



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS ABSORBENTES EN DIGRAFICAS LINEALMENTE COLOREADAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

CARLOS MARTINEZ GARCIA



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

2005

m 348987





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Conjuntos absorbentes en digráficas linealmente coloreadas"

realizado por Martínez García Carlos

con número de cuenta 09561369-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de:  
 Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Dra. Hortensia Galeana Sánchez *H. Galeana*  
 Propietario

Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía *Hugo A. Rincón M.*

Propietario Mat. Laura Pastrana Ramírez *Laura Pastrana R.*

Suplente M. en C. Patricia Cortes Flores *Patricia Cortes*

Suplente M. en C. María del Pilar Valencia Saravia *María del Pilar Valencia S.*

**Consejo Departamental de Matemáticas**

*Alejandro Bravo*

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FAVORABLE

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

A todos mis amigos (cada uno de ellos sabe los múltiples porqués)

*Deseo expresar aquí mi más profundo y sincero agradecimiento a Hortensia Galeana por su gran generosidad y paciencia así como a todos los sinodales por sus pertinentes y esmeradas correcciones sin las que, a no dudarlo, este trabajo sería mucho más imperfecto.*

*Por aquello tan cierto de que uno es los demás, también doy gracias a todos mis profesores (y a tantas otras personas) por todo lo suyo que hay detrás de las cosas que realizo incluyendo este muy modesto "hijo del entendimiento".*

"La belleza resultará de la forma y de la correspondencia del todo con las partes, de las partes entre ellas, y de estas con el todo, de suerte que el edificio se muestre como un cuerpo entero y bien terminado en el que cada miembro conviene a los otros y en donde todos los miembros sean necesarios a aquello que se quisiera hacer".

Andrea Palladio (*Quatro libri dell'architettura*, 1570)

"Muchacho, no te metas en dibujos, sino haz lo que ese señor te manda, que será lo más acertado; sigue tu canto llano y no te metas en contrapuntos, que se suelen quebrar de sotiles".

Miguel de Cervantes (*Quijote*, II, XXVI)

# Índice general.

<b>1. Conceptos Preliminares.</b>	<b>6</b>
1.1. Resumen. . . . .	6
1.2. Gráficas. . . . .	7
1.3. Digráficas. . . . .	13
1.4. Núcleos. . . . .	30
1.5. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas. . . . .	43
<b>2. Núcleos por trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos m-Coloreados.</b>	<b>52</b>
2.1. Resumen. . . . .	52
2.2. Torneos m-Coloreados. . . . .	53
2.2.1. Introducción. . . . .	53
2.2.2. Trayectorias Monocromáticas en Torneos m-Coloreados. . . . .	54
2.3. Trayectorias monocromáticas, ciclos monocromáticos y ciclos casi-monocromáticos en torneos m-coloreados. . . . .	59
2.4. Conclusiones. . . . .	74
<b>3. Vértices absorbentes en Torneos m-Coloreados.</b>	<b>76</b>
3.1. Resumen. . . . .	76
3.2. Introducción. . . . .	76
3.3. Primera aproximación: Multitorneos. . . . .	79
3.4. Segunda aproximación: Digráficas Subyacentes. . . . .	100
3.5. Conclusiones. . . . .	110



# Introducción.

En un artículo publicado en 1982 ( ver [2] ) se demuestra que para cualquier digráfica  $D$  que sea 2-coloreada, su cerradura transitiva  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta. En particular este resultado implica que todo torneo 2-coloreado contiene un vértice absorbente. Los autores también resaltan el siguiente problema:

(i) ¿Si un torneo  $T$  es 3-coloreado y no contiene  $C_3$  (3-ciclos dirigidos policromáticos), entonces  $T$  puede contener un vértice absorbente?.

En 1986 Shen Minggang ( ver [4] ) demuestra que añadiendo otra condición al planteamiento del problema, la respuesta es afirmativa. El siguiente es su resultado principal.

(ii) Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que no contiene  $T_3$  ( es decir torneos transitivos de orden 3 y policromáticos) ni  $C_3$ , entonces  $T$  contiene un vértice absorbente.

Este resultado se complementa con la demostración de que si  $m \geq 5$  sus condiciones no pueden ser mejoradas, es decir, que no sólo se le puede pedir al torneo que no contenga  $C_3$  ó que sólo no contenga  $T_3$  para asegurar la existencia de un vértice absorbente en él.

Conviene hacer notar aquí que con respecto a este acotamiento, al final del Capítulo 2 se construye una familia de torneos 4-coloreados que no contienen  $C_3$  pero que tampoco contienen vértices absorbentes, lo cual es un contraejemplo a la conjetura (i) para el caso en que  $m = 4$  (es decir, para torneos 4-coloreados). El caso en que  $m = 3$ , que es la conjetura (i) misma, sigue siendo un problema abierto.

En el Capítulo 2 se demuestra la proposición (ii) y se exponen algunas condiciones bajo las cuales un torneo  $m$ -coloreado contiene un vértice absorbente. En particular la siguiente:

(iii)  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado en el que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casimonocromático.

Esta condición fue dada por Hortensia Galeana en 1996 ( ver [5] ) y no es una generalización de las condiciones de Shen Minggang. En efecto, la autora

también demuestra que las condiciones de Shen Minggang no implican (iii) y la condición (iii) no implica las condiciones de Shen Minggang. El Capítulo 2 finaliza con la prueba de que para  $m \geq 5$  la condición (iii) tampoco puede ser mejorada.

En [6] los autores abordan el problema del mínimo tamaño que puede tener un conjunto de vértices absorbentes en un torneo  $m$ -coloreado usando algunos resultados conocidos ( los presentados en el Capítulo 2) y usando dos nuevas aproximaciones. Éstas consisten en asociar con cada torneo  $m$ -coloreado una nueva estructura, un Multitorneo en un caso y una Digráfica Subyacente en el otro. El Capítulo 3 incluye tales aproximaciones y finaliza relacionando ambas.

Con respecto a lo anterior, el Teorema 3.18 nos muestra que un multitorneo mínimo asociado a un torneo  $T$ , es una estructura que al cumplir con la condición del problema (i) (no contener  $C_3$ ), ésta es un orden total y su máximo es un vértice absorbente de  $T$ . Por otra parte, aunque en esta tesis no incluimos los principales resultados acerca del problema antes mencionado y que es abordado en [6], para lo aquí expuesto resultan muy importantes las siguientes hipótesis:

(iv) Hipótesis  $\mathcal{H}_s$ .

◆  $\mathcal{H}_3$  : Cualquier terna (  $C_3$  ó  $T_3$ ) es casimonocromática.

◆ Para cada  $s \geq 4$ , cada ciclo de longitud  $s$  es casimonocromático y ningún ciclo de longitud menor que  $s$  es policromático.

Resulta claro que estas nuevas premisas son una generalización de las condiciones de (ii) y de la condición (iii), las cuales junto con las digráficas subyacentes nos permiten obtener el siguiente teorema que es el resultado principal de esta tesis:

(v) Teorema 3.23 Todo torneo finito  $k$ -coloreado que satisfaga  $\mathcal{H}_s$  con  $s \geq 3$  contiene un vértice absorbente.

En resumen, nuestro trabajo pretende exponer de manera completa el camino que se ha seguido para generalizar las condiciones bajo las cuales un torneo  $m$ -coloreado contiene un vértice absorbente ó equivalentemente un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

*El lector interesado puede encontrar en [6] la prueba de que las condiciones  $\mathcal{H}_s$  son independientes, así como la extensión de estos resultados a torneos infinitos.*

# Capítulo 1

## Conceptos Preliminares.

### 1.1. Resumen.

Hemos pretendido que esta tesis sea “autocontenida” en el sentido de incluir (hasta donde nos ha parecido razonable) todas las definiciones y resultados necesarios para la exposición de algunos de los últimos resultados sobre Teoría de Núcleos en Torneos  $m$ -Coloreados. Con tal finalidad, este capítulo presenta las ideas preliminares de Gráficas, Digráficas, Núcleos, y Núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas que se emplean a lo largo del escrito. Al mismo tiempo, siempre hemos tenido en mente que este trabajo va dirigido a estudiantes que no necesariamente poseen conocimientos previos sobre Teoría de Gráficas, por lo que además la mayoría de los conceptos y resultados mencionados están ejemplificados y acompañados de diagramas que buscan ayudar a esclarecer su contenido.

Por otra parte, hemos decidido omitir las demostraciones de algunos resultados por considerar que son largas y por pensar que no son necesarias; sin embargo, el lector interesado en conocer sus detalles puede consultar [1].

Por último, debido a su importancia este capítulo contiene una demostración detallada del Teorema de Duchet ( Teorema 1.61), el cual nos muestra una sorprendente y útil relación entre la existencia de un tipo muy particular de digráficas (digráficas “núcleo perfectas”) y la presencia de flechas simétricas

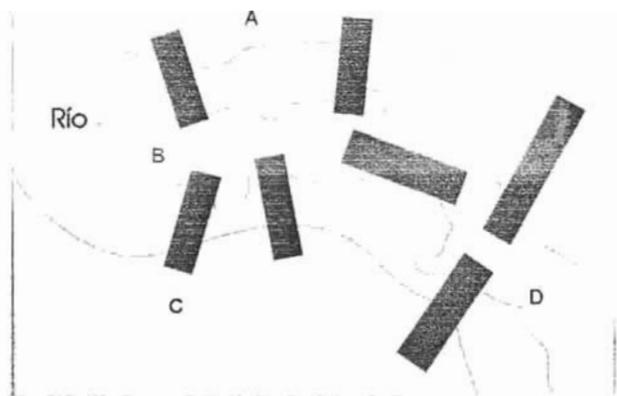
en ciclos dirigidos. También conviene hacer notar aquí que el Teorema 1.69 relaciona el concepto de núcleo con el de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en una digráfica gracias al uso de la “cerradura transitiva” de una digráfica ya que todos estos conceptos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos.

## 1.2. Gráficas.

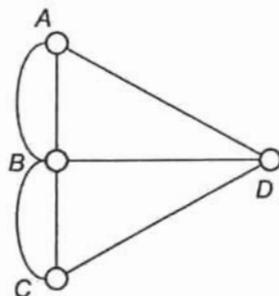
**Definición 1.1** Una *gráfica*  $G$  es una pareja  $(V(G), A(G))$  tal que  $V(G)$  es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* y  $A(G)$  es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices distintos llamadas *aristas*. Decimos que una gráfica es de *orden*  $n$  si tiene  $n$  vértices.

Si una gráfica  $G$  consta solamente de un vértice se dice que la gráfica es *trivial*, de otra forma se dice que  $G$  es *no trivial*. Obsérvese que la definición anterior excluye la existencia de aristas cuyos extremos sean iguales (dichas aristas reciben el nombre de *lazos*) pero admite la existencia de dos o más aristas con los mismos extremos (llamadas *aristas múltiples*). Cuando una gráfica admite lazos se llama *pseudográfica* y se le llama *multigráfica* cuando admite aristas múltiples; sin embargo, en este trabajo no se hará uso de ellas a no ser que se especifique lo contrario.

Muchas situaciones cotidianas pueden describirse adecuadamente por medio de diagramas que constan de un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen a algunos de ellos. Por ejemplo, los puntos pueden representar a personas y las líneas a parejas de amigos; o bien, los puntos pueden simbolizar centros de población y las líneas vías de comunicación que los unen. Un célebre ejemplo de un problema descrito por medio de una gráfica es el problema de los puentes de la ciudad europea de Königsberg. Dicha ciudad está atravesada por un río en el que se encuentran dos islas que también forman parte de ella y además éstas cuatro partes de que consta la ciudad están conectadas por medio de siete puentes como se muestra en la siguiente figura.



El problema consiste en saber si es posible hacer un paseo de modo que se visiten las cuatro partes de la ciudad, atravesando cada puente exactamente una vez; además, el paseo debe concluir en el mismo punto en el que se inició. Fue el matemático suizo Leonard Euler el que demostró que esto es imposible; para ello dibujó un punto por cada parte de la ciudad y una línea por cada uno de sus puentes de la manera siguiente.



Obsérvese que de acuerdo a la definición anterior esta figura representa una multigráfica.

Es necesario destacar que lo que realmente es importante de este tipo de diagramas no es la clase de relación que describa, sino el hecho de que dos puntos estén relacionados por una línea o no, es decir, el hecho mismo de estar relacionados.

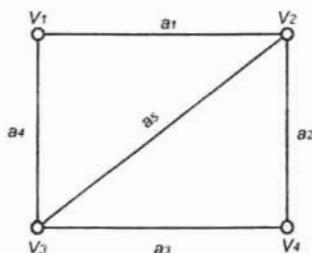
**Aclaración:** *La representación Geométrica de una Gráfica es como*

sigue:

Dibujamos un punto por cada vértice y una línea entre dos puntos cuando entre los vértices que representan existe una arista. De ésta manera, de ahora en adelante nos referiremos a los diagramas de las gráficas simple y llanamente como a gráficas.

**Definición 1.2** Si  $a$  es una arista de  $G$  y  $a = [u, v]$  con  $u$  y  $v$  vértices de  $G$ ; decimos que  $u$  y  $v$  son los extremos de  $a$ , que  $u$  y  $v$  son **adyacentes**, que  $a$  **incide** en  $u$  y que  $a$  **incide** en  $v$ .

Ejemplo:

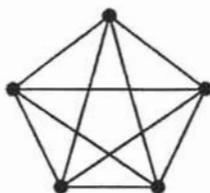


En la gráfica anterior,  $v_1$  y  $v_2$  son los extremos de  $a_1$ , los vértices  $v_2$  y  $v_3$  son adyacentes,  $v_1$  y  $v_4$  no son adyacentes y además  $a_4$  incide en  $v_1$  y  $v_3$ .

**Definición 1.3** Una **gráfica completa**  $G$  es una gráfica tal que cualesquiera dos vértices de  $G$  son adyacentes.

Ejemplo:

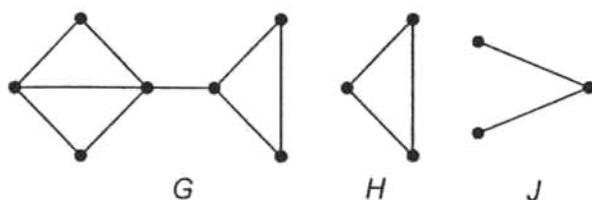
La siguiente gráfica es una gráfica completa formada por cinco vértices.



En general, si una gráfica consta de  $n$  vértices su gráfica completa de  $n$  vértices se denota por  $K_n$ .

**Definición 1.4** Una *subgráfica*  $H$  de una gráfica  $G$ , es una gráfica tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $A(H) \subseteq A(G)$ .

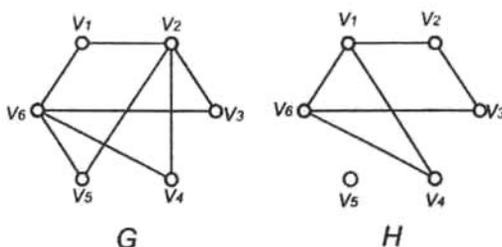
Ejemplo:



Las gráficas  $H$  y  $J$ , son ambas subgráficas de  $G$ .

**Definición 1.5** Una subgráfica  $H$  de una gráfica  $G$  es una *subgráfica generadora* de  $G$  si  $V(H) = V(G)$ .

Ejemplo:

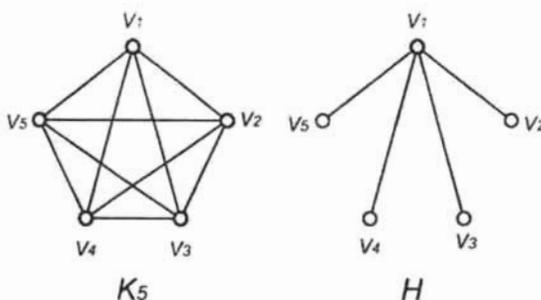


$H$  es subgráfica generadora de  $G$ .

Obsérvese que la manera de *generar*  $G$  a partir de  $H$  es agregando las aristas  $\{[v_6, v_5], [v_2, v_5], [v_2, v_4]\}$  y quitando la arista  $[v_1, v_4]$ .

**Definición 1.6** Sea  $G$  una gráfica, si  $B \subseteq A(G)$ , definimos la **subgráfica de  $G$  inducida por  $B$**  como la gráfica que tiene como vértices a los extremos de las aristas en  $B$  y a  $B$  como conjunto de aristas.

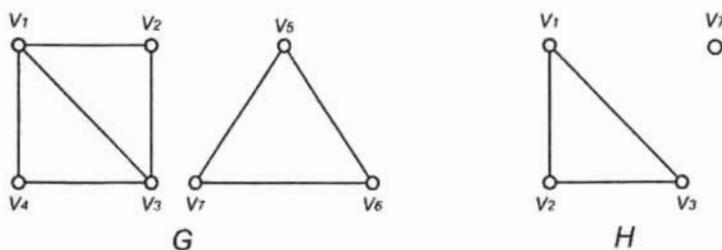
Ejemplo:



La gráfica  $H$  es una subgráfica de  $K_5$  inducida por  $B = \{[v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], [v_1, v_5]\}$ .

**Definición 1.7** Sea  $G$  una gráfica, si  $U \subseteq V(G)$ , definimos la **subgráfica de  $G$  inducida por  $U$**  como la gráfica que tiene a  $U$  como conjunto de vértices y como conjunto de aristas a todas las aristas de  $G$  que tienen ambos extremos en  $U$ .

Ejemplo:

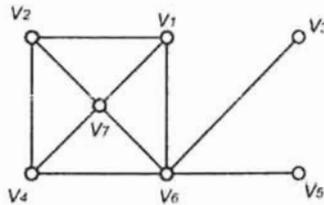


En la gráfica  $G$  considérese  $U = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$ , entonces  $H$  es la subgráfica de  $G$  inducida por  $U$ .

Generalmente nos referiremos a las subgráficas inducidas por un conjunto de vértices simplemente como subgráficas inducidas, en caso de que se haga referencia a una subgráfica inducida por un conjunto de aristas así lo especificaremos.

**Definición 1.8** Sea  $G$  una gráfica, de un conjunto  $\emptyset \neq U \subseteq V(G)$  decimos que es un **conjunto independiente** si cualesquiera dos vértices de  $U$  no son adyacentes en  $G$ .

Ejemplo:

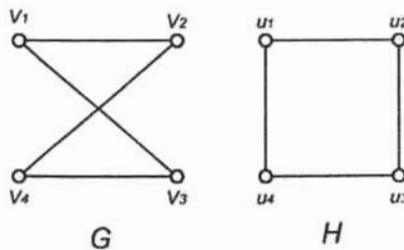


Los conjuntos de vértices  $U = \{v_1, v_3, v_4\}$  y  $V = \{v_5, v_7\}$  son ambos conjuntos independientes de la gráfica  $G$ .

Obsérvese que en cualquier gráfica completa  $K_n$ , todos los conjuntos independientes constan de un solo vértice y éstos son  $\{v_1\}, \{v_2\}, \dots, \{v_n\}$ .

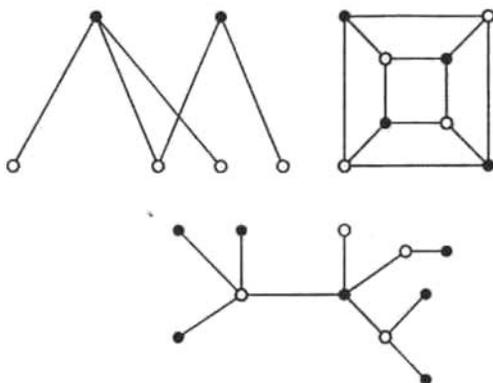
**Definición 1.9** Una gráfica  $G$  es una **gráfica bipartita** si existe una bipartición  $\{U, W\}$  de los vértices de  $G$  tal que cualquier arista de  $G$  tiene un extremo en  $U$  y otro en  $W$ .

Ejemplo:



Las gráficas G y H son ambas gráficas bipartitas puesto que  $\{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$  y  $\{\{u_1, u_3\}, \{u_2, u_4\}\}$  son biparticiones de  $V(G)$  y  $V(H)$  respectivamente.

Las siguientes gráficas también son bipartitas.



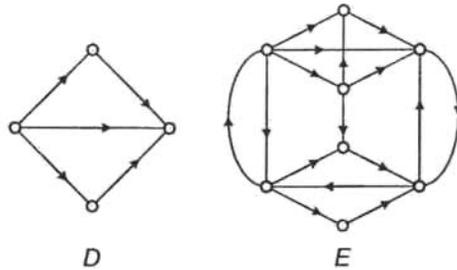
Obsérvese que ninguna de estas gráficas contiene ciclos de longitud impar. Esta propiedad es de hecho una caracterización de las gráficas bipartitas y se enuncia en el siguiente teorema que es de mucha utilidad en Teoría de Gráficas.

**Teorema 1.10**  $G$  es una gráfica bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

### 1.3. Digráficas.

**Definición 1.11** Una **digráfica**  $D$  es una pareja  $(V(D), F(D))$  tal que  $V(D)$  es un conjunto no vacío de elementos llamados **vértices** y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas **flechas**. Decimos que una digráfica es de **orden  $n$**  si tiene  $n$  vértices.

Ejemplos de digráficas son los siguientes:

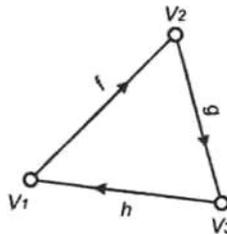


La digráfica D es de orden 4 y la digráfica E es de orden 8.

**Definición 1.12** Si  $f$  es una flecha de  $D$  y  $f = (u, v)$  con  $u$  y  $v$  vértices de  $D$ ; decimos que  $u$  y  $v$  son los **extremos** de  $f$ , que  $u$  es el extremo inicial de  $f$  y que  $v$  es el extremo final. También decimos que  $f$  se dirige de  $u$  a  $v$ , que  $u$  es **adyacente hacia**  $v$  y  $v$  es **adyacente desde**  $u$ .

Ejemplo:

En la siguiente digráfica

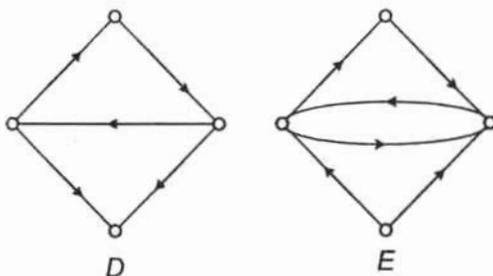


$v_1$  y  $v_2$  son los extremos de  $f$ ,  $v_2$  es el extremo inicial de  $g$  y  $v_3$  es el extremo final de  $g$ ,  $v_3$  es adyacente hacia  $v_1$  y  $v_2$  es adyacente desde  $v_1$ .

**Definición 1.13** Si  $D$  es una digráfica y  $f = (u, v)$  es una flecha de  $D$ , decimos que  $f$  es una **flecha simétrica** si  $(v, u)$  también es una flecha de  $D$ .

Ejemplo:

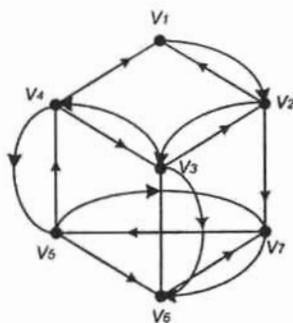
En las siguientes digráficas D y E



D no tiene flechas simétricas y E tiene sólo una flecha simétrica.

**Definición 1.14** Si  $D$  es una digráfica y  $f = (u, v)$  es una flecha de  $D$ , decimos que  $f$  es una **flecha asimétrica** si  $(v, u)$  no es flecha de  $D$ .

Ejemplo:

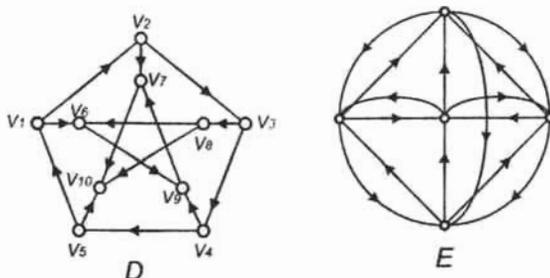


En la digráfica anterior, sólo  $(v_4, v_1)$ ,  $(v_5, v_6)$  y  $(v_2, v_7)$  son flechas asimétricas.

**Definición 1.15** Dada una digráfica  $D$  y  $v$  un vértice de  $D$ , definimos el **ingrado** o **grado interior** de  $v$  en  $D$  como el número de flechas de  $D$  que tienen a  $v$  como extremo final. Denotamos por  $\delta_D^-(v)$  al ingrado de  $v$  en la digráfica  $D$ , en el caso de que trabajemos solamente con una digráfica podemos omitir el subíndice en la notación.

**Definición 1.16** Dada una digráfica  $D$  y  $v$  un vértice de  $D$ , definimos el **exgrado** o **grado exterior** de  $v$  en  $D$  como el número de flechas de  $D$  que tienen a  $v$  como extremo inicial. Denotamos por  $\delta_D^+(v)$  al exgrado de  $v$  en la digráfica  $D$ , en el caso de que trabajemos solamente con una digráfica podemos omitir el subíndice en la notación.

Ejemplo:

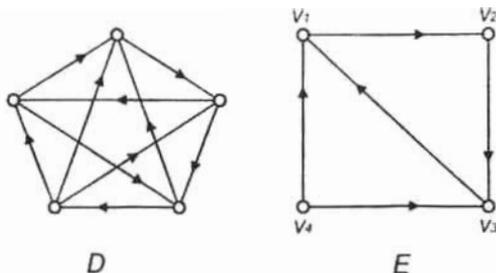


En la digráfica  $D$ ,  $v_{10}$  tiene ingrado 3 y exgrado 0 y  $v_2$  tiene exgrado 2 e ingrado 1.

En la digráfica  $E$ , todos los vértices tienen ingrado y exgrado 3.

**Definición 1.17** Decimos que una digráfica  $D$  es una **digráfica completa** si entre cualquier par de vértices distintos de  $D$  existe alguna flecha.

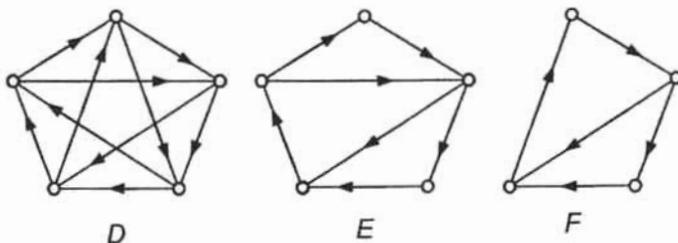
Ejemplo:



La digráfica D es una digráfica completa, pero la digráfica E no lo es puesto que no hay flecha entre  $v_2$  y  $v_3$ .

**Definición 1.18** Una *subdigráfica*  $H$  de una digráfica  $D$  es una digráfica tal que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Decimos que  $H$  es una *subdigráfica propia* si  $V(H) \subsetneq V(D)$  o  $F(H) \subsetneq F(D)$ .

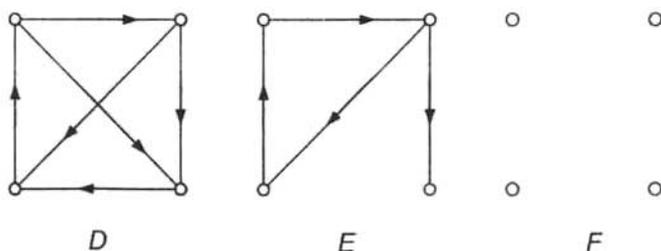
Ejemplo:



La digráfica  $E$  es subdigráfica propia de  $D$  puesto que  $F(E) \subsetneq F(D)$ .  
 La digráfica  $F$  es subdigráfica propia de  $D$  puesto que  $V(F) \subsetneq V(D)$  y  $F(F) \subsetneq F(D)$ .

**Definición 1.19** Una subdigráfica  $H$  de una digráfica  $D$  es una *subdigráfica generadora* de  $D$  si  $V(H) = V(D)$ .

