



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

OBSERVACIÓN DE ESTADOS PARA UNA CLASE DE  
SISTEMAS NO LINEALES CONMUTADOS VÍA MODOS  
DESGLIZANTES DE ALTO ORDEN NO HOMOGÉNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Maestro en Ingeniería  
Ingeniería Eléctrica - Control

PRESENTA:

**Héctor Ríos Barajas**

TUTOR:

Dr. Leonid Fridman

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Verde Rodarte María Cristina

Secretario: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

Vocal: Dr. Fridman Leonid

1er Suplente: Dr. Arteaga Pérez Marco

2do Suplente: Dr. Dávila Montoya Jorge Angel

Lugar donde se realizó la tesis:

**Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., Facultad de Ingeniería.**

**TUTOR DE TESIS:  
DR. LEONID FRIDMAN**

---

FIRMA

*A mis Padres y a mi novia,  
...por su apoyo incondicional*

# Agradecimientos

---

Son muchas las personas a las cuales debo agradecer este triunfo, al Dr. Leonid Fridman por todo su apoyo y confianza a lo largo de estos últimos 6 años así como a todos los integrantes del Grupo de Modos Deslizantes, por sus críticas y comentarios siempre constructivos. A mi amigo Antonio por su ayuda y compañía en todos estos años.

Por otro lado, por supuesto, no menos importante, hago un agradecimiento especial al Dr. Jorge Dávila por toda su ayuda en la elaboración de este trabajo, sin su extraordinario apoyo y conocimiento este triunfo no hubiera sido posible, este triunfo es de ambos, muchas gracias.

Al CONACyT por la beca otorgada para realizar estos estudios bajo el CVU: 270504.

También debo agradecer a mi familia, especialmente a mis padres, Jorge Ríos y Maricela Barajas por su apoyo incondicional bajo cualquier circunstancia, este triunfo también es de ellos.

Finalmente, le agradezco a mi compañera de toda la vida, a mi hermosa novia Erika Berenice Díaz, por ser la razón de todos mis triunfos y por estar ahí en todos mis fracasos, muchísimas gracias por tu apoyo amor.

Muchas Gracias a Todos . . .

*México D.F., Agosto 2010.*

*Héctor Ríos*

---

## Resumen

En este trabajo se abordan principalmente dos problemas. En primer lugar, el problema de observación con entradas desconocidas y/o incertidumbres para una clase de sistemas no lineales conmutados. Para dar solución a este problema, primero se propone un esquema de observación en tiempo finito para sistemas no lineales, que no requiere ninguna transformación, basado en el enfoque de modos deslizantes de alto orden no homogéneos, que permiten hacer uso de ganancias variables. Con el esquema de observación propuesto, se realiza la extensión del mismo a sistemas no lineales conmutados.

Por otro lado, se aborda el problema de reconstrucción de entradas desconocidas para cierta clase de sistemas no lineales conmutados. Para resolver dicho problema se sigue la misma estrategia del problema de observación. Primeramente, se propone un esquema de reconstrucción (exacta y aproximada) de entradas desconocidas para sistemas no lineales, haciendo uso de una de las propiedades características de los observadores por modos deslizantes, la inyección de salida equivalente, para después realizar la extensión a sistemas no lineales conmutados.

Ejemplos de simulación ilustran la efectividad de los esquemas propuestos.

**Palabras Claves.** *Observación de estados. Reconstrucción de entradas desconocidas. Sistemas conmutados. Modos deslizantes de alto orden no homogéneos.*

---

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	3
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Metodología . . . . .	4
1.5. Contribuciones Principales . . . . .	5
1.6. Estructura de la Tesis . . . . .	5
<b>2. Preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Algoritmo Casi-Continuo No Homogéneo . . . . .	7
2.1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	7
2.1.2. Algoritmo Casi-Continuo . . . . .	8
2.2. Diferenciador No Homogéneo . . . . .	9
2.2.1. Diferenciador Robusto Exacto Estándar . . . . .	9
2.2.2. Diferenciador Robusto Exacto con Ganancia Variable . . . . .	10
<b>3. Observación de Sistemas No Lineales con Entradas Desconocidas</b>	<b>13</b>
3.1. Planteamiento del Problema . . . . .	13
3.2. Existencia del Observador con Entradas Desconocidas . . . . .	14
3.3. Dinámica del Error de Observación de Salida . . . . .	18
3.4. Diseño de los Términos de Corrección . . . . .	19
3.4.1. Diseño del Algoritmo Casi-Continuo . . . . .	19
3.5. Ejemplo y Simulaciones . . . . .	25

3.5.1. Observación de Estado en Presencia de Incertidumbres y Entradas Desconocidas . . . . .	26
<b>4. Observación en Sistemas No Lineales Conmutados</b>	<b>33</b>
4.1. Planteamiento del Problema . . . . .	33
4.2. Existencia de los Observadores del Estado Continuo . . . . .	34
4.3. Dinámica del Error de Observación de Salida . . . . .	36
4.4. Diseño de los Términos de Corrección . . . . .	37
4.5. Reconstrucción de la Señal de Conmutación . . . . .	39
4.5.1. Inyección de Salida Equivalente por el Método Exacto . . . . .	40
4.5.2. Inyección de Salida Equivalente por el Método Aproximado . . . . .	40
4.6. Ejemplo y Simulaciones . . . . .	43
4.6.1. Observación del Estado Continuo . . . . .	45
4.6.2. Reconstrucción de la Señal de Conmutación . . . . .	48
<b>5. Reconstrucción de Entradas Desconocidas en Sistemas No Lineales</b>	<b>55</b>
5.1. Planteamiento del Problema . . . . .	55
5.2. Reconstrucción Exacta de Entradas Desconocidas . . . . .	57
5.3. Reconstrucción Aproximada de Entradas Desconocidas . . . . .	58
5.4. Ejemplo y Simulaciones . . . . .	58
5.4.1. Observación del Estado vía Algoritmo “ <i>Aumentado</i> ” . . . . .	58
5.4.2. Reconstrucción de Entradas Desconocidas . . . . .	59
<b>6. Reconstrucción de Entradas Desconocidas en Sistemas No Lineales Conmutados</b>	<b>63</b>
6.1. Planteamiento del Problema . . . . .	63
6.2. Generador de Residuos . . . . .	64
6.3. Esquema de Detección y Reconstrucción de Entradas Desconocidas . . . . .	64
6.3.1. Detección y Localización . . . . .	64
6.3.2. Detección, Localización y Reconstrucción . . . . .	66
6.4. Ejemplo y Simulaciones . . . . .	69
6.4.1. Esquema DLEF . . . . .	69

6.4.2. Esquema DLRED . . . . .	76
<b>7. Conclusiones</b>	<b>87</b>
<b>A. Fundamentos y Demostraciones</b>	<b>89</b>
A.1. Fundamentos . . . . .	89
A.2. Demostraciones para el algoritmo Casi-continuo . . . . .	91
A.2.1. Teorema 2.1 . . . . .	91
A.2.2. Teorema 2.2 . . . . .	93
A.3. Demostraciones para el Diferenciador . . . . .	93
A.3.1. Teorema 2.3 . . . . .	93
A.3.2. Teorema 2.4 . . . . .	95
A.3.3. Teorema 2.5 . . . . .	95
<b>B. Identificación de Parámetros</b>	<b>97</b>
B.1. Identificación con $\sigma_{eq}(t)$ exacta . . . . .	97
B.2. Identificación con $\sigma_{eq}(t)$ aproximada . . . . .	100



# Índice de figuras

---

3.1. Trayectorias del Sistema . . . . .	26
3.2. Reconstrucción de Estado para el Sistema con Incertidumbres y Entradas Desconocidas . . . . .	29
3.3. Convergencia del Error de Estimación para el Sistema con Incertidumbres y Entradas Desconocidas . . . . .	29
3.4. Términos de Corrección . . . . .	30
3.5. Lado Izquierdo - Funciones de Ganancia, Lado Derecho - Ganancias de los Diferenciadores . . . . .	30
4.1. Esquema de Observación del Estado Continuo . . . . .	42
4.2. Esquema de Reconstrucción del Modo de Operación . . . . .	42
4.3. Trayectorias del Estado Continuo del Sistema Conmutado . . . . .	44
4.4. Conmutación en los Modos de Operación . . . . .	44
4.5. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1 . . . . .	46
4.6. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2 . . . . .	47
4.7. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3 . . . . .	47
4.8. Inyección de Salida Equivalente 1 - Método Exacto . . . . .	49
4.9. Inyección de Salida Equivalente 2 - Método Exacto . . . . .	50
4.10. Inyección de Salida Equivalente 3 - Método Exacto . . . . .	50
4.11. Inyección de Salida Equivalente 1 - Método Aproximado . . . . .	51
4.12. Inyección de Salida Equivalente 2 - Método Aproximado . . . . .	51
4.13. Inyección de Salida Equivalente 3 - Método Aproximado . . . . .	52
4.14. Reconstrucción de la Señal de Conmutación (Lado Izquierdo - Método Exacto, Lado Derecho - Método Aproximado) . . . . .	53

4.15. Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción . . . . .	53
5.1. Reconstrucción del Estado vía Algoritmo “ <i>Aumentado</i> ” . . . . .	60
5.2. Convergencia del Error de Estimación vía Algoritmo “ <i>Aumentado</i> ” . . . . .	61
5.3. Reconstrucción de Entradas Desconocidas (Lado Izquierdo - Reconstrucción Exacta, Lado Derecho - Reconstrucción Aproximada) . . . . .	61
5.4. Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción . . . . .	62
6.1. Esquema de Detección, Localización y Reconstrucción de Entradas Desconocidas	68
6.2. Trayectorias del Estado Continuo del Sistema Conmutado . . . . .	70
6.3. Conmutación en los Modos de Operación . . . . .	70
6.4. Entradas Desconocidas - Esquema DLEF . . . . .	71
6.5. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF . . . . .	73
6.6. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF . . . . .	73
6.7. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF . . . . .	74
6.8. Residuos de cada Observador en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF	74
6.9. Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF . . . . .	75
6.10. Entradas Desconocidas - 1er Caso DLRED . . . . .	77
6.11. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED . . . . .	77
6.12. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED . . . . .	78
6.13. Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED . . . . .	78
6.14. Residuos de cada Observador en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED	79
6.15. Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED . . . . .	80
6.16. Reconstrucción de ED vía Método Aproximado - 1er Caso DLRED . . . . .	81
6.17. Reconstrucción de ED vía Método Exacto - 1er Caso DLRED . . . . .	81
6.18. Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción - 1er Caso DLRED . . . . .	82

6.19. Reconstrucción de la Señal de Conmutación sin ED - 2do Caso DLRED . . . .	83
6.20. Entradas Desconocidas - 2do Caso DLRED . . . . .	83
6.21. Residuos de cada Observador en presencia de ED acopladas - 2do Caso DLRED	84
6.22. Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED acopladas - 2do Caso DLRED . . . . .	85
6.23. Reconstrucción de ED vía Método Aproximado - 2do Caso DLRED . . . . .	85
6.24. Reconstrucción de ED vía Método Exacto - 2do Caso DLRED . . . . .	86

---

## Capítulo 1

# Introducción

---

### 1.1. Estado del Arte

El problema de observación de estados con entradas desconocidas y/o incertidumbres, siempre presentes en cualquier proceso, ha sido estudiado activamente en la teoría de control moderna (p. ej. [Zasadzinski et al., 1994], [Nijmeijer and Fossen, 1999] y [Hui and Zak, 2005]). Estos observadores son diseñados asumiendo que las entradas están disponibles para su medición; sin embargo, también se asume que existen entradas desconocidas. Como consecuencia, la falta de información en las entradas hace complicado el diseño de un observador convencional tipo Luenberger [Luenberger, 1964].

Las principales soluciones conocidas requieren que las entradas desconocidas estén acopladas directamente con la dinámica de las salidas, en otras palabras, el conjunto formado por las entradas desconocidas debe tener grado relativo uno con respecto a las salidas (p. ej. [Hautus, 1983], [Hou and Muller, 1992], [Moreno, 2001] y [Tan and Edwards, 2003]). Particularmente, para el caso lineal, en [Silverman, 1969], [Molinari, 1976a], [Molinari, 1976b], y [Hautus and Silverman, 1983], se realizan investigaciones referentes al desacoplamiento de entradas, y se proponen las propiedades de observabilidad fuerte y detectabilidad fuerte. Dichas propiedades son puestas en términos de subespacios, como el débilmente inobservable [Trentelman et al., 2001]. La representación en términos de subespacios permite usar la teoría de subespacios invariantes [Wonham, 1974] para encontrar una base de dicho subespacio.

Por otro lado, para el caso no lineal, se han realizado trabajos significativos atacando el problema de observación con entradas desconocidas, como los que se presentan en [Rocha-Cozatl and Moreno, 2004] y [Moreno, 2006] basados en un enfoque disipativo, o usando modos deslizantes como en [Yan and Edwards, 2007] y [Davila et al., 2009a].

Sin embargo, el problema de observación de estados con entradas desconocidas continua abierto ya que los resultados encontrados aun resultan ser un poco restrictivos en cuanto a las condiciones (p. ej. condiciones de disipatividad o condiciones de grado relativo) para la reconstrucción de los estados.

En cuanto al uso de algoritmos por modos deslizantes, se han propuesto varios observadores para sistemas con entradas desconocidas debido a que estos algoritmos presentan

características atractivas como: insensibilidad (más que robustez) con respecto a entradas desconocidas, posibilidad de usar la inyección de salida equivalente para propósitos de identificación de entradas desconocidas o de parámetros, y convergencia en tiempo finito. Hay trabajos donde se han diseñado observadores asumiendo que las condiciones de observabilidad fuerte y de grado relativo igual a uno con respecto a las entradas desconocidas se satisfacen (p. ej. [Walcott and Zak, 1987], [Edwards et al., 2002] y [Hui and Zak, 2005]). En otros trabajos, se propone un proceso de diferenciación basado en algoritmos por modos deslizantes de primer orden (p. ej. [Hashimoto et al., 1990] y [Barbot et al., 2003]) y segundo orden (p. ej. [Bejarano et al., 2007], [Pisano and Usai, 2007], [Barbot and Floquet, 2007] y [Aurora and Ferrara, 2007]) donde una condición de grado relativo igual a uno y dos, respectivamente, deben ser satisfechas para seguir el método de diferenciación. En cuanto al uso de modos deslizantes de alto orden, hay trabajos donde se deben satisfacer condiciones de grado relativo completo y definido para resolver el problema de observación (p. ej. [Benallegue et al., 2007], [Fridman et al., 2007], [Fridman et al., 2008] y [Davila et al., 2009a]).

Por otra parte, en sistemas conmutados, que representan una clase especial de sistemas híbridos y reciben su nombre debido a que su comportamiento puede ser representado por medio de la interacción de dinámicas continuas y discretas que consisten de un número finito de modos de operación que gobiernan la dinámica continua del sistema. Dichos modos de operación pueden estar regidos por cierta señal de conmutación discreta (ver p. ej. [van der Schaft and Schumacher, 2000], [Liberzon, 2003] y [Lin and Antsaklis, 2009]).

En el contexto de sistemas conmutados, el problema de observación se ha tratado con mayor frecuencia para el caso de sistemas lineales, como en [Chen and Lagoa, 2005] donde se manejan los conceptos de “*súper-estabilidad*” y “*súper-detectabilidad*” para diseñar el observador para cierta clase de sistemas conmutados, como en [Baglietto et al., 2007] donde se buscan secuencias de control que permitan identificar la señal de conmutación con base en la observación del estado continuo, y como en [Bejarano and Fridman, 2009] donde se propone un esquema para reconstruir el estado continuo y la señal de conmutación usando el algoritmo *súper-twisting*. En particular, esquemas basados en observadores por modos deslizantes han sido implementados satisfactoriamente para estimar tanto el estado continuo como la señal de conmutación para algunas clases de sistemas con dinámicas conmutadas (p. ej. [Saadaoui et al., 2006] y [Barbot et al., 2007]). Trabajos particularmente importantes para esta tesis, debido a que representan la base de los esquemas aquí propuestos, son los presentados en [Davila et al., 2008], [Davila et al., 2009a] y [Davila et al., 2009b], donde se presenta un esquema de observación del estado continuo y reconstrucción de la señal de conmutación para una clase de sistemas no lineales conmutados, usando modos deslizantes de alto orden homogéneos y un enfoque “*multi-observador*”, que consiste en diseñar tantos observadores como modos de operación del sistema.

Respecto al problema de reconstrucción de entradas desconocidas para sistemas no lineales, muchos de los trabajos relaciones con el problema de observación de estados con entradas desconocidas abordan también dicho problema. Por ejemplo, en [Rocha-Cozatl and Moreno, 2004] y [Moreno, 2006], se ataca el problema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales usando la teoría de disipatividad. El problema de reconstrucción de fallas usando

observadores por modos deslizantes de primer orden, que se puede ver perfectamente como un problema de reconstrucción de entradas desconocidas, se aborda en [Edwards et al., 2002] y [Yan and Edwards, 2007]. Trabajos haciendo uso de modos deslizantes de alto orden con propósitos de reconstrucción se pueden ver en [Fridman et al., 2008] y [Davila et al., 2009a]. En sistemas no lineales conmutados el problema de reconstrucción de entradas desconocidas resulta más complicado debido a la alteración de la dinámica del sistema provocada por la señal de conmutación. En este contexto, en la literatura se han encontrado pocos trabajos que aborden el problema de reconstrucción de entradas desconocidas, en mayor medida, se encuentran trabajos relacionados con observación de estado y con control para sistemas conmutados, dejando el problema de reconstrucción de entradas desconocidas más que latente.

Aunque el problema de reconstrucción de entradas desconocidas ha sido muy estudiado para sistemas no lineales, este problema sigue siendo un problema abierto tanto en sistemas no lineales como en sistemas no lineales conmutados.

## 1.2. Motivación

El problema de observación de estados con entradas desconocidas sigue siendo un problema latente en sistemas no lineales, más aun en sistemas no lineales conmutados. Por tal motivo resulta interesante abordar dicho problema, particularmente, usando técnicas de observación por modos deslizantes de alto orden, debido a las características que estas presentan, como insensibilidad con respecto a entradas desconocidas y posibilidad de usar la inyección de salida equivalente para propósitos de reconstrucción de entradas desconocidas, además de convergencia en tiempo finito. Otro punto interesante es el uso de un enfoque no homogéneo en los algoritmos por modos deslizantes que permita usar ganancias variables y adaptables a diferencia de los algoritmos homogéneos convencionales (ver p. ej. [Levant, 2006a], [Levant and Michael, 2008] y [Angulo and Levant, 2009]) y que ha sido poco usado en el problema de observación de estados.

Por el lado de reconstrucción de entradas desconocidas el problema sigue muy activo en sistemas no lineales conmutados, por tal motivo es interesante atacar este problema aprovechando las propiedades de la inyección de salida equivalente de los observadores por modos deslizantes (ver p. ej. [Edwards and Spurgeon, 1998] y [Utkin et al., 1999]) para desarrollar un esquema de reconstrucción de entradas desconocidas, tanto para sistemas no lineales como para sistemas no lineales conmutados, donde se vuelve bastante complicado realizar la observación de estado continuo, la identificación de la señal de conmutación y al mismo tiempo, la reconstrucción de entradas desconocidas.

### 1.3. Objetivos

Los objetivos principales de este trabajo son los siguientes:

- Establecer un esquema de observación de estados con entradas desconocidas y/o incertidumbres para sistemas no lineales, y extender dicho esquema para realizar observación de estados en cierta clase de sistemas no lineales conmutados vía modos deslizantes de alto orden no homogéneos.
- Establecer un esquema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales y extender el esquema para una clase de sistemas no lineales conmutados usando las propiedades de la inyección de salida equivalente.

Todos los esquemas se diseñarán buscando no transformar el sistema a ninguna forma canónica.

### 1.4. Metodología

La metodología para alcanzar los objetivos se presenta a continuación:

- Estudiar el problema de observación con entradas desconocidas en sistemas no lineales. Una vez realizado el estudio, con base en lo realizado en [Davila et al., 2009a], establecer el esquema de observación usando algoritmos por modos deslizantes de alto orden no homogéneos. Con el esquema ya diseñado, realizar simulaciones para validar dicho esquema.
- Con el esquema del paso anterior, estudiar el problema de observación de estado continuo e identificación de la señal de conmutación en sistemas no lineales conmutados y establecer (por medio de subespacios, en forma similar a lo presentado en [Barbot et al., 2007]) condiciones bajo las cuales es posible la reconstrucción del estado continuo y de la señal de conmutación. Establecer el esquema de observación usando algoritmos por modos deslizantes de alto orden no homogéneos. Con el esquema ya diseñado, realizar simulaciones y analizar los resultados.
- Utilizando los resultados del primer punto, estudiar el problema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales por medio de la inyección de salida equivalente. Una vez finalizado el estudio, establecer los esquemas de reconstrucción de entradas desconocidas y realizar simulaciones.
- Con el esquema de reconstrucción de entradas desconocidas del paso anterior, estudiar el problema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales conmutados. Aprovechando las propiedades de la inyección de salida equivalente, definir la clase de sistemas para los cuales se puede realizar la reconstrucción y establecer los esquemas de identificación de entradas desconocidas. Finalmente, realizar las simulaciones correspondientes.

## 1.5. Contribuciones Principales

Las principales contribuciones de este trabajo se enumeran a continuación:

1. Se establece un esquema de observación de estados para sistemas no lineales, con convergencia en tiempo finito a pesar de la presencia de entradas desconocidas y/o incertidumbres, **sin la necesidad de transformar el sistema en alguna forma canónica**, vía modos deslizantes de alto orden no homogéneos, que permite hacer **uso de ganancias variables y adaptables**.
2. **Extensión del esquema de observación al caso de sistemas no lineales conmutados**, obteniendo un observador que proporciona convergencia en tiempo finito tanto para la reconstrucción del estado continuo como para la identificación de la señal de conmutación, bajo ciertas condiciones de distinguibilidad.
3. Se proponen dos métodos (exacto y aproximado) para el uso de la inyección de salida equivalente con propósitos de **reconstrucción de entradas desconocidas** para sistemas no lineales.
4. **Extensión del esquema de reconstrucción de entradas desconocidas al caso de sistemas no lineales conmutados**, estableciendo ciertas condiciones para que la reconstrucción se pueda llevar a cabo.

## 1.6. Estructura de la Tesis

El trabajo tiene la siguiente estructura. En el Capítulo 2 se describen los algoritmos por modos deslizantes de alto orden que serán utilizados en este trabajo. En la Sección 2.1 se presenta el algoritmo casi-continuo no homogéneo propuesto en [Levant and Michael, 2008], mientras que en la Sección 2.2. se presenta el diferenciador no homogéneo propuesto en [Levant, 2006a]. Para más detalles, en el apéndice A se presentan algunos fundamentos de teoría de modos deslizantes, así como las demostraciones de los teoremas fundamentales de los algoritmos utilizados.

El esquema de observación de estados con entradas desconocidas para sistemas no lineales se presenta en el Capítulo 3. El planteamiento del problema se describe en la Sección 3.1, las condiciones para la existencia del observador con entradas desconocidas se presenta en la Sección 3.2, la dinámica del error de observación de salida se muestra en la Sección 3.3, mientras que en la Sección 3.4 se diseñan los términos de corrección del observador, empleando los algoritmos por modos deslizantes no homogéneos. Para finalizar el capítulo 3, en la Sección 3.4 se muestra un ejemplo académico del esquema de observación así como las simulaciones del mismo.

El Capítulo 4 describe la aplicación del esquema de observación al caso de sistemas no lineales conmutados. En las Secciones 4.1 y 4.2 se establecen, el planteamiento del problema

y las condiciones para la existencia del observador para el estado continuo, respectivamente. En la Sección 4.3 se analiza la dinámica del error de observación entre conmutaciones. La manera en que se realiza la identificación de la señal de conmutación se describe en la Sección 4.4 mientras que los resultados de simulación, para otro ejemplo académico, se muestran en la Sección 4.5.

El problema de reconstrucción de entradas desconocidas para sistemas no lineales se estudia en el Capítulo 5. El planteamiento del problema se establece en la Sección 5.1. El esquema de reconstrucción de entradas desconocidas, de manera exacta y aproximada, se presenta en la Sección 5.2, mientras que en la Sección 5.3 se muestran los resultados del esquema aplicados en el ejemplo académico del Capítulo 3. Por otro lado, usando las mismas propiedades para la reconstrucción de entradas desconocidas de este capítulo, en el apéndice B, se presenta un esquema de identificación de parámetros para sistemas no lineales basado en el método de mínimos cuadrados (ver p.ej. [Soderstrom and Stoica, 1989], [Ioannou and Sun, 1996], [Davila et al., 2006]).

El esquema de reconstrucción de entradas desconocidas para el caso de sistemas no lineales conmutados se presenta en el Capítulo 6. El problema, el esquema y las condiciones para la reconstrucción se establecen a lo largo de las Secciones 6.1, 6.2 y 6.3, mientras que los resultados de simulaciones del esquema propuesto, aplicado al ejemplo del Capítulo 4, se muestran en la Sección 6.4.

Finalmente, las conclusiones y el trabajo futuro se presentan en el Capítulo 7.

---

## Capítulo 2

# Preliminares

---

En este capítulo se presentan los algoritmos por modos deslizantes que serán utilizados en los esquemas de observación de estados y reconstrucción de entradas desconocidas. Primero, se presenta el algoritmo casi-continuo no homogéneo propuesto en [Levant and Michael, 2008], y después, el diferenciador no homogéneo propuesto en [Levant, 2006a]. Si el lector está interesado en los detalles de estos algoritmos, en el apéndice A se presentan algunos fundamentos de teoría de modos deslizantes, así como las demostraciones de los teoremas fundamentales, tomadas de [Levant and Michael, 2008] y [Levant, 2006a].

## 2.1. Algoritmo Casi-Continuo No Homogéneo

### 2.1.1. Planteamiento del Problema

Considere un sistema dinámico con la siguiente forma

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma(t, x) \quad (2.2)$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $a$ ,  $b$  y  $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  se suponen suaves y se conocen cotas superiores para las mismas. La salida  $\sigma$  y sus  $r - 1$  derivadas sucesivas se asumen disponibles. El grado relativo  $r$  de  $\sigma$ , se asume constante y conocido, lo cual significa que el control  $u$  aparece de manera explícita por primera vez en la  $r - \text{ésima}$  derivada del tiempo de  $\sigma$  a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1) [Isidori, 1996], de esta manera

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u \quad (2.3)$$

donde  $h$  y  $g$  son funciones inciertas, y  $g(t, x) \neq 0$ . La suposición tradicional del planteamiento de modos deslizantes de alto orden es asumir que existe  $C \geq |h(t, x)|$  para cierta constante  $C$ . En lugar de lo anterior, se asumirá que se conoce una función integrable  $\Xi(t, x)$  (en el sentido de Lebesgue) tal que

$$\alpha g(t, x)\Xi(t, x) > |h(t, x)| \quad (2.4)$$

donde  $\alpha > 0$  es una constante. En otras palabras, la función  $\alpha g(t, x)\Xi(t, x)$  domina la dinámica incierta si  $\alpha$  es suficientemente grande. Ahora, la tarea es satisfacer la igualdad  $\sigma \equiv 0$  en tiempo finito.

### 2.1.2. Algoritmo Casi-Continuo

Los algoritmos por modos deslizantes de alto orden conocidos hasta ahora, son construidos de forma recursiva. Uno de estos algoritmos es el llamado “*Casi-Continuo*” (ver [Levant, 2005] y [Levant, 2006b]), debido a que es continuo en todos lados excepto en el punto  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$ . Sea  $j = 1, \dots, r - 1$  y denotando:

$$\begin{aligned}\varphi_{0,r} &= \sigma, & N_{0,r} &= |\sigma| \\ \Psi_{0,r} &= \frac{\varphi_{0,r}}{N_{0,r}} = \text{sign}(\sigma) \\ \varphi_{j,r} &= \sigma^{(j)} + \beta_j N_{j-1,r}^{(r-1)/(r-j+1)} \Psi_{j-1,r} \\ N_{j,r} &= \left| \sigma^{(j)} \right| + \beta_j N_{j-1,r}^{(r-1)/(r-j+1)} \\ \Psi_{j,r} &= \frac{\varphi_{j,r}}{N_{j,r}}\end{aligned}$$

los algoritmos casi-continuos son

$$u = -\alpha \Xi(t, x) \Psi_{r-1,r} \left( \sigma, \dots, \sigma^{(r-1)} \right) \quad (2.5)$$

De las características del algoritmo casi-continuo, se tiene una singularidad en  $\sigma = 0$ . Sin embargo, las soluciones del sistema no se ven afectadas, ya que la medida (en el sentido de Lebesgue) de este punto de singularidad es cero [Filippov, 1988]. Es conocido de [Levant, 2005] y [Levant, 2006b] que con  $\Xi \equiv 1$ , con un conjunto de parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  apropiados, y una ganancia  $\alpha > 0$  suficientemente grande, el algoritmo garantiza la igualdad  $\sigma \equiv 0$  para cualquier condición inicial. Por otro lado, si las trayectorias del sistema inician muy lejos del origen, pueden ser necesarias ganancias muy grandes para atraer las trayectorias al origen y después resulten excesivas una vez que estas se acerquen al origen. Por tal motivo, es razonable utilizar ganancias que se adapten en función del espacio.

Para introducir una “*función de ganancia*”  $\Xi(t, x)$ , se establece el siguiente teorema extraído de [Levant and Michael, 2008].

**Teorema 2.1.** *Sean los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  y  $\alpha > 0$  suficientemente grandes. Entonces el algoritmo (2.5) asegura que la igualdad  $\sigma \equiv 0$  se satisfaga en tiempo finito para cualquier condición inicial. Además, cualquier incremento en la función de ganancia  $\Xi(t, x)$  no interfiere con la convergencia.*

□

De esta manera, se puede hacer uso de una función de ganancia. Sin embargo, el Teorema 2.1 no establece que cualquier combinación de parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$ , que asegure la convergencia en tiempo finito, permita un incremento arbitrario de las ganancias  $\alpha$  y  $\Xi(t, x)$ . Las

combinaciones de parámetros que sí lo permiten son llamados “*robustos con función de ganancia*” [Levant and Michael, 2008]. El siguiente Teorema proporciona una forma de encontrar los parámetros robustos con función de ganancia [Levant and Michael, 2008].

**Teorema 2.2.** *La estabilidad en tiempo finito de la ecuación diferencial*

$$\sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r} = 0 \quad (2.6)$$

garantiza la robustez con función de ganancia de la combinación de parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1} > 0$ .

□

## 2.2. Diferenciador No Homogéneo

Dado que el algoritmo casi-continuo requiere la disponibilidad de las derivadas sucesivas de cierta señal, se hará uso del “*diferenciador robusto exacto*” [Levant, 2003]. En un principio, en [Levant, 1998] se propone un diferenciador de primer orden basado en modos deslizantes de segundo orden. Posteriormente, en [Levant, 2003] se modifica el diferenciador para obtener, en tiempo finito, un estimado para cualquier orden de derivada. A continuación se presenta la estructura del diferenciador.

### 2.2.1. Diferenciador Robusto Exacto Estándar

Sea la señal a diferenciar  $f(t)$ , definida sobre  $[0, \infty)$  y compuesta por un ruido determinístico acotado Lebesgue integrable con características desconocidas y una señal base  $f_0(t)$  desconocida. El problema de encontrar estimaciones robustas y exactas en tiempo real de las derivadas de  $\dot{f}_0(t)$ ,  $\ddot{f}_0(t)$ , ...,  $f_0^{(k)}(t)$  en ausencia de ruido, es resuelto por el siguiente diferenciador [Levant, 2003]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= z_1 - \lambda_0 L^{\frac{1}{(k+1)}} |z_0 - f(t)|^{\frac{k}{(k+1)}} \text{sign}(z_0 - f(t)) \\ \dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= z_2 - \lambda_1 L^{\frac{1}{k}} |z_1 - v_0|^{\frac{(k-1)}{k}} \text{sign}(z_1 - v_0) \\ &\vdots & & \\ \dot{z}_j &= v_j, & v_j &= z_{j+1} - \lambda_j L^{\frac{1}{(k-j+1)}} |z_j - v_{j-1}|^{\frac{(k-j)}{(k-j+1)}} \text{sign}(z_j - v_{j-1}) \\ &\vdots & & \\ \dot{z}_k &= -\lambda_k L \text{sign}(z_k - v_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $z_i$  es la estimación de la señal  $f^{(i)}(t)$ . El diferenciador (2.7) es entendido en el sentido de Filippov [Filippov, 1988]. Si los parámetros  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  son elegidos adecuadamente de acuerdo a [Levant, 2003] y  $L$  es una cota superior, previamente conocida, para  $|f^{(k+1)}|$ .

Entonces, las siguientes ecuaciones son verdaderas, en ausencia de ruido en la entrada, después de un transitorio de tiempo finito:

$$z_0 = f_0(t); \quad z_i = v_{i-1} = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.8)$$

Es interesante notar que el diferenciador (2.7) posee “*estabilidad practica*” [Khalil, 1996] con respecto a efectos de ruido y muestreo, lo cual es de gran importancia para su implementación.

### 2.2.2. Diferenciador Robusto Exacto con Ganancia Variable

Sea la señal de entrada  $f(t)$  una función definida en  $[0, \infty)$  y compuesta por un ruido acotado en el sentido de Lebesgue con características desconocidas y una señal base  $f_0(t)$  desconocida con la  $k$ -ésima derivada teniendo una constante de Lipschitz local  $L(t) > 0$ . Se asume que la magnitud del ruido no excede el producto  $\epsilon L(t)$ , donde el parámetro  $\epsilon \geq 0$  es desconocido. El problema de encontrar estimaciones robustas y exactas en tiempo real de las derivadas de  $\dot{f}_0(t)$ ,  $\ddot{f}_0(t)$ , ...,  $f_0^{(k)}(t)$  con  $\epsilon = 0$ , es resuelto por el siguiente diferenciador [Levant, 2006a]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0, \quad v_0 = z_1 - \lambda_0 L(t)^{\frac{1}{(k+1)}} |z_0 - f(t)|^{\frac{k}{(k+1)}} \text{sign}(z_0 - f(t)) \\ \dot{z}_1 &= v_1, \quad v_1 = z_2 - \lambda_1 L(t)^{\frac{1}{k}} |z_1 - v_0|^{\frac{(k-1)}{k}} \text{sign}(z_1 - v_0) \\ &\vdots \\ \dot{z}_j &= v_j, \quad v_j = z_{j+1} - \lambda_j L(t)^{\frac{1}{(k-j+1)}} |z_j - v_{j-1}|^{\frac{(k-j)}{(k-j+1)}} \text{sign}(z_j - v_{j-1}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= -\lambda_k L(t) \text{sign}(z_k - v_{k-1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Los parámetros  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$  se eligen de tal forma que el diferenciador posea convergencia en tiempo finito con  $L(t) = 1$ . En particular, la secuencia paramétrica  $\lambda_0 = 8, \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1.5$  y  $\lambda_5 = 1.1$ , es suficiente para construir un diferenciador de orden 5. Es fácil ver que con cualquier  $\lambda_k > 1$  las igualdades (2.8) definen una solución de Filippov para el sistema (2.9).

El siguiente Teorema [Levant, 2006a] establece la convergencia del diferenciador (2.9).

**Teorema 2.3.** *Sea  $f(t)$  cualquier función continua. Entonces la solución (2.8) es estable en tiempo finito. Más precisamente, existen funciones  $\delta(t) > 0$  y  $T(t) > 0$  tales que cualquier solución de (2.9) satisfaciendo las condiciones*

$$\left| z_i(t_0) - f_0^{(i)}(t_0) \right| \leq \delta(t_0), \quad i = 0, \dots, k \quad (2.10)$$

satisface (2.8) para cualquier  $t \geq t_0 + T(t_0)$ .

□

Hay que notar que el Teorema 2.3 no excluye la inestabilidad práctica de (2.9), que es posible cuando  $L(t)$  cambia muy rápido, mientras  $\delta(t)$  lo hace muy lento, o incluso cuando  $\delta(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ . De hecho, la posibilidad de que esto ocurra es muy alta cuando  $L(t) \rightarrow \infty$  en tiempo finito (“*escape en tiempo finito*”).

**Teorema 2.4.** *Bajo las condiciones del Teorema 2.3, se asume que  $L(t)$  es absolutamente continua, y que la derivada logarítmica  $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$  es acotada,  $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \leq M$ . Entonces, existen constantes  $\gamma_0, T_0 > 0$ , que dependen de  $M$  solamente, tales que  $\delta(t)$  puede ser elegida como  $\delta(t) = \delta_0 L(t)$ , y el tiempo de convergencia  $T(t)$  correspondiente es igual a una constante  $T_0$ .*

□

Hay que notar que aunque formalmente el Teorema 2.4 es cierto también con  $M = 0$ , la convergencia global en tiempo finito también ese asegura para este caso [Levant, 2003].

**Teorema 2.5.** *Bajo las condiciones del Teorema 2.4, sean  $\delta_0$  y  $T_0$  definidas como en el Teorema 2.4. Considere otra función  $L_1(t) = \mu L(t)$  con  $\mu > 1$ . Entonces la función  $\delta_1(t)$  correspondiente, puede ser elegida como  $\delta_1(t) = \delta_0 L_1(t) = \mu \delta_0 L(t)$ , preservando el tiempo de convergencia  $T_0$ .*

□

El Teorema 2.5 muestra que eligiendo  $L(t)$  suficientemente grande, la región de convergencia y la velocidad de convergencia del diferenciador, pueden hacerse arbitrariamente grande y rápida, respectivamente.



