



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Continuidad y estabilidad en la dinámica de sistemas de transformaciones conformes por pedazos

Tesis

Para obtener el título de

Matemático

Presenta:

Renato Leriche Vázquez



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis: Dr. Guillermo Javier Sierra Loera

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

0349971



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo ~~respetual~~.

NOMBRE: Renato Leriche Vázquez
FECHA: 21- Noviembre -2005
FIRMA: *R. Leriche*

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“Continuidad y estabilidad en la dinámica de sistemas de transformaciones conformes por pedazos”

realizado por Renato Leriche Vázquez

con número de cuenta 09516028-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dr. Guillermo Javier Sienna Loera

G. Sienna

Propietario

Dr. Héctor Méndez Lango

Hector Méndez L.

Propietario

Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez

Ana Margarita Guzmán

Suplente

Dr. Antonio Lascrain Orive

Antonio Lascrain

Suplente

M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza

Ana I. Ramírez G.

Consejo Departamental de Matemáticas

Alejandro Bravo Mojica



M. en C. Alejandro Bravo Mojica

IAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Guillermo Sienra, pues gracias a su dirección, conocimientos y ánimos éste trabajo pudo lograrse.

A Ana Irene Ramírez, por su apoyo y aliento. A Ana Margarita Guzmán, Antonio Lascurain y Héctor Méndez por sus acertados comentarios y observaciones hacia mi trabajo.

Agradezco a Ana y Jorge (mis padres), a Mariana y Jorge (mis hermanos), y al resto de mi familia, por darme todo su cariño y apoyo desde siempre.

A mis amigos, Karina, Patricia, Humberto, Iván y Piña, por su invaluable amistad y su ayuda incondicional en tantas cosas.

A los cuates de la facultad, por hacer de la “fac” mucho más que una escuela.

Introducción

El estudio de los sistemas dinámicos de transformaciones conformes por pedazos es un tema relativamente nuevo en el área de los sistemas dinámicos discretos. Este tipo de sistemas están estrechamente relacionados con los sistemas hamiltonianos, y tienen aplicación en la teoría de billares y en la teoría de filtros digitales, una rama de la ingeniería eléctrica.

En este trabajo se demuestran algunos resultados sobre el conjunto excepcional, mejor conocido como *telaraña*, de sistemas asociados a transformaciones conformes (Möbius) por pedazos con dos dominios de definición. Para esta tesis se desarrolló un programa de computadora que permite visualizar la telaraña y el comportamiento de este tipo de sistemas, el cual resultó ser muy útil para reafirmar los resultados teóricos obtenidos, hacer conjeturas y elaborar contraejemplos. Las imágenes que se muestran fueron elaboradas con este programa.

En el primer capítulo de la tesis se presentan conceptos y resultados que serán necesarios para la comprensión y desarrollo de los teoremas que se demuestran en los capítulos siguientes. Se da una breve introducción a Sistemas Dinámicos, Transformaciones de Möbius, Transformaciones Conformes por Pedazos, Métrica de Hausdorff y Grupos de Transformaciones en $\hat{\mathbb{C}}$.

El teorema más importante que se demuestra en la tesis está en el capítulo dos. Este teorema trata sobre la continuidad de la función $\partial D \mapsto \text{Spid}(F)$ (esto es, a la frontera de los dominios de las funciones fijas f y g de Möbius que definen a F se le asocia la telaraña) en el espacio de Hausdorff $H(\hat{\mathbb{C}})$, la cual se presenta si la frontera de los dominios de la transformación por pedazos no intersecta al conjunto límite del grupo generado por las funciones de Möbius que definen la transformación por pedazos. Como precedentes

se obtienen algunos resultados sobre convergencia en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ y algunos lemas que muestran la relación entre la telaraña y el conjunto límite del grupo correspondiente.

En el capítulo tres se estudia la estabilidad estructural para transformaciones conformes (Möbius) por pedazos. Se demuestra que si el grupo generado por las transformaciones que definen a la transformación por pedazos es un grupo de Schottky y la frontera de los dominios está contenida en una región fundamental de ese grupo, entonces la transformación por pedazos es estructuralmente estable. Más aún, se demuestra que las dinámicas de las transformaciones cercanas a una transformación estable son cuasiconformemente conjugadas.

Hacemos notar que en esta tesis, aunque se trabaja en transformaciones definidas por dos transformaciones de Möbius por claridad de exposición, los resultados obtenidos se pueden extender naturalmente a cualquier número de funciones generadoras, y se mencionan los resultados que deben obtenerse como conjeturas.

En el apéndice se da una breve descripción del uso del programa de computadora. Este programa está elaborado con el lenguaje de programación *Java*, lo que permite que se pueda ejecutar en la mayoría de los sistemas operativos actuales. La interface es interactiva para el usuario y se diseñó de tal manera que fuera fácil de usar.

Renato Leriche Vázquez
Octubre 2005

Notación

\mathbb{N}	Los números naturales.
\mathbb{Z}	Los números enteros.
\mathbb{R}	Los números reales.
\mathbb{R}^n	El espacio euclidiano real n-dimensional.
\mathbb{C}	Los números complejos, el plano complejo.
$\widehat{\mathbb{C}}$	Los números complejos unión $\{\infty\}$, la esfera de Riemann.
$Im(\mathbb{C})$	La recta imaginaria, $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 0\}$.
$D(c, r)$	El disco abierto con centro en c y radio r .
$int(A)$	Interior del conjunto A .
$\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}_f(z)$	La órbita de z bajo la función f .
$fix(f)$	El conjunto del los puntos fijos de la función f .
$H(X)$	Subconjuntos compactos del espacio X .
V_x	Vecindad del elemento $x \in X$.
\mathbb{M}	El grupo de las transformaciones de Möbius.
$\Lambda = \Lambda(G)$	El conjunto límite del grupo $G < \mathbb{M}$.
$\Omega = \Omega(G)$	El conjunto regular del grupo $G < \mathbb{M}$.
$\mathcal{F}(F)$	El conjunto regular del la transformación por pedazos F .
$Spid(F)$	La telaraña, el conjunto excepcional de la transformación por pedazos F .

Índice general

Agradecimientos	2
Introducción	3
Notación	5
1. Conceptos y resultados preliminares	7
1.1. Sistemas dinámicos	7
1.2. Transformaciones de Möbius	8
1.3. Dinámica de transformaciones conformes por pedazos	10
1.4. Métrica de Hausdorff	14
1.5. Grupos de transformaciones en $\widehat{\mathbb{C}}$	17
2. Continuidad de la función $\partial D \mapsto Spid(F)$	19
2.1. Algunos resultados sobre convergencia en el espacio de Hausdorff $H(\widehat{\mathbb{C}})$	19
2.2. Teoremas acerca de la continuidad de la función $\partial D \mapsto Spid(F)$	27
2.3. Conjetura acerca de la continuidad en el caso general	38
3. Estabilidad	39
3.1. Ejemplos de inestabilidad	39
3.2. Estabilidad en funciones conformes por pedazos	42
3.3. Conjeturas acerca de la estabilidad	47
Apéndice	48
Bibliografía	51

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

En este capítulo presentamos algunos conceptos necesarios para la comprensión del material de los capítulos posteriores y resultados útiles para la demostración de los teoremas que desarrollamos en esta tesis.

1.1. Sistemas dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos estudia, a grandes rasgos, la evolución de un sistema a través del tiempo. Esta teoría tiene conexión estrecha con las teorías de Análisis y Geometría y es una rama de las matemáticas que se encuentra en creciente desarrollo. Existe bastante literatura acerca de este tema, consúltese por ejemplo [Devaney].

Un *sistema dinámico* es una terna (F, X, T) , donde

1. X es el *espacio fase* o *espacio de estados*, que puede ser un espacio topológico, una variedad, etc.,
2. T es el *tiempo*, que es un grupo (ó semigrupo) que actúa sobre X y que puede ser discreto (por ejemplo \mathbb{N} o \mathbb{Z}) o continuo (por ejemplo \mathbb{R} o \mathbb{R}^+), y

3. F es una función $F : X \times T \rightarrow X$ tal que

a) $F(x, 0) = x,$

b) $F(x, s + t) = F(F(x, s), t).$

Nótese que con una función $f : X \rightarrow X$ se puede generar el sistema $(f, X) = (F, X, \mathbb{N})$, donde $F(x, n) = f^n(x)$. A partir de aquí consideraremos sólo sistemas de este tipo.

La *órbita*¹ de un punto $x_0 \in X$ determinada por f es el conjunto $\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$. Un punto x_0 es *periódico* de *periodo* n si n es el mínimo entero positivo tal que $f^n(x_0) = x_0$, además a su órbita se le llama *periódica*. Si un punto tiene periodo 1, decimos que es un *punto fijo*.

Dos sistemas (f, X) y (f', X) son *equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow X$ tal que $f' = h^{-1} \circ f \circ h$, es decir, f y f' son transformaciones *conjugadas*.

1.2. Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius forman un conjunto muy importante y bien conocido de transformaciones en los números complejos. Consúltese [Ahlfors] para más detalles acerca de estas funciones.

Una *transformación de Möbius* es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida como $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Se puede normalizar T de manera que $ad - bc = 1$, por lo que a partir de ahora suponemos que toda transformación de Möbius está normalizada. La *traza* de T es $Tr(T) = a + d$.

Algunas propiedades de las transformaciones de Möbius:

1. Son biyectivas.

¹En algunos textos a este conjunto se le llama *órbita hacia adelante* y se reserva el término *órbita* u *órbita completa* para el conjunto $\{\dots, f^{-1}(z_0), z_0, f(z_0), \dots\}$

2. Su inversa también es de Möbius: $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.
3. Son conformes (preservan ángulos).
4. Llevan circunferencias en circunferencias (y por lo tanto, rectas en rectas, que son “circunferencias de radio infinito”).
5. Sólo tienen uno o dos puntos fijos, si tiene más de dos puntos fijos, entonces es la identidad. Si $Tr(T)^2 \neq 4$, T tiene dos puntos fijos; si $Tr(T)^2 = 4$ y $T \neq Id$, T tiene un punto fijo (lo anterior se deduce al resolver la ecuación $T(z) = z$).

Hay tres tipos de transformaciones de Möbius, T es:

1. *Elíptica* si $Tr(T)^2 \in [0, 4)$. Toda transformación elíptica es conjugada² a una rotación $z \mapsto e^{i\theta}z$, donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $\theta \neq 0$.
2. *Parabólica* si $Tr(T)^2 = 4$. Son conjugadas a la traslación $z \mapsto z + 1$.
3. *Hiperbólica*³ si $Tr(T)^2 \in (-\infty, 0) \cup [4, \infty)$ o $Tr(T)^2 \notin \mathbb{R}$. Cada transformación hiperbólica es conjugada a una transformación de la forma $z \mapsto \rho e^{i\theta}z$, donde $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, $0 < \rho \neq 1$.

De lo anterior, la dinámica de un sistema generado por una transformación de Möbius T queda determinado por su tipo:

1. *Elíptica*: Todo punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es periódico u $\mathcal{O}(z)$ es densa en una circunferencia.
2. *Parabólica*: Si z_0 es el punto fijo, $\lim T^n(z) = z_0$ para cualquier z . A z_0 que se le llama punto *parabólico*.
3. *Hiperbólica*: Para todo z , $\lim T^n(z) = z_j$, donde z_j es alguno de los puntos fijos; al punto con ésta propiedad se le llama *atractor*, y al otro punto fijo se le llama *repulsor*.

²Dos transformaciones de Möbius T_1 y T_2 son *conjugadas* si existe una transformación de Möbius h tal que $T_1 = h^{-1} \circ T_2 \circ h$.

³A este tipo de transformaciones se les llama *loxodrómicas* en algunos textos, y el término *hiperbólica* se reserva para las transformaciones conjugadas a una dilatación $z \mapsto \lambda z$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda \neq 1$.

1.3. Dinámica de transformaciones conformes por pedazos

La dinámica de las transformaciones conformes por pedazos es una generalización de las dinámicas de intercambio y traslaciones de intervalo. Pero el interés en el estudio de estas funciones es su potencial aplicación en la teorías de billares, sistemas hamiltonianos y filtros digitales, además de que es una nueva rama en sistemas dinámicos con cuestiones que están aún por responderse. Véanse [Goetz], [Cruz] y [Romero].

Una *transformación conforme por pedazos* es una función F de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo con una familia $\{A_m\}_{m \geq 1}$ de subconjuntos abiertos conexos de $\widehat{\mathbb{C}}$ (llamada la *región de conformidad*, y a cada A_m se le llama *átomo*) tal que:

1. $\bigcup_{m \geq 1} \overline{A_m} = \widehat{\mathbb{C}}$,
2. $F : A_m \rightarrow F(A_m)$ es conforme para cada m ,
3. Para cada A_m , F se extiende conformemente a $\overline{A_m}$ de manera que $F : \overline{A_m} \rightarrow \overline{F(A_m)}$ es biyectiva, y
4. ∂A_m es una curva cerrada simple.

A partir de ahora consideraremos sólo funciones conformes por pedazos con dos átomos, de la siguiente manera:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } D^c \\ g(z) & \text{en } D \end{cases}$$

donde $f, g : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ son de Möbius (en particular conformes), $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un abierto homeomorfo a un disco, D^c denota el interior de $\widehat{\mathbb{C}} - D$ y ∂D es una curva cerrada simple. Obsérvese que F no está definida en ∂D , pues f y g no pueden extenderse a ∂D de tal manera que F sea continua en $\widehat{\mathbb{C}}$, porque en general $f(C) \neq g(C)$. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de una transformación conforme por pedazos y la órbita de un punto.

