

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**SO(3) Y LOS POLITOPOS REGULARES  
EN CUATRO DIMENSIONES**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :

**M A T E M Á T I C O**

P R E S E N T A :

**GUILLERMO RUIZ GALVÁN**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JAVIER BRACHO CARPIZO

2005

0349779



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



LIBERTAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"SO(3) y los politopos regulares en cuatro dimensiones"

realizado por Ruiz Galván Guillermo

con número de cuenta 09327558-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario Dr. Antonio Lascuráin Orive

Propietario Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Suplente M. en C. Daniel Pellicer Covarrubias

Suplente Dr. Rodolfo San Agustín Chi

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Mojica

MATEMÁTICAS

$SO(3)$  y los politopos regulares  
en cuatro dimensiones

Guillermo Ruiz Galván

*Y entonces, Memo vino;  
conoció a Lupe,  
y así comenzó todo...*

*A Lupe, por tanto amor y tanta paciencia...*

# Agradecimientos

*¿Qué vas a estudiar? –Matemáticas...*

Y aquí seguimos. En el camino he tenido la fortuna de conocer gente maravillosa y es el momento de agradecerles.

- A mi madre: En principio (cual debe) quiero agradecerte mamá, porque depositaste tu confianza en mí y me apoyaste todo el tiempo. Sirva la ocasión para reiterarte mi amor.
- Araceli: Quiero agradecerte que me enseñaras a aprender y a pensar por mí mismo (ojalá yo pueda hacer lo mismo con Areli y Laura, tus hermosas y adorables hijas).
- Elizabeth: Gracias por compartir tanto tiempo conmigo recordándome quién soy y a dónde voy. Es difícil imaginar mi vida sin tu sutil presencia.
- Carlos, Elo, Xol, Don Carlos y Doña Lola: Gracias por abrigarme tantas y tantas veces; en más de una ocasión he estado a punto de decir que soy *Guillermo Rodríguez*. No terminaría de agradecerles todo lo que han hecho por mí.
- Cristy (y los recuerdos juveniles): Gracias por tan bonita etapa, aun cuando breve, deliciosa. Yo sé qué tan especiales somos para ti. Gracias a nombre de *los peregrinos*.
- El *Círculo*: César, Mariana, Cris, July, Mara, J. Luis, Angélica, Alfredo, Luis, René, Benja. Gracias a todos y cada uno por el aprecio y cariño que me tienen. Cabe mencionar que es recíproco.
- También quiero agradecer a mis sinodales, por quienes sumo aprecio a la gran admiración que ya les guardaba:

- Rodolfo: Quien siempre tuvo comentarios inteligentes (y sorprendentes) para ayudarme a mejorar este trabajo.
  - Antonio: Cuyo contagioso entusiasmo me ha servido como motivación para seguir por este camino.
  - Daniel: Que mostró una gran disponibilidad para que todo llegara a buen término.
  - Oscar: Quien me ha apoyado de tantas formas, que me tomaría varias páginas agradecerle todo. En buenahora le conocí.
- Mención especial merece mi director de tesis, *Roli*, por la infinita paciencia y amabilidad con que me distinguió. Siempre me recibió con una amplia sonrisa y dispuesto a dejarse sorprender.

No, no me olvido... A final de cuentas, por todo y a pesar de todo, muchas gracias por iluminar mi vida: Mayra, Gaby y Yola.



# Índice general

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Nociones generales</b>                     | <b>4</b>  |
| 1.        | Grupos finitos de rotaciones                  | 7         |
| 1.1.      | El grupo cíclico $C_n$                        | 7         |
| 1.2.      | El grupo diédrico $\mathcal{D}_n$             | 8         |
| 1.3.      | Los grupos poliédricos                        | 11        |
| 1.4.      | Clasificación de subgrupos finitos de $SO(3)$ | 34        |
| <b>II</b> | <b>Politopos y cuaterniones</b>               | <b>39</b> |
| 2.        | Cuaterniones                                  | 40        |
| 2.1.      | Propiedades generales                         | 40        |
| 2.2.      | Conjugación como rotación de $\mathbb{R}^3$   | 43        |
| 2.3.      | Grupos finitos de cuaterniones                | 48        |
| 3.        | Grupos finitos de cuaterniones y politopos    | 55        |
| 3.1.      | Los subgrupos $1C_n$ y $2C_n$                 | 56        |
| 3.2.      | Los subgrupos $2D_n$                          | 56        |
| 3.3.      | El grupo $2T$                                 | 60        |
| 3.4.      | El grupo $2O$                                 | 66        |
| 3.5.      | El grupo $2I$                                 | 67        |

# Introducción

Los llamados sólidos platónicos han sido causa de estudio desde tiempos remotos. No es difícil entender que se les haya considerado parte fundamental de la estructura del Universo, dada su belleza. En parte, ésta se debe a que presentan un gran número de simetrías.

Al estudiar espacios de dimensiones mayores a tres, surge la inquietud acerca de la existencia de figuras equivalentes a estos poliedros regulares, pero ahora de varias dimensiones; a estas figuras se les llama *politopos regulares*. En el caso del plano, equivalen a los polígonos regulares. Para espacios de dimensión mayor o igual a cinco, se ha conseguido clasificar a los politopos regulares agrupándolos en tres tipos distintos de figuras. Así pues, el caso interesante es el de los politopos regulares en cuatro dimensiones, dado que hay una mayor variedad al encontrar que existen seis de ellos.

Este trabajo pretende estudiar la relación entre los grupos finitos de rotaciones tridimensionales, y los politopos regulares de cuatro dimensiones. Esto, por medio de la conocida relación entre  $SO(3)$ , como grupo de rotaciones de  $\mathbf{R}^3$ , y el espacio proyectivo real de tres dimensiones  $\mathbf{RP}^3$ . Dado que la esfera unitaria  $S^3$  es un recubrimiento doble de este espacio proyectivo, resulta natural plantearse la pregunta ¿qué figuras determinan los puntos en  $S^3$ , correspondientes a las rotaciones de un grupo finito? Veremos que para grupos pequeños como el diédrico de cuatro elementos, se obtienen figuras relativamente sencillas; mientras que para grupos más grandes, como el grupo de rotaciones del icosaedro, resultan figuras mucho más complejas.

Para abordar este análisis, el presente trabajo está dividido en tres partes principales. En el primer capítulo se realiza un estudio detallado de los grupos finitos de rotaciones y sus subgrupos, con la finalidad de obtener la caracterización de todos ellos. En el segundo capítulo se establecen ciertas

propiedades del anillo de cuaterniones y se obtiene una relación que asocia a cada rotación tridimensional, un par de cuaterniones unitarios; de manera que con la caracterización de los subgrupos finitos de  $SO(3)$  se obtiene una lista correspondiente de subgrupos finitos de cuaterniones. En el capítulo 3, se empiezan a analizar las configuraciones de puntos resultantes para cada subgrupo finito de cuaterniones; de esta manera, obtenemos cuatro de los seis polipos regulares en cuatro dimensiones.

Cabe mencionar que la lista no es exhaustiva, en cuanto que no hay subgrupos finitos de  $SO(3)$  para dos polipos regulares. Esto se debe a la cantidad de vértices que tienen: uno de ellos (el 4-simplejo) cuenta con sólo 5 vértices, mientras que los grupos finitos de cuaterniones tienen, en general, un número par de elementos, como se verá en el texto; el otro politopo cuenta con 600 vértices, lo cual rebasa el orden de los subgrupos de cuaterniones con que se podría asociar. De cualquier forma, se han añadido los vértices de este último politopo, obtenidos a partir del dual geométrico.

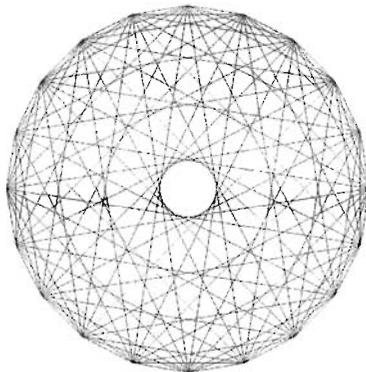


Figura 1: Figura  $\{10\}\{10\}$  asociada al grupo  $2D_5$ .

## **Parte I**

### **Nociones generales**

# Grupos de matrices

A continuación veremos algunos de los más importantes grupos de matrices y fijaremos la notación que se usará en los siguientes capítulos.

Las transformaciones lineales de un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  se pueden representar mediante el anillo de matrices cuadradas de  $n \times n$  con entradas reales; este anillo lo denotamos con  $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Las transformaciones invertibles corresponden a matrices regulares (invertibles); éstas forman el *grupo general lineal*  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ . Contenido en este grupo encontramos al subgrupo de las matrices ortogonales, el *grupo ortogonal*  $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : A^t = A^{-1}\}$ ; notemos que sus elementos son matrices que cumplen la propiedad de tener determinante igual a  $\pm 1$ . Este grupo a su vez contiene, como subgrupo normal de índice dos, al subgrupo de las matrices de determinante igual a  $+1$ , el *grupo ortogonal especial*  $SO(n, \mathbb{R})$ . Éste es precisamente el grupo de todas las rotaciones de  $\mathbb{R}^n$  en torno al origen.

Cuando se trata de matrices con entradas reales, la notación se simplifica escribiendo  $O(n)$  y  $SO(n)$ ; es decir, se omite el campo.

Nos enfocaremos principalmente al estudio del grupo  $SO(n)$  para el caso en que  $n = 3$ ; esto es, analizaremos el efecto de las transformaciones ortogonales directas<sup>1</sup> del espacio tridimensional. Estas transformaciones son las rotaciones que fijan el origen.

Notemos que cada rotación en  $\mathbb{R}^3$ , por un ángulo  $\theta$ , deja invariante una línea por el origen —a saber, el eje de rotación—, mientras que los puntos en cualquier plano ortogonal al eje giran una distancia angular igual a  $\theta$ , permaneciendo en el mismo plano. Esto muestra que todos estos planos son conjuntos invariantes bajo la rotación (figura 2).

---

<sup>1</sup>Una transformación es *directa* cuando preserva orientación; en este caso, la matriz correspondiente tiene determinante positivo. En caso contrario, se dice que la transformación es *opuesta*.

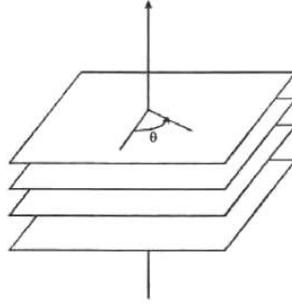


Figura 2: Planos invariantes bajo la rotación.

Cada rotación está determinada por un vector de dirección  $e \in \mathbb{R}^3$  (que podemos suponer unitario) y un ángulo  $\theta$ ; es decir, cada rotación  $\rho \in SO(3)$  puede ser identificada con la pareja  $(e, \theta)$ , o bien  $(-e, -\theta)$ , donde  $e \in S^2$  y  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Es fácil ver que estas rotaciones se pueden estudiar por su efecto en cualquier esfera con centro en el origen, razón por la cual seleccionamos indistintamente para este propósito una esfera  $S^2$ , o alguna figura inscrita en ella (figura 3). Es decir, estudiaremos la acción de  $SO(3)$  sobre  $S^2$ .

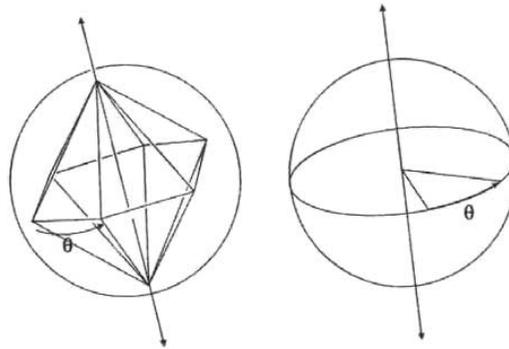


Figura 3: Efecto de una rotación.

# Capítulo 1

## Grupos finitos de rotaciones

Centraremos ahora nuestra atención en los subgrupos finitos de  $SO(3)$ , y daremos una descripción de todos ellos por medio de ciertas figuras geométricas que quedan invariantes bajo la acción de estos grupos.

### 1.1. El grupo cíclico $C_n$

Empecemos el estudio con una pirámide cuya base es un polígono regular de  $n$  lados; al polígono lo denotaremos por  $\{n\}$ . Esta figura presenta el grupo de rotaciones más simple. Las únicas rotaciones que dejan invariante la pirámide son aquéllas que llevan un vértice de la base en cualquier otro, dejando fijo el ápice. Claramente éste es el grupo generado por la rotación que tiene como eje la altura de la pirámide, llamado *eje principal*, y con un ángulo de  $2\pi/n$ . Al eje principal le podemos asociar el número  $n$  y decimos así que se trata de un *eje de período  $n$*  o bien un *eje  $n$ -periódico*. De esta forma conseguimos un *grupo cíclico* de orden  $n$ ,  $\{\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n = \rho^0\}$  (figura 1.1), el cual denotamos por  $C_n$ . Notemos que al estar generado por un solo elemento, este grupo es, de manera abstracta, isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

Para establecer los generadores de cada grupo, notemos primero que basta expresar el grupo de rotaciones de una figura en particular, ya que dos figuras congruentes se pueden llevar una en la otra mediante transformaciones rígidas, entre las que encontramos precisamente las rotaciones. En vista de lo anterior, si  $\rho \in SO(3)$  es una rotación con un ángulo  $2\pi/n$ , podemos tomarla como generador de  $C_n$  independientemente del eje de rotación, pues el grupo

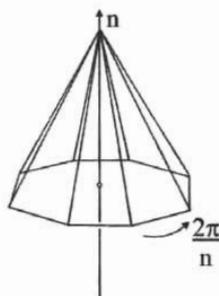


Figura 1.1: Grupo de rotaciones de una pirámide.

consiste sólo de potencias de  $\rho$ ; por ejemplo, la rotación  $\rho = (\mathbf{e}_1, 2\pi/n)$ <sup>1</sup> cumple lo establecido, por lo que podemos escribir:

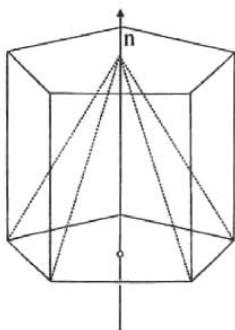
$$C_n = \langle (\mathbf{e}_1, 2\pi/n) \rangle \quad (1.1)$$

En este caso es fácil determinar los subgrupos de este grupo, ya que todos ellos son cíclicos, así que es suficiente con calcular los divisores de  $n$  para encontrar los subgrupos de  $C_n$ . Si  $m$  divide a  $n$ , entonces  $C_m \leq C_n$ , con índice igual a  $n/m$ ; este cociente lo denotaremos por  $[C_n : C_m]$ . Éstos son todos los subgrupos de  $C_n$ . Geométricamente podemos tener una representación de esta situación simplemente trazando una pirámide de base  $\{m\}$  inscrita en la pirámide de base  $\{n\}$  (figura 1.2).

## 1.2. El grupo diédrico $D_n$

Otras figuras interesantes son los prismas, los cuales también pueden tener como base cualquier polígono  $\{n\}$ . Tomemos pues un prisma  $n$ -agonal. Si ahora construimos una pirámide, con la misma base y la misma altura, ésta quedará inscrita en el prisma. Vemos que cada una de las rotaciones de esta pirámide también deja invariante al prisma. Esto significa que el grupo de rotaciones del prisma tendrá como subgrupo a  $C_n$ . O bien, dicho de otra forma, el prisma  $n$ -agonal cuenta con un eje  $n$ -periódico (figura 1.3).

<sup>1</sup>Aquí  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ , y análogamente  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

Figura 1.2: Subgrupo  $C_m$  en  $C_n$ .Figura 1.3: Subgrupo  $C_n$  de  $D_n$ .

Además de estas rotaciones, contamos con otras que intercambian las dos caras  $n$ -agonales. Para determinar sus ejes, tomemos la intersección del prisma con un plano  $\Pi$ , paralelo a la base y que pase por el centro del prisma, y llamemos  $P$  a esta intersección. Si ahora trazamos un polígono  $\{2n\}$ , digamos  $P'$ , circunscrito a  $P$ , cada una de las diagonales de  $P'$  es un *eje secundario* del prisma (figura 1.4). Las rotaciones en torno a estos ejes secundarios, tienen por ángulo  $\pi$ , por lo cual son rotaciones de orden 2; decimos que los  $n$  ejes secundarios son 2-periódicos. Llamaremos a una rotación de orden 2 un *medio giro*.

Hay que notar que un medio giro, con su eje contenido en  $\Pi$ , actúa sobre  $\Pi$  igual que una reflexión de  $\Pi$  en dicho eje. En particular, el polígono  $P$  queda invariante bajo cualquier rotación del prisma. Así pues, otra manera

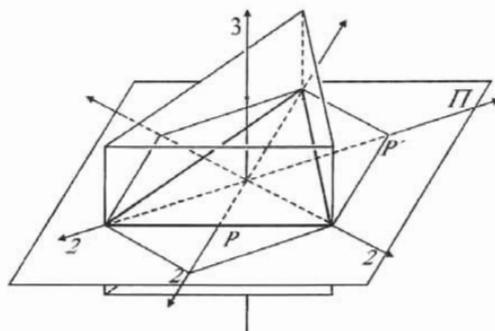


Figura 1.4:  $\mathcal{D}_n$  como grupo de isometrías de un polígono  $P = \{n\}$ .

de obtener este grupo es analizando *todas las simetrías* de un polígono regular  $\{n\}$ , incluidas las posibles reflexiones en líneas del plano de  $\{n\}$ .

El número de vértices en el prisma es  $2n$  y como un vértice puede alcanzar la posición de cualquier otro, mediante una rotación  $\rho \in C_n$  o bien  $\rho\mu$ , donde  $\mu$  es un medio giro, vemos que el grupo de rotaciones de un prisma tiene, cuando menos,  $2n$  elementos. Más aún, estas rotaciones son todas. Notemos que cualquier rotación, distinta de la identidad, permuta *todos los vértices*. De aquí que baste conocer la ubicación de un vértice en particular, para determinar la ubicación de todos los demás. Así pues, cada rotación queda asociada al lugar ocupado por un vértice, que haya sido determinado de antemano, después de efectuada la rotación. Por lo tanto, el grupo de rotaciones de un prisma tiene  $2n$  elementos. A este grupo se le llama *diédrico de orden  $2n$*  y se denota por  $\mathcal{D}_n$ . Proporcionamos para este grupo dos generadores

$$\mathcal{D}_n = \langle (\mathbf{e}_1, 2\pi/n), (\mathbf{e}_2, \pi) \rangle \quad (1.2)$$

De aquí resulta claro que  $C_n \leq \mathcal{D}_n$ , como se afirmó líneas arriba. Hay que notar que sólo en el caso de  $n = 1$  el grupo  $\mathcal{D}_1$  es isomorfo a  $C_2$ , ya que ambos cuentan con dos elementos únicamente.

Para analizar el sistema de subgrupos de  $\mathcal{D}_n$  seguiremos un razonamiento similar al utilizado para  $C_n$ . Si  $m$  es un entero positivo que divide a  $n$ , fácilmente notamos que  $\mathcal{D}_m \leq \mathcal{D}_n$ , lo cual se puede visualizar trazando un prisma  $m$ -agonal inscrito al prisma original. De manera que los subgrupos

de  $\mathcal{D}_n$  son  $\mathcal{C}_m$  y  $\mathcal{D}_m$  donde  $m|n$  y el índice está dado, nuevamente, por el cociente  $[\mathcal{D}_n : \mathcal{D}_m] = 2n/2m$ , así como  $[\mathcal{D}_n : \mathcal{C}_m] = 2n/m$ .

### 1.3. Los grupos poliédricos

Además de los grupos cíclicos y diédricos, contamos con los llamados *grupos poliédricos*. Para estudiarlos analizaremos figuras más complejas, los *poliedros regulares*, y veremos que en estos casos los grupos de rotaciones están relacionados con grupos simétricos de  $n$  elementos, que denotamos por  $S_n$ .

Definimos un *poliedro* como un conjunto convexo de polígonos planos tal que todas las aristas de cada polígono pertenecen también a otro polígono, y con la condición de que los polígonos que rodean cada vértice formen un **círculo cerrado**<sup>2</sup>. Para definir un poliedro regular pediremos además que cada cara (es decir cada polígono) sea regular y que cada *figura vertical* sea regular (llamaremos *figura vertical* al polígono resultante de unir los puntos medios de las aristas que inciden en cada vértice.) Un ejemplo claro de esto es un cubo, cuyas caras son cuadrados y sus figuras verticales son triángulos equiláteros. Esto nos lleva a considerar lo siguiente: en cada vértice deben encontrarse por lo menos 3 caras, así que si denotamos por  $q$  este número, **tenemos**  $q \geq 3$ . Análogamente, para cualquier polígono regular, el número de lados debe ser mayor o igual a 3; sea  $p$  este número, entonces  $p \geq 3$ . Si además observamos que la suma de los  $q$  ángulos interiores de las caras que concurren en cada uno de los vértices debe ser menor que  $2\pi$ , llegamos a la siguiente expresión:

$$q \left( 1 - \frac{2}{p} \right) \pi < 2\pi;$$

es decir,  $(q-2)(p-2) < 4$ . Los únicos valores posibles para estos números son 3, 4 y 5. El *símbolo de Schläfli* indica la forma de las caras y de las figuras verticales mediante la pareja  $\{p, q\}$ <sup>3</sup>, donde  $p$  es el número de lados del polígono regular, mientras que  $q$  indica el número de aristas incidentes en cada vértice o, lo que es lo mismo, el número de lados de la figura vertical.

