(1-1)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOGICA MATEMATICA

Tesis que presenta para su exámen profesional de

Maestro en Ciencias

Matemáticas

ENRIQUE BUSTAMANTE Ll.

MEXICO

1942

A Mi Querido Padre

SR. ELIAS BUSTAMANTE R.

I N D I C E

LOGICA MATEMATICA

0. INTRODUCCION.

Al presentarse una teoría, siempre se da por conocido algo; ora algo simple, ora algo bastante complicado. Común a toda teoría siempre se da por conocido un idioma o cuando menos una colección pequeña de palabras. Cuanto más básica es una teoría, tanto más cuidado debe tenerse de hacerlo correctamente. Para hacer algo correctamente debe hacerse con precisión, y para esto, debe empezarse por establecer claramente lo que se va a dar por conocido.

La presente teoría puede considerarse como cimiento o fundamento de las matemáticas; en particular de la Lógica Matemática, la Teoría de Números y la de Conjuntos. Como tal, debe tratarse de dar por conocido lo menos posible y de evitar toda clase de imprecisiones tales como definiciones circulares.

El objeto de esta introducción es ampliar nuestro conocimiento de palabras, en el sentido de que se introducen palabras no dadas por conocidas. Así, por ejemplo, se encuentra conveniente considerar como palabras no-conocidas a palabras como: definición, fórmula, lógica, teorema, demostración, número, igualdad, conjunto, finito, etc. y como palabras conocidas, símbolo, regla, postulado, asociar, colección, existencia, axioma, ente, elemento, secuencia, serie, etc.

Cuando se da una tabla de palabras fundamentales (que se llamará la "tabla primitiva" de palabras), se dirá que se establece una <u>definición</u> y que se <u>define</u> una palabra o secuencia de palabras, cuando se asocia con una secuencia de palabras de la tabla primitiva, una palabra o secuencia de palabras, no de la tabla primitiva, o por recurrencia (es decir, se admiten abreviaciones). Sin decirlo explícitamente en cada caso, siempre se va a considerar que una secuencia (de entes cualesquiera), tiene un primer elemento o ente.

Aquí se va a dar por conocido una tabla de palabras del castellano. Como se espera establecer lo que es un número y los fundamentos de la teoría de los números, los símbolos: 0, 1, 2, etc. que frecuentemente se emplearán, deben considerarse como signos de referencia y de distinción a lo que se les asocia, y nada más.

<u>Definición</u>, (Def.): Se dice que se establece una Lógica, cuando:

1) se da (por conocido) una tabla primitiva (de palabras)

2) se da una serie (o una tabla) de "símbolos primitivos"

3) se postula una serie de axiomas (o una tabla de axiomas)

4) se da una tabla (o una serie) de reglas de deducción.

<u>Def.</u> Los cuatro datos anteriores constituyen una Lógica.

<u>Def.</u> Establecida una Lógica, se dice que se define una secuencia de símbolos primitivos (admitiendo que sea uno solo) o de palabras, o de ambos, dentro de la Lógica, si se le asocia a una secuencia de símbolos o de palabras primitivas, o de ambos, o por recurrencia.

<u>Def.</u> A los símbolos: ι, o, se les llamará símbolos de tipos fundamentales, o simplemente "tipos" (fundamentales). Si, y solo si α y β representan tipos, $(\alpha\beta)$ también representará un tipo. (Así, por ejemplo, (ιo), $(\iota(\iota\iota))$, etc., serán tipos).

<u>Convención</u>, (Conv.): Se omitirán parentesis adonde sea posible, en la escritura de tipos, con la convención de que la asociación es a la izquierda. (Asi, por ejemplo, $\iota o\iota$ abreviará a $((\iota o)\iota)$, etc.).

<u>Conv</u>. Si, y solo si α es un tipo, α' abreviará a $\alpha\alpha(\alpha\alpha)$.

Entre los símbolos primitivos que se van a considerar, va a haber letras con índices que serán tipos. La intención es de que estos símbolos primitivos sean nombres de entes abstractos cuya existencia se podría postular, o viceversa. El tipo del ente abstracto será el tipo que aparece como índice en su nombre y que también será el tipo del nombre, por definición.

<u>Def</u>. Una fórmula (de la Lógica) es una secuencia de símbolos primi

tivos en que hay un último símbolo primitivo, o que en tal forma pue de ponerse (es decir, se admiten abreviaciones). En general solo interesarán en el estudio de una Lógica, ciertas clases de fórmulas a las que se les llamará "bien-formadas" (bf), y a menos que se diga lo contrario, estas fórmulas bf serán las unicas admitidas, usándose simplemente la palabra "fórmula" para designarlas. Sin embargo, si se cree necesario poner mas énfasis se pondrá explicitamente bf.

Def. Una parte de una fórmula dada, es una fórmula obtenida de la dada, quitando los símbolos anteriores a cierto símbolo y los posteriores a ese o a otro símbolo de la fórmula dada. Se le llamará una "parte", simplemente (i.e. "parte" abrevia parte de una fórmula).

Def. Se llaman reglas derivadas de deducción, a una regla que puede obtenerse de mas de una de las reglas de deducción (de la Lógica). Las reglas derivadas ahorran trabajo, pero no son necesarias.

Def. Un teorema (de la Lógica) es una fórmula obtenible de los axiomas (de la Lógica) por una secuencia de aplicaciones de las reglas de deducción (de la Lógica).

Def. Una demostración de un teorema (de la Lógica) es una secuencia de fórmulas en la que hay una última, el teorema en cuestión, y cada fórmula del cual, o es un axioma o es obtenible de fórmulas que la preceden en la secuencia por la aplicación de una regla de deducción (de la Lógica). Es por demás recordar que se admiten abreviaciones, por ejemplo empleando un teorema previo.

Def. Un lema es un teorema que se considera como auxiliar.

Def. Un corolario es un teorema que se considera inmediatamente deducible de un teorema previo.

Def. Dado una colección de entes o elementos cualesquiera del mismo tipo (o sus nombres), se llamará variable a un símbolo (que se postula) que puede representar a uno cualquiera de los elementos de la colección (o sus nombres). A los elementos (o a sus nombres) se les llama "valores" de la variable. A la colección dada, se le llama "campo" de la variable. A la variable se le llama "nombre de la colección". Al tipo común de los elementos de la colección dada se le llama también, tipo de la variable, del campo de la variable y de la colección. Una constante es una variable cuyo campo consta de un solo elemento (constante abrevia variable con esa propiedad).

Def. Una función es una regla de correspondencia entre entes o elementos. En general se considera el caso en que asocia con cada valor o cada colección de valores de una o varias variables, uno o varios elementos de un mismo tipo (o sus nombres). Estos elementos, (o sus nombres) forman una o varias colecciones, campo o campos de una o varias variables, llamadas variables "dependientes" (las otras se llaman variables "independientes"). No se excluye la posibilidad de que, dada la función como regla de correspondencia entre entes o elementos, los campos de las variables independientes y dependientes queden así fijados. A los valores de la(s) variable(s) dependiente(s) se le(s) llama también, valor(es) de la función, y a veces, si no hay lugar a confusión, se le llama función a su colección y también a la(s) variable(s) dependiente(s). En general se considerarán solo funciones uniformes (mono-valentes) de una sola variable. Casos de mas variables pueden ser tratados semejantemente, considerando que los valores de la función son funciones.

Def. Se llamará tipo de una función de una variable del tipo α que tiene valores del tipo β, al tipo $(\beta\alpha)$, y viceversa.

Def. El tipo ι será el tipo de individuos, y viceversa. El tipo o será el tipo de proposiciones, y viceversa.

Conv. En lo que sigue, se usará abv para indicar "abrevia a" o bien "es abreviado", según sea necesario. T indicará un teorema; L, un lema; C, un corolario; A, un axioma; R, una regla de deducción; R', una regla derivada; Dem. abv demostración; (estando adelante de algo).

1. UNA LOGICA. (La Lógica de Alonso Church).

1.1 La Tabla Primitiva de Palabras.

Las palabras de esta tabla se considerarán del castellano. Por lo dicho en la introducción, es casi obvia la construcción de una tabla adecuada, por lo que no se insistirá mas sobre este asunto.

1.2 Los Símbolos Primitivos.

Sea α un símbolo que representa a un tipo cualquiera, (es un tipo variable, por decirlo así). Un símbolo será un símbolo primitivo, cuando y solo cuando sea (para algún tipo α), uno de estos:

$($, $)$, λ, N_{oo}, A_{ooo}, $\Pi_{o(o\alpha)}$, a_α, b_α, ..., y_α, z_α, $\bar{a}_\alpha$, ..., $\bar{z}_\alpha$, $\bar{\bar{a}}_\alpha$, ...

Los símbolos: $($, $)$, λ, se llamarán símbolos impropios. Los demás símbolos primitivos se llamarán símbolos propios. De estos, N_{oo}, A_{ooo}, $\Pi_{o(o\alpha)}$ serán constantes; los demás, variables. De aquí en adelante, "variable" se referirá a estos últimos solamente.

Def. Una fórmula será bf dentro de esta Lógica, y tendrá el tipo indicado adjunto, cuando y solo cuando, (bf abv bien-formada):

1) es un símbolo primitivo propio. Su tipo será el del símbolo, ó

2) es de la forma: $(\lambda x'_\beta F_\alpha)$, si y solo si x'_β representa una variable cualquiera y símbolo primitivo, del tipo β; y F_α es un símbolo que abv una fórmula (bf), del tipo α. Su tipo será $(\alpha\beta)$, ó

3) es de la forma $F_{\alpha\beta}G_\beta$, si y solo si $F_{\alpha\beta}$ y G_β son fórmulas (bf), de tipos $(\alpha\beta)$ y β respectivamente. El tipo de $F_{\alpha\beta}G_\beta$ será α.

Esta definición es una definición por recurrencia y es legítima en el sentido de que siempre puede decidirse si se le asocia el nombre de bf a una fórmula, o no. Nótese la unicidad del tipo.

De aquí en adelante se usará simplemente el nombre de variable para indicar una variable y símbolo primitivo o una variable definido dentro de esta Lógica, (y por tanto, no una constante).

Como puede notarse del 2), $(\lambda x'_\beta F_\alpha)$ es una función. Se dirá que con F_α se construyó una función por abstracción que se escribe:

$(\lambda x'_\beta F_\alpha)$. En general x'_β es una variable que aparece en F_α (una fórmula del tipo α). λ hace el papel de un operador de abstracción. Intuitivamente se tiene la intención de que (como en el 3)), $F_{\alpha\beta}G_\beta$ represente el valor de la función $F_{\alpha\beta}$, para el valor G_β de la variable independiente, o argumento, como con frecuencia se dirá.