La *telaraña* (o *conjunto irregular* o *excepcional*) de F , es el conjunto

$$Spid(F) = \bigcup_{n \geq 0} \overline{F^{-n}(\partial D)} .$$

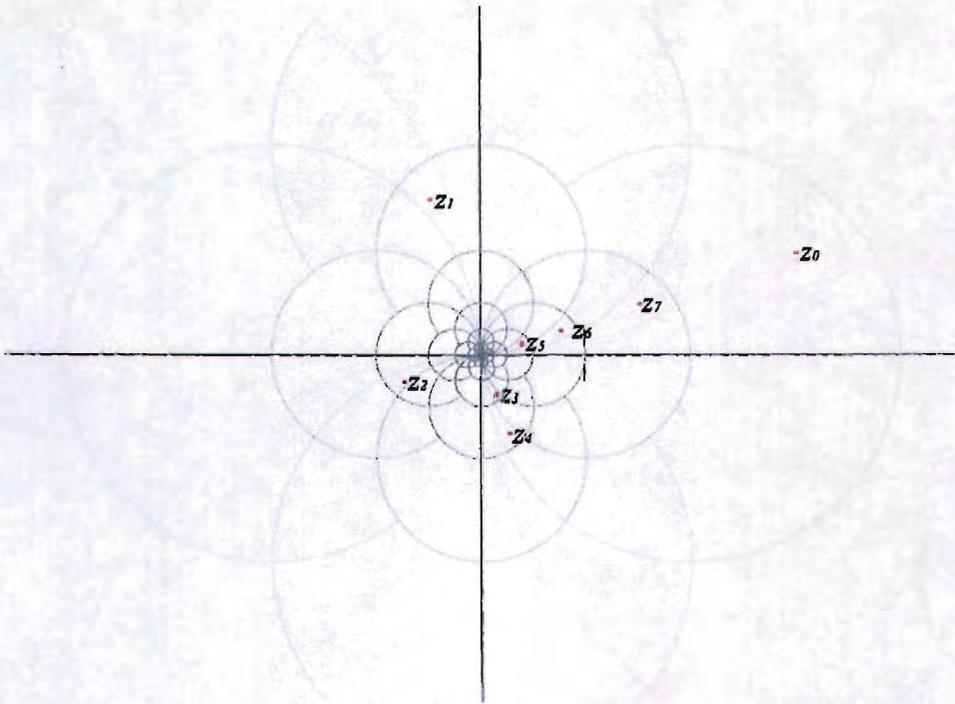


Figura 1.1: Dinámica de la función por pedazos con dos átomos definida como $z \mapsto 2z$ en $D = D(1, 1)$ y $z \mapsto \frac{1}{2}iz$ en D^c . Los arcos de circunferencia en color gris forman la telaraña. Además se muestra la órbita del punto $z_0 = 3 + i$, en color rojo. En este caso, $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$.

Obsérvese de la definición que la telaraña está formada por el conjunto de puntos que eventualmente caerán en ∂D bajo la iteración de F , es decir, puntos en los que F no está definida y, por lo tanto, un cambio significativo en la dinámica en una vecindad alrededor del punto (véase la figura 1.2). A este conjunto se le denota $Spid(F)$ por el término en inglés “spider’s web” que significa telaraña.

El conjunto regular de F , es

$$\mathcal{F}(F) = \widehat{\mathbb{C}} - Spid(F) .$$

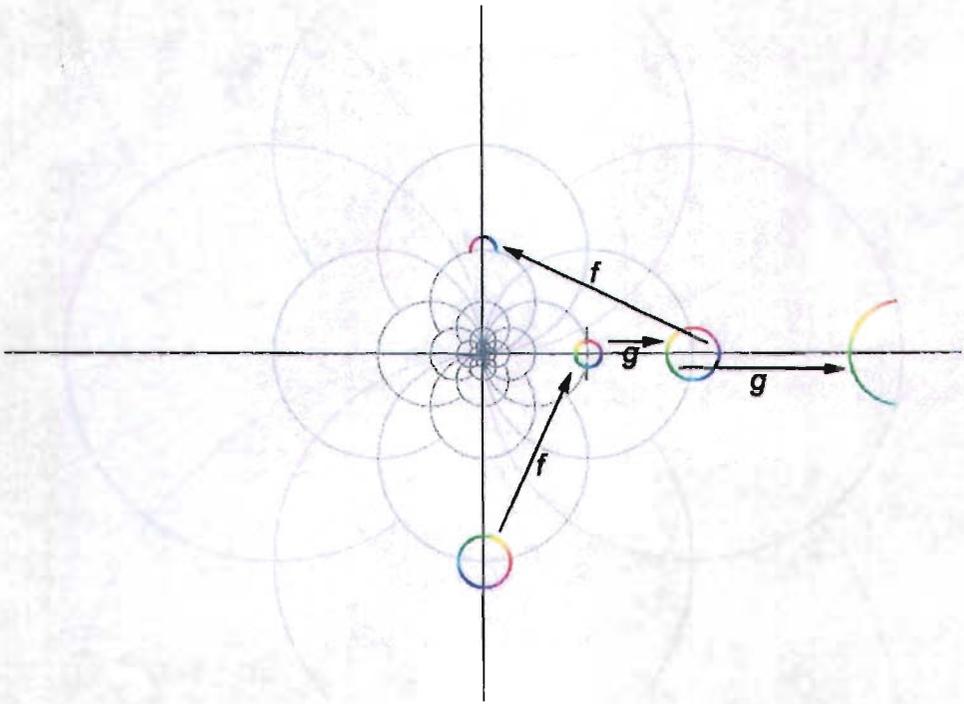


Figura 1.2: $Spid(F)$ y discontinuidad de F : La vecindad del 2 se “parte” al aplicar F , pues $2 \in \partial D$.

La función *itinerario* $I : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma^2$, donde $\Sigma^2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es llamado el *espacio corrimiento de dos símbolos*, está definida de la siguiente manera: $I(z) = (a_0 a_1 \dots)$, donde $a_n = 1$ si $F^n(z) \in D$ ó $a_n = 0$ si $F^n(z) \notin D$. Se define la partición $\mathcal{P}(F)$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ mediante la relación de equivalencia $z \sim w \iff I(z) = I(w)$.

Se puede demostrar que $\bigcup_{P \in \mathcal{P}(F)} \partial P = Spid(F)$ (véase [Romero]), por lo que $\mathcal{F}(F)$ es la unión de los interiores de las componentes de la partición generada por el itinerario, es decir, el conjunto regular está formado por *cel-das*, donde cada celda está definida por el conjunto de los puntos que tienen un mismo itinerario. En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de la relación entre los itinerarios y el conjunto regular.

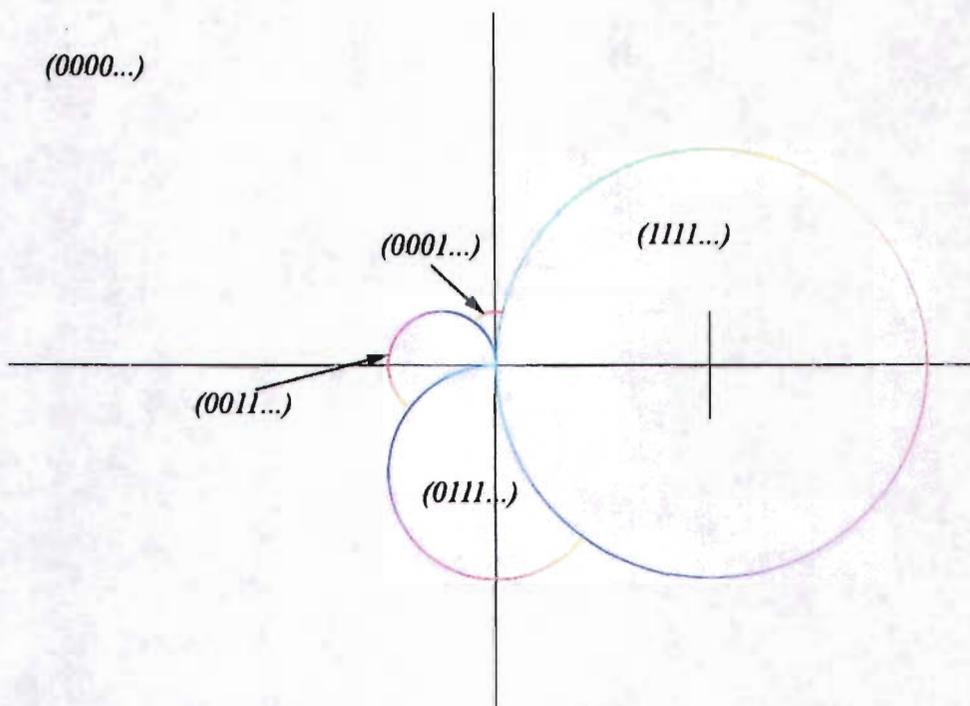


Figura 1.3: Sea F definida por $z \mapsto \frac{1}{2}z$ en $D = D(1, 1)$ y $z \mapsto 2iz$ en D^c . $\mathcal{F}(F)$ está formado por cinco celdas, definidas por los itinerarios $(1111\dots)$, $(0111\dots)$, $(0011\dots)$, $(0001\dots)$ y $(0000\dots)$.

De lo anterior, tenemos que el conjunto regular es invariante hacia adelante y que la telaraña es invariante hacia atrás, esto es, $F(\mathcal{F}(F)) \subset \mathcal{F}(F)$ y $F^{-1}(\text{Spid}(F)) \subset \text{Spid}(F)$.

1.4. Métrica de Hausdorff

En los capítulos siguientes es central el concepto de métrica de Hausdorff, por lo que damos una breve introducción a este concepto y algunos resultados útiles. Consúltese [PJS] para mayor referencia acerca de este tema.

Una *métrica* (o *distancia*) definida sobre un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$ (simetría).
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in X$ (desigualdad del triángulo).

Un *espacio métrico* es un conjunto X con una métrica d .

Ejemplos:

1. La *métrica euclidiana* en \mathbb{R}^n está dada por la longitud del segmento de recta entre dos puntos, así, dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, la distancia euclidiana entre ellos es $d(p, q) = |p - q|$, donde $|\cdot|$ es la norma usual.
2. La *métrica esférica* en $\widehat{\mathbb{C}}$ está dada por la longitud del arco de circunferencia (parte de un círculo máximo) que une los dos puntos resultado de la proyección estereográfica de $\widehat{\mathbb{C}}$ en la esfera. Así que dados $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$, la distancia esférica es $d(z, w) = \arccos(\Pi(z) \cdot \Pi(w))$, donde Π es la proyección estereográfica de $\widehat{\mathbb{C}}$ en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y \cdot es el producto punto usual en \mathbb{R}^3 . De la definición, $d(z, w) \leq \pi$ para todos $z, w \in \widehat{\mathbb{C}}$; por ejemplo, $d(0, \infty) = \pi$, $d(0, 1) = \pi/2$ y $d(1, \infty) = \pi/2$.
3. Otra definición de *métrica esférica* en $\widehat{\mathbb{C}}$ es la longitud del segmento de recta, en el espacio, entre dos puntos resultado de la proyección estereográfica de $\widehat{\mathbb{C}}$ en la esfera. De modo que $d(z, w) = |\Pi(z) - \Pi(w)|$. Por ejemplo, $d(0, \infty) = 2$, $d(0, 1) = \sqrt{2}$ y $d(1, \infty) = \sqrt{2}$.

Dado un espacio métrico completo X con métrica d , se puede definir la *métrica de Hausdorff* en $H(X)$ (el conjunto de los subconjuntos compactos de X , que en este caso serán los cerrados y acotados, ya que X es completo) de la siguiente manera: Sean $A, B \in H(X)$, el ϵ -collar de A es

$$A_\epsilon = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \epsilon, \text{ para toda } a \in A\}.$$

La métrica de Hausdorff se define como

$$h(A, B) = \inf\{\epsilon \mid A \subset B_\epsilon \text{ y } B \subset A_\epsilon\}.$$

Otra manera de definir la métrica de Hausdorff es

$$h(A, B) = \sup\{d(a, B), d(b, A) \mid a \in A, b \in B\}$$

donde $d(a, B) = \inf\{d(a, b) \mid b \in B\}$.

Algunas propiedades de la métrica de Hausdorff:

Proposición 1.4.1 $h(\{a\}, \{b\}) = d(a, b)$.

Demostración. Sea $r = d(a, b)$. Es claro que r es el número más pequeño tal que $\{a\} \subset \{b\}_r$ y $\{b\} \subset \{a\}_r$, pues $b \in \{a\}_r = \overline{D(r, a)}$ y $a \in \{b\}_r = \overline{D(r, b)}$. \square

Proposición 1.4.2 $h(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) = r$ si $h(A_1, B_1) = h(A_2, B_2) = r$.

Demostración. Como r es el número más pequeño tal que $A_1 \subset (B_1)_r$, $B_1 \subset (A_1)_r$, $A_2 \subset (B_2)_r$ y $B_2 \subset (A_2)_r$, entonces r es el número más pequeño tal que $A_1 \cup A_2 \subset (B_1)_r \cup (B_2)_r$ y $B_1 \cup B_2 \subset (A_1)_r \cup (A_2)_r$. Como $(A \cup B)_\epsilon = \{x \mid d(x, y) \leq \epsilon, y \in A \cup B\} = A_\epsilon \cup B_\epsilon$, entonces $A_1 \cup A_2 \subset (B_1 \cup B_2)_r$ y $B_1 \cup B_2 \subset (A_1 \cup A_2)_r$, de lo que se deduce la afirmación. \square

Proposición 1.4.3 Si $h(A_i, B_i) = r$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $h(\overline{\bigcup_{i \geq 0} A_i}, \overline{\bigcup_{i \geq 0} B_i}) = r$.

Demostración. Sean $A'_n = \bigcup_{i \leq n} A_i$, $B'_n = \bigcup_{i \leq n} B_i$, $A' = \overline{\bigcup_{i \geq 0} A_i}$ y $B' = \overline{\bigcup_{i \geq 0} B_i}$. Por inducción y utilizando la proposición 1.4.2, se deduce que $h(A'_n, B'_n) = r$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la desigualdad del triángulo $r = h(A'_n, B'_n) \leq h(A'_n, A') + h(A', B')$ y $h(A'_n, B') \leq h(A'_n, B'_n) + h(B'_n, B') = r + h(B'_n, B')$.

Es fácil demostrar que $h(A'_n, A') \rightarrow 0$ y $h(B'_n, B') \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ (véase el lema 2.1.6 en el siguiente capítulo), por lo que se deduce de las desigualdades anteriores que $r \leq h(A', B') \leq r$. \square

Proposición 1.4.4 Si $f : X \rightarrow X$ es una isometría, entonces $f^* : H(X) \rightarrow H(X)$ es una isometría, donde $f^*(A) = f(A)$.

Demostración. Sea d la métrica en X y h la métrica de Hausdorff inducida por d en $H(X)$. Como f es isometría, entonces $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= \inf\{d(f(a), f(b)) \mid f(b) \in f(B)\} \\ &= \inf\{d(a, b) \mid b \in B\} \\ &= h(A, B). \end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= \sup\{d(f(a), f(B)), d(f(b), f(A)) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \sup\{d(a, B), d(b, A) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= h(A, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f^* es isometría. \square

1.5. Grupos de transformaciones en $\widehat{\mathbb{C}}$

El estudio de los grupos de transformaciones sobre $\widehat{\mathbb{C}}$ surge de la relación que tienen éstos con las superficies de Riemann, pues tales superficies son invariantes bajo alguno de estos grupos. Sin embargo, el estudio de estos grupos se ha convertido en una teoría aparte, con relaciones en las teorías de sistemas dinámicos y fractales. Consúltese [Maskit] para más referencias sobre el tema.