<sup>2</sup>[Cox2]

<sup>3</sup>Posteriormente el símbolo de Schläfli se extenderá para politopos en cuatro dimensiones, tomando la forma  $\{p, q, r\}$ .

Las cinco parejas  $\{p, q\}$  correspondientes a los poliedros regulares en  $\mathbb{R}^3$ , están detallados en la siguiente tabla.

| Nombre     | Símbolo de Schläfli | Caras   | Fig. vertical |
|------------|---------------------|---------|---------------|
| Tetraedro  | $\{3, 3\}$          | $\{3\}$ | $\{3\}$       |
| Octaedro   | $\{3, 4\}$          | $\{3\}$ | $\{4\}$       |
| Cubo       | $\{4, 3\}$          | $\{4\}$ | $\{3\}$       |
| Icosaedro  | $\{3, 5\}$          | $\{3\}$ | $\{5\}$       |
| Dodecaedro | $\{5, 3\}$          | $\{5\}$ | $\{3\}$       |

Un aspecto importante es el de la dualidad entre las parejas  $\{p, q\}$  y  $\{q, p\}$ . Estos poliedros pueden obtenerse uno a partir del otro uniendo los puntos medios de las caras adyacentes (figura 1.5). Se dice así que son *duales* uno del otro. Tenemos pues que el tetraedro es su propio dual (auto-dual), mientras que el cubo es dual del octaedro, así como el dodecaedro lo es del icosaedro. Esto juega un papel relevante en la determinación de los grupos de rotaciones, ya que una transformación que deje invariante a un poliedro dejará fijo también a su dual; es decir, *los poliedros duales tienen el mismo grupo de rotaciones*.

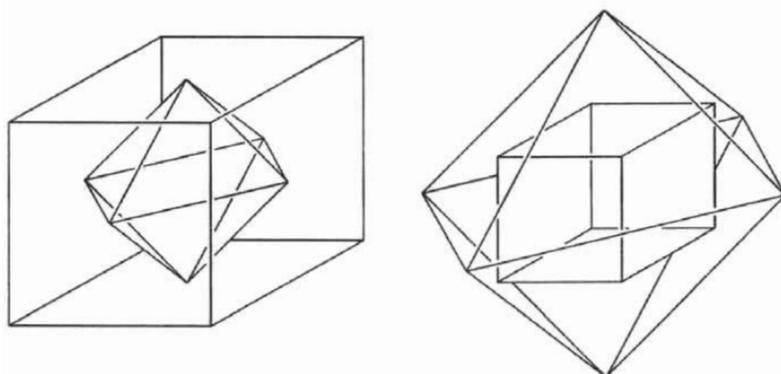


Figura 1.5: El cubo y el octaedro son duales uno del otro.

De lo anterior, deducimos que sólo hay tres grupos para estos cinco poliedros; a saber, el *grupo tetraédrico*, el *grupo octaédrico* y el *grupo icosaédrico*.

co, mismos que denotaremos por  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  e  $\mathcal{I}$  respectivamente. Éstos son los tres grupos poliédricos; analizaremos más detalladamente cada uno de ellos.

### El grupo tetraédrico $\mathcal{T}$

Para estudiar el grupo de rotaciones de un tetraedro  $T$ , en principio lo ubicaremos de manera que sus cuatro vértices sean los puntos  $v_0 = (1, 1, 1)$ ,  $v_1 = (1, -1, -1)$ ,  $v_2 = (-1, 1, -1)$ ,  $v_3 = (-1, -1, 1)$  (figura 1.6).

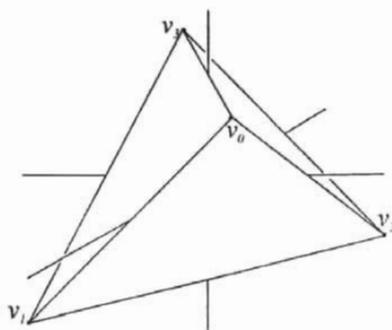


Figura 1.6: Los vértices  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  forman un tetraedro regular.

Ahora bien, consideremos la línea que une un vértice  $v_i$  de  $T$  con el origen. Para este eje tenemos una rotación  $\rho_i$  por un ángulo  $2\pi/3$  que fija el vértice  $v_i$  y permuta cíclicamente los tres restantes. Repitiendo esta rotación, obtenemos el subgrupo cíclico  $\{Id, \rho_i, \rho_i^2\}$ . Esto se cumple para cualquier elección de  $v_i$ , por lo que contamos hasta este momento con 8 rotaciones de orden 3, respecto a 4 ejes 3-periódicos (figura 1.7).

Aunado a esto, podemos intercambiar los vértices por pares; lo cual se logra mediante el medio giro cuyo eje une los puntos medios de aristas opuestas. Hay 3 de estas rotaciones, por ende, contamos con 3 ejes 2-periódicos (figura 1.8).

A estas 11 rotaciones añadimos la identidad y con esto conseguimos doce elementos del grupo  $\mathcal{T}$  de rotaciones del tetraedro.

Para ver que estas doce rotaciones son todas, notemos que las rotaciones de orden 3 corresponden a permutaciones del tipo  $(abc)$ , mientras que los

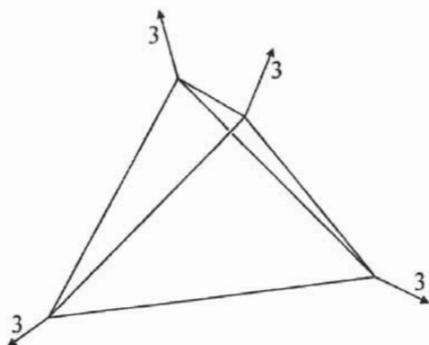


Figura 1.7: Ejes 3-periódicos del tetraedro.

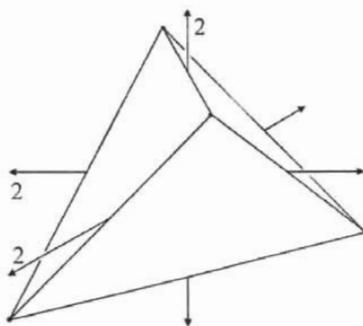


Figura 1.8: Ejes 2-periódicos del tetraedro.

medios giros se asocian con productos de transposiciones del tipo  $(ab)(cd)$ . Dado que éstas son todas las permutaciones pares de cuatro letras, tenemos que, de manera abstracta,  $\mathcal{T}$  tiene un subgrupo isomorfo al grupo alternante  $A_4$ . Sin embargo, una rotación del tetraedro no puede permutar dos vértices al tiempo que deja fijos los otros dos; por lo cual, no hay rotaciones en  $\mathcal{T}$  que correspondan a transposiciones de cuatro elementos; así pues,  $\mathcal{T} \cong A_4$ . En virtud de este isomorfismo entre  $\mathcal{T}$  y  $A_4$ , podemos hallar un conjunto generador para  $\mathcal{T}$ . Como  $A_4 = \langle (abc), (ab)(cd) \rangle$  (véase [Ar]), resulta que:

$$\mathcal{T} = \langle (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3), (\mathbf{e}_1, \pi) \rangle. \quad (1.3)$$

Para determinar los subgrupos de  $\mathcal{T}$ , nos valemos de los ejes y sus períodos. Sabemos que hay 4 ejes 3-periódicos, por lo que tenemos 4 subgrupos distintos, isomorfos a  $C_3$ ; cada uno asociado a alguno de estos ejes. Estos grupos corresponden a los subgrupos de  $A_4$  del tipo  $\{(1), (abc), (acb)\}$ , de los cuales hay cuatro. Podemos visualizarlos mediante cuatro triángulos distintos en el tetraedro  $T$ . Cada uno de los subgrupos  $C_3$  actúa transitivamente<sup>4</sup> sobre uno de estos triángulos (figura 1.9).

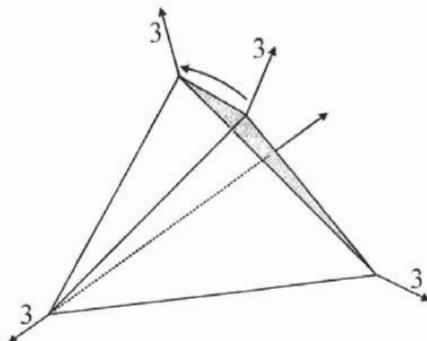
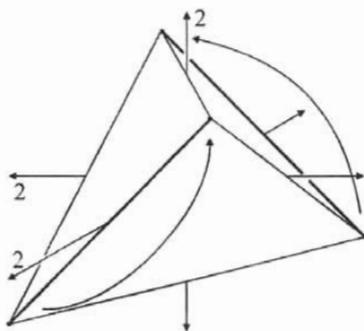


Figura 1.9: Subgrupo  $C_3$  de  $\mathcal{T}$ .

Análogamente, contamos con 3 ejes 2-periódicos que inducen 3 subgrupos distintos, isomorfos a  $C_2$ ; igualmente relacionados con los 3 ejes respectivos. Estos grupos corresponden a los subgrupos de  $A_4$  del tipo  $\{(1), (ab)(cd)\}$ .

<sup>4</sup>Se dice que un grupo  $G$  actúa transitivamente sobre un conjunto  $S$  si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in S$ , hay una transformación  $\gamma$  en  $G$  que lleva uno en el otro,  $\gamma(x) = y$ .

Figura 1.10: Subgrupos  $C_2$  de  $T$ .

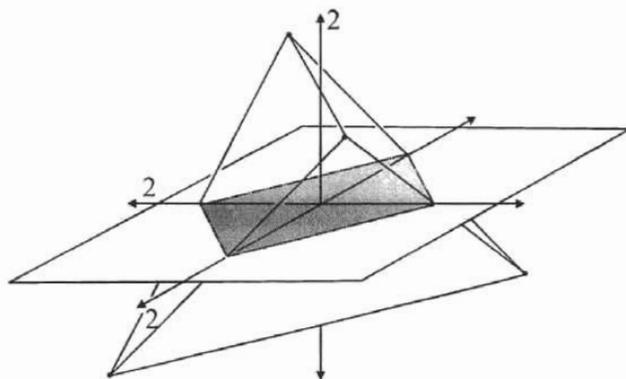
Cada uno de estos subgrupos  $C_2$  actúa sobre un par de aristas opuestas (figura 1.10).

Por último, contamos con un sólo subgrupo isomorfo a  $D_2$  formado por la unión de los tres subgrupos isomorfos a  $C_2$ ; el subgrupo de  $A_4$  correspondiente es  $\{(1), (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)\}$ . Podemos asociar a este grupo el cuadrado formado por la intersección del tetraedro  $T$  con el plano  $z = 0$  (figura 1.11). El subgrupo de  $T$  isomorfo a  $D_2$  actúa transitivamente en las aristas de este cuadrado.

Es claro que los índices de los subgrupos se obtienen mediante los cocientes respectivos  $[T : D_2] = 3$ ,  $[T : C_3] = 4$  y  $[T : C_2] = 6$ . En la siguiente tabla detallamos la lista completa de subgrupos de  $T$ .

| Subgrupos de $T$ |       |       |       |       |     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| Subgrupo         | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $D_2$ | $T$ |
| Orden            | 1     | 2     | 3     | 4     | 12  |
| Índice           | 12    | 6     | 4     | 3     | 1   |
| Cantidad         | 1     | 3     | 4     | 1     | 1   |

Éstos son *todos* los subgrupos de  $T$ , lo cual se puede probar utilizando que  $T$  y  $A_4$  son isomorfos, y analizando la estructura de  $A_4$ .

Figura 1.11: Subgrupo  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathcal{T}$ .

### El grupo octaédrico $\mathcal{O}$

Para estudiar el grupo octaédrico, consideremos un cubo colocado de forma que sus vértices tengan las ocho combinaciones  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Retomando el tetraedro  $\mathcal{T}$  utilizado en la sección anterior, denotaremos las cuatro diagonales por  $D_0 = v_0v'_0$ ,  $D_1 = v_1v'_1$ ,  $D_2 = v_2v'_2$ ,  $D_3 = v_3v'_3$  (figura 1.12). Es claro que cualquier rotación que deje invariante al cubo, llevará cada diagonal en alguna otra, de manera que se trata en realidad de una permutación de cuatro elementos (las diagonales). Por esto, es natural esperar que el grupo octaédrico tenga relación con el grupo simétrico  $S_4$ .

Veamos que, de hecho, cualquier permutación  $\sigma \in S_4$  induce una rotación que deja invariante al cubo. Tomemos dos diagonales  $D_i$  y  $D_j$ . Estas diagonales unen las dos aristas opuestas  $v_iv'_j$  y  $v'_iv_j$  así pues, la rotación que tiene como eje la línea que pasa por los puntos medios de estas aristas (figura 1.13) y con un ángulo de  $\pi$ , intercambia las dos diagonales  $D_i$  y  $D_j$ , mientras que fija las otras dos; es decir, representa una transposición de dos de los cuatro elementos. Ahora bien, dado que toda permutación  $\sigma \in S_4$  es producto de transposiciones, y cada transposición induce una rotación del cubo, vemos que las permutaciones de  $S_4$  inducen rotaciones del cubo. De manera abstracta, el grupo octaédrico, que denotaremos por  $\mathcal{O}$ , es isomorfo al grupo simétrico  $S_4$ .

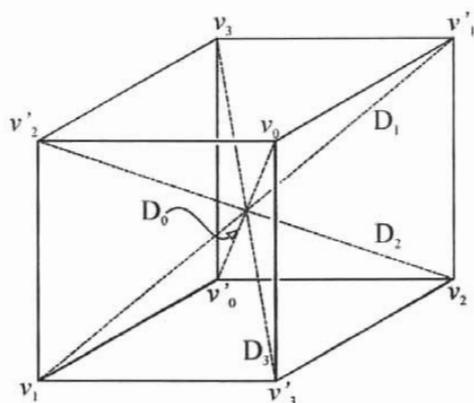


Figura 1.12: Las cuatro diagonales  $D_i$  del cubo.

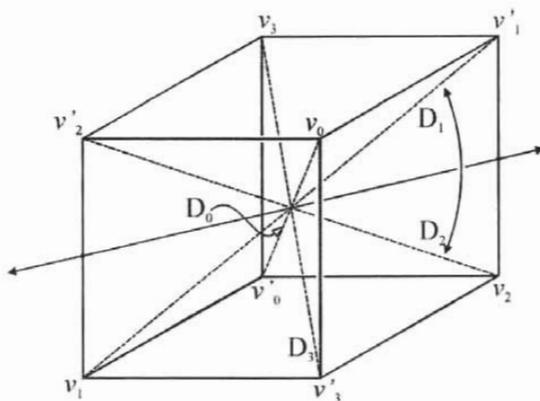


Figura 1.13: Una transposición  $\sigma$  de  $S_4$  permuta dos diagonales.

Explícitamente tenemos entonces las siguientes rotaciones:

- 6 rotaciones de orden 2, cuyo eje es la línea que une los puntos medios de aristas opuestas. Contamos con 6 ejes 2-periódicos (figura 1.14). Estas rotaciones corresponden a las transposiciones de la forma  $(ab) \in S_4$ .

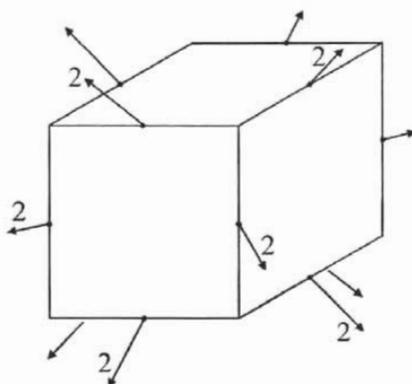


Figura 1.14: Ejes 2-periódicos del cubo.

- 8 rotaciones de orden 3, cuyo eje une vértices opuestos. Es decir, tenemos 4 ejes 3-periódicos (figura 1.15). Estas rotaciones corresponden a los 3-ciclos de la forma  $(abc) \in S_4$ .
- 6 rotaciones de orden 4, que tienen por eje la línea que une los centros de caras opuestas, y ángulo de  $\pi/2$ . Éstos son 3 ejes 4-periódicos (figura 1.16). Estas rotaciones corresponden a los 4-ciclos de la forma  $(abcd) \in S_4$ .
- Respecto a los ejes 4-periódicos, también tenemos 3 medios giros, como resultado de los *cuadrados* de las rotaciones de orden 4. Éstos se asocian con los productos de la forma  $(ab)(cd) \in S_4$ .

Estas 23 rotaciones corresponden a las permutaciones no triviales de  $S_4$ , por lo que al añadirles la identidad tenemos el resultado previsto  $\mathcal{O} \cong S_4$ . Por lo tanto, como  $S_4$  está generado por las permutaciones  $\{(ab), (bcd)\}$  (véase [Ar]), para  $\mathcal{O}$  tenemos el siguiente conjunto generador:

$$\mathcal{O} = \langle (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \pi), (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3) \rangle \quad (1.4)$$

Si se unen los vértices  $v_0, v_1, v_2, v_3$  en el cubo  $\mathbf{C}$ , el resultado es el tetraedro  $\mathbf{T}$  inscrito en  $\mathbf{C}$ . Más aún, cualquier rotación del tetraedro  $\mathbf{T}$ , deja invariante

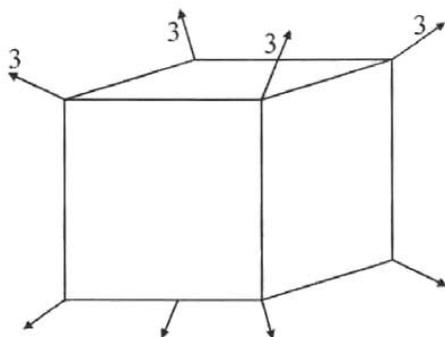


Figura 1.15: Ejes 3-periódicos del cubo.

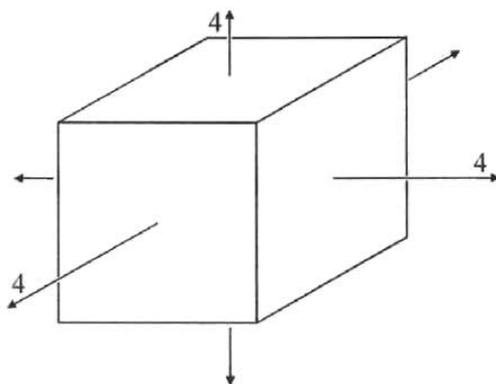


Figura 1.16: Ejes 4-periódicos del cubo.

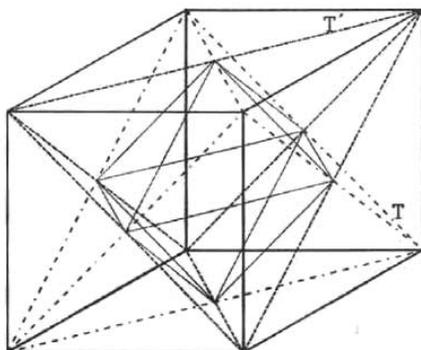


Figura 1.17: Tetraedros  $T$  y  $T'$  inscritos en un cubo.

al cubo, es decir  $T \leq \mathcal{O}$ . Ahora bien, si unimos los vértices  $v'_0, v'_1, v'_2, v'_3$ , obtenemos otro tetraedro  $T'$ , también inscrito en  $\mathcal{C}$ , cuya intersección con  $T$  forma un octaedro (figura 1.17). Dado que ambos tetraedros cuentan con el mismo grupo de rotaciones  $\mathcal{T}$ , notamos que cualquier permutación impar de  $S_4$  tiene el efecto de intercambiar los tetraedros  $T$  y  $T'$  entre sí.

Para describir los subgrupos de  $\mathcal{O}$ , haremos uso de los ejes  $n$ -periódicos para determinar algunos de ellos. Contamos con 3 ejes 4-periódicos que nos proporcionan 3 subgrupos  $C_4$  distintos, cada uno asociado a alguno de estos ejes. Estos subgrupos actúan sobre las caras opuestas de  $\mathcal{C}$  (figura 1.18).

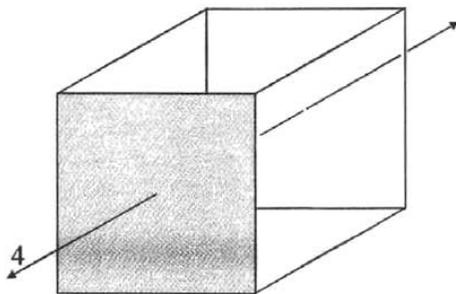
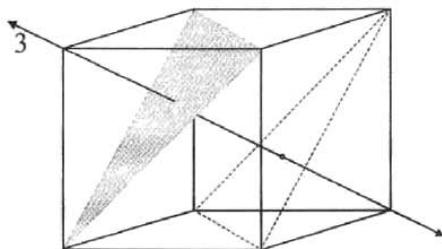
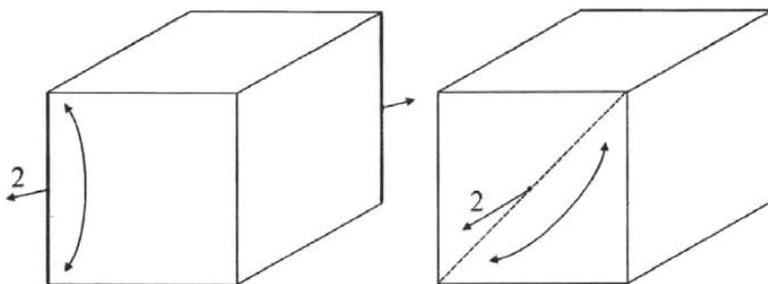


Figura 1.18: Subgrupos  $C_4$  de  $\mathcal{O}$ .

