

01174



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

*CONDICIONES ARBITRARIAS DE
FLUJO EN LA PARED DE POZO PARA
LA EVALUACIÓN DE ESTABILIDAD*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

PETROLERA Y GAS NATURAL

P R E S E N T A :

CASTILLO CASTILLO OSCAR

DIRECTOR: M. I. JOAQUIN MENDIOLA SANCHEZ



MÉXICO, D. F., CD. UNIVERSITARIA

2005

m349090



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios que siempre ha estado conmigo.

A mi madre, todo lo que soy te lo debo a ti, gracias a tu valor, cariño y energía inquebrantable.

A la madre Paz, madre Cuquita y madre Adela por haber estado en los momentos más difíciles de mi vida.

A mi mamá Sabina y mi Papá pino

A mi hermano

A mi tío Abel que siempre me apoyo y motivo para seguir.

A mi novia Evia del Puerto Olivos Lizbeth Abiu, gracias por estar conmigo en los momentos felices, pero sobre todo en los difíciles y por creer en mí, TE AMO.

A mis amigos Eva Lilia Acosta Samperio, Fernando Alfonso García Luna Flores, Javier Ortega Molina, José Martín Santana Arroyo, Luis Chacon Muñoz con los que compartí momentos inolvidables, los quiero mucho.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, que es parte vital de mi formación y de mis valores.

Gracias al CONACYT por el apoyo otorgado durante mis estudios de posgrado, ya que sin su ayuda no lo hubiera logrado.

Al M.I. Joaquin Mendiola Sanchez por su ayuda y comprensión para la realización de esta tesis, así como un especial agradecimiento al Dr. Daniel García Gavito por el apoyo brindado y sus consejos.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Oscar Castillo Castillo

FECHA: 19-09-08

FIRMA: [Firma]

A los profesores M.C. Jaime Ortiz Ramírez, Dr. Vicente Casariego González y Dr. Fernando Samaniego Verduco.

A mis compañeros Armando Sandoval, Plinio, Josué, Juan, Rodolfo, Enrique y Paola, por los momentos agradables que pasamos.

A los compañeros del IMP Rodolfo y Daniel Reyes Segura.

ÍNDICE**Capítulos** **páginas****RESUMEN**

1.- INTRODUCCIÓN	1
2.- REVISIÓN DE LITERATURA	
2.1.- Teoría lineal elástica	3
2.1.2.- Módulos elásticos	4
2.2.- Teoría poroelástica	8
2.2.1.- Constantes poroelásticas	9
2.2.2.- Ecuaciones gobernantes	12
2.3.- Esfuerzos a nivel de pozo	14
2.3.1.- Esfuerzos y deformaciones en coordenadas cilíndricas	15
2.4.- Criterios de falla	17
2.4.1.- Criterios de falla	20
2.4.2.- Círculo de Mohr	21
2.5.- Factores que afectan la estabilidad	27
2.5.1.- Peso del lodo	27
2.5.2.- Resistencia de la roca	28
2.5.3.- Temperatura	29
2.5.4.- Régimen de esfuerzos in situ	31
2.5.5.- Inclinación y orientación de la trayectoria del pozo	31
2.5.6.- Invasión del filtrado del fluido de perforación	32
2.5.7.- Efecto de la actividad química	33
2.5.8.- Vibración de la sarta de perforación	35
2.6.- Señales de peligro y medidas preventivas cuando se perfora	37

3.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
3.1.- Descripción del problema	40
3.2.- Condiciones del fluido en los poros en la pared del agujero	43
3.2.1 Condiciones de frontera para la presión	44
3.2.2 Condiciones de frontera de flujo	45
3.3 Solución analítica	46
3.3.1 Problemas de deformación plana	47
3.3.2 Condiciones de frontera de presión de poro	50
3.3.3 Condiciones de frontera de flujo	52
4.- ANÁLISIS DE RESULTADOS	
4.1.- Análisis de resultados	55
4.2.- Efectos de presión de poro	57
4.3.- Efectos del esfuerzo tangencial efectivo	61
4.4.- Efectos del esfuerzo radial efectivo	63
5.- CONCLUSIONES	65
6.- BIBLIOGRAFÍA	67
APÉNDICE	A1
NOMENCLATURA	BI

Lista de figuras

Nombre de la figura	páginas
Capítulo 1	
 Capítulo 2	
2.1.- Deformación	3
2.2.- Relación de Poisson	6
2.3.- Esfuerzo efectivo y presión de poro	10
2.4.- Esfuerzo tri-axial a lo largo del agujero	15
2.5.- Mecanismos de falla	20
2.6.- Círculo de Mohr	22
2.7.- Envolvente de Mohr	23
2.8.- Redistribución de esfuerzos	27
2.9.- Envolvente de Mohr para el peso del lodo	28
2.10.- Resistencia de la roca	29
2.11.- Envolvente de la falla de Mohr para los cambios de temperatura	30
2.12.- Envolvente de estabilidad de Mohr para la invasión de filtrado	33
2.13.- Vibración de la sarta de perforación	36
 Capítulo 3	
3.1.- Agujero inclinado de un material transversalmente isotrópico	41
3.2.- Condiciones de frontera del fluido de poro	43
3.3.- Definición del problema de deformación plana	48
 Capítulo 4	
4.1.- Esquema del problema	56
4.2.- Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 0$, condición bajobalance	57
4.3.- Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición bajobalance	58
4.4.- Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 0$, condición sobrebalance	59

4.5.- Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición sobrebalance	60
4.6.- Presión de poro en la pared del agujero a varios tiempos variando el ángulo θ	61
4.7.- Historia del esfuerzo tangencial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición bajobalance	62
4.8.- Historia del esfuerzo tangencial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 0$, condición sobrebalance	63
4.9.- Historia del esfuerzo radial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición bajobalance	64

RESUMEN

La inestabilidad se traduce no solo en costos adicionales sino también en retrasos considerables durante la perforación y, en algunos casos, en el abandono de pozos. Anualmente se pierden muchos millones de dólares en el mundo, directa o indirectamente, a causa de los problemas de estabilidad, por lo tanto, los análisis de estabilidad de pozos han tomado cada vez mayor importancia en la etapa de planeación. Por tal motivo es de vital importancia conocer el comportamiento de la presión de poro y de los esfuerzos en la formación en la pared del agujero para el análisis de estabilidad.

En el presente trabajo se desarrollaron e implementaron la solución poroelástica para agujeros inclinados con la presión de poro dependiente del tiempo y con condiciones arbitrarias de flujo en la pared del agujero para determinar los esfuerzos radial, axial y tangencial.

A partir de los modelos desarrollados en este trabajo se permitirá simular el comportamiento de la presión y esfuerzos en la pared del agujero para condiciones permeables, impermeables, y para condiciones arbitrarias de flujo, con lo cual podremos simular los distintos escenarios para mejorar la estabilidad del agujero y determinar la ventana operacional con ayuda de un criterio de falla.

INTRODUCCIÓN

Durante la perforación de pozos se genera un cambio en el estado de esfuerzos, debido a la alteración del equilibrio mecánico que existía en la roca antes de perforar el pozo, por tal motivo es necesario hacer un análisis de estabilidad para conocer el cambio del estado de esfuerzos en la pared del agujero.

El conocimiento anticipado de los cambios en los esfuerzos y de las posibles condiciones de falla alrededor del agujero nos permite establecer por adelantado la trayectorias de perforación, los programas de lodo y las prácticas de perforación que se consideren óptimas con lo cual minimizaremos los problemas de estabilidad del agujero, de no ser así tendremos que realizar diversas operaciones y utilizar aditivos o equipos especiales para contrarrestarlos o al menos minimizar los problemas de estabilidad. Esto genera elevados costos anuales adicionales durante las etapas de perforación.

Modelos poroelásticos revelaron que fenómenos dependientes del tiempo tales como fallas y colapsos en la pared del agujero, no se pueden explicar usando modelos elásticos convencionales².

En Modelos elásticos convencionales, debido a que la presión de poro no puede ser determinada apropiadamente, se asume simplemente que es igual a la presión del pozo para el caso permeable o a la presión de la formación para el caso impermeable⁶. Modelos poroelásticos recientemente desarrollados¹, indicaron que la presión de poro alrededor del agujero puede ser muy diferente de la presión del pozo o de la formación.

Las condiciones de frontera del fluido alojado en los poros, tales como la presión de poro o el gasto en las paredes del agujero, afectan significativamente la estabilidad del agujero. El flujo de fluidos hacia el pozo incrementa la presión del poro cerca de la pared del agujero, esto debilita la

roca y altera la distribución de esfuerzo dentro de la roca, por tal causa el gasto en las paredes hace dependiente del tiempo la inestabilidad.

El siguiente trabajo presenta la solución poroelástica para agujeros inclinados con la presión de poro dependiente del tiempo y con condiciones arbitrarias de flujo en la pared del agujero.

2.1 TEORÍA LINEAL ELÁSTICA

La mayoría de los materiales tienen la capacidad de resistir y recuperarse de deformaciones producidas por fuerzas. A esta habilidad se le llama *elasticidad*, la cual es un aspecto fundamental en mecánica de rocas. El tipo más simple de respuesta es aquel donde existe una relación lineal entre las fuerzas externas y las deformaciones correspondientes. Cuando las variaciones en estas fuerzas son suficientemente pequeñas, la respuesta es casi siempre lineal. Es por esto que la teoría de elasticidad lineal es fundamental para cualquier discusión sobre elasticidad. Esta teoría tiene sus bases en dos conceptos:

- Esfuerzo

- Deformación.

Esfuerzo.- es la fuerza dividida por el área y tiene las mismas unidades que la presión. Es representada por la letra griega sigma, σ . Diferente a la presión sin embargo, el esfuerzo puede ser positivo o negativo. Un sólido puede estar sujeto a los siguientes esfuerzos:

- Esfuerzo compresivo
- Esfuerzo de tensión
- Esfuerzo cortantes

Deformación.- se define como un material que cambian de longitud o de anchura bajo influencia de un esfuerzo. Es representado por la letra griega epsilon ϵ . A mayor esfuerzo que esté sujeta la roca, mayor deformación experimentara.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.1)$$

donde:

L = longitud

ΔL = cambio de longitud

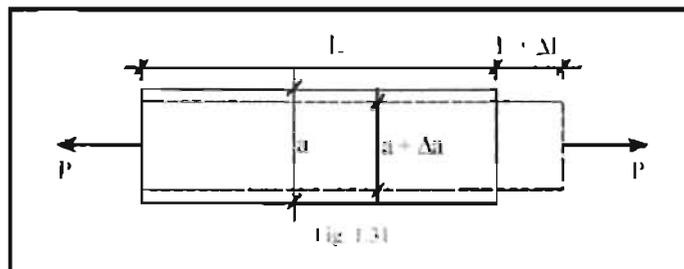


Fig. 2.1 Deformación.⁴

2.1.2 Módulos elásticos

El comportamiento elástico, también denominado Hookeano o de Hooke, en honor al físico que lo investigó, es aquel en el cual existe una relación lineal, es decir, de proporcionalidad directa, entre el esfuerzo aplicado y la deformación obtenida y, además, la respuesta es instantánea. Un cuerpo perfectamente elástico que se deformase una cierta cantidad al serle aplicado un esfuerzo, se deformaría exactamente el doble al serle aplicado un esfuerzo doble del anterior. Además, la deformación se alcanzaría instantáneamente en cada caso. Si el esfuerzo dejase de aplicarse, la deformación desaparecería, recuperando de nuevo el cuerpo su forma original.

A pesar de que las rocas muestran un comportamiento complejo en su relación esfuerzo-deformación, existe un modelo teórico el cual explica de manera simple y bajo ciertas condiciones su comportamiento. El tipo de material son "Hookianos sólidos elásticos" de donde se deriva la teoría de elasticidad. En 1678 Robert Hooke publicó su ley, basado en un estudio de deformación en resortes, así se estableció que la relación lineal entre la componente del esfuerzo y la componente de la deformación.

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.2)$$

Donde "σ" el esfuerzo normal, "ε" la elongación y "E" el coeficiente de proporcionalidad denominado "Módulo de Young".

Módulo de Young(E).- Es la relación entre esfuerzo axial y la deformación axial bajo condiciones de carga uniaxial.

Relación de Poisson(ν).- Con el módulo de Young no es suficiente explicar la relación entre el esfuerzo y deformación, ya que esta no solamente se deforma en la dirección vertical, sino también horizontalmente. La relación entre deformación horizontal y vertical fue establecida por el científico francés Siméon Denis Poisson, como "Relación de Poisson, ν".

$$\nu = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_v}. \quad (2.3)$$

El agua tiene una relación de Poisson de 1. El 100% de la presión o del esfuerzo transmitido en la dirección vertical se siente lateralmente. Podríamos medir el cociente de Poisson para la roca del núcleo para encontrar la relación de deformación radial entre la deformación axial.

Una roca con una alta relación de Poisson es más deformable.

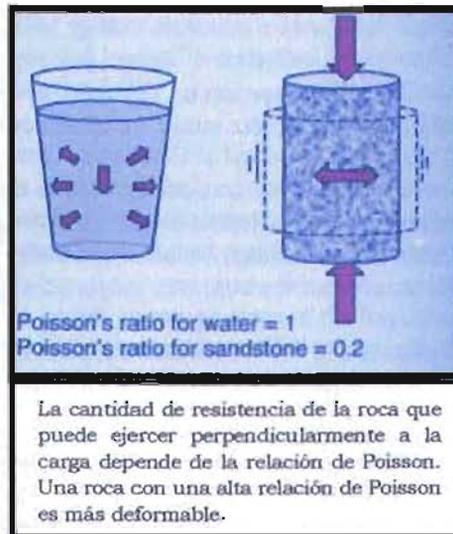


Fig. 2.2 Relación de Poisson.³

Módulo de corte (G).- Es la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación del corte, matemáticamente se expresa como:

$$G = \frac{\text{Esfuerzo de corte aplicado}}{\text{Deformación de corte}} \quad (2.4)$$

Módulo volumétrico (K).- Es la relación entre el cambio de volumen y la presión hidrostática aplicada a una masa, además que el inverso nos representa la compresibilidad de la roca.

$$K = \frac{\sigma_p}{\epsilon_v} \quad (2.5)$$

Donde:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (2.6)$$

Para poder realizar un análisis de estabilidad es necesario conocer la alteración en el estado de esfuerzos en la pared del agujero.

Los materiales isotrópicos, son materiales donde la respuesta es independiente de la orientación del esfuerzo aplicado. Para cada material el eje principal de esfuerzos y el eje principal de deformación siempre coinciden.

Para materiales isotrópicos la relación entre esfuerzo y deformación pueden ser escritas.

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \quad (2.7a)$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (\lambda + 2G)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \quad (2.7b)$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (\lambda + 2G)\varepsilon_z, \quad (2.7c)$$

$$\tau_{xy} = 2G\Gamma_{xy}, \quad (2.7d)$$

$$\tau_{xz} = 2G\Gamma_{xz}, \quad (2.7e)$$

$$\tau_{yz} = 2G\Gamma_{yz}, \quad (2.7f)$$

Donde λ es el **módulo de Lamé**, el cual está definido por la relación entre el esfuerzo medio bajo condiciones de carga triaxial y la deformación volumétrica, y es escrito de la siguiente manera⁴:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\varepsilon_v}. \quad (2.8)$$

2.2 TEORIA POROELÁSTICA

En la mecánica de rocas relacionada con el petróleo, mucho del interés se enfoca en rocas con porosidades y permeabilidades significativas. La teoría elástica para materiales sólidos no es capaz de describir completamente el comportamiento de tales materiales. Es por esto que se debe considerar el concepto de poroelasticidad

La respuesta mecánica de una roca porosa saturada con fluido es caracterizada por el acoplamiento de deformación y efectos de difusión. Estos efectos, que son causados por la presencia de presión de poro, pueden ser resumidos a continuación:

- 1) Excesiva presión de poro es generada por cargas externas aplicadas.
- 2) La deformación de la roca es controlada por el esfuerzo efectivo.
- 3) El gradiente de la presión de poro actúa como una fuerza de cuerpo el cual tiene que considerarse dentro de la ecuación de equilibrio del esfuerzo efectivo.
- 4) Los excesos de la presión de poro son disipados con la ecuación de difusividad

Como consecuencia directa de estos efectos, la deformación volumétrica de una roca porosa saturada con fluido exhibe una sensibilidad del ritmo de carga isotrópica. Por lo tanto una roca rígida puede aparecer bajo dos ritmos de carga:

- **Carga rápida.**- bajo esta carga el fluido intersticial tiene poco tiempo para escapar (condición no drenada) y resistirá la deformación, esto causa un incremento en la presión de poro.

- **Carga lenta.** - en este el exceso de la presión de poro tiene tiempo para disiparse por difusividad (condición drenada) y por lo tanto no contribuye a la rigidez aparente de la roca.

2.2.1 Constantes poroelásticas⁵

Para poder lograr describir el fenómeno que sucede en las rocas se necesitan definir primero varias constantes que están relacionadas con las características propias de la roca y del fluido del poro y que se utilizan en la teoría poroelástica.

Coefficiente de Biot de esfuerzo efectivo

No todos los esfuerzos en la formación son transmitidos por la matriz de roca. Algo de este esfuerzo es transmitido por el líquido atrapado en los espacios de poro dentro de la roca (figura 2.3).

El concepto del esfuerzo efectivo fue primero introducido por Terzaghi como la proporción del total esfuerzo que carga efectivamente el esqueleto sólido causando la deformación sólida bajo los principios elástico y la otra parte del esfuerzo es soportado por el fluido, el coeficiente de Biot nos indica cuánto del esfuerzo total aplicado sobre la muestra es soportado por el fluido.

$$\alpha = \frac{3(v_v - v)}{B(1 - 2\nu)(1 + \nu_v)} \quad (2.9)$$

El rango de B varía de (0,1).

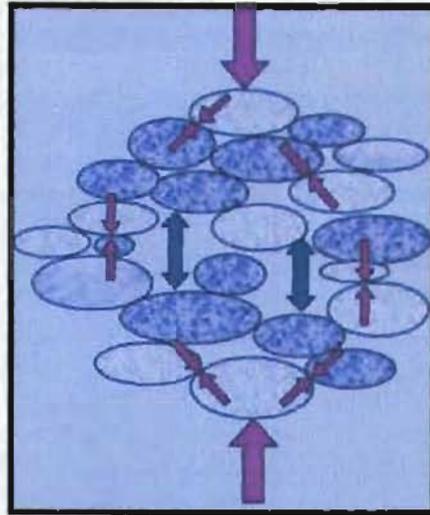


Fig. 2.3 esfuerzo efectivo y presión de poro.³

Relación de Poisson drenado y no drenado

Para la presentación de la teoría lineal poroelástica, tendremos que introducir la relación de Poisson drenado y no drenado, ν y ν_u .

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (2.10)$$

$$\nu_u = \frac{3K_u - 2G}{2(3K_u + G)} \quad (2.11)$$

La magnitud de los efectos poroelásticos son controladas por valores de dos constantes α y ν_u (el rango de variación de ν_u es de $(\nu, 0.5)$).

Coefficiente Skempton

Es la relación de la presión de poro inducida sobre el sobre el incremento del promedio del esfuerzo normal de confinamiento bajo condiciones sin drenado $\zeta=0$ (es decir, no se permite escapar el fluido de la

muestra). Este valor es relacionado a la compresibilidad del sólido, fluido, y esqueleto.

$$B = \frac{3(v_u - \nu)}{\alpha(1 - 2\nu)(1 + \nu_u)} \quad (2.12)$$

Coefficiente de esfuerzo poroelástico

El coeficiente η es el coeficiente del esfuerzo poroelástico, el cual se puede escribir:

$$\eta = \frac{\alpha(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \quad (2.13)$$

El rango físico de η varía de (0,0.5).

Módulo de Biot

M es llamado el modulo de Biot y expresa las características propias del fluido del poro, y esta es definida bajo una deformación constante. Los cuales se encuentran definido como sigue:

$$M = \frac{2G(v_u - \nu)}{\alpha^2(1 - 2\nu)(1 - 2\nu_u)} \quad (2.14)$$

El rango físico de M varía de (0, ∞)

Coefficiente de Difusividad

Este puede ser establecido en la ausencia de fuerzas de cuerpo y la existencia de un fluido en la roca, donde se presenta un proceso de difusión existe para el fluido contenido en el poro, es decir, este coeficiente nos indica la capacidad del fluido para fluir en el medio poroso.

$$c = \frac{\kappa E_v B(1-\nu)}{3\alpha(1-\nu_v)(1+2\nu)}. \quad (2.15)$$

Constante de almacenamiento

El coeficiente de almacenamiento S es definido bajo condiciones particulares de deformación uniaxial y un esfuerzo normal constante en la dirección de la deformación.

$$S = \frac{\alpha^2(1-\nu_u)(1-2\nu)^2}{2G(1-\nu_u)(1-\nu)}. \quad (2.16)$$

2.2.2 Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones gobernantes lineal poroelástica en un medio homogéneo e isotrópico bajo condiciones cuasi-estático son descrita en la ecuaciones;

Relación esfuerzo-deformación

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij} + \alpha p\delta_{ij}. \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones son similares a aquellas para un sólido elástico con la diferencial de que el esfuerzo efectivo juega un factor importante.

