)$  está dado por

$$(\Delta \otimes \Delta)(p, v) = \delta_{x_p, x_u} \delta_{x_p, y_u} \delta_{y_p, z_u} \delta_{y_p, t_u} (\text{id}_{h(x_p)} \otimes b_{h(x_p)} \otimes \text{id}_{h(x_p)}) (\text{id}_{h(y_p)} \otimes b_{h(y_p)} \otimes \text{id}_{h(y_p)})$$

vemos que la suma da como resultado

$$\begin{aligned} M = & \delta_{x_u, \chi(y_p, x_p)} \delta_{y_u, \chi(y_p, x_p)} (\Gamma_{y_p, x_p} \otimes \Gamma_{y_p, x_p}) (\text{id}_{h(x_p)} \otimes c_{h(x_p)^* \otimes h(x_p), h(y_p)^* \otimes h(y_p)} \\ & \otimes \text{id}_{h(y_p)^* \otimes h(y_p)}) (\text{id}_{h(x_p)} \otimes b_{h(x_p)} \otimes \text{id}_{h(x_p)}) (\text{id}_{h(y_p)} \otimes b_{h(y_p)} \otimes \text{id}_{h(y_p)}) \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que  $(\mu\Delta)(p, u)$  es la suma en  $v$  de la siguiente composición

$$\begin{array}{ccc} h(x_p)^* \otimes h(x_p) \otimes h(y_p)^* \otimes h(y_p) & \xrightarrow{\delta_{x_u, \chi(y_p, x_p)} \Gamma_{h(y_p), h(x_p)}} & h(x_u)^* \otimes h(x_u) \\ & & \downarrow \delta_{x_u, x_u} \delta_{x_u, y_u} (\text{id}_{h(x_u)} \otimes b_{h(x_u)} \otimes \text{id}_{h(x_u)}) \\ & & h(x_u)^* \otimes h(x_u) \otimes h(y_u)^* \otimes h(y_u) \end{array}$$

La suma entonces resulta ser igual a

$$(\mu\Delta)(p, u) = \delta_{x_u, \chi(y_p, x_p)} \delta_{y_u, \chi(y_p, x_p)} (\text{id}_{h(\chi(y_p, x_p))}^* \otimes b_{h(\chi(y_p, x_p))} \otimes \text{id}_{h(\chi(y_p, x_p))}) \Gamma_{h(y_p), h(x_p)}$$

En la figura 5.4, tomando  $y = x_p$  y  $x = y_p$ , el gráfico que está en la parte superior izquierda representa a  $M$ , en tanto que el gráfico en la parte inferior derecha representa a  $(\mu\Delta)(p, u)$ . Por lo tanto son iguales y con esto hemos demostrado que  $\mu\Delta \doteq \hat{\mu}(\Delta \otimes \Delta)$ . Para demostrar que  $\varepsilon$  es morfismo de álgebras, debemos demostrar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{h} \otimes \bar{h} & & \\ \mu \downarrow & \searrow \varepsilon \otimes \varepsilon & \\ \bar{h} & \xrightarrow{\varepsilon} & I \end{array}$$

conmuta. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon\mu)(u, *) &= \sum_w \varepsilon(\gamma(x_w, x_w), *) \circ \mu(u, w) \\
 &= \sum_w d_{h(x_w)} \circ (\delta_{x_w, \chi(y_u, x_u)} \Gamma_{h(y_u), h(x_u)}) \\
 &= d_{h(\chi(y_u, x_u))} \Gamma_{h(y_u), h(x_u)} \\
 &= d_{h(y_u) \otimes h(x_u)} \Gamma_{h(y_u), h(x_u)}
 \end{aligned}$$

Por otra parte,  $(\varepsilon \otimes \varepsilon)(u, *) = d_{h(x_u) \otimes h(y_u)}$ .

La figura 5.5, tomando como antes  $x = y_u$  y  $y = x_u$ , demuestra que estos dos últimos morfismos son iguales. Por lo tanto  $(\bar{h}, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$  es una biálgebra.

### 5.3 Representaciones de $\mathcal{C}$

Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña y monoidal estricta y sea  $R$  un anillo conmutativo cualquiera con identidad. Asociada a  $\mathcal{C}$  consideramos la categoría  $\mathcal{C}'$  que tiene los mismos objetos que  $\mathcal{C}$  pero para dos objetos  $a$  y  $b$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(a, b)$  es el  $R$ -módulo libre generado por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ . La composición de dos morfismos básicos en  $\mathcal{C}'$  es la misma que en  $\mathcal{C}$  y se extiende por linealidad a todas las composiciones de morfismos en  $\mathcal{C}'$  y el producto tensorial de objetos es el de  $\mathcal{C}$  y el de morfismos se extiende también por linealidad a  $\mathcal{C}'$ . Vamos a suponer en lo que sigue que el anillo  $R$  es el campo  $\mathbb{C}$ . Con esto  $\mathcal{C}'$  es una Ab-categoría monoidal estricta y pequeña, por lo que le podemos aplicar la construcción de la sección 5.1 y obtener una categoría que denotaremos igual que antes por  $\mathcal{C}^{\text{So}}$  y que le llamaremos *categoría libre asociada a  $\mathcal{C}$* .