Figura 1.19: Subgrupos  $C_3$  de  $\mathcal{O}$ .

También hay 4 ejes 3-periódicos que proveen 4 subgrupos  $C_3$ , asociados a distintos ejes. La acción de estos grupos se aprecia en 4 pares de triángulos (figura 1.19).

Restan 6 ejes 2-periódicos, que inducen 6 subgrupos  $C_2$ ; sin embargo, esta vez se presenta una peculiaridad, ya que los ejes 4-periódicos también determinan 3 subgrupos  $C_2$ . Entonces se cuenta con 9 subgrupos  $C_2$ . Estos grupos actúan sobre pares de aristas en el caso de los provenientes de ejes 2-periódicos, y sobre las diagonales de las caras para aquellos relacionados con los ejes 4-periódicos. (figura 1.20).

Figura 1.20: Subgrupos  $C_2$  de  $\mathcal{O}$ .

Aunados a estos subgrupos cíclicos, contamos además con subgrupos diédricos, igualmente relacionados con los ejes  $n$ -periódicos, como veremos a continuación.

Encontramos que hay 4 ejes 2-periódicos ortogonales a cada eje 4-periódico

co, de manera que esta configuración nos provee un subgrupo diédrico  $\mathcal{D}_4$ . En realidad podemos hallar 3 subgrupos de este tipo, distintos entre sí, cada uno asociado a un eje 4-periódico (figura 1.21). Cabe mencionar que la intersección de estos 3 subgrupos es un  $\mathcal{D}_2$ .

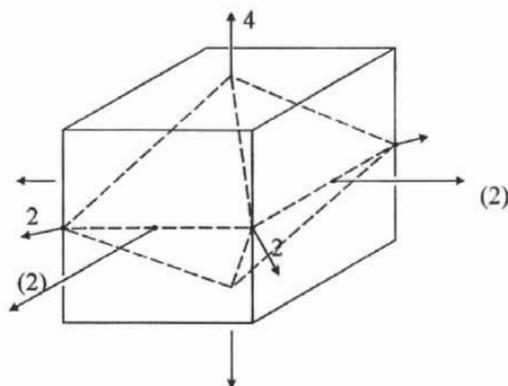


Figura 1.21: Subgrupo  $\mathcal{D}_4$  de  $\mathcal{O}$ .

Mediante un razonamiento análogo, determinamos 4 subgrupos diédricos  $\mathcal{D}_3$ , éstos actúan sobre 4 antiprismas triangulares (figura 1.22).

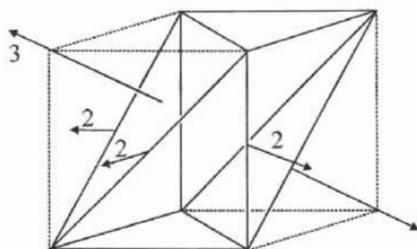
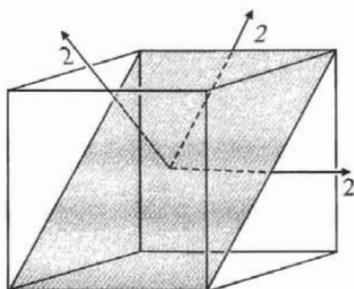
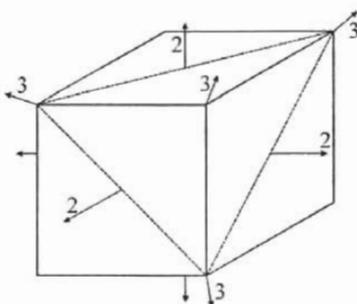


Figura 1.22: Subgrupo  $\mathcal{D}_3$  de  $\mathcal{O}$ .

Los ejes 2-periódicos proporcionan 4 subgrupos  $\mathcal{D}_2$  cuya acción se aprecia fácilmente considerando los rectángulos inscritos en el cubo formados por dos aristas opuestas y dos diagonales opuestas (figura 1.23).

Figura 1.23: Subgrupo  $D_2$  de  $O$ .

Por último, con el propósito de completar el estudio de subgrupos de  $O$ , precisamos que  $T \leq O$ , toda vez que dentro de  $C$  contamos con un tetraedro inscrito cuyo grupo de rotaciones deja invariante al cubo (figura 1.24).

Figura 1.24: Las rotaciones de  $T$  dejan invariante al cubo.

Resumimos el análisis previo en la siguiente tabla, donde añadimos el índice de cada subgrupo, el cual se obtuvo mediante el cociente correspondiente:

| Subgrupos de $O$ |       |       |       |       |       |       |       |     |     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|-----|
| Subgrupo         | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $T$ | $O$ |
| Orden            | 1     | 2     | 3     | 4     | 4     | 6     | 8     | 12  | 24  |
| Índice           | 24    | 12    | 8     | 6     | 6     | 4     | 3     | 2   | 1   |
| Cantidad         | 1     | 9     | 4     | 3     | 4     | 4     | 3     | 1   | 1   |

Es fácil notar que éstos son *todos* los subgrupos de  $\mathcal{O}$ , en virtud del isomorfismo entre  $\mathcal{O}$  y  $S_4$ .

### El grupo icosaédrico $\mathcal{I}$

De manera similar al grupo  $\mathcal{O}$ , para el grupo icosaédrico  $\mathcal{I}$  relacionaremos las rotaciones de un dodecaedro con las rotaciones de un cubo inscrito en él.

Para este fin, construimos primero un dodecaedro a partir del cubo  $\mathbf{C}$  de la sección anterior. Esto lo hacemos colocando seis piezas parecidas a una tienda de campaña, una en cada cara del cubo (figura 1.25).

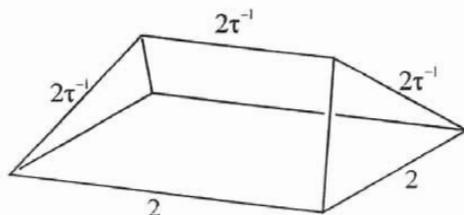


Figura 1.25: Piezas para formar un dodecaedro.

Estas piezas están formadas por un cuadrado como base, de lado 2; dos triángulos isósceles de lados<sup>5</sup>  $2\tau^{-1}$ ,  $2\tau^{-1}$ , 2; y dos trapecios con lados  $2\tau^{-1}$ ,  $2\tau^{-1}$ ,  $2\tau^{-1}$ , 2. De esta forma, los tres ángulos de la “tienda de campaña” en torno a un vértice que no pertenece a la base cuadrada son iguales a  $3\pi/5$ , mientras que para un vértice de la base los ángulos son  $2\pi/5$ ,  $\pi/5$  y  $\pi/2$ ; por lo tanto, al unir las seis piezas, se forman doce pentágonos regulares de un dodecaedro  $\mathbf{D}$  que circunscribe al cubo  $\mathbf{C}$ . Los vértices de  $\mathbf{D}$  tienen las coordenadas  $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$ ,  $(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$ ,  $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$ ,  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . (figura 1.26)

Notemos que las aristas del cubo son ahora diagonales de las caras de  $\mathbf{D}$ , por lo que al trazar todas las diagonales obtenemos en total cinco cubos inscritos en  $\mathbf{D}$  (figura 1.27).

Una rotación del dodecaedro manda unas caras en otras, es decir, permuta **las diagonales y, por ello, los cinco cubos inscritos intercambian sus lugares** entre sí. De esta forma vemos que una rotación del dodecaedro induce una

<sup>5</sup>Donde  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  es la razón áurea, de manera que  $\tau^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

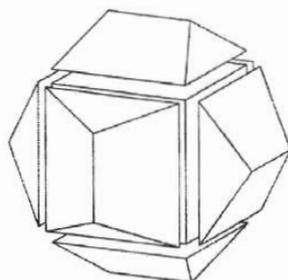


Figura 1.26: Dodecaedro circunscrito a un cubo.

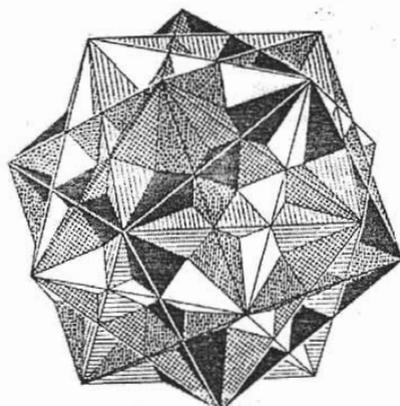


Figura 1.27: Cinco cubos inscritos en un dodecaedro.

permutación de 5 elementos; es decir, por lo pronto tenemos que  $\mathcal{I}$  es isomorfo a un subgrupo de  $S_5$ .

Como tenemos 5 cubos inscritos en el dodecaedro, podemos enumerarlos. De esta forma, identificamos cada uno de los 20 vértices del dodecaedro con una pareja ordenada  $(a, b)$  donde  $a$  y  $b$  corresponden a los dos cubos coincidentes en el vértice (figura 1.28 y 1.29).

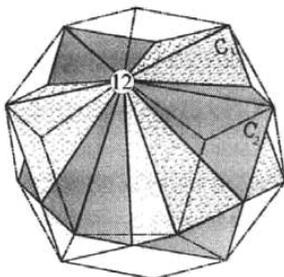


Figura 1.28: Los cubos  $C_1$  y  $C_2$  coinciden en  $(1, 2)$  y  $(2, 1)$ .

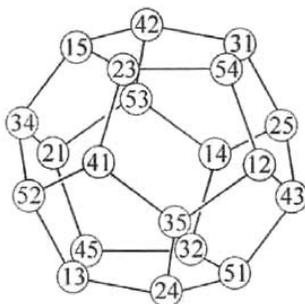


Figura 1.29: Identificación entre vértices y parejas ordenadas.

De esta forma, cada rotación del dodecaedro corresponde a una permutación en  $A_5$ , como veremos a continuación.

- Tenemos 6 ejes 5-periódicos, mismos que unen los centros de caras opuestas. En torno a cada eje hay 4 rotaciones distintas de la identidad (con un ángulo de  $2k\pi/5$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ ). Cada una de estas rotaciones tiene orden 5. Estas 24 rotaciones corresponden a las 24 permutaciones en  $S_5$  de la forma  $(abcde)$  (figura 1.30).

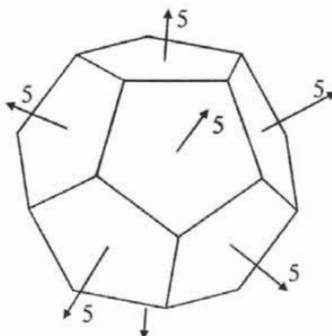


Figura 1.30: Ejes 5-periódicos del dodecaedro.

- Al unir vértices opuestos, conseguimos 10 ejes 3-periódicos. En torno a cada uno de estos ejes hay 2 rotaciones distintas de la identidad (con ángulo  $2k\pi/3$  para  $k = 1, 2$ ); y cada rotación tiene orden 3. Estas 20 rotaciones corresponden a las 20 permutaciones en  $S_5$  de la forma  $(abc)$  (figura 1.31).
- Para cada par de aristas opuestas tenemos el eje 2-periódico que pasa por sus puntos medios. De aquí obtenemos 15 medios giros, que corresponden a las permutaciones en  $S_5$  de la forma  $(ab)(cd)$  (figura 1.32).

Vemos así que estas 59 rotaciones están en relación uno a uno con las permutaciones pares no triviales de  $S_5$ , por lo que al añadirles la identidad, tenemos que  $\mathcal{I} \cong A_5$ . Como en los casos anteriores, podemos obtener un conjunto generador para  $\mathcal{I}$  a partir de un conjunto generador de  $A_5$ . De esta forma, como  $A_5 = \langle (ab), (cde) \rangle$  tenemos que

$$\mathcal{I} = \langle (\mathbf{e}_1 + \tau^{-1}\mathbf{e}_2 + \tau\mathbf{e}_3, \pi), (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3) \rangle \quad (1.5)$$

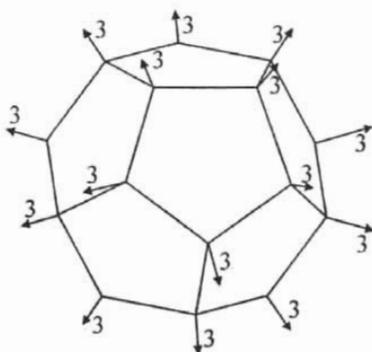


Figura 1.31: Ejes 3-periódicos del dodecaedro.

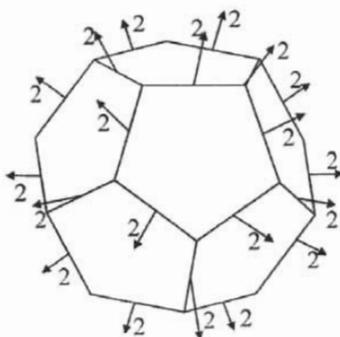
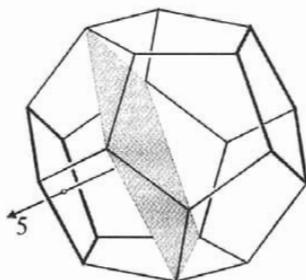
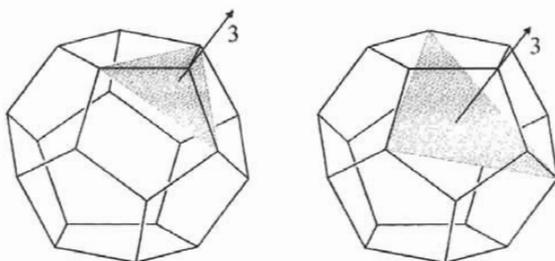


Figura 1.32: Ejes 2-periódicos del dodecaedro.

Ahora, con base en las configuraciones de los ejes  $n$ -periódicos, determinaremos el sistema de subgrupos de  $\mathcal{I}$ . Los 6 ejes 5-periódicos inducen igual número de subgrupos cíclicos isomorfos a  $C_5$  que actúan sobre las caras opuestas del dodecaedro (figura 1.33).

Asimismo, los 10 ejes 3-periódicos determinan 10 subgrupos isomorfos a  $C_3$ . Éstos actúan sobre los triángulos formados con los vértices adyacentes a un vértice sobre el eje (figura 1.34).

Quedan 15 ejes 2-periódicos, los cuales inducen 15 subgrupos isomorfos a

Figura 1.33: Subgrupo  $C_5$  de  $\mathcal{I}$ .Figura 1.34: Subgrupos  $C_3$  de  $\mathcal{I}$ .

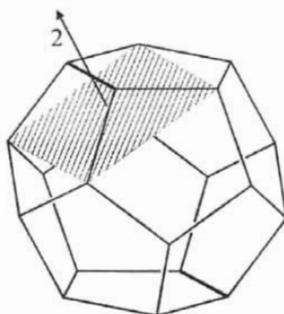
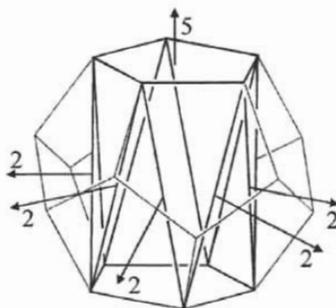
$C_2$ , estos grupos actúan sobre pares de aristas opuestas (figura 1.35).

Por lo que toca a los subgrupos diédricos, contamos con 6 subgrupos isomorfos a  $\mathcal{D}_5$ ; asociado cada uno a un eje 5-periódico, toda vez que para cada uno de estos ejes encontramos 5 ejes 2-periódicos ortogonales. La acción de estos grupos se aprecia en 6 antiprismas pentagonales. (figura 1.36).

Lo mismo sucede con los ejes 3-periódicos. Dado que hay 3 ejes 2-periódicos ortogonales a cada eje 3-periódico, contamos con 10 subgrupos isomorfos a  $\mathcal{D}_3$ , actuando en 10 antiprismas triangulares inscritos en  $D$  (figura 1.37).

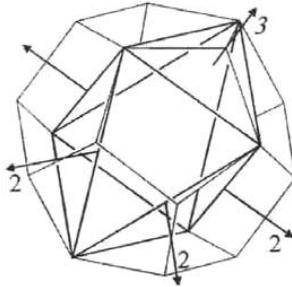
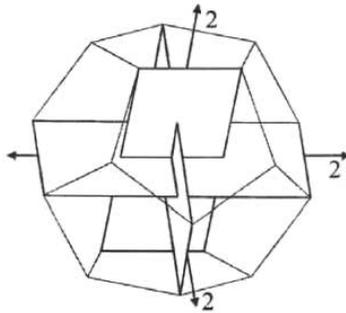
Los 15 ejes 2-periódicos se combinan dando un total de 5 subgrupos  $\mathcal{D}_2$  distintos. Cada uno de ellos actúa sobre la composición de 3 rectángulos, ortogonales entre sí, formados con vértices de  $D$  (figura 1.38).

Por último, dado que  $\mathcal{T} \cong A_4$ ,  $\mathcal{I} \cong A_5$  y  $A_4 \leq A_5$  vemos que resulta  $\mathcal{T} \leq \mathcal{I}$ . Esto lo podemos visualizar de la siguiente forma. Tomemos un

Figura 1.35: Subgrupos  $C_2$  de  $\mathcal{I}$ .Figura 1.36: Subgrupos  $D_5$  de  $\mathcal{I}$ .

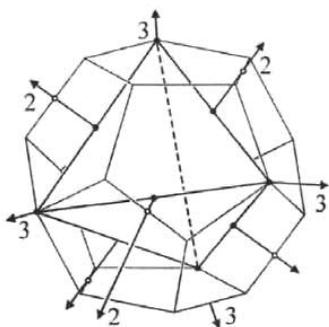
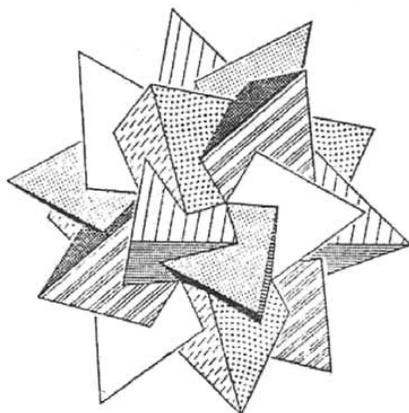
tetraedro inscrito en alguno de los cinco cubos que se encuentran inscritos en  $D$ . Entonces las rotaciones de este tetraedro dejan fijo al dodecaedro (figura 1.39), por lo que tenemos que  $\mathcal{T} \leq \mathcal{I}$ . Sin embargo, no sucede lo mismo con el grupo octaédrico como subgrupo, ya que hay rotaciones del cubo inscrito  $\mathcal{C}$  que no pertenecen a  $\mathcal{I}$ . Además, en ese caso se tendría  $S_4 \leq A_5$ , lo cual es absurdo.

Si ahora aplicamos una rotación 5-periódica a este tetraedro, obtendremos otros cuatro tetraedros inscritos en  $D$ . Así pues, notamos que una rotación de cualquiera de estos tetraedros también es una rotación del dodecaedro. No obstante que en realidad hay diez tetraedros inscritos en un dodecaedro, afirmamos que sólo hay 5 subgrupos  $\mathcal{T}$  en  $\mathcal{I}$  (figura 1.40), ya que cada grupo

Figura 1.37: Subgrupos  $\mathcal{D}_3$  de  $\mathcal{I}$ .Figura 1.38: Subgrupo  $\mathcal{D}_2$  de  $\mathcal{I}$ .

actúa sobre un par de tetraedros (aquéllos cuya unión de vértices forma un cubo). Esto coincide con el esquema de los cinco subgrupos de  $A_5$  formados por permutaciones pares de cuatro elementos, es decir, aquéllas que dejan fijo un elemento.

En la siguiente tabla se encuentra la lista de subgrupos de  $\mathcal{I}$ , junto con el índice de cada uno de ellos y la cantidad de subgrupos isomorfos entre sí.

Figura 1.39: Subgrupo  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{I}$ .Figura 1.40: Subgrupos  $\mathcal{T}$  asociados a 5 tetraedros.

| Subgrupos de $\mathcal{I}$ |                 |                 |                 |                 |                 |                 |                 |               |               |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|
| Subgrupo                   | $\mathcal{C}_1$ | $\mathcal{C}_2$ | $\mathcal{C}_3$ | $\mathcal{C}_5$ | $\mathcal{D}_2$ | $\mathcal{D}_3$ | $\mathcal{D}_5$ | $\mathcal{T}$ | $\mathcal{I}$ |
| Orden                      | 1               | 2               | 3               | 5               | 4               | 6               | 10              | 12            | 60            |
| Índice                     | 60              | 30              | 20              | 12              | 15              | 10              | 6               | 5             | 1             |
| Cantidad                   | 1               | 15              | 10              | 6               | 5               | 10              | 6               | 5             | 1             |

Al igual que en los casos anteriores, se puede probar que éstos son *todos* los subgrupos de  $\mathcal{I}$ , utilizando el isomorfismo entre  $\mathcal{I}$  y  $A_5$ .