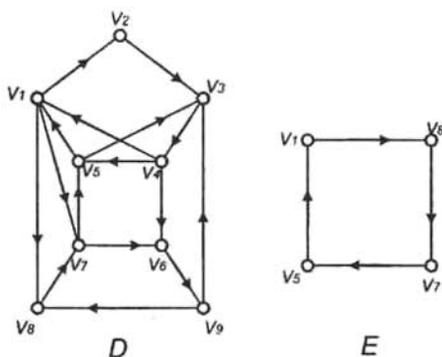
Ejemplo:



E y F son subdigráficas generadoras de D.

**Definición 1.20** Sea  $D$  una digráfica, si  $B \subseteq F(D)$ , definimos la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $B$**  como la digráfica que tiene como vértices a los extremos de las flechas en  $B$  y a  $B$  como conjunto de flechas.

Ejemplo:

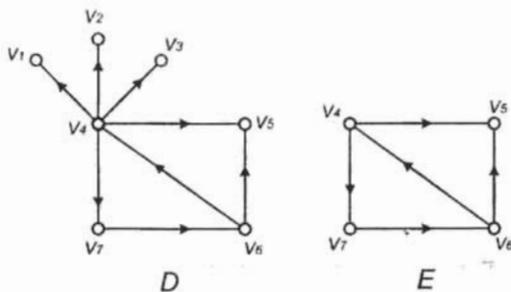


Sea  $B = \{(v_1, v_8), (v_8, v_7), (v_7, v_5), (v_5, v_1)\}$ , entonces E es la subdigráfica de D inducida por B.

**Definición 1.21** Sea  $D$  una digráfica, si  $U \subseteq V(D)$  definimos la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$**  como la subdigráfica que tiene a  $U$  como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas de  $D$  que

tienen ambos extremos en  $U$ . Si  $U \subseteq V(D)$  denotamos por  $D[U]$  a la subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$ .

Ejemplo:



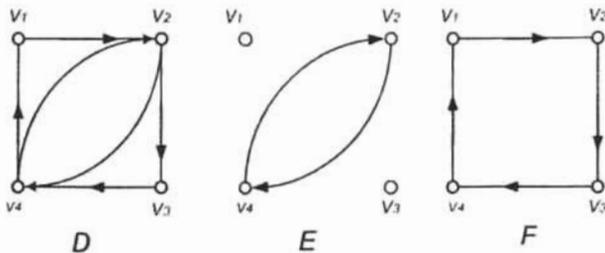
Sea  $U = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ , entonces  $E$  es la subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$ .

Al igual que en gráficas, comúnmente nos referiremos a las subdigráficas inducidas por un conjunto de vértices simplemente como subdigráficas inducidas, en caso de que hagamos referencia a una subdigráfica inducida por un conjunto de flechas así lo especificaremos.

**Definición 1.22** Dada una digráfica  $D$ ; definimos su **parte simétrica** denotada por  $Sym(D)$ , como la subdigráfica generadora de  $D$  cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas simétricas de  $D$ .

**Definición 1.23** Dada una digráfica  $D$ ; definimos su **parte asimétrica** denotada por  $Asym(D)$  como la subdigráfica generadora de  $D$  cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas asimétricas de  $D$ .

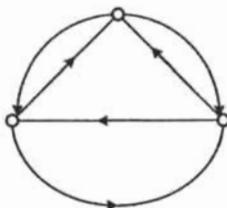
Ejemplo:



La digráfica E es la parte simétrica de D ( es decir,  $E = Sym(D)$ ).  
 La digráfica F es la parte asimétrica de D ( es decir,  $F = Asym(D)$ ).

**Definición 1.24** Decimos que una digráfica D es una **digráfica simétrica** si todas sus flechas son flechas simétricas.

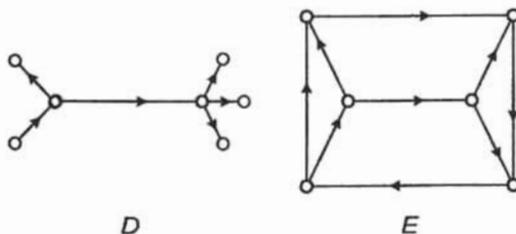
Ejemplo:



D es una digráfica simétrica.

**Definición 1.25** Decimos que una digráfica D es una **digráfica asimétrica** si todas sus flechas son flechas asimétricas.

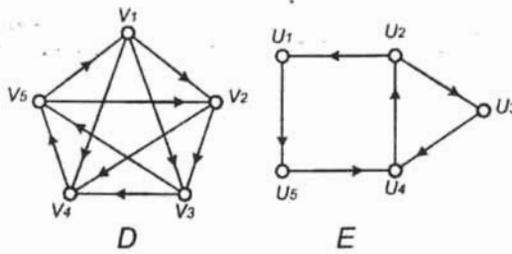
Ejemplo:



D y E son digráficas asimétricas.

**Definición 1.26** Un camino en una digráfica D es una sucesión de vértices  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  tal que para cada  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  ó  $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$ . En este caso decimos que  $u_1$  y  $u_n$  son los extremos del camino y que el camino es un  $u_1 u_n$ -camino en la digráfica.

Ejemplo:

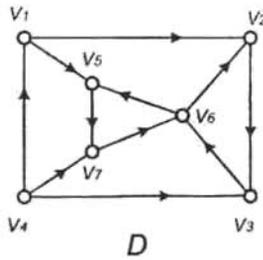


En la digráfica D  $(v_3, v_4, v_5, v_2, v_3, v_4)$ ,  $(v_4, v_5, v_1, v_2, v_3, v_5, v_2, v_4)$  y  $(v_4, v_5, v_1, v_4, v_5)$  son caminos. En la digráfica E  $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_2, u_5)$  no es un camino puesto que no hay flecha entre  $u_2$  y  $u_5$ .

Obsérvese que en un camino se pueden repetir vértices y flechas, y no necesariamente dicho camino sigue la dirección de las flechas.

**Definición 1.27** Una trayectoria en una digráfica es un camino  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

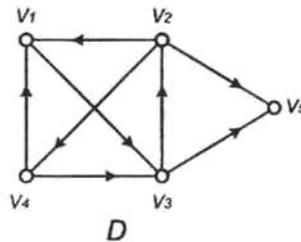
Ejemplo:



En la digráfica  $D$ , los caminos  $(v_4, v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_7)$  y  $(v_1, v_5, v_6, v_3, v_2)$  son trayectorias.

**Definición 1.28** *Un camino cerrado en una digráfica es un camino  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  tal que  $u_1 = u_n$ .*

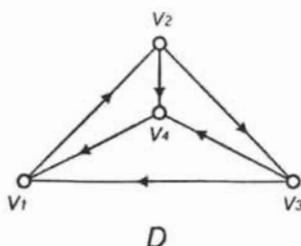
Ejemplo:



En esta digráfica, los caminos  $(v_4, v_1, v_3, v_2, v_4)$  y  $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_2, v_4, v_1)$  son cerrados.

**Definición 1.29** *Un ciclo en una digráfica es un camino cerrado  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_1)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .*

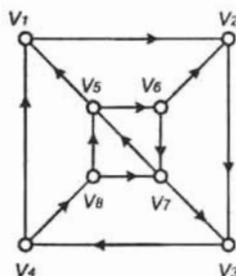
Ejemplo:



En esta digráfica,  $(v_1, v_2, v_3, v_1)$ ,  $(v_1, v_2, v_4, v_1)$  y  $(v_2, v_1, v_3, v_4, v_2)$  son ciclos.

**Definición 1.30** Un *camino dirigido* en una digráfica  $D$  es una camino  $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  tal que para cada  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$  se tiene que  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ .

Ejemplo:

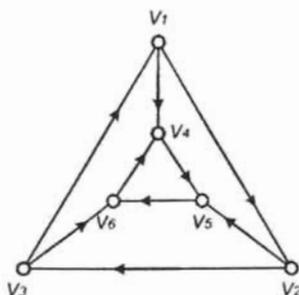


En esta digráfica,  $(v_4, v_1, v_2, v_3)$ ,  $(v_4, v_8, v_5, v_6, v_7, v_5)$  y  $(v_4, v_8, v_7, v_3, v_4)$  son caminos dirigidos, sin embargo  $(v_4, v_8, v_5, v_7)$  no es un camino dirigido.

Obsérvese que en los caminos dirigidos se pueden repetir vértices y flechas.

**Definición 1.31** Una *trayectoria dirigida* en una digráfica es un camino dirigido en el que no se repiten vértices.

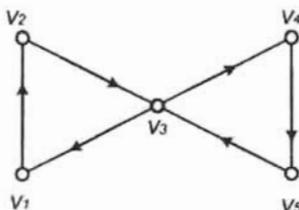
Ejemplo:



En esta digráfica,  $(v_3, v_1, v_2, v_5, v_6)$  es una trayectoria dirigida.

**Definición 1.32** *Un camino dirigido cerrado en una digráfica es un camino dirigido en el que el primer vértice coincide con el último.*

Ejemplo:

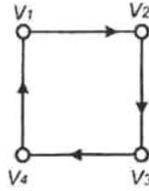


En esta digráfica,  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_1)$  es un camino dirigido cerrado.

Obsérvese que en un camino dirigido cerrado se pueden repetir vértices y flechas.

**Definición 1.33** *Un ciclo dirigido en una digráfica es un camino dirigido cerrado en el que no se repiten vértices, excepto el primero y el último. Denotamos por  $C_n$  al ciclo dirigido que tiene  $n$  vértices.*

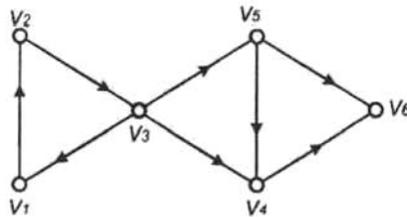
Ejemplo:



Esta digráfica es un ciclo dirigido.

**Definición 1.34** Dada una digráfica  $D$  y  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  un camino en  $D$ , decimos que  $n$  es la **longitud de  $C$**  y la denotamos por  $l(C)$ .

Ejemplo:



En esta digráfica, el camino  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6)$  tiene longitud 4 y el camino  $(v_3, v_4, v_6)$  tiene longitud 2.

**Notación 1.35** Si  $C = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$  es un camino (resp. un camino dirigido) en una digráfica  $D$ , y si  $1 \leq i < j \leq n$ ; denotamos por  $(u_i, C, u_j)$  al  $u_i u_j$ -camino (resp. camino dirigido) contenido en  $C$ , es decir  $(u_i, C, u_j) = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j)$ .

Los siguientes teoremas son resultados básicos de digráficas que emplearemos a lo largo de la tesis.

**Teorema 1.36** Todo  $uv$ -camino dirigido en una digráfica contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida.

Demostración:

Sea  $D$  una digráfica y sean  $u, v \in V(D)$ . Considérese entonces  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  un  $uv$ -camino dirigido en  $D$ . La demostración se hará por inducción sobre la longitud del  $uv$ -camino dirigido  $l(C)$ .

1) Si  $l(C) = 0$ , entonces  $u = v$  y trivialmente  $C$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida. Del mismo modo; es claro que si  $l(C) = 1$  ó  $l(C) = 2$ , entonces  $C$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida.

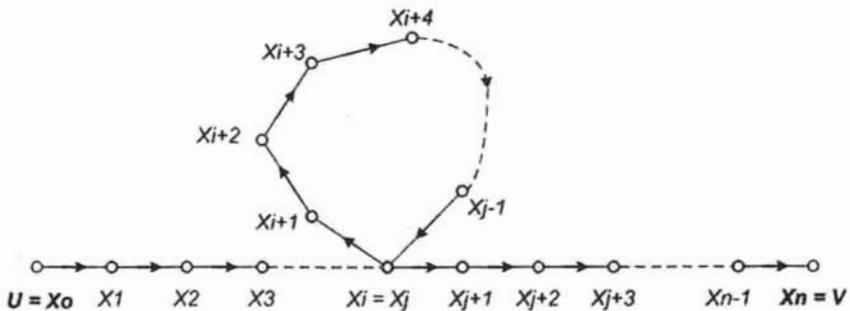
2) Supongamos que todo  $uv$ -camino dirigido  $C'$  con  $l(C') < n$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida.

3) Consideremos un  $uv$ -camino dirigido  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  con  $l(C) = n$ . Se tienen entonces dos casos:

i) Si  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , entonces  $C$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida.

ii) Si existe  $i < j$  tal que  $x_i = x_j$ , entonces

$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ . Obsérvese la siguiente digráfica.



Considérese  $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$  y observemos que  $l(C') < l(C) = n$ . Entonces, la hipótesis de inducción asegura que  $C'$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida y como  $C' \subseteq C$  se concluye que  $C$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida. ■

**Teorema 1.37** *Todo camino dirigido cerrado con longitud  $l(C) \geq 2$  en una digráfica contiene un ciclo dirigido.*

Demostración:

El procedimiento es completamente análogo al anterior.

Sea  $D$  una digráfica y sea  $u \in V(D)$ . Considérese entonces

$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$  un camino dirigido cerrado en  $D$  con longitud  $l(C) \geq 2$ . La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado  $l(C)$ .

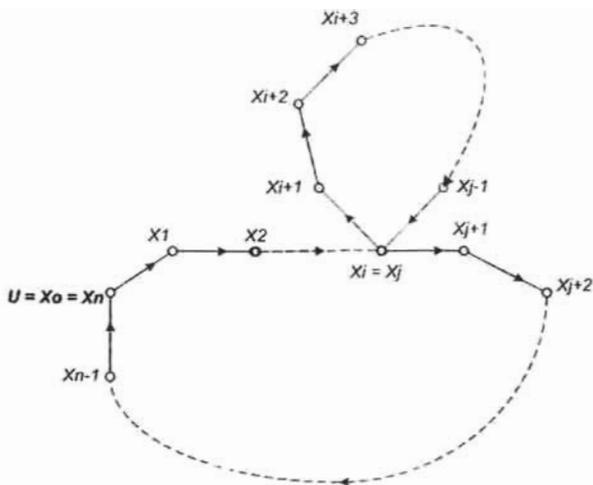
- 1) Si  $l(C) = 2$ ; entonces, trivialmente  $C$  es un ciclo dirigido.
- 2) Supongamos que todo camino dirigido cerrado  $C'$  con  $l(C') < n$  contiene un ciclo dirigido.
- 3) Consideremos un camino dirigido cerrado  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = u)$  con  $l(C) = n$ .

Se tienen entonces dos casos:

i) Si  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , entonces  $C$  es un ciclo dirigido.

ii) Si existe  $i < j$  tal que  $x_i = x_j$ , entonces

$C = (u = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = u)$ . Obsérvese la siguiente digráfica.



Considérese  $C' = (u = x_0, x_1, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_n = u)$  y observemos que

$l(C') < l(C) = n$ . Entonces, la hipótesis de inducción asegura que  $C'$  contiene un ciclo dirigido y como  $C' \subseteq C$  se concluye que  $C$  contiene un ciclo dirigido. ■

**Teorema 1.38** *En una digráfica; todo camino dirigido cerrado de longitud impar  $\geq 3$ , contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

*Demostración:*

Sea  $D$  una digráfica. La demostración se hará por inducción sobre la longitud del camino dirigido cerrado  $l(C)$ .

1) Sea  $C = (x_0, x_1, x_2, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud 3. Por ser un camino dirigido se tiene que  $x_0 \neq x_1, x_1 \neq x_2$  y  $x_2 \neq x_0$ ; por tanto,  $C$  es un ciclo dirigido de longitud 3.

2) Supongamos que si  $C'$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar y  $l(C) < 2n + 1$ ; entonces,  $C'$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

3) Consideremos  $C = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_0)$  un camino dirigido cerrado de longitud  $l(C) = 2n + 1$ . Se tienen entonces dos casos:

i) Si  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , entonces  $C$  es un ciclo dirigido de longitud impar.

ii) Si existe  $i < j$  tal que  $x_i = x_j$ , considérense los caminos dirigidos cerrados

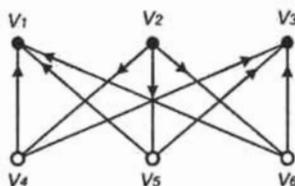
$$C_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2n}, x_0) \text{ y}$$

$$C_2 = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j = x_i).$$

Obsérvese que  $l(C) = l(C_1) + l(C_2)$  y además como  $l(C)$  es impar se tiene que al menos uno de los dos  $l(C_1)$  ó  $l(C_2)$  es un número impar menor que  $2n + 1$ . Entonces por hipótesis de inducción  $C_1$  ó  $C_2$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar. Por lo tanto  $C$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar. ■

**Definición 1.39** Una digráfica  $D$  es una **digráfica bipartita** si existe una bipartición  $\{U, W\}$  de los vértices de  $D$  tal que cualquier flecha de  $D$  tiene en extremo en  $U$  y otro en  $W$ .

Ejemplo:

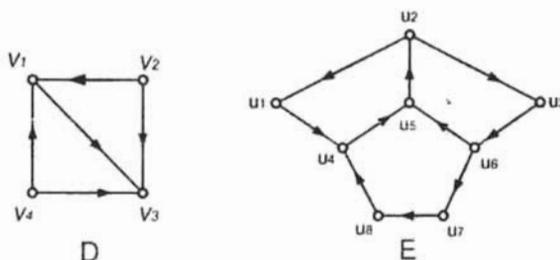


Esta digráfica es bipartita puesto que  $\{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}\}$  es una bipartición de  $V(G)$  de modo que cada flecha de  $G$  tiene un extremo en  $\{v_1, v_2, v_3\}$  y otro en  $\{v_4, v_5, v_6\}$ .

## 1.4. Núcleos.

**Definición 1.40** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un **conjunto independiente** de la digráfica  $D$  si para cualesquiera  $u$  y  $v$  elementos de  $N$  no existen flechas entre ellos en  $D$ .

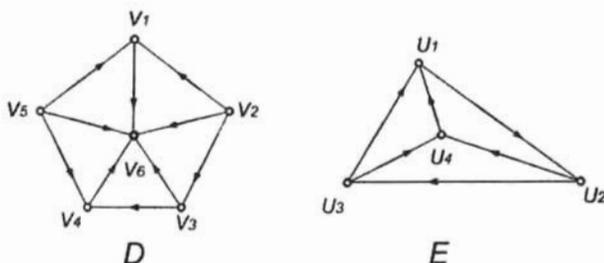
Ejemplos:



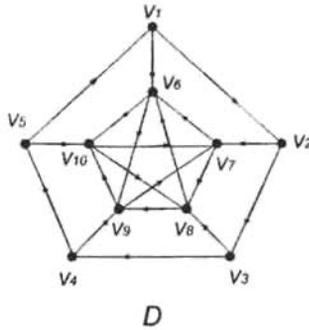
En la digráfica  $D$ , el conjunto  $\{v_2, v_4\}$  es independiente y en la digráfica  $E$  el conjunto  $\{u_4, u_6, u_2\}$  también es independiente; sin embargo, el conjunto  $\{u_4, u_3, u_2, u_8\}$  no es independiente.

**Definición 1.41** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un **conjunto absorbente** de la digráfica  $D$  si para cualquier  $u \in V(D) \setminus N$  tenemos que  $u$  es adyacente hacia algún elemento de  $N$ .

Ejemplos:



En la digráfica  $D$ , el conjunto  $\{v_6\}$  es absorbente y en la digráfica  $E$  el conjunto  $\{u_4\}$  no es absorbente.

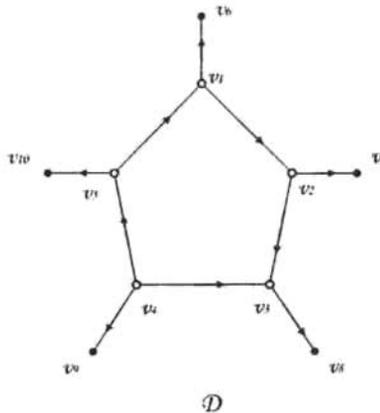


En la digráfica  $D$ , el conjunto  $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  es un conjunto absorbente.

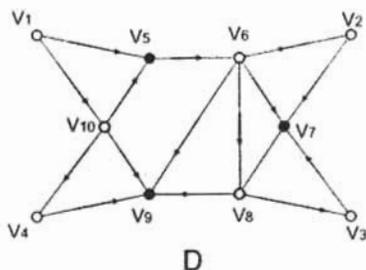
**Definición 1.42** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un **núcleo** de la digráfica  $D$  si es un conjunto independiente y absorbente de  $D$ .

De la definición, resulta claro que las digráficas que constan sólo de vértices aislados tienen núcleo, así como también las digráficas de orden dos siempre lo tienen. El lector puede comprobar fácilmente que los ciclos de longitud par tienen núcleo y que en cambio los ciclos de longitud impar no lo tienen. Otros ejemplos menos obvios son los siguientes.

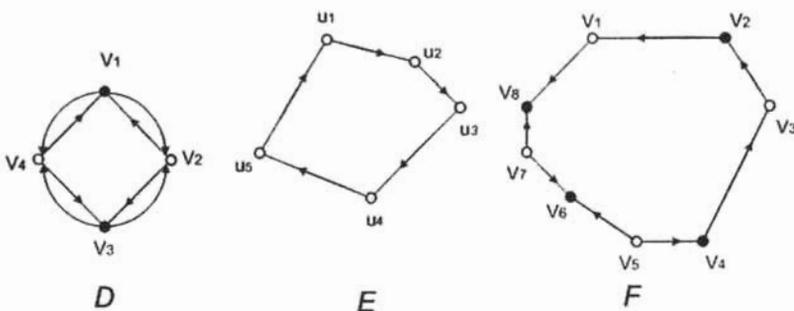
Ejemplo:



En la digráfica  $D$ , el conjunto  $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$  es un núcleo.



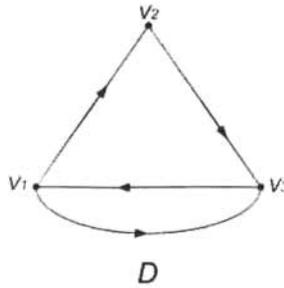
En la digráfica  $D$ , el conjunto  $\{v_5, v_7, v_9\}$  es un núcleo.



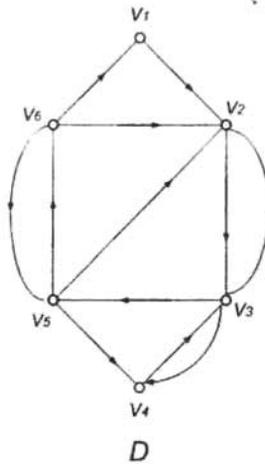
En la digráfica  $D$ , los conjuntos  $\{v_1, v_3\}$  y  $\{v_4, v_2\}$  son núcleos.  
 La digráfica  $E$  no tiene núcleo y en la digráfica  $F$  el conjunto  $\{v_2, v_4, v_6, v_8\}$  es un núcleo.

**Definición 1.43** Una digráfica  $D$  es llamada una digráfica *núcleo perfecta* si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

Ejemplo:



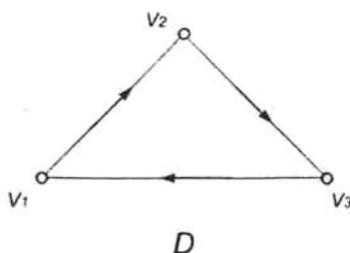
La digráfica  $D$  es núcleo perfecta



En la digráfica anterior; el conjunto  $\{v_6, v_3\}$  es núcleo de la subdigráfica inducida por  $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ , el conjunto  $\{v_2\}$  es núcleo de la subdigráfica inducida por  $\{v_1, v_2, v_3, v_6\}$  y  $\{v_2, v_4\}$  es núcleo de la subdigráfica inducida por  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ . El lector puede comprobar que las restantes subdigráficas inducidas tienen núcleo.

**Definición 1.44** Una digráfica  $D$  es llamada una digráfica **núcleo imperfecta crítica** si no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de  $D$  si tiene núcleo.

Ejemplo:



La digráfica anterior es el ejemplo más pequeño de una digráfica núcleo imperfecta crítica. De hecho cualquier ciclo dirigido de longitud impar es una digráfica núcleo imperfecta crítica.

**Teorema 1.45** *Si  $D$  no es una digráfica núcleo perfecta, entonces contiene una subdigráfica inducida  $H$  que es núcleo imperfecta crítica.*

*Demostración.*

Supongamos que  $D$  no es núcleo perfecta. Entonces,  $D$  contiene una subdigráfica inducida  $H_1$  que no tiene núcleo.

Si toda subdigráfica inducida de  $H_1$  tiene núcleo, entonces  $H_1$  es núcleo imperfecta crítica, y ya terminamos.

Supongamos que  $H_1$  contiene una subdigráfica inducida  $H_2$  que no tiene núcleo.

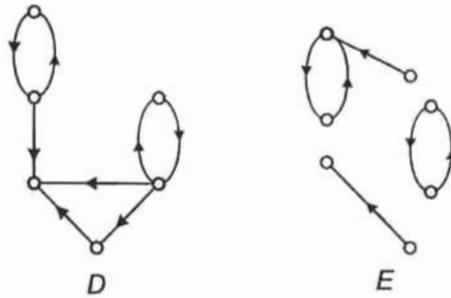
Si toda subdigráfica inducida de  $H_2$  tiene núcleo, entonces  $H_2$  es núcleo imperfecta crítica, y ya terminamos.

Supongamos que  $H_2$  contiene una subdigráfica inducida  $H_3$  que no tiene núcleo.

Como  $D$  es finita, podemos continuar con este proceso hasta obtener una subdigráfica inducida que sea la más pequeña posible, la cual consiste de un solo vértice, en cuyo caso (por vacuidad), claramente es núcleo imperfecta crítica. ■

**Definición 1.46** *Se dice que una digráfica  $D$  es simplemente conexa cuando entre cualesquiera par de vértices  $u, v \in V(D)$  existe un  $uv$ -camino en  $D$ .*

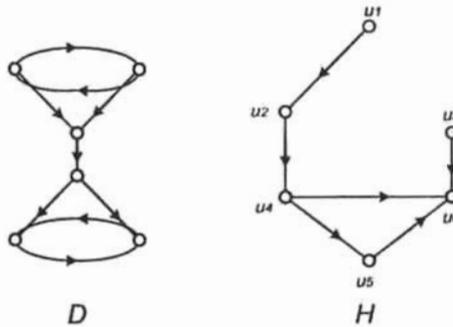
Ejemplo:



La digráfica D es simplemente conexa y la digráfica E no es simplemente conexa.

**Definición 1.47** Se dice que una digráfica D es *débilmente conexa* cuando entre cualesquiera par de vértices  $u, v \in V(D)$ , existe un  $uv$ -camino dirigido ó bien un  $vu$ -camino dirigido en D.

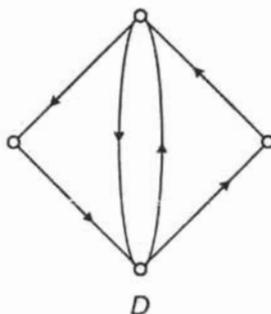
Ejemplo:



La digráfica D es débilmente conexa, pero la digráfica H no es débilmente conexa puesto que entre  $u_1$  y  $u_3$  no existe camino dirigido alguno.

**Definición 1.48** Se dice que una digráfica  $D$  es **fuertemente conexa** cuando entre cualesquiera par de vértices  $u, v \in V(D)$ , existen un  $uv$ -camino dirigido (una  $uv$ -trayectoria dirigida) y un  $vu$ -camino dirigido (una  $vu$ -trayectoria dirigida) ambos en  $D$  (ambos en  $D$ ).

Ejemplo:



La digráfica  $D$  es fuertemente conexa.

Obsérvese que cualquier digráfica fuertemente conexa es débilmente conexa y cualquier digráfica débilmente conexa es simplemente conexa.

**Teorema 1.49** Una digráfica  $D$  es fuertemente conexa si y sólo si  $D$  contiene un camino dirigido cerrado que pasa por todos sus vértices.