El conjunto de las transformaciones de Möbius forman el grupo \mathbb{M} , que es isomorfo a $PGL(2, \mathbb{C})$, el grupo de matrices proyectivizadas⁴ de 2×2 no singulares con entradas complejas. Como se mencionó antes, se pueden normalizar las transformaciones de forma que la matriz asociada tenga determinante igual a 1, de modo que el grupo de transformaciones de Möbius de este tipo es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$, que es el grupo de matrices como el anterior, pero con determinante 1.

Sea G un subgrupo de \mathbb{M} . Se dice que la acción de G en un punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ es *libremente discontinua* si existe una vecindad V_z de z tal que $g(V_z) \cap V_z = \emptyset$ para toda $g \in G$ diferente de la identidad; la acción es sólo *discontinua* si cumple la condición excepto para un número finito de g 's. El conjunto de puntos en los cuales la acción de G es libremente discontinua se llama *conjunto regular libre*, y se denota por $\Omega^\circ = \Omega^\circ(G)$, y el conjunto donde la acción es discontinua se llama *conjunto regular* y se denota por $\Omega = \Omega(G)$. Si el grupo G actúa libremente discontinuo en algún punto $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, se le llama *grupo kleiniano*⁵. Un punto w es un *punto límite* de G si existe un punto $z \in \Omega$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z) \rightarrow w$. El conjunto de puntos límite de G se llama *conjunto límite* y se denota por $\Lambda = \Lambda(G)$.

A continuación presentamos dos resultados sobre los conjuntos límite que serán de ayuda en la demostración de los teoremas importantes del siguiente capítulo. Las demostraciones de estos teoremas se pueden consultar en [Maskit].

⁴Una matriz *proyectivizada* es una clase de matrices de $GL(2, \mathbb{C})$ determinada por la relación de equivalencia $A \sim B \iff B = \lambda A$, con $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.

⁵Esta definición de grupo kleiniano ha quedado en desuso, actualmente se define como grupo kleiniano cualquier grupo discreto de transformaciones de Möbius.

Teorema 1.5.1 Si $\Lambda(G)$ tiene más de dos puntos,

$$\Lambda(G) = \overline{\bigcup_{g \in G \text{ hiperbólica}} \text{fix}(g)},$$

donde $\text{fix}(g)$ es el conjunto de los puntos fijos de g .

Teorema 1.5.2 Sea $z_0 \in \Lambda(G)$ y $w_0 \in \Omega(G)$ tal que $g_m(w_0) \rightarrow z_0$, $g_m \in G$, entonces para todo $w \in \Omega(G)$, $g_m(w) \rightarrow z_0$.

Teorema 1.5.3 $\Lambda(G)$ es cerrado, G -invariante (es decir, $g(\Lambda) = \Lambda$ para toda $g \in G$) y no es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Teorema 1.5.4 $\Lambda \cap \Omega = \emptyset$ y $\widehat{\mathbb{C}}$ es la unión disjunta de Λ y Ω .

El conjunto límite de un grupo kleiniano G se puede definir también como el conjunto de puntos de acumulación⁶ del conjunto $Gp = \{g(p) \mid g \in G\}$. Obsérvese que el conjunto de puntos de acumulación de Gp es igual al conjunto de puntos de acumulación de Gq para cualesquiera puntos $p \neq q$ en $\widehat{\mathbb{C}}$, como se puede concluir de los teoremas 1.5.2 y 1.5.3.

Se puede demostrar que todo grupo kleiniano G es discreto. Sin embargo, no todo grupo discreto de \mathbb{M} es un grupo kleiniano, pues existen grupos discretos cuyo conjunto límite es toda la esfera $\widehat{\mathbb{C}}$.

⁶Un *punto de acumulación* p de un conjunto $A \subset X$, donde X es un espacio topológico, es tal que toda vecindad V de p cumple que $A - \{p\} \cap V \neq \emptyset$.

Capítulo 2

Continuidad de la función

$$\partial D \mapsto Spid(F)$$

El objetivo en este capítulo es investigar la continuidad de la función $C \mapsto Spid(F)$ en $H(\widehat{\mathbb{C}})$, donde F es una transformación conforme por pedazos de la forma

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } D^c \\ g(z) & \text{en } D \end{cases}$$

f, g son de Möbius, $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un conjunto abierto homeomorfo a un disco, D^c es el interior de $\widehat{\mathbb{C}} - D$ y $C = \partial D$ es una curva de Jordan.

A lo largo de este capítulo F, f, g, D, D^c y C estarán definidas como se menciona arriba, a menos de que se indique lo contrario.

2.1. Algunos resultados sobre convergencia en el espacio de Hausdorff $H(\widehat{\mathbb{C}})$

Una manera de demostrar la continuidad de la función $C \mapsto Spid(F)$ es probar que la sucesión $\{Spid(F_m)\}$ converge a $Spid(F)$ para cualquier sucesión $\{C_m\}$ que converja a C (en el espacio $H(\widehat{\mathbb{C}})$ con la métrica de Hausdorff), donde F_m está definida como

$$F_m(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } D_m^c \\ g(z) & \text{en } D_m, \end{cases}$$

$C_m = \partial D_m$ y D_m^c es el interior de $\widehat{C} - D_m$. La convergencia de sucesiones de conjuntos cerrados en \widehat{C} se puede definir de la manera usual usando la métrica de Hausdorff en el espacio $H(\widehat{C})$, pero nos será más útil la caracterización de la topología de $H(\widehat{C})$ que se muestra a continuación.

La *topología de Hausdorff* de $H(\widehat{C})$ se puede caracterizar de la siguiente forma (véase [McMullen]): una sucesión $K_m \rightarrow K$ en $H(\widehat{C})$ si

1. toda vecindad de $z \in K$ interseca a todo K_m , salvo a un número finito,
2. si toda vecindad de z interseca a una infinidad de K_m 's, entonces $z \in K$.

Dada una sucesión $\{K_m\}$ arbitraria de cerrados en \widehat{C} , se definen $\liminf K_m$ como el conjunto más grande que satisface la condición 1, y $\limsup K_m$ como el conjunto más pequeño que satisface la condición 2. $\liminf K_m$ y $\limsup K_m$ son cerrados y $\liminf K_m \subset \limsup K_m$. De manera que $K_m \rightarrow K$ si y sólo si $\liminf K_m = \limsup K_m$ y en este caso denotaremos $K = \lim K_m$.

A continuación demostramos algunos lemas sobre convergencia en $H(\widehat{C})$ mediante la comprobación de los dos requisitos que caracterizan la topología de Hausdorff.

Sean $A_m \rightarrow A$ y $B_m \rightarrow B$ en $H(\widehat{C})$, entonces:

Lema 2.1.1 $A_m \cup B_m \rightarrow A \cup B$.

Demostración.

1. Sea $x \in A \cup B$. Entonces toda V_x interseca a todo A_m , salvo a un número finito, o a todo B_m , salvo a un número finito. Por lo tanto, toda V_x interseca a todo $A_m \cup B_m$, salvo a un número finito.
2. Sea x tal que toda V_x interseca a una infinidad de $A_m \cup B_m$'s. Entonces V_x interseca a una infinidad de A_m 's o de B_m 's, por lo tanto $x \in A$ o $x \in B$. \square

Lema 2.1.2 $A_m \cap B_m \rightarrow (A \cap B) - \Gamma$, donde $\Gamma = \{x \in A \cap B \mid \text{existe } V_x \text{ tal que intersecciona sólo a un número finito de } A_m \cap B_m\}$ es definido como el conjunto de puntos aislados.

Demostración.

1. Sea $x \in (A \cap B) - \Gamma$. Entonces toda V_x intersecciona a todo A_m , salvo a un número finito, y a todo B_m , salvo a un número finito. Por otra parte, $x \notin \Gamma$, por lo tanto, toda V_x intersecciona todo $A_m \cap B_m$, salvo a un número finito.
2. Sea x tal que toda V_x intersecciona a una infinidad de $A_m \cap B_m$'s. Entonces V_x intersecciona a una infinidad de A_m 's y de B_m 's, por lo tanto $x \in A$ y $x \in B$. Además, por la hipótesis, $x \notin \Gamma$, por lo tanto $x \in (A \cap B) - \Gamma$. \square

Lema 2.1.3 $\Gamma \subset \partial(A \cap B)$.

Demostración. Si $x \in \Gamma$, entonces existe V_x tal que intersecciona sólo a una cantidad finita de $A_m \cap B_m$'s. Entonces toda V_x intersecciona a una infinidad de $(A_m \cap B_m)^c$'s. Pero $(A_m \cap B_m)^c = A_m^c \cup B_m^c \subset \overline{A_m^c \cup B_m^c} = \overline{A_m^c} \cup \overline{B_m^c}$. Por el lema 2.1.1 ya que V_x intersecciona a una infinidad de $\overline{A_m^c} \cup \overline{B_m^c}$, $x \in \overline{A^c} \cup \overline{B^c} = \overline{(A \cap B)^c}$. Como $x \in A \cap B$, entonces $x \in (A \cap B) \cap \overline{(A \cap B)^c} = \partial(A \cap B)$. \square

Lema 2.1.4 Si $\partial A_m \rightarrow \partial A$, entonces $\overline{A_m^c} \rightarrow \overline{A^c}$.

Demostración.

1. Sea $x \in \overline{A^c}$. $\overline{A^c} = A^c \cup \partial A$, de modo que
 - a) Si $x \in A^c$, entonces $x \notin A$ y por lo tanto existe V_x tal que intersecciona sólo a un número finito de A_m 's, lo que implica que toda V_x intersecciona a todo $A_m^c \subset \overline{A_m^c}$, excepto a un número finito.
 - b) Si $x \in \partial A$, por hipótesis toda V_x intersecciona a todo $\partial A_m \subset \overline{A_m^c}$, excepto a un número finito.

2. Sea x tal que toda V_x interseca a una infinidad de $\overline{A_m^c}$'s.
 - a) Si $x \in A$, entonces toda V_x interseca todo A_m , salvo a un número finito. Por las hipótesis, toda V_x interseca a una infinidad de $A_m \cap \overline{A_m^c} = \partial A_m \rightarrow \partial A$, de lo que $x \in \partial A \subset \overline{A_m^c}$.
 - b) Si $x \notin A$, entonces $x \in A^c \subset \overline{A^c}$. \square

Lema 2.1.5 $f(A_m) \rightarrow f(A)$, si $f : \widehat{C} \rightarrow \widehat{C}$ es continua y biyectiva.

Demostración.

1. Sea $f(x) \in f(A)$. Sean $x_m \in A_m$ tales que $x_m \rightarrow x$ (esta sucesión se puede construir porque toda V_x interseca a toda A_m , salvo a un número finito); entonces como f es continua, $f(x_m) \rightarrow f(x)$, por lo tanto toda $V_{f(x)}$ interseca a toda $f(A_m)$, salvo a un número finito.
2. Sea y tal que toda V_y interseca a una infinidad de $f(A_m)$'s. Así que puedo tomar $y_m = f(x_m) \in f(A_m)$ tal que $y_m \rightarrow y$. Como f es biyectiva, existe un único $x \in X$ tal que $y = f(x)$, de manera que $f(x_m) \rightarrow f(x)$ y, como f es continua y biyectiva, $x_m \rightarrow x$. Por lo tanto, toda V_x interseca a una infinidad de A_m 's y en consecuencia $x \in A$ y $y = f(x) \in f(A)$. \square

Sea $\{K_i\}$ una sucesión arbitraria de subconjuntos cerrados.

Lema 2.1.6 $\bigcup_{i \leq m} K_i \rightarrow \overline{\bigcup_{i \geq 0} K_i}$

Demostración. Sean $A_m = \bigcup_{i \leq m} K_i$ y $A = \overline{\bigcup_{i \geq 0} K_i}$.

1. Sea $x \in A$. Por definición de cerradura, toda vecindad V_x interseca a $\bigcup_{i \geq 0} K_i$, por lo tanto, interseca a todo A_m , salvo a un número finito.
2. Sea x tal que toda V_x interseca a una infinidad de A_m 's. Entonces toda V_x interseca a $\bigcup_{i \geq 0} K_i$, por lo tanto $x \in A$. \square

La telaraña $Spid(F)$ es, a grandes rasgos, la unión de órbitas de subconjuntos de $C = \partial D$ formadas por la aplicación de transformaciones de Möbius, por lo que será útil para ganar intuición del comportamiento de la convergencia $Spid(F_m) \rightarrow Spid(F)$, el análisis de la convergencia de órbitas de conjuntos cerrados bajo transformaciones de Möbius. Los dos siguientes lemas y el teorema consecuente no serán utilizados en la demostración del teorema de continuidad de la función que nos interesa.

Sea $K \subset \widehat{\mathbb{C}}$ cerrado y f una transformación de Möbius. Definimos la *órbita* de K como

$$\mathcal{O}(K) = \bigcup_{z \in K} \mathcal{O}(z) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(K).$$

Como la dinámica está caracterizada por el tipo de transformación de Möbius, tenemos que:

1. Si f es elíptica, entonces $\overline{\mathcal{O}(K)} = \mathcal{O}(K)$ si f es conjugada a una rotación con ángulo racional, pues $\mathcal{O}(K)$ es una unión finita de conjuntos cerrados; u $\overline{\mathcal{O}(K)}$ es homeomorfo a un anillo o a un disco cerrado si f es conjugada a una rotación con ángulo irracional, pues $\overline{\mathcal{O}(z)}$ es una circunferencia para cada $z \in K$.
2. Si f es parabólica, $\overline{\mathcal{O}(K)} = \mathcal{O}(K) \cup \{z_0\}$, donde z_0 es el punto parabólico.
3. Si f es hiperbólica, $\overline{\mathcal{O}(K)} = \mathcal{O}(K) \cup \{z_0\}$, donde z_0 es el punto atractor.

Lema 2.1.7 Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de Möbius hiperbólica o parabólica y z_0 el punto fijo repulsor o parabólico de f según sea el caso. Si $\{K_m\}$ es una sucesión en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $z_0 \notin K_m$ y $K_m \rightarrow K$ con la topología de Hausdorff, entonces $\overline{\mathcal{O}(K_m)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}(K)}$.

Demostración. Si z_0 es repulsor, $z_0 \notin \overline{\mathcal{O}(K_m)}$ para toda m , y $z_0 \notin \overline{\mathcal{O}(K)}$. Si z_0 es parabólico, $z_0 \notin \mathcal{O}(K_m)$ para toda m , y $z_0 \notin \mathcal{O}(K)$, pero $\lim f^n(w) = z_0$ para cualquier $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, por lo que z_0 está en la cerradura de las órbitas de K_m y K , para toda m .

Demostremos los dos incisos que caracterizan la convergencia en la topología de Hausdorff:

1. Sea $z \in \overline{\mathcal{O}(K)}$. Si $z \in \mathcal{O}(K)$ entonces $z = f^n(w)$, para algún $w \in K$. Como $K_m \rightarrow K$, entonces existen $w_m \in K_m$ tales que $w_m \rightarrow w$. Dado que f^n es continua, $f^n(w_m) \rightarrow f^n(w) = z$, además $f^n(w_m) \in \overline{\mathcal{O}(K_m)}$, por lo que toda vecindad de z interseca a todo $\overline{\mathcal{O}(K_m)}$, salvo a un número finito.