---

## Capítulo 3

# Observación de Sistemas No Lineales con Entradas Desconocidas

---

En este Capítulo se aborda el problema de observación de estado en tiempo finito para una clase de sistemas no lineales, que pueden estar afectados por incertidumbres en el modelo y/o entradas desconocidas. El esquema propuesto, basado en el enfoque de modos deslizantes de alto orden no homogéneos, no requiere que el sistema sea transformado a ninguna forma canónica, que puede ser difícil de encontrar en presencia de incertidumbres en el modelo. A lo largo de este Capítulo se establecen las condiciones para la existencia del observador, se estudia la dinámica del error de observación de salida, se propone el diseño de los términos de corrección del observador y se presentan resultados de simulación que avalan el esquema propuesto.

### 3.1. Planteamiento del Problema

Considere el siguiente sistema no lineal incierto:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + D(x)w \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

con  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  el vector de estados,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de salidas y  $w \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de perturbaciones o entradas desconocidas acotadas, donde  $f(x)$  y las  $p$  columnas  $D_1(x), \dots, D_p(x)$  de  $D(x)$  son campos vectoriales suaves que pueden ser inciertos y  $h(x) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{bmatrix}$  es un mapeo suave.

El objetivo es diseñar un observador con convergencia en tiempo finito para el sistema (3.1).

### 3.2. Existencia del Observador con Entradas Desconocidas

Se considera la estructura del observador propuesta en [Davila et al., 2009a], donde se aborda el caso de una salida, ahora extendido al caso de múltiples salidas. La estructura del observador es la siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\tag{3.2}$$

con el vector de estados estimados  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  y el vector de salidas estimadas  $\hat{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $G(\hat{x}) = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  con  $g_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, p$ , y los términos de corrección  $\sigma \in \mathbb{R}^p$ . Las soluciones son entendidas en el sentido de Filippov [Filippov, 1988] para proporcionar la posibilidad de usar señales discontinuas en el observador. Hay que mencionar que las soluciones de Filippov coinciden con las soluciones usuales cuando el lado derecho es continuo. Se asume también que todos los términos de corrección considerados garantizan la existencia y unicidad de las soluciones para todo  $t \geq 0$ .

La función matricial  $G$  se selecciona de tal manera que la salida del observador tenga un vector de grados relativos completo y definido  $\begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_p \end{pmatrix}$  con respecto a  $\sigma$  [Isidori, 1996]. Aunque cabe mencionar que  $G$  está atada a las propiedades estructurales del sistema.

Ahora, se selecciona un conjunto de salidas tal que la siguiente matriz (el Jacobiano del mapa de observabilidad)

$$M(\hat{x}) = \begin{bmatrix} dh_1(\hat{x}) \\ \vdots \\ dL_{f(\hat{x})}^{r_1-1} h_1(\hat{x}) \\ \vdots \\ dh_p(\hat{x}) \\ \vdots \\ dL_{f(\hat{x})}^{r_p-1} h_p(\hat{x}) \end{bmatrix}\tag{3.3}$$

con  $dh(\hat{x}) = \frac{\partial h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_1} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_n} \end{bmatrix}$  y  $L_{f(\hat{x})}^k h(\hat{x}) = \frac{\partial L_{f(\hat{x})}^{k-1} h(\hat{x})}{\partial \hat{x}} f(\hat{x})$  la llamada derivada de Lie de  $k$ -ésimo orden [Isidori, 1996], satisfaga  $r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$ , para el sistema nominal:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x})\end{aligned}\tag{3.4}$$

Ahora, se necesita que la siguiente suposición se satisfaga.

**Suposición 3.1.** La matriz  $M(\hat{x})$  en (3.3) es no-singular  $\forall \hat{x} \in \mathcal{X}$ .

**Nota 3.1.** La suposición anterior es una suposición estructural en la parte nominal del sistema a observar, se supone que el sistema nominal es localmente observable, lo cual implica

que el mapa de observabilidad es localmente biyectivo y existe suficiente información para reconstruir el estado  $x$  en todos los puntos del conjunto  $\mathcal{X}$ .

De este modo,  $G(\hat{x})$  está dada como la solución de la siguiente ecuación

$$M(\hat{x})G(\hat{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_1 \times p} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_2 \times p} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{r_p \times p} \end{bmatrix}}_N \quad (3.5)$$

de donde se obtiene que

$$G(\hat{x}) = M^{-1}(\hat{x})N \quad (3.6)$$

En vista de (3.6), la dinámica entrada/salida del observador es la siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_1^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ \hat{y}_p \\ \vdots \\ \hat{y}_1^{(r_p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{f(\hat{x})}h_1(\hat{x}) \\ \vdots \\ L_{f(\hat{x})}^{r_1}h_1(\hat{x}) \\ \vdots \\ L_{f(\hat{x})}h_p(\hat{x}) \\ \vdots \\ L_{f(\hat{x})}^{r_p}h_p(\hat{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde se tiene que la salida del observador  $\hat{y}$  tiene un vector de grados relativos completo y definido  $(r_1 \ \cdots \ r_p)$  con respecto a  $\sigma$ .

**Nota 3.2.** La ecuación (3.7) es resultado de la definición de grado relativo dada en [Isidori, 1996]. La salida  $\hat{y}$  tiene un vector de grados relativos bien definido  $(r_1 \ \cdots \ r_p)$  en un punto  $x^o$  si

$$\begin{aligned} L_{g_j(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^k h_i(\hat{x}) &= 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, p \quad \forall k < r_i - 1 \\ L_{g_j(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^{r_i-1} h_i(\hat{x}) &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\forall x$  en una vecindad de  $x^o$ . Y la matriz de  $p \times p$

$$E(\hat{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^{r_1-1}h_1(\hat{x}) & \cdots & L_{g_p(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^{r_1-1}h_1(\hat{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^{r_p-1}h_p(\hat{x}) & \cdots & L_{g_p(\hat{x})}L_{f(\hat{x})}^{r_p-1}h_p(\hat{x}) \end{bmatrix} = I_{p \times p} \quad (3.9)$$

es no-singular en  $x = x^o$ .

Ahora se define el error de observación de la salida y del estado de la siguiente forma

$$e_y = \hat{y} - y = \begin{bmatrix} h_1(\hat{x}) - h_1(x) \\ \vdots \\ h_p(\hat{x}) - h_p(x) \end{bmatrix}, \quad e_x = \hat{x} - x = \begin{bmatrix} e_{x_1} \\ \vdots \\ e_{x_n} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Es claro que el error de salida  $e_y$ , conserva el mismo vector de grados relativos con respecto a  $\sigma$ .

Definiendo también el vector de error de salida  $\varepsilon$ , que contiene los errores de salida  $e_y$  y sus derivadas correspondientes:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1,r_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{p,1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{p,r_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_1}^{(r_1-1)} \\ \vdots \\ e_{y_p} \\ \vdots \\ e_{y_m}^{(r_p-1)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Ahora, considere el sistema (3.1) junto con el observador (3.2) y (3.6), donde el término  $D(x)w$  no está modelado en la dinámica del observador. Se establece la siguiente suposición:

**Suposición 3.2.** Las funciones  $f$ ,  $h$  y  $D_i$  son tales que

$$\begin{bmatrix} L_{D_1(x)}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{D_1(x)}L_{f(x)}^{r_1-2}h_1(x) \\ \vdots \\ L_{D_p(x)}h_p(x) \\ \vdots \\ L_{D_p(x)}L_{f(x)}^{r_p-2}h_p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$L_{D_i(x)}L_{f(x)}^{r_i-1}h_i(x) \neq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.13)$$

**Nota 3.3.** En el contexto de entradas desconocidas, la suposición anterior implica que dichas entradas desconocidas  $w$  entran en la última fila de cada bloque. Por el lado de las incertidumbres en el modelo, la suposición implica que se pueden tolerar incertidumbres en  $f(x)$  y  $D(x)$  solo en la última fila de cada bloque. Cabe mencionar que se pueden soportar entradas desconocidas e incertidumbres al mismo tiempo siempre y cuando ambas entren en la última fila de cada uno de los bloques.

Ahora, con base en el Lema propuesto en [Davila et al., 2009a] para el caso de una salida, se establece el siguiente Lema para el caso de múltiples salidas.

**Lema 3.1.** Considere el sistema (3.1) y que las Suposiciones 3.1 y 3.2 se satisfacen. Considere el observador (3.2), (3.6). Entonces la siguiente equivalencia se satisface

$$\varepsilon = 0 \Leftrightarrow e_x = 0 \quad (3.14)$$

‡

*Demostración.* Basada en [Davila et al., 2009a].

La dinámica del error de observación está dada por

$$\dot{e}_x = f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma - f(x) - D(x)w \quad (3.15)$$

$$e_y = h(\hat{x}) - h(x) \quad (3.16)$$

derivando cada error de salida  $e_{y_i}$  con  $i = 1, \dots, p$ , hasta el  $r_i$  -ésimo orden. Considerando (3.5) tenemos que

$$e_{y_i}^{(j)} = L_{f(\hat{x})}^j h_i(\hat{x}) - L_{f(x)}^j h_i(x), \quad 1 \leq j \leq r_i - 1 \quad (3.17)$$

$$e_{y_i}^{(r_i)} = L_{f(\hat{x})}^{r_i} h_i(\hat{x}) - L_{f(x)}^{r_i} h_i(x) + \sigma_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.18)$$

Considerando que  $x = \hat{x} - e_x$ , las ecuaciones (3.15)-(3.18) permiten construir de manera explícita el siguiente mapeo

$$\varepsilon = \tilde{\Phi}(e_x, \hat{x}) = \text{col} \left\{ \tilde{\Phi}_{1,1} \quad \cdots \quad \tilde{\Phi}_{1,r_1} \quad \cdots \quad \tilde{\Phi}_{p,1} \quad \cdots \quad \tilde{\Phi}_{p,r_p} \right\} \quad (3.19)$$

escribiendo componente a componente tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{i,1}(e_x, \hat{x}) &= h_i(\hat{x}) - h_i(\hat{x} - e_x) \\ \tilde{\Phi}_{i,2}(e_x, \hat{x}) &= L_{f(\hat{x})} h_i(\hat{x}) - L_{f(\hat{x}-e_x)} h_i(\hat{x} - e_x) - L_{D_i(x)} h_i(x) w \\ &\vdots \\ \tilde{\Phi}_{i,r_i}(e_x, \hat{x}) &= L_{f(\hat{x})}^{r_i-1} h_i(\hat{x}) - L_{f(\hat{x}-e_x)}^{r_i-1} h_i(\hat{x} - e_x) - L_{D_i(x)} L_{f(x)}^{r_i-2} h_i(x) w \end{aligned}$$

Los primeros componentes  $\tilde{\Phi}_{i,1} = e_{y_i}$  no están afectados por las incertidumbres. De la Suposición 3.2, los últimos términos del lado derecho de  $\tilde{\Phi}_{i,2} \cdots \tilde{\Phi}_{i,r_i}$  son cero, y si  $e_x = 0$ , entonces todos los componentes del vector  $\varepsilon = \tilde{\Phi}(e_x, \hat{x})$  son idénticamente igual a cero

independientemente del valor de  $\hat{x}$ , es decir, el mapeo  $\tilde{\Phi}$  satisface la condición  $\tilde{\Phi}(0, \hat{x}) = 0$ . Para probar la equivalencia inversa vamos a considerar el mapeo inverso

$$e_x = \tilde{\Phi}^{-1}(\varepsilon, \hat{x}) \quad (3.20)$$

Se debe mostrar que  $\tilde{\Phi}^{-1}(0, \hat{x}) = 0, \forall \hat{x}$ . En otras palabras, el Lema se satisface siempre que el mapeo  $\tilde{\Phi}(e_x, \hat{x})$  sea localmente biyectivo en la vecindad de  $e_x = 0$ . Considerando la matriz Jacobiana  $J(e_x, \hat{x}) = \frac{\partial \tilde{\Phi}(e_x, \hat{x})}{\partial e_x}$ , la biyectividad del mapeo corresponde a la siguiente condición:

$$\det J(0, \hat{x}) \neq 0, \quad \forall \hat{x} \quad (3.21)$$

Hay que demostrar ahora que la condición (3.21) es implicada por la Suposición 3.1. Ya que  $x = \hat{x} - e_x$ , podemos denotar a  $x$  como  $x = x(e_x, \hat{x})$ . Calculando y diferenciando la matriz Jacobiana. De (3.15)-(3.18) se deriva que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,1}(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} &= \frac{\partial e_{y_i}}{\partial e_x} = -\frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \frac{\partial x(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,j}(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} &= \frac{\partial e_{y_i}^{(j-1)}}{\partial e_x} = -\frac{\partial L_{f(x)}^{j-1} h_i(x)}{\partial x} \frac{\partial x(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, p$  y  $2 \leq j \leq r_i$ . Sustituyendo  $x = \hat{x} - e_x$  en las ecuaciones anteriores, notando que  $\frac{\partial x(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} = -1$ , y haciendo  $e_x = 0$  en las ecuaciones resultantes, obtenemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,1}(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} \right|_{e_x=0} &= \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \\ \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_{i,j}(e_x, \hat{x})}{\partial e_x} \right|_{e_x=0} &= \frac{\partial L_{f(x)}^{j-1} h_i(x)}{\partial x} \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, p$  y  $2 \leq j \leq r_i$ , lo que equivale a la siguiente igualdad

$$J(e_x, \hat{x})|_{e_x=0} = M(\hat{x}) \quad (3.22)$$

Por lo tanto, la Suposición 3.1 implica (3.21), lo cual prueba el Lema. ■

Se ha mostrado que bajo la Suposición 3.1, existe una relación de equivalencia entre el error de observación de la salida  $\varepsilon$  y el error de observación del estado  $e_x$ . Por otro lado, el observador (3.2) y (3.6) podrá reconstruir el estado del sistema (3.1) exactamente y en tiempo finito, siempre que los términos de corrección ( $\sigma$ ) sean seleccionados de tal forma que el vector  $\varepsilon$  sea llevado a cero en tiempo finito.

### 3.3. Dinámica del Error de Observación de Salida

El Lema 3.1 puede ser explotado fuertemente para propósitos de observación si se es capaz de encontrar los términos de corrección del observador  $\sigma$  con los cuales se pueda llevar al vector

$\varepsilon$  a cero en tiempo finito. La dinámica del error de observación de la salida toma la siguiente forma canónica de Brunovsky en bloques:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{1,1} &= \varepsilon_{1,2} \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{1,2} &= \varepsilon_{1,3} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{1,r_1} &= \tilde{\Phi}_{1,r_1+1}(e_x, \hat{x}) + \sigma_1 \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,1} &= \varepsilon_{p,2} \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,2} &= \varepsilon_{p,3} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{\varepsilon}}_{p,r_p} &= \tilde{\Phi}_{p,r_p+1}(e_x, \hat{x}) + \sigma_p
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde

$$\tilde{\Phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}) = L_{f(\hat{x})}^{r_i} h_i(\hat{x}) - L_{f(\hat{x}-e_x)}^{r_i} h_i(\hat{x} - e_x) - L_{D_i(\hat{x}-e_x)} L_{f(\hat{x}-e_x)}^{r_i-1} h_i(\hat{x} - e_x) w \tag{3.24}$$

para  $i = 1, \dots, p$ . Ahora se hace la siguiente suposición de acotamiento.

**Suposición 3.3.** Hay constantes  $\Gamma_{1,i} \geq 0, \Gamma_{2,i} \geq 0$  y funciones continuas  $\varrho_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) \geq 0$  conocidas, tales que las funciones  $\tilde{\Phi}_{i,r_i+1}$  satisfacen

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{\Phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}) \right| &< \Gamma_{1,i} \varrho_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) + \Gamma_{2,i}, \quad i = 1, \dots, p \\
 \text{con } \left| \varrho_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) \right| &\leq \varrho_i^+
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ahora, lo que resta es diseñar los términos de corrección  $\sigma_i$  de tal forma que el sistema (3.23)-(3.25) converja a cero en tiempo finito. En este trabajo estos términos de corrección serán diseñados usando el algoritmo casi-continuo no homogéneo, presentado en la Sección 2.1, proponiendo una forma de seleccionar la función de ganancia.

**Nota 3.4.** La selección del algoritmo casi-continuo no homogéneo es exclusiva de este trabajo. Cabe mencionar que es posible seleccionar los términos de corrección de cualquier otra forma (usando cualquier otro algoritmo), tal que la dinámica del error de observación de la salida converja a cero. Si se garantiza la convergencia a cero, se garantiza el funcionamiento del esquema de observación.

## 3.4. Diseño de los Términos de Corrección

### 3.4.1. Diseño del Algoritmo Casi-Continuo

Los algoritmos “Casi-Continuos No Homogéneos”, que permiten estabilizar sistemas en la forma (3.23)- (3.25) en tiempo finito, fueron propuestos en [Levant and Michael, 2008]. Los

términos de corrección casi-continuos no homogéneos de  $r_i$  –ésimo orden toman la siguiente forma:

$$\sigma_i = -\alpha_i \Xi_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) \Psi_{i r_i-1, r_i} \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) \quad (3.26)$$

donde

$$\Xi_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) = \lambda_{1,i} \varrho_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) + \lambda_{2,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.27)$$

con  $\alpha_i > 0$ ,  $\lambda_{1,i} > 0$ ,  $\lambda_{2,i} > 0$ ,  $\Psi_{i r_i-1, r_i}$  el algoritmo recursivo de modos deslizantes de  $r_i$ –ésimo orden (definido en la Sección 2.1) con “*parámetros robustos con función de ganancia*”, y  $\Xi_i$  es la función de ganancia.

Hay que mencionar que los términos de corrección definidos por (3.26) y (3.27) están globalmente acotados ( $|\sigma_i| \leq \alpha_i \Xi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ ) y son continuos casi en todos lados excepto en el origen de cada espacio del error  $r_i$ -dimensional.

**Nota 3.5.** *Note que el enfoque no homogéneo permite adaptar las ganancias  $\Xi_i$  en función del error de observación de salida y algunas derivadas,  $e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}$ , es decir, las ganancias  $\Xi_i$  disminuyen una vez que el error de observación de salida y sus derivadas convergen a cero. Por otro lado, si las funciones  $\varrho_i$  son constantes, se regresa al caso homogéneo y se pierde la adaptación de las ganancias  $\Xi_i$  en función del error de observación de salida y sus derivadas, sin embargo, el esquema de observación sigue funcionando.*

Los algoritmos anteriores requieren la disponibilidad de las derivadas sucesivas del error de salida hasta un orden  $r_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Para esto se puede usar el diferenciador no homogéneo presentado en la Sección 2.2.

### Diseño del Diferenciador No Homogéneo

Los diferenciadores de orden  $r_i - 1$  pueden ser expresados de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_{i,0} &= v_{i,0}, \quad v_{i,0} = z_{i,1} - k_{i,0} L_i^{\frac{1}{r_i}} |z_{i,0} - e_{y_i}|^{\frac{(r_i-1)}{r_i}} \text{sign}(z_{i,0} - e_{y_i}) \\ \dot{z}_{i,1} &= v_{i,1}, \quad v_{i,1} = z_{i,2} - k_{i,1} L_i^{\frac{1}{(r_i-1)}} |z_{i,1} - v_{i,0}|^{\frac{(r_i-2)}{(r_i-1)}} \text{sign}(z_{i,1} - v_{i,0}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i,j} &= v_{i,j}, \quad v_{i,j} = z_{i,j+1} - k_{i,j} L_i^{\frac{1}{(r_i-j)}} |z_{i,j} - v_{i,j-1}|^{\frac{(r_i-j-1)}{(r_i-j)}} \text{sign}(z_{i,j} - v_{i,j-1}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i,r_i-1} &= -k_{i,r_i-1} L_i \text{sign}(z_{i,r_i-1} - v_{i,r_i-2}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde  $z_{i,j}$  es la estimación de  $e_{y_i}^{(j)}(t)$ . El diferenciador proporciona estimación exacta y en tiempo finito bajo condiciones ideales, es decir, señales con ausencia de ruido y muestreo. La única información que se necesita para realizar la estimación es conocer una cota superior  $L_i$ , para cada  $|e_{y_i}^{(r_i)}|$ . Entonces para constantes positivas  $k_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 0, \dots, r_i - 1$ , seleccionadas de acuerdo a la Sección 2.3., la convergencia de cada diferenciador de orden  $r_i - 1$

es garantizada. En presencia de ruidos en la entrada o muestreo discreto, este diferenciador proporciona la mejor exactitud asintótica posible [Levant, 2003].

Los diferenciadores (3.28) estiman las derivadas exactamente solo después de un transitorio de tiempo finito. Por lo tanto, cuando la estimación exacta de las derivadas es garantizada, este es el momento para activar los términos de corrección. El siguiente Teorema (ver [Angulo and Levant, 2009] para los detalles de la prueba) ayuda a determinar el tiempo de convergencia de cada diferenciador.

**Teorema 3.1.** *Considere el diferenciador (3.28), donde  $e_{y_i}(t)$  son las funciones a diferenciar y asuma que los parámetros del diferenciador  $k_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $j = 0, \dots, r_i - 1$  proporcionan la convergencia en tiempo finito de cada diferenciador para cualquier orden en ausencia de ruido. Sea  $\eta_i(t)$  ruido medible en el sentido de Lebesgue, suponiendo que:*

$$e_{y_i}(t) = e_{y_{i,o}}(t) + \eta_i(t), \quad \left| e_{y_{i,o}}^{(r_i)}(t) \right| < L_i, \quad |\eta_i(t)| \leq \kappa_{\eta,i} L_i \xi_i^{r_i} \quad (3.29)$$

donde  $e_{y_{i,o}}(t)$  son señales desconocidas. Además, suponga que  $e_{y_i}$  son muestreadas con un paso de muestreo  $\delta > 0$  y  $\delta < \kappa_{\delta,i} \xi_i$ , con  $\xi_i, \kappa_{\eta,i}, \kappa_{\delta,i}$  constantes positivas. Entonces, existen constantes positivas  $\gamma_{0,i}, \gamma_{1,i}, \dots, \gamma_{r_i-1,i}$  y  $\gamma_{t,i} > 0$  con  $0 < \kappa_{e_{y,i}} < \gamma_{0,i}$ , tales que si las desigualdades

$$|z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \xi_i^{r_i} \quad (3.30)$$

se satisfacen durante cada intervalo de tiempo de longitud  $\gamma_{t,i} \xi_i$ , entonces desde el inicio de este intervalo las desigualdades

$$\left| z_{i,j} - e_{y_i}^{(j)}(t) \right| \leq \gamma_{j,i} L_i \xi_i^{r_i-j} \quad (3.31)$$

con  $i = 1, \dots, p$  y  $j = 0, \dots, r_i - 1$ ; se satisfacen para todo tiempo futuro, para cada uno de los diferenciadores.  $\square$

### Adaptación de Ganancia.

Para estimar las derivadas es necesario conocer las ganancias  $L_i$  para cada uno de los diferenciadores. De la ecuación (3.31) uno puede concluir que para  $L_i$  pequeñas la exactitud del diferenciador será mejor, mientras que para condiciones iniciales grandes, se requieren ganancias grandes para cada diferenciador, pero una vez que las trayectorias del sistema del error de salida están cerca del origen, las ganancias de cada diferenciador pueden ser más pequeñas. En este sentido, resulta útil considerar ganancias que se adapten en función del error de observación de salida. Como se estableció en la Sección 2.3., en [Levant, 2006a] se mostró que es posible seleccionar la ganancia como una función del tiempo, pero para garantizar la robustez se requiere que la derivada logarítmica  $\left| \dot{L}_i(t)/L_i(t) \right|$  este uniformemente acotada. Con base en [Angulo and Levant, 2009], donde se propone un algoritmo de adaptación de ganancia, se establece la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *Considere el sistema (3.23)-(3.25) y asuma que:*

- a)  $\|\varepsilon_i(0)\| \leq \varepsilon_{0i}^+$  con  $\varepsilon_{0i}^+$ ,  $i = 1, \dots, p$  constantes conocidas.
- b)  $\|\sigma_i\| \leq \rho_{1i} \|\varepsilon_i\| + \rho_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  para constantes conocidas  $\rho_{1i}$  y  $\rho_{2i}$ <sup>1</sup>.

Ahora se considera el siguiente algoritmo de adaptación para las ganancias  $L_i(t)$  de cada diferenciador

1. Sea  $L_i(t) = L_{0i}$  para  $0 \leq t \leq t_{1i}$ , con  $t_{1i}$  los instantes de tiempo para los cuales la convergencia de cada diferenciador ha sido detectada y con  $L_{0i}$  una constante suficientemente grande.
2. Sea  $L_i(t) = \lambda_{1i} (\|\hat{\varepsilon}_i\| + \lambda_{2i})$  para  $t > t_{1i}$ , donde

$$\lambda_{1i} > \rho_{1i}; \quad \lambda_{2i} > \frac{\Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i}}{\lambda_{1i}} \quad (3.32)$$

con  $i = 1, \dots, p$  y  $\hat{\varepsilon}_i(t)$  construidas usando las estimaciones de los mismos diferenciadores. Entonces, la estimación de las derivadas de  $e_{y_i}(t)$  es asegurada y además, la derivada logarítmica  $\left| \dot{L}_i(t)/L_i(t) \right|$  esta uniformemente acotada para cada diferenciador.  $\nabla$

*Demostración.*

Se consideran cada uno de los pasos del algoritmo de adaptación para su prueba.

1. Se tiene que mostrar que con ganancias  $L_{0i}$  suficientemente grandes, cada diferenciador converge. En este intervalo de tiempo cada termino de corrección es  $\sigma_i = 0$ . Ya que queremos estimar  $\hat{\varepsilon}_i$ , la derivada de cada término  $\hat{\varepsilon}_{i,r_i}$  debe satisfacer  $\left| \dot{\hat{\varepsilon}}_{i,r_i}(t) \right| \leq L_{0i}$  en un intervalo de tiempo  $[0, t_{1i}]$  y garantizar la convergencia de cada diferenciador.

De este modo tenemos que

$$\left| \dot{\hat{\varepsilon}}_{i,r_i}(t) \right| \leq \Gamma_{1,i} \varrho_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) + \Gamma_{2,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.33)$$

Ya que la ganancia de cada diferenciador puede ser seleccionada suficientemente grande para proporcionar cualquier tiempo de convergencia [Levant, 2003], las ganancias  $L_{0i}$  pueden ser seleccionadas suficientemente grandes tales que cada diferenciador converja antes de  $t_{1i}$ . Entonces se pueden seleccionar  $L_{0i}$  como

$$L_{0i} > \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} \quad (3.34)$$

2. Una vez que cada diferenciador ha convergido, la identidad  $\hat{\varepsilon}_i(t) = \varepsilon_i(t)$  es cierta. De las propiedades del control casi-continuo no homogéneo sabemos que  $|\Psi_{i r_i - 1, r_i}| \leq 1$ , por lo

---

<sup>1</sup> $\|\cdot\|$  representa la norma euclidiana.

tanto los términos de corrección  $\sigma_i$  seleccionados como en (3.26) tienen una norma de la forma  $\rho_{1i} \|\varepsilon_i\| + \rho_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ . De esta manera tenemos

$$\left| \dot{\hat{\varepsilon}}_{i,r_i}(t) \right| \leq \left[ \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} \right] + (\rho_{1i} \|\varepsilon_i\| + \rho_{2i}), \quad i = 1, \dots, p \quad (3.35)$$

la selección de  $L_i(t) = \lambda_{1i} (\|\hat{\varepsilon}_i\| + \lambda_{2i})$  con

$$\lambda_{1i} > \rho_{1i}, \quad \lambda_{2i} > \frac{\Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i}}{\lambda_{1i}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.36)$$

asegura que  $L_i(t)$  es también una cota superior para  $\dot{\hat{\varepsilon}}_{i,r_i}(t)$  desde  $t_{1i}$  en adelante. Ahora, lo que falta es demostrar que la derivada logarítmica es uniformemente acotada. Cada  $L_i(t)$  puede ser escrita como

$$\left( \frac{L_i(t)}{\lambda_{1i}} - \lambda_{2i} \right)^2 = \varepsilon_i^T \varepsilon_i \quad (3.37)$$

Diferenciando la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} & 2 \left( \frac{L_i(t)}{\lambda_{1i}} - \lambda_{2i} \right) \frac{\dot{L}_i(t)}{\lambda_{1i}} = \varepsilon_i^T \left[ A \varepsilon_i + B \left( \sigma_i + \tilde{\phi}_{i,r_i+1} \right) \right] \\ & + \left[ \varepsilon_i^T A^T + \left( \sigma_i + \tilde{\phi}_{i,r_i+1} \right) B^T \right] \varepsilon_i \\ & = \varepsilon_i^T \left( A + A^T \right) \varepsilon_i + 2 \varepsilon_i^T B \left( \sigma_i + \tilde{\phi}_{i,r_i+1} \right) \\ & \leq \lambda_{\max} \left( A + A^T \right) \|\varepsilon_i\|^2 + 2 \|\varepsilon_i\| \|B\| \left[ \left( \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} \right) + (\rho_{1i} \|\varepsilon_i\| + \rho_{2i}) \right] \\ & \leq \left[ \lambda_{\max} \left( A + A^T \right) + 2 \rho_{1i} \|B\| \right] \|\varepsilon_i\|^2 + 2 \|\varepsilon_i\| \|B\| \left( \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i} \right) \end{aligned}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i \times 1}, \quad i = 1, \dots, p$$

Ya que  $\left( \frac{L_i(t)}{\lambda_{1i}} - \lambda_{2i} \right) = \|\varepsilon_i\|$ , podemos dividir ambos lados de la última desigualdad por  $\|\varepsilon_i\|$  para obtener

$$\frac{\dot{L}_i(t)}{\lambda_{1i}} \leq \frac{1}{2} \left[ \lambda_{\max} \left( A + A^T \right) + 2 \rho_{1i} \|B\| \right] \|\varepsilon_i\| + \|B\| \left( \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i} \right) \quad (3.38)$$

Ahora, calculando la derivada logarítmica tenemos que

$$\frac{\dot{L}_i(t)}{L_i(t)} \leq \frac{\frac{1}{2} \left[ \lambda_{\max} \left( A + A^T \right) + 2 \rho_{1i} \|B\| \right] \|\varepsilon_i\| + \|B\| \left( \Gamma_{1,i} \varrho_i^+ + \Gamma_{2,i} + \rho_{2i} \right)}{\|\varepsilon_i\| + \lambda_{2i}} \quad (3.39)$$

y resulta claro de la desigualdad anterior, que cada  $\frac{\dot{L}_i(t)}{L_i(t)}$  esta uniformemente acotada por una constante conveniente. ■

El Teorema 3.1 proporciona una manera simple de determinar si cada uno de los diferenciadores ha convergido verificando que  $|z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \delta^{r_i}$  se satisfaga en un intervalo de tiempo  $\gamma_{t,i} \delta$ . Las constantes  $\gamma_{0,i}$  y  $\gamma_{t,i}$  se estiman fácilmente por simulación. Además, este criterio es robusto, ya que el valor de  $\xi_i$  en el Teorema 3.1 puede ser fácilmente incrementado sin cambiar las magnitudes del ruido y paso de muestreo. También la longitud del intervalo  $\gamma_{t,i} \xi_i$  se puede incrementar libremente sin alterar lo establecido en el Teorema.

De esta forma, se propone que los términos de corrección sean construidos de la siguiente forma:

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} \bar{\sigma}_i & \text{si } |z_{i,0} - e_{y_i}(t)| \leq \gamma_{0,i} L_i \delta^{r_i} \\ & \text{en el intervalo } \gamma_{t,i} \delta, \quad i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.40)$$

donde  $\bar{\sigma}_i$  son los términos de corrección calculados de acuerdo a (3.26)-(3.27) usando las derivadas estimadas por los diferenciadores (3.28) con adaptación de ganancia  $L_i$ .

Tomando en cuenta el Lema 1.3 y el diseño de los términos de corrección, se establece el siguiente Teorema que resuelve el problema de observación de estados.

**Teorema 3.2.** *Considere el sistema (3.1) y que las Suposiciones 3.1, 3.2 y 3.3 se satisfacen. El observador (3.2), (3.6) con  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , diseñadas de acuerdo a (3.40), con  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , suficientemente grandes y  $\lambda_{1,i} > \Gamma_{1,i}$ ,  $\lambda_{1,i} > \Gamma_{2,i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , garantiza que el error de observación del estado  $e_x = \hat{x} - x$  converja a cero en tiempo finito.* □

*Demostración.*

Ya que las Suposiciones 3.1 y 3.2 se satisfacen, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1,r_1} &= \tilde{\Phi}_{1,r_1+1}(e_x, \hat{x}) + \sigma_1 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{p,r_p} &= \tilde{\Phi}_{p,r_p+1}(e_x, \hat{x}) + \sigma_p \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cada ecuación diferencial satisface el planteamiento del problema descrito en la Sección 2.1.1 con

$$h_i = \tilde{\Phi}_{i,r_i+1}(e_x, \hat{x}), \quad i = 1, \dots, p \quad (3.42)$$

De la Suposición 3.3 se pueden obtener cotas para la ecuación diferencial anterior como

$$|h_i| \leq \Gamma_{1,i} \varrho_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) + \Gamma_{2,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.43)$$

Eligiendo

$$\Xi_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) = \lambda_{1,i} \varrho_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)}) + \lambda_{2,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.44)$$

y seleccionando  $\lambda_{1,i} > \Gamma_{1,i}$ ,  $\lambda_{1,i} > \Gamma_{2,i}$  con  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  suficientemente grandes, tenemos que  $\alpha_i \Xi_i > |h_i|$ . Como se estableció en [Levant and Michael, 2008] el diseño

$$\bar{\sigma}_i = -\alpha_i \Xi_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) \Psi_{i r_i-1, r_i} \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right), \quad i = 1, \dots, p \quad (3.45)$$

asegura que la siguiente igualdad se satisfaga después de un tiempo finito

$$\left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)} \right) \equiv 0, \quad \forall t \geq t^*, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.46)$$

esto es  $\left( e_{y_1}, \dots, e_{y_p} \right) \equiv 0, \forall t \geq t^*$ . Ahora, de la aplicación directa del Lema 3.2 se produce que  $e_x \equiv 0, \forall t \geq t^*$  dado que  $\varepsilon \equiv 0, \forall t \geq t^*$ . ■

En la siguiente sección se muestran los resultados de simulación del esquema de observación propuesto, aplicado a un ejemplo académico.

### 3.5. Ejemplo y Simulaciones

**Nota 3.6.** *Todas las simulaciones presentadas en este y en el resto de los capítulos han sido realizadas en Matlab Simulink con un paso de muestreo fijo de  $\delta = 0.0001$  segundos y usando el método de integración ode1(Euler).*

Considere el siguiente sistema no lineal de 5to orden (ejemplo académico)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 + x_5 \\ x_1 \\ -x_3^3 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ (x_2 - 4) \frac{2x_5 + \text{sen}(x_5)}{2 + \text{cos}(x_5)} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Sean las condiciones iniciales  $x(0) = [1 \quad 0.1 \quad 1 \quad -0.6 \quad 0.4]^T$  (conocidas solo para efectos de simulación). Con estas condiciones iniciales, el comportamiento del sistema (3.47) se muestra en la Figura 3.1.