Demostración:

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $D$  contiene un camino dirigido cerrado que pasa por todos sus vértices. Sea  $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$  dicho camino y sean  $v_i, v_j \in V(D)$  tal que  $v_i \neq v_j$  suponiendo sin perder generalidad que  $i < j$ . Entonces,  $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$  es un  $v_i v_j$ -camino dirigido contenido en  $D$  y  $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i)$  es un  $v_j v_i$ -camino dirigido contenido en  $D$ . Por lo tanto  $D$  es fuertemente conexa.

$\Rightarrow$ ) Sea  $C$  un camino dirigido cerrado máximo en el sentido de contener el máximo número posible de vértices de  $D$  y sea  $C = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1)$  dicho camino.

Si  $C$  contiene a todos los vértices de  $D$ , entonces la demostración está completa. Si por el contrario;  $C$  no contiene a todos los vértices de  $D$ , entonces existe  $w \in V(D)$  tal que  $w \notin C$ . Observemos que existen  $C_1$  un  $wv_1$ -camino dirigido y  $C_2$  un  $v_1w$ -camino dirigido puesto que  $D$  es fuertemente conexa. Entonces, el camino  $(w, C_1, v_1) \cup (v_1, C, v_1) \cup (v_1, C_2, w)$  es un camino dirigido cerrado que contiene más vértices de  $D$  que el camino  $C$ , lo cual contradice la elección de  $C$ . Por lo tanto,  $C$  contiene a todos los vértices de  $D$ . ■

**Corolario 1.50** *Si una digráfica  $D$  es fuertemente conexa, entonces contiene al menos un ciclo dirigido.*

Demostración:

Supongamos que  $D$  es una digráfica fuertemente conexa. Entonces, el teorema anterior garantiza que  $D$  contiene un camino dirigido cerrado que pasa por todos sus vértices. Pero a su vez el Teorema 1.37 asegura que dicho camino contiene un ciclo dirigido. Por lo tanto,  $D$  contiene al menos un ciclo dirigido. ■

**Definición 1.51** *Dada una digráfica  $D$ , definimos la relación  $\mathcal{R}$  en  $V(D)$  de la siguiente manera:*

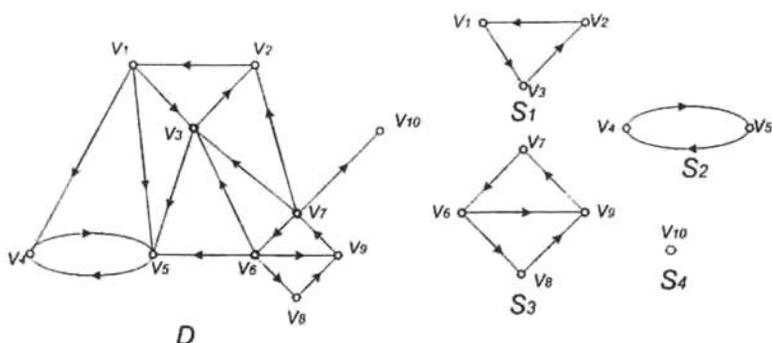
$$\mathcal{R} = \left\{ (u, v) \in V(D) \times V(D) \mid \exists \text{ un } uv\text{-camino dirigido en } D \text{ y } \exists \text{ un } \right. \\ \left. vu\text{-camino dirigido en } D \right\}$$

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la definición anterior.

**Teorema 1.52** *La relación  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia e induce una partición de  $V(D)$  en clases de equivalencia  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .*

**Definición 1.53** *Sea  $D$  una digráfica, definimos las **componentes fuertemente conexas** de  $D$  como las subdigráficas inducidas por las clases de equivalencia  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .*

Ejemplo:



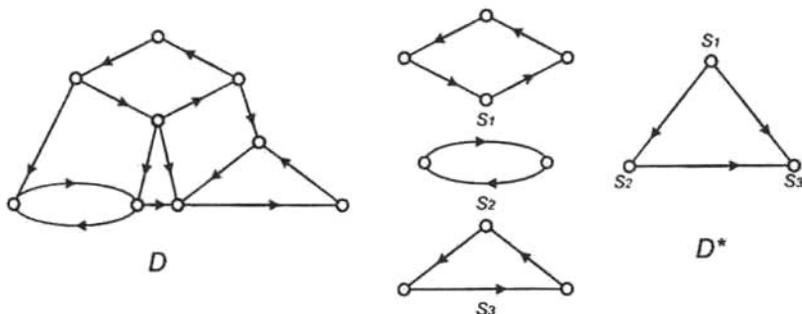
Una digráfica y sus componentes fuertemente conexas.

**Observación 1** Obsérvese que las componentes fuertemente conexas son las subdigráficas de  $D$  fuertemente conexas máximas por contención con esta propiedad y que las componentes fuertemente conexas son ajenas en vértices.

**Definición 1.54** Dada una digráfica  $D$ , definimos la **digráfica de condensación** de  $D$  (denotada por  $D^*$ ) de la siguiente manera:

- 1)  $V(D^*) = \{S_i \mid S_i \text{ es componente fuertemente conexas de } D\}$ .
- 2)  $(S_i, S_j) \in F(D^*)$  con  $i \neq j$ , si y sólo si algún vértice de  $S_i$  es adyacente hacia al menos un vértice de  $S_j$  en la digráfica  $D$ .

Ejemplo:



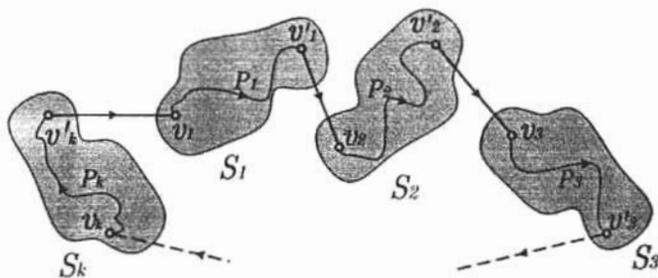
Una digráfica, sus componentes fuertemente conexas y su digráfica de condensación.

**Teorema 1.55** *La digráfica de condensación de cualquier digráfica no contiene ciclos dirigidos.*

Demostración:

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que el teorema es falso. Entonces, existe una digráfica  $D$  cuya digráfica de condensación  $D^*$  contiene ciclos dirigidos. Sean  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  ( $n \geq 2$ ) las componentes fuertemente conexas y sea  $V(D^*) = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_n\}$ . Supongamos que  $(S_1, S_2, \dots, S_k, S_1)$  es un ciclo contenido en  $D^*$ . Para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, k-1$ , deben existir entonces un vértice  $v'_i \in V(S_i)$  y un vértice  $v_{i+1} \in V(S_{i+1})$  tal que  $(v'_i, v_{i+1}) \in F(D)$ ; también existe una flecha  $(v'_k, v_1) \in F(D)$ , donde  $v'_k \in S_k$  y  $v_1 \in S_1$ . Obsérvese que los vértices  $v'_i, v_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$ , no necesariamente son distintos. Puesto que  $S_i$  es fuertemente conexa para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , existe un  $v_i v'_i$ -camino dirigido  $P_i$  en  $S_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ . Más aún, el camino  $P_1 \cup (v'_1, v_2) \cup P_2 \cup (v'_2, v_3) \cup P_3 \cup \dots \cup P_k \cup (v'_k, v_1)$  es un camino dirigido cerrado contenido en  $D$ , lo que implica que para los vértices  $v_1$  y  $v_2$ , existen un  $v_1 v_2$ -camino dirigido y un  $v_2 v_1$ -camino dirigido contenidos en  $D$ ; por lo que  $v_2 \in S_1$  y  $v_2 \in S_2$ , contradiciendo el hecho de que las componentes fuertemente conexas son ajenas en vértices (observación 1). Por lo tanto, la digráfica  $D^*$  no contiene ciclos dirigidos. ■

La siguiente figura muestra la situación arriba descrita.



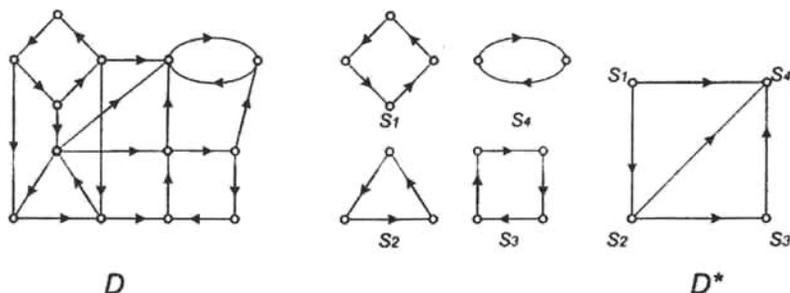
**Teorema 1.56** *Toda digráfica sin ciclos dirigidos contiene al menos un vértice de exgrado 0.*

Demostración:

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una digráfica  $D$  sin ciclos dirigidos tal que todos sus vértices tienen exgrado mayor que cero. Entonces, cada vértice en  $D$  va a ser adyacente hacia al menos otro vértice en  $D$ . Sea  $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una trayectoria dirigida de longitud máxima en  $D$ . Por nuestra hipótesis  $\delta_D^+(v_n) > 0$ ; entonces, existe  $w \in V(D)$  tal que  $(v_n, w) \in F(D)$ . Observemos que si  $w \in T$  se obtiene un ciclo dirigido en  $D$  contradiciendo nuestra suposición. Si  $w \notin T$ , entonces  $T \cup (v_n, w)$  es una trayectoria dirigida de longitud mayor que la de  $T$ , contradiciendo la elección de  $T$ . Por tanto,  $D$  tiene al menos un vértice de exgrado 0. ■

**Definición 1.57** Sea  $D$  una digráfica y  $D^*$  su digráfica de condensación. Decimos que  $S_i$  es una **componente fuertemente conexa inicial (terminal)** si su ingrado (exgrado) en  $D^*$  es cero.

Ejemplo



Una digráfica  $D$ , sus componentes fuertemente conexas y su digráfica de condensación  $D^*$ .

Obsérvese que  $S_1$  es componente fuertemente conexa inicial de  $D$  y  $S_4$  es componente fuertemente conexa terminal de  $D$ .

**Corolario 1.58** Toda digráfica  $D$  contiene al menos una componente fuertemente conexa terminal.

Demostración:

Sea  $D$  una digráfica y consideremos su digráfica de condensación  $D^*$ . Por el Teorema 1.55, la digráfica  $D^*$  no contiene ciclos dirigidos y entonces por el Teorema 1.56, la digráfica  $D^*$  contiene al menos un vértice de exgrado cero, es decir,  $D$  contiene al menos una componente fuertemente conexa terminal. ■

**Corolario 1.59** *Toda digráfica  $D$  que no es fuertemente conexa contiene una componente fuertemente conexa terminal que no es toda la digráfica.*

Demostración:

Supongamos que  $D$  no es fuertemente conexa. Por el Corolario 1.58,  $D$  contiene al menos una componente fuertemente conexa terminal  $S_j$ . Si dicha componente es toda la digráfica, entonces  $D$  es fuertemente conexa contradiciendo nuestra hipótesis. Por lo tanto,  $S_j$  no es toda la digráfica  $D$ . ■

**Lema 1.60** *Toda digráfica  $D$  en la que cada ciclo dirigido contiene al menos una flecha simétrica tiene núcleo.*

Demostración:

La demostración se hará por inducción sobre el número de vértices.

- 1) Para el caso en que el número de vértices es 1 ó 2 el resultado es trivial.
- 2) Supongamos que toda digráfica de orden menor ó igual a  $n$  en la que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica tiene núcleo.
- 3) Sea  $D$  una digráfica de orden  $n + 1$  en la que todo ciclo dirigido contiene al menos una flecha simétrica y consideremos  $Asym(D)$ . Es claro que  $Asym(D)$  no contiene ciclos dirigidos y entonces por el Corolario 1.50 no es fuertemente conexa. Además, el Corolario 1.58 garantiza la existencia de  $S_0$  una componente fuertemente conexa terminal de  $Asym(D)$ . Por otro lado, como  $Asym(D)$  no es fuertemente conexa, el Corolario 1.59 asegura que  $V(D) \neq V(S_0)$  por lo que  $D \setminus S_0 \neq \emptyset$ ; más aún, obsérvese que  $S_0$  contiene un sólo vértice  $w$ .

Consideremos  $\Gamma^-(w) = \{v_i \in V(D) \mid (v_i, w) \in F(D)\}$ . Es claro que  $\{w\}$  es un núcleo de  $D[\{w\} \cup \Gamma^-(w)]$ ; por lo que si  $\{w\} \cup \Gamma^-(w) = V(D)$ , entonces

$\{w\}$  es un núcleo de  $D$ . Supongamos que  $E = V(D) \setminus \{w\} \cup \Gamma^-(w) \neq \emptyset$ , entonces por hipótesis de inducción  $E$  tiene un núcleo  $N_1$ . Claramente  $\{w\} \cup N_1$  es un núcleo de  $D$ . ■

Como observamos antes, no todas las digráficas tienen núcleo (por ejemplo los ciclos dirigidos de longitud impar). El siguiente teorema dado por Duchet en 1980 es uno de los resultados clásicos sobre la existencia de núcleos en digráficas y será de mucha utilidad en los capítulos posteriores.

**Teorema 1.61** *Si una digráfica satisface que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica, entonces es núcleo perfecta.*

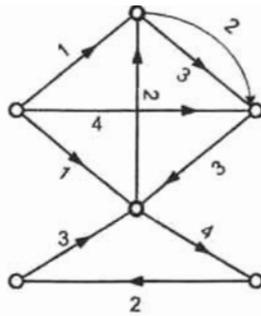
Demostración:

Sea  $D$  una digráfica en la que todo ciclo dirigido contiene al menos una flecha simétrica. Es claro que para cada  $U \subseteq V(D)$ , la subdigráfica inducida  $D[U]$  es una digráfica en la que todo ciclo dirigido contiene al menos una flecha simétrica y entonces por el lema anterior tiene núcleo. Por lo tanto  $D$  es núcleo perfecta. ■

## 1.5. Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas.

Una generalización del concepto de núcleo, es el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas dado por H. Galeana Sánchez [5] en donde se consideran digráficas a cuyas flechas se les ha asignado un color. Si para las flechas de una digráfica  $D$  se han empleado  $m$  colores diremos que  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada.

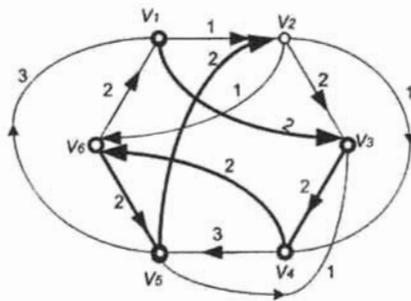
Ejemplo:



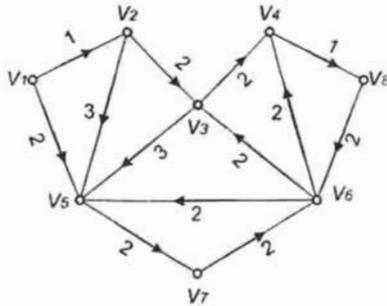
Esta digráfica es una digráfica 4-coloreada.

**Definición 1.62** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, una **trayectoria dirigida monocromática** en una digráfica  $D$  es una trayectoria dirigida tal que todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

Ejemplo:



En la digráfica 3-coloreada anterior, la trayectoria  $\{v_1, v_3, v_4, v_6, v_5, v_2\}$  es una trayectoria dirigida monocromática de color 2.

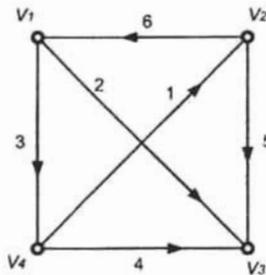


En esta digráfica 3-coloreada  $T_1 = (v_1, v_2, v_3, v_5, v_7, v_6)$  es una trayectoria dirigida pero no es monocromática y  $T_2 = (v_1, v_5, v_6, v_4)$  es una trayectoria monocromática pero no es dirigida.

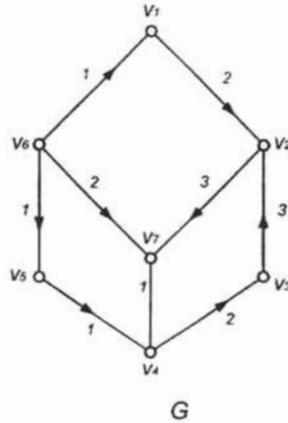
**Advertencia:** En las siguientes definiciones y resultados, hablaremos de trayectorias monocromáticas. El lector debe asumir que, por supuesto, nos referimos a trayectorias *dirigidas* monocromáticas.

**Definición 1.63** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas de la digráfica  $D$  si para cualesquiera  $u$  y  $v$  elementos de  $N$  no existen en  $D$  trayectorias dirigidas monocromáticas entre  $u$  y  $v$ .

Ejemplos:



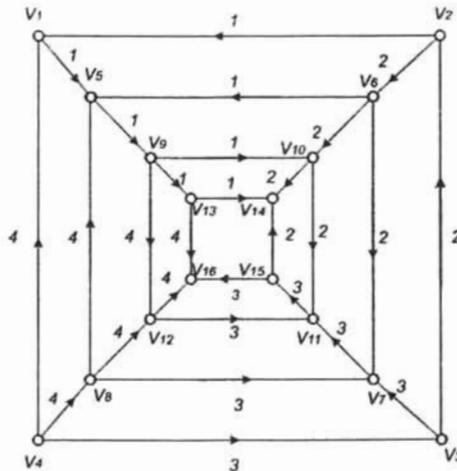
En esta digráfica 6-coloreada no existen conjuntos independientes por trayectorias monocromáticas.



En la digráfica 3-coloreada  $G$ , los conjuntos  $\{v_6, v_2\}$  y  $\{v_6, v_3\}$  son independientes por trayectorias monocromáticas.

**Definición 1.64** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas de la digráfica  $D$  si para cualquier  $u \in V(D) \setminus N$  existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática para algún  $v \in N$ .

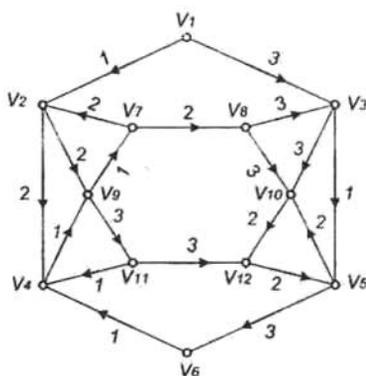
Ejemplo:



En esta digráfica 4-coloreada, el conjunto  $\{v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$  es un conjunto absorbente por trayectorias monocromáticas.

**Definición 1.65** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un **núcleo por trayectorias monocromáticas** en la digráfica  $D$  si es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas y es absorbente por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

Ejemplo:



En esta digráfica 3-coloreada  $\{v_9, v_{10}\}$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas.

El concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo ya que dada una digráfica podemos asignarle a cada una de sus flechas un color diferente y entonces un conjunto de vértices es un núcleo de la digráfica si y sólo si es un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Notemos que la definición de digráfica no permite que existan dos flechas o más con los mismos extremos y en la misma dirección; sin embargo, en una **multidigráfica** es posible tener éste tipo de flechas llamadas **flechas múltiples**.

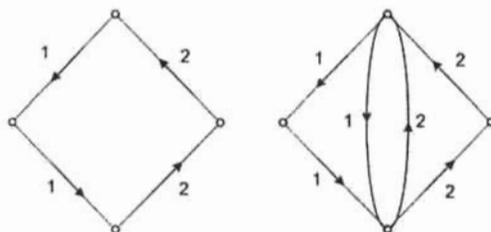
Existe una relación muy estrecha entre los conceptos de núcleo y de núcleo por trayectorias monocromáticas, esta relación está dada mediante el concepto de cerradura transitiva de una digráfica coloreada.

**Definición 1.66** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, la **cerradura transitiva (por colores)** de  $D$ , denotada por  $\mathfrak{C}(D)$ , se define como la siguiente multidigráfica:

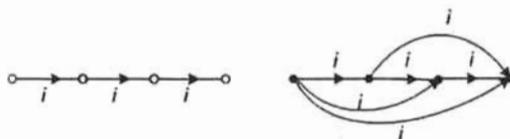
$$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D) \quad \text{y}$$

$$F(\mathfrak{C}(D)) = F(D) \cup \left\{ \begin{array}{l} (u, v) \text{ con color } i \text{ / existe una} \\ uv - \text{trayectoria dirigida monocromática} \\ \text{de color } i \text{ en } D \end{array} \right\}.$$

Ejemplos:



Una digráfica y su cerradura transitiva.

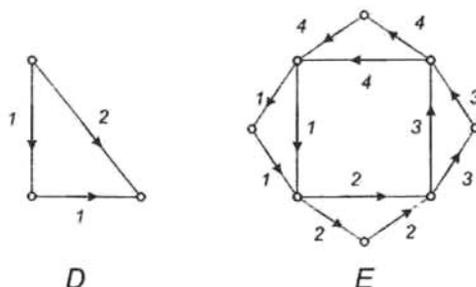


Un camino dirigido monocromático y su cerradura transitiva.

A continuación demostramos algunas propiedades de la cerradura transitiva de una digráfica coloreada.

**Definición 1.67** Si  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada, se dice que  $D$  es **transitiva por colores** si cada vez que existen  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$  de color  $i$ , entonces también existe  $(u, w) \in F(D)$  de color  $i$ .

Ejemplo:



La digráfica  $D$  no es transitiva por colores y la digráfica  $E$  es transitiva por colores.

**Teorema 1.68** Si  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada y  $\mathcal{C}(D)$  la cerradura transitiva de  $D$ , entonces  $\mathcal{C}(D)$  es transitiva por colores. Más aún,  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$ .

Demostración.

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y supongamos que existen  $(u, v) \in F(\mathcal{C}(D))$  y  $(v, w) \in F(\mathcal{C}(D))$  ambas de color  $i$ . Entonces por definición de cerradura transitiva, en  $D$  existen  $T_1$  una  $uv$ -trayectoria dirigida de color  $i$  y  $T_2$  una  $vw$ -trayectoria dirigida de color  $i$ , por lo que  $T_1 \cup T_2$  es un  $uw$ -camino dirigido de color  $i$ ; el cual, por el Teorema 1.36 contiene una  $uw$ -trayectoria dirigida de color  $i$ , esto implica que existe  $(u, w) \in F(\mathcal{C}(D))$  de color  $i$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}(D)$  es transitiva por colores.

Ahora demostraremos que  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) = \mathcal{C}(D)$ .

Como  $V(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) = V(\mathcal{C}(D))$  y es claro que  $F(\mathcal{C}(D)) \subseteq F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)))$  basta demostrar que  $F(\mathcal{C}(\mathcal{C}(D))) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$ , es decir, basta con probar que

si existe  $T$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$  en  $\mathfrak{C}(D)$ , entonces existe  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$  de color  $i$ . Procederemos por inducción sobre  $l(T)$  la longitud de la trayectoria  $T$ . Si  $l(T) = 2$ , el resultado es precisamente la propiedad de ser transitiva por colores. Supongamos que el resultado se cumple para  $l(T) = n$ , y probémoslo ahora para  $l(T) = n + 1$ . Si  $T = (u = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} = v)$ , entonces,  $T' = (u = x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una  $ux_n$ -trayectoria monocromática de color  $i$  en  $\mathfrak{C}(D)$  de longitud  $n$ , y por hipótesis de inducción existe  $(u, x_n) \in F(\mathfrak{C}(D))$  de color  $i$ . Como  $\mathfrak{C}(D)$  es transitiva por colores y existen  $(u, x_n) \in F(\mathfrak{C}(D))$  y  $(x_n, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$  ambas de color  $i$ , entonces existe  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$  de color  $i$ . Por lo tanto  $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(D)) = \mathfrak{C}(D)$ . ■

Finalmente el siguiente teorema muestra la relación entre núcleos y núcleos por trayectorias monocromáticas.

**Teorema 1.69** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada.  $N$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si y sólo si  $N$  es un núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ . Y el número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos de  $\mathfrak{C}(D)$ .*

Demostración:

$\Rightarrow$  Sea  $N \subseteq V(D)$  un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ . Como  $V(D) = V(\mathfrak{C}(D))$ , entonces  $N \subseteq V(\mathfrak{C}(D))$ . Probaremos que  $N$  es un núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

1.  $N$  es independiente en  $\mathfrak{C}(D)$ .

Sean  $u, v \in N$  y procediendo por reducción al absurdo supongamos que  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ . Por definición de la cerradura transitiva tenemos que en  $D$  existe alguna  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática, pero esto no es posible ya que  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ . Por lo tanto  $N$  es independiente en  $\mathfrak{C}(D)$ .

2.  $N$  es absorbente en  $\mathfrak{C}(D)$ .

Sea  $u \in V(\mathfrak{C}(D)) \setminus N$ . Como  $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$  y  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ , entonces para cada  $v \in N$  existe en  $D$  una

$uv$ -trayectoria monocromática de color  $i$ . Por definición de la cerradura transitiva existe  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$  de color  $i$ . Por lo tanto  $N$  es absorbente en  $\mathfrak{C}(D)$ .

Por 1 y 2,  $N$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

$\Leftrightarrow$ ) Sea  $N \subseteq V(\mathfrak{C}(D))$  un núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ . Como  $V(D) = V(\mathfrak{C}(D))$  entonces  $N \subseteq V(D)$ . Probaremos que  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

3.  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas en  $D$ .

Sean  $u, v \in N$  y supongamos por reducción al absurdo que en  $D$  existe alguna  $uv$ -trayectoria monocromática. Por definición de cerradura transitiva tenemos que  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ , pero esto no es posible ya que  $N$  es independiente en  $\mathfrak{C}(D)$ . Por lo tanto  $N$  es independiente por trayectorias monocromáticas.

4.  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas en  $D$ .

Sea  $u \in V(D) \setminus N$ . Como  $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$  y  $N$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$ , entonces para cada  $v \in N$  existe  $(u, v) \in F(\mathfrak{C}(D))$ . Por la definición de la cerradura transitiva, existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Por lo tanto  $N$  es absorbente por trayectorias monocromáticas en  $D$ .

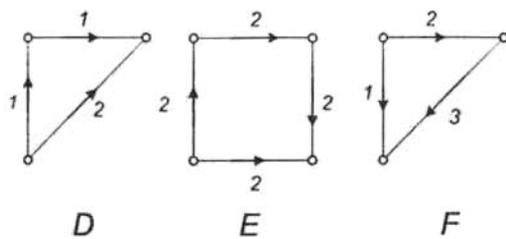
Por 3 y 4  $N$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ .

Por lo anterior, todo núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  es núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$  y todo núcleo de  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$ , por lo tanto el número de núcleos por trayectorias monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos de  $\mathfrak{C}(D)$ . ■

Algunas de las condiciones que se presentan en este trabajo para que una digráfica coloreada tenga núcleo por trayectorias monocromáticas se refieren a que en la digráfica ciertas subdigráficas posean una coloración especial a la que llamaremos casimonocromática y que definimos a continuación.

**Definición 1.70** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, decimos que  $D$  es *casimonocromática* si todas sus flechas son del mismo color excepto a lo más una.

Ejemplo:



Las digráficas D y E son casimonocromáticas y F no es casimonocromática.

## Capítulo 2

# Núcleos por Trayectorias Dirigidas Monocromáticas en Torneos $m$ -Coloreados.

### 2.1. Resumen.

La teoría expuesta en este capítulo tiene su origen en el siguiente problema: ¿Puede un torneo 3-coloreado que no contenga  $C_3$  (es decir, que no contenga 3-ciclos dirigidos coloreados con tres diferentes colores) tener un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas ?