Relación de poro-esfuerzo volumétrico

$$p = M(\zeta - \alpha\varepsilon), \quad (2.18)$$

Esta ecuación nos indica que la presión de poro depende linealmente de ambos, de la deformación de los poros del sólido y de la variación del contenido de fluido.

Ecuación de equilibrio

$$\sigma_{y,j} - b_j = 0, \quad (2.19)$$

Consideraciones estándar de equilibrio estático conducen a la ecuación de esfuerzo local.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + q_{i,j} = 0, \quad (2.20)$$

La consideración de conservación de masa de un fluido compresible permite la ecuación de continuidad local.

Ley de Darcy

$$q_i = -k_{ij} p_{,j}. \quad (2.21)$$

El transporte del fluido en el espacio intersticial puede ser descrito por la ley de Darcy, la cual es una ecuación empírica. Esto puede también ser derivada a partir de las ecuaciones de Navier Stokes despreciando los términos de inercia.

Donde ε_{ij} es el tensor de deformación del cuerpo poroso; δ es la delta de Kronecker, p es la presión de poro; ε es la deformación volumétrica; ζ es la variación volumétrica del contenido de fluido en los poros en el cuerpo poroso; q_i es el vector de descarga del fluido en el cuerpo poroso; b_j es el

vector de fuerza de cuerpo; G es el módulo de corte; ν es la relación de Poisson en condiciones de drenaje; α es el coeficiente de esfuerzo efectivo de Biot; M es el módulo de Biot; y k es la permeabilidad intrínseca, esta es generalmente una función de la geometría de poro. En particular, es frecuentemente dependiente de la porosidad.

$$k = \frac{K}{\mu}. \quad (2.22)$$

2.3 ESFUERZOS A NIVEL DE POZO

Para entender la relación de esfuerzos de un sólido, debemos representar los esfuerzos en un estado tridimensional o tri-axial. El estado tridimensional de esfuerzos de un elemento es representado por tres esfuerzos principales.

El término *principal* significa que uno de estos esfuerzos es el elemento máximo. El tercero o intermedio esfuerzo es ortogonal a ambos, al máximo y mínimo esfuerzo. El esfuerzo vertical que siente la roca adyacente se refiere como esfuerzo de sobrecarga σ_v . Las fuerzas horizontales derivadas de deformaciones horizontales se refieren como σ_H y σ_h . σ_H es el más grande de los dos esfuerzos horizontales y σ_h es el más pequeño de los dos esfuerzos horizontales. Estos esfuerzos se refieren a menudo como mayor y menor esfuerzos horizontales. Los tres esfuerzos principales son ortogonales o perpendiculares el uno al otro.

Esfuerzos alrededor del agujero

Esfuerzo tangencial.- Cuando perforamos un pozo próximo a este y quitamos la roca de soporte del costado, la tensión que falta se substituye por el esfuerzo de aro.

Esfuerzo radial.- La presión de una columna del lodo proporciona un esfuerzo radial contra la pared del agujero del pozo. Esta presión radial reduce el esfuerzo compresivo del aro. El esfuerzo retirado por el proceso de perforación es substituida por una combinación de esfuerzo radial y esfuerzo del aro.

Redistribución total de esfuerzos = esfuerzo radial + esfuerzo de aro.

Esfuerzo Axial.- El esfuerzo axial es la suma de los componentes verticales y horizontales de esfuerzos en la dirección axial. En un pozo vertical, el esfuerzo axial sería igual al esfuerzo vertical. En un pozo horizontal, el esfuerzo axial sería la suma de los componentes esfuerzos horizontales a lo largo del eje del pozo. El esfuerzo axial actúa a lo largo de la longitud del agujero del pozo.

El estado de esfuerzos tri-axiales a lo largo de la pared del agujero del pozo es representado por estos componentes de esfuerzos:

- σ_z (esfuerzo axial)
- σ_r (esfuerzo radial)
- σ_θ (tangencial o esfuerzo de aro)

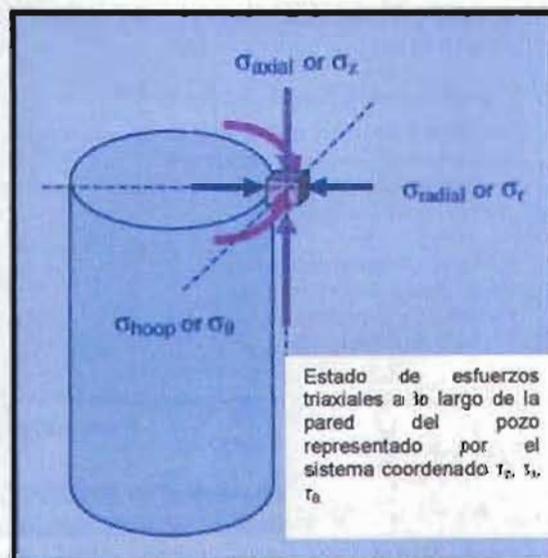


Fig. 2.4 esfuerzo tri-axial a lo largo del agujero.³

2.3.1 Esfuerzo y deformaciones en coordenadas cilíndricas

Para examinar los esfuerzos alrededor del agujero, es necesario expresar los esfuerzos en coordenadas cilíndricas y son denotadas como, σ_r , σ_θ , σ_z , $\tau_{r\theta}$, τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$.

Las deformaciones en coordenadas cilíndricas están denotadas ε_r , ε_θ , ε_z , $\varepsilon_{r\theta}$, ε_{rz} , $\varepsilon_{\theta z}$. Si los desplazamientos en dirección r son denotados como u_r , en dirección θ como u_θ , y en dirección z como u_z , las deformaciones son:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad (2.23a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{du_\theta}{d\theta} \right), \quad (2.23b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{du_z}{dz}, \quad (2.23c)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left(\frac{du_r}{d\theta} - u_\theta \right) + \frac{du_\theta}{dr}, \quad (2.23d)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dr} + \frac{du_r}{dz} \right), \quad (2.23e)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{dz}{d\theta} + \frac{du_\theta}{dz} \right). \quad (2.23f)$$

Para un material isotrópico la relación de esfuerzo-deformación en coordenadas cilíndricas son:

$$\sigma_r = (\lambda + 2G)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z, \quad (2.24a)$$

$$\sigma_\theta = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2G)\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z, \quad (2.24b)$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + (\lambda + 2G)\varepsilon_z, \quad (2.24c)$$

$$\tau_{r\theta} = 2G\Gamma_{r\theta}, \quad (2.24d)$$

$$\tau_{rz} = 2G\Gamma_{rz}, \quad (2.24e)$$

$$\tau_{\theta z} = 2G\Gamma_{\theta z}, \quad (2.24f)$$

La relación de esfuerzo-deformación para un material isotrópico en coordenadas cilíndricas para una formación poroelástica es:

$$\sigma_r = (\lambda + 2G)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z - C_\zeta, \quad (2.25a)$$

$$\sigma_\theta = \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2G)\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_z - C_\zeta, \quad (2.25b)$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta + (\lambda + 2G)\varepsilon_z - C_\zeta, \quad (2.25c)$$

$$\tau_{r\theta} = 2G\Gamma_{r\theta}, \quad (2.25d)$$

$$\tau_{rz} = 2G\Gamma_{rz}, \quad (2.25e)$$

$$\tau_{\theta z} = 2G\Gamma_{\theta z}, \quad (2.25f)$$

$$p_f = C\varepsilon_v - M_\zeta. \quad (2.25g)$$

2.4 CRITERIOS DE FALLA

Los problemas de estabilidad durante la perforación, causan problemas sustanciales, aún en pozos verticales. Generalmente estos problemas de estabilidad se encuentran en arcillas que se localizan en la parte superior de los yacimientos. La estabilidad es demasiado crítica para pozos altamente desviados, por lo tanto es necesario entender el comportamiento de las rocas para poder minimizar los problemas durante la perforación.

Para el análisis de estabilidad de pozos los dos principales elementos requeridos son:

- Modelo constitutivo
- Criterios de falla

La determinación de esfuerzos en el agujero depende en gran medida del tipo de comportamiento esfuerzo-deformación que se utilice para modelar la respuesta de la formación cuando se somete a cargas por lo cual es importante seleccionar el modelo constitutivo adecuado.

Hay dos grandes categorías de falla para las lutitas— Falla por esfuerzo inducido y deslizamiento plástico. La falla por esfuerzo inducido ocurre cuando se excede la resistencia de la roca y se fractura la roca. El deslizamiento plástico se refiere a una deformación lenta bajo esfuerzo, como con la sal y con el hinchamiento de arcillas, la formación tiende a fallar por deslizamiento plástico. El deslizamiento plástico es una deformación del esfuerzo inducido. La deformación causada por el esfuerzo puede ser de origen mecánico o químico³.

Falla por esfuerzo inducido

Hay seis tipos de falla por esfuerzo inducido. Cuatro son tipo de falla de corte y dos son tipos de falla de tensión. Además, estos esfuerzos pueden ser mecánicos o químicos.

Los cuatro modos de fallo por corte son:

Rompimiento.- ocurre cuando el esfuerzo mayor a la falla es el esfuerzo de aro, y el esfuerzo menor es el esfuerzo radial. $\sigma_{\theta} < \sigma_z < \sigma_r$. Este corte es causado por la diferencia entre el esfuerzo de aro y radial.

Corte de tórico.- ocurre cuando el esfuerzo mayor a la falla es el esfuerzo axial, y el esfuerzo menor es el esfuerzo radial. $\sigma_z < \sigma_{\theta} < \sigma_r$

Tanto el tórico y rompimiento ocurren en la dirección σ_h en el caso de pozos verticales. La insuficiencia del peso del lodo o el efecto de sondeo es la causa de estas fallas.

Corte helicoidal.- ocurre cuando el esfuerzo mayor a la falla es el esfuerzo axial, y el esfuerzo menor es el esfuerzo de aro. $\sigma_z < \sigma_r < \sigma_{\theta}$

Corte de elongación.- ocurre cuando el esfuerzo mayor a la falla es el esfuerzo radial, y el esfuerzo menor o es el esfuerzo de aro o el axial. $\sigma_r < \sigma_z < \sigma_{\theta}$ o $\sigma_r < \sigma_{\theta} < \sigma_z$

El corte helicoidal y de elongación ocurre en la dirección σ_H y es causado por un alto peso del lodo o un represionamiento.

Los dos modos de falla de tensión son fractura hidráulica y exfoliación.

Fractura hidráulica.- es causado por el alto peso de lodo.

Falla de tensión por exfoliación.- es causada por el bajo peso del lodo. Este tipo de falla es común en minas y pozos con sobrebalance.

Falla por deslizamiento plástico

Las rocas frágiles son probables de fallar por corte. Cuanto más frágiles son, más catastrófica será la falla. Las rocas plásticas como la sal y el yeso son más probables de fluir y encoger el diámetro del agujero en vez de fracturarse catastróficaamente bajo esfuerzo.

El deslizamiento plástico comienza mientras se perfora el pozo. El esfuerzo que existió en el material quitado por la barrena se debe sustituir por el esfuerzo de aro y el esfuerzo radial proporcionado por el peso del lodo. Si el esfuerzo de aro es demasiado, la formación fallará plásticamente y comenzará a deslizarse hacia adentro.

Las sales y los yesos exhiben en su mayoría el deslizamiento. Las lutitas y areniscas pueden también deslizarse significativamente. Las areniscas tienden a deslizarse a gran profundidad o bajo altos esfuerzos tectónicos. La lutita joven con planos estratificados tiende a deslizarse más que una lutita más vieja. La tendencia de deslizamiento tiende a aumentar mientras que el agujero de pozo intercepta los planos de estratificación con ángulos altos.

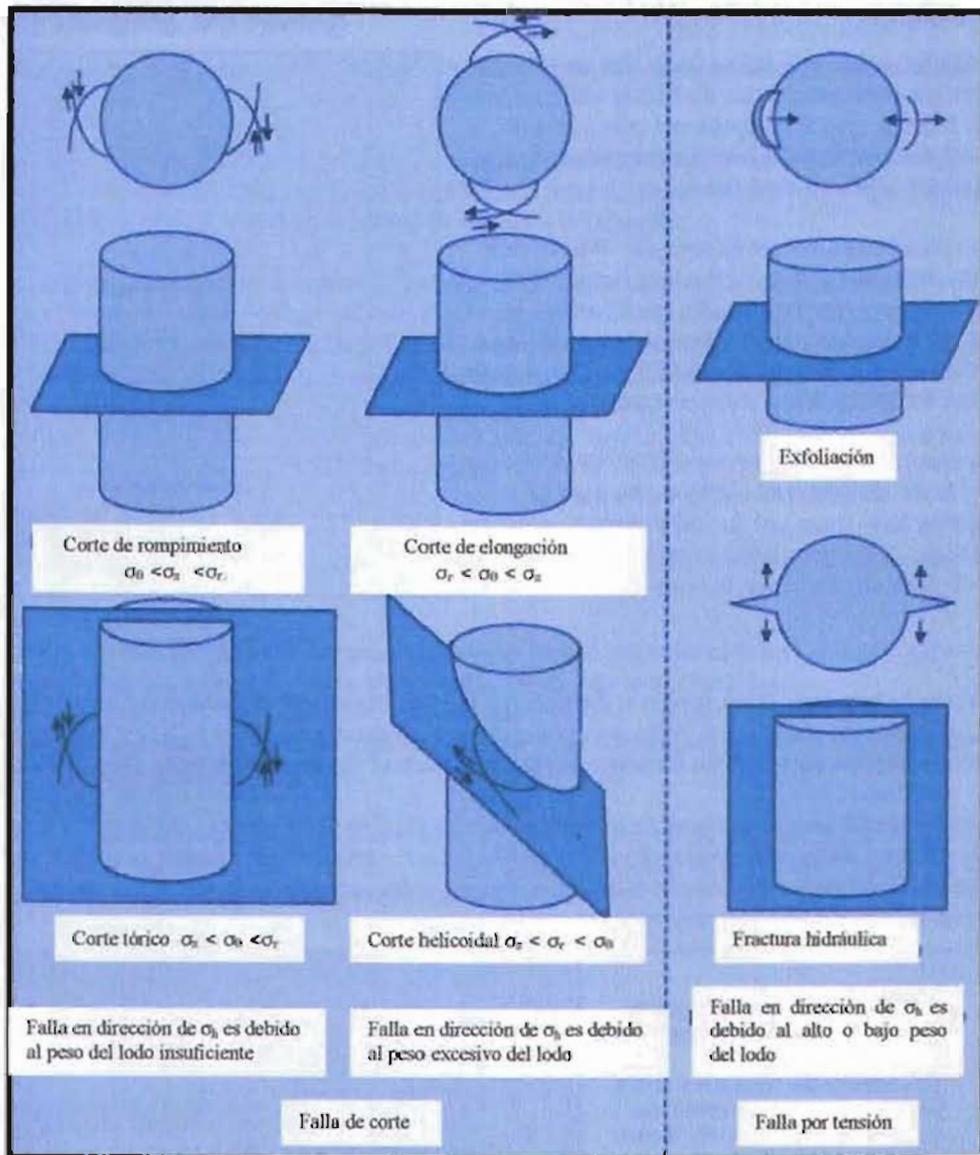


Fig. 2.5 Mecanismos de falla³

2.4.1 Criterios de falla

Una vez que se han determinado los esfuerzos in-situ en el pozo es necesario introducir los criterios de falla nos permitirán establecer los puntos donde el estado de esfuerzos excede la resistencia de la roca.

Criterio de falla por tensión

Se considera que el inicio de una falla por tensión ocurre cuando el esfuerzo menor en la pared del agujero se hace menor a la resistencia de la formación a la tensión del material.

Por lo tanto el criterio de falla por tensión tiene la forma:

$$\sigma_3' \leq -|\sigma_t|. \quad (2.26)$$

Donde σ_t es resistencia a la tensión de la roca y el esfuerzo principal mínimo efectivo está dado por el esfuerzo principal mínimo menos la presión de poro:

$$\sigma_3' = \sigma_3 - p_p. \quad (2.27)$$

Criterios de falla por compresión

Existen varios criterios propuestos para definir la falla de la roca en compresión, los cuales pueden clasificarse en 4 categorías:⁷

- Categoría A: Lineal y con efecto del esfuerzo principal intermedio
 - Criterio de Drucker-Prager
- Categoría B: Lineal y sin efecto del esfuerzo principal intermedio
 - Criterio de Mohr-Coulomb
- Categoría C: No lineal y con efecto del esfuerzo principal intermedio
 - Criterio de Wu-Hudson
- Categoría D: No lineal y sin efecto del esfuerzo principal intermedio
 - Criterio de Hoek-Brown

Generalmente, los criterios de falla que no consideran la influencia del esfuerzo principal intermedio (categorías B o D) son conservadores en la predicción de la estabilidad del agujero, particularmente cuándo se utilizan con modelos lineales elásticos. Aunque las verdaderas pruebas triaxiales muestran los efectos del esfuerzo principal intermedio, los criterios de falla que incorporan

el efecto de éste (categorías A o C) tienden a sobrepredecir la resistencia de la formación y la estabilidad del agujero.

En la mayoría de los casos es adecuada la aplicación de criterios de falla lineales. Sin embargo, para formaciones muy débiles o con presiones de confinamiento mayores a 14 MPa, son necesarios los criterios de falla no lineales.

2.4.2 Círculo de Mohr (Teoría del ángulo doble)

El círculo de Mohr es un método gráfico para representar los esfuerzos principales y el esfuerzo máximo de corte en un punto en una roca bajo un esfuerzo. Esto es útil cuando conocemos los esfuerzos en una dirección particular y deseamos conocer cuáles son los esfuerzos en otra dirección. Es también útil para encontrar los esfuerzos principales y el máximo esfuerzo de corte.

Los esfuerzos conocidos para un elemento se trazan gráficamente en el sistema coordenado σ , τ , como en la figura 2-6. El concepto fundamental del círculo de Mohr es que cada punto en el círculo representa el estado de esfuerzos en un plano imaginario pasando a través de la roca a un cierto ángulo θ del plano de esfuerzo principal.

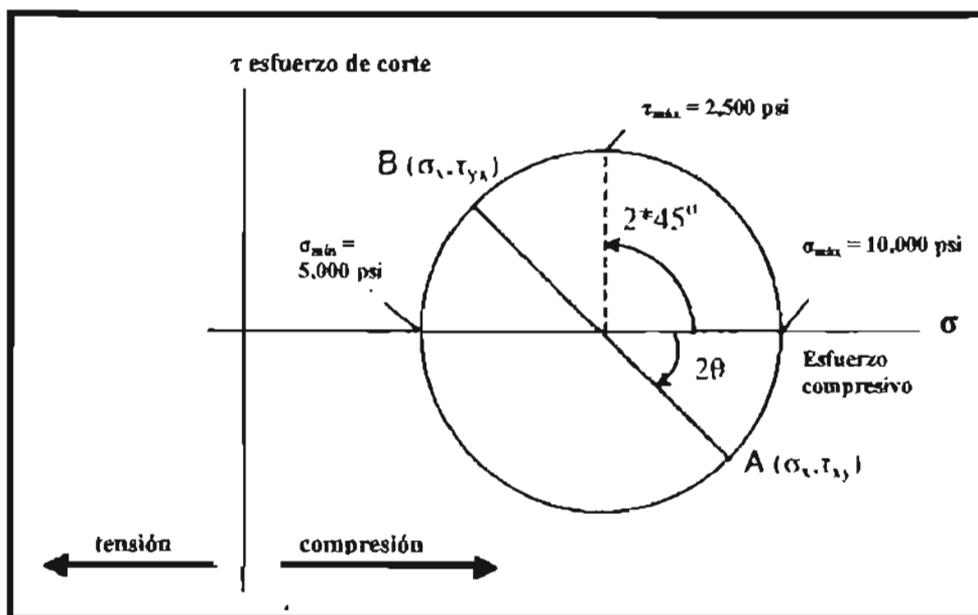


Fig. 2.6 Círculo de Mohr.³

El esfuerzo de corte es siempre cero en una superficie sujeta a un esfuerzo principal. El esfuerzo de corte no pueden existir en una superficie expuesta, tal como la pared del agujero del pozo. Por lo tanto, una vez que se perfora un agujero, uno de los planos principales del esfuerzo será paralelo a la trayectoria del pozo, los otros serán ortogonales a él.

El procedimiento implica hacer varias pruebas con núcleos de la formación de interés, como en la figura 2-7. Las muestras se prueban a la falla con un rango de presiones de confinamiento. El círculo de Mohr se construye de los datos de cada prueba. La "línea de esfuerzo de corte" entonces se dibuja a lo largo de la parte superior de los círculos. Esta línea de esfuerzo de corte define la envolvente de estabilidad. Si la condición de esfuerzo está debajo de la línea (área amarilla), el pozo es estable. Si no, el pozo es inestable.