La matriz  $M(\hat{x})$  en (3.3) toma la siguiente forma

$$M(\hat{x}) = \begin{bmatrix} dh_1(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})}h_1(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})}^2h_1(\hat{x}) \\ dh_2(\hat{x}) \\ dL_{f(\hat{x})}h_2(\hat{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

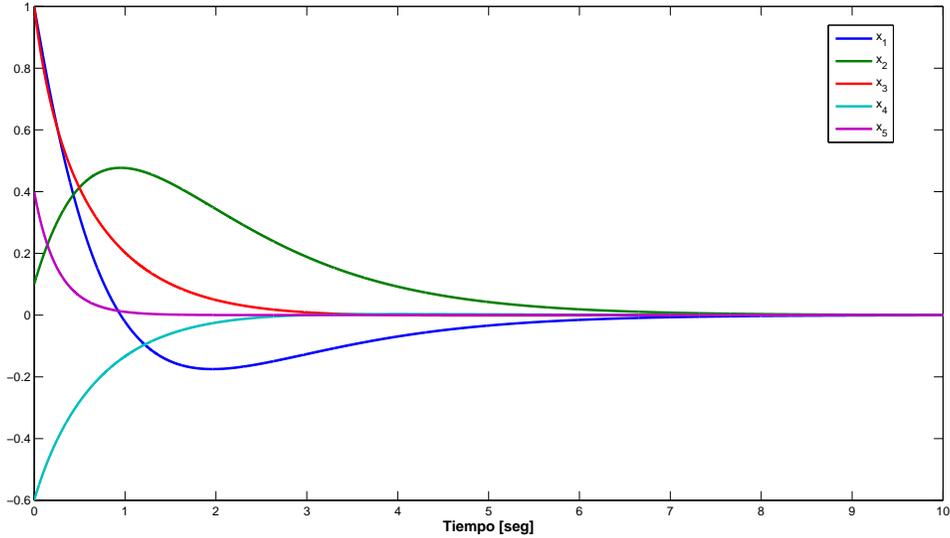


Figura 3.1: Trayectorias del Sistema

Ya que  $\det M = 1$ , la Suposición 3.1 se satisface localmente. La matriz  $G(\hat{x})$ , de acuerdo a (3.6), tiene la siguiente forma

$$G(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.48)$$

### 3.5.1. Observación de Estado en Presencia de Incertidumbres y Entradas Desconocidas

Las condiciones para la observación de estado robusta bajo incertidumbres en el modelo y/o entradas desconocidas son desarrolladas aplicando el Lema 3.1. A continuación, se establecerá que tipo de incertidumbres y/o entradas desconocidas puede soportar el esquema propuesto sin perder la observación exacta y convergencia en tiempo finito. Para el sistema de 5to orden, la Suposición 3.2 implica las siguientes condiciones

$$L_{D_1(x)}h_1(x) = 0 \quad (3.49)$$

$$L_{D_1(x)}L_{f(x)}h_1(x) = 0 \quad (3.50)$$

$$L_{D_1(x)}L_{f(x)}^2h_1(x) \neq 0 \quad (3.51)$$

$$L_{D_2(x)}h_2(x) = 0 \quad (3.52)$$

$$L_{D_2(x)}L_{f(x)}h_2(x) \neq 0 \quad (3.53)$$

las cuales, para las salidas consideradas, toman la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} D(x)w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Por lo tanto, la matriz de distribución  $D(x)$  que satisface la ecuación (3.54), toma la forma:

$$D(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2(x) \end{bmatrix}^T$$

De las ecuaciones (3.49)-(3.53) y de la forma de la matriz  $D(x)$ , la Suposición 3.2 se reduce a considerar que la 1<sup>era</sup>, 2<sup>da</sup> y 4<sup>ta</sup> ecuación del observador, deben tener la misma forma que las del modelo nominal, es decir, no se permiten incertidumbres en el modelo ni entradas desconocidas en la 1<sup>era</sup>, 2<sup>da</sup> y 4<sup>ta</sup> fila. Mientras que para la 3<sup>era</sup> y 5<sup>ta</sup> ecuación del observador se pueden soportar tanto incertidumbres en el modelo como entradas desconocidas.

De esta manera se considera el siguiente sistema con entradas desconocidas:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 + x_5 \\ x_1 \\ -x_3^3 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ (x_2 - 4) \frac{2x_5 + \text{sen}(x_5)}{2 + \cos(x_5)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ d_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & d_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$y = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

donde  $d_1(x) = x_1x_2^2$ ,  $d_2(x) = x_3x_1$  y las entradas desconocidas son

$$\begin{aligned} w_1 &= \text{sen}(3.18t) + 2\text{sen}(7.32t) + 0.5\text{sen}(0.79t) \\ w_2 &= 3\text{sen}(0.5t) + 0.5\cos(t) \end{aligned}$$

Cabe señalar que las entradas desconocidas son arbitrarias. Por otro lado, se considera, como parte de las incertidumbres y el peor de los casos, que se desconoce la dinámica de la 3<sup>era</sup> y 5<sup>ta</sup> ecuación del modelo. De este modo, se implementa el siguiente observador:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_5 \\ \hat{x}_1 \\ 0 \\ \hat{x}_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}$$

donde es evidente que las entradas desconocidas no son modeladas pero se sabe que entran por la 3<sup>era</sup> y 5<sup>ta</sup> fila.

Las condiciones iniciales del observador son iguales a cero, mientras que los términos de corrección  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son diseñados como un algoritmo casi-continuo no homogéneo de 3er orden y de 2do orden, respectivamente:

$$\sigma_1 = -30\Xi_1(e_{y_1}, \dot{e}_{y_1}, \ddot{e}_{y_1}) \frac{\ddot{e}_{y_1} + 3 \left( |\dot{e}_{y_1}| + |e_{y_1}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_1} + |e_{y_1}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_1}) \right)}{|\ddot{e}_{y_1}| + 3 \left( |\dot{e}_{y_1}| + |e_{y_1}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.57)$$

$$\sigma_2 = -8\Xi_2(e_{y_2}, \dot{e}_{y_2}) \frac{\dot{e}_{y_2} + 4 |e_{y_2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{y_2})}{|\dot{e}_{y_2}| + 4 |e_{y_2}|^{\frac{1}{2}}} \quad (3.58)$$

con  $e_{y_1} = \hat{x}_2 - y_1$  y  $e_{y_2} = \hat{x}_4 - y_2$ , y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (3.28), usando los parámetros de la tabla 3.1.

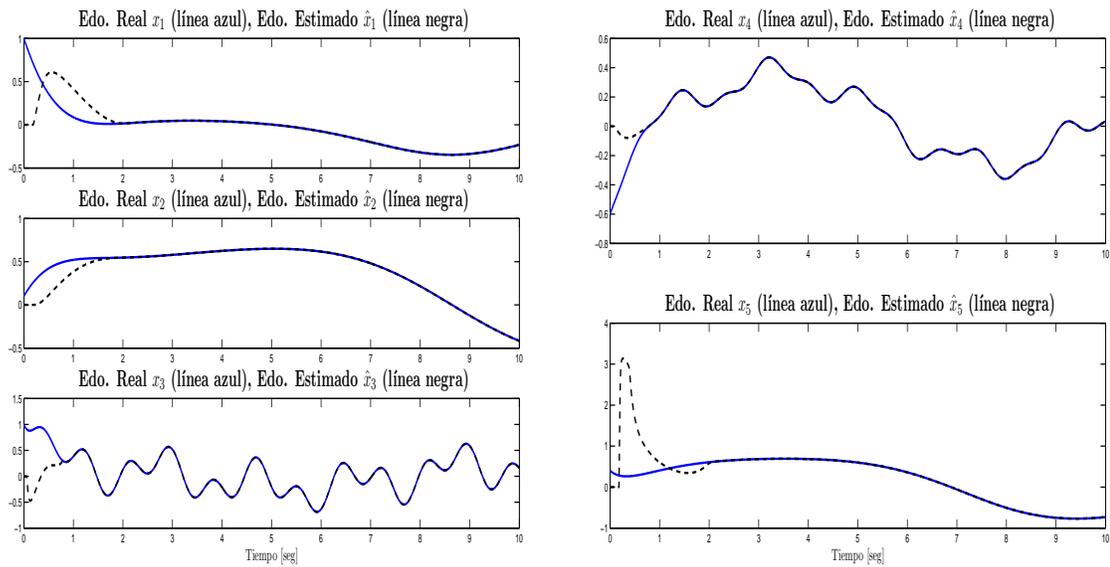
**Tabla 3.1:** Parámetros de los Términos de Corrección

Parámetro	i = 1	i = 2
$r_i$	3	2
$k_{i,0}$	2	1.5
$k_{i,1}$	1.5	1.1
$k_{i,2}$	1.1	—
$L_{0i}$	770	470
$L_i(t)$	$10 (\ \hat{e}_1\  + 15)$	$10 (\ \hat{e}_2\  + 5)$
$\Xi_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i-1)})$	$7 [ e_{y_1}  +  \dot{e}_{y_1}  +  \ddot{e}_{y_1} ] + 1.5$	$3 [ e_{y_2}  +  \dot{e}_{y_2} ] + 3$

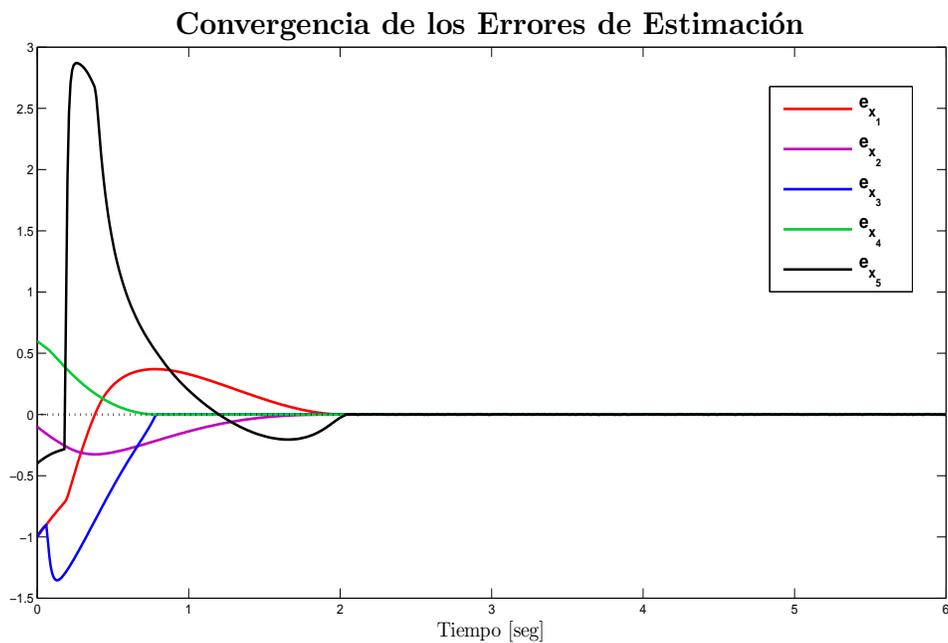
La reconstrucción de los estados en presencia de incertidumbres en el modelo y entradas desconocidas se muestra en la Figura 3.2 donde se puede apreciar que los estados estimados convergen a los estados reales en tiempo finito a pesar de la presencia de incertidumbres en el modelo y de entradas desconocidas, que claramente afectan el comportamiento del sistema. La convergencia del error se muestra en la Figura 3.3.

Los términos de corrección se muestran en la Figura 5.3. En estas gráficas se ve que los términos de corrección son iguales a cero antes de que los diferenciadores convergen, para después tomar el valor del algoritmo casi-continuo no homogéneo, como se estableció en (3.40).

El comportamiento de las Funciones de Ganancia de los términos de corrección se aprecia por el lado izquierdo de la Figura 3.5. Se ve que al inicio, la función de ganancia toma valores grandes, pero una vez que el error de observación converge a cero esta disminuye, adaptándose en función del error de observación de salida y sus derivadas.



**Figura 3.2:** Reconstrucción de Estado para el Sistema con Incertidumbres y Entradas Desconocidas



**Figura 3.3:** Convergencia del Error de Estimación para el Sistema con Incertidumbres y Entradas Desconocidas

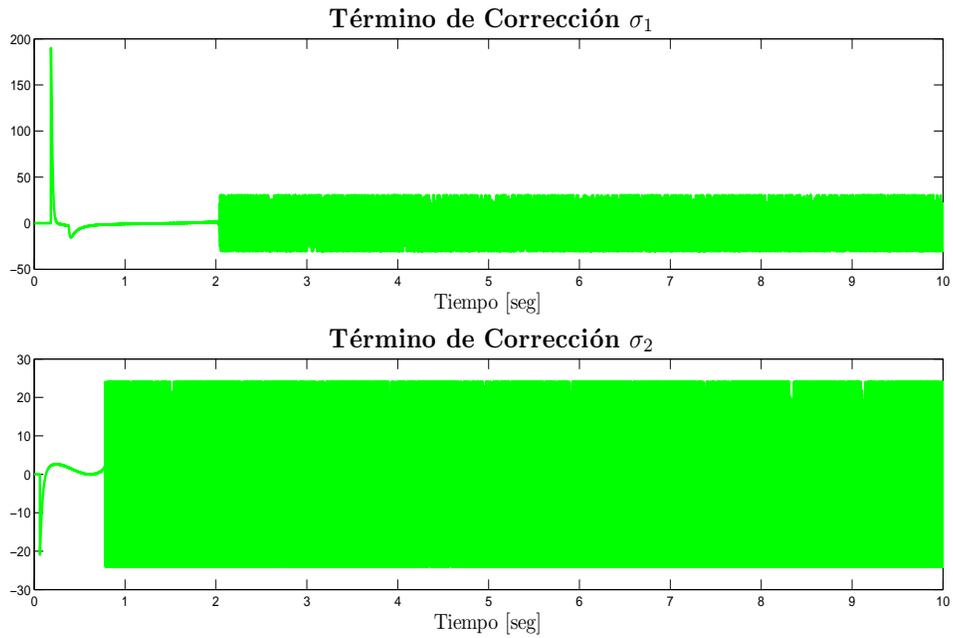


Figura 3.4: Términos de Corrección

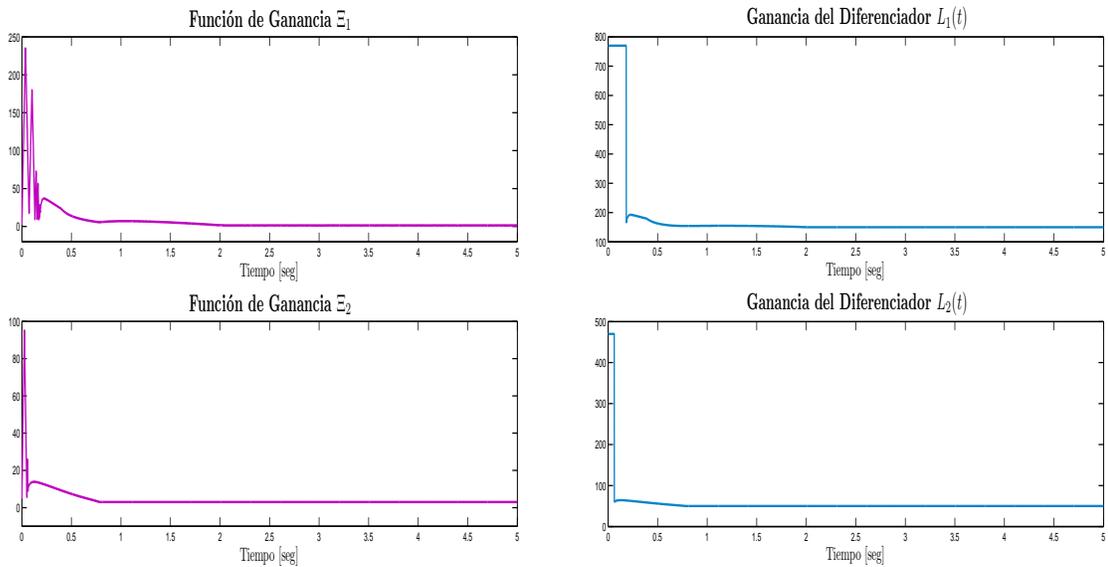


Figura 3.5: Lado Izquierdo - Funciones de Ganancia, Lado Derecho - Ganancias de los Diferenciadores

Por el lado derecho de la Figura 3.5 se muestran las Ganancias de los Diferenciadores, en estas gráficas se aprecia un comportamiento muy similar al de las Funciones de Ganancias de los términos de corrección, al inicio estas ganancias toman valores grandes y una vez que los diferenciadores han convergido, estas ganancias disminuyen, en función del error de observación de salida y sus derivadas.

Concluyendo, se ha mostrado que el esquema de observación propuesto es capaz de reconstruir el estado del sistema exactamente y en tiempo finito a pesar de la presencia de incertidumbres en el modelo y de entradas desconocidas, que satisfacen la Suposición 3.2. Por otro lado, se mostró la ventaja de usar algoritmos por modos deslizantes no homogéneos, con el uso de ganancias que se adaptan en función del error de observación de salida y sus derivadas, permitiendo que estas ganancias disminuyan una vez que el error de observación ha convergido.



# Observación en Sistemas No Lineales Conmutados

---

En este Capítulo se propone un esquema de observación de estados en tiempo finito para una clase de sistemas no lineales conmutados, tomando como base lo establecido en el Capítulo 3. El esquema propuesto usa el enfoque “*multi-observador*”, donde se diseñan tantos observadores como dinámicas o modos de operación tenga el sistema conmutado, y es capaz de reconstruir tanto el estado continuo como el modo de operación (señal de conmutación). Se proponen restricciones de acotamiento y de observabilidad que requieren la disponibilidad de todos los modos de operación del sistema. Un ejemplo académico con simulaciones ilustra el desempeño del esquema propuesto.

## 4.1. Planteamiento del Problema

Considere el siguiente sistema no lineal conmutado:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{\lambda(t)}(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

con  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  como el vector de estados y la llamada “*señal de conmutación*”  $\lambda(t) \in \{1, 2, \dots, q\}$ . La señal de conmutación determina la dinámica actual del sistema de los posibles “*q modos de operación*”  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)$ . Esta puede ser generada por una entrada exógena (por ejemplo, un supervisor externo) o por el propio estado del sistema, y en este trabajo se considera desconocida. Sean  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de salidas,  $f_{\lambda(t)}(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h(x) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{bmatrix} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  campos vectoriales suaves que representan la parte nominal del sistema que es conocida.

A continuación se establece una condición sobre la distinguibilidad del modo de operación, basada en [Barbot et al., 2007].

**Condición de Distinguibilidad del Modo de Operación.** *El modo de operación  $\lambda^*$  del sistema no lineal conmutado (4.1) es distinguible de cualquier otro modo  $j \neq \lambda^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$*

si el conjunto

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_{\lambda^*}(x) = f_j(x), \forall \lambda^* \neq j, \text{ con } j = 1, 2, \dots, q\} \quad (4.2)$$

es un conjunto discreto.  $\diamond$

Note que la condición de distinguibilidad aquí presentada es función únicamente de los campos vectoriales  $f_{\lambda^*}$  y  $f_j$ .

El objetivo es diseñar un esquema, tomando como base el esquema de observación propuesto en el Capítulo 3, para reconstruir el estado continuo y la señal de conmutación del sistema no lineal conmutado.

## 4.2. Existencia de los Observadores del Estado Continuo

Se considera que existen “ $q$ ” observadores con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_j &= f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, q \\ \hat{y}_j &= h(\hat{x}_j) \end{aligned} \quad (4.3)$$

es decir, cada observador tiene la estructura presentada en la Sección 3.2, con el vector de estados estimados  $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$  y el vector de salidas estimadas  $\hat{y}_j \in \mathbb{R}^p$ ,  $G_j(\hat{x}) = \begin{bmatrix} g_{j,1} & g_{j,2} & \cdots & g_{j,p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  con  $g_{j,i} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ), y los términos de corrección  $\sigma_j \in \mathbb{R}^p$ . Además, se asume existencia y unicidad de las soluciones para todo  $t \geq 0$ , como se estableció en la Sección 3.1.

Se selecciona cada una de las matrices  $G_j(\cdot)$ , como en (3.6) de la Sección 3.1, de tal manera que cada salida  $\hat{y}_j$  de cada observador tenga un vector de grados relativos completo y definido  $\begin{pmatrix} r_{j,1} & \cdots & r_{j,p} \end{pmatrix}$  con respecto a  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

Se define el mapeo  $M_j(\hat{x}_j)$ , como en (3.3) de la Sección 3.1, para cada uno de los observadores, de tal forma que dichos mapeos satisfagan la Suposición 3.1, es decir, que cada

$$M_j(\hat{x}_j) = \begin{bmatrix} dh_i(\hat{x}_j) \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)} h_i(\hat{x}_j) \\ \vdots \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)}^{r_{j,i}-1} h_i(\hat{x}_j) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, q \end{array} \quad (4.4)$$

satisfaga la condición de  $\text{rango}(M_j(\hat{x}_j)) = n$ ,  $\forall \hat{x}_j \in \mathcal{X}$ ,  $j = 1, \dots, q$ . Entonces, se selecciona

cada  $G_j(\hat{x}_j)$  como la solución de

$$M_j(\hat{x}_j)G_j(\hat{x}_j) = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_{j,1} \times p} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{r_{j,p} \times p} \end{bmatrix}}_{N_j} \quad (4.5)$$

$$G_j(\hat{x}) = M_j^{-1}(\hat{x}_j)N_j \quad (4.6)$$

Se definen nuevamente los errores de observación de salida y del estado con  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ) de la siguiente manera

$$e_{y_j} = h_i(\hat{x}_j) - h_i(x), \quad e_{x_j} = \hat{x}_j - x$$

y el vector de error de salida  $\varepsilon_j$ , que contiene los errores de salida  $e_{y_j}$  y sus derivadas correspondientes, con  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ )

$$\varepsilon_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{j,i^1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{j,i^{r_{j,i}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{y_{j,i}} \\ \vdots \\ e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Ahora, se describe la reconstrucción del estado continuo considerando el intervalo de tiempo entre conmutaciones. Sin pérdida de generalidad, considere que  $\lambda(t) \equiv \lambda^* = cte. \forall t \geq 0$ . La dinámica del sistema en el modo de operación  $\lambda^*$  esta dada por

$$\dot{x} = f_{\lambda^*}(x), \quad t \geq 0 \quad (4.8)$$

Cualquiera de los “ $q$ ” observadores definidos en (4.3) puede estar asociado al error de salida  $e_{y_j} = \hat{y}_j - y$ , al error de observación del estado  $e_{x_j} = \hat{x}_j - x$  y al vector de error de salida  $\varepsilon_j$  correspondiente para cada  $j = 1, \dots, q$  en el intervalo de tiempo entre conmutaciones.

Ahora, basados en el Lema 3.1, se puede establecer el siguiente Lema para el sistema conmutado

**Lema 4.1.** *Considere el sistema (4.8), los observadores definidos en (4.3) y (4.6), y que la Suposición 3.1 se satisface para cada uno de los observadores. Entonces las siguientes equivalencias se satisfacen*

$$\varepsilon_j = 0 \Leftrightarrow e_{x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, q \quad (4.9)$$

‡

*Demostración.*

La demostración consiste en realizar la prueba del Lema 3.1 para cada uno de los modos de operación del sistema conmutado, considerando que no existen incertidumbres y/o entradas desconocidas. ■

**Nota 4.1.** *El Lema anterior implica que existe una relación de equivalencia entre los errores de observación de salida  $\varepsilon_j$  y los errores de observación del estado  $e_{x_j}$ , para cada uno de los observadores, durante el intervalo de tiempo que existe entre conmutaciones.*

Bajo la Suposición 3.1, los observadores (4.3) y (4.6) podrán reconstruir el estado del sistema (4.8) exactamente y en tiempo finito, siempre que los términos de corrección  $\sigma_j$  de cada observador, sean seleccionados de tal manera que cada vector  $\varepsilon_j$  sea llevado a cero en tiempo finito.

### 4.3. Dinámica del Error de Observación de Salida

Como se mostró en la Sección 3.3, el Lema 4.1 se puede explotar para propósitos de observación, en este caso, observación del estado continuo, siempre que los términos de corrección  $\sigma_j$  para cada uno de los observadores se diseñen de tal forma que el vector  $\varepsilon_j$  converja a cero en tiempo finito para cada observador.

Ahora, debido a que la conmutación del sistema no lineal puede afectar la observación del estado continuo, se hace la siguiente suposición, que involucra todas las posibles dinámicas del sistema  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)$ .

**Suposición 4.1.** *Sean las funciones  $f_h(x), f_k(x)$  y  $h(x)$  tales que para cada  $h, k = 1, 2, \dots, q$ ,  $h \neq k$ , se satisface:*

$$\begin{bmatrix} L_{\bar{f}_{h,k}(x)} h_i(x) \\ \vdots \\ L_{\bar{f}_{h,k}(x)} L_{f_h(x)}^{r_{j,i}-1} h_i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

donde  $\bar{f}_{h,k} = f_h - f_k$ .

**Nota 4.2.** *La suposición anterior implica que las conmutaciones, vistas como perturbaciones, no afectan la observación del estado continuo, manteniendo la relación de equivalencia entre los errores de observación de salida  $\varepsilon_j$  y los errores de observación del estado  $e_{x_j}$ . Cabe mencionar que esta es una suposición bastante restrictiva en sistemas conmutados, pero es necesaria para que el esquema propuesto funcione.*

De este modo, la dinámica del error de observación de salida toma la misma forma que en la Sección 3.3, una forma canónica de Brunovsky en bloques :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{e}}_{j,1^1} &= \varepsilon_{j,1^2} \\
 \dot{\hat{e}}_{j,1^2} &= \varepsilon_{j,1^3} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{e}}_{j,1^{r_{j,1}}} &= \tilde{\Phi}_{j,1^{r_{j,1}+1}}(e_{x_j}, \hat{x}_j) + \sigma_{j,1} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{e}}_{j,p^1} &= \varepsilon_{j,p^2} \\
 \dot{\hat{e}}_{j,p^2} &= \varepsilon_{j,p^3} \\
 &\vdots \\
 \dot{\hat{e}}_{j,p^{r_{j,p}}} &= \tilde{\Phi}_{j,p^{r_{j,p}+1}}(e_{x_j}, \hat{x}_j) + \sigma_{j,p}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde  $j = 1, \dots, q$  y las funciones  $\tilde{\Phi}_{j,i^{r_{j,i}+1}}$  toman la siguiente forma

$$\tilde{\Phi}_{j,i^{r_{j,i}+1}}(e_{x_j}, \hat{x}_j) = L_{f_j^{r_{j,i}}}^{r_{j,i}} h_i(\hat{x}_j) - L_{f_{\lambda(t)}^{r_{j,i}}}^{r_{j,i}} h_i(\hat{x}_j - e_{x_j}) \tag{4.12}$$

para  $i = 1, \dots, p$ . Ahora, de manera similar a la suposición de acotamiento de la Sección 3.3, se hace la siguiente suposición.

**Suposición 4.2.** Hay constantes  $\Gamma_{j,i^1} \geq 0$ ,  $\Gamma_{j,i^2} \geq 0$  y funciones continuas  $\varrho_{j,i}(e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)}) \geq 0$  conocidas, tales que las funciones  $\tilde{\Phi}_{j,i^{r_{j,i}+1}}$  satisfacen

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{\Phi}_{j,i^{r_{j,i}+1}}(e_{x_j}, \hat{x}_j) \right| &< \Gamma_{j,i^1} \varrho_{j,i}(e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)}) + \Gamma_{j,i^2}, \quad i = 1, \dots, p \\
 \text{con } \left| \varrho_{j,i}(e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)}) \right| &\leq \varrho_{j,i}^+, \quad j = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Los términos de corrección  $\sigma_{j,i}$  se diseñaran de acuerdo a lo propuesto en la Sección 3.4, de tal forma que los sistemas (4.11)-(4.13), para cada observador, converja a cero en tiempo finito.

## 4.4. Diseño de los Términos de Corrección

Los términos de corrección  $\sigma_{j,i}$  para cada uno de los observadores serán diseñados de acuerdo al enfoque de modos deslizantes de alto orden no homogéneos propuesto a lo largo de la Sección 3.4.

Tomando en cuenta el Lema 4.1 y lo desarrollado en la Sección 3.4, se propone que los términos de corrección, con  $j = 1, \dots, q$ , sean construidos de la siguiente forma:

$$\sigma_{j,i}(t) = \begin{cases} \bar{\sigma}_{j,i} & \text{si } |z_{j,i^0} - e_{y_{j,i}}(t)| \leq \gamma_{j,i^0} L_{j,i} \delta^{r_{j,i}} \\ & \text{en el intervalo } \gamma_{j,i^0} \delta_{j,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{4.14}$$

donde  $\bar{\sigma}_{j,i}$  son los términos de corrección calculados de acuerdo a

$$\bar{\sigma}_{j,i} = -\alpha_{j,i} \Xi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right) \Psi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right) \quad (4.15)$$

con  $\alpha_{j,i} > 0$ ,  $\Psi_{j,i}$  el algoritmo recursivo de modos deslizantes de  $r_{j,i} - \text{ésimo}$  orden con “*parámetros robustos con función de ganancia*” y la función de ganancia  $\Xi_{j,i}$  de la forma

$$\Xi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right) = \lambda_{j,i^1} \varrho_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right) + \lambda_{j,i^2} \quad (4.16)$$

usando las derivadas de los errores de observación de salida, estimadas por los diferenciadores (3.28) con la adaptación de ganancia  $L_{j,i}$  propuesta en la Sección 3.4.1.

**Nota 4.3.** *Los términos de corrección se diseñan de la misma manera que en la Sección 3.4, haciendo uso del algoritmo casi-continuo no homogéneo y del diferenciador no homogéneo, con las respectivas suposiciones para su funcionamiento.*

Ahora, se establece el siguiente Teorema que resuelve el problema de observación del estado continuo.

**Teorema 4.1.** *Considere el sistema (4.1) con la  $\lambda^*$  -ésima dinámica activada y que las Suposiciones 3.1 y 4.2. Considere los observadores (4.3) y (4.6) con  $\sigma_{j,i}$ , diseñadas de acuerdo a (4.14). Entonces siempre que  $\alpha_{j,i}$ , sean escogidas suficientemente grandes y que  $\lambda_{j,i^1} > \Gamma_{j,i^1}$ ,  $\lambda_{j,i^2} > \Gamma_{j,i^2}$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ), el error de observación del estado,  $e_{x_j} = \hat{x}_j - x$ , para cada uno de los observadores, convergerá a cero en tiempo finito.*

□

*Demostración.*

La demostración de este Teorema es una consecuencia de aplicar el Teorema 3.2 para cada modo de operación del sistema conmutado. ■

**Nota 4.4.** *El Teorema 4.1 establece que, independientemente del modo de operación activo, el error de observación  $e_{x_j}$ , para cada uno de los observadores, tenderá a cero, garantizando que todos los observadores proporcionen la estimación correcta del estado continuo.*

**Nota 4.5.** *Es importante resaltar que después de que cada modo de operación conmuta, los observadores pueden perder la estimación del estado continuo (debido, por ejemplo, a las discontinuidades en las derivadas de alto orden de la salida). Sin embargo, el valor correcto del estado puede ser recobrado después de un transitorio de tiempo finito, que puede ser arbitrariamente reducido tomando valores mas grandes para los parámetros de los términos de corrección.*

Hasta este punto, se ha propuesto un esquema de observación del estado continuo, lo que resta es establecer un esquema para reconstruir la señal de conmutación para completar el diseño de los observadores para sistemas no lineales conmutados.

## 4.5. Reconstrucción de la Señal de Conmutación

En estado estable, todos los términos del vector  $\epsilon_j$  y  $e_{x_j}$  son idénticamente igual a cero, mientras que los términos  $\dot{e}_{x_j}$ ,  $j = 1, \dots, q$  están afectados directamente por los términos de corrección discontinuos, es decir, son cero en “promedio”. Por lo tanto, se puede explotar una de las características principales de los observadores por modos deslizantes, “*el principio de inyección de salida equivalente*” (ver p. ej. [Edwards and Spurgeon, 1998] y [Utkin et al., 1999]).

La expresión de  $\dot{e}_{x_j}$ ,  $j = 1, \dots, q$  es

$$\dot{e}_{x_j} = f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j - f_{\lambda^*}(\hat{x}_j - e_{x_j}) \quad (4.17)$$

En el momento en el cual la estimación exacta del estado continuo es garantizada, (4.17) se convierte en

$$\dot{e}_{x_j} = f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j - f_{\lambda^*}(\hat{x}_j) \quad (4.18)$$

Entonces los términos de corrección  $\sigma_j$  toman el valor de la inyección de salida equivalente  $\sigma_{j_{eq}}$ , es decir

$$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} = f_{\lambda^*}(\hat{x}_j) - f_j(\hat{x}_j) \quad (4.19)$$

lo cual deriva de hacer  $\dot{e}_{x_j} = 0$ . La ecuación anterior implica que entre los “ $q$ ” observadores definidos por (4.3) y (4.6), habrá solo uno de ellos con el valor de inyección de salida equivalente correspondiente, idénticamente igual a cero de acuerdo a la siguiente condición de reconstructibilidad del modo de operación y a la “*Condición de Distinguibilidad del Modo de Operación*”:

**Condición de Reconstructibilidad de la Señal de Conmutación.** *La señal de conmutación  $\lambda(t)$  puede ser reconstruida por medio de la inyección de salida equivalente de acuerdo a:*

$$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \equiv 0, \quad j = \lambda^* \quad (4.20)$$

$$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \neq 0, \quad \forall j \neq \lambda^* \quad (4.21)$$

siempre que el conjunto  $\mathcal{M}$  sea un conjunto discreto.  $\diamond$

**Nota 4.6.** *El conjunto discreto  $\mathcal{M}$  esta formado solo por puntos aislados de  $x$  donde se satisface que  $f_{\lambda^*}(x) = f_j(x)$ ,  $\forall \lambda^* \neq j$ , con  $j = 1, 2, \dots, q$ . Esto permite asegurar que solo una inyección de salida equivalente será idénticamente igual a cero durante el intervalo de tiempo entre cada conmutación o cambio de dinámica  $f_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, q$  mientras que las inyecciones de salida equivalente restantes solo podrán ser cero en puntos aislados durante el mismo intervalo de tiempo.*

Si los términos de corrección  $\sigma_{i_{eq}}$ ,  $i = 1, \dots, p$  estuvieran disponibles, se podría extraer la información necesaria para determinar, por medio de la “*Condición de Reconstructibilidad*”, la señal de conmutación. Para esto, se establecen dos métodos por los cuales se puede recuperar la inyección de salida equivalente  $\sigma_{i_{eq}}$ , el método “*Exacto*” y “*Aproximado*”.

#### 4.5.1. Inyección de Salida Equivalente por el Método Exacto

Para recuperar la inyección de salida equivalente por el método Exacto, en lugar de usar el algoritmo definido por (4.15), se implementa el siguiente algoritmo casi-continuo no homogéneo “*augmentado*”, de orden  $r_{j,i} + 1$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ):

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{j,i} = -\alpha_{j,i} \Xi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i})} \right) \Psi_{j,i} r_{j,i}, r_{j,i}+1 \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i})} \right) \quad (4.22)$$

Se demostró en [Levant and Michael, 2008] que el algoritmo casi-continuo no homogéneo “*augmentado*” con “*parámetros robustos con función de ganancia*”, con  $\Xi_{j,i}$  elegida adecuadamente y con  $\alpha_{j,i} > 0$ ; estabiliza el sistema (4.11)-(4.13) en tiempo finito. La diferencia ahora, es que los términos de corrección  $\sigma_{j,i}$ , son continuos en todos lados, incluyendo el origen de los espacios del error. Esto significa que la equivalencia  $\sigma_{j,i} = \sigma_{j,i_{eq}}$ , se satisface, no en “*promedio*”, es decir, hay un tiempo finito  $t^*$  tal que

$$\sigma_{j,i} = \sigma_{j,i_{eq}}, \quad t \geq t^*, \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \quad (4.23)$$

Por lo tanto, implementando el algoritmo (4.22), se recupera la inyección de salida equivalente de forma “*exacta*” por medio de la expresión (4.23).

**Nota 4.7.** Para usar el método Exacto se requiere tener disponibles las derivadas  $e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i})}$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ), esto implica usar un diferenciador por modos deslizantes de un orden mayor.

#### 4.5.2. Inyección de Salida Equivalente por el Método Aproximado

Considere los términos de corrección en (4.15), ya que  $\sigma_{j,i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ) son señales discontinuas, la equivalencia  $\sigma_{j,i} = \sigma_{j,i_{eq}}$ , se satisface solo en el sentido de Filippov, por lo tanto, para recuperar la inyección de salida equivalente  $\sigma_{j,i_{eq}}$ , por medio de la señal discontinua  $\sigma_{j,i}$ , se requiere filtración.

Por lo tanto, se define el siguiente estimador de inyección de salida equivalente  $\sigma_{j,i_{eq}}$ :

$$\tau_{j,i} \dot{\hat{\sigma}}_{j,i_{eq}} = \sigma_{j,i} - \hat{\sigma}_{j,i_{eq}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \quad (4.24)$$

Teóricamente,  $\sigma_{j,i}$  son señales de conmutación discontinuas cuya frecuencia de conmutación es infinita en estado estable. En la práctica, esta frecuencia de conmutación es finita debido a las características de los sensores y actuadores. Por lo tanto, la solución de (4.24) dependerá del valor finito de las frecuencias de conmutación  $f_{j,i_{sw}}$  de  $\sigma_{j,i}$ . Se sabe de [Utkin et al., 1999] que

$$\lim_{\substack{\tau_{j,i} \rightarrow 0 \\ f_{j,i_{sw}} \rightarrow \infty}} \hat{\sigma}_{j,i_{eq}} = \sigma_{j,i_{eq}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \quad (4.25)$$

Más aun, con  $f_{j,i_{sw}}$  suficientemente grandes y despreciando los términos exponenciales, se satisface que el error de reconstrucción depende de la constante de tiempo del filtro de la siguiente forma

$$\left| \hat{\sigma}_{j,i_{eq}} - \sigma_{j,i_{eq}} \right| \leq O(\tau_{j,i}), \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \quad (4.26)$$

Lo que significa que existen constantes  $k_{j,i} > 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ), tal que después de un transitorio de tiempo finito, el error de reconstrucción esta acotado como

$$\left| \hat{\sigma}_{j,i_{eq}} - \sigma_{j,i_{eq}} \right| \leq k_{j,i} \tau_{j,i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (j = 1, \dots, q) \quad (4.27)$$

Por lo tanto, implementando los filtros (4.25) se puede alcanzar un estimado “*aproximado*” de la inyección de salida equivalente,  $\hat{\sigma}_{j,i_{eq}}$ ,  $i = 1, \dots, p$  ( $j = 1, \dots, q$ ).

Finalmente, una vez que cada una de las inyecciones de salida equivalente,  $\hat{\sigma}_{j_{eq}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ , han sido recuperadas (usando el método “*Exacto*” o “*Aproximado*”), estas deben ser analizadas para extraer la información acerca del valor actual de la señal de conmutación.