Esta pregunta fue hecha por Sands, Sauer y Woodrow en 1982 ( ver [2] ) como una conjetura derivada del siguiente resultado: Todo torneo 2-coloreado tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. El Teorema 2.6 ( debido a Shen Minggang ) prueba que añadiendo otra condición al problema anterior, la respuesta es afirmativa aún para torneos  $m$ -coloreados y que además dichas condiciones no pueden ser mejoradas para cuando  $m \geq 5$  . El Teorema 2.21 es de hecho una familia de contraejemplos a la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow para el caso en que  $m = 4$ : en particular se construye un torneo 4-coloreado de orden 6 que no contiene  $C_3$  y que tampoco contiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. Sin embargo el caso para  $m = 3$  sigue siendo un problema abierto.

Al introducir el concepto de ciclos casimonocromáticos H. Galeana presen-

ta algunas condiciones suficientes para que un torneo  $m$ -coloreado contenga un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En particular en el Teorema 2.16 demuestra que si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado en el que cualquier ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es casimonocromático entonces contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, y prueba que esto no es una generalización de las condiciones establecidas por Shen Minggang aún y cuando para  $m \geq 5$  esta nueva condición tampoco puede ser mejorada.

## 2.2. Torneos $m$ -Coloreados.

### 2.2.1. Introducción.

**Definición 2.1** *Un torneo es una digráfica completa y asimétrica.*

**Definición 2.2** *Se dice que una digráfica es **transitiva** si cada vez que existen  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$ , entonces también  $(u, w) \in F(D)$ .*

**Notación 2.3** *Denotamos por  $T_3$  a los torneos transitivos de orden 3 cuyas flechas son coloreadas con tres diferentes colores (es decir, 3-coloreados).*

**Notación 2.4** *Denotamos por  $C_3$  a los ciclos dirigidos de orden 3 y que son 3-coloreados.*

**Notación 2.5.1** *Denotaremos por  $T - v$  a la subdigráfica de  $T$  inducida por  $V(T) - \{v\}$ . Observemos que  $T - v$  también es un torneo.*

**Notación 2.5.2** *Con  $tdm$  abreviamos trayectoria(s) dirigida(s) monocromática(s). Si existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $y$ , entonces escribimos que esta es una  $xy - tdm$ .*

**Advertencia:** En lo que sigue, hablaremos de trayectorias monocromáticas, ciclos monocromáticos y ciclos casimonocromáticos. El lector debe asumir que, por supuesto, nos referimos a trayectorias y ciclos *dirigidos*.

En un artículo aparecido en 1982 (ver [2]) Sands, Sauer y Woodrow demostraron que todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un vértice  $v$  tal que para

cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una tdm de  $x$  a  $v$ , es decir, que  $T$  contiene un núcleo por tdm ( obsérvese que en todo torneo los núcleos por tdm constan de un solo vértice) y resaltan el siguiente problema:

*Sea  $T$  un torneo 3-coloreado que no contiene  $C_3$  ¿Necesariamente  $T$  contiene un núcleo por tdm?*

En 1986 Shen Minggang demuestra que añadiendo otra condición al planteamiento del problema, la respuesta a esta pregunta es afirmativa (ver [4]). El siguiente es su resultado principal que es una generalización a torneos  $m$ -coloreados:

### 2.2.2. Trayectorias Monocromáticas en Torneos $m$ -Coloreados.

**Teorema 2.6** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces existe  $v \in V(T)$  tal que  $\{v\}$  es núcleo por tdm.*

Demostración:

Procederemos por inducción sobre el orden de  $T$ .

1) Si  $T$  consta de un vértice el teorema se verifica por vacuidad. Para el caso en que  $V(T) = \{x, y\}$  como  $T$  es un torneo, entonces  $(x, y) \in F(T)$  ( ó bien,  $(y, x) \in F(T)$ ) y resulta claro que  $\{y\}$  es núcleo por tdm ( ó bien, respectivamente  $\{x\}$  es núcleo por tdm).

2) Supongamos que el resultado se cumple para todo torneo  $m$ -coloreado de orden menor que  $n$ .

3) Sea  $T$  un torneo de orden  $n$ . Para cada  $v \in V(T)$  denotemos por  $N(T - v)$  al conjunto de núcleos por tdm del torneo  $T - v$ . Entonces la hipótesis de inducción permite definir una función  $f : V(T) \rightarrow V(T)$  por medio de la cual a cada  $v \in V(T)$ , se tiene que  $f(v)$  es un núcleo por tdm de  $T - v$ . Entonces para cada  $x \in V(T) - \{v\}$  existe una tdm de  $x$  a  $f(v)$ .

Probaremos que podemos considerar a  $f$  como una función inyectiva. Para ello, supongamos que  $f$  no es inyectiva. Entonces, existen  $u, v \in V(T)$  tal que

$u \neq v$  y  $f(u) = f(v)$  de manera que  $f(u)$  absorbe a todo  $x \in V(T) - \{u\}$  (en particular absorbe a  $v$ ) y  $f(v)$  absorbe a todo  $x \in V(T) - \{v\}$  (en particular absorbe a  $u$ ). Como  $f(u) = f(v)$  resulta claro que  $f(u)$  absorbe a todos los vértices de  $T$ , es decir,  $\{f(u)\}$  es núcleo por tdm de  $T$  y el teorema se cumple.

Por otro lado, supongamos que para algún  $v \in V(T)$  existe una  $vf(v) - tdm$ . Debido a que  $f(v)$  absorbe a todos los vértices de  $T$  distintos de  $v$ , se infiere que  $f(v)$  absorbe a todos los vértices de  $T$ . Por lo tanto,  $\{f(v)\}$  es núcleo por tdm de  $T$  y de nuevo el teorema se cumple.

Por lo anterior, podemos asumir que  $f$  es una función biyectiva ( Recuerde que si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos con el mismo número de elementos y  $f$  es una función tal que  $f : A \rightarrow B$ , entonces  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow f$  es biyectiva) y  $T$  es un torneo en el cual no existen  $vf(v) - tdm$ . Entonces, es posible renombrar los elementos de  $V(T)$  de la siguiente manera:

$$f(v_i) = v_{i+1}$$

los cuales están particionados en ciclos de la siguiente forma:

$$(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2}), \dots$$

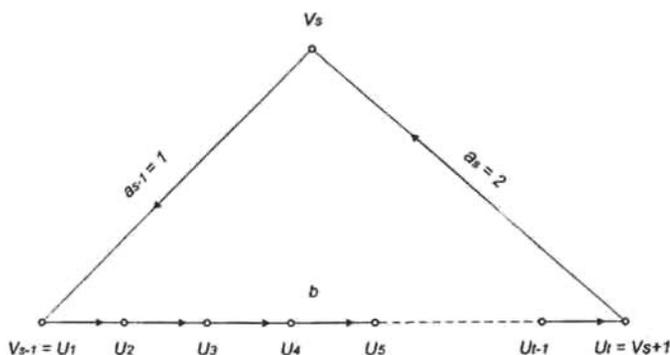
en donde:

$$f(v_1) = v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}, \dots$$

Obsérvese que sólo puede existir un ciclo de ésta forma. En efecto, si suponemos que existe al menos otro ciclo  $L$  con ésta propiedad, entonces el número de vértices que lo conforman es estrictamente menor que  $n$  y de nuestra hipótesis de inducción se infiere que existe  $v \in L$  tal que  $\{v\}$  es núcleo por tdm del torneo  $T'$  inducido por los vértices de  $L$ . Debido a que  $v \in L$ , existe  $w \in L$  tal que  $v = f(w)$  y por tanto existe una  $wf(w)$ -tdm en  $T$  contradiciendo nuestra suposición.

Establecida la unicidad, sea  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal ciclo. Notemos que al no existir  $v_i v_{i+1}$ -tdm en  $T$  y como  $T$  es un torneo, entonces existen las flechas  $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_n, v_{n-1}), (v_1, v_n)$  coloreadas con  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  colores respectivamente. Observemos que si  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$ , entonces  $(v_n, v_{n-1}, \dots, v_2, v_1 = f(v_n))$  es una  $v_n f(v_n)$ -tdm, contradiciendo nuestra suposición de que tales trayectorias no existen. De modo que deben existir  $a_{s-1} \neq a_s$ ; sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a_{s-1} = 1$  y  $a_s = 2$ . Observemos que existe una  $v_{s-1} v_{s+1}$ -tdm de color  $b$  ( puesto que  $\{v_{s+1}\}$  es núcleo por tdm de  $T - v_s$  y en particular absorbe a  $v_{s-1}$ ). Es claro que  $b \neq 1$  y  $b \neq 2$  ya que de no ser así; es decir, si  $b = 1$  ó si  $b = 2$ , entonces existe una  $v_s v_{s+1}$ -tdm de color 1 ó respectivamente existe una  $v_s v_{s+1}$ -tdm de color 2 contradiciendo el supuesto de que tales trayectorias no existen. Entonces, podemos suponer que  $b = 3$ .

Sea  $P = (v_{s-1} = u_1, u_2, \dots, u_t = v_{s+1})$  una  $v_{s-1} v_{s+1}$ -tdm de longitud mínima. Obsérvese la siguiente figura.



Debido a que  $T$  es un torneo, para cada  $i = 1, 2, \dots, t$  existe una flecha entre  $v_s$  y  $u_i$  (sin importar en qué dirección) y ninguna de ellas es de color 3: Claramente, si existe  $(u_k, v_s) \in F(T)$  de color 3 ( ó si existe  $(v_s, u_m) \in F(T)$  de color 3) entonces  $(u_1, P, u_k) \cup (u_k, v_s)$  es una  $v_{s-1} v_s$ -tdm (respectivamente  $(v_s, u_m) \cup (u_m, P, u_t)$  es una  $v_s v_{s+1}$ -tdm), contradiciendo nuestra suposición de que tales trayectorias no existen. Por lo tanto, las flechas entre  $v_s$  y  $u_i$  (con  $i = 1, 2, \dots, t$ ) no son de color 3.

Finalmente, observemos que existe  $u_i \in P$  tal que la flecha entre  $v_s$  y  $u_i$  y la flecha entre  $v_s$  y  $u_{i+1}$  son de diferente color. En efecto, existe  $j \in \{2, 3, \dots, t\}$  tal que la flecha entre  $v_s$  y  $u_j$  es de color distinto de 1 (ya que al menos  $(u_t, v_s) \in F(T)$  es de color 2) y entonces podemos considerar  $m = \min \{j \mid \text{la flecha entre } v_s \text{ y } u_j \text{ tiene color distinto de 1}\}$ . Como  $m > 1$ , la flecha entre  $v_s$  y  $u_m$  tiene distinto color a la flecha entre  $v_s$  y  $u_{m-1}$ ; de donde, se infiere que los vértices  $\{v_s, u_m, u_{m-1}\}$  forman un triángulo con 3 colores diferentes (es decir, un  $T_3$  ó un  $C_3$ ), contradiciendo la hipótesis inicial de que  $T$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ . Por lo tanto el teorema es válido. ■

**Corolario 2.7** *Sea  $T$  un torneo 2-coloreado. Entonces existe un vértice  $v$  en  $T$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una  $xv$ -tdm.*

Demostración:

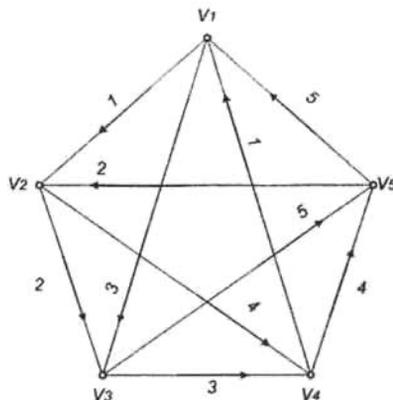
Como  $T$  es un torneo 2-coloreado, entonces  $T$  no contiene ni  $C_3$  ni  $T_3$  y por el Teorema 2.6,  $T$  contiene un núcleo por tdm. ■

**Corolario 2.8** *Supongamos que  $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, H_1, H_2, \dots, H_n$  son torneos  $m$ -coloreados que no contienen  $T_3$  ni  $C_3$ . Sea  $T'$  un torneo que se obtiene al reemplazar cada vértice  $v_i$  de  $T$  por  $H_i$ , dejando que todas las flechas entre  $H_i$  y  $H_j$  tengan el mismo color que las flechas entre  $v_i$  y  $v_j$ , pero con direcciones arbitrarias. Entonces  $T'$  contiene un núcleo por tdm.*

Demostración:

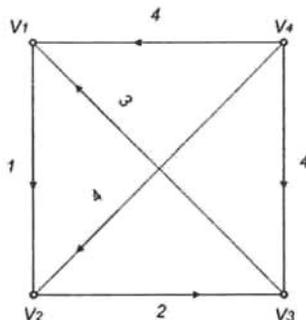
Obsérvese que para cualesquiera tres vértices de  $T$ , el torneo inducido por ellos no puede ser 3-coloreado. Por lo tanto,  $T'$  no contiene  $C_3$  ni  $T_3$  y por el Teorema 2.6, tenemos que  $T'$  contiene un núcleo por tdm. ■

**Observación 2.9** Si en el Teorema 2.6 únicamente se pide que  $T$  no contenga  $C_3$ , entonces su conclusión no se verifica. Como prueba, damos el siguiente contraejemplo.



La digráfica anterior, a la que llamaremos  $G_5$ , es un torneo de orden 5, 5-coloreado, que no contiene  $C_3$ . Sin embargo  $G_5$  no contiene núcleos por tdm debido a que en ella no existen  $v_{i+1}v_i$ -tdm (donde los subíndices  $i+1$  son contados módulo 5). Es posible construir contraejemplos más grandes con  $m = 5$  agregando vértices a  $G_5$  y conectando cada nuevo vértice hacia todos los demás por medio de una flecha coloreada con 1.

**Observación 2.10** Si en el Teorema 2.6 se pide solamente que  $T$  no contenga  $T_3$ , entonces el resultado es falso. Como prueba se da el siguiente contraejemplo: Sea  $D_n$  un torneo 4-coloreado con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  en el que las flechas  $a = (v_1, v_2)$ ,  $b = (v_2, v_3)$ ,  $c = (v_3, v_1)$  tienen color 1, 2 y 3 respectivamente, mientras que las flechas restantes son de la forma  $(v_i, v_j)$  si  $i > j$ , y están coloreadas con 4. Obsérvese la siguiente figura para  $n = 4$ .



Es claro que  $D_n$  es un torneo 4-coloreado que no contiene  $T_3$ . Sin embargo,  $D_n$  no contiene núcleos por tdm. En la figura anterior,  $v_1$  no absorbe a  $v_2$  por tdm,  $v_2$  no absorbe a  $v_3$  por tdm,  $v_3$  no absorbe a  $v_1$  por tdm y  $v_i$  no absorbe a  $v_j$  por tdm si  $i > j$ .

De las dos observaciones anteriores, tenemos la siguiente.

**Observación 2.11** Si  $m \geq 5$ , las condiciones del Teorema 2.6 no pueden ser mejoradas.

### 2.3. Trayectorias monocromáticas, ciclos monocromáticos y ciclos casimonocromáticos en Torneos m-Coloreados.

En esta sección presentamos algunas condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos m-coloreados.

**Definición 2.12** Sea  $D$  una digráfica m-coloreada y  $\gamma_n = (0, 1, 2, \dots, n - 1, 0)$  un ciclo dirigido contenido en  $D$ . Decimos que  $\gamma_n$  es  $\mathcal{C}(D)$ -monocromático si existe un conjunto

$$\{f_i = (i, i + 1) \in F(\mathcal{C}(D)) \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ tomado mod } n\}$$

de flechas coloreadas con el mismo color.

En lo que resta de este capítulo necesitaremos los siguientes resultados, de los cuales no daremos sus demostraciones por considerarlas demasiado extensas, pero el lector interesado en ellas puede consultar las referencias indicadas.

**Teorema 2.13** (H. Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [7]) Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica entonces no existe partición alguna  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sym}(D)$  donde  $D[V_1, V_2] = \left\{ \begin{array}{l} uv \in F(D) \mid \\ u \in V_1, v \in V_2 \end{array} \right\}$ , en otras palabras,  $\text{Asym}(D)$  es fuertemente conexa.

**Teorema 2.14** (Berge y Duchet [8]) *Una digráfica completa es núcleo perfecta si y sólo si cualquier ciclo dirigido contiene al menos una flecha simétrica.*

**Teorema 2.15** (H. Galeana-Sánchez y Rajsbaum [9]) *Sea  $T$  un torneo hamiltoniano con  $n$  vértices y  $\gamma$  un ciclo dirigido hamiltoniano contenido en  $T$ . Para cada  $k$  ( $3 \leq k \leq n - 1$ ) existe un ciclo dirigido de longitud  $k$  (denotado por  $\gamma_k$ ) contenido en  $T$  tal que  $|F(\gamma_k) \cap F(\gamma)| \geq 1$ .*

**Teorema 2.16** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en  $T$  de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático, entonces  $\mathfrak{C}(T)$  es núcleo perfecta.*

Demostración:

Procediendo por reducción al absurdo supongamos que  $\mathfrak{C}(T)$  no es núcleo perfecta. Como  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica completa se sigue del Teorema 2.14 que existe un ciclo dirigido contenido en  $Asym(\mathfrak{C}(T))$ .

Sea  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_0)$  un ciclo dirigido de longitud mínima  $m$  contenido en  $Asym(\mathfrak{C}(T))$ . Para concluir la prueba necesitamos demostrar varias proposiciones en el orden siguiente:

(a)  $\gamma \subseteq T$ . La definición de  $\gamma$  implica que  $\gamma \subseteq Asym(\mathfrak{C}(T))$  y como  $T$  es un torneo con  $V(T) = V(\mathfrak{C}(T))$  se sigue que  $\gamma \subseteq T$ .

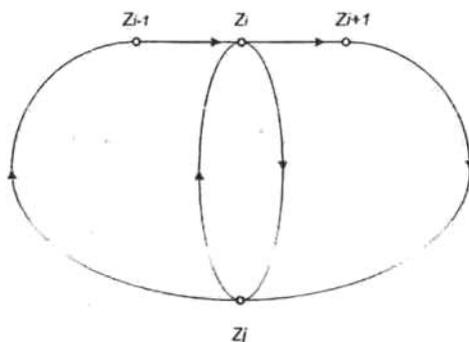
(b)  $l(\gamma) = m \geq 5$ . Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que  $l(\gamma) \leq 4$ . Como  $\gamma \subseteq T$ , de nuestra hipótesis se sigue que  $\gamma$  es un ciclo casimonocromático; sin pérdida de generalidad podemos suponer que las flechas

$$\{(z_i, z_{i+1}) \in F(\gamma) \mid i \in \{0, 1, \dots, m-2\}\}$$

están coloreadas con el mismo color. De modo que  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  es una tdm. Se deduce que  $(z_0, z_{m-1}) \in F(\mathfrak{C}(T))$  y entonces  $(z_{m-1}, z_0) \in F(Sym(\mathfrak{C}(T)) \cap \gamma)$  lo cual es una contradicción.

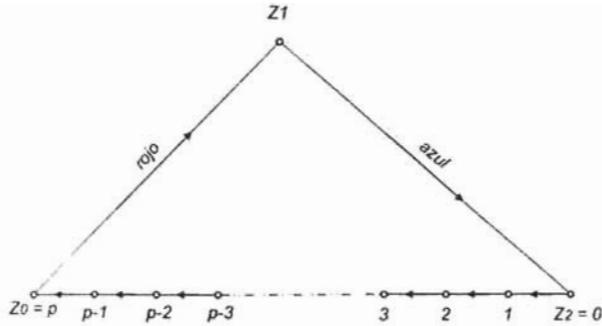
(c)  $\gamma$  no es monocromático. Por reducción al absurdo, supongamos que  $\gamma$  es un ciclo dirigido monocromático, entonces  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  es una tdm y por este motivo  $(z_0, z_{m-1}) \in F(\mathfrak{C}(T))$ , de modo que  $(z_{m-1}, z_0) \in F(Sym(\mathfrak{C}(T))) \cap F(\gamma)$  lo cual es una contradicción.

(d) Para cualesquiera  $z_i, z_j \in V(\gamma)$  tales que  $j \notin \{i-1, i+1\}$  se tiene que  $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(\mathcal{C}(T))$ . Sean  $z_i, z_j \in V(\gamma)$  tales que  $j \notin \{i-1, i+1\}$ . Como  $\{z_i, z_j\} \subseteq V(T)$ , al menos una de las dos flechas  $(z_i, z_j)$  ó  $(z_j, z_i)$  está contenida en el torneo  $T$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $(z_i, z_j) \in F(T)$ . Entonces  $\gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, \dots, z_{i-1}, z_i)$  (con notación *mod m*) es un ciclo dirigido con  $l(\gamma') < l(\gamma)$ . Se deduce de la definición de  $\gamma$  que  $\gamma' \not\subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ , de aquí que  $(z_j, z_i) \in \text{Sym}(\mathcal{C}(T))$ .



Como  $\gamma$  no es un ciclo monocromático, existen dos flechas consecutivas contenidas en  $\gamma$  con colores diferentes. Digamos que la flecha  $(z_0, z_1)$  es roja y la flecha  $(z_1, z_2)$  es azul.

(e)  $(z_2, z_0) \notin F(T)$ . Procediendo por reducción al absurdo supongamos que  $(z_2, z_0) \in F(T)$ , entonces  $\gamma_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ . La hipótesis del Teorema 2.1 implica las siguientes posibilidades:  $(z_2, z_0)$  es roja ó  $(z_2, z_0)$  es azul. Si  $(z_2, z_0)$  es roja, entonces  $(z_2, z_0, z_1)$  es una tdm, de aquí que  $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ . Si  $(z_2, z_0)$  es azul, entonces  $(z_1, z_2, z_0)$  es una tdm, de aquí que  $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ . Así que;  $(z_2, z_0) \notin F(T)$ , sin embargo la proposición (d) implica que  $(z_2, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ . Se deduce que existe una tdm de longitud al menos 2 de  $z_2$  a  $z_0$  contenida en  $T$ . Sea  $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \dots, p = z_0)$  dicha trayectoria ( con  $p \geq 2$ ).

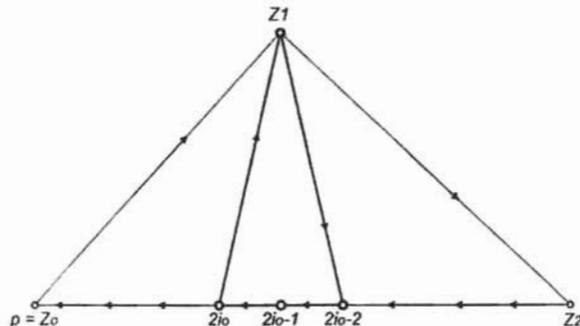


(f)  $\alpha$  no es azul. Si  $\alpha$  es azul, entonces  $(z_1, z_2) \cup \alpha$  es una tdm y se deduce que  $(z_1, z_0) \in F(\mathfrak{C}(T))$  lo cual es una contradicción al hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathfrak{C}(T))$ .

(g)  $\alpha$  no es roja. Si  $\alpha$  es roja, entonces  $\alpha \cup (z_0, z_1)$  es una tdm y se deduce que  $(z_2, z_1) \in F(\mathfrak{C}(T))$  lo cual es una contradicción al hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathfrak{C}(T))$ .

En lo que sigue podemos suponer (sin perder generalidad) que  $\alpha$  es negra.

(h) Para cada  $i \geq 0$  tal que  $2i < p$ , se tiene que  $(z_1, 2i) \in F(T)$ . Procediendo por reducción al absurdo supongamos que existe  $i \geq 0$  tal que  $2i < p$  y  $(z_1, 2i) \notin F(T)$ . Sea  $2i_0 = \min\{2i \mid (z_1, 2i) \notin F(T) (0 \leq 2i < p)\}$ . Como  $0 = z_2$  y  $(z_1, z_2) \in F(T)$  se sigue que  $2i_0 > 0$  y  $2i_0 - 2 \geq 0$ . De aquí que  $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(T)$ ,  $(z_1, 2i_0) \notin F(T)$  y  $(2i_0, z_1) \in F(T)$ .



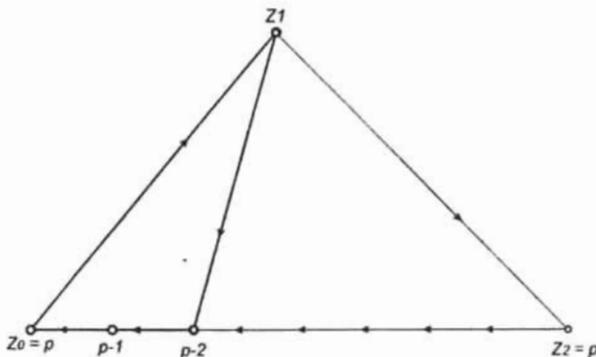
Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$ . Las propiedades anteriores implican que  $\gamma_4$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  con dos flechas negras, denotadas por  $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$  y  $(2i_0 - 1, 2i_0)$ . La hipótesis del Teorema 2.16 implica que  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático y entonces al menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0 - 2)$  ó  $(2i_0, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0 - 2)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0 - 2) \cup \left( \begin{array}{c} 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, \dots \\ \dots, p = z_0 \end{array} \right)$  es una tdm, de aquí que  $(z_1, z_0) \in F(\mathfrak{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathfrak{C}(T))$ .

Si  $(2i_0, z_1)$  es negra entonces  $(z_2 = 0, 1, \dots, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$  es una tdm, de aquí que  $(z_2, z_1) \in F(\mathfrak{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathfrak{C}(T))$ .

Concluiremos la prueba del Teorema 2.16 analizando los casos en que  $p$  es par y  $p$  es impar.

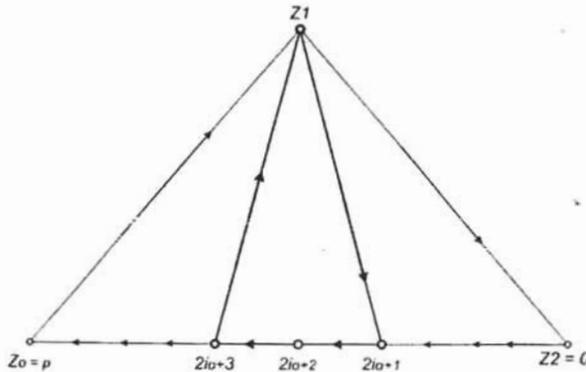
*Caso1: p es par.* En este caso  $p - 2$  también es par y como  $p \geq 2$  tenemos que  $p - 2 \geq 0$ . La proposición (h) implica que  $(z_1, p - 2) \in F(T)$ . Así,  $\gamma_4 = (z_1, p - 2, p - 1, p, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  con al menos dos flechas negras, denotadas como  $(p - 2, p - 1)$  y  $(p - 1, p)$ . Como  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático se sigue que  $(z_1, p - 2)$  es negra (obsérvese que  $(p, z_1) = (z_0, z_1)$  es roja), y en consecuencia  $(z_1, p - 2, p - 1, p = z_0)$  es una tdm, de modo que  $(z_1, z_0) \in F(\mathfrak{C}(T))$  lo cual contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathfrak{C}(T))$ .



*Caso2: p es impar.* Primero necesitamos demostrar las siguientes proposiciones.

(i) Si  $p$  es impar, entonces para cada  $i \geq 0$  tal que  $1 \leq 2i + 1 \leq p$ , se tiene que  $(2i + 1, z_1) \in F(T)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $i \geq 0$  tal que  $1 \leq 2i + 1 \leq p$  pero  $(2i + 1, z_1) \notin F(T)$ . Sea:

$$2i_0 + 1 = \max \{2i + 1 \mid (2i + 1, z_1) \notin F(T) (1 \leq 2i + 1 \leq p)\}$$



Como  $p = z_0$  y  $(z_0, z_1) \in F(T)$  se deduce que  $2i_0 + 1 < p$ . De manera que  $(2i_0 + 3, z_1) \in F(T)$  y  $(z_1, 2i_0 + 1) \in F(T)$ .