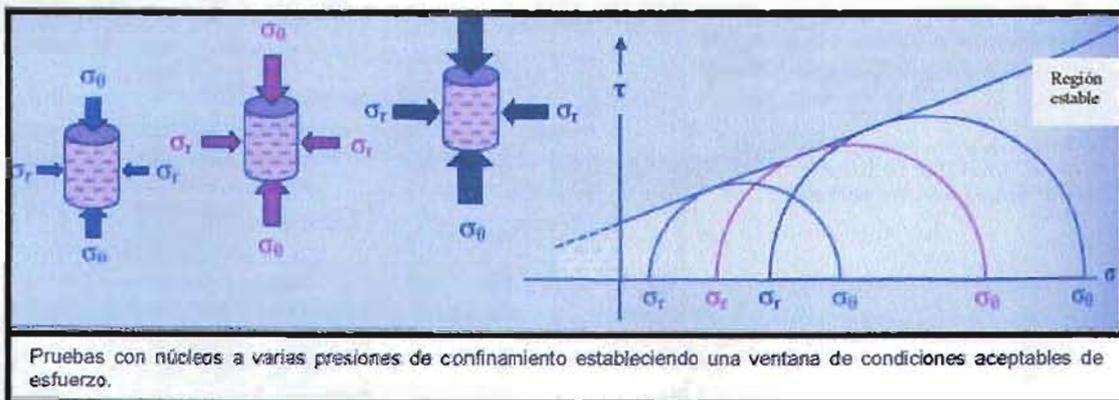


Fig. 2.7 Envolvente de falla de Mohr

Los esfuerzos principales presentados en el círculo son generalmente esfuerzos de aro σ_θ , y el esfuerzo radial, σ_r . Mientras que el esfuerzo radial aumenta, el esfuerzo de aro disminuye. Así, un incremento en peso del lodo tiene un efecto en ambos esfuerzos y contraerá el círculo, si el esfuerzo radial es menor que el esfuerzo del aro, o agrandaré el círculo si el esfuerzo radial es más grande que el esfuerzo del aro.

En términos de ecuaciones el criterio de Mohr-Coulomb se expresa mediante la siguiente relación:

$$\sigma_1 = C_0 + \sigma_3 \tan^2 \beta. \quad (2.28)$$

Donde:

$\beta = (45 + \psi/2)$ y ψ es el ángulo de fricción interna

C_0 es la resistencia uniaxial a la compresión

β corresponde al ángulo de falla de la roca

Dependiendo de la magnitud de los esfuerzos radial, tangencial y axial se presentan 6 diferentes condiciones en la cual el agujero puede presentar colapso.

Caso lineal elástico

Los esfuerzos principales en la pared del agujero son:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_w \\ \sigma_\theta &= 2\sigma_h - p_w \\ \sigma_z &= \sigma_v\end{aligned}\tag{2.29}$$

A continuación mostraremos las expresiones para P_w crítica, las cuales se encontraron sustituyendo los esfuerzos principales en el criterio de Mohr-Colulomb para los seis diferentes casos que se pueden presentar debido a la relación entre las magnitudes de los mismos. Utilizando la siguiente nomenclatura para los esfuerzos principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ y con el criterio de Mohr expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_1 = C_0 + \sigma_3 \tan^2 \beta.\tag{2.30}$$

Caso	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	Presión máxima del pozo
1	$\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$	$P_w \leq \frac{2\sigma_h - C_o}{1 + \tan^2 \beta}$
2	$\sigma_z \geq \sigma_\theta \geq \sigma_r$	$P_w \leq \frac{\sigma_v - C_o}{\tan^2 \beta}$
3	$\sigma_z \geq \sigma_r \geq \sigma_\theta$	$P_w \geq \frac{C_o - 2\sigma_h \tan^2 \beta - \sigma_v}{\tan^2 \beta}$
4	$\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$	$P_w \geq \frac{C_o + 2\sigma_h \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$
5	$\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$	$P_w \geq C_o + \sigma_v \tan^2 \beta$
6	$\sigma_\theta \geq \sigma_r \geq \sigma_z$	$P_w \geq 2\sigma_h - C_o - \sigma_v \tan^2 \beta$

Tabla 2.1 Caso lineal elástico

Caso poroelástico

El criterio de falla para una roca con presión de poro se obtiene introduciendo el esfuerzo efectivo.

$$\sigma_1 - \alpha p_f = C_o + (\sigma_3 - \alpha p_f) \tan^2 \beta. \quad (2.31)$$

$$\sigma_3 - \alpha p_f = -T_o. \quad (2.32)$$

Sustituyendo σ_3 en la ecuación anterior, encontramos el criterio para determinar el afallamiento tensil en el agujero:

$$P_w = 2\sigma_h - \alpha p_f + T_o, \quad (2.33)$$

$$\sigma_1 = C_o + \sigma_3 \tan^2 \beta. \quad (2.34)$$

CASO POROELÁSTICO IMPERMIABLE

Caso	$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$	Presión máxima del lodo
1	$\sigma_\theta \geq \sigma_z \geq \sigma_r$	$p_w \leq \frac{2\sigma_h - C_o}{1 + \tan^2 \beta}$
2	$\sigma_z \geq \sigma_\theta \geq \sigma_r$	$p_w \leq \frac{\sigma_v - C_o}{\tan^2 \beta}$
3	$\sigma_z \geq \sigma_r \geq \sigma_\theta$	$p_w \geq \frac{C_o - 2\sigma_h \tan^2 \beta - \sigma_v}{\tan^2 \beta}$
4	$\sigma_r \geq \sigma_z \geq \sigma_\theta$	$p_w \geq \frac{C_o + 2\sigma_h \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$
5	$\sigma_r \geq \sigma_\theta \geq \sigma_z$	$p_w \geq C_o + \sigma_v \tan^2 \beta$
6	$\sigma_\theta \geq \sigma_r \geq \sigma_z$	$p_w \geq 2\sigma_h - C_o - \sigma_v \tan^2 \beta$

Tabla 2.2 Caso poroelástico

2.5 FACTORES QUE AFECTAN LA ESTABILIDAD

Varios factores que afectan la estabilidad, incluyen:

- Peso del lodo.
- Resistencia de la roca.
- La temperatura.
- régimen de esfuerzos in-situ
- La inclinación y orientación de la trayectoria del pozo
- Invasión del filtrado del fluido de perforación
- Efecto de la actividad química
- Vibración de la sarta de perforación

2.5.1 Peso del lodo

La presión de una columna de lodo proporciona un esfuerzo radial contra la pared del agujero. El esfuerzo que se retiró del pozo mientras se perforó se debe sustituir por una combinación de esfuerzo tangencial y esfuerzo radial.

Redistribución total de esfuerzo = esfuerzo radial + esfuerzo tangencial

El peso del lodo reduce el esfuerzo compresivo (tangencial), este también proporciona una presión de confinamiento y aumenta la resistencia aparente de la roca. Es posible levantar el peso del lodo a un valor que reduzca el esfuerzo tangencial a cero. Si el peso del lodo se incrementa demasiado el esfuerzo de aro llega a ser de tensión y la roca puede fallar a tensión (figura 2.8) esto sucede cuando fracturamos hidráulicamente una formación.

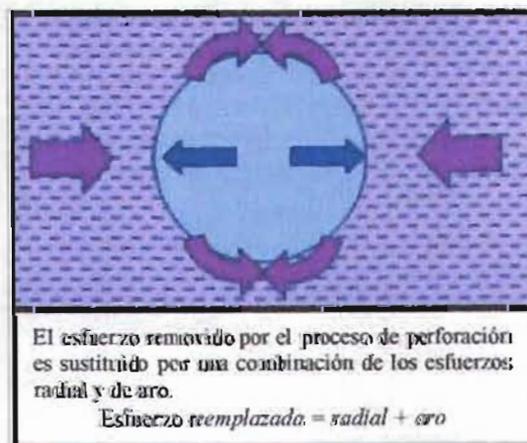


Fig.2.8 Redistribución de esfuerzo⁵

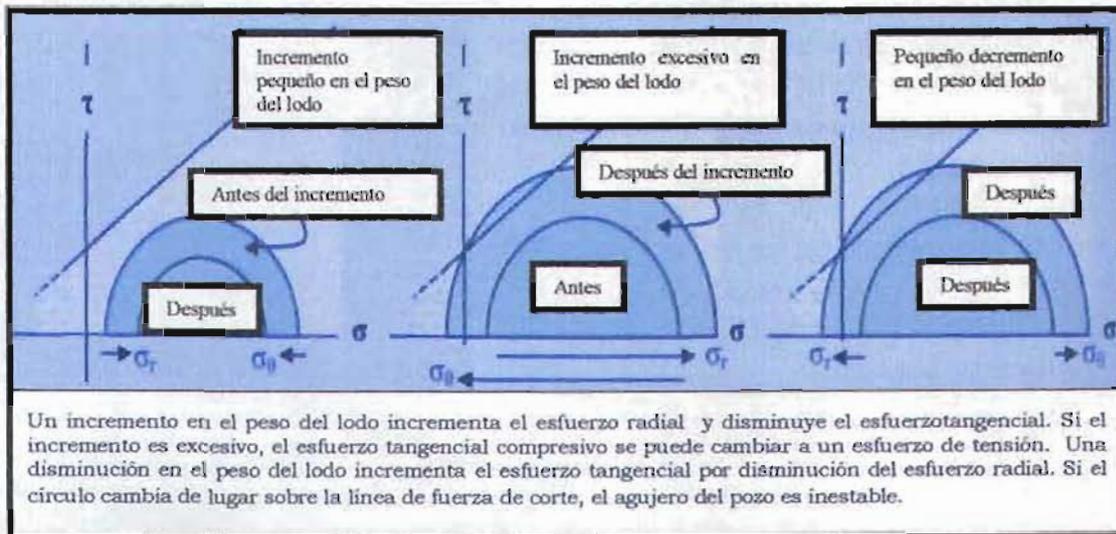


Fig. 2.9 Envolvente de falla de Mohr para el peso del lodo³

2.5.2 Resistencia de la roca

Obviamente, cuanto es más resistente la roca, más esfuerzo puede soportar. La resistencia de la roca depende sobre todo de la cementación y de la fricción entre los granos individuales que componen la roca. La resistencia compresiva y la elasticidad de los granos individuales también contribuyen a la resistencia.

La resistencia de la roca también es afectada por la resistencia de los granos individuales que componen la roca. Algunos de estos granos yacen directamente a través del plano del desprendimiento y deben deformarse o romperse para deslizarse más allá de otro (fig. 2.10).

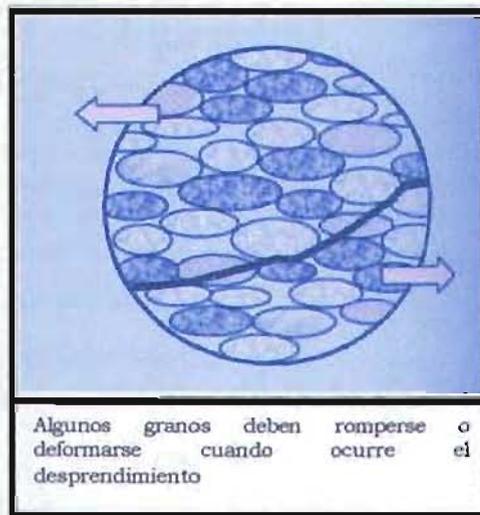


Fig. 2.10 Resistencia de la roca³

2.5.3 Temperatura

Mientras el lodo circula en el pozo altera la temperatura en formaciones expuestas. El lodo frío refresca la porción más baja del pozo; el lodo caliente del fondo calienta las formaciones superiores. Los cambios de temperatura pueden ser perjudiciales a la estabilidad. El cambio más pronunciado es cuando la circulación inicia después de un periodo largo de no circulación.

Un incremento en temperatura influencia la estabilidad de varias formas. Puede aumentar el esfuerzo tangencial en la pared del pozo reduciendo el esfuerzo radial proporcionado por la presión del lodo. También debilita la roca reduciendo la fricción entre los granos. El agua tiene un coeficiente de expansión más grande que la roca. Si hay un aumento de temperatura, el fluido del poro se expandirá más rápido que la matriz de roca. Esto aumentará la presión del poro y reducirá el esfuerzo efectivo o de matriz. Un aumento en la presión del poro también reduce el diferencial de presión contra la pared del agujero del pozo, así reduciendo el esfuerzo radial. Esto aumenta la compresión del esfuerzo tangencial.

Una disminución de temperatura tiene el efecto reverso. El fluido del poro se contraerá más rápidamente que la matriz de roca, así aumentando el esfuerzo efectivo y la presión diferencial que siente la pared el agujero del pozo. Esto aumenta la resistencia de la roca, pero la presión diferenciada más alta puede causar una pérdida de circulación en algunos casos.

Un problema con los pozos profundos de alta temperatura es que mientras el gas libre es empezado a circular hacia arriba del pozo, la pérdida de circulación puede ocurrir en el fondo cuando el lodo fresco alcanza la barrena. Con la expansión del gas y la reducción en presión del fondo del agujero es probable pasar inadvertida hasta que el gas está muy cerca de superficie. Para entonces, una considerable manifestación pudo haber entrado al agujero.

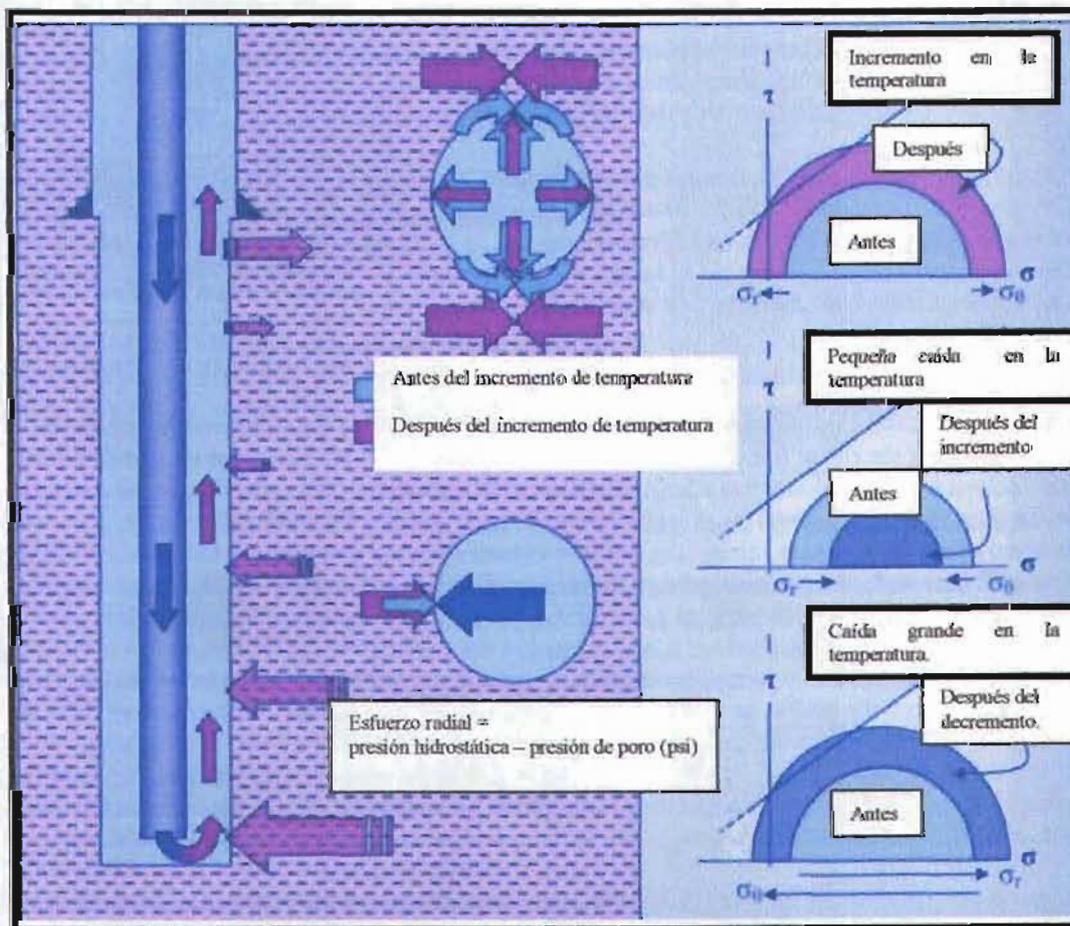


Fig. 2.11 Envolvente de falla de Mohr para los cambios de temperatura³

2.5.4 Régimen de esfuerzos in-situ

El "régimen de esfuerzos in-situ" se refiere al campo de esfuerzos regional que existe en la localización a perforar. El régimen de esfuerzos es un resultado de las fuerzas tectónicas que empujan y estiran la corteza de tierra. Las rocas fallan a menudo por el esfuerzo de corte y el esfuerzo de corte es resultado de la diferencia entre los esfuerzos horizontales σ_H y σ_h . La diferencia en el campo de esfuerzos horizontales se refiere como el esfuerzo anisotrópico. El esfuerzo anisotrópico representa la diferencia en la resistencia de los esfuerzos horizontales σ_H y σ_h . Para maximizar la estabilidad de la pared del agujero, necesitamos reducir al mínimo la anisotropía a través de la dirección y la inclinación de la trayectoria del pozo

2.5.5 La inclinación y orientación de la trayectoria del pozo

Para un régimen de esfuerzos: $\sigma_v > \sigma_H > \sigma_h$ (falla normal)

- La dirección más estable para perforar está a lo largo del azimut de σ_h .
- El ángulo de inclinación debe aumentar como la diferencia se incrementan entre σ_H y σ_h .
- Si los esfuerzos horizontales son iguales, $\sigma_H = \sigma_h$ entonces el ángulo de la inclinación debe ser cero. ($\theta = 0^\circ$)
- Si el esfuerzo horizontal principal es igual al esfuerzo vertical, $\sigma_H = \sigma_v$ entonces el pozo debe ser perforado horizontalmente $\theta = 90$.

Para un régimen de esfuerzos: $\sigma_H > \sigma_v > \sigma_h$ (falla lateral)

- El ángulo más estable de inclinación para perforar es horizontalmente ($\theta = 90^\circ$).
- La dirección más estable a perforar depende del cociente del esfuerzo principal horizontal contra el esfuerzo vertical. Generalmente, como la

diferencia entre los esfuerzos horizontales aumenta, la dirección necesita seguir lo más cercano a la dirección del esfuerzo principal σ_H .

- Como la relación entre el fuerza mayor y el esfuerzo vertical aumenta, la perforación más estable es conseguir la dirección más cercana a la dirección σ_H .
- Si el esfuerzo horizontal menor es igual al esfuerzo vertical, $\sigma_h = \sigma_v$ entonces la dirección más estable para perforar está a lo largo del azimut de σ_H .

Para un régimen de esfuerzos: $\sigma_H > \sigma_h > \sigma_v$ (falla inversa)

- La dirección más estable para perforar es a lo largo del azimut de σ_H .
- El ángulo de la inclinación debe aumentar como aumenta la diferencia entre σ_H y σ_h .
- Si los esfuerzos horizontales son iguales, $\sigma_h = \sigma_H$, entonces el pozo se debe perforar verticalmente.
- Si el cociente de $\sigma_h = \sigma_v$ entonces que el pozo se debe perforar horizontalmente ($\theta = 90$).

2.5.6 Invasión del filtrado del fluido de perforación

La invasión de filtrado debilita la roca y altera la distribución de esfuerzo dentro de la roca.

La reducción del esfuerzo radial por la invasión de filtrado reduce la resistencia aparente de la roca y aumenta el esfuerzo tangencial. Como el filtrado invade los poros, la presión de poro aumenta. Esto reduce el esfuerzo efectivo. (Esfuerzo total = presión de poro + esfuerzo efectivo). El fluido rompe el contacto entre los granos, esto baja la cementación y la fricción entre los granos. El filtrado también actúa como lubricante, que reduce más la fricción interna. Si todo esto no es bastante malo, el filtrado reacciona químicamente y mecánicamente con la arcilla de la lutita, causando hinchamiento y dispersión.

El incremento en la presión del poro por la invasión de filtrado reduce el esfuerzo radial efectivo, que alternadamente también conduce a un alto esfuerzo de aro. (Figura 2.12)

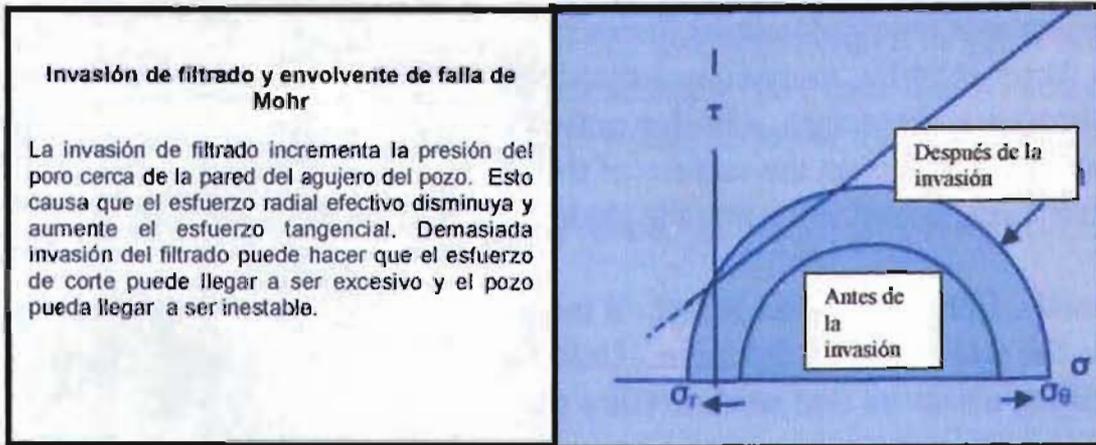


Fig. 2.12 Envolvente de estabilidad de Mohr por la invasión de filtrado

2.5.7 Efecto de la actividad química

El estudio de la estabilidad del pozo en zonas arcillosas requiere que en el modelo no sólo se consideren los aspectos mecánicos, sino también que se consideren el efecto químico del lodo de perforación y formación.