Conv. Sea α un tipo cualquiera. Se van a usar letras mayúsculas con un índice α , (que no sean símbolos primitivos), para indicar, representar, o abreviar una fórmula (bf) del tipo α , (a menos que se limite el uso de esa letra por alguna convención o definición). Igualmente se usarán los símbolos de variables, nomás que acentuados (ej: x'_α, y'_α, etc.), para representar cualquiera variable del tipo correspondiente que aparezca como índice en una letra acentuada.

Def. Una aparición de una variable x'_α en una fórmula será ligada, cuando y solo cuando su aparición sea en una parte de la fórmula dada, de la forma: $(\lambda x'_\alpha F_\beta)$. En caso contrario, la aparición será libre, por definición.

Def. Una variable será una variable $\begin{smallmatrix}\text{ligada}\\ \text{libre}\end{smallmatrix}$ en una fórmula dada, cuando y solo cuando tenga cuando menos una aparición $\begin{smallmatrix}\text{ligada}\\ \text{libre}\end{smallmatrix}$ en la fórmula dada. (dos definiciones, una con "ligada" y otra con "libre").

Antes de seguir adelante, hagamos la siguiente convención:

Conv. Se omitirán paréntesis en la escritura de fórmulas (bf), (adonde sea posible, sin producir ambiguidades de acuerdo con lo que sigue), con la convención de que su restitución debe dar una fórmula (bf), y en caso de haber todavía ambiguidad, que la asociación sea a la izquierda.

Convención, (o definiciones por abreviaciones):

$N_{oo}F_o$	se abreviará (y definirá)	$[\sim F_o]$
$A_{ooo}F_oG_o$	"	$[F_o \vee G_o]$
$[\sim[[\sim F_o]\vee[\sim G_o]]]$	"	$[F_oG_o]$
$[[\sim F_o]\vee G_o]$	"	$[F_o \supset G_o]$

$[[F_o \supset G_o][G_o \supset F_o]]$	se abreviará (y definirá a):	$[F_o \equiv G_o]$
$\Pi_{o(o\alpha)}(\lambda x'_\alpha F_o)$	,,	$[(x'_\alpha) F_o]$
$[\sim[(x'_\alpha)[\sim F_o]]]$	,,	$[(\exists x'_\alpha) F_o]$
$\lambda x_\alpha \lambda y_\alpha[(f_{o\alpha})[f_{o\alpha} x_\alpha \supset f_{o\alpha} y_\alpha]]$	,,	$Q_{o\alpha\alpha}$
$Q_{o\alpha\alpha} F_\alpha G_\alpha$	,,	$[F_\alpha = G_\alpha]$
$[\sim[F_\alpha = G_\alpha]]$	,,	$[F_\alpha \neq G_\alpha]$
$\lambda x_\alpha x_\alpha$	,,	$I_{\alpha\alpha}$
$\lambda x_\alpha \lambda y_\beta x_\alpha$	,,	$K_{\alpha\beta\alpha}$
$\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha x_\alpha$	,,	$0_{\alpha'}$
$\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha (f_{\alpha\alpha} x_\alpha)$	,,	$1_{\alpha'}$
$\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha (f_{\alpha\alpha}(f_{\alpha\alpha} x_\alpha))$	,,	$2_{\alpha'}$
$\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha (f_{\alpha\alpha}(f_{\alpha\alpha}(f_{\alpha\alpha} x_\alpha)))$	,,	$3_{\alpha'}$, etc.
$\lambda n_{\alpha'} \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha (f_{\alpha\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_\alpha))$	,,	$S_{\alpha'\alpha'}$
$\lambda n_{\alpha'}[(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'} 0_{\alpha'} \supset [[(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'} x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'} x_{\alpha'})]] \supset f_{o\alpha'} n_{\alpha'}]]]$	,,	$N_{o\alpha'}$
$\lambda m_{\alpha'} \lambda n_{\alpha'} \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_\alpha (m_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_\alpha))$	,,	$\sigma_{\alpha'\alpha'\alpha'}$
$\lambda m_{\alpha'} \lambda n_{\alpha'} \lambda f_{\alpha\alpha}(m_{\alpha'}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}))$	,,	$\pi_{\alpha'\alpha'\alpha'}$
$\sigma_{\alpha'\alpha'\alpha'} F_{\alpha'} G_{\alpha'}$	,,	$[F_{\alpha'} + G_{\alpha'}]$
$\pi_{\alpha'\alpha'\alpha'} F_{\alpha'} G_{\alpha'}$	,,	$[F_{\alpha'} \times G_{\alpha'}]$

Adonde sea posible se omitirán los paréntesis cuadrados [,] , que se introdujeron arriba, según la siguiente convención:

Conv. 1) Se pondrá un punto en el lugar del paréntesis cuadrado inicial (el que se omitirá, lo mismo que su pareja), cuando y solo cuando el paréntesis final de la pareja llegue lo máximo a la derecha posible que dé lugar a una fórmula (bf) o una abreviación de una. Después: 2) Se omitirán paréntesis cuadrados, cuando y solo cuando se trate de una fórmula (bf), y cuando y solo cuando no haya ambiguidad al irlos omitiendo en el siguiente orden (de "débil" a "fuerte") en: (1): $[\sim F_o]$ y: $[F_o G_o]$; (2): $[(x'_\alpha) F_o]$, $[(\exists x'_\alpha) F_o]$, $[F_\alpha = G_\alpha]$ y: $[F_\alpha \neq G_\alpha]$; (3): $[F_o \vee G_o]$; (4): $[F_o \supset G_o]$ y: $[F_o \equiv G_o]$.

excepto que cuando haya, que la asociación sea a la izquierda en cada parte dado por el paso 1). La restauración de los paréntesis cuadrados, se deberá hacer como sigue: (1) el paso recíproco al 1) de arriba; (2) el paso recíproco al 2) de arriba, (mencionado arriba).

1.3 Los Axiomas de la Lógica.

Se postulan los siguientes (fórmulas como) axiomas: Nombre:

$p_o \vee p_o \supset p_o$	A1
$p_o \supset p_o \vee q_o$	A2
$p_o \vee q_o \supset q_o \vee p_o$	A3
$p_o \supset q_o \supset .r_o \vee p_o \supset r_o \vee q_o$	A4
$\Pi_{o(o\alpha)} f_{o\alpha} \supset f_{o\alpha} x_\alpha$	A5
$(x_\alpha)[p_o \vee f_{o\alpha} x_\alpha] \supset p_o \vee \Pi_{o(o\alpha)} f_{o\alpha}$	A6
$(\exists x_\iota)(\exists y_\iota).x_\iota \neq y_\iota$	A7
$N_{o\iota'} x_{\iota'} \supset .N_{o\iota'} y_{\iota'} \supset .S_{\iota'\iota'} x_{\iota'} = S_{\iota'\iota'} y_{\iota'} \supset x_{\iota'} = y_{\iota'}$	A8

1.4 Las Reglas de Deducción de la Lógica.

R1. Primera Regla de λ-Conversión: De una fórmula (bf), se deduce el resultado de substituir en una parte F_α de ella (excepto una variable inmediatamente precedida de una λ), una variable x'_β con otra: y'_β atravez de F_α (lo que se indicará: $S^{x'_\beta}_{y'_\beta} F_\alpha$), siempre y cuando x'_β no sea una variable libre de F_α y que y'_β no aparezca en F_α.

R2. Segunda regla de λ-Conversión: R2': De una fórmula (bf) se deduce el resultado de reemplazar una parte de la forma $((\lambda x'_\alpha F_\beta)G_\alpha)$ con el resultado de substituir x'_α con G_α atravez de F_β (lo que se indicará: $S^{x'_\alpha}_{G_\alpha} F_\beta$), siempre y cuando, ni x'_α, ni variable libre alguna de G_α sea ligada en F_β. R2": La regla recíproca a R2'.

R3. Regla de Substitución: De $F_{o\alpha} x'_\alpha$ se deduce $F_{o\alpha} G_\alpha$, siempre y cuando x'_α no sea variable libre de $F_{o\alpha}$, (se substituye a x'_α).

R4. Regla de Generalización: De $F_{o\alpha} x'_\alpha$ se deduce $\Pi_{o(o\alpha)} F_{o\alpha}$, siempre y cuando x'_α no sea variable libre de $F_{o\alpha}$. (se generaliza a x'_α).

R5. Regla de Modus Ponens: De F_o y $F_o \supset G_o$ se deduce a G_o.

R'3. Regla Derivada de Substitución: De F_0 se deduce el resultado de substituir las apariciones libres de x'_α con G_α, atravez de F_0 (lo que se indicará: $S'^{x'_\alpha}_{G_\alpha}F_0$), siempre y cuando ninguna variable libre de G_α, con la posible excepción de x'_α sea ligada en F_0.

R'4. Regla Derivada de Generalización: De F_0 se deduce $(x'_\alpha)F_0$.

Para obtener R'3, sea x'_α una variable libre de F_0, y empecemos con $(\lambda x'_\alpha F_0)x'_\alpha$. De esto se deduce $(\lambda x'_\alpha F_0)G_\alpha$, por R3, ya que x'_α no es libre en $(\lambda x'_\alpha F_0)$. Ahora sea P el siguiente paso: consideremos las partes de F_0 adonde x'_α solo tiene apariciones ligadas; en cada una de estas partes, substituyamos x'_α con y'_α, (donde y'_α es una variable que no aparece en parte alguna de estas partes consideradas), obteniendo así H_0. Por R1, se deduce: $(\lambda x'_\alpha H_0)G_\alpha$. Ahora las apariciones de x'_α en H_0 serán todas libres. Asi que, si ninguna variable libre de G_α es ligada en H_0, (excepto hecho de x'_α, que no puede ser ligada en H_0, por construcción), por R2' se deduce: $S^{x'_\alpha}_{G_\alpha}H_0$ y como x'_α no es ligado en H_0, se deduce: $S'^{x'_\alpha}_{G_\alpha}H_0$. Ahora, haciendo el paso recíproco a P, se deduce: $S'^{x'_\alpha}_{G_\alpha}F_0$, siempre y cuando ninguna variable libre de G_α, con la posible excepción de x'_α sea ligada en F_0. Para obtener R'4, se empieza con $(\lambda x'_\alpha F_0)x'_\alpha$. Como x'_α no es libre en $(\lambda x'_\alpha F_0)$, por R4 se deduce: $\prod_{o(o\alpha)}(\lambda x'_\alpha F_0)$.

2. TEOREMAS FUNDAMENTALES.

Antes de seguir adelante es conveniente notar que cambios alfabéticos de las variables pueden hacerse en los axiomas; pues las libres apariciones de una variable cualquiera pueden cambiarse por R'3, y las apariciones ligadas pueden cambiarse por R1. Los teoremas obtenidos así de los axiomas, se llaman "variantes", (incluyendo también a los propios axiomas). Cosas semejantes pueden decirse respecto de teoremas. (Uso de esto sin decirlo, se hará a veces).