Supongamos que  $\mathcal{F}$  es una representación de  $\mathcal{C}$ , es decir, un functor monoidal estricto de  $\mathcal{C}$  en la categoría  $\mathbb{C}_{\mathcal{V}}$  de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión finita. Entonces podemos extender  $\mathcal{F}$  a un functor monoidal estricto  $\mathcal{F}'$  de la categoría  $\mathcal{C}'$  en la categoría  $\mathbb{C}_{\mathcal{V}}$ , simplemente definiendo el functor  $\mathcal{F}'$  que coincide con  $\mathcal{F}$  en objetos ( $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  tienen los mismos objetos) y definiendo  $\mathcal{F}'(\sum \alpha_i F_i) = \sum \alpha_i \mathcal{F}(F_i) : \mathcal{F}(a) \rightarrow \mathcal{F}(b)$ , si  $F_i : a \rightarrow b$  son morfismos en  $\mathcal{C}$  y  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i$ . Podemos extender a su vez  $\mathcal{F}'$  a un functor monoidal no estricto  $\widehat{\mathcal{F}} : \mathcal{C}^{\text{So}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathcal{V}}$ , donde  $\mathbb{C}_{\mathcal{V}}$  es la categoría de espacios vectoriales sobre  $\mathbb{C}$ , no necesariamente de dimensión finita, como sigue. Si  $f$  es un objeto de  $\mathcal{C}^{\text{So}}$ , definimos  $\widehat{\mathcal{F}}(f) = \bigoplus_{x \in S_f} \mathcal{F}'(f(x))$ .

Para un morfismo  $F : f \rightarrow g$  definimos

$$\widehat{\mathcal{F}}(F) = \bigoplus_{(x,y) \in S_f \times S_g} \mathcal{F}'(F(x,y)) : \bigoplus_{x \in S_f} \mathcal{F}'(f(x)) \longrightarrow \bigoplus_{y \in S_g} \mathcal{F}'(g(y))$$

Es fácil ver que efectivamente  $\widehat{\mathcal{F}}$  es un functor que extiende a  $\mathcal{F}'$  y por lo tanto a  $\mathcal{F}$ . Si  $f, g, h$  son objetos de  $\mathcal{C}^{S_0}$  entonces la asociatividad  $A_{f,g,h}$  es transformada por  $\widehat{\mathcal{F}}$  en la habitual identificación entre los espacios vectoriales  $(\mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{F}(g)) \otimes \mathcal{F}(h)$  y  $\mathcal{F}(f) \otimes \mathcal{F}(g) \otimes \mathcal{F}(h)$ , es decir, entre los espacios  $\bigoplus_{x,y,z} (\mathcal{F}'(f(x)) \otimes \mathcal{F}'(g(y))) \otimes \mathcal{F}'(h(z))$  y  $\bigoplus_{x,y,z} \mathcal{F}'(f(x)) \otimes (\mathcal{F}'(g(y)) \otimes \mathcal{F}'(h(z)))$ .

Con esto hemos demostrado la siguiente propiedad universal de la construcción  $\mathcal{C}^{S_0}$ :

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña y monoidal estricta y  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{A}}$  un functor monoidal estricto, donde  $\mathbf{C}_{\mathcal{A}}$  es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ . Entonces  $\mathcal{F}$  factoriza a través de la categoría libre asociada  $\mathcal{C}^{S_0}$ , es decir, existe un functor monoidal (no estricto)  $\widehat{\mathcal{F}}$ , tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{J} & \mathcal{C}^{S_0} \\ \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \widehat{\mathcal{F}} \\ \mathbf{C}_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathbf{C}_v \end{array} \tag{5.52}$$

donde  $J$  es el functor inclusión de la Proposición 5.1.8.

Si  $\mathcal{F}$  es una representación de  $\mathcal{C}$  y  $\bar{h}$  es una biálgebra en  $\mathcal{C}^{S_0}$  entonces tenemos que:

**Proposición 5.3.2.** *El espacio vectorial  $\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  tiene estructura de álgebra y de coálgebra en  $\mathbf{C}_v$ .*

Sin embargo, como ya vimos en 3.2.6,  $\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  no es biálgebra en general. No obstante, aplicando un razonamiento similar al que allí hicimos, podemos obtener una biálgebra en  $\mathbf{C}_v$  a partir de  $\bar{h}$  usando el functor  $\mathcal{S}$ . En efecto, supongamos que la categoría  $\mathcal{C}$  es de listones y apliquemos el functor  $\mathcal{S}$  a todos los diagramas de gráficas de listones  $\mathcal{C}$ -coloreados de las figuras 5.1-5.5. Entonces  $\bigoplus_{v,u} \mathcal{S}(\mu(v,u)) : \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}) \otimes \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}) \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  y  $\bigoplus_q \mathcal{S}(\eta(*,q)) : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$ , le dan a  $\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  estructura de álgebra. Análogamente,  $\bigoplus_{u,v} \mathcal{S}(\Delta(u,v)) :$

$\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}) \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}) \otimes \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  y  $\bigoplus_p \mathcal{S}(\varepsilon(p, *)) : \widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}) \rightarrow \mathbb{C}$  le dan a  $\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h})$  estructura de cóalgebra. La aplicación de  $\mathcal{S}$  a las figuras 5.4 y 5.5 demuestra—graduadamente—que las dos estructuras son compatibles.