## 1.4. Clasificación de subgrupos finitos de $SO(3)$

Del análisis anterior, conseguimos los siguientes subgrupos finitos de  $SO(3)$ :

TABLA II

| Grupo         | Ejes de rotación  | Generadores  | Orden |
|---------------|---|--|-------|
| $C_n$         | 1 eje $n$ -periódico  | $(\mathbf{e}_1, 2\pi/n)$   | $n$   |
| $D_n$         | 1 eje $n$ -periódico<br>$n$ ejes 2-periódicos                       | $(\mathbf{e}_1, 2\pi/n)$<br>$(\mathbf{e}_2, \pi)$  | $2n$  |
| $\mathcal{T}$ | 3 ejes 2-periódicos<br>4 ejes 3-periódicos                          | $(\mathbf{e}_1, \pi)$<br>$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3)$  | 12    |
| $\mathcal{O}$ | 6 ejes 2-periódicos<br>4 ejes 3-periódicos<br>3 ejes 4-periódicos   | $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \pi)$<br>$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3)$                             | 24    |
| $\mathcal{I}$ | 15 ejes 2-periódicos<br>10 ejes 3-periódicos<br>6 ejes 5-periódicos | $(\mathbf{e}_1 + \tau^{-1}\mathbf{e}_2 + \tau\mathbf{e}_3, \pi)$<br>$(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\pi/3)$ | 60    |

Cada uno de estos grupos está asociado con alguna figura geométrica como ya vimos.

La pregunta que surge ahora es: ¿hemos agotado todos los posibles subgrupos finitos de  $SO(3)$ ? Veremos que en efecto, éstos son todos.

Consideremos un grupo finito de rotaciones  $\mathcal{G} \leq SO(3)$ . Sabemos que podemos considerar su acción sobre  $S^2$ . De esta manera, a cada rotación asociamos un diámetro de la esfera (el eje de la rotación). Por ello, puede interpretarse como una rotación en torno a un punto  $P$  sobre la esfera. Si el eje de rotación es  $n$ -periódico, diremos que el punto  $P$  asociado tiene orden  $n$ . (figura 1.41)

Necesitamos evaluar el producto de dos rotaciones dadas, para lo cual usaremos el siguiente resultado. *Si los vértices de un triángulo esférico  $PQR$ , con ángulos  $p$ ,  $q$  y  $r$ , respectivamente, están dispuestos en sentido negativo (siguiendo las manecillas del reloj), el producto de rotaciones por ángulos*

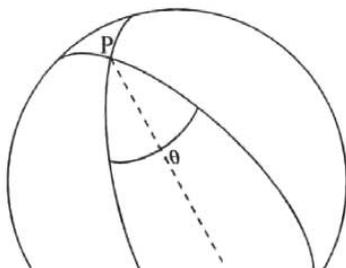


Figura 1.41: Una rotación con ángulo  $\theta$  en torno a un punto  $P$ .

$2p, 2q, 2r$  en torno a  $P, Q, R$  es la identidad. Para probar esto basta con expresar el producto de rotaciones como el producto de las reflexiones en los círculos máximos  $RP, PQ; PQ, QR; QR, RP$  (figura 1.42).

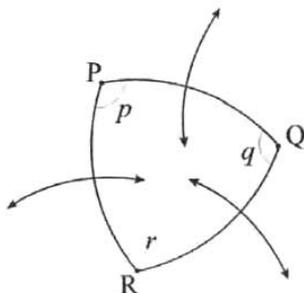


Figura 1.42: El producto de tres rotaciones es la identidad.

Vemos ahora que el producto de dos rotaciones con ángulos  $2p$  y  $2q$ , en torno a  $P$  y  $Q$ , respectivamente, lo podemos expresar como la rotación con ángulo  $-2r$  en torno a  $R$ . De aquí se deduce que el producto de dos medios giros en torno a cualesquiera dos puntos  $P$  y  $Q$ , es la rotación por  $\pm 2\angle POQ$  en torno al polo del círculo máximo  $PQ$  (donde  $O$  es el centro de la esfera (figura 1.43)). Por lo que el producto de dos medios giros será otro medio giro sólo cuando los ejes  $OP$  y  $OQ$  sean ortogonales entre sí. De todo esto concluimos que si un grupo finito de rotaciones  $\mathcal{G}$  no tiene elementos de orden mayor que 2, entonces, o bien se trata del grupo cíclico  $C_2$ , o bien, del grupo

diédrico  $\mathcal{D}_2$  generado por dos medios giros en torno a ejes perpendiculares.

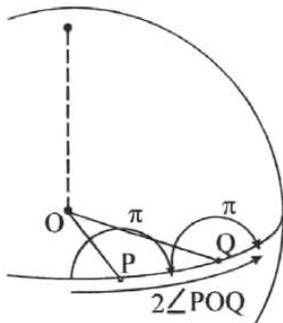


Figura 1.43: Producto de dos medios giros.

Supongamos ahora que hay un solo eje de rotación  $p$ -periódico con  $p > 2$ . Entonces, éste debe ser perpendicular a cualquier eje 2-periódico, en caso de que haya alguno; ya que, de no ser así, este eje  $p$ -periódico tendría como imagen, bajo el medio giro, otro eje  $p$ -periódico. Por lo tanto, si no hay ejes de período 2,  $\mathcal{G}$  es isomorfo a  $\mathcal{C}_n$ , el grupo cíclico de orden  $n$ . Cuando hay  $n$  ejes 2-periódicos,  $\mathcal{G}$  es isomorfo a  $\mathcal{D}_n$ , el grupo diédrico de orden  $2n$ .

Sólo resta examinar el caso en que hay varios ejes de rotación de período mayor que 2. Sea  $OP$  uno de ellos; esto es, hay una rotación con ángulo  $2\pi/p$  en torno a  $P$ . Dado que  $\mathcal{G}$  es finito, hay un punto  $Q$  sobre la esfera, a una distancia mínima, que corresponde a otro eje de rotación de orden mayor que 2. La rotación en torno a  $P$  lleva al punto  $Q$  a una serie de puntos  $Q = Q_1, Q_2, \dots, Q_{p-1}, Q_p$  que rodean a  $P$  (figura 1.44).

Dentro de este círculo el único punto de rotación de orden mayor a 2 es  $P$  (así se escogió a  $Q$ ). Como vimos anteriormente, el producto de rotaciones por ángulos  $2\pi/p$  y  $2\pi/q$ , en torno a  $P$  y  $Q$ , es la rotación con ángulo  $-2\pi/r$ , en torno a un punto  $R$  con el cual el triángulo esférico  $PQR$  tiene ángulos  $\pi/p, \pi/q, \pi/r$ . Como en un triángulo esférico la suma angular es mayor que  $\pi$ , tenemos que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \quad (1.6)$$

Pero  $p, q \geq 3$  implica que  $r < 3$  y por lo tanto,  $q > r$ . Es decir, el ángulo en  $Q$  es menor que el ángulo en  $R$ , por lo que el lado  $PR$  debe ser menor

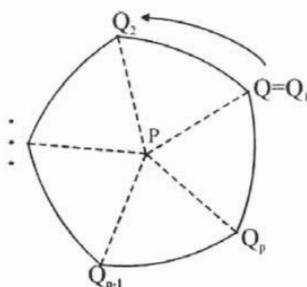


Figura 1.44: La rotación en torno a  $P$  produce un  $p$ -ágono esférico.

que el lado  $PQ$  en el triángulo  $PQR$ . De esta forma obtenemos que  $R$  se encuentra dentro del pequeño círculo alrededor de  $P$  y, por ello, corresponde a un eje 2-periódico. Así que  $r = 2$  y  $OR$  biseca el ángulo  $QOQ_{p-1}$ , o bien, dicho de otro modo, es el punto medio del lado  $QQ_{p-1}$ , en el  $p$ -ágono esférico  $QQ_1Q_2 \dots Q_{p-1}$  (figura 1.45).

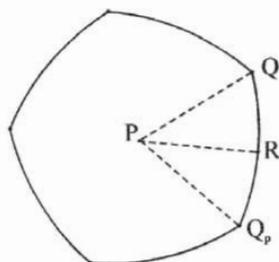


Figura 1.45:  $R$  es punto medio de  $QQ_p$ .

Por sucesivas rotaciones en torno a  $Q$ , obtenemos una serie de  $q$   $p$ -ágonos, que rodean el punto  $Q$ . Repitiendo el procedimiento con los demás puntos  $Q_i$ , llegamos a cubrir totalmente la esfera con  $p$ -ágonos. De este modo, las imágenes de  $Q$  son los vértices del poliedro regular  $\{p, q\}$ , las imágenes de  $P$  son los vértices del poliedro dual  $\{q, p\}$  y las imágenes de  $R$  son los puntos medios de las aristas de  $\{p, q\}$  o de  $\{q, p\}$ .

Recordemos que  $p$  y  $q$  deben cumplir  $(q - 2)(p - 2) < 4$ , por lo que, junto con la desigualdad (1.6) llegamos a los tres grupos poliédricos  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  e

$I$  (figura 1.46).

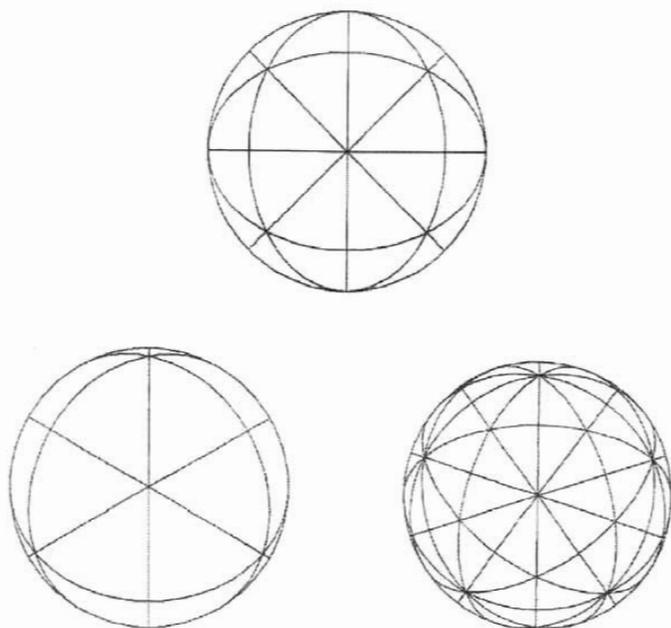


Figura 1.46: Subgrupos poliédricos de  $SO(3)$ .

Resumiendo, tenemos la siguiente caracterización de los grupos finitos de rotaciones. Si  $\mathcal{G}$  es un grupo finito de rotaciones  $\mathcal{G} \leq SO(3)$ , entonces  $\mathcal{G}$  es alguno de los siguientes grupos:

$$C_n, \quad D_n, \quad T, \quad O, \quad I \quad (n \geq 1). \quad (1.7)$$

**Parte II**

**Politopos y cuaterniones**

## Capítulo 2

# Cuaterniones

En esta sección analizaremos algunas propiedades del anillo no conmutativo de cuaterniones reales, relacionándolo con  $\mathbf{R}^4$ . La prueba detallada de los resultados utilizados se puede consultar en [G-S].

### 2.1. Propiedades generales

En el capítulo anterior determinamos la posición de un punto en el espacio mediante las coordenadas  $\mathbf{p} = p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3$ . Si ahora incluimos una cuarta coordenada  $e_0$ , tenemos la cuádrupla  $(p_0, p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=0}^3 p_i\mathbf{e}_i$ , que identificaremos con el cuaternión  $p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ . Estamos relacionando  $i$ ,  $j$ , y  $k$  con  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ , y  $\mathbf{e}_3$ , respectivamente (figura 2.1). De esta forma, podemos hacer uso de las propiedades del anillo de cuaterniones que, en honor a Hamilton se denota  $\mathbb{H}$ . Para mayor referencia, enunciamos a continuación algunas propiedades que serán de utilidad en la siguiente sección.

Llamaremos  $x_0$  a la *parte real* de  $x \in \mathbb{H}$  y a  $\mathbf{x} = x - x_0$  la *parte vectorial* de  $x$ . Para  $x, y \in \mathbb{H}$  definimos un producto conforme a las siguientes condiciones:

- a)  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- b)  $ij = k, jk = i, ki = j$

Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}$  decimos que  $x$  es un *cuaternión puro*. El subconjunto de todos los cuaterniones puros será denotado por  $\mathbb{H}^*$ . Para un cuaternión  $x$  tenemos el *conjugado* de  $x$ , definido por  $\bar{x} = x_0 - \mathbf{x}$ . Al número real  $|x| = \sqrt{x\bar{x}} \in \mathbf{R}$  lo llamaremos *norma* de  $x$ . De forma que si  $|x| = 1$  entonces decimos que  $x$  es un *cuaternión unitario*. Al conjunto de todos los cuaterniones unitarios

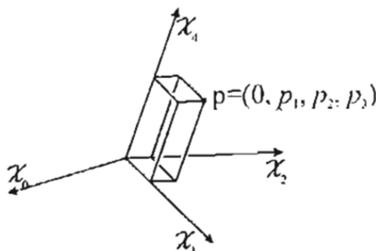


Figura 2.1: Un punto  $p$  en  $\mathbf{R}^3$  corresponde al cuaternión  $p_1i + p_2j + p_3k$ .

lo relacionamos con  $S^3$  de forma natural. Del mismo modo, relacionamos  $S^2$  con el conjunto de cuaterniones puros unitarios.

**Proposición 1** Sea  $x \in \mathbb{H}$ ; entonces,

- a)  $x$  es un cuaternión real si y sólo si  $xy = yx$  para todo  $y \in \mathbb{H}$ .
- b)  $x$  es un cuaternión puro si y sólo si  $x^2$  es un número real no positivo.

**Prueba.** a) se sigue de la definición del producto de cuaterniones.

Para verificar b), tomamos  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  y evaluamos

$$\begin{aligned} x^2 &= (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)^2 \\ &= (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2x_0(x_1i + x_2j + x_3k) \end{aligned}$$

de aquí se sigue el resultado al suponer  $x_0$  igual a cero, o bien, distinto de cero. ■

En particular, obtenemos como consecuencia para un cuaternión  $x$ , que  $x \in S^2$  si y sólo si  $x^2 = -1$ .

En general, el producto de cuaterniones no es conmutativo. Sin embargo, para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{H}$  se cumple  $|xy| = |x||y|$ . Por lo cual, para  $x \neq 0$ , encontramos el inverso de  $x$ , dado por  $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$ . Aún más, ya que  $|x|^{-1} = |x^{-1}|$ , y para un cuaternión puro  $x \in \mathbb{H}^r$ ,  $x^{-1} = -x/|x|^2$ ; mientras que si  $x \in S^3$ , entonces  $x^{-1} = \bar{x}$ .

Tenemos ahora el siguiente resultado importante:

**Lema 2** Un cuaternión arbitrario  $x \in \mathbb{H}$ , con parte vectorial no nula,  $\underline{x} \neq 0$ , admite la representación

$$x = |x|(\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta)$$

donde  $\theta = \arccos(x_0/|x|)$  y  $u_x = \underline{x}/|\underline{x}|$

**Prueba.** Como  $\theta = \arccos(x_0/|x|)$ , entonces  $\cos \theta = x_0/|x|$ , así  $\operatorname{sen} \theta = |\underline{x}|/|x|$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \cos \theta + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \operatorname{sen} \theta &= \frac{x_0}{|x|} + \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|} \frac{|\underline{x}|}{|x|} \\ &= \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

De donde se obtiene  $x = |x|(\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta)$  (figura 2.2). ■

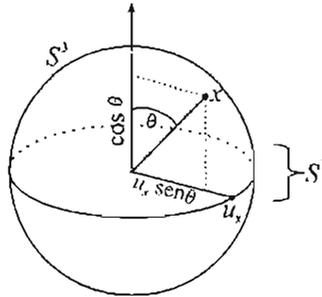


Figura 2.2: Si  $x$  es unitario, se puede expresar como  $(\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta)$ .

Como consecuencia del resultado previo, y dado que  $u_x \in S^3$  implica  $u_x^2 = -1$ , obtenemos el siguiente lema.

**Lema 3** La fórmula de De Moivre para potencias complejas también es válida para cuaterniones con parte vectorial no nula;

$$x^n = |x|^n (\cos n\theta + u_x \operatorname{sen} n\theta).$$

**Prueba.** Basta probarlo para  $x \in S^3$ , ya que la norma es multiplicativa, es decir  $|x^n| = |x|^n$ . Procediendo por inducción, supongamos que se cumple para  $n$ , o sea

$$(\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos n\theta + u_x \operatorname{sen} n\theta)$$

de manera que para  $n + 1$  se tiene

$$\begin{aligned} & (\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta)^{n+1} \\ &= (\cos n\theta + u_x \operatorname{sen} n\theta)(\cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\cos n\theta \cos \theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta) + u_x (\cos n\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} n\theta) \\ &= \cos(n+1)\theta + u_x \operatorname{sen}(n+1)\theta \end{aligned}$$

Claramente el resultado se cumple para  $n = 0, 1$ , así que vale para todo  $n$ . ■

Esta expresión nos muestra que *las combinaciones lineales del conjunto*  $\{1, u\}$ , *donde*  $u \in S^2$ , *forman una subálgebra isomorfa e isométrica a*  $\mathbb{C}$ . Basta con asociar  $i$  con  $u$  y, por todo lo anterior, obtenemos el resultado. De aquí deducimos otra propiedad importante. Si multiplicamos los elementos del plano  $\Pi_u = \{\alpha + \beta u : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  donde  $u \in S^2$ , por un cuaternión  $v$  ortogonal a  $u$ , es decir, tal que  $uv + vu = 0$ ; entonces, el plano  $\Pi_{u,v} = \{\alpha v + \beta uv : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$  es isomorfo e isométrico a  $\Pi_u$  bajo la función  $\alpha + \beta u \mapsto \alpha \cdot v + \beta u \cdot v$ . En particular

$$\begin{aligned} \{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} &\cong \{\alpha j + \beta k : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ \{\alpha + \beta k : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} &\cong \{\alpha i + \beta j : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Denotaremos de forma simbólica al cuaternión  $q = \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta$  como  $e^{u\theta}$ .

## 2.2. Conjugación como rotación de $\mathbb{R}^3$

Relacionaremos ahora los resultados del capítulo anterior sobre rotaciones tridimensionales, con las transformaciones correspondientes en  $\mathbb{H}$  como espacio tetradimensional. Para este fin, veamos primero el caso complejo.

En el plano complejo  $\mathbb{C}$ , la multiplicación por  $z = a + bi$  tiene el efecto de rotar los puntos, y alargar o encoger su distancia al origen al multiplicarla por un factor  $|z|$ , ya que  $|zw| = |z||w|$ . Cuando  $|z| = 1$ , podemos expresar a

$z$  como  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ , donde  $\theta \in [0, 2\pi)$ ; y la multiplicación tiene el efecto de una rotación simple por un ángulo  $\theta$ . De aquí resulta que  $SO(2) \cong S^1 \subset \mathbb{C}$ . (Figura 2.3)

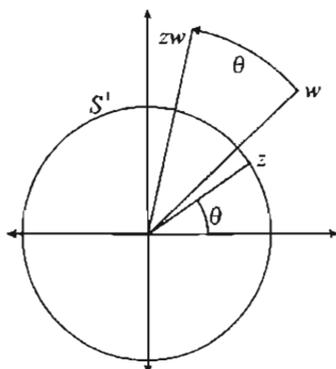


Figura 2.3: Multiplicar por  $z \in S^1$  equivale a rotar un ángulo  $\theta$ .

Ahora bien, para  $\mathbb{H}$ , también se cumple la propiedad  $|qr| = |q||r|$  como ya vimos. Sin embargo, el producto  $pq$  de dos cuaterniones puros  $p$  y  $q$  no siempre es otro cuaternión puro (recordemos que  $p^2 = -1$ ). No obstante, veremos que para todo cuaternión  $p$  y para cualquier cuaternión puro  $y \in \mathbb{H}^*$ , el producto  $ppy^{-1}$  sí es un cuaternión puro.

La función  $r \mapsto q_1 r q_2$  es una *similaridad* de  $\mathbb{H}$ , como espacio euclidiano tetradsimensional, donde  $|r|$  es multiplicada por un factor  $|q_1||q_2|$ . Entonces, la transformación  $x \mapsto qxq^{-1}$ , es una *congruencia*, ya que  $|q||q^{-1}| = 1$ . Es decir, esta transformación preserva normas.

Analizaremos pues la función  $C_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , dada por  $C_q(x) = qxq^{-1}$ , y veremos que esta función induce una rotación en torno al plano  $\alpha + \beta i$ , donde  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$  (es decir, una rotación simple en cuatro dimensiones)<sup>1</sup>.

En primer lugar, como  $C_q = C_{\lambda q}$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , veamos que si  $q$  es unitario,  $C_q(x)$  cumple las siguientes propiedades.

<sup>1</sup>Otro caso interesante es el de la función  $R_q(x) = -qxq^{-1}$ , la cual induce una reflexión en el plano  $\alpha + \beta i$ . Véase [Cox3].