Si $z \in \overline{\mathcal{O}(K)} - \mathcal{O}(K)$, hay que considerar que

- a) si f es parabólica, z_0 parabólico, entonces $z = z_0$ y toda vecindad de z interseca a todo $\overline{\mathcal{O}(K_m)}$, pues $z_0 \in \overline{\mathcal{O}(K_m)}$ para toda m .
 - b) si f es hiperbólica, z_0 repulsor y z_1 atractor, entonces $z = z_1$ y toda vecindad de z interseca a todo $\overline{\mathcal{O}(K_m)}$, pues $z_1 \in \overline{\mathcal{O}(K_m)}$ para toda m .
2. Si toda vecindad de $z \in \widehat{\mathbb{C}} - \{z_0\}$ interseca a una infinidad de $\overline{\mathcal{O}(K_m)}$'s, entonces existen $z_m \in \overline{\mathcal{O}(K_m)}$ tales que $z_m \rightarrow z$.

Si hay una subsucesión $z_m \in \overline{\mathcal{O}(K_m)}$, entonces existen $w_m \in K_m$ tales que $z_m = f^{n_m}(w_m)$. Si $\#\{n_m\} < \infty$, hay al menos un índice $n_0 \in \{n_m\}$ que se presenta una infinidad de veces en la sucesión $f^{n_m}(w_m)$, entonces tomo la subsucesión $z_m = f^{n_0}(w_m)$. Como f^{-n_0} es continua, $w_m = f^{-n_0}(z_m) \rightarrow w = f^{-n_0}(z)$, de aquí que toda vecindad de w interseca a una infinidad de K_m , por lo tanto $w \in K$ y $z = f^{n_0}(w) \in \overline{\mathcal{O}(K)}$. Si $\#\{n_m\} = \infty$, entonces $n_m \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$, por lo tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \lim_{m \rightarrow \infty} f^{n_m}(w_m) = z_i = z$, donde z_i es el punto repulsor o parabólico según sea f hiperbólica o parabólica respectivamente, por lo que $z \in \overline{\mathcal{O}(K)}$.

Si hay una subsucesión $z_m \in \overline{\mathcal{O}(K_m)} - \mathcal{O}(K_m)$, entonces $z_m = z_i$ para toda m , donde z_i es el punto repulsor o parabólico según sea f hiperbólica o parabólica respectivamente, por lo tanto $z = z_i$ y $z \in \overline{\mathcal{O}(K)}$. \square

Lema 2.1.8 Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de Möbius elíptica. Si $\{K_m\}$ es una sucesión en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $K_m \rightarrow K$ con la topología de Hausdorff, entonces $\overline{\mathcal{O}(K_m)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}(K)}$.

Demostración. Como f es de Möbius elíptica, existe $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de Möbius tal que $r = h \circ f \circ h^{-1}$ es elíptica e isometría con la métrica esférica, pues f es conjugada a una rotación por el origen. Por la proposición 1.4.4 $r^* : H(\widehat{\mathbb{C}}) \rightarrow H(\widehat{\mathbb{C}})$, donde $r^*(K) = r(K)$, es isometría en $H(\widehat{\mathbb{C}})$.

Denotemos $K'_m = h(K_m)$ y $K' = h(K)$. Como h es homeomorfismo, por el lema 2.1.5 $K'_m \rightarrow K'$ en $H(\widehat{\mathbb{C}})$, esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > M$, $d(K'_m, K') < \epsilon$. Dado que r^* es isometría, $d(K'_m, K') = d(r(K'_m), r(K')) = d(r^n(K'_m), r^n(K'))$ para toda n . Por la proposición 1.4.3

$$d(r^n(K'_m), r^n(K')) = d\left(\overline{\bigcup_{n \geq 0} r^n(K'_m)}, \overline{\bigcup_{n \geq 0} r^n(K')}\right) = d(\overline{\mathcal{O}_r(K'_m)}, \overline{\mathcal{O}_r(K')}) < \epsilon$$

de lo que se sigue que $\overline{\mathcal{O}_r(K'_m)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_r(K')}$.

Por otra parte h^{-1} es también un homeomorfismo, por lo que $h^{-1}(\overline{\mathcal{O}_r(h(K_m))}) \rightarrow h^{-1}(\overline{\mathcal{O}_r(h(K))})$. Pero

$$h^{-1}(\overline{\mathcal{O}_r(h(K))}) = \overline{h^{-1}(\mathcal{O}_r(h(K)))} = \overline{\mathcal{O}_{h^{-1} \circ r \circ h}(K)} = \overline{\mathcal{O}_f(K)}$$

por lo tanto $\overline{\mathcal{O}_f(K_m)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}_f(K)}$. \square

De los lemas anteriores, se tiene el

Teorema 2.1.1 Si f es de Möbius y $\{K_m\}$ es una sucesión en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ tal que $z_0 \notin K_m$ y $K_m \rightarrow K$ con la topología de Hausdorff, donde z_0 es repulsor o parabólico, entonces $\overline{\mathcal{O}(K_m)} \rightarrow \overline{\mathcal{O}(K)}$.

Es importante hacer notar que los lemas y teorema anteriores son ciertos sólo en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ (con la métrica esférica), más no en $H(\mathbb{C})$ (con la métrica euclidiana). Tómese por ejemplo $f(z) = 2z$, cuyo punto fijo repulsor es 0, sean $K = \partial D(0, 1)$ y $K_m = \partial D(\frac{1}{m}, 1)$; es claro que $K_m \rightarrow K$. $\mathcal{O}(K) = \bigcup_{n \geq 0} \partial D(0, 2^n)$ y $\mathcal{O}(K_m) = \bigcup_{n \geq 0} \partial D(\frac{2^n}{m}, 2^n)$, la distancia de Hausdorff euclidiana

$$d_E(f^n(K), f^n(K_m)) = \frac{2^n}{m} \rightarrow \infty, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

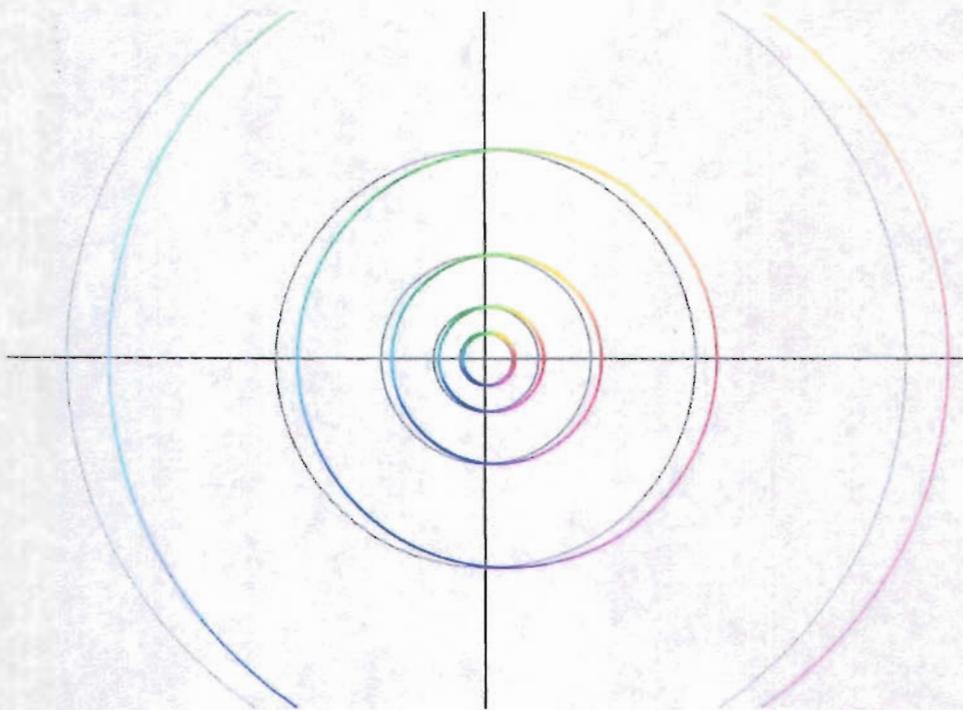


Figura 2.1: Ejemplo de convergencia de órbitas con la métrica esférica. Las circunferencias en gris son la órbita de $K = \partial D(0, 1)$ y las que tienen color son la órbita de $K_{10} = \partial D(\frac{1}{10}, 1)$.

por lo que $d_E(\overline{\mathcal{O}(K)}, \overline{\mathcal{O}(K_m)}) \rightarrow \infty$ para toda m y por lo tanto $\mathcal{O}(K_m) \not\rightarrow \mathcal{O}(K)$; por otro lado, la distancia esférica

$$d_S(f^n(K), f^n(K_m)) = \cos^{-1}\left(\frac{2^{2n+2}(1 + \frac{1}{m}) + (2^{2n} - 1)(2^{2n}(1 + \frac{1}{m})^2 - 1)}{(2^{2n} + 1)(2^{2n}(1 + \frac{1}{m})^2 + 1)}\right) \rightarrow 0,$$

así que $d_S(\overline{\mathcal{O}(K)}, \overline{\mathcal{O}(K_m)}) < \infty$ para toda m y por el teorema 2.1.1 sabemos que $\mathcal{O}(K_m) \rightarrow \mathcal{O}(K)$. Véase la figura 2.1 que ilustra este ejemplo.

2.2. Teoremas acerca de la continuidad de la función $\partial D \mapsto Spid(F)$

Restringiremos el dominio de la función $C \mapsto Spid(F)$ a

$$\mathcal{C} = \{C \in H(\widehat{\mathbb{C}}) \mid C \text{ es una curva de Jordan}\}$$

Es necesario que $C = \partial D$ sea de Jordan, pues C debe separar a $\widehat{\mathbb{C}}$ en las dos partes que forman el dominio de conformidad de F : el interior D y el exterior D^c . Nótese que como $C \subset H(\widehat{\mathbb{C}})$, \mathcal{C} también tiene la topología de Hausdorff.

Definimos

$$Spid_N(F) = \bigcup_{n=0}^N \overline{F^{-n}(\partial D)}.$$

Teorema 2.2.1 La función $C \mapsto Spid_N(F)$ es continua de \mathcal{C} en $H(\widehat{\mathbb{C}})$ para toda $N \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea C_m una sucesión en \mathcal{C} tal que $C_m \rightarrow C = \partial D$; además, sean D_m y D_m^c subconjuntos abiertos de $\widehat{\mathbb{C}}$ tales que $C_m = \partial D_m = \partial D_m^c$. Como D , D^c , D_m y D_m^c son homeomorfos a discos para toda m , tenemos que $\overline{D_m} \rightarrow \overline{D}$ y $\overline{D_m^c} \rightarrow \overline{D^c}$ en $H(\widehat{\mathbb{C}})$.

Dado que f y g son de Möbius, por el lema 2.1.5 se tiene que

$$f^{-1}(C_m) \rightarrow f^{-1}(C) \text{ y } g^{-1}(C_m) \rightarrow g^{-1}(C).$$

Por el lema 2.1.2, denotando $D = \overline{D}$, $D^c = \overline{D^c}$, $D_m = \overline{D_m}$ y $D_m^c = \overline{D_m^c}$, $f^{-1}(C_m) \cap D_m^c \rightarrow f^{-1}(C) \cap D^c - \Gamma_f$ y $g^{-1}(C_m) \cap D_m \rightarrow g^{-1}(C) \cap D - \Gamma_g$, donde Γ_f y Γ_g son los respectivos conjuntos de puntos aislados.

Ahora por el lema 2.1.1

$$(f^{-1}(C_m) \cap D_m^c) \cup (g^{-1}(C_m) \cap D_m) \rightarrow (f^{-1}(C) \cap D^c - \Gamma_f) \cup (g^{-1}(C) \cap D - \Gamma_g).$$

Finalmente, aplicando otra vez el lema 2.1.1,

$$(f^{-1}(C_m) \cap D_m^c) \cup (g^{-1}(C_m) \cap D_m) \cup C_m \rightarrow (f^{-1}(C) \cap D^c - \Gamma_f) \cup (g^{-1}(C) \cap D - \Gamma_g) \cup C.$$

Por el lema 2.1.3, $\Gamma_f, \Gamma_g \subset C = \partial D = \partial D^c$ y definiendo $C_0 = f^{-1}(C) \cap D^c$ y $C_1 = g^{-1}(C) \cap D$ tenemos que

$$\begin{aligned} (C_0 - \Gamma_f) \cup (C_1 - \Gamma_g) \cup C &= C_0 \cup C_1 \cup C \\ &= F^{-1}(C) \cup C \\ &= Spid_1(F) . \end{aligned}$$

En resumen, hemos demostrado que $F_m^{-1}(C_m) \cup C_m \rightarrow F^{-1}(C) \cup C$, es decir

$$Spid_1(F_m) \rightarrow Spid_1(F).$$

Como f y g son de Möbius, en particular biyectivas, tenemos que

$$\begin{aligned} F^{-1}(F^{-1}(C) \cup C) &= (f^{-1}(F^{-1}(C) \cup C) \cap D^c) \cup (g^{-1}(F^{-1}(C) \cup C) \cap D) \\ &= ((f^{-1}(F^{-1}(C)) \cup f^{-1}(C)) \cap D^c) \cup \\ &\quad ((g^{-1}(F^{-1}(C)) \cup g^{-1}(C)) \cap D) \\ &= (f^{-1}(F^{-1}(C)) \cap D^c) \cup (g^{-1}(F^{-1}(C)) \cap D) \cup \\ &\quad (f^{-1}(C) \cap D^c) \cup (g^{-1}(C) \cap D) \\ &= F^{-2}(C) \cup F^{-1}(C) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$F^{-1}(Spid_1(F)) \cup C = Spid_2(F).$$

Por lo anterior, $F_m^{-1}(Spid_1(F_m)) \cup C_m \rightarrow F^{-1}(Spid_1(F)) \cup C$, es decir

$$Spid_2(F_m) \rightarrow Spid_2(F).$$

De aquí es claro que puede usarse de forma iterativa el proceso utilizado para demostrar que $Spid_N(F_m) \rightarrow Spid_N(F)$. \square

Definimos el *conjunto límite de la telaraña* como

$$L_{Spid(F)} = Spid(F) - \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(C).$$

Teorema 2.2.2 $L_{Spid(F)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F^{-n}(C)}$, en la topología de Hausdorff.

Demostación.