Def. Se llama una demostración de G_0 con la hipótesis de: F_0^1, F_0^2, ..., F_0^n, a una secuencia de fórmulas, en que hay una última fórmula, (que sea) G_o, y cada fórmula del cual, o es una de las fórmulas de la hipótesis, o es una variante, o es obtenible de fórmulas que la preceden en la secuencia por la aplicación de una regla de deducción de la Lógica, excepto hecho de la R3 y R4 en lo que se refiere a variables libres de: F_o^1, $F_o^2, \ldots,$ y F_o^n. Si G_o es demostrable con la hipótesis: F_o^1, $F_o^2, \ldots$ y F_o^n, se escribe: $F_o^1, F_o^2, \ldots, F_o^n \vdash G_o$. No se excluye la posibilidad de no haber fórmula alguna en la hipótesis, en cuyo caso G_o resulta ser un teorema (según def. anterior). (Nota: El símbolo F_o^1, $F_o^2, \ldots,$ F_o^n, se usa en el sentido de que F_o^1 es una primera fórmula del tipo <u>o</u>; F_o^2 es una segunda, y después de otras (que se omiten escribir) viene una última F_o^n; idem en otros casos).

En general, $\ast \vdash \circledast$ puede leerse: de $\ast$ se deduce $\circledast$. Con esto, $\vdash \ast$ quiere decir que $\ast$ es un teorema. En general, la aplicación sucesiva de varias reglas de deducción se abreviará al escribir, como si la aplicación fuese simultanea, pero debe entenderse que la aplicación es sucesiva. Al aplicar R3 o R'3, se usará la notación: $S^{\ast \mid \ldots}_{\circledast \mid \ldots}$ adelante de una fórmula, para indicar que se obtiene esta fórmula substituyendo $\ast$ con $\circledast$, y ... con ..., etc. en la anterior.

<u>Conv</u>. Se usará la notación $(R1)^2$, etc., para indicar que se aplica R1 dos veces para dar la fórmula que sigue a este símbolo, etc.. También, $\therefore$ abv "de donde se deduce:", "por consiguiente:", "por lo tanto:", (etc. para frases semejantes) según se requiera.

<u>T1</u>. $\vdash p_o \supset p_o$; $\vdash p_o \vee \sim p_o$.

<u>Dem</u>: A4: $\vdash q_o \supset p_o \supset . r_o \vee q_o \supset r_o \vee p_o$ $\therefore$ $\check{S}^{q_o \mid r_o}_{p_o \vee p_o \mid \sim p_o}$, por R'3: $p_o \vee p_o \supset p_o \supset . \sim p_o \vee [p_o \vee p_o] \supset \sim p_o \vee p_o$ $\therefore$ por $(R5)^2$, A1 y A2: $\vdash \sim p_o \vee p_o$ abv $p_o \supset p_o$. También del A3 y R5: $\vdash p_o \vee \sim p_o$.

<u>T2</u>. $A_o \supset B_o$, $B_o \supset \grave{C}_o \vdash A_o \supset \grave{C}_o$.

<u>Dem</u>: A4: $p_o \supset q_o \supset . r_o \vee p_o \supset r_o \vee q_o$ $\therefore$
R'3, $\check{S}^{p_o \mid q_o \mid r_o}_{B_o \mid \grave{C}_o \mid \sim A_o}$: $B_o \supset \grave{C}_o \supset . \sim A_o \vee B_o \supset \sim A_o \vee \grave{C}_o$ $\therefore$
$(R5)^2$: $B_o \supset \grave{C}_o$, $\sim A_o \vee B_o$ abv $A_o \supset B_o \vdash \sim A_o \vee \grave{C}_o$ abv $A_o \supset \grave{C}_o$.

T3. $\vdash p_0 \supset . q_0 \supset p_0$.

Dem: A2 : $p_0 \supset p_0 \vee \sim q_0$
A3, R'3, $S^{q_0}_{\sim q_0}$: $p_0 \vee \sim q_0 \supset \sim q_0 \vee p_0$ $\Big\}$ $\therefore$ por T2: $\vdash p_0 \supset \sim q_0 \vee p_0$.

T4. $\vdash p_0 \supset \sim\sim p_0$.

Dem: T1: $\vdash p_0 \vee \sim p_0$ $\therefore$ R'3, $S^{p_0}_{\sim p_0}$: $\vdash \sim p_0 \vee \sim\sim p_0$ abv $p_0 \supset \sim\sim p_0$.

T5. $\vdash \sim\sim p_0 \supset p_0$.

Dem: A4, R'3, $S^{p_0 | q_0 | r_0}_{\sim p_0 | \sim\sim\sim p_0 | p_0}$: $\sim p_0 \supset \sim\sim\sim p_0 \supset . p_0 \vee \sim p_0 \supset p_0 \vee \sim\sim\sim p_0$
$\therefore$ T4 y R'3, T1, $(R5)^2$: $\vdash p_0 \vee \sim\sim\sim p_0$
$\therefore$ A3, R'3 y R5 : $\vdash \sim\sim\sim p_0 \vee p_0$ abv $\sim\sim p_0 \supset p_0$.

T6. $\vdash p_0 \supset q_0 \supset . \sim q_0 \supset \sim p_0$; $\vdash p_0 \supset \sim q_0 \supset . q_0 \supset \sim p_0$.

Dem: A4, R'3, $S^{q_0 | p_0 | r_0}_{\sim\sim q_0 | q_0 | \sim p_0}$: $q_0 \supset \sim\sim q_0 \supset . \sim p_0 \vee q_0 \supset . \sim p_0 \vee \sim\sim q_0$
R5, T4: $\sim p_0 \vee q_0 \supset \sim p_0 \vee \sim\sim q_0$
R'3, A3: $\sim p_0 \vee \sim\sim q_0 \supset \sim\sim q_0 \vee \sim p_0$ $\Big\}$ $\therefore$ T2: $\sim p_0 \vee q_0 \supset \sim\sim q_0 \vee \sim p_0$ que abv da T6.
$\vdash p_0 \supset \sim q_0 \supset . q_0 \supset \sim p_0$ se obtiene del A3 y R'3, $S^{p_0 | q_0}_{\sim p_0 | \sim q_0}$.

T7. $\vdash p_0 \vee [q_0 \vee r_0] \supset [q_0 \vee . p_0 \vee r_0] \vee p_0$.

Dem: A2, A3 y T2 : $r_0 \supset p_0 \vee r_0$ $\therefore$
A4, R'3 y R5 : $q_0 \vee r_0 \supset q_0 \vee . p_0 \vee r_0$ $\therefore$
A4, R'3 y R5 : $[p_0 \vee . q_0 \vee r_0] \supset p_0 \vee . q_0 \vee . p_0 \vee r_0$

T8. $\vdash [q_0 \vee . p_0 \vee r_0] \vee p_0 \supset q_0 \vee . p_0 \vee r_0$.

Dem: A2: $p_0 \supset p_0 \vee q_0$ y: $p_0 \supset q_0 \vee p_0$
R'3, $S^{q_0 | p_0}_{r_0 | p_0 \vee q_0}$: $p_0 \vee q_0 \supset r_0 \vee . p_0 \vee q_0$ $\Big\}$ $\therefore$ T2: $p_0 \supset r_0 \vee . p_0 \vee q_0$
$\therefore$ A4, R'3, R5: $[r_0 \vee . p_0 \vee q_0] \vee p_0 \supset [r_0 \vee . p_0 \vee q_0] \vee [r_0 \vee . p_0 \vee q_0]$ $\therefore$
A1, R'3, T2: $\vdash [r_0 \vee . p_0 \vee q_0] \vee p_0 \supset r_0 \vee . p_0 \vee q_0$ $\therefore \vdash$ T8.

C8. $\vdash p_0 \vee [q_0 \vee r_0] \supset q_0 \vee [p_0 \vee r_0]$. (del T7, T8 y T2).

T9. $\vdash p_0 \vee [q_0 \vee r_0] \supset [p_0 \vee q_0] \vee r_0$.

Dem: A3, A4, R'3 y R5 : $[p_0 \vee . q_0 \vee r_0] \supset p_0 \vee . r_0 \vee q_0$
C8, R'3 : $[p_0 \vee . r_0 \vee q_0] \supset r_0 \vee . p_0 \vee q_0$
A3, R'3 : $[r_0 \vee . p_0 \vee q_0] \supset [p_0 \vee q_0] \vee r_0$
$\therefore$ $(T2)^2$, (aplicando el T2 dos veces) : $\vdash$ T9.

T10. $\vdash r_0 \supset [p_0 \supset q_0] \supset . r_0 \supset p_0 \supset . r_0 \supset q_0$. $\qquad \Gamma_{c}\, r_0 \supset q_0$

Dem: A4, R'3 : $p_0 \supset q_0 \supset [r_0 \supset p_0 \supset . r_0 \supset q_0] \supset . \sim r_0 \vee [p_0 \supset q_0] \supset . \sim r_0 \vee . r_0 \supset p_0 \supset .^{5}$

A4, R5: $\sim r_0 \vee [p_0 \supset q_0] \supset . \sim r_0 \vee . r_0 \supset p_0 \supset . r_0 \supset q_0$

A3, R'3, T8, T2: $p_0 \vee [q_0 \vee . p_0 \vee s_0] \supset q_0 \vee . p_0 \vee s_0$

R'3, $S^{p_0 \,|\, q_0 \,|\, s_0}_{\sim r_0 \,|\, \sim[r_0 \supset p_0] \,|\, q_0}$: $\sim r_0 \vee [\sim[r_0 \supset p_0] \vee [\sim r_0 \vee q_0]] \supset . r_0 \supset p_0 \supset . r_0 \supset q_0$

$\therefore$ T2: $\vdash \sim r_0 \vee [p_0 \supset q_0] \supset . r_0 \supset p_0 \supset . r_0 \supset q_0 \quad \therefore \vdash$ T10.

T11. Primer teorema fundamental: Sea Σ' la secuencia no vacia: F_0^1, $F_0^2, \ldots, F_0^{n-1}, F_0^n$. Si $\Sigma' \vdash G_0$, sea Σ'' la secuencia: $H_0^1, \ldots, H_0^m, G_0$, (la demostración de G_0 con la hipótesis Σ'). Entonces, si H_0 es una fórmula cualquiera de Σ'', se tiene: $F_0^1, \ldots, F_0^{n-1} \vdash F_0^n \supset H_0$.

Dem: Las primeras fórmulas de Σ'' serán de Σ', o variantes de la Lógica (de la misma definición de una demostración con una hipótesis).

1). Mostremos que (si Σ''' abv $F_0^1, \ldots, F_0^{n-1}$): $\Sigma''' \vdash F_0^n \supset F_0^n$. En efecto, del T1 y R'3, $S^{p_0}_{F_0^n}$: $\vdash F_0^n \supset F_0^n \;\therefore\; \Sigma''' \vdash F_0^n \supset F_0^n$.