El movimiento de entrada y salida de agua en las lutitas esta gobernada por muchos mecanismos más importantes son:

- **Diferencia de potencial hidráulico.**- diferencia entre la presión ejercida por el lodo y la presión de poro
- **Diferencia de potencial químico.**- diferencia de actividad química entre el fluido de perforación y los fluidos contenidos en los poros de la lutita

Los esfuerzos causados por la diferencia de potencial químico (energía libre molar parcial del agua), entre el fluido de perforación y las lutitas, puede ser calculado por la existencia de un equilibrio entre dos potenciales químicos.

$$\frac{\ln(a_{wf}) * RT}{V_{Mw}} - \frac{\ln(a_{ws}) * RT}{V_{Mw}} = 0. \quad (2.35)$$

Donde:

a_{ws} es la actividad del agua de la lutita

a_{wf} es la actividad del agua del fluido de perforación

V_{Mw} volumen molar del componente

R constante de los gases

T temperatura absoluta

Si la ecuación anterior es resuelta para los esfuerzos asociados a la lutita, entonces quedaría como resultado la siguiente ecuación:

$$\sigma \left[\frac{RT}{V} * \ln \left(\frac{a_{wf}}{a_{ws}} \right) \right] = \pm \Delta P = (p_{nw} - p_{pf}). \quad (2.36)$$

Donde ΔP es la diferencial de presión en el poro resultado de la diferencia de actividad en los fluidos, p_{pf} es la presión lejos de la pared del pozo debida a la actividad química en el fluido de la formación, p_{nw} es la presión en la cercanía de la pared del pozo debida a la actividad química del lodo en el agujero, σ coeficiente de reflexión (mide la capacidad de la arcilla de actuar como una membrana semipermeable ideal y se encuentra en el rango de 1 a 0).

- Cuando $a_{ws} > a_{wf}$ la presión de poro decrese ($P_p - \Delta P$)
- Cuando $a_{ws} < a_{wf}$ la presión de poro se incrementa ($P_p + \Delta P$)
- Cuando $a_{ws} = a_{wf}$ la presión de poro no cambia ($\Delta P = 0$)

Si la actividad del fluido, a_{ws} , no esta disponible se puede estimar mediante la siguiente expresión:

$$a_{ws} = \frac{a_{wf}}{\exp \left[\frac{V (\sigma_r - 3P_o)}{RT} \right]}. \quad (2.37)$$

Donde:

$$\sigma_T = (\sigma_v + \sigma_H + \sigma_h)$$

p_0 es la presión de poro e la formación

2.5.8 Vibración de la sarta de perforación

La vibración de la sarta de perforación contribuye a la inestabilidad del agujero más de lo que mucha gente piensa. El esfuerzo radial, axial, y tangencial todos fluctúan en presencia de la vibración en la sarta de perforación. Esta fluctuación causa fatiga por esfuerzo, en casos extremos, puede hacer que la resistencia máxima de roca pueda ser excedida en apenas un ciclo.

La tubería de perforación está casi siempre en contacto con la pared del agujero. Mientras que rota, puede rebotar de pared a pared o al girar alrededor del perímetro de la pared. La fuerza centrífuga de la tubería rotando fuerza a chocar con la pared. Mientras que la tubería golpea la pared, transfiere momento y aplica una fuerza radial. Este golpetear de la tubería contra la pared iniciará las vibraciones a través de la longitud de la tubería (figura 2.13).



Fig. 2.13 Vibración de la sarta de perforación

2.6 SEÑALES DE PELIGRO Y MEDIDAS PREVENTIVAS CUANDO SE PERFORA

Medidas Preventivas	Trayectoria	<ul style="list-style-type: none"> El régimen de esfuerzos debe ser determinado y la trayectoria del pozo se debe orientar para reducir al mínimo los esfuerzos anisotrópicos calculados.
	Propiedades lodo	<ul style="list-style-type: none"> El peso del lodo es el más crítico. Otra propiedad importante del lodo es la inhibición. El control de filtración es otra característica que puede ser beneficiosa. La viscosidad plástica del lodo debe ser reducida al mínimo.
	Fluctuaciones de temperatura	<ul style="list-style-type: none"> Los períodos bajos o sin circulación causarán la fluctuación de temperatura y se deberán reducir al mínimo o evitar tanto como sea posible.
	Diseño de la sarta de perforación	<ul style="list-style-type: none"> Las vibraciones de la sarta de perforación deberán ser reducidas al mínimo Altas inclinaciones adicionales a los esfuerzos de la pared conduce a un alto suaveo y surgencia.
	Viajes de limpieza	<ul style="list-style-type: none"> El viaje de limpieza ocasional para limpiar el agujero, el lavado de las arcillas hinchadas, o el incremento de problemas deberán ser considerados.
Señales de peligro	En superficie	<ul style="list-style-type: none"> Los recortes son astillas con las superficies curvadas. Los recortes son angulares y en trozos. En formaciones sin consolidar, los recortes pueden parecer como cortados, o estar bien redondeados e intacto
	En conexiones	<ul style="list-style-type: none"> Agujero lleno después de las conexiones o del viaje. Tirón después de las conexiones. Una presión de surgencia para comenzar la circulación.
	Durante el viaje	<ul style="list-style-type: none"> Suaveo mientras se viaja. Pistoneo mientras se circula. Arrastramiento excesivo y errático. Torque, arrastre y presión errática mientras se repasa.
	En la perforación	<ul style="list-style-type: none"> Los signos de torque y arrastre son incrementados y erráticos Aumento en la velocidad de penetración seguido por una disminución Pérdida de lodo

Señales de peligro de lutitas químicamente tensionadas	En superficie	Incremento en la viscosidad del embudo. viscosidad plástica, punto de cedencia, y la capacidad de intercambio catiónico. Incremento en el peso del lodo. En la temblorina se tendrán recortes pegajosos o bolas de arcillas.
	En la perforación	Embolamiento de la barrena Surgencia y suaveo El torque y arrastre tiende a incrementarse y mantenerse Pérdida de fluido Un aumento en la presión y presión de surgencia.
	En conexiones	Aumento del torque y del arrastre Jalón fuera de las cuñas. Puede haber una presión de surgencia al iniciar la circulación Contrapresión y contraflujo a través de la tubería de perforación
	Durante el viaje	Lentamente pero se incrementa el torque y el arrastre. La surgencia y pérdida de lodo mientras se realiza el viaje Cuando se viaja, los problemas primero ocurren a la profundidad donde se encuentra la formación problema. Si se bombea hacia fuera, un pistoneo severo puede ocurrir.

Señales de peligro en formaciones sin consolidar	Repentinos y erráticos torque y arrastre. Llenado del agujero en conexiones. Ocurre mientras que se está perforando la formación o mientras se mueve la sarta de perforación hacia arriba o abajo. Los problemas pueden aparecer y desaparecer y es difícil fijar abajo una profundidad específica. Esto es porque el material obturante se mueve hacia arriba o abajo del pozo. Recortes de derrumbe o trozos de cemento en la temblorina.
---	---

<p>Procedimientos para liberar</p>	<p>Primera Acción</p>	<p>Liberar cualquier presión atrapada y aplicar 200 PSI a 500 PSI para intentar reestablecer la circulación después del torque y asentamiento de tubería. Martillar abajo si el martillo está en la sarta. La mejor dirección para el movimiento de la tubería es hacia abajo para reducir las fuerzas que acuña. Una vez que se establezca la circulación, el agujero debe ser limpiado antes de seguir perforando.</p>
	<p>Procedimientos Secundarios</p>	<p>La herramienta de resonancia de frecuencia baja puede ser acertada en la fluidificación los recortes del empaquetamiento, permitiendo que la sarta de perforación se mueva a través de ella. Desenroscar (backing off) y el lavarse encima con tubería lavadora pueden ser acertados si las condiciones que causaban la inestabilidad se han tratado.</p>
<p>Procedimientos para liberar</p>	<p>Primera Acción</p>	<p>La primera acción deberá ser la aplicación de un esfuerzo de torque y martillar abajo. Si no hay restricciones de presión, la circulación se puede mantener altas velocidades.</p>
	<p>Procedimientos Secundarios</p>	<p><i>Baches</i> pueden ser usados para de reducir la fricción. Una vez que la tubería esté libre, los pedazos grandes de la roca se deben romper y barrer fuera del pozo. Los baches viscosos ayudarán a limpiar el pozo y ayudará a mantener en suspensión los recortes alrededor de la sarta mientras que las bombas están apagadas.</p>

La concentración de esfuerzos del agujero es crítico para la perforación de pozos, ya que es un factor importante para controlar la estabilidad del agujero. Las condiciones de frontera del fluido alojado en los poros, tales como la presión de poro o el gasto en las paredes del agujero, afectan significativamente la estabilidad del agujero.

Modelos elásticos convencionales generalmente utilizan dos casos para predecir las condiciones en la pared del agujero:

- Pared Permeable.- presión de poro igual a la presión del pozo.
- Pared impermeable.- presión de poro igual a la presión de formación.

Modelos poroelásticos recientemente desarrollados, indicaron que la presión de poro alrededor del agujero puede ser muy diferente de la presión del pozo o de la formación, especialmente para un cierto periodo de tiempo después de la perforación y de la inyección de fluidos. En estos modelos, la presión de poro en la pared del agujero se asume que es igual a la presión del pozo para el caso permeable; y que no existe flujo a través de la pared para el caso impermeable, pero el gasto y la presión están en función del tiempo.

3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Se asume que el agujero es perforado a través de una formación saturada isotrópica. El eje del agujero (eje z en figura 1(a)) está desviado de las direcciones de esfuerzos in situ, S_x , S_y y S_z . la desviación se mide por medio de dos ángulos ψ_x y ψ_y , los cuales son la inclinación y el azimut respectivamente. La figura 3.1(b) muestra las componentes del campo original de esfuerzos en un sistema coordenado xyz , los cuales se denotan como S_x , S_y , S_z , S_{xy} , S_{yz} y S_{xz} . Las componentes del campo original de esfuerzos en el sistema coordenado en el agujero pueden ser evaluadas a partir de los esfuerzos in-situ por:

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ S_{xy} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{xx}^2 & l_{xy}^2 & l_{xz}^2 \\ l_{yx}^2 & l_{yy}^2 & l_{yz}^2 \\ l_{zx}^2 & l_{zy}^2 & l_{zz}^2 \\ l_{xx}l_{yx} & l_{xy}l_{yy} & l_{xz}l_{yz} \\ l_{yx}l_{zx} & l_{yy}l_{zy} & l_{yz}l_{zz} \\ l_{zx}l_{xy} & l_{zy}l_{yx} & l_{zz}l_{xz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{x'} \\ S_{y'} \\ S_{z'} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} l_{xx} & l_{xy} & l_{xz} \\ l_{yx} & l_{yy} & l_{yz} \\ l_{zx} & l_{zy} & l_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_x \cos \varphi_z & \text{sen} \varphi_x \cos \varphi_z & -\text{sen} \varphi_z \\ -\text{sen} \varphi_x & \cos \varphi_z & 0 \\ \cos \varphi_z \text{sen} \varphi_z & \text{sen} \varphi_x \text{sen} \varphi_z & \cos \varphi_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

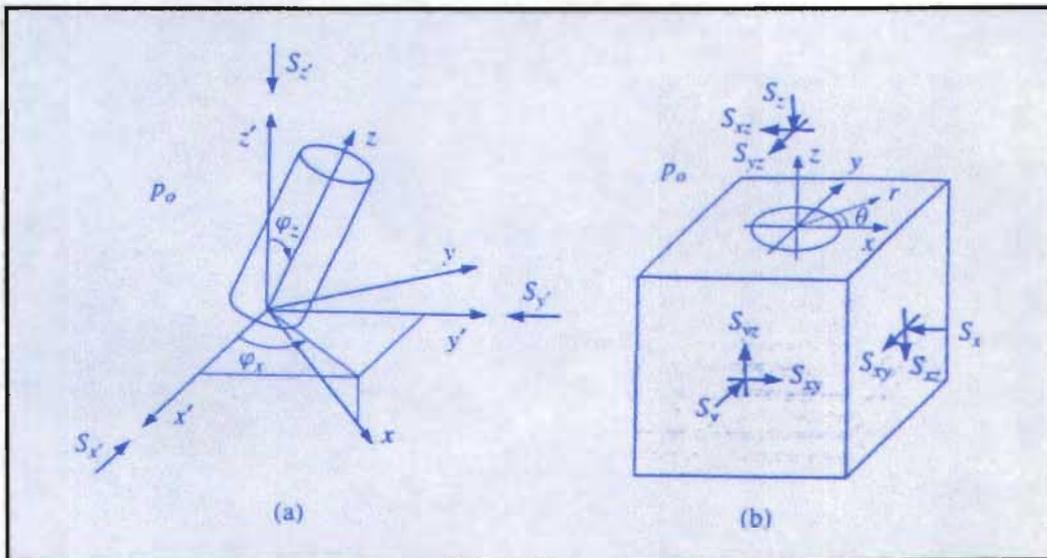


Fig. 3.1 Agujero inclinado de un material transversalmente isotrópico¹

Las condiciones de frontera del problema en $r \rightarrow \infty$ puede ser impuestas como:

$$\sigma_{xx} = -S_x, \quad (3.3a)$$

$$\sigma_{yy} = -S_y, \quad (3.3b)$$

$$\sigma_{zz} = -S_z, \quad (3.3c)$$

$$\sigma_{xy} = -S_{xy}, \quad (3.3d)$$

$$\sigma_{yz} = -S_{yz}, \quad (3.3e)$$

$$\sigma_{xz} = -S_{xz}, \quad (3.3f)$$

$$p = p_o. \quad (3.3g)$$

Donde σ_{ij} es el componente de esfuerzo bajo el sistema coordenado cartesiano xyz, y p_o es la presión de poro.

Las condiciones de frontera en la pared del agujero (esto es $r=R$) son afectadas por las operaciones de perforación, terminación o inyección. Sin embargo, la condición de frontera de los esfuerzos parece ser: la pared está libre de esfuerzos de corte y el esfuerzo de corte y el esfuerzo radial total es igual a la presión del pozo a la presión de inyección. Estas condiciones pueden ser expresadas como:

$$\sigma_{rr} = p_w H(t), \quad (3.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0. \quad (3.5)$$

Donde p_w es la presión del pozo, la cual puede ser una función dependiente del tiempo, y $H(t)$ es la función de Heaveside.

3.2 CONDICIONES DEL FLUIDO EN LOS POROS EN LA PARED DEL AGUJERO

La condición del fluido en las paredes está afectada por muchos factores tales como: la presión del pozo o la de inyección, la condición de permeabilidad de la pared, las propiedades del enjarre y en presencia de arcillas, reacciones químicas. Las condiciones de frontera en la pared del agujero para el fluido alojado en los poros están impuestas por:

En $r=R$

$$p = p_i(t). \tag{3.6}$$

$$q_r = q_i(t) = \frac{Q(t)}{2\pi R}. \tag{3.7}$$

Donde p_i y q_i son la presión de poro y la descarga específica en la dirección radial en la pared del agujero y Q es el ritmo de flujo a través de la pared del agujero en una profundidad unitaria.

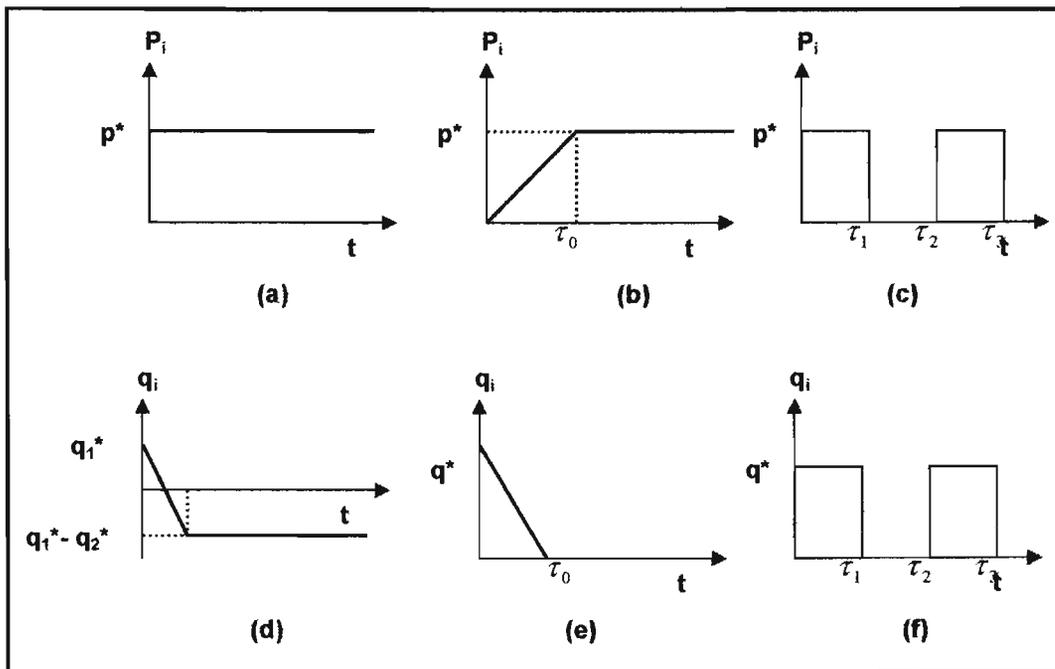


Fig. 3.2 Condiciones de frontera de fluido de poro²

3.2.1 Condiciones de frontera para la presión

➤ Presión de poro constante (Fig. 3.2(a))

La presión de poro en la pared del agujero se mantiene constante; sin embargo, puede diferir de la presión del pozo debido a la existencia de un enjarre o por otras razones. Esto puede expresarse por:

$$p_i = [p_o + \beta(p_o - p)]H(t) \quad (3.8)$$

Donde $0 < \beta < 1$ Cuando $\beta = 1$ se vuelve el caso completamente permeable.

➤ Presión de poro tipo rampa (Fig. 3.2(b))

La presión de poro en la pared del agujero se incrementa linealmente hasta determinado nivel, manteniéndose entonces constante. Esto puede ser expresado por:

$$p_i = p^* \left\langle \left[1 - H(t - \tau_o) \right] \frac{t}{\tau_o} + H(t - \tau_o) \right\rangle \quad (3.9)$$

Donde p^* es la presión finalmente alcanzada y τ_o indica el tiempo cuando la presión de poro se vuelve constante. Este tipo de condición de presión de poro puede aproximarse al proceso de aplicación del fluido de perforación en la pared del agujero después de perforar o inyectar.

➤ Presión de poro con onda cuadrada (Fig. 3.2(c))

Esto puede ser expresado como:

$$P_i = p^* [H(t) - H(t - \tau_1) + H(t - \tau_2) - H(t - \tau_3) + \dots - H(t - \tau_{2n-1})] \quad (3.10)$$

Donde p^* es la amplitud de la curva de presión de poro, $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_{2n-1}$, y n es el número de cuadrados. Este tipo de condición de frontera puede aproximarse a algunos registros cíclicos de presión de poro tales como aquellos tomados, en fracturamientos hidráulicos.

3.2.2 Condiciones de frontera de flujo

- Reducción lineal de flujo (Fig. 3.2((d)-(e)))

El flujo linealmente reducido comienza a partir de determinado ritmo de flujo en la pared del agujero hasta reducirse a cero o aún hasta revertirse la dirección del flujo. Esto puede ser expresado por:

$$q_i = q_i * \{H(t)\} - q_2 \left\{ [H(t - \tau_o)] + [1 - H(t - \tau_o)] \frac{t}{\tau_o} \right\} \quad (3.11)$$

Para el caso particular donde el flujo se reduce a cero tal como se muestra en la Fig. 3.2(e) y $q_1^* = q_2^* = q^*$, entonces q_i se expresa como:

$$q_i = q_i * \left\{ [H(t) - H(t - \tau_o)] - [1 - H(t - \tau_o)] \frac{t}{\tau_o} \right\} \quad (3.12)$$

- Flujo onda cuadrada (Fig. 2(f)) Este puede ser expresado como:

$$q_i = q^* [H(t) - H(t - \tau_1) + H(t - \tau_2) - H(t - \tau_3) + \dots - H(t - \tau_{2n-1})] \quad (3.13)$$

Donde q^* es la amplitud de la curva del gasto.