Así,  $(\widehat{\mathcal{F}}(\bar{h}), \bigoplus_{u,v} \mathcal{S}(\mu(v, u)), \bigoplus_q \mathcal{S}(\eta(*, q)), \bigoplus_{u,v} \mathcal{S}(\Delta(u, v)), \bigoplus_p \mathcal{S}(\varepsilon(p, *)))$  es una biálgebra en  $\mathbb{C}_v$ .

En [37], Yetter demuestra que:

**Teorema 5.3.3.** *Dada cualquier categoría pivotal  $\mathcal{V}$  y un funtor pivotal  $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{C}_{df}$ , existe un grupo cuántico  $H$ , tal que  $\mathcal{F}$  factoriza*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}_{df} \\ & \searrow \check{\mathcal{F}} & \nearrow J \\ & & H_{cbm}^* \end{array}$$

donde  $\check{\mathcal{F}} : \mathcal{V} \rightarrow H_{cbm}^*$  es un funtor pivotal de  $\mathcal{V}$  en la subcategoría de la categoría de bimódulos cruzados sobre  $H$  que es cerrada bajo  $*$ , y  $J$  es el funtor que olvida.

Señalemos por último, que es fácil ver que la biálgebra  $H$  a la que hace referencia el teorema es la misma que la que obtenemos funtorialmente de la biálgebra que hemos definido.

## 5.4 Relación de $\mathcal{C}^{S_0}$ con categorías modulares

Recordemos rápidamente el concepto de categoría modular.

Sea  $\mathcal{C}$  una Ab-categoría monoidal con el producto tensorial bilineal. La composición de morfismos, considerada como multiplicación en  $\text{End}(I)$ , dota a este grupo abeliano con una estructura de anillo con unidad  $\text{id}_I$ , que es claramente conmutativo. A este anillo lo llamaremos el anillo base y lo denotaremos por  $\mathcal{K}$ . Para cualesquiera objetos  $V$  y  $W$  de  $\mathcal{C}$ , el grupo abeliano  $\text{Hom}(V, W)$  puede ser considerado como un  $\mathcal{K}$ -módulo con la estructura dada por  $kf = k \otimes f$ , para  $k \in \mathcal{K}$  y  $f \in \text{Hom}(V, W)$ . Esta estructura es compatible con la composición de morfismos en el sentido de que es  $\mathcal{K}$ -bilínea. En efecto,

$$(kf) \otimes g = (k \otimes f)(\text{id}_I \otimes g) = k \otimes fg = k(f \circ g) \quad (5.53)$$

y análogamente  $f \circ kg = k(f \circ g)$ .

Consideraremos en lo que sigue Ab-categorías de listones.

**Definición 5.4.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una Ab-categoría de listones. Un objeto  $V$  de  $\mathcal{C}$  es llamado *simple*, si la aplicación  $k \rightarrow k \otimes \text{id}_V = k \text{id}_V$  define una biyección  $\mathcal{K} \rightarrow \text{End}(V)$ .

Es fácil ver que un objeto es simple si y sólo si  $\text{End}(V)$  es un  $\mathcal{K}$ -módulo libre de rango 1. En efecto, la necesidad es obvia y para la suficiencia, obsérvese que si  $\text{End}(V) \simeq \mathcal{K}$  con generador  $x$ , entonces  $\text{id}_V = kx$  y  $x^2 = k'x$ , con  $k, k' \in \mathcal{K}$ . Por lo tanto,  $x = \text{id}_V x = kx^2 = k'k'x$ , luego  $k$  es invertible en  $\mathcal{K}$  y así  $\text{id}_V$  es un generador libre de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 5.4.2.** Sea  $\{V_i\}_{i \in I}$  una familia de objetos de  $\mathcal{C}$ . Un objeto  $C$  está *dominado* por la familia  $\{V_i\}_{i \in I}$ , si existe un conjunto finito  $\{V_{i(r)}\}_r$  de objetos de esta familia (posiblemente con repeticiones) y una familia de morfismos  $\{f_r : V_{i(r)} \rightarrow C, g_r : C \rightarrow V_{i(r)}\}$  tal que

$$\text{id}_C = \sum_r f_r g_r \quad (5.54)$$

Vamos a introducir algunas notaciones que serán usadas para establecer la definición de categoría modular. Para  $i, j \in I$  sea

$$S_{i,j} = \text{tr}(c_{V_j, V_i} \circ c_{V_i, V_j}) \in \mathcal{K}$$

Sin dificultad se puede probar que  $S_{i,j} = S_{j,i}$  (ambos lados de la igualdad están representados por el enlace de Hopf), luego la matriz  $S = (S_{i,j})_{i,j \in I}$  es una matriz cuadrada simétrica sobre  $\mathcal{K}$ .