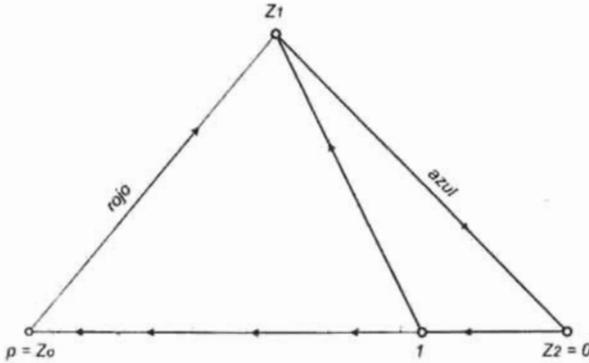
Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 + 1, 2i_0 + 2, 2i_0 + 3, z_1)$ . Lo establecido arriba implica que  $\gamma_4$  en un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  con dos flechas negras, denotadas como  $(2i_0 + 1, 2i_0 + 2)$  y  $(2i_0 + 2, 2i_0 + 3)$ . La hipótesis del Teorema 2.16 implica que  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático y entonces al menos una de las dos flechas  $(z_1, 2i_0 + 1)$  ó  $(2i_0 + 3, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0 + 1)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0 + 1) \cup (2i_0 + 1, 2i_0 + 2, \dots, p = z_0)$  es una tdm, de aquí que  $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ .

Si  $(2i_0 + 3, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2 = 0, 1, \dots, 2i_0 + 3) \cup (2i_0 + 3, z_1)$  es una tdm, de aquí que  $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(T))$  contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ .

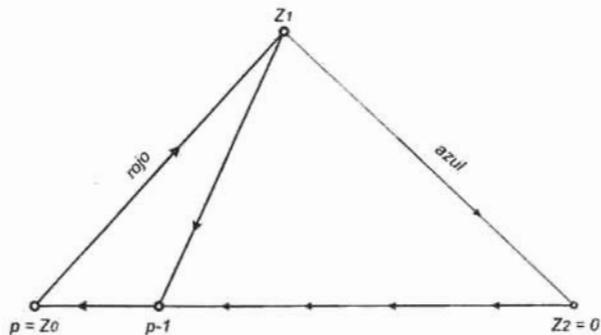
(j) Si  $p$  es impar, entonces  $(1, z_1) \in F(T)$  es azul. Se sigue directamente de la proposición (i) que  $(1, z_1) \in F(T)$ . De manera que  $\gamma_3 = (z_1, z_2 = 0, 1, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ . Puesto que la flecha  $(z_1, z_2)$  es azul, la flecha  $(0, 1)$  es negra y  $\gamma_3$  es un ciclo casimonocromático (por la

hipótesis del Teorema 2.16), se deduce que la flecha  $(1, z_1)$  es azul ó la flecha  $(1, z_1)$  es negra.



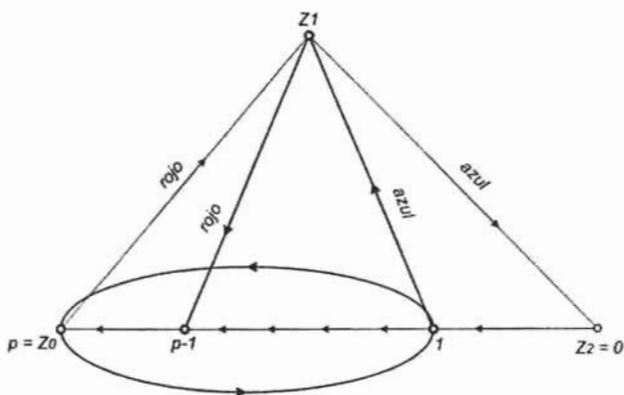
Si la flecha  $(1, z_1)$  es negra, entonces  $(z_0, 1, z_1)$  es una tdm, lo cual implica que  $(z_0, z_1) \in F(C(T))$ , contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq Asym(C(T))$ . Concluimos que  $(1, z_1)$  es azul.

(k) Si  $p$  es impar, entonces  $(z_1, p-1) \in F(T)$  es roja. Como  $p$  es impar, entonces  $p-1$  es par y la proposición (h) implica que  $(z_1, p-1) \in F(T)$ . De modo que  $\gamma_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ . Como  $(z_0, z_1) = (p, z_1)$  es roja,  $(p-1, p)$  es negra y  $\gamma_3$  es un ciclo casimonocromático (recuerde la hipótesis del Teorema 2.16), se sigue que la flecha  $(z_1, p-1)$  es roja ó la flecha  $(z_1, p-1)$  es negra. Si la flecha  $(z_1, p-1)$  es negra, entonces  $(z_1, p-1, p)$  es una tdm, lo cual implica que  $(z_1, p) \in F(\mathcal{C}(T))$ , contradiciendo el hecho de que  $\gamma \subseteq Asym(\mathcal{C}(T))$ . Concluimos que  $(z_1, p-1)$  es roja.



Concluimos la prueba del Teorema 2.16 analizando los siguientes dos sub-casos.

*Subcaso 2(a):*  $(1, p) \in F(T)$ . En este caso  $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas son coloreadas con por lo menos 3 colores ( $(z_0, z_1)$  es roja,  $(z_1, z_2)$  es azul y  $(0, 1)$  es negra) contradiciendo la hipótesis del Teorema 2.16.



*Subcaso 2(b):*  $(p, 1) \in F(T)$ . En este caso  $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  cuyas flechas son coloreadas con por lo menos 3 colores ( la proposición (j) implica que  $(1, z_1)$  es azul, la proposición

(k) implica que  $(z_1, p - 1)$  es roja, y  $(p - 1, p)$  es negra) contradiciendo la hipótesis del Teorema 2.16. ■

**Teorema 2.17** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es un ciclo monocromático. Entonces  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración:

Primero demostraremos que cada ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  es un ciclo casimonocromático.

Sea  $\gamma_4 = (0, 1, 2, 3, 0)$  un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$ , y supongamos que  $\gamma_4$  no es monocromático. Podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que las flechas  $(0, 1)$  y  $(1, 2)$  tienen asignados diferentes colores; digamos que  $(0, 1)$  es roja y  $(1, 2)$  es azul.

Afirmamos que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  tienen asignado el mismo color. Supongamos para llegar a una contradicción que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  tienen diferentes colores. Así, si  $(0, 2) \in F(T)$  entonces el ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ ,  $\gamma_3 = (2, 3, 0, 2)$  no es monocromático lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Si  $(2, 0) \in F(T)$ , entonces el ciclo dirigido  $\gamma_3 = (2, 0, 1, 2)$  de longitud 3 contenido en  $T$  no es monocromático, de nuevo una contradicción.

Afirmamos que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  son ambas rojas ó ambas azules. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que dichas flechas tienen el mismo color, pero que no es ni azul ni rojo, digamos que tienen color negro. Si  $(1, 3) \in F(T)$ , entonces  $\gamma_3 = (1, 3, 0, 1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ , pero que no es monocromático, contradiciendo la hipótesis del teorema. Del mismo modo, si  $(3, 1) \in F(T)$ , entonces  $(3, 1, 2, 3)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  que no es monocromático, de nuevo una contradicción.

De manera que las flechas  $(2, 3)$  y  $(3, 0)$  son ambas rojas ó ambas azules. En cualquier caso,  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático. Directamente del Teorema 2.16 se deduce que  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica núcleo perfecta. ■

**Teorema 2.18** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es  $\mathfrak{C}(T)$ -monocromático. Entonces  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.*

Demostración:

Como  $\mathcal{C}(T)$  es una digráfica completa, se sigue del Teorema 2.14 que es suficiente probar que cada ciclo dirigido contenido en  $\mathcal{C}(T)$  contiene al menos una flecha simétrica. Sea  $\gamma$  un ciclo dirigido contenido en  $\mathcal{C}(T)$  y por reducción al absurdo supongamos que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(\mathcal{C}(T))$ . Se sigue que  $\gamma \subseteq T$ . El ciclo dirigido  $\gamma$  es un ciclo dirigido hamiltoniano del torneo  $T[V(\mathcal{C})] = T'$ . Se sigue del Teorema 1.15 que existe un ciclo dirigido  $\gamma_3$  de longitud 3 contenido en  $T'$ , tal que  $|F(\gamma_3) \cap F(\gamma)| \geq 1$ . Como  $\gamma_3$  es  $\mathcal{C}(T)$ -monocromático se sigue que  $\gamma_3 \subseteq \text{Sym}(\mathcal{C}(T))$ , y así  $F(\gamma) \cap F(\text{Sym}(\mathcal{C}(T))) \neq \emptyset$ . ■

**Teorema 2.19** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado con  $p$  vértices tal que existe una digráfica  $H$  con  $V(T) = V(H)$ ,  $\mathcal{C}(T) \subseteq H$  y  $\mathcal{C}(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica. Si existe  $k$  (con  $4 \leq k \leq p$ ) tal que para cualquier ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  es  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático, entonces cada ciclo dirigido de longitud  $k - 1$  contenido en  $T$  es  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático.*

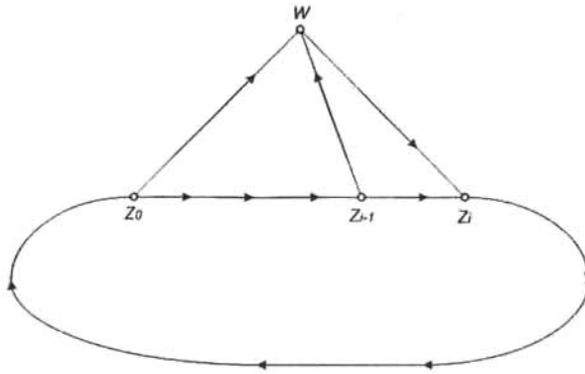
Demostración:

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que cumple con las hipótesis del teorema y sea  $\gamma_{k-1} = (z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-2}, z_0)$  un ciclo dirigido de longitud  $k - 1$  contenido en  $T$  (con  $3 \leq k - 1 \leq p - 1$ ). Analizaremos los siguientes casos posibles:

*Caso 1:* Existe un vértice  $w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$  tal que  $\{(z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} \neq \emptyset$  y  $\{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} \neq \emptyset$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $(z_0, w) \in F(T)$  y sea  $i = \min \{j \in \{1, \dots, k - 2\} \mid (w, z_j) \in F(T)\}$  (la elección de  $w$  implica que  $i$  está bien definido). Se sigue de la definición de  $i$  que  $(z_{i-1}, w) \in F(T)$  y  $(w, z_i) \in F(T)$ . De aquí que  $(z_{i-1}, w, z_i) \cup (z_i, \gamma_{k-1}, z_{i-1})$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  y la hipótesis del Teorema implica que es  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático y digamos que es de color azul. Por otra parte, puesto que existe un conjunto de flechas azules en  $\mathcal{C}(T)$ , a decir  $\{(z_{i-1}, w), (w, z_i)\}$ , se infiere que existe una flecha azul en  $\mathcal{C}(\mathcal{C}(H)) = \mathcal{C}(H)$  de  $z_{i-1}$  a  $z_i$ . Concluimos que existe un conjunto de flechas de  $\mathcal{C}(H)$ , a decir

$\{f_i = (z_i, z_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k - 2\}\}$  (tomado mod  $k - 2$ ), coloreadas de azul. De manera que el ciclo  $\gamma_{k-1}$  es  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático.



*Caso 2: Para cualquier vértice  $w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$ , se tiene al menos una de las siguientes proposiciones:*

$$\{(z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset$$

ó

$$\{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset$$

Denotemos por :

$$V_1 = \{w \in V(T) - V(\gamma_{k-1}) \mid \{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset\}$$

y

$$V_2 = \{w \in V(T) - V(\gamma_{k-1}) \mid \{(z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset\}$$

*Caso 2(a):  $V_2 = \emptyset$ .*

Dado que  $k - 1 \leq |V(T)| - 1$  y  $V_1 \cup V_2 = V(T) - V(\gamma_{k-1})$  se sigue que  $V_1 \neq \emptyset$ . Sea  $N_1$  un núcleo de  $\mathcal{C}(H) [V_1]$  (dicho núcleo existe puesto que  $\mathcal{C}(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica). Obsérvese que la definición de  $V_1$  implica que para cada  $w \in V_1$  y cada  $z \in V(\gamma_{k-1})$ , se tiene que  $(z, w) \in F(T)$ . De aquí que  $N_1$  es un núcleo de  $\mathcal{C}(H)$  contradiciendo el hecho de que  $\mathcal{C}(H)$  es núcleo imperfecta crítica.

*Caso 2(b):  $V_2 \neq \emptyset$  y  $V_1 = \emptyset$ .*

Dado que  $k - 1 \leq |V(T)| - 1 = |V(\mathfrak{C}(H))| - 1$  y  $\mathfrak{C}(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, se sigue que  $\mathfrak{C}(H)[V(\gamma_{k-1})]$  tiene un núcleo. Sea  $N_1$  dicho núcleo. Se sigue de la definición de  $V_2$  que para cada  $w \in V_2$  y cada  $z \in V(\gamma_{k-1})$ , se tiene que  $(w, z) \in F(T)$ . De manera que  $N_1$  es un núcleo de  $\mathfrak{C}(H)$ . De nuevo una contradicción.

*Caso 2(c):  $V_2 \neq \emptyset$  y  $V_1 \neq \emptyset$ .*

En éste caso, tenemos que  $(V_1 \cup V(\gamma_{k-1}), V_2)$  es una partición de  $V(T) = V(H) = V(\mathfrak{C}(H))$ . Como  $\mathfrak{C}(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, se sigue del Teorema 2.13 que  $Asym(\mathfrak{C}(H))$ . La definición de  $V_2$  implica que no existen flechas de  $V(\gamma_{k-1})$  a  $V_2$  contenidas en  $T$ , por consiguiente existe al menos una flecha de  $V_1$  a  $V_2$  contenida en  $Asym(\mathfrak{C}(H))$  (Obsérvese que si  $(u, v) \in Asym(\mathfrak{C}(H))$ , entonces  $(u, v) \in F(T)$ ). Sea  $(x, y)$  una flecha de  $V_1$  a  $V_2$  contenida en  $Asym(\mathfrak{C}(H))$ .

Claramente  $\gamma_k = (z_0, x, y, z_2) \cup (z_2, \gamma_{k-1}, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  ( la definición de  $V_1$  implica que  $(z_0, x) \in F(T)$  y la definición de  $V_2$  implica que  $(y, z_2) \in F(T)$ ). Se sigue de la hipótesis que  $\gamma_k$  es un ciclo  $\mathfrak{C}(H)$ -monocromático. En consecuencia, existe una  $yx$ -tdm contenida en  $\mathfrak{C}(H)$ , y entonces  $(y, x) \in F(\mathfrak{C}(H))$  contradiciendo que  $(x, y) \in Asym(\mathfrak{C}(H))$ . ■

El siguiente es un resultado general que puede ser usado para obtener condiciones suficientes con las cuales  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.

**Teorema 2.20** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado con  $p$  vértices. Si existe algún  $k$  (con  $3 \leq k \leq p$ ) tal que se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:*

(i) *Para cada torneo  $m$ -coloreado  $T' \subseteq T$  tal que  $T'$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , se tiene que  $\mathfrak{C}(T')$  es una digráfica núcleo perfecta.*

(ii) *Cada ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  es  $\mathfrak{C}(T)$ -monocromático.*

*Entonces,  $\mathfrak{C}(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.*

**Demostración:**

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que  $\mathfrak{C}(T)$  no es una digráfica núcleo perfecta. Entonces, por el teorema 1.45 existe  $H$  una subdigráfica inducida de  $\mathfrak{C}(T)$  tal que es una digráfica núcleo imperfecta crítica.

Sea  $T_H = T[V(H)]$  y supongamos que se cumple la hipótesis (i). De manera que si  $T_H$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , entonces  $\mathcal{C}(T_H)$  es una digráfica núcleo perfecta y en consecuencia  $\mathcal{C}(T_H)$  tiene un núcleo que también resulta ser un núcleo de  $H$  (debido a que  $\mathcal{C}(T_H) \subseteq H$ ). Lo cual es una contradicción. Se sigue que  $T_H$  contiene un ciclo dirigido de longitud  $k$  y la hipótesis (ii) implica que dicho ciclo dirigido es  $\mathcal{C}(T)$ -monocromático. Cuando  $k = 3$ , se deduce del Teorema 2.18 que  $\mathcal{C}(T_H)$  es una digráfica núcleo perfecta cuyo núcleo también es un núcleo de  $H$ . De nuevo una contradicción.

Cuando  $k \geq 4$ , se cumplen las hipótesis del Teorema 2.19. En efecto, considerando nuestra subdigráfica  $H$  y  $T = T_H$ , se verifica que  $V(T_H) = V(H)$ ,  $\mathcal{C}(T_H) \subseteq H$ ,  $\mathcal{C}(H)$  es núcleo imperfecta crítica (observemos que  $\mathcal{C}(H) = H$ ), y cada ciclo de longitud  $k$  contenido en  $T_H$  es  $\mathcal{C}(T)$ -monocromático y por tanto  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático (debido a que  $H$  es una subdigráfica inducida de  $\mathcal{C}(T)$ ). Aplicando el Teorema 2.19 repetidas veces obtenemos que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T_H$  es  $\mathcal{C}(H)$ -monocromático.

Veremos que  $H$  es núcleo perfecta. Por reducción al absurdo supongamos que  $H$  no es núcleo perfecta. Por el Teorema de Duchet (Teorema 2.14) existe  $\gamma$  un ciclo dirigido asimétrico contenido en  $H$ . Observemos que  $\gamma \subseteq T_H$ , entonces por el Teorema 2.15 existe  $\gamma_3$  un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T_H$  tal que  $|F(\gamma_3) \cap F(\gamma)| \geq 1$ . Ahora bien, como  $\gamma_3$  es  $\mathcal{C}(T)$ -monocromático, entonces  $\gamma_3$  es simétrico en  $\mathcal{C}(T)$  y por lo tanto  $\gamma$  tiene al menos una flecha simétrica en  $H$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asym}(H)$ . Por lo tanto  $H$  es núcleo perfecta, lo cual contradice que  $H$  es núcleo imperfecta crítica. ■

Si en el Teorema 2.16 sólo pedimos que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  sea casimonocromático, no podemos asegurar la veracidad de la conclusión.

Por ejemplo, el torneo  $G_5$  dado por Shen Minggang en [4] (ver figura 1), es un torneo 5-coloreado, de orden 5, en el cual cada triángulo dirigido contenido en  $T$  es un ciclo casimonocromático. Pero  $G_5$  no contiene un núcleo. En efecto, no existen  $v_{i+1}v_i$ -tdm contenidas en  $G_5$ .

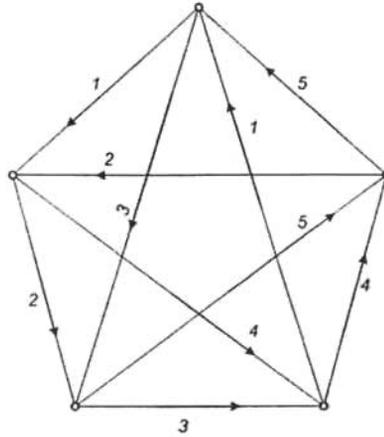


Figura 1

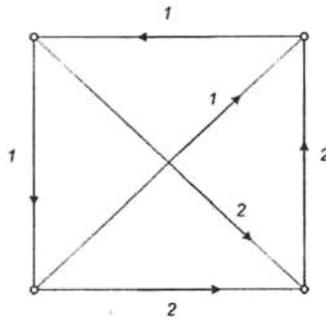


Figura 2

La figura 2 muestra que la condición de Shen Minggang no implica la condición del Teorema 2.16 y la figura 3 muestra que la hipótesis del Teorema 2.16 no implica la condición de Shen Minggang. En consecuencia, si  $m \geq 5$ , la condición del Teorema 2.16, “cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casimonocromático” no puede ser mejorado. El artículo de Shen Minggang (ver [4]) concluye con la mención de que para los casos  $m = 3, 4$  de la conjetura de Sands, Sauer y Woodrow [2] es todavía un problema abierto.

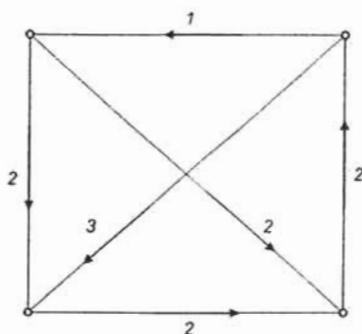


Figura 3

Sin embargo, en [3] Hortensia Galeana y Rocío Rojas prueban que para cada  $n \geq 6$ , existe un torneo  $T_n$  4-coloreado de orden 6 que satisface las siguientes dos condiciones: (1)  $T_n$  no contiene  $C_3$  (ciclos dirigidos de longitud 3 cuyas flechas son coloreadas con tres diferentes colores) y (2)  $T_n$  no contiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, lo cual da respuesta parcial a la conjetura planteada por Shen Minggang en su artículo de 1988.

En [3] Galeana y Rojas construyen una familia de contraejemplos del problema para  $m = 4$  cuyos detalles se dan en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 2.21** *Para cada  $n \geq 6$  existe un torneo 4-coloreado de orden  $n$  que satisface las siguientes dos condiciones: (1)  $T_n$  no contiene  $C_3$  y (2)  $T_n$  no contiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

Demostración:

Para  $n = 6$ , el torneo  $T_6$  de la figura 4 es un torneo 4-coloreado, de orden 6, que no contiene ciclos dirigidos de longitud 3 y 3-coloreados. Tampoco contiene núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas. En efecto, no existen trayectorias dirigidas monocromáticas de  $v_{i+1}$  a  $v_i$ , donde la notación es tomada módulo 6.

Pueden construirse torneos 4-coloreados de mayor orden y con las mismas propiedades de  $T_6$  cuando por cada nuevo vértice  $v$  se agregan flechas 1-coloreadas de  $v$  hacia los vértices anteriores como se ilustra en la figura 5. ■

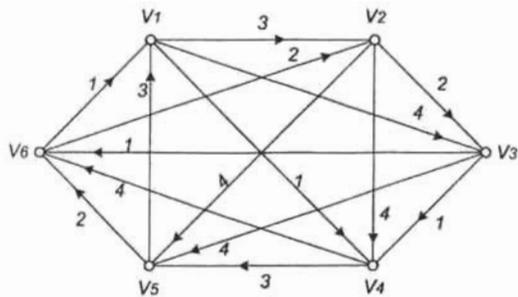


Figura 4

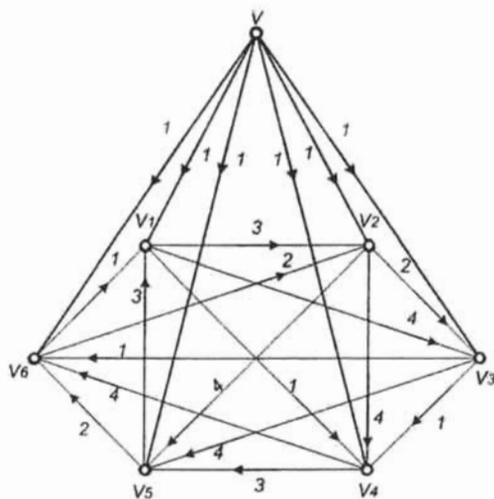


Figura 5

El caso para  $m = 3$  al momento de escribir esta tesis, sigue siendo un problema abierto.

## 2.4. Conclusiones.

Si bien la condición del Teorema 2.16 (cada ciclo contenido en  $T$  de longi-

tud a lo más 4 es casimonocromático) no es una generalización de las condiciones de Shen Minggang (Teorema 2.6) podemos concluir que la introducción de los conceptos de cerradura transitiva y ciclos casimonocromáticos hacen de este teorema un resultado más fuerte y en cierto sentido más general debido a que no sólo podemos deducir la existencia de un vértice absorbente en el torneo sino que también en cualquier subdigráfica inducida de su cerradura transitiva. Sin embargo en el siguiente capítulo se verá un resultado del cual los Teoremas 2.6 y 2.16 son dos casos particulares.

## Capítulo 3

# Vértices absorbentes en Torneos $m$ -Coloreados

### 3.1. Resumen

Sea  $T$  un torneo cuyas flechas son coloreados con  $k$  colores. Llamamos a un subconjunto  $X$  de vértices de  $T$  *absorbente* si desde cada vértice de  $T$  que no está en  $X$  existe una trayectoria dirigida monocromática a algún vértice en  $X$ . Este capítulo comienza con algunas preguntas acerca de la mínima dimensión que puede tener un conjunto de vértices absorbentes en un torneo  $k$ -coloreado y después se abordan los principales resultados del capítulo anterior mediante dos nuevas aproximaciones generalizando algunos resultados conocidos. En particular, el Teorema 3.18 nos muestra que un multitorneo mínimo asociado a un torneo  $T$ , es una estructura tal que si sólo se le pide que no contenga  $C_3$  se concluye que  $T$  contiene un vértice absorbente y el Teorema 3.23 generaliza los Teoremas 2.6 y 2.16 del capítulo anterior. Todo este capítulo se ocupa de torneos finitos, pero el lector interesado en los infinitos puede consultar [6].

### 3.2. Introducción.

Conviene al lector recordar aquí algunos conceptos establecidos en los capítulos anteriores así como algunas notaciones que utilizaremos frecuentemente.

Una *gráfica dirigida* ó *Digráfica*  $D = [V(D), F(D)]$  consta de un conjunto de vértices  $V(D)$ , cuyas *flechas* son parejas ordenadas  $(x, y)$  de vértices distintos. Dadas dos digráficas  $D$  y  $D'$ ,  $D'$  es una *subdigráfica* de  $D$  si  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $F(D') \subseteq F(D)$ . Si  $X \subseteq V(D)$ , denotamos por  $D[X]$  la subdigráfica de  $D$  *inducida* por  $X$ ; es decir, la digráfica  $[X, F(D) \cap X \times X]$ . Si no hay lugar a confusiones, escribimos  $V$  en lugar de  $V(D)$  y  $F$  en lugar de  $F(D)$ . Una trayectoria (dirigida) que conste de  $n$  vértices distintos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  la denotamos por  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  y si además es monocromática utilizamos la notación  $x_0x_n$ -tdm para abreviar que entre  $x_0$  y  $x_n$  existe una trayectoria dirigida monocromática. Una trayectoria  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  con  $(x_n, x_0) \in F$  es un *ciclo* de longitud  $n+1$  ó un  $(n+1)$ -ciclo. Una  $k$ -*coloración* de una digráfica  $D = [V, F]$  es un mapeo de  $F$  en el conjunto  $\{0, \dots, k-1\}$ . Entonces, decimos que  $D$  es  $k$ -*coloreada*. Una subdigráfica  $D'$  (no necesariamente inducida) de  $D$  es *monocromática* si todas sus flechas tienen el mismo color. Se dice que una digráfica es *casimonocromática* si a lo más una de sus flechas tiene un color diferente de las demás. Una digráfica es *policromática* si al menos tres colores aparecen en sus flechas. Un subconjunto  $X$  de  $V$  es *absorbente* si desde cualquier vértice de  $X \setminus V$  existe un trayectoria dirigida monocromática a algún vértice en  $X$ ; un vértice absorbente se define análogamente. Un *torneo*  $T = [V(T), F(T)]$  es una digráfica tal que  $(x, y) \in F(T)$  si y sólo si  $(y, x) \notin F(T)$ . Podemos llamar a cualquiera de los dos torneos con tres vértices una *terna*.

Dado que un conjunto absorbente siempre existe en un torneo  $k$ -coloreado  $T$ , es natural preguntarse qué tan pequeño puede ser.

Esta pregunta fue hecha por primera vez en [2]. Los autores consideran el caso de digráficas y prueban lo siguiente:

**Teorema 3.1** *Cualquier digráfica 2-coloreada sin rayos monocromáticos contiene un conjunto que es absorbente y sin trayectorias monocromáticas entre sus elementos.*

Se sigue de este teorema que cualquier torneo 2-coloreado sin rayos monocromáticos contiene un vértice absorbente. Esto lleva a los siguientes problemas abiertos:

**Problema 1** (Atribuido a Erdős en [2]) *¿Existe una función  $abs : \omega \rightarrow \omega$  tal que para cada  $k < \omega$ , cualquier torneo finito  $k$ -coloreado tiene un conjunto absorbente de tamaño a lo más  $abs(k)$ ?*

Si dicha función  $abs$  existe, entonces el Teorema 1 de [2] implica que  $abs(2) = 1$ , y un ejemplo dado en dicho artículo muestra que  $abs(3) \geq 3$ .