**Lema 4** Sea  $q \in S^3$ , entonces la transformación  $C_q$ , dada por  $C_q(x) = qxq^{-1}$ , cumple:

- i)  $C_q^{-1} = C_{q^{-1}}$ .
- ii)  $C_q \circ C_r = C_{qr}$ .
- iii)  $C_q(q) = q$  y para todo cuaternión real  $a$ ,  $C_q(a) = a$ .
- iv)  $C_q$  es lineal.
- v)  $C_q$  es ortogonal.

**Prueba.**

- i)  $C_q(x) = qxq^{-1} = y \Rightarrow C_q^{-1}(y) = q^{-1}yq = C_{q^{-1}}(y)$ .
- ii)  $C_q \circ C_r(x) = C_q(rxr^{-1}) = qrxr^{-1}q^{-1} = C_{qr}(x)$ .
- iii)  $C_q(q) = qq^{-1} = q$ , y para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $C_q(a) = qaq^{-1} = aqq^{-1} = a$ .
- iv)

$$\begin{aligned} C_q(\alpha x + \beta y) &= q(\alpha x + \beta y)q^{-1} \\ &= \alpha qxq^{-1} + \beta qyq^{-1} \\ &= \alpha C_q(x) + \beta C_q(y) \end{aligned}$$

- v) Como  $C_q$  es lineal y preserva normas, es una transformación ortogonal.

Esto prueba el lema. ■

Notemos que  $C_q$  fija el subespacio  $\alpha + \beta q$ . En vista de esta propiedad, y con los resultados del lema anterior, estamos listos para demostrar un importante teorema.

**Teorema 5** Sea  $q = \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta$  un cuaternión unitario. La transformación  $C_q(x) = qxq^{-1}$  induce una rotación tridimensional en torno a  $u$ , por un ángulo  $2\theta$ .

**Prueba.** Supongamos primero que  $q = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ , de manera que el eje es  $i$ . Dado que  $q \in S^3$ , resulta que  $q^{-1} = \bar{q}$ . Así pues, para  $x = x_1i + x_2j + x_3k$ , como  $i\bar{q} = \bar{q}i$ ,  $j\bar{q} = qj$  y  $k\bar{q} = qk$ , tenemos:

$$\begin{aligned} C_q(x) &= q(x_1i)\bar{q} + q(x_2j)\bar{q} + q(x_3k)\bar{q} \\ &= x_1i + q^2x_2j + q^2x_3k \\ &= x_1i + q^2(x_2j + x_3k) \\ &= x_1i + (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)(x_2 + x_3i)j \\ &= x_1i + x'_2j + x'_3k \end{aligned}$$

Donde el par  $x'_2, x'_3$  es la imagen del par  $x_2, x_3$  bajo la rotación por un ángulo  $2\theta$  en el plano  $\{\alpha j + \beta k : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Análogamente para  $q = \cos \theta + k \operatorname{sen} \theta$  tenemos

$$\begin{aligned} C_q(x) &= (\cos 2\theta + k \operatorname{sen} 2\theta)(x_1 + x_2k)i + x_3k \\ &= x'_1i + x'_2j + x_3k \end{aligned}$$

Donde nuevamente  $x'_1$  y  $x'_2$  representan las imágenes de  $x_1$  y  $x_2$  bajo la rotación por un ángulo  $2\theta$  en el plano  $\{\alpha i + \beta j : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

**NOTA:** Para  $q = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta$ , la rotación queda con signo negativo, pues se obtiene

$$\begin{aligned} C_q(x) &= (\cos 2\theta + j \operatorname{sen} 2\theta)i(x_1 + x_3j) + x_2j \\ &= i(\cos 2\theta - j \operatorname{sen} 2\theta)(x_1 + x_3j) + x_2j \end{aligned}$$

Para el caso general en que  $q = \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta \in S^3$ , tomemos una rotación en torno a  $i$  que lleve  $u$  al plano  $\{\alpha i + \beta j : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ . Llamemos  $u'$  a este punto y  $C_a$  a la rotación indicada, esto es:  $C_a(u) = au\bar{a} = u'$ .

Ahora, mediante una rotación en torno a  $k$  llevemos  $u'$  hacia  $i$ . Digamos que la rotación es  $C_b$ , o sea  $C_b(u') = bu'\bar{b} = i$ .

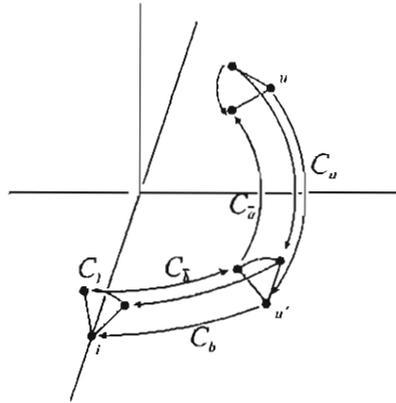


Figura 2.4: La conjugación  $C_q$  es un producto de rotaciones.

Por último, sea  $I$  el punto  $\cos \theta + i \sin \theta$ , donde  $\theta$  proviene de  $q = \cos \theta + u \sin \theta$  (figura 2.4).

Notamos ahora que

$$C_{ba}(u) = C_b \circ C_a(u) = C_b(u') = i,$$

o bien,

$$C_{ba}^{-1}(i) = C_{ab}(i) = u.$$

Pero más aún, ya que  $C_{ba}(q) = I$ , pues  $C_{ba}$  es lineal. De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} C_{ab}(I) &= \bar{a} \bar{b} I b a = q \\ C_{ab}(\bar{I}) &= \bar{a} \bar{b} \bar{I} b a = \bar{q}. \end{aligned}$$

De manera que para la conjugación por  $q$  resulta

$$\begin{aligned} C_q(x) = qx\bar{q} &= (\bar{a} \bar{b} I b a)x(\bar{a} \bar{b} \bar{I} b a) \\ &= \bar{a}(\bar{b}(I(b(ax\bar{a})\bar{b})\bar{I})b)a \\ &= C_{\bar{a}}C_{\bar{b}}C_I C_b C_a(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos expresar la conjugación  $C_q$  como composición de conjugaciones en torno a  $i$  y  $k$  que, como ya vimos, son rotaciones. Además, el ángulo es  $2\theta$ , pues las conjugaciones por  $a$  y por  $b$  se anulan. ■

Concluimos que un cuaternión  $q = \cos \theta + u \operatorname{sen} \theta$  induce, en  $S^2$ , la rotación  $C_q$  en torno a  $u$  por un ángulo  $2\theta$ ; es decir, la rotación  $\rho = (u, 2\theta) \in SO(3)$ .

Notemos que toda rotación simple tiene esta forma, (para algún  $q$  y alguna  $\theta$ ). Así pues, obtenemos que *el producto de cualesquiera dos rotaciones simples es otra rotación simple*; ya que el producto de  $C_q$  y  $C_r$  es  $C_{qr}$ , otra rotación simple. Y dado que el grupo especial ortogonal está generado por rotaciones simples, tenemos que *todo elemento de  $SO(3)$ , tiene la forma  $C_q$  para algún cuaternión  $q$ .*

Mencionamos líneas arriba que a todo múltiplo escalar de  $q$  le corresponde la misma conjugación, ya que  $C_{\lambda q}(x) = \lambda q x q^{-1} \lambda^{-1} = q x q^{-1} = C_q(x)$ ; razón por la cual limitamos esta relación tomando como representantes sólo cuaterniones unitarios. Así, tenemos que la correspondencia que asocia  $q$  con la función  $C_q$ , es un homomorfismo 2 a 1, del grupo de cuaterniones unitarios  $S^3$  a  $SO(3)$ , dado que dos cuaterniones unitarios opuestos  $q$  y  $-q$  proporcionan la misma rotación. Dicho de otra forma, podemos expresar esto como  $SO(3) \cong S^3 / \{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3$ . Resumimos lo anterior diciendo que si  $\rho = (\mathbf{p}, \theta) \in SO(3)$ , donde  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in S^2$ , entonces tenemos la siguiente asociación:

$$\rho = (\mathbf{p}, \theta) \longmapsto \pm \left( \cos \frac{\theta}{2} + (p_1 i + p_2 j + p_3 k) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.1)$$

También se puede llegar a estos resultados evaluando la composición de dos reflexiones, lo cual proporciona una rotación en torno a la intersección de los conjuntos invariantes de cada reflexión (véase [Cox3]).

### 2.3. Grupos finitos de cuaterniones

En esta sección analizaremos los grupos finitos de cuaterniones, a partir de la caracterización que se hizo en la sección 1.4 de los subgrupos finitos de  $SO(3)$ .

Sabemos que los cuaterniones unitarios  $q$  y  $-q$  inducen la misma rotación  $C_q(x) = q x \bar{q}$ . Asimismo, una rotación determina un par de cuaterniones unitarios. Entonces, cada grupo finito de cuaterniones  $\mathcal{G}$  estará relacionado con un subgrupo de  $SO(3)$ , dado por  $\{C_q \in SO(3) : q \in \mathcal{G}\}$  y el orden de  $\mathcal{G}$

será una o dos veces el del grupo correspondiente en  $SO(3)$ , de acuerdo con que  $-1$  esté o no en  $\mathcal{G}$ .

Denotaremos por  $2\mathcal{C}_n, 2\mathcal{D}_n, 2\mathcal{T}, 2\mathcal{O}, 2\mathcal{I}$  a los grupos de cuaterniones que contienen a  $-1$ . La notación  $2\mathcal{G}$  significa  $\{q \in \mathbb{H} : C_q \in \mathcal{G}\}$ , de manera que para  $\mathcal{G} \leq SO(3)$ , y  $2\mathcal{G} \leq \mathbb{H}$ , se cumple la relación  $2\mathcal{G}/\{\pm 1\} \cong \mathcal{G}$ . Cuando  $-1$  no pertenece al grupo de cuaterniones  $\mathcal{G}$ , el subgrupo correspondiente  $\mathcal{G}' \leq SO(3)$ , no tiene rotaciones de orden 2, ya que si tuviéramos un medio giro  $g = C_q$ , entonces  $Id = (C_q)^2 = C_{q^2}$ , y como  $(-1)^2 = 1$ ,  $-1 \in \mathcal{G}$ , una contradicción. Los únicos subgrupos de  $SO(3)$  sin medios giros son los grupos  $\mathcal{C}_n$  con  $n$  impar. Por lo que denotaremos por  $1\mathcal{C}_n$  a los grupos de cuaterniones correspondientes. En resumen, tenemos la siguiente caracterización de los grupos finitos de cuaterniones unitarios:

*Si  $\mathcal{G}$  es un grupo finito de cuaterniones unarios  $\mathcal{G} \leq S^3$ , entonces  $\mathcal{G}$  es alguno de los siguientes grupos:*

$$2\mathcal{I}, 2\mathcal{O}, 2\mathcal{T}, 2\mathcal{D}_n, 2\mathcal{C}_n, 1\mathcal{C}_n \ (n \text{ impar}) \quad (2.2)$$

En el capítulo anterior determinamos un conjunto generador para cada subgrupo finito de  $SO(3)$ . A partir de esas rotaciones obtendremos ahora los generadores correspondientes para los grupos finitos de cuaterniones, mediante la asociación  $\rho = (\mathbf{p}, \theta) \longleftrightarrow \pm(\cos \theta/2 + (p_1i + p_2j + p_3k)\text{sen } \theta/2)$ , donde  $\mathbf{p} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ; esto también lo podemos expresar como  $\rho = (\mathbf{p}, \theta) \longleftrightarrow \pm e^{\mathbf{p}\theta/2}$  (en esta parte se hace uso de la identificación  $\mathbf{e}_1 \sim i, \mathbf{e}_2 \sim j, \mathbf{e}_3 \sim k$ .)

### Los grupos $1\mathcal{C}_n$ y $2\mathcal{C}_n$

En primer lugar, determinamos los generadores del subgrupo  $1\mathcal{C}_n \leq \mathbb{H}$  (con  $n$  impar). Dado que su orden es el mismo que el de  $\mathcal{C}_n \leq SO(3)$ , un generador es  $e^{2\pi i/n}$ , es decir  $1\mathcal{C}_n = \langle e^{2\pi i/n} \rangle$ .

Para encontrar generadores de  $2\mathcal{C}_n \leq \mathbb{H}$ , contamos con un generador de  $\mathcal{C}_n$ , dado por  $(i, 2\pi/n)$ . Por lo que el cuaternión asociado es  $e^{\pi i/n}$  y es un generador de  $2\mathcal{C}_n$  que, de esta forma, cuenta con el doble de elementos que  $\mathcal{C}_n \leq SO(3)$ . Así pues, tenemos  $2\mathcal{C}_n = \langle e^{\pi i/n} \rangle$ .

Sabemos que los únicos subgrupos de  $\mathcal{C}_n$  son los  $\mathcal{C}_m$  donde  $m$  divide a  $n$ . Por eso, para  $2\mathcal{C}_n$ , tenemos que si  $m$  divide a  $2n$ , entonces hay un subgrupo

de orden  $m$ . Ahora bien, si  $m$  es par, el subgrupo es un  $2\mathcal{C}_{m/2}$ ; si, por el contrario,  $m$  es impar, entonces se trata de un  $1\mathcal{C}_m$ .

### El grupo $2\mathcal{D}_n$

Para el grupo  $2\mathcal{D}_n$  contamos con los generadores de  $\mathcal{D}_n$ ,  $(i, 2\pi/n)$  y  $(j, \pi)$ . Por lo que los cuaterniones correspondientes son  $e^{\pi i/n}$  y  $e^{\pi j/2} = j$ . Es decir,  $2\mathcal{D}_n = \langle e^{\pi i/n}, j \rangle$ .

De manera similar al grupo  $2\mathcal{C}_n$ , también los subgrupos de  $2\mathcal{D}_n$  son aquéllos cuyo orden divide, en este caso, a  $4n$ ; variando según la paridad del divisor  $m$ . Si  $m$  divide a  $4n$  y es impar, entonces  $1\mathcal{C}_m \leq 2\mathcal{D}_n$ , si  $m$  divide a  $2n$ , entonces  $2\mathcal{C}_m \leq 2\mathcal{D}_n$  y si  $m$  divide a  $n$  tenemos que  $2\mathcal{D}_m \leq 2\mathcal{D}_n$ . Por ejemplo, para el subgrupo  $2\mathcal{D}_2$ , tenemos los subgrupos

$$1\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_2 \text{ y el propio } 2\mathcal{D}_2.$$

### El grupo $2\mathcal{T}$

Para abordar el estudio del grupo  $2\mathcal{T}$ , recordemos que un conjunto generador de  $\mathcal{T}$  estaba formado por  $(i + j + k, 2\pi/3)$  y  $(i, \pi)$ . De manera que los cuaterniones generadores son  $e^{\pi u/3}$  y  $e^{\pi i/2} = i$ , donde  $u = (i + j + k)/\sqrt{3}$ . Es decir,  $2\mathcal{T} = \langle e^{\pi u/3}, i \rangle$ .

El sistema de subgrupos de  $2\mathcal{T}$  presenta una mayor variedad, debido a los distintos subgrupos de  $\mathcal{T}$ . En principio, los subgrupos de  $\mathcal{T}$  son del tipo:  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{D}_2$  y el propio  $\mathcal{T}$ . Por lo tanto, los subgrupos de  $2\mathcal{T}$  son del tipo:  $1\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_2, 1\mathcal{C}_3, 2\mathcal{C}_3, 2\mathcal{D}_2$  y  $2\mathcal{T}$ . A continuación revisaremos cada uno de estos subgrupos.

Es claro que el único subgrupo de orden uno es  $\{1\} \cong 1\mathcal{C}_1$ ; así como también el único subgrupo de orden dos es  $\{1, -1\} \cong 2\mathcal{C}_1$ .

A partir de los medios giros de  $\mathcal{T}$  determinamos subgrupos de cuaterniones de orden cuatro. Así obtenemos tres subgrupos de tipo  $2\mathcal{C}_2$ , cada uno correspondiente a un eje 2-periódico de  $\mathcal{T}$ . Estos subgrupos son los siguientes:  $\{1, i, -1, -i\}$ ,  $\{1, j, -1, -j\}$  y  $\{1, k, -1, -k\}$ .

Ahora bien, tomemos una rotación de  $\mathcal{T}$  de orden tres; por ejemplo,  $\rho = (i + j + k, 2\pi/3) \in \mathcal{T}$ . Esta rotación determina los cuaterniones  $1/2 +$

$i/2 + j/2 + k/2$  y  $-1/2 - i/2 - j/2 - k/2$ . De estos dos, el primero tiene orden seis, mientras que el segundo tiene orden tres; así que utilizaremos éste último como generador del grupo

$$\left\{ 1, \frac{-1 - i - j - k}{2}, \frac{-1 + i + j + k}{2} \right\} \cong 1\mathcal{C}_3.$$

Notamos que los elementos de este subgrupo corresponden a las tres rotaciones asociadas a un eje 3-periódico de  $\mathcal{T}$ , como era de esperarse. Entonces concluimos que hay cuatro subgrupos isomorfos a  $1\mathcal{C}_3$ , cada uno asociado a un eje 3-periódico de  $\mathcal{T}$ .

Al utilizar como generador el otro cuaternión determinado por la rotación  $\rho = (i + j + k, 2\pi/3) \in \mathcal{T}$ , obtenemos seis cuaterniones, entre los que se encuentra  $-1$ . Por lo cual, ahora generamos un grupo isomorfo a  $2\mathcal{C}_3$

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1 + i + j + k}{2}, \pm \frac{1 - i - j - k}{2} \right\} \cong 2\mathcal{C}_3.$$

De igual manera, contamos con cuatro de estos subgrupos, uno por cada eje 3-periódico de  $\mathcal{T}$ .

Por otro lado, como hay un sólo subgrupo  $\mathcal{D}_2 \leq \mathcal{T}$ , éste induce el subgrupo  $2\mathcal{D}_2 \leq 2\mathcal{T}$ , que igualmente se encuentra formado por la unión de los tres subgrupos isomorfos a  $2\mathcal{C}_2$ , es decir

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \cong 2\mathcal{D}_2$$

Claramente este subgrupo tiene orden ocho. En el siguiente capítulo lo estudiaremos un poco más de cerca.

Éstos son *todos* los subgrupos propios de  $2\mathcal{T}$ , ya que de haber algún otro, necesariamente sería del tipo  $2\mathcal{G}$ , con  $\mathcal{G} \leq \mathcal{T}$  y ya hemos cubierto todos los subgrupos de  $\mathcal{T}$ .

Resumimos lo anterior en la siguiente tabla:

| Subgrupos de $2\mathcal{T}$ |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                |
|-----------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------|
| Subgrupo                    | $1\mathcal{C}_1$ | $2\mathcal{C}_1$ | $1\mathcal{C}_3$ | $2\mathcal{C}_2$ | $2\mathcal{C}_3$ | $2\mathcal{D}_2$ | $2\mathcal{T}$ |
| Orden                       | 1                | 2                | 3                | 4                | 6                | 8                | 24             |
| Índice                      | 24               | 12               | 8                | 6                | 4                | 3                | 1              |
| Cantidad                    | 1                | 1                | 4                | 3                | 4                | 1                | 1              |

**El grupo  $2\mathcal{O}$** 

Por lo que toca al grupo  $2\mathcal{O}$ , como los generadores de  $\mathcal{O}$  son  $(i+j+k, 2\pi/3)$  y  $(j+k, \pi)$ , los cuaterniones correspondientes son  $e^{\pi u/3}$  y  $e^{\pi v/2}$ , donde  $u = (i+j+k)/\sqrt{3}$  y  $v = (j+k)/\sqrt{2}$ . Así obtenemos el conjunto generador para el grupo  $2\mathcal{O} = \langle e^{\pi u/3}, e^{\pi v/2} \rangle$ .

Análogamente al desarrollo efectuado para el sistema de subgrupos de  $2\mathcal{T}$ , para el grupo  $2\mathcal{O}$  tenemos que los subgrupos de  $\mathcal{O}$  determinan tanto el tipo, como el número de subgrupos isomorfos. Por lo tanto, dado que los subgrupos de  $\mathcal{O}$  son del tipo:  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{T}$  y el mismo  $\mathcal{O}$ . Para  $2\mathcal{O}$  los subgrupos son del tipo:  $1\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_1, 2\mathcal{C}_2, 1\mathcal{C}_3, 2\mathcal{C}_3, 2\mathcal{C}_4, 2\mathcal{D}_2, 2\mathcal{D}_3, 2\mathcal{D}_4, 2\mathcal{T}$  y el mismo  $2\mathcal{O}$ .

Cada subgrupo  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{O}$  determina un subgrupo de  $2\mathcal{O}$ , ya sea del tipo  $1\mathcal{G}$  o  $2\mathcal{G}$ . Por esta razón, el número de subgrupos isomorfos en  $2\mathcal{O}$  es el mismo que el número de subgrupos isomorfos correspondientes en  $\mathcal{O}$ . Por ejemplo, vimos que en  $\mathcal{O}$  había 3 subgrupos isomorfos a  $\mathcal{C}_4$ , de manera que en  $2\mathcal{O}$  habrá también 3 subgrupos isomorfos a  $2\mathcal{C}_4$ .