**Definición 5.4.3.** Una *categoría modular* es un par que consiste de una Ab-categoría  $\mathcal{C}$  y de una familia finita  $\{V_i\}_{i \in I}$  de objetos simples de  $\mathcal{C}$  que satisfacen las siguientes cuatro condiciones:

- (i) (Axioma de normalización). Existe  $0 \in I$  tal que  $V_0 = I$
- (ii) (Axioma de dualidad). Para cada  $i \in I$ , existe  $i^* \in I$  tal que el objeto  $V_{i^*}$  es isomorfo a  $(V_i)^*$ .
- (iii) (Axioma de dominancia). Todos los objetos de  $\mathcal{C}$  están dominados por la familia  $\{V_i\}_{i \in I}$ .
- (iv) (Axioma de no degeneración). La matriz cuadrada  $S = (S_{i,j})_{i,j \in I}$  es invertible sobre  $\mathcal{K}$ .

Se tiene que:

**Lema 5.4.4.** *Sea  $(\mathcal{C}, \{V_i\}_{i \in I})$  una categoría modular. Si  $i \neq j$  en  $I$ , entonces  $\text{Hom}(V_i, V_j) = 0$ .*

Para una demostración de este Lema, el lector puede consultar [35], pp.75-76.

A continuación vamos a relacionar estos conceptos con la construcción  $\mathcal{C}^{S_0}$ . En lo que sigue vamos a suponer que las categorías consideradas son pequeñas.

Es fácil ver que el producto tensorial en  $\mathcal{C}^{S_0}$  es bilineal. Por otra parte,  $K = \text{End}(I)$  tiene estructura de anillo con el producto definido por la composición, donde, recordemos que  $I : * \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  es la función definida por  $I(*) = I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Así,  $\text{Hom}(f, g)$  se convierte en un  $K$ -módulo con la estructura  $XF = X \otimes F$  para  $X \in K$  y  $F \in \text{Hom}(f, g)$ . Consideremos ahora el anillo  $\Omega = K^{S_0 \otimes S_0}$ . Este es claramente un anillo conmutativo con unidad  $1_\Omega : S_0 \times S_0 \rightarrow \text{End}(I)$  dada por  $1_\Omega(x, y) = \text{id}_I$ . Para  $Y \in \Omega$  y  $G : f \rightarrow g$  en  $\text{Hom}(f, g)$  definimos  $YG \in \text{Hom}(f, g)$  por:

$$(YG)(u, v) = Y(u, v)(*, *) \otimes G(u, v) : f(u) \rightarrow g(v), \quad (5.55)$$

para  $u \in S_f$ ,  $v \in S_g$  y  $Y(u, v)(*, *) : I \rightarrow I$ . Diremos que el objeto  $f$  de  $\mathcal{C}^{S_0}$  es  $\Omega$ -simple, si es "simple" con respecto a  $\Omega$ , es decir, si la aplicación  $Y \rightarrow Y \otimes \text{Id}_f$  es una biyección  $\Omega \rightarrow \text{End}(f)$  (nótese que en la definición de objeto simple no se usa la estructura de listones de la categoría, de manera que el concepto se pudiera definir en una Ab-categoría monoidal en la cual  $\text{End}(I)$  sea un anillo conmutativo). Como antes, esto es equivalente a decir que  $\text{End}(f)$  es un  $\Omega$ -módulo libre de rango 1.

Usando la construcción  $\mathcal{C}^{S_0}$  podemos dar una definición de categoría modular haciendo referencia a propiedades de un solo objeto de  $\mathcal{C}^{S_0}$ . Es decir, tenemos que:

**Proposición 5.4.5.** *Sea  $(\mathcal{C}, \{V_i\}_{i \in I})$  una categoría modular y tomemos  $S_0 = \mathbb{N} \times \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Entonces existe un objeto  $\varphi$  de  $\mathcal{C}^{S_0}$ , que cumple que:*

(i)  $I \in \text{im}(\varphi)$ .

(ii)  $\varphi^* \simeq \varphi$ .

(iii) Para cualquier objeto  $V$  de  $\mathcal{C}$ , el objeto  $f_V : * \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}^{\mathcal{S}_0}$  definido por  $f_V(*) = V$ , es un reducto de  $\varphi$ .

(iv)  $\varphi_n = \varphi|_{\{n\} \times \text{Obj}(\mathcal{C})}$  es un objeto de  $\mathcal{C}_y^{\mathcal{S}_0}$ , de manera que  $\text{tr}(c_{\varphi_n, \varphi_n}^2)$  es invertible sobre  $\Omega$ .

*Demostración.* Tomemos un conjunto finito  $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{S}_0$  con la misma cardinalidad que el conjunto finito de objetos simples  $\{V_i\}_{i \in I}$ . Sea  $\mathcal{S}_\varphi = \mathbb{N} \times S$ . Definimos  $\varphi : \mathcal{S}_\varphi \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C})$  por  $\varphi(m, x_i) = V_i$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq i \leq n$ . Las condiciones (i) y (ii) de la Definición 5.4.3 implican claramente las condiciones (i) y (ii) de la proposición.