**Problema 2** ([2]). *¿Cualquier torneo finito 3-coloreado sin 3-ciclos policromáticos contiene un vértice absorbente?*

En [5] y en [4], el problema 2 es abordado para cualesquiera  $k$  colores.

Recordemos algunos de los resultados principales del capítulo anterior.

**Teorema 3.2** [4]

1. *Para cualquier  $k$ , cada torneo finito  $k$ -coloreado sin ternas policromáticas contiene un vértice absorbente.* (ver el Teorema 2.6)

2. *Para cada  $k \geq 5$  existe un torneo finito  $k$ -coloreado sin 3-ciclos policromáticos que no contiene un vértice absorbente.* (ver la Observación 2.9)

**Teorema 3.3** [5] *Si cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 contenido en un torneo  $k$ -coloreado  $T$  es casimonocromático, entonces  $T$  tiene un vértice absorbente.*

Estos teoremas conducen a que para cualquier  $s \geq 4$ , las hipótesis generalizadas pueden ser llamadas  $\mathcal{H}_s$  y enunciarse de la siguiente manera.

**Hipótesis  $\mathcal{H}_s$ .**

♦  $\mathcal{H}_3$  es la hipótesis del Teorema 2.1 : Cualquier terna es casimonocromática.

♦ Para cada  $s \geq 4$ , cada ciclo de longitud  $s$  es casimonocromático y ningún ciclo de longitud menor que  $s$  es policromático.

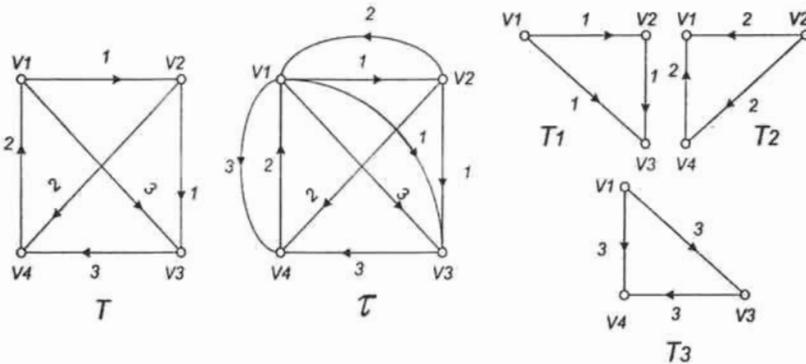
Consideraremos los Teoremas 3.2(1) y 3.3, para torneos finitos, por medio de dos nuevas aproximaciones. Éstas consisten en asociar cada torneo coloreado con una nueva estructura; un multitorneo en un caso, y una digráfica subyacente en el otro. Concluiremos el Capítulo 3 relacionando las dos.

### 3.3. Primera aproximación: Multitorneos.

En lo que sigue necesitaremos más notación. Sea  $D = [V, F]$  una digráfica  $k$ -coloreada. Para  $x \neq y$ ,  $x \rightarrow y$  denota que  $(x, y) \in F$ , y si la flecha  $(x, y)$  está coloreada con el color  $i$ , escribimos  $x \rightarrow^i y$ . Análogamente,  $x \Rightarrow y$  denota que existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $y$ , y si es una trayectoria de color  $i$ , escribimos  $x \Rightarrow^i y$ . También por analogía,  $x \nrightarrow y$  denota que no hay trayectorias dirigidas monocromáticas de  $x$  a  $y$ . En lo que resta del capítulo sólo consideraremos torneos finitos.

**Definición 3.4** Para cada torneo  $k$ -coloreado  $T = [V, F]$  definimos el **multitorneo** asociado  $\mathcal{T} = (T_0, T_1, \dots, T_{k-1})$  como sigue. Para cada  $i$ , la digráfica  $T_i = [V, F(T_i)]$  es tal que para  $x, y \in V$  con  $x \neq y$ ,  $(x, y) \in F(T_i)$  exactamente cuando  $x \Rightarrow^i y$ .

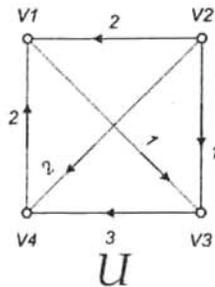
Ejemplo:



Observemos que cada  $T_i$  es transitiva porque es la cerradura transitiva de la digráfica inducida por las flechas de color  $i$  en  $T$ . Más aún,  $\mathcal{T}$  es completa; es decir, para cualquier  $x \neq y \in V$  existe un color  $i$  tal que  $(x, y)$  ó  $(y, x)$  (ó ambas) es una flecha de  $T_i$ . Es posible quitar flechas de  $\mathcal{T}$  al mismo tiempo que se preserve la completéz de  $\mathcal{T}$  y la transitividad de cada  $T_i$ . Esto conduce a la noción de multitorneos mínimos de  $T$ .

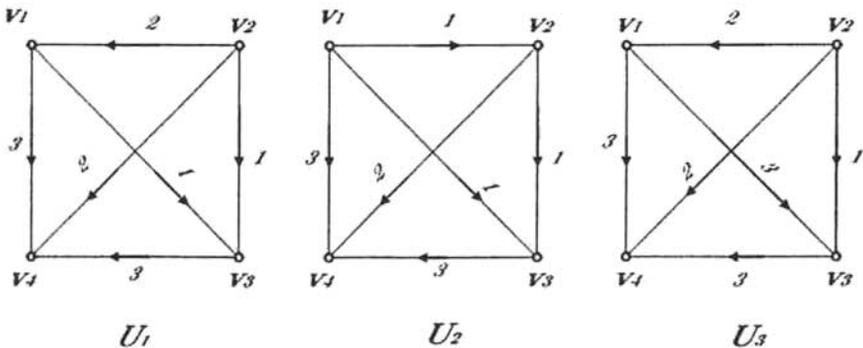
**Definición 3.5** Sea  $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_{k-1})$  obtenido de  $\mathcal{T}$  quitando flechas de cada  $T_i$ . Semejante multitorneo es llamado **mínimo** si ninguna de sus flechas puede ser removida sin destruir la completéz de  $\mathcal{U}$ , ó la transitividad de cada  $U_i$  (ó ambas).

Ejemplo:

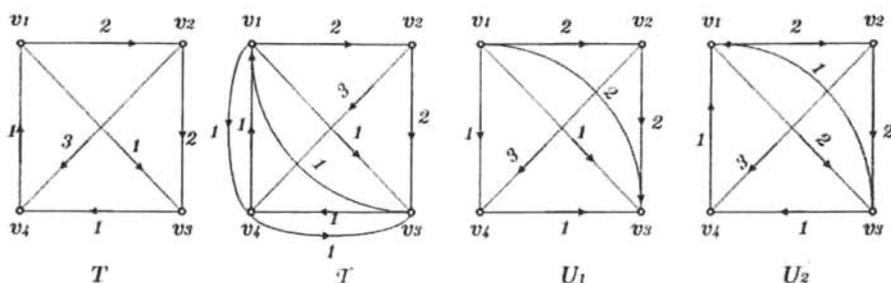


$\mathcal{U}$  es un multitorneo mínimo asociado a  $\mathcal{T}$ .

Es importante observar que un multitorneo mínimo  $\mathcal{U}$  obtenido de un multitorneo  $\mathcal{T}$  en general no es único. El lector puede comprobar que los siguientes multitorneos también son mínimos obtenidos del ejemplo de la página anterior.



Es conveniente hacer notar al lector que un multitorneo mínimo puede admitir flechas múltiples y/o flechas simétricas como lo muestra el siguiente ejemplo.



Por último notemos que dados  $x, y, z \in V$  tales que  $(x, y) \in F(U_i)$ ,  $(y, z) \in F(U_{i'})$  y

$(z, x) \in F(U_{i''})$ ,  $xyz$  es un 3-ciclo policromático de  $U$  si  $i, i'$  e  $i''$  son distintos. En el ejemplo anterior, el multitorneo mínimo  $U_2$  contiene el 3-ciclo policromático  $(v_1, v_2, v_4, v_1)$ .

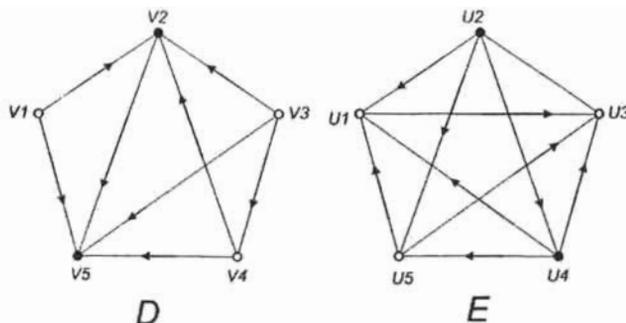
El siguiente es el resultado principal de la aproximación por multitorneos.

**Teorema** Sea  $T = [V, F]$  un torneo  $k$ -coloreado y sea  $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_{k-1})$  un multitorneo mínimo obtenido del multitorneo asociado  $T$ . Si  $\mathcal{U}$  no contiene 3-ciclos policromáticos, entonces la digráfica  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es un orden total cuyo máximo es un vértice absorbente de  $T$ .

Antes de establecer y demostrar los dos lemas de los que se sigue inmediatamente el teorema anterior, necesitamos definir algunos otros conceptos.

**Definición 3.6** Un *intervalo* en una digráfica  $D = [V, F]$  es un subconjunto  $X$  de  $V$  tal que para cualesquiera  $a, b \in X$  y cualquier  $x \in V \setminus X$  tenemos que  $(a, x) \in F$  exactamente cuando  $(b, x) \in F$  y análogamente para  $(x, a)$  y  $(x, b)$ . Una *partición por intervalos*  $I$  de  $D$  es una partición de  $V$  en intervalos.

Ejemplo:



En la digráfica  $D$  el conjunto  $\{v_2, v_5\}$  es un intervalo.  
 En la digráfica  $E$  los conjuntos  $\{u_3\}$  y  $\{u_2, u_4\}$  son intervalos.

Notemos que en la digráfica  $D$  del ejemplo anterior, el complemento del intervalo  $\{v_2, v_5\}$  ( es decir,  $V \setminus \{v_2, v_5\} = \{v_1, v_3, v_4\}$ ) también es un intervalo. Del mismo modo, tenemos que en la digráfica  $E$  los conjuntos de vértices ajenos y complementarios  $\{u_2, u_4\}$  y  $\{u_1, u_3, u_5\}$  son intervalos. Observemos que esta propiedad es de toda digráfica. En efecto, se sigue inmediatamente de la definición de intervalo que dada una digráfica  $D = [V, F]$  y un intervalo  $X \subseteq V$ , su complemento  $V \setminus X$  también es un intervalo.

Por otro lado, como un caso particular de lo anterior, observemos que dada una digráfica  $D = [V, F]$ , el conjunto de sus vértices  $V$  también es un intervalo ya que su complemento es el vacío y entonces cumple (por vacuidad) con la Definición 3.6.

Debido a lo anterior, dada una digráfica  $D = [V, F]$  siempre existe al menos la partición trivial  $\{V, \emptyset\}$  de sus vértices en intervalos.

Por último, observemos que no toda digráfica tiene particiones no triviales de sus vértices en intervalos, como por ejemplo la siguiente digráfica.

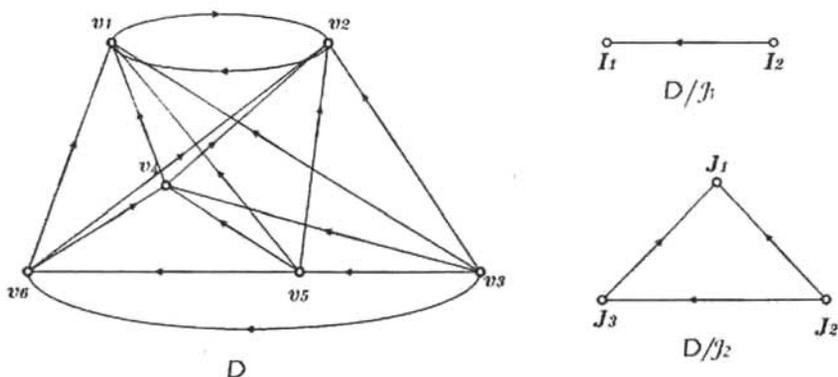


Tomando en cuenta las observaciones anteriores, resulta claro que podemos definir el siguiente concepto.

**Definición 3.7** Dada una partición por intervalos  $\mathcal{I}$  de  $D = [V, F]$ , definimos el cociente  $D/\mathcal{I}$  como la digráfica  $D/\mathcal{I} = [\mathcal{I}, F/\mathcal{I}]$ , mediante la siguiente regla:  $(I, J) \in F/\mathcal{I}$  si  $(x, y) \in F$  para  $x \in I, y \in J$ .

Observemos que cada partición por intervalos  $\mathcal{I}$  de  $D$  induce un cociente  $D/\mathcal{I} = [\mathcal{I}, F/\mathcal{I}]$ .

Ejemplo:



En la digráfica  $D$  encontramos la partición por intervalos  $\mathcal{J}_1 = \{I_1, I_2\}$  con  $I_1 = \{v_1, v_2\}$  y  $I_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$  así como la partición por intervalos  $\mathcal{J}_2 = \{J_1, J_2, J_3\}$  donde  $J_1 = \{v_1, v_2\}, J_2 = \{v_3\}$  y  $J_3 = \{v_4, v_5, v_6\}$ , las cuales generan dos cocientes diferentes.

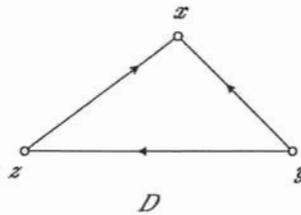
Inversamente, consideremos una familia  $\{D_x\}_{x \in V}$  de digráficas con conjuntos de vértices dos a dos ajenos, entonces podemos definir lo siguiente.

**Definición 3.8** La suma lexicográfica de  $\{D_x\}_{x \in V}$  sobre una digráfica  $D$ , es la digráfica  $D[D_x; x \in V]$  en  $\cup_{x \in V} V(D_x)$  obtenida conservando para

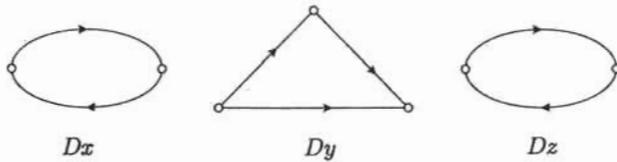
cada vértice  $x$  de  $D$ , las flechas de  $D_x$ , y agregando para cada flecha  $(x, y)$  de  $D$ , todas las flechas de  $V(D_x)$  a  $V(D_y)$ .

Ejemplo:

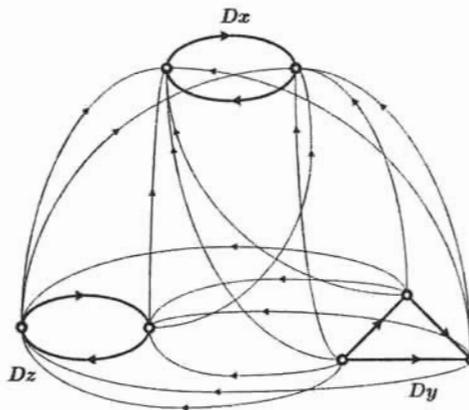
Consideremos la siguiente digráfica.



y la siguiente familia de digráficas con vértices dos a dos ajenos.



su suma lexicográfica es la siguiente digráfica.



Claramente  $\{V(D_x)\}_{x \in V}$  es una partición por intervalos de la suma lexicográfica y el correspondiente cociente es isomorfo a  $D$ .

Por comodidad para el lector, antes de continuar con la demostración del Lema 3.15 recordaremos algunos conceptos básicos de la teoría de conjuntos.

**Definición 3.9** Sea  $R$  una relación en un conjunto  $A$ .

(a)  $R$  es llamada **reflexiva** en  $A$ , si para todo  $a \in A$ , se tiene que  $aRa$ .

(b)  $R$  es llamada **simétrica** en  $A$ , si para todo  $a \in A$  y  $b \in A$ ;  $aRb$  implica que  $bRa$ .

(c)  $R$  es llamada **transitiva** en  $A$ , si para todo  $a, b, c \in A$ ;  $aRb$  y  $bRc$  implica que  $aRc$

(d)  $R$  es llamada **antisimétrica** en  $A$  si para todo  $a, b \in A$ ,  $aRb$  y  $bRa$  implica que  $a = b$

**Definición 3.10** Una relación  $\leq$  en un conjunto  $A$ , que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama **orden (parcial)** en  $A$ . Al par  $(A, \leq)$  se le llama **conjunto parcialmente ordenado**.

**Definición 3.11** Una relación  $R$  se llama de **equivalencia** en  $A$ , si es reflexiva, simétrica y transitiva en  $A$ .

**Definición 3.12** Sea  $R$  una relación de equivalencia en  $A$  y sea  $a \in A$ . La **clase de equivalencia de  $a$  módulo  $R$**  es el conjunto  $\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$ .

**Definición 3.13** Sean  $a, b \in A$  y sea  $\leq$  un orden en  $A$ . Decimos que  $a$  y  $b$  son **comparables** en el orden  $\leq$  (o que son  $\leq$ -comparables) si:  $a \leq b$  ó  $b \leq a$ .

**Definición 3.14** Un orden  $\leq$  es llamado un **orden total** si cualesquiera dos elementos de  $A$  son comparables. El par  $(A, \leq)$  es entonces llamado **conjunto totalmente ordenado**.

También, antes de enunciar y demostrar el Lema 3.15, es conveniente hacer notar al lector que si un torneo  $k$ -coloreado  $T = [V, F]$  contiene un ciclo monocromático de color  $i$  (ver figura 1), entonces en el multitorneo asociado  $T = (T_0, T_1, \dots, T_{k-1})$  dicho ciclo se convierte en una digráfica completa y simétrica (ver figura 2). Debido a esto, es posible que exista un multitorneo

mínimo  $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$  obtenido de  $\mathcal{T}$  en el cual su componente  $U_i$  contenga alguna digráfica completa y simétrica, aunque no necesariamente sea la misma contenida en  $\mathcal{T}$  (ver figura 3).

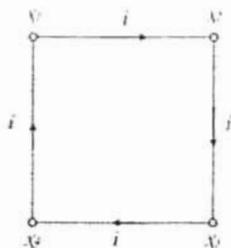


Figura 1

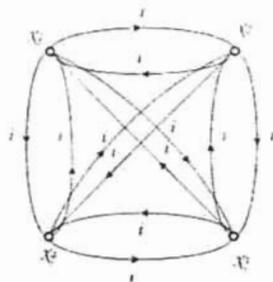


Figura 2

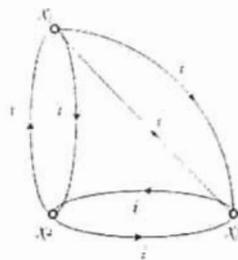


Figura 3

Por la observación anterior, es claro que la relación  $R_j$  en  $U_j$  definida como  $xR_jy \iff x = y \text{ ó } ((x, y) \in F(U_j) \iff (y, x) \in F(U_j))$  está bien definida.

**Lema 3.15** Sea  $T = [V, F]$  un torneo  $k$ -coloreado y sea  $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$  un multitorneo mínimo obtenido del multitorneo asociado  $\mathcal{T}$ . Entonces cada  $U_i$  es un conjunto parcialmente ordenado.

*Demostración.*

A cualquier  $U_j$  le podemos asociar la relación  $R_j$  definida por  $xR_jy$  si y sólo si  $x = y$  ó  $(x, y)$  y  $(y, x)$  están en  $F(U_j)$ . Observemos que  $R_j$  es una relación de equivalencia:

Podemos suponer sin perder generalidad que  $x \neq y$  en la definición de  $R_j$ . Entonces:

i) Es claro que para cada  $x \in V(U_j)$  se tiene que  $xR_jx$ .

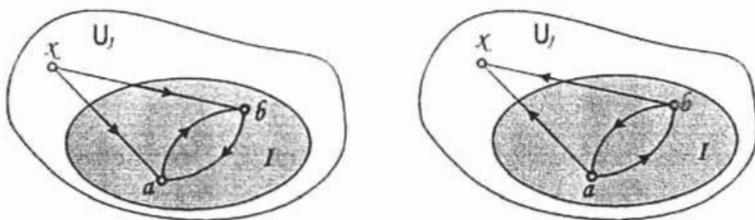
ii) Para cualesquiera  $x, y \in V(U_j)$ , si  $xR_jy$ , entonces  $yR_jx$ .

Si  $xR_jy$ , entonces  $(x, y) \in F(U_j)$  y  $(y, x) \in F(U_j)$ , ésto último significa que  $yR_jx$ .

iii) Para cualesquiera  $x, y, z \in V(U_j)$  tales que  $xR_jy$  y  $yR_jz$  se deduce que  $xR_jz$ .

De las condiciones se tiene que  $(x, y) \in F(U_j)$ ,  $(y, x) \in F(U_j)$ ,  $(y, z) \in F(U_j)$  y  $(z, y) \in F(U_j)$  de donde por transitividad de  $U_j$  se tiene que  $(x, z) \in F(U_j)$  y  $(z, x) \in F(U_j)$ , es decir,  $xR_jz$ .

Al ser  $R_j$  una relación de equivalencia, tenemos que la familia  $\mathcal{I}_j$  de las clases de equivalencia módulo  $R_j$  es una partición de  $U_j$ . Más aún, cada clase de equivalencia es un intervalo. En efecto, sean  $I \in \mathcal{I}_j$ ,  $a, b \in I$  y  $x \in U_j \setminus I$ . Observemos que  $(x, a) \in F(U_j)$  si y sólo si  $(x, b) \in F(U_j)$  debido a la transitividad de  $U_j$ . Análogamente,  $(a, x) \in F(U_j)$  si y sólo si  $(b, x) \in F(U_j)$ . Obsérvense las siguientes figuras.



Entonces, tenemos que la relación  $R_j$  induce una partición de  $U_j$  en intervalos  $\mathcal{I}_j$  y por tanto podemos considerar el cociente  $U_j/\mathcal{I}_j$ .

Ahora demostraremos que el cociente  $U_j/\mathcal{I}_j$  es un conjunto parcialmente ordenado. En efecto, si definimos la relación  $\geq$  en  $U_j/\mathcal{I}_j$  como  $\bar{b} \geq \bar{a}$  si y sólo si existen  $x \in \bar{a}$  y  $y \in \bar{b}$  tales que  $x = y$  ó  $(y, x) \in F(U_j)$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- i) Para cada  $\bar{x} \in U_j/\mathcal{I}_j$  es claro que  $\bar{x} \geq \bar{x}$ .
- ii) Si  $\bar{x} \geq \bar{y}$  y  $\bar{y} \geq \bar{x}$ , entonces  $\bar{x} = \bar{y}$ .

En efecto,  $\bar{x} \geq \bar{y}$  implica que existen  $x_1 \in \bar{x}$  y  $y_1 \in \bar{y}$  tales que  $x_1 = y_1$  ó  $x_1 \rightarrow y_1$ . Si  $x_1 = y_1$ , claramente  $\bar{x} = \bar{y}$ . Supongamos que  $x_1 \neq y_1$ , entonces  $x_1 \rightarrow y_1$ . Como  $\bar{y} \geq \bar{x}$ , existen  $x_2 \in \bar{x}$  y  $y_2 \in \bar{y}$ , tales que  $x_2 = y_2$  ó  $y_2 \rightarrow x_2$ . Si  $x_2 = y_2$ , entonces claramente  $\bar{x} = \bar{y}$ . Supongamos que  $x_2 \neq y_2$ ,

entonces  $y_2 \rightarrow x_2$ . Así,  $x_1 \rightarrow y_1$  y  $y_2 \rightarrow x_2$ . Por otro lado, como  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son clases de equivalencia de  $R_j$  se deduce que  $x_2 \rightarrow x_1$  y  $y_1 \rightarrow y_2$ .

De lo anterior se tiene que  $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$  y por la transitividad de  $U_j$  tenemos que  $y_1 \rightarrow x_1$ .

De manera que  $y_1 \rightarrow x_1$  y  $x_1 \rightarrow y_1$ , es decir,  $x_1 R_j y_1$ . Por lo tanto  $\bar{x} = \bar{y}$ .

iii) Si  $\bar{x} \geq \bar{y}$  y  $\bar{y} \geq \bar{z}$ , entonces  $\bar{x} \geq \bar{z}$ .

Como  $\bar{x} \geq \bar{y}$ , entonces existen  $x_1 \in \bar{x}$  y  $y_1 \in \bar{y}$  tales que  $x_1 = y_1$  ó  $x_1 \rightarrow y_1$ . Como  $\bar{y} \geq \bar{z}$  existen  $y_2 \in \bar{y}$  y  $z_1 \in \bar{z}$  tales que  $y_2 = z_1$  ó  $y_2 \rightarrow z_1$ . Tenemos los siguientes casos:

a) Si  $x_1 = y_1$ , entonces cuando  $y_2 = z_1$  como  $\bar{y}$  es clase de equivalencia de  $R_j$ , entonces  $y_1 = y_2$  ó  $y_1 \rightarrow y_2$  y se tiene que  $x_1 = z_1$  ó  $x_1 \rightarrow z_1$ . Por tanto  $\bar{x} \geq \bar{z}$ .

b) Si  $x_1 \neq y_1$ , entonces  $x_1 \rightarrow y_1$ . Si  $y_2 = z_1$ , dado que  $\bar{y}$  es clase de equivalencia de  $R_j$ , entonces  $y_1 = y_2$  ó  $y_1 \rightarrow y_2$ .

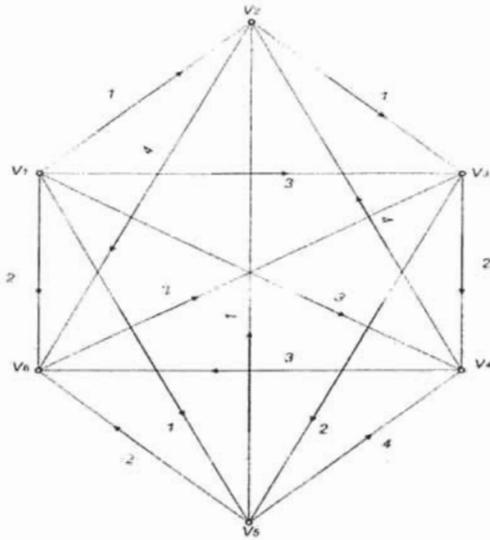
Si  $y_1 = y_2$ , entonces  $x_1 \rightarrow z_1$  y si  $y_1 \neq y_2$ , también  $x_1 \rightarrow z_1$ . Por lo tanto  $\bar{x} \geq \bar{z}$ .

Si  $y_2 \neq z_1$ , entonces  $y_2 \rightarrow z_1$  de donde  $x_1 \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow z_1$  y por la transitividad de  $U_j$  tenemos que  $x_1 \rightarrow z_1$ . Por lo tanto  $\bar{x} \geq \bar{z}$ .