Podemos resumir esta situación mediante la siguiente tabla, la cual es similar a la que se obtuvo para  $2\mathcal{T}$  a partir de  $\mathcal{T}$ .

| Subgrupos de $2\mathcal{O}$ |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|-----------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Subgrupo                    | $1\mathcal{C}_1$ | $2\mathcal{C}_1$ | $2\mathcal{C}_2$ | $1\mathcal{C}_3$ | $2\mathcal{C}_3$ | $2\mathcal{C}_4$ |
| Orden                       | 1                | 2                | 4                | 3                | 6                | 8                |
| Índice                      | 48               | 24               | 12               | 16               | 8                | 6                |
| Cantidad                    | 1                | 1                | 9                | 4                | 4                | 3                |
|                             |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
| Subgrupo                    | $2\mathcal{D}_2$ | $2\mathcal{D}_3$ | $2\mathcal{D}_4$ | $2\mathcal{T}$   | $2\mathcal{O}$   |                  |
| Orden                       | 8                | 12               | 16               | 24               | 48               |                  |
| Índice                      | 6                | 4                | 3                | 2                | 1                |                  |
| Cantidad                    | 4                | 4                | 3                | 1                | 1                |                  |

**El grupo  $2\mathcal{I}$** 

Por último, para el grupo  $2\mathcal{I}$  los generadores de  $\mathcal{I}$  son  $(i+j+k, 2\pi/3)$  y  $(i+\tau^{-1}j+\tau k, \pi)$ ; de forma que  $2\mathcal{I} = \langle e^{\pi u/3}, e^{\pi w/2} \rangle$ , donde  $u = (i+j+k)/\sqrt{3}$ ,  $w = i/2 + j/2\tau + k\tau/2$  y  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ .

Del mismo modo que se hizo con  $2\mathcal{T}$  y  $2\mathcal{O}$ , para  $2\mathcal{I}$  se dará una lista de todos los subgrupos. El análisis es exactamente el mismo que en aquellos casos, por lo que sólo se presenta la tabla que resume el sistema de subgrupos de  $2\mathcal{I}$ .

| Subgrupos de $2\mathcal{I}$ |        |        |        |        |                |                |
|-----------------------------|--------|--------|--------|--------|----------------|----------------|
| Subgrupo                    | $1C_1$ | $2C_1$ | $2C_2$ | $1C_3$ | $2C_3$         | $1C_5$         |
| Orden                       | 1      | 2      | 4      | 3      | 6              | 5              |
| Índice                      | 120    | 60     | 30     | 40     | 20             | 24             |
| Cantidad                    | 1      | 1      | 15     | 10     | 10             | 6              |
|                             |        |        |        |        |                |                |
| Subgrupo                    | $2C_5$ | $2D_2$ | $2D_3$ | $2D_5$ | $2\mathcal{T}$ | $2\mathcal{I}$ |
| Orden                       | 10     | 8      | 12     | 20     | 24             | 120            |
| Índice                      | 12     | 15     | 10     | 6      | 5              | 1              |
| Cantidad                    | 6      | 5      | 10     | 6      | 5              | 1              |

Resumimos los resultados obtenidos sobre los generadores de cada grupo de cuaterniones, en la siguiente lista:

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{I} &= \langle e^{u\pi/3}, w \rangle \\
 2\mathcal{O} &= \langle e^{u\pi/3}, v \rangle \\
 2\mathcal{T} &= \langle e^{u\pi/3}, i \rangle \\
 2D_n &= \langle e^{\pi i/n}, j \rangle \\
 2C_n &= \langle e^{\pi i/n} \rangle \\
 1C_n &= \langle e^{2\pi i/n} \rangle
 \end{aligned}
 \quad \text{donde} \quad
 \begin{aligned}
 u &= \frac{(i+j+k)}{\sqrt{3}} \\
 w &= \frac{i+j\tau^{-1}+k\tau}{2} \\
 v &= \frac{j+k}{\sqrt{2}} \\
 \tau &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

Hemos visto que si  $\mathcal{H}$  es un subgrupo de  $\mathcal{G}$  en  $SO(3)$ , lo mismo sucede con  $2\mathcal{H}$  y  $2\mathcal{G}$  en  $\mathbb{H}$ , es decir:

$$\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq SO(3) \Rightarrow 2\mathcal{H} \leq 2\mathcal{G} \leq \mathbb{H}.$$

Geoméricamente esto significa que dentro de cada figura relacionada con el grupo  $2\mathcal{G}$  se encuentra inscrita una figura relacionada con  $2\mathcal{H}$ .

Más aún, ya que si uno de los subgrupos es normal, el subgrupo correspondiente, también lo es. De forma precisa tenemos el siguiente resultado:

**Lema 6** Sea  $\mathcal{G}$  un grupo finito de rotaciones  $\mathcal{G} \leq SO(3)$ ,  $\mathcal{H}$  es un subgrupo normal de  $\mathcal{G}$ , si y sólo si el subgrupo de cuaterniones correspondiente  $2\mathcal{H}$  es normal en  $2\mathcal{G}$ , es decir,  $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G} \leq SO(3) \iff 2\mathcal{H} \triangleleft 2\mathcal{G} \leq \mathbb{H}$ .

**Prueba.** Supongamos que  $\mathcal{H}$  es normal en  $\mathcal{G} \leq SO(3)$ , así para cualquier rotación  $C_q \in \mathcal{G}$  tenemos  $C_q \mathcal{H} C_q = \mathcal{H}$ , o bien, para una  $C_h \in \mathcal{H}$  existe una  $C_k \in \mathcal{H}$  tal que  $C_q C_h C_q = C_k$ , pero esto evaluado en  $x$  implica

$$C_q C_h C_q(x) = qh\bar{q}xq\bar{h}\bar{q} = kx\bar{k} \iff qh\bar{q} = k \in 2\mathcal{H}$$

de aquí se sigue que  $q2\mathcal{H}\bar{q} = 2\mathcal{H}$ , o sea  $2\mathcal{H} \triangleleft 2\mathcal{G} \leq \mathbb{H}$

Inversamente, se procede de manera análoga. Se supone  $2\mathcal{H}$  normal en  $2\mathcal{G}$ , lo cual implica que  $qh\bar{q} = k$ , donde  $h, k \in 2\mathcal{H}$ , por lo que

$$C_q C_h C_q(x) = qh\bar{q}xq\bar{h}\bar{q} = kx\bar{k} = C_k.$$

lo cual nos lleva a que  $\mathcal{H} \triangleleft \mathcal{G} \leq SO(3)$ . ■

En el siguiente capítulo baremos uso del conocido resultado que dice que  $A_5$ , el subgrupo alternante de  $S_5$ , es simple. De manera que  $\mathcal{I} \cong A_5$  no tiene subgrupos normales; para  $2\mathcal{I}$  solamente tenemos un subgrupo normal,  $2\mathcal{C}_1 = \{1, -1\}$ . Igualmente, dado que  $S_4$  tiene dos subgrupos normales:  $A_4$  y uno isomorfo a  $\mathcal{D}_2$ , tenemos que  $2\mathcal{O}$  cuenta con  $2\mathcal{C}_1$ ,  $2\mathcal{T}$  y  $2\mathcal{D}_2$  como subgrupos normales, donde también  $2\mathcal{D}_2 \triangleleft 2\mathcal{T}$ . Retomaremos estos resultados cuando abordemos los *entramados* inscritos en un politopo.

## Capítulo 3

# Grupos finitos de cuaterniones y politopos

Vimos en el capítulo anterior que cada rotación  $\rho \in SO(3)$  está asociada a un par de cuaterniones unitarios. Ahora bien, en este capítulo analizaremos la configuración de los puntos de cada subgrupo finito de cuaterniones, obtenido a partir del grupo de rotaciones correspondiente. De esta forma, conseguiremos algunos de los *politopos regulares* en cuatro dimensiones.

A cada grupo de cuaterniones se le asociará una figura geométrica, que llamaremos *politopo*<sup>1</sup>. Así pues, podemos rescatar el estudio hecho sobre los subgrupos de un grupo de cuaterniones  $\mathcal{G} \leq \mathbb{H}$ , y relacionarlo con figuras inscritas en el politopo asociado. Para este fin, omitiremos algunos subgrupos, ya que el análisis se centrará en las *clases laterales* determinadas por cada subgrupo de  $\mathcal{G}$ . Por esta razón, excluirémos: el subgrupo formado por un solo elemento,  $1\mathcal{C}_1 = \{1\}$ , donde las clases laterales corresponden a los propios vértices del politopo; el subgrupo de dos elementos,  $2\mathcal{C}_1 = \{1, -1\}$ , cuyas clases laterales son segmentos que unen los vértices antipodales; y el mismo  $\mathcal{G}$  considerado como subgrupo, pues determina una sola clase lateral.

---

<sup>1</sup>Un *politopo* es la envoltura convexa de  $n$  puntos en un espacio de dimensión  $k$ . Este concepto generaliza la idea de polígono y poliedro, considerándolos como politopos de dimensión 2 y 3, respectivamente. Nos limitaremos a politopos de dimensión menor o igual a 4. Para un estudio más general véase [Cox2].

### 3.1. Los subgrupos $1C_n$ y $2C_n$

Empecemos el estudio analizando la configuración que proporcionan los grupos cíclicos  $1C_n$  y  $2C_n$ .

Estos grupos están generados por un solo elemento, de manera que los  $n$  puntos de  $1C_n$ , para  $n$  impar, concuerdan con los vértices de un  $n$ -ágono regular en el plano  $\alpha + \beta i$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). La rotación identidad se relaciona con el cuaternión 1, por lo que el polígono  $\{n\}$  pasa por este punto.

Respecto de  $2C_n$ , como este grupo cuenta con los dos cuaterniones  $q$  y  $-q$  asociados a una misma rotación, su orden es el doble del orden de  $C_n$ , y sus elementos conforman un  $2n$ -ágono regular en el plano  $\alpha + \beta i$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). En este caso, el polígono  $\{2n\}$  pasa por los puntos 1 y  $-1$  (figura 3.1).

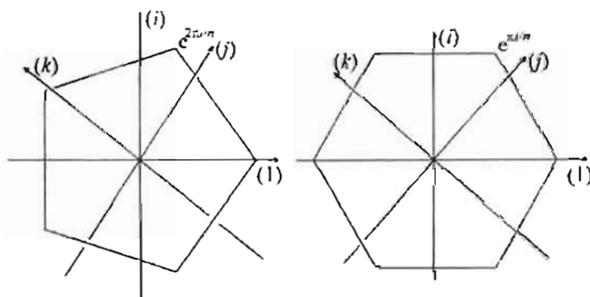


Figura 3.1: Configuraciones de puntos para  $1C_5$  y  $2C_3$ .

Los subgrupos de  $1C_n$  y  $2C_n$  son del tipo  $1C_m$  y  $2C_m$  con  $m$  un divisor de  $n$ . Por lo tanto, un subgrupo de  $1C_n$  o de  $2C_n$  tan sólo induce un polígono inscrito en  $\{n\}$  o en  $\{2n\}$ , según sea el caso.

### 3.2. Los subgrupos $2D_n$

Revisaremos ahora las configuraciones de puntos de los grupos diédricos  $2D_n$ . Como caso particular de uno de ellos, obtendremos el primer polítopo regular de cuatro dimensiones.

Sabemos que el grupo  $2D_n$  está generado por  $\langle e^{\pi i/n}, j \rangle$ . Esto produce un polígono  $\{2n\}$  en el plano  $\alpha + \beta i$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) formado por las  $2n$  potencias

de  $e^{\pi i/n}$ , y otro polígono  $\{2n\}$  en el plano  $\alpha j + \beta k$  formado por el producto de  $j$  con las potencias de  $e^{\pi i/n}$ . En términos de teoría de grupos resulta  $\langle e^{\pi i/n} \rangle \cong 2C_n \triangleleft 2D_n$ , con índice igual a dos y cada  $2n$ -ágono corresponde a una clase lateral de  $2D_n/2C_n$  (figura 3.2).

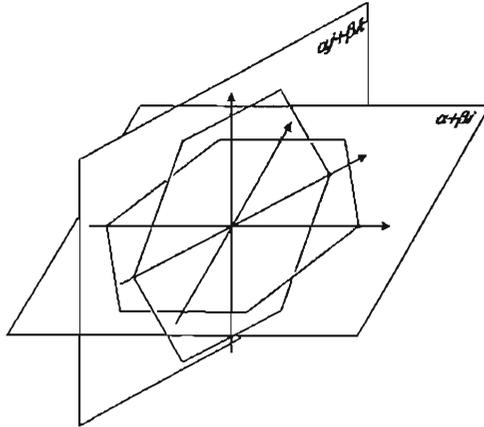


Figura 3.2: Las dos clases laterales de  $2D_3$ .

Si formamos la envoltura convexa de estos puntos, obtenemos una figura compuesta por *dipirámides*<sup>2</sup> formadas por el polígono de uno de los planos (digamos  $\alpha + \beta i$ ), y los pares de puntos  $q$  y  $-q$  del polígono en el otro plano. Una representación gráfica de esta situación se muestra en la figura 3.3. Para estas figuras usaremos la notación  $\{2n\}\{2n\}$ .

### El politopo $\{3, 3, 4\}$

En particular, para  $n = 2$  tenemos  $2D_2 = \langle i, j \rangle = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ . Lo cual nos brinda una distribución de 8 vértices en  $S^3$ . Si unimos cada vértice  $v$  con todos los demás, salvo su propio negativo  $-v$ , conseguimos 24 aristas del tipo  $\{i, j\}$ , incidentes por séxtuplas en cada vértice. Por ejemplo,

<sup>2</sup>Llamamos *dipirámide* al par de pirámides congruentes, que se encuentran unidas por su base.

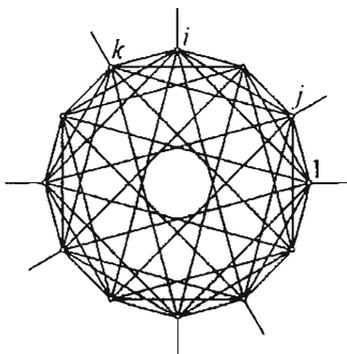


Figura 3.3: Configuración de puntos para  $2D_3$ .

para el vértice  $i$ , las aristas son  $\{1, i\}, \{-1, i\}, \{i, j\}, \{i, -j\}, \{i, k\}, \{i, -k\}$ . Asimismo, se generan 32 triángulos del tipo  $\{i, j, k\}$  y 16 tetraedros del tipo  $\{1, i, j, k\}$ . Como la distancia entre cualesquiera dos vértices adyacentes es siempre igual a  $\sqrt{2}$ , los tetraedros son todos regulares. Éste es el polítopo conocido como  $\{3, 3, 4\}^3$  (figura 3.4).

Enlistamos en la siguiente tabla el número de elementos con que cuenta este polítopo.

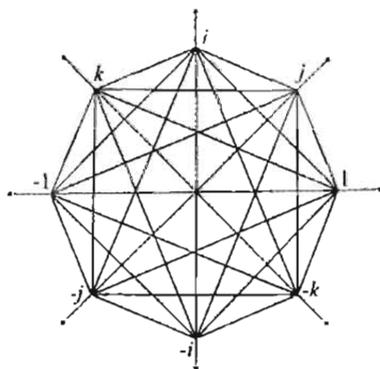
| Polítopo $\{3, 3, 4\}$ |         |       |        |
|------------------------|---------|-------|--------|
| Vértices               | Aristas | Caras | Celdas |
| 8                      | 24      | 32    | 16     |

Así obtenemos el primer resultado sobre grupos finitos de cuaterniones y polítopos regulares tetradimensionales:

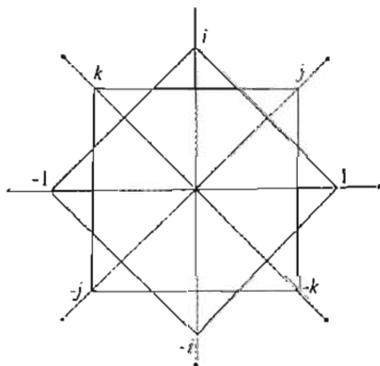
*El grupo de cuaterniones  $2D_2$  induce el polítopo de cuatro dimensiones  $\{3, 3, 4\}$ .*

Recordemos que  $2D_2$  tiene como subgrupos propios no triviales a  $2C_1$  y  $2C_2$ . Las dos clases laterales inducidas por  $2C_2$  corresponden a dos cuadrados

<sup>3</sup>Aquí el Símbolo de Schläfli  $\{p, q, r\}$  representa el polítopo formado por celdas poliédricas de la forma  $\{p, q\}$ , mientras que las figuras verticales son poliedros del tipo  $\{q, r\}$ . Véase [Cox2].

Figura 3.4: Politopo  $\{3, 3, 4\}$ .

inscritos en  $\{3, 3, 4\}$ , formados por los vértices  $\{\pm 1, \pm i\}$  y  $\{\pm j, \pm k\}$  en uno de los casos (figura 3.5). Configuraciones de este tipo hay tres, ya que hay tres subgrupos isomorfos a  $2C_2$ . El subgrupo  $2C_1$  corresponde a los segmentos que unen los cuaterniones  $q$  y  $-q$ .

Figura 3.5: Clases laterales de  $2C_2$  en  $2D_2$ .

### El politopo $\{4, 3, 3\}$

Por dualidad, sabemos que podemos obtener el politopo  $\{4, 3, 3\}$  partiendo del politopo anterior  $\{3, 3, 4\}$ , si unimos los baricentros de las celdas (tetraedros) que tienen una cara en común. El politopo así obtenido cuenta con 16 vértices, provenientes de los 16 tetraedros de  $\{3, 3, 4\}$ ; 32 aristas, que corresponden a las 32 caras triangulares del anterior; 24 caras (cuadrados) dado que en torno a cada una de las 24 aristas de  $\{3, 3, 4\}$  hay cuatro tetraedros; y por último, 8 celdas (cubos), una por cada vértice de  $\{3, 3, 4\}$ .

Sin embargo, todavía no podemos relacionar este politopo con algún subgrupo finito, ya que los cuaterniones correspondientes a los vértices de  $\{4, 3, 3\}$  no pertenecen a la esfera  $S^3$ . De cualquier modo, basta con tomar los múltiplos escalares convenientes que garanticen que cada cuaternión tenga norma igual a 1. Con esto simplemente se amplifica el tamaño del politopo  $\{4, 3, 3\}$  que, de esta forma, ahora se encuentra inscrito en  $S^3$ . Veremos en seguida cuál es la expresión de cada uno de los vértices.

Como el baricentro de una celda tetraédrica de  $\{3, 3, 4\}$  es equidistante de cada vértice de ese tetraedro, y los vértices eran de la forma  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ , los coeficientes del baricentro  $a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$  son todos iguales, salvo por el signo; es decir,  $|a_\mu| = a$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Al multiplicar por el escalar  $\lambda = 1/2a \in \mathbb{R}$  conseguimos un cuaternión unitario; así pues, resulta alguno de los 16 cuaterniones siguientes:  $\pm 1/2 \pm i/2 \pm j/2 \pm k/2$ . (figura 3.6)

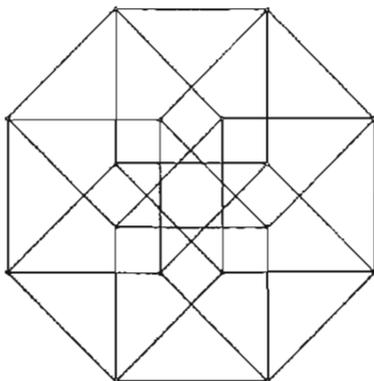
De manera similar al politopo  $\{3, 3, 4\}$  tenemos el número de elementos que lo conforman.

| <b>Politopo <math>\{4, 3, 3\}</math></b> |         |       |        |
|--|---------|-------|--------|
| Vértices                                 | Aristas | Caras | Celdas |
| 16                                       | 32      | 24    | 8      |

Cabe hacer notar que estos 16 vértices no forman un grupo, ya que no incluyen al elemento neutro. Aún así, vemos en la sección siguiente que en realidad se trata de dos clases laterales del grupo  $2T$ .

### 3.3. El grupo $2T$

Comentamos en la sección anterior que las combinaciones  $\pm 1/2 \pm i/2 \pm j/2 \pm k/2$  nos daban los 16 vértices del politopo  $\{4, 3, 3\}$ . Ahora bien, si


 Figura 3.6: Politopo  $\{4, 3, 3\}$  dual de  $\{3, 3, 4\}$ .

tomamos alguno de estos puntos, por ejemplo  $1/2 + i/2 + j/2 + k/2 = e^{u\pi/3}$ , donde  $u = (i + j + k)/\sqrt{3}$ , y lo multiplicamos por los ocho elementos de  $2\mathcal{D}_2 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  el resultado  $2\mathcal{D}_2 \cdot e^{u\pi/3}$  es otro  $\{3, 3, 4\}$  isométrico a  $2\mathcal{D}_2$  como lo muestra la siguiente tabla, donde también se ha calculado el producto  $2\mathcal{D}_2 \cdot e^{2u\pi/3}$ .