3.3 SOLUCIÓN ANALÍTICA³

Los esfuerzos y la presión de poro alrededor de un agujero inclinado se expresan como:

$$\sigma_{rr} = -P_o + S_o \cos 2(\theta - \theta_r) + \sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{rr}^{(3)}, \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -P_o + S_o \cos 2(\theta - \theta_r) + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(3)}, \quad (3.15)$$

$$p = p_o + p^{(2)} + p^{(3)}, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \alpha(1 - 2\nu)p - S_x + [\nu(S_x + S_y) + \alpha(1 - 2\nu)p_o], \quad (3.17)$$

$$\tau_{r\theta} = -S_o \sin 2(\theta - \theta_r) + \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad (3.18)$$

$$\tau_{rz} = -(S_{xx} \cos \theta + S_{yz} \sin \theta) \left[1 - H(t) \frac{R^2}{r^2} \right], \quad (3.19)$$

$$\tau_{\theta z} = (S_{xx} \sin \theta - S_{yz} \cos \theta) \left[1 - H(t) \frac{R^2}{r^2} \right]. \quad (3.20)$$

Donde $\sigma_{rr}^{(1)}, \sigma_{rr}^{(2)}, \sigma_{rr}^{(3)}, \sigma_{\theta\theta}^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(2)}, \sigma_{\theta\theta}^{(3)}, \sigma_{r\theta}^{(1)}, p^{(1)}, p^{(2)}$ son las soluciones para los tres modos de carga de un problema de deformación plana, $S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}$ se obtienen de 3.2, 3.1 y θ_r, P_o, S_o están dadas por:

$$\theta_r = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2S_{xy}}{S_x - S_y}, \quad (3.21)$$

$$P_o = \frac{S_x + S_y}{2}, \quad (3.22)$$

$$S_o = \sqrt{\left(\frac{S_x - S_y}{2}\right)^2 + S_{xy}^2} . \quad (3.23)$$

3.3.1 problemas de deformación plana

El problema de deformación plana correspondiente a $\sigma_{rr}^{(1)}$, $\sigma_{rr}^{(2)}$, $\sigma_{rr}^{(3)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(3)}$, $\sigma_{r\theta}^{(1)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, se explica a continuación.

Las condiciones de frontera al infinito ($r \rightarrow \infty$) son homogéneas

$$\sigma_{xx} = 0, \quad (3.24a)$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad (3.24b)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad (3.24c)$$

$$p = 0. \quad (3.24d)$$

y la pared del agujero ($r=R$)

$$\sigma_{rr} = -[P_o - S_o \cos(\theta - \theta_r)H(-t) - p_w(t)], \quad (3.25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -S_o \cos(\theta - \theta_r)H(-t), \quad (3.26)$$

$$A_1 p + A_2 q_r = A_1 p_i(t) + A_2 q_i(t). \quad (3.27)$$

La solución analítica de esfuerzos y presión de poro alrededor del agujero para problemas de deformación plana fueron obtenidas por Detournay y Cheng (1988)² y se explica a continuación.

Nosotros consideramos un agujero perforado verticalmente en una formación porosa. Los esfuerzos en situ se muestran la figura 3.3.

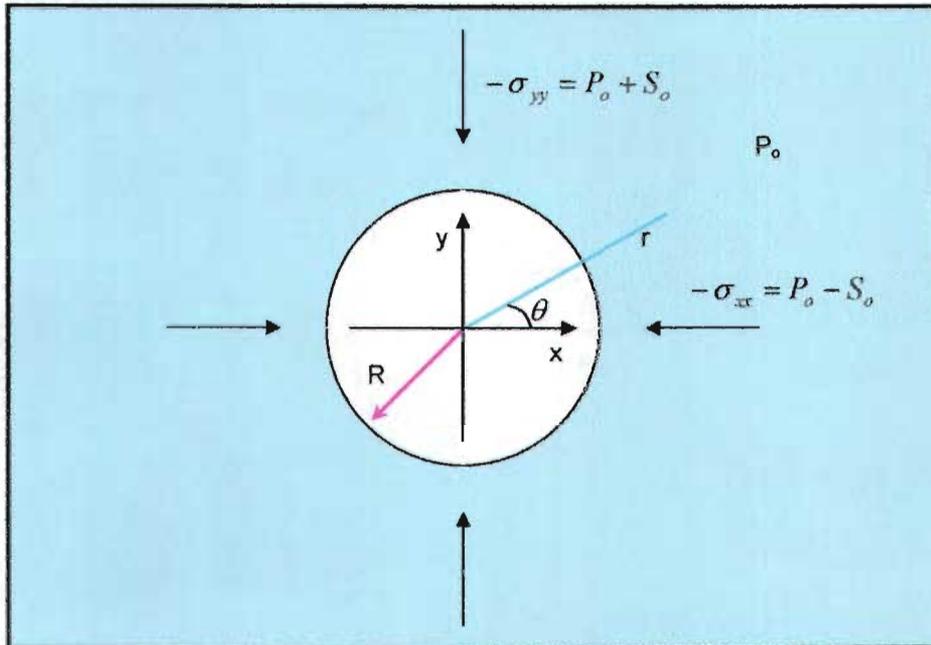


Fig. 3.3 Definición del problema de deformación plana²

$$\sigma_{xx} = -(P_0 - S_0), \quad (3.28a)$$

$$\sigma_{yy} = -(P_0 + S_0), \quad (3.28b)$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad (3.28c)$$

$$P = P_0. \quad (3.28d)$$

Donde P_0 y S_0 son, respectivamente el esfuerzo promedio y el esfuerzo deviator, p_0 la presión de poro virgen. Se asume que uno de los esfuerzos principales en situ es paralelo al eje del agujero y que los ejes x , y corresponden a las otras dos direcciones principales.

Este problema puede ser analizado asumiendo condiciones de deformación plana y que el agujero es perforado instantáneamente, por lo tanto es conveniente descomponer el problema en tres modos de carga: (1)

esfuerzos isotrópicos, (2) presión de poro virgen, (3) esfuerzo deviatorio.

Las condiciones en la pared del agujero para cada modo de carga están dadas:

Modo 1

$$\sigma_{rr}^{(1)} = -(P_0 H(t) - p_w(t)), \quad (3.29)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0, \quad (3.30)$$

$$p^{(1)} = 0, \quad (3.31)$$

Modo 2

$$\sigma_{rr}^{(2)} = 0, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = 0, \quad (3.33)$$

$$A_1 p^{(2)} + A_2 q_r^{(2)} = A_1 p_i(t) + A_2 q_i(t). \quad (3.34)$$

Modo 3

$$\sigma_{rr}^{(3)} = S_o \cos 2(\theta - \theta_r) H(t), \quad (3.35)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)} = -S_o \sin 2(\theta - \theta_r) H(t), \quad (3.36)$$

$$A_1 p^{(3)} + A_2 q_r^{(3)} = 0, \quad (3.37)$$

Donde r y θ son coordenadas polares, definidas en la Fig. 3.3. Los esfuerzos inducidos y la presión de poro se desvanecen al infinito. Soluciones para el esfuerzo inducido, presión de poro son derivados a para cada modo de carga (ver apéndice A, B y C).

3.3.2 Condición de frontera de presión de poro.

Se debe notar que las soluciones para los modos 2 y 3 se obtienen en el dominio de Laplace (ver apéndice 1 y 3). Las soluciones para los esfuerzos y la presión de poro para los tres están dadas como:

Modo 1

$$\sigma_{rr}^{(1)} = (P_0 - pw(t)) \frac{R^2}{r^2}, \quad (3.38)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -(P_0 - pw(t)) \frac{R^2}{r^2}, \quad (3.39)$$

$$p^{(1)} = 0, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (3.41)$$

Modo 2

$$p = -p_i \frac{K_0(\xi)}{K_0(\beta)}, \quad (3.42)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\eta p_i}{\beta} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{K_1(\beta)}{K_0(\beta)} \right) \right], \quad (3.43)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\eta p_i}{\beta} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{K_1(\beta)}{K_0(\beta)} \right) + \frac{\beta K_0(\xi)}{K_0(\beta)} \right]. \quad (3.44)$$

Modo 3

$$\frac{p}{S_o} = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2(\xi), \quad (3.45)$$

$$S_{rr} = \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_2(\xi) + \frac{6}{(\xi)^2} K_2(\xi) \right] - \frac{S_o}{(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.46)$$

$$S_{\theta\theta} = -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_1(\xi) + \left(1 + \frac{2}{(\xi)^2}\right) K_2(\xi) \right] + S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.47)$$

$$S_{r\theta} = -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_1(\xi) + \frac{3}{(\xi)^2} K_2(\xi) \right] + S_o \frac{1}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.48)$$

Las constantes, C_1 , C_2 , C_3 son obtenidas de las condiciones de frontera (3.34-3.36), estas son:

$$C_1 = -\frac{12(\beta)(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}{B(1+\nu_u)(D_2-D_1)}, \quad (3.49)$$

$$C_2 = -\frac{4(1-\nu_u)D_2}{(D_2-D_1)}, \quad (3.50)$$

$$C_3 = -\frac{(\beta)^2(D_2-D_1) + 8(\beta)(\nu_u-\nu)K_2(\beta)}{(\beta)^2(D_2-D_1)}. \quad (3.51)$$

donde:

$$D_1 = (\beta)(1-\nu)K_2(\beta), \quad (3.52)$$

$$D_2 = 2(\nu_u - \nu)K_1(\beta), \quad (3.53)$$

3.3.3 Condición de frontera de flujo.

Se debe notar que las soluciones para los modos 2 y 3 se obtienen en el dominio de Laplace (ver apéndice 2 y 3). Las soluciones para los esfuerzos y la presión de poro para los tres están dadas como:

Modo 1

$$\sigma_{rr}^{(1)} = (P_0 - pw(t))\frac{R^2}{r^2}, \quad (3.54)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -(P_0 - pw(t))\frac{R^2}{r^2}, \quad (3.55)$$

$$p^{(1)} = 0, \quad (3.56)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (3.57)$$

Modo 2

$$\bar{p} = \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0(\xi)}{K_1(\beta)}, \quad (3.58)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\eta R}{q_i \beta^2} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \right) \right], \quad (3.59)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\eta q_i}{\beta^2} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1(\xi)}{K_1(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\beta K_0(\xi)}{K_1(\beta)} \right], \quad (3.60)$$

Modo 3

$$\frac{p}{S_o} = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2(\xi), \quad (3.61)$$

$$S_{rr} = \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_2(\xi) + \frac{6}{(\xi)^2} K_2(\xi) \right] - \frac{S_o}{(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.62)$$

$$S_{\theta\theta} = -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_1(\xi) + \left(1 + \frac{2}{(\xi)^2}\right) K_2(\xi) \right] + S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \quad (3.63)$$

$$S_{r\theta} = -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{(\xi)} K_1(\xi) + \frac{3}{(\xi)^2} K_2(\xi) \right] + S_o \frac{1}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4} \quad (3.64)$$

Las constantes, C_1 , C_2 , C_3 son obtenidas de las condiciones de frontera (3.34-3.36), estas son:

$$C_1 = -\frac{12(\beta)(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}{B(1+\nu_u)(D_2-D_1)}, \quad (3.65)$$

$$C_2 = -\frac{4(1-\nu_u)D_2}{(D_2-D_1)}, \quad (3.66)$$

$$C_3 = -\frac{(\beta)^2(D_2-D_1) + 8(\beta)(\nu_u-\nu)K_2(\beta)}{(\beta)^2(D_2-D_1)}, \quad (3.67)$$

Donde:

$$D_1 = (\beta)(1-\nu)K_2(\beta), \quad (3.68)$$

$$D_2 = 2(v_u - v)K_1(\beta), \quad (3.69)$$

Nota: debe hacerse notar que la solución de pozos inclinados para la presión de poro se obtiene sustituyendo la solución para cada modo de carga (ecuaciones 3.38-3.53 en 3.14-3.20); similar la solución para el caso de las condiciones de flujo se obtiene sustituyendo la solución para cada modo de carga correspondiente (ecuaciones 3.54-3.69 en 3.14-3.20).

4.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta sección analizaremos los esfuerzos y la presión de poro alrededor de un agujero vertical. Comparando los resultados entre los casos permeable e impermeable. Para el análisis los valores negativos de los esfuerzos indican tensión mientras que el caso positivo indica una compresión.

La siguiente geometría es usada en el análisis.

Radio del agujero (m) = 0.1

TVD (m) = 1000

La roca es de una lutita del golfo de México con las siguientes propiedades:

Módulo de corte = 1.2×10^{10} (N*m⁻²)

Módulo de Poisson = 0.219

Módulo de Poisson drenado = 0.461

Esfuerzo horizontal máximo S_H = 22 MPa

Esfuerzo horizontal mínimo S_h = 18 MPa

Esfuerzo vertical S_v = 25 MPa

Presión de poro p_o = 9.8 MPa

Viscosidad del fluido = 0.001 Pa.s.

Permeabilidad = 1×10^{-7} darcy

El análisis es realizado usando un modelo permeable, un modelo impermeable y una reducción lineal de flujo (fig.3.2 (e)) con dos diferentes parámetros.

El análisis es realizado para dos condiciones:

- **Bajobalance**.- para esta condición se asume una presión de pozo de p_w = 6.0 MPa, en el primer parámetro de reducción lineal de flujo se tiene un gasto $Q = -0.00125$ (m³/s) al tiempo cero (el signo negativo del gasto

indica que el flujo de fluido va de la formación al pozo), que se reduce a $Q = 0$ (m^3/s) a $t = 0.01$ día (864 segundos). En el segundo parámetro de reducción lineal de flujo se tiene un gasto $Q = -0.00314$ (m^3/s) al tiempo cero, que se reduce a $Q = 0$ (m^3/s) a $t = 0.01$ día.

- **Sobrealance.**- para esta condición se asume una presión de pozo de $p_w = 13.0$ MPa, en el primer parámetro de reducción lineal de flujo se tiene un gasto $Q = 0.00125$ (m^3/s) al tiempo cero (el signo positivo del gasto indica que el flujo de fluido va del pozo a la formación), que se reduce a $Q = 0$ (m^3/s) a $t = 0.01$ día (864 segundos). En el segundo parámetro de reducción lineal de flujo se tiene un gasto $Q = 0.00314$ (m^3/s) al tiempo cero, que se reduce a $Q = 0$ (m^3/s) a $t = 0.01$ día.

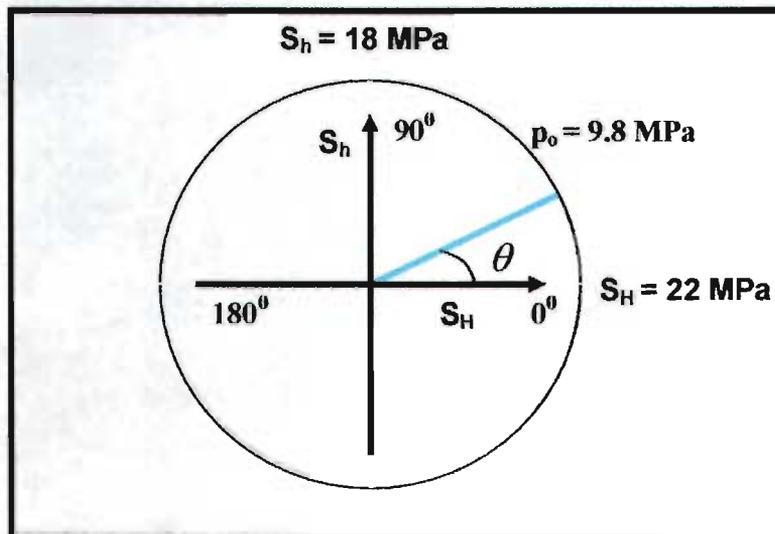


Figura 4.1 Esquema del problema

4.2 EFECTOS DE PRESIÓN DE PORO

La figura 4.2 nos muestra la historia del comportamiento de la presión de poro en la pared del agujero y $\theta = 90^\circ$ para la condición de bajobalance ($p_w = 6.0$ MPa). Se observa que para los casos impermeable y reducción lineal de flujo la presión de poro es menor que la presión de poro virgen (9.8 MPa). Se puede ver que para el caso de reducción lineal de flujo la presión de poro se reduce debido a que el fluido alojado en los poros escapa de la formación, por lo tanto a mayor gasto la presión de poros será menor.

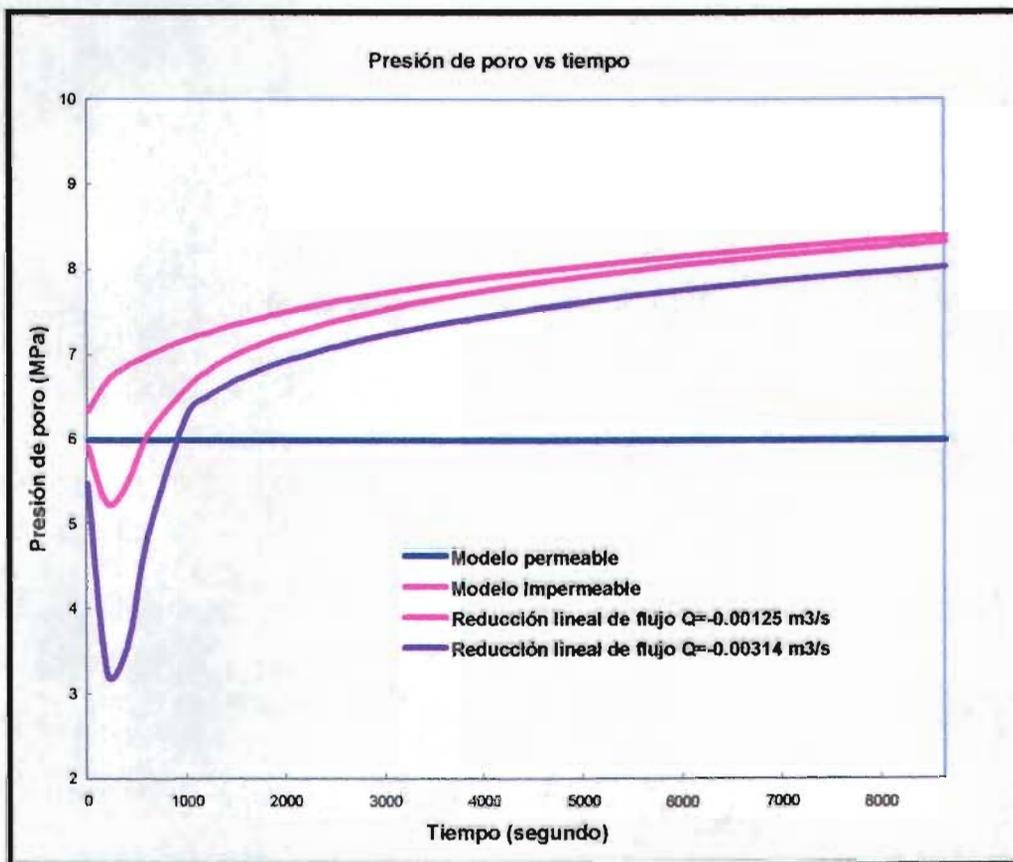


Figura 4.2 Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 0$, condición bajobalance

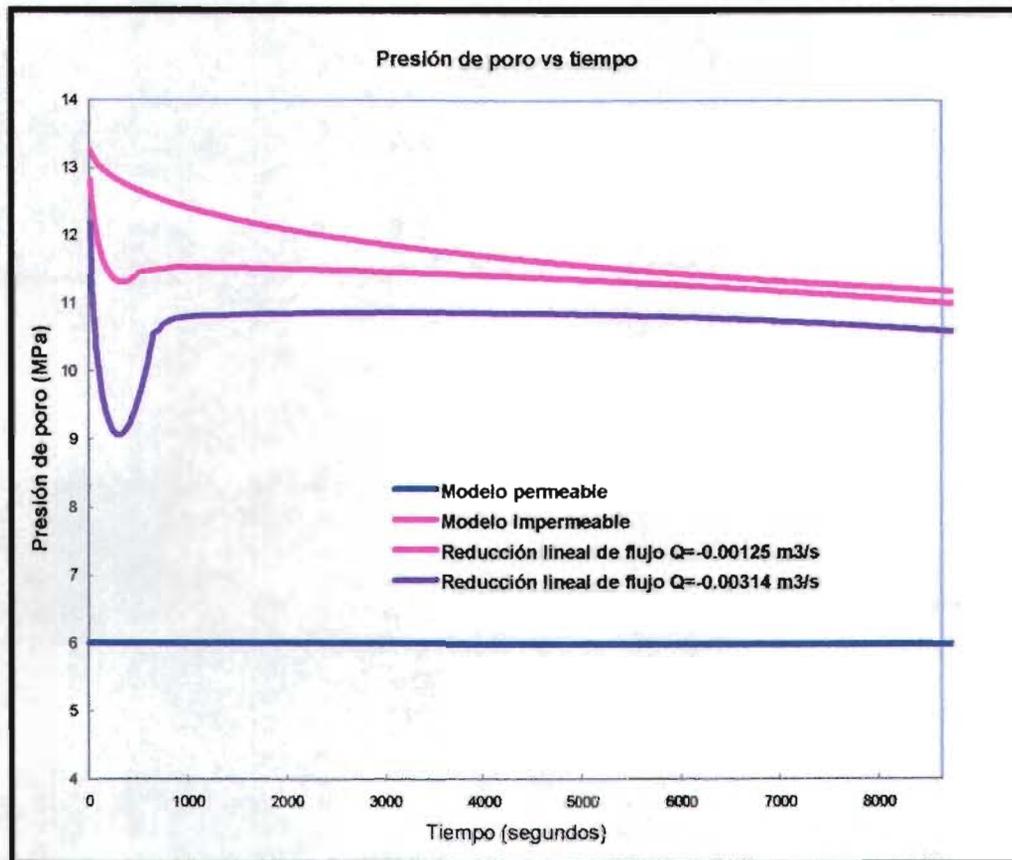


Figura 4.3 Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 90^\circ$, condición bajobalance

La figura 4.3 nos muestra la historia del comportamiento de la presión de poro en la pared del agujero y $\theta = 90^\circ$ para la condición de bajobalance ($p_w = 6.0$ MPa). En contraste cuando $\theta = 0^\circ$, se observa que para los casos impermeable y reducción lineal de flujo la presión de poro es mayor que la presión de poro virgen, debido a que hay más compresión en la región por la concentración de esfuerzos. Similar al caso anterior para el caso de reducción lineal de flujo existe una reducción de la presión de poro, por lo tanto a mayores gastos la presión de poro puede influenciar la estabilidad del agujero.