2). Sea F_0 una fórmula cualquiera de Σ''', o un variante. Del T3 y R'3, $S^{p_0 \,|\, q_0}_{F_0 \,|\, F_0^n}$, se tiene: $F_0 \supset . F_0^n \supset F_0 \;\therefore$ R5: $F_0 \vdash F_0^n \supset F_0 \therefore \Sigma''' \vdash F_0^n \supset F_0$.

3). Ahora mostremos que si H_0' y H_0'' son dos fórmulas cualesquiera de Σ'', y si H_0' es anterior a H_0'', en Σ'', y si: $H_0' \vdash H_0''$ por alguna de las reglas R1, R2, R3, R4, entonces: $F_0^n \supset H_0' \vdash F_0^n \supset H_0''$. En efecto, si: $H_0' \vdash H_0''$ por R1 ó R2, se tiene: $F_0^n \supset H_0' \vdash F_0^n \supset H_0''$ por la misma regla; si: " " R3 " " " " R'3; y si: " " R4 " " " ". A6$^{\alpha}$, R'3, R'4 y R5, pues entonces: H_0' abv $F_{o\alpha} x_\alpha'$ y x_α' no es libre en $F_{o\alpha}$, ni en F_0^n (por definición de demostración con hipótesis). Además, H_0'' abv $\prod_{o(o\alpha)} F_{o\alpha}$. Ahora, del R'4, $F_0^n \supset H_0' \vdash (x_\alpha')[F_0^n \supset H_0'$, y del A6$^{\alpha}$ y R'3 con $S^{p_0 \,|\, f_{o\alpha}}_{\sim F_0^n \,|\, F_{o\alpha}}$: $(x_\alpha')[F_0^n \supset F_{o\alpha} x_\alpha'] \supset . F^n \supset \prod_{o(o\alpha)} F_{o\alpha}$, y usando ahora R5, se tiene: $(x_\alpha')[F_0^n \supset H_0'] \vdash F_0^n \supset H_0'' \therefore F_0^n \supset H_0' \vdash F_0^n \supset H_0''$.

4). Por último, mostremos que si H_0', H_0'', y H_0''' son tres fórmulas de Σ'', cualesquiera, y si H_0' es anterior a H_0'', y ambos son anteriores a H_0''', en Σ'', y si: $H_0', H_0'' \vdash H_0'''$, por R5, (o sea que, digamos:

H''_o abv $H'_o \supset H'''_o$), entonces: $F^n_o \supset H'_o,\ F^n_o \supset H''_o \vdash F^n_o \supset H'''_o$. En efecto, del T10 y R'3 con: $S^{r_o \,|\, p_o \,|\, q_o}_{F^n_o \,|\, H'_o \,|\, H'''_o}$ se tiene: $F^n_o \supset H''_o \supset . F^n_o \supset H'_o \supset . F^n_o \supset H'''_o$. Ahora usando R5, dos veces: $F^n_o \supset H''_o,\ F^n_o \supset H'_o \vdash F^n_o \supset H'''_o$. Ahora bién, sea L_o de Σ', o una variante. Del 1). y 2). se tiene: $\Sigma''' \vdash F^n_o \supset L_o$. Ahora sea K_o de Σ'': entonces K_o puede ser L_o ó es posterior a una L_o de Σ' y Σ''. Del 3). y 4). se tiene: $\Sigma''' \vdash F^n_o \supset K_o$. Ahora el H_o del T11, puede ser solo una L_o ó una K_o ∴ $\Sigma''' \vdash F^n_o \supset H_o$, que es el T11.

C11'. Si: $\Sigma' \vdash G_o$, entonces: $\Sigma''' \vdash F^n_o \supset G$. Pues Σ'' tiene una última fórmula que es G_o, así que H_o puede ser G_o. Como este corolario es muy usado, casi como si fuera una regla de deducción, se le llamará R'. Se usará frecuentemente como una regla de deducción.

C11". Una condición necesaria y suficiente para que: $\Sigma' \vdash G_o$, es que: $\Sigma''' \vdash F^n_o \supset G_o$. (Se deduce de C11' y R5).

T12$^\alpha$. Segundo teorema fundamental: Si x'_α no es ligado en F_o, entonces: $\vdash (x'_\alpha)F_o \supset F_o$, o bién: $(x'_\alpha)F_o \vdash F_o$.

Dem: Del A5$^\alpha$, se tiene: $\Pi_{o(o\alpha)} g'_{o\alpha} \supset g'_{o\alpha} x'_\alpha$ ∴ con R'3, $S^{g'_{o\alpha}}_{(\lambda x'_\alpha F_o)}$ se tiene: $\Pi_{o(o\alpha)}(\lambda x'_\alpha F_o) \supset (\lambda x'_\alpha F_o)x'_\alpha$ ∴ por R2 y abreviando, se tiene: $\vdash (x'_\alpha)F_o \supset F_o$. A este teorema se le llamará R".

T13$^\alpha$. $\vdash (x_\alpha) f_{o\alpha} x_\alpha \supset f_{o\alpha} x_\alpha$; $\vdash (x_\alpha) f_{o\alpha} x_\alpha \supset f_{o\alpha} y_\alpha$.

Dem: A5$^\alpha$ y R'3, $S^{f_{o\alpha}}_{(\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha))}$: $\Pi_{o(o\alpha)}(\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha)) \supset (\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha))x_\alpha$ ∴

R2 y abv: $(x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha \supset f_{o\alpha}x_\alpha$ ∴ R'3, $S'^{x_\alpha}_{y_\alpha}$: $(x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha \supset f_{o\alpha}y_\alpha$.

T14$^\alpha$. $\vdash f_{o\alpha}x_\alpha \supset (\exists x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha$; $\vdash f_{o\alpha}y_\alpha \supset (\exists x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha$.

Dem: T13$^\alpha$ y R'3, $S^{f_{o\alpha}}_{(\lambda x_\alpha . \sim f_{o\alpha}x_\alpha)}$: $(x_\alpha)(\lambda x_\alpha.\sim f_{o\alpha}x_\alpha)x_\alpha \supset (\lambda x_\alpha.\sim f_{o\alpha}x_\alpha)x_\alpha$

∴ R2: $(x_\alpha).\sim f_{o\alpha}x_\alpha \supset \sim f_{o\alpha}x_\alpha$ (y semejantemente con R'3, $S'^{x_\alpha}_{y_\alpha}$).

∴ T6, R'3 y R5: $f_{o\alpha}x_\alpha \supset \sim.(x_\alpha).\sim f_{o\alpha}x_\alpha$ abv $(\exists x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha$, etc.

T15$^\alpha$. $\vdash (x_\alpha)[p_o \supset f_{o\alpha}x_\alpha] \supset . p_o \supset (x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha$.

Dem: A6$^\alpha$, R'3, $S^{p_o \,|\, f_{o\alpha}}_{\sim p_o \,|\, (\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha))}$: $(x_\alpha)[\sim p_o \vee (\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha))x_\alpha] \supset \sim p_o \vee \Pi_{o(o\alpha)}(\lambda x_\alpha(f_{o\alpha}x_\alpha))$

∴ R2 y abv: $(x_\alpha)[p_o \supset f_{o\alpha}x_\alpha] \supset . p_o \supset (x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha$.

T16$^\alpha$. $\vdash (x_\alpha)[f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o] \supset . (\exists x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o$.

Dem: $(x_\alpha)[f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o]$, (R") $\vdash f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o$, (A5, R'3, R5) $\vdash$ $p_o \vee \sim f_{o\alpha}x_\alpha$.

indica que el $\vdash$ se refiere a la hipótesis original.

∴ por R'4: $(x_\alpha)[f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o] \vdash (x_\alpha)[p_o \vee \sim f_{o\alpha}x_\alpha]$; pero usando A6$^\alpha$:
$(x_\alpha)[p_o \vee g_{o\alpha}x_\alpha] \supset p_o \vee \Pi_{o(o\alpha)}\, g_{o\alpha}$, con: R'3, $S^{g_{o\alpha}}_{(\lambda x_\alpha . \sim f_{o\alpha}x_\alpha)}$ y R2, se tiene:
$(x_\alpha)[p_o \vee \sim f_{o\alpha}x_\alpha] \supset p_o \vee (x_\alpha).\sim f_{o\alpha}x_\alpha$ ∴ por R5: $(x_\alpha)[f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o] \vdash$
$p_o \vee (x_\alpha).\sim f_{o\alpha}x_\alpha$ ∴ (por T4, R'3, A4, R'3, R5): $\vdash, p_o \vee \sim\sim(x_\alpha).\sim f_{o\alpha}x_\alpha$
∴ (por A3, R'3, R5): $\vdash, (\exists x_\alpha) f_{o\alpha}x_\alpha \supset p_o$ ∴ (por R'): $\vdash$ T16$^\alpha$.

T17$^\alpha$. $\vdash x'_\alpha = x'_\alpha$.

Dem: T1, R'3: $\vdash f_{o\alpha}x'_\alpha \supset f_{o\alpha}x'_\alpha$ ∴ R'4: $\vdash (f_{o\alpha})[f_{o\alpha}x'_\alpha \supset f_{o\alpha}x'_\alpha]$
∴ R2'': $\vdash ((\lambda y_\alpha . (f_{o\alpha})[f_{o\alpha}x'_\alpha \supset f_{o\alpha}y_\alpha])x'_\alpha)$ ∴ por R2'':
$\vdash (((\lambda x_\alpha(\lambda y_\alpha . (f_{o\alpha})[f_{o\alpha}x_\alpha \supset f_{o\alpha}y_\alpha]))x'_\alpha)x'_\alpha)$ abv $\vdash x'_\alpha = x'_\alpha$.

T18$^\alpha$: $\vdash x'_\alpha = y'_\alpha \supset . f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha$.

Dem: $x'_\alpha = y'_\alpha$ abv $(((\lambda x_\alpha(\lambda y_\alpha . (f_{o\alpha})[f_{o\alpha}x_\alpha \supset f_{o\alpha}y_\alpha]))x'_\alpha)y'_\alpha)$
∴ R1, R2: $x'_\alpha = y'_\alpha \vdash ((\lambda y_\alpha . (f'_{o\alpha})[f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y_\alpha])y'_\alpha)$
∴ R2: $x'_\alpha = y'_\alpha \vdash (f'_{o\alpha})[f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha]$, ∴ R'': $\vdash, f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha$
∴ por R': $\vdash x'_\alpha = y'_\alpha \supset . f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha$, i.e. T18$^\alpha$.

T19$^{\alpha\beta}$: $\vdash x'_\alpha = y'_\alpha \supset f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha$.