1. Sea $z \in L_{Spid(F)}$. Por definición de cerradura, toda vecindad V_z cumple que $V_z \cap \bigcup_{n \geq 0} \overline{F^{-n}(C)} \neq \emptyset$. Supongamos que toda vecindad V_z interseca sólo un número finito de $\overline{F^{-n}(C)}$'s. Entonces existe un N tal que para toda $n > N$, $V_z \cap \overline{F^{-n}(C)} = \emptyset$, pero $V_z \cap Spid_N(F) \neq \emptyset$. En consecuencia, como $Spid_N(F)$ es cerrado, $z \in Spid_N(F)$, lo cual contradice la hipótesis $z \in L_{Spid(F)}$, por lo tanto, toda vecindad V_z interseca a todo $\overline{F^{-n}(C)}$, salvo a un número finito. De aquí que $L_{Spid(F)} \subset \liminf \overline{F^{-n}(C)}$.
2. Sea z tal que toda V_z interseca a una infinidad de $\overline{F^{-n}(C)}$'s. Entonces $V_z \cap \bigcup_{n \geq 0} \overline{F^{-n}(C)} \neq \emptyset$ y por lo tanto $z \in L_{Spid(F)}$. Esto es, $\limsup \overline{F^{-n}(C)} \subset L_{Spid(F)}$. \square

Observemos que dada F , en general la función $C \mapsto Spid(F)$ no es continua para todo $C \in \mathcal{C}$, como se muestra en el siguiente ejemplo (véase la figura 2.2):

Sean $D = D(1, 1)$ y $C = \partial D$,

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{en } D^c \\ z & \text{en } D. \end{cases}$$

Sean $D_m = D(1, 1 + \frac{1}{m})$, claramente $C_m = \partial D_m \rightarrow C$. Nótese que $-1 \in Spid(F_1)$, pues $C_1 = \partial D(1, 2)$; de la misma forma, $-1 \in Spid(F_2)$, pues $F_2^{-1}(C_2) = f^{-1}(\partial D(1, 1 + \frac{1}{2})) = \partial D(2, 3)$; finalmente para toda m se tiene que $-1 \in Spid(F_{2^m})$ porque $F_{2^m}^{-m}(C_{2^m}) = f^{-m}(\partial D(1, 1 + \frac{1}{2^m})) = \partial D(m, m + 1)$.

De lo anterior, toda vecindad de -1 interseca a una infinidad de $Spid(F_m)$, pero $-1 \notin Spid(F)$, por lo tanto $Spid(F_m) \not\rightarrow Spid(F)$.

Obsérvese que $L_{Spid(F_m)} = \{\infty\}$ para toda m , pues $F_m^{-n}(C_m) = \partial D(2^n, 2^n(1 + \frac{1}{m}))$; mientras que $L_{Spid(F)} = Im(\widehat{C})$ ya que 0 es punto fijo atractor de $f(z) = \frac{1}{2}z$ y $0 \in \partial F^{-n}(C) = \partial D(2^n, 2^n)$ para toda n .

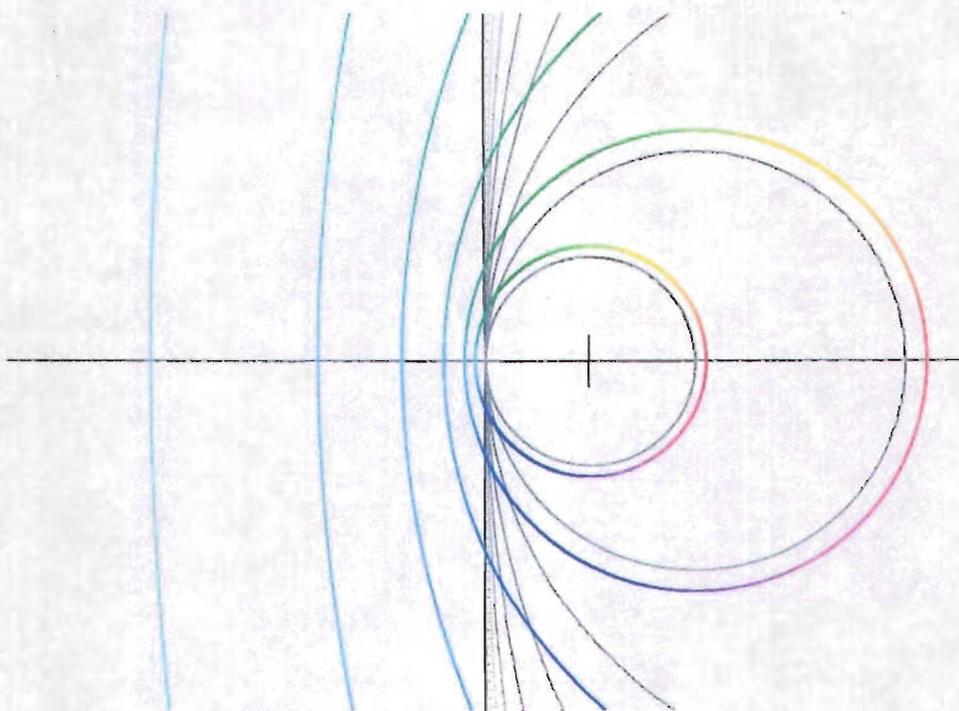


Figura 2.2: Ejemplo de discontinuidad en la función $C \mapsto Spid(F)$. $Spid(F)$ está en gris y $Spid(F_m)$ está en varios colores.

De la discusión anterior, podemos pensar que si los puntos atractores o parabólicos de f y/o g y, por lo tanto, repulsores o parabólicos de f^{-1} y/o g^{-1} pertenecen a la curva C que separa los dominios D y D^c , entonces la función $\partial D \mapsto Spid(F)$ será discontinua en $C = \partial D$.

Pero no sólo en estos casos ocurre discontinuidad. Consideremos la función

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z & \text{en } D^c \\ z + \frac{1}{2} & \text{en } D = D(-\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Los puntos fijos de $f(z) = \frac{1}{2}z$ son 0 y ∞ , el de $g(z) = z + \frac{1}{2}$ es ∞ . Es claro que 0 y ∞ no están en $C = \partial D$, pero observemos que $C \mapsto Spid(F)$ no es continua, pues se puede demostrar que $\frac{1}{4} \in Spid(F_{2^m})$ para toda m , mientras que $\frac{1}{4} \notin Spid(F)$.

La causa de la discontinuidad es debida posiblemente a que 1, el punto fijo de $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = 2z - 1$, está en $F^{-1}(C)$, o a que $0 \in F^{-1}(C)$. Véase la figura 2.3.

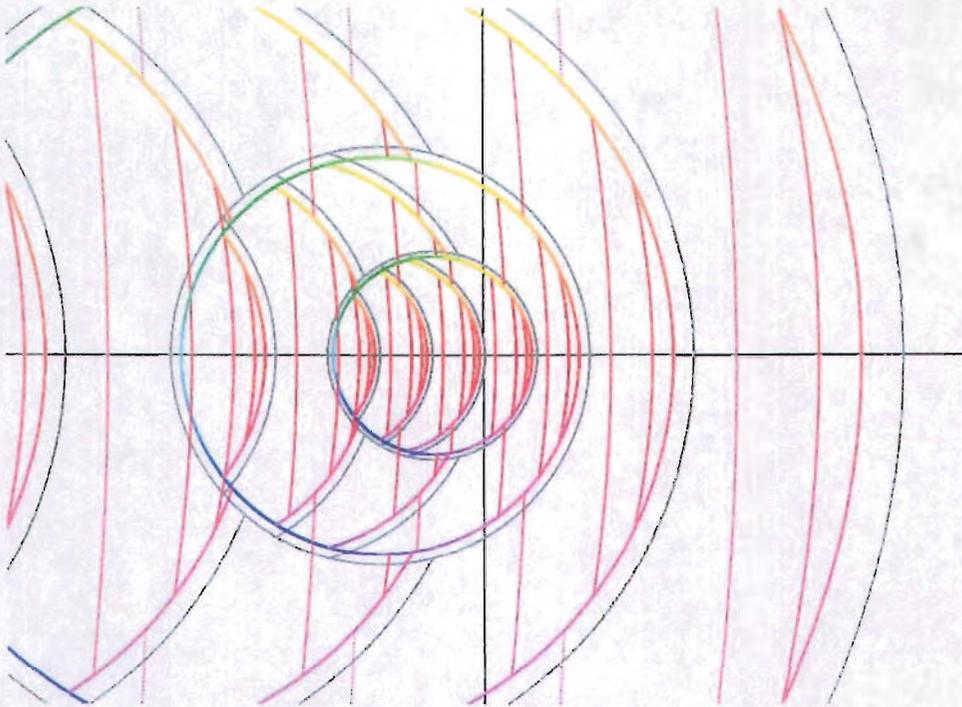


Figura 2.3: Discontinuidad en la función $C \mapsto Spid(F)$.

En la figura 2.4 se muestra otro ejemplo de discontinuidad en la función $\partial D \mapsto Spid(F)$. En este caso la curva $C = \partial D$ contiene a todos los puntos fijos de las composiciones de f y g , pues $\Lambda(\langle f, g \rangle)$, el conjunto límite del grupo de funciones formado por la composiciones de f y g , está contenido en C . Es claro en la figura que toda $Spid(F_m)$ es muy distinta de $Spid(F) = C$ y por lo tanto $Spid(F_m) \not\rightarrow Spid(F)$.

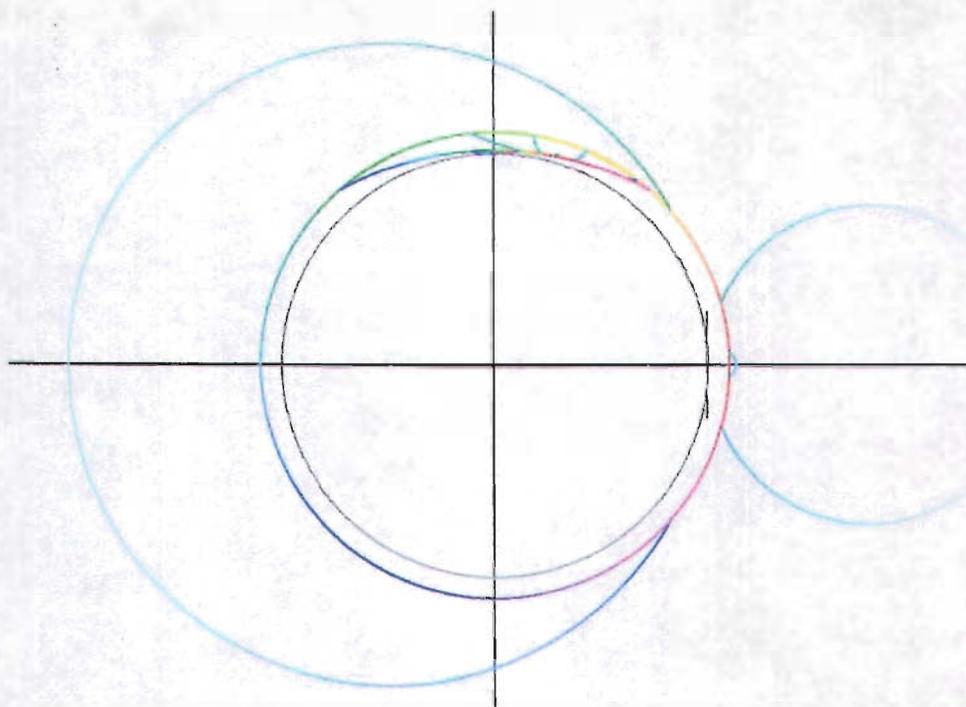


Figura 2.4: Discontinuidad en la función $C \mapsto Spid(F)$. F está definida por $g(z) = (z - \frac{3}{4}i) / (\frac{3}{4}iz + 1)$ en $D = D(0, 1)$ y $f(z) = (z - \frac{3}{4}) / (-\frac{3}{4}z + 1)$ en D^c . $Spid(F) = C$ está en gris y el conjunto en color es algún $Spid(F_m)$.

De todo esto podemos conjeturar que puede existir discontinuidad en la función $\partial D \mapsto Spid(F)$ en los casos que para alguna n el conjunto $F^{-n}(C)$ tenga algún punto repulsor o parabólico de cualquier elemento de $\langle f, g \rangle$.

A partir de aquí denotaremos como G al grupo $\langle f, g \rangle$. Como $\Lambda(G)$ contiene los puntos fijos de todos los elementos hiperbólicos de G (por el teorema 1.5.1), podríamos pensar que si $F^{-n}(C) \cap \Lambda(G) = \emptyset$ para toda $n \geq 0$, entonces la función $\partial D \mapsto Spid(F)$ es continua.

La condición anterior es muy amplia, pero se puede reducir a pedir que $C \cap \Lambda(G) = \emptyset$ para concluir la continuidad de la función $\partial D \mapsto Spid(F)$ por la siguiente

Proposición 2.2.1 Si $\overline{F^{-n}(C)} \cap \Lambda(G) \neq \emptyset$ para alguna n , entonces $C \cap \Lambda(G) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $z \in \overline{F^{-n}(C)} \cap \Lambda(G)$. Por definición de conjunto límite, existen una sucesión $\{\phi_m\}$ de elementos distintos de G y un $w \in \Omega(G)$ tales que $\phi_m(w) \rightarrow z$.

Por otra parte, $F^n(z) \in C$, por lo que existe $\psi = f^{n_1} \circ g^{m_1} \circ \dots \circ f^{n_k} \circ g^{m_k} \in G$ tal que $\psi(z) = F^n(z)$. Como ψ es continua, $\psi(\phi_m(w)) \rightarrow \psi(z)$. Entonces $\psi(z) \in \Lambda(G)$, pues $\{\psi \circ \phi_m\}$ es una sucesión de elementos distintos de G tal que $\psi \circ \phi_m(w) \rightarrow \psi(z)$.

De aquí que $\psi(z) \in C \cap \Lambda(G) \neq \emptyset$. \square

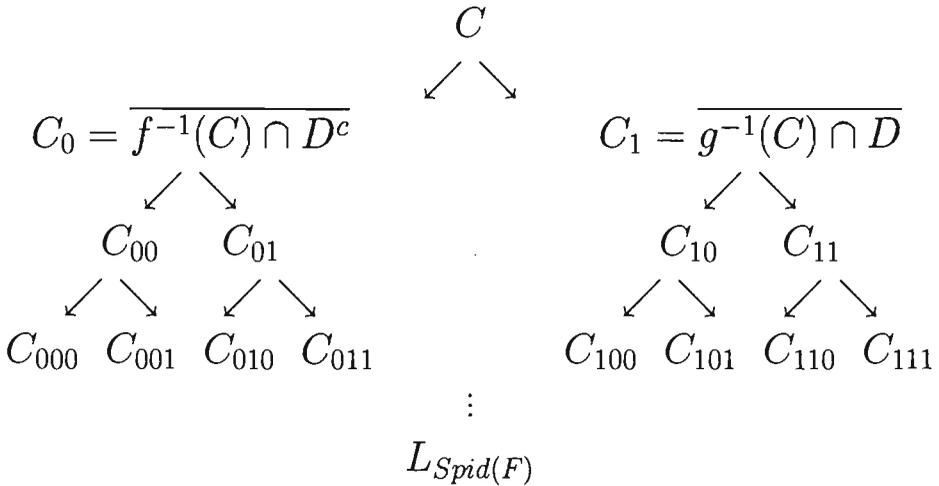


Figura 2.5: Estructura de la telaraña.