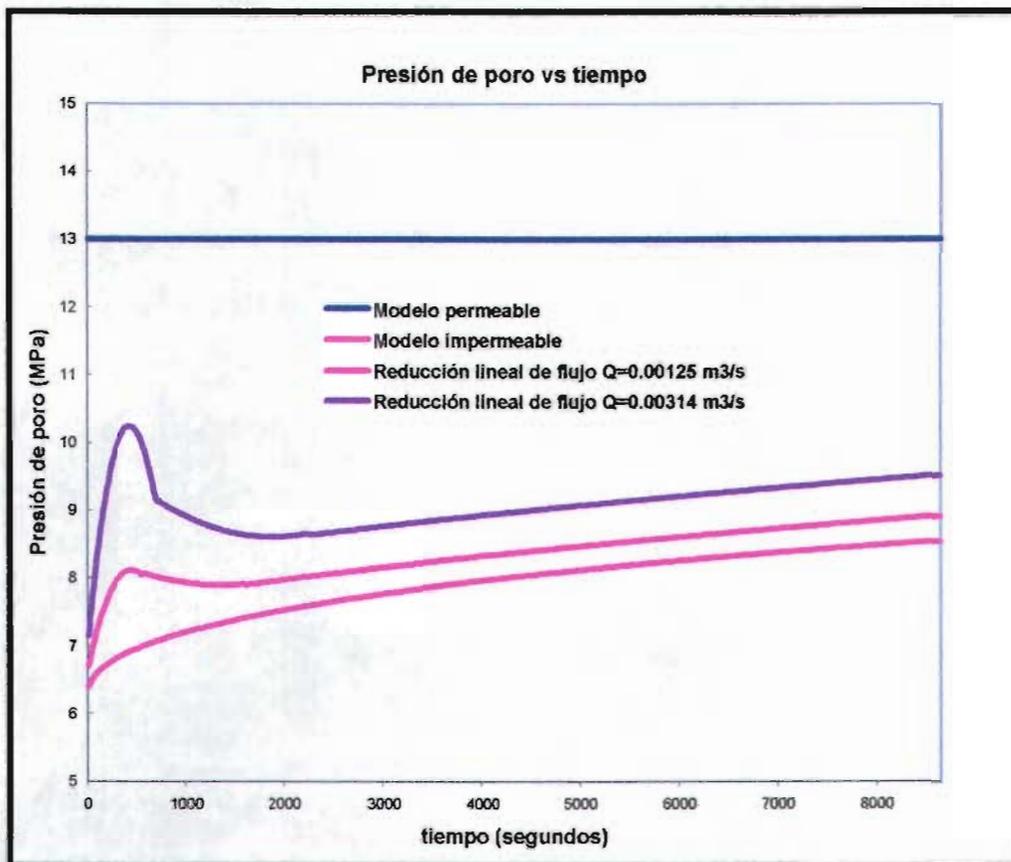


Figura 4.4 Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 0^\circ$, condición sobrebalance

Las figuras 4.4 y 4.5 nos muestra la historia del comportamiento de la presión de poro en la pared del agujero para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ para la condición de sobrebalance ($p_w = 13.0$ MPa). Se observar que para $\theta = 0^\circ$, para los casos impermeable la presión de poro es menor que la presión de poro virgen, caso contrario cuando $\theta = 90^\circ$ donde la presión de poro para los modelos impermeables y reducción lineal de flujo es mayor que la presión de poro virgen. Para el caso de reducción lineal de flujo existe un aumento la presión de poro en ambos ángulos.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

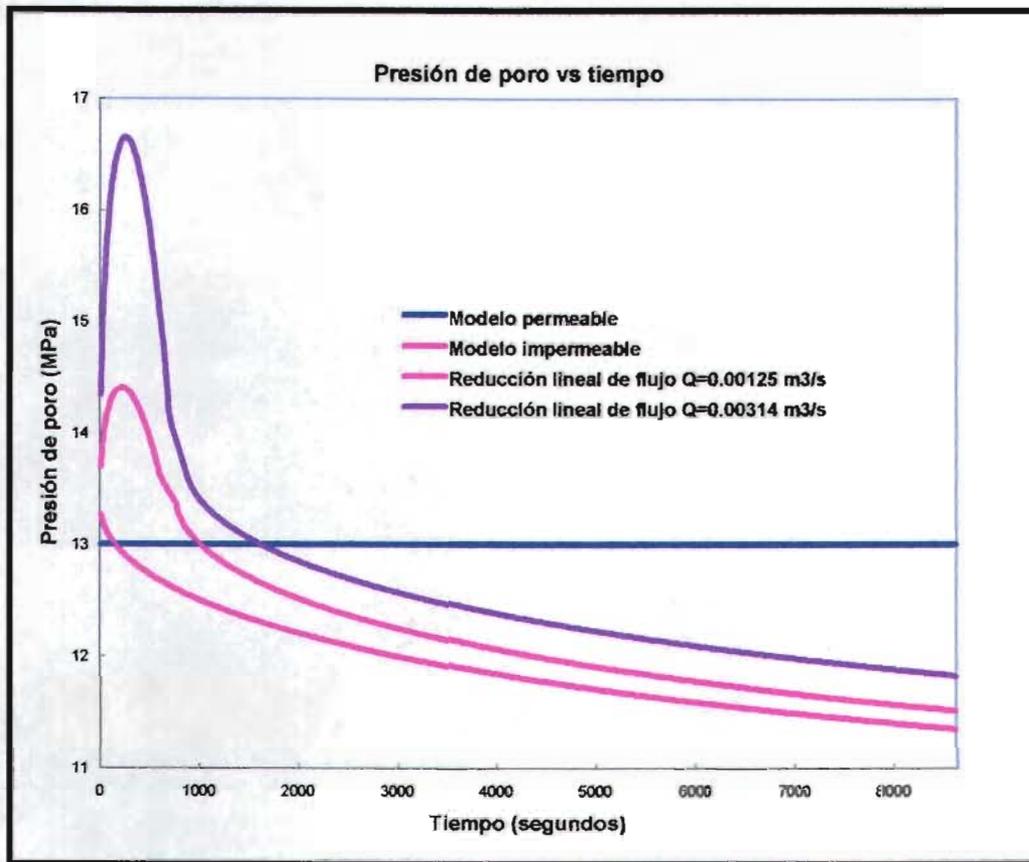


Figura 4.5 Historia de la presión de poro en la pared del agujero, $\theta = 90^\circ$, condición sobrebalance

La figura 4.6 nos muestra la distribución de la presión de poro a varios tiempos variando el ángulo alrededor del agujero. Se puede ver que la mayor presión de poro se alcanza cuando $\theta = 90^\circ$ (dirección del mínimo esfuerzo horizontal) y la menor cuando $\theta = 0^\circ$ (dirección del máximo esfuerzo horizontal). A tiempos prolongados la variación de la presión se disipa y este finalmente se aproxima a la presión de poro de la formación, mientras que a tiempos cortos la presión la presión de poro es mayor.

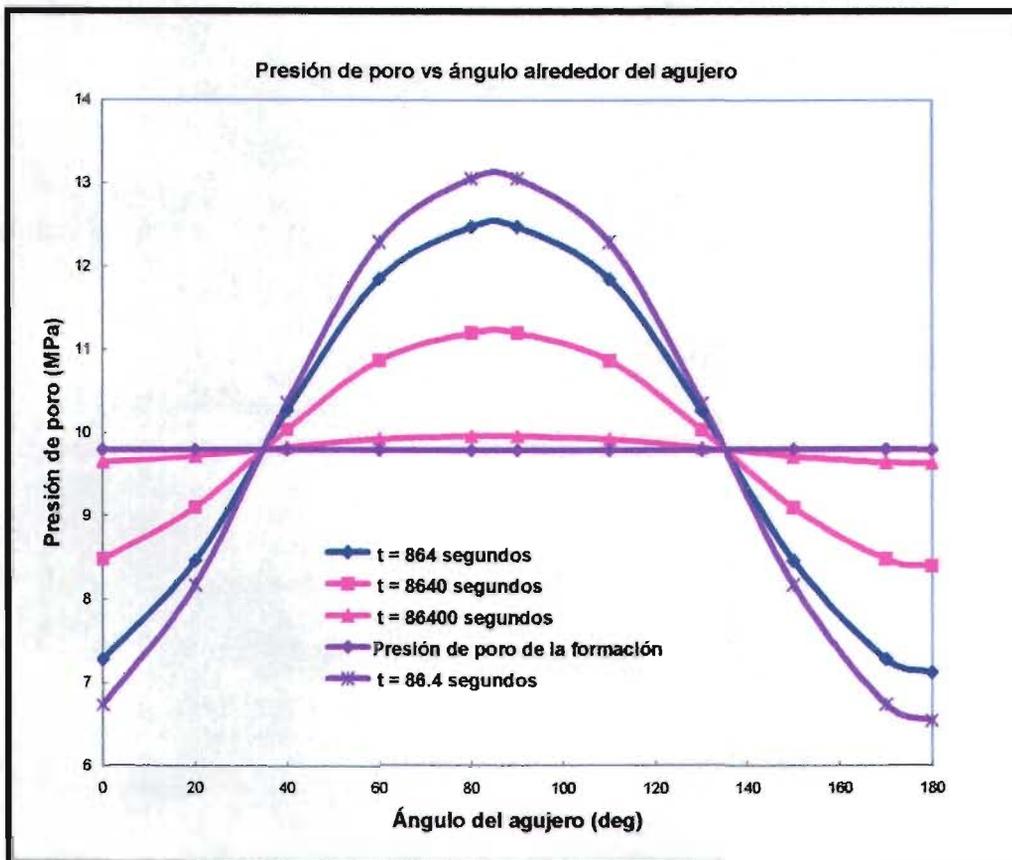


Figura 4.6 Presión de poro en la pared del agujero a varios tiempos variando el ángulo θ

4.3 EFECTOS DEL ESFUERZO TANGENCIAL EFECTIVO

La figura 4.7 nos muestra la historia del comportamiento del esfuerzo tangencial efectivo - $(\sigma_{\theta\theta} + p)$ y $\theta = 90^\circ$ en la pared del agujero para la condición de bajobalance ($p_w = 6.0$ MPa). Como se puede observar es la localización más crítica para que ocurra falla de corte. El esfuerzo tangencial para el modelo permeable es mayor que el caso impermeable, esto indica un alto potencial de falla de corte para el caso permeable en la pared. El esfuerzo tangencial para el caso de reducción lineal de flujo son también mayores que los del caso impermeable, cuanto más altos sean los gastos, mas alto será el esfuerzo tangencial, con lo cual se puede incrementar el potencial de una falla de corte. Debe notarse que a largos tiempos el esfuerzo tangencial para el caso impermeable se aproxima a un valor constante.

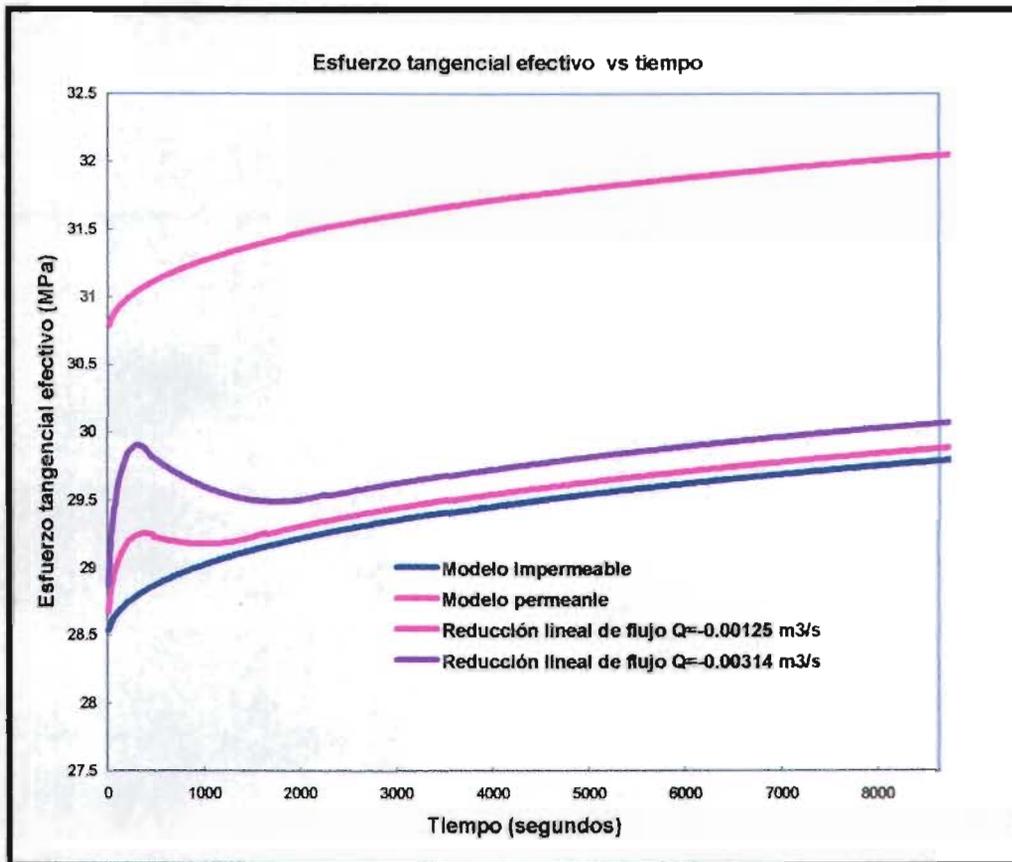


Figura 4.7 Historia del esfuerzo tangencial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición bajobalance

La figura 4.8 nos muestra la historia del comportamiento del esfuerzo tangencial efectivo - $(\sigma_{\theta\theta} + p)$ y $\theta = 0^\circ$ en la pared del agujero para la condición de sobrealance ($p_w = 13.0$ MPa). Se observa que el esfuerzo tangencial para el caso de reducción lineal de flujo es menor que para el caso impermeable; a altos gastos reducirá el esfuerzo tangencial, esto significa que el fluido que va del pozo a la formación ayudará a aumentar el potencial de fractura. Para todos los casos el esfuerzo tangencial básicamente decrece a tiempos progresivos. A largos tiempos el esfuerzo tangencial para el caso impermeable se aproxima a un valor constante.

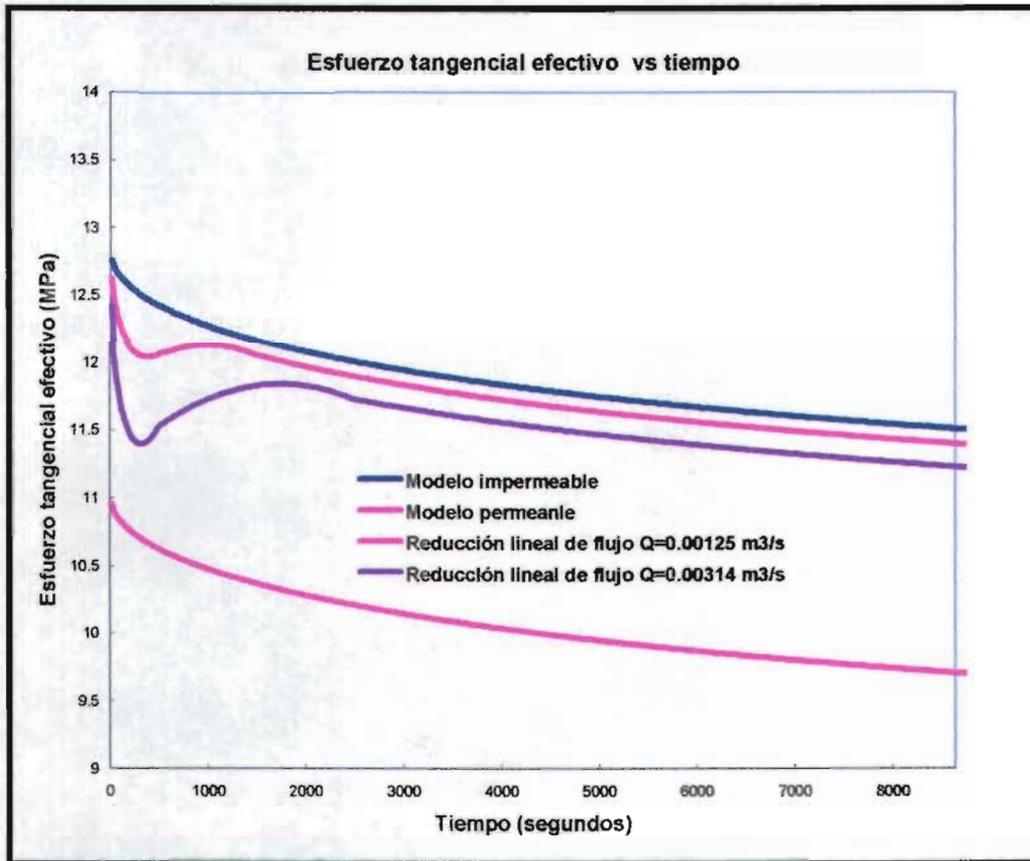


Figura 4.8 Historia del esfuerzo tangencial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 0$, condición sobrebalance

4.4 EFECTOS DEL ESFUERZO RADIAL EFECTIVO

La figura 4.9 nos muestra la historia del comportamiento del esfuerzo radial efectivo - $(\sigma_{rr} + p)$ y $\theta = 90^\circ$ en la pared del agujero para la condición de bajobalance ($p_w = 6.0$ MPa). Como se observa existe un esfuerzo radial efectivo de tensión, por lo cual podrá existir falla en esta localización. En el caso de reducción lineal de flujo la tensión del esfuerzo radial efectivo se reduce debido a que decrece la presión de poro por lo tanto a mayor flujo el potencial de falla reducirá.

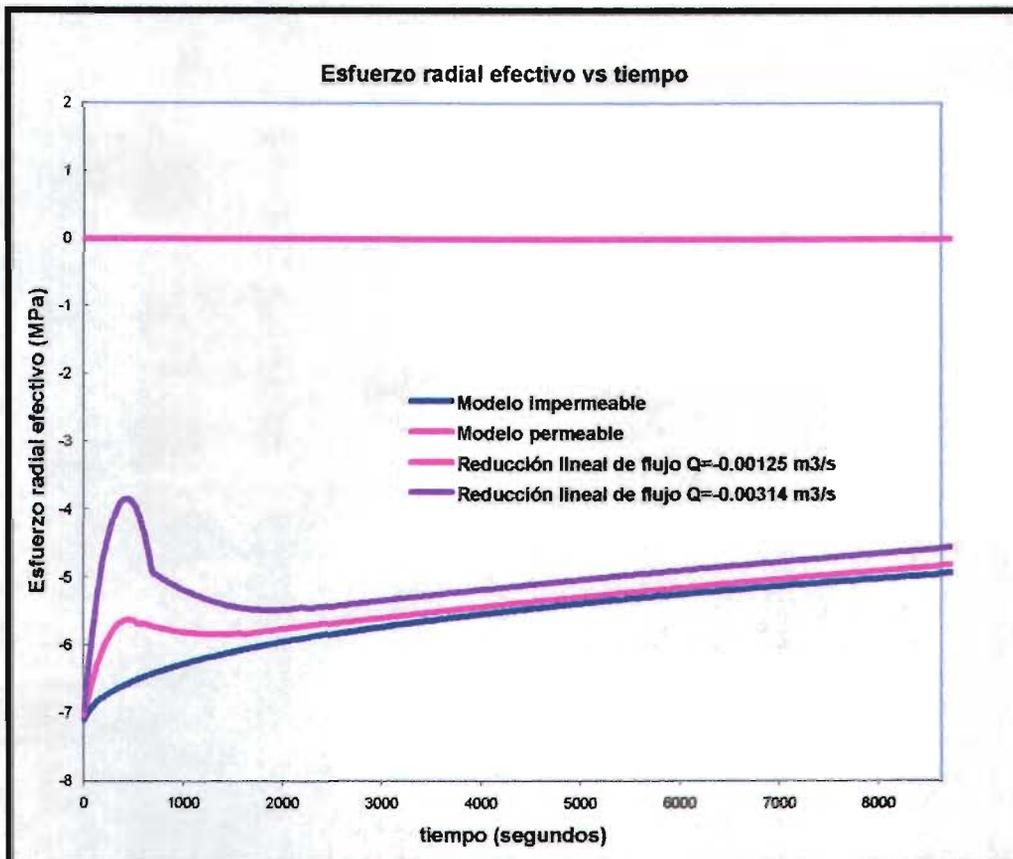


Figura 4.9 Historia del esfuerzo radial efectivo en la pared del agujero, $\theta = 90$, condición bajobalance

5.- CONCLUSIONES

- El presente trabajo presenta la solución poroelástica para agujeros inclinados con la presión de poro dependiente del tiempo y con condiciones arbitrarias de flujo en la pared del agujero. La solución fue obtenida en el espacio de la transformada de Laplace, e invertido numéricamente, usando el algoritmo de Stehfest, para recuperar la dependencia de la solución sobre el tiempo.
- Durante la simulación se determinó que los factores que más influyen en el análisis de estabilidad son: los esfuerzos in-situ, la presión de poro, el flujo de fluidos, la presión del pozo
- De los esfuerzos in-situ depende la variación de la presión y los esfuerzos efectivos en la pared del agujero a distintos ángulos ya que si los esfuerzos horizontal mayor y menor fueran iguales (homogéneos), los esfuerzos y presión de poro serían constantes a distintos ángulos alrededor del agujero (no habría variación).
- Durante la simulación se observó que el flujo de fluido que va del pozo hacia la formación aumenta la presión de poro y el esfuerzo tangencial efectivo decrece, aumentando el potencial de fractura. Caso contrario cuando el flujo de fluidos va en sentido contrario la presión de poro y el esfuerzo tangencial efectivo disminuyen.
- La presión de poro en la pared del agujero es más crítica para el caso impermeable que el permeable debido que para el caso impermeable la presión de poro a tiempos cortos aumenta y a tiempos largos se estabiliza, caso contrario que el caso permeable donde la presión de poro es constante (presión de pozo).