Para demostrar (iii), definimos  $J : f_V \rightarrow \varphi$  y  $P : \varphi \rightarrow f_V$  de manera que  $J(*, (m, x_i)) = 0 = P((m, x_i), *)$  si el objeto  $V_i$  de  $\mathcal{C}$  aparece menos de  $m$  veces en la descomposición de  $\text{id}_V$  y en otro caso, de manera que

$$\sum_{(m,i)} P((m, x_i), *) \circ J(*, (m, x_i)) = \text{id}_V. \quad (5.56)$$

De esta manera, es obvio que  $P \circ J = \text{Id}_{f_V}$ . Por último es fácil ver que la condición (iv) de la definición se traduce en este contexto en que  $\text{tr}(c_{\varphi_n, \varphi_n}^2)$  es invertible en  $\Omega$ .

El Lema 5.4.4, se puede entonces enunciar como sigue.

**Lema 5.4.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría modular. Entonces el objeto  $\varphi$  de la proposición anterior, es  $\Omega$ -simple.*

La definición de *categoría semisimple*, generaliza la noción de categoría modular, al quitar la restricción de que el conjunto de objetos simples que dominan sea finito. Más precisamente, diremos que una categoría es semisimple, si se satisfacen los axiomas (i), (ii) y (iii) de la Definición 5.4.3 y el siguiente axioma:

(iv)' Para  $i \neq j \in I$ ,  $\text{Hom}(V_i, V_j) = 0$ .

Tenemos entonces que:

**Proposición 5.4.7.** *Si  $\mathcal{C}$  es una categoría semisimple y  $\mathcal{S}_0 = \mathbb{N} \times \text{Obj}(\mathcal{C})$ , entonces existe un objeto  $\varphi$  de  $\mathcal{C}^{\mathcal{S}_0}$  que es  $\Omega$ -simple, y que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) de la Proposición 5.4.5.*