Dem: T17$^\beta$, R'3, $S^{x'_\beta}_{f'_{\beta\alpha}x_\alpha}$: $\vdash f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}x'_\alpha$. Ahora del
T18$^\alpha$ y R5: $x'_\alpha = y'_\alpha \vdash f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha$ ∴ R'3, $S^{f'_{o\alpha}}_{\lambda y'_\alpha . f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha}$:
$x'_\alpha = y'_\alpha \vdash (\lambda y'_\alpha . f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha)x'_\alpha \supset (\lambda y'_\alpha . f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha)y'_\alpha$
∴ R1, R2: $x'_\alpha = y'_\alpha \vdash f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}x'_\alpha \supset f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha$
∴ (por R5): $\vdash, f'_{\beta\alpha}x'_\alpha = f'_{\beta\alpha}y'_\alpha$ ∴ por R' se obtiene T19$^{\alpha\beta}$.

T20$^\alpha$. $\vdash x'_\alpha = y'_\alpha \supset y'_\alpha = x'_\alpha$.

Dem: $x'_\alpha = y'_\alpha$, (T18$^\alpha$, R5) $\vdash f'_{o\alpha}x'_\alpha \supset f'_{o\alpha}y'_\alpha$ ∴ R'3, $S^{f'_{o\alpha}}_{\lambda y'_\alpha . y'_\alpha = x'_\alpha}$:
$\vdash, (\lambda y'_\alpha . y'_\alpha = x'_\alpha)x'_\alpha \supset (\lambda y'_\alpha . y'_\alpha = x'_\alpha)y'_\alpha$. Ahora la parte:
$(\lambda y'_\alpha . y'_\alpha = x'_\alpha)y'_\alpha$, usando R1 con $S^{x_\alpha \mid y_\alpha}_{u_\alpha \mid v_\alpha} Q_{o\alpha\alpha}$, empleando R2,
y luego R1 otra vez con $S^{u_\alpha \mid v_\alpha}_{x_\alpha \mid y_\alpha}$ en el resultado anterior,
da: $y'_\alpha = x'_\alpha$. Con los mismos pasos, $(\lambda y'_\alpha . y'_\alpha = x'_\alpha)x'_\alpha$ da:
$x'_\alpha = x'_\alpha$. Así que con esos pasos $\vdash, x'_\alpha = x'_\alpha \supset y'_\alpha = x'_\alpha$
∴ del T17$^\alpha$ y R5: $\vdash, y'_\alpha = x'_\alpha$ ∴ por R': $\vdash$ T20$^\alpha$.

T21$^\alpha$: $\vdash x'_\alpha = y'_\alpha \supset . y'_\alpha = z'_\alpha \supset x'_\alpha = z'_\alpha$.

<u>Dem:</u> $T18^{\alpha}, R'3, S^{f'_{o\alpha}}_{Q_{o\alpha\alpha}z'_{\alpha}}$: $y'_{\alpha}=x'_{\alpha} \supset . z'_{\alpha}=y'_{\alpha} \supset z'_{\alpha}=x'_{\alpha}$

$T20^{\alpha}, R5$: $x'_{\alpha}=y'_{\alpha}, y'_{\alpha}=z'_{\alpha} \vdash y'_{\alpha}=x'_{\alpha}, z'_{\alpha}=y'_{\alpha} \vdash, z'_{\alpha}=x'_{\alpha} \vdash, x'_{\alpha}=z'_{\alpha}$

$\therefore (R')^2$: $x'_{\alpha}=y'_{\alpha} \supset . y'_{\alpha}=z'_{\alpha} \supset x'_{\alpha}=z'_{\alpha}$.

3. FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE NUMEROS.

Para aplicar una Lógica a una colección de entes o elementos abstractos cualesquiera, se requiere que a cada ente de la colección se le dé un nombre que sea un símbolo primitivo de la Lógica. Para aplicar ésta Lógica a una colección de entes abstractos, lo primero que se requiere es que se escogan, arbitrariamente, entes a las que se les asociará el tipo o, y se les llamará proposiciones; y entes a las que se les asociará el tipo ι, y se les llamará individuos, de la colección. Una vez hecho esto, se podrán asociar a otros entes (de, o no de la colección: en este último caso se construye una nueva colección en que estos nuevos entes aparecen también), los diversos tipos de funciones $(\alpha\beta)$, (donde α y β son tipos), que aparecen en la lógica.

Intuitivamente, se tiene la intención de que N_{oo} sea una función que hará corresponder a cada proposición, una proposición que se llamará la "negación" del argumento. Así que, intuitivamente, $\sim F_o$ será la negación de F_o. A_{ooo}, será una función "proposicional" (cuyos valores son proposiciones), de dos variables proposicionales, (o bién, una función cuyos valores son funciones proposicionales y cuyos argumentos son proposiciones (una sola variable del tipo o)), que hará corresponder a cada pareja ordenada de proposiciones, una proposición que se llamará la "disjunción" de esa pareja (también llamada la "alternación"). Así, intuitivamente, $[F_o \vee G_o]$, será la disjunción de F_o, G_o, (i.e. F_o ó G_o). Intuitivamente también, $[F_o G_o]$ será la "conjunción" de F_o, G_o, (i.e. F_o y G_o). $[F_o \supset G_o]$, será la "condicional" de F_o, G_o, (i.e. si F_o entonces G_o), (también llamada la "inclusión"--- es decir: no F_o ó G_o); $[F_o \equiv G_o]$, será la "equivalencia"

de F_o, G_o, (también llamada la "bi-condicional"), (i.e. si y solo si).
$\prod_{o(o\alpha)}$ será una función proposicional de funciones proposicionales, que se llamará el "cuantificador universal" y que hará corresponder a cada función por abstracción con F_o, la proposición constante: para cada x'_α, cualesquiera, F_o". Así, intuitivamente, $[(x'_\alpha)F_o]$ será la proposición, "para cada x'_α cualesquiera que sea, F_o". Con esto, $[(\exists x'_\alpha)F_o]$ será la proposición:"existe una variable x'_α, tal que F_o" o bién, "no para cada x'_α cualesquiera, $\sim F_o$". $Q_{o\alpha\alpha}$ será una función proposicional de dos variables del mismo tipo. Está formada por doble abstracción (dos abstracciones sucesivas) con la "proposición": $[(f_{o\alpha})[f_{o\alpha}x_\alpha \supset f_{o\alpha}y_\alpha]$. Esta función, asociará con cada pareja ordenada de variables del mismo tipo, de su campo, lo que intuitivamente se llamará la "igualdad" (una proposición) de esas variables. Así: $Q_{o\alpha\alpha}A_\alpha B_\alpha$ abv $[A_\alpha = B_\alpha]$ define lo que es la igualdad de A_α y B_α. Desigualdad de A_α y B_α se define como la negación de igualdad. $I_{\alpha\alpha}$ es la función "identidad", (i.e. hace corresponder a cada valor de su campo, x'_α, al valor de x'_α). $K_{\alpha\beta\alpha}$ es la función "constancia" de dos variables x'_α, y'_β. Pone en correspondencia a cada pareja ordenada de valores de su campo, x'_α, y'_β, el valor de x'_α.

Def. Sea α un tipo cualquiera. $x'_{\alpha'}$ será un número del tipo α', si y solo si: $\vdash N_{o\alpha'}x'_{\alpha'}$. Intuitivamente, la función proposicional $N_{o\alpha'}$ es una función que pone en correspondencia con una variable x'_α (admisible como argumento), la proposición: x'_α, es un número del tipo α'.

Def. Teoría de Números, es el estudio de las funciones que se acaban de definir como números. (Los fundamentos es el estudio siguiente).

Como se demostrará adelante, las funciones $0_{\alpha'}$, $1_{\alpha'}$, $2_{\alpha'}$, $3_{\alpha'}$, etc. son números del tipo α'. En general, al decir números, se referirá a estas funciones. Aparte de estos símbolos, (que sirven de nombres de los respectivos números), se les llama: cero, uno, dos, tres, etc. Un número del tipo α', es una función de funciones, cuyos valores y argumentos son, ambos, funciones del tipo ($\alpha\alpha$). La función $S_{\alpha'\alpha''}$ se le llama, intuitivamente, la "función sucesor". Es una función, que para un número como argumento, toma un valor que se demostrará ser un número, y que se llamará el "número sucesor" del argumento. Si $n'_{\alpha''}$ es un número del tipo α'', al número (como se demostrará ser): $n'_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}O_{\alpha'}$, se le llamará el número correspondiente del tipo α'.

La Teoría de numeros tiene sus cimientos o fundamentos en los teoremas que a continuación se estudiarán.

3.0. $\underline{TI^{\alpha}}$. $\vdash N_{o\alpha'}O_{\alpha'}$.

$\underline{\text{Dem:}}$ T3 y R'3: $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset.(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}O_{\alpha'}$

$\therefore$ R'4: $(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset.(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}O_{\alpha'}]$

$\therefore$ R2'': $\lambda n_{\alpha'}[(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}n_{\alpha'}]]O_{\alpha'}$ $\therefore$ TI^{α}.

TII^{α}. $\vdash N_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset N_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$.

$\underline{\text{Dem:}}$ $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, $N_{o\alpha'}x_{\alpha'}$, (R1, $S^{x_{\alpha'}}_{y_{\alpha'}}N_{o\alpha'}$): $\vdash$, $(\lambda n_{\alpha'}[(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[[(y_{\alpha'})[f_{o\alpha'}y_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}y_{\alpha'})]]\supset f_{o\alpha'}n_{\alpha'}]]])x_{\alpha'}$, $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, (R2, y luego R1, $S^{y_{\alpha'}}_{x_{\alpha'}}$): $\vdash$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}$, $(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[[(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]]\supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}]]$, (R''): $\vdash$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}$, $f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[[(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]]\supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}]$, (R5): $\vdash$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, $(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}$, (R5 y R''): $\vdash$, $f_{o\alpha'}x_{\alpha'}$, $f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$, (R5): $\vdash$, $f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$ $\therefore$ por $(R')^2$: $N_{o\alpha'}x_{\alpha'}\vdash f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$ ($\therefore$ por R'4): $\vdash$, $(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[(x_{\alpha'})[f_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]]$ $\therefore$ (R1, $S^{x_{\alpha'}}_{y_{\alpha'}}$ y luego R2''): $\vdash$, $(\lambda n_{\alpha'}[(f_{o\alpha'})[f_{o\alpha'}O_{\alpha'}\supset[(y_{\alpha'})[f_{o\alpha'}y_{\alpha'}\supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}y_{\alpha'})]\supset f_{o\alpha'}n_{\alpha'}]]])(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$, que con R1, $S^{y_{\alpha'}}_{x_{\alpha'}}$, da: $\vdash$, $N_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$ $\therefore$ por R': $\vdash N_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset N_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$.