- Los modelos desarrollados nos permiten predecir el comportamiento en la pared del agujero para condiciones permeables, impermeables, y para condiciones arbitrarias de flujo, con lo cual podremos simular los distintos escenarios para mejorar la estabilidad del agujero.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Ekbote S., Abousleiman, Y. y Cui L., 1998, Poroelastic solution for inclined boreholes with arbitrary pore fluid conditions at the borehole walls. Rock Mechanics Institute.
- 2.- Detournay E. y Cheng A. H.-D. (1988). Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field. *Int. J. rock mech. min. & sci. geomech. Abstr.* **25**, 171-182.
- 3.- Carter J. P. and Booker J. R. (1982). Elastic consolidation around a deep circular tunnel. *Int. J. solid structures.* **18**, 1059-1074.
- 4.- Cui, L., Cheng, A.H-D., Abousleiman, Y., Poroelastic solution of an inclined borehole. (1997). *J. appl. Mech., ASME*, **64**, 32-38.
- 5.- Detournay, E. Y A. H. D. Cheng, 1993. *Fundamentals of poroelasticity. Comprehensive Rock Engineering: principles, Practice y Projects.* Volumen II, Analysis and Design Method. C., Pergamon Press, 113 a 171.
- 6.- Cui L., S. Ekbote, Y. Abousleiman, J.-C. Roegirs. (1998). Borehole stability Analyses in fluid saturated formations with impermeable walls. *Int. J. rock mech. min. & sci. geomech.* **61**, 582-583.
- 7.- J.C. Jaeger, N. G. W. COOK, 1979, *Fundamentals of rock mechanics*, 3 edición, London Chapman and Hall, Estados Unidos, Capítulo 1 y 7.
- 8.- John Mitchell, 2001, *Trouble free Drilling*, Volumen 1, Drilbert Engineering Inc. Estados Unidos, Capítulo 6.
- 9.- Stehfest, H. 1970. Numerical inversion of Laplace transforms. *Comm. ACM.* **14**: 47-49 y 624.

10.- Dennis G. Zill, 1997, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Tercera edición, Grupo editorial iberoamérica, Colombia.

11.- R. Spiegel, 1974, *Transformada de Laplace*, 3 edición, Serie Schaum's, México, 42 a 78.

12.- G. N. Watson. 1996, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Segunda edición, Estados unidos, 38 a 65.

13.- Yudell. L. Luke; 1962, *Integral of Bessel Functions*, segunda edición, Mcgraw-Hill, Estados unidos, capítulo 1.

A

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA EL MODO DE CARGA DOS
EN CONDICIONES DE PRESIÓN

De la ecuación de difusividad

$$\frac{dp}{dt} - c_i \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \quad (A.1)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$c_i \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) - (s\bar{p} - \bar{p}(0)) = 0 \quad (A.2)$$

Donde s es la variable de la transformada de Laplace. Aplicando las condiciones de frontera $\bar{p}(0) = 0$

$$c_i \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) - s\bar{p} = 0 \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{s}{c} \bar{p} = 0 \quad (A.4)$$

Reareglando la ecuación A.4 y haciendo un cambio de variable nosotros tenemos:

$$\xi^2 = \frac{r^2 s}{c}, \quad \xi = r \sqrt{\frac{s}{c}}, \quad r^2 = \frac{c}{s} \xi^2, \quad r = \sqrt{\frac{c}{s}} \xi, \quad dr = \sqrt{\frac{r}{c}} d\xi \quad (A.5)$$

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} - \xi^2 \bar{p} = 0 \quad (A.6)$$

La solución es una ecuación de Bessel y su solución se muestra a continuación:

$$\bar{p} = A_1 I_0(\xi) + A_2 K_0(\xi). \quad (\text{A.7})$$

Donde I_0 y K_0 son funciones de Bessel modificada, y A_1 y A_2 son constantes. Como se desea tener una solución de $r \geq R$ y de la ecuación anterior la función de Bessel $I_0(\xi) \rightarrow \infty$ entonces $\xi \rightarrow \infty$ no está definido en cero, por lo tanto $A_1 = 0$, por lo que la solución queda:

$$\bar{p} = A_2 K_0(\xi). \quad (\text{A.8})$$

Para conocer la constante A_2 se tienen las siguientes condiciones $r = R$ y $t = 0$ la $p = p_i$ por lo tanto:

$$-p_i = A_2 K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \quad (\text{A.9})$$

Despejando A_2 y sustituyendo

$$A_2 = -\frac{p_i}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \quad (\text{A.10})$$

$$p = -p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} = -p_i \frac{K_0(\xi)}{K_0(\beta)}. \quad (\text{A.11})$$

Los desplazamientos pueden ser calculados

$$u_r = \frac{A}{r} + \frac{\eta}{G} \frac{1}{r} \int_a^r r \bar{p} \bar{\rho} dr. \quad (\text{A.12})$$

Donde A es una constante de integración, todas estas variables son finitas y $e=0$ al infinito. Por lo tanto, los esfuerzos se pueden fácilmente expresar por:

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r \bar{p} \partial r, \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r \bar{p} \partial r - 2\eta \bar{p}, \quad (\text{A.14})$$

Sustituyendo la ecuación A.11 en A.13:

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r P_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \partial r. \quad (\text{A.15})$$

Haciendo un cambio de variable y sustituyendo en 1.15:

$$u = r\sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} P_i \frac{K_0(u)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}. \quad (\text{A.17})$$

Integrando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\int x^p K_{p-1}(x) dx = -x^p K_p(x) + c, \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1(u)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R \quad (\text{A.19})$$

Sustituyendo $u = r\sqrt{\frac{s}{c}}$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r\sqrt{\frac{s}{c}}}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R, \quad (\text{A.20})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]_R. \quad (\text{A.21})$$

Evaluando

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right], \quad (\text{A.22})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right]. \quad (\text{A.23})$$

Multiplicando por $\frac{R}{R}$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \left(\frac{R}{R} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \left(\frac{R}{R} \right) \right], \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{r\beta} p_i \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2\beta} p_i \frac{K_1(\beta)}{K_0(\beta)} \right) \right]. \quad (\text{A.25})$$

Sustituyendo las condiciones de frontera:

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{R\beta} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{R^2\beta} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] = 0, \quad (\text{A.26})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Por lo tanto $A = 0$. La solución final es:

$$\sigma_{rr} = -2\eta \left[\left(\frac{R}{r\beta} p_i \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2\beta} p_i \frac{K_1(\beta)}{K_0(\beta)} \right) \right], \quad (\text{A.28})$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\eta p_i}{\beta} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1(\xi)}{K_0(\beta)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{K_1(\beta)}{K_0(\beta)} \right) \right]. \quad (\text{A.29})$$

Para el esfuerzo en teta Sustituyo la ecuación A.11 en A.14:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \partial r + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{A.30})$$

Haciendo un cambio de variable y sustituyendo:

$$u = r\sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_l \frac{K_0(u)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}} + 2\eta p_l \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{A.32})$$

Integrando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\int x^p K_{p-1}(x) dx = -x^p K_p(x) + c, \quad (\text{A.33})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_l \frac{K_1(u)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R^r + 2\eta p_l \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{A.34})$$

Sustituyendo $u = r\sqrt{\frac{s}{c}}$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r\sqrt{\frac{s}{c}}}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_l \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R^r + 2\eta p_l \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \quad (\text{A.35})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_l \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]_R^r - 2\eta p_l \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} + 2\eta p_l \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{A.36})$$

Evaluando

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] \\ & + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] \\ & + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \end{aligned} \tag{A.38}$$

Multiplicando por $\frac{R}{R}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \left(\frac{R}{R} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \left(\frac{R}{R} \right) \right] \\ & + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2\beta} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{A.40})$$

Sustituyendo las condiciones de frontera:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{R\beta} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{R^2\beta} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] + 2\eta p_i \frac{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} = 0, \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Por lo tanto A=0. La solución final es

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\eta \left[\left(\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2R\sqrt{\frac{s}{c}}} p_i \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right] + 2\eta p_i \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \quad (\text{A.43})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\eta p_i}{R\sqrt{\frac{s}{c}}} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) + \frac{R\sqrt{\frac{s}{c}} K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]. \quad (\text{A.44})$$

B

DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA EL MODO DE CARGA DOS
EN CONDICIONES DE FLUJO

Se sabe que:

$$\bar{q}_r = \bar{q}_i \frac{K_1(\xi)}{K_1(\beta)} \quad (\text{B.1})$$

$$q_i = -kp_i. \quad (\text{B.2})$$

Sustituyendo A.11 en B.2

$$q_i = k \frac{d}{dr} \left(p_i \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{K_0 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} \right), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{k\bar{p}}{R} = \frac{q_i}{\beta} \frac{K_0(\xi)}{K_1(\beta)}. \quad (\text{B.4})$$

Despejando \bar{p} de la ecuación anterior

$$u = r \sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{p} = \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0(\xi)}{K_1(\beta)}. \quad (\text{B.6})$$

Los desplazamientos pueden ser calculados

$$u_r = \frac{A}{r} + \frac{\eta}{G} \frac{1}{r} \int_a^r r \bar{p} \partial r. \quad (\text{B.7})$$

Donde A es una constante de integración, todas estas variables son finitas y $e=0$ al infinito. Por lo tanto, los esfuerzos se pueden expresar por:

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r \bar{p} \partial r, \quad (\text{B.8})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r \bar{p} \partial r - 2\eta \bar{p}. \quad (\text{B.9})$$

Sustituyendo A.11 en B.8:

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \partial r. \quad (\text{B.10})$$

Haciendo un cambio de variable y sustituyendo:

$$u = r\sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0(u)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}. \quad (\text{B.12})$$

Integrando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\int x^p K_{p-1}(x) dx = -x^p K_p(x) + c, \quad (\text{B.13})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1(u)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R^r. \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo $u = r\sqrt{\frac{s}{c}}$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r\sqrt{\frac{s}{c}}}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R^r, \quad (\text{B.15})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]_R^r. \quad (\text{B.16})$$

Evaluando

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right], \quad (\text{B.17})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1(\xi)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \right]. \quad (\text{B.18})$$

Multiplicando por $\frac{R}{R}$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) \left(\frac{R}{R}\right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \left(\frac{R}{R}\right) \right], \quad (\text{B.19})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right]. \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo las condiciones de frontera.

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\left(\frac{R}{RR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{R^2R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$\sigma_{rr} = -2G \frac{A}{r^2} = 0. \quad (\text{B.22})$$

Por lo tanto $A = 0$. La solución final es:

$$\sigma_{rr} = -2\eta \left[\frac{\left(\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)}{\left(\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right)} \right], \quad (\text{B.23})$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{2\eta R}{q_i R\sqrt{\frac{s}{c}}^2} \left[\frac{\left(\frac{R}{r} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \right)}{\left(\frac{R}{r} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \right)} \right]. \quad (\text{B.24})$$

Sustituyendo B.3 en B.9:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r r \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \partial r + 2\eta \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{B.25})$$

Haciendo un cambio de variable y sustituyendo:

$$u = r\sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (\text{B.26})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \int_a^r \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0(u)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}} + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{B.27})$$

Integrando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\int x^p K_{p-1}(x) dx = -x^p K_p(x) + c, \quad (\text{B.28})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1(u)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{B.29})$$

Sustituyendo $u = r\sqrt{\frac{s}{c}}$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r\sqrt{\frac{s}{c}}}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \right]_R + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \quad (\text{B.30})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \frac{1}{r^2} \left[\frac{r}{\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]_R + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{B.31})$$

Multiplicando por $\frac{R}{R}$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} + 2\eta \left[\left(\frac{1}{r\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_1(\xi)}{K_1(\beta)} \right) \left(\frac{R}{R} \right) - \left(\frac{R}{r^2\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{k\beta} \right) \left(\frac{R}{R} \right) \right] + 2\eta \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \quad (\text{B.32})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} - \left(\frac{R^2}{r^2 R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}. \quad (\text{B.33})$$

Sustituyendo las condiciones de frontera:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} - 2\eta \left[\frac{R}{RR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} - \left(\frac{R^2}{R^2 R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] + 2\eta \frac{Rq_i}{k\beta} \frac{K_0\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} = 0, \quad (\text{B.34})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2G \frac{A}{r^2} = 0. \quad (\text{B.35})$$

Por lo tanto A=0. La solución final es:

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\eta \left[\frac{R}{rR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} - \left(\frac{R^2}{r^2 R\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \right) \right] + 2\eta \frac{Rq_i}{kR\sqrt{\frac{s}{c}}} \frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}, \quad (\text{B.36})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\eta qi}{R\sqrt{\frac{s}{c}}^2} \left[\left(\frac{R}{r} \frac{K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right) - \left(\frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{R\sqrt{\frac{s}{c}} K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right]. \quad (\text{B.37})$$

C

**DESARROLLO DE LAS EXPRESIONES PARA EL MODO DE CARGA TRES
EN CONDICIONES DE PRESIÓN**

Expresando la ecuación de Navier en coordenadas polares y usando la transformada de Laplace.

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{d\tilde{\xi}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\omega}}{d\theta} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{d\tilde{\xi}}{dr} = 0, \quad (C.1)$$

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\xi}}{d\theta} - \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\omega}}{dr} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\xi}}{d\theta} = 0. \quad (C.2)$$

Donde $\tilde{\omega}$ es el desplazamiento rotacional del campo.

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right). \quad (C.3)$$

La ecuación de difusión en términos de la variación del contenido de fluido puede también expresarse en transformada de Laplace y escribirse en términos de coordenadas polares como:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial \theta^2} - \frac{s}{c} \tilde{\xi} = 0. \quad (C.4)$$

Usando las condiciones de simetría, se puede argumentar que la dependencia de los desplazamientos y esfuerzos bajo un ángulo polar θ es de la siguiente forma.

$$(\tilde{\xi}^{(3)}, \tilde{\varepsilon}^{(3)}, \tilde{u}^{(3)}, \tilde{\sigma}_{rr}^{(3)}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(3)}, \tilde{p}^{(3)}) = (\tilde{Z}, \tilde{E}, \tilde{U}_r, \tilde{S}_{rr}, \tilde{S}_{r\theta}, \tilde{P}) \cos 2\theta, \quad (C.5)$$

$$(\tilde{\omega}^{(3)}, \tilde{u}_\theta^{(3)}, \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(3)}) = (\tilde{W}, \tilde{U}_\theta, \tilde{S}_{r\theta}) \sin 2\theta. \quad (C.6)$$

Donde $\tilde{Z}, \tilde{E}, \tilde{U}_r, \tilde{S}_{rr}, \tilde{S}_{r\theta}, \tilde{P}, \tilde{W}, \tilde{U}_\theta, \tilde{S}_{r\theta}$, son función sólo de r y s .

Sustituyendo las expresiones dentro de las ecuaciones C.1 y C.2.

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{d\tilde{E}}{dr} - 2 \frac{\tilde{W}}{r} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{d\tilde{Z}}{dr} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{\tilde{E}}{r} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{W}}{dr} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{\tilde{Z}}{r} = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \tilde{Z}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial r} - \left(\frac{s}{c} r^2 + 4 \right) \tilde{Z} = 0. \quad (\text{C.9})$$

La ecuación C.9 puede resolverse fácilmente

$$\tilde{Z} = C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (\text{C.10})$$

Sustituyendo \tilde{Z} en las ecuaciones C.8 y C.9.

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{d\tilde{E}}{dr} - 2 \frac{\tilde{W}}{r} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{d \left(C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right)}{dr} = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{\tilde{E}}{r} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{W}}{dr} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Despejando \tilde{E} de la ecuación C.11.

$$\frac{d\tilde{E}}{dr} = \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} \left[2 \frac{\tilde{W}}{r} + \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{d \left(C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right)}{dr} \right]. \quad (\text{C.13})$$

Integrando la ecuación anterior

$$\tilde{E} = \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} \left[2\tilde{W} \ln|r| + \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right]. \quad (\text{C.14})$$

Sustituyendo \tilde{E} en la ecuación C.12.

$$\left[\frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} \left[2\tilde{W} \ln|r| + \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \right] \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{d\tilde{W}}{dr} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{1}{r} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) = 0, \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\tilde{W}}{dr} = \frac{2}{r} \tilde{W} \ln|r|. \quad (\text{C.16})$$

Separando variables e integrando

$$\frac{1}{2} \ln|\tilde{W}| + C = \left[(\ln|r|)^2 \right]^R = \left[(\ln(R))^2 - (\ln(r))^2 \right] = \frac{(\ln(R))^2}{(\ln(r))^2}. \quad (\text{C.17})$$

Multiplicado por la exponencial

$$e^{\frac{1}{2} \ln|\tilde{W}| + \ln|C|} = e^{\frac{(\ln(R))^2}{(\ln(r))^2}}, \quad (\text{C.18})$$

$$2C\tilde{W} = \frac{R^2}{r^2}, \quad (\text{C.19})$$

$$\tilde{W} = C_2 \frac{R^2}{r^2}. \quad (\text{C.20})$$

Derivando \tilde{W}

$$\frac{d\tilde{W}}{dr} = -2C_2 \frac{R^2}{r^3}. \quad (\text{C.21})$$

Sustituyendo en C.12

$$\frac{1-\nu_u}{1-2\nu_u} \frac{\tilde{E}}{r} + C_2 \frac{R^2}{r^3} - \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \frac{C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r} = 0. \quad (\text{C.22})$$

Despejando \tilde{E}

$$\tilde{E} = -\frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{rR^2}{r^3} + \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} r \frac{C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{r}, \quad (\text{C.23})$$

$$\tilde{E} = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2}. \quad (\text{C.24})$$

Para la presión de la se sabe que:

$$p = M(\xi - \alpha \varepsilon), \quad (\text{C.25})$$

$$M = \frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}, \quad (\text{C.26})$$

$$\alpha = \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)}. \quad (\text{C.27})$$

Sustituyendo en M y α

$$p = \frac{2G(v_u - v)B^2(1-2v)^2(1+v_u)^2}{(1-2v_u)(1-2v)B^2(v_u - v)^2} \xi - \frac{2G(v_u - v)B^2(1-2v)^2(1+v_u)^2 3(v_u - v)}{(1-2v_u)(1-2v)B^2(v_u - v)^2 B(1-2v)(1+v_u)} \varepsilon, \quad (C.27)$$

$$p = \frac{2GB^2(1-2v)(1+v_u)^2}{9(1-2v_u)(v_u - v)} \xi - \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-2v_u)} \varepsilon. \quad (C.28)$$

Sustituyendo ξ y ε

$$p = \frac{2GB^2(1-2v)(1+v_u)^2}{9(1-2v_u)(v_u - v)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2GB(1+v_u) B(1+v_u)}{3(1-2v_u) 3(1-v_u)} \left[C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{1-2v_u}{1-v_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} \right], \quad (C.29)$$

$$p = \frac{2GB(1-2v)(1+v_u)^2}{9(1-2v_u)(v_u - v)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2GB(1+v_u) B(1+v_u)}{3(1-2v_u) 3(1-v_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2GB(1+v_u) 1-2v_u}{3(1-2v_u) 1-v_u} C_2 \frac{R^2}{r^2}, \quad (C.30)$$

$$p = \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{2GB(1-2v)(1+v_u)^2}{9(1-2v_u)(v_u - v)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2GB(1+v_u) B(1+v_u)}{3(1-2v_u) 3(1-v_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (C.31)$$

$$p = \left[\frac{\{9(1-2v_u)(1-v_u)\} 2GB^2(1-2v)(1+v_u)^2 - \{9(1-2v_u)(v_u - v)\} 2GB^2(1+v_u)^2}{[9(1-2v_u)(v_u - v)][9(1-2v_u)(1-v_u)]} \right] C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}, \quad (C.32)$$

Factorizando

$$P = \left[\frac{2GB^2(1-2v_u)(1+v_u)^2 [(1-2v)(1-v_u) - (v_u - v)]}{9(1-2v_u)^2(v_u - v)(1-v_u)} \right] C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}. \quad (C.33)$$