Antes de demostrar el teorema que nos interesa, introduciremos notación para explicar la estructura de la telaraña $Spid(F)$. Sean $C_0 = f^{-1}(C) \cap D^c$ y $C_1 = g^{-1}(C) \cap D$, de modo que $\overline{F^{-1}(C)} = C_0 \cup C_1$ y $Spid_1(F) = C \cup C_0 \cup C_1$. Se pueden definir recursivamente $C_{00} = \overline{f^{-1}(C_0)} \cap D^c$ y análogamente C_{01} , C_{10} y C_{11} ; así que $\overline{F^{-2}(C)} = C_{00} \cup C_{01} \cup C_{10} \cup C_{11}$. De esta manera, se puede escribir $\overline{F^{-n}(C)} = \bigcup C_{\sigma(n)}$, donde $\sigma(n)$ es una palabra de longitud n formada por ceros y unos. Obsérvese que pueden existir conjuntos $C_{\sigma(n)}$ vacíos, y por lo tanto todos los segmentos que podrían derivarse de éste serían vacíos también. La figura 2.5 muestra la estructura de árbol binario que presenta la telaraña al construir cada nivel de iteración.

Definimos un *camino* como un conjunto $\{C, C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(N)}\}$, donde cada elemento $C_{\sigma(n)}$ es no vacío y está definido por el anterior, esto es $\sigma(n) = \sigma(n-1)0$ ó $\sigma(n) = \sigma(n-1)1$.

Definimos un *camino válido* como un camino de longitud infinita, es decir, una sucesión $\{C_{\sigma(n)}\}_{n=0}^{\infty}$, donde cada elemento $C_{\sigma(n)}$ es no vacío y está definido por el anterior como en la definición previa.

A cada camino válido se le puede asociar una sucesión $\{\phi_n\}$ en G de la siguiente manera: Como cada $C_{\sigma(n)} \neq \emptyset$, tenemos que $R_n = F^n(C_{\sigma(n)}) \subset C$ es no vacío, por lo que podemos definir $\phi_n = F^{-n}|_{R_n} \in G$. Una manera recursiva de construir esta sucesión es

$$\phi_n = \begin{cases} f^{-1} \circ \phi_{n-1} & \text{si } \sigma(n) = \sigma(n-1)0 \\ g^{-1} \circ \phi_{n-1} & \text{si } \sigma(n) = \sigma(n-1)1, \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $C_{\sigma(0)} = C$ y $\phi_0 = id$.

Definimos a *raíz del camino (válido)* $\{C_{\sigma(n)}\}$ como

$$R_{C_\sigma} = \bigcap_{n \geq 0} \overline{F^n(C_{\sigma(n)})}.$$

Obsérvese que $R_{C_\sigma} \neq \emptyset$ pues \widehat{C} es un espacio métrico completo. Sean $R_n = \overline{F^n(C_{\sigma(n)})}$, por definición de camino válido, $R_{n+1} \subset R_n$ para toda n , pues $F(C_{\sigma(n+1)}) \subset C_{\sigma(n)}$, por lo tanto $R_{C_\sigma} \subset R_n$ para toda n .

Ahora demostraremos algunos lemas que serán útiles.

Lema 2.2.1 $R_{C_\sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F^n(C_{\sigma(n)})}$ si $\{C_{\sigma(n)}\}$ es un camino válido.

Demostración. Sean $R_n = \overline{F^n(C_{\sigma(n)})}$.

1. Sea $z \in R_{C_\sigma}$. Como $R_{C_\sigma} \subset R_n$ para toda n , toda V_z interseca a todo R_n , salvo a un número finito. Por lo tanto $R_{C_\sigma} \subset \liminf R_n$.
2. Sea $z \in \limsup R_n$, de modo que toda V_z interseca a una infinidad de R_n 's. Supongamos que $z \notin R_{C_\sigma}$. Entonces existe una vecindad V'_z que no interseca a R_{C_σ} , y más aún, no interseca a algún R_N , por lo que sólo interseca posiblemente a R_0, \dots, R_{N-1} , lo que contradice la hipótesis $z \in \limsup R_n$. Por lo tanto, $\limsup R_n \subset R_{C_\sigma}$. \square

Lema 2.2.2 Sea $\{C_{\sigma(n)}\}$ un camino válido, entonces la sucesión asociada $\{\phi_n\}$ no contiene elementos iguales.

Demostración. Sea $\{C_{\sigma(n)}\}$ un camino válido, es decir, $C_{\sigma(n)} \neq \emptyset$ para toda n . Supongamos que existen ϕ_i y ϕ_j elementos de la sucesión asociada $\{\phi_n\}$ al camino tales que $\phi_i = \phi_j$ y $i < j$.

Por definición de los elementos del camino, podemos establecer $R_j = F^j(C_{\sigma(j)}) \subset R_i = F^i(C_{\sigma(i)}) \subset C$; y por lo tanto, ya que $\phi_i = \phi_j$, $C_{\sigma(j)} = \phi_j(R_j) \subset C_{\sigma(i)} = \phi_i(R_i)$.

Por la forma en que se construyen los caminos, hay dos posibilidades: $C_{\sigma(i)} \subset D^c$ ó $C_{\sigma(i)} \subset D$ (a excepción tal vez de un conjunto discreto de puntos en C). Entonces se tiene que $C_{\sigma(i)} = \overline{f^{-1}(C_{\sigma(i-1)}) \cap D^c}$ ó que $C_{\sigma(i)} = \overline{g^{-1}(C_{\sigma(i-1)}) \cap D}$. Supongamos que ocurre la primera; como $\phi_i = \phi_j$ tenemos entonces que $C_{\sigma(j)} = \overline{f^{-1}(C_{\sigma(j-1)}) \cap D^c}$; y finalmente, ya que f^{-1} es de Möbius, deducimos que $C_{\sigma(j-1)} \subset C_{\sigma(i-1)}$.

De esta manera se puede repetir el proceso hasta que obtenemos $C_{\sigma(j-i)} \subset C_{\sigma(0)} = C$, lo cual es imposible porque D y D^c son conjuntos abiertos tales que $C = \partial D = \partial D^c$, de modo que $f^{-1}(C_{\sigma(j-i-1)}) \cap D^c$ ó $g^{-1}(C_{\sigma(j-i-1)}) \cap D$ son ajenos a C y por lo tanto $C_{\sigma(j-i)} \not\subset C$.

Por lo tanto $\phi_i \neq \phi_j$, de lo que se concluye que $\{\phi_n\}$ es una sucesión de elementos distintos de G . \square

Lema 2.2.3 Si $C \cap \Lambda(G) = \emptyset$, el límite de todo camino válido existe y está contenido en $\Lambda(G)$.

Demostración. Sea $\{C_{\sigma(n)}\}$ un camino válido en $Spid(F)$ y $\{\phi_n\}$ la sucesión de transformaciones asociada. Sea $A_\sigma(w)$ el conjunto de puntos de acumulación de $\{\phi_n(w)\} \subset Gw$. Por definición, $A_\sigma(w) \subset \Lambda(G)$.

Obsérvese que $A_\sigma(w) = A_\sigma(w_0)$ para cualesquiera $w, w_0 \in \Omega(G)$, pues si $z \in A_\sigma(w)$, por definición de $A_\sigma(w)$ existe una subsucesión $\{\phi_m\}$ de $\{\phi_n\}$ tal que $\phi_m(w) \rightarrow z$, la cual está formada por elementos distintos de G por el lema 2.2.2. Por otra parte, el teorema 1.5.2 implica que $\phi_m(w_0) \rightarrow z$, por lo tanto $z \in A_\sigma(w_0)$.

De lo anterior tenemos que $\lim \phi_n(C) = A_\sigma(w)$, para cualquier $w \in \Omega(G)$. Por el lema 2.2.1, existe R_{C_σ} la raíz del camino $\{C_{\sigma(n)}\}$. Es claro que $\lim \phi_n(R_{C_\sigma}) = \lim \phi_n(C)$.

Por la definición de raíz del camino, se tiene que $\phi_n(R_{C_\sigma}) \subset C_{\sigma(n)}$; por la definición de camino, $C_{\sigma(n)} \subset \phi_n(C)$. Entonces $\lim C_{\sigma(n)} = \lim \phi_n(R_{C_\sigma}) = \lim \phi_n(C) = A_\sigma(w) \subset \Lambda(G)$. \square

Lema 2.2.4 Si $C \cap \Lambda(G) = \emptyset$, $L_{Spid(F)} \subset \Lambda(G)$.

Demostración. Sea $z \in L_{Spid(F)}$. Por el teorema 2.2.2, toda vecindad V_z de z interseca a todo $\overline{F^{-n}(C)}$, salvo a un número finito. Como $\overline{F^{-n}(C)} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} C_\sigma$, donde Σ_n es el conjunto de todas las palabras de 0 y 1 de longitud n . De aquí que existe un camino válido $\{C_{\sigma(n)}\}$ tal que toda V_z interseca a todo $C_{\sigma(n)}$, salvo a un número finito y por lo tanto $z \in \lim C_{\sigma(n)}$. Finalmente, por el lema 2.2.3, $z \in \Lambda(G)$. \square

Teorema 2.2.3 Si $C \cap \Lambda(G) = \emptyset$, entonces la función $C \mapsto Spid(F)$ es continua de \mathcal{C} en $H(\widehat{\mathcal{C}})$.

Demostración. Para demostrar la continuidad de la función $C \mapsto Spid(F)$, suponemos que $C_m \rightarrow C$ en \mathcal{C} y verificamos que $Spid(F_m) \rightarrow Spid(F)$ usando la caracterización de convergencia en $H(\widehat{\mathcal{C}})$:

1. Sea $z \in Spid(F)$. Si $z \in Spid_N(F)$ para alguna N , entonces toda vecindad V_z interseca a toda $Spid(F_m)$, salvo un a número finito, pues por el teorema 2.2.1, $Spid_N(F_m) \rightarrow Spid_N(F)$ para toda N .

Si $z \in L_{Spid(F)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F^{-n}(C)}$, toda V_z interseca a todo $\overline{F^{-n}(C)}$, salvo a un número finito. Ya que cada $\overline{F^{-n}(C)} \subset Spid_n(F)$ y por el teorema 2.2.1, $Spid_N(F_m) \rightarrow Spid_N(F)$, tenemos que toda V_z interseca a toda $Spid(F_m)$, salvo a un número finito.

2. Sea $z \in \widehat{\mathcal{C}}$ tal que toda vecindad V_z interseca a una infinidad de $Spid(F_m)$'s. Sabemos que $\widehat{\mathcal{C}}$ es la unión disjunta de $\Omega(G)$ y $\Lambda(G)$, de modo que

a) Si $z \in \Omega(G)$, entonces se puede suponer que toda $V_z \subset \Omega(G)$. Para cada $Spid(F_m)$, V_z no puede intersecar a una infinidad de $F_m^{-n}(C_m)$, pues si así fuera, por el lema 2.2.4 se tendría que $z \in L_{Spid(F_m)} \subset \Lambda(G)$. De aquí que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que V_z interseca a una infinidad de $Spid_N(F_m)$, de lo que se deduce por el teorema 2.2.1 que $z \in Spid_N(F) \subset Spid(F)$.

b) Si $z \in \Lambda(G)$, toda vecindad V_z interseca a una infinidad de $Spid_{N(m)}(F_m)$'s, donde $N(m) \rightarrow \infty$, pues si no fuera así, existiría $M \in \mathbb{N}$ tal que $N(m) < M$ para toda m y por lo tanto toda vecindad V_z intersecaría a una infinidad de $Spid_M(F_m)$'s y por el teorema 2.2.1 tendríamos que $z \in Spid_M(F) \subset \Omega(G)$.

Para cada $N(m)$, hay un camino $\{C_m, C_{m,\sigma(1)}, \dots, C_{m,\sigma(N(m))}\}$ en $Spid_{N(m)}(F_m)$ cercano a un camino $\{C, C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(N(m))}\}$ en $Spid_{N(m)}(F)$, pues el teorema 2.2.1 implica que para m grandes

las telarañas $Spid_{N(m)}(F_m)$ y $Spid_{N(m)}(F)$ son muy cercanas. Como $N(m) \rightarrow \infty$, se puede encontrar un camino válido $\{C_{\sigma(n)}\}$ en $Spid(F)$ que intersecta a toda vecindad V_z . Por los lemas 2.2.3 y 2.2.4, tenemos que el límite de ese camino válido existe, por lo tanto $z \in \lim C_{\sigma(n)} \subset L_{Spid(F)} \subset Spid(F)$. \square

2.3. Conjetura acerca de la continuidad en el caso general

Como se vió en el primer capítulo, una transformación conforme por pedazos se define en general con n átomos de la siguiente manera:

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{en } D_1 \\ f_2(z) & \text{en } D_2 \\ \vdots & \\ f_n(z) & \text{en } D_n, \end{cases}$$

donde cada D_i es un abierto, cada ∂D_i es una curva de Jordan y $\bigcup_{i \leq n} \overline{D_i} = \widehat{\mathbb{C}}$.

El teorema 2.2.3 podría extenderse a la siguiente conjetura, donde $G = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ y $\mathcal{C}_n \subset H(\widehat{\mathbb{C}})$ es un dominio adecuado que contiene a la unión de las fronteras de los átomos $\bigcup_{i \leq n} \partial D_i$:

Teorema 2.3.1 (Conjetura) Si $\bigcup_{i \leq n} \partial D_i \cap \Lambda(G) = \emptyset$, entonces la función $\bigcup_{i \leq n} \partial D_i \mapsto Spid(F)$ es continua de \mathcal{C}_n en $H(\widehat{\mathbb{C}})$.

Capítulo 3

Estabilidad

En este capítulo se buscará en qué condiciones se puede hablar de la estabilidad de la dinámica de funciones conformes por pedazos. Como en el capítulo anterior, F denotará una función por pedazos con dos átomos homeomorfos a discos definida por dos funciones f y g de Möbius.

3.1. Ejemplos de inestabilidad

Considérese la siguiente transformación por pedazos

$$F(z) = \begin{cases} iz & \text{en } D^c \\ 2z & \text{en } D, \end{cases}$$

donde $D = D(3, 1)$ y D^c es el interior de $\widehat{\mathbb{C}} - D$. La telaraña de F está formada por la unión de las circunferencias $\partial D(3, 1)$, $\partial D(3i, 1)$, $\partial D(-3, 1)$ y $\partial D(-3i, 1)$.