Teóricamente, un simple criterio basado en un umbral sería suficiente. De hecho, se mostró que una y sola una de las señales  $\hat{\sigma}_{j_{eq}}$  se hace idénticamente igual a cero y permanece en este valor hasta que  $\lambda(t)$  cambia de valor. Sin embargo, todas las señales  $\hat{\sigma}_{j_{eq}}$  pueden cruzar por cero ocasionalmente.

Por lo tanto, una lógica debe ser implementada para buscar la señal que este más cerca de cero sobre un intervalo de tiempo de longitud finita. Esto se puede hacer fácilmente con el método numérico descrito a continuación.

Sea  $T_s$  un tiempo de muestreo pequeño. Las siguientes cantidades no negativas son evaluadas en línea en cualquier instante de muestreo  $t = kT_s$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mu_j = \sum_{i=0}^N |\hat{\sigma}_{j_{eq}}(t - iT_s)|, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (4.28)$$

donde  $N$  representa el ancho de cierta ventana de tiempo fija, donde se suman todos los valores de la inyección de salida equivalente.

El valor de  $j$ , para el cual  $\mu_j$  es la cantidad más pequeña, será el modo de operación estimado. De esta forma la señal de conmutación  $\hat{\lambda}(t)$  se puede reconstruir por medio de la siguiente expresión

$$\hat{\lambda}(t) = \arg \min_j \mu_j \quad (4.29)$$

Los esquemas propuestos para la observación del estado continuo y la reconstrucción de la señal de conmutación toman la estructura descrita en las Figuras 4.1 y 4.2, respectivamente.

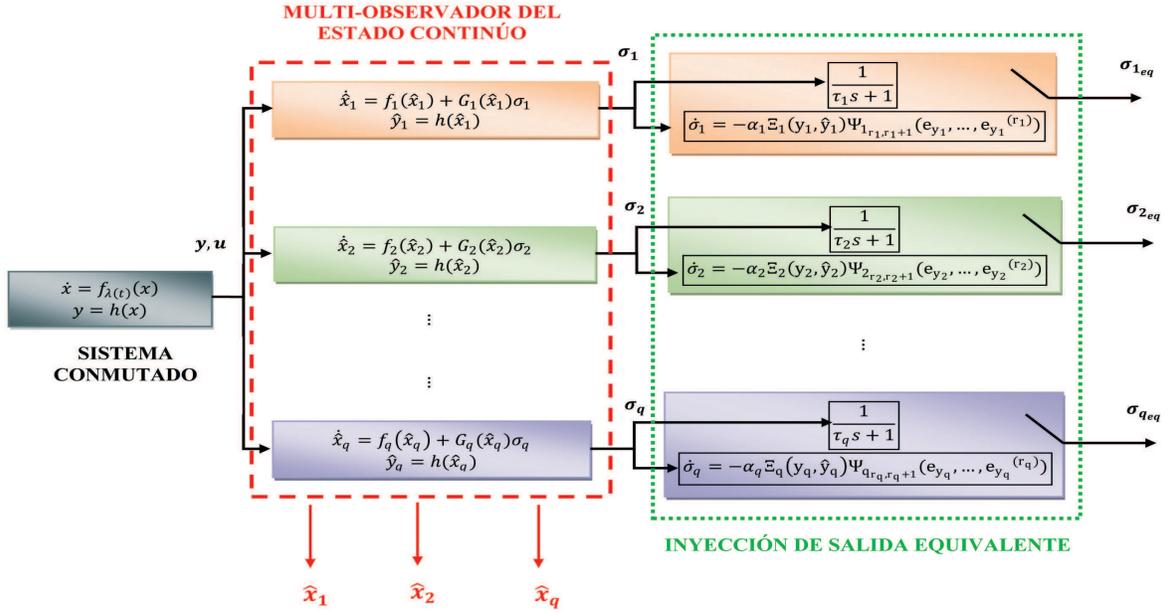


Figura 4.1: Esquema de Observación del Estado Continuo

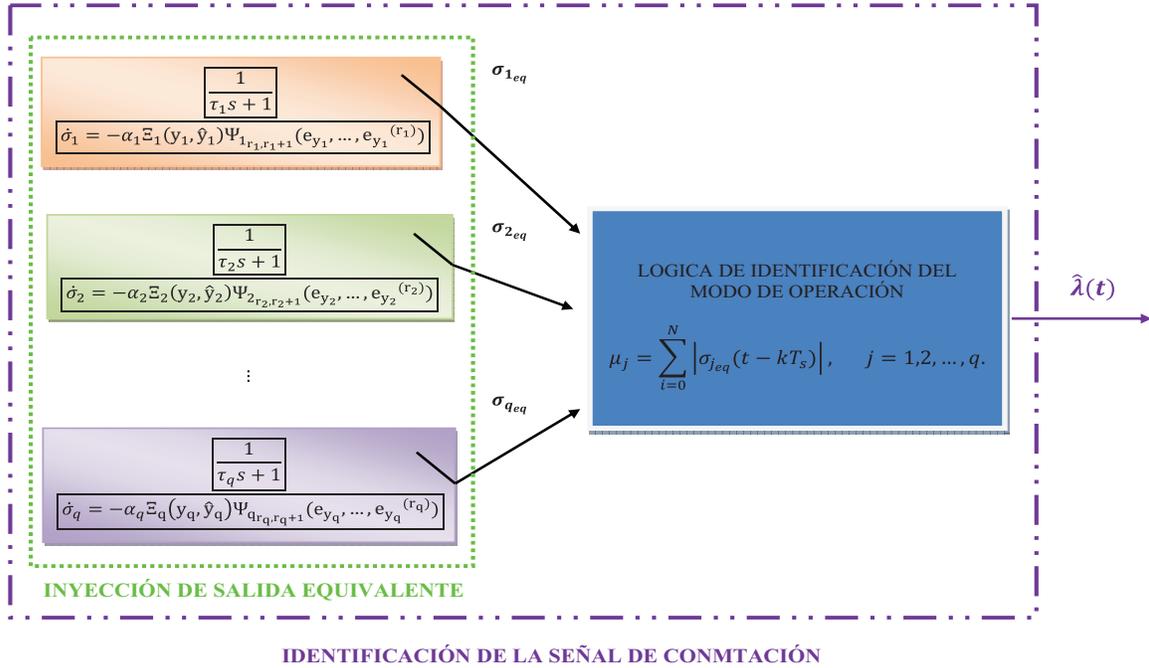


Figura 4.2: Esquema de Reconstrucción del Modo de Operación

## 4.6. Ejemplo y Simulaciones

Considere el siguiente sistema no lineal de 6to orden, compuesto por la interconexión de un circuito Chua [Huang et al., 1996] y un oscilador de Rössler [Rössler, 1976]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda(t)}c_{\lambda(t)}x_1 + \alpha_{\lambda(t)}x_2 - \alpha_{\lambda(t)}x_1^3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta_{\lambda(t)}x_2 \\ -x_5 - x_6 + x_1 \\ x_4 + a_{\lambda(t)}x_5 \\ b_{\lambda(t)} + x_6(x_4 - d_{\lambda(t)}) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

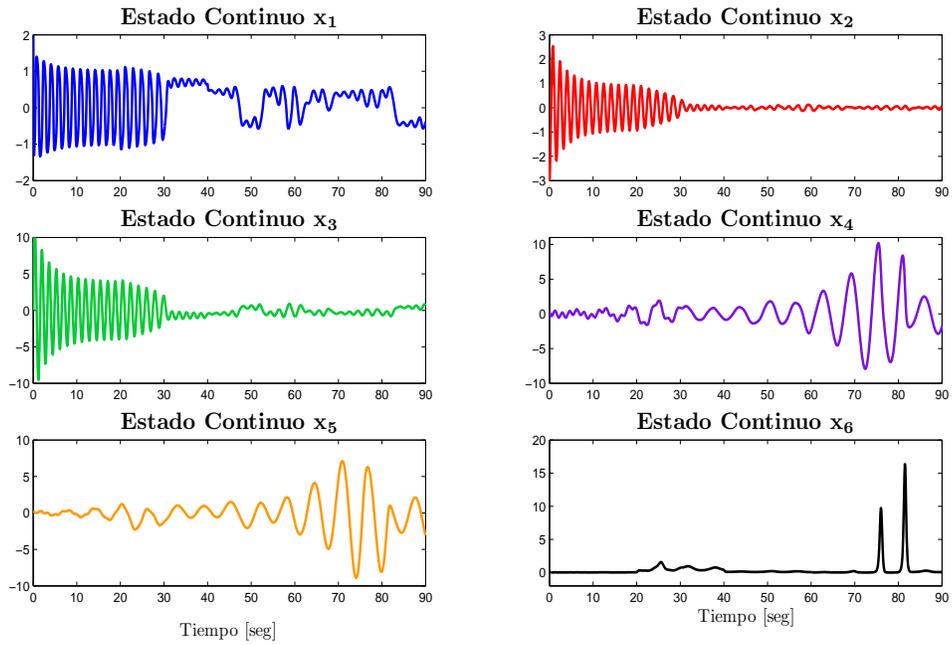
$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

donde  $\lambda(t) \in \{1, 2, 3\}$  y los parámetros  $a_{\lambda(t)}$ ,  $b_{\lambda(t)}$ ,  $c_{\lambda(t)}$ ,  $d_{\lambda(t)}$ ,  $\alpha_{\lambda(t)}$  y  $\beta_{\lambda(t)}$  son parámetros constantes que toman los valores de la Tabla 4.1

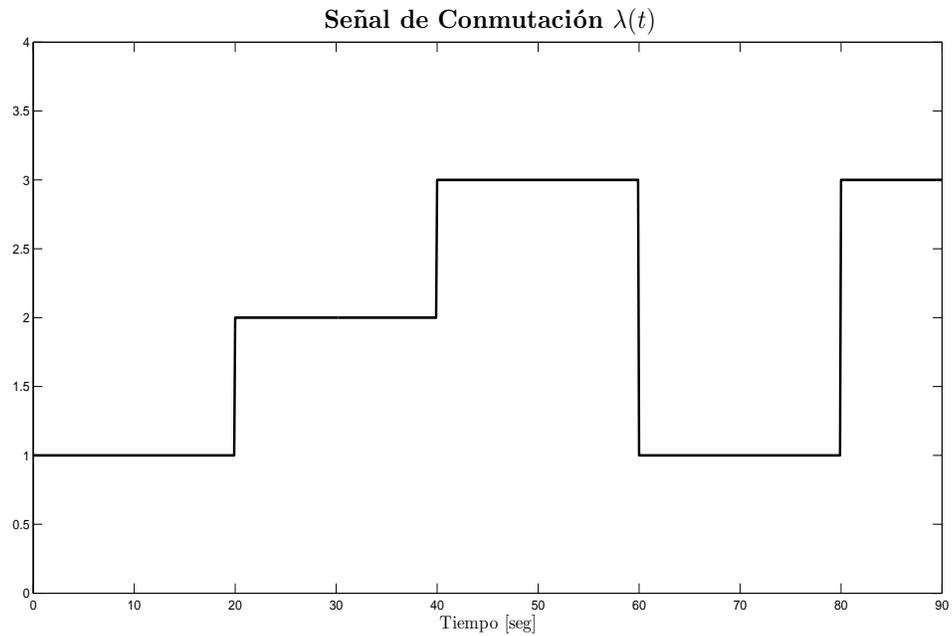
**Tabla 4.1:** Parámetros del Sistema Conmutado.

Parámetro	$\lambda(t) = 1$	$\lambda(t) = 2$	$\lambda(t) = 3$
$a_{\lambda(t)}$	0.2	0.2	0.2
$b_{\lambda(t)}$	0.2	1	0.5
$c_{\lambda(t)}$	-0.143	-0.5	-0.2
$d_{\lambda(t)}$	6	2	4
$\alpha_{\lambda(t)}$	10	8	12
$\beta_{\lambda(t)}$	16	16	16

El sistema (4.30) representa una versión conmutada de un sistema caótico “Chua-Rössler”. Las condiciones iniciales del sistema (conocidas solo para efectos de simulación) son las siguientes:  $x(0) = [3.9 \ -3.2 \ 0.03 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ , las cuales producen el comportamiento que se muestra en la Figura 4.3. Considere que la señal de conmutación  $\lambda(t)$ , a reconstruir, tiene la forma que se muestra en la Figura 4.4, donde se puede ver que el sistema conmutada de modo de operación cada 20 segundos.



**Figura 4.3:** Trayectorias del Estado Continuo del Sistema Conmutado



**Figura 4.4:** Conmutación en los Modos de Operación

### 4.6.1. Observación del Estado Continuo

Considere las salidas correspondientes del sistema, las matrices  $M_j(\hat{x}_j)$  en (4.4) toman la siguiente forma:

$$M_j(\hat{x}_j) = \begin{bmatrix} dh_1(\hat{x}_j) \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)}h_1(\hat{x}_j) \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)}^2h_1(\hat{x}_j) \\ dh_2(\hat{x}_j) \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)}h_2(\hat{x}_j) \\ dL_{f_j(\hat{x}_j)}^2h_2(\hat{x}_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_j & \beta_j & -\beta_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_j & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_j & (a_j^2 - 1) & -1 \end{bmatrix}$$

Ya que  $\det M_j(\hat{x}_j) \neq 0, \forall j \in \{1, 2, 3\}$  la Suposición (3.1) se satisface para cada una de las matrices  $M_j$ . Las matrices  $G_j(\hat{x}_j)$ , de acuerdo a (4.6), tienen la siguiente estructura:

$$G_j(\hat{x}_j) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\beta_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (4.31)$$

Notar que para cada par de sistemas  $(f_h, f_k)$  con  $h, k = 1, 2, 3$ , la Suposición 4.1 se satisface:

$$L_{\bar{f}_{h,k}(x)}h_i(x) = 0 \quad (4.32)$$

$$L_{\bar{f}_{h,k}(x)}L_{f_h(x)}h_i(x) = 0 \quad (4.33)$$

como consecuencia, todos los observadores proporcionarán la correcta reconstrucción de los estados continuos.

Los observadores son diseñados de la siguiente manera, con  $j = 1, 2, 3$

$$\dot{\hat{x}}_j = \begin{bmatrix} -\alpha_j c_j \hat{x}_{j,1} + \alpha_j \hat{x}_{j,2} - \alpha_j \hat{x}_{j,1}^3 \\ \hat{x}_{j,1} - \hat{x}_{j,2} + \hat{x}_{j,3} \\ -\beta_j \hat{x}_{j,2} \\ -\hat{x}_{j,5} - \hat{x}_{j,6} + \hat{x}_{j,1} \\ \hat{x}_{j,4} + a_j \hat{x}_{j,5} \\ b_j + \hat{x}_{j,6} (\hat{x}_{j,4} - d_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta_j} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_j} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{j,1} \\ \sigma_{j,2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\hat{y}_j = \begin{bmatrix} \hat{x}_{j,3} \\ \hat{x}_{j,5} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Los términos de corrección  $\sigma_{j,1}$  y  $\sigma_{j,2}$  son diseñados como algoritmos casi-continuos no homogéneos de 3er orden:

$$\sigma_{j,1} = -6\Xi_{j,1} \left( e_{y_{j,1}}, \dot{e}_{y_{j,1}}, \ddot{e}_{y_{j,1}} \right) \frac{\ddot{e}_{y_{j,1}} + 19 \left( |e_{y_{j,1}}| + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_{j,1}} + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_{j,1}}) \right)}{|e_{y_{j,1}}| + 19 \left( |e_{y_{j,1}}| + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.36)$$

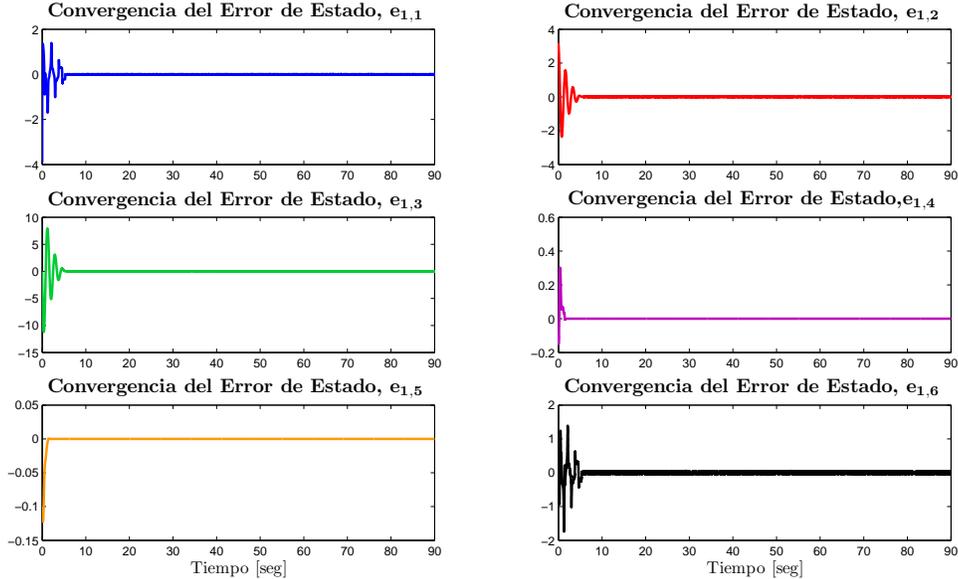
$$\sigma_{j,2} = -8\Xi_{j,2} \left( e_{y_{j,2}}, \dot{e}_{y_{j,2}}, \ddot{e}_{y_{j,2}} \right) \frac{\ddot{e}_{y_{j,2}} + 10 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_{j,2}} + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_{j,2}}) \right)}{\left| \dot{e}_{y_{j,2}} \right| + 10 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.37)$$

con  $e_{y_{j,1}} = \hat{x}_{j,3} - y_1$  y  $e_{y_{j,2}} = \hat{x}_{j,5} - y_2$ , y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (3.28), usando los parámetros de la Tabla 4.2

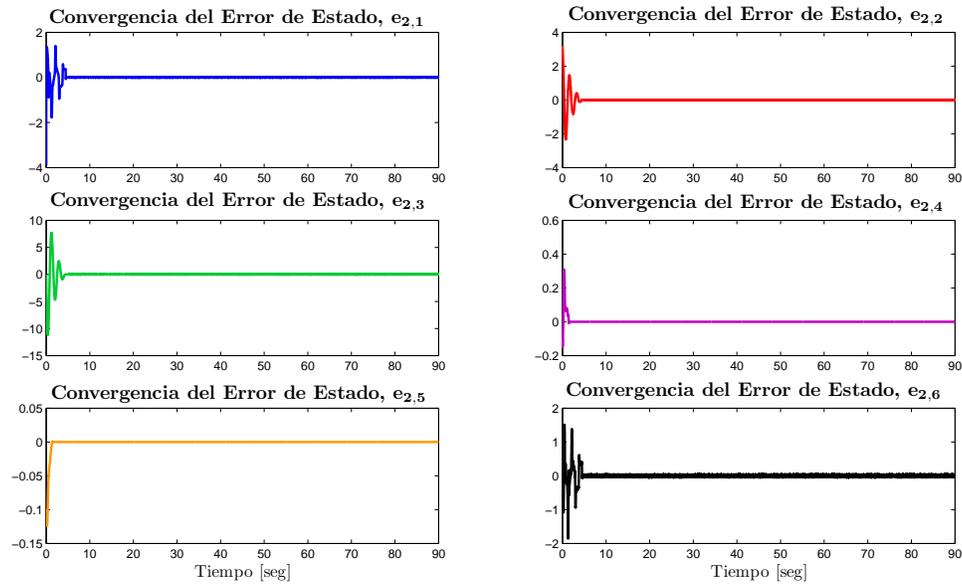
**Tabla 4.2:** Parámetros de los Términos de Corrección

Parámetro	$i = 1$	$i = 2$
$r_{j,i}$	3	3
$k_{j,i^0}$	2	2
$k_{j,i^1}$	1.5	1.5
$k_{j,i^2}$	1.1	1.1
$L_{j,i^0}$	1800	770
$L_{j,i}(t)$	$10 (\ \varepsilon_{j,1}\  + 92.2)$	$10 (\ \varepsilon_{j,2}\  + 17.1)$
$\Xi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right)$	$\left[  e_{y_{j,1}}  +  \dot{e}_{y_{j,1}}  +  \ddot{e}_{y_{j,1}}  \right] + 70$	$\left[  e_{y_{j,2}}  +  \dot{e}_{y_{j,2}}  +  \ddot{e}_{y_{j,2}}  \right] + 10$

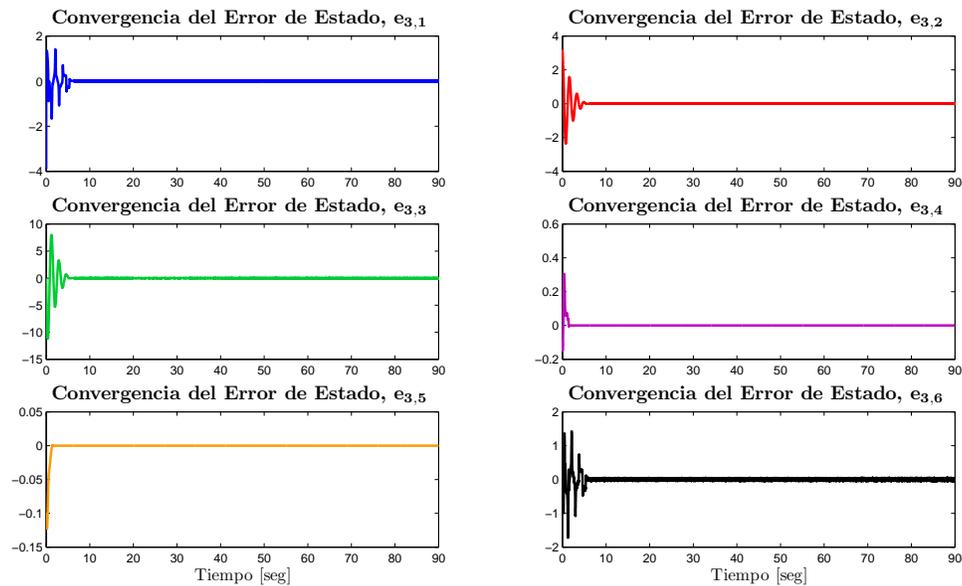
El error de estimación del estado continuo para cada observador, converge a cero en tiempo finito, como se muestra en las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7, notando que ningún observador pierde la estimación correcta a pesar de las conmutaciones del sistema.



**Figura 4.5:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1



**Figura 4.6:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2



**Figura 4.7:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3

### 4.6.2. Reconstrucción de la Señal de Conmutación

Para la reconstrucción exacta, los términos de corrección  $\sigma_{j,i}$  son calculados de acuerdo a las siguientes expresiones

$$\dot{\sigma}_{j,1} = -10\Xi_{j,1} \left( e_{y_{j,1}}, \dot{e}_{y_{j,1}}, \ddot{e}_{y_{j,1}}, e_{y_{j,1}}^{(3)} \right) \Psi_{j,1}^{3,4} \quad (4.38)$$

$$\dot{\sigma}_{j,2} = -20\Xi_{j,2} \left( e_{y_{j,2}}, \dot{e}_{y_{j,2}}, \ddot{e}_{y_{j,2}}, e_{y_{j,2}}^{(3)} \right) \Psi_{j,2}^{3,4} \quad (4.39)$$

donde

$$\Psi_{j,1}^{3,4} = \left[ e_{y_{j,1}}^{(3)} + 19 \left[ \ddot{e}_{y_{j,1}} + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,1}}| + 0.5 |e_{y_{j,1}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \dot{e}_{y_{j,1}} + 0.5 |e_{y_{j,1}}|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(e_{y_{j,1}}) \right) \right] \times \right. \\ \left. \left[ |\ddot{e}_{y_{j,1}}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,1}}| + 0.5 |e_{y_{j,1}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \div \\ \left[ |e_{y_{j,1}}^{(3)}| + 19 \left[ |\ddot{e}_{y_{j,1}}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,1}}| + 0.5 |e_{y_{j,1}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Psi_{j,2}^{3,4} = \left[ e_{y_{j,2}}^{(3)} + 10 \left[ \ddot{e}_{y_{j,2}} + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + 0.5 |e_{y_{j,2}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \dot{e}_{y_{j,2}} + 0.5 |e_{y_{j,2}}|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(e_{y_{j,2}}) \right) \right] \times \right. \\ \left. \left[ |\ddot{e}_{y_{j,2}}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + 0.5 |e_{y_{j,2}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \div \\ \left[ |e_{y_{j,2}}^{(3)}| + 10 \left[ |\ddot{e}_{y_{j,2}}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + 0.5 |e_{y_{j,2}}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

con  $e_{y_{j,1}} = \hat{x}_{j,3} - y_1$  y  $e_{y_{j,2}} = \hat{x}_{j,5} - y_2$ , y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (3.28) usando los parámetros de la Tabla 4.3.

Para la reconstrucción aproximada, se consideran los términos de corrección diseñados en (4.36) y (4.37), y se emplean los siguientes estimadores de inyección de salida equivalente:

$$\tau_{j,1} \dot{\hat{\sigma}}_{j,1_{eq}} = \sigma_{j,1} - \hat{\sigma}_{j,1_{eq}}, \quad \text{con } \tau_{j,1} = 0.042 \quad (4.40)$$

$$\tau_{j,2} \dot{\hat{\sigma}}_{j,2_{eq}} = \sigma_{j,2} - \hat{\sigma}_{j,2_{eq}}, \quad \text{con } \tau_{j,2} = 0.042 \quad (4.41)$$

Las inyecciones de salida equivalente de cada observador se pueden apreciar en las Figuras 4.8, 4.9 y 4.10 usando el método exacto, mientras que en las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13, usando el método aproximado.

Tabla 4.3: Parámetros de los Términos de Corrección

Parámetro	$i = 1$	$i = 2$
$r_i$	3	3
$k_{j,i^0}$	3	3
$k_{j,i^1}$	2	2
$k_{j,i^2}$	1.5	1.5
$k_{j,i^3}$	1.1	1.1
$L_{j,i^0}$	6000	770
$L_{j,i}(t)$	$10 (\ \hat{\epsilon}_{j,1}\  + 92.2)$	$10 (\ \hat{\epsilon}_{j,2}\  + 17.1)$
$\Xi_{j,i} (e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i})})$	$\left[  e_{y_{j,1}}  +  \dot{e}_{y_{j,1}}  +  \ddot{e}_{y_{j,1}}  \right] + 70$	$\left[  e_{y_{j,2}}  +  \dot{e}_{y_{j,2}}  +  \ddot{e}_{y_{j,2}}  \right] + 10$

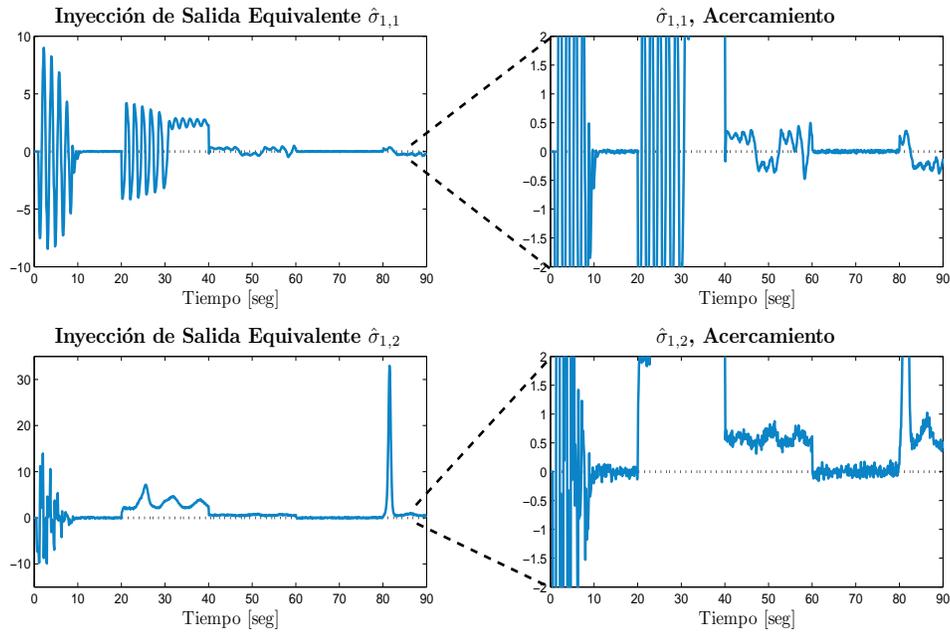


Figura 4.8: Inyección de Salida Equivalente 1 - Método Exacto

Hay que notar que después de un transitorio las inyecciones de salida equivalente son idénticamente igual a cero, solo cuando el modo de operación correspondiente está activado, es decir; por ejemplo, en el intervalo de tiempo  $t \in [0, 20]$  el modo de operación  $\lambda = 1$  está activado, entonces las inyecciones de salida equivalentes  $\sigma_{1,1}$  y  $\sigma_{1,2}$  son cero o están más cerca de cero solo en este modo de operación.

Por lo tanto, la señal de conmutación puede ser reconstruida detectando qué inyección de salida equivalente es idénticamente igual a cero o está más cerca de cero. La lógica propuesta en la Sección 4.5 ec.(4.28) se aplica con el mismo paso de muestreo de las simulaciones.

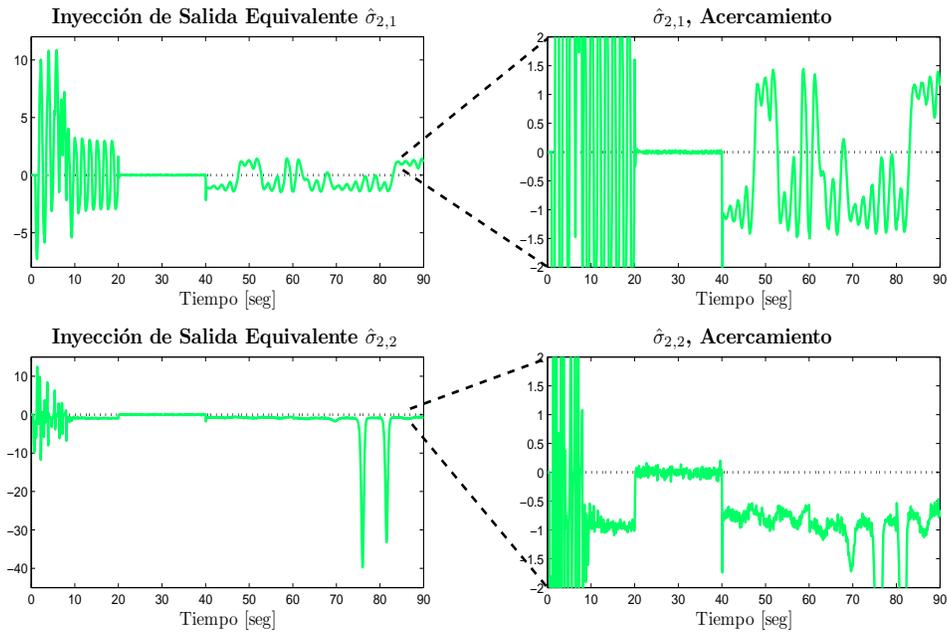


Figura 4.9: Inyección de Salida Equivalente 2 - Método Exacto

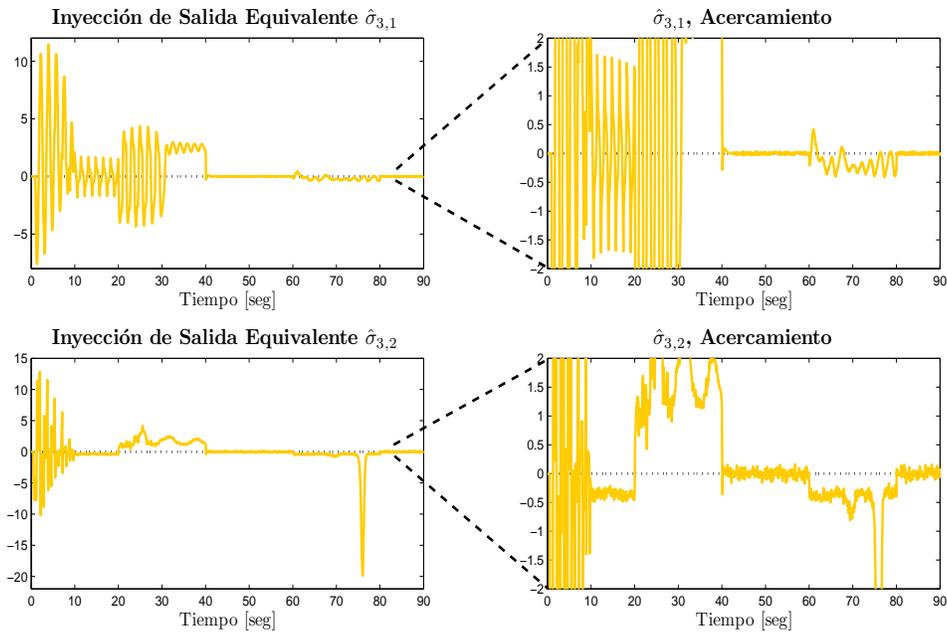
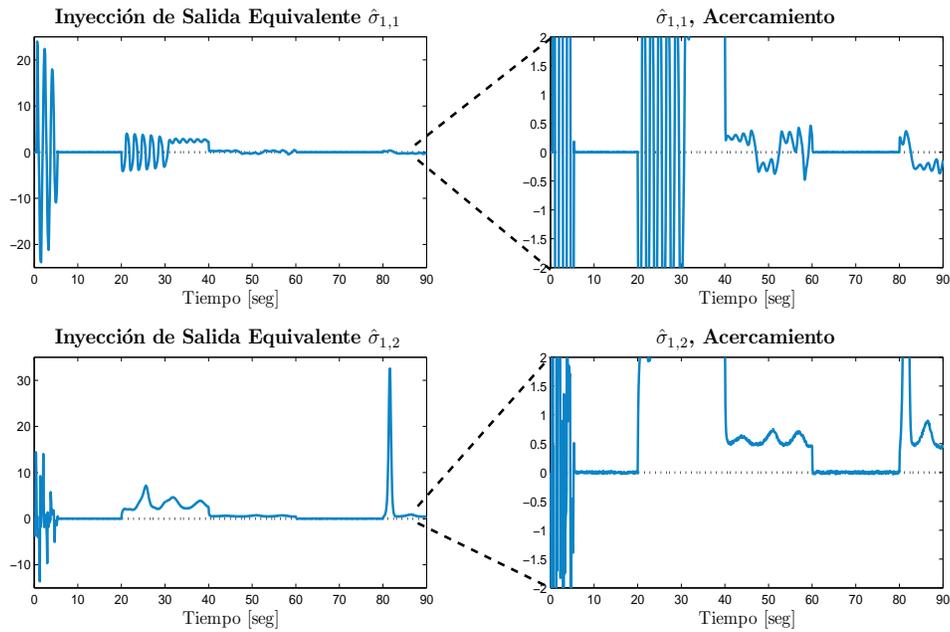
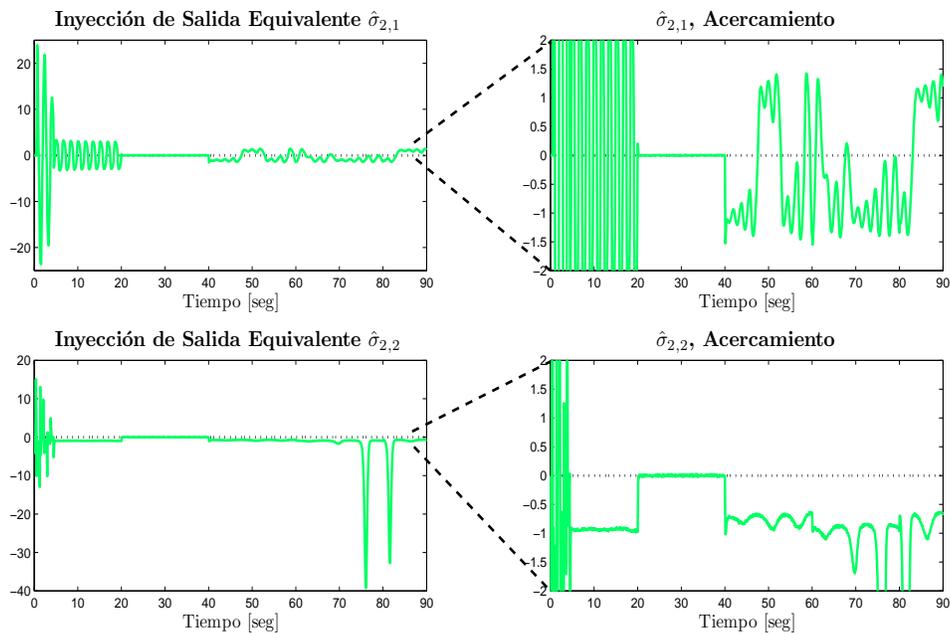


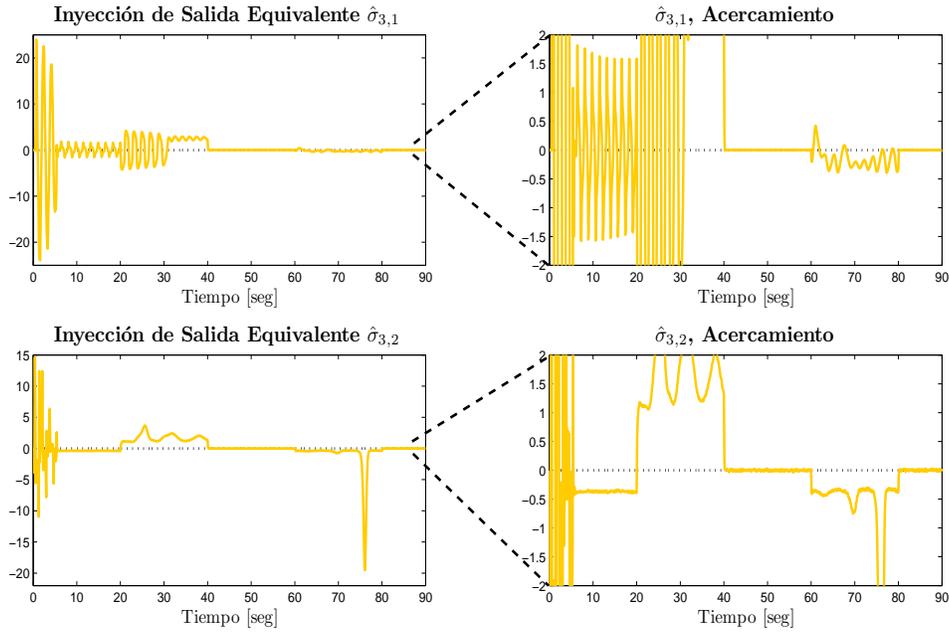
Figura 4.10: Inyección de Salida Equivalente 3 - Método Exacto



**Figura 4.11:** Inyección de Salida Equivalente 1 - Método Aproximado



**Figura 4.12:** Inyección de Salida Equivalente 2 - Método Aproximado



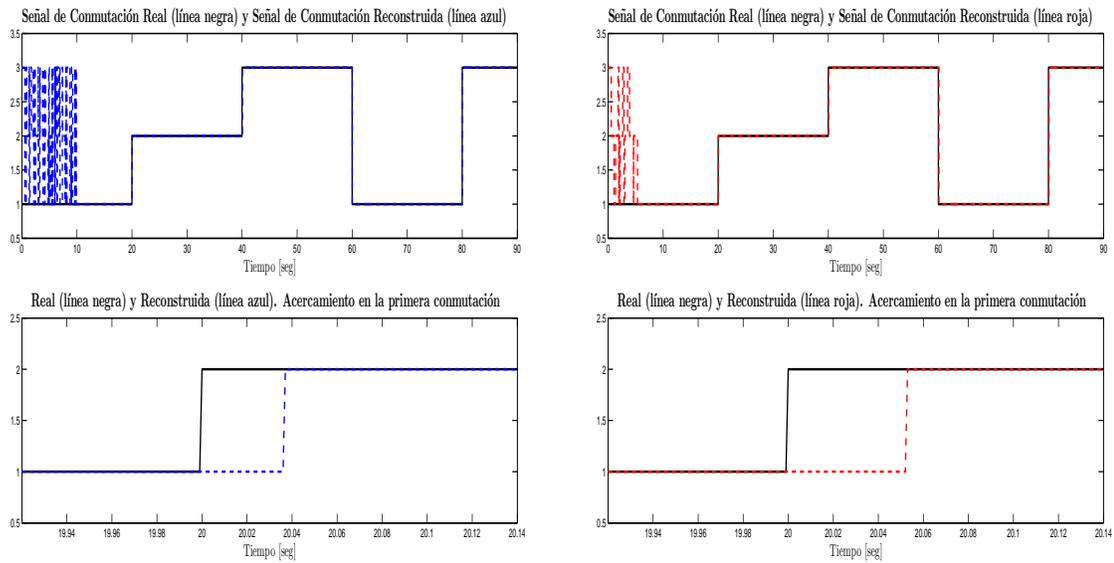
**Figura 4.13:** Inyección de Salida Equivalente 3 - Método Aproximado

Los resultados correspondientes a la reconstrucción de la señal de conmutación, se muestran en la Figura 4.14, empleando los métodos aproximado y exacto, mientras que en la Figura 4.15, se muestra una comparación entre los dos métodos. En ambas figuras las gráficas superiores muestran la reconstrucción de la señal de conmutación y en las gráficas inferiores se muestra un acercamiento en el intervalo de tiempo de la primera conmutación del sistema.