$\underline{TIII^{\alpha}}$. $\vdash N_{o\alpha'}x_{\alpha'}\supset S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'}\neq O_{\alpha'}$.

$\underline{\text{Dem:}}$ L1: $\vdash p_o\supset.q_o\supset\sim p_o\supset\sim q_o$.

Dem: A3, R'3: $\sim q_o\vee\sim p_o\supset\sim p_o\vee\sim q_o$ abv $q_o\supset\sim p_o\supset.p_o\supset\sim q_o$

$\therefore$ C8, R'3: $\vdash p_o\supset.q_o\supset\sim p_o\supset\sim q_o$.

Este lema es la base de demostraciones por "reducción al absurdo".

L2. $(\exists x_\alpha)(\exists y_\alpha).x_\alpha \neq y_\alpha$.

Dem: Para demostrar este lema, primero se va a demostrar que: $(\exists x_o)(\exists y_o).x_o \neq y_o$. Luego, con ayuda del A7, se demostrará que si $(\exists x_\alpha)(\exists y_\alpha).x_\alpha \neq y_\alpha$, entonces $(\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}).x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}$, quedando así demostrado el L2, (en virtud del A7). Empecemos con el T18° y R'3,

$\mathrm{S}^{x'_o}_{p_o \vee \sim p_o} \Big| ^{y'_o}_{\sim. p_o \vee \sim p_o} \Big| ^{f'_{oo}}_{\lambda r_o. \sim. p_o \vee \sim p_o \supset \sim r_o}$, obteniendo con R2, que:

$[p_o \vee \sim p_o] = [\sim. p_o \vee \sim p_o] \supset . [\sim. p_o \vee \sim p_o \supset \sim. p_o \vee \sim p_o] \supset \sim. p_o \vee \sim p_o \supset \sim\sim. p_o \vee \sim p_o$, luego, (usando C8 y R'3 se tiene: $p_o \supset [q_o \supset r_o] \supset . q_o \supset [p_o \supset r_o]$) y T1 em R'3: $\sim. p_o \vee \sim p_o \supset \sim. p_o \vee \sim p_o$, $\therefore$ (por $(R5)^2$): $[p_o \vee \sim p_o] = [\sim. p_o \vee \sim p_o] \supset$ $\sim. p_o \vee \sim p_o \supset \sim\sim. p_o \vee \sim p_o$ $\therefore$ (por T4, R'3): $p_o \vee \sim p_o \supset \sim\sim. p_o \vee \sim p_o$ y con L1, usando $(R5)^2$: $\sim[p_o \vee \sim p_o] = [\sim. p_o \vee \sim p_o]$ o bién abv: $[p_o \vee \sim p_o] \neq [\sim. p_o \vee \sim p_o]$. Ahora: T14°: $f_{oo} y_o \supset (\exists x_o) f_{oo} x_o$ $\therefore$ R1 y R2'': $[p_o \vee \sim p_o] \neq [\sim. p_o \vee \sim p_o] \supset (\lambda y_o [[p_o \vee \sim p_o] \neq y_o])[\sim. p_o \vee \sim p_o]$ que a la vez $\supset (\exists y_o)(\lambda y_o [[p_o \vee \sim p_o] \neq y_o]) y_o$, que por R1, R2 y T2: $\vdash (\exists y_o)[[p_o \vee \sim p_o] \neq y_o]$. Haciendo lo mismo, por R1 y R2'': $\vdash (\lambda x_o . (\exists y_o)[x_o \neq y_o])[p_o \vee \sim p_o]$, da por T14°: $(\exists x_o)(\exists y_o). x_o \neq y_o$. Ahora veamos la 2ª parte.

R1 y R2, dan: $u_\alpha \neq v_\alpha \vdash K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha x_\beta \neq K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha x_\beta$. También, del T18$^{\alpha\beta}$, R2, R'3 y R5: $u_\alpha \neq v_\alpha, K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha = K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha \vdash K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha x_\beta \neq K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha x_\beta$ {Tomando $K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha$ por $x_{\alpha\beta}$ y $\lambda x_{\alpha\beta} [K_{\alpha\beta\alpha}(x_{\alpha\beta} u_\beta) x_\beta \neq K_{\alpha\beta\alpha} t_\alpha x_\beta$ por $f_{o(\alpha\beta)}$, etc.}. $\therefore$ por R': $u_\alpha \neq v_\alpha \vdash K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha = K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha \supset K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha x_\beta \neq K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha x_\beta$. Así que, del L1, T17$^\alpha$ y R'3 (que dan: $K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha x_\beta = K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha x_\beta$), se tiene: $u_\alpha \neq v_\alpha \vdash K_{\alpha\beta\alpha} u_\alpha \neq K_{\alpha\beta\alpha} v_\alpha$, y haciendo uso del T14$^{\alpha\beta}$, como en la 1ª parte, se tiene: $u_\alpha \neq v_\alpha \vdash (\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}). x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}$ $\therefore$ por R': $\vdash u_\alpha \neq v_\alpha \supset (\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}). x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}$; Así que, del R'4, se tiene: $\vdash (v_\alpha)[u_\alpha \neq v_\alpha \supset (\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}). x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}]$. Ahora, usando T16$^\alpha$, R'3, R1, R2 y R5, se deduce: $\vdash (\exists v_\alpha)[u_\alpha \neq v_\alpha] \supset (\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}). x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}$ $\therefore$ usando R'4, generalizando a u_α, empleando, como antes, T16$^\alpha$, R'3, R1, R2 y R5, se obtiene: $\vdash (\exists u_\alpha)(\exists v_\alpha)[u_\alpha \neq v_\alpha] \supset [\exists x_{\alpha\beta})(\exists y_{\alpha\beta}). x_{\alpha\beta} \neq y_{\alpha\beta}$ así que empleando R5, se obtiene lo que se buscaba.

L3. $\vdash S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'}$.

Dem: Como antes, usando R1 y R2, se tiene: $u_\alpha \neq v_{\alpha'} \vdash S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'}(K_{\alpha\alpha\alpha}u_\alpha)v_\alpha \neq 0_{\alpha'}(K_{\alpha\alpha\alpha}u_\alpha)v_\alpha$. Luego, usando (como en el L2): $T18^\alpha$, R', $T17^\alpha$ y L1, se obtiene: $u_\alpha \neq v_\alpha \vdash S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'}$ $\therefore$ R' da: $\vdash u_\alpha \neq v_\alpha \supset S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'}$. Ahora, siguiendo los pasos dados en L2, usando R'4, $T16^\alpha$ (dos veces, generalizando primero a v_α y luego a u_α) y empleando el L2, se obtiene: $\vdash S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'}$. Ahora, usando: $p_o \supset . q_o \supset p_o$, con R'3, se obtiene: $\vdash S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'} \supset . N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \neq 0_{\alpha'}$, luego usando el L3 y R5 $\therefore$ $\vdash TIII^\alpha$.

TIV. $\vdash f_{o\alpha'}0_{\alpha'} \supset . (x_{\alpha'})[N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})] \supset . N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}$.

Dem: $(x_{\alpha'})[N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset . f_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})]$, (por R" y R1) se tiene: $\vdash_{,}$ $N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset . f_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})$. Ahora, TI^α es: $\vdash N_{o\alpha'}0_{\alpha'}$ $\therefore$ por R'3 se tiene: $\vdash_{,} f_{o\alpha'}0_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'})$. También del TII^α y R'3, (usando R5 y TI^α), se tiene: $\vdash N_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'})$ $\therefore$ también se tiene con la hipótesis inicial (usando R'3 y R5) que: $f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}) \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}))$, así que del T2 esa hipótesis da: $f_{o\alpha'}0_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}))$. Siguiendo en esta forma, si: $N_{o\alpha'}x_{\alpha'}$, con la hipótesis inicial, se deduce: $f_{o\alpha'}0_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}$. Es decir: $N_{o\alpha'}x_{\alpha'}$, $(x_{\alpha'})[N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset . f_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'})] \vdash f_{o\alpha'}0_{\alpha'} \supset f_{o\alpha'}x_{\alpha'}$. Así que usando sucesivamente R5, $(R')^3$, se tiene que $\vdash TIV^\alpha$.

CIV. Si $x'_{\alpha'}$ no es libre en $F_o^1, F_o^2, \ldots, F_o^n, F_{o\alpha'}$, y si: $F_o^1, \ldots, F_o^n \vdash F_{o\alpha'}0_{\alpha'}$ y si también se tiene que: $F_o^1, \ldots, F_o^n, N_{o\alpha'}x'_{\alpha'}, F_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \vdash F_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x'_{\alpha'})$, entonces: $F_o^1, \ldots, F_o^n \vdash N_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \supset F_{o\alpha'}x'_{\alpha'}$. Este corolario tiene mucha importancia en la teoría de los números. Se le llamará R, y una demostración que emplea a R, se llamará una "demostración por inducción matemática" (respecto a $x'_{\alpha'}$). Se demuestra como sigue: La hipótesis: $F_o^1, \ldots, F_o^n$ da: $F_{o\alpha'}0_{\alpha'}$, y también (usando $(R')^2$), a: $N_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \supset . F_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \supset F_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}x'_{\alpha'})$, de lo que se deduce, por R'4 (ya que $x'_{\alpha'}$ no es libre en la hipótesis): $(x'_{\alpha'})[N_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \supset . F_{o\alpha'}x'_{\alpha'} \supset F(S_{\alpha'\alpha'}x'_{\alpha'})]$. Así que del TIV^α, R'3, $S'^{f_{o\alpha'}}_{F_{o\alpha'}}$ en el TIV^α, y empleando (R5), se tiene: $\vdash$ CIV.

TV^α. Para cualquiera de los siguientes tipos: $\iota, \iota', \iota'', \iota'''$, etc., en lugar de α, se tiene: $\vdash N_{o\alpha'}x_{\alpha'} \supset . N_{o\alpha'}y_{\alpha'} \supset . S_{\alpha'\alpha'}x_{\alpha'} \supset S_{\alpha'\alpha'}y_{\alpha'} \supset x_\alpha = y_\alpha$.

Dem: L1. $\vdash N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \supset N_{o\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$.

Dem: 1°). $T\,I^{\alpha}$: $\vdash N_{o\alpha'} O_{\alpha'}$ $\therefore$ por $(R'')^2$: $\vdash N_{o\alpha'}(O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$.