Observemos ahora que una pequeña variación de los coeficientes de las transformaciones de Möbius que definen F generan una dinámica completamente distinta. Por ejemplo

$$F_\epsilon(z) = \begin{cases} (i + \epsilon)z & \text{en } D^c \\ (2 + \epsilon)z & \text{en } D = D(3, 1), \end{cases}$$

con $\epsilon \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $|\epsilon| < 1$, define un conjunto regular $\mathcal{F}(F_\epsilon)$ con una infinidad de celdas, mientras que $\mathcal{F}(F)$ sólo está formado por cinco celdas. Véase la figura

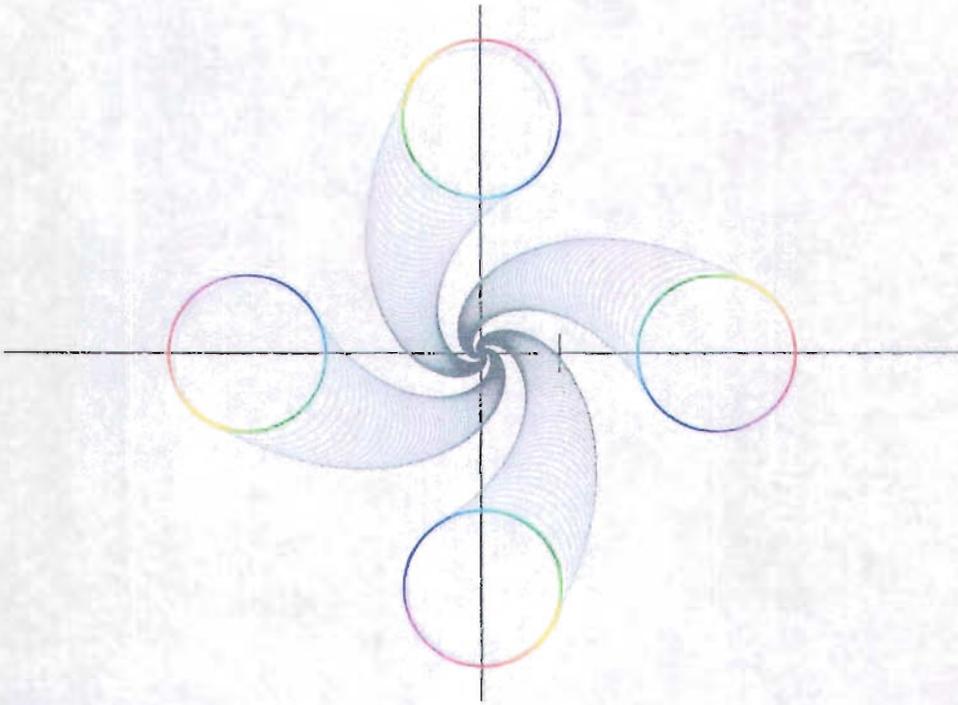


Figura 3.1: En color se muestra la telaraña de la transformación por pedazos definida como $z \mapsto 2z$ en $D = D(3, 1)$ y $z \mapsto iz$ en D^c . En gris se muestra la telaraña de la transformación por pedazos dada por $z \mapsto (2 + \epsilon)z$ en D y $z \mapsto (i + \epsilon)z$ en D^c , con $\epsilon = 0,01 + i0,01$.

3.1, donde se muestran las telarañas de F y F_ϵ .

En el ejemplo anterior, una de las funciones que definían a F era una transformación elíptica, cuya inestabilidad es conocida, de tal manera que la transformación por pedazos podría haber heredado esta propiedad. Sin embargo, en la teoría de dinámica de variable real, existe la siguiente conjetura para sistemas asociados a la función llamada “casa de campaña”:

Proposición 3.1.1 (Conjetura) $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ está definida como $x \mapsto tx$ en $[0, \frac{1}{2})$ y $x \mapsto t - tx$ en $[\frac{1}{2}, 1]$. Para cualesquiera $t, s \in [\sqrt{2}, 2]$, $t \neq s$, las dinámicas de f_t y f_s no son conjugadas.

De aquí que podría conjeturarse que dada F_t , una transformación conforme por pedazos definida por las funciones de Möbius $z \mapsto tz$ en $D = D(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $z \mapsto t - tz$ en D^c , la dinámica es distinta para cada $t \in [\sqrt{2}, 2]$. Obsérvese que en este caso, las funciones que definen F_t son siempre hiperbólicas, de forma que en este caso la estabilidad de las funciones hiperbólicas no se hereda.

En la figura 3.2 se muestran las telarañas de dos sistemas de transformaciones de Möbius por pedazos resultado de la complexificación de sistemas asociados a funciones tipo “casa de campaña”.

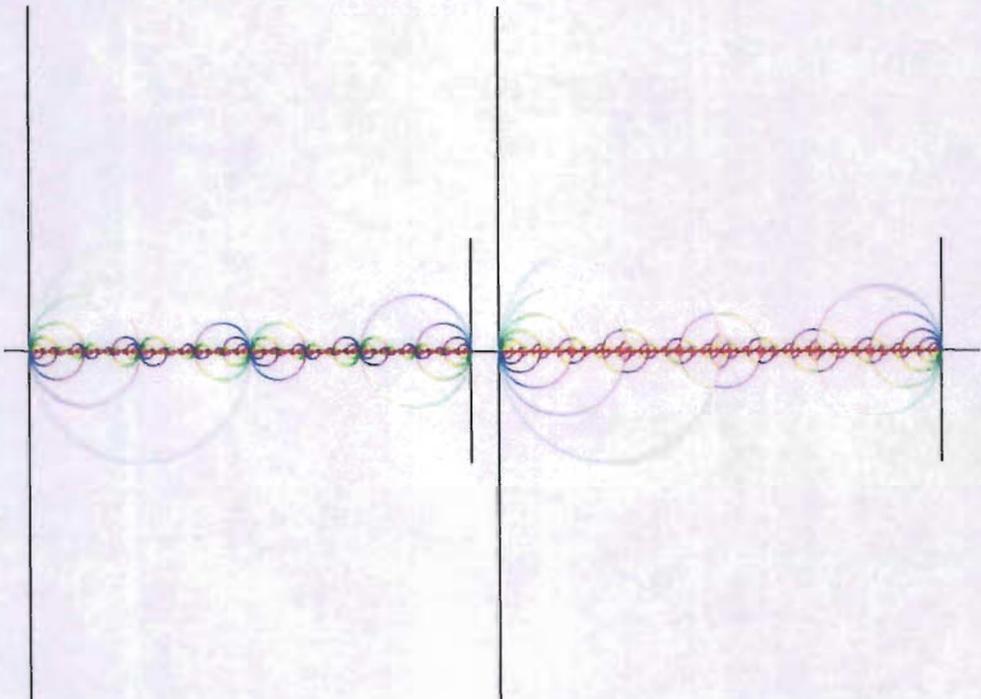


Figura 3.2: Del lado izquierdo se muestra la telaraña de la transformación por pedazos definida como $z \mapsto 2z$ en $D = D(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $z \mapsto -2z + 2$ en D^c . Del lado derecho se muestra la telaraña de la transformación por pedazos definida como $z \mapsto \frac{9}{4}z$ en D y $z \mapsto -\frac{9}{4}z + \frac{9}{4}$ en D^c .

3.2. Estabilidad en funciones conformes por pedazos

En esta sección estudiaremos en qué condiciones podemos asegurar que existe estabilidad de la dinámica de transformaciones por pedazos.

Dada una curva de Jordan $C \subset \widehat{\mathbb{C}}$, definimos el *espacio de transformaciones conformes por pedazos determinada por C* como

$$X_C = \{F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } D^c \\ g(z) & \text{en } D \end{cases}, f, g \in \mathbb{M} \text{ y } C = \partial D\}$$

Obsérvese que cada $F \in X_C$ está determinada por dos transformaciones de Möbius y cada transformación de Möbius está determinada por tres parámetros complejos, ya que toda transformación de Möbius se puede representar mediante una matriz de entradas complejas de 2×2 con determinante igual a 1. Por lo tanto la topología de X_C es la misma que en \mathbb{C}^6 , es decir, F_1 y $F_2 \in X_C$ están cercanas si la 6-ada de números complejos asociados a las transformaciones de Möbius de F_1 está cerca de la 6-ada de números complejos asociados a las transformaciones de Möbius de F_2 .

Decimos que $F \in X_C$ es *estructuralmente estable* si existe una vecindad $V_F \subset X_C$ de F tal que para toda $F' \in V_F$ existe $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ homeomorfismo tal que $F' \circ h = h \circ F$. A partir de aquí, cuando se hable de *estabilidad* nos referiremos a *estabilidad estructural* según nuestra definición.

De la definición de **estabilidad**, se tiene que si F es estable, una pequeña variación en los parámetros que determinan las transformaciones de Möbius de F no modifica cualitativamente la dinámica de F .

Como se vió en la sección anterior, es **fácil** encontrar ejemplos en los que pequeñas variaciones de los parámetros generen dinámicas distintas debido a que las iteraciones hacia atrás de ∂D (los conjuntos $F^{-n}(\partial D)$) intersección D o intersección D^c puede ser o no vacío, y por lo tanto pueden o no acotar un región. Por esta razón nos restringiremos a un caso en el que se pueda asegurar que las iteraciones para atrás acotan siempre a una región o son vacías. Para definir este caso especial consideraremos un tipo de grupos kleinianos llamados *grupos de Schottky*.

Un grupo de Schottky es el generado por $g_i \in \mathbb{M}$, $i = 1, \dots, n$, hiperbólicas tales que existen C_1, C'_1, \dots, C_n y C'_n circunferencias que acotan a una región común R (es decir, que no se intersectan y que no se contienen unos a otros) tal que $g_i(R) \cap R = \emptyset$ y que $g_i(C_i) = C'_i$ para cada i . R es una *región fundamental* del grupo y n es el *rango* del grupo. Véase la figura 3.3.

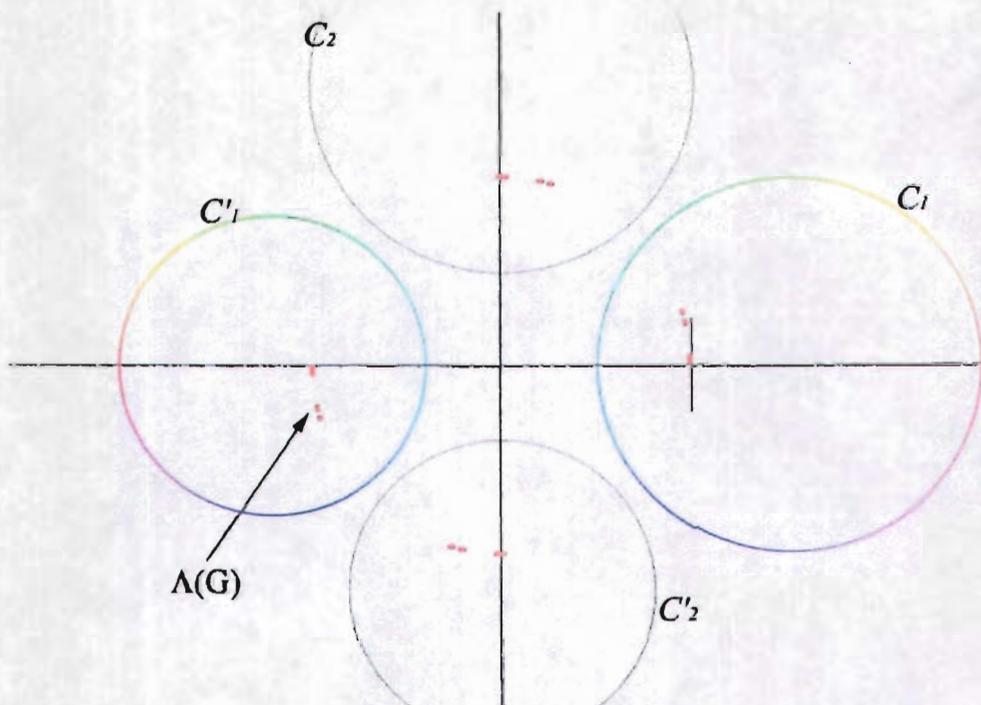


Figura 3.3: Ejemplo de grupo de Schottky. Sea $G = \langle g_1, g_2 \rangle$, donde $g_1(z) = (z - \frac{3}{4}i) / (\frac{3}{4}iz + 1)$, $C_1 = \partial D(\frac{3}{2}i, 1)$, $C'_1 = \partial D(-\frac{6}{5}i, \frac{4}{5})$, $g_2(z) = (z - \frac{3}{4}) / (-\frac{3}{4}z + 1)$, $C_2 = \partial D(\frac{3}{2}, 1)$, $C'_2 = \partial D(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$. Una región fundamental es $R = (D(\frac{3}{2}i, 1) \cup D(-\frac{6}{5}i, \frac{4}{5}) \cup D(\frac{3}{2}, 1) \cup D(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}))^c$. Los puntos rojos representan al conjunto límite del grupo $\Lambda(G)$.

Resultados conocidos acerca de los grupos de Schottky son que su conjunto límite es siempre un conjunto tipo Cantor y que grupos del mismo rango son dinámicamente equivalentes¹ (ver [Kapovich]). Además, por la observación 1 en [Chuckrow] se tiene que

Proposición 3.2.1 Grupos de Schottky con el mismo número de generadores son cuasi-conformemente equivalentes.

Esto es, si G_1 y G_2 son de Schottky y tienen el mismo rango, entonces existe un mapeo cuasiconforme² $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que conjuga a G_1 y G_2 .

Ahora demostraremos que si el grupo generado por las transformaciones de Möbius que determinan a F es un grupo de Schottky, entonces F es estable. Para esto la herramienta que utilizaremos es el λ -Lema (véanse [McMullen2] y [MSS]).

Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ abierto y conexo. Un *movimiento holomorfo* de un conjunto $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ parametrizado por (X, λ_0) es una familia de inyecciones $\phi_\lambda : E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $\phi_\lambda(e)$ es una función holomorfa de $\lambda \in X$ para cada $e \in E$ fijo, y $\phi_{\lambda_0} = id$.

Teorema 3.2.1 λ -Lema (Z. Slodkowski) Un movimiento holomorfo de E tiene una extensión a un movimiento holomorfo de \overline{E} . El movimiento extendido da un mapeo continuo $\phi : X \times \overline{E} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Y para cada λ el mapeo ϕ_λ se extiende a un mapeo cuasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo.

Desde este punto de vista, para determinar si las dinámicas de dos funciones conformes por pedazos son equivalentes, bastaría encontrar un movimiento holomorfo entre las telarañas correspondientes, pues por el λ -lema existiría un mapeo cuasiconforme que conjugaría las dinámicas.