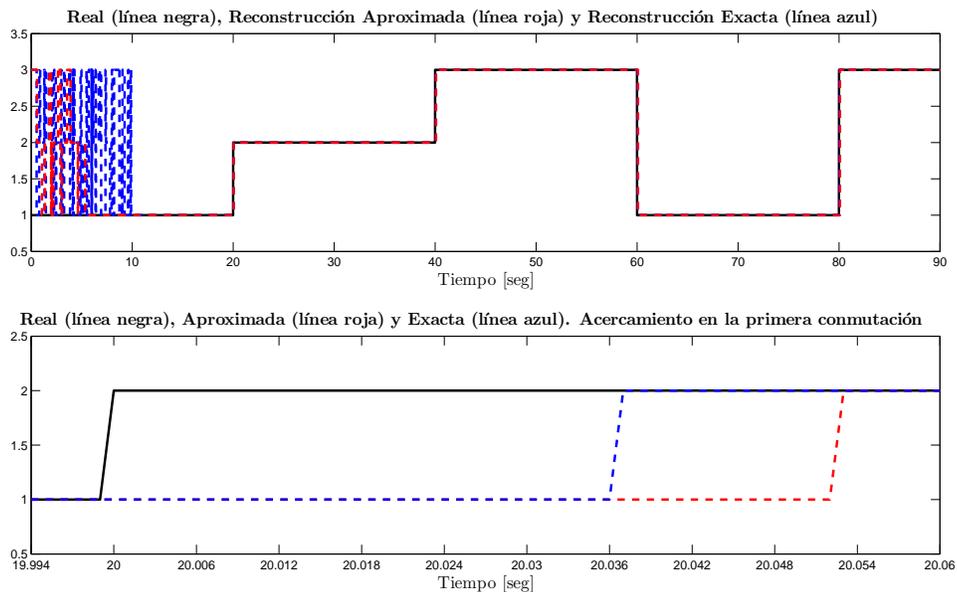
La gráfica inferior de la Figura 4.15 muestra que la duración del transitorio de reconstrucción es de aproximadamente 0.053 segundos usando el método aproximado y 0.037 segundos usando el método exacto, aunque esta duración del transitorio puede ser arbitrariamente reducido seleccionando valores más grandes para los términos de corrección.

**Nota 4.8.** Cabe señalar que para este ejemplo no se muestran las gráficas del comportamiento de las ganancias de los términos de corrección, pero estas tienen un comportamiento muy similar a las del ejemplo del Capítulo 3, es decir, se adaptan en función del error de observación de salida y sus derivadas, disminuyendo una vez que el error de observación de salida ha convergido.

Concluyendo, se ha mostrado que el esquema de observación propuesto es capaz de reconstruir tanto el estado continuo como la señal de conmutación del sistema conmutado, exactamente y en tiempo finito. Por otro lado, se mostró la reconstrucción de la señal de conmutación usando las dos maneras de recuperar la inyección de salida equivalente (Métodos “Exacto” y “Aproximado”), obteniendo buenos resultados para ambos métodos.



**Figura 4.14:** Reconstrucción de la Señal de Conmutación (Lado Izquierdo - Método Exacta, Lado Derecho - Método Aproximado)



**Figura 4.15:** Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción

# Reconstrucción de Entradas Desconocidas en Sistemas No Lineales

---

En el presente capítulo se propone un esquema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales haciendo uso; fundamentalmente, de las propiedades de la inyección de salida equivalente del esquema de observación para sistemas no lineales, propuesto en el Capítulo 3. Se establecen condiciones que permiten la reconstrucción de las entradas desconocidas por medio de la inyección de salida equivalente. Finalmente, los resultados del esquema de reconstrucción de entradas desconocidas son ilustrados a través de simulaciones para el mismo ejemplo académico del Capítulo 3.

## 5.1. Planteamiento del Problema

Una de las principales características de los observadores por modos deslizantes es la posibilidad de utilizar la inyección de salida equivalente para tareas de reconstrucción de entradas desconocidas y/o identificación de parámetros (ver [Davila et al., 2006] y [Davila et al., 2009a]). A continuación, se presenta un esquema para reconstrucción de entradas desconocidas, basado en el esquema de observación de estado para sistemas no lineales del Capítulo 3.

Considere el siguiente caso particular del sistema (3.1):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + Dw(x, t) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde el término  $w(x, t) = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^p$  representa las incertidumbres y/o entradas desconocidas, y se encuentra pre-multiplicado por una matriz de distribución constante y conocida  $D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & D_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Se asume existencia y unicidad de las soluciones para (5.1), en el sentido de Filippov, para todo  $t \geq 0$ .

**Nota 5.1.** En este caso, se quiere reconstruir solo el término  $w(x, t)$ , por lo que se considera constante la matriz de distribución  $D$ . No obstante, si se considera la estructura del sistema (3.1), donde las entradas desconocidas se representan por medio del término  $D(x)w$ , también sería posible; sin ninguna dificultad, reconstruir las entradas desconocidas, sin embargo se reconstruiría todo el término  $D(x)w$ , sin la posibilidad de reconstruir los términos por separado, ya que la matriz de distribución  $D(x)$  puede ser incierta. Por este motivo, resulta más ilustrativa la estructura establecida en (5.1) para el problema de reconstrucción de entradas desconocidas.

El problema de observación del estado para el sistema no lineal, con la estructura (5.1), se resuelve rápidamente, usando los resultados obtenidos en el Capítulo 3. El observador de estado para el sistema (5.1) toma la misma forma que en (3.2) y (3.6), donde  $f(\cdot)$  y  $h(\cdot)$  son copias exactas de las funciones en (5.1). Ahora, se establece una suposición que envuelve a la matriz de distribución de entradas desconocidas y/o incertidumbres  $D$ , similar a la Suposición 3.2.

**Suposición 5.1.** Las funciones  $f$ ,  $h$  y la matriz  $D$  son tales que

$$\begin{bmatrix} dh_1(x)D_1 \\ \vdots \\ dL_{f(x)}^{r_1-2}h_1(x)D_1 \\ \vdots \\ dh_p(x)D_p \\ \vdots \\ dL_{f(x)}^{r_p-2}h_p(x)D_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$dL_{f(x)}^{r_i-1}h_i(x)D_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.3)$$

**Nota 5.2.** Como en la Suposición 3.2, las expresiones (5.2) y (5.3) implican que cada  $w_i(x, t)$  entra en la última fila de cada uno de los bloques.

Finalmente, de los resultados establecidos en el Capítulo 3, se establece el siguiente Lema que resuelve el problema de observación del estado para el sistema no lineal con la estructura (5.1).

**Lema 5.1.** Considere el sistema (5.1) y que las Suposiciones 3.1, 5.1 y 3.3 se satisfacen. Considere el observador como en (3.2) y (3.6), con los términos de corrección  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , diseñados de acuerdo a (3.40), como en el Teorema 3.2. Entonces el estado del sistema (5.1) será estimado exactamente y en tiempo finito.  $\square$

*Demostración.*

La demostración de este Lema consiste en realizar la demostración del Teorema 3.2 considerando que se satisface la Suposición 5.1 y en aplicar los resultados obtenidos en el Capítulo 3 directamente al sistema (5.1), considerando la misma estructura del observador establecida en (3.2) y (3.6).  $\blacksquare$

De esta manera, el problema de observación del estado para el sistema (5.1) queda resuelto. Ahora el objetivo es diseñar un esquema de reconstrucción de entradas desconocidas para el sistema (5.1), usando las propiedades de la inyección de salida equivalente.

## 5.2. Reconstrucción Exacta de Entradas Desconocidas

Para la reconstrucción de entradas desconocidas se usará la misma idea que se estableció para reconstruir la señal de conmutación, en el Capítulo 4.

En estado estable, todos los términos del vector de error de salida  $\varepsilon$  y del error de observación del estado  $e_x$  son idénticamente igual a cero, mientras que los términos  $\dot{e}_{i,r_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$  y  $\dot{e}_x$ , están afectados directamente por los términos de corrección discontinuos. Por lo tanto, estamos en posición de explotar, una vez más, el “*Principio de Inyección de Salida Equivalente*” (ver p. ej. [Edwards and Spurgeon, 1998] y [Utkin et al., 1999]).

La expresión de  $\dot{e}_x$  es

$$\dot{e}_x = f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma - f(x) - Dw(x, t) \quad (5.4)$$

Cuando la estimación del estado es garantizada, (5.4) se convierte en

$$\dot{e}_x = G(\hat{x})\sigma - Dw(x, t) \quad (5.5)$$

De esta forma, los términos de corrección  $\sigma$  toman el valor de la inyección de salida equivalente  $\sigma_{eq}$ , es decir

$$G(\hat{x})\sigma_{eq} = Dw(x, t) \quad (5.6)$$

lo cual deriva de hacer  $\dot{e}_x = 0$  (*método de control equivalente* [Utkin et al., 1999]). Si los términos de corrección  $\sigma_{i_{eq}}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , estuvieran disponibles, entonces la siguiente relación permitiría reconstruir las entradas desconocidas y/o incertidumbres  $w(x, t)$ :

$$w_i(x, t) = D^+ G(\hat{x})\sigma_{i_{eq}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.7)$$

donde  $D^+ = (D^T D)^{-1} D^T$ , es la matriz pseudoinversa de  $D$  [Poznyak, 2008].

Considere las entradas desconocidas  $w_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  señales Lipschitz en  $x$ , continuas en  $t$ . Bajo esta condición y considerando que la inyección de salida equivalente es recuperada mediante el “*Método Exacto*”, establecido en la Sección 4.5.1, donde se diseña el siguiente algoritmo casi continuo no homogéneo “*augmentado*”:

$$\dot{\sigma}_i = -\alpha_i \Xi_i \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i)} \right) \Psi_{i r_i, r_i+1} \left( e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i)} \right), \quad i = 1, \dots, p \quad (5.8)$$

las entradas desconocidas pueden ser reconstruidas exactamente y en tiempo finito, usando la expresión (5.7) con los términos  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  calculados mediante (5.8) en lugar de  $\sigma_{i_{eq}}$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

**Nota 5.3.** Hay dos consecuencias fundamentales con esta manera de realizar la reconstrucción exacta de entradas desconocidas. La primera, la suavidad que se requiere en las entradas desconocidas. La segunda, se requieren las derivadas  $e_{y_i}^{(r_i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , esto implica que se debe de usar un diferenciador por modos deslizantes de orden mayor para la reconstrucción de entradas desconocidas.

**Nota 5.4.** Como se menciona en la Sección 4.5.1, el algoritmo casi-continuo no homogéneo “aumentado” estabiliza la dinámica del error de observación de salida en tiempo finito. Para ilustrar esta afirmación, en el ejemplo de simulación se mostrarán los resultados de la observación del estado usando el algoritmo “aumentado”.

### 5.3. Reconstrucción Aproximada de Entradas Desconocidas

Para realizar la reconstrucción aproximada de entradas desconocidas se emplea el “Método Aproximado” para recuperar la inyección de salida equivalente, establecido en la Sección 4.5.2, donde se considera un proceso de filtración, usando los siguientes estimadores de inyección de salida equivalente:

$$\tau_i \dot{\hat{\sigma}}_{i_{eq}} = \sigma_i - \hat{\sigma}_{i_{eq}}, \quad i = 1, \dots, p \quad (5.9)$$

Por lo tanto, implementando los filtros (5.9) se puede alcanzar un estimado de las entradas desconocidas por medio de la expresión (5.7), con el estimado de la inyección de salida equivalente  $\hat{\sigma}_{i_{eq}}$ , en lugar de  $\sigma_{i_{eq}}$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

### 5.4. Ejemplo y Simulaciones

#### 5.4.1. Observación del Estado vía Algoritmo “Aumentado”

Considere el sistema no lineal de 5to orden con entradas desconocidas, del Capítulo 3:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2x_1 - x_2 + x_5 \\ x_1 \\ -x_3^3 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ (x_2 - 4) \frac{2x_5 + \text{sen}(x_5)}{2 + \text{cos}(x_5)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

donde las entradas desconocidas e incertidumbres son:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= \text{sen}(3.18t) + 2\text{sen}(7.32t) + 0.5\text{sen}(0.79t) + 2x_1 \\ w_2(x, t) &= 3\text{sen}(0.5t) + 0.5\text{cos}(t) + x_3 \end{aligned}$$

El observador implementado tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -2\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_5 \\ \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_3^3 - 2\hat{x}_3 - \hat{x}_4 \\ \hat{x}_3 \\ (\hat{x}_2 - 4) \frac{2\hat{x}_5 + \text{sen}\hat{x}_5}{2 + \text{cos}\hat{x}_5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix}$$

donde las entradas desconocidas e incertidumbres no son modeladas, y los términos de corrección se diseñan mediante el siguiente algoritmo “*aumentado*”:

$$\dot{\sigma}_1 = -70\Xi_1(e_{y_1}, \dot{e}_{y_1}, \ddot{e}_{y_1}, e_{y_1}^{(3)})\Psi_{13,4} \quad (5.12)$$

$$\dot{\sigma}_2 = -30\Xi_2(e_{y_2}, \dot{e}_{y_2}, \ddot{e}_{y_2})\Psi_{22,3} \quad (5.13)$$

donde

$$\Psi_{13,4} = \left[ e_{y_1}^{(3)} + 3.5 \left[ \ddot{e}_{y_1} + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_1}| + 0.5 |e_{y_1}|^{\frac{3}{4}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \dot{e}_{y_1} + 0.5 |e_{y_1}|^{\frac{3}{4}} \text{sign}(e_{y_1}) \right) \right] \times \right. \\ \left. \left[ |\ddot{e}_{y_1}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_1}| + 0.5 |e_{y_1}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] \div \\ \left[ |e_{y_1}^{(3)}| + 3.5 \left[ |\ddot{e}_{y_1}| + 1.5 \left( |\dot{e}_{y_1}| + 0.5 |e_{y_1}|^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Psi_{22,3} = \frac{\ddot{e}_{y_2} + \left[ 5.5 \left( |\dot{e}_{y_2}| + |e_{y_2}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_2} + |e_{y_2}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_2}) \right) \right]}{\left[ |\ddot{e}_{y_2}| + 5.5 \left( |\dot{e}_{y_2}| + |e_{y_2}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

con  $e_{y_1} = \hat{x}_2 - y_1$  y  $e_{y_2} = \hat{x}_4 - y_2$ , y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (3.28), usando los parámetros de la Tabla 5.1.

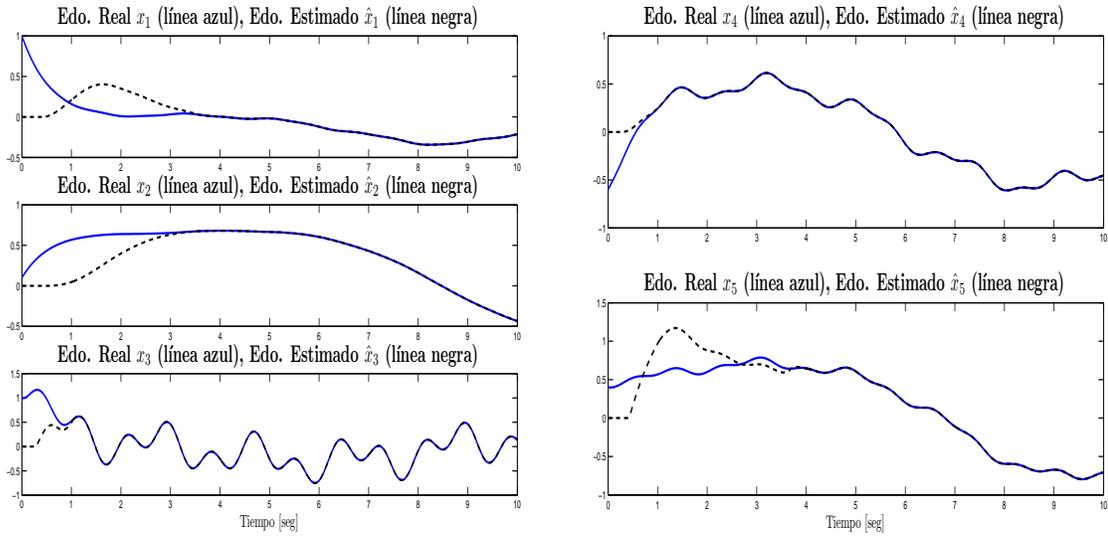
Los estados reales y estimados usando el algoritmo “*aumentado*” se muestran en la Figura 5.3. La convergencia del error se presenta en la Figura 5.4. En ambas figuras se observa claramente la convergencia exacta y en tiempo finito.

### 5.4.2. Reconstrucción de Entradas Desconocidas

Para la reconstrucción exacta de entradas desconocidas se usan los términos de corrección  $\sigma_i$ , dados por las expresiones (5.12) y (5.13).

**Tabla 5.1:** Parámetros de los Términos de Corrección

Parámetro	$i = 1$	$i = 2$
$r_i$	4	3
$k_{i,0}$	3	2
$k_{i,1}$	2	1.2
$k_{i,2}$	1.5	1.1
$k_{i,3}$	1.1	—
$L_{0i}$	1070	1070
$L_i(t)$	$10 (\ \hat{\varepsilon}_1 + 15\ )$	$10 (\ \hat{\varepsilon}_2 + 5\ )$
$\Xi_i(e_{y_i}, \dots, e_{y_i}^{(r_i)})$	$7 [ e_{y_1}  +  \dot{e}_{y_1}  +  \ddot{e}_{y_1} ] + 1.5$	$3 [ e_{y_2}  +  \dot{e}_{y_2}  +  \ddot{e}_{y_2} ] + 3$

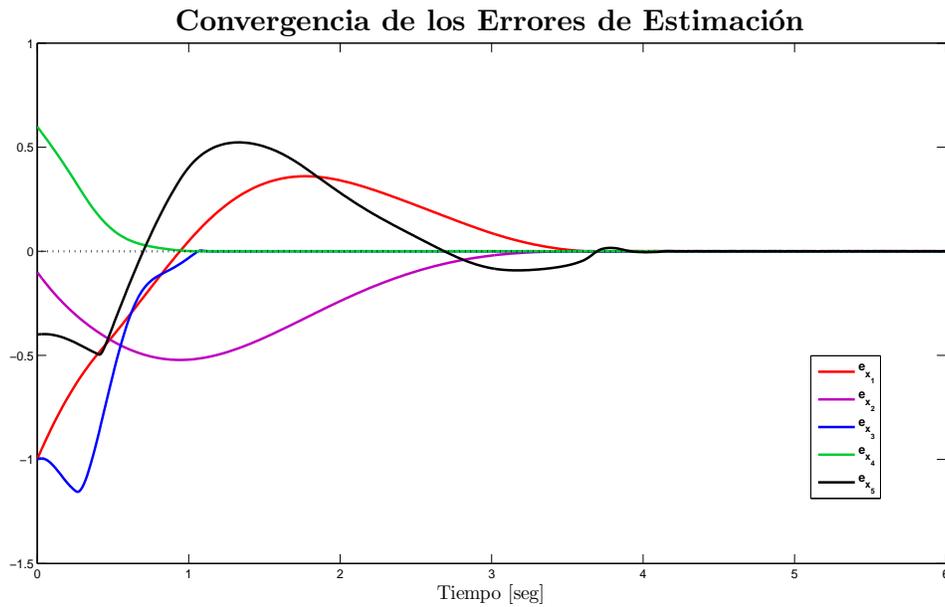

**Figura 5.1:** Reconstrucción del Estado vía Algoritmo “Aumentado”

Para la reconstrucción aproximada se emplean los siguientes estimadores de inyección de salida equivalente:

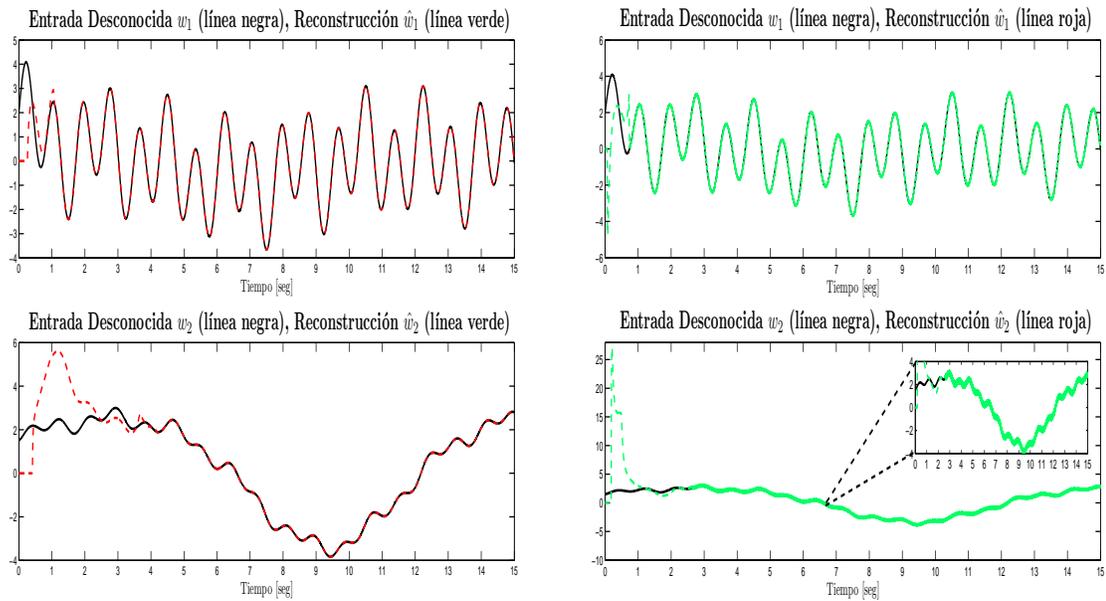
$$\tau_1 \dot{\hat{\sigma}}_{1eq} = \sigma_1 - \hat{\sigma}_{1eq}, \quad \text{con } \tau_1 = 0.01 \quad (5.14)$$

$$\tau_2 \dot{\hat{\sigma}}_{2eq} = \sigma_2 - \hat{\sigma}_{2eq}, \quad \text{con } \tau_2 = 0.008 \quad (5.15)$$

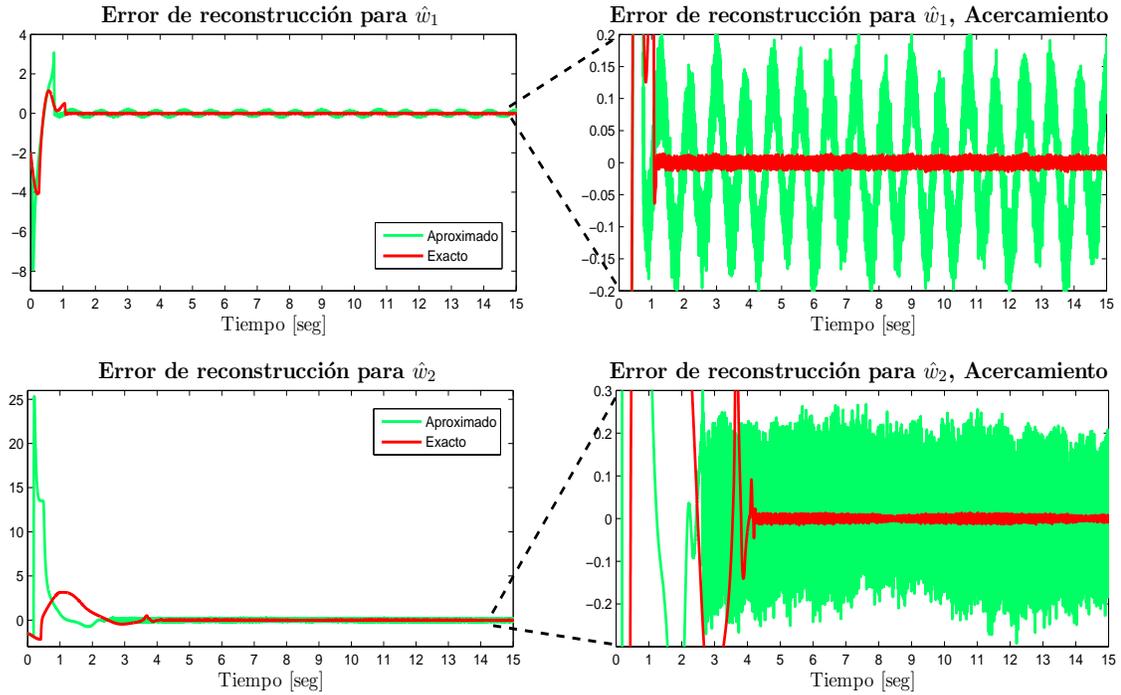
La reconstrucción de las entradas desconocidas es realizada por medio de la relación (5.7). Los resultados de la reconstrucción exacta y aproximada se muestran en la Figura 5.3, mientras que en la Figura 5.4 se muestra una comparación entre los errores de reconstrucción para ambos métodos, donde se puede observar claramente que la reconstrucción por medio del método exacto presenta los mejores resultados en exactitud, aunque el tiempo de convergencia es un poco mayor que con el método aproximado.



**Figura 5.2:** Convergencia del Error de Estimación vía Algoritmo “Aumentado”



**Figura 5.3:** Reconstrucción de Entradas Desconocidas (Lado Izquierdo - Reconstrucción Exacta, Lado Derecho - Reconstrucción Aproximada)



**Figura 5.4:** Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción

Para concluir, se han mostrado dos formas diferentes para reconstruir las entradas desconocidas. La primera, usando el “*Método Exacto*”, donde es necesario implementar un algoritmo casi-continuo no homogéneo “*augmentado*”. La segunda, usando el “*Método Aproximado*”, donde es necesario realizar un proceso de filtración para los términos de corrección. Ambos métodos presentan buenos resultados, y de la misma forma, presentan ventajas y desventajas. Con el “*Método Exacto*” se tiene la ventaja de la reconstrucción “*exacta*”, por otro lado, su desventaja es que hay que “*augmentar*” el orden de los algoritmos por modos deslizantes. En cuanto al “*Método Aproximado*”, su ventaja radica en la facilidad de implementación, solo basta con diseñar un filtro de primer orden para poder reconstruir las entradas desconocidas, por el otro lado, presenta la desventaja de ser una “*aproximación*” de dichas entradas desconocidas.

# Reconstrucción de Entradas Desconocidas en Sistemas No Lineales Conmutados

---

En el presente capítulo se propone un esquema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales conmutados haciendo uso de las propiedades de la inyección de salida equivalente del esquema propuesto en el capítulo anterior. Se establecen condiciones que permiten la detección y reconstrucción de las entradas desconocidas por medio de la inyección de salida equivalente. Finalmente, los resultados del esquema de reconstrucción de entradas desconocidas son ilustrados a través de simulaciones para el ejemplo académico del Capítulo 4.

## 6.1. Planteamiento del Problema

Considere el siguiente sistema no lineal conmutado con entradas desconocidas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{\lambda(t)}(x) + Dw(x, t) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\lambda(t) \in \{1, 2, \dots, q\}$  es la señal de conmutación,  $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^p$  el vector de salidas,  $f_{\lambda(t)}(x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h(x) = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_p \end{bmatrix} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  campos vectoriales suaves que representan la parte nominal del sistema que es conocida;  $w(x, t) = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_p \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^p$  representa las entradas desconocidas y  $D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & D_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es una matriz de distribución constante y conocida.

El objetivo es diseñar un esquema de detección y reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales conmutados, basado en el esquema de reconstrucción de entradas desconocidas establecido en el Capítulo 5.

**Nota 6.1.** *Para alcanzar el objetivo se propone un esquema basado en un enfoque residual, que hace uso de la información de la inyección de salida equivalente.*

## 6.2. Generador de Residuos

Considere los siguientes “ $q$ ” generadores de residuos:

$$\dot{\hat{x}}_j = f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j \quad (6.2)$$

$$r_j = G(\hat{x}_j)\sigma_{j \in q} \quad (6.3)$$

donde  $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) es el vector de estados estimados, el vector de salidas estimadas es  $\hat{y}_j \in \mathbb{R}^p$ ,  $G_j(\hat{x}) = \begin{bmatrix} g_{j,1} & \cdots & g_{j,p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de distribución de los términos de corrección  $\sigma_j \in \mathbb{R}^p$  y  $r_j$  son los residuos.

**Nota 6.2.** Llámese residuo, a cierta variable, en este caso  $r_j$ , que permite determinar si existe o no alguna entrada desconocida.

En el caso nominal, libre de entradas desconocidas, los residuos deben ser igual a cero, o lo más cerca posible de cero, y diferentes de cero, o la más significativamente diferentes de cero cuando la entrada desconocida este presente.

Es claro que estos generadores de residuos tienen la misma estructura que los observadores propuestos en el Capítulo 4, y por supuesto son diseñados de acuerdo a lo establecido en los Capítulos 3 y 4, respectivamente.

## 6.3. Esquema de Detección y Reconstrucción de Entradas Desconocidas

En esta sección se establece la manera de realizar la detección, localización y reconstrucción de entradas desconocidas a través de la inyección de salida equivalente. Primero, se establece una forma de realizar detección y localización de entradas desconocidas DLED (localización, en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado aparece la entrada desconocida) y después se establecen dos formas de realizar detección, localización y reconstrucción de entradas desconocidas DLRED (localización, en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado y además en que estado aparece la entrada desconocida).

### 6.3.1. Detección y Localización

En estado estable, todos los términos del vector  $\varepsilon_j$  y  $e_{x_j}$  son idénticamente igual a cero, mientras que los términos  $\dot{e}_{x_j}$ ,  $i = 1, \dots, p$  están afectados directamente por los términos de corrección discontinuos.

De esta manera, la expresión de  $\dot{e}_{x_j}$ ,  $i = 1, \dots, p$  es

$$\dot{e}_{x_j} = f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j - f_{\lambda^*}(\hat{x}_{\lambda^*} - e_{x_{\lambda^*}}) - Dw(x, t) \quad (6.4)$$

En el momento en el cual la estimación exacta del estado es alcanzada, (6.4) se convierte en

$$\dot{e}_{x_j} = f_j(\hat{x}_j) + G_j(\hat{x}_j)\sigma_j - f_{\lambda^*}(\hat{x}_{\lambda^*}) - Dw(x, t) \quad (6.5)$$

Entonces los términos de corrección  $\sigma_j$  toman el valor de la inyección de salida equivalente  $\sigma_{j_{eq}}$ , es decir

$$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} = f_{\lambda^*}(\hat{x}_{\lambda^*}) - f_j(\hat{x}_j) + Dw(x, t) \quad (6.6)$$

lo cual deriva de hacer  $\dot{e}_{x_{\lambda^*}} = 0$ . De este modo, se puede plantear la siguiente suposición para después establecer la condición de detectabilidad de entradas desconocidas.

**Suposición 6.1.** *Existe un tiempo  $\tau_d > 0$  (usualmente llamado “dwell time”) que satisface  $t_{i+1} - t_i \geq \tau_d \quad \forall i$  donde  $t_i$  con  $i = 0, 1, \dots$  son los tiempos de conmutación suficientemente grande tal que permite reconstruir la señal de conmutación  $\lambda(t)$  antes de que la entrada desconocida  $Dw(x, t)$  aparezca.*

Asumiendo que la Suposición 5.1 se satisface, y que el modo de operación es distinguible (de acuerdo a la “Condición de Distinguibilidad del Modo de Operación” establecida en el Capítulo 4), entonces el modo de operación del sistema puede ser reconstruido durante el periodo de tiempo  $\tau_d$ .

Como una consecuencia del uso exclusivo de modos deslizantes, la condición de detectabilidad de entradas desconocidas se puede expresar en términos de la inyección de salida equivalente de acuerdo a lo siguiente:

**Condición de Detectabilidad de Entradas Desconocidas.** *Las entradas desconocidas son detectables, por medio de la inyección de salida equivalente, siempre que la siguiente expresión se satisfaga:*

$$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \neq 0, \quad \forall j = 1, \dots, q \quad (6.7)$$

◇

La condición anterior puede entenderse mejor de acuerdo a la siguiente tabla:

**Tabla 6.1:** Condición de Detectabilidad de ED

Modo de Operación	Si No Hay ED	Si Hay ED
$j = \lambda^*$	$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \equiv 0$	$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \neq 0$
$\forall j \neq \lambda^*$	$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \neq 0$	$G_j(\hat{x}_j)\sigma_{j_{eq}} \neq 0$

**Nota 6.3.** *Si no existe entrada desconocida las inyecciones de salida equivalente correspondientes serán idénticamente igual a cero para  $j = \lambda^*$  y diferentes de cero  $\forall j \neq \lambda^*$ , mientras que cuando las inyecciones de salida equivalente correspondientes sean diferentes de cero, independientemente del modo de operación del sistema, **se sabrá que una entrada desconocida esta presente**, y del conocimiento previo de la señal de conmutación  $\lambda(t)$  podremos saber en que dinámica del sistema conmutado ha ocurrido.*

Hasta este punto, con base en lo anterior, el esquema propuesto puede realizar DLED (localización, en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado aparece la entrada desconocida). En la siguiente sección se establecen las condiciones para que el esquema propuesto pueda realizar DLRED.

### 6.3.2. Detección, Localización y Reconstrucción

Una vez que la entrada desconocida ha sido detectada, se pueden establecer, con ciertas condiciones, dos casos particulares con los que el esquema de detección de entradas desconocidas propuesto puede realizar detección, localización (en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado y en que estado aparece la entrada desconocida) y reconstrucción de las mismas.