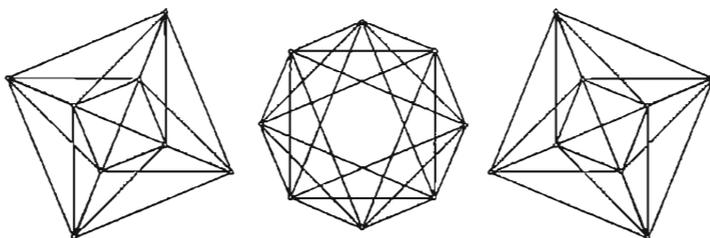
| $2\mathcal{D}_2 \cdot e^{u\pi/3}$ | $2\mathcal{D}_2$ | $2\mathcal{D}_2 \cdot e^{2u\pi/3}$ |
|-----------------------------------|------------------|------------------------------------|
| $\pm(1/2 + i/2 + j/2 + k/2)$      | $\pm 1$          | $\pm(-1/2 + i/2 + j/2 + k/2)$      |
| $\pm(-1/2 + i/2 - j/2 + k/2)$     | $\pm i$          | $\pm(-1/2 - i/2 - j/2 + k/2)$      |
| $\pm(-1/2 + i/2 + j/2 - k/2)$     | $\pm j$          | $\pm(-1/2 + i/2 - j/2 - k/2)$      |
| $\pm(-1/2 - i/2 + j/2 + k/2)$     | $\pm k$          | $\pm(-1/2 - i/2 + j/2 - k/2)$      |

Los 8 vértices de  $2\mathcal{D}_2 \cdot e^{2u\pi/3}$  también forman un  $\{3, 3, 4\}$  isométrico a los dos anteriores. Podemos apreciar los tres distintos  $\{3, 3, 4\}$  en la figura 3.7.

Por la sección anterior, sabemos que la unión  $2\mathcal{D}_2 e^{u\pi/3} \cup 2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3}$  corresponde al politopo  $\{4, 3, 3\}$ . Pero esto es válido para cualquier selección de dos  $\{3, 3, 4\}$  de entre los tres descritos arriba, pues basta con multiplicar  $2\mathcal{D}_2 e^{u\pi/3}$  y  $2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3}$  por  $e^{u\pi/3}$ , para obtener

$$2\mathcal{D}_2 e^{u\pi/3} \cdot e^{u\pi/3} = 2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3} 2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3} \cdot e^{u\pi/3} = 2\mathcal{D}_2$$

y como  $|e^{u\pi/3}| = 1$ , la distancia se preserva; por lo tanto,  $2\mathcal{D}_2 e^{u\pi/3}$  y  $2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3}$  son imágenes isométricas de  $2\mathcal{D}_2 e^{u\pi/3}$  y  $2\mathcal{D}_2 e^{2u\pi/3}$ , respectivamente.

Figura 3.7: Tres  $\{3, 3, 4\}$  isométricos entre sí.

Si recordamos que el grupo  $2T$  está generado por  $\langle e^{2\pi i/3}, i \rangle$  veremos que en realidad los vértices de los tres  $\{3, 3, 4\}$  son los puntos de  $2T$ , donde  $2D_2$  es un subgrupo normal de índice tres, por lo que cada clase lateral de  $2T/2D_2$  corresponde a un  $\{3, 3, 4\}$  y la unión de cualesquiera dos clases laterales de  $2T/2D_2$  induce un  $\{4, 3, 3\}$ . De aquí concluimos que el grupo  $2T$  corresponde a la unión  $\{3, 3, 4\} \cup \{4, 3, 3\}$  (figura 3.8).

### El politopo $\{3, 4, 3\}$

Cada arista de  $\{3, 3, 4\}$  une los centros de dos cubos adyacentes de  $\{4, 3, 3\}$ , atravesando la cara común por el centro. De manera que podemos formar con los cuatro vértices de ese cuadrado común y los dos extremos de la arista, un octaedro regular, ya que la distancia entre dos vértices del cuadrado es la misma que su distancia al centro del cubo (figura 3.9).

De esta forma, las 24 aristas de  $\{3, 3, 4\}$  generan 24 octaedros regulares constituidos por todos los puntos del grupo  $2T$ , ya que los tres puntos que forman un triángulo del octaedro son los puntos  $u \in 2D_2$ ,  $ue^{u\pi/3}$  y  $ue^{2\pi/3}$  que, como vimos, se encuentran a una misma distancia. Este es el politopo  $\{3, 4, 3\}$  (figura 3.10), conformado por 24 vértices, 8 del  $\{3, 3, 4\}$  y 16 del  $\{4, 3, 3\}$ ; 96 aristas, ya que además de las 32 del  $\{4, 3, 3\}$ , por cada cubo se obtuvieron 8 nuevas aristas; y 96 caras, 12 por cada uno de los 8 cubos.

Enlistamos sus elementos en la tabla siguiente.

| Politopo $\{3, 4, 3\}$ |         |       |        |
|------------------------|---------|-------|--------|
| Vértices               | Aristas | Caras | Celdas |
| 24                     | 96      | 96    | 24     |

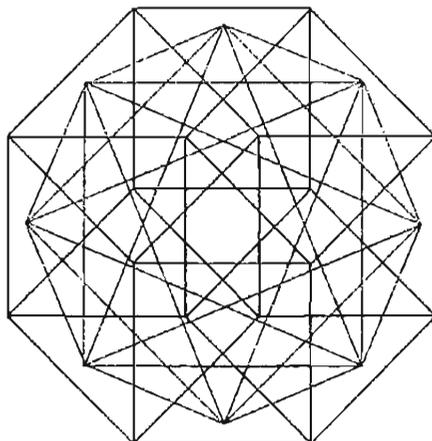


Figura 3.8:  $\{3, 3, 4\} \cup \{4, 3, 3\}$ .

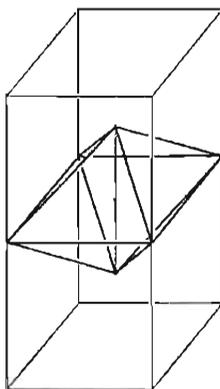
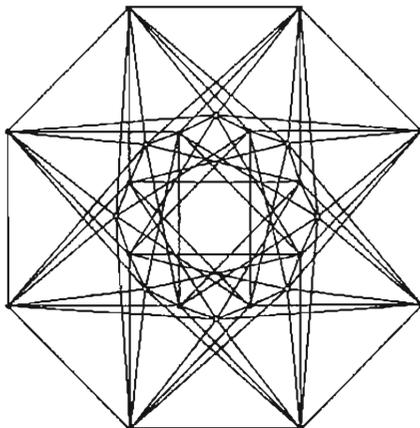


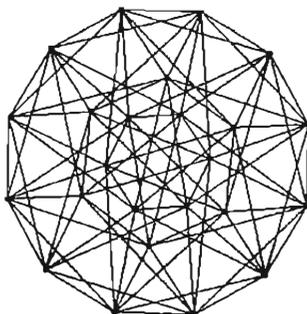
Figura 3.9: Octaedro regular obtenido a partir de  $\{3, 3, 4\}$  y  $\{4, 3, 3\}$ .

Figura 3.10: Polítopo  $\{3, 4, 3\}$ .

Así obtenemos el segundo resultado sobre grupos finitos de cuaterniones y polítopos regulares tetradimensionales:

*El grupo de cuaterniones  $2T$  induce el polítopo de cuatro dimensiones  $\{3, 4, 3\}$ . Este polítopo es la unión de un  $\{3, 3, 4\}$  y un  $\{4, 3, 3\}$ .*

La figura 3.11 muestra otra representación gráfica del polítopo  $\{3, 4, 3\}$ .

Figura 3.11: Polítopo  $\{3, 4, 3\}$ .

Como este politopo fue formado a partir de tres  $\{3, 3, 4\}$ , podemos establecer las siguientes relaciones: los vértices de dos  $\{3, 3, 4\}$  generan un  $\{4, 3, 3\}$ , análogamente, los vértices de tres  $\{3, 3, 4\}$  forman un  $\{3, 4, 3\}$ , relacionando ambas expresiones llegamos a que los vértices de dos  $\{3, 3, 4\}$  se pueden agrupar conforme a tres  $\{4, 3, 3\}$ .

Algo interesante en la distribución de estos politopos, es que, a diferencia del caso tridimensional, en  $S^3$  sí es posible acomodar dos  $\{4, 3, 3\}$  de manera que los vértices en la intersección correspondan a un  $\{3, 3, 4\}$ ; mientras que los vértices de la unión disjunta conformen otro  $\{4, 3, 3\}$ . En la figura 3.12 los dos  $\{4, 3, 3\}$  se representan mediante  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ . Su intersección,  $\{3, 3, 4\}$  está representada por una línea, mientras que  $\mathcal{H}_3$  corresponde a la unión disjunta de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  y representa el tercer  $\{4, 3, 3\}$ .

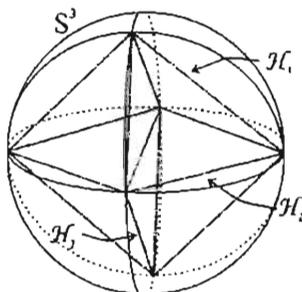


Figura 3.12: Tres  $\{4, 3, 3\}$  con intersecciones del tipo  $\{3, 3, 4\}$ .

Consideremos ahora el sistema de subgrupos propios no triviales de  $2\mathcal{T}$ , del cual excluirémos al subgrupo  $2\mathcal{C}_1$  que sólo identifica vértices antipodales.

Sea  $\mathcal{G}$  un subgrupo de  $2\mathcal{T}$ ; este subgrupo determina  $n$  clases laterales, donde  $n = [2\mathcal{T} : \mathcal{G}]$ . Cada clase corresponde a una cierta figura (aquella proveniente de  $\mathcal{G}$  como grupo de cuaterniones); de manera que  $\mathcal{G}$  produce un entramado de  $n$  figuras iguales, inscritas en el politopo  $\{3, 4, 3\}$ . Sin embargo, en general hay varios subgrupos  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_m$  isomorfos, como vimos en la sección 2.3, por lo que hay tantos entramados como subgrupos isomorfos a  $\mathcal{G}$ . Ahora bien, si el subgrupo  $\mathcal{G}$  es normal, las clases laterales derechas son iguales a las clases laterales izquierdas, de forma que el entramado es

el mismo; pero si el subgrupo  $\mathcal{G}$  no es normal, contamos con una serie de entramados a derecha y otra serie de entramados a izquierda.

En el caso de  $2\mathcal{T}$ , encontramos los siguientes entramados inscritos en  $\{3, 4, 3\}$ :

- 1) Cada subgrupo isomorfo a  $1\mathcal{C}_3$  genera un entramado de  $[2\mathcal{T} : 1\mathcal{C}_3] = 8$  triángulos. Hay cuatro de estos entramados a derecha y otros cuatro a izquierda.
- 2) Cada subgrupo isomorfo a  $2\mathcal{C}_2$  genera un entramado de  $[2\mathcal{T} : 2\mathcal{C}_2] = 6$  cuadrados. Hay tres de estos entramados a derecha y otros tres a izquierda.
- 3) Cada subgrupo isomorfo a  $2\mathcal{C}_3$  genera un entramado de  $[2\mathcal{T} : 2\mathcal{C}_3] = 4$  hexágonos. Hay cuatro de estos entramados a derecha y otros cuatro a izquierda.
- 4) El subgrupo isomorfo a  $2\mathcal{D}_2$  genera un entramado de  $[2\mathcal{T} : 2\mathcal{D}_2] = 3$  politopos  $\{3, 3, 4\}$ . Hay sólo uno de estos entramados, ya que el subgrupo es normal.

### 3.4. El grupo $2\mathcal{O}$

Recordemos que el grupo  $2\mathcal{T}$  es un subgrupo normal de  $2\mathcal{O}$ , de orden dos; de manera que la combinación de las dos clases laterales de  $2\mathcal{O}/2\mathcal{T}$  corresponde a dos  $\{3, 4, 3\}$  mutuamente duales. Esto proviene de que  $\{3, 4, 3\}$  es auto-dual, por lo que al tomar el producto  $2\mathcal{T} \cdot e^{i\pi/3}$  obtenemos una copia isométrica y dual de  $2\mathcal{T}$ . Así pues,  $2\mathcal{O}$  induce un arreglo de dos  $\{3, 4, 3\}$  mutuamente duales. Veamos con más detalle las figuras inscritas correspondientes a este grupo.

Sabemos que cada subgrupo  $\mathcal{G} \leq 2\mathcal{O}$  generará  $m$  entramados de  $[2\mathcal{O} : \mathcal{G}] = n$  figuras asociadas con  $\mathcal{G}$ , donde  $m$  es el número de subgrupos isomorfos a  $\mathcal{G}$ . Por lo tanto, como se hizo con el grupo  $2\mathcal{T}$ , enlistaremos los entramados inscritos en  $2\mathcal{O}$ , con base en sus subgrupos propios no triviales.

- 1) Cada subgrupo isomorfo a  $2\mathcal{C}_2$  genera un entramado de  $[2\mathcal{O} : 2\mathcal{C}_2] = 12$  cuadrados. Hay nueve de estos entramados a derecha y otros nueve a izquierda.

- 2) Cada subgrupo isomorfo a  $1C_3$  genera un entramado de  $[2O : 1C_3] = 16$  triángulos. Hay cuatro de estos entramados a derecha y otros cuatro a izquierda.
- 3) Cada subgrupo isomorfo a  $2C_3$  genera un entramado de  $[2O : 2C_3] = 8$  hexágonos. Hay cuatro de estos entramados a derecha y otros cuatro a izquierda.
- 4) Cada subgrupo isomorfo a  $2C_4$  genera un entramado de  $[2O : 2C_4] = 6$  octágonos. Hay tres de estos entramados a derecha y otros tres a izquierda.
- 5) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_2$  genera un entramado de  $[2O : 2D_2] = 6$  polítopos del tipo  $\{3, 3, 4\}$ . Hay sólo cuatro de estos entramados ya que el subgrupo es normal.  
Debido a que dos  $\{3, 3, 4\}$  pueden inducir un  $\{4, 3, 3\}$ , como se vio anteriormente, se sigue que también contamos con cuatro entramados de 3 polítopos  $\{4, 3, 3\}$ .
- 6) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_3$  genera un entramado de  $[2O : 2D_3] = 4$  figuras  $\{6\}\{6\}$ . Hay cuatro de estos entramados a derecha y otros cuatro a izquierda.
- 7) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_4$  genera un entramado de  $[2O : 2D_4] = 3$  figuras  $\{8\}\{8\}$ . Hay tres de estos entramados a derecha y otros tres a izquierda.
- 8) El subgrupo isomorfo a  $2T$  genera un entramado de  $[2O : 2T] = 2$  polítopos  $\{3, 4, 3\}$ . Hay sólo uno de estos entramados, ya que el subgrupo es normal.

### 3.5. El grupo $2I$

Recordemos que el grupo  $2I$  se obtuvo a partir del grupo  $I$  de rotaciones del dodecaedro duplicando el número de elementos. Asimismo, conseguimos como generadores a los cuaterniones  $w = (i + j\tau + k\tau^{-1})/2$  y  $e^{2u\pi/3}$  donde  $u = (i + j + k)/\sqrt{3}$ .

Para facilitar el análisis de la distribución de los 120 puntos de  $2I$ , fijemos la atención en lo que sucede respecto de un solo punto, el cuaternión  $e = 1$ ,

al intersectar el politopo correspondiente a  $2\mathcal{I}$ , con espacios tridimensionales a partir del punto  $e$ . Para estas intersecciones, usaremos el término  $n$ -ésima sección de  $\{3, 3, 5\}$ , y las denotaremos por  $\mathbf{n}_0$ . El subíndice indica que el primer espacio tridimensional intersecta al politopo en un solo punto (el cuaternión  $e = 1$ ); a diferencia de las secciones que se obtienen cuando la primera intersección es una arista, una cara o una celda poliédrica, en tales casos los subíndices son 1, 2 y 3, respectivamente.

En esta sección denotaremos al cuaternión 1 por  $e$  para evitar confusiones entre 1 como cuaternión y 1 como cantidad escalar.

### El politopo $\{3, 3, 5\}$

#### Las secciones $\mathbf{1}_0$ y $\mathbf{7}_0$

En el grupo  $\mathcal{I} \leq SO(3)$  encontramos 12 rotaciones 5-periódicas, de ángulo  $2\pi/5$ . Estas rotaciones proporcionan 24 cuaterniones de orden cinco; de los cuales, 12 se encuentran a una distancia de  $e$  igual a  $\tau^{-1}$ . Estos 12 puntos son los más cercanos a  $e$ , de manera que los agruparemos en la primera sección  $\mathbf{1}_0$  de  $\{3, 3, 5\}$ . Sus coordenadas son:

$$\mathbf{1}_0 = \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{\tau \pm j \pm \tau^{-1}k}{2} & \frac{\tau \pm i \pm \tau^{-1}j}{2} & \frac{\tau \pm \tau^{-1}i \pm k}{2} \\ \hline \end{array} \right]$$

Observamos que la mínima distancia entre dos de ellos también es  $\tau^{-1}$ ; por ejemplo para los cuaterniones  $(\tau + j + \tau^{-1}k)/2$  y  $(\tau + j - \tau^{-1}k)/2$  tenemos:

$$\left| \frac{\tau + j + \tau^{-1}k}{2} - \frac{\tau + j - \tau^{-1}k}{2} \right| = \tau^{-1}.$$

De hecho, para cada punto de  $\mathbf{1}_0$  podemos encontrar 5 puntos justo a esta distancia, además del mismo  $e$ ; de manera que los 12 puntos corresponden a los vértices de un icosaedro regular de arista  $\tau^{-1}$ , que asociamos con  $\mathbf{1}_0$  (figura 3.13).

En este icosaedro la longitud de las aristas es igual a la distancia de un vértice hacia el centro. Por esta razón, podemos considerar el icosaedro como la unión de 20 tetraedros regulares de arista  $\tau^{-1}$ .

También con respecto de  $-e$  encontramos una sección isométrica a  $\mathbf{1}_0$ . Veremos que es la séptima, por lo que la denotaremos  $\mathbf{7}_0$ . Salvo por el punto

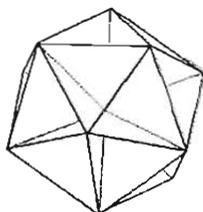


Figura 3.13: La sección  $1_0$  corresponde a los vértices de un icosaedro.

$-e$ , considerado como una sección,  $7_0$  es la sección más lejana de  $e$ . Los puntos de  $7_0$  son del tipo  $-\bar{q}$ , donde  $q \in 1_0$ .

#### Las secciones $2_0$ y $6_0$

Seguimos con las rotaciones de orden 3, es decir, con ángulo  $2\pi/3$ . Estas 20 rotaciones proveen 20 puntos cuya distancia a  $e$  es igual a 1, y como se trata de cuaterniones unitarios, notamos que equidistan tanto del centro 0 como del punto  $e$ . La mínima distancia entre ellos también es  $\tau^{-1}$ , de manera que corresponden a los vértices de un dodecaedro regular que denotamos  $2_0$ , se trata de la segunda sección de  $\{3, 3, 5\}$ . La expresión de estos 20 cuaterniones es la siguiente:

| $2_0$                                   |   |   |                                 |
|---|---|---|---------------------------------|
| $\frac{1 \pm \tau^{-1}j \pm \tau k}{2}$ | $\frac{1 \pm \tau i \pm \tau^{-1}k}{2}$ | $\frac{1 \pm \tau^{-1}i \pm \tau j}{2}$ | $\frac{1 \pm i \pm j \pm k}{2}$ |

Mediante un sencillo cálculo comprobamos que la mínima distancia entre un punto de  $2_0$  y uno de  $1_0$  es  $\tau^{-1}$ , por ejemplo para  $(\tau + j + \tau^{-1}k)/2 \in 1_0$  y  $(1 + \tau^{-1}j + \tau k)/2 \in 2_0$

$$\left| \frac{\tau + j + \tau^{-1}k}{2} - \frac{1 + \tau^{-1}j + \tau k}{2} \right| = \tau^{-1}.$$

De hecho, hay tres puntos de  $1_0$  a esta distancia; por lo que podemos construir un tetraedro regular por cada punto de  $2_0$ , al unirlo con los tres puntos más cercanos de  $1_0$  (figura 3.14).

De este modo, obtenemos otros 20 tetraedros. Sin embargo, además de estos 20, tenemos otros 30 tetraedros regulares, que resultan de unir los vértices

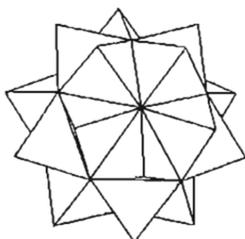


Figura 3.14: La sección  $2_0$  corresponde a los vértices de un dodecaedro.

de  $2_0$  entre sí (figura 3.15), ya que para  $q, p \in 2_0$ ,  $d(p, q) = \tau^{-1}$ . Llevamos hasta el momento, 70 tetraedros regulares.

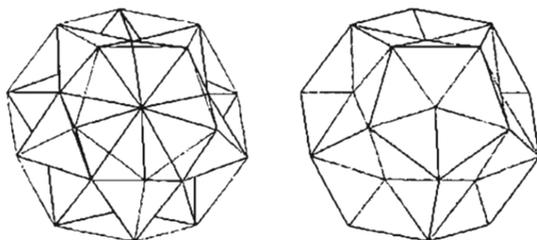


Figura 3.15: Las aristas del dodecaedro  $2_0$  forman 30 tetraedros.