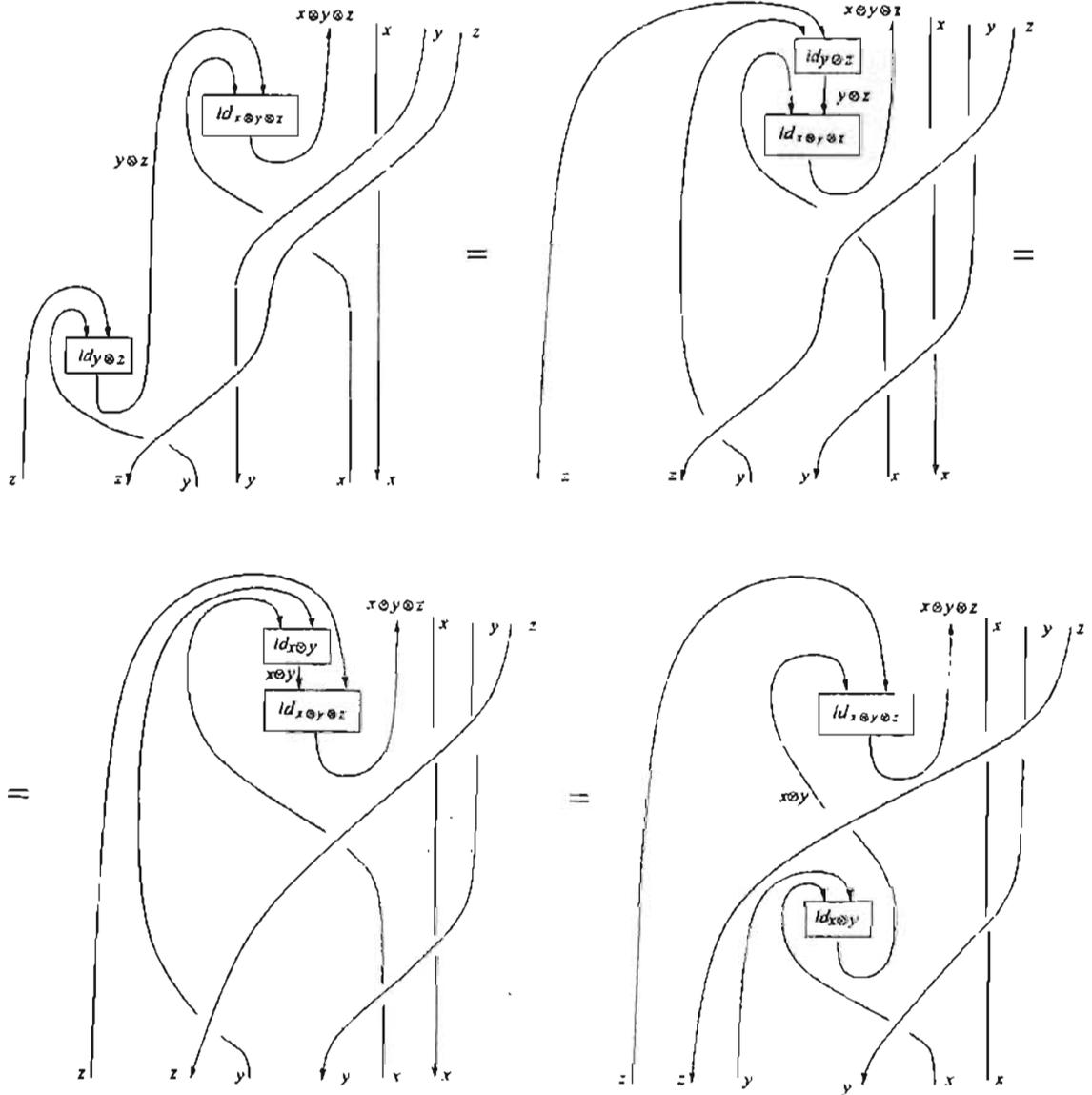


Figura 5.2:  $\Gamma_{x,y \otimes z}(\Gamma_{y,z} \otimes \text{id}_{x \otimes x}) = \Gamma_{x \otimes y, z}(\text{id}_{z \otimes z} \otimes \Gamma_{x, y})$

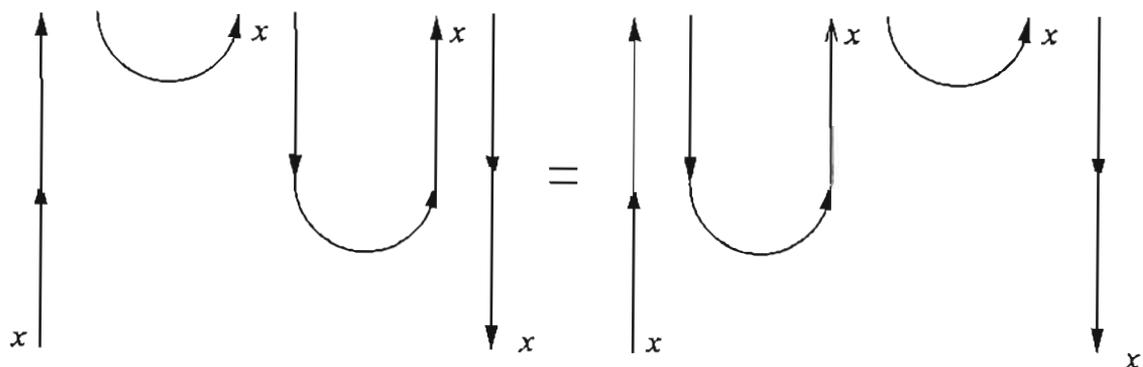


Figura 5.3:  $(\text{id}_{h_i^*} \otimes b_{h_i} \otimes \text{id}_{h_i} \otimes \text{id}_{h_i^* \otimes h_i})(\text{id}_{h_i^*} \otimes b_{h_i} \otimes \text{id}_{h_i}) = (\text{id}_{h_i^* \otimes h_i} \otimes \text{id}_{h_i^*} \otimes b_{h_i} \otimes \text{id}_{h_i})(\text{id}_{h_i^*} \otimes b_{h_i} \otimes \text{id}_{h_i})$