#### 1er Caso de Detección, Localización y Reconstrucción

Si el sistema no lineal con entradas desconocidas (6.1) satisface los siguientes puntos:

1. Satisface la Suposición 5.1, es decir, cada entrada desconocida  $w_i(x, t)$  entra en la ultima fila de cada uno de los bloques, y
2. No vuelve a conmutar después de que las entradas desconocidas aparecen.

Entonces, la entrada desconocida puede ser localizada y reconstruida por medio de la siguiente relación

$$w(x, t) = D^+ G_{\lambda^*}(\hat{x}_{\lambda^*}) \sigma_{\lambda_{eq}^*} \quad (6.8)$$

con  $D^+ = (D^T D)^{-1} D^T$ .

Las inyecciones de salida equivalente son recuperadas por medio de alguno de los métodos establecidos en el Capítulo 4 (“*Método Exacto*” y “*Aproximado*”). Cabe mencionar que si se emplea el método exacto para reconstruir las entradas desconocidas  $w_i(x, t)$ , estas deben ser suaves, en otras palabras, deben satisfacer la condición de Lipschitz.

**Nota 6.4.** *De este modo, se sabe que estados del sistema no lineal conmutado son afectados por las entradas desconocidas, que obviamente, debido a la Suposición 5.1, serán aquellos estados que estén acoplados a los términos de corrección o a la inyección de salida equivalente.*

#### 2do Caso de Detección, Localización y Reconstrucción

Si el sistema no lineal con entradas desconocidas (6.1) satisface los siguientes puntos:

1. Satisface la Suposición 5.1, es decir, cada entrada desconocida  $w_i(x, t)$  entra en la ultima fila de cada uno de los bloques.

2. La señal de conmutación  $\lambda(t)$  es una señal periódica, es decir  $\lambda(t) = \lambda(t + T)$  con  $T$  el periodo de la señal de conmutación, y
3. El sistema sigue conmutando después de que las entradas desconocidas aparecen.

Entonces, si somos capaces de reconstruir el modo de operación en un periodo completo de la señal de conmutación, la entrada desconocida puede ser localizada y reconstruida por medio de la relación (6.8), y del conocimiento total de la señal de conmutación.

Resumiendo, en la Tabla 6.2 se enumeran las condiciones para la DLED en el caso más general. Por otro lado, en la Tabla 6.3 se enumeran las condiciones para que la DLRED pueda llevarse acabo usando el esquema propuesto.

**Tabla 6.2:** Condiciones para el Esquema General de DLED

<b>Detección y Localización</b>
1.- Existe Entrada Desconocida (ED) $w(x, t)$ .
2.- Existe $\tau_d > 0$ que permite reconstruir $\lambda(t)$ antes de que aparezca la ED.
3.- El sistema sigue conmutando después de que aparece la ED.
$\Rightarrow$ <b>La ED <math>w(x, t)</math> solo es detectada y localizada.</b>

**Tabla 6.3:** Condiciones para el Esquema de DLRED

<b>Detección, Localización y Reconstrucción</b>	
<i>1er Caso</i>	<i>2do Caso</i>
1.- Existe ED $w(x, t)$ y satisface la Suposición 5.1.	1.- Existe ED $w(x, t)$ y satisface la Suposición 5.1.
2.- Existe $\tau_d > 0$ que permite reconstruir $\lambda(t)$ antes de que aparezca la ED.	2.- $\lambda(t)$ es periódica y reconstruida.
3.- El sistema no conmuta de nuevo después de que aparece la ED.	3.- El sistema sigue conmutando después de que aparece la ED.
$\Rightarrow$ <b>La ED <math>w(x, t)</math> es detectada localizada y reconstruida.</b>	$\Rightarrow$ <b>La ED <math>w(x, t)</math> es detectada localizada y reconstruida.</b>

El esquema propuesto para la detección, localización y reconstrucción de entradas desconocidas toma la estructura descrita en la Figura 6.1.

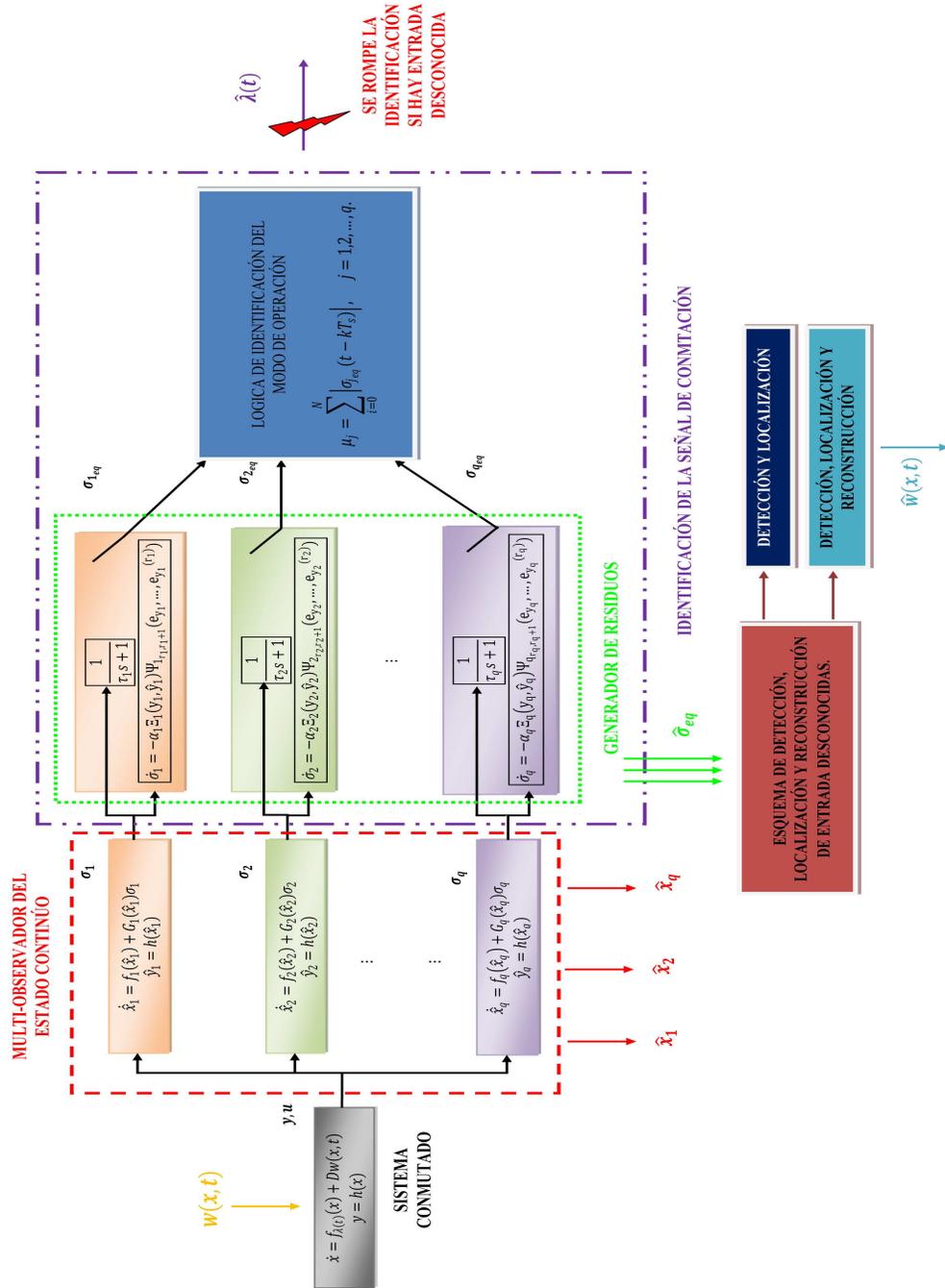


Figura 6.1: Esquema de Detección, Localización y Reconstrucción de Entradas Desconocidas

## 6.4. Ejemplo y Simulaciones

Considere de nuevo el sistema caótico “Chua-Rössler” del Capítulo 4, ahora con entradas desconocidas:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda(t)}c_{\lambda(t)}x_1 + \alpha_{\lambda(t)}x_2 - \alpha_{\lambda(t)}x_1^3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta_{\lambda(t)}x_2 \\ -x_5 - x_6 + x_1 \\ x_4 + a_{\lambda(t)}x_5 \\ b_{\lambda(t)} + x_6(x_4 - d_{\lambda(t)}) \end{bmatrix} + Dw(x, t) \quad (6.9)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

donde  $\lambda(t) \in \{1, 2, 3\}$  y los parámetros  $a_{\lambda(t)}$ ,  $b_{\lambda(t)}$ ,  $c_{\lambda(t)}$ ,  $d_{\lambda(t)}$ ,  $\alpha_{\lambda(t)}$  y  $\beta_{\lambda(t)}$  son parámetros constantes que toman los valores de la Tabla 6.4.

**Tabla 6.4:** Parámetros del Sistema Conmutado.

Parámetro	$\lambda(t) = 1$	$\lambda(t) = 2$	$\lambda(t) = 3$
$a_{\lambda(t)}$	0.2	0.2	0.2
$b_{\lambda(t)}$	0.2	1	0.5
$c_{\lambda(t)}$	-0.143	-0.5	-0.2
$d_{\lambda(t)}$	6	2	4
$\alpha_{\lambda(t)}$	10	8	12
$\beta_{\lambda(t)}$	16	16	16

Las condiciones iniciales del sistema son  $x(0) = [3.9 \quad -3.2 \quad 0.03 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$ , las cuales hacen que el sistema (caso nominal libre de entradas desconocidas) se comporte como se muestra en la Figura 6.2, considerando que la señal de conmutación  $\lambda(t)$  tiene la forma que se muestra en la Figura 6.3, donde se puede ver que el sistema presenta un cambio de modo de operación cada 20 segundos.

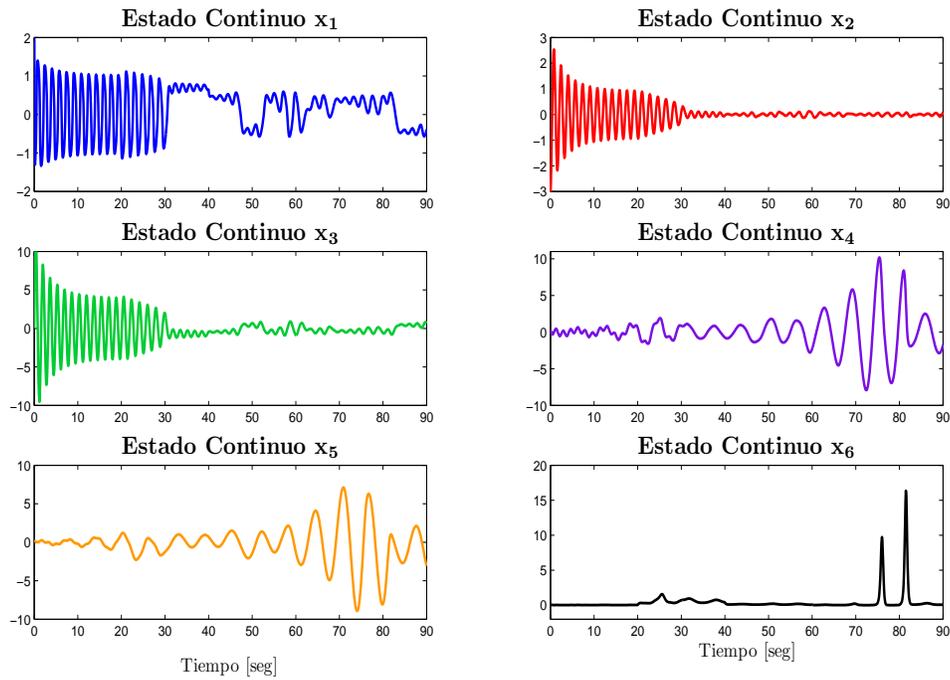
### 6.4.1. Esquema DLEF

A continuación se diseña el esquema DLEF para el sistema caótico “Chua-Rössler” (6.9). Considere que las entradas desconocidas, para este ejemplo, tienen la siguiente forma:

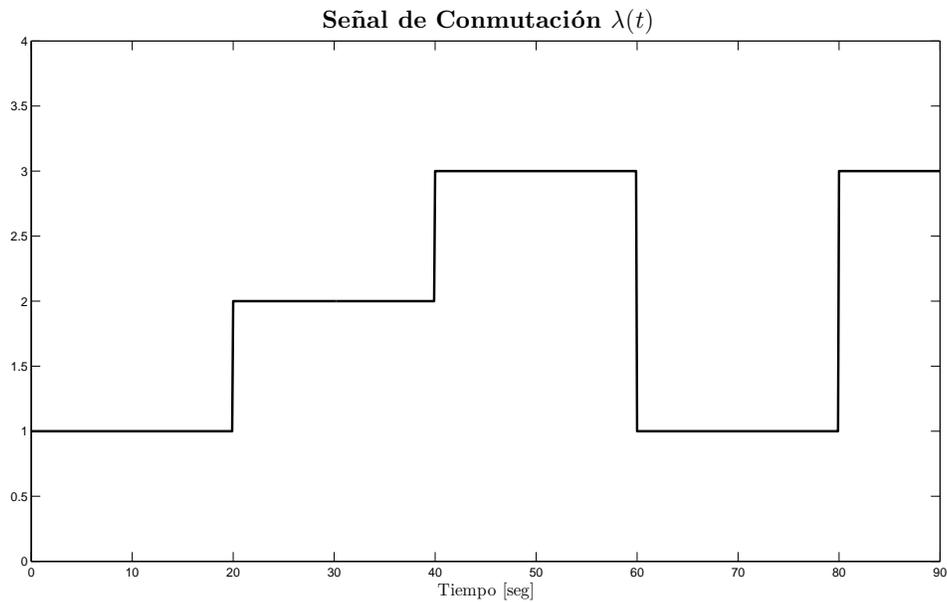
$$w_1(x, t) = 0.5\text{square}(3.18t) + \text{sen}(7.32t) + 0.2\text{sen}(0.79t) + 2x_1 \quad (6.10)$$

$$w_2(x, t) = 0.2\text{square}(0.5t) + 0.3\text{sen}(3.14t) + x_3 \quad (6.11)$$

donde  $\text{square}(\cdot)$  representa una señal cuadrada con ciclo de trabajo del 50 por ciento con frecuencia especificada.

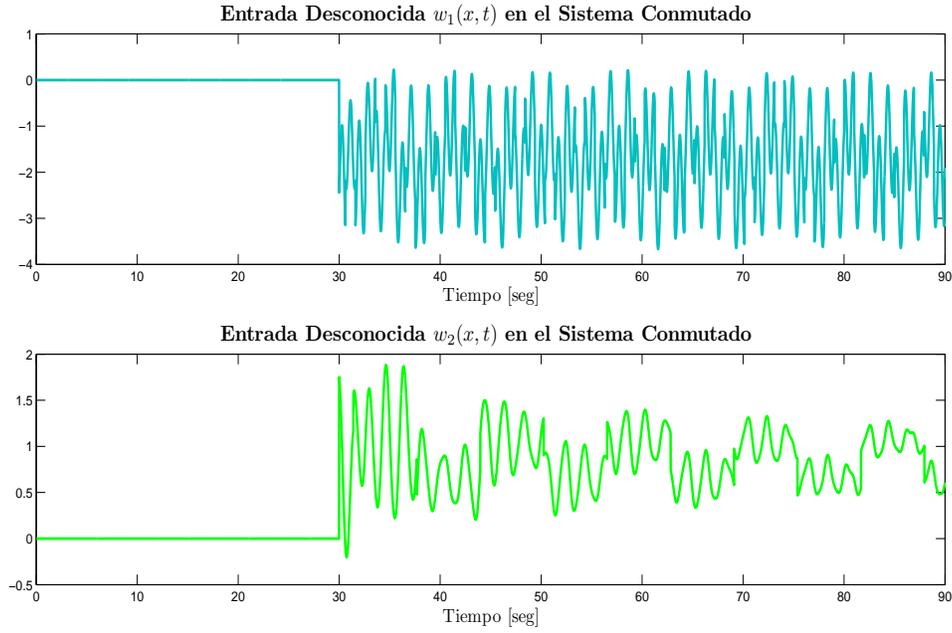


**Figura 6.2:** Trayectorias del Estado Continuo del Sistema Conmutado



**Figura 6.3:** Conmutación en los Modos de Operación

Para efectos ilustrativos considere que las entradas desconocidas aparecen a los 30[seg] de comenzada la simulación. El comportamiento de las entradas desconocidas se muestra en la Figura 6.4.



**Figura 6.4:** Entradas Desconocidas - Esquema DLEF

Considere que las entradas desconocidas  $w(x, t)$  están desacopladas de los términos de corrección de cada observador, es decir, la Suposición 5.1 no se satisface. Por lo tanto se puede considerar que la matriz de distribución  $D$  tiene la siguiente forma:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Y de esta manera, se puede considerar el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda(t)}c_{\lambda(t)}x_1 + \alpha_{\lambda(t)}x_2 - \alpha_{\lambda(t)}x_1^3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta_{\lambda(t)}x_2 \\ -x_5 - x_6 + x_1 \\ x_4 + a_{\lambda(t)}x_5 \\ b_{\lambda(t)} + x_6(x_4 - d_{\lambda(t)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Los observadores se diseñan de la siguiente forma, con  $j = 1, 2, 3$

$$\dot{\hat{x}}_j = \begin{bmatrix} -\alpha_j c_j \hat{x}_{j,1} + \alpha_j \hat{x}_{j,2} - \alpha_j \hat{x}_{j,1}^3 \\ \hat{x}_{j,1} - \hat{x}_{j,2} + \hat{x}_{j,3} \\ -\beta_j \hat{x}_{j,2} \\ -\hat{x}_{j,5} - \hat{x}_{j,6} + \hat{x}_{j,1} \\ \hat{x}_{j,4} + a_j \hat{x}_{j,5} \\ b_j + \hat{x}_{j,6} (\hat{x}_{j,4} - d_j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta_j} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{\beta_j} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{j,1} \\ \sigma_{j,2} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\hat{y}_j = \begin{bmatrix} \hat{x}_{j,3} \\ \hat{x}_{j,5} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Los términos de corrección  $\sigma_{j,1}$  y  $\sigma_{j,2}$  son diseñados como algoritmos casi-continuos no homogéneos de 3er orden:

$$\sigma_{j,1} = -6\Xi_{j,1} \left( e_{y_{j,1}}, \dot{e}_{y_{j,1}}, \ddot{e}_{y_{j,1}} \right) \frac{\ddot{e}_{y_{j,1}} + 19 \left( |\dot{e}_{y_{j,1}}| + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_{j,1}} + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_{j,1}}) \right)}{|\ddot{e}_{y_{j,1}}| + 19 \left( |\dot{e}_{y_{j,1}}| + |e_{y_{j,1}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.15)$$

$$\sigma_{j,2} = -8\Xi_{j,2} \left( e_{y_{j,2}}, \dot{e}_{y_{j,2}}, \ddot{e}_{y_{j,2}} \right) \frac{\ddot{e}_{y_{j,2}} + 10 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{e}_{y_{j,2}} + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \text{sign}(e_{y_{j,2}}) \right)}{|\ddot{e}_{y_{j,2}}| + 10 \left( |\dot{e}_{y_{j,2}}| + |e_{y_{j,2}}|^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6.16)$$

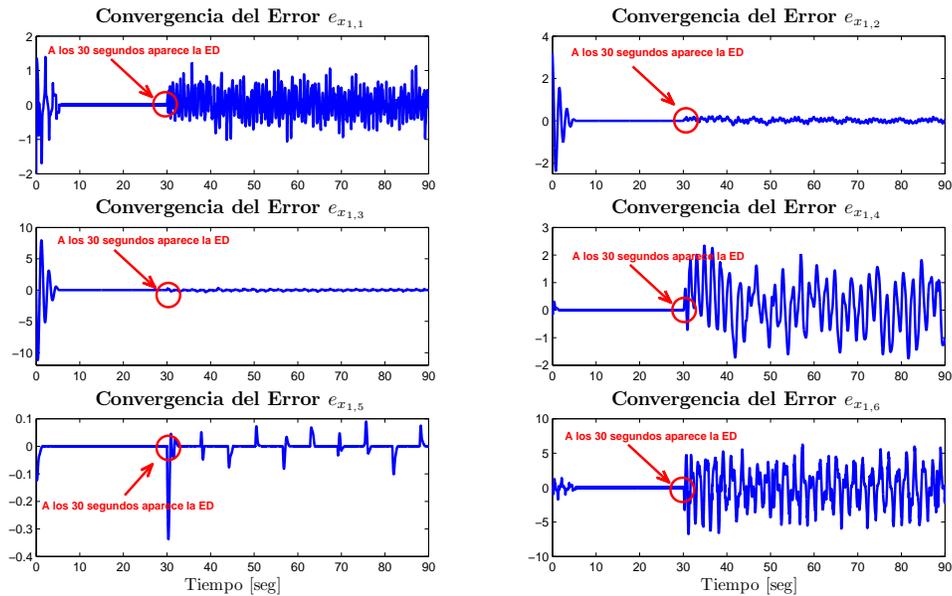
con  $e_{y_{j,1}} = \hat{x}_{j,3} - y_1$  y  $e_{y_{j,2}} = \hat{x}_{j,5} - y_2$ , y con las derivadas de los errores de salida estimadas por el diferenciador (3.28), usando los parámetros de la Tabla 6.5

**Tabla 6.5:** Parámetros de los Términos de Corrección

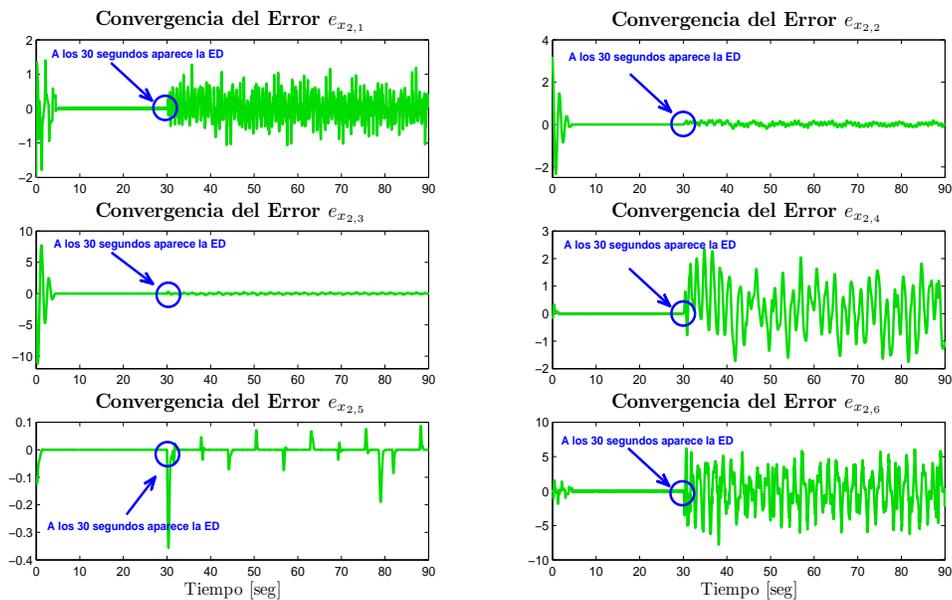
Parámetro	$i = 1$	$i = 2$
$r_{j,i}$	3	3
$k_{j,i^0}$	2	2
$k_{j,i^1}$	1.5	1.5
$k_{j,i^2}$	1.1	1.1
$L_{j,i^0}$	1800	770
$L_{j,i}(t)$	$10 (\ \varepsilon_{j,1}\  + 92.2)$	$10 (\ \varepsilon_{j,2}\  + 17.1)$
$\Xi_{j,i} \left( e_{y_{j,i}}, \dots, e_{y_{j,i}}^{(r_{j,i}-1)} \right)$	$\left[  e_{y_{j,1}}  +  \dot{e}_{y_{j,1}}  +  \ddot{e}_{y_{j,1}}  \right] + 70$	$\left[  e_{y_{j,2}}  +  \dot{e}_{y_{j,2}}  +  \ddot{e}_{y_{j,2}}  \right] + 10$

El comportamiento del error de observación del estado continuo para cada observador se muestra en las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7.

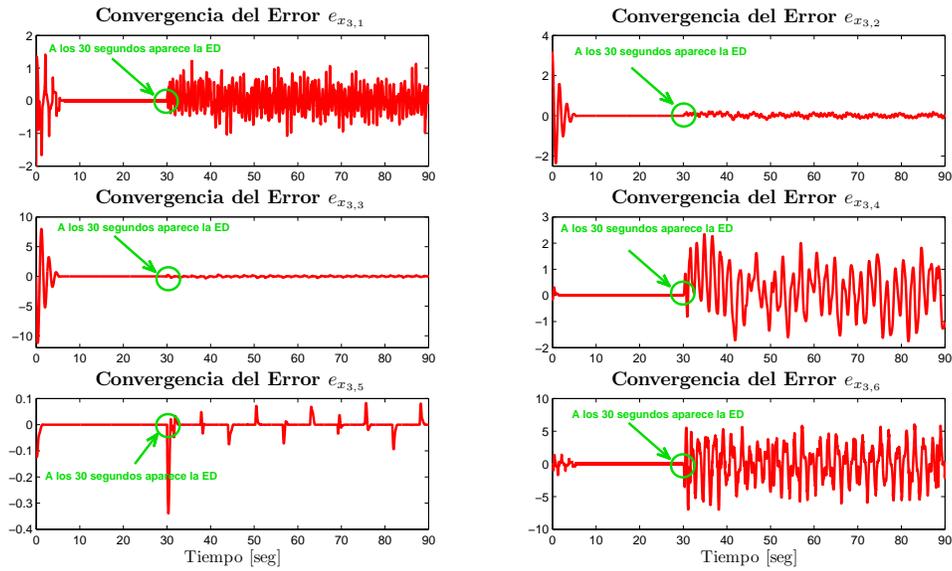
Es claro, de las gráficas de la convergencia del error para cada observador, que la estimación correcta se pierde para cada uno de los observadores, pero ¿como se puede saber que este comportamiento no es debido a la propia conmutación del sistema? La respuesta a esta pregunta se aprecia en la Figura 6.8.



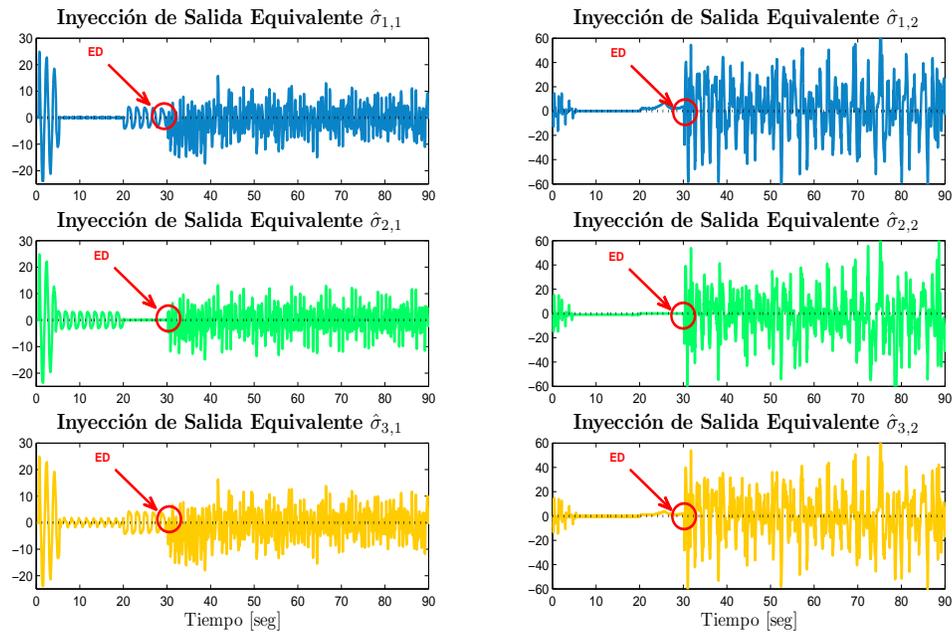
**Figura 6.5:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF



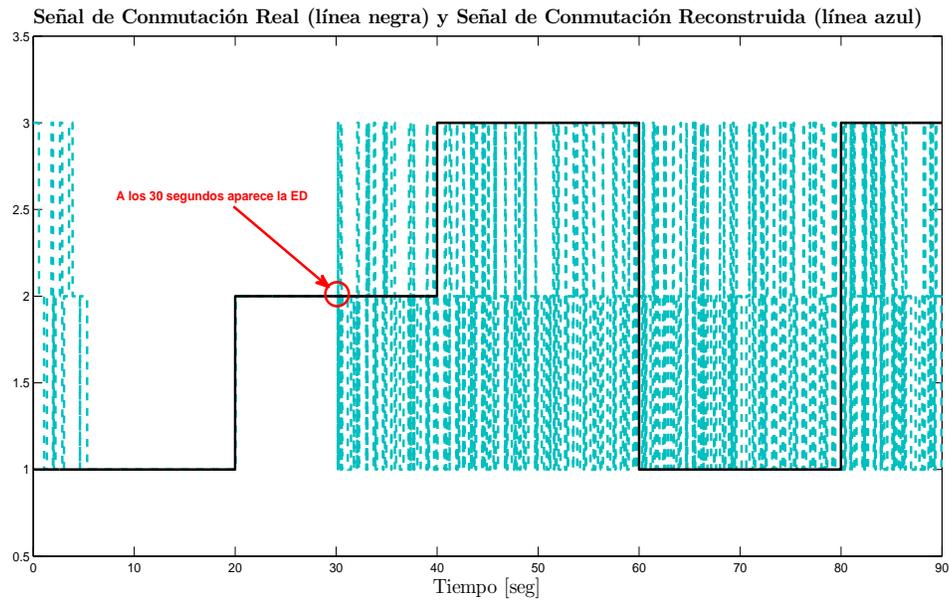
**Figura 6.6:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF



**Figura 6.7:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3 en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF



**Figura 6.8:** Residuos de cada Observador en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF



**Figura 6.9:** Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED desacopladas - Esquema DLEF

De la Figura 6.8 se aprecia claramente que después de 30[seg] todos los residuos (inyecciones de salida equivalente) son diferentes de cero, esto indica que hay entrada desconocida, y que el comportamiento del error de estimación no se debe a la conmutación del propio sistema. En este punto, el esquema DLED puede realizar la detección de la entrada desconocida por medio de los residuos (inyección de salida equivalente).

La reconstrucción de la señal de conmutación se muestra en la Figura 6.9, donde claramente se aprecia el efecto de la entrada desconocida.

En este punto, el esquema DLED puede realizar también localización (en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado aparece la entrada desconocida) por medio del conocimiento previo de la señal de conmutación estimada  $\hat{\lambda}(t)$  y del comportamiento de los residuos, previamente descrito.

De este modo, analizando los residuos y el conocimiento de la señal de conmutación antes de que la entrada desconocida aparezca, se puede decir que la entrada desconocida apareció en el segundo modo de operación  $\lambda(t) = 2$ .

### 6.4.2. Esquema DLRED

#### 1er Caso del Esquema DLRED

Considere el 1er Caso del esquema DLRED. Por lo tanto, se consideran entradas desconocidas acopladas a los términos de corrección de cada observador. Se considera la siguiente matriz de distribución

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Con esta matriz de distribución  $D$  la suposición 5.1 se satisface. Por lo tanto se puede considerar el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_{\lambda(t)}c_{\lambda(t)}x_1 + \alpha_{\lambda(t)}x_2 - \alpha_{\lambda(t)}x_1^3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta_{\lambda(t)}x_2 \\ -x_5 - x_6 + x_1 \\ x_4 + a_{\lambda(t)}x_5 \\ b_{\lambda(t)} + x_6(x_4 - d_{\lambda(t)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Una vez más, se considera que las entradas desconocidas aparecen a los 30[seg] de iniciada la simulación, y que tienen la misma forma que en (6.10) y (6.11), solo que desplazadas en el eje vertical. El comportamiento de las entradas desconocidas se muestra en la Figura 6.10.

Considere los mismos observadores diseñados para el esquema anterior y que el sistema no vuelve a conmutar una vez que la entrada desconocida ha aparecido. El comportamiento del error de estimación del estado continuo para cada observador se muestra en las Figuras 6.11, 6.12 y 6.13.

Es claro, de las gráficas de la convergencia del error para cada observador, que ninguno de ellos pierde la estimación correcta a pesar de la presencia de entradas desconocidas, pero ¿como se puede saber que existen entradas desconocidas? La respuesta a esta pregunta, una vez más, se aprecia en los residuos (inyección de salida equivalente), que se muestran en la Figura 6.14, donde se aprecia claramente que después de 30[seg] todos los residuos (inyecciones de salida equivalente) son diferentes de cero, esto indica, que hay entradas desconocidas. En este punto, el esquema DLRED puede realizar la detección de la entrada desconocida por medio de los residuos.

La reconstrucción de la señal de conmutación se muestra en la Figura 6.15, donde se aprecia claramente que el sistema no vuelve a conmutar una vez que la entrada desconocida ha aparecido.