Además

$$(1-2v)(1-v_u) - (v_u - v) = 1 - 2v - v_u + 2vv_u - v_u + v = (1-2v_u)(1-v), \quad (C.34)$$

Por lo tanto

$$P = \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \left[\frac{2GB^2(1-2v_u)(1+v_u)^2 [(1-2v_u)(1-v)]}{9(1-2v_u)^2(v_u - v)(1-v_u)} \right] C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (C.35)$$

La solución final es

$$P = \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \left[\frac{2GB^2(1+v_u)^2(1-v)}{9(v_u - v)(1-v_u)} \right] C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \quad (C.36)$$

$$\frac{P}{2G} = \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \frac{B^2(1+v_u)^2(1-v)}{9(v_u - v)(1-v_u)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (C.37)$$

Para el esfuerzo en r se utilizaran las siguientes ecuaciones

$$S_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon - \alpha p, \quad (C.38)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad (C.39)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{S_oRB(1+\nu_u)}{3*2G\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 \left[K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] + \frac{S_oR}{2G} C_2 \frac{R}{r} + \frac{S_oR}{2G} C_3 \frac{R^3}{r^3} \right\}, \quad (C.40)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 \frac{2}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} - \frac{S_oR}{2G} C_2 \frac{R}{r^2} - \frac{3S_oR}{2G} C_3 \frac{R^3}{r^4}. \quad (C.41)$$

Para

$$\frac{d}{dr} \left\{ -\frac{S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\}. \quad (C.42)$$

derivando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\frac{d}{dx} K_p(kx) = \frac{p}{r} K_p(kx) - kK_{p+1}(kx), \quad (C.43)$$

$$= -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right) (1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{r} K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \sqrt{\frac{s}{c}} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right\}, \quad (C.44)$$

$$= -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (C.45)$$

Para

$$\frac{d}{dr} \left\{ -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right) (1-\nu_u)} C_1 \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right\} =$$

$$= -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right\}, \quad (C.46)$$

$$= -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right) + K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}. \quad (C.47)$$

Haciendo un cambio de variable y derivando otra vez

$$u = r \sqrt{\frac{s}{c}}, \quad du = \sqrt{\frac{s}{c}} dr, \quad dr = \frac{du}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad r = \frac{u}{\sqrt{\frac{s}{c}}}, \quad (C.48)$$

$$= -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{d \sqrt{\frac{s}{c}}}{du} K_2(u) \right] + K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}. \quad (C.49)$$

derivando la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\frac{d}{dx}K_p(x) = -\frac{p}{x}K_p(x) - K_{p-1}(x), \quad (\text{C.50})$$

$$= -\frac{2S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)}C_1\left\{\frac{1}{r}\left[-\frac{2\sqrt{\frac{s}{c}}}{u}K_2(u) - \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)K_2(u)\right] - K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\right\}. \quad (\text{C.51})$$

Sustituyendo $u = r\sqrt{\frac{s}{c}}$

$$= -\frac{2S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)}C_1\left\{\frac{1}{r}\left[-\frac{2\sqrt{\frac{s}{c}}}{r\sqrt{\frac{s}{c}}}K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\right] + K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)\left(\frac{1}{r^2}\right)\right\}, \quad (\text{C.52})$$

$$= \frac{4S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)}C_1K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)}C_1K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)}C_1K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (\text{C.53})$$

$$= \frac{6S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)}C_1K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{2S_oB(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)}C_1K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (\text{C.54})$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = & \frac{6S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - \frac{S_o R}{2G} C_2 \frac{R}{r^2} - \frac{3S_o R}{2G} C_3 \frac{R^3}{r^4}, \end{aligned} \quad (C.55)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = & \frac{6S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{S_o}{2G} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}. \end{aligned} \quad (C.56)$$

Sustituyendo en C.38

$$\begin{aligned} S_{rr} = & \frac{6S_o 2GB(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{S_o 2GB(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - \frac{S_o 2GB(1+\nu_u)}{3 * 2G (1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{S_o 2G}{2G} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3 * 2GS_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} \\ & + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \left[\frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} \right] \\ & - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \left[\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \left[\frac{S_o B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} \right] C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (C.57)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
 S_{rr} &= \frac{6S_o B(1+\nu_u)}{3\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 &\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - S_o C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{S_o \nu}{(1-2\nu)} \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 &- \frac{S_o \nu}{(1-2\nu)} \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \frac{S_o B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(s\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 &\frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}. \tag{C.58}
 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
 S_{rr} &= \frac{6S_o B(1+\nu_u)}{3\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 &\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - S_o C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{S_o \nu B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \\
 &- \frac{S_o \nu(1-2\nu_u)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o B(1-\nu)(1+\nu_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{S_o B(\nu_u - \nu)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}. \tag{C.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2G\nu B(1+\nu_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{2GB(1-\nu)(1+\nu_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(s\sqrt{\frac{s}{c}}\right) = \\
 &= C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \left[\frac{B(1+\nu_u)[\nu - (1-\nu)]}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right] \\
 &= C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \left[\frac{B(1+\nu_u)[-1+2\nu]}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right] = -\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(s\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \tag{C.60}
 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 & -S_o C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o \nu (1-2\nu_u)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o B(\nu_u - \nu)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} = \\
 & = \left(\frac{2S_o^2}{r^2} C_2 \right) \left(\frac{-(1-2\nu)(1-\nu_u) - \nu(1-2\nu_u) - (\nu_u - \nu)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right) \\
 & = \left(\frac{S_o R^2}{r^2} C_2 \right) \left(\frac{-1 + \nu_u + 2\nu - 2\nu\nu_u - \nu + 2\nu\nu_u - \nu_u + \nu}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right) = \left(\frac{S_o R^2}{r^2} C_2 \right) \left(\frac{-1 + 2\nu}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right) \\
 & = -\frac{S_o}{(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}, \tag{C.61}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución final es

$$\begin{aligned}
 S_{rr} & = \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{6}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \\
 & - \frac{S_o}{(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}. \tag{C.62}
 \end{aligned}$$

Para el esfuerzo en teta se utilizaran las siguientes ecuaciones

$$S_{\theta\theta} = 2G\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon - \alpha p, \tag{C.63}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{du_r}{d\theta} \right), \tag{C.64}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{S_o RB(1+\nu_u)}{3 * 2Gr \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 \left[K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] \\ & + \frac{S_o R}{2Gr} C_2 \frac{R}{r} + \frac{S_o R}{2Gr} C_3 \frac{R^3}{r^3} \end{aligned} \right\}, \quad (C.65)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta} = & -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 \left[K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] + \frac{S_o}{2G} C_2 \frac{R^2}{r^2} \\ & + \frac{S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}. \end{aligned} \quad (C.66)$$

Sustituyendo en C.63

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} = & -\frac{2GS_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 \left[K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] - \frac{2GS_o}{2G} C_2 \frac{R^2}{r^2} \\ & - \frac{2GS_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \left[\frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} \right] \\ & - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} \left[\frac{2GB(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} + \left[\frac{2GB^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} \right] C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (C.67)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta} = & -\frac{2GS_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2GS_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\ & - \frac{2GS_o}{2G} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{2GS_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{1-2\nu_u}{1-\nu_u} C_2 \frac{R^2}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{2GB^2(1+v_u)^2(1-\nu)}{9(v_u - \nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & -\frac{3(v_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+v_u)} \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}, \tag{C.68}
 \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
 S_{\theta\theta} &= -\frac{S_o B(1+v_u)}{3 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (1-\nu_u)} C_1 K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2S_o B(1+v_u)}{3 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (1-\nu_u)} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \\
 & -S_o C_2 \frac{R^2}{r^2} - S_o C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{2G\nu B(1+v_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2G\nu(1-2\nu_u)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} \\
 & -\frac{2GB(1-\nu)(1+v_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) - \frac{2GB(v_u - \nu)}{(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2}, \tag{C.69}
 \end{aligned}$$

Factorizando

$$S_{\theta\theta} = -\frac{S_o B(1+v_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_1 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2}{\left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2} K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] + S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}, \tag{C.70}$$

$$\frac{2G\nu B(1+v_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(r \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{2GB(1-\nu)(1+v_u)}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \tag{C.71}$$

$$\begin{aligned}
 & C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \left[\frac{B(1+v_u)[\nu - (1-\nu)]}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right] = C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \left[\frac{B(1+v_u)[-1+2\nu]}{3(1-2\nu)(1-\nu_u)} \right] = \\
 & = -\frac{B(1+v_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(s \sqrt{\frac{s}{c}} \right), \tag{C.72}
 \end{aligned}$$

Factorizando una vez más

$$S_{\theta\theta} = -\frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \left(1 + \frac{2}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2}\right) K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] + S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}. \quad (C.72)$$

Para $\sigma_{r\theta}$ se utilizaran las siguientes ecuaciones

$$S_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon - \alpha p, \quad (C.73)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{du_r}{d\theta} + \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r}, \quad (C.74)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{d}{dr} \left\{ -\frac{S_o RB(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \frac{R}{r} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{S_o R}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R}{r} + \frac{S_o R}{2G} C_3 \frac{R^3}{r^3} \right\} + \frac{2S_o RB(1+\nu_u)}{3 * 2Gr \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \frac{R}{r} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{S_o R}{2Gr} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R}{r} + \frac{S_o R}{2Gr} C_3 \frac{R^3}{r^3}, \quad (C.75)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2Gr \left(\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3 * 2G \left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}. \quad (C.76)$$

Similar a la ecuación C.46 la derivada se resuelve por lo tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} = & -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3*2G(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{2}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{1}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} \\ & + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} \\ & + \frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3*2G\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 (1-\nu_u)} C_1 K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}, \end{aligned} \quad (C.76)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\theta} = & -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3*2G(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{3}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{1}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} \\ & + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{3S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4} + \frac{S_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}. \end{aligned} \quad (C.77)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S_{r\theta} = & -\frac{2S_o 2GB(1+\nu_u)}{3*2G(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{3}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} \\ & + \frac{2GS_o}{2G} \frac{1-2\nu_u}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - \frac{2G4S_o}{2G} C_3 \frac{R^4}{r^4}, \end{aligned} \quad (C.78)$$

La solución final es:

$$S_{r\theta} = -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{3}{\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(r\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} + S_o \frac{1}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{r^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{r^4}. \quad (C.79)$$

De las condiciones de frontera en la pared del agujero ($r=R$) tenemos:

$$\sigma_{rr} = S_o, \quad (C.80)$$

$$\sigma_{r\theta} = -S_o, \quad (C.81)$$

$$p = 0. \quad (C.82)$$

Sustituyendo en las ecuaciones C.37, C.62 Y C.79

$$0 = S_o \left[\frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{R^2} + \frac{B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right], \quad (C.83)$$

$$S_o = \frac{S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] - \frac{S_o}{(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{R^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{R^4}, \quad (C.84)$$

$$-S_o = -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\}$$

$$+ \frac{S_o}{2(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{R^2} - 3S_o C_3 \frac{R^4}{R^4}. \quad (\text{C.85})$$

Multiplicando la ecuación C.83 por $\frac{(1-\nu_u)}{S_o B(1+\nu_u)}$,

$$0 = \frac{(1-\nu_u)S_o}{S_o B(1+\nu_u)} \left[\frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_2 + \frac{B^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right]. \quad (\text{C.86})$$

Simplificando

$$0 = \left[\frac{C_2}{3} + \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)} C_1 K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right]. \quad (\text{C.87})$$

Despejando C_2

$$C_2 = - \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{3(\nu_u - \nu)} C_1 K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right). \quad (\text{C.88})$$

Multiplicando las ecuaciones C.83 y C.84 por $\frac{1}{S_o}$

$$\frac{S_o}{S_o} = \frac{S_o B(1+\nu_u)}{S_o 3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)} K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) + \frac{6}{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2} K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) \right] - \frac{S_o}{S_o(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{R^2} - 3 \frac{S_o}{S_o} C_3 \frac{R^4}{R^4}, \quad (\text{C.89})$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{S_o}{S_o} = & -\frac{2S_o B(1+\nu_u)}{S_o 3(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} \\
 & + \frac{S_o}{2S_o(1-\nu_u)} C_2 \frac{R^2}{R^2} - 3 \frac{S_o}{S_o} C_3 \frac{R^4}{R^4}.
 \end{aligned} \tag{C.90}$$

simplificando las ecuaciones C.89, C.90 y sustituyendo C_2

$$\begin{aligned}
 1 = & \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left[\frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] \\
 & + \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{3(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)} C_1 K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 3C_3,
 \end{aligned} \tag{C.91}$$

$$\begin{aligned}
 -1 = & -\frac{2B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} \\
 & + \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{2(1-\nu_u)3(\nu_u-\nu)} C_1 K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 3C_3.
 \end{aligned} \tag{C.92}$$

Restando la ecuación C.92 menos C.91:

$$-2 = \frac{B(1+\nu_u)}{3(1-\nu_u)} C_1 \left\{ \frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right\} - \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)}{2(1-\nu_u)3(\nu_u-\nu)} C_1 K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right). \tag{C.93}$$

Factorizando

$$-2 = C_1 \left\{ \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \left[\frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \frac{(1-\nu)}{2(v_u-\nu)} K_2 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] \right\}. \quad (\text{C.94})$$

Desarrollando

$$-2 = C_1 \left\{ \frac{B(1+v_u)}{3(1-v_u)} \left[\frac{2(v_u-\nu)K_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu)K_2 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{2(v_u-\nu) \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right] \right\}. \quad (\text{C.95})$$

Despejando C_2

$$C_1 = -2 \left\{ \frac{3(1-v_u)}{B(1+v_u)} \left[\frac{2(v_u-\nu) \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{2(v_u-\nu)K_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu)K_2 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} \right] \right\}. \quad (\text{C.96})$$

si :

$$D_1 = \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu)K_2 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (\text{C.97})$$

$$D_2 = 2(v_u-\nu)K_1 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right), \quad (\text{C.98})$$

Sustituyendo D_1 y D_2

$$C_1 = -\frac{12 \left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-v_u)(v_u-\nu)}{B(1+v_u)(D_2-D_1)}. \quad (\text{C.99})$$

Sustituyendo en la ecuación C.88

$$C_2 = -\frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{3(\nu_u-\nu)B(1+\nu_u)(D_2-D_1)}. \quad (\text{C.100})$$

Simplificando

$$C_2 = -\frac{4(1-\nu_u)\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{(D_2-D_1)}. \quad (\text{C.101})$$

Sustituyendo D_2

$$C_2 = -\frac{4(1-\nu_u)D_2}{(D_2-D_1)}. \quad (\text{C.102})$$

Sustituyendo C_1 y C_2 en ecuación C.89

$$1 = \frac{B(1+\nu_u)\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)}{3(1-\nu_u)B(1+\nu_u)(D_2-D_1)} \left[\frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right] + \frac{B(1+\nu_u)(1-\nu)4(1-\nu_u)D_2}{3(\nu_u-\nu)(1-\nu_u)(D_2-D_1)} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 3C_3. \quad (\text{C.103})$$

Simplificando

$$1 = -\frac{4\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u-\nu)}{3(D_2-D_1)} \left[\frac{1}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)} K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + \frac{6}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2} K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) \right]$$

$$-\frac{4(1-\nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{(D_2-D_1)}K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)-3C_3. \quad (\text{C.104})$$

Expandiendo la ecuación

$$1 = \frac{4\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u - \nu)K_1\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) + 24\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u - \nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4(1-\nu)\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(D_2 - D_1)}$$

$$-3C_3, \quad (\text{C.105})$$

$$1 = \frac{4\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 D_1 + 24\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u - \nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right) - 4\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2 D_2}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(D_2 - D_1)} - 3C_3, \quad (\text{C.106})$$

$$1 = \frac{4\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(D_2 - D_1) + 24\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u - \nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(D_2 - D_1)} - 3C_3, \quad (\text{C.107})$$

$$1 = 4 + \frac{24\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)(\nu_u - \nu)K_2\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)}{\left(R\sqrt{\frac{s}{c}}\right)^2(D_2 - D_1)} - 3C_3. \quad (\text{C.108})$$

Despejando C_3

$$C_3 = -1 + \frac{8 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (v_u - v) K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (D_2 - D_1)} = - \frac{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (D_2 - D_1) + 8 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (v_u - v) K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (D_2 - D_1)}$$

$$C_3 = - \frac{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (D_2 - D_1) + 8 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right) (v_u - v) K_2 \left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)}{\left(R \sqrt{\frac{s}{c}} \right)^2 (D_2 - D_1)}. \quad (\text{C.109})$$

NOMENCLATURA

L	Longitud (m, pulg)
ΔL	Cambio de longitud (Metro, pulgadas)
σ	Esfuerzo (Newton/ m ² , pascal)
E	Modulo de Young (Newton/ m ² , pascal)
E_v	Modulo de Young drenado (Newton/ m ² , pascal)
ϵ, e	Deformación (adimensional)
ν	Modulo de Poissón (adimensional)
ν_u	Modulo de Poissón drenado (adimensional)
ϵ_v	Deformación vertical (adimensional)
ϵ_h	Deformación horizontal (adimensional)
ϵ_x	Deformación en x (adimensional)
ϵ_y	Deformación en y (adimensional)
ϵ_z	Deformación en z (adimensional)
ϵ_{rr}	Deformación radial (adimensional)
$\epsilon_{\theta\theta}$	Deformación tangencial (adimensional)
ϵ_{zz}	Deformación axial (adimensional)
$\epsilon_{\theta z}$	Deformación en θ y z (adimensional)
ϵ_{rz}	Deformación en r y z (adimensional)
$\epsilon_{r\theta}$	Deformación en r y θ (adimensional)
G	Modulo de corte (Newton/ m ² , pascal)
K	Modulo volumétrico o del material (Newton/ m ² , pascal)
ϵ_v	Deformación volumétrica (adimensional)
λ	Modulo de Lamé (Newton/ m ² , pascal)
σ_x	Esfuerzo en el eje x (Newton/ m ² , pascal)
σ_y	Esfuerzo en el eje y (Newton/ m ² , pascal)
σ_z	Esfuerzo en el eje z (Newton/ m ² , pascal)
α	Coficiente de Biot (adimensional)
B	Coficiente de Skempton (adimensional)
η	Coficiente de esfuerzo poroelástico (adimensional)

M	Modulo de Biot (Newton/ m ² , pascal)
c	Coefficiente de difusividad (m ² /s)
S	Constante de almacenamiento (m ² /Newton, 1 /pascal)
P _o	Presión de poro (Newton/m ² , pascal)
p _f	Presión de formación (Newton/m ² , pascal)
ζ	Variación del fluido en el espacio de Laplace (m ³ / seg, mililitros/seg)
κ	Permeabilidad intrínseca (Darcy/ Centipoises)
K	Permeabilidad (Darcy)
μ	Viscosidad dinámica (Centipoises)
σ _{ij}	Tensor total de esfuerzo
σ _{rr}	Esfuerzo radial (Newton/ m ² , pascal)
σ _{θθ}	Esfuerzo tangencial (Newton/ m ² , pascal)
σ _{zz}	Esfuerzo axial (Newton/ m ² , pascal)
τ _{xy}	Esfuerzo de corte en x y y (Newton/ m ² , pascal)
τ _{xz}	Esfuerzo de corte en x y z (Newton/ m ² , pascal)
τ _{yz}	Esfuerzo de corte en y y z (Newton/ m ² , pascal)
τ _{rz}	Esfuerzo de corte en r y z (Newton/ m ² , pascal)
τ _{rθ}	Esfuerzo de corte en θ y r (Newton/ m ² , pascal)
τ _{θz}	Esfuerzo de corte en θ y z (Newton/ m ² , pascal)
u	Desplazamiento (metros)
u _r	Desplazamiento radial (metros)
u _z	Desplazamiento axial (metros)
u _θ	Desplazamiento tangencial (metros)
β	Ángulo de falla de la roca
ψ	Ángulo de fricción interna
C ₀	Resistencia uniaxial a la compresión
p _w	Presión del pozo
a _{ws}	Actividad del agua de la lutita
a _{wf}	Actividad del agua del fluido de perforación
V _{Mw}	Volumen molar del componente
R	Constante de los gases

T	Temperatura absoluta
ΔP	Diferencial de presión en el poro
p_{pf}	Presión lejos de la pared del pozo debida a la actividad química en el fluido de la formación,
p_{nw}	Presión en la cercanía de la pared del pozo debida a la actividad química del lodo en el agujero,
r	Radio (metro, pulgadas)
R	Radio de interes (metro, pulgada)
T_o	Resistencia a la tensión (Newton/ m ² , Pascal)
t	Tiempo (segundo)
s	Tiempo en el espacio de Laplace (1/segundo)
S_o	Esfuerzo deviatorio (Newton/ m ² , pascal)
S_x	Esfuerzo en x del campo original de esfuerzos
S_y	Esfuerzo en y del campo original de esfuerzos
S_z	Esfuerzo en z del campo original de esfuerzos
τ	Esfuerzo de corte (Newton/ m ² , pascal)
Q	Gasto (m ³ /s)
q_r	Flujo radial (m/s)
K_o	Función de Bessel Modificada de orden cero
K_1	Función de Bessel Modificada de orden uno
π	Pi (adimensional)
ϕ	Porosidad (adimensional)