2°). $T\,II^{\alpha}$; $R'3$ y $R5$: $N_{o\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}) \vdash N_{o\alpha'}(\check{S}_{\alpha'\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}))$ que con $(R'')^3$ da: $N_{o\alpha'}(\check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$. Así que, llamando $F_{o\alpha''}$ a: $\lambda n_{\alpha''}(N_{o\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}))$, se tiene, (por R2): $\vdash F_{o\alpha''} O_{\alpha''}$, (del 1°).
También: $N_{o\alpha''} n_{\alpha''}, F_{o\alpha''} n_{\alpha''} \vdash F_{o\alpha''}(\check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''})$, (del 2°).
Así que por R: $\vdash N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \supset F_{o\alpha''} n_{\alpha''}$ $\therefore$ por R2: $\vdash L1$.

L2. Si $\vdash T\,V^{\alpha}$, entonces: $\vdash N_{o\alpha''} m_{\alpha''} \supset . N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \supset . m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset m_{\alpha''} = n_{\alpha''}$.

Dem: 1°). $T17^{\alpha''}$ y $R'3$: $\vdash O_{\alpha'} = O_{\alpha'}$ $\therefore$ del T3, R'3 y R5, se tiene:
$O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset O_{\alpha'} = O_{\alpha'}$.

2°). Ahora, por $(R2')^5$: $O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = \check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \vdash O_{\alpha'} = \check{S}_{\alpha'\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$ $\therefore$ (por $T20^{\alpha}$, $R'3$): $\vdash$, $\check{S}_{\alpha'\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}) = O_{\alpha'}$. Pero del $L(III^{\alpha}\text{-})3$: $\vdash$, $\check{S}_{\alpha'\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}) \neq O_{\alpha'}$. Ahora, usando sucesivamente a: T3, T4, T6, T5, T2 y abv: $p_o \sim p_o \supset q_o$; Así que por R'3, R', se tiene:
$\vdash \check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset \check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} = O_{\alpha''}$

3°). Semejantemente: $\vdash \check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset \check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} = O_{\alpha''}$.

4°). Llamando $F_{o\alpha''}$ a $\lambda n_{\alpha''}(O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset O_{\alpha''} = n_{\alpha''})$, se tiene, del 1°): $\vdash F_{o\alpha''} O_{\alpha''}$ y de la última fórmula del 2°), que: $\vdash F_{o\alpha''}(\check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''})$; así que por R (respecto a $n_{\alpha''}$) y usando R2 y luego R'4, se tiene: $\vdash (n_{\alpha''}) . N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \supset . O_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset O_{\alpha''} = n_{\alpha''}$.

5°). Llamando F_o^1 a: $\check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = \check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}$, por R2: $F_o^1 \vdash \check{S}_{\alpha'\alpha'}(m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}) = \check{S}_{\alpha'\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$. Pero del L1, $N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \vdash N_{o\alpha'}(n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$ y con R'3: $N_{o\alpha''} m_{\alpha''} \vdash N_{o\alpha'}(m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'})$. así que, si $\vdash T\,V^{\alpha}$: $N_{o\alpha''} n_{\alpha''}, N_{o\alpha''} m_{\alpha''}, F_o^1 \vdash m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'}$.

6°). Llamando: F_o^2 a: $(n_{\alpha''}) . N_{o\alpha''} n_{\alpha''} \supset . m_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} = n_{\alpha''} \check{S}_{\alpha'\alpha'} O_{\alpha'} \supset m_{\alpha''} = n_{\alpha''}$, por el resultado del 5°), se tiene, si $\vdash T\,V^{\alpha}$, y usando R'': $N_{o\alpha''} n_{\alpha''}$, $N_{o\alpha''} m_{\alpha''}, F_o^1, F_o^2 \vdash m_{\alpha''} = n_{\alpha''}$ $\therefore$ del $T19^{\alpha''\alpha''}$, (si $\vdash T\,V^{\alpha}$): $\vdash$, $\check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} = \check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''}$, (usando R'3 y luego R5). Así que, por R', si $\vdash T\,V^{\alpha}$, entonces:
$N_{o\alpha''} n_{\alpha''}, N_{o\alpha''} m_{\alpha''}, F_o^2 \vdash F_o^1 \supset \check{S}_{\alpha''\alpha''} m_{\alpha''} = \check{S}_{\alpha''\alpha''} n_{\alpha''}$.

7). Llamando $F'_{o\alpha''}$ a: $\lambda n_{\alpha''}(S_{\alpha''\alpha''}m_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} = n_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} \supset S_{\alpha''\alpha''}m_{\alpha''} = n_{\alpha''})$ se tiene, del 3°), $\vdash F'_{o\alpha''}0_{\alpha''}$. También, del 6°), se tiene, si $\vdash TV^{\alpha}$: $N_{o\alpha''}n_{\alpha''}$, $N_{o\alpha''}m_{\alpha''}$, $F^2_o \vdash F'_{o\alpha''}(S_{\alpha''\alpha''}n_{\alpha''})$, así que induciendo con respecto a $n_{\alpha''}$ (i.e. usando R), se tiene: $N_{o\alpha''}m_{\alpha''}$, $F^2_o \vdash N_{o\alpha''}n_{\alpha''} \supset F'_{o\alpha''}n_{\alpha''}$, y usando R'4 y R2, $N_{o\alpha''}m_{\alpha''}$, $F^2_o \vdash (n_{\alpha''}).N_{o\alpha''}n_{\alpha''} \supset . S_{\alpha''\alpha''}m_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} = n_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} \supset S_{\alpha''\alpha''}m_{\alpha''} = n_{\alpha''}$.

8). Ahora, llamando $F''_{o\alpha''}$ a: $\lambda m_{\alpha''}(F^2_o)$; se tiene de la última fórmula del 4°) que: $\vdash F''_{o\alpha''}0_{\alpha''}$; y de la última del 7°), se tiene que, si: $\vdash TV^{\alpha}$: $N_{o\alpha''}m_{\alpha''}$, $F_{o\alpha''}m_{\alpha''} \vdash F_{o\alpha''}(S_{\alpha''\alpha''}m_{\alpha''})$, asi que induciendo ahora con respecto a $m_{\alpha''}$ se tiene: (si $\vdash TV^{\alpha}$): $\vdash N_{o\alpha''}m_{\alpha''} \supset F''_{o\alpha''}m_{\alpha''}$: así que, por R5, R'' y otra vez R5, (si $\vdash TV^{\alpha}$): $N_{o\alpha''}m_{\alpha''}$, $N_{o\alpha''}n_{\alpha''} \vdash m_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} = n_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} \supset m_{\alpha''} = n_{\alpha''}$. Así que, por (R') , se tiene, si $\vdash TV^{\alpha}$, entonces el resultado del L2.

L3. Si $\vdash TV^{\alpha}$, entonces: $\vdash TV^{\alpha'}$.

Dem: Del L2, si $\vdash TV^{\alpha}$, entonces $\vdash T$ (donde T es el resultado en el L2). Ahora se demostrará que si $\vdash TV^{\alpha}$ y $\vdash T$, entonces $\vdash TV^{\alpha'}$. Del $T19^{\alpha''\alpha''}$, tomando $\lambda z_{\alpha''}(z_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'})$ por $f_{\alpha'\alpha''}$, se tiene (por R5 y R2), que: $S_{\alpha''\alpha''}x_{\alpha''} = S_{\alpha''\alpha''}y_{\alpha''} \vdash S_{\alpha''\alpha''}x_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} = S_{\alpha''\alpha''}y_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}$, y por R2 esto da: $\vdash$, , $S_{\alpha'\alpha'}(x_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}) = S_{\alpha'\alpha'}(y_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'})$. Asi que, del L1, (si $\vdash TV^{\alpha}$), por $(R5)^3$, se tiene: $N_{o\alpha''}x_{\alpha''}$, $N_{o\alpha''}y_{\alpha''}$, $S_{\alpha''\alpha''}x_{\alpha''} = S_{\alpha''\alpha''}y_{\alpha''} \vdash x_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'} = y_{\alpha''}S_{\alpha'\alpha'}0_{\alpha'}$. Así que, (si $\vdash TV^{\alpha}$ y $\vdash T$, o lo que es lo mismo, si $\vdash TV^{\alpha}$, debido al L2) y por $(R5)^3$, se tiene: $N_{o\alpha''}x_{\alpha''}$, $N_{o\alpha''}y_{\alpha''}$, $S_{\alpha''\alpha''}x_{\alpha''} = S_{\alpha''\alpha''}y_{\alpha''} \vdash x_{\alpha''} = y_{\alpha''}$, que por $(R')^3$, da: $N_{o\alpha''}x_{\alpha''} \supset . N_{o\alpha''}y_{\alpha''} \supset . S_{\alpha''\alpha''}x_{\alpha''} = S_{\alpha''\alpha''}y_{\alpha''} \supset x_{\alpha''} = y_{\alpha''}$, que es $\vdash TV^{\alpha}$, y por lo tanto queda demostrado el L3.

Ahora, se tiene del A8 que $\vdash TV^{\iota}$ $\therefore$ (por el L3), $\vdash TV^{\alpha}$.

Los teoremas I^{α}, II^{α}, etc., que se acaban de demostrar son fundamentales en la teoría de los números, adonde se acostumbra postularlos como axiomas (de Peano). Aparecen generalmente en una forma que puede considerarse como una interpretación intuitiva. Dicen:

I). $0_{\alpha'}$ es un número (del tipo α').

II). Si $x_{\alpha'}$ es un número, tiene un sucesor que es un número.

III). Si $x_{\alpha'}$ es un número, su sucesor es desigual a $0_{\alpha'}$.

IV). Si $0_{\alpha'}$ tiene la propiedad de satisfacer $f_{o\alpha'}$(i.e. el de ser de su campo), y si para cada $x_{\alpha'}$, $x_{\alpha'}$ es un número solamente si de tener esa propiedad $x_{\alpha'}$ lo tiene su sucesor, entonces si $x_{\alpha'}$ es un número, $x_{\alpha'}$ tiene esa propiedad. Y por último:

V). Si $x_{\alpha'}$ es un número y si $y_{\alpha'}$ es un número y si el sucesor de $x_{\alpha'}$ es un número igual al sucesor de $y_{\alpha'}$, entonces $x_{\alpha'}$ es igual a $y_{\alpha'}$.

(ver: MacDuffee: Abstract Algebra; Van Der Waerden, Moderne Algebra).

3.1. La Suma y el Producto de Números.

En la tabla de convenciones, quedaron definidas las funciones: $\sigma_{\alpha'\alpha'\alpha'}$, $\pi_{\alpha'\alpha'\alpha'}$, $[F_{\alpha'} + G_{\alpha'}]$ y $[F_{\alpha'} \times G_{\alpha'}]$. La función $\sigma_{\alpha'\alpha'\alpha'}$ es una función de dos argumentos, a los que pone en correspondencia un ente que se llama su "suma", y que se representa con la notación: $[F_{\alpha'} + G_{\alpha'}]$. En el caso de que ambos argumentos sean números, la suma también será un número (como se demostrará). Igualmente, la función $\pi_{\alpha'\alpha'\alpha'}$ pone en correspondencia a una pareja ordenada $F_{\alpha'}$,$G_{\alpha'}$ un ente llamado su "producto", que se escribe $[F_{\alpha'} \times G_{\alpha'}]$. En el caso de que estos argumentos sean números, el producto será un número (como se demostrará).