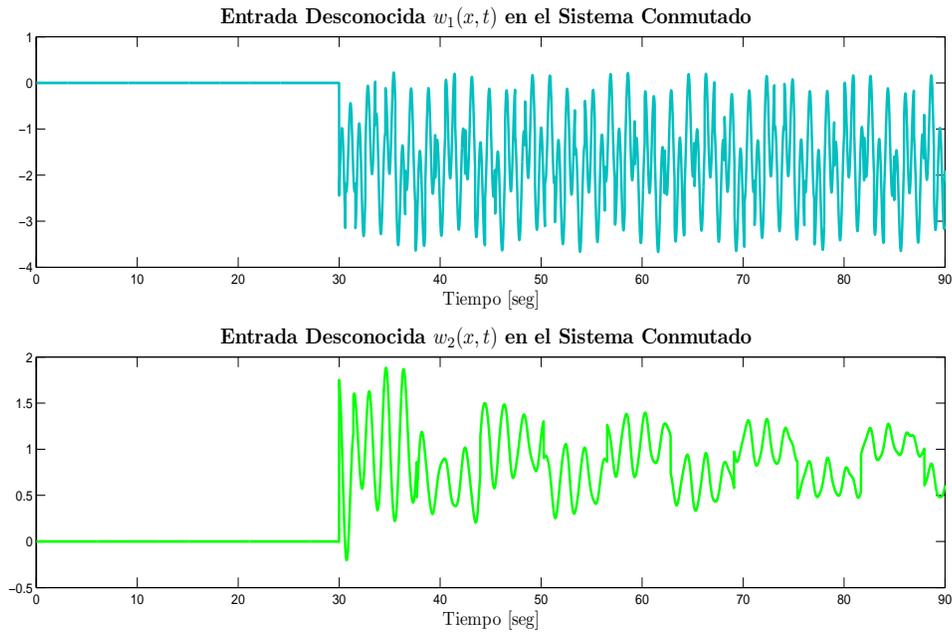


Figura 6.10: Entradas Desconocidas - 1er Caso DLRED

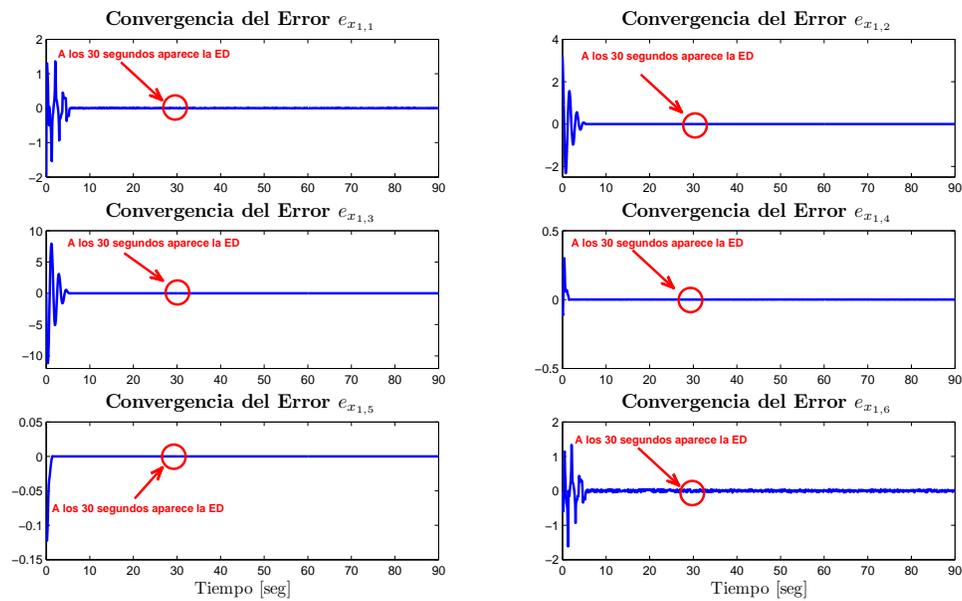
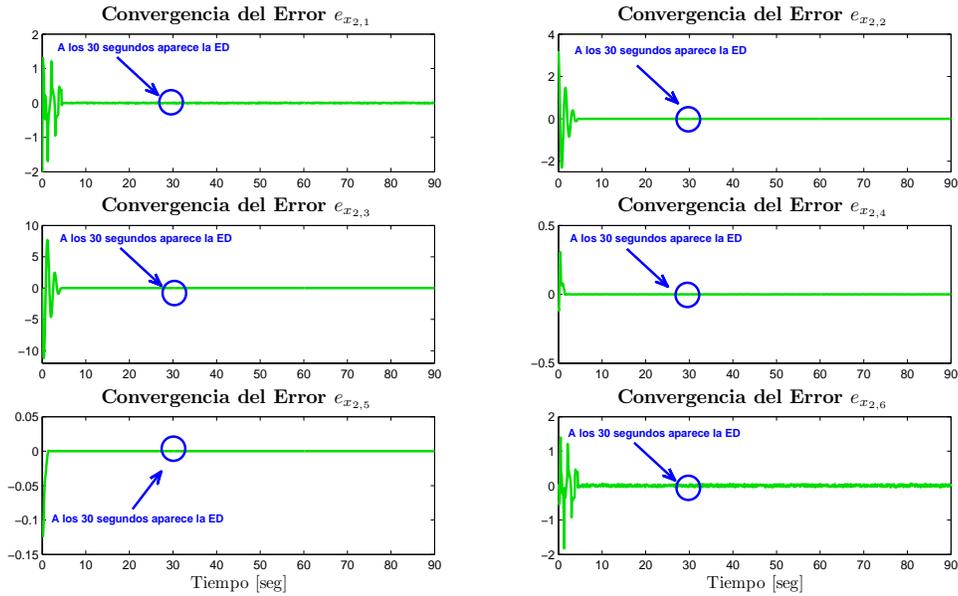
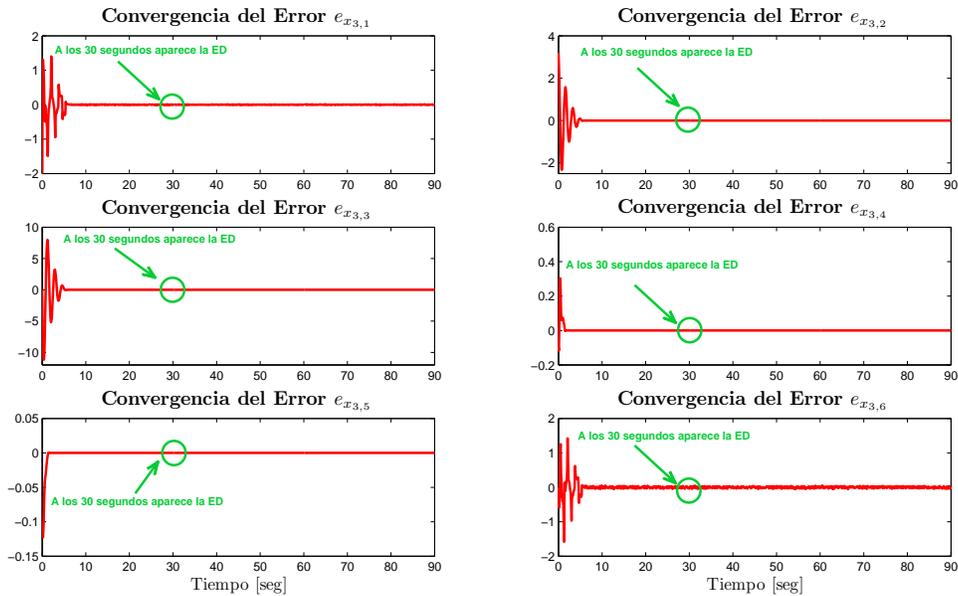


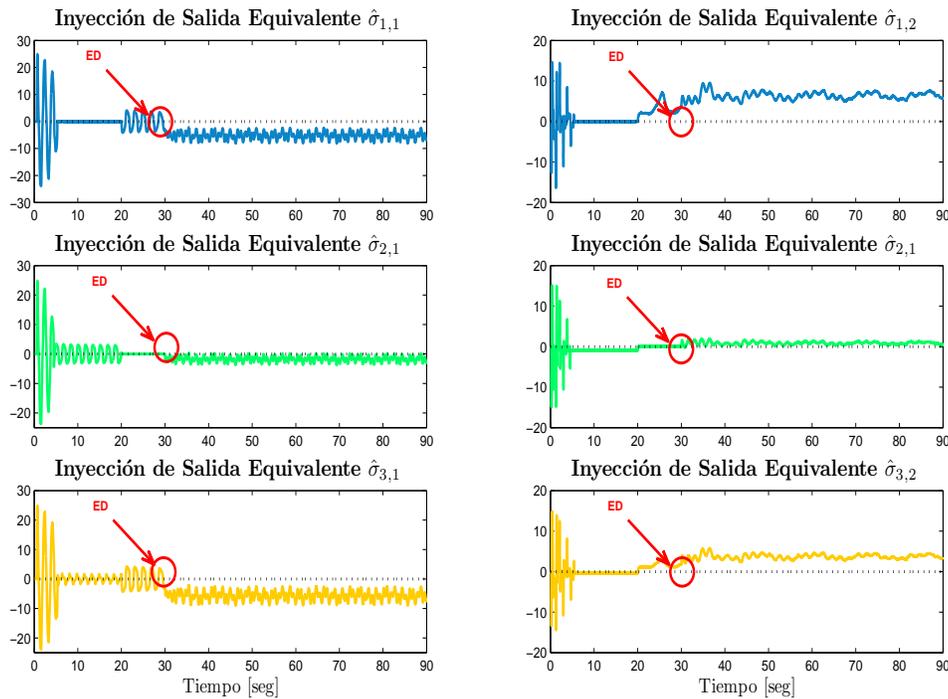
Figura 6.11: Convergencia del Error de Estimación para el Observador 1 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED



**Figura 6.12:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 2 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED



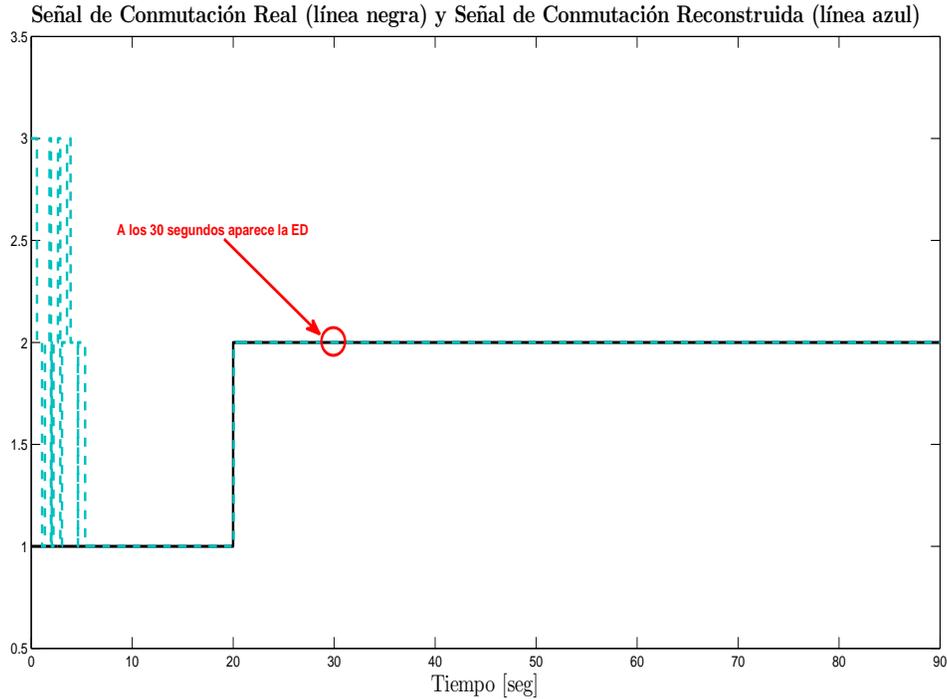
**Figura 6.13:** Convergencia del Error de Estimación para el Observador 3 en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED



**Figura 6.14:** Residuos de cada Observador en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED

**Nota 6.5.** Cabe mencionar que para este ejemplo, a pesar de la presencia de entradas desconocidas el esquema de reconstrucción de modo de operación sigue funcionando, pero esto no siempre es posible, generalmente la reconstrucción del modo de operación se pierde una vez que la entrada desconocida aparece, independientemente de que las entradas desconocidas estén acopladas o no acopladas a los términos de corrección.

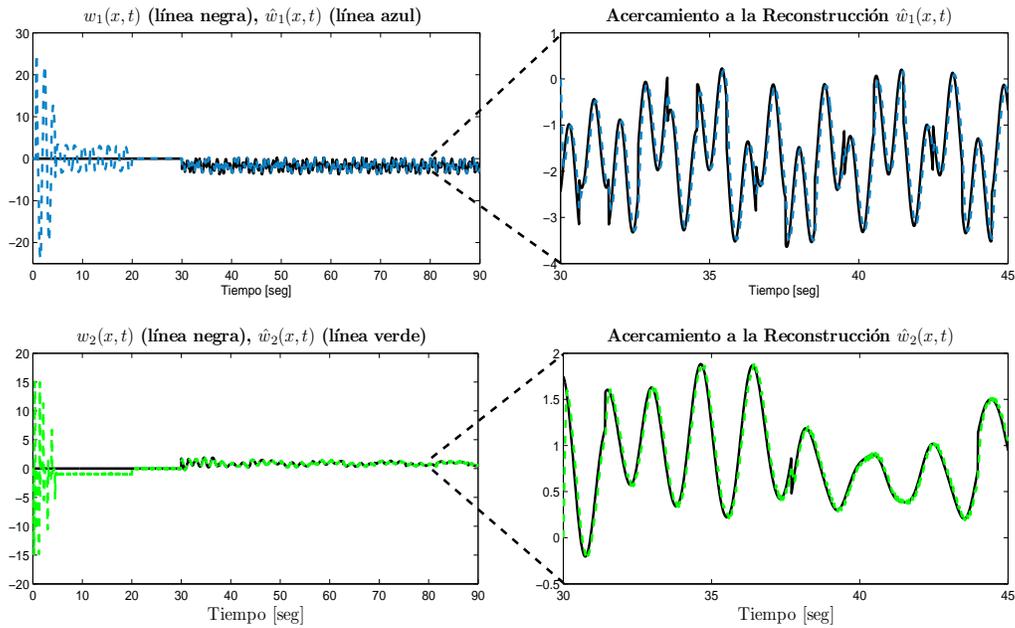
En este punto, el esquema DLRED puede realizar también localización (en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado y en que estado aparece la entrada desconocida) por medio del conocimiento previo de la señal de conmutación estimada  $\lambda(t)$  es decir, se sabe a priori que el sistema no vuelve a conmutar una vez que la entrada desconocida ha aparecido, y del comportamiento de los residuos, previamente descrito, se sabe en que modo de operación y en que estado apareció la entrada desconocida, obviamente la entrada desconocida aparecerá en aquellos estados acoplados a los términos de corrección. Por otro lado, dado que las entradas desconocidas están acopladas a los términos de corrección, el esquema DLRED puede realizar la reconstrucción de las entradas desconocidas una vez que se ha identificado el modo de operación en el que aparecieron las mismas ( $\lambda(t) = 2$ ).



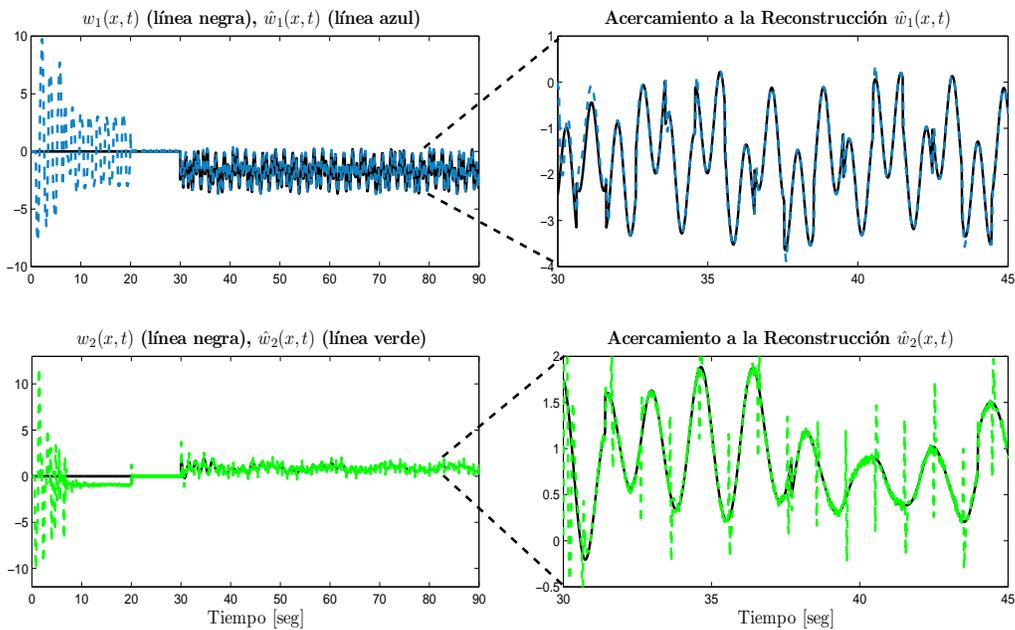
**Figura 6.15:** Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED acopladas - 1er Caso DLRED

En la Figura 6.16 se muestra la reconstrucción de las entradas desconocidas vía “*Método Aproximado*” y en la Figura 6.17 vía “*Método Exacto*” (para el método exacto se usaron los mismos términos de corrección que en (4.38) y (4.39) con los parámetros de la Tabla 4.3), haciendo uso de los residuos (inyección de salida equivalente) del Observador 2.

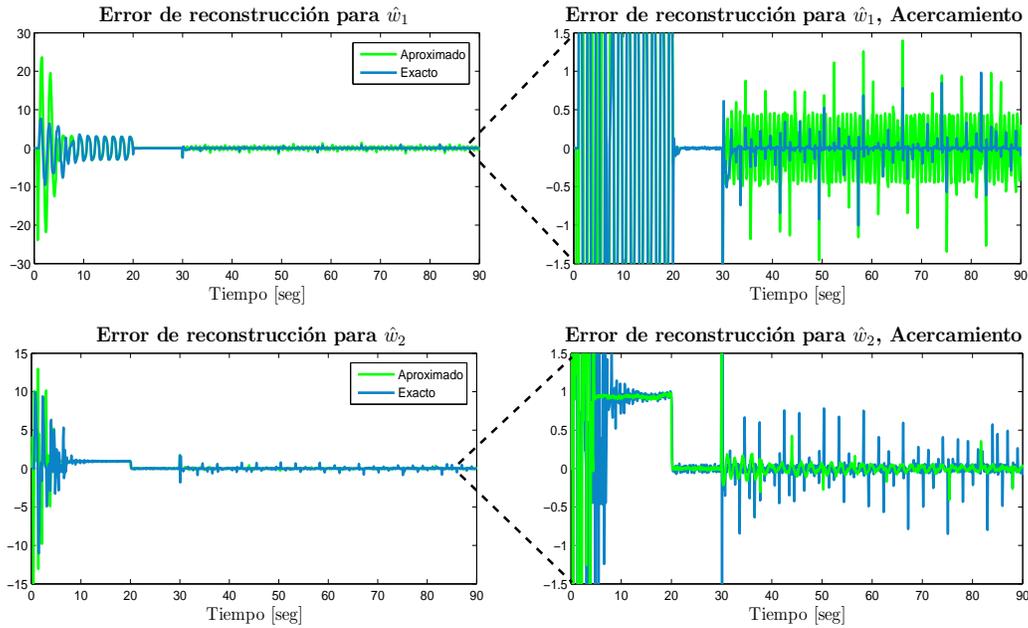
Una comparación entre los métodos de reconstrucción de entradas desconocidas se muestra en la Figura 6.18. Para la comparación de la entrada desconocida  $w_1(x, t)$  resulta que la reconstrucción exacta es un poco mejor que la reconstrucción aproximada, mientras que para  $w_2(x, t)$  la reconstrucción aproximada presenta un error más pequeño que la reconstrucción exacta, esto se debe principalmente a la manera en que la entrada desconocida  $w_2(x, t)$  se encuentra acoplada a los términos de corrección, de la ec. (6.17) se aprecia claramente que  $w_2$  entra por la última fila, mientras que en la ec. (6.13) se puede ver que el efecto de los dos términos de corrección  $\sigma_{j,1}$  y  $\sigma_{j,2}$  está presente también en la última fila. De esta manera el efecto de las integrales de dos algoritmos casi-continuos no homogéneos de 4to orden se combina para generar una reconstrucción más ruidosa, a diferencia de la reconstrucción aproximada, que refleja un comportamiento menos ruidoso debido al efecto de la filtración de dos algoritmos casi-continuos no homogéneos de 3er orden.



**Figura 6.16:** Reconstrucción de ED vía Método Aproximado - 1er Caso DLRED



**Figura 6.17:** Reconstrucción de ED vía Método Exacto - 1er Caso DLRED



**Figura 6.18:** Comparación del Error entre Métodos de Reconstrucción - 1er Caso DLRED

## 2do Caso del Esquema DLRED

Considere el 2do caso del esquema DLRED. Por lo tanto, considere entradas desconocidas acopladas a los términos de corrección de cada observador, y el mismo sistema (6.17). Por otro lado, se considera que la señal de conmutación  $\lambda(t)$  es una señal periódica y que hemos sido capaces de reconstruirla en un periodo completo antes de que la entrada desconocida aparezca, como se muestra en la Figura 6.19.

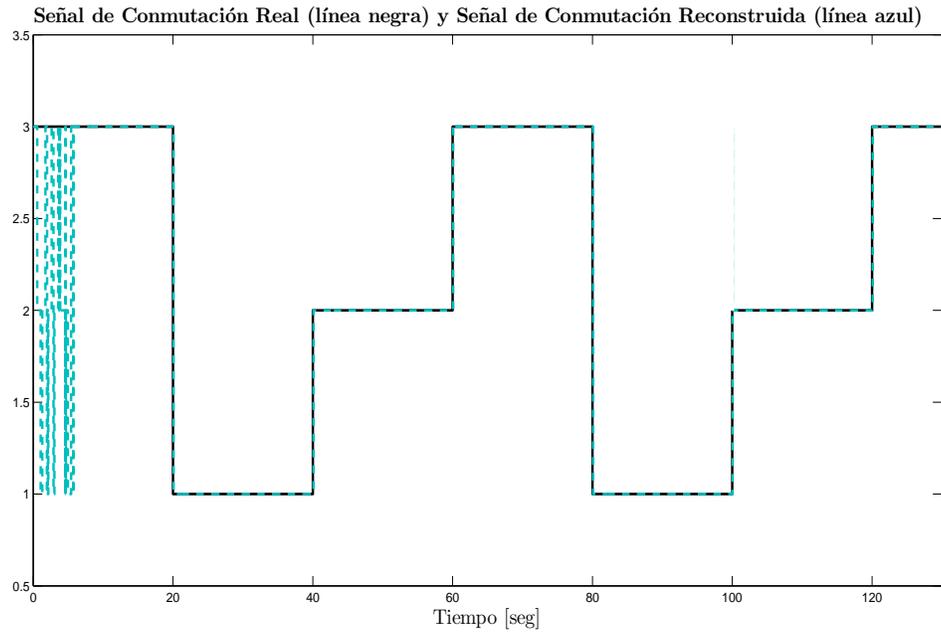
De nuevo, considere que las entradas desconocidas aparecen a los 30[seg] de iniciada la simulación. Para este caso, las entradas desconocidas tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= \text{square}(3.18t) + 2\text{sen}(7.32t) + 0.5\text{sen}(0.79t) + 2x_2 \\ w_2(x, t) &= 3\text{square}(0.5t) + 0.5\text{sen}(3.14t) + x_4 \end{aligned}$$

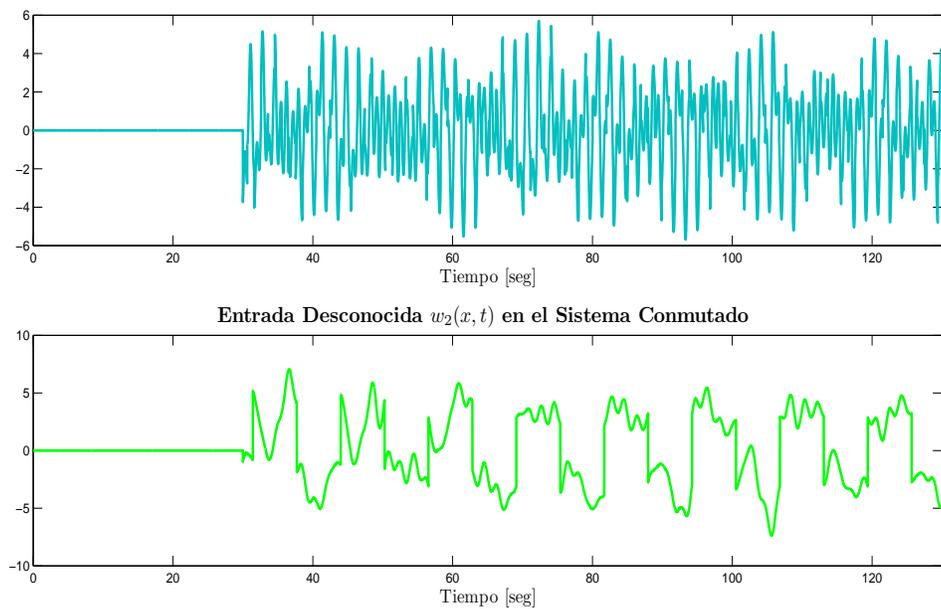
El comportamiento de las entradas desconocidas se muestra en la Figura 6.20.

Considere los mismos observadores diseñados para el esquema anterior y que el sistema continua conmutando después de que la entrada desconocida ha aparecido. El comportamiento de los residuos (inyección de salida equivalente) se muestra en la Figura 6.21.

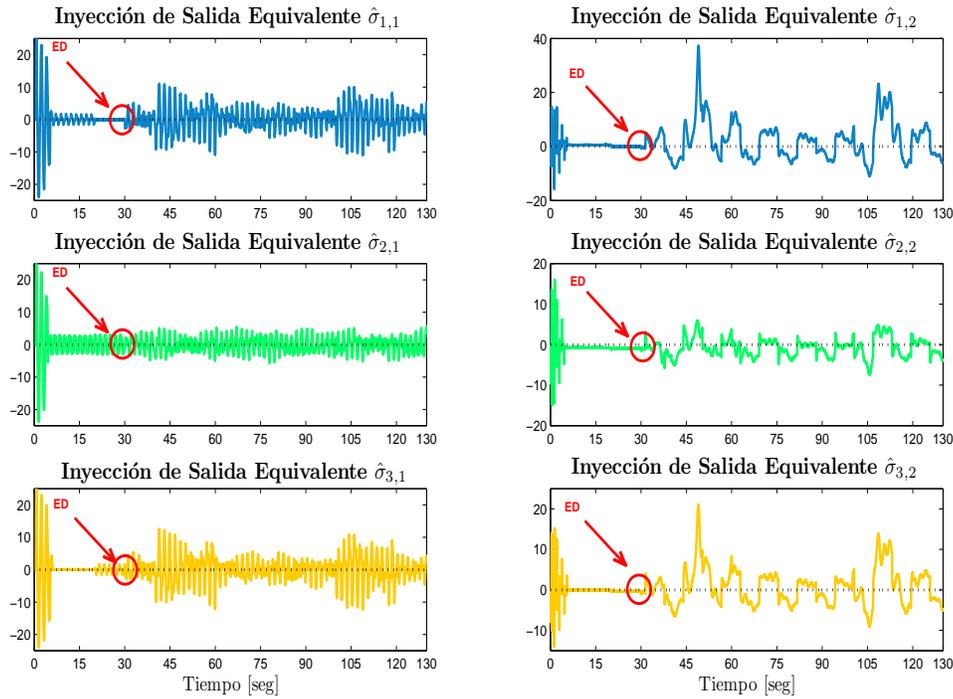
De la Figura 6.21 se puede ver que después de 30[seg] todos los residuos (inyecciones de salida equivalente) son diferentes de cero, esto indica, que hay entradas desconocidas. En este punto, el esquema DLRED puede realizar la detección de la entrada desconocida.



**Figura 6.19:** Reconstrucción de la Señal de Conmutación sin ED - 2do Caso DLRED



**Figura 6.20:** Entradas Desconocidas - 2do Caso DLRED

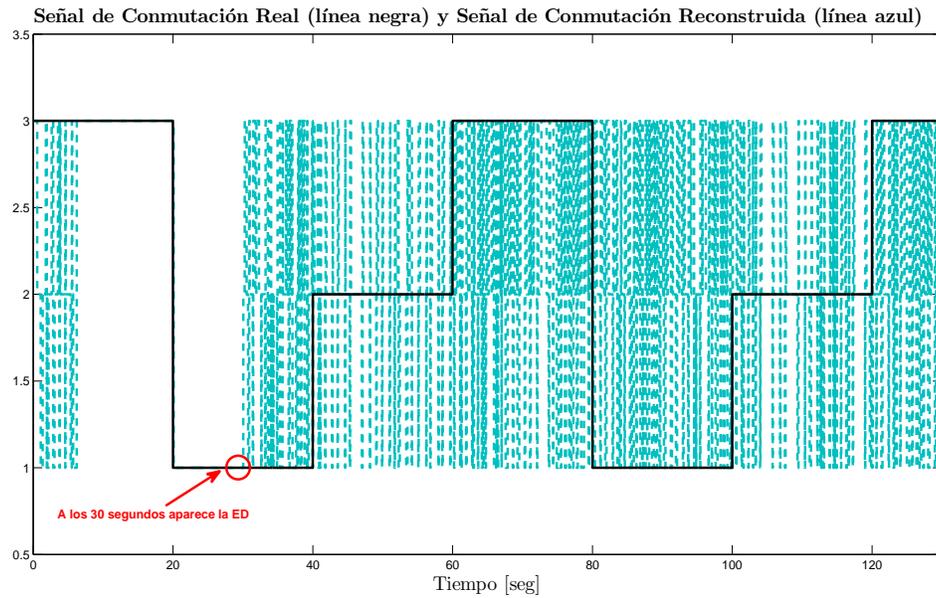


**Figura 6.21:** Residuos de cada Observador en presencia de ED acopladas - 2do Caso DLRED

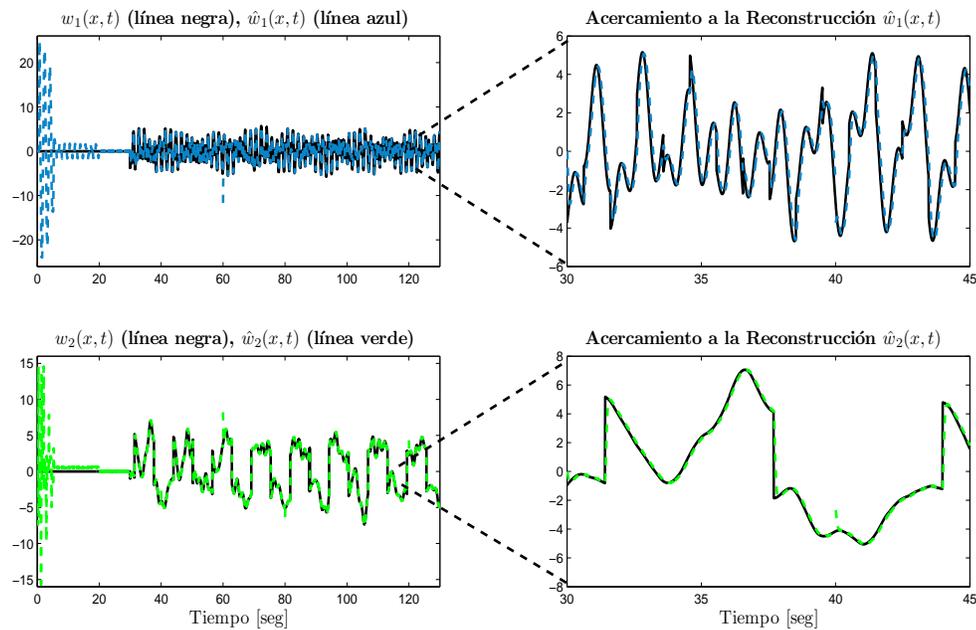
La reconstrucción de la señal de conmutación se muestra en la Figura 6.22, donde se aprecia claramente que el sistema sigue conmutando una vez que la entrada desconocida ha aparecido. Para este caso es evidente que la identificación del modo de operación deja de funcionar una vez que la entrada desconocida ha aparecido, a diferencia de las simulaciones del caso anterior.

Por otro lado, ya que la señal de conmutación es una señal periódica (con periodo  $T = 60[seg]$ ) y hemos sido capaces de reconstruirla durante un periodo completo antes de que aparezca la entrada desconocida, tenemos conocimiento total del sistema, por lo tanto, el esquema DLRED puede realizar también localización (en el sentido de conocer en cual de las dinámicas del sistema conmutado y en que estado aparece la entrada desconocida) y reconstrucción de entradas desconocidas.

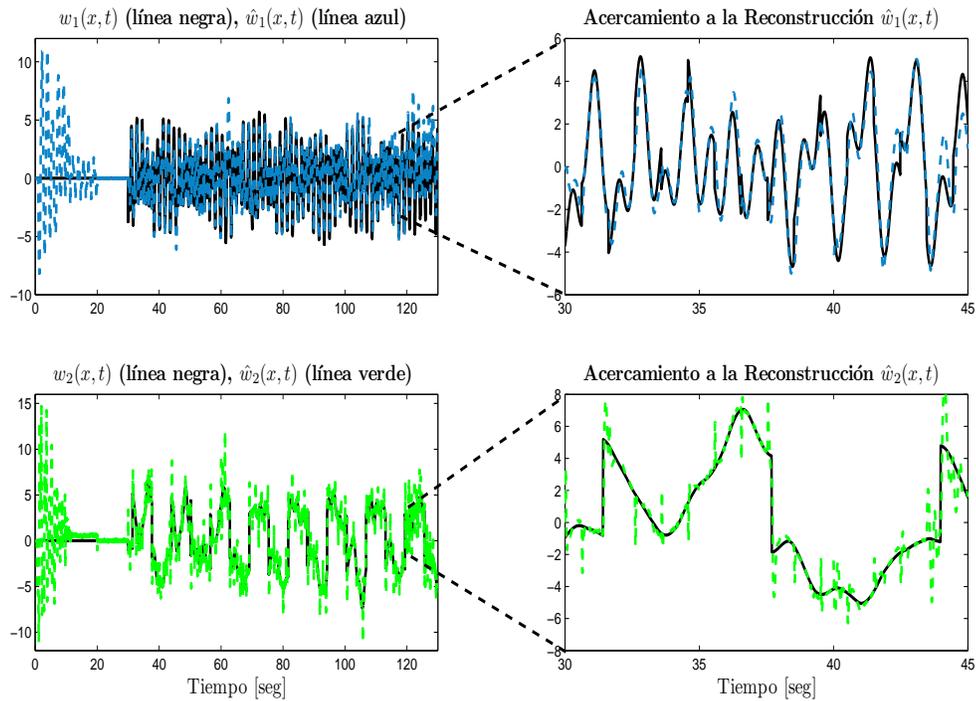
En la Figura 6.23 se muestra la reconstrucción de las entradas desconocidas vía “*Método Aproximado*” y en la Figura 6.24 vía “*Método Exacto*” (para el método exacto se usaron los mismos parámetros que en el caso 1), haciendo uso de los residuos. Cabe mencionar que, dado que el sistema sigue conmutando, la reconstrucción de las entradas desconocidas se realiza combinando la información de cada uno de los residuos correspondientes al modo de operación.



**Figura 6.22:** Reconstrucción de la Señal de Conmutación en presencia de ED acopladas - 2do Caso DLRED



**Figura 6.23:** Reconstrucción de ED vía Método Aproximado - 2do Caso DLRED



**Figura 6.24:** Reconstrucción de ED vía Método Exacto - 2do Caso DLRED

Concluyendo, se ha mostrado que el esquema de reconstrucción de entradas desconocidas en sistemas no lineales conmutados, haciendo uso del “*Método Exacto*” y del “*Método Aproximado*”, bajo ciertas condiciones de “*detectabilidad*” y “*reconstructibilidad*”, y usando un enfoque “*residual*” por medio de la información de la inyección de salida equivalente, es capaz de proporcionar estimaciones muy aceptables, considerando que dicho problema, en este tipo de sistemas, es bastante complicado.

# Conclusiones

---

Con base en los dos objetivos planteados al inicio de este trabajo, se pueden concluir, como aportaciones, los siguientes puntos:

- Se estableció un esquema de observación de estados para sistemas no lineales (*basado en el trabajo presentado en [Davila et al., 2009a] y extendido al caso de múltiples salidas*), con convergencia en tiempo finito a pesar de la presencia de entradas desconocidas y/o incertidumbres, **sin la necesidad de transformar el sistema en alguna forma canónica**, vía modos deslizantes de alto orden no homogéneos, que permiten hacer **uso de ganancias variables y adaptables**.
- **Se realizó la extensión del esquema de observación al caso de sistemas no lineales conmutados**, obteniendo un observador que proporciona convergencia en tiempo finito, tanto para la observación del estado continuo como para la reconstrucción de la señal de conmutación, bajo ciertas condiciones de distinguibilidad (*basado en el esquema “multi-observador” propuesto en [Davila et al., 2009b] y extendido al caso de múltiples salidas*).
- Se establecieron dos métodos (“*Exacto*” y “*Aproximado*”) para el uso de la inyección de salida equivalente con propósitos de **reconstrucción de entradas desconocidas** para sistemas no lineales.
- **Se realizó la extensión del esquema de reconstrucción de entradas desconocidas al caso de sistemas no lineales conmutados**, estableciendo ciertas condiciones de “*detectabilidad*” y “*reconstructibilidad*”, por medio de un enfoque “*residual*” haciendo uso de la información de la inyección de salida equivalente.

Finalmente, por medio de simulaciones para dos ejemplos académicos, se mostró la efectividad de todos los esquemas propuestos.

### **Trabajo Futuro**

Es claro que el trabajo futuro es bastante amplio. En una dirección, se pretenden relajar las suposiciones que se establecen a lo largo de este trabajo, por ejemplo; la suposición de grado relativo completo y definido, y de esta manera extender o hacer más amplia la clase de sistemas para la cual el esquema de observación pueda funcionar. Por otro lado, falta mucho trabajo en el análisis de sistemas no lineales conmutados con entradas desconocidas. En esta dirección, el problema de observación y control continua abierto y es un tema bastante actual.

---

## Apéndice A

# Fundamentos y Demostraciones

---

### A.1. Fundamentos

**Definición A.1.** HOMOGENEIDAD [Bacciotti and Rosier, 2001]. *Fije un conjunto de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $q = (q_1, \dots, q_n)$  un conjunto de  $n$  números reales positivos.*

- La familia de dilataciones  $d_k$  (asociadas con  $q$ ) se define por el siguiente mapeo

$$d_k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (k^{q_1} x_1, \dots, k^{q_n} x_n); \forall k > 0 \quad (\text{A.1})$$

Los números  $q_i$  son los pesos de las coordenadas.

- Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se dice  $d_k$ -homogénea de grado  $q$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) si

$$f(d_k(x)) = k^q f(x); \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k > 0 \quad (\text{A.2})$$

- Un campo vectorial  $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  se dice que es  $d_k$ -homogéneo de grado  $q$  si el componente de  $f_i$  es  $d_k$ -homogéneo de grado  $q + q_i$  para cada  $i$ , esto es:

$$f_i(k^{q_1} x_1, \dots, k^{q_n} x_n) = k^{q+q_i} f_i(x); \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k > 0, \forall i \in [1, n] \quad (\text{A.3})$$

◇

**Ejemplo A.1.** Considere el conjunto de coordenadas  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , el conjunto  $q = (q_1, q_2) = (1, 3)$  y el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^5 \end{aligned}$$

Hay que determinar si el campo vectorial  $f$  es  $d_k$ -homogéneo de grado  $q$ .

Se tiene que

$$f(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Entonces, el campo vectorial  $f$  será  $d_k$ -homogéneo de grado  $q$  si cada componente  $f_i$  es  $d_k$ -homogéneo de grado  $q + q_i$ , esto es:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 - x_1^3 \\ f_1(kx_1, k^3x_2) &= k^3x_2 - k^3x_1^3 = k^{q+1}f_1(x) \\ &\Rightarrow q = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -x_1^5 \\ f_2(kx_1, k^3x_2) &= -k^5x_1^5 = k^{q+3}f_2(x) \\ &\Rightarrow q = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el campo vectorial  $f$  es  $d_k$ -homogéneo de grado 2.

**Definición A.2.** HOMOGENEIDAD DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL [Levant, 2005]. Una ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  (inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$ ) se dice homogénea de grado  $-q < 0$  si es invariante con respecto a la siguiente transformación de tiempo y coordenadas:

$$(t, x) \mapsto (k^q t, d_k x) \quad (\text{A.4})$$

es decir

$$\frac{d}{dt}x = f(x) \iff k^{-q}d_k \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dk^q t}(d_k x) = f(d_k x) \quad (\text{A.5})$$

$$\left( \frac{d}{dt}x \in F(x) \iff \frac{d}{dk^q t}(d_k x) = F(d_k x) \right) \quad (\text{A.6})$$

◇

**Definición A.3.** CONTRAIBLE POR DILATACIÓN [Levant, 2005]. Un conjunto  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$  es contraible por dilatación si  $d_k \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}$ ,  $\forall 0 \leq k < 1$ . ◇

**Definición A.4.** CONTRACCIÓN DE UNA INCLUSIÓN DIFERENCIAL [Levant, 2005]. Una inclusión diferencial  $\dot{x} \in F(x)$  se dice contractiva si existen conjuntos compactos  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  y cierto tiempo  $T$  tales que:

(a)  $0 \in \mathcal{D}_2 \subset \text{interior}(\mathcal{D}_1)$ .