De nuevo contamos con una situación análoga para el cuaternio  $-e$ . La sección correspondiente es  $6_0 = \{-\bar{q} : q \in 2_0\}$ .

### Las secciones $3_0$ y $5_0$

Aún quedan otras 12 rotaciones de orden cinco, esta vez por un ángulo  $4\pi/5$ , que proporcionan 12 puntos a una distancia  $\sqrt{\tau^{-2} + 1}$  de  $e$ . Estos puntos corresponden a los 'cuadrados' de los vértices de  $1_0$ , de manera que coinciden con los vértices de un icosaedro. Se trata de la *tercera sección* de  $\{3, 3, 5\}$ , cuyos puntos son:

| $3_0$                                  |  |  |
|--|--|--|
| $\frac{\tau^{-1} \pm \tau j \pm k}{2}$ | $\frac{\tau^{-1} \pm \tau i \pm j}{2}$ | $\frac{\tau^{-1} \pm i \pm \tau k}{2}$ |

Al unir cada vértice de  $3_0$  con el respectivo vértice de  $1_0$  y los 5 vértices de  $2_0$  más cercanos, obtenemos otros 5 tetraedros por cada punto de  $3_0$ , es decir, tenemos 60 tetraedros más (figura 3.16), con lo que llegamos a 130 hasta ahora.

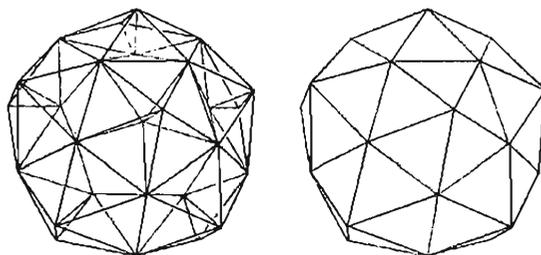


Figura 3.16: La sección,  $3_0$  determina 60 tetraedros.

Respecto de  $-e$  la sección correspondiente a  $3_0$  es  $5_0 = \{-\bar{q} : q \in 3_0\}$

La sección  $4_0$

Por último, las 15 rotaciones por un ángulo  $\pi$  determinan los 30 puntos de la *cuarta sección*  $4_0$  que son los siguientes:

|                                  |                                   |                                  |                       |
|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------|
| $4_0$                            |                                   |                                  |                       |
| $\pm\tau^{-1}i \pm j \pm \tau k$ | $\pm i \pm \tau j \pm \tau^{-1}k$ | $\pm\tau i \pm \tau^{-1}j \pm k$ | $\pm i, \pm j, \pm k$ |
| 2                                | 2                                 | 2                                |                       |

En esta ocasión conservamos los 30 puntos, y no sólo la mitad; ya que ahora todos ellos son equidistantes tanto de  $e$ , como de  $-e$ . Cada punto de  $4_0$  se puede relacionar con una arista de  $2_0$ , por lo que los 30 puntos corresponden a los vértices de un icosidodecaedro (figura 3.17).

Cada uno de sus vértices genera 2 tetraedros al asociarse a los puntos de  $3_0$  más cercanos (figura 3.18). Como sus distancias a  $2_0$  y  $3_0$  son  $\tau^{-1}$ , se trata de tetraedros regulares, con lo que anexamos 60 tetraedros más a la lista, y sumamos 190 por ahora (figura 3.19).

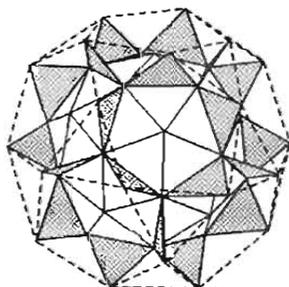


Figura 3.17:  $4_0$  corresponde a los vértices de un icosidodecaedro.

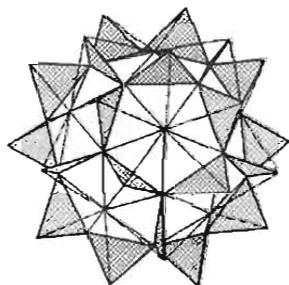
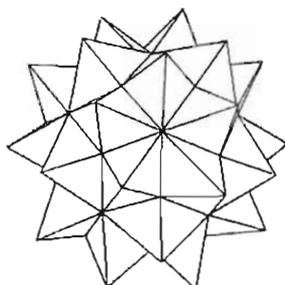
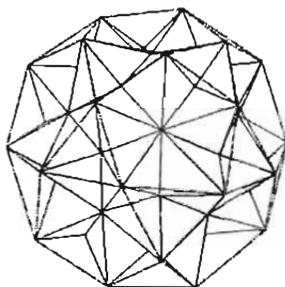


Figura 3.18: Cada punto genera dos tetraedros.

Vimos que los puntos de  $4_0$  corresponden a los vértices de un icosidodecaedro. Si ahora los unimos (figura 3.20), dado que la mínima distancia entre ellos es nuevamente  $r^{-1}$ , obtenemos otros 60 tetraedros regulares, cuyos vértices son: uno de  $2_0$ , uno de  $3_0$  y los dos de  $4_0$  que fueron unidos; de esta forma llegamos a 270 tetraedros (figura 3.21).

Con este procedimiento nos quedan "huecos", donde podemos formar otros 20 tetraedros con un vértice en la sección  $2_0$  y los tres restantes en la sección  $4_0$  (figura 3.22)

Hasta este momento llevamos 270 tetraedros, recordemos que respecto del cuaternión  $-e$  sucede lo mismo que para  $e$ , por lo que el grupo  $2\mathcal{I}$  nos ha proveído 540 tetraedros. Los 60 restantes los encontramos "en medio" de esta configuración, en el sentido siguiente: cada tetraedro (de estos 60) tendrá un

Figura 3.19: 60 tetraedros a partir de  $4_0$ .Figura 3.20: 60 tetraedros al unir los puntos de  $4_0$ .

vértice en el icosaedro  $3_0$ , un vértice en el icosaedro  $5_0$  y dos vértices en el icosidodecaedro  $4_0$  (figura 3.23).

En total, los 120 puntos provenientes de  $2I$  son  $e = 1$ ,  $-e = -1$  y los siguientes:

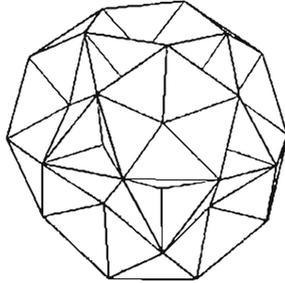


Figura 3.21: 250 tetraedros regulares.

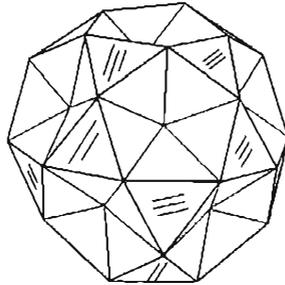
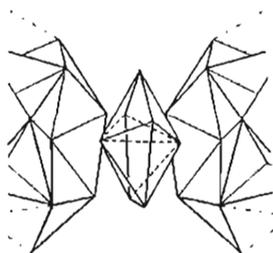


Figura 3.22: 20 tetraedros con un vértice en  $2_0$ .

| $1_0$ y $7_0$<br>(24 pts)                | $2_0$ y $6_0$<br>(40 pts)                   | $3_0$ y $5_0$<br>(24 pts)                 | $4_0$<br>(30 pts)                           |
|--|---|---|---|
| $\frac{\pm\tau \pm j \pm \tau^{-1}k}{2}$ | $\frac{\pm 1 \pm \tau^{-1}j \pm \tau k}{2}$ | $\frac{\pm\tau^{-1} \pm \tau j \pm k}{2}$ | $\frac{\pm\tau^{-1}i \pm j \pm \tau k}{2}$  |
| $\frac{\pm\tau \pm i \pm \tau^{-1}j}{2}$ | $\frac{\pm 1 \pm \tau i \pm \tau^{-1}k}{2}$ | $\frac{\pm\tau^{-1} \pm \tau i \pm j}{2}$ | $\frac{\pm i \pm \tau j \pm \tau^{-1}k}{2}$ |
| $\frac{\pm\tau \pm \tau^{-1}i \pm k}{2}$ | $\frac{\pm 1 \pm \tau^{-1}i \pm \tau j}{2}$ | $\frac{\pm\tau^{-1} \pm i \pm \tau k}{2}$ | $\frac{\pm\tau i \pm \tau^{-1}j \pm k}{2}$  |
|  | $\frac{\pm 1 \pm i \pm j \pm k}{2}$         |   | $\pm i, \pm j, \pm k$                       |

Estos 120 puntos de  $2I$  generan 600 tetraedros, dispuestos de manera que cada punto pertenece a 20 de ellos, como en el caso de  $e$  respecto de  $1_0$ . De esta forma, las celdas son tetraedros regulares y para cada punto la figura

Figura 3.23: 60 tetraedros entre  $3_0$  y  $5_0$ 

vertical es un dodecaedro, por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

*El grupo de cuaterniones  $2\mathcal{I}$  induce el politopo de cuatro dimensiones  $\{3, 3, 5\}$ .*

Enumelamos a continuación los elementos que conforman este politopo:

| Politopo $\{3, 3, 5\}$ |         |       |        |
|------------------------|---------|-------|--------|
| Vértices               | Aristas | Caras | Celdas |
| 120                    | 720     | 1200  | 600    |

De manera similar al grupo  $2\mathcal{O}$ , cada subgrupo  $\mathcal{G} \leq 2\mathcal{I}$  genera  $m$  entramados de  $[2\mathcal{I} : \mathcal{G}] = n$  figuras asociadas con  $\mathcal{G}$ , donde  $m$  es el número de subgrupos isomorfos a  $\mathcal{G}$ . Por lo tanto, tenemos que el sistema de subgrupos propios no triviales de  $2\mathcal{I}$ , induce los siguientes entramados inscritos en  $\{3, 3, 5\}$ <sup>4</sup>

- 1) Cada subgrupo isomorfo a  $2C_2$  genera un entramado de  $[2\mathcal{I} : 2C_2] = 30$  cuadrados. Hay quince de estos entramados a derecha y otros quince a izquierda.
- 2) Cada subgrupo isomorfo a  $1C_3$  genera un entramado de  $[2\mathcal{I} : 1C_3] = 40$  triángulos. Hay diez de estos entramados a derecha y otros diez a izquierda.

<sup>4</sup>Dado que  $A_5 \cong \mathcal{I}$  es simple, en  $2\mathcal{I}$  sólo encontramos el subgrupo normal  $2C_1$ . Salvo por este subgrupo, cada serie de entramados derivados de un subgrupo se presenta a derecha y a izquierda.

- 3) Cada subgrupo isomorfo a  $2C_3$  genera un entramado de  $[2I : 2C_3] = 20$  hexágonos. Hay diez de estos entramados a derecha y otros diez a izquierda.
- 4) Cada subgrupo isomorfo a  $1C_5$  genera un entramado de  $[2I : 1C_5] = 24$  pentágonos. Hay seis de estos entramados a derecha y otros seis a izquierda.
- 5) Cada subgrupo isomorfo a  $2C_5$  genera un entramado de  $[2I : 2C_5] = 12$  decágonos. Hay seis de estos entramados a derecha y otros seis a izquierda.
- 6) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_2$  genera un entramado de  $[2I : 2D_2] = 15$  polítopos del tipo  $\{3, 3, 4\}$ . Hay cinco de estos entramados a derecha y otros cinco a izquierda.
- 7) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_3$  genera un entramado de  $[2I : 2D_3] = 10$  figuras  $\{6\}\{6\}$ . Hay diez de estos entramados a derecha y otros diez a izquierda.
- 8) Cada subgrupo isomorfo a  $2D_5$  genera un entramado de  $[2I : 2D_5] = 6$  figuras  $\{10\}\{10\}$ . Hay seis de estos entramados a derecha y otros seis a izquierda.
- 9) Cada subgrupo isomorfo a  $2T$  genera un entramado de  $[2I : 2T] = 5$  polítopos del tipo  $\{3, 4, 3\}$ . Hay cinco de estos entramados a derecha y otros cinco a izquierda.

### Los polítopos $\{5, 3, 3\}$ y $\{3, 3, 3\}$

Hasta aquí hemos agotado todos los subgrupos finitos de cuaterniones: de manera que no hay grupos finitos asociados para el dual geométrico del polítopo  $\{3, 3, 5\}$ , ni para el polítopo  $\{3, 3, 3\}$ .

Además, dado que el polítopo  $\{5, 3, 3\}$  (dual de  $\{3, 3, 5\}$ ) tiene tantos vértices como celdas tiene  $\{3, 3, 5\}$ , y éstas son 600, tendríamos que, en  $SO(3)$  debería haber un grupo finito de orden 300, lo cual es falso.

Por lo que toca al polítopo  $\{3, 3, 3\}$ , como éste cuenta con cinco vértices, el grupo de cuaterniones asociado debería tener orden 5, pero los únicos grupos de cuaterniones de orden impar son del tipo  $1C_n$  con  $n$  impar; es decir, debería

tratarse de  $1C_5$ ; pero ya vimos que este grupo genera un pentágono, por lo que no hay un grupo asociado al politopo  $\{3, 3, 3\}$ .

De cualquier forma, podemos valernos del trabajo previo para dar las coordenadas de los vértices del politopo  $\{5, 3, 3\}$  por ejemplo.

### El politopo $\{5, 3, 3\}$

Debido a la regularidad de  $\{3, 3, 5\}$ , el comportamiento de  $\{5, 3, 3\}$  es el mismo en cada uno de sus vértices, por lo que basta con ver qué sucede en torno a  $e = 1$ .

Hemos visto que los 12 puntos de la sección  $1_0$  de  $\{3, 3, 5\}$  generan veinte tetraedros al unirlos al punto  $e$ . Si tomamos ahora los baricentros de estos tetraedros, la figura resultante será un dodecaedro. Como en el caso del politopo  $\{4, 3, 3\}$ , tomaremos múltiplos de los baricentros de las celdas de  $\{3, 3, 5\}$ , de manera que tengan norma unitaria. De esta forma, para los primeros 20 tetraedros de la sección  $1_0$  de  $\{3, 3, 5\}$ , obtenemos 20 puntos en  $S^3$ . A este conjunto de 20 puntos, lo denotaremos  $1_3$ , ya que se trata de la primera sección del politopo  $\{5, 3, 3\}$  a partir de una celda (figura 3.24).

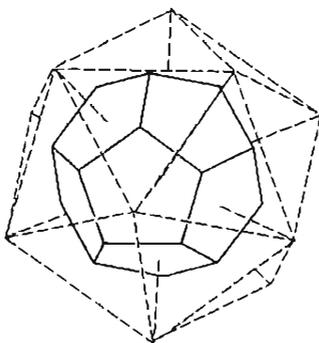


Figura 3.24: Sección  $1_3$  de  $\{5, 3, 3\}$ .

Estos 20 vértices forman un dodecaedro, pues los tetraedros de los que provienen son todos ellos adyacentes. A diferencia de los 20 tetraedros que tienen tres de sus vértices en la sección  $1_0$  y el cuarto en la sección  $2_0$  de  $\{3, 3, 5\}$  (figura 3.14), que no son adyacentes entre sí. Sus baricentros nos

proveen otros 20 puntos al tomar múltiplos de ellos en  $S^3$ ; ésta es la *segunda sección* de  $\{5, 3, 3\}$ , es decir,  $2_3$ . (figura 3.25).

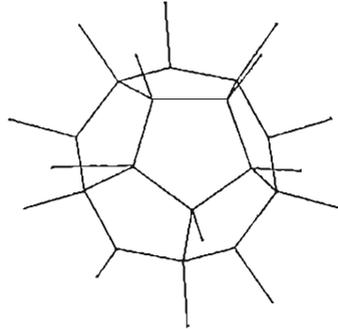


Figura 3.25: Sección  $2_3$  de  $\{5, 3, 3\}$ .

Con estas dos secciones, podemos apreciar que las celdas son dodecaedros, y que las figuras verticales son tetraedros (figura 3.26), ya que  $\{5, 3, 3\}$  es el politopo dual de  $\{3, 3, 5\}$ .

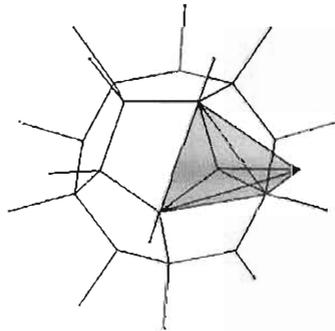


Figura 3.26: Celda  $\{5, 3\}$  y figura vertical  $\{3, 3\}$ .

Procediendo de manera análoga, a partir de los baricentros de las celdas de  $\{3, 3, 5\}$  conseguimos las secciones  $3_3, 4_3, \dots, 15_3$ . Cada sección es la intersección del politopo con un espacio tridimensional. En este caso, tomaremos

espacios a lo largo del eje real, de tal suerte que la parte real de los cuaterniones será constante en cada sección.

En la siguiente tabla se describen las 15 secciones con sus respectivos puntos. Para facilitar la lectura de los cuaterniones de cada sección, se han expresado como múltiplos de los correspondientes unitarios, multiplicados por un factor  $2\sqrt{2}$ . En todos los casos es necesario efectuar permutaciones cíclicas de los coeficientes de  $(x_1, x_2, x_3)$ , para obtener la totalidad de puntos.

| Secciones de $\{5, 3, 3\}$ |              |  |                  |  |
|----------------------------|--------------|--|------------------|--|
| Sección                    | $x_0$        | $(x_1, x_2, x_3)$  | Número de puntos | Forma                                      |
| $1_3$                      | $\tau^2$     | $(\pm 1, 0, \pm \tau^{-2})$<br>$(\pm \tau^{-1}, \pm \tau^{-1}, \pm \tau^{-1})$                                 | 20               | Dodecaedro                                 |
| $2_3$                      | $\sqrt{5}$   | $(\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1})$<br>$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  | 20               | Dodecaedro                                 |
| $3_3$                      | 2            | $(\pm \tau^{-1}, \pm 1, \pm \tau)$<br>$(\pm 2, 0, 0)$  | 30               | Icosidodecaedro (Pequeño)                  |
| $4_3$                      | $\tau$       | $(\pm \tau, \pm \tau, \pm \tau^{-2})$<br>$(\pm \sqrt{5}, \pm \tau^{-1}, 0)$<br>$(\pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm 2)$ | 60               | ---  |
| $5_3$                      | 1            | $(\pm \sqrt{5}, \pm 1, \pm 1)$<br>$(\pm \tau^2, \pm \tau^{-2}, 0)$<br>$(\pm \tau, \pm 2, \pm \tau^{-1})$       | 60               | ---  |
| $6_3$                      | $\tau^{-1}$  | $(\pm \tau^2, \pm \tau^{-1}, \pm \tau^{-1})$<br>$(\pm \tau, \pm \sqrt{5}, 0)$<br>$(\pm 1, \pm 2, \pm \tau)$    | 60               | Rombicosidodecaedro (Gran icosidodecaedro) |
| $7_3$                      | $\tau^{-2}$  | $(\pm \tau, \pm \tau, \pm \tau)$<br>$(\pm 1, \pm \tau^2, 0)$<br>$(\pm 2, \pm 2, 0)$                            | 20               | Dodecaedro                                 |
| $8_3$                      | 0            | $(\pm \sqrt{5}, \pm \tau, \pm \tau^{-1})$<br>$(\pm 1, \pm \tau^{-2}, \pm \tau^2)$                              | 60               | ---  |
| $9_3$                      | $-\tau^{-2}$ | (como $7_3$ )  | 20               | (como $7_3$ )                              |
| ...                        | ...          | ...  | ...              | ...  |
| $15_3$                     | $-\tau^2$    | (como $1_3$ )  | 20               | (como $1_3$ )                              |

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

Dado que  $\{5, 3, 3\}$  es el dual geométrico de  $\{3, 3, 5\}$ , el número de elementos de  $\{5, 3, 3\}$ , dado que es el dual geométrico de  $\{3, 3, 5\}$ , lo obtenemos dualidad, conocíamos ya el número de elementos de  $\{5, 3, 3\}$ , dado en la siguiente tabla:

| Politopo $\{5, 3, 3\}$ |         |       |        |
|------------------------|---------|-------|--------|
| Vértices               | Aristas | Caras | Celdas |
| 600                    | 1200    | 720   | 120    |

# Bibliografía

- [Ar] Armstrong, M. A., *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, 1988.
- [Cox1] Coxeter, H. S. M., 'Regular Honeycombs in Elliptic Space', Proc. London Math. Sec.(3) 4 (1954) 471-501.
- [Cox2] Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, 3<sup>rd</sup> ed. Dover Publications, Inc. 1973.
- [Cox3] Coxeter, H. S.M. 'Quaternions and reflections', Amer. Math. Monthly, 53 (1946) 136-146.
- [C-S] Conway, J. H.; Smith D. A., *On Quaternions and Octonions*. A K Peters, Ltd., 2003.
- [Cr] Cromwell, P. R., *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1997.
- [G-S] Gurlebeck, K.; Sprossig, W., *Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers*. John Wiley 1997.
- [Re] Rees, E. G., *Notes on Geometry*. Springer Verlag 1983.
- [Ve] Verheyen, H. F., *Symmetry Orbits*. Birkhäuser, 1996.