Conv. Se omitirán los paréntesis de $[F_{\alpha'} + G_{\alpha'}]$ y $[F_{\alpha'} \times G_{\alpha'}]$ adonde sea posible sin producir ambiguidades en su restauración en el orden siguiente: primero en el producto y segundo en la suma,(etc). Se tienen:

LVI$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}) = n_{\alpha'}$.

Dem: Llamando: $F_{o\alpha'}$ a $\lambda n_{\alpha'} [\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}) = n_{\alpha'}]$, se tiene(por T17$^{\alpha'}$ y R'3): $\vdash 0_{\alpha'} = 0_{\alpha'}$ $\therefore$ (por R2"): $(\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}\ x_{\alpha}) 0_{\alpha'} = 0_{\alpha'}$ $\therefore \vdash \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(0_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}) = 0_{\alpha'}$ $\therefore \vdash F_{o\alpha'} 0_{\alpha'}$. Igualmente: $\vdash S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} = S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'}$ $\therefore$ (por R2") se tiene: $\vdash \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}) = S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'}$ $\therefore \vdash F_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'})$. Asi que induciendo con respecto a $n_{\alpha'}$, se tiene $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset F_{o\alpha'} n_{\alpha'}$ $\therefore$ (R1, R2): $\vdash$ LVI$^{\alpha}$.

TVI$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset n_{\alpha'} = 0_{\alpha'} + n_{\alpha'}$.

Dem: Del LVI$^{\alpha}$, T20$^{\alpha'}$: $N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \vdash n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})$ $\therefore$ por R2": $N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \vdash n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha}(0_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}(n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))$ $\therefore$ por R' y abv $\vdash$ TVI$^{\alpha}$.

CVI. $N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}[0_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$. (Dem: del TVI$^{\alpha}$, R5, T18$^{\alpha'}$, y R').

TVII$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} = [1_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$.

Dem: Del T17$^{\alpha'}$ y R'3: $\vdash S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} = S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'}$ ∴ por R2": se tiene que:

$\vdash S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} ((\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})) f_{\alpha\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))$ ∴ por R2":

$\vdash S_{\alpha'\alpha'} n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (1_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))$ ∴ $\vdash$ TVII$^{\alpha}$.

CVII$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [1_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$, (del: TVII$^{\alpha}$, R5, TII$^{\alpha}$, T18$^{\alpha'}$, T2, R').

TVIII$^{\alpha}$. $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = S_{\alpha'\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$.

Dem: Del T17$^{\alpha'}$ y R'3: $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'}$ ∴ por R2", se tiene: $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} ((\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (f_{\alpha\alpha} (m_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))) f_{\alpha\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})))$

∴ por R2": $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (f_{\alpha\alpha} (m_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})))$ ∴ por R2":

$\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (f_{\alpha\alpha} ([\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (m_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))] f_{\alpha\alpha} x_{\alpha}))$ abv : (abreviando da:) $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'} = S_{\alpha'\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$, que es TVIII$^{\alpha}$.

CVIII$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}] \supset N_{o\alpha'} [(S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'}]$, (del TVIII$^{\alpha}$, T20$^{\alpha'}$, R5, T18$^{\alpha}$, TII$^{\alpha}$, T2 aplicados sucesivamente).

TIX$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} m_{\alpha'} \supset . N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$.

Dem: Llamando $F_{o\alpha'}$ a $\lambda m_{\alpha'} [N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}]]$, se tiene, del CVI$^{\alpha}$, $\vdash F_{o\alpha'} 0_{\alpha'}$. También, del CVIII$^{\alpha}$: $N_{o\alpha'} m_{\alpha'}, F_{o\alpha'} m_{\alpha'} \vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [m_{\alpha'} + n_{\alpha'}]$ ∴ (usando: T2): $\vdash$, $N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [(S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) + n_{\alpha'}]$, es decir: $\vdash, F_{o\alpha'} (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'})$ ∴ por R (respecto a $m_{\alpha'}$): se deduce el $\vdash$ TIX$^{\alpha}$.

TX$^{\alpha}$. $\vdash 0_{\alpha'} = 0_{\alpha'} \times n_{\alpha'}$.

Dem: T17$^{\alpha}$, R'3: $\vdash 0_{\alpha'} = 0_{\alpha'}$ abv $\vdash 0_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} x_{\alpha}$ ∴ por R2": se tiene: $\vdash 0_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} (\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} x_{\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}))$ abv $\vdash 0_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} (0_{\alpha'} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}))$ ∴ (R2"): $\vdash$ TX$^{\alpha}$.

CX$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} [0_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]$, (Dem: del TX$^{\alpha}$, T18$^{\alpha'}$, R5, TI$^{\alpha}$, R5).

TXI$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset n_{\alpha'} = 1_{\alpha'} \times n_{\alpha'}$.

Dem: LVI$^{\alpha}$, T20$^{\alpha'}$, R5: $N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \vdash n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})$ ∴ (R2"): $\vdash$, $n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} ((\lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})) (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}))$ ∴ (R2"): $\vdash$, $n_{\alpha'} = \lambda f_{\alpha\alpha} (1_{\alpha'} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha}))$ ∴ (R', y R2): $\vdash$ TXI$^{\alpha}$.

CXI$^{\alpha}$. $\vdash N_{o\alpha'} n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'} [1_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]$, (del: TXI$^{\alpha}$, R5, T18$^{\alpha'}$, R5).

TXII$^{\alpha}$. $\vdash (S_{\alpha'\alpha'} m_{\alpha'}) \times n_{\alpha'} = n_{\alpha'} + m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}$.

Dem: T17$^{\alpha'}$, R'3: $\vdash n_{\alpha'} + m_{\alpha'} \times n_{\alpha'} = n_{\alpha'} + m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}$ (este lado de la igualdad se llamará $D_{\alpha'}$). ∴ (por R2): $\vdash \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} ([m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}] f_{\alpha\alpha} x_{\alpha})) = D_{\alpha'}$ ∴ por R2: (dos veces): $\vdash \lambda f_{\alpha\alpha} \lambda x_{\alpha} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha} (m_{\alpha'} (n_{\alpha'} f_{\alpha\alpha})) x_{\alpha}) = D_{\alpha'}$ ∴ por (R2") se tiene:

$\vdash \lambda f_{\alpha\alpha}((\lambda f_{\alpha\alpha}\lambda x_{\alpha}(f_{\alpha\alpha}(m_{\alpha'}f_{\alpha\alpha}x_{\alpha})))(n_{\alpha'}f_{\alpha\alpha})) = D_{\alpha'}$ $\therefore$ por R2" $\therefore$ $\vdash \mathrm{TXII}^{\alpha}$.
CXII^{α}: $\vdash N_{o\alpha'}[n_{\alpha'} + m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}] \supset N_{o\alpha'}[(S_{\alpha'\alpha'}m_{\alpha'}) \times n_{\alpha'}]$. (Dem: del TXII^{α}, $\mathrm{T20}^{\alpha}$ y $\mathrm{T18}^{\alpha'}$).
TXIII^{α}. $\vdash N_{o\alpha'}m_{\alpha'} \supset . N_{o\alpha'}n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}[m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]$.

Dem: Del TI^{α}, T3, R'3 y R5: $\vdash N_{o\alpha'}n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}0_{\alpha'}$ $\therefore$ por TX^{α}, $\mathrm{T18}^{\alpha'}$, T2, R2: $\vdash \lambda m_{\alpha'}[N_{o\alpha'}n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}[m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]]0_{\alpha'}$. Se llamará $F_{o\alpha'}$ a: $\lambda m_{\alpha'}[N_{o\alpha'}n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}[m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]]$, y se tendrá (delo anterior): $\vdash F_{o\alpha'}0_{\alpha'}$. También se tiene: $N_{o\alpha'}m_{\alpha'}$, $F_{o\alpha'}m_{\alpha'}$, $N_{o\alpha'}n_{\alpha'}$, (por R5): $\vdash N_{o\alpha'}[m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]$ $\therefore$ del TIX^{α}, y (R5) $\vdash$, $N_{o\alpha'}[n_{\alpha'} + m_{\alpha'} \times n_{\alpha'}]$ $\therefore$ (por CXII^{α} y R5): $\vdash$, $N_{o\alpha'}[(S_{\alpha'\alpha'}m_{\alpha'}) \times n_{\alpha'}]$. Así que, por R': $N_{o\alpha'}m_{\alpha'}$, $F_{o\alpha'}m_{\alpha'}$, $\vdash N_{o\alpha'}n_{\alpha'} \supset N_{o\alpha'}[(S_{\alpha'\alpha'}m_{\alpha'}) \times n_{\alpha'}]$ $\therefore$ (por R2"): $\vdash$, $F_{o\alpha'}(S_{\alpha'\alpha'}m_{\alpha'})$ .. (por R, respecto a $m_{\alpha'}$): $\vdash N_{o\alpha'}m_{\alpha'} \supset F_{o\alpha'}m_{\alpha'}$ $\therefore$ (por R2): $\vdash \mathrm{TXIII}^{\alpha}$.

Los teoremas TIX^{α} y TXIII^{α} expresan que la suma y el producto de dos números son números. Los teoremas: (TVI^{α} ó TVII^{α}) y TVIII^{α}, son las fórmulas que se usan como ecuaciones recurrentes para la suma, (ver: MacDuffee ó Van Der Waerden). Los teoremas: (TX^{α} ó TXI^{α}) y TXII^{α} son las fórmulas correspondientes para el producto. Se acostumbra ponerlos en la siguiente forma, (usando $n^{+}_{\alpha'}$ para indicar el sucesor de $n_{\alpha'}$ del mismo tipo, y si se sobre entiende el tipo, se escribe simplemente: n^{+}): para la adición (suma): $n = 0 + n$, o bién: $n^{+} = 1 + n$, junto con: $m^{+} + n = [m + n]^{+}$; y para la multiplicación: $0 = 0 \times n$ o bién: $n = 1 \times n$, junto con: $m^{+} \times n = n + m \times n$, para cada número m y para cada número n.

Por fín, y para hacer el contacto perfecto, con libros serios sobre la teoría de números y algebras modernas, se definirá la noción de " $<$ ", ("menor que"), así: (usándose $n_{\alpha'} > m_{\alpha'}$ para lo mismo)

$$m_{\alpha'} < n_{\alpha'} \quad \text{abv} \quad (\exists p_{\alpha'})[m_{\alpha'} + p^{+}_{\alpha'} = n_{\alpha'}].$$

FIN.

México, D. F, . Septiembre de 1942.

Enrique Bustamante Ll.