(b)  $\mathcal{D}_1$  es contraible por dilatación.

(c)  $\forall x(0) \in \mathcal{D}_1, \exists T : x(T) \in \mathcal{D}_2$ . ◇

Note que  $x(t)$  puede entrar a  $\mathcal{D}_2$  y después salir, no es necesario que  $x(t) \in \mathcal{D}_2, \forall t > T$ . El siguiente Teorema es extraído de [Levant, 2005], y es de vital importancia para las demostraciones de los Teoremas de convergencia de los algoritmos utilizados.

**Teorema A.1.** Sea  $\dot{x} \in F(x)$  una inclusión diferencial homogénea con grado de homogeneidad  $-q < 0$ . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes

(a) Estabilidad global y en tiempo finito del origen.

(b) *Estabilidad asintótica, uniforme y global del origen.*

(c) *Propiedad de contracción.*

Más aun, las siguientes afirmaciones se cumplen

(i) *El tiempo de llegada (asentamiento) al origen es una función homogénea continua de la condición inicial y el peso  $q$ .*

(ii) *La estabilidad en tiempo finito del origen es robusta a pequeñas perturbaciones homogéneas.*

□

De esta forma, sí es posible demostrar que existe una contracción en cierta región del espacio; sin importar su tamaño, entonces será suficiente para demostrar que dicha propiedad se cumple en todo el espacio, y por lo tanto, se podría demostrar la estabilidad global y en tiempo finito del origen.

## A.2. Demostraciones para el algoritmo Casi-continuo

### A.2.1. Teorema 2.1

*Demostración. [Levant and Michael, 2008]*

La idea principal es que con  $\alpha$  suficientemente grande cualquier trayectoria del sistema entrara en tiempo finito en alguna región específica para quedarse ahí. La región se describe por desigualdades diferenciales homogéneas que determinan la convergencia.

Ahora, se introducen algunos Lemas que permiten demostrar el Teorema 2.1.

**Lema A.1.** *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a)  $N_{i,r}$  es definida positiva, es decir  $N_{i,r} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i)} = 0$  para  $i = 0, \dots, r - 1$ .

(b) La desigualdad  $|\Psi_{i,r}| \leq 1$  se satisface siempre que  $N_{i,r} > 0$ .

(c) La función  $\Psi_{i,r}(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(i-1)})$  es continua en todos lados (es decir, puede ser redefinida por continuidad) excepto en el punto  $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(i-1)} = 0$ . ▮

Ahora se introduce la siguiente definición de homogeneidad  $r - deslizante$ .

**Definición A.5. Homogeneidad  $r - deslizante$**  [Levant, 2005]. *Se dice que el sistema (2.1)-(2.2) es homogéneo  $r - deslizante$  si el sistema es homogéneo con pesos*

$$\deg(\sigma) = r, \deg(\dot{\sigma}) = r - 1, \dots, \deg(\sigma^{(r-1)}) = 1, \deg(\sigma^{(r)}) = 0, \deg(t) = 1$$

esto es  $\deg(\sigma^{(i)}) = r - i$ , para  $i = 0, \dots, r - 1$ .  $\diamond$

Si esto es cierto, entonces el sistema es invariante con respecto al cambio de coordenadas y tiempo

$$(t, \sigma) \mapsto (kt, d_k \sigma)$$

donde  $d_k$  es una dilatación.

**Lema A.2.** *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) *El peso de  $N_{i,r}$  es igual a  $r - i$  para  $i = 0, \dots, r - 1$ .*

(b) *Toda función homogénea localmente acotada  $\omega(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-i)})$  con peso  $r - i$  satisface la desigualdad  $|\omega| \leq cN_{i,r}$  para alguna  $c > 0$ .*  $\spadesuit$

**Lema A.3.** *Para cualquier  $\gamma > 0$  y  $\beta_{r-1} > 0$  con  $\alpha > 0$  suficientemente grande, la siguiente desigualdad*

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

*es establecida en tiempo finito y mantenida después.*  $\spadesuit$

El cumplimiento de lo establecido en el Lema A.3 genera una reacción en cadena dada por el siguiente Lema.

**Lema A.4.** *Sea  $i = 1, \dots, r - 2$ , entonces para cualquier  $\beta_i, \gamma_i, \gamma_{i+1}$  con  $\beta_{i+1} > 0$  suficientemente grande, la desigualdad*

$$\left| \sigma^{(i+1)} + \beta_{(i+1)} N_{i,r}^{\frac{(r-i-1)}{(r-i)}} \Psi_{i,r} \right| \leq \gamma_{i+1} N_{i,r}^{\frac{(r-i-1)}{(r-i)}}$$

*asegura que la desigualdad*

$$\left| \sigma^{(i)} + \beta_{(i)} N_{i-1,r}^{\frac{(r-i)}{(r-i+1)}} \Psi_{i-1,r} \right| \leq \gamma_i N_{i-1,r}^{\frac{(r-i)}{(r-i+1)}}$$

*se satisfaga en tiempo finito y se mantenga después.*  $\spadesuit$

El Lema A.4 puede ser reemplazado por el siguiente Lema si  $i = 0$ .

**Lema A.5.** *La desigualdad*

$$\left| \dot{\sigma} + \beta_1 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}} \text{sign}(\sigma) \right| \leq \gamma_1 |\sigma|^{\frac{r-1}{r}}$$

*con  $0 \leq \gamma_1 < \beta$  garantiza que la igualdad  $\sigma \equiv 0$  sea establecida en tiempo finito y mantenida después.*  $\spadesuit$

Ahora, se puede establecer **la demostración del Teorema 2.1** de la siguiente forma.

Los valores de  $\beta_1, \gamma_1$  son asignados arbitrariamente tal que las condiciones del Lema A.5 se satisfacen. Ahora, los parámetros  $\beta_2, \gamma_2$  son asignados de acuerdo al Lema A.4, de la misma manera los parámetros  $\beta_3, \gamma_3$  y los subsecuentes. En el último paso el parámetro  $\alpha$  es asignado de acuerdo al Lema A.3. Después de un transitorio de tiempo, la trayectoria pertenece a la intersección de las regiones invariantes cerradas (definidas por cada una de las desigualdades correspondientes a cada Lema), una de las cuales es el origen  $\sigma \equiv 0$  (Lema A.5). ■

### A.2.2. Teorema 2.2

*Demostración.* [Levant and Michael, 2008]

De acuerdo a los Lemas A.3, A.4 y A.5 los parámetros son elegidos para garantizar que después de cierto transitorio de tiempo finito la siguiente desigualdad se satisfaga

$$\left| \sigma^{(r-1)} + \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r} \right| \leq \gamma N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}$$

que se puede reescribir como una inclusión diferencial homogénea r-deslizante

$$\sigma^{(r-1)} \in \gamma \left[ -N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}}, N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \right] - \beta_{r-1} N_{r-2,r}^{\frac{1}{2}} \Psi_{r-2,r}$$

Hay que notar que para satisfacer las condiciones de Filippov, la inclusión debe ser aumentada en los puntos de discontinuidad de  $\Psi_{r-2,r}$  para obtener las propiedades de convexidad y semi-continuidad requeridas. Ciertamente, estas propiedades son satisfechas por la inclusión diferencial con  $\gamma = 0$ . Por otro lado, de [Levant, 2005] se sabe que la estabilidad en tiempo finito de inclusiones diferenciales con peso (grado de homogeneidad) negativo es robusta ante pequeñas perturbaciones homogéneas; por lo tanto, la estabilidad en tiempo finito de la ecuación diferencial obtenida con  $\gamma = 0$  implica la estabilidad en tiempo finito de la inclusión con cualquier  $\gamma$  suficientemente pequeña. ■

## A.3. Demostraciones para el Diferenciador

### A.3.1. Teorema 2.3

*Demostración.* [Levant, 2006a]

Considere el diferenciador (2.7) con  $L = 1$  y la entrada  $\varphi(t)$  con una constante de Lipschitz de  $\varphi^{(k)}(t)$  igual a 1. Note que bajo estas condiciones,  $\varphi^{(k)}(t)$  es absolutamente continua, la derivada  $\varphi^{(k+1)}(t)$  existe casi en todos lados, y  $|\varphi^{(k)}(t)| \leq 1$ . Denote  $\sigma_i = z_i - \varphi^{(i)}(t)$ , y reste

$\varphi^{(k+1)}(t)$  en ambos lados de (2.7), obteniendo

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_0 &= \sigma_1 - \lambda_0 |\sigma_0|^{\frac{k}{(k+1)}} \text{sign}(\sigma_0) \\
\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{(k-1)}{k}} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_{k-1} &= \sigma_k - \lambda_{k-1} |\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}) \\
\dot{\sigma}_k &\in -\lambda_k \text{sign}(\sigma_k - \dot{\sigma}_{k-1}) + [-1, 1]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

donde la inclusión  $\varphi^{(k+1)}(t) \in [-1, 1]$  es usada en el ultimo renglón. La inclusión es entendida en el sentido de Filippov, lo cual significa que esta es extendida para asegurar las propiedades de convexidad y semi-continuidad [Filippov, 1988], [Levant, 2005]. Los parámetros  $\lambda_i$  son elegidos de tal forma que la estabilidad el sistema (A.7) sea asegurada en tiempo finito [Levant, 2003].

La inclusión diferencial (A.7) es homogénea con grado de homogeneidad -1 y los pesos  $k+1, k, \dots, 1$  de  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$  respectivamente. En otras palabras, esto significa que la inclusión diferencial es invariante con respecto a la transformación de tiempo y coordenadas

$$(t, \sigma_i) \mapsto (\kappa t, \kappa^{k-i+1} \sigma_i), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

donde  $\kappa$  es cualquier número positivo. De [Levant, 2005], se sabe que la estabilidad en tiempo finito se preserva por la inclusión homogénea perturbada

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_0 &= \sigma_1 - \lambda_0 [1 - \gamma, 1 + \gamma]^{\frac{1}{(k+1)}} |\sigma_0|^{\frac{k}{(k+1)}} \text{sign}(\sigma_0) \\
\dot{\sigma}_1 &= \sigma_2 - \lambda_1 [1 - \gamma, 1 + \gamma]^{\frac{1}{k}} |\sigma_1 - \dot{\sigma}_0|^{\frac{(k-1)}{k}} \text{sign}(\sigma_1 - \dot{\sigma}_0) \\
&\vdots \\
\dot{\sigma}_{k-1} &= \sigma_k - \lambda_{k-1} [1 - \gamma, 1 + \gamma]^{\frac{1}{2}} |\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_{k-1} - \dot{\sigma}_{k-2}) \\
\dot{\sigma}_k &\in -\lambda_k [1 - \gamma, 1 + \gamma] \text{sign}(\sigma_k - \dot{\sigma}_{k-1}) + [-1 - \gamma, 1 + \gamma]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

si  $\gamma > 0$  es suficientemente pequeña.

Regresando al diferenciador (2.9). Denotando  $s_i = z_i - f_0^{(i)}(t)$ , (2.9) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= s_1 - \lambda_0 L(t)^{\frac{1}{(k+1)}} |s_0|^{\frac{k}{(k+1)}} \text{sign}(s_0) \\
\dot{s}_1 &= s_2 - \lambda_1 L(t)^{\frac{1}{k}} |s_1 - \dot{s}_0|^{\frac{(k-1)}{k}} \text{sign}(s_1 - \dot{s}_0) \\
&\vdots \\
\dot{s}_{k-1} &= s_k - \lambda_{k-1} L(t)^{\frac{1}{2}} |s_{k-1} - \dot{s}_{k-2}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s_{k-1} - \dot{s}_{k-2}) \\
\dot{s}_k &\in -\lambda_k L(t) \text{sign}(s_k - \dot{s}_{k-1}) + L(t)[-1, 1]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Ahora, considere un instante de tiempo  $t_0$  arbitrario. Entonces, debido a la continuidad de  $L(t)$  existe una constante  $T = T(t_0) > 0$  donde, durante el intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + T(t_0)]$ , la función  $L(t)$  no abandona el segmento  $L(t_0)[1 - \gamma, 1 + \gamma]$ . Denotando ahora,  $\sigma_i = \frac{s_i}{L(t_0)}$ , se obtiene que la inclusión diferencial (A.8) se satisface durante el intervalo de tiempo  $[t_0, t_0 + T(t_0)]$ . Ya que el tiempo de convergencia máximo y posible es una función continua de las condiciones iniciales de (A.8), existe  $\delta = \delta(t_0)$  tal que todas las trayectorias de (A.8) comenzando dentro del conjunto  $|\sigma_i| \leq \delta(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , convergen a cero durante el intervalo de tiempo  $T(t_0)$ .

Es necesario desarrollar una transformación de coordenadas similar en el instante  $t_1 = t_0 + T(t_0)$ . Por lo tanto se obtiene un sistema idéntico a (A.8) pero ahora respecto a  $\tilde{\sigma}_i = \frac{s_i}{L(t_1)} = \sigma_i \frac{L(t_0)}{L(t_1)}$ . Ya que  $\tilde{\sigma}_i \in \sigma_i [(1 + \gamma)^{-1}, (1 - \gamma)^{-1}]$ , la solución cero es preservada. ■

Las coordenadas  $\sigma_i = \frac{(z_i - f_0^{(i)}(t))}{L(t)}$  con  $t \in [t_0, t_0 + T(t_0)]$ , son llamadas *normalizadas*. Con la prueba anterior se ha demostrado que el sistema original se reduce a algún sistema híbrido, descrito por la inclusión diferencial estable en tiempo finito (A.8), combinado con las trayectorias que cambian al final de cada intervalo de tiempo, gobernado por la formula re-calculada de coordenadas  $\tilde{\sigma}_i = \frac{s_i}{L(t_1)} = \sigma_i \frac{L(t_0)}{L(t_0 + T(t_0))}$ .

### A.3.2. Teorema 2.4

*Demostración.* [Levant, 2006a]

Sea  $\gamma$  elegida como en la prueba del Teorema 2.3 y aplicando el mismo cambio de coordenadas. Suponga que  $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \leq M$ , entonces  $T(t_0) \geq T_0 = \frac{\ln(1+\gamma)}{M}$ . Ahora,  $\delta_0$  es elegida como el radio de un disco, tal que todas las trayectorias de (A.8) que comienzan dentro del mismo disco convergen a cero durante el tiempo  $T_0$ . ■

### A.3.3. Teorema 2.5

*Demostración.* [Levant, 2006a]

Obviamente  $\frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)} = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$ . De este modo, el Teorema 2.5 es una simple consecuencia del Teorema 2.4. ■



---

## Apéndice B

# Identificación de Parámetros

---

En este apéndice se presenta una versión del método de mínimos cuadrados (ver p. ej. [Soderstrom and Stoica, 1989] y [Ioannou and Sun, 1996]) para la identificación de parámetros, basado en el esquema de observación del capítulo 5, aprovechando las propiedades de la inyección de salida equivalente.

### B.1. Identificación con $\sigma_{eq}(t)$ exacta

Considere el sistema descrito en (3.1) y considere que  $\sigma_{eq}$  es calculada por medio de aumentar el orden de los algoritmos casi-continuos no homogéneos, por lo que  $\sigma_{eq}$  se vuelve una señal continua. De esta manera, se puede reescribir la parte incierta en forma de regresión lineal de la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x) + \theta\varphi(t, x) \quad (\text{B.1})$$

donde  $\theta \in \mathbb{R}^{n \times l}$  es la matriz de parámetros desconocidos y constantes, y  $\varphi(t, x) \in \mathbb{R}^l$  es un vector de funciones no lineales conocido como regresor. Se asume que el término  $\theta\varphi(t, x)$  satisface las propiedades estructurales de la Suposición 3.2.

Considere el observador descrito en (3.2) y (3.6), la dinámica del error de observación de estado es

$$\dot{e} = f(\hat{x}) + G(\hat{x})\sigma - f(x) - \theta\varphi(t, x) \quad (\text{B.2})$$

cuando  $e = 0$  tenemos:

$$0 = G(\hat{x})\sigma_{eq} - \theta\varphi(t, x) \quad (\text{B.3})$$

y se puede definir  $e_{id} = G(\hat{x})\sigma_{eq} - \theta\varphi(t, x)$ , como el error de identificación. Ahora, considere la siguiente función de costo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^t (e_{id})^2 d\tau + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0) Q_0 (\theta - \theta_0)^T \quad (\text{B.4})$$

donde  $Q_0 = Q_0^T > 0 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $\theta_0 = \theta(0)$ . La función  $J(\theta)$  penaliza todos los errores pasados desde  $\tau = 0$  hasta  $t$  con el término  $\frac{1}{2} \int_0^t (e_{id})^2 d\tau$ , que se deben a que  $\theta \neq \theta^*$ , donde  $\theta^*$  son

los parámetros verdaderos o reales, además de penalizar la estimación inicial  $\theta_0$  de  $\theta^*$  con el término  $\frac{1}{2}(\theta - \theta_0) Q_0 (\theta - \theta_0)^T$ , es decir, el error de identificación inicial. Ya que  $J(\theta)$  es una función convexa sobre el espacio de  $\theta$  para cada tiempo  $t$ , cualquier mínimo local es también global y satisface

$$\nabla J(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

esto es

$$\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) = - \int_0^t [G(\tau)\sigma_{eq}(\tau) - \theta\varphi(\tau)] \varphi^T(\tau) d\tau + (\theta - \theta_0) Q_0 = 0 \quad (\text{B.6})$$

Así, el estimado de  $\theta$  esta dado por

$$\hat{\theta}(t) = \left[ \theta_0 Q_0 + \int_0^t G(\tau)\sigma_{eq}(\tau)\varphi^T(\tau) d\tau \right] \Gamma(t) \quad (\text{B.7})$$

donde

$$\Gamma(t) = \left[ Q_0 + \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau) d\tau \right]^{-1} \quad (\text{B.8})$$

debido a que  $Q_0 = Q_0^T > 0$  y que  $\varphi\varphi^T$  es positiva semidefinida,  $\Gamma(t)$  existe en cada tiempo  $t$ . Ahora se tiene

$$\frac{d}{dt} [\Gamma^{-1}(t)] = \varphi(t, x)\varphi^T(t, x) \quad (\text{B.9})$$

y ya que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} I = \frac{d}{dt} [\Gamma(t)\Gamma^{-1}(t)] \\ &= \frac{d}{dt} [\Gamma(t)] \Gamma^{-1}(t) + \Gamma(t) \frac{d}{dt} [\Gamma^{-1}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

usando (B.9) se tiene

$$\dot{\Gamma}(t) = -\Gamma(t)\varphi(t, x)\varphi^T(t, x)\Gamma(t), \quad \Gamma(0) = \Gamma_0 = Q_0^{-1} \quad (\text{B.11})$$

De (B.11) tenemos que  $\dot{\Gamma}(t) \leq 0$ , esto es,  $\Gamma_0 \geq \Gamma(t) = \Gamma^T(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ . De esta manera, el cálculo de la inversa en (B.8) se evita por medio de generar  $\Gamma(t)$  como la solución de la ecuación diferencial (B.11). De manera similar, derivando  $\hat{\theta}(t)$  con respecto al tiempo y usando (B.11) se tiene:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \left[ G(\hat{x})\sigma_{eq}(t) - \hat{\theta}(t)\varphi(t, x) \right] \varphi^T(t, x)\Gamma(t), \quad \hat{\theta}(0) = \theta_0 \quad (\text{B.12})$$

En términos de  $\Gamma^{-1}$  se tiene

$$\frac{d}{dt} [\Gamma^{-1}(t)] = \varphi(t, x)\varphi^T(t, x) \quad (\text{B.13})$$

lo cual implica que  $\frac{d}{dt} [\Gamma^{-1}(t)] \geq 0$ , y por lo tanto,  $\Gamma^{-1}(t)$  puede crecer sin tener cota. Esto implica que  $\Gamma(t)$  puede hacerse arbitrariamente pequeña y hacer más lenta la adaptación en algún sentido. Esta es una de las desventajas principales del algoritmo.

A pesar de sus desventajas, este algoritmo tiene la propiedad única de garantizar la convergencia de los parámetros a valores constantes como lo describe el Teorema B.1 que requiere las siguientes definiciones de excitación persistente y de espacio  $\mathcal{L}_\infty$ .

**Definición 3.1.** [Ioannou and Sun, 1996]. *Un vector  $\varphi$  esta excitado persistentemente si existen  $\alpha_1, \alpha_2, T_0 > 0$  tales que*

$$\alpha_2 I \geq \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha_1 I, \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{B.14})$$

◇

**Nota B.1.** *Aunque la matriz  $\varphi(\tau) \varphi^T(\tau)$  es singular para todo  $\tau$ , la condición de excitación persistente requiere que  $\varphi(t)$  varíe con el tiempo de tal forma que la integral de la matriz  $\varphi(\tau) \varphi^T(\tau)$  sea uniformemente positiva definida sobre cualquier intervalo de tiempo  $[t, t + T_0]$ .*

**Definición 3.2.** [Khalil, 1996]. *El espacio  $\mathcal{L}_\infty$  se define como el espacio de funciones acotadas y continuas a pedazos tales que:*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\varphi(t)\| < \infty \quad (\text{B.15})$$

◇

**Teorema B.1.** *Los algoritmos (B.11) y (B.12), con  $\sigma_{eq}$  diseñada de acuerdo al método exacto, garantizan lo siguiente:*

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \bar{\theta}$ , donde  $\bar{\theta}$  es una matriz constante.
2. Si  $\varphi \in \mathcal{L}_\infty$  y cumple con la definición de excitación persistente, entonces  $\hat{\theta}(t)$  converge a  $\theta^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

□

*Demostración.*

Debido a que  $\Gamma(t)$  es no creciente y esta acota por abajo, es decir,  $\Gamma(t) = \Gamma^T(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ ,  $\Gamma(t)$  tiene un límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \bar{\Gamma} \quad (\text{B.16})$$

donde  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^T \geq 0$  es una matriz constante. Considerando que  $\bar{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ ,  $G(\hat{x})\sigma_{eq}(t) = \theta^* \varphi$  y usando (B.8), de (B.6) se tiene

$$\begin{aligned} - \int_0^t G(\tau) \sigma_{eq}(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau + \int_0^t \hat{\theta}(t) \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau + \hat{\theta}(t) Q_0 - \theta_0 Q_0 &= 0 \\ \hat{\theta}(t) \int_0^t \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau + \hat{\theta}(t) Q_0 - \theta^* \int_0^t \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau &= \theta_0 Q_0 \\ \hat{\theta}(t) \left[ \int_0^t \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau + Q_0 \right] - \theta^* \left[ \Gamma^{-1}(t) - Q_0 \right] &= \theta_0 Q_0 \\ \hat{\theta}(t) \Gamma^{-1}(t) - \theta^* \Gamma^{-1}(t) &= \theta_0 Q_0 - \theta^* Q_0 \\ \tilde{\theta}(t) \Gamma^{-1}(t) &= \tilde{\theta}(0) Q_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\tilde{\theta}(t)\Gamma^{-1}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}$ , de este modo,  $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\Gamma(t)$  y el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\bar{\Gamma}$ , lo cual implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta^* + \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\bar{\Gamma} = \bar{\theta} \quad (\text{B.17})$$

Ahora, se mostrará que  $\Gamma(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , sí  $\varphi$  satisface la condición de excitación persistente.

Ya que  $\Gamma^{-1}(t)$  satisface  $\Gamma^{-1}(t) = \left[ \Gamma_0^{-1} + \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \right]$  usando la condición de excitación persistente para  $\varphi$ , tenemos que

$$\Gamma^{-1}(t) - \Gamma_0^{-1} = \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \geq n_0 T_0 \alpha_1 I \geq \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) T_0 \alpha_1 I \quad (\text{B.18})$$

donde  $n_0$  es el número mas grande que satisface  $n_0 \leq \frac{t}{T_0}$ , es decir,  $n_0 \geq \frac{t}{T_0} - 1$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(t) &\geq \Gamma_0^{-1} + \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) T_0 \alpha_1 I \\ \Gamma^{-1}(t) &\geq \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) T_0 \alpha_1 I, \forall t > T_0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

lo cual, por su parte, implica que

$$\Gamma(t) \leq \left[ \left( \frac{t}{T_0} - 1 \right) T_0 \alpha_1 \right]^{-1} I, \forall t > T_0 \quad (\text{B.20})$$

Debido a que  $\Gamma(t) \geq 0$  para toda  $t \geq 0$  y el lado derecho de (B.20) va a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , podemos concluir que  $\Gamma(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces,  $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\Gamma(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta^* \quad (\text{B.21})$$

De este modo, el teorema queda demostrado. ■

## B.2. Identificación con $\sigma_{eq}(t)$ aproximada

Para la identificación de parámetros usando la estimación de  $\sigma_{eq}(t)$  dada por filtración, el valor promedio de los valores reales de  $\sigma_{eq}(t)$ , sin filtrar, satisface (4.10), pero se sabe que de un proceso de filtrado se tiene un error  $\epsilon$ , de este modo  $\sigma_{eq} = \hat{\sigma}_{eq} + \epsilon$ , y por lo tanto

$$\hat{\theta}(t) = \left[ \theta_0 Q_0 + \int_0^t G(\tau)\hat{\sigma}_{eq}(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \right] \Gamma(t) \quad (\text{B.22})$$

Asuma que  $G(\hat{x})\hat{\sigma}_{eq}(t) = \theta^*\varphi$ , entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}(t) &= \left[ \theta_0 Q_0 + \int_0^t G(\tau)\hat{\sigma}_{eq}(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \right] \Gamma(t) \\
 &= \theta_0 Q_0 \Gamma(t) + \theta^* \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \Gamma(t) + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \Gamma(t) \\
 &= \theta_0 Q_0 \Gamma(t) + \theta^* \left[ \Gamma^{-1}(t) - Q_0 \right] \Gamma(t) + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \Gamma(t) \\
 &= \theta_0 Q_0 \Gamma(t) + \theta^* [I - Q_0 \Gamma(t)] + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \Gamma(t) \tag{B.23}
 \end{aligned}$$

de esta forma se puede establecer el siguiente teorema para garantizar la convergencia de  $\hat{\theta}(t)$  a  $\theta^*$ .

**Teorema B.2.** *Los algoritmos (B.11) y (B.12), con  $\sigma_{eq}$  diseñada de acuerdo al método aproximado, garantizan lo siguiente:*

1. *Si  $\int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \bar{\theta}$ , donde  $\bar{\theta}$  es una matriz constante.*
2. *Si  $\varphi \in \mathcal{L}_\infty$  y cumple con la definición de excitación persistente, entonces  $\hat{\theta}(t)$  converge a  $\theta^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

□

*Demostración.*

Como se estableció anteriormente  $\Gamma(t)$  tiene un límite,  $\bar{\Gamma}$ , donde  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^T \geq 0$  es una matriz constante. Considere que  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ ,  $G(\hat{x})\hat{\sigma}_{eq}(t) = \theta^*\varphi$  y usando (B.8), de (B.23) se tiene

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t \hat{\theta}(t)\varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau - \int_0^t G(\tau)\sigma_{eq}(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau - \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau + \\
 &\quad + \hat{\theta}(t)Q_0 - \theta_0 Q_0 = 0 \\
 \hat{\theta}(t) \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau + \hat{\theta}(t)Q_0 - \theta^* \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau - \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau &= \theta_0 Q_0 \\
 \hat{\theta}(t) \left[ \int_0^t \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau + Q_0 \right] - \theta^* \left[ \Gamma^{-1}(t) - Q_0 \right] - \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau &= \theta_0 Q_0 \\
 \hat{\theta}(t)\Gamma^{-1}(t) - \theta^*\Gamma^{-1}(t) - \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau &= \theta_0 Q_0 - \theta^* Q_0 \\
 \tilde{\theta}(t)\Gamma^{-1}(t) &= \tilde{\theta}(0)Q_0 + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\theta}(t)\Gamma^{-1}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1} + \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau \tag{B.24}$$

y, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau = 0 \tag{B.25}$$

que se refiere a una condición del proceso de filtrado y proporciona la calidad en la convergencia, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\bar{\Gamma} \tag{B.26}$$

lo cual implica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta^* + \tilde{\theta}(0)\Gamma_0^{-1}\bar{\Gamma} = \bar{\theta} \quad (\text{B.27})$$

Entonces, tan rápido como el término  $\int_0^t G(\tau)\epsilon(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau$  converja a cero la estimación de los parámetros tenderá a  $\bar{\theta}$ .

La demostración de que  $\Gamma(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , si  $\varphi$  satisface la condición de excitación persistente es la misma que se presentó en la prueba del Teorema B.1. De este modo, el teorema queda demostrado. ■

# Bibliografía

---

- [Angulo and Levant, 2009] Angulo, M. and Levant, A. (2009). On robust output based finite-time control of lti systems using hosms. In *Proceedings of the 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Zaragoza, Spain.
- [Aurora and Ferrara, 2007] Aurora, C. and Ferrara, A. (2007). A sliding mode observer for sensorless induction motor speed regulation. *International Journal of Systems Science*, 38(11):913–929.
- [Bacciotti and Rosier, 2001] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2001). *Liapunov functions and stability in control theory*. Communications and Control Engineering. Springer, Berlin.
- [Baglietto et al., 2007] Baglietto, M., Battistelli, G., and Scardovi, L. (2007). Active mode observation of switching system based on a-priori knowledge of the continuous state. In *Proc. 46th IEEE Conf. Decision Control*, pages 1752–1757, New Orleans, USA.
- [Barbot et al., 2003] Barbot, J., Djemai, M., and Boukhobza, T. (2003). Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*, 5:513–527.
- [Barbot and Floquet, 2007] Barbot, J. and Floquet, T. (2007). Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 8(10):803–815.
- [Barbot et al., 2007] Barbot, J., Saadaoui, H., Djemai, M., and Manamanni, N. (2007). Non-linear observer for autonomous switching systems with jumps. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(4):537–547.
- [Bejarano et al., 2007] Bejarano, F., Fridman, L., and Poznyak, A. (2007). Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(18):1734–1753.
- [Bejarano and Fridman, 2009] Bejarano, F. J. and Fridman, L. (2009). Exact observer for switching linear systems via super-twisting algorithm. In *Proceedings of the 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Zaragoza, Spain.

- [Benallegue et al., 2007] Benallegue, A., Mokhtari, A., and Fridman, L. (2007). High-order sliding-mode observer for a quadrotor uav. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Published Online: 25 May 2007.
- [Chen and Lagoa, 2005] Chen, J. and Lagoa, C. (2005). Observer design for a class of switched systems. In *Proc. 44th IEEE Conf. Decision Control*, pages 2945–2950, Seville, Spain.
- [Davila et al., 2008] Davila, J., Fridman, L., Pisano, A., and Usai, A. (2008). Observation of a class of quasilinear systems by quasi-continuous high-order sliding modes. In *Proc. 47th IEEE Conf. Decision Control*, pages 2844 – 2849, Cancun, Mexico.
- [Davila et al., 2009a] Davila, J., Fridman, L., Pisano, A., and Usai, A. (2009a). Finite-time state observation for nonlinear uncertain systems via higher order sliding modes. *International Journal of Control*, 82(8):1564–1574.
- [Davila et al., 2006] Davila, J., Fridman, L., and Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10):1251–1262.
- [Davila et al., 2009b] Davila, J., Pisano, A., and Usai, A. (2009b). Finite-time observation of the continuous and discrete state for a class of nonlinear switched dynamics. In *Proceedings of the 3rd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, Zaragoza, Spain.
- [Edwards and Spurgeon, 1998] Edwards, C. and Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and applications*. Taylor and Francis, London.
- [Edwards et al., 2002] Edwards, C., Spurgeon, S., and Tan, C. P. (2002). On development and applications of sliding mode observers. In Yu, X. and Xu, J., editors, *Variable Structure Systems: Towards 21st Century*, Lecture Notes in Control and Information Science, pages 253–282. Springer Verlag, Berlin, Germany.
- [Filippov, 1988] Filippov, A. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [Fridman et al., 2007] Fridman, L., Levant, A., and Davila, J. (2007). Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *Int. J. System Science*, 38(10):773–791.
- [Fridman et al., 2008] Fridman, L., Shtessel, Y., Edwards, C., and Yan, X. (2008). Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 18(4-5):399–413.
- [Hashimoto et al., 1990] Hashimoto, H., Utkin, V., Xu, J. X., Suzuki, H., and Harashima, F. (1990). Vss observer for linear time varying system. In *Proceedings of IECON'90*, pages 34–39, Pacific Grove CA.
- [Hautus, 1983] Hautus, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50:353–368.

- 
- [Hautus and Silverman, 1983] Hautus, M. L. J. and Silverman, L. M. (1983). System structure and singular control. *Linear Algebra and its Applications*, 50:369–402.
- [Hou and Muller, 1992] Hou, M. and Muller, P. (1992). Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37(6):871–875.
- [Huang et al., 1996] Huang, A., Pivka, L., Wu, C., and Franz, M. (1996). Chua’s equation with cubic nonlinearity. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 6:2175–2222.
- [Hui and Zak, 2005] Hui, S. and Zak, S. (2005). Observer design for systems with unknown inputs. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 15:431–446.
- [Ioannou and Sun, 1996] Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA.
- [Isidori, 1996] Isidori, A. (1996). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, London, England.
- [Khalil, 1996] Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, U.S.A.
- [Levant, 1998] Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384.
- [Levant, 2003] Levant, A. (2003). High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941.
- [Levant, 2005] Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5):823–830.
- [Levant, 2006a] Levant, A. (2006a). Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. In *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*, pages 5585 – 5590, San Diego, CA, USA.
- [Levant, 2006b] Levant, A. (2006b). Homogeneous quasi-continuous sliding-mode control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 334:143–168.
- [Levant and Michael, 2008] Levant, A. and Michael, A. (2008). Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19:1657–1672.
- [Liberzon, 2003] Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA.
- [Lin and Antsaklis, 2009] Lin, H. and Antsaklis, P. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 54(2):308–322.
- [Luenberger, 1964] Luenberger, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron.*, (8):74–80.

- [Molinari, 1976a] Molinari, B. P. (1976a). Extended controllability and observability for linear system. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21(1):136–137.
- [Molinari, 1976b] Molinari, B. P. (1976b). A strong controllability and observability in linear multivariable control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21(5):761–764.
- [Moreno, 2001] Moreno, J. (2001). Existence of unknown input observers and feedback passivity for linear systems. In *Proc. 40th IEEE Conf. Decision Control*, pages 3366–3371, Orlando, Florida USA.
- [Moreno, 2006] Moreno, J. (2006). Unknown input observers for siso nonlinear systems. In *Proc. 39th IEEE Conf. Decision Control*, pages 790–795, Sydney, Australia.
- [Nijmeijer and Fossen, 1999] Nijmeijer, H. and Fossen, T. (1999). *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Springer Verlag.
- [Pisano and Usai, 2007] Pisano, A. and Usai, E. (2007). Globally convergent real-time differentiation via second order sliding modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10):833–844.
- [Poznyak, 2008] Poznyak, A. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Techniques*. Elsevier Science, Amsterdam-Boston.
- [Rocha-Cozatl and Moreno, 2004] Rocha-Cozatl, E. and Moreno, J. (2004). Dissipativity and design of unknown input observers for nonlinear systems. In *Proceedings of the 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 615–620, Stuttgart, Germany.
- [Rössler, 1976] Rössler, O. (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57:397–398.
- [Saadaoui et al., 2006] Saadaoui, H., Leon, J. D., Djemai, M., Manamanni, N., and Barbot, J. (2006). High order sliding mode and adaptive observers for a class of switched systems with unknown parameter: A comparative study. In *Proc. 45th IEEE Conf. Decision Control*, San Diego, USA.
- [Silverman, 1969] Silverman, L. (1969). Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, AC-14(3):270–276.
- [Soderstrom and Stoica, 1989] Soderstrom, T. and Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall International, Cambridge, Great Britain.
- [Tan and Edwards, 2003] Tan, C. and Edwards, C. (2003). Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 13(5):443–463.
- [Trentelman et al., 2001] Trentelman, H. L., Stoorvogel, A. A., and Hautus, M. (2001). *Control theory for linear systems*. Springer-Verlag, London, Great Britain.

- [Utkin et al., 1999] Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding Modes in Electromechanical Systems*. Taylor and Francis, London.
- [van der Schaft and Schumacher, 2000] van der Schaft, A. and Schumacher, H. (2000). *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*. Springer-Verlag, London.
- [Walcott and Zak, 1987] Walcott, B. and Zak, S. (1987). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 32(2):166–170.
- [Wonham, 1974] Wonham, W. M. (1974). *Lineal multivariable control: A geometric approach*. Lecture notes in economics and mathematical systems. Springer-Verlag, New York, first edition.
- [Yan and Edwards, 2007] Yan, X. and Edwards, C. (2007). Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using sliding mode observer. *Automatica*, 43(9):1605–1614.
- [Zasadzinski et al., 1994] Zasadzinski, M., Daurouch, M., and Xu., S. (1994). Full -order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39(3):606–609.