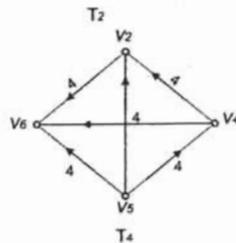
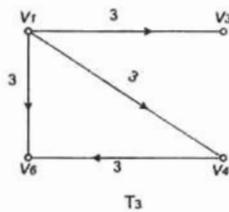
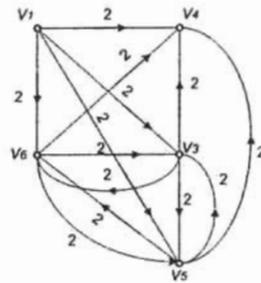
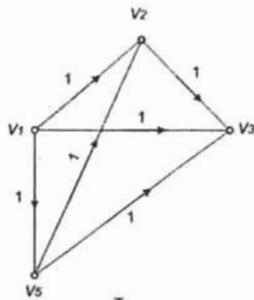
Como cada clase de equivalencia  $X$  en  $\mathcal{I}_j$  puede estar totalmente ordenado por algún orden  $\mathcal{L}_X^j$ , entonces podemos considerar la familia  $\{L_X^j \mid X \in \mathcal{I}_j\}$  de digráficas  $L_X^j$  con vértices ajenos generadas por el orden total  $\mathcal{L}_X^j$  en cada  $X$  de  $\mathcal{I}_j$ . De manera que la suma lexicográfica  $V_j = (U_j/\mathcal{I}_j) [L_X^j; X \in \mathcal{I}_j]$  es un conjunto parcialmente ordenado. Claramente el multitorneo  $\mathcal{V} = (V_0, V_1, \dots, V_{k-1})$  es completo y cada  $V_j$  es transitivo. Por la minimalidad de  $\mathcal{U}$ , se deduce que  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ , es decir,  $U_j = V_j$  para todo  $j$ . Por lo tanto, cada  $U_j$  es un conjunto parcialmente ordenado. ■

Con el objetivo de ilustrar el procedimiento seguido en la demostración anterior, presentamos un ejemplo.

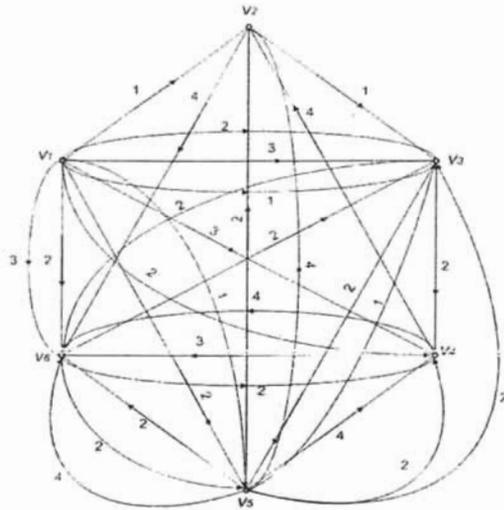
Considérese el siguiente torneo  $T$ .



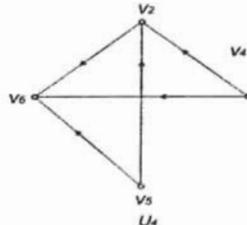
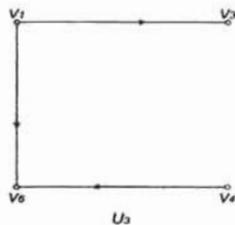
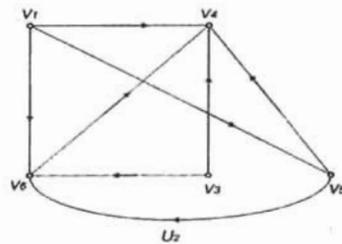
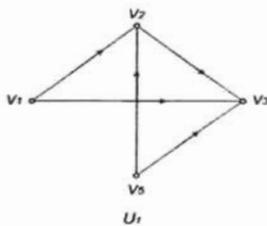
Las siguientes digráficas  $T_1, T_2, T_3$  y  $T_4$  son las cerraduras transitivas de las digráficas generadas por las flechas de color 1,2,3 y 4 respectivamente.



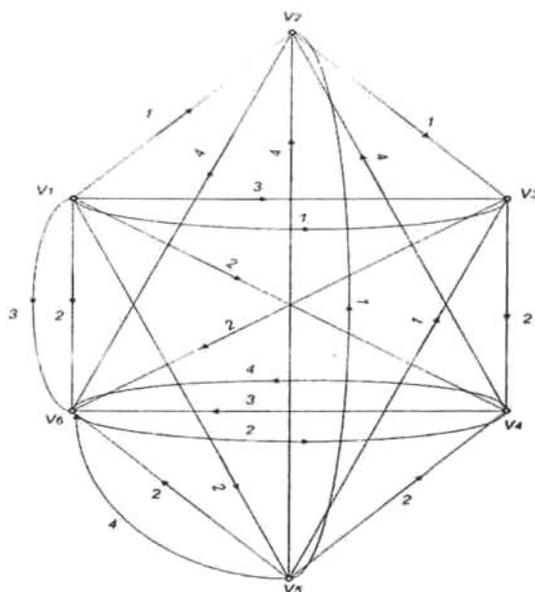
La siguiente digráfica es el multitorneo inducido por  $T$ .



De cada  $T_i$  debemos quitar flechas de manera que se conserve su transitividad y la completéz del torneo  $T$ . Así podemos obtener las digráficas  $U_1, U_2, U_3$  y  $U_4$  siguientes.



De manera que un multitorneo mínimo  $\mathcal{U}$  asociado al torneo  $T$  es el siguiente.

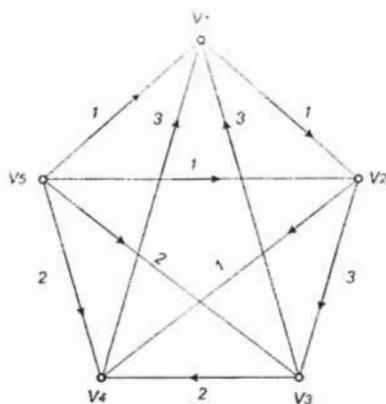


Observemos que en cada  $U_j$ , la familia  $\mathcal{I}_j$  de las clases de equivalencia módulo  $R_j$  es cada vértice de  $U_j$  por lo que el cociente  $U_j/\mathcal{I}_j$  es de hecho  $U_j$ . Por lo que trivialmente  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ .

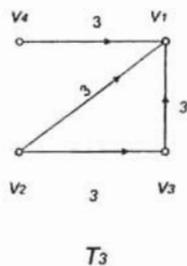
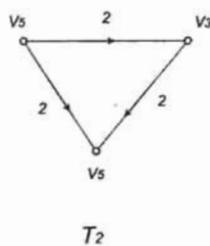
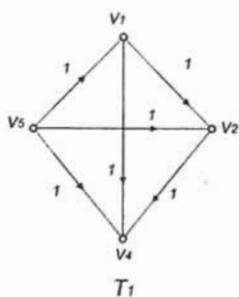
**Definición 3.16** Decimos que  $x$  es **predecesor inmediato** de  $y$  en  $U_i$  (denotado por  $x \prec_i y$ ) si  $x \xrightarrow{i} y$  pero no existen otras  $xy$ -tdm de color  $i$  en  $U_i$ .

Con el objeto de aclarar este concepto presentamos el siguiente ejemplo.

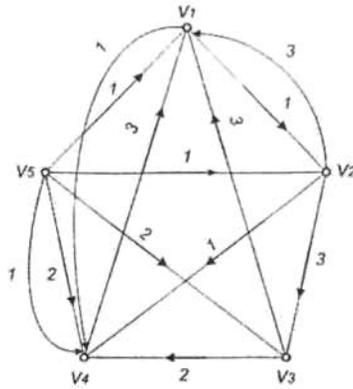
Considérese el siguiente torneo.



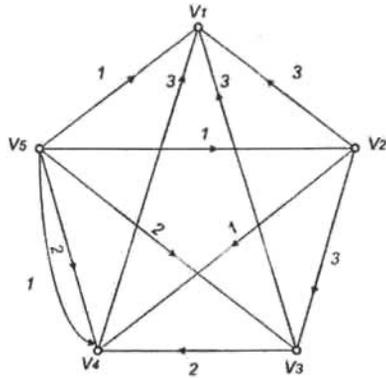
Las cerraduras transitivas  $T_i$  de las digráficas inducidas por las flechas de color  $i$  son las siguientes.



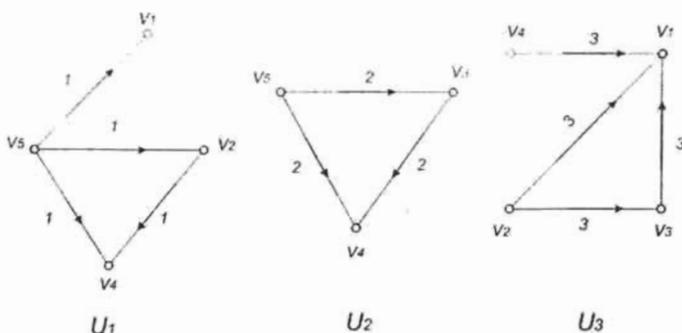
De manera que el multitorneo asociado  $\mathcal{T}$  es como sigue.



y un multitorneo mínimo asociado  $\mathcal{U}$  es el siguiente.



La siguiente figura muestra las digráficas inducidas  $U_i$  por las flechas de color  $i$ .



Obsérvese que  $v_5 \prec_1 v_1$  y  $v_2 \prec_1 v_4$  pero  $v_5 \not\prec_1 v_4$  puesto que  $v_5 \prec_1 v_2 \prec_1 v_4$ . En  $U_2$  tenemos que  $v_5 \prec_2 v_3$  pero  $v_5 \not\prec_2 v_4$  puesto que  $v_5 \prec_2 v_3 \prec_2 v_4$ . Del mismo modo, en  $U_3$  tenemos que  $v_2 \prec_3 v_3$ , pero  $v_2 \not\prec_3 v_1$ .

Antes de establecer el siguiente lema, observemos que el Lema 3.15 permite escribir  $x <_i y$  en lugar de  $(x, y) \in F(U_i)$  y entonces, podemos definir una relación  $\leq$  en  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  como  $x \leq y$  si y sólo si  $x = y$  ó  $x <_i y$  para alguna  $U_i$ . Claramente, la relación  $\leq$  es reflexiva. El siguiente lema, nos muestra que esta relación es antisimétrica y entonces, induce una orientación asimétrica en  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$ .

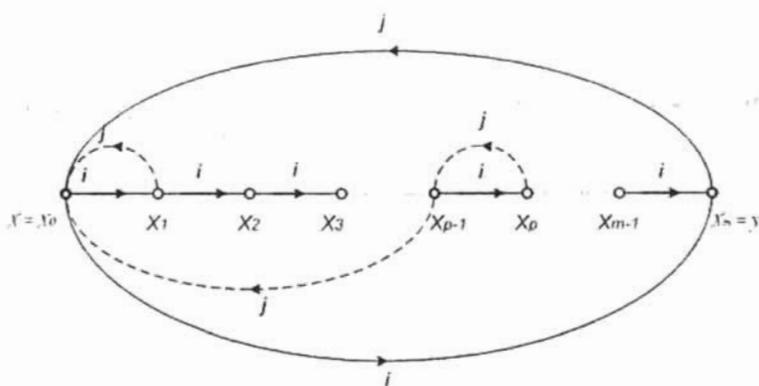
**Lema 3.17** Sea  $T = [V, F]$  un torneo  $k$ -coloreado y sea  $\mathcal{U} = (U_0, U_1, \dots, U_{k-1})$  un multitorneo mínimo obtenido del multitorneo asociado, sin 3-ciclos policromáticos. Entonces,  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es asimétrica.

Demostración.

Por reducción al absurdo supongamos lo contrario. Entonces, por el Lema 3.15, existen  $i \neq j$  y  $x \neq y \in V$  tales que  $x <_i y$  y  $y <_j x$ . Primero observemos que en éste caso  $x \not\prec_i y$  y  $y \not\prec_j x$ . En efecto, si por ejemplo,  $x \prec_i y$ , entonces podemos definir un multitorneo  $V = (V_0, V_1, \dots, V_{k-1})$  con  $V_i = [V, F(U_i) \setminus \{(x, y)\}]$  y  $V_l = U_l$  para  $l \neq i$ . Este nuevo multitorneo es completo (ya que  $y <_j x$ ) y cada  $V_l$  es transitivo (en efecto, puesto que  $x \prec_i y$ , se sigue que  $(x, y) \in F(U_i)$  y no existe  $xy$ -tdm de color  $i$  en  $U_i$  por lo que  $U_i = V_i$  es transitivo.), lo cual contradice la minimalidad de  $\mathcal{U}$ . Consideremos la sucesión  $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$  con  $x_l \prec_i x_{l+1}$  para

$0 \leq l < m$ . Dado que  $x_m <_j x_0$ , podemos definir  $p$  como el mínimo índice tal que  $x_p <_j x_0$ . Por nuestra primera observación,  $p > 1$  (por reducción al absurdo; si  $p = 1$ , entonces  $x <_i x_1$  y  $x_1 <_j x$  pero además  $x <_i x_1$ , contradiciendo la primera observación) y  $x_p \not<_j x_{p-1}$  (análogamente; si  $x_p <_j x_{p-1}$ , como  $x_{p-1} <_i x_p$  y más aún  $x_{p-1} <_i x_p$ , se contradice de nuevo la primera observación). Además,  $x_{p-1} \not<_j x_0$  por la minimalidad de  $p$ .

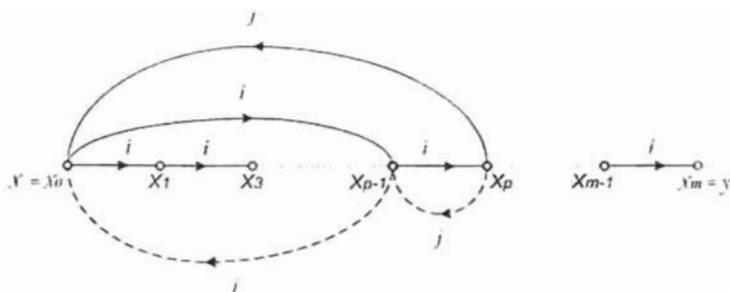
Obsérvese la siguiente figura.



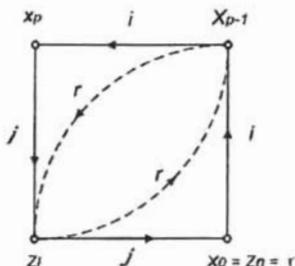
En resumen, tenemos:

- ▲  $x_0 <_i x_{p-1} <_i x_p$  (por la transitividad de  $U_i$ )
- ▲  $x_p <_j x_0$  (por definición de  $p$ )
- ▲  $x_p \not<_j x_{p-1} \not<_j x_0$  (por la primera observación y por la elección de  $p$ )

Obsérvese la siguiente figura.



De la misma manera, consideremos la sucesión  $x_p = z_0, \dots, z_n = x_0$  con  $z_l \prec_j z_{l+1}$  para  $0 \leq l < n$ . Para cada  $0 < l < n$  tenemos entonces que  $z_l \prec_j x_0 \prec_i x_{p-1}$  y  $x_{p-1} \prec_i x_p \prec_j z_l$ . Ahora, dado que cualquier 3-ciclo en  $\mathcal{U}$  es casimonocromático,  $z_l$  y  $x_{p-1}$  son incomparables en  $U_r$  para  $r \in \{0, 1, \dots, k-1\} \setminus \{i, j\}$  (Ya que de no ser así se tendría que  $(x_{p-1}, x_p, z_l, x_{p-1})$  ó  $(x_{p-1}, z_l, z_n, x_{p-1})$  es un 3-ciclos policromático en  $\mathcal{U}$ ). Obsérvese la siguiente figura.



Ahora, recordemos que  $x_p \not\prec_j x_{p-1} \not\prec_j x_0$ , y entonces  $z_l$  y  $x_{p-1}$  son incomparables en  $U_j$ . Se sigue que  $z_l \prec_i x_{p-1}$  ó  $x_{p-1} \prec_i z_l$ . Finalmente, como  $z_n \prec_i x_{p-1} \prec_i z_0$ , existe un  $0 \leq l < n$  tal que  $z_{l+1} \prec_i x_{p-1} \prec_i z_l$ . En efecto, consideremos el siguiente razonamiento:

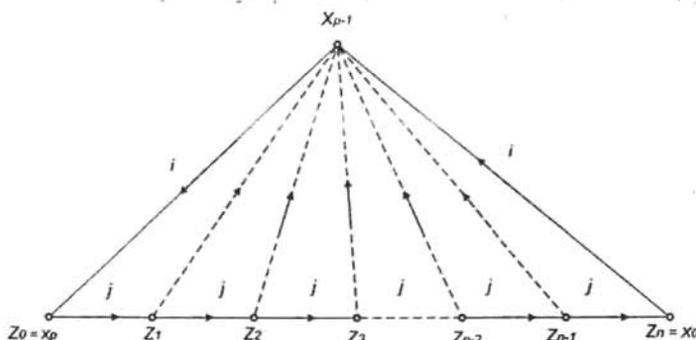
Si  $x_{p-1} \prec_i z_{n-1}$ , entonces claramente  $z_n \prec_i x_{p-1} \prec_i z_{n-1}$ .

Supongamos que  $z_{n-1} <_i x_{p-1}$ . Si  $x_{p-1} <_i z_{n-2}$ , entonces  $z_{n-1} <_i x_{p-1} <_i z_{n-2}$ .

Supongamos que  $z_{n-2} <_i x_{p-1}$ . Si  $x_{p-1} <_i z_{n-3}$ , entonces  $z_{n-2} <_i x_{p-1} <_i z_{n-3}$ .

Supongamos que  $z_{n-3} <_i x_{p-1}$ . Si  $x_{p-1} <_i z_{n-4}$ , entonces  $z_{n-3} <_i x_{p-1} <_i z_{n-4}$ .

Si al continuar de ésta manera obtenemos que  $z_k <_i x_{p-1}$  para cada  $k$  tal que  $1 \leq k \leq n-1$ , entonces es claro que  $z_1 <_i x_{p-1} <_i z_0$ . Obsérvese la siguiente figura.



En consecuencia,  $z_{l+1} <_i z_l$ , lo cual contradice nuestra primera observación (ya que como  $z_l <_i z_{l+1}$ , entonces  $z_l <_j z_{l+1}$ ).

Por lo tanto, la relación  $\leq$  es antisimétrica y entonces, induce una orientación asimétrica en  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$ . ■

Ahora ya podemos demostrar el siguiente teorema que es el resultado principal de la aproximación por multitorneos.

**Teorema 3.18** Sea  $T = [V, F]$  un torneo  $k$ -coloreado y sea  $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_{k-1})$  un multitorneo mínimo obtenido del multitorneo asociado. Si  $\mathcal{U}$  no contiene 3-ciclos policromáticos, entonces la digráfica  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es un orden total cuyo máximo es un vértice absorbente de  $T$ .

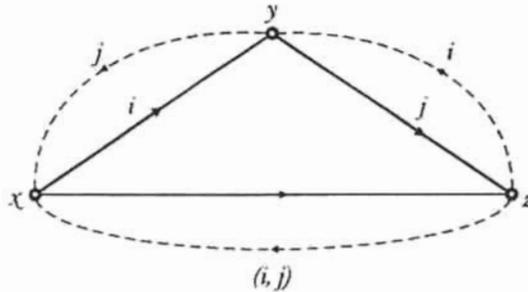
Demostración:

Para completar la prueba de este teorema, es suficiente demostrar que la digráfica  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es transitiva con la relación  $x \leq y$  si y sólo si  $x = y$  ó  $x <_i y$  para alguna  $U_i$  (claramente es reflexiva y por el Lema 3.17 es asimétrica). Pero ésto es una consecuencia inmediata de la ausencia de 3-ciclos policromáticos en  $\mathcal{U}$  y de la asimetría de  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$ . En efecto, sean  $x, y, z \in V$  y supongamos que  $x <_i y$  y  $y <_j z$ . Entonces, tenemos que  $x \rightarrow^i y$  y  $y \rightarrow^j z$  para algunas componentes  $U_i$  y  $U_j$ . Ahora, observemos que no existen flechas de  $x$  a  $z$ , ya que si  $x \rightarrow z$  en  $\cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)$ , entonces esta no puede ser de color  $k$  diferente de  $i$  y de  $j$ , pues  $\mathcal{U}$  no contiene 3-ciclos policromáticos. Debido a esto, tenemos los siguientes casos:

1) Si  $z \rightarrow^i x$ , entonces tenemos que  $z \rightarrow^i y$  (por la transitividad de  $U_i$ ), contradiciendo que  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es asimétrica.

2) Si  $z \rightarrow^j x$ , entonces tenemos que  $y \rightarrow^j x$  (por la transitividad de  $U_j$ ), contradiciendo que  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es asimétrica.

Por lo tanto, por la completéz de  $\mathcal{U}$  sólo nos queda que  $x \rightarrow z$ , y entonces  $x < z$ . Obsérvese la siguiente figura.



Así, la relación  $\leq$  es un orden parcial en la digráfica  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$ , y como además es completa, entonces dicha digráfica está totalmente ordenada y por tanto contiene un máximo que es un vértice absorbente de  $T$ . ■

Como el teorema anterior se verifica cuando existe al menos un multitorneo mínimo que no contiene 3-ciclos policromáticos, entonces es natural

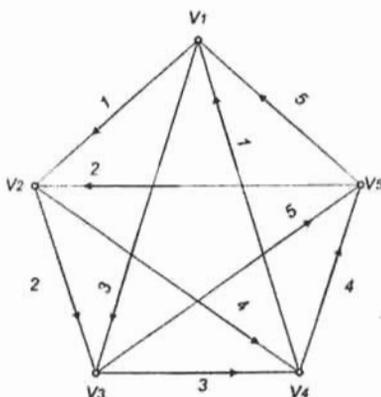
preguntarse: ¿Qué condiciones en un torneo  $T$  nos garantizan la ausencia de 3-ciclos policromáticos en algún multitorneo mínimo obtenido de su multitorneo asociado?. De aquí, la pertinencia de la siguiente pregunta:

¿Existe alguna relación entre la ausencia de ternas policromáticas ó más estrictamente entre la ausencia de 3-ciclos policromáticos en un torneo  $k$ -coloreado y la ausencia de 3-ciclos policromáticos en un multitorneo mínimo obtenido de su multitorneo asociado?. La misma pregunta puede ser formulada para torneos que satisfagan  $\mathcal{H}_s$ , donde  $s \geq 4$ . Con más precisión:

**Pregunta 3.** Dado  $s \geq 3$ , ¿Puede un torneo  $k$ -coloreado que satisfaga  $\mathcal{H}_s$  poseer un multitorneo mínimo sin 3-ciclos policromáticos?.

**Pregunta 4.** ¿Puede un torneo  $k$ -coloreado sin 3-ciclos policromáticos poseer un multitorneo mínimo sin 3-ciclos policromáticos?.

La respuesta a la Pregunta 4 es no para  $k \geq 5$ . En efecto, considérese el siguiente torneo 5-coloreado  $T$  que es el mismo de la Observación 2.9.



Claramente el torneo  $T$  no contiene 3-ciclos policromáticos ni vértices absorbentes. Además, por el Teorema 3.18, todo multitorneo mínimo obtenido del multitorneo asociado a  $T$ , contiene 3-ciclos policromáticos.

Por otro lado, es posible contruir torneos más grandes y con  $k > 5$  a partir de  $T$ , agregando vértices a  $T$  y conectando cada nuevo vértice a todos los

demás por medio de flechas de color  $i$  diferente de los colores anteriores. Los torneos así contruidos, tampoco contienen 3-ciclos policromáticos ni vértices absorbentes.

En la siguiente sección, daremos respuesta afirmativa a la Pregunta 3.

### 3.4. Segunda aproximación: Digráficas Subyacentes.

Si bien las definiciones de esta sección pueden extenderse fácilmente a digráficas y torneos infinitos, nosotros continuaremos considerando sólo los finitos. Sea  $D = [V, F]$  una digráfica  $k$ -coloreada. Para un vértice  $x$  de  $D$ , denotamos su exgrado por  $d_D(x)$  y  $d_D^i(x)$  es el número de flechas de color  $i$  de  $D$  que finalizan en  $x$ , es decir, su ingrado.

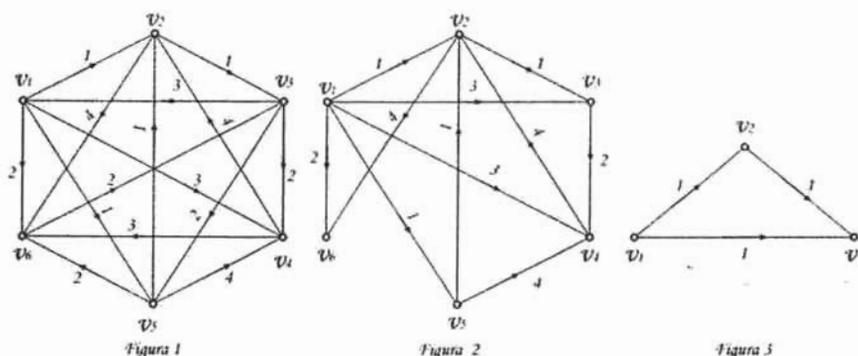
**Definición 3.19** Decimos que una flecha  $(x, y)$  de una digráfica  $k$ -coloreada  $D$  es **obligada** si y sólo si  $y \not\Rightarrow x$  (es decir, si no existen  $yx$ -tdm).

**Definición 3.20** La familia de flechas obligadas de una digráfica  $D$  es denotada por  $O(D)$  y definimos la **digráfica subyacente** de  $D$  como  $\tilde{D} = [V, O(D)]$ .  $O_i(D)$  denota el conjunto de flechas obligadas de la digráfica  $D$  de color  $i$ .

Primero observemos que la digráfica subyacente de una digráfica  $k$ -coloreada  $D = [V, F]$  es única ya que para cualquier  $(x, y) \in F$  se tienen las siguientes posibilidades: puede ser que  $y \Rightarrow^i x$  para al menos un color  $i$  (en cuyo caso  $(x, y) \notin O(D)$ ) ó bien  $(y \not\Rightarrow x)$  (en cuyo caso  $(x, y) \in O(D)$ ) y ambas son propiedades mutuamente excluyentes. También es pertinente notar que la digráfica subyacente de un torneo  $k$ -coloreado  $T$  no necesariamente es completa.

Por otro lado, es muy importante destacar que en la definición de una flecha obligada en una digráfica  $k$ -coloreada  $D$ , no se hace mención a su coloración y en consecuencia podemos considerar la digráfica subyacente  $\tilde{D}$  con o sin su coloración, en cada caso así lo especificaremos. Con esto en mente, resulta claro que dado un torneo  $k$ -coloreado  $T$  si consideramos a  $\tilde{T}$  sin su coloración entonces, el calificativo de flechas *obligadas* proviene del hecho de que dichas flechas siempre permanecen en todo multitorneo mínimo  $\mathcal{U}$  del multitorneo

$\mathcal{T}$  asociado a  $T$ . En cambio, si tomamos en cuenta su coloración lo anterior es falso. Para aclarar esto último, considérese el siguiente ejemplo.



En la figura 1 se presenta un torneo  $T$  que es 4-coloreado, en la figura 2 tenemos su digráfica subyacente  $\tilde{T}$ . El lector puede comprobar fácilmente que la subdigráfica de  $T$  presentada en la figura 3, está contenida en todos los multitorneos mínimos  $\mathcal{U}$  del multitorneo  $\mathcal{T} = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ , debido a que por la construcción de  $T$ , las flechas  $v_1 \rightarrow^1 v_2$  y  $v_2 \rightarrow^1 v_3$  no pueden ser removidas sin que se pierda la completéz de  $\mathcal{U}$  y entonces, la flecha  $v_1 \rightarrow^1 v_3$  tampoco puede quitarse ahora sin que se pierda la transitividad de la componente  $T_1$ . De manera que la flecha obligada  $v_1 \rightarrow^3 v_3$  puede eliminarse sin que se pierda ni la completéz de  $\mathcal{U}$ , ni la transitividad de la componente  $T_3$ . Por lo tanto, ningún multitorneo mínimo  $\mathcal{U}$  contiene a la flecha obligada  $v_1 \rightarrow^3 v_3$ , de donde  $\tilde{T} \not\subseteq \mathcal{U}$ .