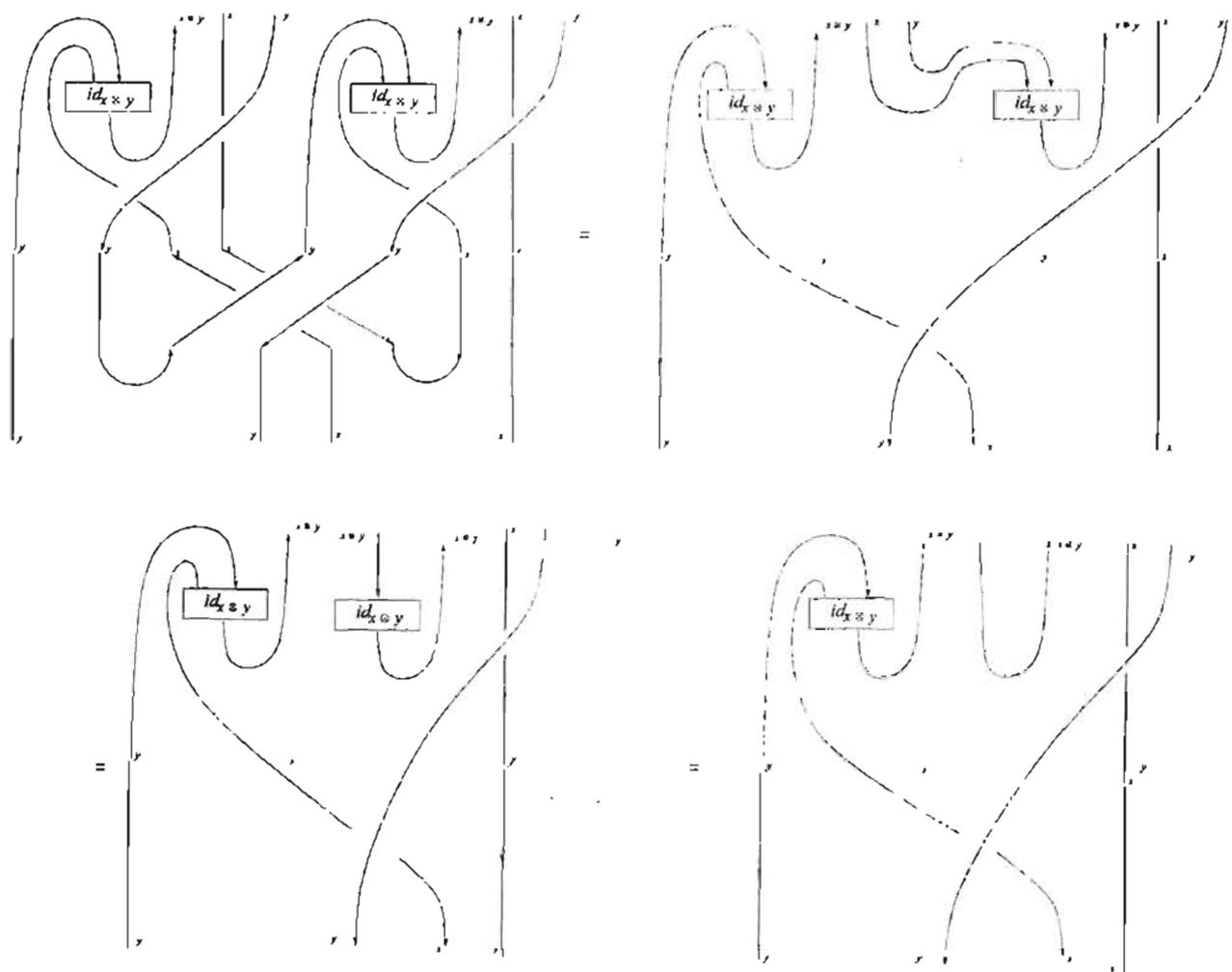


Figura 5.4:  $(\tilde{\mu}(\Delta \otimes \Delta))(p, u) = (\mu\Delta)(p, u)$

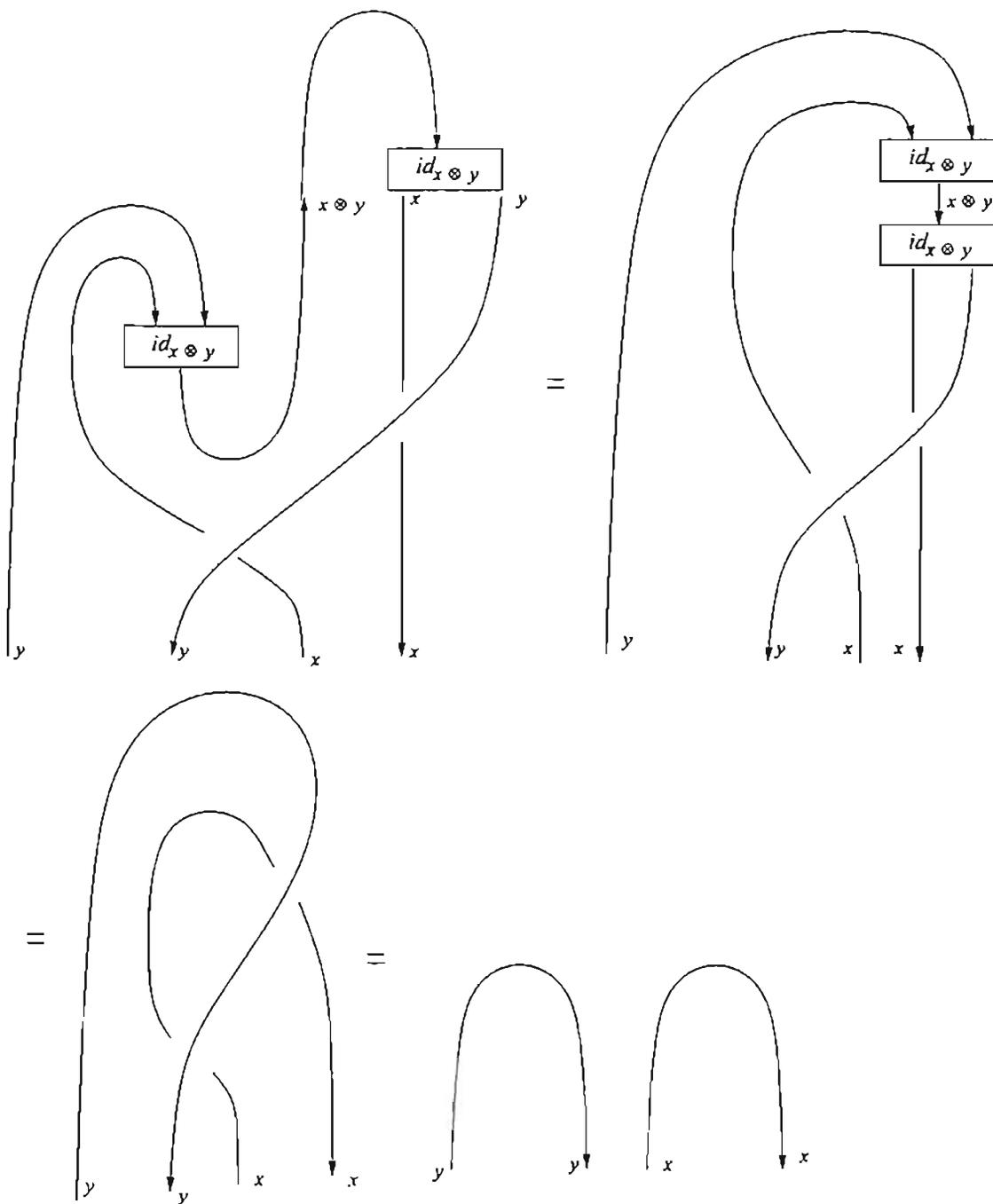


Figura 5.5:  $d_{h_i \otimes h_j} \Gamma_{h_i, h_j} = d_{h_j} \otimes d_{h_i}$

# Bibliografía

- [1] J. Bénabou, *Catégories avec multiplication*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **256** (1963), 1887–1890.
- [2] \_\_\_\_\_, *Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **258** (1964), 771–774.
- [3] N. Bourbaki, *Goupes et Algèbres de Lie*, Hermann, paris, 1960.
- [4] A. Dold and D. Puppe, *Duality, Trace and Transfer*, Proc. Int. Cong. Geom. Top., PWN, Polish Scientific Publishers **35** (1980), 81–102.
- [5] V.G Drinfeld, *Quantum Groups*, Proc. Int. Cong. Math. (Berkeley 1986), Amer. Math. Soc., (1987), 798–820.
- [6] \_\_\_\_\_, *On almost coconmutative Hopf algebras*, Algebra i Analiz *1:2* (1989), Traducción al inglés: Leningrad Math J. **1** (1990), 321–342.
- [7] \_\_\_\_\_, *Quasi-Hopf Algebras*, Algebra i Analiz *1:6* (1989), Traducción al inglés: Leningrad Math J. **1** (1990), 1419–1457.
- [8] P.J. Freyd and D.N. Yetter, *Braided Compact Closed Categories with Applications to Low dimensional Topology*, Advances in mathematics **77** (1989), 156–182.
- [9] M. Gerstenhaber and S.D. Schack, *Algebras, bialgebras, quantum groups and algebraic deformations*, Contemp. Math. **134** (1992), 51–92.
- [10] T. Hayashi, *Quantum groups and quantum determinants*, J. Algebra **152** (1992), 146–165.

- [11] A. Joyal and R. Street, The geometry of tensor calculus, I. *Adv. Math.* **88** (1991), 55–112.
- [12] ———, Braided tensor categories, *Adv. Math.* **102** (1993), 20–78.
- [13] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] P.P. Kulish and N.Yu. Reshetikhin, Quantum linear problem for the sine-Gordon equation and higher representation, *J. Soviet Math.* **23** (1983), 2435–2441.
- [15] S. Mac Lane, Natural associativity and commutativity, *Rice Univ. Studies* **49** (1963), 28–46.
- [16] ———, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed. volume 5 of Graduate Text in Math. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] R.G. Larson and J. Towber, Two dual classes of bialgebras related to the concept of “quantum groups” and “quantum” Lie algebras, *Comm. Algebra* **19** (1991), 3295–3345.