¹Dos grupos kleinianos G_1 y G_2 son *dinámicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo $h : \Lambda(G_1) \rightarrow \Lambda(G_2)$ tal que conjuga los grupos, esto es, $hG_1h^{-1} = G_2$, donde $hG_1h^{-1} = \{h \circ g \circ h^{-1} \mid g \in G_1\}$.

²Un mapeo *cuasiconforme* es un homeomorfismo en los complejos que no preserva ángulos (como un mapeo conforme), pero cuya variación está acotada en todo punto.

Teorema 3.2.2 Sea F una transformación conforme por pedazos, definida por las transformaciones de Möbius g en D y f en $D^c = \text{int}(\widehat{\mathbb{C}} - D)$. Si $G = \langle f, g \rangle$ es de Schottky y ∂D está contenida en una región fundamental de G , entonces F es estable.

Demostración. Sea $T = \text{Spid}(F)$. Como $C = \partial D \subset R$, una región fundamental de G , entonces $F^{-1}(C) \cap C = \emptyset$, esto es por que sólo hay dos opciones para $f^{-1}(C)$ (y análogamente para $g^{-1}(C)$): $f^{-1}(C) \subset D$ o $f^{-1}(C) \subset D^c$, pues la curva $C \subset R$ y $f^{-1}(R) \cap R = \emptyset$. De aquí que $F^{-n}(C) \cap C = \emptyset$ para toda n .

De lo anterior se tiene que la telaraña T es una unión disjunta de curvas cerradas, unión $L_{\text{Spid}(F)}$, el conjunto límite de la telaraña. Por la hipótesis $C \subset R$, tenemos que $C \cap \Lambda(G) = \emptyset$, y entonces por el lema 2.2.4 se tiene que $L_{\text{Spid}(F)} \subset \Lambda(G)$.

Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}^6$ la 6-ada de complejos determinada por las transformaciones de Möbius f y g . Como f y g son hiperbólicas, existe una vecindad $B = B(\epsilon, \lambda_0) \subset \mathbb{C}^6$ de λ_0 tal que para toda 6-ada $\lambda \in B$ las transformaciones definidas por λ , f_λ y g_λ , son hiperbólicas. De esta manera podemos definir $F_\lambda \in V_F \subset X_C$ mediante f_λ y g_λ .

Por la proposición 3.2.1, se puede restringir aun más la vecindad B de tal forma que $G_\lambda = \langle f_\lambda, g_\lambda \rangle$ sea de Schottky y que $C \subset R_\lambda$, pues G y G_λ tienen rango 2.

De esta forma, las telarañas $T_\lambda = \text{Spid}(F_\lambda)$ son unión disjunta de curvas cerradas unión $L_\lambda = L_{\text{Spid}(F_\lambda)}$, los conjuntos límite de las telarañas. Por la forma en que restringió B , se tiene que $f_\lambda^{-1}(C) \subset D^c$ si y sólo si $f^{-1}(C) \subset D^c$ (análogamente para g_λ y g), por lo tanto $\psi_\lambda(C) \subset D^c$ (o D) si y sólo si $\psi(C) \subset D^c$ (o D), donde ψ es una composición de inversas de f 's y g 's determinadas por un segmento $C_{\sigma(n)} \subset T$.

Entonces se puede construir un movimiento holomorfo de la telaraña T de la siguiente forma: $\phi_\lambda(z) = h_{\lambda, \psi}(z)$, donde $h_{\lambda, \psi}$ es el homeomorfismo entre las curvas cerradas simples $\psi(C) \subset T$ y $\psi_\lambda(C) \subset T_\lambda$, donde $z \in \psi(C)$; si z es un punto límite, $\phi_\lambda(z) = h_\lambda(z)$, donde $h_\lambda(z)$ es el homeomorfismo entre los conjuntos límite de los grupos de Schottky correspondientes. Es claro que

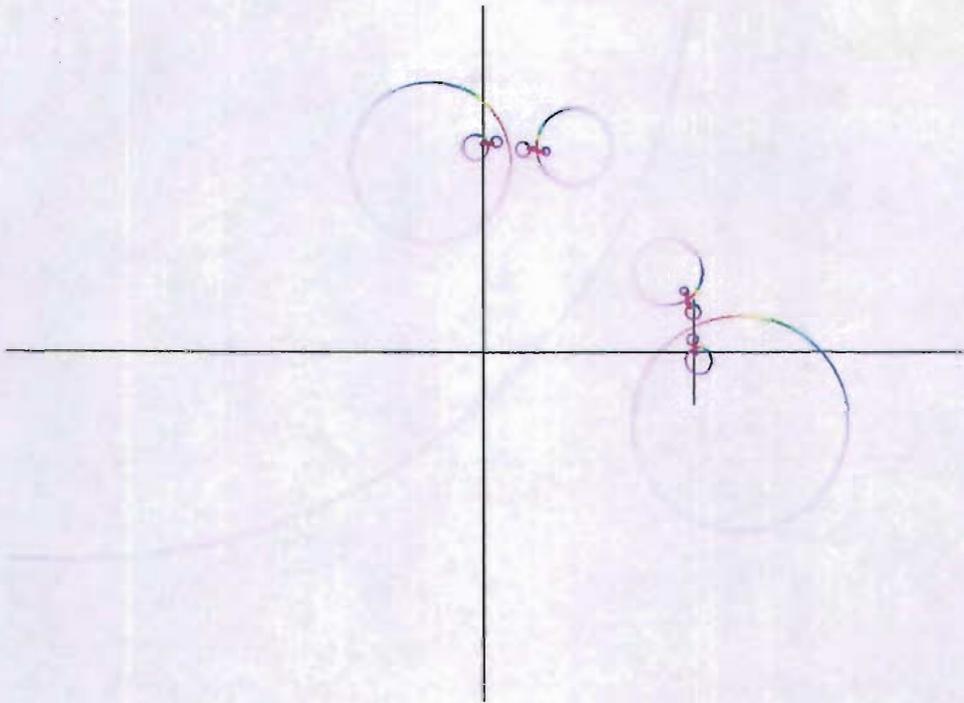


Figura 3.4: Telaraña de la función F definida por $g(z) = (z - \frac{3}{4}i)/(\frac{3}{4}iz + 1)$ en $D = D(-2 + 2i, 3)$ y $f(z) = (z - \frac{3}{4})/(-\frac{3}{4}z + 1)$ en D^c . $G = \langle f, g \rangle$ es de Schottky y existe una región fundamental R de G tal que $\partial D \subset R$, por lo tanto F es estable.

para cada λ , ϕ_λ es una inyección de T en $\widehat{\mathbb{C}}$ y que para cada $t \in T$ la función $\phi_\lambda(t)$ sobre λ es holomorfa.

Por el λ -lema, ϕ_λ se extiende a un mapeo cuasiconforme de $\widehat{\mathbb{C}}$ en sí mismo. Así, para cada λ existe un mapeo que conjuga las dinámicas de F y F_λ . \square

En la figura 3.4 se muestra la telaraña de un sistema de transformaciones conformes (Möbius) por pedazos estable.

3.3. Conjeturas acerca de la estabilidad

El teorema 3.2.2 puede generalizarse al siguiente

Teorema 3.3.1 (Conjetura) Sea F una transformación conforme por pedazos, definida por las transformaciones de Möbius f_i en D_i , para $i = 1, \dots, n$. Si $G = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ es de Schottky y $\bigcup \partial D_i$ está contenido en una región fundamental de G , entonces F es estable.

Además, puede conjeturarse el siguiente

Teorema 3.3.2 (Conjetura) Sea F una transformación conforme por pedazos, definida por las transformaciones de Möbius g en D y f en $D^c = \text{int}(\widehat{\mathbb{C}} - D)$. Si $G = \langle f, g \rangle$ es de Schottky y $\partial D \cap \Lambda(G) = \emptyset$, entonces F es estable.

Apéndice

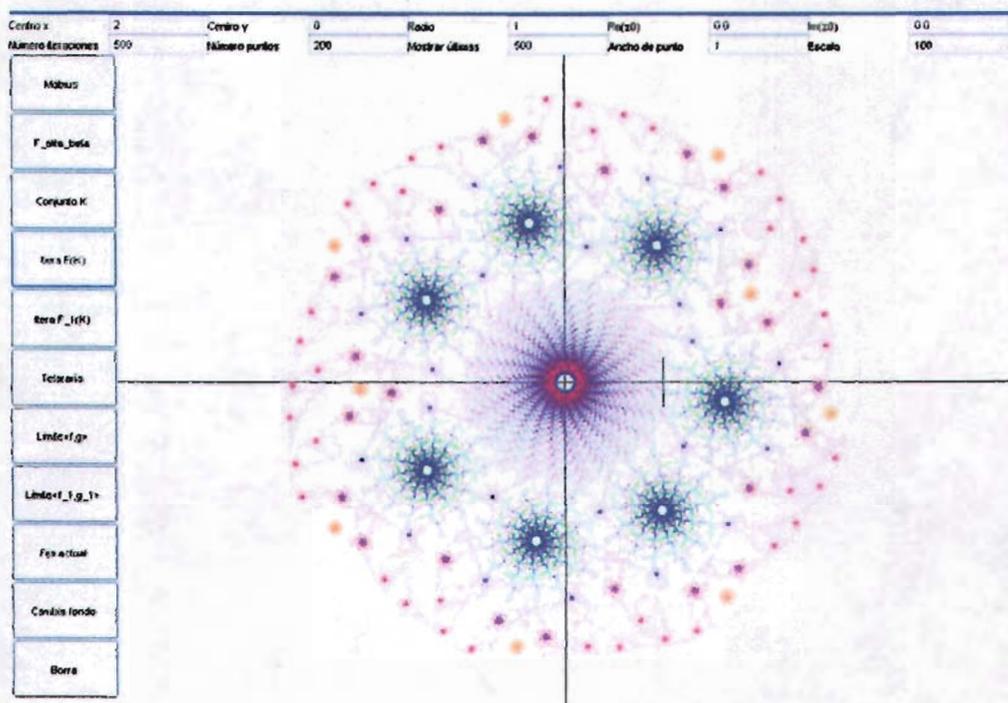


Figura 3.5: Interface del programa iterador de transformaciones conformes (Möbius) por pedazos.

Como complemento para el análisis de las telarañas se desarrolló un programa para computadora que grafica las órbitas de diferentes conjuntos y las telarañas de transformaciones conformes (Möbius) por pedazos cuyos dominios están acotados por una circunferencia. Además se puede mostrar el conjunto límite del grupo generado por las transformaciones correspondientes.

El software está programado en *Java*, beneficiándonos de su portabilidad (el programa puede funcionar en Windows, MacOS, Linux o Unix) a costo de eficiencia.

A continuación se hace una breve descripción de la funcionalidad del programa, sin entrar en los detalles técnicos de programación (véase la figura 3.3 para referencia acerca de los elementos de la interface del programa):

- La zona de dibujo del programa representa al plano complejo \mathbb{C} , está centrada en el punto 0, se muestran los ejes coordenados y con una marca el punto 1.
- Las cajas de texto “Centro x”, “Centro y” y “Radio” definen un disco que será el dominio D de la función F .
- Las cajas “Re(z_0)” e “Im(z_0)” muestran el punto que se ha seleccionado con el “mouse” mediante un “click” en la zona de dibujo.
- La caja “Número de iteraciones” se usa para editar el número de iteraciones para definir una órbita o el nivel de una telaraña, la caja “Número de puntos” determina el número de puntos que se utilizarán para definir ∂D o el conjunto a iterar y la caja “Mostrar últimas” indica qué cantidad de las últimas iteraciones se mostrarán.
- La caja “Ancho de punto” especifica el grosor que se utilizará al graficar y la caja “Escala” determina el “zoom” sobre la zona de dibujo.
- Con el botón “Möbius” se muestra una ventana con ocho cajas de texto que se usan para editar los coeficientes de las transformaciones de Möbius f y g que definen F .
- Con el botón “F_ alfa_ beta” se muestra una ventana para editar los parametros que definen las funciones $g(z) = \alpha\beta z + 2\alpha(1 - \beta)$ en D y

$f(z) = \alpha z$ en D^c , donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Esta es la familia de transformaciones sobre las cuales se trabaja en [Cruz] y [Romero].

- Con el botón “Conjunto K” se define el punto, recta o circunferencia sobre la cuál se iterará la función F .
- Los botones “Itera F(K)” e “Itera F⁻¹(K)” iteran el conjunto K bajo F y F^{-1} respectivamente, para luego graficar las órbitas correspondientes.
- Con el botón “Telaraña” se grafica el conjunto $Spid_N(F)$, donde N es el número de iteraciones.
- Los botones “Límite <f,g>” y “Límite <f₋₁,g₋₁>” muestran el conjunto límite del grupo $\langle f, g \rangle$, el primero haciendo iteraciones hacia adelante del punto $x_0 + iy_0$ (el punto que se define mediante las cajas “Re(z0)” e “Im(z0)”) y el segundo con iteraciones hacia atrás.
- El botón “Fija actual” fija en la zona de dibujo el último conjunto graficado.
- El botón “Cambia fondo” intercambia el color de la zona de dibujo entre blanco y negro.
- El botón “Borra” elimina las gráficas de la zona de dibujo.

Bibliografía

- [Ahlfors] Ahlfors L.V., *Complex analysis*, McGraw Hill, 1978.
- [Chuckrow] Chuckrow V., *On Schottky groups with applications to kleinian groups*, Annals of Mathematics 88, 1968.
- [Cruz] Cruz M., *Acciones de grupos en sistemas dinámicos*, Tesis de Doctorado, Facultad de Ciencias, UNAM, 2004.
- [Devaney] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, 1989.
- [Goetz] Goetz A., *Piecewise isometries - an emerging area of dynamical systems*, Trends in Mathematics: Fractals in Graz 2001, Birkhäuser Verlag, 2003, pags. 135-144.
- [Kapovich] Kapovich M., *Topology of kleinian groups in several dimensions*, MSRI Preprint, 1992. Actualizado en 2002 para el 3-rd Ahlfors-Bers Colloquium.
- [Maskit] Maskit B., *Kleinian groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [McMullen] McMullen C.T., *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, Annals of Mathematics Studies 142, Princeton University Press, 1996.

- [McMullen2] McMullen C.T., *Complex dynamics and renormalization*, Annals of Mathematics Studies 135, Princeton University Press, 1994.
- [MSS] Mañé R., Sad P. y Sullivan D., *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 16 No. 2 (1983), pags. 193-217.
- [PJS] Peitgen H-O., Jürgens H. y Saupe D., *Chaos and fractals, new frontiers of science*, Springer Verlag, 1992.
- [Romero] Romero Méndez J.P., *Análisis de órbitas periódicas en una familia de funciones conformes por pedazos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.