**Definición 3.21** Sea  $D$  una digráfica  $k$ -coloreada y sean  $x, y, z \in V$ . Decimos que  $D$  es *semitransitiva*, si para  $i \neq j \in \{0, \dots, k-1\}$  tenemos que  $x \rightarrow^i y$  y  $y \rightarrow^j z$ , entonces existe  $x \rightarrow z$ .

Esta noción y el Lema 3.22 son inspirados por el argumento principal del Teorema 3.2(1) y del Teorema 3.3.

Es conveniente para el lector recordar que una digráfica es *casimonocromática* si a lo más una de sus flechas tiene un color diferente de las demás, que

una digráfica es *policromática* si al menos tres colores aparecen en sus flechas, así como las hipótesis  $\mathcal{H}_s$  siguientes:

**Hipótesis  $\mathcal{H}_s$ .**

♦  $\mathcal{H}_3$  es la hipótesis del Teorema 2.1 : Cualquier terna es casimonocromática.

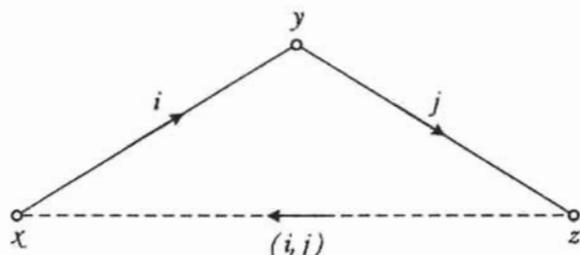
♦ Para cada  $s \geq 4$ , cada ciclo de longitud  $s$  es casimonocromático y ningún ciclo de longitud menor que  $s$  es policromático.

Ahora, podemos enunciar y demostrar el siguiente lema.

**Lema 3.22** *Si un torneo  $k$ -coloreado  $T$  satisface  $\mathcal{H}_s$  para alguna  $s \geq 3$ , entonces  $\tilde{T}$  es semitransitiva.*

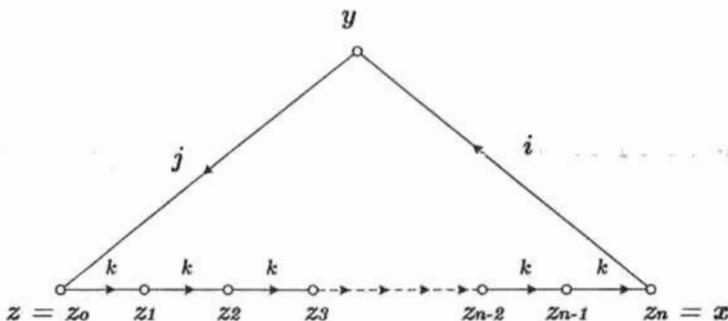
*Demostración.*

Consideremos dos colores diferentes  $i, j$  y tres vértices  $x, y, z$  tales que  $(x, y) \in O_i(T)$  y  $(y, z) \in O_j(T)$ . Primero, observemos que  $(z, x) \notin F(T)$ . En efecto, procediendo por reducción al absurdo, si  $(z, x) \in F(T)$  entonces, por la hipótesis  $\mathcal{H}_3$  se deduce que  $(z, x)$  tiene color  $i$  ó  $j$ . Si  $(z, x)$  es de color  $i$  entonces, la trayectoria  $(z, x, y)$  es una  $zy$ -tdm de color  $i$  en  $T$  y por lo tanto  $(y, z) \notin O_j(T)$ . Análogamente, si  $(z, x)$  tiene color  $j$  entonces, la trayectoria  $(y, z, x)$  es una  $yx$ -tdm de color  $j$  en  $T$  y por lo tanto  $(x, y) \notin O_i(T)$ . Considérese la siguiente figura.



Por lo tanto, es suficiente demostrar que  $z \not\Rightarrow x$ . Si no fuese así, en  $T$  existe una trayectoria dirigida monocromática  $z = z_0, z_1, \dots, z_n = x$  de color  $k$ . Como

las flechas  $(x, y)$  y  $(y, z)$  son obligadas, se deduce que  $k \neq i, j$ . En efecto, si  $k = i$ , entonces la trayectoria  $(z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = x, y)$  es una  $zy - tdm$  de color  $k$  contradiciendo el hecho de que  $(y, z) \in O_j(T)$ . Del mismo modo, observemos que si  $k = j$ , entonces la trayectoria  $(y, z = z_0, z_1, \dots, z_n = x)$  es una  $yx - tdm$  de color  $k$  contradiciendo ahora el hecho de que  $(x, y) \in O_i(T)$ . Observe la siguiente figura.



Además, observemos que para cada  $l$  tal que  $0 < l < n$ , la flecha en  $T$  entre  $y$  y  $z_l$  no es de color  $k$ . Ya que de no ser así, se tienen los dos casos siguientes:

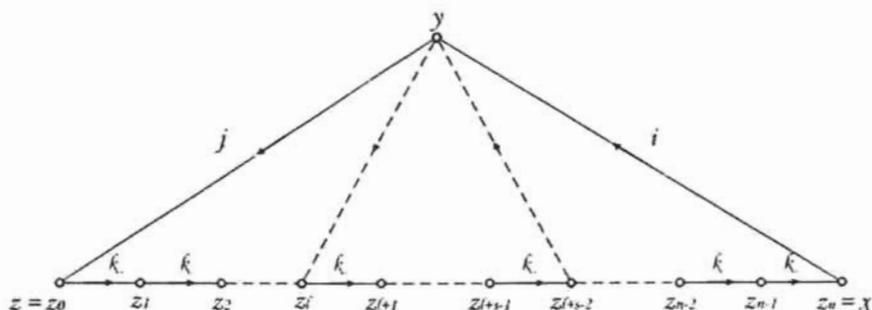
- i) Si  $y \rightarrow z_l$  y es de color  $k$ , entonces la trayectoria  $(y, z_l, z_{l+1}, \dots, z_n = x)$  es una  $yx - tdm$  de color  $k$  contradiciendo el hecho de que  $(x, y) \in O_i(T)$
- ii) Si  $z_l \rightarrow y$  y es de color  $k$ , entonces la trayectoria  $(z = z_0, z_1, \dots, z_l, y)$  es una  $zy - tdm$  de color  $k$  contradiciendo el hecho de que  $(y, z) \in O_j(T)$ .

De modo que  $(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, y, z_0)$  es un ciclo dirigido policromático de longitud  $n + 2$  y se tiene que  $n \geq s - 1$  ya que por la hipótesis  $\mathcal{H}_s$ , los ciclos de longitud menor que  $s$  no pueden ser policromáticos.

Supongamos primero que  $T$  satisface  $\mathcal{H}_3$ . Sea  $m$  el subíndice más grande para el cual la flecha en  $T$  entre  $y$  y  $z_m$  tiene color  $j$ . Como no existen ternas policromáticas en  $T$ , entonces la flecha entre  $y$  y  $z_{m+1}$  es de color  $j$  ó  $k$  pero ya vimos que no puede ser  $k$ . Esto contradice la maximalidad de  $m$ , de manera que  $z \not\rightarrow x$  y entonces  $(x, z) \in O(T)$ .

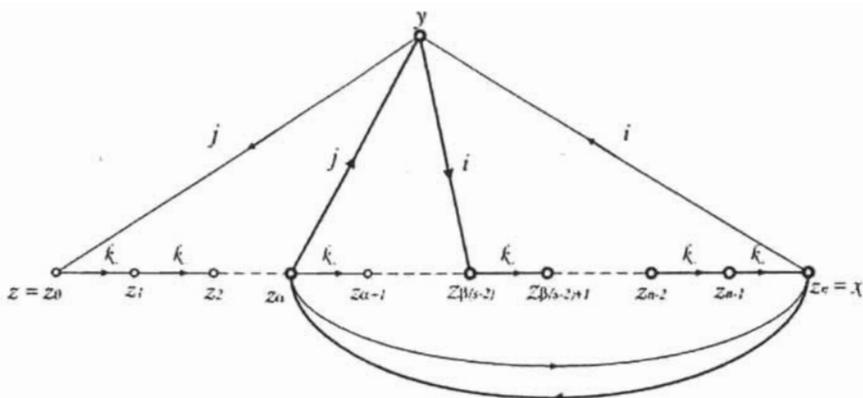
Supongamos ahora que  $T$  satisface  $\mathcal{H}_s$  con  $s \geq 4$ . Observemos que para  $l \in \{0, \dots, n - s + 2\}$  si  $y \rightarrow z_l$ , entonces  $y \rightarrow z_{l+s-2}$  y del mismo modo, si

$z_{l+s-2} \rightarrow y$  entonces  $z_l \rightarrow y$ . En efecto, ya que en caso contrario, es decir, cuando  $y \rightarrow z_l$  y  $z_{l+s-2} \rightarrow y$ , el ciclo dirigido  $(z_l, z_{l+1}, \dots, z_{l+s-2}, y, z_l)$  es de longitud  $s$  y contiene  $s-2 \geq 2$  flechas de color  $k$ . Como este ciclo debe ser casi-monocromático, entonces  $y \xrightarrow{k} z_l$  ó  $z_{l+s-2} \xrightarrow{k} y$ . Sin embargo, ya hemos visto que las flechas entre  $y$  y los vértices de la trayectoria dirigida monocromática  $(z_0, \dots, z_n)$  no son de color  $k$ . Obsérvese la siguiente figura.



Como  $y \rightarrow z_0$ , de la propiedad anterior se sigue que  $y \rightarrow z_l$  para  $l \cong 0 \pmod{s-2}$ . Como  $z_n \rightarrow y$ , se tiene que  $n \not\cong 0 \pmod{s-2}$ . En efecto, si  $n \cong 0 \pmod{s-2}$  entonces  $z_n \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z_n$  contradiciendo el hecho de que  $T$  es un torneo y así  $\tilde{T}$  es semitransitiva.

De manera que  $n = \alpha + \beta(s-2)$ , donde  $0 < \alpha < s-2$  y  $\beta > 0$ . Como  $z_n \rightarrow y$ , también se sigue que  $z_l \rightarrow y$  para cada  $l \in \{0, \dots, n\}$  tal que  $l \cong \alpha \pmod{s-2}$ . Debido a que  $(z_0, \dots, z_\alpha, y, z_0)$  es un ciclo de longitud  $\alpha+2 < s$ , no puede ser policromático y como  $z_\alpha \rightarrow y$  no es de color  $k$ , se sigue que  $z_\alpha \xrightarrow{j} y$ . De la misma manera, considerando en ciclo  $(z_{\beta(s-2)}, \dots, z_{\alpha+\beta(s-2)}, y, z_{\beta(s-2)})$ , tenemos que  $y \xrightarrow{i} z_{\beta(s-2)}$ . Obsérvese la siguiente figura.



Finalmente, si  $z_\alpha \rightarrow z_n$  (respectivamente, si  $z_n \rightarrow z_\alpha$ ), entonces  $(z_0, \dots, z_\alpha, z_n, y, z_0)$  (respectivamente,  $(z_{\beta(s-2)}, \dots, z_n, z_\alpha, y, z_{\beta(s-2)})$ ) es un ciclo policromático de longitud  $\alpha + 3 \leq s$ ; lo cual contradice la hipótesis  $\mathcal{H}_s$ . En consecuencia, tenemos que  $z \not\rightarrow x$  y por tanto  $(x, z) \in O(T)$  ■

Recordemos el siguiente teorema del primer capítulo:

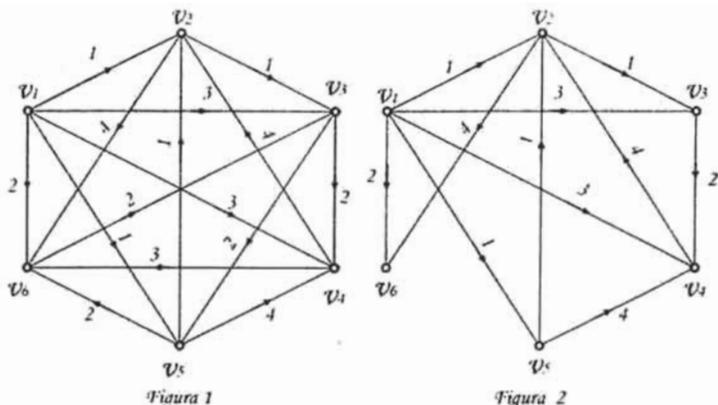
**Teorema 1.55** *Toda digráfica sin ciclos dirigidos contiene al menos un vértice de exgrado 0.*

Además, es claro que en un torneo  $T$ , un vértice  $x$  es absorbente si y sólo si  $d_{\vec{T}}(x) = 0$ .

De ambos hechos tenemos la siguiente observación.

**Observación 1** Si  $\tilde{T}$  es la digráfica subyacente de un torneo  $k$ -coloreado  $T$  y si  $\tilde{T}$  es acíclica, entonces  $T$  tiene un vértice absorbente.

Notemos que en la observación anterior, la condición de que  $\tilde{T}$  sea acíclica se refiere a la restricción más fuerte de que  $\tilde{T}$  sin su coloración no contiene ciclos dirigidos. En efecto, puede existir  $\tilde{T}$  sin ciclos dirigidos monocromáticos y sin embargo no ser acíclica. Considérese el siguiente ejemplo.



La figura 1 y la figura 2 muestran respectivamente un torneo y su digráfica subyacente en la que no existen ciclos dirigidos monocromáticos y sin embargo contiene el ciclo dirigido  $(v_2, v_3, v_4, v_2)$ .

El lema anterior y la Observación 1 permiten dar una prueba simple del siguiente teorema que es una generalización de los Teoremas 2.6 y 2.16.

**Teorema 3.23** *Todo torneo finito  $T$   $k$ -coloreado que satisfaga  $\mathcal{H}_s$  con  $s \geq 3$  contiene un vértice absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

*Demostración.*

Sea  $T$  un torneo finito que satisface  $\mathcal{H}_s$  con  $s \geq 3$ . Si  $\tilde{T}$  es acíclica por la observación 1 ya terminamos. Supongamos que la digráfica subyacente  $\tilde{T}$  no es acíclica. Entonces, cada ciclo en  $\tilde{T}$  de longitud mínima necesariamente es monocromático debido a la semitransitividad de  $\tilde{T}$  que es garantizada por el Lema 3.22. En efecto, sea  $\mathcal{C}$  un ciclo de longitud mínima contenido en  $\tilde{T}$ . Supongamos que  $\mathcal{C}$  no es monocromático, entonces existen  $(x, y) \in F(\mathcal{C})$  de color  $i$  y  $(y, z) \in F(\mathcal{C})$  de color  $j$  con  $i \neq j$ . Debido a la semitransitividad de  $\tilde{T}$ , existe  $(x, z) \in F(\tilde{T})$  de donde  $(x, z) \cup (z, \mathcal{C}, x)$  es un ciclo dirigido contenido en  $\tilde{T}$  de longitud menor que la de  $\mathcal{C}$ .

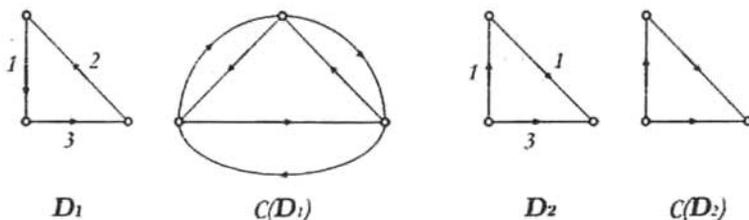
Al ser  $\mathcal{C}$  monocromático se tiene que ninguna de sus flechas es obligada lo cual contradice que  $\mathcal{C} \subseteq \tilde{T}$ . Por lo tanto,  $\tilde{T}$  es acíclica y entonces  $T$  contiene un vértice absorbente. ■

**Definición 3.24** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y denotemos con  $D^*$  a dicha digráfica sin su coloración, la **cerradura transitiva sin colores** de  $D$ , denotada por  $\mathcal{C}(D)$ , se define como la siguiente digráfica:

$$V(\mathcal{C}(D)) = V(D) \quad \text{y}$$

$$F(\mathcal{C}(D)) = F(D^*) \cup \left\{ (u, v) \mid \text{existe una } uv\text{-trayectoria dirigida en } D \right\}.$$

Observemos que  $\mathcal{C}(D)$  no contiene flechas múltiples pero puede contener flechas simétricas. Considérense los siguientes ejemplos.



El siguiente resultado relaciona nuestras dos aproximaciones para torneos finitos.

**Teorema 3.25** Dado un torneo  $k$ -coloreado  $T$ , su digráfica subyacente  $\tilde{T}$  es acíclica si y sólo si existe un multitorneo mínimo de  $T$  sin 3-ciclos policromáticos.

*Demostración.*

$\implies$  Supongamos primero que  $\tilde{T}$  es acíclica. Consideremos ahora  $\mathcal{C}(\tilde{T})$  (la cerradura transitiva de  $\tilde{T}$  sin su coloración). Afirmamos que  $\mathcal{C}(\tilde{T})$  es un conjunto parcialmente ordenado con el orden natural  $x = y$  ó bien  $x < y$  si  $x \rightarrow y$ . En efecto:

- 1) Claramente  $\mathcal{C}(\tilde{T})$  es reflexiva.
- 2) Veremos que  $\mathcal{C}(\tilde{T})$  es asimétrica.

Sean  $x, y \in V(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $x < y$ ,  $y < x$  y  $x \neq y$ . Entonces existen  $(x, y) \in F(\mathcal{C}(\tilde{T}))$  y  $(y, x) \in F(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ .

Observemos que no puede ser que  $(x, y) \in F(\tilde{T})$  y  $(y, x) \in F(\tilde{T})$  pues  $\tilde{T}$  es acíclica. Consideremos entonces los siguientes casos:

i)  $(x, y) \notin F(\tilde{T})$  pero  $(y, x) \in F(\tilde{T})$ . Como  $(x, y) \notin F(\tilde{T})$  entonces, existe una  $xy$ -trayectoria dirigida de longitud al menos 2 en  $\tilde{T}$ . Sea  $\alpha$  dicha trayectoria, entonces  $\alpha \cup (y, x)$  es un ciclo dirigido contenido en  $\tilde{T}$ . Contradiciendo que  $\tilde{T}$  es acíclica.

ii)  $(x, y) \in F(\tilde{T})$  pero  $(y, x) \notin F(\tilde{T})$ . Es completamente análogo a i).

iii)  $(x, y) \notin F(\tilde{T})$  y  $(y, x) \notin F(\tilde{T})$ . Entonces, existen  $\alpha_1$  una  $xy$ -trayectoria dirigida de longitud al menos 2 y  $\alpha_2$  una  $yx$ -trayectoria dirigida de longitud al menos 2, ambas en  $\tilde{T}$ . De donde,  $\alpha_1 \cup \alpha_2$  es un ciclo dirigido contenido en  $\tilde{T}$ , contradiciendo que  $\tilde{T}$  es acíclica.

3) La transitividad de  $\mathcal{C}(\tilde{T})$  es inmediata.

En efecto, supongamos que existen  $(x, y) \in F(\mathcal{C}(\tilde{T}))$  y  $(y, z) \in F(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ . Entonces, por definición de cerradura transitiva sin colores, en  $\tilde{T}$  existen  $t_1$  una  $xy$ -trayectoria dirigida y  $t_2$  una  $yz$ -trayectoria dirigida, por lo que  $t_1 \cup t_2$  es un  $xz$ -camino dirigido contenido en  $\tilde{T}$  el cual, por el Teorema 1.36 contiene una  $xz$ -trayectoria dirigida, esto es, existe  $(x, z) \in F(\mathcal{C}(\tilde{T}))$ .

Recordemos que todo orden parcial en un conjunto finito puede extenderse a un orden lineal ó total (es decir, un orden en el que cualesquiera dos elementos son comparables). De manera que podemos considerar una extensión lineal  $L$  de dicho orden natural; y más aún, podemos considerar a  $L$  como la digráfica asociada al orden total.

Por lo anterior, como  $\tilde{T}$  está parcialmente ordenado, podemos considerar una de sus extensiones lineales  $L$ . Ahora, considérese el multitorneo asociado  $\mathcal{T} = (T_0, \dots, T_{k-1})$ . Es claro que si consideramos al multitorneo  $\mathcal{T}$  sin su coloración, entonces tiene sentido la intersección  $F(T_i) \cap F(L)$  para toda  $i = 0, \dots, k-1$ .

Consideremos el multitorneo asociado  $\mathcal{T}$  sin su coloración, entonces podemos definir para cada color  $i$ , la digráfica  $V_i = [V, F(V_i)]$  donde  $F(V_i) = F(T_i) \cap F(L)$ . Con esta definición generamos la digráfica  $\mathcal{V} = (V_0, \dots, V_{k-1})$  donde  $F(\mathcal{V}) = \bigcup_{i=0}^{k-1} F(V_i)$ . Conviene hacer las siguientes observaciones:

(1) De la definición de  $F(V_i)$ , tenemos que  $F(\mathcal{V}) \subseteq F(\mathcal{T})$ , y esto significa que  $\mathcal{V}$  es obtenido de  $\mathcal{T}$  borrando algunas de sus flechas. Por la misma razón,

como  $L$  y cada  $T_i$  son transitivos,  $V_i$  también lo es.

(2) Puede ser que  $F(V_i) = F(T_i) \cap F(L) = \emptyset$  para alguna  $i = 0, \dots, k-1$ , pero no para toda  $i$ . En efecto, se verifica que  $F(L) \subset \cup_{i=0}^{k-1} F(V_i)$ .

Para probar esta contención, primero recordemos que para  $x, y \in V(T)$ ,  $x \not\rightarrow y$  si y sólo si  $(y, x) \in F(\tilde{T})$ . Si  $(x, y) \in F(L)$ , entonces  $(y, x) \notin F(L)$  (ya que  $L$  es un orden total) y entonces  $(y, x) \notin F(\tilde{T})$  (ya que  $\tilde{T} \subseteq L$ ). De aquí que  $x \Rightarrow y$ , y esto quiere decir que  $(x, y) \in F(T_i)$  para alguna  $i$ . Por lo tanto  $(x, y) \in F(T_i) \cap F(L)$  para alguna  $i$ , de donde  $F(L) \subseteq \cup_{i=0}^{k-1} F(V_i)$ .

(3) Se sigue claramente de la definición de  $F(V_i)$  que  $\cup_{i=0}^{k-1} F(V_i) \subseteq F(L)$ .

(4) De (2) y (3) tenemos que  $\cup_{i=0}^{k-1} F(V_i) = F(L)$ . Por lo tanto  $F(\mathcal{V}) = F(L)$ , lo cual implica que  $\mathcal{V}$  es completo, asimétrico y transitivo (con nuestro orden natural); es decir,  $\mathcal{V}$  sin su coloración es un torneo.

(5) De (4) se sigue que  $\mathcal{V}$  con su coloración es un multitorneo.

Por lo anterior se concluye que el multitorneo  $\mathcal{V}$  no contiene ciclos dirigidos, en particular, con su coloración  $\mathcal{V}$  no contiene 3-ciclos policromáticos. Para completar la demostración, es suficiente considerar cualquier multitorneo mínimo obtenido de  $\mathcal{V}$ . Por lo tanto, existe un multitorneo mínimo de  $\mathcal{T}$  sin 3-ciclos policromáticos.

$\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que existe un multitorneo mínimo de  $\mathcal{T}$  sin 3-ciclos policromáticos y consideremos a  $\tilde{T}$  sin su coloración. Se sigue inmediatamente de la definición de flechas obligadas que  $O(T) \subseteq \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)$  para cualquier multitorneo mínimo  $(U_0, \dots, U_{k-1})$ . Por el Teorema 3.18, si  $\mathcal{U} = (U_0, \dots, U_{k-1})$  es un multitorneo mínimo sin 3-ciclos policromáticos, entonces  $[V, \cup_{i=0}^{k-1} F(U_i)]$  es un orden total (y por tanto no contiene ciclos dirigidos) que contiene a  $\tilde{T}$  y en consecuencia,  $\tilde{T}$  es acíclica. ■

Finalmente, lo siguiente da respuesta a la Pregunta 3.

Primero observemos que si un torneo  $k$ -coloreado  $T$  satisface las hipótesis  $\mathcal{H}_s$ , entonces por el Lema 3.22 su digráfica subyacente  $\tilde{T}$  es acíclica.

Para demostrar lo anterior, consideremos un torneo finito  $T$  que satisface  $\mathcal{H}_s$  con  $s \geq 3$  y supongamos por reducción al absurdo que su digráfica subyacente  $\tilde{T}$  no es acíclica. Entonces, cada ciclo en  $\tilde{T}$  de longitud mínima necesariamente es monocromático debido a la semitransitividad de  $\tilde{T}$  (que es garantizada por el Lema 3.22). En efecto, sea  $\mathcal{C}$  un ciclo de longitud mínima contenido en  $\tilde{T}$  y supongamos (por reducción al absurdo) que  $\mathcal{C}$  no es

monocromático. Entonces, existen  $(x, y) \in F(\mathcal{C})$  de color  $i$  y  $(y, z) \in F(\mathcal{C})$  de color  $j$  con  $i \neq j$  por lo que además, debido a la semitransitividad de  $\tilde{T}$ , existe  $(x, z) \in F(\tilde{T})$ . De lo anterior, tenemos que  $(x, z) \cup (z, \mathcal{C}, x)$  es un ciclo dirigido contenido en  $\tilde{T}$  de longitud menor que la de  $\mathcal{C}$ , lo cual es una contradicción. Al ser  $\mathcal{C}$  monocromático, se tiene que ninguna de sus flechas es obligada contradiciendo el hecho de que  $\mathcal{C} \subseteq \tilde{T}$ . Por lo tanto,  $\tilde{T}$  es acíclica.

Entonces, (por el Teorema 3.25) existe un multitorneo mínimo del multitorneo asociado a  $T$  sin 3-ciclos policromáticos, lo que responde afirmativamente a la Pregunta 3.

### 3.5. Conclusiones.

Recordemos el problema planteado por Sands, Sauer y Woodrow en [2]:

¿Si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado que no contiene  $C_3$ , entonces contiene un vértice absorbente?

Si bien este problema sigue siendo abierto, nuestra primera aproximación (mediante multitorneos) permite concluir que bajo la misma condición ( es decir, no contener  $C_3$ ) aplicada a un multitorneo mínimo asociado al torneo, éste sí tiene un vértice absorbente. Por otro lado, nuestra segunda aproximación (usando digráficas subyacentes) hace de las condiciones del Teorema 3.23 una generalización de la cual, las condiciones de Shen Minggang (ver Teorema 2.6) y la condición de Hortensia Galeana (ver Teorema 2.16) son casos particulares y además nos permite dar una demostración elegante de ambos resultados.



# Bibliografía

- [1] M.Behzad, G.Chartrand, L.Lesniak-Foster, *Graphs and Digraphs*, Belmont California, Wadsworth 1979.
- [2] B.Sands, N.Sauer, R.Woodrow, *On Monochromatic Paths in edge-Coloured Digraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33(1982), 271-275.
- [3] H.Galeana-Sánchez and R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge-coloured tournaments*, Preprint submitted to Discrete Mathematics, 2003.
- [4] Shen Minggang, *On Monochromatic Paths in m-Coloured Tournaments*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 45(1988), 108-111.
- [5] H. Galeana-Sánchez, *On Monochromatic Paths and Monochromatic Cycles in Edge Coloured Tournaments*, Discrete Mathematics 156(1996), 103-112.
- [6] G.Hahn, P.Ille, R.Woodrow, *Absorbing Sets in arc-Coloured Tournaments*, Preprint submitted to Discrete Mathematics, 2002.
- [7] H.Galeana Sánchez and V.Neuman-Lara, *On Kernel-Perfect Critical Digraphs*, Discrete Mathematics 59(1986), 257-265.
- [8] C.Berge and P.Duchet, *Recent Problems and Results about Kernels in Directed Graphs*, Discrete Mathematics 86(1990), 27-31.
- [9] H.Galeana-Sánchez and S.Rajsbaum, *Cycle Pancyclism in Tournaments III*, submitted.