- [18] G. Maltsiniotis, Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées, *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **36** (1995), 195–288.
- [19] R. Pérez and C. Prieto, A new diagrammatic description of the Temperley-Lieb algebras and applications, (in preparation) (2004).
- [20] ———, Partial traces and transfer, (in preparation) (2004).
- [21] C. Prieto, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003.
- [22] K. Reidemester, *Knot Theory*, BSC Associates, Idaho, 1983.
- [23] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), 1–26.
- [24] ———, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991), 547–597.
- [25] H. Rui and C. Xi, The representation theory of cyclotomic Temperley-Lieb algebras, *Comment. Math. Helv.* **79**,no.2 (2004), 427–450.

- [26] S. Sawin, Links, quantum groups and TQFTS, *Bulletin of the American Mathematical Society* **33** (1996), 413–444.
- [27] P. Schauenburg., *On Coquasitriangular Hopf Algebras and the Quantum Yang-Baxter Equation*, volume 67 of *Algebra Berichte*, Verlag Reinhard Fischer, München, 1992.
- [28] M.C. Shum, Torsion tensor categories, Ph. D Thesis, Macquarie University (1989).
- [29] S.Majid, Algebras and Hopf algebras in braided categories., In *Advances in Hopf Algebras, Lec. Notes in Pure and Applied Math.* **158** (1994), 55–105.
- [30] M. Sweedler, *Hopf Algebras*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [31] R. Taillefer, Cohomology theories of Hopf bimodules and cup-product, Preprint (2001).
- [32] V.G. Turaev, The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.* **92** (1988), 527–553.
- [33] ———, Operator Invariants of Tangles, and R-Matrices, *Math.USSR Izvestiya* **35** (1990), 411–443.
- [34] ———, Modular categories and 3-manifold invariants, *Inter. J. Modern Phys. B* **6** (1992), 1807–1824.
- [35] ———, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 18, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [36] B.W. Westbury, The representation theory of the Temperley-Lieb algebra, *Math. Z* **219**, no.4 (1995), 539–565.
- [37] D.N. Yetter, Quantum groups and representations of monoidal categories, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **108** (1990), 261–289.